مقادیری از x را بدست آورید که به ازای آن‌ها $A=\begin{bmatrix}1&1&x\\1&x&x\\x&x&x\end{bmatrix}$ معکوس پذیر باشد، سپس A^{-1} را بدست آوردید.

می‌دانیم یک ماتریس معکوس پذیر است اگر و تنها اگر دترمینان آن نا صفر باشد.

$$\begin{aligned}det(A)&=\begin{vmatrix}1&1&x\\1&x&x\\x&x&x\end{vmatrix}\\&=(1)\begin{vmatrix}x&x\\x&x\end{vmatrix}-(1)\begin{vmatrix}1&x\\x&x\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}1&x\\x&x\end{vmatrix}\\&=(x^2-x^2)-(x-x^2)+x(x-x^2)\\&=(x-1)(x-x^2)\\&=x(x-1)^2\to x\neq 0,1\end{aligned}$$

حال با فرض $x\neq 0,1$ معکوس این ماتریس را بدست می‌آوریم، برای اینکار ماتریس افزوده $[\,A\mid I\,]$ کاهش می‌دهیم. داریم:

$$[\,A\mid I\,]=\begin{bmatrix}1&1&x&1&0&0\\1&x&x&0&1&0\\x&x&x&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-xR_1]{R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&1&x&1&0&0\\0&x-1&0&-1&1&0\\0&0&x-x^2&-x&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{x-x^2}R_3]{\frac{1}{x-1}R_2}\begin{bmatrix}1&1&x&1&0&0\\0&1&0&\dfrac{-1}{x-1}&\dfrac{1}{x-1}&0\\0&0&1&\dfrac{-1}{1-x}&0&\dfrac{1}{x-x^2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2}\begin{bmatrix}1&0&x&\dfrac{x}{x-1}&\dfrac{-1}{x-1}&0\\0&1&0&\dfrac{-1}{x-1}&\dfrac{1}{x-1}&0\\0&0&1&\dfrac{-1}{1-x}&0&\dfrac{1}{x-x^2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1-xR_3}\begin{bmatrix}1&0&0&0&\dfrac{-1}{x-1}&\dfrac{-x}{x-x^2}\\0&1&0&\dfrac{-1}{x-1}&\dfrac{1}{x-1}&0\\0&0&1&\dfrac{-1}{1-x}&0&\dfrac{1}{x-x^2}\end{bmatrix}.$$

نکته: در مرحله 2 سطر های 2 و 3 را بر $x-1, x^2-x$ تقسیم کردیم و این همان مرحله ای است که باید فرض $x\neq 0,1$ را در نظر بگیریم.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-1}{x-1} & \dfrac{-x}{x-x^2} \\ \dfrac{-1}{x-1} & \dfrac{1}{x-1} & 0 \\ \dfrac{-1}{1-x} & 0 & \dfrac{1}{x-x^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{x(1-x)} \begin{bmatrix} 0 & x & -x \\ x & -x & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$