جبرخطی

دکتر علی اکبر استاجی

فهرست مندرجات

فصل ۱

میدان

۱.۱ ساختمانهای جبری

فرض کنیم A یک مجموعهٔ ناتهی بوده و $\star : A \times A \to A$ یک تابع باشد. در این صورت زوج مرتب $(A, \star)$ را یک **ساختمان جبری** و $\star$ را یک **عمل دوتایی** روی A می‌نامیم. برای تسهیل در نوشتن $\star(x, y)$ را با $x \star y$ و چنانچه ابهامی پیش نیاید با xy نمایش می‌دهیم و به آن ترکیب x با y اطلاق می‌شود. به طور کلی وقتی می‌گوییم A یک ساختمان جبری است، یعنی؛ یک عمل دو تایی روی مجموعهٔ ناتهی A تعریف شده است. تعاریف زیر اساس ساختمانهای جبری را تشکیل می‌دهند.

۱) اگر برای هر x, y, z متعلق به ساختمان جبری A، $x(yz) = (xy)z$، آن گاه A را **شرکت‌پذیر** می‌نامیم. از این رو در ساختمانهای جبری شرکت‌پذیری می‌توانیم از گذاشتن پرانتز صرف نظر کنیم.

۲) ساختمان جبری A را گوییم دارای **عضو خنثیٰ** e است در صورتی که $e \in A$ و برای هر $x \in A$، $xe = x = ex$.

۳) اگر ساختمان جبری A دارای عضو خنثیٰ e باشد و $a, b \in A$ به قسمی باشند که $ab = e$، آن گاه a را **معکوس چپ** b و b را **معکوس راست** a می‌نامیم و چنانچه

$ab = e = ba$، a را **معکوس‌پذیر** گوییم و b را **معکوس** a می‌نامیم و می‌نویسیم $b = a^{-1}$.
همچنین به سادگی دیده می‌شود که در صورت وجود، a^{-1} یکتا است و $(a^{-1})^{-1} = a$.

۴) ساختمان جبری A را **تعویض‌پذیر** می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in A$، $xy = yx$.

ساختمان جبری شرکت‌پذیری که دارای عضو خنثیٰ بوده و هر عضو آن معکوس‌پذیر باشد را یک **گروه** می‌نامیم. فرض کنیم H زیرمجموعهٔ ناتهی گروه G است. اگر H با همان عمل دوتایی G به نوبهٔ خود یک گروه باشد، H را **زیرگروه** G می‌نامیم و می‌نویسیم $H \leq G$.
واضح است که اگر $H \subseteq G$ و G یک گروه باشد، آن گاه خوش‌تعریفی عمل دوتایی و شرکت‌پذیری نیز برای H برقرار می‌باشد، در چنین مواردی می‌گوییم H این خواص را به ارث می‌برد.

قضیه ۱.۱ : فرض کنیم H زیرمجموعهٔ ناتهی گروه G است. H زیرگروه G می‌باشد اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in H$، $xy^{-1} \in H$.

برهان: $\Leftarrow$) با توجّه به تعریف زیرگروه بدیهی است.

$\Rightarrow$) چون $H \neq \emptyset$، پس a متعلق به H وجود دارد. لذا بنابر فرض $e = aa^{-1} \in H$ و $a^{-1} = ea^{-1} \in H$. حال اگر $x, y \in H$، آن گاه $x, y^{-1} \in H$ و با توجّه به فرض $xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$. باقیماندهٔ خواص گروه را، H از G به ارث می‌برد.

■

فرض کنیم H زیرگروه، گروه تعویض‌پذیر $(G, +)$ باشد. برای هر $x \in G$، قرار می‌دهیم:

$$x + H = \{x + y : y \in H\}$$

و آن را همدسته H متناظر به x می‌نامیم. همدسته‌های H در G دارای خواص زیر است.

۱) برای هر $x \in G$، $x + H = H$ اگر و تنها اگر $x \in H$.

۲) برای هر $x, y \in G$، $x + H = y + H$ اگر و تنها اگر $x - y \in H$.

۳) گردایه تمام همدسته‌های H در G یک افراز برای گروه G است.

در اینجا لازم است متذکر شویم که، چنانچه عمل گروه تعویض‌پذیر مشخص نباشد، برای $x \in G$، همدستهٔ H را به صورت؛

$$xH = \{xy : y \in H\}$$

نمایش می‌دهیم و $xH = yH$ اگر و تنها اگر $x^{-1}y \in H$.

قضیه ۲.۱ (لاگرانژ): فرض کنیم H زیرگروه، گروه تعویض‌پذیر $(G,+)$ باشد. اگر $|G|$ متناهی باشد، آن گاه $|G|$ بر $|H|$ بخشپذیر است.

برهان: اگر $g \in G$، آن گاه $\theta : H \to g + H$ با ضابطهٔ $\theta(h) = g + h$ یک تابع دوسویی می‌باشد. از این رو برای هر $g \in G$، $|g + H| = |H|$. چون G متناهی است، پس تعداد همدسته‌های H در G متناهی می‌باشد. حال فرض کنیم؛

$$\{g_1 + H, g_2 + H, \ldots, g_n + H\}$$

گردایهٔ تمام همدسته‌های متمایز H در G است. لذا بنابر خواص همدسته‌ها،

$$G = \bigcup_{i=1}^{n}(g_i + H)$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned} |G| &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} |g_i + H| \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} |H| \\ &= n|H| \end{aligned}$$

بنابراین $|G|$ بر $|H|$ بخشپذیر است.

■

قضیه ۳.۱ : فرض کنیم H زیرگروه، گروه تعویض‌پذیر $(G,+)$ باشد و

$$\frac{G}{H} = \{x + H : x \in G\}$$

در این صورت $\frac{G}{H}$ همراه با عمل دوتایی زیر یک گروه تعویض‌پذیر است که آن را گروه خارج‌قسمتی می‌نامیم.

$$(x + H) + (y + H) = (x + y) + H, \qquad \forall x, y \in G$$

برهان: فرض کنیم $a, b, c, d \in G$ به قسمی باشند که $a + H = c + H$ و $b + H = d + H$. بنابر خواص همدسته‌ها، $a - c, b - d \in H$ و چون H گروه تعویض‌پذیر است، پس

$(a+b)-(c+d)\in H$. دو باره با توجّه به خواص همدسته‌ها داریم که:

$$\begin{aligned}(a+H)+(b+H) &= (a+b)+H\\ &= (c+d)+H\\ &= (c+H)+(d+H)\end{aligned}$$

بنابراین عمل تعریف شده روی $\frac{G}{H}$ خوش‌تعریف می‌باشد. باقیماندهٔ برهان به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

■

فرض کنیم $(A,\star)$ یک ساختمان جبری شرکت‌پذیر باشد. توانهای $a\in A$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&a^{1}=a\\ &a^{2}=a^{1}a\\ &\quad\vdots\\ &a^{n}=a^{n-1}a,\quad \forall n\in\mathbb{N}\&n\geq 2\end{aligned}$$

اگر A دارای عضو خنثیٰ e، و a معکوس‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&a^{0}=e\\ &(a)^{-1}=a^{-1}\\ &a^{-2}=(a^{-1})^{2}\\ &\quad\vdots\\ &a^{-n}=(a^{-1})^{n},\quad \forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

به سادگی دیده خواهد شد که به ازای هر $n,m\in\mathbb{N}$،

$$(a^{m})^{n}=a^{mn} \qquad \text{و} \qquad a^{m}a^{n}=a^{m+n}$$

حال اگر a معکوس‌پذیر باشد، این مطلب برای هر $n,m\in\mathbb{Z}$، نیز برقرار است.

اگر عمل ساختمان جبریِ شرکت‌پذیرِ G را، جمعی در نظر بگیریم، یعنی؛ $(G,+)$ یک ساختمان جبریِ باشد، آنگاه توان nام a را به صورت na می‌نویسیم و در این حالت به ازای هر $n,m\in\mathbb{N}$،

$$n(ma) = (nm)a \quad \text{و} \quad ma + na = (m+n)a$$

حال اگر a معکوس‌پذیر باشد، این مطلب برای هر $n, m \in \mathbb{Z}$، نیز برقرار است.

قضیه ۴.۱ : فرض کنیم G یک گروه تعویضپذیر و $G^{m\times n}$ مجموعهٔ تمام ماتریسهای $m \times n$ باشد که درایه‌های آن متعلق به G است. اگر برای هر $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ متعلق به $G^{m\times n}$ تعریف کنیم:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

آن گاه $G^{m\times n}$ با عمل جمع فوق یک گروه تعویضپذیر است.

برهان: اثبات سرراست است، آن را به عهده خواننده می‌گذاریم. ■

سه تایی مرتب $(R, +, \cdot)$ را **حلقه** می‌نامیم در صورتی که سه شرط زیر بر قرار باشد.

۱) زوج مرتب $(R, +)$ گروه تعویضپذیر است.

۲) زوج مرتب $(R, \cdot)$ ساختمان جبری شرکت‌پذیر است.

۳) برای هر $a, b, c \in R$، $a(b + c) = ab + ac$ و $(a + b)c = ac + bc$.

در حلقه عضو خنثیٰ گروه $(R, +)$ را صفر حلقه می‌نامیم و چنانچه $(R, \cdot)$ دارای عضو خنثیٰ باشد، آن را به 1_R یا به اختصار با ۱ نمایش می‌دهیم و در این حالت، گوییم حلقه یکدار است. برای هر $a \in R$، معکوس جمعی a را **قرینه** a نامیده و با $-a$ نمایش می‌دهیم. اگر حلقه یکدار باشد و $ab = 1$، a را **وارون چپ** b و b را **وارون راست** a می‌نامیم، و در صورتی که a دارای وارون راست c و وارون چپ b باشد، آن گاه بایستی $b = c$؟ در این صورت a را وارون‌پذیر یا معکوس‌پذیر می‌نامیم. به طور کلی وقتی می‌گوییم R یک حلقه است، یعنی؛ اعمال دو تایی $+$ و $\cdot$ روی مجموعهٔ ناتهی R تعریف شده است که در سه شرط فوق صدق می‌کنند. شرط سوّم تعریف را توزیع پذیری عمل ضرب نسبت جمع می‌نامیم. قضیهٔ زیر برخی از خواص مقدماتی یک حلقه را نشان می‌دهد.

قضیه ۵.۱ : فرض کنیم R یک حلقه باشد. به ازای هر $a, b, c \in R$،

۱) $0a = a0 = 0$.

۲) $(-a)b = a(-b) = -ab$.

۳) $(-a)(-b) = ab$.

۴) اگر $a \in R$ معکوس‌پذیر باشد، آن گاه a^{-1} معکوس‌پذیر است و $a = (a^{-1})^{-1}$.

۵) اگر $a_1, \ldots, a_n \in R$ معکوس‌پذیر باشند، آن گاه $a_1 a_2 \cdots a_n$ معکوس‌پذیر است و؛

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \cdots a_2^{-1} a_1^{-1}$$

٦) به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $n(a+b) = na + nb$.

۷) به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، اگر $ab = ba$، آن گاه:

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

برهان: به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

■

$\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، و مجموعهٔ اعداد مختلط با اعمال جمع و ضربشان حلقه می‌باشند.

فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$، اگر $x - y$ بر n بخشپذیر باشد، x را همنهشت y به پیمانهٔ n می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$x \equiv y \pmod{n}$$

همنهشتی به پیمانهٔ n یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathbb{Z}$ است و دارای n کلاس هم‌ارزی می‌باشد و مجموعهٔ تمام کلاسهای هم‌ارزی آن را با $\mathbb{Z}_n$ نمایش می‌دهیم. اگر کلاس متناظر به $a \in \mathbb{Z}$ را با $\overline{a}$ نمایش دهیم، آن گاه:

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

قضیه ٦.۱ : اگر برای هر $a, b \in \mathbb{Z}$، تعریف کنیم:

$$\overline{a}\,\overline{b} = \overline{ab} \quad \text{و} \quad \overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$$

آن گاه $\mathbb{Z}_n$ با اعمال جمع و ضرب فوق یک حلقه یکدار می‌باشد.

برهان: به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

■

برای تسهیل در نوشتن برای هر $n \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم:

$$\mathbb{N}_n = \{۱, ۲, \ldots, n\}$$

فرض کنیم R یک حلقه باشد، $A = (a_{ij}) \in R^{m\times n}$، و $B = (b_{ij}) \in R^{n\times p}$. **حاصل‌ضرب** AB، ماتریس $C = (c_{ij})$ متعلق به $R^{m\times p}$ است که برای هر $i \in \mathbb{N}_m$ و $j \in \mathbb{N}_p$ درایهٔ موقعیت (i,j) آن برابر است با:

$$c_{ij} = \sum_{r=۱}^{n} a_{ir}b_{rj} = a_{i۱}b_{۱j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

قضیه ۷.۱ : فرض کنیم R یک حلقه باشد. اگر $A, B \in R^{m\times n}$، $C \in R^{n\times p}$، و $D, E \in R^{p\times q}$، آن گاه:

۱) $A(CD) = (AC)D$.

۲) $(A+B)C = AC + BC$ و $C(D+E) = CD + CE$.

برهان: برای تسهیل در نوشتن در اثبات این قضیه، درایهٔ موقعیت (i,j) مثلاً ماتریس A را با A_{ij} نمایش می‌دهیم. حال با به کار بردنِ اصول موضوعهٔ حلقه در مورد درایه‌های ماتریسها که متعلق به R هستند، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
[A(CD)]_{ij} &= \textstyle\sum_{r=۱}^{n} A_{ir}(CD)_{rj} \\
&= \textstyle\sum_{r=۱}^{n} A_{ir}(\sum_{s=۱}^{p} C_{rs}D_{sj}) \\
&= \textstyle\sum_{r=۱}^{n}\sum_{s=۱}^{p} A_{ir}C_{rs}D_{sj} \\
&= \textstyle\sum_{s=۱}^{p}(\sum_{r=۱}^{n} A_{ir}C_{rs})D_{sj} \\
&= \textstyle\sum_{s=۱}^{p}(AC)_{is}D_{sj} \\
&= [(AC)D]_{ij}
\end{aligned}$$

بنابراین $A(CD)=(AC)D$. همچنین:

$$\begin{aligned}[(A+B)C]_{ij} &= \sum_{r=1}^{n}(A+B)_{ir}C_{rj}\\ &= \sum_{r=1}^{n}(A_{ir}+B_{ir})C_{rj}\\ &= \sum_{r=1}^{n}(A_{ir}C_{rj}+B_{ir}C_{rj})\\ &= \sum_{r=1}^{n}A_{ir}C_{rj}+\sum_{r=1}^{n}B_{ir}C_{rj}\\ &= (AC)_{ij}+(BC)_{ij}\\ &= (AC+BC)_{ij}\end{aligned}$$

از این رو $(A+B)C=AC+BC$ و به طور مشابه $C(D+E)=CD+CE$.

■

ماتریسی که تعداد سطر و ستون آن برابر باشد را **ماتریس مربع** می‌نامیم.

قضیه ۸.۱ : اگر R یک حلقه باشد، آن گاه $R^{n\times n}$ با اعمال جمع و ضرب ماتریسها یک حلقه است.

برهان: واضح است که $R^{n\times n}$ همراه با عمل ضرب یک ساختمان جبری است و بنابر قضایای ۴.۱، و ۷.۱، حکم برقرار است.

■

قضیه ۹.۱ : فرض کنیم R یک حلقه و R^n مجموعهٔ تمام n تاییهای مرتب روی R باشد. اگر برای هر $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)\in R^n$، تعریف کنیم:

$$x+y=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$
$$xy=(x_1y_1,\ldots,x_ny_n)$$

آن گاه R^n همراه با اعمال فوق یک حلقه است.

برهان: به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

■

دلتای کرونکر را برای عناصر i و j به صورت:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j \text{ هرگاه}\\ 0 & i\neq j \text{ هرگاه}\end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. اگر R حلقه یکدار باشد، آن گاه $R^{n\times n}$ حلقه یکدار است و $I_n = (\delta_{ij}) \in R^{n\times n}$ عضو خنثیٰ ضربی حلقه و **ماتریس همانی** نامیده می‌شود.

فرض کنیم R یک حلقه باشد و $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$.

۱) ماتریس A **متقارن** است، اگر برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$، $a_{ij} = a_{ji}$.

۲) ماتریس A **پادمتقارن** است، اگر برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$، $a_{ij} = -a_{ji}$.

۳) ماتریس $B = (b_{ij}) \in R^{n\times n}$، را **ترانهاده** ماتریس A می‌نامیم، اگر برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$، $a_{ij} = b_{ji}$. ترانهاده ماتریس A را با A^t نمایش می‌دهیم. ترانهادهٔ را برای ماتریسهای که مربع نباشند نیز به کار می‌بریم.

۴) ماتریس A **متعامد** است، اگر $AA^t = A^tA = I_n$.

۵) ماتریس A **پوچ‌توان** است، اگر $n \in \mathbb{N}$، به قسمی وجود داشته باشد که $A^n = 0$.

٦) ماتریس A **قطری** است، اگر برای هر i و j متمایز متعلق به $\mathbb{N}_n$، $a_{ij} = 0$. ماتریس قطری A را با $A = diag(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ نمایش می‌دهیم.

۷) ماتریس A **پایین مثلثی** است، اگر برای هر $i \lneqq j$ که متعلق به $\mathbb{N}_n$ می‌باشند، $a_{ij} = 0$. ماتریس **بالا مثلثی** به طور مشابه تعریف می‌شود.

۸) اگر حلقه R یکدار باشد و برای $i, j \in \mathbb{N}_n$، $a_{ij} = 1$ و سایر درایه‌های A صفر باشند، A را با E_{ij} نمایش می‌دهیم. E_{ij} را برای ماتریسهای که مربع نباشند نیز به کار می‌بریم.

۹) اگر R، حلقهٔ $\mathbb{R}$ یا حلقهٔ $\mathbb{C}$ باشد، قرار می‌دهیم $A^\star = (b_{ij})$ که در آن، برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$،

$$b_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

ماتریس A را **هرمیتی** می‌نامیم، هرگاه $A = A^\star$.

تمرینات

۱.۱ : فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروه آن باشد. ثابت کنید عضو خنثیٰ G و H برابرند.

۲.۱ : فرض کنیم G مجموعهٔ تمام ماتریس‌های متعلق به $\mathbb{R}^{n\times n}$ باشد که مجموع درایه‌های هر سطر برابر با یک باشد. اگر G را همراه با ضرب ماتریس‌ها در نظر بگیریم، آن‌گاه درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) G بسته است.

ب) G دارای عضو همانی است.

ج) هر عضو G معکوس‌پذیر است.

۳.۱ : فرض کنیم R یک حلقه باشد. برای هر $r \in R$ و $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$، تعریف کنیم:

$$rA = (ra_{ij})$$

نشان دهید به ازای هر $r, s \in R$ و $A, B \in F^{m\times n}$،

الف) $r(A+B) = rA + rB$.

ب) $(r+s)A = rA + sA$.

ج) $r(sA) = (rs)A$.

ضرب این مسئله را ضرب اسکالر می‌نامیم.

۴.۱ : فرض کنیم R یک حلقه باشد. نشان دهید:

الف) اگر $A \in R^{m\times n}$ و $B \in R^{n\times p}$، آن‌گاه $(AB)^t = B^tA^t$.

ب) ماتریس $A \in R^{n\times n}$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر A^t معکوس‌پذیر باشد و همچنین $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

ج) برای هر ماتریس $A \in R^{n\times n}$، $A + A^t$ و AA^t متقارن هستند و $A - A^t$ پاد متقارن می‌باشد.

د) اگر $A, B \in R^{n\times n}$ متقارن باشند، آن‌گاه AB متقارن است اگر و تنها اگر $AB = BA$.

۵.۱ : فرض کنیم R، حلقهٔ $\mathbb{R}$ یا حلقهٔ $\mathbb{C}$ باشد و $A, B \in R^{n\times n}$. نشان دهید که:

الف) $(A+B)^\star = A^\star + B^\star$، $(AB)^\star = B^\star A^\star$، $(A^\star)^\star = A$، و $(\alpha A)^\star = \overline{\alpha} A^\star$.

ب) $AA^\star$، $A^\star A$، و $A + A^\star$ هرمیتی هستند.

ج) درایه‌های روی قطر یک ماتریس هرمیتی متعلق به $\mathbb{R}$ هستند.

۶.۱ : فرض کنیم F یک حلقهٔ یکدار باشد. نشان دهید:

الف) $E_{ij}E_{kt} = \delta_{jk}E_{it}$.

ب) اگر $A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$ و $E_{rs}A = (b_{ij})$ ، آن‌گاه،

$$b_{ij} = \delta_{ir}a_{sj}$$

یعنی؛ تمام درایه‌های $E_{ij}A$ صفرند، بجز در سطر rام که همان سطر sام A است.

ج) اگر $A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$ و $AE_{rs} = (b_{ij})$ ، آن‌گاه،

$$b_{ij} = \delta_{sj}a_{ir}$$

یعنی؛ تمام درایه‌های AE_{ij} صفرند، بجز در ستون sام که همان ستون rام A است.

د) برای هر $i \neq j$، $I_n + E_{ij}$ معکوس‌پذیر است.

ه) اگر $n \geq ۲$ و $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ به قسمی باشد که با همه عناصر $R^{n\times n}$ جابجا شود، آن گاه $r \in R$ به قسمی وجود دارد که $A = rI_n$.

۷.۱ : اگر برای هر $r, s \in \mathbb{N}$، $G_{rs} = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را به صورت

$$g_{ij} = \begin{cases} \sin(\theta), & (i,j) = (r,s) \\ -\sin(\theta), & (i,j) = (s,r) \\ \cos(\theta), & (i,j) = (r,r) \ \text{یا} \ (i,j) = (s,s) \\ \delta_{ij}, & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

به عنوان مثال داریم:

$$G_{۱۲} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & ۰ \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{۳\times ۳} \ \& \ G_{۱۳} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & ۰ & \sin(\theta) \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -\sin(\theta) & ۰ & \cos(\theta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{۳\times ۳}$$

برای هر $r, s \in \mathbb{N}$، G_{rs} را ماتریس گیون می‌نامیم. ثابت کنید که:

الف) برای هر $r, s \in \mathbb{N}$، G_{rs}، معکوس ماتریس G_{sr} ماتریس است.

ب) تمام ماتریس‌های گیون متعامد هستند.

۸.۱ : فرض کنیم R حلقه باشد و $A, B \in R^{n\times n}$ بالا (پایین) مثلثی باشند. ثابت کنید AB بالا (پایین) مثلثی است.

۹.۱ : فرض کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & \cdots & k \\ ۰ & ۱ & ۲ & \cdots & k-۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdots & k-۲ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k}$$

ثابت کنید:

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ & ۱ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۲ & \cdots & ۰ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$$

۱۰.۱ : فرض کنیم R یک هیات باشد. اگر $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$، اثر [۱] ماتریس A برابر با جمع عناصر روی قطر ماتریس است و با $tr(A)$ نمایش می‌دهیم. نشان دهید برای هر $A, B \in R^{n\times n}$ و $x \in R$،

الف) $tr(A + xB) = tr(A) + xtr(B)$.

ب) $tr(AB) = tr(BA)$.

ج) $tr(AA^t)$ برابر با حاصل‌جمع مربعات تمام درایه‌های A است.

د) در صورتی که $R = \mathbb{R}$، $tr(AA^t) = ۰$ اگر و تنها اگر $A = ۰$.

---
[۱] trace

ه) $tr(AE_{ij}) = a_{ji}$ و $tr(E_{ij}A) = a_{ji}$.

و) اگر A ماتریس قطری باشد، آن‌گاه $E_{rs}AE_{sr} = a_{ss}E_{rr}$ و $AE_{ss} = a_{ss}E_{ss}$.

۱۱.۱ : نشان دهید اگر G یک گروه باشد و $a \in G$، آن گاه $\{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ زیرگروه G است. این گروه را با $< a >$ نمایش می‌دهیم.

۱۲.۱ : فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $\emptyset \neq H \subseteq G$. نشان دهید H زیرگروه G است اگر و تنها اگر برای هر $a, b \in H$، $ab \in H$.

۱۳.۱ : فرض کنیم G یک گروه با عضو خنثیٰ e باشد و $a \in G$. اگر،

$$\{n \in \mathbb{N} : a^n = e\} \neq \emptyset$$

آن گاه عضو ابتدای مجموعهٔ فوق را با $o(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را مرتبه عنصر a می‌نامیم. در غیر این صورت مرتبهٔ a را نامتناهی می‌گوییم و می‌نویسیم $o(a) = \infty$. ثابت کنید:

الف) اگر $o(a) = n \in \mathbb{N}$، آن گاه $< a >= \{e, a, a^۲, \ldots, a^{n-۱}\}$.

ب) اگر $o(a) = \infty$، آن گاه برای هر i و j متمایز که متعلق به $\mathbb{Z}$ باشند، $a^i \neq a^j$.

ج) اگر G گروه متناهی باشد، آن گاه $|G|$ بر $o(a)$ بخشپذیر است.

د) اگر $a^m = e$، آن گاه m بر $o(a)$ بخشپذیر است.

ه) اگر $o(a) = n \in \mathbb{N}$ و d بزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد صحیح n و m باشد، آن گاه:

$$o(a^m) = \frac{n}{d}$$

۱۴.۱ : فرض کنیم G یک گروه باشد و $a \in G$. اگر $H =< a >$، نشان دهید $|H| = o(a)$.

۱۵.۱ : فرض کنیم H زیرگروه، گروه آبلی G باشد. اگر $a \in G$ دارای مرتبهٔ متناهی باشد، ثابت کنید $o(aH)|o(a)$.

۱٦.۱ : اگر G یک گروه تعویضپذیر متناهی باشد و عدد اوّل p، $|G|$ را عاد کند، آن گاه عنصری از G دارای مرتبهٔ p است.

۱.۲ حلقه چندجمله‌ایها

فرض کنیم R یک حلقه باشد. اگر $a_0, a_1, \ldots \in R$، آن گاه حاصل‌جمع صوری و نامتناهی؛

$$\begin{aligned} f(x) &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \\ &= a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots \end{aligned}$$

را یک چندجمله‌ای با ضرایب در R می‌نامیم، هرگاه به ازای جمیع مقادیر $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، مگر تعداد متناهی از آنها $a_i = 0$. برای هر $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، a_i را ضریب x^i می‌نامیم و مجموعهٔ تمام چندجمله‌ایها با ضرایب در R را با $R[x]$ نمایش می‌دهیم. چندجمله‌ای که همهٔ ضرایب آن صفرباشد، چندجمله‌ای صفر می‌نامیم. برای هر $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ متعلق به $R[x]$، $f(x)$ را برابر با $g(x)$ نامیم، هرگاه برای هر $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، $a_i = b_i$.

قضیه ۱۰.۱ : فرض کنیم R یک حلقه باشد. برای هر $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ متعلق به $R[x]$، تعریف می کنیم:

$$(f+g)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i \quad \text{و} \quad (fg)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i$$

که در اینجا برای هر $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$،

$$d_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_i b_0$$

$R[x]$ با اعمال جمع و ضرب فوق یک حلقه است.

برهان: خواص حلقه بودنِ $R[x]$ مستقیماً ولی با محاسبات کمی خسته کننده به دست می‌آیند. کار را با اثبات شرکت‌پذیری عمل ضرب روشن می‌سازیم. با به کار بردنِ اصول موضوعهٔ حلقه در مورد $a_i, b_j, c_k \in R$ خواهیم داشت:

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right] \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}) x^n\right] \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{s}(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}) c_{s-n}\right] x^s$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}(\sum_{i+j+k=s} a_i b_j c_k) x^s$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \left[\sum_{m=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{m} b_j c_{m-j}) x^m\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \left[\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right]$$

■

یک حلقه را تعویض‌پذیر نامیم، هرگاه عمل ضرب آن تعویض‌پذیر باشد. بنابراین حلقهٔ R تعویض‌پذیر است اگر و تنها اگر $R[x]$ تعویض‌پذیر باشد. همچنین حلقهٔ R یکدار است اگر و تنها اگر $R[x]$ یکدار باشد.

توافق می‌کنیم که اگر در چندجمله‌ای $0 \neq f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[x]$ برای هر $i \gneqq n$، $a_i = 0$، آن گاه چندجمله‌ای $f(x)$ را به صورت؛

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

بنویسیم و به طور کلی اگر برای $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، $a_i = 0$، از نوشتن $a_i x^i$ در حاصل جمع صوری $f(x)$ صرف نظر می‌کنیم. همچنین اگر R حلقهٔ یکدار باشد، و برای $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، $a_i = 1$، ممکن است در حاصل جمع صوری $f(x)$، این ضریب را ننویسیم. به عنوان مثال، $f(x) = 3 + x + 2x^3$ یک چندجمله‌ای متعلق به $\mathbb{Z}[x]$ است که در آن ۱ و ۰ به ترتیب ضرایب x و x^2 در $f(x)$ هستند.

قضیه ۱۱.۱ : فرض کنیم R یک حلقه باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم:

$$R_n[x] = \{a_0 + \cdots + a_n x^n : a_0, \ldots, a_n \in R\}$$

در این صورت $R_n[x]$ یک زیرگروه $R[x]$ با عمل جمع چندجمله‌ایها است.

برهان: با توجه به قضیهٔ ۱۰.۱، واضح است.

■

اگر F یک حلقه به قسمی باشد که $F^\star = F - \{۰\}$ با عمل ضرب حلقه یک گروه تعویض‌پذیر باشد، آن گاه F را یک **میدان** یا **هیأت** می‌نامیم.

در یک میدان حاصل‌ضرب دو عنصر صفر است اگر و تنها اگر حداقل یکی از آنها صفر باشد.

اگر هر عنصر ناصفر یک حلقهٔ تعویض‌پذیرِ یکدار، معکوس‌پذیر باشد، آن گاه آن حلقه یک میدان می‌باشد.

$\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، و مجموعهٔ اعداد مختلط با اعمال جمع و ضربشان میدان می‌باشند و $\mathbb{Z}$ با اعمال جمع و ضرب معمولی میدان نیست.

قضیه ۱۲.۱ : حلقهٔ $\mathbb{Z}_n$ یک میدان است اگر و تنها اگر n یک عدد اوّل باشد.

برهان: $\Leftarrow$) فرض کنیم $\mathbb{Z}_n$ یک میدان باشد و n عدد اوّل نباشد. پس $a, b \in \mathbb{Z}$ به قسمی وجود دارند که $۲ \leq a, b \leq n - ۱$ و $n = ab$. در نتیجه،

$$\begin{aligned} \overline{a}\overline{b} &= \overline{ab} \\ &= \overline{n} \\ &= \overline{۰} \end{aligned}$$

چون $\mathbb{Z}_n$ یک میدان است، پس $\overline{a} = \overline{۰}$ یا $\overline{b} = \overline{۰}$، که با $۲ \leq a, b \leq n - ۱$ مغایرت دارد. پس بایستی n یک عدد اوّل باشد.

$\Rightarrow$) فرض کنیم n یک عدد اوّل باشد. بنابر قضیهٔ ۶.۱، $\mathbb{Z}_n$ حلقهٔ تعویض‌پذیر یکدار می‌باشد. از این رو کافی است ثابت کنیم هر عنصر ناصفر معکوس‌پذیر می‌باشد. فرض کنیم $\overline{a} \neq \overline{۰}$. چون n یک عدد اوّل می‌باشد، پس n و a متباین هستند و در نتیجه $d, c \in \mathbb{Z}$ به قسمی وجود دارند که $ad + nc = ۱$. بنابراین،

$$\begin{aligned} \overline{a}\overline{d} &= \overline{ad} + \overline{۰} \\ &= \overline{ad} + \overline{nc} \\ &= \overline{ad + nc} \\ &= \overline{۱} \end{aligned}$$

و $\overline{a}$ معکوس‌پذیر است.

■

فرض کنیم R یک حلقه باشد. اگر $0 \neq f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[x]$، آن گاه بزرگترین عضو مجموعهٔ؛

$$\{i \in \mathbb{N} \cup \{0\} : a_i \neq 0\}$$

را درجه $f(x)$ می‌نامیم و با $\deg(f(x))$ نمایش می‌دهیم و برای چندجمله‌ای صفر درجه تعریف نمی‌شود. اگر $\deg(f(x)) = 0$ یا $f(x) = 0$، آن گاه $f(x)$ را چندجمله‌ای **ثابت** می‌گوییم. چنانچه $\deg(f(x)) = n$، ضریب x^n در $f(x)$ را **ضریب پیشرو** آن می‌نامیم. چندجمله‌ای را **تکین** گوییم که، ضریب پیشرو آن برابر با یک حلقه باشد.

قضیه ۱۳.۱ : فرض کنیم F یک هیات باشد.

۱) برای $f, g \in F[x]$، $fg = 0$ اگر و تنها اگر $f = 0$ یا $g = 0$.

۲) اگر f و g عناصر ناصفر $F[x]$ باشند، آن گاه

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g) \quad \text{و} \quad \deg(f+g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$$

برهان: ۱) لزوم: فرض کنیم $f \neq 0$ و $g \neq 0$. در این صورت می‌توانیم فرض کنیم $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ و $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ که a_n و b_m عناصر ناصفر F هستند. در نتیجه ضریب x^{n+m} در fg برابر با $a_n b_m$ ناصفر است. از این رو $fg \neq 0$.

کفایت: بدیهی است.

۲) فرض کنیم $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ و $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ که a_n و b_m عناصر ناصفر F هستند. پس ضریب x^{n+m} در fg برابر با $a_n b_m$ ناصفر است و برای هر $i \gneqq n+m$، ضریب x^i در fg برابر صفر است. از این رو،

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$$

برهان $\deg(f+g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$ روشن است.

■

قضیه ۱۴.۱ : (قضیهٔ تقسیم) فرض کنیم F یک هیات بوده و $f, g \in F[x]$. اگر $g \neq 0$، آنگاه $r, s \in F[x]$ به قسمی وجود دارند که؛

$$f(x) = g(x)s(x) + r(x)$$

و $r(x)=0$ یا $\deg(r(x)) \lneqq \deg(g(x))$.

برهان: اگر $f(x)=0$ یا $\deg(f(x)) \lneqq \deg(g(x))$، کافی است قرار دهیم $s(x)=0$ و $r(x)=f(x)$. پس می‌توانیم فرض کنیم؛

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \qquad \text{و} \qquad g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$$

که در آنها $b_m \neq 0 \neq a_n$ و $m \leq n$. واضح است درجهٔ؛

$$f_1(x)=f(x)-a_nb_m^{-1}x^{n-m}g(x)$$

کمتر از n است، پس به وسیلهٔ استقراء بر درجهٔ $f(x)$، چندجمله‌ایهای $t_1(x), r(x) \in F[x]$ به قسمی وجود دارند که؛

$$f_1(x)=g(x)t_1(x)+r(x)$$

لذا $r(x)=0$ یا $\deg(r(x)) \lneqq \deg(g(x))$. از این رو اگر قرار دهیم:

$$s(x)=a_nb_m^{-1}x^{n-m}+t_1(x)$$

آن گاه؛

$$f(x)=g(x)s(x)+r(x)$$

و حکم برقرار است.

■

فرض کنیم I زیرمجموعهٔ ناتهی حلقهٔ R باشد. I را یک **ایدآل** حلقهٔ R می‌نامیم، هرگاه برای هر $a,b \in I$ و $r \in R$، $ra, ar, a-b \in I$.

برای هر حلقهٔ R، (0) و R ایدآلهای بدیهی R می‌باشند. به سادگی دیده خواهد شد که اشتراک هر گردایهٔ از ایدآلهای حلقهٔ R، یک ایدآل R است. از این رو اگر S زیرمجموعهٔ R باشد، اشتراک تمام ایدآلهای شامل S، یک ایدآل است، که آن را **ایدآل تولید شده توسط** S می‌نامیم.

اگر R حلقهٔ تعویضپذیر یکدار باشد و $a \in R$، مجموعهٔ

$$aR=\{ar : r \in R\}$$

یک ایدآل حلقهٔ R است، آن را **ایدآل اصلی** تولید شده توسط a می‌نامیم.

قضیه ۱۵.۱ : (برای مطالعهٔ آزاد) اگر F یک میدان، و I یک اید‌آل ناصفر $F[x]$ باشد، آن گاه چندجمله‌ای تکین یکتایی چون $f(x) \in F[x]$ به قسمی وجود دارد که I اید‌آل اصلی تولید شده توسط $f(x)$ است.

برهان: چون I اید‌آل ناصفر $F[x]$ است، پس؛

$$A = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \exists g(x) \in I (g(x) \neq 0 \,\&\, \deg(g(x)) = n)\}$$

دارای عضو ابتدایی چون n است. از این رو $g(x) \in I$ به قسمی وجود دارد که $\deg(g(x)) = n$. اگر ضریب پیشرو $g(x)$ برابر با a باشد، آن گاه $f(x) = a^{-1}g(x) \in I$ چندجمله‌ای تکین است و $\deg(f(x)) = n$. واضح است $f(x)F[x] \subseteq I$. فرض کنیم $h(x) \in I$. بنابر قضیهٔ تقسیم، $s(x), r(x) \in F[x]$ به قسمی وجود دارند که:

$$h(x) = f(x)s(x) + r(x)$$

از این رو $r(x) = 0$ یا $\deg(r(x)) \lneq \deg(f(x))$. چون I اید‌آل است، پس

$$r(x) = h(x) - f(x)s(x) \in I$$

اگر $r(x) \neq 0$، آن گاه بایستی؛

$$n = \deg(f(x)) \leq \deg(r(x))$$

که با $\deg(r(x)) \lneq \deg(h(x))$ مغایرت دارد. لذا $r(x) = 0$ و؛

$$g(x) = f(x)s(x) \in f(x)F[x]$$

از این رو I اید‌آل اصلی تولید شده توسط چندجمله‌ای تکین $f(x)$ است. اگر g چندجمله‌ای تکین دیگری باشد که $I = g(x)F[x]$، آن گاه چندجمله‌ایهای ناصفر $p(x), q(x) \in F[x]$ به قسمی وجود دارند که $f(x) = g(x)p(x)$ و $g(x) = f(x)q(x)$. از این رو $f(x) = f(x)q(x)p(x)$ و؛

$$\deg(f(x)) = \deg(f(x)) + \deg(q(x)) + \deg(p(x))$$

بنابراین،

$$\deg(q(x)) = \deg(p(x)) = 0$$

و چون f و g تکین هستند، پس $q = p = 1$ و در نتیجه $f = g$.

■

فرض کنیم F یک میدان است و $f, g \in F[x]$. گوییم f، g را در $F[x]$ عاد می‌کند یا g بر f در $F[x]$ بخشپذیر است و می‌نویسیم $f|g$، در صورتی که $h \in F[x]$ به قسمی وجود داشته باشد که $g(x) = f(x)h(x)$. همچنین گوییم $h \in F[x]$، **بزرگترین مقسوم علیه مشترک** عناصر ناصفر f و g است، اگر:

۱) $h|f$ و $h|g$.

۲) اگر برای $k \in F[x]$، $k|f$ و $k|g$، آن گاه $k|h$.

۳) h تکین باشد.

شرط سوّم فقط به این دلیل آورده شده است که بزرگترین مقسوم علیه مشترک در صورت وجود یکتا باشد.

قضیه ۱.۱۶ : (برای مطالعهٔ آزاد) فرض کنیم F یک میدان است و $f, g \in F[x]$ عناصر ناصفر هستند. در این صورت f و g دارای بزرگترین مقسوم علیه مشترک یکتای $h \in F[x]$ هستند و $p, q \in F[x]$ به قسمی وجود دارند که $h = fp + gq$.

برهان: واضح است

$$I = \{fp + gq : p, q \in F[x]\}$$

ایدآل $F[x]$ است. لذا بنابر قضیهٔ ۱.۱۵، چندجمله‌ای تکین یکتای $h \in F[x]$ به قسمی وجود دارد که $I = h(x)F[x]$. از این رو $p, q \in F[x]$ به قسمی وجود دارند که $h = fp + gq$. بنابراین اگر برای $k \in F[x]$، $k|f$ و $k|g$، آن گاه $k|h$. بالاخره، چون $I = h(x)F[x]$ و $f, g \in I$، پس $h|f$ و $h|g$. یکتایی h مشابه یکتایی مولد تکین ایدآلهای اصلی $F[x]$ در قضیهٔ ۱.۱۵، اثبات می‌شود.

■

فرض کنیم F یک میدان باشد. چندجمله‌ای $p(x) \in F[x]$ را روی F **تحویل‌ناپذیر** می‌خوانیم، در صورتی که $\deg(p(x)) \geq 1$ و هرگاه برای $f, g \in F[x]$، $p(x) = f(x)g(x)$، آن گاه $\deg(f(x)) = 0$ یا $\deg(g(x)) = 0$.

رفتار چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر، شبیه رفتار اعداد اول در $\mathbb{Z}$ است.

قضیه ۱۷.۱ : (برای مطالعهٔ آزاد) فرض کنیم F یک میدان باشد و $p \in F[x]$.

۱) اگر p تحویل‌ناپذیر و برای $f \in F[x]$، f بر p بخش‌پذیر نباشد، آن گاه ۱ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک p و f است.

۲) اگر p، صفر، معکوس‌پذیر و تحویل‌ناپذیر نباشد، آن گاه $f, g \in F[x]$ به قسمی وجود دارند که $p(x) = f(x)g(x)$،

$$\circ \lneqq \deg(g(x)) \lneqq \deg(p(x)) \quad \text{و} \quad \circ \lneqq \deg(f(x)) \lneqq \deg(p(x))$$

۳) اگر p تحویل‌ناپذیر باشد و برای $f_۱, \ldots, f_n \in F[x]$، $p|f_۱ f_۲ \cdots f_n$، آن گاه به ازای حداقل یک مقدار i، $p|f_i$.

برهان: اثبات گزاره‌های (۱) و (۲) بدیهی است. بنابراین گزارهٔ (۳) را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم $f_۱, f_۲ \in F[x]$ و $p|f_۱ f_۲$ و $f_۱$ بر p بخش‌پذیر نباشد . لذا بنابر گزارهٔ (۱) و قضیهٔ ۱۶.۱، $g, h \in F[x]$ به قسمی وجود دارند که $gf_۱ + hp = ۱$ و در نتیجه:

$$f_۲ = f_۲(gf_۱ + hp) = g(f_۱ f_۲) + p(f_۲ h)$$

چون $p|g(f_۱ f_۲)$ و $p|p(f_۲ h)$، پس $p|f_۲$. حال به استقراء می‌توان برای هر $n \in \mathbb{N}$، گزارهٔ (۳) را اثبات کرد.

■

قضیه ۱۸.۱ : (برای مطالعهٔ آزاد) فرض کنیم F یک میدان باشد. در این صورت:

۱) هر چندجمله‌ای ناصفر $p \in F[x]$ می‌تواند به صورت $p = up_۱ p_۲ \cdots p_n$ تجزیه شود، که در آن $u \in F$ و هر p_i چندجمله‌ای تکین تحویل‌ناپذیر است، و n یک عدد صحیح نامنفی می‌باشد.

۲) اگر $p = vq_۱ q_۲ \cdots q_m$ تجزیهٔ دیگری برای چندجمله‌ای ناصفر $p \in F[x]$ باشد که $v \in F$ و هر q_i چندجمله‌ای تکین تحویل‌ناپذیر است، آن گاه $u = v$، $n = m$ و تناظر یک به یک بین دو مجموعهٔ $\{p_۱, p_۲, \ldots, p_n\}$ و $\{q_۱, q_۲, \ldots, q_m\}$ به قسمی وجود دارد که عناصر متناظر برابرند.

برهان: ۱) اگر $\deg(p(x)) = ۱$، آن گاه $a, b \in F$ به قسمی وجود دارند که $a \neq ۰$ و $p(x) = ax + b$. از این رو $p_۱(x) = x + a^{-۱}b$ چندجمله‌ای تکین تحویل‌ناپذیر است و $p(x) = ap_۱(x)$. همچنین اگر p تحویل‌ناپذیر و $a \in F$ ضریب پیشرو آن باشد، آن گاه $p_۱(x) = a^{-۱}p(x)$ چندجمله‌ای تکین تحویل‌ناپذیر است و $p(x) = ap_۱(x)$. از این رو می‌توانیم فرض کنیم $\deg(p(x)) \geq ۲$، p تحویل‌پذیر نیست، و حکم برای تمام چندجمله‌ایهای ناصفر که درجه‌شان کمتر از $\deg(p(x))$ است، برقرار می‌باشد. بنابر گزارهٔ (۲) قضیهٔ ۱.۱۷، $f, g \in F[x]$ به قسمی وجود دارند که $p(x) = f(x)g(x)$،

$$۰ \lneqq \deg(g(x)) \lneqq \deg(p(x)) \quad \text{و} \quad ۰ \lneqq \deg(f(x)) \lneqq \deg(p(x))$$

پس بنابر فرض استقراء حکم برای f و g برقرار است و در نتیجه برای p نیز چنین می‌باشد.

۲) فرض کنیم،

$$p = up_۱p_۲\cdots p_n = vq_۱q_۲\cdots q_m$$

در نتیجه $u = v$ ضریب پیشرو p می‌باشد. از این رو می‌توانیم p را تکین در نظر بگیریم و $u = v = ۱$. بنابر گزارهٔ (۲) قضیهٔ ۱.۱۳، اگر $\deg(p(x)) = ۰$، آن گاه $p(x) = ۱$ و $n = m = ۰$. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم،

$$p = p_۱p_۲\cdots p_n = q_۱q_۲\cdots q_m$$

که n و m اعداد صحیح مثبت هستند و حکم برای چندجمله‌ایهای ناصفر که درجه‌شان کمتر از $\deg(p(x)) \geq ۱$ است، برقرار می‌باشد. بنابر گزارهٔ (۳) قضیهٔ ۱.۱۷، برای $j \in \mathbb{N}_m$، $p_۱|q_j$ و چون هر دو چندجمله‌ای تکین تحویل‌ناپذیر هستند، پس $p_۱ = q_j$. لذا؛

$$p_۱(p_۲p_۳\cdots p_n - q_۱q_۲\cdots q_{j-۱}q_{j+۱}\cdots q_m) = ۰$$

و از گزارهٔ (۱) قضیهٔ ۱.۱۳، نتیجه می‌شود که؛

$$p_۲p_۳\cdots p_n = q_۱q_۲\cdots q_{j-۱}q_{j+۱}\cdots q_m$$

و بنابر فرض استقراء $n = m$ و تناظر یک به یک بین دو مجموعهٔ؛

$$\{p_۲, p_۳, \ldots, p_n\} \quad \text{و} \quad \{q_۱, q_۲, \ldots q_{j-۱}, q_{j+۱}, \ldots, q_m\}$$

به قسمی وجود دارد که عناصر متناظر برابرند. چون $p_1 = q_j$ پس حکم برقرار است.
■

اگر F یک میدان باشد و

$$\{n \in \mathbb{N} : n1 = 0\}$$

ناتهی باشد، آن گاه گوییم F دارای مشخصهٔ یا سرشت‌نمای متناهی است و عضو ابتدای مجموعهٔ فوق را مشخصهٔ یا سرشت‌نمای F می‌نامیم و با $char(F)$ نمایش می‌دهیم. اگر مشخصهٔ F متناهی نباشد، گوییم مشخصهٔ آن صفر است و می‌نویسیم $char(F) = 0$.

مشخصهٔ میدانهای $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، و اعداد مختلط صفر است و برای هر عدد اوّل p، مشخصهٔ میدان $\mathbb{Z}_p$ برابر با p است.

تمرینات

۱۷.۱ : فرض کنیم F یک هیأت باشد. نشان دهید:

الف) اگر $A, B \in F^{n\times n}$ متعامد باشند، AB نیز متعامد است.

ب) فرض کنیم $A \in F^{n\times n}$ پادمتقارنِ متعامد و $I_n + A$ معکوس‌پذیر باشداگر $char(F) \neq 2$، آن‌گاه $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ متعامد است.

۱۸.۱ : فرض کنیم R یک حلقه یکدار باشد. برای هر $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^n \in R[x]$ و $A \in R^{n\times n}$، تعریف می‌کنیم:

$$f(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_n A^n$$

ثابت کنید $f(A^t) = (f(A))^t$.

۱۹.۱ : فرض کنیم F یک هیأت است و $A \in F^{n\times n}$. اگر برای هر ماتریس $B \in F^{n\times n}$ با $tr(B) = 0$ داشته باشیم $tr(BA) = 0$، آن‌گاه ثابت کنید $\lambda \in F$ به قسمی وجود دارد که $A = \lambda I_n$.

۲۰.۱ : ثابت کنید مشخصهٔ یک میدان صفر یا یک عدد اوّل است.

