جبرخطی کاربردی

نیمسال دوم ۹۸ـ۹۷

مدرس :دکتر امیر مزلقانی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات

تمرین چهارم (فضای برداری)

توجه !!!

- سوالات زیر مربوط به فصل چهارم درس جبر خطی کاربردی با موضوع (فضای برداری)می باشد که شامل ۱۹ سوال تئوری و ۲ سوال شبیه سازی است
- سوالات را به دقت و مطالعه و به صورت خوانا و مرتب بنویسید
- برای قسمت پیاده سازی گزارشی دقیق از عملکرد خود بنویسید.
- نمره ای که سوالات امتیازی دریافت می کنید فقط برای این سری تمرین در نظر گرفته می شود(در صورتی که از بقیه سوالات نمره کامل بگیرید حل سوال امتیازی تغییری در نمره شما ایجاد نمی کند.)
- در صورت وجود هرگونه مشکل یا ابهام در ارتباط با سوالات از طریق

$ala.spring2019@gmail.com$

با رعایت مواردی که در قوانین ارسال تمارین آماده است سوال خود را بپرسید.

- پاسخ های خود را در قالب یک فایل zip به صورت الگوی زیر آپلود کنید:

9531000_Steve_ McManaman_HW4.zip

- مهلت ارسال این تمرین ساعت ۲۳:۵۵ روز جمعه ۹۸/۰۲/۱۳ می باشد.

تمارین:

۱. سه بردار وابسته خطی بیابید که دو به دو مستقل خطی باشند

حل.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

▶

۲. فضای $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید زیرمجموعه ای از این فضا را مثال بزنید که :

(آ) تحت ضرب عدد ثابت بسته نباشد اما تحت جمع بسته باشد .

(ب) تحت جمع بسته نباشد اما تحت ضرب عدد ثابت بسته باشد .

حل. (آ) تمامی بردار های با نقطه شروع مبدا در ناحیه اول

(ب) تمامی بردار های با نقطه شروع مبدا در ناحیه اول و سوم

▶

۳. تمامی چند جمله های حداکثر از درجه n با ضرایب حقیقی را با نماد $\mathbb{P}_n[x]$ نشان می دهیم و همچنین مجموعه تمام چند جمله ها با ضرایب حقیقی را با $\mathbb{P}[x]$ نشان می دهیم

۱. نشان دهید اگر $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$ یک پایه برای $\mathbb{P}_n[x]$ باشد ، $\{1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}\}$ نیز یک پایه برای آن است .

۲. مختصات $f(x) = a_0 + a_1 x + + a_{n-1} x^{n-1}$ را تحت $\{1, (x-a), (x-a)2, , (x-a)^{n-1}\}$ بیابید .

۳. نشان دهید $\mathbb{P}_n[x]$ یک زیر فضای $\mathbb{P}[x]$ است . آیا $\mathbb{P}[x]$ فضای متنهای البعد است ؟ توضیح دهید .

حل. ۱. برای آنکه نشان دهیم $\{1, x, \cdots, x^{n-1}\}$ یک پایه است . $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}$ را اعدادی قرار می دهیم به طوری که :

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_{n-1} x^{n-1} = 0$$

با قرار دادن $x = 0$ داریم $\lambda_0 = 0$ به طریق مشابه با فاکتور گرفتن x $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ بنابراین : این مجموعه مستقل خطی است و به تبع آن پایه نیز هست (چرا؟) به طریق مشابه برای $x = x - a$ نیز اثبات می شود (در حالت کلی تر در روند اثبات $x = a$ قرار می گیرد.)

۲. ضرایب $n - 1$ جمله ی اول بسط تیلور $f(x)$

$$\left(f(a), \frac{f'(a)}{1!}, \cdots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\right)$$

۳. پایه فضای $\mathbb{P}_n[x]$ زیر مجموعه ی فضای $\mathbb{P}[x]$ است پس هر بردار که پایه های فضای $\mathbb{P}_n[x]$ بسازند در $\mathbb{P}[x]$ وجود دارد . پس $\mathbb{P}_n[x]$ زیر فضایی از $\mathbb{P}[x]$ است . (سه شرط زیر فضا را بررسی کنید) همچنین بعد پایه ی $\mathbb{P}[x]$ بی نهایت است پس این فضا متنهی البعد نیست !

