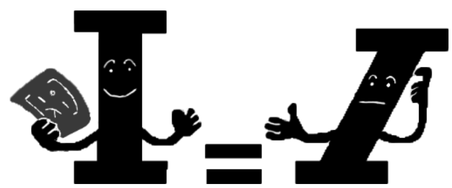
به نام خدا



پاسخ تمرین چهارم

جبر خطی کاربردی – پاییز 1400

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

1- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) پایه برای یک فضای برداری، بزرگترین مجموعه مستقل خطی ممکن است که آن فضا را $span$ می کند.

- درست، استدلال انتهای صفحه 214 کتاب درسی.

ب) اگر V یک مجموعه مستقل خطی در زیرفضای H باشد، آنگاه V یک پایه برای H خواهد بود.

- نادرست، مثال نقض:

$$H = \mathbb{R}^2, V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

همانطور که مشاهده می شود، مجموعه V پایه ای برای فضای $\mathbb{R}^2$ نیست.

ج) اگر $Ax = \lambda x$ و x یک بردار دلخواه باشد، آنگاه λ یک مقدار ویژه برای A است.

- نادرست، درصورتی که $x = \mathbf{0}$ باشد، این عبارت برقرار نخواهد بود.

د) اگر $Ax = \lambda x$ برای یک مقدار دلخواه λ برقرار باشد، آنگاه x یک بردار ویژه برای A است.

- نادرست، در صورتی که $x = \mathbf{0}$ باشد، این عبارت برقرار نخواهد بود.

ذ) اگر A یک ماتریس معکوس پذیر باشد، آنگاه A قطری شونده نیز هست.

- نادرست، مثال نقض $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

ه) اگر $AP = PD$ باشد و D یک ماتریس قطری باشد، آنگاه ستون های غیر صفر P بردار ویژه A هستند.

- درست،

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$
$$AP = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \end{bmatrix}$$
$$PD = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$
$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_2 v_2, \quad \dots \quad , \quad Av_n = \lambda_n v_n$$

2- مجموعه ی $B = \{1+t^2, t-t^2, 2-2t+2t^2\}$ یک پایه برای $\mathbb{P}_2$ می باشد . مختصات متناسب با پایه ی B را برای $p(t) = 3 + t - 6t^2$ بیابید.

پاسخ:

باید c_1, c_2, c_3 را به گونه ای پیدا کنیم که:

$$c_1(1+t^2) + c_2(t-t^2) + c_3(2-2t+2t^2) = p(t) = 3 + t - 6t^2$$

اکنون اگر ضرایب سمت چپ را با ضرایب سمت راست یکسان قرار دهیم خواهیم داشت:

ضریب 1 $\quad c_1 + 2c_3 = 3$

ضریب t $\quad c_2 - 2c_3 = 1$

ضریب t^2 $\quad c_1 - c_2 + 2c_3 = -6$

اکنون معادله ی $P_B[x]_B = x$ را حل می کنیم تا مختصات متناسب با پایه ی B را به دست آوریم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین مختصات $p(t)$ متناسب با پایه ی B برابر است با : $\begin{bmatrix} -5 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$

3- فرض کنید V یک فضای برداری و B یک پایه برای آن باشد. همچنین وکتور های $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4, \boldsymbol{w}_5$ نیز وکتور هایی در V باشند و ماتریس A ماتریس، ماتریسی است که ستون های آن متشکل از وکتور مختصات وکتور های $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4, \boldsymbol{w}_5$ در پایه B است.

اگر پس از اعمال کاهش سطری، ماتریس A به فرم زیر درآمده باشد، آنگاه به سوالات زیر پاسخ دهید (توضیح):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الف) بعد V را بدست آورید. ($dim\, V$)

ب) بعد $Span\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4, \boldsymbol{w}_5\}$ را بدست آورید.

پاسخ:

الف) از آنجا که ستون های این ماتریس هرکدام 4 درایه دارند و این ستون ها وکتور هایی در فضای V هستند، پس می توان گفت $\dim(V) = 4$.

ب) می دانیم که تبدیل $x \to [x]_V$ یک تبدیل خطی است، پس می توان گفت که بر روی استقلال خطی وکتور های $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4, \boldsymbol{w}_5$ تاثیر ندارد. پس:

$$\dim(Span\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4, \boldsymbol{w}_5\}) = \dim(A) = 2$$

4- الف) فرض کنید V یک زیرفضا از $\mathbb{R}^n$ و $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ یک پایه برای V باشد. ثابت کنید که تمام پایه های V دارای K بردار در V هستند.

