دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

کاربرد های جبر خطی

نیم‌سال دوم ۹۷-۹۶

مدرس: دکتر امیرمزلقانی

فصل دوم (جبر ماتریسی)

توجه:

- این تمرین از مباحث مربوط به فصل دوم (جبر ماترسی) طراحی شده است که شامل ۴ مساله و یک تمرین شبیه سازی می باشد.
- کلاس تدریسیار هفته بعد از موعد تحویل مربوط به رفع مشکلات این تمرین است. تا زمان کلاس سوالات خود را از طریق ایمیل زیر بپرسید.

$aut.la2018@gmail.com$

- مساله ها را در یک فایل pdf و فایل کد های مربوط به تمرین های شبیه سازی و گزارش های آنها را به طور مجزا در یک پوشه قرار دهید.
- پاسخ های تمرین را در قالب یک فایل به صورت الگوی زیر آپلود کنید.

9531000_Gabriel_Batistuta_HW2.zip

- مهلت تحویل جمعه ۲۵ اسفند ۱۳۹۶ ساعت ۲۳:۵۴

مسئله‌ی ۱.

الف) اگر $u=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ و $v=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ باشند. مساحت متواضی‌الاضلاع ساخته شده توسط u و v و $u+v$ و ۰ را بدست بیاورید.

دترمینان $[u \quad v]$ را بدست آورده و با مساحت متواضی‌الاضلاع مقایسه کنید.

درایه اول بردار v را با یک مقدار دلخواه جایگزین کنید و تغیرات را مشاهده و تحیلل کنید.

ب) نشان دهید معادله یک خط در $\mathbb{R}^2$ که از دو نقطه مشخص (x_1, y_1) و (x_2, y_2)میگذرد را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$det(\begin{bmatrix}1 & x & y\\1 & x_1 & y_1\\1 & x_2 & y_2\end{bmatrix}) = 0$$

مسئله‌ی ۲.

معکوس ماتریس‌های زیر را به روش گوس جردن بدست بیاورید و مراحل آن را نیز بنویسید.

$$A=\begin{bmatrix}7 & 2 & 1\\0 & 3 & -1\\-3 & 4 & -2\end{bmatrix} B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\4 & -7 & 3\\-2 & 6 & -4\end{bmatrix}$$

مسئله‌ی ۳.

درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید و درصورت نادرست بودن مثال نقض ارائه دهید و در صورت درست بودن آن را اثبات کنید:

۱. اگر معکوس A^2 برابر B باشد معکوس A برابر AB است.

۲. اگر B و C ماتریس‌هایی $m\times n$ باشند و D معکوس پذیر باشد و داشته باشیم $(B-C)D=0$ ، $B=C$ است.

۳. اگر $A=BCD$ و داشته باشیم که A معکوس‌پذیر است. D و C و B هر سه معکوس پذیرند.

۴. اگر ماتریس B یک ماتریس 3×3 باشد، $A=B^4+3B^2+7B+3I_3$ معکوس پذیر است.

مسئله‌ی ۴. به روش تجزیه $LU Factorization$ ماتریس زیر را تجزیه کرده و ماتریس‌های L و U را به دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\4 & 3 & -1\\3 & 5 & 3\end{bmatrix}$$

سوالات شبیه سازی

مسئله‌ی ۵.

ماتریس متراکم (ماتریسی که بیشتر درایه های آن ــ مثلا بیش از نیمی از آنهاــ غیر صفر باشد) و معکوس پذیر A با ابعاد $n \times n$ را در نظر بگیرید، روش استاندارد حل دستگاه معادله خطی $Ax = b$ به صورت زیر است:

۱. تجزیه LU ماتریس A را بیابید: $A = LU$.

۲. اگر $\hat{x} := Ux$ سیستم $L\hat{x} = b$ (که در آن L یک ماتریس پایین مثلثی است) را از طریق جایگزینی پیشرو $(forwardsubstitution)$ حل کنید.

۳. سیستم بالا مثلثی $Ux = \hat{x}$ را(که در آن U یک ماتریس بالا مثلثی است) از طریق جایگزینی عقب گرد $(backsubstitution)$ حل کنید.

(a) تابعی بنویسید که تجزیه LU ماتریس A را پیدا کند. فرض کنید که می توان ماتریس A را بدون استفاده از عمل جا به جایی دو سطر $row - interchange$ از بین اعمال سطری مقدماتی به ماتریس بالا مثلثی U تبدیل کرد. تابع شما باید ماتریس A را به عنوان ورودی بگیرد و ماتریس پایین مثلثی L و ماتریس بالا مثلثی U را باز گرداند.

```
Function  [L, U] = lu_factor(A)
[n  , n1] = size(A);
if n ~= n1
        error ("A must be square")
end
L = eye (n)
U = zeros (n)

...

return;
```

در کد بالا شما باید قسمت .... را تکمیل کنید. برای این منظور تنها مقادیر بالای قطر اصلی ماتریس U که مقدار اولیه صفر گرفته است و مقادیر پایین قطر اصلی ماتریس L که برابر ماتریس همانی است را آپدیت کنید.

(b) تابع دیگری بنویسید که معادله b = Ax را از طریق مراحل ۱ و ۲ و ۳ را که در بالا ذکر شده است، حل کند. تابع شما باید به شکل زیر باشد:

```
function x =  linear_sys_solver(A,b)

% compute the LU factorization of A
% Solve Ly = b for y by forward substitution
% Solve Ux = y by back substitution

return;
```

می توانید از کد خود مربوط به سوال ۸ تمرین اول در این بخش استفاده کنید

(c) تابع myinverse را برای محاسبه وارون ماتریس A با سایز $n \times n$ بنویسید. توجه کنید که باید از تابع lu_factor و توابع $forwardsubstitution$ و $backwardsubstitution$ که در بخش های قبل یا تمرین قبل نوشته اید استفاده کنید. فرض کنید که $X = A^{-1}$ پس $AX = I_n$ از این نکته که $Ax_i = e_i$ به ازای $i = 1, ..., n$ که در آن x_i ستون i ام ماتریس X و e_i ستون i ام ماتریس I_n استفاده کنید. (توجه کنید که شما تنها یک بار می تواند از تجزیه LU ماتریس A را محاسبه کنید)

(d) ماتریس هیلبرت یک ماتریس مربعی است به گونه ای که $H_{i,j} = \frac{1}{1+i+j}$ ماتریس هیلبرت A از مرتبه ۵ و ۱۰ و۱۵و ۲۰ را بسازید و ماتریس وارون آنها (A^{-1}) را از طریق توابع آماده (مثلا در متلب از طریق تابع inv) به دست آورید. سپس ماتریس وارون آن را از طریق تابع myinverse که در بخش قبل نوشته اید به دست آورید (آن را A'^{-1} بنامید) مقادیر AA^{-1} و AA'^{-1} را به دست آورید و نتایج را مقایسه و تحلیل کنید. (راهنمایی: به ویژگی های ماتریس های ill-conditioned توجه کنید)