▶

۴. A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $m \times q$ است. نشان دهید که جملات زیر هم ارز یکدیگرند :

(آ) $Col(A) \subseteq Col(B)$

(ب) ستون های A ترکیب خطی از ستون های B هستند.

(ج) $A = BC$ برای برخی ماتریس های $C_{q\times p}$

همچنین نشان دهید $ker(A) \subseteq ker(A^2)$ وبرای ماتریس $m \times n$ ، A اگر $m < n$ باشد آنگاه $ker(A) \neq 0$.

حل. (آ) طبق قسمت ج $A = BC$ می باشد که می توانیم به صورت زیر باز نویسی کنیم :

$$A_i = BC_i = (B_1, \cdots, B_q)C_i \quad for\, each\, i = 1, 2, \cdots, p$$

که یعنی ستون های A (A_i ها) ترکیب خطی ستون های B می باشند در نتیجه هر تر کیب خطی از A ترکیب خطی از B نیز می باشد در نتیجه $Col(A) \subseteq Col(B)$

(ب) از آنجایی که $Col(A) \subseteq Col(B)$ است پس تمام بردار های ستونی A در $Col(B)$ موجود می باشد و $Col(B)$ توسط ستون های span B می شوند. در نتیجه تمام ستون های A ترکیب خطی از ستون های B می باشند.

(ج) طبق ب می دانیم ستون های A ترکیب خطی از ستون های B می باشند در نتیجه می توان A را یه صورت زیر نوشت:

$$for\ scalars\ \ c_{st} \quad s = ۱, \cdots, q \quad t = ۱, \cdots, q \quad A = c_{۱i}B + \cdots + c_{qi}B$$

اگر ماتریس C را به صورت c_{st} تعریف کنیم معادله ی بالا به صورت زیر قابل بازنویسی می باشد.
$A = BC$

اگر $Ax = ۰$ باشد آنگاه با ضرب ماتریس A از چپ داریم $A^۲x = ۰$ پس هر بردار x که در $ker(A)$ باشد در $ker(A^۲)$ نیز هست.

اگر $m < n$ پس $dim\big(Col(A)\big) \leq m < n$ و $dim\big(Null(A)\big) = n - dim\big(Col(A)\big)$ ▶

۵. A را به گونه ای بیابید که مجموعه داده شده زیر همان $Col(A)$ باشد.

$$\left\{ \begin{bmatrix} ۲s + ۳t \\ r + s - ۲t \\ r + s - ۲t \\ ۴r + s \\ ۳r - s - t \end{bmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

حل. به صورت روبرو بازنویسی می کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۴ \\ ۳ \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \\ -۲ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۲ \\ ۱ & ۱ & -۲ \\ ۴ & ۱ & ۰ \\ ۳ & -۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

که r, s, t هر عدد حقیقی ای میتوانند باشند پس مجموعه به صورت فضای ستونی A است زمانی که A به صورت مقابل باشد.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۲ \\ ۱ & ۱ & -۲ \\ ۴ & ۱ & ۰ \\ ۳ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

▶

۶. تبدیل خطی $T : V \to W$ را داریم.(V وW فضای برداری هستند) U یک زیر فضااز V است که $T(U)$ بیانگر مجموعه تصاویر $T(X)$ است که x در U می باشد. نشان دهید که $T(U)$ یک زیر فضا از W است .