ب) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ است و $nullspace$ آن یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ است. همچنین $range$ آن توسط بردار غیرصفر v در $\mathbb{R}^5$، $span$ می شود. m و n را تعیین کنید و $rank$ و $nullity$ ماتریس A را بدست آورید.

پاسخ:

الف) فرض کنیم $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ یک پایه دلخواه برای زیرفضای V باشید، هدف ما نشان دادن $l = k$ است. از آنجاییکه B یک پایه است، می توان گفت که یک spanning set شامل k بردار برای V می باشد. پس مجموعه ای از $k + 1$ و یا تعداد بیشتر بردار در V وابسته خطی می باشد. از آنجایی که B' یک پایه است، پس مستقل خطی است و $l \leq k$ است.

همچنین B' پایه است پس یک $spanning\ set$ برای V می باشد که دارای l بردار است. پس می توان گفت هر مجموعه دارای $l + 1$ و یا تعداد بیشتر بردار در V وابسته خطی است. از طرفی B نیز یک پایه است که مستقل خطی است. پس $k \leq l$ است.

از قسمت 1 و 2 نتیجه می شود که $k = l$.

ب) می دانیم که فضای پوچ هر ماتریس، شامل وکتور های x ای است به طوری که $Ax = 0$. پس x ها $n - dimensional$ اند و از آنجا که فضای پوچ یک زیرفضا از $\mathbb{R}^3$ است پس $n = 3$.

همچنین میدانیم $range$ ماتریس شامل تمام b هایی است به طوریکه $Ax = b$، بنابرین b باید $m - dimensional$ باشد و از آنجا که $range$ در اینجا زیرفضایی از $\mathbb{R}^5$ است، پس $m = 5$.

و از آنجا که فضای پوچ یک **صفحه** در $\mathbb{R}^3$ است، پس $nullity = 2$. به طور مشابه از آنجا که $range$ توسط 1 بردار $span$ می شود، پس $rank = 1$.

5- فرض کنید $B = \{v_1, v_2\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ باشد. ماتریس $S = [v_1 \;\; v_2]$ را در نظر بگیرید. چرا این ماتریس معکوس پذیر است؟

حال ثابت کنید که برای هر وکتور $v \in V$، وکتور $S^{-1}v = [v]_B$.

پاسخ:

از آنجا که B یک پایه است، پس وکتور های تشکیل دهنده آن مستقل خطی اند و می توان گفت ماتریس تشکیل شده توسط آن ها معکوس پذیر است.

حال وکتور v را در پایه B می نویسیم. داریم:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 = S \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [v]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

فرض کنید:

$$S^{-1}v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow v = S \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

حال باید نشان دهیم که $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

از قسمت 1 داریم:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = v = S \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2$$

بنابراین:

$$(x_1 - c_1)v_1 + (x_2 - c_2)v_2 = 0$$

از آنجا که B یک پایه است و مستقل خطی است، پس این معادله تنها در صورتی 0 خواهد شد که $x_1 = c_1$ و $x_2 = c_2$. پس:

$$S^{-1}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}]_B$$

6- برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ یک مقدار ویژه بدون محاسبات بدست آورید. جواب خود را توضیح دهید.

پاسخ:

ستون های ماتریس A وابسته خطی هستند، بنابراین ماتریس A وارون پذیر نیست.

از فصول پیش می دانیم، در صورتی که ماتریس A وارون پذیر نباشد، خواهیم داشت معادله $Ax = \mathbf{0}$ دارای جواب غیربدیهی خواهد بود. بنابراین می توانیم نتیجه بگیریم که $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه برای این ماتریس محسوب می شود.

7- الف) نشان دهید اگر ماتریس A، n بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد، آنگاه A^T هم n بردار ویژه مستقل خطی دارد.

ب) اگر λ یک مقدار وِیژه برای ماتریس $A_{n\times n}$ باشد، نشان دهید که $A^T x = \lambda x$.

پاسخ:

الف)

اگر A، n بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد، آنگاه بر اساس قضیه قطری سازی داریم: $A = PDP^{-1}$

$$A^T = (PDP^{-1})^T = {P^{-1}}^T D^T P^T = {P^T}^{-1} D^T P^T = QDQ^{-1}$$

ب)

به ازای هر λ داریم:

$$(A-\lambda I)^T = A^T - (\lambda I)^T = A^T - \lambda I$$

بنابر قضیه 6 قسمت 2.2 کتاب، می دانیم که $A^T - \lambda I$ وارون پذیر است اگر و تنها اگر $A - \lambda I$ وارون پذیر باشد. یا می توان گفت $A^T - \lambda I$ وارون پذیر نیست اگر و تنها اگر $A - \lambda I$ معکوس پذیر نباشد. بنابراین λ مقدار ویژه A^T خواهد بود اگر و تنها اگر مقدار ویژه A باشد.

