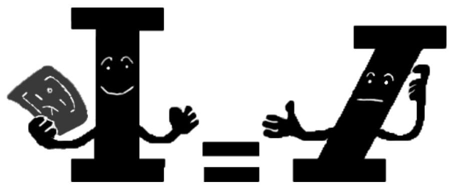
به نام خدا



پاسخ تمرین دوم

جبر خطی کاربردی – پاییز ۱۴۰۰

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) اگر $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه بخش های B و A ، می توانند ضرب بلوکی شوند.

ب) در تجزیه ی LU یک ماتریس مانند A برای به دست آوردن ماتریس U کافیست ماتریس A را به فرم نردبانی کاهش یافته تبدیل کنیم.

پ) اگر A^T یک ماتریس $n \times n$ باشد که k $(k < n)$ عنصر $pivot$ داشته باشد، آنگاه ماتریس A وارون پذیر نیست.

ت) اگر بتوان $A_{n\times n}$ را به فرم ماتریس همانی کاهش داد، آنگاه فضای ستونی A یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

ج) اگر A و B وارون پذیر باشند، آنگاه $A + B$ نیز وارون پذیر خواهد بود.

چ) اگر A و B وارون پذیر باشند، آنگاه $AB = BA$.

ه) فضای پوچ ماتریس $A_{m\times n}$ یک زیرفضا از $\mathbb{R}^m$ است.

پاسخ:

الف) غلط.

(راه اول): آوردن مثال نقض

(راه دوم): زیرا برای اینکه منطبق باشند باید تقسیم بندی ستونی A و تقسیم بندی سطری B باید هماهنگ باشد. (پاراگراف قبل از *EXAMPLE 3* صفحه ۱۲۰ کتاب درسی)

ب) غلطٍ. باید ماتریس A را اگر ممکن بود با استفاده از عملیات های *row replacement* به فرم *echolen* تبدیل کنیم.

پ) درست. طبق تئوری ۸ کتاب درسی می دانیم برای اینکه یک ماتریس $n \times n$ وارون پذیر باشد، باید دقیقا n عنصر *pivot* داشته باشد.

ت) درست. در اینصورت طبق تئوری ۸ کتاب درسی این ماتریس، یک ماتریس معکوس پذیر است و دوباره طبق همین تئوری می دانیم که ستون های هرماتریس معکوس پذیر $\mathbb{R}^n$ را اسپن می کنند. پس طبق تعریف پایه، این مجموعه یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ خواهد بود.

ج) غلط. مثال نقض $A = I. B = -I$ در اینصورت $A + B = O$، که وارون پذیر نیست.

چ) غلط. مثال نقض:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{cases} AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \to AB \neq BA$$

ه) غلطٍ. طبق تئوری ۱۲ کتاب درسی میدانیم که اگر یک ماتریس $m \times n$ باشد آنگاه فضای پوچ آن زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ خواهد بود.

۲- همه مقادیر c را طوری بیابید که ماتریس A وارون پذیر باشد. سپس به ازای $c=1$، A^{-1} را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&3\\4&2&1&0\\2&2&1&c\\3&0&2&2\end{bmatrix}$$

پاسخ:

- با اجرای مراحل حذف گاوس- جوردن خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}1&2&2&3&1&0&0&0\\4&2&1&0&0&1&0&0\\2&2&1&c&0&0&1&0\\3&0&2&2&0&0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&3&1&0&0&0\\0&-6&-7&-12&-4&1&0&0\\2&2&1&c&0&0&1&0\\3&0&2&2&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&3&1&0&0&0\\0&-6&-7&-12&-4&1&0&0\\0&-2&-3&c-6&-2&0&1&0\\3&0&2&2&0&0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&3&1&0&0&0\\0&-6&-7&-12&-4&1&0&0\\0&-2&-3&c-6&-2&0&1&0\\0&-6&-4&-7&-3&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&3&1&0&0&0\\0&1&\frac{7}{6}&2&\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&0&0\\0&-2&-3&c-6&-2&0&1&0\\0&-6&-4&-7&-3&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&3&1&0&0&0\\0&1&\frac{7}{6}&2&\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&0&0\\0&0&-\frac{2}{3}&c-2&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&1&0\\0&-6&-4&-7&-3&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&3&1&0&0&0\\0&1&\frac{7}{6}&2&\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&0&0\\0&0&-\frac{2}{3}&c-2&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&1&0\\0&0&3&5&1&-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3c+6}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3c+6}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9c-8}{2} & -2 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

در این مرحله توقف میکنیم. برای اینکه ماتریس A وارون پذیر باشد باید:

$$\frac{9c-8}{2} \neq 0 \rightarrow 9c \neq 8 \rightarrow c \neq \frac{8}{9}$$

- حال جواب قسمت اول بدست آمده است. با فرض $c = 1$ به حل ادامه میدهیم تا وارون بدست آید.

داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 9 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 0 & \frac{26}{3} & \frac{59}{6} & -18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 13 & 15 & -27 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 0 & \frac{26}{3} & \frac{59}{6} & -18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 9 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 13 & 15 & -27 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 9 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین معکوس A بدست آمد:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 7 & 8 & -15 & -3 \\ -4 & -5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

۳- فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ و درایه های روی قطر اصلی A^TA برابر صفر است.

ثابت کنید $A = 0$.

پاسخ:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & - \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ - & \cdots & 0 \end{bmatrix}, A \in M_n(\mathbb{R})$$

- در ماتریس A^TA درایه روی قطر اصلی در سطر i برابر است با:

$$\sum_{k=1}^{n} {a_{ik}}^T a_{ki}$$

- چون میدانیم که سطر i ماتریس ترانهاده برابر با ستون i ماتریس اصلی است؛ پس درایه روی قطر اصلی سطر iبرابر با مجموع مربعات درایه های ستون i ماتریسA است که برابر ۰ است.

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \dots + a_{ni}^2 = 0$$

چون مجموع جملات برابر ۰ است و هرجمله بزرگتر مساوی صفر است؛ پس تمام جملات صفر است؛

پس تمام درایه های ماتریس A برابر صفر است. در نتیجه: A = 0

۴- فرض کنید A ماتریس $n \times n$ است و $A^3 = 2I$.

الف) نشان دهید ماتریس $A - \alpha I$ وارون پذیر است اگر و تنها اگر $\alpha \neq \sqrt[3]{2}$.

ب) نشان دهید که ماتریس $B = A^2 - 2A + 2I$ وارون پذیر است.

پاسخ:

۱) الف)

- اگر $\alpha \neq \sqrt[3]{2}$ آنگاه $A^3 - \alpha^3 I = 2I - \alpha^3 I = \beta I$ و $\beta \neq 0$ حال از آن جایی که میتوان $A^3 - \alpha^3 I$ را به $(A - \alpha I)(A^2 + \alpha A + \alpha^2 I)$ تجزیه کرد، و از آنجایی که $\beta \neq 0$:

$$\frac{\left((A - \alpha I)(A^2 + \alpha A + \alpha^2 I)\right)}{\beta} = I \rightarrow (A - \alpha I)^{-1} = \frac{A^2 + \alpha A + \alpha^2 I}{\beta}$$

اگر $(A - \alpha I)$ وارون پذیر باشد،

$$\left((A - \alpha I)(A^2 + \alpha A + \alpha^2 I)\right) = A^3 - \alpha^3 I = 2I - \alpha^3 I \rightarrow (A - \alpha I)^{-1} = \frac{(A^2 + \alpha A + \alpha^2 I)}{2I - \alpha^3 I}$$

و از آنجایی که وارون ماتریس یکتاست،

ماتریس $\frac{(A^2 + \alpha A + \alpha^2 I)}{2I - \alpha^3 I}$ باید وجود داشته باشد.

$$2I - \alpha^3 I \neq 0 \rightarrow \alpha \neq \sqrt[3]{2}$$

ب)

$$A^3 = 2I \rightarrow A^2 - 2A + 2I = A^3 + A^2 - 2A = A(A + 2I)(A - I)$$

- با توجه به قسمت الف میتوان نتیجه گرفت که هرکدام از ماتریس های A و A + 2I و A- I وارون پذیرند؛ درنتیجه ضرب آنها نیز وارون پذیر است.

۵- فرض کنید ماتریس A یک ماتریس وارون پذیر باشد و همچنین ماتریس های X و Y، ماتریس هایی مربعی باشند.

$$A = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

الف) ثابت کنید ماتریس های Y و X وارون پذیرند و سپس وارون ماتریس A را برحسب وارون های Y و X نشان دهید. (راهنمایی: AA^{-1} را که برابر I است می توان به صورت $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ نوشت.)

ب) وارون ماتریس B را با استفاده از رابطه ی وارون بدست آمده در روش الف به دست بیاورید.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

الف)

- ابتدا سعی می کنیم درایه های وارون ماتریس A را به دست آوریم :

$$AA^{-1} = I \rightarrow \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & C \\ Z & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} XB + 0Z & XC + 0T \\ 0B + YZ & 0C + YT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} XB & XC \\ YZ & YT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \rightarrow XB = I\,, YT = I\,, XC = 0\,, YZ = 0$$

بنابراین چون XB=I و طبق فرض X مربعی است می توان نتیجه گرفت X وارون پذیر است و $B = X^{-1}$.