حل. چون U زیرفضایی از V میباشد O_v درU نیز میباشد از آنجایی که تبدیل T خطی است داریم $T(O_v) = O_w$ در نتیجه O_w در $T(v)$ میباشد. اگر $T(x)$ و $T(y)$ اجزای $T(v)$ باشند آنگاه x وy نیز عضو U هستند. از آنجایی که U زیرفضای V است داریم : $x + y \in U$ به دلیل خطی بودن تبدیل داریم : $T(x) + T(y) = T(x) + T(y)$ پس $T(x) + T(y)$نیز عضوی از $T(v)$ هستند و $T(v)$نسبت به جمع بردارها بسته است. x عضوی از V است پس Cx که C یک عدد ثابت است نیز عضو U میباشد. و از آنجاییکه تبدیل خطی است داریم $T(Cx) = CT(x)$ و نیز $CT(x)$ نیز در $T(v)$است. پس $T(v)$تحت ضرب عدد ثابت بسته است و $T(v)$ یک زیرفضا از W است.

▶

۷. فرض کنید $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^۴ | x_۳ = x_۱ + x_۲, x_۴ = x_۱ - x_۲ \right\}$

(آ) ثابت کنیدWزیر فضایی از $\mathbb{R}$ است .

(ب) پایه ای برایWبیابید. بعدW چیست.

(ج) ثابت کنید $\{k(۱, ۰, ۱, ۱)^t | k \in \mathbb{R}\}$ زیر فضایی ازWاست .

حل. (آ) فرض کنید $u = (x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)$ و $v = (y_۱, y_۲, y_۳, y_۴)$عضو wباشند. باید ثابت کنیم به ازای هر اسکالر c، $cu + v$ عضو w است.

$$cu + v = (cx_۱ + y_۱, cx_۲ + y_۲, cx_۳ + y_۳, x_۴ + y_۴)$$

$$cx_۳ + y_۳ = c(x_۱ + x_۲) + (y_۱ + y_۲) = (cx_۱ + y_۱) + (cx_۲ + y_۲)$$
$$cx_۴ + y_۴ = c(x_۱ - x_۲) + (y_۱ - y_۲) = (cx_۱ + y_۱) - (cx_۲ + y_۲)$$

پس $cu + v$عضو w است و w زیرفضایی از $\mathbb{C}^۴$ است.

(ب) $(۱, ۰, ۱, ۱)^t$ و $(۰, ۱, ۱, -۱)^t$ پایه ای برای W می سازند پس $dim(W) = ۲$

(ج) توجه کنید که $(۱, ۰, ۱, ۱)^t$ عضو W است .

►

۸. ثابت کنید هر تبدیل خطی یک به یک پوشا به شکل $T : V \to W$ هر پایه در V را به پایه اي در W می نگارد.

حل. فرض کنیم $v_۱, , v_n$ یک پایه برای V باشد. در این صورت این بردارها مستقل خطی هستند و هر بردار دیگر v نیز ترکیب خطی از بقیه بردار هاست. چون تابع یک به یک است می دانیم $T(m) = ۰$. از آنجا که تابع یک به یک است پس $m = ۰$. فرض کنید مجموعه مستقل خطی $v_۱, , v_n$ را تحت T نگاشت می کنیم. می خواهیم ثابت کنیم بردارهای نگاشت‌شده مستقل خطی هستند. پس داریم:

$$\alpha_۱ T(v_۱) + \alpha_۲ T(v_۲) + + \alpha_T(v_n) = ۰ \to T(\alpha_۱ v_۱ + \alpha ۲ v_۲ + + \alpha_n v_n) = ۰ \to \alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲ v_۲ + + \alpha_n v_n = ۰$$

چون v_iها مستقل خطی هستند پس:

$$\forall i \alpha_i = ۰$$

پس این بردارها مستقلند.