۲۱.۱ : فرض کنیم F یک میدان بوده، $n \in \mathbb{N}$ و $a \in F \neq 0$ به قسمی باشند که $na = 0$. نشان دهید که مشخصهٔ F متناهی است و n بر $char(F)$ بخشپذیر می‌باشد.

۲۲.۱ : نشان دهید اگر F یک میدان متناهی باشد، آن گاه عدد اوّل p و $n \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود دارند که $|F| = p^n$.

۲۳.۱ : فرض کنیم F یک هیأت باشد. نشان دهید:

الف) اگر برای $0 \neq a \in F$، $a = -a$، آن گاه $char(F) = 2$.

ب) اگر $char(F) = 2$، آن گاه برای هر $a \in F$، $a = -a$.

۲۴.۱ : فرض کنیم F یک میدان باشد و $A, B \in R^{n\times n}$. نشان دهید:

الف) اگر $char(F) \neq 2$ و $A^2 + 2A - 2I_n = 0$، آن‌گاه A معکوس‌پذیر است و معکوس آن را به دست آورید.

ب) اگر $I_n - AB$ معکوس‌پذیر باشد آن‌گاه $I_n - BA$ معکوس‌پذیر است.

راهنمایی: ماتریس $I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$ در نظر بگیرید.

۲۵.۱ : فرض کنیم F یک میدان بوده و $0 \neq f(x) \in F[x]$ دارای درجهٔ n باشد. اگر $I = f(x)F[x]$، آن گاه گروه خارج قسمتی $(\frac{F[x]}{I}, +)$ برابر است با:

$$\{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + I : a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in F\}$$

فصل ۲

ماتریسها

۲.۱ دستگاههای معادلات خطی و ماتریسها

فرض کنیم R یک حلقه باشد و برای هر $i \in \mathbb{N}_m$ و $j \in \mathbb{N}_n$، $a_{ij}, b_i \in R$. در این صورت،

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad (\star)$$

را یک دستگاه معادلات خطی روی R می‌نامیم که دارای m معادله و n مجهول است و به ترتیب

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad ، X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad ، Y = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

را ماتریس مقادیر ثابت، ماتریس مجهولات، و ماتریس ضرایب دستگاه می‌نامیم و دستگاه فوق را به صورت $AX = Y$ نمایش می‌دهیم. چنانچه $X \in R^{n\times 1}$ به قسمی باشد که در معادلهٔ $AX = Y$ صدق کند، X را یک جواب دستگاه روی حلقهٔ R می‌نامیم. اگر

$c_1, c_2, \ldots, c_m \in R$ و برای هر $i \in \mathbb{N}_m$، معادلهٔ iام را در c_i ضرب کرده و سپس آنها را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$(c_1a_{11} + \cdots + c_ma_{m1})x_1 + \cdots + (c_1a_{1n} + \cdots + c_ma_{mn})x_n = c_1b_1 + \cdots + c_mb_m$$

معادلهٔ فوق را **ترکیب خطی** معادلات دستگاه $(\star)$ می نامیم و بدیهی است که اگر X جواب دستگاه $(\star)$ باشد، آن گاه در معادلهٔ فوق نیز صدق می‌کند، ولی عکس این مطلب درست نیست. دو دستگاه معادلات خطی روی R را **هم‌ارز** نامیم، هرگاه هر معادلهٔ یک دستگاه ترکیب خطی از معادلات دستگاه دیگر باشد. لذا با توجه به بحث فوق قضیهٔ زیر برقرار است.

قضیه ۱.۲ : مجموعهٔ جوابهای دو دستگاه معادلات خطی روی حلقهٔ R، که هم‌ارز باشند، برابر است.

برهان: با توجّه به توضیحات فوق بدیهی است. ■

با توجّه به اعمال مجاز روی معادلات یک دستگاه سه نوع عمل روی ماتریسها تعریف می‌کنیم که به اعمال **سطری مقدماتی** شناخته می‌شوند و به شرح زیر است. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $A \in R^{m\times n}$.

۱) (عمل سطری مقدماتی نوع اوّل) ضرب یک سطر در عنصر ناصفر حلقهٔ R.

۲) (عمل سطری مقدماتی نوع دوّم) تعویض جای دو سطر

۳) (عمل سطری مقدماتی نوع سوّم) افزودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر.

برای تسهیل در نوشتن، اگر سطر iام را در اسکالر ناصفر c ضرب کرده باشیم با نماد cR_i، یا تعویض سطر iام با jام را با نماد $R_i \leftrightarrow R_j$، و همچنین افزودن c برابر سطر iام به سطر jام را با نماد $R_j + cR_i \to R_j$، نمایش می‌دهیم.

اگر یک ستون از ماتریس صفر باشد، آن گاه با اعمال سطری مقدماتی روی این ماتریس، این ستون تغییر نمی‌کند و صفر باقی خواهد ماند.

اگر e یک عمل سطری مقدماتی باشد، اثر این عمل روی ماتریس $A \in F^{m\times n}$ را با $e(A)$ نمایش می‌دهیم. اگر $I_m \in F^{m\times m}$ ماتریس همانی و e_1، e_2، و e_3 به ترتیب عمل سطری مقدماتی نوع اوّل، دوّم، و سوّم باشند، آن گاه $e_1(I_m)$، $e_2(I_m)$، و $e_3(I_m)$ را به ترتیب **ماتریسهای سطری مقدماتی نوع اوّل، دوّم، و سوّم** می‌نامیم.

قضیه ۲.۲ : فرض کنیم F یک میدان باشد و $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$. اگر e یک عمل سطری مقدماتی باشد و $E = e(I_m)$، آن گاه $e(A) = EA$.

برهان: فرض کنیم e عمل سطری مقدماتی نوع اوّل باشد که سطر rام را در $c \in F \neq 0$ ضرب می‌کند. قرار می‌دهیم $E = (e_{ij})$، $EA = (b_{ij})$، و $e(A) = (c_{ij})$. در این صورت:

$$e_{ij} == \begin{cases} c\delta_{ij} & \text{هرگاه } i = r \\ \delta_{ij} & \text{هرگاه } i \neq r \end{cases} \quad \text{و} \quad c_{ij} = \begin{cases} ca_{ij} & \text{هرگاه } i = r \\ a_{ij} & \text{هرگاه } i \neq r \end{cases}$$

از این رو خواهیم داشت که:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_{s=1}^{m} e_{is}a_{sj} \\ &= \begin{cases} \sum_{s=1}^{m} c\delta_{is}a_{sj} & \text{هرگاه } i = r \\ \sum_{s=1}^{m} \delta_{is}a_{sj} & \text{هرگاه } i \neq r \end{cases} \\ &= \begin{cases} ca_{ij} & \text{هرگاه } i = r \\ a_{ij} & \text{هرگاه } i \neq r \end{cases} \\ &= c_{ij} \end{aligned}$$

بنابراین $e(A) = EA$. اگر e عمل سطری مقدماتی نوع دوّم یا سوّم باشد، به طور مشابه اثبات می‌شود.

■

در قضیهٔ زیر نشان می‌دهیم معکوس یک ماتریس سطری مقدماتی از همان نوع است.

قضیه ۳.۲ : فرض کنیم F یک هیات باشد.

۱) اگر A و B ماتریس‌های سطری مقدماتی نوع اوّل باشند که به ترتیب با اعمال cR_i و $c^{-1}R_i$ روی ماتریس همانی I_m حاصل شده باشند، آن گاه $A^{-1} = B$.

۲) اگر A ماتریس سطری مقدماتی نوع دوّم باشد که با عمل $R_i \leftrightarrow R_j$، روی ماتریس همانی I_m حاصل شده باشد، آن گاه $A^{-1} = A$ و $A^t = A$.

۳) اگر A و B ماتریس‌های سطری مقدماتی نوع سوّم باشند که به ترتیب با اعمال $R_j + cR_i \to R_j$ و $R_j - cR_i \to R_j$ روی ماتریس همانی I_m حاصل شده باشند، آن گاه $A^{-1} = B$.

برهان: با توجّه به قضیهٔ ۲.۲، بدیهی است.

■

فرض کنیم F یک هیات بوده و $A, B \in F^{m\times n}$. ماتریس B را **هم‌ارز سطری ماتریس** A می‌نامیم، هر گاه از A با تعداد متناهی عمل سطری مقدماتی که به طور متوالی روی آن انجام می‌گیرد، به ماتریس B برسیم.

فرض کنیم F یک میدان بوده و $A \in F^{m\times n}$. با توجّه به قضایای ۲.۲، و ۳.۲، اگر $A \in F^{m\times n}$، آن گاه برای هر عمل سطری مقدماتی e روی ماتریس A، عمل سطری مقدماتی e' از همان نوع به قسمی وجود دارد که $e(e'(A)) = A = e'(e(A))$ و رابطهٔ $\sim$ که برای هر $A, B \in F^{m\times n}$ به صورت،

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad B \text{ هم‌ارز سطری با } A \text{ باشد}$$

تعریف می‌شود، یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

قضیه ۴.۲ : فرض کنیم F یک هیات بوده و $A, B \in F^{m\times n}$. ماتریس A و B هم‌ارز سطری هستند اگر و تنها اگر ماتریسهای سطری مقدماتی $E_1, E_2, \ldots, E_k \in F^{m\times m}$ به قسمی وجود داشته باشند که،

$$B = E_k \cdots E_1 A$$

برهان: بنابر قضیهٔ ۲.۲، بدیهی است.

■

قضیه ۵.۲ : فرض کنیم F یک میدان باشد و $A, B \in F^{m\times n}$. B هم‌ارز سطری با A است اگر و تنها اگر ماتریس معکوس‌پذیر $P \in F^{m\times m}$ به قسمی وجود داشته باشد که $B = PA$ و P به صورت حاصل‌ضرب ماتریسهای سطری مقدماتی است.

برهان: با توجه به گزارهٔ (۵) قضیهٔ ۵.۱ و قضایای ۲.۲، و ۳.۲، بدیهی است.

■

مثال ۱ : فرض کنیم،

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۳ & ۰ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۴ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{۴\times ۶}$$

ماتریس معکوس‌پذیر P را به قسمی تعیین کنید که PA ماتریس تحویل شده سطری پلکانی باشد.

حل: بنابر قضایای ۴.۲، و ۷.۲، ماتریسهای سطری مقدماتی $E_۱, \dots, E_k \in \mathbb{R}^{۴\times۴}$ به قسمی وجود دارند که؛

$$\begin{aligned} R &= E_k \cdots E_۱ A \\ &= (E_k \cdots E_۱ I_۴) A \end{aligned}$$

پس $P = E_k \cdots E_۱ I_۴$. لذا $[A|I_۴]$ هم ارز سطری با $[R|P] = [PA|P]$. از این رو مسئله را به شیوه زیر حل می‌کنیم. حال با اعمال سطری $R_۱ - R_۳ \to R_۱$ و $R_۲ - R_۴ \to R_۴$ روی $[A \mid I_۴]$ به ماتریس؛

$$R_۱ = \left[\begin{array}{cccccc|cccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۴ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ & ۰ & ۵ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۳ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

می‌رسیم و با جابجا کردن سطرهای ۲، ۳، و ۴ در ماتریس $R_۱$، ماتریس زیر را خواهیم داشت؛

$$R_۲ = \left[\begin{array}{cccccc|cccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۴ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۳ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ & ۰ & ۵ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \end{array}\right]$$

حال با انجام دادن اعمال سطری $\frac{۱}{۲}R_۲ - \frac{۳}{۸}R_۴ \to R_۲$ و $\frac{۱}{۴}R_۴$ روی $R_۲$ به ماتریس زیر می‌رسیم؛

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۴ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{-۱۱}{۸} & ۰ & \frac{-۳}{۸} & \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۸} \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & \frac{۵}{۴} & ۰ & \frac{۱}{۴} & ۰ & \frac{-۱}{۴} \end{array}\right] = [R \mid P]$$

بنابراین،

$$P = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{-۳}{۸} & \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۸} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & \frac{۱}{۴} & ۰ & \frac{-۱}{۴} \end{bmatrix}$$

■

اگر F یک میدان باشد، $A \in F^{m\times n}$، و $Y \in F^{m\times ۱}$، ماتریس $[A|Y]$ را **ماتریس افزودهٔ** دستگاه معادلات خطی $AX = Y$ می‌نامیم.

قضیه ۶.۲ : فرض کنیم F یک میدان باشد، $A, B \in F^{m\times n}$، و $Y, Z \in F^{m\times ۱}$. اگر ماتریسهای افزودهٔ $[A|Y]$ و $[B|Z]$ هم‌ارز سطری باشند، آن گاه مجموعهٔ جوابهای دو دستگاه معادلات خطی $AX = Y$ و $BX = Z$ برابر است.

برهان: با توجّه به قضیهٔ ۱.۲، بدیهی است.

■

مثال ۲ : فرض کنیم؛

$$Y = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۶ \\ ۱۱ \end{bmatrix} \in F^{۳\times ۱} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} \in F^{۳\times ۳}$$

مجموعهٔ جواب دستگاه معادلات خطی $AX = Y$ را روی میدان اعداد حقیقی به دست آورید.

حل: با انجام دادن اعمال سطری $R_۲ - ۴R_۱ \to R_۲$، و $R_۳ - ۷R_۱ \to R_۳$ روی ماتریس $[A \mid Y]$، خواهیم داشت که؛

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & -۳ & -۶ & ۲ \\ ۰ & -۶ & -۱۲ & ۴ \end{array}\right]$$

و با انجام دادن اعمال سطری $R_۱ + \frac{۲}{۳}R_۲ \to R_۱$، $R_۳ - ۲R_۲ \to R_۳$، و $\frac{-۱}{۳}R_۲$ روی ماتریس

فوق خواهیم داشت که؛

$$[A \mid Y] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & -۱ & \frac{۷}{۳} \\ ۰ & ۱ & ۲ & -\frac{۲}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

بنابراین، دستگاه معادلات خطی $AX = Y$، هم‌ارز دستگاه زیر است.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_۱ & = & x_۳ + \frac{۷}{۳} \\ x_۲ & = & -۲x_۳ - \frac{۲}{۳} \end{array}\right.$$

همهٔ جوابها با تخصیص یک مقدار دلخواه $c \in \mathbb{R}$ به $x_۳$، و سپس محاسبهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از دستگاه فوق به دست می‌آید.

■

فرض کنیم ضرایب دستگاه در یک میدان باشد، آن گاه با انجام سه عمل مجاز که روی یک دستگاه معادلات خطی، می‌توان انجام داد، می‌توانیم دستگاه $AX = Y$ را به دستگاه هم‌ارز $BX = Z$ تبدیل کنیم که در آن هر معادله از معادلهٔ ما قبل خود یک مجهول کمتر دارد و از آنجا که مجموعهٔ جوابهای دو دستگاه برابرند، با بحث روی دستگاه دوّم، می‌توانیم روی وجود جواب یا عدم وجود جواب دستگاه بحث کنیم و همچنین در صورت وجود جواب، آنها را تعیین کنیم. این شیوه که به روش گاوس معروف است، ما را به تعریف زیر رهنمود می‌کند.

فرض کنیم F یک میدان باشد و $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$. اولین درایهٔ ناصفر هر سطر ماتریس A را **درایهٔ پیشرو سطری** می‌نامیم و ماتریس A را **تحویل شدهٔ سطری** می‌گوییم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

۱) درایهٔ پیشرو سطری هر سطر ناصفر A برابر با ۱_F باشد.

۲) اگر درایهٔ پیشرو سطر ناصفر iاُم ماتریس A در ستون k_i باشد، آن گاه تمام عناصر ستون k_i، به جز عنصر مربوط به سطر iاُم صفرند، یعنی؛ $a_{jk_i} = \delta_{ji}$.

همچنین ماتریس A را **تحویل شدهٔ سطری پلکانی** می‌خوانیم، هرگاه علاوه بر دو شرط فوق شرایط زیر نیز برقرار باشد.

۱) هر سطر صفر ماتریس A، زیر سطور ناصفر قرار گیرد.

۲) اگر A دارای t سطر ناصفر باشد و درایهٔ پیشرو سطر ناصفر iام ماتریس، در ستون k_i باشد، آن گاه:

$$k_1 \lneqq k_2 \lneqq \cdots \lneqq k_t$$

یعنی؛ برای هر $i \in \mathbb{N}_t$، اگر $j \lneqq k_i$، $a_{ij} = 0$.

قضیه ۷.۲ : فرض کنیم F یک میدان باشد.

۱) هر عنصر $F^{m\times n}$ هم‌ارز سطری با یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری متعلق به $F^{m\times n}$ است.

۲) هر عنصر $F^{m\times n}$ هم‌ارز سطری با یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی متعلق به $F^{m\times n}$ است.

برهان: ۱) فرض کنیم $A \in F^{m\times n}$. با فرایند زیر حکم را اثبات می‌کنیم

مرحلهٔ اوّل) قرار می‌دهیم $i = 1$.

مرحلهٔ دوّم) اگر سطر iام صفر باشد، آن گاه دو شرط تعریف برقرار هستند و به مرحله پنجم می‌رویم.

مرحلهٔ سوّم) اگر سطر iام ناصفر باشد، آن گاه درایهٔ پیشرو این سطر در میدان F معکوس‌پذیر است. لذا می‌توانیم این سطر را در معکوس درایهٔ پیشرو سطری ضرب کنیم و درایهٔ پیشرو سطری به 1_F تبدیل می‌شود.

مرحلهٔ چهارم) با افزودن مضارب مناسبی از سطر iام به سطرهای دیگر، درایه‌های دیگر ستون درایهٔ پیشرو سطر iام را به صفر تبدیل می‌کنیم.

مرحلهٔ پنجم) به i یک واحد اضافه می‌کنیم. اگر $i > m$، به ماتریس تحویل شدهٔ سطری رسیده‌ایم، در غیر این صورت به مرحله دوم می‌رویم.

۲) فرض کنیم $A \in F^{m\times n}$. بنابر گزارهٔ (۱)، A هم‌ارز سطری با یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری است و با انجام تعداد متناهی عمل تعویض سطرها روی این ماتریس، آن تبدیل به یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی خواهد شد.

■

فرض کنیم F یک میدان بوده و ماتریس $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$ تحویل شدهٔ سطری پلکانی باشد که دارای t سطر ناصفر است. گیریم برای هر $i \in \mathbb{N}_t$، درایهٔ پیشرو سطر ناصفر iام ماتریس، در ستون k_i باشد، آن گاه:

۱) برای هر $i \in \mathbb{N}_t$ و $j \in \mathbb{N}_m$، $a_{jk_i} = \delta_{ji}$.

۲) برای هر $i \in \mathbb{N}_t$، اگر $j \lneqq k_i$، $a_{ij} = 0$.

$Y = (y_{i1}) \in F^{m\times 1}$ و دستگاه معادلات خطی $AX = Y$ را در نظر بگیرید. قرار می‌دهیم $\omega = \{k_1, \ldots, k_t\}$ و به ترتیب مجموعه‌های $\{x_i : i \in \omega\}$ و $\{x_i : i \notin \omega\}$ را مجموعهٔ **متغیرهای وابسته و مستقل** دستگاه معادلات خطی $AX = Y$ می‌نامیم.

اگر برای $i \gneqq t$، $y_{i1} \neq 0$، آن گاه دستگاه دارای جواب نیست زیرا، معادلهٔ iام دستگاه به صورت $0 = y_{i1}$، که یک تناقض می‌باشد.

اگر برای هر $i \gneqq t$، $y_{i1} = 0$، آن گاه دستگاه به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} x_{k_1} & + & \sum_{k_1 \lneqq i \notin \omega} a_{1i}x_i & = & y_{11} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{k_t} & + & \sum_{k_t \lneqq i \notin \omega} a_{ti}x_i & = & y_{t1} \end{cases}$$

اگر $\{x_i : i \notin \omega\} = \emptyset$، آن گاه دستگاه دارای فقط جواب یکتای زیر است؛

$$X = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{bmatrix}$$

و ماتریس A به صورت بلوکی؛

$$\begin{bmatrix} I_n \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

بوده، که در اینجا، 0 ماتریس صفر متعلق به گروه $F^{(m-n)\times n}$ می‌باشد.

اگر $\{x_i : i \notin \omega\} \neq \emptyset$، آن گاه با تخصیص مقادیر دلخواه از عناصر میدان به متغیرهای مستقل در دستگاه و محاسبهٔ مقادیر متغیرهای وابسته، همهٔ جوابهای دستگاه به دست می آید و دستگاه بیش از یک جواب دارد و حداقل به تعداد عناصر میدان دارای جواب می‌باشد.

مثال ۳ : فرض کنیم $F = \mathbb{Z}_{۷}$ و؛

$$A = \begin{bmatrix} \overline{۱} & \overline{۵} & \overline{۱} \\ \overline{۲} & \overline{۱} & \overline{۱} \\ \overline{۰} & \overline{۵} & \overline{٦} \end{bmatrix} \in F^{۳\times۳}$$

$Y \in F^{۳\times۱}$ به قسمی تعیین کنید تا دستگاه معادلات خطی $AX = Y$ دارای جواب باشد و سپس مجموعهٔ جواب دستگاه را مشخص کنید.

حل: گیریم $\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix} \in F^{۳\times۱}$ $Y =$. در این صورت با انجام عمل سطری $\overline{۵}R_۱ + R_۲ \to R_۲$ روی $[A \mid Y]$ به ماتریس زیر می‌رسیم؛

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \overline{۱} & \overline{۵} & \overline{۱} & y_۱ \\ \overline{۰} & \overline{۵} & \overline{٦} & y_۲ + \overline{۵}y_۱ \\ \overline{۰} & \overline{۵} & \overline{٦} & y_۳ \end{array}\right]$$

و با انجام دادن اعمال سطری $R_۱ - R_۲ \to R_۱$، $R_۳ - R_۲ \to R_۳$، و $\overline{۳}R_۲$ روی ماتریس فوق خواهیم داشت که؛

$$[A \mid Y] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \overline{۱} & \overline{۰} & \overline{۲} & y_۱ + \overline{٦}y_۲ + \overline{۲}y_۱ \\ \overline{۰} & \overline{۱} & \overline{۴} & \overline{۳}y_۲ + y_۱ \\ \overline{۰} & \overline{۰} & \overline{۰} & y_۳ + \overline{٦}y_۲ + \overline{۲}y_۱ \end{array}\right]$$

از این رو شرطی که تحت آن دستگاه $AX = Y$ دارای جواب باشد، آن است که؛

$$y_۳ + \overline{٦}y_۲ + \overline{۲}y_۱ = \overline{۰}$$

بنابراین دستگاه تحت این شرط به صورت زیر است.

$$\begin{cases} x_۱ &= \overline{۵}x_۳ + \overline{٦}y_۲ + \overline{۳}y_۱ \\ x_۲ &= \overline{۳}x_۳ + \overline{۳}y_۲ + y_۱ \end{cases}$$

همهٔ جوابها با تخصیص یک مقدار دلخواه $c \in F$ به $x_۳$، و سپس محاسبهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از دستگاه فوق به دست می‌آید.

■

مثال ۴ : فرض کنیم؛

$$Y = \begin{bmatrix} ۱۸ \\ ۲۴ \\ ۴۰ \end{bmatrix} \in F^{۳\times ۱} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۲ & ۷ & ۱۲ \end{bmatrix} \in F^{۳\times ۳}$$

مجموعهٔ جواب دستگاه معادلات خطی $AX = Y$ را روی میدان اعداد حقیقی به دست آورید.

حل: ماتریس $[A \mid Y]$ هم‌ارز سطری ماتریس زیر است؛

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱۰ \end{array}\right]$$

لذا دستگاه دارای جواب نیست.

■

قضیه ۸.۲ : فرض کنیم F یک میدان بوده، $A \in F^{m\times n}$، و $m \lneqq n$.

۱) اگر برای $Y \in F^{m\times ۱}$ دستگاه معادلات خطی $AX = Y$ دارای جواب باشد، آن گاه دارای بیش از یک جواب است و حداقل به تعداد عناصر میدان دارای جواب می‌باشد.

۲) دستگاه معادلات خطی همگن $AX = ۰$، دارای جواب نابدیهی است و حداقل به تعداد عناصر میدان دارای جواب می‌باشد.

برهان: ۱) بنابر قضیهٔ ۷.۲، ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی $R \in F^{m\times n}$ و $Z \in F^{m\times ۱}$ به قسمی وجود دارند که $[A|Y]$ هم‌ارز سطری ماتریس $[R|Z]$ می‌باشد. چون دستگاه معادلات خطی $AX = Y$ دارای جواب است، پس بنابر قضیهٔ ۶.۲، دستگاه معادلات خطی $RX = Z$ نیز دارای جواب می‌باشد. حال اگر R دارای t سطر ناصفر بوده و برای هر $i \in \mathbb{N}_t$، درایهٔ پیشرو سطر ناصفر iام ماتریس R، در ستون k_i باشد، آن گاه چون $m \lneqq n$، پس؛

$$\{x_i : i \notin \{k_۱, \ldots, k_t\}\} \neq \emptyset$$

بنابراین، با توجّه به توضیحات فوق دستگاه معادلات خطی $RX = Z$ دارای بیش از یک جواب بوده و حداقل به تعداد عناصر میدان دارای جواب است. از این رو بنابر قضیهٔ ۶.۲، حکم برقرار می‌باشد.

۲) چون دستگاه دارای جواب بدیهی است، پس بنابر گزارهٔ (۱)، حکم برقرار می‌باشد.
■

اگر ماتریس $A \in F^{n\times n}$ تحویل شدهٔ سطری پلکانی باشد، آن گاه $A = I_n$ اگر و تنها اگر A دارای n سطر ناصفر باشد.

قضیه ۹.۲ : فرض کنیم F یک میدان باشد. برای ماتریس $A \in F^{n\times n}$، گزاره‌های زیر معادلند:

۱) دستگاه معادلات خطی همگن $AX = \circ$ فقط دارای جواب صفر است.

۲) A هم‌ارز سطری با ماتریس همانی I_n است.

۳) A را به صورت حاصل‌ضرب ماتریسهای سطری مقدماتی می‌توان نوشت.

۴) A معکوس‌پذیر است.

۵) برای هر $Y \in F^{n\times 1}$، دستگاه معادلات خطی $AX = Y$ دارای دقیقاً یک جواب است.

برهان: $۲ \Rightarrow ۱$) فرض کنیم A هم‌ارز سطری با ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی $R \in F^{n\times n}$ باشد. اگر A هم‌ارز سطری با ماتریس همانی I_n نباشد، آن گاه تعداد سطرهای ناصفر R، کمتر از n است. لذا در دستگاه $RX = \circ$، تعداد معادلات ناصفر از تعداد مجهولات کمتر است و بنابر قضیهٔ ۸.۲، آن دارای جواب ناصفر است. از این رو بنابر قضیهٔ ۶.۲، دستگاه $AX = \circ$ دارای جواب ناصفر است، که با گزارهٔ (۱) مغایرت دارد.

$۳ \Rightarrow ۲$) بنابر قضیهٔ ۴.۲، ماتریسهای سطری مقدماتی $E_1, E_2, \ldots, E_k \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارند که؛

$$A = E_k \cdots E_1 I_n$$

چون I_n عضو خنثی حلقهٔ $F^{n\times n}$ است، پس $A = E_k \cdots E_1$.

$۴ \Rightarrow ۳$) بنابر گزارهٔ (۵) قضیهٔ ۵.۱ و قضیهٔ ۳.۲، بدیهی است.

$۵ \Rightarrow ۴$) اگر قرار دهیم $X = A^{-1}Y$، آن گاه:

$$\begin{aligned} AX &= A(A^{-1}Y) \\ &= (AA^{-1})Y \\ &= I_nY = Y \end{aligned}$$

پس دستگاه دارای جواب است. اگر $X_\circ$ جواب دستگاه $AX = Y$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} X_\circ &= I_n X_\circ \\ &= (A^{-1}A)X_\circ \\ &= A^{-1}(AX_\circ) \\ &= A^{-1}Y \end{aligned}$$

از این رو دستگاه دقیقاً یک جواب دارد.

۱ $\Leftarrow$ ۵) کافی است قرار دهیم $Y = \circ$.

■

قضیه ۱۰.۲ : فرض کنیم F یک میدان باشد. برای ماتریس $A, B \in F^{n\times n}$، اگر $AB = I_n$، آن گاه A و B معکوس‌پذیرند، $B = A^{-1}$ و $A = B^{-1}$.

برهان: فرض کنیم $X_\circ$ جواب دستگاه معادلات خطی همگن $BX = \circ$ باشد. در این صورت:

$$\begin{aligned} X_\circ &= I_n X_\circ \\ &= (AB)X_\circ \\ &= A(BX_\circ) \\ &= A\circ \\ &= \circ \end{aligned}$$

پس بنابر قضیهٔ ۹.۲، B معکوس‌پذیر است. از این رو:

$$\begin{aligned} A &= AI_n \\ &= A(BB^{-1}) \\ &= (AB)B^{-1} \\ &= I_nB^{-1} \\ &= B^{-1} \end{aligned}$$

حال با توجّه به گزارهٔ (۴) قضیهٔ ۵.۱، $B = (B^{-1})^{-1} = A^{-1}$ و A معکوس‌پذیر می‌باشد.

■

قضیه ۱۱.۲ : فرض کنیم F یک میدان باشد. اگر برای ماتریس $A \in F^{n\times n}$، ماتریسهای سطری مقدماتی $E_1, \ldots, E_k \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود داشته باشند که $E_1 \cdots E_k A = I_n$، آن گاه $A^{-1} = E_1 \cdots E_k$.

برهان: واضح است اگر $B = E_1 \cdots E_k I_n$، آن گاه:

$$\begin{aligned} BA &= (E_1 \cdots E_k I_n)A \\ &= E_1 \cdots E_k (I_n A) \\ &= E_1 \cdots E_k A \\ &= I_n \end{aligned}$$

از این رو بنابر قضیهٔ ۲.۱۰، $B = A^{-1}$.

■

با توجّه به قضیهٔ ۲.۱۱، اگر $A \in F^{n\times n}$ و ماتریس $[A|I_n]$ هم ارز سطری $[I_n|B]$ باشد، آن گاه $B = A^{-1}$.

مثال ۵ : فرض کنیم؛

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

معکوس A را به دست آورید.

حل: با توجه به پاراگراف بعد از برهان قضیهٔ ۲.۱۱، به شیوه زیر مسئله را حل می‌کنیم. اعمال سطری $R_1 - R_3 \to R_1$ و $R_2 - R_4 \to R_2$ روی $[A \mid I_4]$ انجام می‌دهیم و به ماتریس زیر می‌رسیم؛

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

با جابجا کردن سطرهای ۲، ۳، و ۴ در ماتریس بالا، ماتریس زیر را خواهیم داشت؛

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

حال با انجام دادن اعمال سطری $R_۲ \to R_۲ - \frac{۳}{۸}R_۴$ و $\frac{۱}{۲}R_۲$ و $\frac{۱}{۴}R_۴$ روی ماتریس بالا، به ماتریس زیر می‌رسیم؛

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -\frac{۳}{۸} & \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۸} \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & \frac{۱}{۴} & ۰ & \frac{-۱}{۴} \end{array}\right]$$

بنابراین:

$$A^{-۱} = \left[\begin{array}{cccc} ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{-۳}{۸} & \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۸} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & \frac{۱}{۴} & ۰ & \frac{-۱}{۴} \end{array}\right]$$

■

سه نوع عمل ستونی مقدماتی، همانند اعمال سطری مقدماتی روی ماتریسها تعریف می‌کنیم.

فرض کنیم R یک حلقه باشد و $A, B \in R^{m\times n}$. ماتریس A را **هم‌ارز ستونی** ماتریس B می‌گوییم، هرگاه B را بتوان از A با رشته‌ای متناهی از اعمال زیر به نام اعمال **ستونی مقدماتی** به دست آورد.

۱) (عمل ستونی مقدماتی نوع اوّل) ضرب یک ستون در عنصر ناصفر حلقهٔ R.

۲) (عمل ستونی مقدماتی نوع دوّم) تعویض جای دو ستون.

۳) (عمل ستونی مقدماتی نوع سوّم) افزودن مضربی از یک ستون به ستون دیگر.

همچنین ماتریسهای ستونی مقدماتی مشابه ماتریسهای سطری مقدماتی تعریف می‌شود که آن را به عهدهٔ متعلم واگذار می‌کنیم. اولین درایهٔ ناصفر هر ستون ماتریس A را **درایهٔ پیشرو ستونی** می‌نامیم و ماتریس A را **تحویل شدهٔ ستونی** می‌گوییم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

۱) درایهٔ پیشرو هر ستون ناصفر A برابر با ۱_F باشد.

۲) اگر درایهٔ پیشرو ستون ناصفر jام ماتریس A در سطر l_j باشد، آن گاه تمام عناصر سطر l_j، به جز عنصر مربوط به ستون jام صفرند، یعنی؛ $a_{l_j i} = \delta_{ji}$.

همچنین ماتریس A را **تحویل شدهٔ ستونی پلکانی** می‌خوانیم، هرگاه علاوه بر دو شرط فوق شرایط زیر نیز برقرار باشد.

۱) هر ستون صفر ماتریس A، در سمت راست ستونهای ناصفر قرار گیرد.

۲) اگر A دارای t ستون ناصفر باشد و درایهٔ پیشرو ستون ناصفر jاُم ماتریس، در سطر l_j باشد، آن گاه،

$$l_1 \lneqq l_2 \lneqq \cdots \lneqq l_t$$

یعنی؛ برای هر $j \in \mathbb{N}_t$، اگر $i \lneqq k_i$، $a_{ij} = 0$.

تقریباً تمام قضایای مربوط به اعمال سطری با کمی اختلاف برای اعمال ستونی بیان می‌شود که به تعدادی از آنها در اینجا بدون اثبات اشاره می‌کنیم. لازم است متذکر شویم اثبات این قضایا مشابه قضایای مربوط به اعمال سطری است.

قضیه ۱۲.۲ : فرض کنیم F یک هیأت بوده و $A, B \in F^{m\times n}$. در این صورت:

۱) اگر e یک عمل ستونی مقدماتی باشد و $E = e(I_m)$، آن گاه $e(A) = AE$.

۲) ماتریس A و B هم‌ارز ستونی هستند اگر و تنها اگر ماتریسهای ستونی مقدماتی $E_1, E_2, \ldots, E_k \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود داشته باشند که؛

$$B = AE_1 \cdots E_k$$

۳) هر ماتریس ستونی مقدماتی حلقهٔ $F^{m\times m}$ معکوس‌پذیر است و معکوس آن یک ماتریس ستونی مقدماتی از همان نوع است.

۴) B هم‌ارز ستونی با A است اگر و تنها اگر ماتریس معکوس‌پذیر $Q \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود داشته باشد که $B = AQ$ و Q به صورت حاصل‌ضرب ماتریسهای ستونی مقدماتی است.

۵) هر عنصر $F^{m\times n}$ هم‌ارز ستونی با یک ماتریس تحویل شدهٔ ستونی پلکانی متعلق به $F^{m\times n}$ است.

۶) ماتریسهای معکوس‌پذیر P و Q به قسمی وجود دارند که

$$A = P \begin{bmatrix} I_r & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} Q$$

تمرینات

۱.۲ : ماتریس تحویل شده سطری پلکانی R را به قسمی تعیین کنید که با ماتریس زیر هم ارز سطری باشد.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۳ & ۰ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۴ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۳ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۴ & ۲ & ۱۰ & ۱ & ۱۳ \end{bmatrix}$$

۲.۲ : دستگاههای زیر را در میدان داده شدهٔ F حل کنید.

$$\begin{cases} \overline{۲}x + y = ۰ \\ x + y = ۰ \end{cases} \quad F = \mathbb{Z}_۳$$

$$\begin{cases} \overline{۲}x + \overline{۳}y + \overline{۴}z = ۰ \\ x + y + z = ۰ \end{cases} \quad F = \mathbb{Z}_۵$$

$$\begin{cases} (۱+i)x - iy = ۰ \\ ۲x + (۱-i)y = ۰ \end{cases} \quad F = \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} \overline{۲}x + \overline{۳}y = \overline{۴} \\ x + y = \overline{۱} \end{cases} \quad F = \mathbb{Z}_۷$$

۳.۲ : فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & i \\ ۱ & -۳ & -i \\ i & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

یک ماتریس روی هیأت اعداد مختلط باشد. ماتریس تحویل شده سطری پلکانی R به قسمی بیابید که هم‌ارز سطری A باشد، و نیز ماتریس معکوس‌پذیر P به قسمی تعیین کنید که $R = PA$.

۴.۲ : کدام یک از ماتریسهای حقیقی زیر معکوس‌پذیر است. در صورت مثبت بودنِ جواب، ماتریس معکوس را به دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۳ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & -۲ & ۵ \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

۵.۲ : فرض کنیم F یک میدان باشد. نشان دهید رابطهٔ هم‌ارز سطری روی $F^{m\times n}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۶.۲ : فرض کنیم F یک هیأت، $c\in F$، و e عمل سطری مقدماتی باشد که c برابر سطر sام یک ماتریس را به سطر rام آن اضافه می‌کند. نشان دهید

$$e: F^{n\times m}\to F^{n\times m}$$

با ضابطهٔ $e(A)=B$ (که در اینجا c برابر سطر sام A را به سطر rام آن اضافه کرده‌ایم و B به دست آمده است) یک تابع دوسویی است. برای دو عمل سطری مقدماتی دیگر مشابهاً موضوع را بیان و اثبات کنید.

۷.۲ : فرض کنیم F یک میدان باشد. ماتریس $A\in F^{n\times n}$ را جایگشتی می‌نامیم، هرگاه در هر سطر و ستون دارای فقط یک ۱_R باشد و سایر درایه‌ها صفر باشند. نشان دهید:

الف) هر ماتریس جایگشتی متعامد است.

ب) اگر n زوج، و ماتریس جایگشتی A از تعویض سطر ۱ با سطر ۲، سطر ۳ با سطر ۴، ... ، سطر $n-۱$ با سطر n ماتریس همانی به دست آمده باشد، آن‌گاه $A^{-۱}=A$.

۸.۲ : Y را به قسمی تعیین کنید که دستگاه $AX=Y$ برای ماتریسهای با درایه‌های حقیقی زیر دارای جواب باشد.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۳ & ۰ \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ a+c & a+c & ۲a \\ ac & ac & a^{۲} \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} ۳ & -۶ & ۲ & -۱ \\ -۲ & ۴ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$(a\neq c\,\&\, a,b,c\in\mathbb{R})$$

۹.۲ : فرض کنیم $\lambda \in \mathbb{R}$. در خصوص تعداد جواب دستگاههای زیر، روی اعداد حقیقی بحث کنید.

$$\begin{cases} x+y+\lambda z = 2 \\ 3x+4y+2z = \lambda \\ 2x+3y-z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=1 \\ x+y+\lambda z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+\lambda y-z = 1 \\ 2x+y+2z = 5\lambda+1 \\ x-y+3z = 4\lambda+2 \\ x-2\lambda y+7z = 10\lambda-1 \end{cases}$$

۱۰.۲ : فرض کنیم $0 \neq R \in F^{n\times m}$ ماتریس تحویل شده سطری پلکانی که دارای t سطر ناصفر است و برای هر $1 \leq i \leq t$، اوّلین درایهٔ ناصفر سطر iام آن در ستون k_i می‌باشد. نشان دهید برای هر بردار $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m) \in F^m$، اگر،

$$x = a_1R_1 + a_2R_2 + \cdots + a_tR_t$$

آن گاه برای هر $i \in \mathbb{N}_t$، $a_i = x_{k_i}$.

۱۱.۲ : در صورت امکان $0 \neq f(x) \in F[x]$ به قسمی تعیین کنید که:

الف) $F=\mathbb{Z}_5$ و $x^2f^{(2)}(x)+xf'(x)+f(x)=1+x+x^2$.

ب) $F=\mathbb{R}$ و $x^3f^{(3)}(x)+(1-x^2)f^{(2)}(x)+xf'(x)-3f(x)=0$.

۱۲.۲ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و $A \in F^{n\times n}$. ثابت کنید:

الف) اگر A معکوس‌پذیر باشد و به ازای یک $B \in F^{n\times n}$، $AB=0$، آن گاه $B=0$.

ب) اگر A معکوس‌پذیر نباشد، آن گاه $B \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارد که $AB=0$، ولی $B \neq 0$.

۱۳.۲ : فرض کنیم F یک هیأت باشد، $A \in F^{m\times n}$ و $B \in F^{n\times m}$. نشان دهید اگر $n \lneqq m$، آن گاه AB معکوس‌پذیر نیست.

۱۴.۲ : فرض کنیم F یک هیأت باشد. نشان دهید اگر A پوچتوان باشد، آن گاه $I_n - A$ معکوس‌پذیر است.

۱۵.۲ : فرض کنیم ماتریس $A=(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ به قسمی باشد که برای هر $i,j \in \mathbb{N}_n$،

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

ثابت کنید A معکوس‌پذیر است.

۲.۲ دترمینان

فرض کنیم F یک هیات باشد و $A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$. برای هر $i,j \in \mathbb{N}_n$ ماتریس $A(i|j) \in F^{(n-1)\times(n-1)}$ که از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A حاصل می‌شود را **کهاد** یا **مینور** ijام ماتریس A می نامیم و از این مفهوم در تعریف دترمینان استفاده می‌نماییم.

دترمینان ماتریس A را با $|A|$ یا $\det(A)$ نمایش می‌دهیم و به صورت استقرایی زیر تعریف می کنیم. اگر $n = ۱$، آن گاه:

$$|A| = a_{۱۱}$$

فرض کنیم دترمینان برای کمتر از $n > ۱$ تعریف شده باشد. پس برای هر $i,j \in \mathbb{N}_n$، $|A(i|j)| \in F$ وجود دارد. حال؛

$$(-۱)^{i+j}|A(i|j)|$$

را **همعامل** یا **همسازه** ijام ماتریس A می‌نامیم و تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{۱۱}(-۱)^{۱+۱}|A(۱|۱)| + \cdots + a_{۱n}(-۱)^{۱+n}|A(۱|n)| \\ &= \textstyle\sum_{k=۱}^{n} a_{۱k}(-۱)^{۱+k}|A(۱|k)| \end{aligned}$$

از این رو خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix} &= a_{۱۱}(-۱)^{۱+۱}|A(۱|۱)| + a_{۱۲}(-۱)^{۱+۲}|A(۱|۲)| \\ &= a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱} \end{aligned}$$

چنانچه $A = (a_{ij}) \in F^{۳\times۳}$، دترمینان A برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} & a_{۱۱}(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۱۲}(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۱۳}(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} \\ &= a_{۱۱}(a_{۲۲}a_{۳۳} - a_{۲۳}a_{۳۲}) - a_{۱۲}(a_{۲۱}a_{۳۳} + a_{۲۳}a_{۳۱}) + a_{۱۳}(a_{۲۱}a_{۳۲} - a_{۲۲}a_{۳۱}) \\ &= (a_{۱۱}a_{۲۲}a_{۳۳} + a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱} + a_{۱۳}a_{۲۱}a_{۳۲}) \\ &\quad -(a_{۱۳}a_{۲۲}a_{۳۱} + a_{۱۲}a_{۲۱}a_{۳۳} + a_{۱۱}a_{۳۲}a_{۲۳}) \end{aligned}$$

بنابراین، اگر دو ستون اول ماتریس A را به صورت زیر؛

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

به ماتریس A اضافه نماییم و عناصر هر قطر اصلی را در هم ضرب کرده و سپس با یکدیگر جمع کنیم، و آن را منهای مجموع حاصلضرب عناصر روی قطرهای فرعی نماییم، مقدار به دست آمده همان دترمینان A است. این روش فقط برای ماتریس‌های ۳ × ۳ درست می‌باشد و به شیوه **ساروس** شناخته می‌شود.

قضیه ۱۳.۲ : فرض کنیم F یک هیات باشد و $A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$. در این صورت؛

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}(-1)^{i+1}|A(i|1)| + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}|A(i|n)| \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}|A(i|k)| \end{aligned}$$

و این فرمول را بسط نسبت به همعاملهای سطر iام ماتریس A می‌نامیم. همچنین؛

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1j}(-1)^{1+j}|A(1|j)| + \cdots + a_{nj}(-1)^{n+j}|A(n|j)| \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j}|A(k|j)| \end{aligned}$$

و این فرمول را بسط نسبت به همعاملهای ستون jام ماتریس A می‌نامیم.

برهان: در ضمیمه آورده شده است.

■

قضیه ۱۴.۲ : فرض کنیم F یک هیات باشد و $A \in F^{n\times n}$، آن گاه:

$$\det(A) = \det(A^t)$$

برهان: برای $n = 1$ بدیهی است. فرض می کنیم برای کمتر از $n \geq 2$ حکم برقرار باشد و $B = A^t$. در این صورت برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$، $a_{ij} = b_{ji}$ و با توجّه به فرض استقراء $|A(i|j)| = |B(j|i)|$. بنابراین؛

$$\begin{aligned} |A| &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k}|A(1|k)| \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} b_{k1}(-1)^{k+1}|B(k|1)| \\ &= |B| \\ &= |A^t| \end{aligned}$$

■

در قضیه زیر خواص اساسی دترمینان را می آوریم.

قضیه ۱۵.۲ : فرض کنیم F یک هیات باشد و $A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$.

۱) اگر A یک ماتریس بالا مثلثی یا پایین مثلثی باشد، آن گاه:

$$|A| = a_{۱۱}a_{۲۲}...a_{nn}$$

۲) اگر یک سطر از ماتریس A، صفر باشد، آن گاه $|A| = ۰$.

۳) اگر یکی از سطرها، مضربی از سطر دیگر باشد، آن گاه $|A| = ۰$.

۴) اگر $B = (b_{ij})$ و $C = (c_{ij})$ متعلق به $F^{n\times n}$ به قسمی باشند که برای هر $r, s \in \mathbb{N}_n$ و؛

$$c_{rs} = \begin{cases} a_{rs} + b_{rs} & \text{اگر } r = i \\ a_{rs} = b_{rs} & \text{اگر } r \neq i \end{cases}$$

آن گاه $\det(C) = \det(A) + \det(B)$.

۵) فرض کنیم $E \in F^{n\times n}$ یک ماتریس سطری مقدماتی باشد.

الف) فرض کنیم Eماتریس سطری مقدماتی نوع اول باشد که سطر iام ماتریس همانی I_n را در $F \ni c \neq ۰$ ضرب کرده و E به دست آمده است. در این صورت $|E| = c$ و $|EA| = c|A| = |E||A|$.

ب) فرض کنیم E ماتریس سطری مقدماتی نوع دوم باشد که از تعویض سطر iام و jام ماتریس همانی I_n حاصل شده باشد. در این صورت $|E| = -۱$ و $|EA| = -|A| = |E||A|$.

ج) فرض کنیم E ماتریس سطری مقدماتی نوع سوم باشد که c برابر سطر iام ماتریس همانی I_n را به سطر jام آن اضافه کرده ایم و E را به دست آوردهایم. در این صورت $|E| = |I_n| = ۱$ و $|EA| = |A| = |E||A|$.

۶) برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$،

$$a_{i1}(-1)^{j+1}|A(j|1)| + \cdots + a_{in}(-1)^{j+n}|A(j|n)| = \begin{cases} |A| & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

برهان: ۱) بنابر قضیهٔ ۱۴.۲، کافی است برای ماتریس های پایین مثلثی اثبات کنیم. برای $n = 1$، بدیهی است. فرض کنیم برای کمتر از $n \geq 2$ برقرار باشد. از این رو؛

$$|A(1|i)| = \begin{cases} a_{22}a_{33}...a_{nn} & \text{اگر } i = 1 \\ 0 & \text{اگر } i \neq 1 \end{cases}$$

و در نتیجه:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(-1)^{1+i}|A(1|i)| = a_{11}(-1)^{1+1}|A(1|1)| = a_{11}a_{22}...a_{nn}$$

۲) بنابر قضیهٔ ۱۳.۲، کافی است بسط دترمینان را بر حسب همعاملهای سطر صفر بنویسیم.

