دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

کاربرد های جبر خطی

نیم‌سال دوم ۹۷-۹۶

مدرس: دکتر امیرمزلقانی

فصل اول (معادلات خطی در جبر خطی)

توجه:

- این تمرین از مباحث مربوط به فصل اول (معادلات خطی در جبر خطی) طراحی شده است که شامل ۶ مساله و دو تمرین شبیه سازی می باشد.
- کلاس تدریسیار هفته آینده مربوط به رفع مشکلات این تمرین هست. ولی تا اون موقع اگه سوال داشتین از طریق

  $aut.la2018@gmail.com$

  حتما بپرسید.
- مساله ها را در یک فایل pdf و فایل کد های مربوط به تمرین های شبیه سازی و گزارش های آنها را به طور مجزا در یک پوشه قرار دهید.
- پاسخ های تمرین را در قالب یک فایل به صورت الگوی زیر آپلود کنید.

9531000_Gabriel_Batistuta_HW1.zip

- مهلت تحویل جمعه ۱۱ اسفند ۱۳۹۶ ساعت ۲۳:۵۴

مسئله‌ی ۱.

ماتریس های زیر متعلق ماتریس افزوده سه دستگاه معادله خطی است، در هرمرحله پس از مشخص کردن جایگاه (درایه) و ستون محوری و با استفاده از روش حذفی گاوس جردن ماتریس ها را به شکل کاهش یافته سطری در بیاورید و سپس در مورد جواب دستگاه ها بحث کنید. (در صورت داشتن داشتن جواب عمومی، جواب ها را به صورت پارامتریک بنویسید.)

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۱ & -۷ & ۰ & ۶ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۲ & -۳ \\ -۱ & ۷ & -۴ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۲ & ۰ \\ -۹ & ۱۲ & -۶ & ۰ \\ -۶ & ۸ & -۴ & ۰ \end{bmatrix}$

مسئله‌ی ۲.

مقدار λ را طوری تعیین کنید که
الف) دستگاه معادلات زیر جواب ناصفر داشته باشد:

$$\begin{cases} \lambda x + ۳y = ۰ \\ ۲x + ۴y = ۰ \end{cases}$$

(بیش از آنکه جواب نهایی شما مهم باشد روش حل و نوع نگاه شما به آن مهم است.روشی که قابل تعمیم به مسائل دیگر باشد)

ب) دستگاه معادلات زیر فقط جواب صفر داشته باشد :

$$\begin{cases} \lambda x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰ \\ x_۱ + \lambda x_۲ + x_۳ = ۰ \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰ \end{cases}$$

مسئله‌ی ۳.

درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید و درصورت نادرست بودن مثال نقض ارائه دهید و در صورت درست بودن آن را اثبات کنید:

۱. اگر $\forall i \;\; v_i \in \mathbb{R}^n$ و $\{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ یک مجموعه وابسته خطی باشد ،هریک از v_i ها را می توان به صورت یک ترکیب خطی از بقیه اعضا نوشت.

۲. اگر $s_۱$ و $s_۲$ زیر مجموعه هایی از بردار های $\mathbb{R}^n$ باشند که $span(s_۱) = span(s_۲)$ آنگاه $s_۱ = s_۲$.

۳. اگر A مجموعه ای از بردارها در $\mathbb{R}^n$ باشد به طوری که $A \subset \mathbb{R}^n$ و بردار های عضو مجموعه A مستقل خطی باشند آنگاه: $span(A) = \mathbb{R}^n$.

۴. اگر $span(A) = \mathbb{R}^n$ آنگاه A یک مجموعه مستقل خطی از $\mathbb{R}^n$ است.

۵. اگر w یک ترکیب خطی از بردار های $v_۱, v_۲, \dots, v_n$ باشد،آنگاه $\{w, v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ مستقل خطی است.

۶. اگر $S \subseteq \mathbb{R}^n$ مسنقل خطی باشد و $v \in (\mathbb{R}^n - span(S))$ آنگاه $S \cup \{v\}$ نیز مستقل خطی است.

مسئله‌ی ۴.

ماتریس سودوکو یک ماتریس ۹×۹ که اعداد $۱, ۲, \ldots, ۹$ در هر سطر در هر ستون و هر بلوک ۹×۹ آن ظاهر شده اند، اگر Sیک ماتریس سودوکو باشد به سوالات زیر پاسخ دهید:

۱. حاصلضرب $S \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ \vdots \\ ۱ \end{pmatrix}_{۹\times۱}$ را بیابید.

۲. کدام یک از اعمال سطری روی S ،مجددا یک ماتریس سودوکو به ما می دهد؟

مسئله‌ی ۵.

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ است که:

۱. اگر برای هر b در $\mathbb{R}^n$ معادله $Ax = b$ حداکثر یک جواب داشته باشد، ثابت کنید ستون های ماتریس A باید مستقل خطی باشند.