8- فرض کنید می خواهیم دنباله فیبوناچی را با استفاده از مفاهیمی که تا به حال خوانده ایم مدل سازی کنیم، در اینصورت خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix}$$

الف) ماتریس A را بیابید.

ب) مقادیر ویژه و بردار ویژه A را بیابید.

ج) ماتریس A را تجزیه طیفی[1] کنید. $(A = PDP^{-1})$

د) ماتریس B را برحسب n بیابید.

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

ه) رابطه صریح برای F_n بیابید.

پاسخ:

الف) در صورتی که رابطه فیبوناچی را بنویسیم، می توانیم با توجه به معادلات موجود ماتریس A را تشکیل دهیم.

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_{n-1} = F_{n-1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ب) برای محاسبه مقادیر ویژه و بردار های ویژه این ماتریس، ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می دهیم و سپس اقدام به حل می کنیم.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \Longrightarrow |A - \lambda I| = 0$$

$$-\lambda(1-\lambda) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

---

[1] *Spectral Decomposition*

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

حال که مقادیر ویژه را محاسبه کردیم، می توانیم به سراغ محاسبه بردار های ویژه ماتریس به ازای هر یک از مقادیر ویژه برویم.

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} x_2 = 0 \\ x_2 \ is \ free \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \to v_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردار ویژه متناظر با λ_2 نیز، به صورت بالا قابل محاسبه است.

$$v_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ج) برای محاسبه قطری سازی شده این ماتریس همانند زیر عمل می کنیم.

$$A = PDP^{-1}$$

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}$$

د) با تکرار معادله موجود در قسمت الف، می توانیم ماتریس B را محاسبه کنیم.

$$\begin{bmatrix}F_n\\ F_{n-1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}F_{n-1}\\ F_{n-2}\end{bmatrix}=A\left(A\begin{bmatrix}F_{n-2}\\ F_{n-3}\end{bmatrix}\right)=A^{n-1}\begin{bmatrix}F_1\\ F_0\end{bmatrix}$$

$$B=A^{n-1}$$

ه)

$$A=PDP^{-1}\Longrightarrow A^{n-1}=PD^{n-1}P^{-1}$$

$$A^{n-1}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1^{n-1} & 0\\ 0 & \lambda_2^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\lambda_2\\ -1 & \lambda_1\end{bmatrix}$$

$$A^{n-1}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{bmatrix}\lambda_1^{n} & \lambda_2^{n}\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\lambda_2\\ -1 & \lambda_1\end{bmatrix}$$

$$A^{n-1}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{bmatrix}\lambda_1^{n}-\lambda_2^{n} & \lambda_2^{n}\lambda_1-\lambda_2\lambda_1^{n}\\ \lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1} & \lambda_2^{n-1}\lambda_1-\lambda_1^{n-1}\lambda_2\end{bmatrix}$$

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n-\lambda_2^n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

9- مقادیر ویژه و $multiplicity$ را برای ماتریس های زیر بدست آورید.

a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & -13 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

پاسخ:

$a)$

$$det\, A - \lambda I = det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ -3 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1, & multiplicity = 1 \\ \lambda_2 = 4, & multiplicity = 1 \\ \lambda_3 = 2, & multiplicity = 1 \end{cases}$$

$b)$

$$det\, A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1-\lambda & 0 \\ -4 & 1 & 9 & -2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (3-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0, & multiplicity = 1 \\ \lambda_2 = 1, & multiplicity = 2 \\ \lambda_3 = 3, & multiplicity = 2 \end{cases}$$

راه حل دیگر: برای حل این مساله، چون ماتریس یک ماتریس پایین مثلثی می باشد، می توان از قضیه کتاب استفاده کرد و مستقیما بیان کرد که عناصر روی قطر اصلی ماتریس، مقادیر ویژه این ماتریس هستند.

c)

$$det\ A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0-\lambda & -13 \\ 1 & -4-\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)(-4-\lambda) - (-13) = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

$$\Delta' = \sqrt{4-13} = \sqrt{-9} = 3j$$

$$\lambda = \frac{-b' \pm \Delta'}{a} = -2 \pm 3j$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2+3j, & multiplicity = 1 \\ \lambda_2 = -2-3j, & multiplicity = 1 \end{cases}$$

10- مقادیر ویژه ماتریس A را بدست آورده و بردار ویژه های آن را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

سپس ماتریس A را قطری سازی کرده $(A = PDP^{-1})$ و صحت جواب خود را بدون محاسبه P^{-1} بررسی کنید.