۳)اگر $n = 2$،آن گاه برای یک $c \in F$،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ca_{11} & ca_{12} \end{bmatrix}$$

و در نتیجه؛

$$|A| = ca_{11}a_{12} - ca_{12}a_{11} = 0$$

فرض کنیم برای کمتر از $n \geq 3$ برقرار باشد و سطر iام، c برابر سطر jام باشد. چون $n \geq 3$، پس $k \in \mathbb{N}_n$ به قسمی وجود دارد که $i \neq k \neq j$. از این رو بنا بر فرض استقرا برای هر $r \in \mathbb{N}_n$، $|A(k|r)| = 0$ و در نتیجه:

$$|A| = \sum_{r=1}^{n} a_{kr}(-1)^{k+r}|A(k|r)| = 0$$

۴) واضح است که برای هر $j \in \mathbb{N}_n$،

$$|A(i|j)| = |B(i|j)| = |C(i|j)|$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} |C| &= \sum_{j=1}^n c_{ij}(-1)^{i+j}|C(i|j)| \\ &= \sum_{j=1}^n (a_{ij}+b_{ij})(-1)^{i+j}|C(i|j)| \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j}|C(i|j)| + \sum_{j=1}^n b_{ij}(-1)^{i+j}|C(i|j)| \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j}|A(i|j)| + \sum_{j=1}^n b_{ij}(-1)^{i+j}|B(i|j)| \\ &= |A|+|B| \end{aligned}$$

۵) الف) اگر $B = EA$، آن‌گاه برای هر $r, s \in \mathbb{N}_n$،

$$b_{rs} = \begin{cases} ca_{rs} & r = i \text{ اگر} \\ a_{rs} & r \neq i \text{ اگر} \end{cases}$$

و برای هر $s \in \mathbb{N}_n$، $|A(i|s)| = |B(i|s)|$. ازاین رو:

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{s=1}^n b_{is}(-1)^{i+s}|B(i|s)| \\ &= \sum_{s=1}^n ca_{is}(-1)^{i+s}|A(i|s)| \\ &= c(\sum_{s=1}^n a_{is}(-1)^{i+s}|A(i|s)|) \\ &= c|A| \end{aligned}$$

ب) فرض کنیم $B = EA$. در ابتدا حکم را برای $j = i+1$ اثبات می‌کنیم. برای هر $s \in \mathbb{N}_n$، $|A(i|s)| = |B(i+1|s)|$ و $b_{(i+1)s} = a_{is}$. از این رو:

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{s=1}^n a_{is}(-1)^{i+s}|A(i|s)| \\ &= -\sum_{s=1}^n b_{(i+1)s}(-1)^{i+s+1}|B(i+1|s)| \\ &= -|B| \end{aligned}$$

فرض کنیم $t \in \mathbb{N}$ به قسمی باشد که $j = i+t$. با تعویض $2t-1$ بار سطرهای مجاورمی‌توانیم سطر iام و jام ماتریس A را تعویض کرد. لذا بنابر مرحله قبل:

$$|A| = (-1)^{2t+1}|B| = -|B|$$

ج) با توجّه به گزاره‌های (۳) و (۴) بدیهی است.

٦) اگر $i = j$ بنابر قضیهٔ ۱۳.۲، $|A| = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$.

حال فرض کنیم $i \neq j$. $B = (b_{ij}) \in F^{n\times n}$ را به قسمی در نظر می‌گیریم که برای هر $r, s \in \mathbb{N}_n$؛

$$b_{rs} = \begin{cases} a_{is}, & r = j \text{ اگر} \\ a_{rs}, & r \neq j \text{ اگر} \end{cases}$$

در واقع B از جایگزین کردن سطر iام ماتریس A به جای سطر jام آن حاصل شده است، یعنی؛ سطر iام و jام ماتریس B برابرند.از این رو برای هر $r \in \mathbb{N}_n$، $b_{jr} = a_{ir}$ و $|A(j|r)| = |B(j|r)|$. پس بنابر گزارهٔ (۳)؛

$$\begin{aligned} 0 &= |B| \\ &= \sum_{r=1}^{n} b_{jr}(-1)^{j+r}|B(j|r)| \\ &= \sum_{r=1}^{n} a_{ir}(-1)^{j+r}|A(j|r)| \end{aligned}$$

■

قضیه ۱۶.۲ : فرض کنیم F یک هیات بوده، $E_1, \ldots, E_t \in F^{n\times n}$ ماتریسهای سطری مقدماتی، و $A \in F^{n\times n}$. دراین صورت:

$$|E_t \cdots E_1 A| = |E_t| \cdots |E_1||A|$$

برهان: بنابر گزاره (۵) قضیهٔ ۱۵.۲، بدیهی است.

■

قضیه ۱۷.۲ : فرض کنیم F یک هیات باشد. $A \in F^{n\times n}$ ماتریس معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $|A| \neq 0$.

برهان: $\Leftarrow$) اگر A معکوس‌پذیر باشد، آن گاه بنابر قضیهٔ ۹.۲، $E_1, \ldots, E_t \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارند که $A = E_1 E_2 \cdots E_t$. از آنجا که دترمینان ماتریسهای سطری مقدماتی ناصفر هستند، پس بنابر قضیهٔ ۱۶.۲، $|A| = |E_1| \cdots |E_t| \neq 0$.

$\Rightarrow$) فرض کنیم A هم‌ارز سطری ماتریس تحویل شده سطری پلکانی R باشد. اگر A معکوس‌پذیر نباشد، آن گاه $R \neq I_n$ و در نتیجه دارای یک سطر صفر است. لذا $|R| = 0$.

بنابر قضیهٔ ۴.۲، ماتریسهای سطری مقدماتی $E_1, \ldots, E_t \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارند که $A = E_t \cdots E_1 R$. لذا بنابر قضیهٔ ۱۶.۲، $|A| = |E_t| \cdots |E_1||R| = 0$ و این با فرض مغایرت دارد.

■

قضیه ۱۸.۲ : فرض کنیم F یک هیات باشد و $A, B \in F^{n\times n}$. دراین صورت:

$$|AB| = |A||B|$$

برهان: اگر A معکوس‌پذیر باشد، آن گاه بنابر قضیهٔ ۹.۲، ماتریسهای سطری مقدماتی $E_1, \cdots, E_t \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارند که $A = E_1E_2\cdots E_t$. از این رو بنابر قضیهٔ ۱۶.۲،

$$|A| = |E_1||E_2|\cdots|E_t|$$

و؛

$$\begin{aligned} |AB| &= |E_1E_2\cdots E_tB| \\ &= |E_1|\cdots|E_t||B| \\ &= |A||B| \end{aligned}$$

اگر A معکوس‌پذیر نباشد، آن گاه ماتریس تحویل شده سطری پلکانی R و ماتریسهای سطری مقدماتی $E_1, \ldots, E_t \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارند که $A = E_t\cdots E_1R$ و همچنین R دارای یک سطر صفر است. لذا RB نیز دارای یک سطر صفر است و $|RB| = 0$. از این رو بنابر قضیهٔ ۱۶.۲،

$$\begin{aligned} |AB| &= |E_t\cdots E_1RB| \\ &= |E_t|\cdots|E_1||RB| \\ &= 0 \end{aligned}$$

و چون بنابر قضیهٔ ۱۷.۲، $|A| = 0$، پس $|AB| = 0 = |A||B|$.

■

فرض F کنیم یک هیات باشد و $A \in F^{n\times n}$. ماتریس **همعاملهای** یا **همسازه‌های** A، عبارت از ماتریسی است که درایهٔ موقعیت (i,j)ام آن برابر با $(-1)^{i+j}|A(i|j)|$ می‌باشد. ترانهاده ماتریس همعاملهای A را ماتریس **الحاقی** A می‌نامیم و با نماد $adj(A)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۹.۲ : اگر F یک هیات باشد و $A \in F^{n\times n}$، آن گاه:

$$A\ adj(A) = |A|I_n$$

برهان: گیریم $A\ adj(A) = (b_ij) \in F^{n\times n}$. در این صورت بنابر گزارهٔ (٦) قضیهٔ ۱۵.۲، برای هر $i, j \in N_n$ با کمی تسامح داریم که:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= [a_{i1}...a_{in}] \begin{bmatrix} (-1)^{j+1}|A(j|1)| \\ \vdots \\ (-1)^{j+n}|A(j|n)| \end{bmatrix} \\ &= a_{i1}(-1)^{j+1}|A(j|1)| + ... + a_{in}(-1)^{j+n}|A(j|n)| \\ &= \begin{cases} |A|, & \text{اگر } i = j \\ 0, & \text{اگر } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

از این رو $A\ adj(A) = |A|I_n$.

■

قضیه فوق یک روش دیگر برای محاسبه معکوس یک ماتریس بیان می کند.

قضیه ۲۰.۲ : فرض کنیم F یک هیات باشد.اگر $A \in F^{n\times n}$ معکوس‌پذیر باشد، آن گاه $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ و $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj(A)$.

برهان: با توجه به قضایای ۱۸.۲ و ۱۹.۲، بدیهی است.

■

قضیه زیر روش دیگری برای یافتن جوابهای دستگاه $AX = Y$ را که $|A| \neq 0$ ، بیان می‌کند.

قضیه ۲۱.۲ : (قاعدهٔ کرامر): فرض کنیم F یک هیات و $A \in F^{n\times n}$ معکوس پذیر باشد. اگر $Y \in F^{n\times 1}$و برای هر $j \in N_n$ ماتریس $A_j \in F^{n\times n}$ از قرار دادن Y به جای ستون jام ماتریس A حاصل شود و؛

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

آن گاه؛

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

جواب دستگاه $AX = Y$ می باشد.

برهان: چون A معکوس‌پذیر است، بنابر قضایای ۹.۲ و ۲۰.۲،

$$X = A^{-1}Y = \frac{1}{|A|}adj(A)Y$$

تنها جواب دستگاه می‌باشد. از این رو با کمی تسامح؛

$$\begin{aligned} x_j &= \tfrac{1}{|A|}\left[\begin{array}{ccc} (-1)^{1+j}|A(1|j)| & \cdots & (-1)^{n+j}|A(n|j)| \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{array}\right] \\ &= \tfrac{1}{|A|}[y_1(-1)^{1+j}|A(1|j)| + \cdots + y_n(-1)^{n+j}|A(n|j)|], \qquad \forall j \in N_n \end{aligned} \qquad (*)$$

از طرفی با توجه به تعریف A_j برای هر $j \in N_n$، همعامل kjام ماتریس A_j برابر با همعامل kjام ماتریس A، یعنی؛ $(-1)^{k+j}|A(k|j)|$ می‌باشد. لذا اگر بسط دترمینان ماتریس A_j را بر حسب همعاملهای ستون jام آن بنویسیم، خواهیم داشت که؛

$$|A_j| = y_1(-1)^{1+j}|A(1|j)| + \ldots + y_n(-1)^{n+j}|A(n|j)|$$

و از رابطه $(*)$ نتیجه می شود که؛

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, \qquad \forall j \in N_n$$

■

تمرینات

۱٦.۲ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و $A \in F^{n\times n}$. نشان دهید اگر $c \in F$، آن گاه:

$$\det(cA) = c^n \det A$$

۱۷.۲ : فرض کنیم F یک هیأت و ماتریس $A \in F^{n\times n}$ پاد متقارن است. نشان دهید اگر $char(F) = 0$ و n عدد فرد باشد، آن گاه $|A| = 0$.

۱۸.۲ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و ماتریس $A \in F^{n\times n}$ به قسمی باشد که $A^{2} = A$، یعنی؛ A خودتوان است. نشان دهید:

الف) اگر $A \neq I_n$، آن‌گاه $\det(A) = 0$.

ب) اگر $1 \neq \lambda \in F$، آن‌گاه $I_n - \lambda A$ معکوس‌پذیر است و

$$(I_n - \lambda A)^{-1} = I_n + \frac{\lambda}{1-\lambda}A$$

۱۹.۲ : فرض کنیم F یک هیأت باشد. برای $A \in F^{n\times n}$؛

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$$

را **چندجمله‌ای مشخصهٔ** ماتریس A و ریشه‌های $\chi_A(x)$ را مقادیر ویژه آن می‌نامیم. نشان دهید که $\chi_A(x)$ تکین و دارای درجهٔ n بوده و $tr(A)$ برابر با قرینهٔ ضریب x^{n-1} در $\chi_A(x)$ است. اگر؛

$$\chi_A(x) = (x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k} \qquad (\star)$$

ثابت کنید:

الف) $\chi_A(0) = (-1)^n \det(A) = (-1)^n c_1^{d_1}\cdots c_k^{d_k}$.

ب) $tr(A) = c_1 d_1 + \cdots + c_k d_k$.

ج) اگر A ماتریس معکوس‌پذیر باشد، آن گاه:

$$\det(xI_n - A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}(-x)^n \chi_A(\frac{1}{x})$$

د) اگر A ماتریس معکوس‌پذیر باشد، آن گاه:

$$tr(A^{-1}) = (-1)^{n+1}\frac{1}{\det(A)}(\text{ضریب } x \text{ در} \chi_A(x))$$

۲۰.۲ : فرض کنیم λ_1 و λ_2 متعلق به هیأت F باشند و $A \in F^{n\times n}$. نشان دهید λ_1 مقدار ویژهٔ A است اگر و تنها اگر $\lambda_2 + \lambda_1$ مقدار ویژهٔ ماتریس $\lambda_2 I_n + A$ باشد.

۲۱.۲ : فرض کنیم F یک هیأت و $A \in F^{3\times 3}$ ماتریس معکوس‌پذیری باشد که $tr(A) = tr(A^{-1}) = 0$ و $\det(A) = 1$. اگر $\chi_A(A) = 0$، آن گاه نشان دهید $A^3 = I_3$.

۲۲.۲ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و $A, B \in F^{n\times n}$. A را **متشابه** B می‌نامیم، هرگاه ماتریس معکوس‌پذیر $P \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود داشته باشد که $B = P^{-1}AP$. نشان دهید که:

الف) رابطهٔ تشابه روی $F^{n\times n}$، یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

ب) چندجمله‌ایهای مشخصهٔ دو ماتریس متشابه برابرند.

۲۳.۲ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و $A \in F^{2\times 2}$. ثابت کنید:

$\det(I_{n\times n} - A) = 1 + \det(A)$ اگر و تنها اگر $tr(A) = 0$.

۲۴.۲ : فرض کنیم F یک هیأت و $A \in F^{n\times n}$ ماتریس متعامد باشند. نشان دهید $\det(A) = \pm 1$. یک ماتریس متعامد A مثال بزنید که $\det(A) = -1$.

۲۵.۲ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و $x_1, \ldots, x_n \in F$. نشان دهید:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$$

این دترمینان به دترمینان **واندرموند** V_n معرف است. برای اینکه استقراً را به راحتی به کار برید، هر ستون را در x_1 ضرب کرده و آن را از ستون سمت راست بعدی کم کنید. اگر از سمت راست شروع کنید، به دست می‌آورید:

$$V_n = (x_n - x_1)\cdots(x_2 - x_1)V_{n-1}$$

۲۶.۲ : فرض کنیم $f(x)$ و $g(x)$ توابعی باشند که از همهٔ مراتب مشتق‌پذیر می‌باشند. اگر؛

$$\varphi(x) = \det \begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{bmatrix}$$

نشان دهید:

$$\varphi'(x) = \det \begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ f''(x) & g''(x) \end{bmatrix}$$

۲۷.۲ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و $x, y \in F$. با استفاده از خواص دترمینان نشان دهید:

$$\det \begin{bmatrix} x & y & y & y \\ y & x & y & y \\ y & y & x & y \\ y & y & y & x \end{bmatrix} = (x + ۳y)(x - y)^۳$$

۲۸.۲ : اگر F یک هیأت و؛

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & -a_۰ \\ ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & -a_۱ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ & -a_۲ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & -a_{n-۱} \end{bmatrix} \in F^{n \times n}$$

آن‌گاه ثابت کنید $\chi_A(x) = a_۰ + a_۱ x + \cdots + a_{n-۱} x^{n-۱} + x^n$.

۲۹.۲ : با استفاده از روش کرامر دستگاه معادلات زیر را روی هیأت داده شده F حل کنید.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x + \frac{۱}{۲}y + \frac{۱}{۳}z & = & ۱ \\ \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۳}y + \frac{۱}{۴}z & = & ۰ \\ \frac{۱}{۳}x + \frac{۱}{۴}y + \frac{۱}{۵}z & = & ۲ \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \overline{۲}x + \overline{۳}y + z & = & \overline{۱} \\ \overline{۲}x + \overline{۴}z & = & \overline{۰} \\ \overline{۲}x + \overline{۳}y & = & \overline{۰} \end{array} \right.$$

$$F = \mathbb{R} \qquad\qquad F = \mathbb{Z}_۵$$

۳۰.۲ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و $A, B \in F^{n \times n}$. نشان دهید:

الف) $(adj(A))^t = adj(A^t)$.

ب) A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $adj(A)$ معکوس‌پذیر باشد.

ج) اگر A معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه $|adj(A)| = |A|^{n-۱}$.

د) $adj(AB) = adj(B)adj(A)$.

ه) $|adj(adj(A))| = |A|^{(n-1)^2}$.

۳۱.۲ : با کشیدن خطهای افقی و عمودی می‌توان یک ماتریس را به ماتریس‌های کوچکتر افراز کرد که هر ماتریس جدید را یک بلوک ماتریس می‌گوییم و همانند درایه‌های ماتریس موقعیت آن را نام گذاری می‌کنیم. برای نمونه داریم:

$$\left[\begin{array}{c|cc|cc} 2 & 3 & 4 & 0 & 9 \\ \hline 0 & 7 & 0 & 63 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 3 & 34 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 4 & 0 & 9 \\ 0 & 7 & 0 & 63 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 34 \end{array}\right]$$

فرض کنیم F یک هیأت و $A = (A_{ij})_{m' \times n'} \in F^{m\times n}$، $B = (B_{ij})_{m' \times n'} \in F^{m\times n}$، و $C = (C_{ij})_{n' \times p'} \in F^{n\times p}$ ماتریسهای بلوکی باشند. ثابت کنید:

الف) برای هر $k \in F$، $kA = (kA_{ij})_{m' \times n'} \in F^{m\times n}$.

ب) $A + B = (A_{ij} + B_{ij})_{m' \times n'} \in F^{m\times n}$.

ج) اگر تعداد ستونهای A_{ij} با تعداد سطرهای C_{jr} برابر باشد، آن‌گاه:

$$AC = (V_{ij})_{m' \times p'} \in F^{m\times p}$$

که در آن برای هر $i \in \mathbb{N}_{m'}$ و $j \in \mathbb{N}_{p'}$، $V_{ij} = \sum_{k=1}^{n'} A_{ik}C_{kj}$

۳۲.۲ : فرض کنیم F یک هیأت باشد، $A \in F^{r\times r}$، $C \in F^{s\times s}$، $B \in F^{r\times s}$، و ماتریس صفر متعلق به $F^{s\times r}$ است. نشان دهید:

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det(A)\det(C)$$

به طور کلی، ثابت کنید هرگاه M یک ماتریس بلوکی و بالا مثلثی با ماتریسهای مربعی A_1، …، A_n روی قطر باشد، آن گاه $|M| = |A_1|\cdots|A_n|$.

فصل ۳

فضاهای برداری

۳.۱ زیرفضای برداری

در این بخش به مفهوم اساسی جبرخطی که همان فضای برداری می‌باشد، می‌پردازیم. فضاهای برداری روی یک میدان تعمیمی از گروههای آبلی هستند.

فرض کنیم F یک هیأت باشد. یک **فضای برداری** روی هیأت F، گروه آبلی جمعی مانند V، همراه با تابع اسکالری مانند $F \times V \to V$ (نقش (r, α) را با $r\alpha$ نمایش می‌دهیم) است که به ازای هر $r, s \in F$ و $\alpha, \beta \in V$ چهار شرط زیر برقرار باشد.

۱) $r(\alpha + \beta) = r\alpha + r\beta$.

۲) $(r + s)\alpha = r\alpha + s\alpha$.

۳) $r(s\alpha) = (rs)\alpha$.

۴) $1_F\alpha = \alpha$.

به هر عنصر V یک **بردار** و به هر عنصر F یک **اسکالر** می‌گوییم. اگر در مفهوم فوق حلقه بجای هیأت به کار برده شود، آن را $F-$ **مدول چپ** می‌نامیم. به طور مشابه $F-$**مدول راست** تعریف می‌شود و تنها تفاوت آن، ضرب عناصر حلقه در عناصر گروه است، یعنی؛ تابع

اسکالری به صورت $V \times F \to V$ است. قسمت اعظم نظریهٔ گروهها به مدولها اختصاص دارد و در مطالعهٔ جبر پیشرفته، مدولها اساس کار هستند. فضاهای برداری حالت خاص مدولها می‌باشند.

قضیه ۱.۳ : فرض کنیم V یک فضای برداری روی هیأت F باشد، $\alpha \in V$، و $r \in F$. در این صورت:

۱) $\circ\alpha = \circ$، یعنی؛ حاصل‌ضرب هر بردار در اسکالر صفر، بردار صفر است.

۲) $r\circ = \circ$، یعنی؛ حاصل‌ضرب بردار صفر در هر اسکالر، بردار صفر است.

۳) $(-۱)\alpha = -\alpha$.

برهان: با توجّه به تعریف داریم که:

$$\begin{array}{rcl} \circ\alpha & = & \circ\alpha + \circ \\ & = & \circ\alpha + (\circ\alpha - \circ\alpha) \\ & = & (\circ\alpha + \circ\alpha) - \circ\alpha \\ & = & (\circ + \circ)\alpha - \circ\alpha \\ & = & \circ\alpha - \circ\alpha \\ & = & \circ \end{array}$$

گزارهٔ (۲) مشابه گزارهٔ (۱) اثبات می‌شود و؛

$$\begin{array}{rcl} (-۱)\alpha & = & (-۱)\alpha + \circ \\ & = & (-۱)\alpha + (\alpha + (-\alpha)) \\ & = & ((-۱)\alpha + \alpha) + (-\alpha) \\ & = & ((-۱) + ۱)\alpha + (-\alpha) \\ & = & \circ\alpha + (-\alpha) \\ & = & \circ + (-\alpha) \\ & = & -\alpha \end{array}$$

■

در قضیهٔ زیر مثالهایی از فضاهای برداری را آورده‌ایم، که بعداً مورد استفاده قرار می‌گیرند.

قضیه ۲.۳ : فرض کنیم F یک هیات باشد.

۱) $F^{m\times n}$ با عمل جمع ماتریسها و ضرب اسکالر؛

$$r(a_{ij}) = (ra_{ij}), \qquad \forall (a_{ij}) \in F^{m\times n} \,\&r \in F$$

یک فضای برداری روی F است.

۲) اگر F^n مجموعهٔ تمام n تاییهای مرتب روی F باشد، و برای هر $x=(x_1,\dots,x_n), y=(y_1,\dots,y_n)\in F^n$ و $r\in F$ تعریف کنیم؛

$$x+y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$
$$rx=(rx_1,\dots,rx_n)$$

آن‌گاه F^n با اعمال جمع و ضرب اسکالر فوق یک فضای برداری روی هیأت F است.

۳) $F[x]$ با عمل جمع چندجمله‌ایها و ضرب اسکالر؛

$$r(a_0+\cdots+a_nx^n)=ra_0+\cdots+ra_nx^n,\quad \forall a_0+\cdots+a_nx^n\in F[x]\,\&r\in F$$

یک فضای برداری روی F است.

۴) $F_n[x]$ با عمل جمع چندجمله‌ایها و ضرب اسکالر گزارهٔ (۳) یک فضای برداری روی F است.

برهان: به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

فرض کنیم W زیرمجموعهٔ ناتهی فضای برداری V روی هیأت F باشد. چنانچه W با عمل جمع بردار و ضرب اسکالر مربوط به V خود نیز یک فضای برداری باشد، آن گاه W را **زیرفضای** V می‌نامیم. به طور کلی اگر $\emptyset\neq W\subseteq V$، آن‌گاه خوش‌تعریفی جمع بردارها و ضرب اسکالر، شرکت‌پذیری و تعویض‌پذیری جمع بردارها، و چهار شرط تعریف فضای برداری برای W نیز برقرار است که معمولاً می‌گوییم W این خواص را از فضای برداری V به ارث می‌برد.

اگر V فضای برداری باشد، آن گاه V و مجموعهٔ تک عضوی بردار صفر زیرفضاهای V هستند، آنها را **زیرفضاهای بدیهی** V می‌نامیم.

اگر F یک هیأت باشد، آن گاه $F_n[x]$ زیرفضای $F[x]$ روی F است.

قضیه ۳.۳ : فرض کنیم W زیرمجموعهٔ ناتهی فضای برداری V روی هیأت F باشد. W زیرفضای V است اگر و تنها اگر برای هر $\alpha,\beta\in W$ و $r\in F$،

$$r\alpha+\beta\in W$$

برهان: $\Leftarrow$) اگر W زیرفضای V باشد، $\alpha, \beta \in W$ و $r \in F$، آن گاه $r\alpha, \beta \in W$ و در نتیجه $r\alpha + \beta \in W$.

$\Rightarrow$) اگر $\alpha, \beta \in W$، آن گاه بنابر فرض $-\alpha + \beta = (-1)\alpha + \beta \in W$. از این رو بنابر قضیهٔ ۱.۱، W با عمل جمع بردارهای V یک گروه آبلی است. چنانچه $\alpha \in W$ و $r \in F$، آن گاه بنابر فرض $(-1)\alpha + \alpha = 0 \in W$ و در نتیجه $r\alpha = r\alpha + 0 \in W$، یعنی؛ W تحت ضرب اسکالر بسته است. واضح است که W خواص دیگر فضای برداری را از V به ارث می‌برد، لذا W زیرفضای V است.

■

قضیه ۴.۳ : فرض کنیم F یک هیأت باشد. اگر $A \in F^{m\times n}$، آن گاه مجموعهٔ جواب دستگاه همگن $AX = 0$، زیرفضای $F^{n\times 1}$ است.

برهان: چون هر دستگاه همگن دارای جواب بدیهی صفر است، پس مجموعهٔ جواب دستگاه ناتهی است. فرض کنیم $r \in F$ و $X_1, X_2 \in F^{n\times 1}$ جواب دستگاه $AX = 0$ باشند. بنابراین:

$$\begin{aligned} A(rX_1 + X_2) &= rAX_1 + AX_2 \\ &= r0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

لذا بنابر قضیهٔ ۳.۳، مجموعهٔ جواب دستگاه همگن $AX = 0$، زیرفضای $F^{n\times 1}$ است.

■

هرگاه A گردایه‌ای از زیرفضاهای V باشد، آن‌گاه $\bigcap A$ یک زیرفضای V است. هرگاه S زیرمجموعهٔ فضای V باشد، آن گاه اشتراک تمام زیرفضاهای V را که شامل S هستند، **زیرفضای تولید شده توسط** S می‌نامیم و با $Span(S)$ یا (S) نمایش می‌دهیم و S را **مجموعه مولد** $Span(S)$ می‌نامیم. واضح است؛$Span(\emptyset) = \{0\}$.

قضیه ۵.۳ : فرض کنیم S زیرمجموعهٔ فضای برداری V روی هیأت F و W زیرفضای V باشند. $Span(S) \subseteq W$ اگر و تنها اگر $S \subseteq W$.

برهان: $\Leftarrow$) بدیهی است که $S \subseteq Span(S) \subseteq W$.

$\Rightarrow$) اگر $S \subseteq W$، آن گاه بنابر تعریف $Span(S) \subseteq W$.

■

فرض کنیم V یک فضای برداری روی هیأت F باشد. اگر $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$ و اسکالرهای r_1، ...، r_n به قسمی وجود داشته باشند که؛

$$\beta = r_1\alpha_1 + \cdots + r_n\alpha_n$$

آن‌گاه β را **ترکیب خطی** بردارهای α_1، ...، α_n می‌نامیم.

قضیه ۶.۳ : فرض کنیم S زیرمجموعهٔ ناتهی فضای برداری V روی هیأت F باشد و؛

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i s_i : n \in \mathbb{N} \& \forall i \in \mathbb{N}_n (r_i \in F \& s_i \in S) \right\}$$

در این صورت:

۱) W زیرفضای V شامل S است.

۲) $Span(S) = W$، یعنی؛ $Span(S)$ مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی عناصر S است.

برهان: ۱) برای هر $s \in S$، واضح است؛

$$s = 1s \in W$$

لذا $\emptyset \neq S \subseteq W$. اگر $\alpha, \beta \in W$، آن گاه؛

$$r_1, \dots, r_n, r'_1, \dots, r'_m \in F \quad \text{و} \quad s_1, \dots, s_n, s'_1, \dots, s'_m \in S$$

به قسمی وجود دارند که؛

$$\beta = r'_1 s'_1 + \cdots r'_m s'_m \quad \text{و} \quad \alpha = r_1 s_1 + \cdots r_n s_n$$

حال به ازای هر اسکالر $r \in F$؛

$$r\alpha + \beta = \sum_{i=1}^{n} (rr_i)s_i + \sum_{i=1}^{m} r'_i s'_i \in W$$

پس بنابر قضیهٔ ۳.۳، W زیرفضای V شامل S است.

۲) بنابر گزارهٔ (۱) و قضیهٔ ۵.۳، $Span(S) \subseteq W$ و از تعریف W واضح است که $W \subseteq Span(S)$. از این رو $Span(S) = W$.

■

فرض کنیم S زیرمجموعهٔ فضای برداری V روی هیأت F باشد. اگر S متناهی باشد، $Span(S)$ را متناهیاً تولیدشده، و اگر شماراباشد $Span(S)$ را به طور شمارا تولید شده می‌نامیم. چنانچه $Span(S) = V$، گوییم V **توسط** S **تولیدشده** است.

قضیه ۷.۳ : فرض کنیم F یک هیأت باشد. در این صورت:

$$F_n[x] = Span(1, x, \ldots, x^n)$$

برهان: بدیهی است.

■

مثال ۶ : فرض کنیم برای هر $i \in \mathbb{N}_3$، $\alpha_i = (i, i+1, i+2) \in \mathbb{R}^3$. $\alpha \in \mathbb{R}^3$ به قسمی تعیین کنید که $\alpha \in Span(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

حل: فرض کنیم $\alpha \in Span(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. پس بنابر قضیهٔ ۶.۳، $x, y, z \in \mathbb{R}$ به قسمی وجود دارند که؛

$$x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 = \alpha$$

اگر $\alpha = (a, b, c)$، دستگاه زیر دارای جواب (x, y, z) است.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= a \\ 2x + 3y + 4z &= b \\ 3x + 4y + 5z &= c \end{cases}$$

اما ماتریس افزوده دستگاه هم‌ارز سطری ماتریس زیر است؛

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3a + 2b \\ 0 & 1 & 2 & 2a - b \\ 0 & 0 & 0 & a - 2b + c \end{array}\right]$$

از این رو $a - 2b + c = 0$ و در نتیجه؛

$$\alpha = b(2, 1, 0) + c(-1, 0, 1)$$

■

هر گاه $\{V_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از زیرفضاهای، فضای برداری V باشد، آن گاه زیرفضای تولید شده توسط $S=\bigcup_{i\in I} V_i$ را **مجموع گردایهٔ** $\{V_i\}_{i\in I}$ می‌نامیم و قرار می‌دهیم؛

$$Span(S)=\sum_{i\in I} V_i$$

و اگر برای $n\in\mathbb{N}$، $I=\{i_1,\ldots,i_n\}$، می‌نویسیم:

$$Span(S)=V_{i_1}+\cdots+V_{i_n}$$

قضیه ۸.۳ : فرض کنیم V فضای برداری روی هیأت F و $\{V_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از زیرفضاهای V باشند، آن گاه:

$$\sum_{i\in I} V_i=\left\{\sum_{j=1}^{n}\beta_{i_j} : n\in\mathbb{N}\&\forall j\in\mathbb{N}_n(\beta_{i_j}\in V_{i_j}\&i_j\in I)\right\}$$

برهان: قرار می‌دهیم:

$$W=\left\{\sum_{j=1}^{n}\beta_{i_j} : n\in\mathbb{N}\&\forall j\in\mathbb{N}_n(\beta_{i_j}\in V_{i_j}\&i_j\in I)\right\}$$

چون $\sum_{i\in I} V_i$ تحت جمع تعداد متناهی از عناصرش بسته است و $\bigcup_{i\in I} V_i\subseteq\sum_{i\in I} V_i$، پس $W\subseteq\sum_{i\in I} V_i$. به سادگی دیده خواهد شد که W زیرفضای V است. از طرفی با توجّه به تعریف W، برای هر $i\in I$ و $\alpha\in V_i$، $\alpha\in W$، یعنی؛ $\bigcup_{i\in I} V_i\subseteq W$. از این رو بنابر قضیهٔ ۵.۳،

$$\sum_{i\in I} V_i=Span(\bigcup_{i\in I} V_i)\subseteq W$$

و نهایتاً داریم که $W=\sum_{i\in I} V_i$.

■

گردایهٔ $\{V_i\}_{i\in I}$ از زیر فضاهای، فضای برداری V را **گردایه‌ای مستقل از زیر فضاهای،** فضای برداری V می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمجموعهٔ متناهی $J\subseteq I$ و برای هر $i\in I\setminus J$؛

$$(\sum_{j\in J} V_j)\cap V_i=(0)$$

اگر گردایهٔ $\{V_i\}_{i\in I}$ از زیرفضاهای V مستقل باشند، آن گاه W مجموع گردایهٔ $\{V_i\}_{i\in I}$ را با؛

$$W = \sum_{i\in I} \oplus V_i$$

نمایش می‌دهیم و آن را **جمع مستقیم** گردایهٔ $\{V_i\}_{i\in I}$ می‌نامیم و به هر یک از V_iها **جعموند** W اطلاق می‌شود.

قضیه ۹.۳ : فرض کنیم $\{V_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای ناتهی از زیرفضاهای، فضای برداری V روی هیأت F باشد و $W = \sum_{i\in I} V_i$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱) W جمع مستقیم گردایهٔ $\{V_i\}_{i\in I}$ است.

۲) برای هر زیرمجموعهٔ متناهی J از I، اگر؛

$$\sum_{j\in J} \alpha_j = \circ$$

که در اینجا برای هر $j \in J$، $\alpha_j \in V_j$، آن گاه برای هر $j \in J$، $\alpha_j = \circ$.

۳) هر $\beta \in W$ به صورت یکتایی به شکل؛

$$\beta = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_n}$$

با $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha_{i_j} \in V_{i_j}$ بیان می‌شود.

برهان: به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

■

مثال ۷ : فرض کنیم،

تمرینات

۱.۳ : آیا $\mathbb{R}^{۲}$ با اعمال تعریف شده زیر،

$$\begin{aligned}(x, y) + (x_۱, y_۱) &= (x + x_۱, ۰)\\ c(x, y) &= (cx, ۰)\end{aligned}$$

یک فضای برداری است.

۲.۳ : فرض کنیم W مجموعهٔ جواب دستگاه،

$$\begin{cases} ٦x_۱ - ۳x_۲ + ۴x_۳ - ۳x_۴ & = ۰\\ ۲x_۱ + ۳x_۳ - x_۵ & = ۰\\ ۸x_۱ - ۳x_۲ + ٦x_۳ - ۳x_۴ - ۳x_۵ & = ۰\end{cases}$$

در $\mathbb{R}^{۵}$ باشد. مجموعه‌ای از چند بردار بیابید که W را روی هیات $\mathbb{R}$ تولید کند.

۳.۳ : فرض کنیم $\mathcal{F}$ گردایه‌ای ناتهی از زیرفضاهای، فضای برداری V روی هیأت F باشد. ثابت کنید اگر برای هر $W_۱, W_۲ \in \mathcal{F}$،

$$W_۱ \subseteq W_۲ \quad \text{یا} \quad W_۲ \subseteq W_۱$$

آن‌گاه $\bigcup \mathcal{F}$ زیرفضای برداری V است.

۴.۳ : فرض کنیم $W_۱$ و $W_۲$ زیرفضاهای، فضای برداری V روی هیأت F باشند. ثابت کنید اگر $W_۱ \cup W_۲$ زیرفضای برداری V باشد، آن گاه $W_۱ \subseteq W_۲$ یا $W_۲ \subseteq W_۱$.

۵.۳ : فرض کنیم V فضای برداری همهٔ توابع از $\mathbb{R}$ به توی $\mathbb{R}$ باشد. اگر V_e و V_o به ترتیب مجموعهٔ توابع زوج و فرد باشند، آن گاه نشان دهید:

الف) V_e و V_o زیرفضاهای، فضای برداری V روی هیأت $\mathbb{R}$ هستند.

ب) $V = V_e \oplus V_o$.

٦.۳ : فرض کنیم V فضای برداری روی هیأت F باشد. برای هر $\alpha_۱, \dots, \alpha_n, y, z \in V$ نشان دهید که:

الف) اگر،

$$y \in Span(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, z) \setminus Span(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

آن‌گاه $z \in Span(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, y)$.

ب) $Span(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = Span(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, y)$ اگر و تنها اگر $y \in Span(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

۷.۳ : فرض کنیم F یک هیأت و $\mathcal{A} \subseteq F^{n\times n}$ گردایه‌ای از ماتریس‌های پوچ‌توان باشند. با توجّه به این مطلب که ماتریس‌های پوچ‌توان دارای اثر صفر هستند، ثابت کنید که

$$Span(\mathcal{A}) \neq F^{n\times n}$$

۸.۳ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و،

$$\mathcal{A} = \{AB - BA : A, B \in F^{n\times n}\}$$

ثابت کنید که $Span(\mathcal{A}) \neq F^{n\times n}$.

۹.۳ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و $P_1(x), \ldots, P_n(x) \in F[x]$. ثابت کنید که:

$$Span(P_1(x), \ldots, P_n(x)) \neq F[x]$$

۳.۲ مفاهیم پایه و بعد

در بخش قبل با فضای برداری، زیرفضای برداری، و همچنین با زیرفضای تولید شده توسط یک مجموعه آشنا شدیم. در این بخش با مفاهیم پایه و بعد فضای برداری آشنا می‌شویم.

فرض کنیم S زیرمجموعهٔ فضای برداری V روی هیأت F باشد. اگر بردارهای متمایز $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$ و اسکالرهای $x_1, \ldots, x_n \in F$، که همزمان همگی صفر نیستند، به قسمی وجود داشته باشند که؛

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$$

آن گاه مجموعهٔ S را **وابستهٔ خطی** می‌نامیم و چنانچه یک مجموعه از بردارها وابستهٔ خطی نباشد، **مستقل خطی** نامیده می‌شود. از این رو مجموعهٔ تهی همیشه مستقل خطی است.

زیرمجموعهٔ یک مجموعه مستقل خطی، مستقل خطی است، ولی این مطلب برای وابستهٔ خطی درست نیست، زیرا هر زیرمجموعهٔ تک عضوی ناصفر از یک فضای برداری مستقل خطی است.

هر مجموعه که شامل بردار صفر باشد، وابستهٔ خطی است. زیرمجموعهٔ $\mathfrak{B}$ از فضای برداری V روی هیأت F را یک **پایه** می‌گوییم، هرگاه مستقل خطی باشد و $Span(\mathfrak{B}) = V$. اگر فضای برداری دارای یک پایه متناهی باشد، آن را با بعد متناهی یا دارای بعد متناهی می‌نامیم.

با توجّه به تعریف چندجمله‌ایها، اگر F یک هیأت باشد، آن گاه $\{۱, x, \ldots, x^n, \ldots\}$ پایهٔ فضای برداری $F[x]$ روی F است. همچنین برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\{۱, x, \ldots, x^n\}$ پایهٔ فضای برداری $F_n[x]$ روی F است.

قضیه ۱۰.۳ : فرض کنیم V فضای برداری روی هیأت F است. اگر S زیرمجموعهٔ مستقل خطی V باشد و $\beta \in V \setminus Span(S)$، آن‌گاه $S \cup \{\beta\}$ زیرمجموعهٔ مستقل خطی V است.

برهان: فرض کنیم بردارهای $\alpha_۱, \ldots, \alpha_n \in S$ و اسکالرهای $r, r_۱, \ldots, r_n \in F$ به قسمی وجود داشته باشند که:

$$r\beta + r_۱\alpha_۱ + \cdots + r_n\alpha_n = \circ$$

اگر $r \neq \circ$، آن‌گاه؛

$$\beta = -(r^{-۱}r_۱)\alpha_۱ - \cdots - (r^{-۱}r_n)\alpha_n \in Span(S)$$

که با $\beta \in V \setminus Span(S)$ مغایرت دارد، پس $r = \circ$. لذا بنابر فرض لازم می آید که؛

$$r_۱ = \cdots = r_n = \circ$$

از این رو $S \cup \{\beta\}$ زیرمجموعهٔ مستقل خطی V است.

■

قضیه ۱۱.۳ : هر زیرمجموعهٔ مستقل خطی S از فضای برداری V روی هیأت F، مشمول در یک پایهٔ V است.

برهان: $\mathcal{A}$ را مجموعه تمام زیرمجموعهٔ مستقل خطی فضای V در نظر می‌گیریم که شامل S باشند. واضح است $S \in \mathcal{A}$. پس $\mathcal{A}$ با رابطهٔ شمول یک مجموعهٔ مرتب جزیی ناتهی است. فرض کنیم $\{A_i\}_{i\in I}$ یک زنجیر در $\mathcal{A}$ باشد. قرار می‌دهیم $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. اگر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$، آن گاه چون $\{A_i\}_{i\in I}$ یک زنجیر است، $i \in I$ به قسمی وجود دارد که $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A_i$. از آنجا که زیرمجموعهٔ یک مجموعه مستقل خطی، مستقل خطی است، لازم می‌آید که $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ مستقل خطی باشد. از این رو $A \in \mathcal{A}$ یک کران بالای $\mathcal{A}$ بوده و بنابر لم زورن $\mathcal{A}$ دارای عضو ماکسیمال $\mathfrak{B}$ است. مدعی می‌شویم که $\mathfrak{B}$ پایه برای V است. اگر چنین نباشد $Span(\mathfrak{B}) \neq V$ و می‌توانیم فرض کنیم $\beta \in V \setminus Span(S)$. بنابر قضیهٔ ۱۰.۳، $\mathfrak{B} \cup \{\beta\}$ زیرمجموعهٔ مستقل خطی V بوده و چون شامل S است، لازم می‌آید که متعلق به گردایهٔ $\mathcal{F}$ باشد. لذا بنابر تعریف عضو ماکسیمال داریم که $\mathfrak{B} = \mathfrak{B} \cup \{\beta\}$ که یک تناقض است. بنابراین $\mathfrak{B}$ پایه برای V و شامل S می‌باشد.

■

قضیه ۱۲.۳ : هر فضای برداری دارای یک پایه است.

برهان: چون مجموعهٔ تهی مستقل خطی است، پس بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، مشمول در یک پایه برای فضای برداری است. از این رو هر فضای برداری دارای یک پایه است.

■

قضیه ۱۳.۳ : فرض کنیم S زیرمجموعهٔ فضای برداری V روی هیأت F باشد. اگر $Span(S) = V$، آن گاه S شامل یک پایهٔ V است.

برهان: $\mathcal{A}$ را مجموعه تمام زیرمجموعهٔ مستقل خطی فضای V در نظر می‌گیریم که مشمول در S باشند. ادامه اثبات مشابه برهان قضیهٔ ۱۱.۳، است و عضو ماکسیمال $\mathcal{A}$ همان پایهٔ خواسته شده است.

■

قضیه ۱۴.۳ : فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ زیرمجموعهٔ فضای برداری V روی هیأت F به قسمی باشد که $Span(S) = V$. اگر $n \lneqq m$، آن گاه هر زیرمجموعه m عنصری از V، وابسته خطی است. بویژه، اگر $\mathfrak{B}$ پایه‌ای برای V باشد، آن گاه $|\mathfrak{B}| \leq n$.

برهان: فرض کنیم $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\} \subseteq V$. برای هر $j \in \mathbb{N}_m$، بنابر قضیهٔ ۶.۳، اسکالرهای $x_{1j}, \ldots, x_{nj} \in F$ به قسمی وجود دارند که؛

$$\beta_j = x_{1j}\alpha_1 + \cdots + x_{nj}\alpha_n$$

قرار می‌دهیم $A=(x_{ij})\in F^{n\times m}$ و دستگاه همگن $AX=\circ$ را در نظر می‌گیریم. لذا بنابر قضیهٔ ۸.۲، دستگاه همگن دارای جواب نابدیهی است. حال اگر؛

$$X=\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$$

جواب نابدیهی دستگاه همگن باشد، آن گاه برای هر $i\in\mathbb{N}_m$؛

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}r_j=\circ$$

از این رو؛

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{j=1}^{m} r_j\beta_j &= \textstyle\sum_{j=1}^{m} r_j(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\alpha_i)\\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(r_jx_{ij})\alpha_i\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} r_jx_{ij})\alpha_i\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\circ\alpha_i\\ &= \circ\end{aligned}$$

یعنی؛ مجموعهٔ $\{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$ وابستهٔ خطی است.

■

قضیه ۱۵.۳ : اگر $\mathfrak{B}_1$ و $\mathfrak{B}_2$ پایه‌های فضای برداری V با بعد متناهی روی هیأت F باشند، آن‌گاه $|\mathfrak{B}_1|=|\mathfrak{B}_2|$.

برهان: با توجه به قضیهٔ ۱۴.۳، بدیهی است.

■

قضیهٔ قبل برای هر فضای برداری صادق می‌باشد، ولی ما در این کتاب آن را فقط برای فضاهای برداری با بعد متناهی اثبات کرده‌ایم. برای اثبات فضاهای برداری با بعد نامتناهی به کتاب [?]، رجوع کنید.

تعداد عناصر پایهٔ فضای برداری V روی هیأت F را **بعد** فضا می‌گوییم و با $\dim_F(V)$ یا به اختصار با $\dim(V)$ نمایش می‌دهیم و با توجّه به قضیهٔ قبل $\dim(V)$ یکتا می‌باشد.

قضیه ۱۶.۳ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد $n\in\mathbb{N}$ روی هیأت F باشد. برای $\mathfrak{B}\subseteq V$ گزاره‌های زیر معادلند:

۱) $\mathfrak{B}$ پایهٔ V است.

۲) $|\mathfrak{B}| \leq n$ و $Span(\mathfrak{B}) = V$.

۳) $n \leq |\mathfrak{B}|$ و $\mathfrak{B}$ زیرمجموعهٔ مستقل خطی V است.

برهان: ۲ $\Leftarrow$ ۱) با توجّه به تعریف پایه، بعد، و قضیهٔ ۱۵.۳، واضح است.
۳ $\Leftarrow$ ۲) بنابر قضیهٔ ۱۳.۳، پایه $\mathfrak{B}_۱$ برای V به قسمی وجود دارد که $\mathfrak{B}_۱ \subseteq \mathfrak{B}$. لذا بنابر تعریف بعد فضا، $n = |\mathfrak{B}_۱| \leq |\mathfrak{B}| \leq n$. چون $n \in \mathbb{N}$، پس $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_۱$ و در نتیجه $\mathfrak{B}$ پایهٔ V است.
۱ $\Leftarrow$ ۳) بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، پایه $\mathfrak{B}_۱$ برای V به قسمی وجود دارد که $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}_۱$. لذا بنابر تعریف بعد فضا، $n \leq |\mathfrak{B}| \leq |\mathfrak{B}_۱| = n$. چون $n \in \mathbb{N}$، پس $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_۱$ و در نتیجه $\mathfrak{B}$ پایهٔ V است.

■

قضیه ۱۷.۳ : اگر W زیرفضای، فضای برداری با بعد متناهی V روی هیأت F باشد، آن‌گاه:

۱) $\dim(W) \leq \dim(V)$.

۲) $V = W$ اگر و تنها اگر $\dim(V) = \dim(W)$.

برهان: با توجّه به قضایای ۱۱.۳، و ۱٦.۳، بدیهی است.

■

مثال ۸ : فرض کنیم F یک هیأت باشد. واضح است که؛

$$\{E_{ij} \in F^{m\times n} : i \in \mathbb{N}_m \text{ و } j \in \mathbb{N}_n\}$$

پایه‌ای برای فضای برداری $F^{m\times n}$ روی هیأت F می‌باشد. بنابراین؛

$$\dim(F^{m\times n}) = mn$$

و برای هر $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$؛

$$A = \sum_{i\in\mathbb{N}_m}\sum_{j\in\mathbb{N}_n} a_{ij}E_{ij}$$

این پایهٔ را، پایهٔ متعارف $F^{m\times n}$ می‌نامیم.

برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، قرار می‌دهیم:

$$e_i = (\delta_{1i}, \dots, \delta_{ni})$$

در این صورت $\{e_i : i \in \mathbb{N}_n\}$ پایه‌ای برای فضای برداری F^n روی هیأت F است، آن را پایهٔ متعارف F^n می‌نامیم. از این رو؛

$$\dim(F^n) = n$$

■

هر زیرمجموعه مستقل خطی یک فضای برداری با بعد متناهی n، تعداد عناصرش نابیشتر از n است. همچنین هر مجموعه‌ای که فضا را تولید کند، تعداد عناصرش ناکمتر از n می‌باشد.

قضیه ۱۸.۳ : فرض کنیم $\{V_i\}_{i=1}^n$ گردایه‌ای از زیر فضاهای، فضای برداری با بعد متناهی V روی هیأت F به قسمی باشد که $W = \sum_{i=1}^n V_i$. در این صورت:

۱) اگر برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $Span(\mathfrak{B}_i) = V_i$، آن گاه $W = Span(\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{B}_i)$.

