

کاربرد های جبر خطی

نیم سال دوم ۹۶-۹۷

مدرس: دکتر امیرمزلقانی



دانشکده ی مهندسی کامپیوتر

پاسخ تمرین سری ۴

توجه:

- پاسخ سوالات را به دقت از سولوشن که بر روی کانال قرار گرفته است بیابید و به طور کامل مطالعه کنید، برخی سوالات دارای پاسخ بدیهی بودند که صرفاً برای تمرین بیشتر در نظر گرفته شده بودند که از آوردن حل آن ها خودداری کردیم.

مسئله ۱. یکی از ماتریس های زیر را به اختیار انتخاب کنید ابتدا چند جمله ای سرشت نما را برای آن بیابید سپس مقدار ویژه و بردار های ویژه را برای آن مشخص کنید در نهایت صورت قطری شدن آن را قطری کنید.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

مسئله ۲. ۵ مورد از گزاره های زیر را به اختیار ثابت کنید:

۱. نشان دهید اگر λ مقدار ویژه ماتریس A باشد آنگاه λ^{-1} مقدار ویژه ماتریس A^{-1} است.

▶ حل. قسمت ۵.۱ سوال ۲۵.

۲. نشان دهید اگر $A^2 = 0$ آنگاه تنها مقدار ویژه A صفر است.

▶ حل. قسمت ۵.۱ سوال ۲۶.

۳. λ مقدار ویژه از A است اگر و فقط اگر مقدار ویژه ای از A^T باشد.

▶ حل. قسمت ۵.۱ سوال ۲۷.

نشان دهید A و A^T چند جمله ای سرشت نمای مشابه ای دارند.

▶ حل. قسمت ۵.۲ سوال ۲۰.

۵. با توجه به الگوریتم QR ثابت کنید اگر $A = QR$ باشد که Q معکوس پذیر است آنگاه A با $A_1 = RQ$ متشابه است.

▶ حل. قسمت ۵.۲ سوال ۲۳.

۶. فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد که $A^T = A$. نشان دهید اگر برای x های غیر صفری در \mathbb{C}^n ، $Ax = \lambda x$ باشد آنگاه λ حقیقی است و در واقع قسمت حقیقی x بردار ویژه A است.

▶ حل. قسمت ۵.۵ سوال ۲۴.

۷. برای بردار های u, v در \mathbb{R}^n ثابت کنید:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

▶ حل. قسمت ۶.۱ سوال ۲۴.

۸. اگر U, V دو ماتریس $n \times n$ متعامد باشند، نشان دهید UV نیز یک ماتریس متعامد است.

▶ حل. قسمت ۶.۲ سوال ۲۹.

مسئله ۳. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ باشد که مجموع درایه های تمام سطر های آن s باشد ثابت کنید s مقدار ویژه ای از A است.

حل. قسمت ۵.۱ سوال ۲۹

مسئله ۴. (سوال امتیازی) برای هر اسکالر a, b, c نشان دهید:

$$A = \begin{bmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

همگی متشابهند و اگر $BC = CB$ باشند آنگاه A دو مقدار ویژه صفر دارد.

مسئله ۵. (سوال امتیازی) اگر

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

باشد، A^2, A^6 را محاسبه کنید.

مسئله ۶. فرض کنید $\varepsilon = \{e_1, e_2, e_3\}$ پایه استاندارد برای \mathbb{R}^3 و $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ پایه ای برای فضای برداری

V باشد و $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد که:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_1)b_1 - (x_1 + x_2)b_2 + (x_1 - x_2)b_3$$

۱. $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ را محاسبه کنید.

۲. $[T(e_1)]_B, [T(e_2)]_B, [T(e_3)]_B$ را محاسبه کنید.

۳. ماتریس تبدیل T را تحت پایه های ε, B بیابید.

حل. قسمت ۵.۴ سوال ۳.