به همین صورت چون YT=I و طبق فرضY مربعی است می توان نتیجه گرفتY وارون پذیر است و$T = Y^{-1}$

اکنون C و Z را به دست می آوریم:

$$XC = 0 \xrightarrow{\times X^{-1}} C = X^{-1}0 = 0\,, YZ = 0 \xrightarrow{\times Y^{-1}} Z = Y^{-1}0 = 0$$

بنابراین وارون ماتریس A می شود:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & Y^{-1} \end{bmatrix}$$

ب)

- ماتریس را به شکل زیر بخش بندی می کنیم:

$$B = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \end{array}\right] \rightarrow X = [2] , Y = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

اکنون طبق الف می دانیم که معکوس B می شود:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & Y^{-1} \end{bmatrix}$$

پس کافیست معکوس X و Y را به دست آوریم و جایگذاری کنیم:

$$X^{-1} = [0.5] , Y^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2.5 & 3.5 \end{bmatrix}$$

بنابراین وارون ماتریس B می شود:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -2.5 & 3.5 \end{bmatrix}$$

۶- ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -3 & -6 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ و $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

الف) تجزیه ی LU ماتریس A را به دست آورید.

ب) با استفاده از تجزیه ی LU به دست آمده در بخش الف، دستگاه $Ax = b$ را حل کنید.

پاسخ:

الف)

- ابتدا U را به دست می آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -3 & -6 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -6 & -12 & -4 \\ 0 & 12 & 22 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

اکنون L را به دست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

÷1 ÷3 ÷ -2 ÷1

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ب)

- می دانیم که $LUx = b$ و $Ux = y$. ابتدا $Ly = b$ را حل می کنیم:

$$[L\ \ b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -5 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow\ y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اکنون $Ux = y$ را حل می کنیم:

$$[U\ \ \ y] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین x می شود : $x = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

۷- بررسی کنید کدام یک از زیر مجموعه های زیر یک زیرفضا ($subspace$) از $\mathbb{R}^3$ هستند. (اثبات)

الف) $\{(x, y, z) \mid 2x + y - 3z = 7\}$

ب) $\{(-5x\,.\,3x\,.\,2x) \mid x \in R\}$

ج) $\{(x - 2, x, x - 5) \mid x \in R\}$

د) $\{(x, y, z) \mid 2x + 9y = 0, 8x - 5z = 0\}$

پاسخ:

الف) زیر فضا نیست چون ۰ جز جواب تساوی $2x + y - 3z = 7$ نیست.

ب) تحت ضرب و جمع بسته است و ۰ نیز جز جواب های آن است ← زیر فضا هست.

ج) بردار صفر را شامل نمیشود در نتیجه زیرفضا نیست.

د) زیر فضا هست. طبق تساوی ها داریم: $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 8 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ بطوریکه $Ax = 0$

با حل تساوی بالا داریم $x = \begin{bmatrix} 5/8 \\ -5/36 \\ 1 \end{bmatrix} z$ به ازای هر $z \in \mathbb{R}$ در نتیجه این مجموعه span { }

$\begin{bmatrix} 5/8 \\ -5/36 \\ 1 \end{bmatrix}$ است و از انجایی که هر span ای زیر فضاست، این زیر مجموعه یک زیرفضا برای $\mathbb{R}^3$ است.

۸- با توجه به ماتریس زیر به سوالات زیر پاسخ دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

الف) یک پایه برای $column\ space$ این ماتریس بیابید.

ب) یک پایه برای $nullspace$ این ماتریس بیابید.

ج) اگر $p = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$ نشان دهید p در فضای ستونی ماتریس A قرار دارد.

د) آیا $q = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ در $nullspace$ ماتریس A قرار دارد؟ توضیح دهید.

پاسخ:

الف) فرم کاهش یافته A را بدست میاوریم:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ با توجه به اینکه در ستون های یک و دو pivot position داریم.

ستون های یک و دو ماتریس اولیه پایه های فضای ستونی را تشکیل میدهند.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ب) $Ax = 0$ با حل این تساوی داریم:

فرم کاهش یافته:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 = 0 \\ x_2 + \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 \\ -\frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4$$

در نتیجه:

$$Null\ A = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ج)

$$[\mathrm{A} \quad \mathrm{p}\,] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 8/3 & 4 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- معادله ی $\mathrm{Ax = p}$ جواب دارد در نتیجه p در فضای ستونی ماتریس A قرار دارد.