۲) اگر برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $\mathfrak{B}_i$ پایه‌ای برای V_i باشد و $\dim(W) = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} \dim(V_i)$، آن گاه $\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{B}_i$ پایه‌ای برای W است.

برهان: ۱) اگر $\alpha \in W$، آن گاه بنابر قضیهٔ ۸.۳، برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $\alpha_i \in V_i$ به قسمی وجود دارد که؛

$$\alpha = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} \alpha_i$$

لذا برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ik_i} \in \mathfrak{B}_i$ و اسکالرهای $x_{i1}, \dots, x_{ik_i} \in F$ چنان وجود دارند که؛

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij}\alpha_{ij}$$

بنابراین؛

$$\alpha = \sum_{j=1}^{k_1} x_{1j}\alpha_{1j} + \dots + \sum_{j=1}^{k_i} x_{nj}\alpha_{nj}$$

در نتیجه $W \subseteq Span(\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{B}_i)$. از طرفی چون $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{B}_i \subseteq W$، پس بنابر قضیهٔ ۵.۳، $Span(\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{B}_i) \subseteq W$. از این رو:

$$W = Span(\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{B}_i)$$

۲) چون؛

$$|\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{B}_i| \leq \dim(V_1) + \cdots + \dim(V_n) = \dim(W)$$

پس بنابر گزارهٔ (۱) و قضیهٔ ۱۶.۳، $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{B}_i$ پایه‌ای برای W است.

■

گزارهٔ (۱) قضیهٔ ۱۸.۳، برای زمانی که مجموعهٔ اندیسگذار نامتناهی باشد، نیز برقرار است.

قضیه ۱۹.۳ : فرض کنیم $\{V_i\}_{i=1}^{n}$ گردایه‌ای از زیر فضاهای، فضای برداری با بعد متناهی V روی هیأت F به قسمی باشد که $W = \sum_{i=1}^{n} V_i$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱) $W = \sum_{i=1}^{n} \oplus V_i$.

۲) برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، پایهٔ $\mathfrak{B}_i$ برای V_i به قسمی وجود دارد که $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{B}_i$ پایه‌ای برای W است.

۳) $\dim(W) = \dim(V_1) + \cdots + \dim(V_n)$.

برهان: ۲ $\Rightarrow$ ۱) اگر $n = 1$، حکم بدیهی است. حال گیریم $n = 2$. بنابر گزارهٔ (۱) قضیهٔ ۱۸.۳، کافی است نشان دهیم $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ مستقل خطی است. فرض کنیم؛

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r + y_1\beta_1 + \cdots + y_s\beta_s = 0$$

قرار می‌دهیم؛

$$\alpha = \sum_{i \in \mathbb{N}_r} x_i\alpha_i \in V_1 \quad \text{و} \quad \beta = \sum_{i \in \mathbb{N}_s} y_i\beta_i \in V_2$$

پس $\alpha + \beta = ۰$ و بنابر قضیهٔ ۹.۳، $\alpha = \beta = ۰$ و چون $\mathfrak{B}_۱$ و $\mathfrak{B}_۲$ به ترتیب پایه‌های $V_۱$ و $V_۲$ هستند لازم می‌آید که؛

$$x_۱ = \cdots = x_r = y_۱ = \cdots = y_s = ۰$$

یعنی؛ $\mathfrak{B}_۱ \cup \mathfrak{B}_۲$ مستقل خطی است. لذا بنابر گزارهٔ (۱) قضیهٔ ۱۸.۳، $\mathfrak{B}_۱ \cup \mathfrak{B}_۲$ پایه W است و در نتیجه:

$$\begin{aligned} \dim(W) &= |\mathfrak{B}_۱| + |\mathfrak{B}_۲| \\ &= \dim(V_۱) + \dim(V_۲) \end{aligned}$$

حال به سادگی با استفاده از استقراء حکم اثبات می‌شود.

۳ $\Rightarrow$ ۲) بدیهی است.

۱ $\Rightarrow$ ۳) فرض کنیم برای هر $i \in \mathbb{N}_n$؛

$$\mathfrak{B}_i = \{\alpha_{i۱}, \ldots, \alpha_{ik_i}\}$$

پایه‌ای برای V_i باشد. پس بنابر گزاره (۲) قضیهٔ ۱۸.۳، $\bigcup_{i=۱}^{n} \mathfrak{B}_i$ پایه‌ای برای W است.

اگر برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $\alpha_i \in V_i$ به قسمی وجود داشته باشد که؛

$$\sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i = ۰$$

آن گاه برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، اسکالرهای $x_{i۱}, \ldots, x_{ik_i} \in F$ چنان وجود دارند که؛

$$\alpha_i = \sum_{j=۱}^{k_i} x_{ij} \alpha_{ij}$$

و،

$$\sum_{j=۱}^{k_۱} x_{۱j} \alpha_{۱j} + \cdots + \sum_{j=۱}^{k_i} x_{nj} \alpha_{nj} = ۰$$

چون $\bigcup_{i=۱}^{n} \mathfrak{B}_i$ مستقل خطی است، پس برای هر $i \in \mathbb{N}_n$؛

$$x_{i۱} = \cdots = x_{ik_i} = ۰$$

یعنی؛

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \textstyle\sum_{j=۱}^{k_i} x_{ij} \alpha_{ij} \\ &= ۰ \end{aligned}$$

پس بنابر قضیهٔ ۹.۳، $W = \sum_{i\in I} \oplus V_i$.

■

قضیه ۲۰.۳ : فرض کنیم V_1 و V_2 زیر فضاهای، فضای برداری با بعد متناهی V روی هیأت F باشند. در این صورت:

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

برهان: واضح است فضای $V_1 \cap V_2$ دارای پایهٔ متناهی $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ است. بنابر قضیهٔ ۱۱.۳؛

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in V_2 \quad \text{و} \quad \beta_1, \ldots, \beta_m \in V_1$$

به قسمی وجود دارند که؛

$$\mathfrak{B}_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \quad \text{و} \quad \mathfrak{B}_2 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_m\}$$

به ترتیب پایه‌هایی برای V_1 و V_2 هستند. بنابر گزارهٔ (۱) قضیهٔ ۱۸.۳ ؛

$$Span(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2) = V_1 + V_2$$

برای اینکه نشان دهیم؛

$$\mathfrak{B}_3 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$$

مستقل خطی است، فرض می‌کنیم؛

$$\sum_{i=1}^{r} x_i\alpha_i + \sum_{i=j}^{m} y_j\beta_j + \sum_{k=1}^{n} z_k\gamma_k = 0$$

پس؛

$$\sum_{i=1}^{r} x_i\alpha_i + \sum_{i=j}^{m} y_j\beta_j = -\sum_{k=1}^{n} z_k\gamma_k \in V_1 \cap V_2$$

لذا اسکالرهای $c_1, \ldots, c_r \in F$ به قسمی وجود دارند که؛

$$\sum_{k=1}^{n} z_k\gamma_k = \sum_{i=1}^{r} c_i\alpha_i$$

چون $\mathfrak{B}_۲$ پایه‌ای برای $V_۲$ است، پس؛

$$z_۱ = \cdots = z_n = ۰$$

و در نتیجه:

$$\sum_{i=۱}^{r} x_i\alpha_i + \sum_{i=j}^{m} y_j\beta_j = ۰$$

از آنجا که $\mathfrak{B}_۱$ پایه‌ای برای $V_۱$ است، لازم می آید که؛

$$x_۱ = \cdots = x_r = y_۱ = \cdots = y_m = ۰$$

بنابراین $\mathfrak{B}_۳$ مستقل خطی است و در نتیجه پایه‌ای برای $V_۱ + V_۲$ است. از این رو:

$$\begin{aligned} \dim(V_۱) + \dim(V_۲) &= n + r + m + r \\ &= dim(V_۱ + V_۲) + \dim(V_۱ \cap V_۲) \end{aligned}$$

■

در بحث زیرفضاها دیدیم که با داشتن یک فضای برداری می‌توانیم فضاهای برداری دیگری بسازیم. در قضیهٔ زیر به گردایهٔ تمام همدسته‌های یک زیرفضای برداری، یک ساختار فضای برداری می‌بخشیم.

قضیه ۲۱.۳ : فرض کنیم W زیرفضای، فضای برداری V روی هیأت F باشد و؛

$$\frac{V}{W} = \{x + W : x \in V\}$$

برای هر $x, y \in V$ و $r \in F$، اگر تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} (x + W) + (y + W) &= (x + y) + W \\ r(y + W) &= ry + W \end{aligned}$$

آن‌گاه $\frac{V}{W}$ با عمل جمع و ضرب اسکالر فوق یک فضای برداری روی هیأت F است.

برهان: $\frac{V}{W}$ با عمل جمع بنابر قضیهٔ ۳.۱، یک گروه تعویضپذیر است. همچنین با توجّه به خواص همدسته‌ها، اگر برای $x, y \in V$ و $r, s \in F$، داشته باشیم $x + W = y + W$ و $r = s$،

آن گاه $x-y\in W$ و $ry=sy$. از این رو؛

$$\begin{aligned} rx-sy &= rx-ry \\ &= r(x-y)\in W \end{aligned}$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned} r(x+W) &= rx+W \\ &= sy+W \\ &= s(y+W) \end{aligned}$$

بنابراین ضرب اسکالر خوش تعریف است. شرطهای دیگر فضای برداری نیز به راحتی با توجّه به خواص میدانها و فضای برداری اثبات می‌شوند.

■

فضای برداری ساخته شده توسط یک زیرفضا در قضیهٔ ۲۱.۳ را، **فضای خارج قسمتی** می‌نامیم و W بردار صفر فضای $\frac{V}{W}$ می‌باشد. در قضیهٔ زیر رابطهٔ بعد فضا و بعد فضای خارج قسمتی را بیان کرده‌ایم.

قضیه ۲۲.۳ : اگر W زیرفضای، فضای برداری با بعد متناهی V روی هیأت F باشد، آن‌گاه:

$$\dim(\frac{V}{W})=\dim(V)-\dim(W)$$

برهان: اگر $\mathfrak{B}=\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ پایه‌ای برای W باشد، چون W زیرفضای V است، پس بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، می‌توان B را به پایه‌ای برای V گسترش داد. فرض می‌کنیم؛

$$\mathfrak{B}'=\{\alpha_1\dots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\dots,\alpha_n\}$$

پایه‌ای برای V باشد. مدعی می‌شویم،

$$\mathfrak{B}''=\{\alpha_{m+1}+W,\dots,\alpha_n+W\}$$

پایه‌ای برای فضای خارج قسمتی $\frac{V}{W}$ روی هیأت F است.

اگر $\alpha+W\in\frac{V}{W}$، آن گاه $\alpha\in V$ و اسکالرهای $x_1,\dots,x_n\in F$ به قسمی وجود دارند که:

$$\alpha=\sum_{i=1}^{m}x_i\alpha_i\ \sum_{i=m+1}^{n}x_i\alpha_i$$

چون؛
$$\sum_{i=1}^{m} x_i\alpha_i \in W$$
پس:
$$\begin{aligned} \alpha + W &= (\textstyle\sum_{i=1}^{m} x_i\alpha_i + W) + (\sum_{i=m+1}^{n} + W) \\ &= W + (\textstyle\sum_{i=m+1}^{n}(x_i\alpha_i + W)) \\ &= \textstyle\sum_{i=m+1}^{n} x_i(\alpha_i + W) \end{aligned}$$
از این رو:
$$\frac{V}{W} \subseteq Span(\mathfrak{B}'')$$
از طرفی واضح است که؛
$$Span(\mathfrak{B}'') \subseteq \frac{V}{W}$$
پس؛
$$\frac{V}{W} = Span(\mathfrak{B}'')$$
حال فرض کنیم اسکالرهای $x_{m+1}, \ldots, x_n \in F$ به قسمی وجود داشته باشند که؛
$$\sum_{i=m+1}^{n} x_i(\alpha_i + W) = 0$$
از این رو؛
$$\begin{aligned} W &= \textstyle\sum_{i=m+1}^{n}(x_i\alpha_i + W) \\ &= (\textstyle\sum_{i=m+1}^{n} x_1\alpha_i) + W \end{aligned}$$
و لازم می‌آید که؛
$$\sum_{i=m+1}^{n} x_1\alpha_i \in W$$
بنابراین اسکالرهای $x_1, \ldots, x_m \in F$ به قسمی وجود دارند که؛
$$\sum_{i=1}^{m} x_1\alpha_i = \sum_{i=m+1}^{n} x_1\alpha_i$$
و چون $\mathfrak{B}'$ پایه‌ای برای V است، پس:
$$x_{m+1} = \cdots = x_n = 0$$

بنابراین $\mathfrak{B}''$ مستقل خطی است و پایه‌ای برای فضای خارج قسمتی $\frac{V}{W}$ روی هیأت F می‌باشد. از این رو:

$$\dim(\frac{V}{W}) = \dim(V) - \dim(W)$$

■

این بخش را با تعیین پایه‌ای برای فضای جواب یک دستگاه همگن ختم می‌کنیم. فرض کنیم F یک هیأت باشد. بنابر قضیهٔ ۶.۲، اگر دو ماتریس $A, B \in F^{m\times n}$ هم ارز سطری باشند، آن گاه مجموعهٔ جواب دو دستگاه همگن $AX = 0$ و $BX = 0$ برابرند. از این رو برای تعیین پایه‌ای برای فضای جواب یک دستگاه همگن، کافی است که پایه را برای فضای جواب دستگاه همگن که ماتریس ضرایب آن تحویل شده سطری پلکانی است و هم ارز سطری با ماتریس ضرایب دستگاه همگن اولیهٔ است، ارائه کنیم.

قضیه ۲۳.۳ : فرض کنیم F یک هیأت بوده و $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$ ماتریس تحویل شده سطری پلکانی باشد. گیریم A دارای t سطر ناصفر، و دارایهٔ پیشرو سطر ناصفر iام آن، در ستون k_i باشد. قرار می‌دهیم:

$$\omega = \{k_1, \dots, k_t\}$$

برای دستگاه همگن $AX = 0$ گزاره زیر برقرارند.

۱) اگر $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$، آن‌گاه دستگاه همگن به صورت زیر است.

$$\left\{ \begin{array}{llll} x_{k_1} & + & \sum_{k_1 \lneqq i \notin \omega} a_{1i}x_i & = 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{k_t} & + & \sum_{k_t \lneqq i \notin \omega} a_{ti}x_i & = 0 \end{array} \right. \qquad (\star)$$

۲) فرض کنیم $i \notin \omega$ و $E_i = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \in F^{n\times 1}$ به قسمی باشد که برای هر $j \in \mathbb{N}_n$؛

$$e_j = \begin{cases} 1, & \text{اگر } i = j \\ 0, & \text{اگر } i \neq j \notin \omega \\ -a_{ri}, & \text{اگر برای } j = k_r, r \in \mathbb{N}_t \end{cases}$$

آن گاه E_i جواب دستگاه همگن است، در واقع E_i از قرار دادنِ $x_i = 1$ و برای هر $i \neq j \notin \omega$، $x_j = 0$، و سپس مقادیر متناظر x_{k_1}، ...، x_{k_t} از دستگاه $(\star)$ محاسبه کردن، به دست آمده است.

۳) $\mathfrak{B} = \{E_i : i \notin \omega \& i \in \mathbb{N}_n\}$ یک پایه برای فضای جواب دستگاه همگن است.

۴) بعد فضای جواب دستگاه همگن برابر با $n - t$ است.

برهان: فقط گزارهٔ (۳) را اثبات می‌کنیم، گزاره‌های دیگر بدیهی می‌باشند. فرض کنیم؛

$$X_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in F^{n\times 1}$$

جواب دستگاه همگن باشد. پس؛

$$\begin{cases} c_{k_1} + \sum_{k_1 \lneqq i \notin \omega} a_{1i} c_i = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ c_{k_t} + \sum_{k_t \lneqq i \notin \omega} a_{ti} c_i = 0 \end{cases} \qquad (\star\star)$$

قرار می‌دهیم:

$$\sum_{i \notin \omega} c_i E_i = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

در این صورت برای هر $j \in \mathbb{N}_n$ با توجّه به $(\star\star)$ داریم که؛

$$\begin{aligned} d_j &= \begin{cases} -\sum_{k_r \lneqq i \notin \omega} a_{ri} c_i, & \text{اگر برای } j = k_r, r \in \mathbb{N}_t \\ c_j, & \text{اگر } j \notin \omega \end{cases} \\ &= c_j \end{aligned}$$

بنابراین $X_\circ = \sum_{i \notin \omega} c_i E_i \in Span(\mathfrak{B})$ و با توجه به گزارهٔ (۲)، جواب دستگاه همگن برابر با $Span(\mathfrak{B})$ است. با توجه به روند اثبات، اگر $\sum_{i \notin \omega} c_i E_i = \circ$، آن گاه اسکالرها همگی صفر هستند، یعنی؛ $\mathfrak{B}$ مستقل خطی است و در نتیجه پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه همگن می‌باشد.

■

مثال ۹ : فرض کنیم،

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & \circ & \circ & ۳ & ۵ \\ \circ & \circ & ۱ & \circ & ۴ & ۶ \\ \circ & ۲ & \circ & ۱ & ۳ & ۱ \\ \circ & \circ & ۱ & \circ & \circ & ۱ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{۴\times۶}$$

می‌خواهیم پایه‌ای برای مجموعهٔ جواب دستگاه $AX = \circ$ به دست آوریم. ماتریس A هم‌ارز ماتریس تحویل شده سطری پلکانی زیر است.

$$R = \begin{bmatrix} ۱ & \circ & \circ & -۱ & \circ & ۴ \\ \circ & ۱ & \circ & \frac{۱}{۲} & \circ & \frac{-۱۱}{۸} \\ \circ & \circ & ۱ & \circ & \circ & ۱ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & ۱ & \frac{۵}{۴} \end{bmatrix}$$

بنابراین کافی است مجموعهٔ جواب دستگاه $RX = \circ$ به دست آوریم. اگر قرار دهیم،

$$E_۶ = \begin{bmatrix} -۴ \\ \frac{۱۱}{۸} \\ \circ \\ -\frac{۵}{۴} \\ \boxed{۱} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad E_۴ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -\frac{۱}{۲} \\ \boxed{۱} \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix}$$

آن گاه پایه مجموعهٔ جواب دستگاه $AX = \circ$ برابر است با $\{E_۴, E_۶\}$.

تمرینات

۱۰.۳ : اگر دو بردار وابستهٔ خطی باشد، ثابت کنید یکی از آنها مضرب اسکالر دیگری است.

۱۱.۳ : $x, y, z \in \mathbb{R}$ را به قسمی تعیین کنید که مجموعهٔ $\{(۱, ۲, ۳), (۴, ۵, ٦), (x, y, z)\}$ در $\mathbb{R}^۳$ مستقل خطی باشد.

۱۲.۳ : آیا بردارهای،

$$\begin{array}{ll} \alpha_۱ = (۱, ۱, ۲, ۴), & \alpha_۲ = (۲, -۱, -۵, ۲) \\ \alpha_۳ = (۱, -۱, -۴, ۰), & \alpha_۴ = (۲, ۱, ۱, ٦) \end{array}$$

در $\mathbb{R}^۴$ تشکیل یک پایه می‌دهند. بعد زیرفضای برداری تولید شده توسط این بردارها را مشخص کنید و یک پایه برای آن به دست آورید.

۱۳.۳ : اگر F یک هیأت باشد، پایه‌ای چون $\{A_۱, A_۲, A_۳, A_۴\}$ برای فضای برداری $F^{۲\times۲}$ روی هیأت F به قسمی بیابید که برای هر $۱ \leq i \leq ۴$، $A_i^۲ = A_i$.

۱۴.۳ : فرض کنیم؛

$$\begin{cases} x_۱ + \overline{۲}x_۲ - \overline{۳}x_۳ + x_۴ & = & ۰ \\ x_۱ + \overline{۲}x_۲ + x_۳ + x_۴ & = & ۰ \end{cases}$$

پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه فوق روی هیأت $\mathbb{Z}_{۱۱}$ به دست آورید.

۱۵.۳ : فرض کنیم؛

$$\begin{array}{lll} \alpha_۱ = (۱, ۱, -۲, ۱), & \alpha_۲ = (۳, ۰, ۴, -۱), & \alpha_۳ = (-۱, ۲, ۵, ۲) \\ \alpha = (۴, -۵, ۹, -۷), & \beta = (۳, ۱, -۴, ۴), & \gamma = (-۱, ۱, ۰, ۱) \end{array}$$

الف) کدام یک از بردارهای α، β، و γ در زیرفضای $V = < \alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳ >$ از $\mathbb{R}^۴$ قرار دارد.

ب) اگر $W = < \alpha, \beta, \gamma >$، آن‌گاه $\dim_{\mathbb{R}}(V + W)$ و $\dim_{\mathbb{R}}(V \cap W)$ را محاسبه کنید.

۱٦.۳ : فرض کنیم؛

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۴ & ۰ \\ ۲ & ۴ & ۱ & ۱۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

یک پایه برای فضای جواب دستگاه همگن $AX = \circ$ به دست آورید.

۱۷.۳ : فرض کنیم V فضای برداری روی هیات F بوده و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ زیرمجموعهٔ مستقل خطی V باشد. اگر $x_1, \dots, x_n \in F$ به قسمی باشند که؛

$$\beta = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$$

چه شرطی روی اسکالرهای x_i، تضمین خواهد کرد که به ازای هر $i \in \mathbb{N}_n$؛

$$\mathfrak{B}_i = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n\}$$

مستقل خطی باشد.

۱۸.۳ : فرض کنیم F یک هیأت است. مجموعهٔ $n + 1$ عضوی از F^n بیابید که هر زیرمجموعهٔ n عضوی آن، پایه‌ای برای F^n باشد.

۱۹.۳ : فرض کنیم V یک فضای برداری روی F با بعد $n \in \mathbb{N}$ باشد. نشان دهید:

الف) اگر $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V روی هیأت F باشد، آن‌گاه $\theta : F^n \to V$ با ضابطهٔ؛

$$\theta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i$$

یک تابع دو سویی است.

ب) $V = |F|^n$.

۲۰.۳ : فرض کنیم F یک هیأت متناهی و V یک فضای برداری روی F با بعد متناهی باشد. نشان دهید عدد اوّل p و $n \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود دارند که،

$$|V| = p^n$$

۲۱.۳ : فرض کنیم V یک فضای برداری روی هیأت متناهی F بوده و $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$. اگر $m \in \mathbb{N}_n$ و $|F| = q$، نشان دهید:

الف) تعداد زیرمجموعه‌های مستقل خطی m عنصری V برابر است با:

$$(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{m-1})$$

ب) تعداد زیرفضاهای m بعدی V برابر است با:

$$\frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{m-1})}{(q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{m-1})}$$

۲۲.۳ : فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی روی هیات F است. نشان دهید:

الف) اگر W زیرفضای V باشد، زیرفضای U به قسمی وجود دارد که $V = W \oplus U$.

ب) اگر $W_1 \leq W_2 \leq V$ و $\dim(W_1) \leq l \leq \dim(W_2)$، آن‌گاه زیرفضای U با بعد l به قسمی وجود دارد که $W_1 \leq U \leq W_2$.

۲۳.۳ : ثابت کنید $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ نامتناهی است، در اینجا $\mathbb{R}$ با اعمال جمع و ضرب معمولی یک فضای برداری روی $\mathbb{Q}$ است.

۲۴.۳ : فرض کنیم F یک هیات باشد و $char(F) = 0$. گیریم V یک فضای برداری روی F است و $\{a, b, c\}$ زیرمجموعه مستقل خطی V باشد، نشان دهید $\{a+b, a+c, c+b\}$ زیر مجموعه مستقل خطی V است. می‌توانید این مطلب را تعمیم دهید.

۲۵.۳ : فرض کنیم V فضای برداری روی هیأت F باشد و $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ به قسمی باشند که $\alpha_1 \neq 0$ و برای هر $2 \leq i \in \mathbb{N}_n$؛

$$\alpha_i \notin Span(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$$

نشان دهید مجموعهٔ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ مستقل خطی است.

۲۶.۳ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد متناهی روی هیات F بوده و $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ گردایه‌ای از زیرفضاهای V باشد. نشان دهید:

الف) اگر؛

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_n \subseteq \cdots$$

آن‌گاه $n_0 \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود دارد که برای هر $n_0 \leq k$، $V_{n_0} = V_k$.

ب) اگر؛

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq V_n \supseteq \cdots$$

آن‌گاه $n_0 \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود دارد که برای هر $n_0 \leq k$، $V_{n_0} = V_k$.

۲۷.۳ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد متناهی روی هیات F بوده و $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. نشان دهید هر یک از مجموعه‌های زیر، پایه‌ای برای V است.

الف) $\mathfrak{B}_1 = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n\}$.

ب) $\mathfrak{B}_2 = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \ldots, \alpha_1 + \alpha_n\}$.

ج) اگر $char(F) \neq 2$، آن گاه $\mathfrak{B}_3 = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\delta_{2i}}\alpha_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\delta_{ni}}\alpha_i\}$ پایه‌ای برای V است.

۲۸.۳ : اگر $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای فضای برداری V روی هیأت F باشد و $\alpha \in V$، آن گاه ثابت کنید $\{\alpha_1 - \alpha, \ldots, \alpha_n - \alpha\}$ پایه‌ای برای V است اگر و تنها اگر نتوان α را به صورت؛

$$\alpha = b_1\alpha_1 + \cdots + b_n\alpha_n$$

نوشت به طوری که؛

$$b_1 + \cdots + b_n = 1$$

۲۹.۳ : اگر $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ زیرمجموعهٔ مستقل خطیِ فضای برداری V روی هیأت F باشد و $\alpha \in V \setminus Span(\mathcal{B})$، آن گاه ثابت کنید $\{\alpha_1 - \alpha, \ldots, \alpha_n - \alpha\}$ مستقل خطی است.

۳۰.۳ : اگر V فضای برداری با بعد متناهی روی هیات F بوده و W تنها زیر فضای آن باشد که دارای بعد k است، آنگاه نشان دهید، $W = V$ یا $W = (0)$.

۳۱.۳ : فرض کنیم؛

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \text{ یک تابع است } \quad f\}$$

و برای هر $f, g \in V$ و $r, x \in \mathbb{R}$، تعریف کنیم؛

$$(rf)(x) = rf(x) \quad \text{و} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

آن گاه نشان دهید که:

الف) V با اعمال تعریف شده یک فضای برداری روی هیأت $\mathbb{R}$ است.

ب) فرض کنیم $S = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subseteq V$ به قسمی باشد که هر عنصر آن دارای مشتق مرتبهٔ $(n-1)$ام است. رونسکیی S را به صورت؛

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & \cdots & f_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت S زیرمجموعهٔ مستقل خطی است اگر و تنها اگر رونسکیی S تابع ناصفر باشد.

ج) فرض کنیم α_1، …، α_n اعداد حقیقی ناصفر متمایز باشند. در این صورت؛

$$\{\exp(\alpha_1 x), \ldots, \exp(\alpha_n x)\}$$

زیرمجموعهٔ مستقل خطی V است.

۳۲.۳ : فرض کنیم F یک هیأت است. اگر V و W به ترتیب مجموعهٔ ماتریسهای متقارن و پادمتقارن متعلق به فضای برداری $F^{n\times n}$ روی هیأت F باشند، نشان دهید:

الف) V و W زیرفضاهای، فضای برداری $F^{n\times n}$ روی هیأت F هستند.

ب) $F^{n\times n} = V \oplus W$.

ج) $\dim(V) = \frac{1}{2}n(n+1)$ و $\dim(W) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

۳۳.۳ : فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $1 \leq k \in \mathbb{N}$ کوچکترین عدد طبیعی به قسمی باشد که $A^k \neq 0$ و $A^{k+1} = 0$. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است.

الف)اگر $0 \neq X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$، آن گاه $\{X, AX, \ldots, A^k X\}$ وابستهٔ خطی است.

ب) $\{A, \ldots, A^k\}$ پایه‌ای برای فضای برداری $\mathbb{R}^{n\times n}$ روی هیأت $\mathbb{R}$ است.

ج) $\{A, \ldots, A^k\}$ وابستهٔ خطی است.

د) اگر $۰ \neq X \in \mathbb{R}^{n\times ۱}$، آن گاه $\{X, AX, \ldots, A^kX\}$ مستقل خطی است.

۳۴.۳ : فرض کنیم F یک هیأت باشد. آیا پایه‌ای برای $F^{n\times n}$ وجود دارد به قسمی عناصر این پایه با هم جابجا شوند.

۳۵.۳ : فرض کنیم F یک هیأت است.

الف) اگر $f(x) \in F[x]$ دارای درجهٔ $n \in \mathbb{N}$ باشد، آیا $\{f, f', f'', \ldots, f^{(n)}\}$ پایه‌ای برای $F_n[x]$ است.

ب) اگر برای هر $۰ \leq i \leq n$، $f_i(x) \in F[x]$ دارای درجهٔ i باشد، آیا $\{f_۰, f_۱, \ldots, f_n\}$ پایه‌ای برای $F_n[x]$ است.

۳۶.۳ : فرض کنیم F یک هیأت بوده و $\mathfrak{B} = \{X_۱, \ldots, X_m\}$ زیرمجموعهٔ مستقل خطی $F^{n\times ۱}$ باشند. قرار می‌دهیم؛

$$W = \{A \in F^{n\times n} : \forall i \in \mathbb{N}_n (A^{(i)} \in Span(\mathfrak{B}))\}$$

نشان دهید W زیر فضای $F^{n\times n}$ است و $\dim(W) = mn$.

۳۷.۳ : فرض کنیم F یک هیأت بوده و I ایده‌آل ناصفر $F[x]$ باشد. نشان دهید:

الف) I زیرفضای برداری $F[x]$ است.

ب) اگر $I = (p(x))$، آن گاه بعد فضای خارج قسمتی $\frac{F[x]}{I}$ برابر با $\deg(p)$ است.

۳.۳ رتبهٔ ماتریس

فرض کنیم F یک هیأت باشد و $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$. سطر و ستون iام ماتریس A را به ترتیب با $A_{(i)}$ و $A^{(i)}$ نمایش می‌دهیم. با کمی تسامح اگر $B = (b_{ij}) \in F^{n\times p}$، آن گاه نمایش ضرب دو ماتریس بر حسب ستونها به صورت؛

$$AB = [\ AB^{(۱)} \quad AB^{(۲)} \quad \cdots \quad AB^{(p)}\ ]$$

می‌باشد و نمایش ضرب دو ماتریس بر حسب سطرها به صورت؛

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}B_{(1)} + a_{12}B_{(2)} + \cdots + a_{1n}B_{(n)} \\ \vdots \\ a_{m1}B_{(1)} + a_{m2}B_{(2)} + \cdots + a_{mn}B_{(n)} \end{bmatrix}$$

است. زیرفضای تولید شده توسط سطرهای ماتریس A از F^n را **فضای سطری ماتریس** A می‌نامیم و؛

$$\dim Span(A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(m)})$$

را **رتبهٔ سطری ماتریس** A می‌گوییم. به طریق مشابه فضا و رتبهٔ ستونی یک ماتریس تعریف می‌شود.

واضح است که رتبهٔ سطری (ستونی) A با رتبهٔ ستونی (سطری) A^t برابر است. از این مطلب در قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم رتبهٔ سطری و ستونی یک ماتریس برابرند.

قضیه ۲۴.۳ : فرض کنیم F یک هیأت باشد. اگر $A \in F^{m\times n}$، آن گاه رتبهٔ سطری و ستونی ماتریس A برابرند.

برهان: فرض کنیم رتبهٔ سطری ماتریس A برابر با k باشد. از این رو می‌توانیم فرض کنیم برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in}) \in F^{1\times n}$ و $\{x_1, \ldots, x_k\}$ یک پایه برای فضای سطری A باشد. بنابراین برای هر $i \in \mathbb{N}_m$، اسکالرهای $c_{i1}, \ldots, c_{ik} \in F$ به قسمی وجود دارند که؛

$$A_{(i)} = c_{i1}x_1 + \cdots + c_{ik}x_k$$

از این رو برای هر $j \in \mathbb{N}_n$؛

$$a_{ij} = c_{i1}x_{1j} + \cdots + c_{ik}x_{kj}$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = x_{1j}\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + x_{2j}\begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_{kj}\begin{bmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{mk} \end{bmatrix}$$

اگر برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، قرار دهیم؛

$$c_i = \begin{bmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{mi} \end{bmatrix}$$

آن گاه؛

$$\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} \subseteq Span(c_1, c_2, \dots, c_k) = W$$

پس بنابر قضیهٔ ۵.۳، فضای ستونی A زیر فضای W می‌باشد و چون بنابر قضیهٔ ۱۳.۳، $\dim(W) \leq k$، پس رتبهٔ ستونی A نابیشتر از k است، یعنی؛ رتبهٔ ستونی نابیشتر از رتبهٔ سطری A می‌باشد.

با توجه به استدلال فوق، رتبهٔ ستونی A^t نابیشتر از رتبهٔ سطری آن می‌باشد و چون رتبهٔ سطری (ستونی) A با رتبهٔ ستونی (سطری) A^t برابر است، پس رتبهٔ سطری A نابیشتر از رتبهٔ ستونی آن می‌باشد. از این رو رتبهٔ سطری و ستونی A برابرند.

■

با توجّه به قضیهٔ ۲۴.۳، رتبه سطری و ستونی ماتریس A را **رتبهٔ ماتریس** می‌نامیم و با $rank(A)$ و یا به اختصار با $r(A)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲۵.۳ : فرض کنیم F یک هیأت باشد. اگر برای $A, B \in F^{m\times n}$ و $P \in F^{m\times m}$، $A = PB$، آن گاه فضای سطری A زیرفضای، فضای سطری B است، یعنی؛

$$Span(A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(m)}) \subseteq Span(B_{(1)}, B_{(2)}, \dots, B_{(m)})$$

بخصوص، اگر $A, B \in F^{m\times n}$ هم‌ارز سطری باشند، آن گاه فضاهای سطری A و B برابر هستند.

برهان: فرض کنیم $P = (p_{ij})$. واضح است که برای هر $i \in \mathbb{N}_m$؛

$$A_{(i)} = p_{i1}B_{(1)} + p_{i2}B_{(2)} + \cdots + p_{im}B_{(m)}$$

بنابراین:

$$\{A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(m)}\} \subseteq Span(B_{(1)}, B_{(2)}, \dots, B_{(m)})$$

از این رو بنابر قضیهٔ ۵.۳، حکم اثبات است.

اگر $A, B \in F^{m\times n}$ هم‌ارز سطری باشند، بنابر قضیهٔ ۵.۲، ماتریس معکوس‌پذیر $P \in F^{m\times m}$ به قسمی وجود دارد که $A = PB$. لذا با توجّه به استدلال فوق، فضاهای سطری A و B برابر هستند.

■

قضیه ۲۶.۳ : فرض کنیم F یک هیأت بوده و $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$ ماتریس تحویل شده سطری پلکانی باشد. گیریم A دارای t سطر ناصفر، و درایهٔ پیشرو سطر ناصفر iام آن، در ستون k_i باشد. در این صورت:

۱) اگر $Y = (y_۱, \ldots, y_n)$ متعلق به فضای سطری A باشد، آن گاه:

$$Y = y_{k_۱} A_{(۱)} + \cdots + y_{k_t} A_{(t)}$$

۲) سطرهای ناصفر A تشکیل یک پایه برای فضای سطری A می‌دهد و $r(A) = t$.

برهان: می‌دانیم که:

۱) برای هر $i \in \mathbb{N}_t$، $a_{jk_i} = \delta_{ji}$.

۲) برای هر $i \in \mathbb{N}_t$، اگر $j \lneqq k_i$، $a_{ij} = ۰$.

چون $Y = (y_۱, \ldots, y_n)$ متعلق به فضای سطری A است، پس اسکالرهای $x_۱, \ldots, x_t \in F$ به قسمی وجود دارند که؛

$$Y = x_۱ A_{(۱)} + \cdots + x_t A_{(t)}$$

از این رو برای هر $i \in \mathbb{N}_t$؛

$$\begin{aligned} y_{k_i} &= x_۱ a_{۱k_i} + \cdots + x_t a_{tk_i} \\ &= x_۱ \delta_{۱i} + \cdots + x_t \delta_{ti} \\ &= x_i \end{aligned}$$

از این رو گزارهٔ (۱) برقرار است.

با توجّه به گزارهٔ (۱)، سطرهای ناصفر مستقل خطی هستند و چون فضای سطری A توسط سطرهای ناصفر تولید می‌شود، پس گزاره (۲) نیز برقرار می‌باشد.

■

قضیه ۲۷.۳ : فرض کنیم F یک هیأت باشد. برای ماتریسهای تحویل شده سطری پلکانی $A, B \in F^{m\times n}$، گزاره‌های زیر معادلند:

۱) فضاهای سطری A و B برابر هستند.

۲) $A = B$.

برهان: ۲ $\Rightarrow$ ۱) فرض کنیم A و B به ترتیب دارای t و t' سطر ناصفر، و دارایهٔ پیشرو سطر ناصفر iام A و B به ترتیب در ستون k_i و k'_i باشد. بنابر گزارهٔ (۲) قضیهٔ ۲۶.۳، چون فضاهای سطری A و B برابر هستند، پس $t = t'$. حال مدعی می‌شویم که $k_t = k'_t$. فرض کنیم $k_t \lneqq k'_t$. از این رو چون $B_{(t)}$ در فضای سطری ماتریس A است، بنابر گزارهٔ (۱) قضیهٔ ۲۶.۳، داریم که:

$$B_{(t)} = b_{tk_1}A_{(1)} + \cdots + b_{tk_t}A_{(t)}$$

چون برای هر $i \in \mathbb{N}_t$، اگر $j \lneqq k'_i$، آن گاه $b_{ij} = 0$ و؛

$$k_1 < \cdots < k_t < k'_t$$

پس؛

$$b_{tk_1} = \cdots = b_{tk_t} = 0$$

یعنی؛ $B_{(t)} = 0$ که یک تناقض می‌باشد، لذا $k_t = k'_t$ و در نتیجه $b_{tk_t} = 1$ و؛

$$b_{tk_1} = \cdots = b_{tk_{t-1}} = 0$$

از این رو:

$$B_{(t)} = b_{tk_1}A_{(1)} + \cdots + b_{tk_t}A_{(t)} = A_{(t)}$$

به همین منوال می‌توان نشان داد که برای هر $i \in \mathbb{N}_t$، $A_{(i)} = B_{(i)}$. بنابراین $A = B$.

۱ $\Rightarrow$ ۲) بدیهی است.

■

قضیه ۲۸.۳ : فرض کنیم F یک هیأت باشد. هر ماتریس متعلق به $F^{m\times n}$ هم‌ارز سطری با فقط یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی در $F^{m\times n}$ است.

برهان: فرض کنیم ماتریسهای تحویل شده سطری پلکانی $B_۱$ و $B_۲$ هم‌ارز سطری با A باشند. در این صورت $B_۱$ و $B_۲$ هم‌ارز سطری هستند و بنابر قضیهٔ ۲۵.۳، فضای سطری آنها برابر می‌باشند. لذا بنابر قضیهٔ ۲۷.۳، $B_۱ = B_۲$. از این رو بنابر گزارهٔ (۲) قضیهٔ ۷.۲، حکم اثبات است.

■

قضیه ۲۹.۳ : فرض کنیم F یک هیأت باشد. برای $A, B \in F^{m\times n}$، گزاره‌های زیر معادلند:

۱) فضاهای سطری A و B برابر هستند.

۲) A و B هم‌ارز سطری هستند.

برهان: ۲ $\Leftarrow$ ۱) فرض کنیم A و B به ترتیب هم‌ارز سطری با ماتریسهای تحویل شده سطری پلکانی $A_۱$ و $B_۱$ باشند. لذا بنابر قضیهٔ ۲۵.۳ و گزاره (۱)، فضاهای سطری $A_۱$ و $B_۱$ برابر هستند و بنابر قضیهٔ ۲۷.۳، $A_۱ = B_۱$. بنابراین A و B هم‌ارز سطری هستند.
۱ $\Leftarrow$ ۲) قضیهٔ ۲۵.۳ را ببینید.

■

قضیه ۳۰.۳ : فرض کنیم F یک هیأت باشد. برای $A \in F^{m\times n}$ گزاره‌های زیر معادلند:

۱) A معکوس‌پذیر است.

۲) $r(A) = n$.

۳) $|A| \neq ۰$.

برهان: بنابر قضیهٔ ۹.۲، A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر هم‌ارز سطری با ماتریس همانی I_n باشد. پس بنابر قضیهٔ ۲۹.۳، A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر؛

$$\begin{aligned} r(A) &= r(I_n) \\ &= n \end{aligned}$$

مثال ۱۰ : فرض کنیم؛

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$$

چون $|A| \neq ۰$، بنابر قضیهٔ ۳.۳۰، A معکوس‌پذیر است و $r(A) = ۳$.

■

قضایای بیان شده برای اعمال سطری در این بخش، به طور مشابه با کمی تغییرات برای اعمال ستونی نیز صادق است.

تمرینات

۳.۳۸ : فرض کنیم V فضای سطری ماتریس؛

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲۱ & ۰ & ۹ & ۰ \\ ۱ & ۷ & -۱ & -۲ & -۱ \\ ۲ & ۱۴ & ۰ & ٦ & ۱ \\ ٦ & ۴۲ & -۱ & ۱۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

روی هیأت $\mathbb{R}$ باشد.

الف) پایه‌ای برای V بیابید.

ب) بردار $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵) \in \mathbb{R}^۵$ به قسمی تعیین کنید که متعلق به V باشد.

۳.۳۹ : فرض کنیم $F = \mathbb{Z}_۵$ و؛

$$A = \begin{bmatrix} \overline{۱} & \overline{۲} & \overline{۰} & \overline{۳} \\ \overline{۱} & \overline{۲} & \overline{۴} & \overline{۴} \\ \overline{۰} & \overline{۰} & \overline{۱} & \overline{۴} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \overline{۴} & \overline{۰} & \overline{۱} & \overline{۲} \\ \overline{۳} & \overline{۴} & \overline{-۲} & \overline{۵} \\ \overline{۱} & \overline{۴} & \overline{۰} & \overline{۹} \end{bmatrix}$$

کدام یک از بردارهای سطری ماتریس A در فضای سطری ماتریس B روی هیأت F قرار دارد.

۴۰.۳ : بردارهای؛

$$\alpha_۱ = (-۱, ۰, ۱, ۲), \quad \alpha_۲ = (۳, ۴, -۲, ۵), \quad \alpha_۳ = (۱, ۴, ۰, ۹)$$

از $\mathbb{R}^۴$ در نظر بگیرید. دستگاهی از معادلات خطی همگن بیابید که فضای جواب آن دقیقاً زیرفضای پدید آمده توسط این سه بردار از $\mathbb{R}^۴$ باشد.

۴۱.۳ : فرض کنیم F یک هیأت است، $A \in F^{n\times n}$ به قسمی باشد که همهٔ درایه‌های روی قطر اصلی و فرعی آن ۱، و سایر درایه‌های آن صفرند. نشان دهید اگر $n = ۲m + ۱$، آن‌گاه $r(A) = m + ۱$.

۴۲.۳ : فرض کنیم F یک هیأت است، $A \in F^{m\times n}$ و $Y \in F^{m\times ۱}$. دستگاه $AX = Y$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید:

الف) دستگاه دارای جواب است اگر و تنها اگر $r(A) = r(A|Y)$.

ب) اگر $r(A) = r(A|Y) = n$، آن گاه دستگاه دارای جواب یکتا است.

ج) اگر $r(A) = r(A|Y) \lneqq n$، آن گاه دستگاه حداقل به تعداد عناصر F دارای جواب است.

د) اگر $r(A) \neq r(A|Y)$، آن گاه دستگاه دارای جواب نیست.

۴۳.۳ : فرض کنیم F یک هیأ ت باشد، $A, B \in F^{m\times n}$، و $D \in F^{p\times m}$. در این صورت:

الف) $r(A + B) \leq r(B) + r(B)$.

ب) $r(DA) \leq \min\{r(A), r(D)\}$.

۴۴.۳ : اگر P و Q ماتریسهای معکوس‌پذیر به قسمی باشند که $B = QAP$، آن‌گاه ثابت کنید $r(B) = r(A)$ و نتیجه بگیرید که رتبه‌های ماتریسهای متشابه برابرند.

۴۵.۳ : فرض کنیم F یک میدان و $A \in F^{m\times n}$ ماتریس با رتبهٔ k باشند. نشان دهید A حاصل‌جمع k ماتریس با رتبهٔ ۱ است.

فصل ۴

تبدیلات خطی

۴.۱ تعریف تبدیل خطی

همیشه وقتی یک ساختمان جبری معرفی می‌گردد، می‌خواهیم بدانیم چه رابطه‌ای بین آنها وجود دارد. در گروهها و حلقه‌ها برای این کار مفهوم همریختی مطرح شده و در جبرخطی مفهوم تبدیل خطی بیان می‌شود. این مفاهیم مشابه هم تعریف می‌شوند و نوع تعریفشان به اعمال دوتایی روی آنها بستگی دارد.

فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی هیأت F باشند. تابع؛

$$T : V \to W$$

را یک **تبدیل خطی** می‌نامیم، هرگاه برای هر $\alpha, \beta \in V$ و $c \in F$؛

$$T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$$

مجموعهٔ تمام تبدیلات خطی از V به توی W را با $L(V, W)$ نمایش می‌دهیم و قرار می‌دهیم؛

$$\ker(T) = \{\alpha \in V : T(\alpha) = 0\}$$

و آن را **هسته** یا **فضای پوچ** T می‌نامیم. اگر T یک به یک و به رو نیز باشد، آن گاه آن را

یکریختی می‌نامیم و در این حالت گوییم V و W یکریخت هستند و می‌نویسیم:

$$V \cong W$$

واضح است تابع ثابت صفر از هر فضای برداری به توی هر فضای برداری یک تبدیل خطی است که آن را **تبدیل صفر** می‌نامیم. همچنین تابع همانی از هر فضای برداری به روی خودش نیز یک تبدیل خطی است که به آن **تبدیل همانی** اطلاق می‌شود.

مثال ۱۱ : اگر F یک هیأت باشد و $A \in F^{m\times n}$، آن‌گاه؛

$$T_A : F^{n\times ۱} \to F^{m\times ۱}$$

با ضابطهٔ $T_A(X) = AX$، یک تبدیل خطی می‌باشد و فضای جواب دستگاه همگن $AX = ۰$، $\ker(T_A)$ است. T_A را **تبدیل خطی وابسته به** A می‌نامیم.

مثال ۱۲ : یک انعکاس نسبت به خط $y = ax$، ضابطه‌ای از $\mathbb{R}^۲$ به توی خودش می‌باشد که هر بردار $\mathbb{R}^۲$ را به تصویر آینه‌ای آن حول این خط تصویر می‌کند. اگر T یک انعکاس نسبت به خط $y = ax$ باشد و $a \neq ۰$، آن‌گاه برای $A = (x, y)$، با توجّه به شکل زیر؛

$$\left(\frac{a}{۱ + a^۲}\left(\frac{۱}{a}x + y\right), \frac{a^۲}{۱ + a^۲}\left(\frac{۱}{a}x + y\right)\right)$$

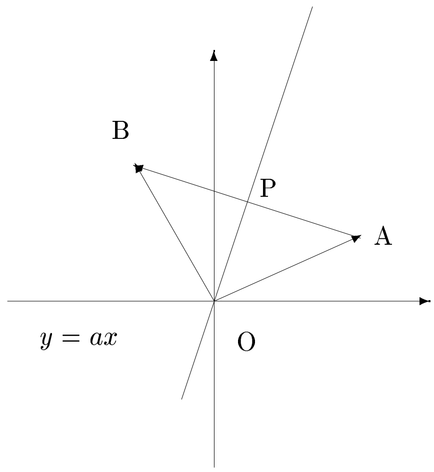
مختصات نقطهٔ P است و در نتیجه:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= \vec{OA} + \vec{AB} \\ &= \vec{OA} + ۲\vec{AP} \\ &= \left(\tfrac{۱-a^۲}{۱+a^۲}x + \tfrac{۲a}{۱+a^۲}y, \tfrac{۲a}{۱+a^۲}x + \tfrac{a^۲-۱}{۱+a^۲}y\right) \end{aligned}$$

حال اگر $a = ۰$، آن‌گاه؛

$$T(x,y) = (x, -y)$$

از این رو T یک تبدیل خطی است.



قضیه ۱.۴ : فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی هیأت F باشند. برای $T \in L(V,W)$، گزاره‌های زیر برقرار هستند.

۱) $T(0) = 0$.

۲) برای هر $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in V$ و $c_1, \cdots, c_n \in F$، $T(\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^n c_iT(\alpha_i)$.

۳) $\ker(T)$ زیرفضای V است.