۲. اگر n تا از ستون های A محوری باشند ثابت کنید برای هر b در $\mathbb{R}^n$ معادله حداکثر یک جواب در $\mathbb{R}^n$ دارد.

مسئله‌ی ۶.

مشخص کنید هریک از تبدیلات زیر خطی هستند یا نه،در صورتی که خطی باشند ماتریس استاندارد آن ها را نیز بیابید.

الف)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^۲ &\longrightarrow \mathbb{R}^۲ \\ (x, y) &\longmapsto (x^۲, ۲y) \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^۲ &\longrightarrow \mathbb{R}^۲ \\ (x, y) &\longmapsto (۲x + y, -y) \end{aligned}$$

ج) اگر تبدیل خطی زیر به شکل:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^۲ &\longrightarrow \mathbb{R}^۲ \\ (v_۱, v_۲) &\longmapsto \left(\frac{v_۱ + v_۲}{۲}, \frac{v_۱ + v_۲}{۲}\right) \end{aligned}$$

آنگاه در مورد $f(f(v_۱, v_۲))$ چه می توان گفت؟(مشخص کنید خطی هست یا نه و درصورت خطی بودن ماتریس استاندارد آن را بیابید.)

سوالات شبیه سازی

مسئله‌ی ۷.

دستگاه معادله زیر را در نظر بگیرید

x_1 $+3x_3$ $+x_5$ $=-1$
x_1 $+$ x_2 $+$ x_3 $+6x_5$ $=1$
$3x_1$ $-3x_2$ $-3x_3$ $+x_4$ $-19x_5$ $=6$
10x1 $-$4x2 $+$38x3 $+$2x4 $-$12x5 $=0$

۱. ماتریس افزوده این دستگاه را به نام Aایجاد کنید.

۲. با استفاده از اعمال سطری مقدماتی، ماتریس A را به فرم سطری مقدماتی تبدیل کنید.

۳. با استفاده از نتیجه قسمت قبل، فرم کاهش یافته سطری ستونی ماتریس A را به دست آورید.

۴. مجموعه پاسخ این دستگاه را به دست آورید. (مشخص کنید که آیا این دستگاه پایدار است یا خیر و در صورت پایدار بودن اگر متغیر آزاد دارد، متغیر های پایه ای را بر حسب آنها به دست آورید.)

(راهنمایی: برای بخش ۲ عملیات سطری مقدماتی در متلب به صورت زیر قابل انجام هستند:

- دستور زیر، ۴$-$ برابر سطر اول ماتریس A را به سطر سوم این ماتریس اضافه می کند

A(3,:)=A(3,:)+(-4)*A(1,:)

- دستور زیر، مقادیر سطر سوم ماتریس A را دو برابر می کند

A(3,:)=2*A(3,:)

- دستور زیر، سطر دوم و سوم ماتریس A را جا به جا می کند

A([2 3],:)=A([3 2],:)

)

به فرایند اعمال کردن عملیات سطری مقدماتی $(EROs)$بر روی یک ماتریس برای تبدیل آن به فرم کاهش یافته سطری مقدماتی، حذف گاوس جردن گفته می شود و اگر تنها به فرم سطری مقدماتی بسنده کنیم به آن حذف گاوس گفته می شود. در این تمرین، شما باید یک تابع بنویسید که با گرفتن یک ماتریس به عنوان ورودی و با اعمال عملیات سطری مقدماتی بر روی آن، فرم کاهش یافته سطری مقدماتی آن و تعداد عملیات سطری مقدماتی انجام شده به این منظور را برگرداند.

جزیات این تابع که آن را $MyRREF$ می نامیم به صورت شبه کد در ادامه آمده است. فرض کنید ماتریس ورودی A، دارای ابعاد $m \times n$ باشد. در این شبه کد، نام تابع های $MATLAB$ را که به این منظور می توانید استفاده کنید به رنگ قرمز و کامنت ها را به رنگ آبی مشخص کرده ایم. همان طور که در $MATLAB$ نیز استفاده می شود، $A(i,j)$ بیانگر درایه i،j ام ماتریس A می باشد و $A(i,:)$ بیانگر سطر i ام ماتریس A است. در این شبه کد عملیات سطری مقدماتی بر روی خود ماتریس ورودی A اعمال می شوند، لذا در نهایت ماتریس کاهش یافته سطری مقدماتی آن در خود A قرار می گیرد و n_e تعداد عملیات سطری مقدماتی انجام شده را مشخص می کند.

```
function [A, n_e] = MyRREF(A) % input is A, outputs are rref(A) as A itself, and n_e
[m, n] = size(A) % record the number of rows and columns in A
n_e = 0; i = 1; j = 1 % set EROs counter to 0, start at the top-left corner of A
while i ≤ m AND j ≤ n
    % look for a nonzero entry at or below current row i in current column j
    i_1 = i; nzfound = 0 % i_1 is a counter, nzfound is set to 1 when a nonzero entry is found
    while nzfound==0 AND i_1 ≤ m % look till the last row for a nonzero
        if A(i_1, j) ≠ 0
            nzfound = 1 % nonzero found; exit this while loop now
            i_nz = i_1 % store the pivot row index; A(i_nz, j) is the next pivot
        else
            i_1 = i_1 + 1 % pivot not found; check next row
        end
    end
    if nzfound==1 % pivot found; do pivoting
        if i_nz ≠ i % the pivot row is below current row i
            temprow = A(i,:);  A(i,:) = A(i_nz,:);  A(i_nz,:) = temprow % R_i ⇆ R_{i_nz}
            n_e = n_e + 1 % increase count of EROs by 1
        end
        A(i,:) = A(i,:)/A(i,j),  n_e = n_e + 1 % A(i,j) is the pivot now, scale R_i so that pivot is 1
        for i_1 = 1, ..., m, i_1 ≠ i
            if A(i_1, j) ≠ 0
                A(i_1,:) = A(i_1,:) − A(i_1,j) × A(i,:);  n_e = n_e + 1 % R_{i_1} − A(i_1,j)R_i
            end
        end
        i = i + 1 % go to next row
    end % matches if nzfound==0
    j = j + 1 % go to next column
end % matches while i ≤ m AND j ≤ n
```

