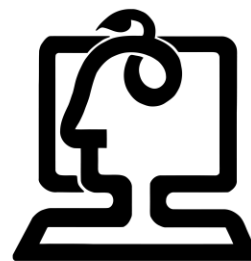




دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

به نام یزدان پاک



دانشکده مهندسی کامپیوتر

جبر خطی کاربردی

دکتر امیرمزلقانی

نیم سال دوم ۰۱ - ۰۰

تمرینات سری اول - فصل اول

پاسخ تمرین‌ها را به صورت خوانا و تمیز در قالب `HW?_Name_StudentNumber` (به عنوان مثال، `HW1_BardiaArdakanian_9831072`) نوشته و تا قبل از ددلاین در سامانه کورسز دانشگاه آپلود نمایید. در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل `ala.spring2022@gmail.com` در ارتباط باشید.

بخش تئوری

۱. ماتریس‌های زیر ماتریس افزوده سه دستگاه معادله خطی است، در هر مرحله پس از مشخص کردن جایگاه (درایه) و ستون محوری و با استفاده از روش کاهش سطری ماتریس‌ها را به شکل کاهش یافته سطری در بیاورید و سپس در مورد جواب دستگاه‌ها بحث کنید. (به عنوان مثال: دستگاه جواب ندارد/یک جواب دارد/بی‌نهایت جواب دارد. در صورت داشتن جواب عمومی، جواب‌ها را به صورت پارامتریک بنویسید).

$$a) \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۲. ثابت کنید دو ماتریس زیر هم ارز سطری نیستند. (a, b, c اعدادی دلخواه هستند)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

۳. برای g, h, k مقادیری تعیین کنید تا سیستم زیر:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & k & 1 \end{bmatrix}$$

الف) جواب یکتا داشته باشد.

ب) بی‌نهایت جواب داشته باشد.

ج) جواب نداشته باشد.

۴. تمام جواب‌های ممکن برای x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 از دستگاه معادلات زیر بیابید.

$$\begin{aligned} x_5 + x_2 &= yx_1 \\ x_1 + x_3 &= yx_2 \\ x_2 + x_4 &= yx_3 \\ x_3 + x_5 &= yx_4 \end{aligned}$$

$$x_4 + x_1 = yx_5$$

y یک پارامتر است.

۵. در مورد تعداد جواب‌های دستگاه معادلات زیر برای مقادیر مختلف a, b بحث کنید

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + 2x_3 &= 1 \\ ax_1 + (2b - 1)x_2 + 3x_3 &= 1 \\ ax_1 + bx_2 + (b + 3)x_3 &= 2b - 1 \end{aligned}$$

۶. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه دهید و در صورت درست بودن آن را اثبات کنید:

۱. اگر $v_i \in \mathbb{R}^n$ و $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک مجموعه وابسته خطی باشد، هریک از v_i ها را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از بقیه اعضا نوشت.
۲. اگر A زیر مجموعه‌هایی از بردارها در \mathbb{R}^n باشد به طوری که $A \subset \mathbb{R}^n$ و بردارهای عضو مجموعه A مستقل خطی باشند آنگاه $\text{span}(A) = \mathbb{R}^n$.
۳. اگر S مجموعه‌ای برداری باشد به صورتی که بردارهای داخل S مستقل خطی باشند و $v \in (\mathbb{R}^n - \text{span}(S))$ آنگاه $S \cup \{v\}$ نیز مستقل خطی است.
۴. بردارهای v_1, v_2, v_3 مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر بردارهای v_1 و $v_1 + v_2$ و $v_1 + v_2 + v_3$ از هم مستقل باشند.
۵. اگر یکی از سطرهای فرم پلکانی ماتریس افزوده‌ای $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، سیستم خطی متناظر با آن ناسازگار خواهد بود.
۶. ستون‌های ماتریس 4×5 مستقل خطی هستند.
۷. اگر بردارهای x, y, z, w در R^4 به گونه‌ای باشند که y ترکیب خطی از x, w, z نباشد آنگاه مجموعه $\{x, y, z, w\}$ مستقل خطی است.
۸. تبدیلی که هر بردار به شکل (x, y, z) در فضای R^3 را به صفحه $y = 0$ تصویر می‌کند، خطی نیست.

۷. فرض کنید $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی باشد نشان دهید اگر T دو بردار مستقل خطی را به یک مجموعه وابسته خطی نگاشت کند آنگاه $T(x) = 0$ جواب غیر بدیهی دارد.

۸. مشخص کنید هریک از تبدیلات زیر خطی هستند یا نه، در صورتی که خطی باشند ماتریس استاندارد آنها را نیز بیابید.

(الف)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \rightarrow (4x_1 - 2x_2, 3|x_2|)$$

(ب)

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \rightarrow (\sin(x_1), x_2)$$

(ج)

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$$

بخش پیاده‌سازی

پیشگفتار:

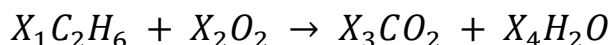
جهت پیاده‌سازی پروژه صفر و مابقی پروژه‌های درس می‌بایست از زبان برنامه نویسی پایتون (*python*) و کتابخانه‌های مختلف و کاربردی آن مانند نامپای (*numpy*) استفاده کنید.