۴) اگر V_1 زیرفضای V باشد، آن گاه $T[V_1]$ زیرفضای W است.

۵) $R_T = \{T(\alpha) : \alpha \in V\}$ زیرفضای W است و آن را **فضای تصویر** T می‌نامیم.

۶) اگر W_1 زیرفضای W باشد، آن گاه $T^{-1}[W_1]$ زیرفضای V و شامل $\ker(T)$ است.

برهان: ۱) با توجّه به تعریف داریم که:

$$\begin{aligned} T(0) &= T((-1)0 + 0) \\ &= (-1)T(0) + T(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

۲) این قسمت را با استقراء روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n = 1$، از تعریف تبدیل خطی واضح است. اگر $n \gneq 1$، داریم:

$$\begin{aligned} T(\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i) &= T(\sum_{i=1}^{n-1} c_i\alpha_i + c_n\alpha_n) \\ &= T(\sum_{i=1}^{n-1} c_i\alpha_i) + c_nT(\alpha_n) \end{aligned}$$

بنا به فرض استقراء؛

$$T(\sum_{i=1}^{n-1} c_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i T(\alpha_i)$$

پس؛

$$\begin{aligned} T(\textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} c_i T(\alpha_i) + c_n T(\alpha_n) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i T(\alpha_i) \end{aligned}$$

۳) بنابر گزارهٔ (۱)، $\ker(T) \neq \emptyset$. حال فرض کنیم $\alpha, \beta \in \ker(T)$ و $c \in F$. بنابراین؛

$$\begin{aligned} T(c\alpha + \beta) &= cT(\alpha) + T(\beta) \\ &= c0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

و در نتیجه $c\alpha + \beta \in \ker(T)$. لذا بنابر قضیهٔ ۳.۳، $\ker(T)$ زیرفضای V است.

۴) چون V_1 زیرفضای V است، پس $0 \in V_1$ و بنابر گزارهٔ (۱)؛

$$0 = T(0) \in T[V_1]$$

حال فرض کنیم $\alpha, \beta \in T[V_1]$ و $c \in F$، پس $\alpha_1, \beta_1 \in V_1$ به قسمی وجود دارند که؛

$$T(\beta_1) = \beta \quad \text{و} \quad T(\alpha_1) = \alpha$$

بنابراین $c\alpha_1 + \beta_1 \in V_1$ و؛

$$\begin{aligned} c\alpha + \beta &= cT(\alpha_1) + T(\beta_1) \\ &= T(c\alpha_1 + \beta_1) \in T[V_1] \end{aligned}$$

از این رو بنابر قضیهٔ ۳.۳، $T[V_1]$ زیرفضای W است.

۵) با توجّه به گزارهٔ (۳) بدیهی است.

۶) به عهده خواننده واگذار می‌کنیم.

■

مثال ۱۳ : فرض کنیم،

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۱۰ \\ ۳ & ۱ & ۷ & -۹ \\ ۴ & ۰ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}$$

تبدیل خطی T_A وابسته به ماتریس A را در نظر بگیرید. $\alpha = (a, b, c)^t \in R_{T_A}$ اگر و تنها اگر دستگاه $AX = \alpha$ دارای جواب باشد. چون ماتریس افزوده دستگاه هم ارز سطری با ماتریس زیر است.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۰ & -۱ & ۱۰ & a \\ ۰ & ۱ & \frac{۷}{۴} & -\frac{۳۹}{۴} & -\frac{۳}{۴}a + \frac{۱}{۴}b \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -a - b + c \end{array}\right]$$

پس $\alpha \in R_{T_A}$ اگر و تنها اگر $a + b = c$، یعنی؛

$$\alpha = a(۱, ۰, ۱)^t + b(۰, ۱, ۱)^t$$

از این رو، $\{(۱, ۰, ۱)^t, (۰, ۱, ۱)^t\}$ پایه‌ای برای R_T است. با توجّه به مرحله قبل $(x, y, z, v) \in \ker(T)$ اگر و تنها اگر جواب دستگاه زیر باشد.

$$\begin{cases} x - z + ۱۰v & = & ۰ \\ y + \frac{۷}{۴}z - \frac{۳۹}{۴}v & = & ۰ \end{cases}$$

بنابراین، $\{(۱, -\frac{۷}{۴}, ۱, ۰)^t, (-۱۰, \frac{۳۹}{۴}, ۰, ۱)^t\}$ پایه‌ای برای $\ker(T)$ است.

قضیه ۲.۴ : فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی هیأت F باشند. برای $T \in L(V, W)$ گزاره‌های زیر معادلند:

۱) $\ker(T) = (۰)$.

۲) T یک به یک است.

۳) تصویر هر زیرمجموعهٔ مستقل خطی V، یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی W است.

برهان: ۲ $\Leftarrow$ ۱) فرض کنیم $\alpha, \beta \in V$ به قسمی باشند که $T(\alpha) = T(\beta)$. در این صورت؛

$$T(\alpha - \beta) = ۰$$

یعنی؛

$$\alpha - \beta \in \ker(T) = (0)$$

از این رو $\alpha = \beta$ و در نتیجه T یک به یک است.

۳ ⇐ ۲) فرض کنیم $\mathfrak{B}$ زیرمجموعهٔ مستقل خطی V باشد و $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{B}$ و اسکالرهای $c_1, c_2, \ldots, c_n \in F$ به قسمی باشند که؛

$$\sum_{i=1}^{n} c_i T(\alpha_i) = 0$$

چون $T \in L(V, W)$، بنابر گزارهٔ (۱) قضیهٔ ۱.۴؛

$$\begin{aligned} T(\textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i) &= 0 \\ &= T(0) \end{aligned}$$

و بنابر گزارهٔ (۲)؛

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i = 0$$

از آنجا که $\mathfrak{B}$ زیرمجموعهٔ مستقل خطی V است لازم می آید که؛

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

از این رو $T[\mathfrak{B}]$ زیرمجموعهٔ مستقل خطی W است.

۱ ⇐ ۳) واضح است که $0 \in \ker(T)$. حال فرض کنیم $0 \neq \alpha \in V$. چون هر مجموعهٔ تک عنصری ناصفر مستقل خطی است، پس بنابر گزارهٔ (۳)، $\{T(\alpha)\}$ زیرمجموعهٔ مستقل خطی از W می‌باشد و در نتیجه $T(\alpha) \neq 0$. بنابراین $\ker(T) = (0)$.

■

اگر V یک فضای برداری روی هیأت F باشد، هر عضو $L(V, V)$ را یک **عملگر خطی** روی V می‌نامیم.

زیرفضای W از فضای برداری V را تحت $T \in L(V, V)$ **پایا** یا **ناوردا** می‌نامیم، هرگاه $T[W] \subseteq W$.

قضیه ۳.۴ : اگر T یک عملگر خطی روی فضای برداری V با هیأت اسکالر F باشد، آن گاه:

۱) $\ker(T)$ تحت T پایا است.

۲) R_T تحت T پایا است.

برهان: ۱) فرض کنیم $\alpha \in \ker(T)$. پس $T(\alpha) = 0$ و بنابر گزارهٔ (۱) قضیهٔ ۱.۴؛

$$\begin{aligned} T(T(\alpha)) &= T(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین $T(\alpha) \in \ker(T)$ و از گزارهٔ (۲) قضیهٔ ۱.۴، نتیجه می‌شود که $\ker(T)$ تحت T پایا است.

۲) بدیهی است.

■

قضیه ۴.۴ : اگر W زیرفضای، فضای برداری V روی هیأت F تحت $T \in L(V, V)$ پایا باشد، آن گاه:

۱) $T|_W$ متعلق به $L(W, W)$ است.

۲) $\overline{T}$ از فضای خارج‌قسمتی $\frac{V}{W}$ به توی خودش با ضابطهٔ؛

$$\overline{T}(\alpha + W) = T(\alpha) + W, \quad \forall \alpha \in V$$

یک تبدیل خطی است.

برهان: ۱) بدیهی است.

۲) فرض کنیم $\alpha, \beta \in V$ به قسمی باشند که $\alpha + W = \beta + W$. پس؛

$$\begin{aligned} \alpha - \beta \in W \quad \Rightarrow \quad T(\alpha) - T(\beta) &= T(\alpha - \beta) \in W \\ \Rightarrow \quad T(\alpha) + W &= T(\beta) + W \\ \Rightarrow \quad \overline{T}(\alpha + W) &= \overline{T}(\beta + W) \end{aligned}$$

واضح است که برای هر $\alpha \in V$، $T(\alpha) \in V$ و در نتیجه؛

$$\overline{T}(\alpha + W) = T(\alpha) + W \in \frac{V}{W}$$

از این رو $\overline{T}:\frac{V}{W}\to\frac{V}{W}$ یک تابع است. حال فرض کنیم $\alpha,\beta\in V$ و $c\in F$. بنابراین؛

$$\begin{aligned}\overline{T}(c(\alpha+W)+(\beta+W)) &= \overline{T}((c\alpha+\beta)+W)\\ &= T(c\alpha+\beta)+W\\ &= (cT(\alpha)+T(\beta))+W\\ &= c(T(\alpha)+W)+(T(\beta)+W)\\ &= c\overline{T}(\alpha+W)+\overline{T}(\beta+W)\end{aligned}$$

پس $\overline{T}:\frac{V}{W}\to\frac{V}{W}$ یک تبدیل خطی است.

■

قضیه ۵.۴ : فرض کنیم $V_۱$ زیرفضای، فضای برداری V روی هیأت F باشد و $T\in L(V,W)$. اگر $V_۱\subseteq \ker(T)$، آن گاه $\overline{T}$ از فضای خارج‌قسمتی $\frac{V}{V_۱}$ به توی V با ضابطهٔ؛

$$\overline{T}(\alpha+V_۱)=T(\alpha),\qquad \forall\alpha\in V$$

یک تبدیل خطی است. بخصوص؛

$$\overline{T}:\frac{V}{\ker(T)}\to R_T$$

با ضابطهٔ فوق یکریختی است و:

$$\frac{V}{\ker(T)}\cong R_T$$

برهان: فرض کنیم $\alpha,\beta\in V$ به قسمی باشند که $\alpha+V_۱=\beta+V_۱$. پس؛

$$\begin{aligned}\alpha-\beta\in V_۱\subseteq\ker(T) &\Rightarrow T(\alpha)-T(\beta)=T(\alpha-\beta)=۰\\ &\Rightarrow T(\alpha)=T(\beta)\\ &\Rightarrow \overline{T}(\alpha+V_۱)=\overline{T}(\beta+V_۱)\end{aligned}$$

واضح است که برای هر $\alpha\in V$؛

$$\overline{T}(\alpha+V_۱)=T(\alpha)\in V$$

از این رو؛

$$\overline{T}:\frac{V}{V_۱}\to V$$

یک تابع است و به سادگی دیده خواهد شد که یک تبدیل خطی نیز می‌باشد. اثبات قسمت دوّم قضیهٔ را به عهده خوانند واگذار می‌کنیم.

■

قضیهٔ زیر روش ساختن یک تبدیل خطی را ارائه می‌کند.

قضیه ۶.۴ : فرض کنیم $\mathfrak{B} = \{\alpha_i\}_{i\in I}$ پایهٔ فضای برداری V روی هیأت F باشد. اگر $\{\beta_i\}_{i\in I}$ زیرمجموعه‌ای دلخواه از فضای برداری W روی هیأت F باشد، آن گاه تنها یک تبدیل خطی $T \in L(V, W)$ وجود دارد که برای هر $i \in I$؛

$$T(\alpha_i) = \beta_i$$

برهان: واضح است که $T : V \to W$ با ضابطهٔ؛

$$T(\sum_{j=1}^{n} r_j \alpha_{i_j}) = \sum_{j=1}^{n} r_j \beta_{i_j}$$

یک تبدیل خطی است که برای هر $i \in I$؛

$$T(\alpha_i) = \beta_i$$

اگر $U : V \to W$ یک تبدیل خطی باشد که برای هر $i \in I$، $U(\alpha_i) = \beta_i$، آن‌گاه به ازای؛

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} r_j \alpha_{i_j} \in V$$

داریم:

$$\begin{aligned} U(\alpha) &= \sum_{j=1}^{n} r_j U(\alpha_{i_j}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} r_j \beta_{i_j} \\ &= T(\alpha) \end{aligned}$$

بنابراین $U = T$.

■

بنابر قضیهٔ ۶.۴، هر تبدیل خطی با اثرش روی یک پایه کاملاً مشخص می‌شود و دو تبدیل خطی روی یک فضای برداری برابرند اگر و تنها اگر اثرشان روی یک پایه برابر باشد.

رابطهٔ یکریختی روی مجموعهٔ تمام فضاهای برداری روی هیات F، یک رابطهٔ هم‌ارزی است. قضیهٔ زیر در واقع نشان می‌دهد عناصر یک کلاس هم‌ارزی، رابطهٔ یکریختی روی مجموعهٔ تمام فضاهای برداری با بعد متناهی روی هیات F، دارای بعد برابر هستند.

قضیه ۷.۴ : دو فضای برداری با بعد متناهی روی یک هیأت، یکریخت هستند اگر و تنها اگر بعد آنها برابر باشد.

برهان: $\Leftarrow$) فرض کنیم V و W یکریخت باشند. پس یکریختی $T : V \to W$ وجود دارد. اگر؛

$$\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

پایه‌ای برای V باشد، بنابر قضیهٔ ۲.۴؛

$$\mathfrak{B}' = \{T(\alpha_1), T(\alpha_2), \dots, T(\alpha_n)\}$$

زیرمجموعهٔ مستقل خطی W است. حال فرض کنیم $\beta \in W$. چون T به رو است، پس $\alpha \in V$ به قسمی وجود دارد که $T(\alpha) = \beta$. چون $\mathfrak{B}$ پایه‌ای برای V است، اسکالرهای $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$ به قسمی وجود دارند که $\alpha = \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i$. بنابراین؛

$$\begin{aligned} \beta &= T(\alpha) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n c_i T(\alpha_i) \end{aligned}$$

یعنی؛ $\mathfrak{B}'$ فضای برداری W را تولید می‌کند. از این رو $\mathfrak{B}'$ پایه‌ای برای W است. لذا بنابر تعریف بعد فضا؛

$$\begin{aligned} \dim(V) &= n \\ &= |\mathfrak{B}'| \\ &= \dim(W) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$) فرض کنیم؛

$$\mathfrak{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \quad \text{و} \quad \mathfrak{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

به ترتیب پایه‌های فضاهای برداری V و W روی هیأت F باشند. بنابر قضیهٔ ۶.۴، تبدیل خطی $T : V \to W$ به قسمی وجود دارد که برای هر $i \in \mathbb{N}_n$؛

$$T(\alpha_i) = \beta_i$$

گیریم $\alpha \in \ker(T)$. بنابراین اسکالرهای $c_1, c_2, \ldots, c_n \in F$ به قسمی وجود دارند که؛

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i$$

از این رو؛

$$\begin{aligned} 0 &= T(\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i T(\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \beta_i \end{aligned}$$

و چون $\mathfrak{B}'$ پایه است، پس؛

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

یعنی؛ $\alpha = 0$. لذا بنابر قضیهٔ ۲.۴، T یک به یک است.

فرض کنیم $\beta \in W$، پس اسکالرهای $c_1, c_2, \ldots, c_n \in F$ به قسمی وجود دارند که؛

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} c_i \beta_i$$

و در نتیجه؛

$$T(\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i) = \beta$$

بنابراین T یکریختی است.

■

با توجّه به قضیهٔ ۷.۴، اگر F یک هیأت باشد، آن گاه فضاهای $F^{m\times n}$، $F^{n\times m}$، و F^{mn} روی هیأت F یکریخت می‌باشند.

اگر $T \in L(V, W)$، بنابر قضیهٔ ۱.۴، $\ker(T)$ و $R_T = T[V]$ به ترتیب زیرفضاهای V و W هستند. بنابراین بعد آنها را به ترتیب **پوچی** و **رتبهٔ** T می‌نامیم و با $nullity(T)$ و $rank(T)$ و یا به اختصار با $n(T)$ و $r(T)$ نمایش می‌دهیم. قضیه زیر ارتباط پوچی و رتبهٔ یک تبدیل خطی روی فضاهای با بعد متناهی را مشخص می‌کند و یکی از مهمترین قضایای جبرخطی است.

قضیه ۸.۴ : فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی هیأت F باشند. اگر $\dim(V) \in \mathbb{N}$، آن گاه:

$$r(T) + n(T) = \dim(V)$$

برهان: بنابر قضیهٔ ۵.۴؛

$$\frac{V}{\ker(T)} \cong R_T$$

و با توجّه به قضایای ۲۲.۳ و ۷.۴؛

$$\begin{aligned} r(T) &= \dim(\tfrac{V}{\ker(T)}) \\ &= \dim(V) - n(T) \end{aligned}$$

■

مثال ۱۴ : فرض کنیم T تبدیل خطی از $\mathbb{R}_n[x]$ به توی $\mathbb{R}_n[x]$ با ضابطهٔ زیر باشد.

$$(T(f))(x) = \int_{\circ}^{x} t f^{(۲)}(t)dt$$

از این رو برای هر $f(x) = \sum_{i=\circ}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}_n[x]$؛

$$(T(f))(x) = \sum_{i=۲}^{n} (i-۱) a_i x^i$$

و به سادگی دیده می‌شود که $\{x^۲, x^۳, \cdots, x^n\}$ پایه‌ای برای R_T است. با توجّه به مرحله قبل، $\sum_{i=\circ}^{n} a_i x^i \in \ker(T)$ اگر و تنها اگر برای هر $i \geq ۲$، $a_i = \circ$. بنابراین $\{۱, x\}$ پایه‌ای برای $\ker(T)$ است. لذا داریم؛

$$\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n(T) + r(T)$$

و بدین وسیله قضیهٔ ۸.۴؛ محقق گردید.

■

تمرینات

۱.۴ : درستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) فضای ماتریسهای حقیقی ۴×۳ با فضای ماتریسهای حقیقی ۶×۲ یکریخت است.

ب) فضای ماتریسهای پادمتقارن حقیقی ۳×۳ با $R^۳$ یکریخت است..

ج) فضای ماتریسهای قطری حقیقی $n \times n$ با $R_n[x]$ یکریخت است..

د) فضای ماتریسهای متقارن حقیقی $(n-۱) \times (n-۱)$ با فضای ماتریسهای پادمتقارن حقیقی $n \times n$ یکریخت است..

۲.۴ : فرض کنیم F یک هیأت باشد. نشان دهید:

الف) اگر $T : F^n \to F^m$ تبدیل خطی باشد، آن گاه $T = (T_۱, \ldots, T_m)$، که در اینجا برای هر $i \in \mathbb{N}_m$، $T_i \in L(F^n, F)$.

ب) $T \in L(F^n, F)$ اگر و تنها اگر اسکالرهای $a_۱, \ldots, a_n \in F$ به قسمی وجود داشته باشند که برای هر $(x_۱, \ldots, x_n) \in F^n$،

$$T(x_۱, \ldots, x_n) = a_۱x_۱ + \cdots + a_nx_n$$

۳.۴ : آیا تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۲$ وجود دارد که $T(۲,۳,۴) = (۱,۰)$ و $T(۴,۵,۶) = (۰,۱)$؟ در صورت وجود، ضابطهٔ آن را به دست آورید.

۴.۴ : فرض کنیم F هیأت اعداد مختلط و $T : \mathbb{F}^۳ \to \mathbb{F}^۳$ با ضابطهٔ،

$$T(x,y,z) = (x - y + ۲z, ۲x + y, -x - ۲y + ۲z)$$

تعریف شده باشند.

الف) نشان دهید T تبدیل خطی است.

ب) کدام سه‌تاییهای $Y \in \mathbb{F}^۳$ در فضای تصویر T قرار دارد؟ رتبهٔ T را به دست آورید.

ج) کدام سه‌تاییهای $Y \in \mathbb{F}^۳$ در پوچی T قرار دارد؟ پوچی T را به دست آورید.

۵.۴ : فرض کنیم $V = \mathbb{R}^{3}$. تبدیل خطی $T : V \to V$ با ضابطهٔ

$$T(x, y, z) = (-z, x + z, y + z)$$

در نظربگیرید. برای $V_{1} = \ker(T + \mathrm{id}_{V})$ و $V_{2} = \ker(T - \mathrm{id}_{V})^{2}$، نشان دهید که:

الف) V_{1} و V_{2} تحت T پایا هستند.

ب) $\{(1, -2, 1)\}$ و $\{(-1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ به ترتیب پایه‌های V_{1} و V_{2} هستند.

ج) $V = V_{1} \oplus V_{2}$.

۶.۴ : اگر $\mathfrak{B}$ پایه‌ای برای فضای برداری V روی هیأت F، و T یک تبدیل خطی از فضای برداری V به توی فضای برداری W روی هیأت F باشند، آن گاه نشان دهید که:

الف) اگر $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{1} \cup \mathfrak{B}_{2}$، $\mathfrak{B}_{1} \cap \mathfrak{B}_{2} = \emptyset$، و $\mathfrak{B}_{1}$ پایه‌ای برای $\ker(T)$ باشد، آن گاه $T[\mathfrak{B}_{2}]$ پایه‌ای برای R_{T} است.

ب) $R_{T} = Span(T[\mathfrak{B}])$.

۷.۴ : تبدیل خطی $T : \mathbb{Z}_{7}^{3} \to \mathbb{Z}_{7}^{3}$ به قسمی تعریف کنید که فضای تصویر T برابر با فضای تولید شده توسط بردارهای $(\overline{5}, \overline{0}, \overline{3})$ و $(\overline{4}, \overline{1}, \overline{2})$ روی هیأت $\mathbb{Z}_{7}$ باشد.

۸.۴ : فرض کنیم T یک تبدیل خطی از فضای برداری V به توی فضای برداری W روی هیات F باشد. ثابت کنید $T[Span(A)] = Span(T[A])$.

۹.۴ : فرض کنیم V فضای برداری بر روی هیأت اعداد مختلط F باشد. گیریم T یک یکریختی از V به روی F^{3} بوده و $\alpha_{1}, \alpha_{2}, \alpha_{3}, \alpha_{4} \in V$ به قسمی باشند که،

$$\begin{aligned} T(\alpha_{1}) &= (1, 0, i), & T(\alpha_{2}) &= (-2, 1 + i, 0) \\ T(\alpha_{3}) &= (-1, 1, 1), & T(\alpha_{4}) &= (\sqrt{2}, i, 3) \end{aligned}$$

الف) آیا $\alpha_{1} \in Span(\alpha_{2}, \alpha_{3})$؟

ب) اشتراک $Span(\alpha_{1}, \alpha_{2})$ و $Span(\alpha_{3}, \alpha_{4})$ چیست؟

ج) پایه‌ای برای $Span(\alpha_{1}, \alpha_{2}, \alpha_{3}, \alpha_{4})$ به دست آورید.

۱۰.۴ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد $n \in \mathbb{N}$ روی هیأت F باشد و $T \in L(V,V)$. ثابت کنید:

الف) $n(T)r(T) \leq \frac{n^2}{4}$.

ب) اگر $T^2 = 0$، آن‌گاه $r(T) \leq \frac{n}{2}$.

۱۱.۴ : فرض کنیم F یک هیأت و $B \in F^{n\times n}$ مفروض باشند. نشان دهید تبدیل خطی $T : F^{n\times n} \to F^{n\times n}$ با ضابطهٔ $T(A) = AB - BA$ پوشا نیست.

۱۲.۴ : فرض کنیم F یک هیأت و $A \in F^{m\times n}$ مفروض باشند. اگر T_A تبدیل خطی وابسته به A باشد، نشان دهید:

الف) T_A تبدیل خطی صفر است اگر و تنها اگر ماتریس A صفر باشد.

ب) T_A پوشا است اگر و تنها اگر $Span(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) = F^{m\times 1}$.

ج) T_A یک به یک است اگر و تنها اگر ستونهای A مستقل خطی باشند.

د) اگر T_A یک به یک و پوشا باشد، آن‌گاه $m = n$.

ه) اگر A ماتریس مربع قطری باشد، آن‌گاه پوچی T_A برابر با تعداد صفرهای روی قطر A است.

۱۳.۴ : فرض کنیم F یک هیأت بوده، $A \in F^{m\times m}$، و T_A تبدیل خطی وابسته به A باشد. اگر $T : F^{m\times m} \to F^{m\times m}$ تبدیل خطی با ضابطهٔ $T(B) = AB$ باشد، نشان دهید:

الف) $B \in \ker(T)$ اگر و تنها اگر هر ستون B متعلق به $\ker(T_A)$ باشد.

ب) $n(T) = n(T_A)m$.

ج) $r(T) = r(T_A)m$.

۱۴.۴ : فرض کنیم $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ پایه‌ای برای فضای برداری V روی هیأت F باشد و تبدیل خطی $T : V \to V$ به قسمی باشد که:

$$f(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & \text{اگر } 2 \nmid i \\ 0 & \text{اگر } 2 \mid i \end{cases}$$

نشان دهید فضای تصویر و فضای پوچی T برابرند.

۱۵.۴ : فرض کنیم V یک فضای $n \in \mathbb{N}$ بعدی روی هیأت F باشد و تبدیل خطی $T : V \to V$ به قسمی باشد که فضای تصویر و فضای پوچی آن برابرند. ثابت کنید n زوج است و یک تبدیل خطی از این نوع مثال بزنید.

۱۶.۴ : نشان دهید برای فضای برداری V روی هیأت F و تبدیل خطی $T : V \to V$، گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $R_T \cap \ker(T) = (0)$.

ب) برای هر $\alpha \in V$، اگر $T(T(\alpha)) = 0$، آن گاه $T(\alpha) = 0$.

۱۷.۴ : فرض کنیم V و W فضاهای برداری روی هیأت F باشند و $T, S \in L(V, V)$. نشان دهید:

الف) اگر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ و $\{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)\}$ مستقل خطی باشند، آن‌گاه $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ مستقل است.

ب) اگر $Span(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = V$ و برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $T(\alpha_i) = S(\alpha_i)$، آن‌گاه $T = S$.

۱۸.۴ : فرض کنیم V فضای برداری n بعدی با پایهٔ مرتب،

$$\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

روی هیأت F باشد. فرض کنیم $T \in L(V, V)$ به قسمی باشد که،

$$T(\alpha_j) = \begin{cases} \alpha_{j+1} & j \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \text{ اگر} \\ x\alpha_1 & j = n \text{ اگر} \end{cases}$$

ثابت کنید $T^n = x\, id_V$ و اگر $x \neq 0$، آن‌گاه T معکوس‌پذیر است. ضابطهٔ T^{-1} را به دست آورید.

۱۹.۴ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و W زیرفضای $F^{n \times n}$ به قسمی باشد که هر عضو ناصفر آن معکوس‌پذیر باشد. ثابت کنید $\dim(W) \leq n$.

۴.۲ جبر تبدیلهای خطی

در بخش قبل با مفهوم تبدیل خطی آشنا شدیم. فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی هیأت F باشند. حال با تعریف اعمالی روی مجموعهٔ $L(V,W)$، می‌خواهیم آن را به یک ساختمان جبری تبدیل کنیم و نشان می‌دهیم $L(V,W)$ یک فضای برداری روی هیأت F است.

قضیه ۹.۴ : فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی هیأت F باشند.

۱) $L(V,W)$ با عمل جمع زیر یک گروه آبلی است.

$$(T+U)(\alpha) = T(\alpha) + U(\alpha), \quad \forall T,U \in L(V,W) \quad \& \quad \alpha \in V$$

۲) گروه آبلی $L(V,W)$ با ضرب اسکالر زیر یک فضای برداری روی هیأت F است.

$$(cT)(\alpha) = cT(\alpha), \quad \forall T \in L(V,W) \quad \& \quad c \in F \quad \& \quad \alpha \in V$$

برهان: نشان می‌دهیم برای هر $T,U \in L(V,W)$ و $c \in F$؛

$$cT + U \in L(V,W)$$

یعنی؛ عمل جمع و ضرب اسکالر تعریف شده بسته هستند. اثبات خواص دیگر را به عهده خواننده واگذار می‌کنیم. واضح است که $cT+U : V \to W$ یک تابع است. حال فرض کنیم $\alpha,\beta \in V$ و $x \in F$، پس:

$$\begin{aligned}
(cT+U)(x\alpha+\beta) &= (cT)(x\alpha+\beta) + U(x\alpha+\beta) \\
&= c(T(x\alpha)+T(\beta)) + xU(\alpha) + U(\beta) \\
&= c(xT(\alpha)) + cT(\beta) + xU(\alpha) + U(\beta) \\
&= cxT(\alpha) + xU(\alpha) + cT(\beta) + U(\beta) \\
&= x(cT(\alpha)+U(\alpha)) + cT(\beta)) + U(\beta) \\
&= x(cT+U)(\alpha) + (cT+U)(\beta)
\end{aligned}$$

■

قضیه ۱۰.۴ : اگر V یک فضای برداری روی هیأت F باشد، آن گاه $L(V, V)$ با اعمال جمع تبدیلهای خطی و ترکیب معمولی توابع به عنوان عمل ضرب، یک حلقه یکدار است و برای هر $T, U \in L(V, V)$ و $c \in F$؛

$$c(TU) = (cT)U = T(cU)$$

برهان: بنابر قضیهٔ ۹.۴، $L(V, V)$ با عمل جمع تبدیلهای خطی، یک گروه آبلی است. با توجّه به خواص توابع اگر نشان دهیم عمل ضرب بسته است، دیگر خواص نیز برقرار می‌باشند.

فرض کنیم $T, U \in L(V, V)$. برای هر $\alpha, \beta \in V$ و $c \in F$؛

$$\begin{aligned}
(TU)(c\alpha + \beta) &= T(U(c\alpha + \beta)) \\
&= T(cU(\alpha) + U(\beta)) \\
&= cT(U(\alpha)) + T(U(\beta)) \\
&= c(TU)(\alpha)) + (TU)(\beta)
\end{aligned}$$

بنابراین $TU \in L(V, V)$. واضح است که تبدیل همانی عضو خنثی عمل ضرب است. اثبات قسمت دوّم قضیهٔ را به عهده خواننده واگذار می‌کنیم.

■

با توجّه به قضیهٔ ۱۰.۴، می‌توانیم در خصوص معکوس‌پذیری یک عملگر خطی صحبت کنیم. حال این مطلب را به طور کلی‌تر برای تبدیلهای خطی مورد بحث قرار می‌دهیم.

فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی هیأت F باشند. هرگاه $T \in L(V, W)$ و $U \in L(W, V)$ به قسمی باشند که TU و UT به ترتیب توابع همانی روی W و V باشند، آنگاه T را تبدیل خطی **معکوس‌پذیر** یا **نامنفرد** می‌نامیم و U را با T^{-1} نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۱.۴ : فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی هیأت F باشند. برای $T \in L(V, W)$ گزاره‌های زیر معادلند:

۱) T تبدیل خطی معکوس‌پذیری است.

۲) T یک به یک و به رو است.

برهان: ۲ $\Rightarrow$ ۱) بدیهی است.

۱ $\Rightarrow$ ۲) اگر T یک به یک و به رو باشد، آن گاه T دارای تابع معکوس است. فرض کنیم $T^{-1} : W \to V$ تابع معکوس T باشد. حال فرض کنیم $\alpha, \beta \in W$ و $c \in F$، پس $\alpha_1, \beta_1 \in V$ به قسمی وجود دارند که $\alpha = T(\alpha_1)$ و $\beta = T(\beta_1)$ و؛

$$\begin{aligned} T^{-1}(c\alpha + \beta) &= T^{-1}(cT(\alpha_1) + T(\beta_1)) \\ &= T^{-1}(T(c\alpha_1 + \beta_1)) \\ &= (T^{-1}T)(c\alpha_1 + \beta_1)) \\ &= c\alpha_1 + \beta_1 \\ &= cT^{-1}(\alpha) + T^{-1}(\beta) \end{aligned}$$

بنابراین $T^{-1} \in L(W, V)$ و در نتیجه T تبدیل خطی معکوس‌پذیری است.

■

قضیه ۱۲.۴ : فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی هیأت F باشند. اگر $\dim(V) = \dim(W) \in \mathbb{N}$، برای $T \in L(V, W)$، گزاره‌های زیر معادلند:

۱) T معکوس‌پذیر است.

۲) T یک به یک است.

۳) T به رو است.

۴) اگر $\mathfrak{B}$ پایه‌ای برای V باشد، آن گاه $T[\mathfrak{B}]$ پایه‌ای برای W است.

۵) پایه‌ای چون $\mathfrak{B}$ برای V به قسمی وجود دارد که $T[\mathfrak{B}]$ پایه‌ای برای W است.

برهان: ۲ $\Rightarrow$ ۱) بدیهی است.

۳ $\Rightarrow$ ۲) بنابر قضیهٔ ۲.۴، $\ker(T) = (0)$ و در نتیجه $n(T) = 0$. لذا بنابر قضیهٔ ۸.۴؛

$$r(T) = \dim(V) = \dim(W)$$

از آنجا که R_T زیرفضای W است، پس بنابر قضیهٔ ۱۷.۳، $R_T = W$، یعنی؛ T به رو می‌باشد.

۴ $\Rightarrow$ ۳) فرض کنیم؛

$$\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

پایه‌ای برای V باشد. اگر $\beta \in W$،آن گاه $\alpha \in V$ به قسمی وجود دارد که $T(\alpha) = \beta$. بنابراین اسکالرهای $x_۱, \dots, x_n \in F$ چنان وجود دارند که $\alpha = \sum_{i=۱}^n x_i\alpha_i$ و در نتیجه؛

$$\beta = T(\alpha) = \sum_{i=۱}^n x_i T(\alpha_i)$$

از این رو $T[\mathfrak{B}]$ فضای W را تولید می‌کند. چون؛

$$|T[\mathfrak{B}]| \leq |\mathfrak{B}| = \dim(V) = \dim(W)$$

پس بنابر قضیهٔ ۱۶.۳، $T[\mathfrak{B}]$ پایه‌ای برای W است.

۵ $\Rightarrow$ ۴) بدیهی است.

۱ $\Rightarrow$ ۵) بنابر گزارهٔ (۵)، پایهٔ؛

$$\mathfrak{B} = \{\alpha_۱, \dots, \alpha_n\}$$

برای V به قسمی وجود دارد که $T[\mathfrak{B}]$ پایه‌ای برای W است. اگر برای هر $i \in \mathbb{N}$، قرار دهیم $T(\alpha_i) = \beta_i$، آن گاه بنابر قضیهٔ ۶.۴، $U \in L(W, V)$ به قسمی وجود دارد که برای هر $i \in \mathbb{N}$، $U(\beta_i) = \alpha_i$. به سادگی دیده خواهد شد که TU و UT به ترتیب توابع همانی روی W و V می‌باشند. بنابراین T معکوس‌پذیر است.

■

مثال ۱۵ : فرض کنیم T تبدیل خطی از $\mathbb{R}_۲[x]$ به توی $\mathbb{R}_۲[x]$ با ضابطهٔ زیر باشد.

$$(T(f))(x) = af(x) + bxf'(x) + cx^۲ f^{(۲)}(x)$$

اگر $a, b, c \in \mathbb{R}$ مثبت باشند، آن گاه؛

$$T[\{۱, x, x^۲\}] = \{a, (a+b)x, (a+۲b+۲c)x^۲\}$$

پایه‌ای برای $\mathbb{R}_۲[x]$ می‌باشد. لذا بنابر قضیهٔ ۱۲.۴؛ T معکوس‌پذیر است و داریم که:

$$T^{-۱}(a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲) = \frac{a_۰}{a} + \frac{a_۱}{a+b}x + \frac{a_۲}{a+۲b+۲c}x^۲$$

■

تمرینات

۲۰.۴ : فرض کنیم V و W دو فضای برداری بر روی هیأت F بوده، و $T_1 : V \to W$ و $T_2 : W \to V$ تبدیلات خطی باشند.

الف) اگر $dim(V) \lneqq dim(W)$، نشان دهید T_1 و T_2T_1 یک به یک نیستند و مثالی بیاورید که T_1 پوشا باشد.

ب) اگر $dim(V) \gneqq dim(W)$، نشان دهید T_1 پوشا نیست و مثالی بیاورید که T_1 یک به یک باشد.

۲۱.۴ : دو عملگر خطی روی $\mathbb{R}^2$ بیابید که $TU = 0$، ولی $UT \neq 0$.

۲۲.۴ : فرض کنیم V فضای برداری بر روی هیأت F باشد.

الف) اگر $T^2 = 0$ در رابطهٔ فضای تصویر T و فضای پوچی T چه می‌توانید بگویید؟

ب) آیا $\frac{1}{2}\dim(V) \leq n(T)$؟

ج) یک عملگر خطی T روی $\mathbb{R}^2$ مثال بزنید که $T^2 = 0$، ولی $T \neq 0$.

۲۳.۴ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F باشد. اگر $T, U \in L(V, V)$ به قسمی باشند که $TU = id_V$، نشان دهید T معکوس‌پذیر است و $U = T^{-1}$. مثالی بیاورید که نشان دهد وقتی V با بعد متناهی نباشد، این مطلب صحیح نیست.

۲۴.۴ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F و T عملگر خطی روی V باشد. اگر $r(T) = r(T^2)$، نشان دهید $\ker(T) \cap R_T = (0)$ و نتیجه بگیرید:

$$V = \ker(T) \oplus R_T$$

۲۵.۴ : فرض کنیم V و W فضاهای برداری روی هیأت F هستند. اگر $T_1 \in L(V, W)$ و $T_2 \in L(W, V)$ به قسمی باشند که T_2T_1 تبدیل خطی همانی روی V گردد، نشان دهید:

$$W = R_{T_1} \oplus \ker(T_2)$$

۲۶.۴ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد $n \in \mathbb{N}$ روی هیأت F باشد. ثابت کنید برای هر $T \in L(V,V)$،

الف) $U \in L(V,V)$ به قسمی وجود دارد که $TUT = T$.

ب) $U \in L(V,V)$ به قسمی وجود دارد که TU خود توان است.

۲۷.۴ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد $n \in \mathbb{N}$ روی هیأت F باشد و $T_1, T_2 \in L(V,V)$ به قسمی باشند که $T_2T_1 = 0$. ثابت کنید $\ker(T_2) = R_{T_1}$ اگر و تنها اگر $r(T_1) + r(T_2) = n$.

۲۸.۴ : فرض کنیم $T \in L(\mathbb{R}_n[x], \mathbb{R}_n[x])$ به قسمی باشد که $T(f) = \lambda f - xf'$. نشان دهید T معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $\lambda \notin \{0, 1, \ldots, n\}$.

۲۹.۴ : فرض کنیم F یک هیأت بوده، و $T : F^{n\times n} \to F^{n\times n}$ با ضابطهٔ $T(B) = B - B^t$ باشد.

الف) فضای پوچی T و بعد آن را تعیین کنید.

ب) فضای تصویر T و بعد آن را تعیین کنید.

۳۰.۴ : اگر W زیر فضای سرهٔ ناصفر از فضای برداری V باشد و $T \in L(V,V)$ به قسمی باشد که برای هر $v \in V \setminus W$، $T(v) = 0$، نشان دهید که $T = 0$.

۳۱.۴ : فرض کنیم V فضای برداری روی هیأت F باشد. عملگر خطی $T \in L(V,V)$ را **خودتوان** یا **تصویری** می‌نامیم، هرگاه $T^2 = T$. نشان دهید اگر $T \in L(V,V)$ خودتوان باشد، آن‌گاه:

الف) بردار $\beta \in V$ متعلق به R_T است اگر و تنها اگر $T(\beta) = \beta$.

ب) $V = \ker(T) \oplus R_T$.

ج) عملگر خطی $id_V - T$ خودتوان است.

متذکر می‌شویم که تبدیل خطی خودتوان T را تصویر روی R_T به موازات $\ker(T)$ نیز می‌نامند.

۳۲.۴ : فرض کنیم V فضای برداری روی هیأت F باشد. ثابت کنید زیرفضاهای V_1، ...، V_n از V به قسمی وجود دارند که $V = \sum_{i=1}^{n} \oplus V_i$ اگر و تنها اگر $p_1, \ldots, p_n \in L(V, V)$ به قسمی وجود داشته باشند که

الف) $p_1 + \cdots + p_n = id_V$.

ب) برای هر i و j متمایز در $\mathbb{N}_n$، $p_i p_j = 0$.

به علاوه این عملگرهای خطی خودتوان هستند و برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $V_i = R_{p_i}$، یعنی؛ p_i تصویر در جهت V_i به موازات $V = \sum_{i \neq j \in \mathbb{N}_n} \oplus V_j$.

۳۳.۴ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F باشد. نشان دهید اگر $T \in L(V, V)$، آن‌گاه:

الف) برای هر $i \in \mathbb{N}$، $\ker(T^i) \subseteq \ker(T^{i+1})$.

ب) برای هر $i \in \mathbb{N}$، اگر $x \in \ker(T^{i+1})$، آن‌گاه $T(x) \in \ker(T^i)$.

ج) اگر $k \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود داشته باشد که $\ker(T^k) = \ker(T^{k+1})$، آن‌گاه برای $i \in \mathbb{N}$، $\ker(T^{k+i}) = \ker(T^{k+i+1})$. این موضوع را برای فضای تصویر بیان و اثبات کنید.

د) اگر k کوچکترین عدد طبیعی باشد که $T^k = 0$، آن‌گاه

$$(0) \subsetneq \ker(T) \subsetneq \ker(T^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(T^k) = V$$

ه) اگر

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\},$$
$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s\},$$
$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_t\}$$

به ترتیب پایه‌ای برای $\ker(T^{i-1})$، $\ker(T^i)$، و $\ker(T^{i+1})$ باشند، آن‌گاه،

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, T(\gamma_1), \ldots, T(\gamma_t)\}$$

زیر مجموعهٔ مستقل خطی $\ker(T^i)$ است.

۳۴.۴ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد $n \in \mathbb{N}$ روی هیأت F باشد. نشان دهید اگر $T \in L(V,V)$ به قسمی باشد که $T^{n-1} \neq 0$ و $T^n = 0$، آن‌گاه $r(T) = n - 1$.

۴.۳ ماتریس نمایش یک تبدیل خطی

برای فضای برداری با بعد متناهی V، اگر،

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

پایه‌ای برای V باشد، آن‌گاه برای هر $\beta \in V \setminus Span(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$،

$$\{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}$$

پایه‌ای برای V است. بنابراین پایه فضای برداری الزاماً یکتا نیست و فضای برداری صفر دارای پایهٔ یکتای $\emptyset$ است و همچنین $\mathbb{Z}_2$ به عنوان فضای برداری روی خودش دارای پایهٔ یکتای $\{\overline{1}\}$ است.

در این بخش می‌خواهیم یک ارتباط بین دو پایهٔ یک فضای برداری با بعد متناهی بوجود آوریم. برای رسیدن به این هدف بایستی بین عناصر یک پایه ترتیب قائل شویم. از این رو عناصر یک پایه را از منظر یک دنبالهٔ متناهی نگاه می‌کنیم. دنبالهٔ متناهی،

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

از بردارهای مستقل خطی V را یک **پایهٔ مرتب** برای آن می‌نامیم، هرگاه فضای V را تولید کند.

فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F بوده و،

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

پایهٔ مرتب V باشد. برای هر $\alpha \in V$، nتایی یکتای،

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^n$$

به قسمی وجود دارد که،

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$$

nتایی یکتای،

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F^n$$

را **مختصات بردار** α **نسبت به پایهٔ مرتب** $\mathfrak{B}$ می‌خوانیم و،

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

را **ماتریس مختصات بردار** α **نسبت به پایهٔ مرتب** $\mathfrak{B}$ می‌نامیم و با $[\alpha]_{\mathfrak{B}}$ نمایش می‌دهیم.
خواص بدیهی زیر را برای $\alpha, \beta \in V$ داریم.

۱) $[\alpha]_{\mathfrak{B}}$ یکتا است.

۲) $[\alpha + \beta]_{\mathfrak{B}} = [\alpha]_{\mathfrak{B}} + [\beta]_{\mathfrak{B}}$.

۳) برای هر $x \in F$، $[x\alpha]_{\mathfrak{B}} = x[\alpha]_{\mathfrak{B}}$.

۴) $[\alpha]_{\mathfrak{B}} = 0$ اگر و تنها اگر $\alpha = 0$

مثال ۱۶ : به سادگی دیده خواهد شد که،

$$\mathfrak{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

پایهٔ مرتبی برای $\mathbb{R}^3$ است. فرض کنیم $\alpha = (a, b, c)$ و $x, y, z \in \mathbb{R}$ به قسمی باشند که،

$$\alpha = x(1, 1, 0) + y(1, 0, 1) + z(0, 1, 1)$$

بنابراین،

$$\begin{cases} x + y &= a \\ x + z &= b \\ y + z &= c \end{cases}$$

از این رو،

$$\begin{cases} x &= \frac{۱}{۲}(a+b-c) \\ y &= \frac{۱}{۲}(a-b+c) \\ z &= \frac{۱}{۲}(-a+b+c) \end{cases}$$

لذا $\frac{۱}{۲}(a+b-c, a-b+c, -a+b+c)$ بردار مختصات و،

$$[\alpha]_{\mathfrak{B}} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} a+b-c \\ a-b+c \\ -a+b+c \end{bmatrix}$$

ماتریس مختصات بردار α نسبت به پایهٔ مرتب $\mathfrak{B}$ است.

قضیه ۱۳.۴ : فرض کنیم،

$$\mathfrak{B} = \{\alpha_۱, \ldots, \alpha_n\} \quad \text{و} \quad \mathfrak{B}' = \{\beta_۱, \ldots, \beta_m\}$$

به ترتیب پایه‌های مرتب برای فضاهای برداری با بعد متناهی V و W روی هیأت F باشند. اگر $T \in L(V, W)$ و،

$$Mat[T; \mathfrak{B}, \mathfrak{B}'] = [\ [T(\alpha_۱)]_{\mathfrak{B}'} \quad [T(\alpha_۲)]_{\mathfrak{B}'} \quad \cdots \quad [T(\alpha_n)]_{\mathfrak{B}'}\ ] \in F^{m\times n}$$

آن گاه برای هر $\alpha \in V$،

$$[T(\alpha)]_{\mathfrak{B}'} = Mat[T; \mathfrak{B}, \mathfrak{B}'][\alpha]_{\mathfrak{B}}$$

و ماتریس $Mat[T; \mathfrak{B}, \mathfrak{B}']$ با خاصیّت فوق یکتا می‌باشد.

برهان: فرض کنیم $Mat[T; \mathfrak{B}, \mathfrak{B}'] = (a_{ij})$، پس برای هر $j \in \mathbb{N}_n$،

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=۱}^{m} a_{ij}\beta_i$$

اگر $\alpha \in V$، اسکالرهای $c_۱, c_۲, \ldots, c_n \in F$ به قسمی وجود دارند که $\alpha = \sum_{j=۱}^{n} c_j\alpha_j$. بنابراین،

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= \textstyle\sum_{j=۱}^{n} c_j T(\alpha_j) \\ &= \textstyle\sum_{j=۱}^{n} c_j (\sum_{i=۱}^{m} a_{ij}\beta_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=۱}^{m} (\sum_{j=۱}^{n} c_j a_{ij})\beta_i \end{aligned}$$

بنابر تعریف ماتریس مختصات یک بردار،

$$\begin{aligned}
[T(\alpha)]_{\mathfrak{B}'} &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} c_j a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_j a_{mj} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\
&= Mat[T; \mathfrak{B}, \mathfrak{B}'][\alpha]_{\mathfrak{B}}
\end{aligned}$$

اثبات یکتایی را به عهدهٔ متعلم واگذار می‌کنیم.

■

با توجّه به قضیهٔ ۱۳.۴، اگر $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ و $\mathfrak{B}'$ به ترتیب پایه‌های مرتب برای فضاهای برداری با بعد متناهی V و W روی هیأت F باشند و $\dim(W) = m \in \mathbb{N}$، آن گاه برای $T \in L(V, W)$،

$$Mat[T; \mathfrak{B}, \mathfrak{B}'] = [\ [T(\alpha_1)]_{\mathfrak{B}'} \quad [T(\alpha_2)]_{\mathfrak{B}'} \quad \cdots \quad [T(\alpha_n)]_{\mathfrak{B}'}\ ] \in F^{m\times n}$$

را **ماتریس نمایش تبدیل خطی** T نسبت به پایه‌های $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{B}'$ می‌نامیم و چنانچه $T \in L(V, V)$، $Mat[T; \mathfrak{B}, \mathfrak{B}]$ را با $Mat[T; \mathfrak{B}]$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱۷ : فرض کنیم F یک هیات است. اگر،

$$\mathfrak{B}' = \{E_{11}, \ldots, E_{m1}\} \quad \text{و} \quad \mathfrak{B} = \{E_{11}, \ldots, E_{n1}\}$$

به ترتیب پایه‌های مرتب برای $F^{n\times 1}$ و $F^{m\times 1}$ باشند و $A \in F^{m\times n}$، آن‌گاه:

$$Mat[T_A; \mathfrak{B}, \mathfrak{B}'] = A$$

حال با توجّه به این نمادهای معرفی شده، قضیهٔ زیر را بیان کنیم.