مسئله ۷. ثابت کنید مجموع درایه های روی قطر اصلی هر ماتریس قطری شدنی برابر است با مجموع مقادیر ویژه

آن ماتریس.

حل. قسمت ۵.۴ سوال ۲۵ و ۲۶.

مسئله ۸. یک دیگر از روش هایی زمانی که تقریبی از بردار ویژه در دسترس باشد می شود با آن مقادیر ویژه را

یافت روش خارج قسمت ریلی (quotient ayleighr) است.

مشاهده کردیم اگر $Ax = \lambda x$ آنگاه $x^T Ax = x^T(\lambda x) = \lambda(x^T x)$ و در این صورت خارج قسمت ریلی

$$R(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x}$$

برابر λ خواهد بود. اگر x به حد کافی به یک بردار ویژه λ نزدیک باشد آنگاه این خارج قسمت به λ نزدیک خواهد شد. زمانی که A متقارن باشد خارج قسمت ریلی $R(x_k) = (x_k^T Ax_k) / (x_k^T x_k)$ با دقتی دو برابر نسبت μ_k در روش توانی عمل خواهد کرد این موضوع را برای ماتریس و بردار اولیه زیر نشان دهید:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل. قسمت ۵.۸ سوال ۱۱.

مسئله ۹. (سوال امتیازی) اگر W یک زیر فضا از فضای ضرب داخلی V باشد، $u \in V$ را در نظر بگیرید نشان

دهید $v \in W$ تصویری از u بر روی W است به طوری که

$$u = v + v' \quad \text{for some } v' \in W^\perp$$

اگر و فقط اگر

$$\|u - v\| \leq \|u - w\| \quad , \quad \text{for every } w \in W$$

مسئله ۱۰. (سوال امتیازی) فرض کنید W_1, W_2 زیر فضایی از فضای ضرب داخلی V باشد آنگاه نشان دهید:

$$1. (W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$$

$$2. (W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$$

مسئله ۱۱. فرض کنید $y = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ و $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$ و $W = \text{span}\{u_1\}$.

$proj_W y, (UU^T)y$ را حساب کنید.

حل. قسمت ۶.۳ سوال ۱۱.

مسئله ۱۲. فرض کنید W زیر فضایی از \mathbb{R}^n با پایه متعامد $\{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ و همچنین فرض کنید $\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$

پایه ای متعامد برای W^\perp باشد.

۱. چرا $\{w_1, w_2, \dots, w_p, v_1, v_2, \dots, v_q\}$ یک پایه متعامد است؟

۲. چرا span مجموعه قسمت ۱ \mathbb{R}^n را تولید می کند؟

۳. نشان دهید $\dim W + \dim W^\perp = n$.

حل. قسمت ۶.۳ سوال ۲۴.

مسئله ۱۳. یکی از ماتریس های زیر را به اختیار انتخاب و برای فضایی ستونی آن یک پایه متعامد پیدا کنید:

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

حل. قسمت ۶.۴ سوال ۹ و ۱۲.

مسئله ۱۴. تمام جواب های کوچکترین مربعات را برای تساوی $Ax = b$ بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حل. قسمت ۶.۵ سوال ۵. ▶

مسئله ۱۵. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد که ستون هایش مستقل خطی هستند و $b \in \mathbb{R}^n$.

با استفاده از روش نرمال یک فرمول برای \hat{b} که تصویر b بر روی $Col A$ هست بیابید.

حل. قسمت ۶.۵ سوال ۲۳. ▶

مسئله ۱۶. نشان دهید اگر A یک ماتریس $n \times n$ مثبت معین باشد، آنگاه یک ماتریس مثبت معین $n \times n$ مانند B

وجود دارد که $A = BB^T$.