اثبات مولد بودن بردارها:

$$v = \alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲ v_۲ + + \alpha_n v_n T(v) = T(\alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲ v_۲ + + \alpha_n v_n) = \alpha_۱ T(v_۱) + + \alpha_n T(v_n)$$

►

۹. درستی یا نادرستی گزاره هاي زیر را مشخص کنید. A،B نشان دهنده ماتریس و r(A) نشان دهنده رنک ماتریس A است :

(آ) اگر $r(A) = r(B)$آن گاه $r(A^۲) = r(B^۲)$

(ب) $r(A - B) \le r(A) - r(B)$

(ج) اگر $r(AB) = ۰$ آنگاه $r(A) = ۰$ یا $r(B) = ۰$

حل. (آ) نادرست . مثال نقض:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

(ب) مثال قسمت قبل

(ج)

$$A = B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

▶

۱۰. نشان دهید ماتریس دارای رتبه ۱ است اگر و تنها اگر را بتوان به صورت $A = xy^t$ نوشت به طوری که xو y بردارهای ستونی باشند. (شرط دو طرفه است و هر دو طرف باید ثابت شود).

حل. فرض کنید ماتریس A دارای رنک ۱ باشد در این ضورت سطر های آن به شکل زیر هستند:

$$\begin{bmatrix} \alpha_۱ v \\ \alpha_۲ v \\ \vdots \\ \alpha_n v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_۱ \\ \alpha_۲ \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} \alpha_۱ \\ \alpha_۲ \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_۱ & v_۲ & \dots & v_n \end{bmatrix}$$

برای اثبات عکس قضیه نیز از تساوی بالا استفاده می کنیم و حکم ثابت می شود. ▶

۱۱. فرض کنید $\{a_۱, a_۲, ..., a_n\}$ پایه‌های فضای برداری با بعد باشند. نشان دهید $\{\lambda_۱ a_۱, \lambda_۲ a_۲, ..., \lambda_n a_n\}$ نیز به ازای اعداد غیر صفر $\{\lambda_۱, \lambda_۲, ..., \lambda_n\}$ پایه‌هایی برای فضای برداری هستند. اگر مختصات بردار تحت پایه‌های $\{a_۱, a_۲, ..., a_n\}$ برابر با $x = \{x_۱, x_۲, ..., x_n\}$ مختصات آن تحت پایه‌های $\{\lambda_۱ a_۱, \lambda_۲ a_۲, ..., \lambda_n a_n\}$ چه خواهد بود؟ مختصات بردار $w = a_۱ + a_۲ + ... + a_n$ تحت پایه‌های $\{a_۱, a_۲, ..., a_n\}$ و $\{\lambda_۱ a_۱, \lambda_۲ a_۲, ..., \lambda_n a_n\}$ چه خواهد بود؟

حل.
- کافی است ثابت کنیم $\lambda_۱ a_۱, \lambda_۲ a_۲, ..., \lambda_n a_n$ مستقل خطی هستند. فرض کنید $I_۱, I_۲, ..., I_n$ مقادیر عددی باشند به طوری که :

$$I_۱(\lambda_۱ a_۱) + ... + I_n(\lambda_n a_n) = (I_۱\lambda_۱)a_۱ + ... + (I_n\lambda_n)a_n = ۰$$

پس به ازای هر i داریم : $I_i\lambda_i = ۰$ در نتیجه به ازای هر i داریم : $I_i = ۰$ (با توجه به این که $\lambda_i \neq ۰$) پس ترکیب خطی α_i ها فقط در صورتی صفر می شود که ضرایب آن ها صفر باشند . پس مستقل خطی هستند .

- فرض کنید :

$$v = x_۱ a_۱ + ... + x_n a_n = (x_۱/\lambda_۱)(\lambda_۱ a_۱) + ... + (x_n/\lambda_n)(\lambda_n a_n)$$

پس مختصات با پایه های جدید برابر است با : $(x_۱/\lambda_۱), ..., (x_n/\lambda_n)$

- درست مانند قسمت قبل ،به ترتیب : $(۱, ۱, ..., ۱)$ و $(۱/\lambda_۱, ..., ۱/\lambda_n)$

▶

۱۲. فرض کنید $\{a_1, a_2, a_3\}$ پایه‌هایی برای فضای برداری R^3 باشند و $a_4 = -a_1 - a_2 - a_3$ نشان دهید می‌توان همه‌ی بردارهای در $\mathbb{R}^3$ را به فرم $v = xa_1 + ya_2 + za_3 + ta_4$ نوشت به طوری که x, y, z, t اعداد حقیقی متفاوت هستند و $x + y + z + t = 0$ حالا جواب خود را برای فضای برداری R^n تعمیم دهید.(فضای برداری بعدی)