قضیه ۱۴.۴ : فرض کنیم $\mathfrak{B}$، $\mathfrak{B}'$، و $\mathfrak{B}''$ به ترتیب پایه‌های مرتب برای فضاهای برداری با بعد متناهی V، W، و Z روی هیأت F باشند. اگر $T, T_1 \in L(V, W)$ و $T_2 \in L(W, Z)$، آن گاه برای هر $\lambda \in F$، ۱) $Mat[T+T_1;\mathfrak{B},\mathfrak{B}'] = Mat[T;\mathfrak{B},\mathfrak{B}'] + Mat[T_1;\mathfrak{B},\mathfrak{B}']$

۲) $Mat[\lambda T;\mathfrak{B},\mathfrak{B}'] = \lambda Mat[T;\mathfrak{B},\mathfrak{B}']$

۳) $Mat[T_2T_1;\mathfrak{B},\mathfrak{B}''] = Mat[T_2;\mathfrak{B}',\mathfrak{B}'']Mat[T_1;\mathfrak{B},\mathfrak{B}']$

برهان: فرض کنیم،

$\mathfrak{B} = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ ، $\mathfrak{B}' = \{\beta_1,\dots,\beta_m\}$ ، و $\mathfrak{B}'' = \{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_r\}$.

با توجّه به خواص ماتریس مختصات یک بردار، برای هر $i \in \mathbb{N}_n$،

$[(T+T_1)(\alpha_i)]_{\mathfrak{B}'} = [T(\alpha_i)]_{\mathfrak{B}'} + [T_1(\alpha_i)]_{\mathfrak{B}'}$ و $[\lambda T(\alpha_i)]_{\mathfrak{B}'} = \lambda[T(\alpha_i)]_{\mathfrak{B}'}$

از این رو گزاره‌های (۱) و (۲) برقرار می‌باشند. حال برای اثبات گزارهٔ (۳)، قرار می‌دهیم،

$Mat[T_1;\mathfrak{B},\mathfrak{B}'] = A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$ و $Mat[T_2;\mathfrak{B}',\mathfrak{B}''] = B = (b_{ij}) \in F^{r\times m}$.

بنابراین برای هر $i \in \mathbb{N}_n$،

$$\begin{array}{rcl} T_2T_1(\alpha_i) &=& T_2(T_1(\alpha_i)) \\ &=& T_2(\sum_{k=1}^m a_{ki}\beta_k) \\ &=& \sum_{k=1}^m a_{ki}T_2(\beta_k) \\ &=& \sum_{k=1}^m a_{ki}(\sum_{j=1}^r b_{jk}\gamma_j) \\ &=& \sum_{j=1}^r(\sum_{k=1}^m a_{ki}b_{jk})\gamma_j \end{array}$$

از این رو بنابر یکتایی ماتریس مختصات یک بردار،

$$[T_2T_1(\alpha_i)]_{\mathfrak{B}''} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m b_{1k}a_{ki} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m b_{rk}a_{ki} \end{bmatrix} = (BA)^{(i)}$$

چون بنابر قضیهٔ ۱۳.۴، ماتریس نمایش یک تبدیل خطی یکتا است، لذا:

$$\begin{array}{rcl} Mat[T_2T_1;\mathfrak{B},\mathfrak{B}''] &=& [\ [T_2T_1(\alpha_1)]_{\mathfrak{B}''} \quad [T_2T_1(\alpha_2)]_{\mathfrak{B}''} \quad \cdots \quad [T_2T_1(\alpha_n)]_{\mathfrak{B}''}\ ] \\ &=& [\ (BA)^{(1)} \quad (BA)^{(2)} \quad \cdots \quad (BA)^{(n)}\ ] \\ &=& BA \\ &=& Mat[T_2;\mathfrak{B}',\mathfrak{B}'']Mat[T_1;\mathfrak{B},\mathfrak{B}'] \end{array}$$

■

مثال ۱۸ : فرض کنیم $\theta \in \mathbb{R}$ و T_θ تابعی باشد که از $\mathbb{R}^۲$ به توی $\mathbb{R}^۲$ باشد که هر بردار در $\mathbb{R}^۲$ را به اندازهٔ θ رادیان در خلاف عقربه‌های ساعت دوران می‌دهد. لذا اگر $v = (x, y) \in \mathbb{R}^۲$ و $r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$، آن‌گاه $\psi \in \mathbb{R}$ به قسمی وجود دارد که $v = (r\cos(\psi), r\sin(\psi))$. واضح است که اگر $i = (۱, ۰)$ و $j = (۰, ۱)$، آن‌گاه $\mathfrak{B} = \{i, j\}$ پایهٔ مرتبی برای $\mathbb{R}^۲$ است. از این رو،

$$\begin{aligned} T_\theta(v) &= r\cos(\theta + \psi)i + r\sin(\theta + \psi))j \\ &= (x\cos(\theta) - y\sin(\theta))i + (y\cos(\theta) + x\sin(\theta))j \end{aligned}$$

به سادگی دیده خواهد شد که T_θ یک تبدیل خطی است و با توجّه به ضابطهٔ T_θ،

$$Mat[T_\theta; \mathfrak{B}] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

با استفاده از قواعد مثلثاتی خواهیم داشت که،

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_۱) & -\sin(\theta_۱) \\ \sin(\theta_۱) & \cos(\theta_۱) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_۲) & -\sin(\theta_۲) \\ \sin(\theta_۲) & \cos(\theta_۲) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_۱ + \theta_۲) & -\sin(\theta_۱ + \theta_۲) \\ \sin(\theta_۱ + \theta_۲) & \cos(\theta_۱ + \theta_۲) \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$Mat[T_{\theta_۱}; \mathfrak{B}] Mat[T_{\theta_۲}; \mathfrak{B}] = Mat[T_{\theta_۱} T_{\theta_۲}; \mathfrak{B}]$$

این مثال، درستی گزارهٔ (۳) قضیهٔ ۱۴.۴ را نشان می‌دهد.

قضیه ۱۵.۴ : اگر فضاهای برداری V و W به ترتیب با بعد متناهی n و m روی هیأت F – باشند، آن گاه:

$$L(V, W) \cong F^{m \times n}$$

برهان: فرض کنیم،

$$\mathfrak{B}' = \{\beta_۱, \ldots, \beta_m\} \quad \text{و} \quad \mathfrak{B} = \{\alpha_۱, \ldots, \alpha_n\}$$

به ترتیب پایه‌های مرتب برای فضاهای برداری V و W روی هیأت F باشند. حال،

$$\Theta : L(V, W) \to F^{m \times n}$$

با ضابطهٔ،

$$\Theta(T) = Mat[T; \mathfrak{B}, \mathfrak{B}'], \quad \forall T \in L(V, W)$$

تعریف می‌کنیم. چون بنابر قضیهٔ ۱۳.۴، ماتریس نمایش یک تبدیل خطی یکتا است، پس Θ یک تابع است و بنابر گزاره‌های (۱) و (۲) قضیهٔ ۱۴.۴، تبدیل خطی می‌باشد. حال فرض کنیم برای $T_1, T_2 \in L(V, W)$،

$$\Theta(T_1) = \Theta(T_2)$$

پس بنابر تعریف ماتریس نمایش یک تبدیل خطی برای هر $i \in \mathbb{N}_n$،

$$[T_1(\alpha_i)]_{\mathfrak{B}'} = [T_2(\alpha_i)]_{\mathfrak{B}'}$$

یعنی؛

$$T_1(\alpha_i) = T_2(\alpha_i)$$

لذا بنابر قضیهٔ ٦.۴، $T_1 = T_2$، پس Θ یک به یک است.

فرض کنیم $A = (a_{ij}) \in F^{m \times n}$. بنابر قضیهٔ ٦.۴، $T \in L(V, W)$ به قسمی وجود دارد که برای هر $j \in \mathbb{N}_n$،

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i$$

بنابراین ماتریس مختصات $T(\alpha_j)$ در پایهٔ $\mathfrak{B}'$، ستون jام ماتریس A است و در نتیجه:

$$\Theta(T) = Mat[T, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}'] = A$$

لذا Θ پوشا است. همچنین به سادگی دیده می‌شود که برای هر $T_1, T_2 \in L(V, W)$ و $r \in R$،

$$\Theta(rT_1 + T_2) = r\Theta(T_1) + \Theta(T_2)$$

از این رو Θ یکریختی است و،

$$L(V, W) \cong F^{m \times n}$$

■

قضیه ۱۶.۴ : اگر V و W فضاهای برداری با بعد متناهی روی هیأت F باشند، آن گاه:

$$\dim(L(V,W)) = \dim(V)\dim(W)$$

برهان: بنابر قضایای ۷.۴ و ۱۵.۴، بدیهی است.

■

فرض کنیم، $T \in L(V,W)$ و یک به یک باشد. اگر $\mathfrak{B}'$ پایه مرتب W روی هیأت F با عدد اصلی $m \in \mathbb{N}$، و $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ زیر مجموعه مستقل خطی V باشد، آن گاه؛

$$\{[T(\alpha_1)]_{\mathfrak{B}'},[T(\alpha_2)]_{\mathfrak{B}'},\cdots,[T(\alpha_n)]_{\mathfrak{B}'}\}$$

زیر مجموعه مستقل خطی $F^{m\times 1}$ است.

قضیه ۱۷.۴ : اگر،

$$\mathfrak{B} = \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\} \quad \text{و} \quad \mathfrak{B}' = \{\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_n\}$$

پایه‌های مرتب برای فضای برداری با بعد متناهی V روی هیأت F باشد، آن‌گاه ماتریس معکوس‌پذیر یکتای $P \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارد که برای هر $\alpha \in V$،

$$[\alpha]_{\mathfrak{B}'} = P[\alpha]_{\mathfrak{B}}$$

و برای هر $i \in \mathbb{N}_n$،

$$P^{(j)} = [\alpha_j]_{\mathfrak{B}'}$$

برهان: فرض کنیم $\mathrm{id}_V : V \to V$ تبدیل خطی همانی باشد. لذا برای هر $j \in \mathbb{N}_n$،

$$[\underset{V}{id}(\alpha_j)]_{\mathfrak{B}'} = [\alpha_j]_{\mathfrak{B}'}$$

پس بنابر قضیهٔ ۱۳.۴، کافی است قرار دهیم:

$$Mat[\underset{V}{id};\mathfrak{B},\mathfrak{B}'] = P$$

با توّجه به توضیحات قبل از قضیهٔ، $r(P) = n$. لذا بنابر قضیهٔ ۳۰.۳، P ماتریس معکوس‌پذیر است.

■

ماتریس،

$$Mat[\underset{V}{id}; \mathfrak{B}, \mathfrak{B}'] = [\ [\alpha_1]_{\mathfrak{B}'} \quad [\alpha_2]_{\mathfrak{B}'} \quad \cdots \quad [\alpha_n]_{\mathfrak{B}'}\ ]$$

که در قضیهٔ ۱۷.۴، آورده شده است را **ماتریس تغییر مختصات** از پایهٔ مرتب $\mathfrak{B}$ به پایهٔ مرتب $\mathfrak{B}'$ می‌نامیم.

قضیه ۱۸.۴ : فرض کنیم V یک فضای برداری با پایهٔ متناهی $\mathfrak{B}$ روی هیأت F باشد و $T \in L(V, V)$. در این صورت T معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $Mat[T; \mathfrak{B}]$ معکوس پذیر باشد.

برهان: فرض کنیم $\dim V = n$. بنابر قضیهٔ ۱۵.۴، $\theta : L(V, V) \to F^{n\times n}$ با ضابطهٔ $\theta(T) = [T]_{\mathfrak{B}}$، یک یکریختی می‌باشد.

$\Leftarrow$) چون T معکوس پذیر است، پس $U \in L(V, V)$ به قسمی وجود دارد که $UT = \mathrm{id}_V = TU$. لذا بنابر گزارهٔ (۳) قضیهٔ ۱۴.۴،

$$\begin{aligned} Mat[U; \mathfrak{B}]Mat[T; \mathfrak{B}] &= Mat[UT; \mathfrak{B}] \\ &= Mat[id_V; \mathfrak{B}] \\ &= I_n \end{aligned}$$

و به طور مشابه،

$$Mat[T; \mathfrak{B}]Mat[U; \mathfrak{B}] = I_n$$

پس $Mat[T; \mathfrak{B}]$ معکوس‌پذیر است.

$\Rightarrow$) چون $Mat[T; \mathfrak{B}]$ معکوس پذیر است، پس $D \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارد که،

$$DMat[T; \mathfrak{B}] = I_n = Mat[T; \mathfrak{B}]D$$

از طرفی بنابر برهان قضیهٔ ۱۵.۴، $U \in L(V, V)$ به قسمی وجود دارد که $D = Mat[U; \mathfrak{B}]$. لذا بنابر گزارهٔ (۳) قضیهٔ ۱۴.۴،

$$\begin{aligned} Mat[UT; \mathfrak{B}] &= Mat[U; \mathfrak{B}]Mat[T; \mathfrak{B}] \\ &= I_n \\ &= Mat[id_V; \mathfrak{B}] \end{aligned}$$

و چون θ در قضیهٔ ۱۵.۴، یک به یک می‌باشد، پس $UT = \mathrm{id}_V$. به طور مشابه $TU = \mathrm{id}_V$، بنابراین T نامنفرد است.

■

قضیه ۱۹.۴ : هر ماتریس تغییر مختصات معکوس‌پذیر است.

برهان: چون ماتریس تغییر مختصات، ماتریس نمایش تبدیل خطی همانی است، پس بنابر قضیهٔ ۱۸.۴، معکوس‌پذیرمی‌باشد.

■

مثال ۱۹ : به سادگی دیده خواهد شد که،

$$\mathfrak{B}_1 = \{(1,-1,1),(1,-2,2),(1,-2,1)\}$$

پایه‌ای برای $V = \mathbb{R}^3$ است و،

$$\begin{aligned} id_V(1,-1,1) &= (1,0,0)-(0,1,0)+(0,0,1) \\ id_V(1,-2,2) &= (1,0,0)-2(0,1,0)+2(0,0,1) \\ id_V(1,-2,1) &= (1,0,0)-2(0,1,0)+(0,0,1) \end{aligned}$$

بنابراین، اگر $\mathfrak{B}_2$ پایهٔ متعارف $\mathbb{R}^3$ باشد، آن‌گاه،

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس تغییر مختصات از پایهٔ $\mathfrak{B}_1$ به پایهٔ $\mathfrak{B}_2$، است و،

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

قضیه ۲۰.۴ : فرض کنیم،

$$\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$$

پایهٔ مرتب برای فضای برداری با بعد متناهی V روی هیأت F باشد. اگر $P = (p_{ij}) \in F^{n\times n}$ ماتریس معکوس‌پذیر باشد، آن گاه پایهٔ مرتب یکتای،

$$\mathfrak{B}' = \{\alpha'_۱, \alpha'_۲, \dots, \alpha'_n\}$$

به قسمی وجود دارد که برای هر $\alpha \in V$،

$$[\alpha]_{\mathfrak{B}} = P[\alpha]_{\mathfrak{B}'}$$

و برای هر $j \in \mathbb{N}_n$،

$$\alpha'_j = \sum_{i=۱}^{n} p_{ij}\alpha_i$$

همچنین P ماتریس تغییر مختصات از پایهٔ $\mathfrak{B}'$ به پایهٔ $\mathfrak{B}$ می‌باشد.

برهان: برای هر $j \in \mathbb{N}_n$، قرار می‌دهیم:

$$\alpha'_j = \sum_{i=۱}^{n} p_{ij}\alpha_i$$

بنابر قضیهٔ ۱۵.۴، $T \in L(V,V)$ به قسمی وجود دارد که $P = Mat[T;\mathfrak{B}]$. از این رو برای هر $i \in \mathbb{N}_n$،

$$\alpha'_i = T(\alpha_i)$$

و چون P معکوس‌پذیر است، بنابر قضیهٔ ۱۸.۴، عملگر T معکوس‌پذیر می‌باشد و از قضیهٔ ۱۲.۴، نتیجه می‌شود که،

$$\mathfrak{B}' = \{\alpha'_۱, \dots, \alpha'_n\}$$

یک پایهٔ مرتب برای V بوده و همچنین با توجّه به تعریف عناصر پایهٔ $\mathfrak{B}'$، P ماتریس تغییر مختصات از پایهٔ $\mathfrak{B}'$ به پایهٔ $\mathfrak{B}$ است.

■

قضیه ۲۱.۴ : فرض کنیم $T \in L(V,W)$، $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{B}_۱$ پایه‌های مرتب برای فضای برداری با بعد متناهی V روی هیأت F، و همچنین $\mathfrak{B}'$ و $\mathfrak{B}'_۱$ پایه‌های مرتب برای فضای برداری با بعد

متناهی W روی هیأت F باشند. اگر P ماتریس تغییر مختصات از پایهٔ $\mathfrak{B}_1$ به پایهٔ $\mathfrak{B}$ و Q ماتریس تغییر مختصات از پایهٔ $\mathfrak{B}'_1$ به پایهٔ $\mathfrak{B}'$ باشند، آن گاه:

$$Mat[T;\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}'_1] = Q^{-1}Mat[T;\mathfrak{B},\mathfrak{B}']P$$

برهان: واضح است که $\mathrm{id}_W T = T\,\mathrm{id}_V$، پس بنابر گزارهٔ (۳) قضیهٔ ۱۴.۴،

$$\begin{array}{rcl} QMat[T;\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}'_1] &=& Mat[id_W;\mathfrak{B}'_1,\mathfrak{B}']Mat[T;\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}'_1] \\ &=& Mat[id_W\,T;\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}'] \\ &=& = Mat[T\,id_V;\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}'] \\ &=& Mat[T;\mathfrak{B},\mathfrak{B}']Mat[id_V;\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}] \\ &=& Mat[T;\mathfrak{B},\mathfrak{B}']P \end{array}$$

چون بنابر قضیهٔ ۱۹.۴، ماتریس تغییر مختصات معکوس‌پذیر است، پس حکم برقرار می‌گردد.
■

مثال ۲۰ : واضح است که؛

$$\mathfrak{B}'_1 = \{(2,5),(-1,3)\} \quad \text{و} \quad \mathfrak{B}_1 = \{(1,3,5),(-2,1,0),(1,10,7)\}$$

به ترتیب پایهٔ مرتب برای $V=\mathbb{R}^3$ و $W=\mathbb{R}^2$ هستند. فرض کنیم $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{B}'$ به ترتیب پایهٔ مرتب متعارف V و W باشند و $T:V\to W$ تبدیل خطی باشد که،

$$Mat[T;\mathfrak{B},\mathfrak{B}'] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به سادگی دیده خواهد شد که،

$$\begin{array}{rcl} P &=& Mat[id_V;\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}] \\ &=& \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

و،

$$\begin{aligned} Q &= Mat[id_W; \mathfrak{B}'_۱, \mathfrak{B}'] \\ &= \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

لذا بنابر قضیهٔ ۲۱.۴،

$$\begin{aligned} Mat[T; \mathfrak{B}_۱, \mathfrak{B}'_۱] &= Q^{-۱} Mat[T; \mathfrak{B}, \mathfrak{B}']P \\ &= \frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix} ۸۳ & ٦ & ۱۵۱ \\ -۱۰۹ & -۳۲ & -۲۱۵ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

قضیه ۲۲.۴ : فرض کنیم V و W دو فضای برداری به ترتیب به ابعاد n و m روی هیأت F باشند، همچنین $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{B}'$ به ترتیب پایه‌های مرتب V و W هستند. اگر $A, B \in F^{m\times n}$ و دو ماتریس معکوس‌پذیر P و Q به قسمی باشند که $B = Q^{-۱}AP$، آن‌گاه پایه‌های مرتب $\mathfrak{B}_۱$ و $\mathfrak{B}'_۱$ به ترتیب برای V و W به قسمی وجود دارند که،

$$B = Mat[T; \mathfrak{B}_۱, \mathfrak{B}'_۱] \quad \text{و} \quad A = Mat[T; \mathfrak{B}, \mathfrak{B}']$$

برهان: فرض کنیم،

$$\mathfrak{B}' = \{\beta_۱, \ldots, \beta_m\} \quad \text{و} \quad \mathfrak{B} = \{\alpha_۱, \ldots, \alpha_n\}$$

بنابر برهان قضیهٔ ۱۵.۴، $T \in L(V, W)$ به قسمی وجود دارد که $A = Mat[T; \mathfrak{B}, \mathfrak{B}']$. چون P و Q معکوس‌پذیر هستند، پس اگر قرار می‌دهیم برای هر $j \in \mathbb{N}_n$،

$$\alpha'_j = \sum_{i=۱}^{n} p_{ij}\alpha_i$$

و برای هر $j \in \mathbb{N}_m$،

$$\beta'_j = \sum_{i=۱}^{m} q_{ij}\beta_i$$

آن‌گاه بنابر قضیهٔ ۲۰.۴،

$$\mathfrak{B}'_۱ = \{\beta'_۱, \ldots, \beta'_m\} \quad \text{و} \quad \mathfrak{B}_۱ = \{\alpha'_۱, \ldots, \alpha'_n\}$$

به ترتیب پایه‌های مرتب برای V و W هستند، P ماتریس تغییر مختصات از پایهٔ $\mathfrak{B}'$ به پایهٔ $\mathfrak{B}$، و Q ماتریس تغییر مختصات از پایهٔ $\mathfrak{B}'_۱$ به پایهٔ $\mathfrak{B}'$ است. از این رو بنابر قضیهٔ ۲۱.۴،

$$\begin{aligned} Mat[T;\mathfrak{B}_۱,\mathfrak{B}'_۱] &= Q^{-۱}Mat[T;\mathfrak{B},\mathfrak{B}']P \\ &= Q^{-۱}AP \\ &= B \end{aligned}$$

■

بحث روی ماتریس یک عملگر خطی، حائز اهمیت است از این جهت که می‌توانیم پایهٔ دامنه و هم‌دامنه آن را یکسان بگیریم و همچنین رابطهٔ ماتریس یک عملگر خطی نسبت به دو پایه را بررسی کنیم.

فرض کنیم $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{B}'$ پایه‌های مرتب برای فضای برداری با بعد متناهی V روی هیأت F باشند.اگر $T \in L(V,V)$ و P ماتریس تغییر مختصات از پایهٔ $\mathfrak{B}'$ به پایهٔ $\mathfrak{B}$ باشد، آن گاه بنابر قضیهٔ ۲۱.۴،

$$Mat[T;\mathfrak{B}'] = P^{-۱}Mat[T;\mathfrak{B}]P$$

مثال ۲۱ : فرض کنیم $T:\mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ تبدیل خطی با ضابطهٔ،

$$T(x,y,z) = (۲x - ۳y + z, ۳x - ۲y, -۴x + y + ۲z)$$

باشد. حال اگر $\mathfrak{B}_۱$ و $\mathfrak{B}_۲$ همان پایه‌های مثالِ ۱۹، برای $\mathbb{R}^۳$ باشند، آن‌گاه،

$$Mat[T;\mathfrak{B}_۲] = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۱ \\ ۳ & -۲ & ۰ \\ -۴ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

همچنین بنابر مثالِ ۱۹ و قضیهٔ ۲۱.۴،

$$\begin{aligned} Mat[T;\mathfrak{B}_۱] &= P^{-۱}Mat[T;\mathfrak{B}_۲]P \\ &= \begin{bmatrix} ۱۷ & ۲۷ & ۲۵ \\ -۹ & -۱۲ & -۱۳ \\ -۲ & -۵ & -۳ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

فرض کنیم F یک هیأت باشد و $A, B \in F^{n\times n}$. ماتریس A را با B **متشابه** روی F می‌نامیم، هرگاه ماتریس معکوس‌پذیر $P \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود داشته باشد که $A = P^{-1}BP$. به سادگی دیده خواهد شد که رابطهٔ تشابه روی $F^{n\times n}$ یک رابطهٔ هم ارزی است. لذا ماتریسهای نمایش یک عملگر خطی روی یک فضای برداری با بعد متناهی، نسبت به دو پایه، متشابه هستند. عکس این مطلب که به صورت زیر بیان می‌شود نیز برقرار است.

فرض کنیم F یک هیأت بوده و $A, B \in F^{n\times n}$. اگر ماتریسهای A و B روی F متشابه، و فضای برداری V با بعد متناهی n روی هیأت F باشد، آن‌گاه بنابر قضیهٔ ۲۲.۴، پایه‌های مرتب $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{B}'$ برای V، و $T \in L(V,V)$ به قسمی وجود دارند که،

$$A = Mat[T;\mathfrak{B}] \quad \text{و} \quad B = Mat[T;\mathfrak{B}']$$

قضیه ۲۳.۴ : فرض کنیم $\{V_i\}_{i=1}^{n}$ گردایه‌ای از زیر فضاهای، فضای برداری با بعد متناهی V روی هیأت F به قسمی باشد که

$$V = \sum_{i\in I} \oplus V_i$$

اگر $T \in L(V,V)$ به قسمی باشد که برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، V_i تحت T پایا باشد، آنگاه پایه $\mathfrak{B}$ برای V به قسمی وجود دارد که

$$Mat[T;\mathfrak{B}] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$$

که برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، پایهٔ $\mathfrak{B}_i$ برای V_i به قسمی وجود دارد که $Mat[T|_{V_i};\mathfrak{B}_i] = A_i$ و

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \cup \cdots \cup \mathfrak{B}_n$$

برهان: بنابر قضیه ۱۹.۳، برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، پایهٔ مرتب $\mathfrak{B}_i = \{\alpha_{i۱}, \ldots, \alpha_{ik_i}\}$ برای V_i به قسمی وجود دارد که،

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}_۱ \cup \cdots \cup \mathfrak{B}_n \\ &= \{\alpha_{۱۱}, \ldots, \alpha_{۱k_۱}, \ldots, \alpha_{n۱}, \ldots, \alpha_{nk_n}\} \end{aligned}$$

پایهٔ مرتب برای V است. برای هر $i \in \mathbb{N}_n$ و $j \in \mathbb{N}_{k_i}$، چون $T(\alpha_{ij}) \in V_i$، پس اسکالرهای $a^{(i)}_{۱j}, \ldots, a^{(i)}_{k_ij} \in F$ به قسمی وجود دارند که،

$$T(\alpha_{ij}) = a^{(i)}_{۱j}\alpha_{i۱} + \cdots + a^{(i)}_{k_ij}\alpha_{ik_i}$$

از این رو،

$$[T(\alpha_{ij})]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} ۰ \\ \vdots \\ ۰ \\ a^{(i)}_{۱j} \\ \vdots \\ a^{(i)}_{k_ij} \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \rightarrow \quad \text{سطر } k_۱ + \cdots + k_{i-۱} + ۱ \text{ است} \\ \\ \rightarrow \quad \text{سطر } k_۱ + \cdots + k_i \text{ است} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

و همچنین،

$$[T|_{V_i}(\alpha_{ij})]_{\mathfrak{B}_i} = \begin{bmatrix} a^{(i)}_{۱j} \\ \vdots \\ a^{(i)}_{k_ij} \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$Mat[T; \mathfrak{B}] = \begin{bmatrix} A_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & A_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & A_n \end{bmatrix}$$

و برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $Mat[T|_{V_i}; \mathfrak{B}_i] = A_i$.

■

مثال ۲۲ : تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ با ضابطهٔ،

$$T(x, y, z) = (-z, x + z, y + z)$$

درنظربگیرید. با توجّه به تمرینِ ۵.۴، $V_۱ = \ker(T + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^۳})$ و $V_۲ = \ker(T - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^۳})^۲$، تحت T پایا هستند و $\mathbb{R}^۳ = V_۱ \oplus V_۲$. همچنین $\mathfrak{B}_۱ = \{(۱, -۲, ۱)\}$ و $\mathfrak{B}_۲ = \{(-۱, ۰, ۱), (۰, ۱, ۱)\}$ به ترتیب پایه‌های $V_۱$ و $V_۲$ می‌باشند. واضح است که،

$$Mat[T|_{V_۱}; \mathfrak{B}_۱] = [-۱]$$

و،

$$Mat[T|_{V_۲}; \mathfrak{B}_۲] = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس بنابر قضیهٔ ۲۳.۴،

$$Mat[T; \mathfrak{B}_۱ \cup \mathfrak{B}_۲] = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

تمرینات

۳۵.۴ : فرض کنیم V فضای سطری ماتریس،

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲۱ & ۰ & ۹ & ۰ \\ ۱ & ۷ & -۱ & -۲ & -۱ \\ ۲ & ۱۴ & ۰ & ٦ & ۱ \\ ٦ & ۴۲ & -۱ & ۱۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

روی هیأت $\mathbb{R}$ باشد.

الف) پایه‌ای برای V بیابید.

ب) اگر $\alpha = (a,b,c,d,e) \in V$، ماتریس مختصات آن را در پایه بند (الف) به دست آورید.

۳۶.۴ : فرض کنیم $F = \mathbb{Z}_۳$. نشان دهید بردارهای،

$$\alpha_۱ = (\overline{۱}, \overline{۰}, \overline{۲}), \quad \alpha_۲ = (\overline{۱}, \overline{۱}, \overline{۱}), \quad \alpha_۳ = (\overline{۱}, \overline{۰}, \overline{۰})$$

در $F^۳$ تشکیل یک پایه می‌دهند. ماتریس مختصات بردار $(a,b,c) \in F^۳$ نسبت به پایه مرتب $\mathfrak{B} = \{\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳\}$ بنویسید.

۳۷.۴ : فرض کنیم F هیأت اعداد مختلط است و،

$$V = \{f : \text{ یک تابع است } f : \mathbb{R} \to F\}$$

فضای برداری روی هیأت $\mathbb{R}$ باشد. گیریم،

$$f_۱(x) = ۱, \qquad f_۲(x) = \exp(ix), \qquad f_۳(x) = \exp(-ix)$$
$$g_۱(x) = ۱, \qquad g_۲(x) = \cos(x), \qquad g_۳(x) = \sin(x)$$

الف) نشان دهید مجموعه‌های $\{f_۱, f_۲, f_۳\}$ و $\{g_۱, g_۲, g_۳\}$ هر دو مستقل خطی هستند.

ب) آیا ماتریس معکوس‌پذیر $P \in \mathbb{R}^{۳\times۳}$ وجود دارد که برای هر $۱ \leq j \leq ۳$،

$$g_j = \sum_{i=۱}^{۳} p_{ij} f_i$$

۳۸.۴ : اگر $t \in \mathbb{R}$ و،

$$g_۱(x) = ۱, \quad g_۲(x) = x + t, \quad g_۳(x) = (x+t)^۲$$

نشان دهید $\mathfrak{B} = \{g_۱, g_۲, g_۳\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}_۲[x]$ است و بردار مختصات $f(x) = c_۰ + c_۱x + c_۲x^۲$ را در پایهٔ $\mathfrak{B}$ بنویسید.

۳۹.۴ : فرض کنیم T عملگر خطی روی $\mathbb{R}^۳$ با ضابطهٔ زیر باشد

$$T(x_۱, x_۲, x_۳) = (۳x_۱ + x_۳, -۲x_۱ + x_۲, -x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳)$$

پایهٔ مرتب $\mathfrak{B} = \{(۱,۰,۱), (-۱,۲,۱), (۲,۱,۱)\}$، برای $\mathbb{R}^۳$ در نظر بگیرید.

الف) بردار مختصات $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ نسبت به پایهٔ $\mathfrak{B}$ به دست آورید.

ب) $Mat[T;\mathfrak{B}]$ را به دست آورید.

ج) ثابت کنید T معکوس‌پذیر است و ضابطهٔ تابع معکوس آن را به دست آورید.

۴۰.۴ : اگر θ عدد حقیقی باشد، نشان دهید دو ماتریس،

$$A=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix}\exp(i\theta) & 0\\ 0 & \exp(-i\theta)\end{bmatrix}$$

بر روی هیأت اعداد مختلط متشابه‌اند.

۴۱.۴ : فرض کنیم $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ پایهٔ مرتب برای فضای برداری با بعد متناهی V روی هیأت F باشد و برای هر $j\in\mathbb{N}_n$،

$$\alpha'_j=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\alpha_i$$

ثابت کنید گزاره‌های زیر معادلند:

۱) $\{\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_n\}$ پایهٔ مرتب برای فضای برداری V روی هیأت F است.

۲) ماتریس $P=(p_{ij})\in F^{n\times n}$ معکوس‌پذیر است.

۴۲.۴ : فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی هیات F باشند و $T_1,T_2\in L(V,W)$. در این صورت $\ker(T_1)=\ker(T_2)$ اگر و تنها اگر عملگر معکوس‌پذیر $T:W\to W$ به قسمی وجود داشته باشد که $T_2=TT_1$.

۴۳.۴ : فرض کنیم $A,B\in F^{n\times m}$ دو ماتریس به قسمی باشند که مجموعهٔ جواب دو دستگاه $AX=0$ و $BX=0$ یکسان باشد. در این صورت:

الف) A و B هم ارز سطری هستند.

ب) اگر دو ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی باشند، آن گاه $A=B$.

۴۴.۴ : اگر θ عدد حقیقی باشد، نشان دهید دو ماتریس

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} \exp(i\theta) & 0 \\ 0 & \exp(-i\theta) \end{bmatrix}$$

بر روی هیأت اعداد مختلط متشابه‌اند.

۴۵.۴ : فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیات F است. برای $T, S \in L(V, V)$، پایه‌های مرتب $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{B}'$ برای V به قسمی وجود دارند که $Mat[S; \mathfrak{B}'] = Mat[T; \mathfrak{B}]$ اگر وتنها اگر یک عملگر خطی معکوس‌پذیر U روی V یافت شود که $T = USU^{-1}$.

۴۶.۴ : فرض کنیم V فضای برداری n بعدی با پایهٔ مرتب

$$\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

روی هیأت F باشد.

الف) فرض کنیم $T \in L(V, V)$ به قسمی باشد که

$$T(\alpha_j) = \begin{cases} \alpha_{j+1} & j \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \text{اگر} \\ 0 & j = n \text{اگر} \end{cases}$$

ماتریس $Mat[T; \mathfrak{B}]$ به دست آورید.

ب) ثابت کنید $T^n = 0$، ولی $T^{n-1} \neq 0$.

ج) فرض کنیم $S \in L(V, V)$ به قسمی باشد که $S^n = 0$، ولی $S^{n-1} \neq 0$. ثابت کنید پایهٔ مرتبی چون $\mathfrak{B}'$ برای V وجود دارد که $Mat[S; \mathfrak{B}'] = Mat[T; \mathfrak{B}]$.

د) فرض کنیم $M, N \in F^{n \times n}$ به قسمی باشند که $M^n = N^n = 0$، ولی $M^{n-1} \neq 0 \neq N^{n-1}$. ثابت کنید M و N متشابه‌اند.

۴۷.۴ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد $n \in \mathbb{N}$ روی هیأت F بوده و $T \in L(V, V)$ پوچ‌توان است. نشان دهید:

الف) پایهٔ مرتب $\mathfrak{B} = \{\alpha_۱, \dots, \alpha_n\}$ برای V به قسمی وجود دارد که

$$\begin{aligned} T(\alpha_۱) &= ۰ \\ T(\alpha_۲) &\in Span(\alpha_۱) \\ T(\alpha_۳) &\in Span(\alpha_۱, \alpha_۲) \\ &\vdots \\ T(\alpha_n) &\in Span(\alpha_۱, \dots, \alpha_{n-۱}) \end{aligned}$$

ب) $Mat[T; \mathfrak{B}]$ ماتریس بالا مثلثی است که روی قطر آن صفر می‌باشد.

۴۸.۴ : نشان دهید رتبهٔ هر تبدیل خطی برابر با رتبهٔ ماتریس نمایش آن می‌باشد.

۴۹.۴ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد n روی هیأت F باشد و $T \in L(V,V)$ به قسمی باشد که $r(T) = ۱$. ثابت کنید:

الف) $\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_n \in F$ و پایهٔ مرتب $\mathfrak{B}$ برای V به قسمی وجود دارند که

$$Mat[T; \mathfrak{B}] = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & \lambda_۲ & \cdots & \lambda_n \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \end{bmatrix}$$

ب) اگر $\mathfrak{B}$ پایه‌ای برای V باشد، آن‌گاه $a_۱, \dots, a_n, b_۱, \dots, b_n \in F$ به قسمی وجود دارند که:

$$Mat[T; \mathfrak{B}] = \begin{bmatrix} a_۱b_۱ & a_۲b_۱ & \cdots & a_nb_۱ \\ a_۱b_۲ & a_۲b_۲ & \cdots & a_nb_۲ \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_۱b_n & a_۲b_n & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

۵۰.۴ : فرض کنیم F یک هیأت است و $A \in F^{n\times n}$ به قسمی باشد که $r(A) = ۱$. ثابت کنید:

الف) اگر $tr(A) = ۰$، آن‌گاه A پوچ‌توان است.

ب) اگر $A^۲ = ۰$، آن‌گاه A با ماتریس $E_{۲۱}$ متشابه است.

۵۱.۴ : فرض کنیم T و U عملگرهای خطی روی فضای برداری V با بعد $n \in \mathbb{N}$ روی هیأت F باشند. اگر $\ker(T) = \ker(U) = W$ به قسمی باشد که $\dim(W) = n - ۱$، ثابت کنید که $tr(TU) = tr(T)tr(U)$.

۵۲.۴ : اگر $T_۱$ و $T_۲$ عملگرهای خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V باشند، ثابت کنید:

الف) $r(T_۲T_۱) \leq \min\{r(T_۱), r(T_۲)\}$.

ب) اگر $T_۱$ نامنفرد باشد، آن گاه $r(T_۲T_۱) = r(T_۱T_۲) = r(T_۲)$.

۵۳.۴ : اگر T عملگر خطی روی فضای برداری V با بعد $n \in \mathbb{N}$ باشد، ثابت کنید عملگر خطی S روی V به قسمی وجود دارد که،

$$TS = ۰ \quad \& \quad r(T) + r(S) = n$$

۵۴.۴ : فرض کنیم F یک هیأت باشد. ثابت کنید برای هر $A \in F^{n\times n}$،

الف) ماتریس B به قسمی وجود دارد که $ABA = A$.

ب) اگر $A \neq ۰$، آن‌گاه ماتریس B به قسمی وجود دارد که $AB \neq ۰$ خودتوان است.
راهنمایی: تمرینِ ۲۶.۴، را ببینید.

۵۵.۴ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و $T : F^{n\times ۱} \to F^{n\times ۱}$ تبدیل خطی با رتبهٔ r است. اگر $P \in F^{n\times r}$ به قسمی باشد که $\{P^{(۱)}, P^{(۲)}, \ldots, P^{(r)}\}$ پایه‌ای برای R_T گردد و $A = (a_{ij}) \in F^{r\times n}$ به گونه‌ای باشد که برای هر $j \in \mathbb{N}_n$،

$$T(E_{j۱}) = \sum_{i=۱}^{r} a_{ij} P^{(i)}$$

آن‌گاه نشان دهید برای هر $X \in F^{n\times ۱}$،

$$T(X) = PAX$$

و نتیجه بگیرید که هر ماتریس با رتبهٔ r را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب یک ماتریس $n \times r$ با رتبهٔ r و یک ماتریس $r \times n$ نوشت.

۵۶.۴ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد $n \in \mathbb{N}$ روی هیأت F که $char(F) \neq ۲$، باشد و $T \in L(V,V)$ به قسمی باشد که $T^۲ = I$. ثابت کنید:

$$\ker(T+I) \oplus \ker(T-I) = V$$

۵۷.۴ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و $A \in F^{n\times n}$ به قسمی باشد که $A^۲ = I_n$. ثابت کنید:

$$r(A+I_n) + r(A-I_n) = n$$

۵۸.۴ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و ماتریس $A \in F^{n\times n}$ به قسمی باشد که $A^۲ = A$ و $r(A) = k$. ثابت کنید:

الف) $r(A) = tr(A)$.

ب) برای هر ماتریس $A \in F^{n\times n}$، ماتریس $C \in F^{k\times k}$ به قسمی وجود دارد که AB و BA با ماتریس بلوکی،

$$\begin{bmatrix} C & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \in F^{n\times n}$$

متشابه هستند.

۵۹.۴ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F با مشخصهٔ صفر باشد. اگر $E, E_۱, \ldots, E_k \in L(V,V)$ عملگرهای خودتوان باشند که $E = E_۱ + \cdots + E_k$، ثابت کنید:

الف) $R_E = R_{E_۱} \oplus \cdots \oplus R_{E_k}$.

ب) برای هر i و j متمایز در $\mathbb{N}_k$، $E_iE_j = ۰$.

۶۰.۴ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F باشد. نشان دهید اگر $T \in L(V,V)$ به قسمی باشد که برای هر $U \in L(V,V)$، $UT = TU$، آن‌گاه $\alpha \in F$ به گونه‌ای وجود دارد که $T = \alpha\, id_V$.

۴.۴ تابعک خطی

در این بخش تبدیلهای خطی را بررسی می‌کنیم که بعد فضای تصویر آن کوچکتر یا مساوی یک است. از آنجا که هر فضای برداری با بعد ۱ روی هیأت F با فضای برداری F روی خودش یکریخت است، پس کافی است برای فضای برداری V روی هیأت F، فضای برداری $L(V,F)$ را روی هیأت F بررسی کنیم. قرار می‌دهیم $V^\star = L(V,F)$ و آن را **فضای دوگان** V می‌خوانیم، همچنین هر عضو $V^\star$ را یک **تابعک خطی** می‌نامیم.

قضیه ۲۴.۴ : فرض کنیم V فضای برداری روی هیأت F باشد و $\circ \neq f \in V^\star$. اگر $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$، آن گاه $r(f) = ۱$ و $n(f) = n - ۱$.

برهان: چون $\dim_F(F) = ۱$، پس بنابر قضیهٔ ۸.۴، $r(f) = ۱$ و $n(f) = n - ۱$.

■

مثال ۲۳ : بردارهای،

$$\alpha_۱ = (۱, \circ, ۱) \quad ، \alpha_۲ = (\circ, ۱, -۲) \quad ، \text{و} \quad \alpha_۳ = (-۱, -۱, \circ)$$

متعلق به $V = \mathbb{R}^۳$ هستند. فرض کنیم $f(x,y.z) = ax + by + cz \in V^\star$ به قسمی باشد که،

$$f(\alpha_۱) = ۱ \quad ، f(\alpha_۲) = -۱ \quad ، \text{و} \quad f(\alpha_۳) = ۳$$

در این صورت (a,b,c) جواب دستگاهی است که ماتریس افزودهٔ آن،

$$[A|Y] = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_۱ & ۱ \\ \alpha_۲ & -۱ \\ \alpha_۳ & ۳ \end{array}\right]$$

می‌باشد. لذا $(a,b,c) = (۴, -۷, -۳)$، یعنی؛ $f(x,y.z) = ۴x - ۷y - ۳z$.

قضیه ۲۵.۴ : فرض کنیم $\mathfrak{B} = \{\alpha_۱, \ldots, \alpha_n\}$ پایهٔ فضای برداری با بعد متناهی V روی هیأت F باشد. اگر برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $\alpha_i^\star \in V^\star$ به قسمی باشد که برای هر $j \in \mathbb{N}_n$،

$$\alpha_i^\star(\alpha_j) = \delta_{ij}$$

آن گاه:

۱) $\mathfrak{B}^\star = \{\alpha_1^\star, \ldots, \alpha_n^\star\}$ پایهٔ فضای دوگان V است و آن را پایهٔ دوگان $\mathfrak{B}$ می‌نامیم و $\dim(V^\star) = \dim(V)$.

۲) برای هر $f \in V^\star$، $f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)\alpha_i^\star$.

۳) برای هر $\alpha \in V$، $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i^\star(\alpha)\alpha_i$.

برهان: ۱) بنابر قضیهٔ ۱۶.۴،

$$\begin{aligned} \dim(V^\star) &= \dim(V)\dim(F) \\ &= n \end{aligned}$$

پس بنابر قضیهٔ ۱۶.۳، کافی است نشان دهیم $\mathfrak{B}^\star$ روی F مستقل خطی است. فرض کنیم اسکالرهای $c_1, \ldots, c_n \in F$ به قسمی باشند که،

$$c_1\alpha_1^\star + \cdots + c_n\alpha_n^\star = 0$$

از این رو برای هر $j \in \mathbb{N}_n$،

$$\begin{aligned} 0 &= (c_1\alpha_1^\star + \cdots + c_n\alpha_n^\star)(\alpha_j) \\ &= c_1\alpha_1^\star(\alpha_j) + \cdots + c_n\alpha_n^\star(\alpha_j) \\ &= c_1\delta_{1j} + \cdots + c_n\delta_{nj} \\ &= c_j \end{aligned}$$

۲) بنابر گزارهٔ (۱)، اسکالرهای $c_1, \ldots, c_n \in F$ به قسمی وجود دارند که،

$$f = \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i^\star$$

بنابراین برای هر $j \in \mathbb{N}_n$،

$$\begin{aligned} f(\alpha_j) &= \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i^\star(\alpha_j) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i\delta_{ij} \\ &= c_j \end{aligned}$$

پس:

$$f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)\alpha_i^\star$$

۳) فرض کنیم $\alpha \in V$. چون $\mathfrak{B}$ پایهٔ V است، پس اسکالرهای $c_1, \ldots, c_n \in F$ به قسمی وجود دارند که $\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i$. لذا برای هر $j \in \mathbb{N}_n$،

$$\begin{aligned} \alpha_j^\star(\alpha) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_j^\star(\alpha_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i\delta_{ij} \\ &= c_j \end{aligned}$$

از این رو:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^\star(\alpha)\alpha_i$$

■

فرض کنیم $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ پایهٔ فضای برداری با بعد متناهی V روی هیأت F باشد و $f \in V^\star$. اگر بردار مختصات $\alpha \in V$ برابر با $(x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ باشد، آن گاه،

$$f(\alpha) = x_1 f(\alpha_1) + \cdots + x_n f(\alpha_n)$$

فضای دوگان، فضای برداری $V^\star$ را با $V^{\star\star}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲۴ : بردارهای،

$$\alpha_1 = (1, 0, -1) \quad \text{،} \quad \alpha_2 = (1, 1, 1) \quad \text{، و} \quad \alpha_3 = (2, 2, 0)$$

تشکیل پایه‌ای برای $V = \mathbb{R}^3$ می‌دهند. می‌خواهیم دوگان پایهٔ $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ را به دست آوریم. لذا فرض کنیم $\mathfrak{B}^\star = \{f_1, f_2, f_3\}$، که برای هر $i \in \mathbb{N}_3$،

$$f_i(x, y, z) = a_i x + b_i y + c_i z$$

از این رو برای هر $i, j \in \mathbb{N}_3$، $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$ و در نتیجه،

$$\begin{aligned} f_1(\alpha_1) &= a_1 + 0b_1 - c_1 &&= 1 \\ f_1(\alpha_2) &= a_1 + b_1 + c_1 &&= 0 \\ f_1(\alpha_3) &= 2a_1 + 2b_1 + 0c_1 &&= 0 \end{aligned}$$

بنابراین (a_1, b_1, c_1) جواب دستگاهی است که ماتریس افزودهٔ آن،

$$[A|Y] = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 \end{array}\right]$$

می‌باشد. لذا $(a_1, b_1, c_1) = (1, -1, 0)$، یعنی؛ $f_1(x, y, z) = x - y$. به طور مشابه f_2 و f_3 را می‌توان به دست آورد.

قضیه ۲۶.۴ : اگر V فضای برداری با بعد متناهی V روی هیأت F باشد، آن گاه:

$$\dim(V^{\star\star}) = \dim(V^{\star}) = \dim(V)$$

برهان: بنابر قضیهٔ ۲۵.۴، بدیهی است.

■

حال طبیعی است که این پرسش را طرح کنیم که چه رابطه‌ای بین فضای برداری $V^{\star\star}$ و فضای برداری V وجود دارد. به این سوال در قضیهٔ زیر پاسخ می‌دهیم.

قضیه ۲۷.۴ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد متناهی $n \in \mathbb{N}$ روی هیأت F باشد. برای هر $\alpha \in V$، $L_\alpha : V^\star \to F$ را با ضابطهٔ $L_\alpha(f) = f(\alpha)$ تعریف می کنیم.

۱) برای هر $\alpha \in V$، $L_\alpha \in V^{\star\star}$.

۲) $\theta : V \to V^{\star\star}$ با ضابطهٔ $\theta(\alpha) = L_\alpha$ یک یکریختی است.