حل. قسمت ۷.۲ سوال ۲۵. ▶

مسئله ۱۷. ماتریس A را در نظر بگیرید، λ_1 بزرگترین مقدار ویژه آن و u_1 بردار ویژه یک متناظر با λ_1 است، ثابت

کنید بزرگترین مقدار $x^T Ax$ با توجه به قیود:

$$x^T x = 1, \quad x^T u_1 = 0$$

برابر λ_2 است که λ_2 دومین مقدار ویژه بزرگ A است. همچنین این بزرگترین مقدار زمانی اتفاق می افتد که x برابر u_2 که بردار ویژه یک متناظر با λ_2 است، باشد.

مسئله ۱۸. تجزیه SVD ماتریس زیر را به دست آورید. (راهنمایی: ماتریس $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ می تواند به

عنوان یک انتخاب برای U در نظر گرفته شود.)

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

حل. قسمت ۷.۴ سوال ۱۱. ▶

مسئله ۱۹. نشان دهید در یک ماتریس مربعی قدر مطلق دترمینان برابر حاصلضرب مقادیر تکین ماتریس است.

حل.

$$\det(A) = \det(U \sum V^T) = \det(U) \det(\sum) \det(V^T)$$

می دانیم $\det(U), \det(V^T)$ برابر ۱ یا -۱ است و همچنین چون \sum ماتریس قطری است که بر روی قطر آن مقدار ویژه منفرد هستند پس

$$|\det(A)| = |\det(\sum)| = \prod_i \sigma_i$$

►

★ سوالات زیر برای تمرین بیشتر در نظر گرفته شده است و به آن ها نمره ای تعلق نمی گیرد:

مسئله ۲۰. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۱. نشان دهید v_1, v_2, v_3 بردار ویژه های A هستند.

۲. فرض کنید x بردار برداری در \mathbb{R}^3 باشد که درایه های آن نامنفی باشند و مجموعشان ۱ باشد. ثابت کنید وجود دارد ثابت هایی مثل c_1, c_2, c_3 که $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$ باشد و همچنین $w^T x$ را محاسبه کنید و نتیجه بگیرید $c_1 = 1$.

۳. برای $k = 1, 2, \dots$ تعریف می کنیم $x_k = A^k x$ که x در قسمت (۲) معرفی شده است. نشان دهید $x_k \rightarrow v_1$ زمانی که k افزایش می یابد.

►

حل. قسمت ۵.۲ سوال ۲۷.

مسئله ۲۱. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ متقارن باشد، فرض x هر برداری در \mathbb{C}^n باشد و در نظر بگیرید

$$q = \bar{x}^T A x. \text{ تساوی های زیر نشان می دهند که } q = \bar{q}. \text{ هر کدام از تساوی ها را با ادله کافی توجیه کنید.}$$

$$\bar{q} = \overline{\bar{x}^T A x} = x^T \overline{A x} = x^T A \bar{x} = (x^T A \bar{x})^T = \bar{x}^T A^T x = q$$

►

حل. قسمت ۵.۵ سوال ۲۳.

مسئله ۲۲. $u \neq 0$ را در \mathbb{R}^n در نظر بگیرید، فرض کنید $L = \text{span}\{u\}$ برای هر y در \mathbb{R}^n تصویر y نسبت به L را

اینگونه تعریف می کنیم:

$$\text{refl}_L y = 2 \cdot \text{proj}_L y - y$$

نشان دهید $y \mapsto \text{refl}_L y$ یک تبدیل خطی است.

►

حل. قسمت ۶.۲ سوال ۳۴.

مسئله ۲۳. فرض کنید $A = QR$ یک تقسیم بندی QR برای ماتریس A باشد که ستون های آن مستقل خطی

هستند. A را به شکل $[A_1 \ A_2]$ می نویسیم که A_1 p ستون دارد. چگونه می توان یک تقسیم بندی QR برای A_1 یافت؟ توضیح دهید تقسیم بندی شما چگونه شرایط یک تقسیم بندی QR را حفظ می کند.

►

حل. قسمت ۶.۴ سوال ۲۳.