سوال:

- تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. اگر داشته باشیم:

$$T\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \text{ and } T\left(\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\-5\\1\end{bmatrix}$$

آنگاه:

الف) ماتریس استاندارد تبدیل T را بدست آورید. ($T(x) = Ax$)

ب) رنک و $nullity$ تبدیل T را بدست آورید.

پاسخ:

- الف) برای اینکه ماتریس استاندارد این تبدیل را بدست آوریم، کافی است تبدیل یافته پایه استاندارد $\mathbb{R}^2$ را بدست آوریم. داریم:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$
$$A = [T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2)]$$

حال برای اینکه $T(e1)$ را محاسبه کنیم، ابتدا باید e_1 را برحسب ترکیب خطی ای از وکتور های $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ بنویسیم:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix}3 & 4\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

از آنجا که دترمینان این ماتریس مخالف 0 است، پس به راحتی با ضرب کردن در معکوس آن، دستگاه بالا را حل می کنیم:

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 4\\2 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -4\\-2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$$

بنابراین $a = 3, b = -1$.

به طور مشابه برای $T(e_2)$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix}3 & 4\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 4\\2 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -4\\-2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}$$

پس $c = -4, d = 3$.

پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) \quad &= T\left(3\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\right) \\ &= 3T\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right) - 2T\left(\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\right) \qquad \text{by linearity of } T \\ &= 3\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}0\\-5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\16\\7\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_2) \quad &= T\left(-4\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\right) \\ &= -4T\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right) + 3T\left(\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\right) \qquad \text{by linearity of } T \\ &= -4\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\-5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-23\\-9\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$A = [T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix}3 & -4\\16 & -23\\7 & -9\end{bmatrix}$$

ب) می دانیم که $nullity$ و $rank$ یک تبدیل برابر مقدار آن ها برای ماتریس استاندارد آن تبدیل است. پس کافی است این مقادیر را برای ماتریس A بدست آوریم.

$$A = \begin{bmatrix}3 & -4\\16 & -23\\7 & -9\end{bmatrix}.$$

برای بدست آوردن رنک داریم:

$$A = \begin{bmatrix}3 & -4\\16 & -23\\7 & -9\end{bmatrix} \overset{R_3-2R_1}{\rightarrow} \begin{bmatrix}3 & -4\\16 & -23\\1 & -1\end{bmatrix} \overset{R_1\leftrightarrow R_3}{\rightarrow} \begin{bmatrix}1 & -1\\16 & -23\\3 & -4\end{bmatrix}$$

$$\underset{R_3-3R_1}{\overset{R_2-16R_1}{\rightarrow}} \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & -7\\0 & -1\end{bmatrix} \overset{-R_3}{\rightarrow} \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & -7\\0 & 1\end{bmatrix} \underset{R_2+7R_3}{\overset{R_1+R_3}{\rightarrow}} \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \overset{R_2\leftrightarrow R_3}{\rightarrow} \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}.$$

از آنجا که فرم کاهش یافته آن فقط 2 ستون محوری دارد، پس رنک این تبدیل 2 خواهد بود و بر اساس قانون $rank - nullity$، $nullity$ این تبدیل 0 است.

$$\text{(rank of } A\text{)+(nullity of } A\text{)} = 2 \rightarrow nullity\ A = 0$$