حل. فرض کنید $v = m_1a_1 + m_2a_2 + m_3a_3$ و

$$x = m_1 + t$$

$$y = m_2 + t$$

$$z = /1/4(m_1 + m_2 + m_3)$$

پس $v = xa_1 + ya_2 + za_3 + ta_4$ حالا فرض کنید $v = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 + b_4a_4$ به صورتی که $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$
از آنجا که a_1, a_2, a_3 پایه هستند داریم :

$$b_1 - b_4 = m_1$$

$$b_2 - b_4 = m_2$$

$$b_3 - b_4 = m_3$$

یعنی داریم : $-4b_4 = m_1 + m_2 + m_3$ یعنی $b_4 = t$ از این رو :

$$b_1 = x$$

$$b_2 = y$$

$$b_3 = z$$

►

۱۳. (امتیازی) فرض کنید W_1, W_2 زیر فضا های فضای برداری V باشند، تعریف می کنیم :

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 | w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

.

۱. نشان دهید :

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_n = span(\bigcup_{i=1}^{n} W_i)$$

حل.

$$v \in W_1 + W_2 + \cdots + W_n \longleftrightarrow \exists\ w_1, w_2, \cdots, w_n \quad w_1 \in W_1, w_2 \in W_2, \cdots w_n \in W_n \quad v = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

$$\longleftrightarrow w_1, w_2, \cdots, w_n \in \bigcup_{i=1}^{n} W_i \longrightarrow w_1 + w_2 + \cdots + w_n \in span(\bigcup_{i=1}^{n} W_i) \longleftrightarrow v \in span(\bigcup_{i=1}^{n} W_i)$$

►

۲. نشان دهید $W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ زیر فضای V هستند و همچنین نشان دهید:

$$W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$$

.

حل. می دانیم $0 \in W_1, 0 \in W_2$ پس ۰ عضو $W_1 + W_2$ هست از سوی دیگر اگر $v_1 \in W_1 + W_2, v_2 \in W_1 + W_2$ باشد،آنگاه طبق تعریف داریم :

$$\exists w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \ \ v_1 = w_1 + w_2 \quad , \quad \exists w'_1 \in W_1, w'_2 \in W_2 \ \ v_2 = w'_1 + w'_2$$

در نتجه:

$$v_1 + v_2 = w_1 + w_2 + w'_1 + w'_2 = \underbrace{w_1 + w'_1}_{\in W_1} + \underbrace{w_2 + w'_2}_{\in W_2} \longrightarrow v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$$

همچنین باید ثابت کنیم اگر $v \in W_1 + W_2$ باشد آنگاه kv هم چنین است که k یک اسکالر است.

$$\exists w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \ \ v = w_1 + w_2 \longrightarrow kv = \underbrace{kw_1}_{\in W_1} + \underbrace{kw_2}_{\in W_2} \longrightarrow kv \in W_1 + W_2$$

پس $W_1 + W_2$ یک زیر فضای V است.

حال باید ثابت کنیم $W_1 \cap W_2$ زیر فضای V است. می دانیم صفر عضو هر دو زیر فضا است پس صفر در اشتراک آن ها نیز وجود دارد،حال باید ثابت می کنیم که :

$$v_1 \in W_1 \cap W_2, v_2 \in W_1 \cap W_2 \longrightarrow v_1 \in W_1 \wedge v_1 \in W_2, v_2 \in W_1, v_2 \in W_2$$

$$\longrightarrow v_1 + v_2 \in W_1 \wedge v_1 + v_2 \in W_2 \longrightarrow v_1 + v_2 \in W_1 \cap W_2$$

به همین شکل ثابت می شود ضرب یک اسکالر در اعصای $W_1 \cap W_2$ عضو $W_1 \cap W_2$ است پس زیر فضا بودن اشتراک دو زیر فضا نیز ثابت می شود.