برهان: ۱) فرض کنیم $\alpha \in V$. واضح است که L_α یک تابع است. حال فرض کنیم $f, g \in V^\star$ و $c \in F$. بنابراین،

$$\begin{aligned} L_\alpha(cf + g) &= (cf + g)(\alpha) \\ &= cf(\alpha) + g(\alpha) \\ &= cL_\alpha(f) + L_\alpha(g) \end{aligned}$$

از این رو $L_\alpha \in V^{\star\star}$.

۲) در ابتدا نشان می‌دهیم θ یک تبدیل خطی است. فرض کنیم $\alpha, \beta \in V$ و $c \in F$. بنابراین برای هر $f \in V^\star$،

$$\begin{aligned}(\theta(c\alpha+\beta))(f) &= L_{c\alpha+\beta}(f)\\ &= f(c\alpha+\beta)\\ &= cf(\alpha)+f(\beta)\\ &= cL_\alpha(f)+L_\beta(f)\\ &= c\theta(\alpha)(f)+\theta(\beta)(f)\end{aligned}$$

بنابراین $\theta(c\alpha+\beta) = c\theta(\alpha)+\theta(\beta)$، یعنی؛ θ یک تبدیل خطی است. حال فرض کنیم $\alpha \in V$ و $\theta(\alpha) = ۰$. پس $\alpha \in \bigcap_{f\in V^\star} \ker(f) = (۰)$. از این رو θ یک به یک است. بنابر قضیهٔ ۱۲.۴، θ یکریختی است.

■

مثال ۲۵ : فرض کنیم $V = \mathbb{R}_۱[x]$. اگر $f_۱$ و $f_۲$ ضوابطی از V به توی $\mathbb{R}$ به قسمی باشند که برای هر $p(x) \in V$،

$$f_۲(p) = \int_۰^۲ p \quad \text{و} \quad f_۱(p) = \int_۰^۱ p$$

در این صورت $f_۱, f_۲ \in V^\star$. حال اگر اسکالرهای $a, b \in \mathbb{R}$ به قسمی باشند که،

$$af_۱ + bf_۲ = ۰$$

آن گاه برای $p(x) = x$، داریم:

$$\begin{aligned}(af_۱+bf_۲)(p) = ۰(p) \quad &\Rightarrow \quad a\textstyle\int_۰^۱ x\,dx + b\int_۰^۲ x\,dx = ۰\\ &\Rightarrow \quad \tfrac{۱}{۲}a + ۲b = ۰\end{aligned}$$

و به طور مشابه برای $p(x) = ۱$، به دست می‌آوریم که $a + ۲b = ۰$. از این رو (a, b) جواب دستگاه،

$$\begin{cases} \tfrac{۱}{۲}a + ۲b &= ۰\\ a + ۲b &= ۰\end{cases}$$

می‌باشد. لذا $a=b=0$ و در نتیجه $\mathfrak{B}=\{f_1,f_2\}$ پایهٔ مرتب برای $V^\star$ است. حال اگر $\mathfrak{B}$ دوگان پایه $\{p_1(x)=a+bx, p_2(x)=c+dx\}$ باشد، آن گاه:

$$\begin{cases} f_1(p_1) &= a+\frac{1}{2}b &= 1 \\ f_2(p_1) &= 2a+2b &= 0 \end{cases}$$

لذا $a=2$ و $b=-2$. از این رو $p_1(x)=2-2x$. به طور مشابه $p_2(x)=-\frac{1}{2}+x$.
بنابراین $\{f_1,f_2\}$ دوگان پایه $\{2-2x, -\frac{1}{2}+x\}$ می‌باشد.
حال قضیهٔ زیر، صورت کلی این مثال را اثبات می‌کند.

قضیه ۲۸.۴ : اگر V فضای برداری با بعد متناهی $n\in\mathbb{N}$ روی هیأت F باشد، هر پایهٔ $V^\star$ دوگان یک پایهٔ V است.

برهان: فرض کنیم،

$$\mathfrak{B}_1=\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$$

پایه‌ای برای $V^\star$ باشد و،

$$\mathfrak{B}_1^\star=\{f_1^\star,f_2^\star,\ldots,f_n^\star\}$$

پایهٔ دوگان $\mathfrak{B}_1$ برای فضای $V^{\star\star}$ باشد، پس برای هر $i,j\in\mathbb{N}_n$،

$$f_i^\star(f_j)=\delta_{ij} \qquad (1)$$

برای هر $i\in\mathbb{N}_n$، چون بنابر قضیهٔ ۲۷.۴، θ یکریختی است، $\alpha_i\in V$ به قسمی وجود دارد که،

$$\begin{aligned} L_{\alpha_i} &= \theta(\alpha_i) \qquad (2) \\ &= f_i^\star \end{aligned}$$

و بنابر قضیهٔ ۱۲.۴،

$$\mathfrak{B}=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$$

یک پایهٔ V است. حال بنابر روابط (۱) و (۲)، برای هر $i,j\in\mathbb{N}_n$، خواهیم داشت که:

$$\begin{aligned} f_j(\alpha_i) &= L_{\alpha_i}(f_j) \\ &= f_i^\star(f_j) \\ &= \delta_{ij} \\ &= \alpha_j^\star(\alpha_i) \end{aligned}$$

از این رو بنابر قضیهٔ ۶.۴، برای هر $j \in \mathbb{N}_n$، $\alpha_j^\star = f_j$ و در نتیجه $\mathfrak{B}^\star = \mathfrak{B}_1$.

■

در قضیهٔ زیر نشان می‌دهیم که تابعکهای خطی روی ماتریسهای مربع چیزی جز اثر ماتریس نیست.

قضیه ۲۹.۴ : فرض کنیم F یک هیأت بوده، $W = F^{n\times n}$ و $f \in W^\star$. در این صورت $B = (b_{ij}) \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارد که،

۱) برای هر $A \in F^{n\times n}$، $f(A) = tr(B^t A)$.

۲) اگر برای هر $A, D \in F^{n\times n}$، $f(AD) = f(DA)$، آن گاه اسکالر $\alpha \in F$ به قسمی وجود دارد که برای هر $A \in F^{n\times n}$، $f(A) = \alpha tr(A)$.

۳) اگر برای هر $A, D \in F^{n\times n}$، $f(AD) = f(DA)$ و $f(I_n) = n$، آن گاه برای هر $A \in F^{n\times n}$، $f(A) = tr(A)$.

برهان: ۱) می‌دانیم که،

$$\mathfrak{B} = \{E_{ij} \in F^{n\times n} : i, j \in \mathbb{N}_n\}$$

پایه‌ای برای فضای برداری $F^{n\times n}$ روی هیأت F است. فرض کنیم،

$$\mathfrak{B}^\star = \{E_{ij}^\star \in W^\star : i, j \in \mathbb{N}_n\}$$

پایهٔ دوگان $\mathfrak{B}$ برای $W^\star$ باشد. در این صورت:

$$E_{ij}^\star(E_{rs}) = \begin{cases} 1 & \text{اگر}(i,j) = (r,s) \\ 0 & \text{اگر}(i,j) \neq (r,s) \end{cases}$$

برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$، $b_{ij} \in F$ به قسمی وجود دارند که،

$$f = \sum_{i,j\in\mathbb{N}_n} b_{ij} E_{ij}^\star$$

قرار می‌دهیم $B = (b_{ij})$ و $A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$ را در نظر بگیرید.

از این رو $E^{\star}_{ij}(A) = a_{ij}$ و عنصر موقعیت (j,j) ماتریس B^tA برابر است با $\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_{ij}$ و در نتیجه:

$$\begin{aligned} f(A) &= \textstyle\sum_{1\le i,j\le n} b_{ij}E^{\star}_{ij}(A) \\ &= \textstyle\sum_{1\le i,j\le n} b_{ij}a_{ij} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_{ij}) \\ &= tr(B^tA) \end{aligned}$$

۲) فرض کنیم $i,j \in \mathbb{N}_n$. در این صورت برای هر $A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$،

$$tr(AE_{ij}) = a_{ji}$$

گیریم $1 \le i \ne j \le n$، در این صورت،

$$\begin{aligned} 0 &= f(0) \\ &= f(E_{ii}E_{ji}) \\ &= f(E_{ji}E_{ii}) \\ &= f(E_{ji}) \\ &= tr(B^tE_{ji}) \\ &= b_{ij} \end{aligned}$$

پس درایه‌های غیر قطری ماتریس B صفر هستند. همچنین،

$$\begin{aligned} f(E_{ij}E_{ji}) &= f(E_{ji}E_{ij}) \\ f(E_{ii}) &= f(E_{jj}) \\ tr(B^tE_{ii}) &= tr(B^tE_{jj}) \\ b_{ii} &= b_{jj} \end{aligned}$$

لذا ماتریس B مضرب اسکالری از ماتریس همانی است. فرض کنیم $B = \alpha I_n$. بنابراین برای هر $A \in F^{n\times n}$،

$$\begin{aligned} f(A) &= tr(B^tA) \\ &= tr(\alpha I_nA) \\ &= \alpha tr(A) \end{aligned}$$

■

قضیه ۳۰.۴ : فرض کنیم F یک هیأت بوده، $W = F^{n\times n}$ و $W_\circ$ زیرفضای پدید آمده توسط مجموعهٔ $\mathcal{A} = \{AD - DA : A, D \in F^{n\times n}\}$ باشد. در این صورت

۱) $W_\circ = \{A \in F^{n\times n} : tr(A) = \circ\}$.

۲) اگر $f \in W^\star$ با ضابطهٔ $f(A) = tr(A)$ باشد، آن گاه $\ker(f) = W_\circ$.

۳) $\dim_F W_\circ = n^۲ - ۱$.

برهان: ۱) واضح است که،

$$W_۱ = \{A \in F^{n\times n} : tr(A) = \circ\}$$

زیرفضای W است و چون برای هر $A, D \in F^{n\times n}$،

$$tr(AD - DA) = \circ$$

یعنی؛ $AD - DA \in W_۱$، پس بنابر قضیهٔ ۵.۳،

$$W_\circ = Span(\mathcal{A}) \subseteq W_۱$$

فرض کنیم $A = (a_{ij}) \in W_۱$. برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$، تعریف می‌کنیم:

$$d_{ij} = \begin{cases} \frac{-۱}{n} a_{ij} & \text{اگر } i = j \\ \circ & \text{اگر } i \neq j \end{cases} \qquad c_{ij} = \begin{cases} \circ & \text{اگر } i = j \\ a_{ij} & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

قرار می‌دهیم $D = (d_{ij}) \in W$ و $C = (c_{ij}) \in W$، در نتیجه $A = -nD + C$ و،

$$\begin{array}{rcl} C & = & \sum_{۱\leq i\neq j\leq n} c_{ij} E_{ij} \\ & = & \sum_{۱\leq i\neq j\leq n} c_{ij}(E_{ij}E_{jj} - E_{jj}E_{ij}) \end{array}$$

بنابراین $C \in W_\circ$. واضح است که،

$$\begin{array}{rcl} N & = & \sum_{i=۱}^{n} \sum_{۱\leq j\neq i\leq n} (E_{ji}DE_{ij} - DE_{ij}E_{ji}) \\ & = & \sum_{i=۱}^{n} \sum_{۱\leq j\neq i\leq n} d_{ii}(E_{jj} - E_{ii}) \in W_\circ \end{array}$$

لذا اگر $N = (g_{ij})$، آن گاه برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$،

$$g_{ij} = \begin{cases} \sum_{1\leq i\neq k\leq n} d_{kk} - (n-1)d_{ii} & i = j \text{ اگر} \\ 0 & i \neq j \text{ اگر} \end{cases}$$

با توجّه به این که $A \in W_1$، پس $\sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \frac{-1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$ و در نتیجه برای هر $j \in \mathbb{N}_n$،

$$\sum_{1\leq j\neq i\leq n} d_{ii} - (n-1)d_{jj} = -nd_{jj} = a_{jj}$$

بنابراین $-nD = N \in W_0$ و نهایتاً $A = -nD + C \in W_0$. بنابراین $W_0 = W_1$.

برهان (۲) و (۳) با توجّه به گزارهٔ (۱) بدیهی است.

■

در ادامهٔ این بخش می‌خواهیم دوگان یک جمع مستقیم را مطالعه کنیم. برای این منظور نیاز داریم ابتدا مفهوم پوچساز را تعریف کنیم.

فرض کنیم V یک فضای برداری روی هیأت F باشد. برای هر $S \subseteq V$، مجموعهٔ،

$$\{f \in V^\star : S \subseteq \ker(f)\}$$

را **پوچساز** S می‌نامیم و با نماد $Ann_{V^\star}(S)$ و یا به اختصار با $Ann(S)$ نمایش می‌دهیم. بهتر است گوشزد کنیم که در برخی از کتابها پوچساز S را با نماد S° نمایش می‌دهند. زمانی که $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ متناهی باشد، $Ann(S)$ را با $Ann(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ نمایش می‌دهیم. واضح است که $Ann(V) = (0)$ و $Ann(\emptyset) = Ann(0) = V^\star$.

مثال ۲۶ : فرض کنیم،

$$\begin{aligned}
f_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) &= x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 \\
f_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) &= x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 - 4x_5 \\
f_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) &= 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 7x_4 - 3x_5 \\
f_4(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) &= 3x_1 + 8x_2 + x_3 - 7x_4 - 8x_5
\end{aligned}$$

تابعکهای خطی روی $\mathbb{R}^5$ باشند. اگر W زیرفضایی از $\mathbb{R}^5$ باشد که توسط این تابعکها پوچ می‌شود و $\alpha = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in W$، آن‌گاه برای هر $i \in \mathbb{N}_4$، $f_i(\alpha) = 0$ و در نتیجه

α^t جواب دستگاه $AX = \circ$ می‌باشد، که،

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۱ & -۲ & -۳ \\ ۱ & ۴ & ۳ & -۱ & -۴ \\ ۲ & ۳ & -۴ & -۷ & -۳ \\ ۳ & ۸ & ۱ & -۷ & -۸ \end{bmatrix}$$

و چون

$$A \sim \begin{bmatrix} ۱ & \circ & -۵ & -۵ & \circ \\ \circ & ۱ & ۲ & ۱ & -۱ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

پس،

$$\begin{cases} x_۱ &= ۵x_۳ + ۵x_۴ \\ x_۲ &= -۲x_۳ - x_۴ + x_۵ \end{cases}$$

و در نتیجه،

$$\alpha = x_۳(۵, -۲, ۱, \circ, \circ) + x_۴(۵, -۱, \circ, ۱, \circ) + x_۵(\circ, ۱, \circ, \circ, ۱)$$

از این رو:

$$W = Span((۵, -۲, ۱, \circ, \circ), (۵, -۱, \circ, ۱, \circ), (\circ, ۱, \circ, \circ, ۱))$$

قضیه ۳۱.۴ : فرض کنیم V یک فضای برداری روی هیأت F باشد. برای هر $S \subseteq V$،

۱) $Ann(S)$ زیرفضای $V^\star$ است.

۲) $Ann(S) = Ann(Span(S))$.

برهان: ۱) واضح است که تابعک خطی صفر متعلق به $Ann(S)$ است، پس $Ann(S) \neq \emptyset$. حال فرض کنیم $f_۱, f_۲ \in Ann(S)$ و $c \in F$. بنابراین برای هر $\alpha \in S$،

$$(cf_۱ + f_۲)(\alpha) = cf_۱(\alpha) + f_۲(\alpha) = c\circ + \circ = \circ$$

پس $cf_1 + f_2 \in Ann(S)$. از این رو بنابر قضیهٔ ۳.۳، $Ann(S)$ زیرفضای $V^\star$ است.

۲) چون $S \subseteq Span(S)$، پس $Ann(Span(S)) \subseteq Ann(S)$. حال فرض کنیم $f \in Ann(S)$. برای $\alpha \in Span(S)$، اسکالرهای $c_1, \ldots, c_n \in F$ و بردارهای $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$ به قسمی وجود دارند که،

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i$$

از آنجا که برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $f(\alpha_i) = 0$، لازم می آید که،

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(\alpha_i) = 0$$

پس $f \in Ann(Span(S))$، یعنی؛ $Ann(S) \subseteq Ann(Span(S))$. لذا بنابر اصل گسترش گزارهٔ (۲) برقرار است.

■

مثال ۲۷ : فرض کنیم،

$$\alpha_1 = (2, 4, 6) \quad ، \alpha_2 = (4, 5, 6) \quad \text{و} ، \alpha_3 = (2, 7, 1)$$

و $W = Span(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \subseteq \mathbb{R}^3$. اگر $f(x, y, z) = ax + by + cz \in Ann(W)$، آن گاه،

$$\begin{cases} f(\alpha_1) &= 2a + 4b + 6c &= 0 \\ f(\alpha_2) &= 4a + 5b + 6c &= 0 \\ f(\alpha_3) &= 2a + 7b + 12c &= 0 \end{cases}$$

و چون،

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $a - c = 0$ و $b + 2c = 0$ و در نتیجه،

$$f(x, y, z) = c(x - 2y + z)$$

لذا بنابر قضیهٔ ۳۱.۴، $Ann(W) = Span(x - 2y + z)$.

قضیه ۳۲.۴ : اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F، و W زیرفضای V باشد، آن گاه:

$$\dim(W) + \dim(Ann(W)) = \dim(V)$$

برهان: فرض کنیم $\{\alpha_۱, \ldots, \alpha_k\}$ پایه‌ای برای زیرفضای W باشد. بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، بردارهای $\alpha_{k+۱}, \ldots, \alpha_n \in V$ به قسمی وجود دارند که $\mathfrak{B} = \{\alpha_۱, \ldots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V است. بنابر قضیهٔ ۲۵.۴، $\mathfrak{B}^\star$ پایه‌ای برای $V^\star$ می‌باشد. اگر نشان دهیم،

$$\mathfrak{B}_۱ = \{\alpha^\star_{k+۱}, \ldots, \alpha^\star_n\}$$

پایه‌ای برای $Ann(W)$ است، آن گاه،

$$\begin{aligned} \dim(W) + \dim(Ann(W)) &= k + (n-k) \\ &= n \\ &= \dim(V) \end{aligned}$$

چون زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ مستقل خطی، مستقل خطی است، پس $\mathfrak{B}_۱$ مستقل خطی است. از طرفی اگر $k + ۱ \leq j \leq n$ و $۱ \leq i \leq k$، آنگاه بنابر قضیهٔ ۲۵.۴،

$$\alpha^\star_j(\alpha_i) = \delta_{ij} = ۰$$

پس $\alpha^\star_j|_W = ۰$، یعنی؛ $\alpha^\star_j \in Ann(W)$. از این رو $\mathfrak{B}_۱ \subseteq Ann(W)$. حال فرض کنیم $f \in Ann(W)$. لذا بنابر قضیهٔ ۲۵.۴،

$$f = \sum_{i=۱}^{n} f(\alpha_i)\alpha^\star_i$$

و چون،

$$f(\alpha_۱) = \cdots = f(\alpha_k) = ۰$$

پس،

$$f = \sum_{i=k+۱}^{n} f(\alpha_i)\alpha^\star_i \in Span(\mathfrak{B}_۲)$$

از این رو $\mathfrak{B}_۱$ پایه‌ای برای $Ann(W)$ است.

■

مثال ۲۸ : فرض کنیم W و f_iها، همان علائم مثال ۲۶، باشد. در این صورت $Ann(W) = Span(f_1, f_2, f_3, f_4)$ و بنابر قضیهٔ ۳۲.۴،

$$\dim(Span(f_1, f_2, f_3, f_4)) = 2$$

قضیه ۳۳.۴ : فرض کنیم V یک فضای برداری روی هیأت F باشد. برای زیرمجموعه‌های S_1 و S_2 از V، گزاره‌های زیر معادلند:

۱) $Ann(S_1) = Ann(S_2)$.

۲) $Span(S_1) = Span(S_2)$.

برهان: ۲ $\Rightarrow$ ۱) فرض کنیم گزارهٔ (۲) برقرار نباشد و $\alpha \in Span(S_1) \setminus Span(S_2)$. حال اگر $\mathfrak{B}_1$ پایه‌ای برای $Span(S_2)$ باشد، آن‌گاه بنابر قضیهٔ ۱۰.۳، $\mathfrak{B}_1 \cup \{\alpha\}$ زیرمجموعهٔ مستقل خطی V است و از قضیهٔ ۱۱.۳، نتیجه می‌شود که $\mathfrak{B}_2 \subseteq V$ به قسمی وجود دارد که،

$$\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \cup \{\alpha\}$$

پایه‌ای برای V می‌باشد. بنابر قضیهٔ ٦.۴، $f \in V^\star$ به قسمی وجود دارد که $f(\alpha) = 1$ و $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \subseteq \ker(f)$. از این رو،

$$f \in Ann(Span(S_2)) \setminus Ann(Span(S_1))$$

و بنابر گزارهٔ (۲) قضیهٔ ۳۱.۴،

$$f \in Ann(S_2) \setminus Ann(S_1)$$

که با گزارهٔ (۱) مغایرت دارد.

۱ $\Rightarrow$ ۲) بنابر گزارهٔ (۲) قضیهٔ ۳۱.۴، بدیهی است.

■

قضیه ۳۴.۴ : فرض کنیم W و N زیرفضاهای، فضای برداری با بعد متناهی V روی هیأت F، به قسمی باشند که $V = W \oplus N$. در این صورت $Ann(W) \cong N^\star$، $Ann(N) \cong W^\star$، و $V^\star = Ann(W) \oplus Ann(N)$.

برهان: فرض کنیم $\mathfrak{B}_1$ و $\mathfrak{B}_2$ به ترتیب پایه‌های W و N باشند. لذا بنابر قضیهٔ ۱۹.۳، $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ پایه‌ای برای V است. با توجّه به تعریف پایهٔ دوگان و قضیهٔ ۳۱.۴، داریم:

$$\mathfrak{B}_1^\star \subseteq Ann(\mathfrak{B}_2) = Ann(N)$$

لذا بنابر قضیهٔ ۵.۳،

$$Span(\mathfrak{B}_1^\star) \subseteq Ann(N)$$

به طور مشابه،

$$Span(\mathfrak{B}_2^\star) \subseteq Ann(W)$$

از آنجا که $\mathfrak{B}^\star = \mathfrak{B}_1^\star \cup \mathfrak{B}_2^\star$، لازم می آید که،

$$V^\star = Span(\mathfrak{B}_1^\star) \oplus Span(\mathfrak{B}_1^\star)$$

و چون $Ann(W) \cap Ann(N) = \emptyset$، پس $V^\star = Ann(W) \oplus Ann(N)$. همچنین،

$$\begin{aligned} \dim(W^\star &= |\mathfrak{B}_1^\star| \\ &= Span(\mathfrak{B}_1^\star) \\ &= \dim(Ann(N)) \end{aligned}$$

از این رو بنابر قضیهٔ ۱۷.۳، $Ann(N) \cong W^\star$ و به طور مشابه $Ann(W) \cong N^\star$.

■

با توجّه به قضیهٔ ۳۵.۴، همانند ماتریسها می‌خواهیم برای یک تبدیل خطی ترانهاده تعریف کنیم.

قضیه ۳۵.۴ : فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی هیأت F باشند. گیریم $\mathfrak{B}_1 = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ و $\mathfrak{B}_2 = \{\beta_i\}_{i=1}^m$ به ترتیب پایه‌های مرتب برای فضاهای برداری V و W روی هیأت F باشند. برای $T \in L(V,W)$، تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} T' : W^\star & \to & V^\star \\ \qquad f & \to & f \circ T \end{cases}$$

در این صورت:

۱) $T' \in L(W^\star, V^\star)$.

۲) اگر $A = Mat[T; \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$، آن‌گاه $A^t = Mat[T'; \mathfrak{B}_2^\star, \mathfrak{B}_1^\star]$.

برهان: ۱) بدیهی است.

۲) فرض کنیم $B = Mat[T'; \mathfrak{B}_2^\star, \mathfrak{B}_1^\star]$. لذا برای هر $i \in \mathbb{N}_n$ و $j \in \mathbb{N}_m$،

$$T(\alpha_i) = \sum_{t=1}^{m} a_{ti}\beta_t \quad \text{و} \quad T'(\beta_j^\star) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\alpha_k^\star$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} T'(\beta_j^\star)(\alpha_i) &= (\textstyle\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\alpha_k^\star)(\alpha_i) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\alpha_k^\star(\alpha_i) \\ &= b_{ij} \end{aligned}$$

و،

$$\begin{aligned} T'(\beta_j^\star)(\alpha_i) &= \beta_j^\star(T(\alpha_i)) \\ &= \beta_j^\star(\textstyle\sum_{t=1}^{m} a_{ti}\beta_t) \\ &= \textstyle\sum_{t=1}^{m} a_{ti}\beta_j^\star(\beta_t) \\ &= a_{ji} \end{aligned}$$

در نتیجه $B = A^t$.

■

با توجّه به قضیهٔ ۳۵.۴، برای هر $T \in L(V, W)$، T' را **ترانهادهٔ** یا **الحاقی** T می‌نامیم و با T^t نمایش می‌دهیم. خواص زیر را داریم.

فرض کنیم V، W، و Z فضاهای برداری روی هیأت F باشند. برای هر $f, g \in L(V, W)$ و $h \in L(W, Z)$،

۱) $(f + g)^t = f^t + g^t$.

۲) $(h \circ f)^t = f^t \circ h^t$.

۳) اگر f یکریختی باشد، آن‌گاه $(f^{-1})^t = (f^t)^{-1}$.

قضیه ۳۶.۴ : فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی هیأت F باشند و $T \in L(V, W)$. در این صورت،

$$\ker(T^t) = Ann(R_T)$$

و اگر V و W با بعد متناهی باشند، آن‌گاه:

۱) $R_{(T^t)} = Ann(\ker(T))$.

۲) $r(T) = r(T^t)$.

۳) $n(T^t) = n(T)$.

برهان: اگر $f \in \ker(T^t)$، آن‌گاه با توجّه به تعریف ترانهادهٔ یک تبدیل خطی، برای هر $\alpha \in V$، خواهیم داشت:

$$f(T(\alpha)) = T^t(f)(\alpha) = 0$$

بنابراین $\ker(T^t) \subseteq Ann(R_T)$.

فرض کنیم $f \in Ann(R_T)$ و $\alpha \in V$. از این رو،

$$T^t(f)(\alpha) = f(T(\alpha)) = 0$$

لذا $Ann(R_T) \subseteq \ker(T^t)$.

۱) واضح است که اگر $f \in Ann(\ker(T))$، آن‌گاه،

$$\ker(T) \subseteq \ker(f)$$

حال اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V به قسمی باشد که $\{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ پایهٔ $\ker(T)$ است، آن‌گاه $\{T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_r)\}$ پایه‌ای برای R_T می‌شود. لذا بنابر ۱۱.۳، $\beta_{r+1}, \dots, \beta_m \in W$ به قسمی وجود دارند که $\{T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_r), \beta_{r+1}, \dots, \beta_m\}$ پایه‌ای برای W است. بنابر قضیهٔ ۶.۴، $g \in W^\star$ به قسمی وجود دارد که $g(T(\alpha_i)) = f(\alpha_i)$ و $g(\beta_i) = 0$. از این رو برای هر $i \in \mathbb{N}_n$،

$$f(\alpha_i) = g(T(\alpha_i)) = T^t(g)(\alpha_i)$$

بنابراین،

$$Ann(\ker(T)) \subseteq R_{(T^t)}$$

حال اگر $f \in R_{(T^t)}$، $g \in W^\star$ به قسمی وجود دارد که $f = T^t(g)$. لذا برای هر $\alpha \in \ker(T)$، بنابر قضیهٔ ۱.۴، داریم:

$$f(\alpha) = T^t(g)(\alpha) = g(T(\alpha)) = 0$$

پس $f \in Ann(\ker(T))$ و به عبارت دیگر،

$$R_{(T^t)} \subseteq Ann(\ker(T))$$

موارد (۲) و (۳)، با توجّه به مطالب قبل این قضیه و قضایای ۸.۴ و ۳۲.۴ نتیجه می‌شوند.
■

تمرینات

۶۱.۴ : پایهٔ $\{(۱,۲),(۲,۳)\}$ را برای $\mathbb{R}^۲$ در نظر بگیرید. فرض کنیم $\{f_۱,f_۲\}$ پایهٔ دوگان مذکور بوده و $f:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ یک تابعک خطی با ضابطهٔ $f(x,y) = ۲x - ۵y$ باشد. $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ به قسمی بیابید که $f = \alpha f_۱ + \beta f_۲$.

۶۲.۴ : فرض کنیم $V = \mathbb{R}_۲[x]$ و $f_۱,f_۲,f_۳ \in V^\star$ به قسمی باشند که برای هر $p(x) \in V$،

$$f_۱(p) = \int_۰^۱ p \quad ، \quad f_۲(p) = \int_۰^۲ p \quad ، \text{و} \quad f_۳(p) = \int_۰^۳ p$$

با ارائهٔ پایه‌ای برای V که $\{f_۱,f_۲,f_۳\}$ دوگان آن باشد، نشان دهید که $\{f_۱,f_۲,f_۳\}$ پایه‌ای برای $V^\star$ است.

۶۳.۴ : فرض کنیم F هیأت اعداد مختلط باشد.

الف) پایه‌ای برای فضای سطری ماتریس زیر روی هیات F به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ & -۳ & \cdots & -(n-۱) \\ ۱ & ۰ & -۱ & -۲ & \cdots & -(n-۲) \\ ۲ & ۱ & ۰ & -۱ & \cdots & -(n-۳) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-۱ & n-۲ & n-۳ & n-۴ & \cdots & ۰ \end{bmatrix}$$

ب) برای هر $1 \leq k \leq n$ تابعک خطی f_k با ضابطهٔ،

$$f_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} (k-j)x_j$$

تعریف می‌شود. بعد زیر فضای پوچ شده توسط f_1، ...، f_n چیست؟

۶۴.۴ : فرض کنیم برای هر $t \in \mathbb{R}$، $\phi_t \in (\mathbb{R}_2[x])^\star$ با ضابطهٔ $\phi_t(f) = f(t)$ باشد. اگر $a, b, c \in \mathbb{R}$ متمایز باشند، آن گاه:

الف) نشان دهید $\mathfrak{B} = \{\phi_a, \phi_b, \phi_c\}$ پایه‌ای برای $(\mathbb{R}_2[x])^\star$ است.

ب) اگر $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ متمایز باشند و

$$f(x) = \frac{\prod_{k \neq i \in \mathbb{N}_n}(x - x_i)}{\prod_{k \neq i \in \mathbb{N}_n}(x_k - x_i)}$$

آن گاه برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $f(x_i) = \delta_{ki}$.

ج) پایه‌ای برای $\mathbb{R}_2[x]$ به قسمی بیابید که $\mathfrak{B}$ دوگان آن باشد.

۶۵.۴ : فرض کنیم V فضای برداری روی هیأت F با بعد $n \in \mathbb{N}$ بوده و W زیرفضای V با بعد m باشد. اگر،

$$A = \{T \in L(V, V) : W \subseteq \ker(T)\}$$

نشان دهید:

الف) A زیرفضای $L(V, V)$ است.

ب) $\dim(A) = (n-m)n$.

۶۶.۴ : فرض کنیم W_1 و W_2 دو زیرفضا از یک فضای برداری V با بعد متناهی روی هیأت F باشند. ثابت کنید:

الف) $(W_1 + W_2)^\circ = W_1^\circ \cap W_2^\circ$.

ب) $(W_1 \cap W_2)^\circ = W_1^\circ + W_2^\circ$.

۶۷.۴ : فرض کنیم F زیرهیأتی از اعداد مختلط و V فضای برداری دلخواهی بر روی F باشد. اگر $f,g \in L(V,F)$ به قسمی باشند که $h: V \to F$ با ضابطهٔ $h(x) = f(x)g(x)$ یک تابعک خطی است، ثابت کنید $f = ۰$ یا $g = ۰$.

۶۸.۴ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و $P \in F^{n\times n}$.

الف) اگر $n = ۲$ و $T \in L(F^{۲\times ۲}, F^{۲\times ۲})$ با ضابطهٔ $T(A) = PA$ باشد، ثابت کنید $tr(T) = ۲tr(P)$.

ب) فرض کنیم $P \in F^{n\times n}$ و،

$$\mathfrak{B} = \{E_{۱۱}, E_{۱۲}, \ldots, E_{۱n}, \cdots, E_{n۱}, E_{n۲}, \ldots, E_{nn}\} \subseteq F^{n\times n}$$

پایهٔ مرتب برای $F^{n\times n}$ باشد. اگر T عملگر خطی روی $F^{n\times n}$ با ضابطهٔ $T(A) = PA$ باشد، آن گاه $Mat[T;\mathfrak{B}]$ متقارن است و $tr(T) = ntr(P)$.

۶۹.۴ : فرض کنیم V یک فضای برداری $n \in \mathbb{N}$ بعدی روی هیأت F و W زیرفضای تولیدشده توسط $\mathcal{A} = \{T_۱T_۲ - T_۲T_۱ : T_۱, T_۲ \in L(V,V)\}$ از $L(V,V)$ باشد. $\dim_F W$ را به دست آورید.

۷۰.۴ : فرض کنیم $\mathfrak{B}_۱ = \{\alpha_i\}_{i=۱}^n$ و $\mathfrak{B}_۲ = \{\beta_i\}_{i=۱}^n$ پایه‌های مرتب برای فضای برداری V روی هیأت F باشند و $P = (p_{ij}) \in F^{n\times n}$ ماتریس تغییر وضعیت از پایهٔ $\mathfrak{B}_۱$ به پایهٔ $\mathfrak{B}_۲$ باشد. ثابت کنید $(P^{-۱})^t$ ماتریس تغییر وضعیت از پایهٔ $\mathfrak{B}_۱^*$ به پایهٔ $\mathfrak{B}_۲^*$ است.

۷۱.۴ : فرض کنیم ماتریس تغییر وضعیت از پایهٔ مرتب $\mathfrak{B}$ به پایهٔ مرتب متعارف $\mathbb{R}^۳$ دارای معکوس،

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۲ \\ ۰ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

باشد. ضابطهٔ هر یک از عناصر $\mathfrak{B}^*$ را مشخص کنید. آیا می‌توانید این بحث را تعمیم دهید؟

فصل ۵

بردارها و مقادیر ویژه

۵.۱ مقادیر ویژه

فرض کنیم V یک فضای برداری روی هیأت F باشد و $T \in L(V,V)$. اگر برای $\lambda \in F$، $0 \neq v \in V$ به قسمی وجود داشته باشد که $T(v) = \lambda v$، آن گاه λ را یک **مقدار ویژه** T و v را یک **بردار ویژه** متناظر به مقدار ویژه λ می‌نامیم.

قضیه ۱.۵ : فرض کنیم V یک فضای برداری روی هیأت F باشد و $T \in L(V,V)$. اگر $\lambda \in F$ مقدار ویژه T باشد، آن گاه

$$V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$$

زیرفضای پایای V تحت T است.

برهان: برای هر $v \in V_\lambda$ داریم که

$$T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v)$$

پس $T(v) \in V_\lambda$ و در نتیجه $T(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$. بدیهی است که V_λ زیرفضای V است، لذا V_λ زیرفضای پایای V تحت T است.

■

زیر فضای V_λ را زیر فضای متناظر به مقدار ویژه λ می نامیم.
اگر $\dim V$ متناهی و $T \in L(V, V)$، آن گاه برای هر پایه $\mathfrak{B}$ قرار می دهیم:

$$\det(T) = \det Mat[T; \mathfrak{B}]$$

این تعریف مستقل ازانتخاب $\mathfrak{B}$ است، زیرا اگر $\mathfrak{B}'$ پایهٔ دیگری برای V باشد، آن گاه بنابر قضیهٔ ۲۱.۴، ماتریس معکوس پذیر P به قسمی وجود دارد که،

$$Mat[T, \mathfrak{B}'] = P^{-1} Mat[T; \mathfrak{B}] P$$

از این رو،

$$\begin{aligned} \det Mat[T; \mathfrak{B}'] &= \det(P^{-1} Mat[T; \mathfrak{B}] P) \\ &= \det Mat[T; \mathfrak{B}] \det(P P^{-1}) \\ &= \det Mat[T; \mathfrak{B}] \end{aligned}$$

اگر $A \in F^{m\times n}$ و $\lambda \in F$ و $0 \neq X \in F^{m\times 1}$ به قسمی باشند که $AX = \lambda X$، آن گاه λ را مقدارویژه ماتریس A می‌نامیم.

قضیه ۲.۵ : فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F باشد و $T \in L(V, V)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱) $\lambda \in F$ مقدار ویژه T است.

۲) $T - \lambda I$ منفرد (معکوس ناپذیر) است.

۳) $\det(T - \lambda I) = 0$.

برهان: فرض کنیم $\dim V = n$ و $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای مرتب برای V باشد.
۲ $\Leftarrow$ ۱) بنابر گزارهٔ (۱)، $0 \neq v \in V$ به قسمی وجود دارد که $T(v) = \lambda v$ و یا $(T - \lambda I)(v) = 0$. پس بنابر قضایای ۲.۴ و ۱۲.۴، $T - \lambda I$ منفرد (معکوس ناپذیر) است.
۳ $\Leftarrow$ ۲ بنابر گزارهٔ (۲) و قضیهٔ ۱۸.۴، $Mat[T - \lambda I; \mathfrak{B}] \in F^{n\times n}$ معکوس پذیر نیست ، لذا از قضیهٔ ۱۷.۲، نتیجه می‌شود که $\det(Mat[T - \lambda I; \mathfrak{B}] = 0$.

۱ $\Rightarrow$ ۳) بنابر قضایای ۹.۲ و ۱۷.۲، $0 \neq X \in F^{n\times 1}$ به قسمی وجود دارد که $Mat[T-\lambda I;\mathfrak{B}]X = 0$. بنابراین اگر $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ و قرار دهیم $v = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$، آن گاه خواهیم داشت که $(T-\lambda I)(v) = 0$ و یا $T(v) = \lambda v$. پس λ مقدار ویژه T است.

■

فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F باشد و $T \in L(V,V)$. $\det(xI-T)$ را چندجمله‌ای مشخصه T می‌نامیم و برای تسهیل در نوشتن از نماد χ_T برای چندجمله‌ای مشخصه T استفاده می‌کنیم. ریشه‌های χ_T روی هیأت F همان مقادیر ویژه T می‌باشند. به طور مشابه اگر $A \in F^{n\times n}$، آن گاه $\chi_A = \det(xI-A)$ را چندجمله‌ای مشخصه A می‌نامیم.

مثال ۲۹ : فرض کنیم،

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

پس،

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & x \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)^2$$

اگر $\chi_A = 0$، آن گاه $x = 1$ یا $x = 2$. بنابراین $x = 1$ و $x = 2$ مقادیرویژه A هستند. چون فضای وابسته به مقدار ویژه $x = 1$ برابر است با،

$$\begin{aligned} V_1 &= \{X \in F^{n\times 1} : AX = X\} \\ &= \{X \in F^{n\times 1} : (I-A)X = 0\} \end{aligned}$$

پس لازم است ماتریس هم‌ارز سطری مقدماتی $I-A$ را به دست آوریم که ماتریس زیر می‌باشد.

$$R = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حال اگر $RX = 0$، خواهیم داشت،

$$\begin{cases} 2x_1 &= x_3 \\ x_2 &= 0 \end{cases}$$

و در نتیجه،

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

پس، $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ پایه‌ای برای زیر فضای V_1 است. زیر فضای وابسته به مقدار ویژه $x = 2$ به طور مشابه به دست می آید.

مثال ۳۰ : فرض کنیم،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس،

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^2-2x+2)$$

لذا تنها مقدار ویژهٔ حقیقی، $x = 1$ است و ماتریس دارای دو مقدار ویژهٔ مختلط،

$$\frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm \sqrt{-1}$$

می‌باشد. اگر λ مقدار ویژهٔ A و،

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

بردار ویژهٔ متناظر به λ باشد، آن گاه X جواب دستگاه $AX = \lambda X$ است. بنابراین،

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + y - z &= 0 \\ (1-\lambda)y &= 0 \\ x + (1-\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

اگر $\lambda = 1$، آن گاه معادلهٔ دوم دستگاه به ازای هر مقدار y درست است. لذا قرار می‌دهیم $y = 1$ و نتیجه می‌شود که،

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حال فرض کنیم $\lambda \neq 1$. در این صورت از معادلهٔ دوم دستگاه نتیجه می‌شود که $y = 0$. از این رو،

$$\begin{cases} (1-\lambda)x - z &= 0 \\ x + (1-\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

چون X بردار ویژه است، پس x و z همزمان صفر نیستند. در هر حال می‌توانیم یکی از متغیرها را دلخواه انتخاب کرده و دیگری را بر حسب آن به دست آوریم. مثلاً می‌توانیم فرض کنیم $z = 1$. لذا $x = \frac{1}{1-\lambda}$ و،

$$X(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\lambda} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردار ویژهٔ متناظر به λ است.

فرض کنیم $m \in \mathbb{N}$ به قسمی باشد که χ_T بر $(x-\lambda)^m$ بخش‌پذیر بوده ولی بر $(x-\lambda)^{m+1}$ بخش‌پذیر نباشد. در این صورت m را چندگانگی جبری مقدار ویژه λ می‌نامیم. و بعد فضای وابسته به مقدار ویژه λ را چندگانگی هندسی آن گوییم.

تمرینات

۱.۵ : فرض کنیم F یک هیأت بوده، $D \in F^{n\times n}$ ماتریس قطری باشد. در این صورت چندجمله‌ای مشخصهٔ D برابر است با $\chi_D = \prod_{i=1}^{n}(x - d_{ii})$.

۲.۵ : پایه‌ای برای زیرفضای ویژه وابسته به مقدار ویژه $x = 1$ برای ماتریس،

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

به دست آورید.

۳.۵ : فرض کنیم V فضای برداری همهٔ توابع پیوسته از $\mathbb{R}$ به توی $\mathbb{R}$ بوده و T عملگر خطی روی V تعریف شده توسط،

$$(Tf)(x) = \int_{\circ}^{x} f(t)dt$$

باشد. ثابت کنید T دارای هیچ مقدار ویژه نیست.

۴.۵ : اگر T عملگر خطی معکوس‌پذیر روی فضای برداری متناهی‌البعد V با هیات اسکالر F باشد، آن گاه،

$$g(x) = \frac{۱}{\det(T)}(-x)^n \chi_T(\frac{۱}{x})$$

چندجمله‌ای مشخصهٔ $T^{-۱}$ است.

۵.۵ : فرض کنیم $T : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ به صورت،

$$T(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$$

تعریف شده باشد. اگر m_i چندگانگی جبری مقدار ویژهٔ λ_i از T باشد، آن گاه مقدار $\lambda_۱ m_۱ + \lambda_۲ m_۲$ را تعیین کنید.

۶.۵ : فرض کنیم F یک هیأت بوده و $A \in F^{n\times n}$ ماتریس قطری با چندجمله‌ای مشخصهٔ،

$$\chi_A(x) = (x-c_۱)^{d_۱} \cdots (x-c_k)^{d_k}$$

باشد. واضح است که $V = \{D \in F^{n\times n} : AD = DA\}$ فضای برداری روی هیات F می‌باشد. نشان دهید $\dim_F V = d_۱^۲ + \cdots + d_k^۲$.

۷.۵ : فرض کنیم F یک هیأت بوده و $A \in F^{n\times n}$ ماتریس قطری با چندجمله‌ای مشخصهٔ،

$$f(x) = (x-c_۱)^{d_۱} \cdots (x-c_k)^{d_k}$$

باشد. اگر $T : F^{n\times n} \to F^{n\times n}$ با ضابطهٔ $T(B) = AB - BA$، ثابت کنید $r(T) = n^۲ - (d_۱^۲ + \cdots + d_k^۲)$.

۸.۵ : اگر $A \in F^{n\times n}$ ناصفر و پوچتوان باشد. نشان دهید چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس $I + A$ برابر است با $(x-۱)^n$.

۹.۵ : فرض کنیم F یک هیأت بوده و $A \in F^{n\times n}$. اگر $T : F[x] \to F^{n\times n}$ با ضابطهٔ $T(f(x)) = f(A)$ باشد، آن گاه نشان دهید:

الف) اگر A قطری باشد، آن گاه هر عضو R_T قطری است.

ب) اگر A بالا (پایین) مثلثی باشد، آن گاه هر عضو R_T بالا (پایین) مثلثی است.

ج) ماتریس A وجود ندارد به قسمی که تبدیل خطی T پوشا باشد.

۱۰.۵ : فرض کنیم F یک هیأت است و $A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$ به قسمی باشد که برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a$، آن‌گاه ثابت کنید، a یک مقدار ویژهٔ A است و بردار ویژهٔ متناظر به آن را به دست آورید.

۱۱.۵ : فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد $n \in \mathbb{N}$ روی هیأت F، و $T \in L(V, V)$ پوچ‌توان باشد. اگر $a_0 \neq 0$، ثابت کنید،

$$a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0 I$$

یک به یک است.

۱۲.۵ : فرض کنیم F یک هیأت بوده و،

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in F^{2\times 2}$$

الف) ثابت کنید $\chi_A(A) = 0$.

ب) اگر A دارای دو مقدار ویژهٔ متمایز $\lambda_1, \lambda_2 \in F$ باشد. ثابت کنید $\alpha_1 = \begin{bmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{bmatrix}$ و $\alpha_2 = \begin{bmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{bmatrix}$ به ترتیب بردارهای ویژهٔ متناظر به مقادیر ویژهٔ λ_1 و λ_2 می‌باشند و،

$$P = \begin{bmatrix} b & b \\ \lambda_1 - a & \lambda_2 - a \end{bmatrix}$$

معکوس‌پذیر است و،

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

ج) اگر $\lambda \in F$ تنها مقدار ویژهٔ A در F باشد و $char(F) \neq 2$، ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$A^n = n\lambda^{n-1}A + (1-n)\lambda^n I_2$$

۱۳.۵ : اگر $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دو دنبالهٔ حقیقی به قسمی باشند که،

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} \end{cases}$$

و همچنین $a_1 = 2$ و $a_2 = 3$. جملهٔ عمومی دنبالهٔ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را مشخص کنید. راهنمایی: از گزارهٔ (ج) تمرین ۱۲.۵، استفاده کنید.

۱۴.۵ : فرض کنیم $T \in L(V,V)$ و W زیر فضای V به قسمی باشد که تحت T پایا است. اگر f چندجمله‌ای مشخصهٔ $T|_W$ و g چندجمله‌ای مشخصهٔ،

$$\begin{cases} \bar{T} : \frac{V}{W} \to \frac{V}{W} \\ \bar{T}(x+W) = T(x) + W \end{cases}$$

باشد، آن گاه ثابت کنید fg چندجمله‌ای مشخصهٔ T است.

۱۵.۵ : فرض کنیم $A, B \in F^{n\times n}$ و B معکوس‌پذیر باشد. با استفاده از این مطلب که هر چندجمله‌ای در $F[x]$ دارای تعداد متناهی ریشه است، نشان دهید برای تعداد متناهی $x \in F$، $A + xB$ معکوس‌پذیر نیست.

۱۶.۵ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و $A \in F^{n\times n}$. ثابت کنید $T : F^{n\times n} \to F^{n\times n}$ با ضابطهٔ $T(B) = AB - BA$ یک تبدیل خطی است که $\det(T) = 0$.

۱۷.۵ : فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ به قسمی باشد که $\det(A) > 0$. نشان دهید که A یک مقدار ویژهٔ مثبت دارد.

۱۸.۵ : اگر A ماتریس حقیقی متقارن باشد، آن گاه ثابت کنید که همهٔ مقادیر ویژه A حقیقی هستند.

۵.۲ ماتریس قطری شدنی

فرض کنیم V فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F باشد. $T \in L(V,V)$ را **قطری شدنی** می‌نامیم، هرگاه V دارای پایه‌ای باشد که هر عنصر آن یک بردار ویژه متناظر به یک مقدار ویژه T باشد. همچنین اگر،

$$f(x) = a_\circ + a_\backslash x + \cdots + a_n x^n \in F[x]$$

تعریف می‌کنیم،

$$\begin{aligned} f(T) &= a_\circ T^\circ + a_\backslash T + \cdots + a_n T^n \\ &= a_\circ I + a_\backslash T + \cdots + a_n T^n \end{aligned}$$

با توجّه به قضایای ۹.۴ و ۱۰.۴، واضح است که $f(T) \in L(V,V)$.

قضیه ۳.۵ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F باشد و $T \in L(V,V)$. اگر $T(\alpha) = c\alpha$ و $f(x) \in F[x]$ باشد، آن گاه $f(T)(\alpha) = f(c)\alpha$.