پاسخ:

ابتدا characteristic equation آن را می نویسیم.

$$\det A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

حال طبق معادله بالا، می دانیم که مقادیر ویژه ماتریس به صورت زیر است:

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = 1$$

برای به دست آوردن بردار های ویژه هم به صورت زیر عمل می کنیم.

$$A - 2I = \mathbf{0} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & : & 0 \\ 1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 1 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

که طبق ماتریس بالا، بردار های زیر بردار ویژه های مقادیر ویژه λ_1 و λ_2 هستند.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای $\lambda_3 = 1$ هم دقیقا همین مراحل را انجام می دهیم.

$$A - I = \mathbf{0} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & : & 0 \\ 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 1 & 0 & 2 & : & 0 \end{bmatrix}$$

که بردار ویژه آن به صورت زیر است.

$$v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

می دانیم که این سه بردار مستقل خطی هستند، پس ماتریس های P و D به شکل زیر هستند.

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

برای اینکه بررسی کنیم که آیا ماتریس های P و D به درستی محاسبه شده اند، باید چک کنیم $AP = PD$

$$AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $AP = PD$ و داریم $A = PDP^{-1}$

11- الف) مقادیر ویژه و بردار های ویژه A را برحسب C بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 1-c \\ 0.4 & c \end{bmatrix}$$

ب) در صورتی که $c = 0.8$ باشد، A^{∞} را محاسبه کنید.

پ) ماتریس 2×2 ای بیابید که $A^{60} = I$ شود و مقادیر ویژه آن را محاسبه کنید.

پاسخ:

الف)

$$det\, A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0.6-\lambda & 1-c \\ 0.4 & c-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (c+0.6)\lambda + (0.6+0.4)c - 0.4 = 0$$

$$\lambda^2 - (c+0.6)\lambda + c - 0.4 = 0$$

$$\lambda = \frac{c + 0.6 \pm \sqrt{(c+0.6)^2 - 4c + 1.6}}{2}$$

$$= \frac{c + 0.6 \pm \sqrt{\frac{(5c-7)^2}{25}}}{2}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{c + 0.6 + \frac{5c-7}{5}}{2} = c - 0.4 \\ \lambda_2 = \dfrac{c + 0.6 - \frac{5c-7}{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

$$A - \lambda_1 I = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0.6 - c + 0.4 & 1-c & 0 \\ 0.4 & c - c + 0.4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1-c & 1-c & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda_2 I = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0.6 - 1 & 1-c & 0 \\ 0.4 & c-1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -0.4 & 1-c & 0 \\ 0.4 & c-1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0.4 & c-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}(1-c) \\ 1 \end{bmatrix}$$

ب)

$c = 0.8$

$\lambda_1 = 0.4, \qquad \lambda_2 = 1$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}(1-0.8) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{\infty} = \mathrm{PD}^{\infty}\mathrm{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{\infty} & 0 \\ 0 & (0.4)^{\infty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

پ) ما با دیدن این معادله، یاد ماتریس دوران می افتیم. $\mathrm{A}^{60} = \mathrm{I}$

این ماتریس به گونه ای است که اگر 60 بار در خودش ضرب شود، باعث می شود که بردار اولیه، به موقعیت اولیه خود برگردد.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

همانطور که می دانیم، یک دوران کامل برابر 2π است، پس در صورتی که بعد از 60 بار دوران بخواهیم یک دور کامل بزنیم، باید در هر دوران، زاویه دوران برابر $\frac{2\pi}{60}$ باشد.

$$A = \begin{bmatrix} cos\frac{2\pi}{60} & -sin\frac{2\pi}{60} \\ sin\frac{2\pi}{60} & cos\frac{2\pi}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.995 & -0.105 \\ 0.105 & 0.995 \end{bmatrix}$$

12- فرض کنید A یک ماتریس 2×2 حقیقی است که دارای یک مقدار ویژه مختلط به فرم $\lambda = a - bj$ و یک بردار وِیژه $v \in C^2$ است. حال نشان دهید:

a) $A\,Re(v) = a\,Re(v) + b\,Im(v)$
b) $A\,Im(v) = -b\,Re(v) + a\,Im(v)$

پاسخ:

$$Av = \lambda v$$

$$A\big(Re(v) + j\,Im(v)\big) = (a - bj)\big(Re(v) + jIm(v)\big)$$

$$= a\,Re(v) + ja\,Im(v) - bj\,Re(v) - j^2 b\,Im(v)$$

$$a\,Re(v) + b\,Im(v) + j\big(-b\,Re(v) + a\,Im(v)\big)$$

$A\,Re(v) = a\,Re(v) + b\,Im(v)$

$A\,Im(v) = -b\,Re(v) + a\,Im(v)$

موفق باشید

تیم تدریسیاری جبر خطی پاییز 1400