اکنون باید ثابت کنیم رابطه بالا برقرار است بدیهی است که اشتراک دو زیر فضا زیر مجموعه اجتماع آن است (این رابطه برای هر دو مجموعه ای فارغ از زیر فضا بودن یا نبودن صادق است) کافی است ثابت کنیم:

$$W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$$

برای اثبات این موضوع از رابطه قسمت ۱ استفاده می کنیم، طبق قسمت ۱ می دانیم:

$$W_1 + W_2 = span(W_1 \cup W_2)$$

واضح است که اگر مجموعه ای به شکل A داشته باشیم آنگاه:

$$A \subseteq span(A)$$

زیرا :

$$span(A) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}, a_i \in A$$

و فرض کنید در هر مرحله $(\lambda_i = 1)$ و $(\lambda_j = 0, j \neq i)$ در این صورت $A \subseteq span(A)$. ◄

۳. نشان دهید :

$$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$$

.

حل. فرض کنیم :

$$diamW_1 = n, dimW_2 = m, dim(W_1 \cap W_2) = t$$

همچنین فرض کنید: $\{u_1, u_2, \cdots, u_t\}$ یک پایه برای $W_1 \cap W_2$ باشد،پس می توان آنرا به یک پایه $B_1 = \{u_1, u_2, \cdots, u_t, v_1, v_2, \cdots, v_{n-t}\}$ از W_1 و همچنین $B_2 = \{u_1, u_2, \cdots, u_t, w_1, w_2, \cdots, w_{m-t}\}$ از W_2 توسعه داد.ثابت می کنیم:

$$B = \{u_1, u_2, \cdots, u_t, v_1, v_2, \cdots, v_{n-t}, w_1, w_2, \cdots, w_{m-t}\}$$

یک پایه برای $W_۱+W_۲$ است.که رد این صورت حکم مسئله نیز ثابت می شود ،برای اثبات پایه بودن باید استقلال خطی و مولد بودن را ثابت می کنیم(مولد بودن یعنی ترکیب های خطی یک مجموعه تمامی اعضای آن مجموعه را تولید می کنند که در واقع بیانگر این است که اگر $if \quad A \subseteq B \rightarrow span(A) = B$ در بحث ما می گوییم بردار هایی مولد یک فضا یا زیر فضا هستند که تمامی اعضای آن ها را بتوان با ترکیب خطی این بردار ها تولید کرد.)
استقلال خطی :

$$\sum_{i=۱}^{t} \alpha_i u_i + \sum_{i=۱}^{n-t} \beta_i v_i + \sum_{i=۱}^{m-t} \gamma_i w_i = ۰ (\star) \longrightarrow \underbrace{\sum_{i=۱}^{t} \alpha_i u_i + \sum_{i=۱}^{n-t} \beta_i v_i}_{\in W_۱} = \underbrace{\sum_{i=۱}^{m-t} -\gamma_i w_i}_{\in W_۲}$$

$$\longrightarrow \sum_{i=۱}^{m-t} -\gamma_i w_i \in W_۱ \cap W_۲$$

پس وجود دارد $\mu_۱, \mu_۲, \cdots, \mu_t$ به طوری که:

$$\sum_{i=۱}^{m-t} -\gamma_i w_i = \sum_{i=۱}^{t} \mu_i u_i$$

$$\longrightarrow \sum_{i=۱}^{m-t} \gamma_i w_i + \sum_{i=۱}^{t} \mu_i u_i = ۰$$

چون ترکیب خطی فوق صفر ، μ_i ها ، w_i ها یک پایه برای $w_۲$ و ذا مستقل خطی هستند
پس : $\forall i \quad \gamma_i = ۰, \forall i \quad \mu_i = ۰$ با جایگذاری در $\star$ داریم :

$$\sum_{i=۱}^{t} u_i + \sum_{i=۱}^{n-t} = ۰$$

یعنی ترکیب خطی از اعضای پایه $W_۱$ صفر شده است ،پس :