- ❖ جهت آموزش پایتون، کتابخانه‌هایش ویدئوهایی در کانال تلگرامی درس قرار گرفته است.
 - ❖ در صورتی که قصد دارید به طور تخصصی‌تر زبان برنامه نویسی پایتون *python* را آموزش ببینید می‌توانید از [این لینک](#) استفاده کنید.
 - ❖ در صورتی که قصد دارید به طور تخصصی‌تر درباره کتابخانه نامپای *numpy* که یکی از کتابخانه‌های پرکاربرد پایتون می‌باشد مطالعه داشته باشید می‌توانید از [این لینک](#) استفاده کنید.
 - ❖ کد پایتون خود را به همراه عکس از خروجی برنامه در قالب یک فایل فشرده *zip* ارسال کنید. همچنین استفاده از [ژوپیتِر](#) برای اجرای مرحله به مرحله برنامه و دیدن نتایج آن توصیه می‌شود.
- شما می‌توانید از این منابع و یا هر منبع دیگری برای یادگیری پایتون و زدن پروژه استفاده کنید.
- توجه! در صورتی که پروژه را با هر زبان دیگری پیاده‌سازی کنید نمره پروژه را از دست می‌دهید.

شرح مسئله:

بعضا موازنه فرمول‌های شیمیایی به آسانی سوالات کنکور و قلمچی نیست و برای بدست آوردن موازنه شده یک ترکیب شیمیایی به کامپیوتر نیاز داریم. در این مسئله قصد داریم برنامه‌ای بنویسیم تا ترکیبات شیمیایی موازنه نشده را موازنه کند.

فرض کنید معادله ی شیمیایی پایین با ضرایب نامشخص x_1 تا x_4 را داریم:



برای موازنه کردن معادله فوق باید چندین مراحل با موفقیت به انجام برسند.

در ابتدا معادله‌ی برداری آن را بدست می‌آوریم:

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow C \\ \leftarrow H \\ \leftarrow O \end{matrix}$$

برای موازنه‌ی معادله نیاز است که ضرایب x_1 تا x_4 مشخص شوند. بدین منظور همه عبارات را در سمت چپ معادله قرار می‌دهیم و سپس فرم ماتریسی آن را تشکیل می‌دهیم:

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای حل این معادله‌ی همگن، در ابتدا آن را به فرم ماتریس افزوده می‌نویسیم و سپس آن را به فرم اشلون و اشلون کاهش یافته تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

توجه کنید باید فرم اشلون و اشلون کاهش یافته‌ی ماتریس را در خروجی چاپ کنید

با توجه به فرم کاهش یافته‌ی ماتریس، ضرایب هر یک از x_1 تا x_4 را بدست می‌آوریم:

$$x_1 = \frac{1}{3}x_4, \quad x_2 = \frac{7}{6}x_4, \quad x_3 = \frac{2}{3}x_4, \quad x_4 \text{ is Free}$$

از آنجا که مقدار ضرایب باید عدد صحیح باشد و x_4 نیز متغیر آزاد می‌باشد، باید کوچکترین مقدار صحیح را برای x_4 انتخاب کنیم، به گونه‌ای که مقدار سایر ضرایب نیز عدد صحیح شود. پس مقدار x_4 را برابر با ۶ قرار می‌دهیم.

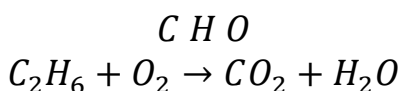
بدین شکل ترکیب شیمیایی ما با موفقیت موازنه شده است و به پاسخی که دنبالش بوده‌ایم رسیده‌ایم.

ورودی و خروجی برنامه:

در خط اول و دوم ورودی، به ترتیب نام عناصر ترکیب شیمیایی و معادله شیمیایی به برنامه داده می‌شود.

مثال:

ورودی:



در تنها خط خروجی می‌بایست ضریب x_1 تا x_n در کنسول چاپ شود.

خروجی:

$$x_1 = 2, x_2 = 7, x_3 = 4, x_4 = 6$$

برنامه‌ی شما علاوه بر خروجی نشان داده شده، باید فرم اشلون و اشلون کاهش یافته‌ی ماتریس را نیز نشان دهد.

نکات پیاده‌سازی:

- برای راحتی شما، نیازی به بدست آوردن ضرایب به صورت صحیح نمی‌باشد و ضرایب به صورت اعشاری نیز قابل قبول می‌باشد. همچنین تمام عناصری که به عنوان ورودی وارد می‌شوند، تک حرفی می‌باشند و معادلاتی مانند $Mg(OH)_2 + 2HNO_3 \rightarrow Mg(NO_3)_2 + 2H_2O$ که دارای پرانتز می‌باشد داده نمی‌شود.
- ورودی توضیح داده شده در شرح مسئله به صورت فایل متنی *txt* بارگذاری شده است.
- از خروجی برنامه خود با ورودی داده شده *screenshot* بگیرید و همراه با بقیه بخش‌های تکلیف آن را آپلود کنید.
- استفاده از کتابخانه‌های آماده‌ی پایتون برای حل معادله مجاز نمی‌باشد و تنها مجاز به استفاده از کتابخانه *numpy* می‌باشید.