د) خیر چون $q \in \mathbb{R}^4$ نیست.

۹- فرض کنید A یک ماتریس 5×7 باشد. اگر داشته باشیم $rank\ A = 2$ ، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) $dim(nul(A))$ را بدست آورید.

ب) $rank(A^T)$ را بدست آورید.

پاسخ:

الف)

$$rank\ theorem \rightarrow \dim\big(null(A)\big) = n - rank(A) = 5 - 2 = 3$$

ب) ترانهاده جای ستون ها و ردیف ها را عوض میکند در نتیجه:

اگر $B = A^T$:

$$Rank(A^T) = rank(B) = dim(colB\ ) = dim(row(A))$$

از طرفی طبق rank theorem rank:

$$dim(col(A)) = dim(row(A)) = rank(A)$$

در نتیجه:

$$Rank(A^T) = dim(row(A)) = rank(A) = 2$$

۱۰- پایه B و بردار x را مطابق زیر در نظر بگیرید.

مختصات نقطه ای x نسبت به پایه B را بدست آورید.

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$x = c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 \rightarrow [x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

- برای بدست آوردن این ضرایب کافی است تا دستگاه زیر را حل کنیم. داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

۱۱- (امتیازی) فرض کنید n عدد طبیعی است. وارون ماتریس A را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1\\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}$$

پاسخ:

با توجه به صورت سوال داریم:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1\\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}$$

حال میدانیم اگر X_i را ستون iام ماتریس وارون A باشد، در نتیجه:

$$AX_i = e_i$$

پس برای i از ۱ تا n معادله بالا را حل کرده و ستون های ماتریس وارون به دست آمده و ماتریس وارون بدست میاید.

برای $i=1$ داریم:

$$\begin{cases} x_{11}+2x_{12}+\cdots+nx_{1n}=1\\ x_{12}+2x_{13}+\cdots+(n-1)x_{1n}=0\\ \vdots\\ x_{1n-1}+2x_{1n}=0\\ x_{1n}=0\end{cases}$$

حال اگر معادله بالا را از عبارت پایین شروع به حل کنیم، بدست میاید:

$$\begin{cases} x_{1n}=0\\ x_{1n-1}=0\\ \vdots\\ x_{12}=0\\ x_{11}=0\end{cases}$$

پس ستون اول ماتریس وارون بدست میاید: $X_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$

برای ستون دوم داریم:

$$\begin{cases} x_{21} + 2x_{22} + \cdots + nx_{2n} = 0 \\ x_{22} + 2x_{23} + \cdots + (n-1)x_{2n} = 1 \\ \vdots \\ x_{2n-1} + 2x_{2n} = 0 \\ x_{2n} = 0 \end{cases}$$

اگر دوباره مانند قسمت قبل محاسبات را از عبارت پایین انجام دهیم به عبارت زیر میرسیم:

$$\begin{cases} x_{21} + 2x_{22} = 0 \\ x_{22} = 1 \\ x_{23} = 0 \\ \vdots \\ x_{2n} = 0 \end{cases}$$

که بدست میاید $x_{21} = -2$ پس خواهیم داشت:

$$X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای ستون های سه به بعد داریم:

$$\begin{cases} x_{i1} + 2x_{i2} + \cdots + nx_{in} = 0 \\ x_{i2} + 2x_{i3} + \cdots + (n-1)x_{in} = 0 \\ \vdots \\ x_{ii} + 2x_{ii+1} + \cdots + (n-1)x_{in} = 1 \\ x_{in-1} + 2x_{in} = 0 \\ x_{in} = 0 \end{cases}$$

پس مانند قسمت های قبل:

$$\begin{cases} x_{ii-2} + 2x_{ii-1} + 3x_{ii} = 0 \\ x_{ii-1} + 2x_{ii} = 0 \\ x_{ii} = 1 \\ x_{ii+1} = 0 \\ \vdots \\ x_{in} = 0 \end{cases}$$

چون عبارت $x_{ii-2} + 2x_{ii-1} + 3x_{ii}$ برابر ۰ است و عبارت x_{ii+1} تا x_{in} همگی برابر صفر است؛ در نتیجه عبارت x_{i1} تا x_{ii-3}همگی برابر صفر هستند. پس برای ستون iام داریم:

$$X_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

پس ماتریس وارون بدست میاید:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

موفق باشید

تیم تدریسیاری جبر خطی پاییز ۱۴۰۰