$$\forall i \alpha_i = ۰, \forall i \beta_i = ۰$$

پس B مستقل خطی است.
مولد بودن: باید ثابت کنیم هر $w \in W_۱ + W_۲$ را می توان به صورت ترکیب خطی B نوشت.
می دانیم طبق تعریف :

$$\exists w'_۱ \in W_۱, w'_۲ \in W_۲ \quad w = w'_۱ + w'_۲$$

$$\longrightarrow w'_۱ = \alpha_۱ u_۱ + \alpha_۲ u_۲ + \cdots + \alpha_t u_t + \alpha_{t+۱} v_۱ + \alpha_{t+۲} v_۲ + \cdots + \alpha_n v_{n-t}$$

$$\longrightarrow w'_۲ = \beta_۱ u_۱ + \beta_۲ u_۲ + \cdots + \beta_t u_t + \beta_{t+۱} w_۱ + \beta_{t+۲} w_۲ + \cdots + \beta_m w_{m-t}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow w = w'_۱ + w'_۲ =& (\alpha_۱ + \beta_۱) u_۱ + (\alpha_۲ + \beta_۲) u_۲ + \cdots + (\alpha_t + \beta_t) u_t + \\ & \alpha_{t+۱} v_۱ + \alpha_{t+۲} v_۲ + \cdots + \alpha_n v_{n-t} + \beta_{t+۱} w_۱ + \beta_{t+۲} w_۲ + \cdots + \beta_m w_{m-t} \end{aligned}$$

پس توانستیم w را برحسب B بنویسیم و در نتیجه B مولد و مستقل خطی است و پایه است و حکم ثابت می شود. ◀

۴. نتیجه گیری قسمت ۲ را با استفاده از دو خط که از مبدا مختصات xy می گذرند توجیه کنید.

حل. فرض کنید دو خط متقاطع داریم که در یک نقطه مشترکند،خط اول را با $W_۱$ و خط دوم را با $W_۲$ نشان می دهیم. آنگاه : $W_۱ \cap W_۲$ یک نقطه خواهد بود،و $W_۱ \cup W_۲$ از خود این دو خط متقاطع تشکیل خواهد شد.در این صورت $W_۱ + W_۲$ صفحه گذرنده از این دو خط خواهد بود.که رابطه ۲ به وضوح با این فرضیات مشخص است. ◀

۵. درستی یا نادرستی تساوی زیر را بررسی کنید در صورت درست بودن اثبات و در صورت نادرست بودن مثال نقض بزنید:

$$W_3 \cap (W_1 + W_2) = (W_3 \cap W_1) + (W_3 \cap W_2)$$

.

حل. برای اینکه نشان دهیم این تساوی برقرار نیست،فرض می کنیم W_1, W_2, W_3 سه خط هستند که در مبدا مختصات مشترکند.مثلا فرض کنید W_1 محور x ها ، W_2 محور y ها و W_3 نیمساز ناحیه اول و سوم است، در این صورت $W_3 \cap (W_1 + W_2)$ یک خط خواهد بود ولی $(W_3 \cap W_1) + (W_3 \cap W_2)$ همان نقطه صفر خواهد بود پس مشاهده می کنید که تساوی برقرار نیست.

◀

۶. اگر $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ باشد آنگاه به $W_1 + W_2$ جمع مستقیم نیز می گویند و آن را با $W_1 \bigoplus W_2$ نشان می دهند،ثابت کنید اگر V_1 زیر فضایی از فضای برداری V باشد و اگر زیر فضای برداری یکتای V_2 موجود باشد که $V = V_1 \bigoplus V_2$ آنگاه $V_1 = V$.