در پیاده سازی استاندارد این تابع، تفاوت های محدودی وجود دارد. برای مثال بزرگ ترین عدد در یک ستون به عنوان pivot استفاده می شود در حالی که در شبه کد فوق، اول عدد غیر صفر انتخاب می گردد.

۱. این تابع را همانند شبه کد بیان شد پیاده سازی کنید. همان طور که بیان شد این تابع باید یک ماتریس ورودی A را گرفته و کاهش یافته سطری مقدماتی آن و تعداد عملیات سطری مقدماتی استفاده شده را باز گرداند.

شما می توانید برای اطمینان از درستی تابع خود، خروجی آن را با خروجی تابع آماده متلب به نام rref مقایسه کنید. یک روش برای انجام این مقایسه به صورت زیر است:

[A1, n1] = MyRREF(A); A2 = rref(A);

normdiff = norm(A1 − A2);

خروجی تابع norm یک ماتریس که تمام درایه های آن صفر باشد، صفر خواهد بود. بنابراین اگر خروجی شما برابر خروجی rref باشد، حاصل A۱-A۲ صفر خواهد شد و در نتیجه norm آن هم صفر است. ولی اگر تفاوت اندکی بین $A۱$ و $A۲$ وجود داشته باشد، normdiff یک عدد کوچک غیر صفر خواهد بود و اگر مقدار بزرگی را شود احتمالا یه جای کار اشتباه کرده اید!

۲. بررسی کنید که با تغییر تعداد سطر ها و ستون های ماتریس ورودی، تعداد عملیات لازم برای تبدیل به فرم کاهش یافته سطری مقدماتی چه تغییری می کند. به طور خاص برای حالت های زیر تعداد عملیات لازم را به دست آورید. در هر حالت ماتریس ورودی خود را با استفاده از اعداد رندم و از طریق دستور

A = round(1000*rand(m,n))

در متلب تولید کنید.

آ تعداد سطر ها (m) را ثابت و برابر ۱۰۰ در نظر بگیرید و تابع خود را بر روی ماتریس هایی با تعداد ستون n = ۵۰، ۷۵ ، ۱۰۰، ۲۰۰، ۴۰۰، ۶۰۰، ۸۰۰، ۱۰۰۰ اجرا کنید. در هر حالت، تعداد عملیات انجام شده و مقدار normdiff را یادداشت کنید و در یک جدول با ستون های n و تعداد عملیات لازم و normdiff نشان دهید.

ب تعداد ستون ها (n) را ثابت و برابر ۱۰۰ در نظر بگیرید و تابع خود را بر روی ماتریس هایی با تعداد سطر m = ۵۰، ۷۵ ، ۱۰۰، ۲۰۰، ۴۰۰، ۶۰۰، ۸۰۰، ۱۰۰۰ اجرا کنید. در هر حالت، تعداد عملیات انجام شده و مقدار normdiff را یادداشت کنید و در یک جدول با ستون های n و تعداد عملیات لازم و normdiff نشان دهید.

۳. با توجه به مشاهدات انجام شده به سوالات زیر پاسخ دهید:

آ تعداد عملیات لازم، هنگامی که تعداد سطر ها ثابت است و تعداد ستون ها تغییر میکند چگونه تغییر میکند؟

ب تعداد عملیات لازم، هنگامی که تعداد ستون ها ثابت است و تعداد سطر ها تغییر میکند چگونه تغییر میکند؟

ج مقدار normdiff، هنگامی که تعداد سطر ها ثابت است و تعداد ستون ها تغییر میکند چگونه تغییر میکند؟

د مقدار normdiff، هنگامی که تعداد ستون ها ثابت است و تعداد سطر ها تغییر میکند چگونه تغییر میکند؟