حل. برای اثبات این سوال به برهان خلف فرض کنید $V_1 \neq V$ در این صورت $dimV_1 < dimV$ فرض کنید

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n\}$$

یک پایه برای V باشد،که $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in V_1$ (این موضوع ممکن است زیرا در واقع می توانیم یک پایه برای V_1 در نظر بگیریم و آن را به پایه ای از V گسترش دهیم.) فرض کینم $V_2 = span(\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n)$ و $V_3 = span(\alpha_{m+1} + \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ در این صورت V_2, V_3 با V_1 عضو مشتر ک ندارند که در این صورت $V = V_1 \bigoplus V_2$ و $V = V_1 \bigoplus V_3$ که $V_2 \neq V_3$ و این با یکتایی وجود عضوی مانند V_2 در تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم درست است.

◀

۱۴. (امتیازی) فرض کنید V فضای برداری و متناهی بعد باشد و V_1 و V_2 زیرفضاهایی از V باشند. اگر $dim(V_1 + V_2) = dim(V_1 \cap V_2) + 1$ ، ثابت کنید $V_1 + V_2$ یاV_1 است یا V_2 و همین طور $V_1 \cap V_2$ یا V_1 است یا V_2. به طور معادل، اگر V_1وV_2 زیرفضا باشند و اگر هیچ کدام دیگری را دربر نداشته باشد، آنگاه:

$$dim(V_1 + V_2) \geq dim(V_1 \cap V_2) + 1$$

حل. چون $V_1 + V_2 \supseteq V_1 \supseteq V_1 \cap V_2$ ، پس $dim(V_1 \cap V_2) \leq dim(V_1) \leq dim(V_1 + V_2)$. از فرض $dim(V_1+V_2) = dim(V_1 \cap V_2)+1$ نتیجه می گیریم که یا $dim(V_1) = dim(V_1 \cap V_2)$ یا $dim(V_1) = dim(V_1+V_2)$. از اولی نتیجه می شود $V_1 = V_1 \cap V_2$ پس $V_2 = V_1 + V_2$ و $V_1 \subseteq V_2$. از دومی نتیجه می شود $V_1 = V_1 + V_2$ پس $V_2 = V_1 \cap V_2$ و $V_2 \subseteq V_1$

◀

تمرین شبیه سازی و برنامه نویسی:
۱۵.

۱. پایه‌های فضای پوچ A را بدست آورید.

۲. پایه‌های فضای سطری A را بدست آورید.

۳. پایه‌های فضای ستونی A را بدست آورید به طوری که از بردارهای ستون‌های A تشکیل شده باشد.

۴. به ازای هر ستونی از ماتریس که در قسمت ۳ بدست نیامده، نشان دهید حاصل چه ترکیب خطی از بردارهای پایه فضای ستونی A است.(یعنی اگر $v-۱$ ها بردارهای پایه فضای ستونی A باشند و $k = \begin{bmatrix} v_۱ & v_۲ & v_۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ بردار های پایه به‌دست آمده در هر قسمت را، در سطر های جدا چاپ کنید.)

۱۶. مفهوم rank در طراحی سیستم های کنترلی مانند سیستم شاتل های فضایی نقش مهمی دارد.یک نمونه از سیستم های کنترلی که برای مدل کردن وضعیت فضا استفاده می شود به شرح زیر است.

$$x_(k+۱) = Ax_k + Bu_k \quad for \quad k = ۰, ۱, ...$$

که A یک ماتریس $n \times n$ و B یک ماتریس $n \times m$ است و $\{x_k\}$ دنباله ای از بردارهای وضعیت در R^n است که وضعیت سیستم را در زمان های گسسته نشان می دهد.و $\{u_k\}$ دنباله ای از ورودی ها است. اگر جفت ماتریس (A, B) قابل کنترل باشند آنگاه سیستم قابل کنترل است. یعنی از وضعیت ۰ به هروضعیتی در R^n با حداکثر n مرحله می توان آن را برد.
تعریف : به جفت ماتریس (A،B) قابل کنترل گفته می شود اگر

$$rank \begin{bmatrix} B & AB & A^۲B & ... & A^{n-۱}B \end{bmatrix}$$

باشد.
سوال: با استفاده از متلب بررسی کنید آیا جفت ماتریس زیر قابل کنترل هستند یا خیر.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱۳ & -۱۲/۳ & -۱/۵ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}$$