برهان: فرض کنیم $f(x) = a_\circ + a_\backslash x + \cdots + a_n x^n \in F[x]$. واضح است که برای هر $i \in \mathbb{N}$، $T^i(\alpha) = c^i\alpha$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(T)(\alpha) &= (a_\circ I + a_\backslash T + \cdots + a_n T^n)(\alpha) \\ &= a_\circ I(\alpha) + a_\backslash T(\alpha) + \cdots + a_n T^n(\alpha) \\ &= a_\circ \alpha + a_\backslash c\alpha + \cdots + a_n c^n \alpha \\ &= (a_\circ + a_\backslash c + \cdots + a_n c^n)\alpha \\ &= f(c)\alpha \end{aligned}$$

■

قضیه ۴.۵ : فرض کنیم V فضای برداری روی هیأت F باشد و $T \in L(V,V)$. اگر $\lambda_\backslash, \cdots, \lambda_n \in F$ مقادیر ویژه متمایز T باشند و برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، زیر فضای وابسته به مقدار ویژه λ_i را با $V_{\lambda_i} = ker(\lambda_i I - T)$ نشان دهیم، آن گاه $\{V_{\lambda_i}\}_{i=\backslash}^n$ گردایه‌ای از زیر فضاهای مستقل V است.

برهان: فرض کنیم برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $\alpha_i \in V_{\lambda_i}$ به قسمی باشند که $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$. بنابراین برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $T(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i$. اگر برای هر $i \in \mathbb{N}_n$ قراردهیم:

$$f_i(x) = \frac{(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_{i-1})(x-\lambda_{i+1})\cdots(x-\lambda_n)}{(\lambda_i-\lambda_1)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i-\lambda_n)}$$

آن گاه $f_i(x) \in F[x]$ و $f_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$. چون برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، $T(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i$، پس بنابر قضیهٔ ۳.۵، داریم که:

$$\begin{aligned} f_k(T)(\alpha_i) &= f_k(\lambda_i)\alpha_i \\ &= \delta_{ki}\alpha_i \end{aligned}$$

چون برای هر $k \in \mathbb{N}_n$، $f_k(T) \in L(V,V)$، پس بنابر قضیهٔ ۱.۴، خواهیم داشت که:

$$\begin{aligned} 0 &= f_k(T)(0) \\ &= f_k(T)(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \\ &= f_k(T)(\alpha_1) + \cdots + f_k(T)(\alpha_n) \\ &= \delta_{k1}\alpha_1 + \delta_{k2}\alpha_2 + \cdots + \delta_{kn}\alpha_n \\ &= \alpha_k \end{aligned}$$

از این رو بنابر قضیهٔ ۹.۳، $\{V_{\lambda_i}\}_{i=1}^{n}$ گردایه‌ای از زیرفضاهای مستقل V است.

■

فرض کنیم V فضای برداری روی هیأت F باشد و $T \in L(V,V)$ قطری شدنی باشد، پس پایه مرتب $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ برای V به قسمی وجود دارد که هر عنصر آن یک بردار ویژه است. از این رو $T(\alpha_i) = c_i \alpha_i$ و در نتیجه:

$$[T(\alpha_i)]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \to \text{سطر } i \text{ ام}$$

پس خواهیم داشت:

$$Mat[T;\mathfrak{B}] = [[T(\alpha_1)]_{\mathfrak{B}} \cdots [T(\alpha_n)]_{\mathfrak{B}}] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_n \end{bmatrix} = diag(c_1, \cdots, c_n)$$

که در اینجا c_iها می توانند تکراری نیز باشند.

اگر T_A تبدیل خطی وابسته به ماتریس $A \in F^{n\times n}$ قطری شدنی باشد، پس پایه مرتب $\mathfrak{B}'$ برای $F^{n\times 1}$ به قسمی وجود دارد که $Mat[T_A;\mathfrak{B}']$ یک ماتریس قطری است. پس بنابر قضیهٔ ۲۱.۴، A و $Mat[T_A;\mathfrak{B}']$ متشابه هستند.

از این رو ماتریس A را قطری شدنی می‌نامیم، هرگاه با یک ماتریس قطری متشابه باشد. بنابراین A قطری شدنی است اگر و تنها اگر T_A قطری شدنی باشد.

قضیه ۵.۵ : فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F است و $T \in L(V,V)$. اگر $c_1, \ldots, c_k \in F$ تمامی مقادیر ویژه متمایز T باشد و برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، $W_i = ker(T - c_iI) = \{v \in V : T(v) = c_iv\}$، آن گاه گزاره‌های زیر معادلند:

۱) T قطری شدنی است.

۲) چندجمله‌ای مشخصه T به صورت

$$f(x) = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

که در اینجا برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، $dimW_i = d_i$.

۳) $dimV = dimW_1 + \cdots + dimW_k$.

برهان: ۲ $\Leftarrow$ ۱) چون T قطری شدنی است، پس پایه $\mathfrak{B}$ به قسمی وجود دارد که هر عنصر آن یک بردار ویژه است. گیریم $dimV = n$ و عناصر $\mathfrak{B}$ را به صورت

$$\mathfrak{B} = \{\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1d_1}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2d_2}, \cdots, \alpha_{k1}, \cdots, \alpha_{kd_k}\}$$

مرتب شده باشد، که برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، $\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{ik_i}$ بردارهای وابسته به مقدار ویژه c_i هستند. از این رو برای هر $1 \leq i \leq k$ و $1 \leq j \leq d_i$، خواهیم داشت که $T(\alpha_{ij}) = c_i\alpha_{ij}$ و در نتیجه،

$$Mat[T;\mathfrak{B}] = \begin{bmatrix} c_1 I_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 I_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & c_k I_{d_k} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

که برای هر $j \in \mathbb{N}_k$، I_{d_j} ماتریس همانی $F^{d_j \times d_j}$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} \chi_T(x) = \det(xI - T) &= \begin{vmatrix} (x-c_1)I_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (x-c_2)I_{d_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & (x-c_k)I_{d_k} \end{vmatrix} \\ &= (x-c_1)^{d_1}(x-c_2)^{d_2}\cdots(x-c_k)^{d_k} \end{aligned}$$

از این رو $d_1 + d_2 + \cdots + d_k = n$.

می دانیم که مجموعهٔ $\{\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{id_i}\}$ زیر مجموعهٔ مستقل خطی W_i است از این رو $d_i \leq dimW_i$. بنابر قضیهٔ ۴.۵، $\{W_i\}_{i=1}^k$ گردایه‌ای مستقل از زیر فضاهای V است و از قضیهٔ ۱۹.۳، نتیجه می‌شود که،

$$\begin{aligned} dim(\textstyle\sum_{i=1}^k \oplus W_i) &= dimW_1 + \cdots + dimW_k \\ &\geq d_1 + d_2 + \cdots + d_k \\ &= n \end{aligned}$$

واز طرفی داریم $dim(\sum_{i=1}^k \oplus W_i) \leq n$، پس بایستی برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، $dimW_i = d_i$.

$3 \Rightarrow 2$) چون بنابر قضیهٔ ۴.۵، $\{W_i\}_{i=1}^k$ گردایه‌ای مستقل از زیر فضاهای V است، پس

$$\begin{aligned} \dim(\textstyle\sum_{i=1}^k \oplus W_i) &= \textstyle\sum_{i=1}^k dim(W_i) \\ &= d_1 + d_2 + \cdots + d_k \\ &= degf \\ &= dimV \end{aligned}$$

۱ $\Rightarrow$ ۳) می دانیم که بنابر قضیهٔ ۴.۵، $\{W_i\}_{i=1}^{k}$ گردایه‌ای مستقل از زیر فضاهای V هستند، پس بنابر قضیهٔ ۱۹.۳، اگر $\mathfrak{B}_i$ پایه‌ای برای W_i، آن گاه $\mathfrak{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i$ پایه‌ای است برای،

$$W = \sum_{i=1}^{k} \oplus W_i$$

حال با توجه به گزاره (۳) و قضیهٔ ۱۹.۳،

$$\begin{aligned} |\mathfrak{B}| &= dimW \\ &= dim(\textstyle\sum_{i=1}^{k} W_i) \\ &= dimV \end{aligned}$$

لذا بنابر قضیهٔ ۱۷.۳، چون $W \subset V$ و $dimV \in \mathbb{N}$، پس $V = W$. بنابراین $\mathfrak{B}$ پایه‌ای برای V است، که هر عنصر آن یک بردار ویژه می‌باشد. پس T قطری شدنی است.

■

قضیه مشابه را برای ماتریسها بیان و اثبات نمائید.

مثال ۳۱ : فرض کنیم T_A تبدیل خطی وابسته به ماتریس،

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & -۶ & -۶ \\ -۱ & ۴ & ۲ \\ ۳ & -۶ & -۴ \end{bmatrix}$$

باشد. پس،

$$\chi_A(x) = (x-۲)^۲(۱-x)$$

لذا $x = ۱$ و $x = ۲$ مقادیر ویژه T هستند. اگر $x = ۱$، آن گاه $I - A$ هم ارز سطری با،

$$R = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱/۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

اگر $RX = ۰$، آن گاه،

$$X = x_۳ \begin{bmatrix} ۱ \\ -\frac{۱}{۳} \\ ۱ \end{bmatrix}$$

پس، $\left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ -\frac{۱}{۳} \\ ۱ \end{bmatrix}\right\}$ پایه‌ای برای $ker(I - T_A)$ است.

به طور مشابه نتیجه می‌شود که، $\left\{\begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\right\}$ پایه‌ای برای $ker(۲I - T_A)$ می‌باشد. چون،

$$\dim(ker(I - T_A)) + \dim(ker(۲I - T_A)) = \dim(V)$$

پس بنابر قضیهٔ ۵.۵، T_A قطری شدنی است و به عبارت دیگر A قطری شدنی است.

حال می‌خواهیم ماتریس معکوس‌پذیر P و ماتریس قطری D را به گونه‌ای تعیین کنیم که $D = P^{-۱}AP$.

قرار می دهیم،

$$P = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ -\frac{۱}{۳} & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad D = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

و به سادگی دیده خواهد شد که $PD = AP$ و چون $\det(P) \neq ۰$، پس بنابر قضیهٔ ۱۷.۲، A معکوس‌پذیر است و درنتیجه $D = P^{-۱}AP$.

فرض کنیم F یک هیأت و $A \in F^{n\times n}$ قطری شدنی باشد. اگر $c_۱, \cdots, c_k \in F$ مقادیر ویژه متمایز A باشند و برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، $\mathfrak{B}_i = \{\alpha_{i۱}, \cdots, \alpha_{id_i}\}$ پایه مرتب $W_i = ker(c_iI - A)$ باشد، آن گاه بنابر قضایای ۱۹.۳ و ۴.۵، $\bigcup_{i=۱}^{k} \mathfrak{B}_i$ مستقل خطی می‌باشد از این رو،

$$P = [\alpha_{۱۱}, \ldots, \alpha_{۱d_۱}, \ldots, \alpha_{k۱}, \ldots, \alpha_{kd_k}]$$

معکوس‌پذیر بوده و چنانچه قرار دهیم،

$$D = \begin{bmatrix} c_۱I_{d_۱} & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & c_۲I_{d_۲} & \cdots & ۰ \\ \vdots & ۰ & \ddots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \cdots & c_kI_{d_k} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

آن گاه برای هر $d_۱ + \cdots + d_s \lneqq j \leqq d_۱ + \cdots + d_{s+۱}$، خواهیم داشت:

$$AP^{(j)} = c_{s+۱} P^{(j)}$$

لذا،

$$\begin{aligned} AP &= [AP^{(۱)}\ AP^{(۲)}\ \cdots\ AP^{(n)}] \\ &= [c_۱ P^{(۱)}\ \cdots\ c_k P^{(n)}] \\ &= DP \end{aligned}$$

و در نتیجه:

$$D = P^{-۱} AP$$

مثال ۳۲ : فرض کنیم،

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ -۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس،

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-۱ & ۱ & -۲ \\ ۲ & x-۱ & -۳ \\ -۱ & ۱ & x-۱ \end{vmatrix} = (x-۱)^۳ - ((x-۱) - ۱$$

فرض کنیم $u = x - ۱$. در این صورت چندجمله‌ای مشخصه به صورت زیر در می آید.

$$f(u) = u^۳ - u - ۱$$

که تنها یک ریشهٔ حقیقی است و سایر ریشه‌های آن مختلط می‌باشند. به هر حال فرض کنیم λ مقدار ویژهٔ A و،

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

بردار ویژهٔ متناظر به λ باشد. لذا X جواب دستگاه $AX = \lambda X$ است و از این رو،

$$\begin{cases} (۱-\lambda)x - y + ۲z &= ۰ \\ -۲x + (۱-\lambda)y + ۳z &= ۰ \\ x - y + (۱-\lambda)z &= ۰ \end{cases}$$

به z یک مقدار دلخواه، مثلاً $z = ۱$، نسبت داده و دو معادلهٔ اول دستگاه را بر حسب x و y حل می‌کنیم. لذا،

$$\begin{cases} (۱-\lambda)x - y &= -۲ \\ -۲x + (۱-\lambda)y &= -۳ \end{cases}$$

و در نتیجه،

$$\begin{cases} y(\lambda) &= \frac{۳(\lambda-۱)-۴}{(\lambda-۱)^۲-۲} \\ x(\lambda) &= \frac{۲-y}{\lambda-۱} \end{cases}$$

بنابراین اگر $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، و $\lambda_۳$ مقادیر ویژهٔ A، باشند، بردارهای ویژهٔ متناظر به آنها عبارتند از:

$$X(\lambda_۱) = \begin{bmatrix} x(\lambda_۱) \\ y(\lambda_۱) \\ ۱ \end{bmatrix}, \; X(\lambda_۲) = \begin{bmatrix} x(\lambda_۲) \\ y(\lambda_۲) \\ ۱ \end{bmatrix}, \; X(\lambda_۳) = \begin{bmatrix} x(\lambda_۳) \\ y(\lambda_۳) \\ ۱ \end{bmatrix}$$

حال با استفاده از یک ماشین یا یک کامپیوتر، می‌توان با به کار بردن ابزار مناسب، تقریب مناسبی برای $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، و $\lambda_۳$ به دست آورده و سپس به ازای آن مقادیر بردارهای ویژهٔ متناظر به آنها به دست آوریم. هر بردار ویژه یک پایه برای فضای متناظرش می‌باشد. لذا A روی هیأت اعداد حقیقی قطری شدنی نیست، ولی روی هیأت اعداد مختلط قطری شدنی است.

تمرینات

۱۹.۵ : کدام یک از ماتریس‌های حقیقی زیر قطری شدنی هستند.

$$A_۱ = \begin{bmatrix} ٦ & -۳ & -۲ \\ ۴ & -۱ & -۲ \\ ۱۰ & -۵ & -۳ \end{bmatrix}, \quad A_۲ = \begin{bmatrix} -۹ & ۴ & ۴ \\ -۸ & ۳ & ۴ \\ -۱٦ & ۸ & ۷ \end{bmatrix}$$

۲۰.۵ : فرض کنیم T عملگر خطی روی فضای برداری n بعدی V بوده و دارای n مقدار ویژهٔ متمایز است. در این صورت T قطری شدنی می‌باشد و بعد زیرفضای وابسته به هر مقدار ویژه، یک است.

۲۱.۵ : فرض کنیم F یک هیأت، و $A \in F^{n\times n}$ به قسمی باشد که $\chi_A(x) = (x-c)^n$. نشان دهید A قطری شدنی است اگر و تنها اگر $A = cI_n$.

۲۲.۵ : فرض کنیم $A, B \in \mathbb{R}^{۲\times۲}$ و $T \in L(\mathbb{R}^{۲\times۱}, \mathbb{R}^{۲\times۱})$. نشان دهید:

الف) اگر $X \in \mathbb{R}^{۲\times۱}$ به قسمی باشد که $\mathfrak{B} = \{X, AX\}$ مستقل خطی باشد، آن گاه:

$$Mat[T_A; \mathfrak{B}] = \begin{bmatrix} ۰ & -\det(A) \\ ۱ & tr(A) \end{bmatrix}$$

ب) اگربه ازای هر $۰ \neq X \in \mathbb{R}^{۲\times۱}$، $\{X, T(X)\}$ مستقل خطی نباشد، آن‌گاه T مضرب اسکالری از تبدیل خطی همانی است.

ج) فرض کنیم A و B هیچیک مضرب اسکالری از ماتریس همانی نیستند. اگر چندجمله‌ایهای مشخصهٔ آنها برابر باشند، آن گاه A و B متشابه‌اند.

۲۳.۵ : فرض کنیم T عملگر خطی روی فضای برداری V با بعد $n \in \mathbb{N}$ و هیأت اسکالر F باشد. گیریم $f, g, h \in F[x]$ به قسمی باشند که g و h نسبت به هم اوّل باشند و $f(x) = g(x)h(x)$. قرار می‌دهیم $W_۱ = \ker(g(T))$ و $W_۲ = \ker(h(T))$. حال اگر $f(T) = ۰$، ثابت کنید:

الف) $W_۱$ و $W_۲$ زیرفضاها پایا تحت T هستند.

ب) $V = W_۱ \oplus W_۲$.

۲۴.۵ : اگر $\{a_n\}_{n=۰}^{\infty}$ دنبالهٔ حقیقی به قسمی باشد که،

$$a_{n+۲} = a_{n+۱} - a_n$$

و همچنین $a_۰ = ۰$ و $a_۱ = ۱$. جملهٔ عمومی دنبالهٔ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را مشخص کنید. راهنمایی: از تمرین ۱۲.۵، استفاده کنید.

۲۵.۵ : فرض کنیم F یک هیأت و λ یک مقدار ویژهٔ ماتریس معکوس‌پذیر $A \in F^{n\times n}$ باشد. ثابت کنید $\frac{\det(A)}{\lambda}$ یک مقدار ویژهٔ ماتریس $adj(A)$ است. همچنین اگر A قطری‌پذیر باشد، آن‌گاه ماتریس $adj(A)$ قطری‌پذیر است.

۲۶.۵ : فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F باشد و $T \in L(V, V)$ به قسمی باشد که $T^۲ = T$. ثابت کنید T قطری شدنی است.

۲۷.۵ : فرض کنیم F یک هیأت و $A \in F^{n\times n}$ به قسمی باشد که $A^۲ = A$. ثابت کنید:

الف) ماتریس A قطری شدنی است.

ب) $tr(A) = r(A)$.

۲۸.۵ : فرض کنیم F هیأت اعداد مختلط باشد و $A \in F^{n\times n}$. ثابت کنیدماتریس قطری D و ماتریس P در $F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارند که $AP = PD$.

۲۹.۵ : فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F باشد و $T, U \in L(V, V)$ قطری شدنی باشند. ثابت کنید پایه $\mathfrak{B}$ برای V به قسمی وجود دارد که $Mat[T; \mathfrak{B}]$ و $Mat[U; \mathfrak{B}]$ قطری هستند، یعنی؛ همزمان قطری شدنی می‌باشند اگر و تنها اگر $TU = UT$.

۳۰.۵ : فرض کنیم F یک هیأت باشد و $A, B \in F^{n\times n}$. ثابت کنید گزاره‌های زیر معادلند:

الف) ماتریس معکوس‌پذیر $P \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارد که $P^{-۱}AP$ و $P^{-۱}BP$ قطری هستند.

ب) $AB = BA$.

۳۱.۵ : فرض کنیم F یک هیأت، و $A, B \in F^{n\times n}$ به قسمی باشند که $AB = BA$. اگر A دارای n مقدار ویژه متمایز باشد، آن‌گاه نشان دهید B قطری شدنی است.

۵.۳ چندجمله‌ای مینیمال و قضیهٔ کیلی — هامیلتون

قضیهٔ کیلی — هامیلتون بیان می‌کند، اگر V فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F باشد و $T \in L(V, V)$، آن گاه $\chi_T(T) = ۰$. از این رو بحث روی $۰ \neq f(x) \in F[x]$ به طوری که $f(T) = ۰$ و f با این خاصیّت تکین و دارای کمترین درجه است، که آن را چندجمله‌ای مینیمال T می‌نامیم، منطقی به نظر می‌رسد. این بخش را به بحث روی موضوعات مطرح شده، اختصاص می‌دهیم.

قضیه ۶.۵ : فرض کنیم V یک فضای برداری روی هیأت F باشد و $T \in L(V,V)$. اگر،

$$I = \{f(x) \in F[x]; f(T) = \circ\}$$

آن گاه I یک ایده‌آل ناصفر حلقه $F[x]$ است.

برهان: تابع $f(x) = \circ$ را در نظر می گیریم. پس $f(T) = \circ I = \circ$ و در نتیجه $I \neq \emptyset$. حال فرض کنیم $f, g \in I$ و $h \in F[x]$، در این صورت،

$$f(T) = \circ = g(T)$$

لذا،

$$\begin{aligned}(f-g)(T) &= f(T) - g(T)\\ &= \circ\end{aligned}$$

و،

$$\begin{aligned}(hf)(T) &= h(T)f(T)\\ &= \circ\end{aligned}$$

یعنی؛ $f - g, hf \in I$. بدیهی است که $fh = hf$، پس I یک ایده‌آل ناصفر حلقه $F[x]$ می‌باشد.

■

با توجه به قضایای ۱۵.۱ و ۶.۵، مولد تکین ایده آل،

$$\{f(x) \in F[x]; f(T) = \circ\}$$

را چندجمله‌ای **مینیمال** یا **کهین** T می‌نامیم. همچنین قضیهٔ فوق را می‌توانیم برای ماتریسهای مربع روی یک هیأت نیز بیان کنیم و چندجمله‌ای مینیمال یا کهین ماتریس نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

به راحتی می‌توان دید که اگر $p \in F[x]$ چندجمله‌ای مینیمال T باشد، آن گاه:

۱) p تکین است.

۲) اگر $\circ \neq f \in F[x]$ و $f(T) = \circ$، آن گاه $deg(p) \leq deg(f)$.

۳) اگر $f \in F[x]$ و $f(T) = \circ$، آن گاه f بر p بخشپذیر است.

قضیه ۷.۵ : فرض کنیم W زیرفضای، فضای برداری V با بعد متناهی روی هیأت F باشد و تحت $T \in L(V,V)$ پایا باشد. در این صورت:

۱) $\bar{T} : \frac{V}{W} \to \frac{V}{W}$ با ضابطهٔ $\bar{T}(x+W) = T(x) + W$ یک عملگر خطی روی $\frac{V}{W}$ است.

۲) اگر $q(x) \in F[x]$ و $q(T) = \circ$، آن گاه $q(\bar{T}) = \circ$.

۳) اگر چندجمله‌ای مینیمال T و $\bar{T}$ به ترتیب $p(x)$ و $q(x)$ باشند، آن گاه $q(x)|p(x)$.

برهان: ۱) در بخشهای گذشته به برهان این قسمت اشاره شده است.
۲)فرض کنید $q(x) = a_\circ + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. پس،

$$q(T) = a_\circ I + a_1 T + \cdots + a_n T^n = \circ \qquad (۱)$$

به سادگی دیده خواهد شد که برای هر $k \in \mathbb{N}$،

$$\bar{T}^k(v+W) = T^k(v) + W$$

در این صورت برای هر $v \in V$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} q(\bar{T})(v+W) &= (a_\circ I + a_1 \bar{T} + \cdots + a_n \bar{T}^n)(v+W) \\ &= a_\circ I(v+W) + a_1 \bar{T}(v+W) + \cdots + a_n \bar{T}^n(v+W) \\ &= a_\circ(v+W) + a_1(T(v)+W) + \cdots + a_n(T^n(v)+W) \\ &= (a_\circ v + W) + (a_1 T(v) + W) + \cdots + (a_n T^n(v) + W) \\ &= (a_\circ v + a_1 T(v) + \cdots + a_n T^n(v)) + W \\ &= q(T)(v) + W = \circ + W = W = \bar{\circ} \end{aligned}$$

۳)چون p چندجمله‌ای مینیمال T است، پس $p(T) = \circ$ بنابر گزارهٔ (۲) $p(\bar{T}) = \circ$. از طرفی q چندجمله‌ای مینیمال $\bar{T}$ می‌باشد، پس بنابر خواص چندجمله‌ای مینیمال $q(x)|p(x)$.

■

قضیه ۸.۵ : فرض کنیم $V = \sum_{i=1}^{k} \oplus V_i$ و $T \in L(V,V)$ به قسمی باشد که برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، V_i تحت T پایا باشد. در صورتی که p_i چندجمله‌ای کهین $T_i = T|_{V_i}$ باشد، آن گاه چندجمله‌ای کهین T، برابر با کوچکترین مضرب مشترک $p_1, \ldots, p_k \in F[X]$ است.

برهان: کافی است قضیه را برای حالت $k=۲$ اثبات کنیم. فرض کنیم $k=۲$ و p چندجمله‌ای مینیمال T باشد، پس $p(T)=۰$. اگر $v\in V_۱$، آن گاه برای هر $i\in\mathbb{N}$، $T_۱^i(v)=T^i(v)$ و در نتیجه $p(T_۱)(v)=p(T)(v)=۰$. از این رو $p(T_۱)=۰$ و چون $p_۱$ چندجمله‌ای مینیمال $T_۱$ است، پس $p_۱|p$. به طور مشابه می‌توان نشان داد $p_۲|p$.

حال فرض کنیم $f\in F[x]$ به قسمی باشد که $p_۱|f$ و $p_۲|f$. از این رو $f_۱,f_۲\in F[x]$ به قسمی وجود دارند که $f=f_۱p_۱$ و $f=f_۲p_۲$. $v\in V$ را دلخواه در نظر می‌گیریم. بنابراین برای هر $i\in\mathbb{N}_k$، $v_i\in V_i$ به قسمی وجود دارد که $v=v_۱+v_۲$ و $p_i(T)(v_i)=p_i(T_i)(v_i)=۰$. از این رو

$$
\begin{aligned}
f(T)(v) &= f(T)(v_۱+v_۲)\\
&= f(T)(v_۱)+f(T)(v_۲)\\
&= f_۱P_۱(T)(v_۱)+f_۱P_۲(T)(v_۲)\\
&= f_۱(T)P_۱(T)(v_۱)+f_۱(T)P_۲(T)(v_۲)\\
&= f_۱(T)(۰)+f_۲(T)(۰)\\
&= ۰+۰\\
&= ۰
\end{aligned}
$$

پس $f(T)=۰$ و چون p چندجمله‌ای مینیمال T می‌باشد، لازم می آید که $p|f$ و نهایتاً خواهیم داشت چندجمله‌ای کهین T، برابر با کوچکترین مضرب مشترک $p_۱,\dots,p_k\in F[X]$ است.

■

قضیه ۹.۵ : (قضیه تجزیه دوری) فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F باشد و $T\in L(V,V)$. گیریم،

$$p=p_۱^{r_۱}p_۲^{r_۲}\cdots p_k^{r_k}\in F[X]$$

که در اینجا p_iها چندجمله‌ایهای تحویل ناپذیرِ متمایزند و p چندجمله‌ای کهین T روی F است. اگر برای هر $i\in\mathbb{N}^k$، قرار می دهیم،

$$V_i=ker(p_i^{r_i}(T))=\{v\in V: p_i^{r_i}(T)(v)=۰\}$$

آن گاه:

۱) هر V_i تحت T پایاست.

۲) $V = \sum_{i=1}^{k} \oplus V_i$.

۳) برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، چندجمله‌ای کهین $T|_{V_i}$ برابر است با $p_i^{r_i}$.

برهان: ۱) فرض کنیم،

$$p_i^{r_i}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_t x^t$$

و $v \in V_i$. بنابراین $p_i^{r_i}(T)(v) = 0$ و بنابر قضیهٔ ۱.۴،

$$\begin{aligned} 0 &= T(0) \\ &= T(p_i^{r_i}(T)(v)) \\ &= T(a_0 I(v) + a_1 T(v) + \cdots + a_t T^t(v)) \\ &= a_0 T(v) + a_1 T^2(v) + \cdots + a_t T^{t+1}(v) \\ &= a_0 I(T(v)) + a_1 T(T(v)) + \cdots + a_t T^t(T(v)) \\ &= (a_0 I + a_1 T + \cdots + a_t T^t)(T(v)) \\ &= p_i^{r_i}(T)(T(v)) \end{aligned}$$

و نهایتاً خواهیم داشت $T(v) \in ker(p_i^{r_i}(T))$، پس $T[V_i] \subseteq V_i$، یعنی؛ V_i تحت T پایاست.

۲)اگر $k = 1$، حکم بدیهی است. حال فرض کنیم $k > 1$ و برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، قرار می دهیم $h_i(x) = \frac{p(x)}{p_i^{r_i}(x)}$. بنابراین

$$\text{ب‌م‌م}\ (p_i^{r_i}, h_i) = 1 \qquad (1)$$

فرض کنیم $v \in V$. بنابراین $p(T)(v) = p_i^{r_i}(T)h_i(T)(v) = 0$ و در نتیجه $h_i(T)(v) \in V_i$، یعنی؛

$$0 \neq h_i(T)(V) \subseteq V_i \qquad (3)$$

چون بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $h_1, h_2, \cdots, h_k \in F[x]$ برابر با ۱ است، پس $g_1, g_2, \cdots, g_k \in F[x]$ به قسمی وجود دارند که،

$$h_1 g_1 + h_2 g_2 + \cdots + h_k g_k = 1$$

در نتیجه،

$$h_1(T)g_1(T) + h_2(T)g_2(T) + \cdots + h_k(T)g_k(T) = I$$

و،

$$h_1(T)(g_1(T(v))) + h_2(T)(g_2(T(v))) + \cdots + h_k(T)(g_k(T(v))) = I(v) \in V$$

اگر برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، قرار دهیم $v_i = h_i(T)(g_i(T(v)))$ خواهیم داشت که $v_i \in V_i$. پس،

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k \in \sum_{i=1}^{k} V_i$$

و بنابراین $V \subseteq \sum_{i=1}^{k} V_i$. از آنجا که برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، $V_i \subseteq V$، پس $\sum_{i=1}^{k} V_i \subseteq V$ و نهایتاً خواهیم داشت $V = \sum_{i=1}^{k} V_i$. حال فرض کنیم برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، $\beta_i \in V_i$ به قسمی باشد که،

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k = 0$$

اگر $i \neq j$، آن گاه،

$$\begin{aligned} h_i(\beta_j) &= \tfrac{p}{p_i^{r_i}}(T)(\beta_j) \\ &= \tfrac{p}{p_i^{r_i} p_j^{r_j}}(T)\underbrace{p_j^{r_j}(T)(\beta_j)}_{=0} \\ &= 0 \qquad\qquad (5) \end{aligned}$$

و با توجّه به رابطه (۴)،

$$\begin{aligned} h_i(T)(\beta_i) &= h_i(T)(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

چون برای هر $i \in \mathbb{N}_k$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $p_i^{r_i}, h_i \in F[x]$ برابر با ۱ است، پس $f, g \in F[x]$ به قسمی وجود دارند که $fp_i^{r_i} + gh_i = 1$. لذا:

$$f(T)\underbrace{p_i^{r_i}(T)(\beta_i)}_{=0} + g(T)\underbrace{h_i(T)(\beta_i)}_{=0} = I(\beta_i) = \beta_i$$

پس بنابر قضیهٔ ۱.۴، $\beta_i = 0$. حال از قضیهٔ ۹.۳، نتیجه می‌شود که $V = \sum_{i=1}^{k} \oplus V_i$.

۳) برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، قرار می‌دهیم $T_i = T|_{V_i}$. چون $V = \sum_{i=1}^{k} V_i$ و V_i ها تحت T پایا هستند، پس بنابر قضیهٔ ۸.۵، اگر m_i چندجمله‌ای مینیمال T_i باشد، آن گاه چندجمله‌ای مینیمال T، برابر با کوچکترین مضرب مشترک $m_1, \cdots, m_k \in F[x]$ می‌باشد.

می‌دانیم به ازای هر $i \in \mathbb{N}_k$، اگر $v \in V_i$ آن گاه،

$$p_i^{r_i}(T_i)(v) = p_i^{r_i}(T)(v) = 0$$

پس $p_i^{r_i}(T_i) = 0$. حال بنابر خواص چندجمله‌ای مینیمال $m_i | p_i^{r_i}$ و در نتیجه $s_i \leq r_i$ به قسمی وجود دارد که $m_i = p_i^{s_i}$. بنابراین،

$$\begin{aligned} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k} &= \text{کمم}\,[p_1^{s_1}, \cdots, p_k^{s_k}] \\ &= p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k} \end{aligned}$$

از این رو برای هر $i \in \mathbb{N}_k$،

$$m_i = p_i^{s_i} = p_i^{r_i}$$

■

قضیه ۱۰.۵ : فرض کنیم $T \in L(V,V)$ و $\alpha \in V$ در این صورت،

$$\{f(x) \in F[x]; f(T)(\alpha) = 0\}$$

یک ایده‌آل ناصفر حلقه $F[x]$ است.
برهان: واضح است.

■

با توجه به قضایای ۱۵.۱ و ۱۰.۵، مولد تکین ایده‌آل،

$$\{f(x) \in F[x]; f(T)(\alpha) = 0\}$$

را **رتبهٔ** α می نامیم و اگر $p(x)$ رتبهٔ α باشد، آن‌گاه

۱) $p(T)(\alpha) = 0$ و p تکین است.

۲) اگر $0 \neq f \in F[x]$ و $f(T)(\alpha) = 0$، آن گاه $deg(p) \leq deg(f)$.

۳) اگر $f \in F[x]$ و $f(T)(\alpha) = 0$، آن گاه $p|f$.

قضیه ۱۱.۵ : فرض کنیم $T \in L(V,V)$ و p چندجمله‌ای مینیمال T باشد، در این صورت $\alpha \in V$ به قسمی وجود دارد که p رتبهٔ α است.

برهان: فرض کنیم $p(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$، که در اینجا p_iها تحویل‌ناپذیر و متمایزند. حکم را طی دو حالت اثبات می کنیم.

حالت اول : فرض کنیم $k = 1$ در این صورت $p(x) = p_1^{r_1}(x)$. اگر برای هر $\beta \in V$، p_β را رتبهٔ β در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} p(T) = 0 \quad &\Rightarrow \quad p(T)(\beta) = 0 \\ &\Rightarrow \quad p_\beta | p_1^{r_1} \\ &\Rightarrow \quad \exists s_\beta \leq r_1 ; p_\beta = p_1^{s_\beta} \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $t = max\{s_\beta : \beta \in V\} \leq r_1$. بنابراین برای هر $\beta \in V$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} p_1^t(T)(\beta) &= p_1^{t-s_\beta}(T)\underbrace{p_1^{s_\beta}(T)(\beta)}_{=0} \\ &= p_1^{t-s_\beta}(T)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

لذا $p_1^t(T) = 0$ و چون p چندجمله‌ای مینیمال T است، پس $p_1^{r_1} = p | p_1^t$ و در نتیجه $r_1 \leq t$. بنابراین $t = r_1$. از طرفی $\{s_\beta : \beta \in V\} \subseteq \{0, 1, \ldots, r\}$، پس $t \in \{s_\beta : \beta \in V\}$. از این رو $\alpha \in V$ به قسمی وجود دارد که $t = s_\alpha$ و در نتیجه

$$p_\alpha = p_1^{s_\alpha} = p_1^t = p_1^{r_1} = p$$

بنابراین p رتبهٔ α است.

حالت دوم : فرض کنیم $k \geq 2$. بنابر قضیه تجزیهٔ دوری اگر $V_i = ker(p_i^{r_i}(T))$ و $T_i = T|_{V_i}$، آن گاه چندجمله‌ای مینیمال T_i برابر $p_i^{r_i}$ است. بنابر حالت اول $\alpha_i \in V_i$ به قسمی وجود دارد که $p_i^{r_i}$ رتبهٔ α_i می‌باشد. قرار می دهیم $\alpha = \sum_{i=1}^k \alpha_i$ در این صورت دیده می شود (اثبات کنید) که p رتبهٔ α است.

■

اگر $dimV = n$ و $T \in L(V,V)$، آن گاه درجهٔ چندجمله‌ای مشخصهٔ T برابر n می‌باشد و در واقع برابر است با $deg(\det(xI - T))$.

قضیه ۱۲.۵ : اگر V فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F باشد و $T \in L(V,V)$، آن گاه درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال T کوچکتر از یا مساوی با $dimV$ است.

برهان: فرض کنیم p چندجمله‌ای مینیمال T باشد و $deg(p) = k$. بنابر قضیه ۱۱.۵، $\alpha \in V$ به قسمی وجود دارد که $p(x)$ رتبهٔ α است. پس $p(T)(\alpha) = ۰$. واضح است که $\{\alpha, T(\alpha), T^{۲}(\alpha), \cdots, T^{k-۱}(\alpha)\} \subseteq V$ مستقل خطی است (نشان دهید) و کاردینال آن کوچکتر از یا مساوی با $\dim V$ می‌باشد، یعنی؛ $deg(p) = k \leq \dim V$.

■

قضیه ۱۳.۵ : (تعمیم قضیه کیلی ـهامیلتون) فرض کنیم V فضای با بعد متناهی روی هیأت F باشد. در این صورت چندجمله‌ای مشخصهٔ $T \in L(V,V)$ بر چندجمله‌ای مینیمال T بخش پذیر است و در عوامل اول با هم مشترکند.

برهان: در ابتدا فرض می کنیم $p(x) = q^{r}(x)$ چندجمله‌ای مینیمال T باشد و $q \in F[x]$ تحویل‌ناپذیر است. اگر $\dim V = ۱$، آن گاه حکم بدیهی است. حال فرض کنیم $\dim V > ۱$ و حکم برای فضاهایی با بعد کمتر از n برقرار باشد (فرض استقراء). بنابر قضیه قبل $\alpha \in V$ به قسمی وجود دارد که p رتبهٔ α است. فرض کنیم $k = deg(p)$ و $p(x) = x^{k} + a_{k-۱}x^{k-۱} + \cdots + a_{۱}x + a_{۰}$. به سادگی دیده خواهد شد که $\mathfrak{B} = \{\alpha, T(\alpha), \ldots, T^{k-۱}(\alpha)\}$ مستقل خطی است. حال قرار می‌دهیم $W = span(\mathfrak{B})$.

حالت اول: فرض کنیم $W = V$. چون،

$$T(\alpha) = ۰\alpha + T(\alpha) + ۰T^{۲}(\alpha) + \cdots + ۰T^{k-۱}(\alpha)$$

پس،

$$[T(\alpha)]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix}$$

به طور مشابه برای هر $۱ \leq i \leq k - ۲$، چون $T(T^i(\alpha)) = T^{i+۱}(\alpha)$، خواهیم داشت:

$$[T(T^i(\alpha))]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} ۰ \\ \vdots \\ ۱ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix} \rightarrow i + ۲ \text{سطر}$$

از آنجا که $p(T)(\alpha) = ۰$، لازم می آید که،

$$T^k(\alpha) = -a_۰\alpha - a_۱T(\alpha) - \cdots - a_{k-۱}T^{k-۱}(\alpha)$$

و در نتیجه،

$$[T(T^{k-۱}(\alpha))]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} -a_۰ \\ -a_۱ \\ \vdots \\ -a_{k-۱} \end{bmatrix}$$

لذا $[T]_{\mathfrak{B}}$ برابر است با،

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & -a_۰ \\ ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & -a_۱ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ & -a_۲ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & -a_{k-۱} \end{bmatrix}$$

به سادگی دیده خواهد شد که $\det(xI - [T]_{\mathfrak{B}}) = p(x)$ پس در این حالت چندجمله‌ای مینیمال با چندجمله‌ای مشخصه برابر است.

حالت دوم: فرض کنیم $W \subsetneqq V$. پس $dimW \lneqq dimV$ و $dim\frac{V}{W} \lneqq dimV$. حال بنابر قضایای قبل اگر چندجمله‌ایهای مینیمال $T|_W$ و $\bar{T}$ را به ترتیب h و k بنامیم، آن گاه $hk = p = q^r$ پس می توانیم فرض کنیم $h = q^{r_۱}$، $k = q^{r_۲}$، $r_۱ < r$، و $r_۱ + r_۲ = r$.

اگر چندجمله‌ایهای مشخصهٔ $T|_W$ و $\bar{T}$ را به ترتیب $f_۱$ و $f_۲$ بنامیم، آن گاه $f = f_۱f_۲$ چندجمله‌ای مشخصهٔ T است. بنابر فرض استقراء $h|f_۱$ و $k|f_۲$ و h با $f_۱$ و k با $f_۲$ در عوامل اول مشترکند. پس :

$$\begin{array}{llll} \exists s_۱ & ; & f_۱ = q_{s_۱} & \& \quad r_۱ \leq s_۱ \\ \exists s_۲ & ; & f_۲ = q_{s_۲} & \& \quad r_۲ \leq s_۲ \end{array}$$

در نتیجه $f = q_{s_۱+s_۲}$ و چون $r = r_۱ + r_۲ \leq s_۱ + s_۲$، پس $p|f$، و p و f در عوامل اول مشترکند.

با توجه به تجزیه اولیه یا دوری حکم برای حالتی که تعداد عوامل اول از یکی بیشتر باشند نیز بر قرار است.

■

قضیه ۱۴.۵ : (قضیه کیلی —هامیلتون) اگر f چندجمله‌ای مشخصهٔ T (یا ماتریس مربع A) باشد، آن گاه $f(T) = ۰$ ($f(A) = ۰$).

برهان: فرض کنیم p چندجمله‌ای مینیمال T باشد. بنابر قضیهٔ قبل $p|f$، پس $g \in F[x]$ به قسمی وجود دارد که $f = pg$. بنابراین $f(T) = g(T)p(T) = ۰$.

■

مثال ۳۳ : فرض کنیم،

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

به سادگی می توان دید که $A^۲ = ۲A$ و،

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & x & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & x & -۱ \\ -۱ & ۰ & -۱ & x \end{vmatrix} = x^۲(x+۲)(x-۲)$$

کاندیداهای چندجمله‌ای مینیمال عبارتند از:

$$\begin{cases} p_۱(x) = x(x+۲)(x-۲) \\ p_۲(x) = x^۲(x+۲)(x-۲) \end{cases}$$

و چون،

$$\begin{aligned} p_۱(A) &= A(A^۲ - ۴I) \\ &= A(۲A - ۴I) \\ &= ۰ \end{aligned}$$

پس چندجمله‌ای مینیمال A برابر است با $x(x+2)(x-2)$.

اگر V فضای برداری روی هیأت F باشد و $T \in L(V,V)$ و $f(x)$ چندجمله‌ای مشخصه T باشد، آن گاه ریشه‌های f الزاماً متعلق به F نمی‌باشند.

مثال ۳۴ : اگر T_A تبدیل خطی وابسته به،

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

آن گاه $\chi_A(x) = x^2 + 1$. در حالی که، ریشه‌های χ_A متعلق به $\mathbb{R}$ نیستند.

میدان F را **جبراً بسته** می گوییم، هرگاه هر چندجمله‌ای با درجهٔ مثبتِ $F[X]$، در آن به عوامل خطی تجزیه گردد، به عبارت دیگر تمام ریشه‌های یک چندجمله‌ای با درجهٔ مثبتِ $F[X]$، متعلق به F باشند. بدون اثبات می‌پذیریم که،

میدان اعداد مختلط یک میدان جبراً بسته است.

قضیه ۱۵.۵ : فرض کنیم V فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F باشد و $T \in L(V,V)$ به قسمی باشد که به ترتیب،

$$p(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{e_i} \qquad \text{و} \qquad f(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{d_i}$$

چندجمله‌ای مشخصه و چندجمله‌ای مینیمال T باشند، که $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in F$ و $e_i \le d_i$. در این صورت ماتریس نمایش T نسبت به یک پایه‌ای به صورت بلوکی

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

است که در آن هر A_i یک ماتریس بالا مثلثی متعلق به $F^{d_i \times d_i}$ به صورت،

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

است.

برهان: برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، قرار می‌دهیم $V_i = \ker(T - \lambda_i \; id_V)^{e_i}$. لذا بنابر قضیهٔ ۹.۵، $V = \sum_{i=1}^{k} \oplus V_i$ و هر V_i تحت T پایاست. بنابراین برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، $g_i = T - \lambda_i \; id_{V_i} \in L(V_i, V_i)$ پوچ‌توان است. پس بنابر تمرین ۴۷.۴، پایهٔ مرتب $\mathfrak{B}_i$ برای V_i به قسمی وجود دارد که $Mat[g_i; \mathfrak{B}_i]$ بالا مثلثی است که درایه‌های روی قطر آن صفرند. از این رو

$$\begin{aligned} Mat[T|_{V_i}; \mathfrak{B}_i] &= Mat[g_i; \mathfrak{B}_i] + Mat[id_{V_i}; \mathfrak{B}_i] \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

و با توجّه به قضیهٔ ۲۳.۴، برهان تمام است.

■

هر گاه همه ریشه های چندجمله‌ای مشخصه $T \in L(V, V)$ در هیأت اسکالر F مربوط به V باشد، آن گاه بنابر قضیهٔ ۱۵.۵، V دارای پایه‌ای است که ماتریس نمایش T نسبت به این پایه مثلثی است.

اگر V فضای برداری روی هیأت اعداد مختلط باشد، آن‌گاه چون هیأت اعداد مختلط جبراً بسته است، همه ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه $T \in L(V, V)$، در هیأت اسکالرمان قرار دارد. لذا بنابر قضیهٔ ۱۵.۵، V دارای پایه‌ای است که ماتریس نمایش T نسبت به این پا یه مثلثی است.

تمرینات

۳۲.۵ : چندجمله‌ایهای مینیمال ماتریس‌های حقیقی زیر را به دست آورید.

$$A_۱ = \begin{bmatrix} ۵ & -۶ & -۶ \\ -۱ & ۴ & ۲ \\ ۳ & -۶ & ۴ \end{bmatrix}, \quad A_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ -۲ & -۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۲ & ۲ & \cdots & ۲ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{bmatrix}$$

۳۳.۵ : اگر T عملگر خطی روی فضای برداری V با بعد $n \in \mathbb{N}$ و هیات اسکالر F باشد و برای $k \in \mathbb{N}$، $T^k = ۰$. ثابت کنید $f(x) = x^n \in F[x]$، چندجمله‌ای مشخصهٔ T است و در نتیجه $T^n = ۰$.

۳۴.۵ : اگر F یک هیأت و $A \in F^{n\times n}$ پوچ‌توان باشد، نشان دهید $trac(A) = ۰$.

۳۵.۵ : فرض کنیم $\lambda_۱, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ به قسمی باشند که برای هر $m \in \mathbb{N}$، $\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^m = ۰$. ثابت کنید

$$\lambda_۱ = \cdots = \lambda_n = ۰$$

۳۶.۵ : فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. نشان دهید ماتریس A پوچ‌توان است اگر و تنها اگر برای هر $m \in \mathbb{N}$، $trac(A^m) = ۰$.

۳۷.۵ : اگر F یک هیأت بوده و $A \in F^{n\times n}$ به قسمی باشد که

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in F^{n\times n}$$

آن‌گاه ثابت کنید چندجمله‌ای مینیمال A برابر با

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

می‌باشد.

۳۸.۵ : ماتریس 3×3 که چندجمله‌ای مینیمال آن برابر با x^2 باشد، مثال بزنید.

۳۹.۵ : فرض کنیم F یک هیأت است و $A \in F^{2\times 2}$ به قسمی باشد که $A \neq I_2$ و $A^3 = I_2$. $trac(A)$ را به دست آورید.

۴۰.۵ : فرض کنیم $0 \neq A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ به قسمی باشد که برای هر $i, j, k \in \mathbb{N}_n$،

$$a_{ik}a_{jk} = a_{kk}a_{ij}$$

ثابت کنید:

الف) $trac(A) \neq 0$.

ب) A ماتریس متقارن است.

ج) $A^2 = trac(A)A$ و چندجمله‌ای مینیمال A برابر با $p(x) = x(x - trac(A))$.

د) $f(x) = x^{n-1}(x - trac(A))$ چندجمله‌ای مشخصهٔ A است.

۴۱.۵ : فرض کنیم $V = \mathbb{R}_n[x]$.

الف) گیریم D عملگر مشتق‌گیری روی V باشد. چندجمله‌ای مینیمال D چیست.

ب) مقادیر ویژه $T \in L(V, V)$ با ضابطهٔ $T(f(x)) = f(x+1)$ را مشخص کنید.

۴۲.۵ : فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد $n \in \mathbb{N}$ روی هیأت F باشد و $T \in L(V, V)$. اگر $f(x) = x_n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in F[x]$ چندجمله‌ای مینیمال T باشد، ثابت کنید T معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $a_0 \neq 0$.

۴۳.۵ : فرض کنیم $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. در این صورت:

الف) ماتریس $I_n - AB$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $I_n - BA$ معکوس‌پذیر باشد.

ب) $c \in F$ مقدار ویژه AB است اگر و تنها اگر مقدار ویژه BA باشد.

ج) آیا چندجمله‌ای مشخصهٔ AB و BA با هم مساوی‌اند؟

د) آیا چندجمله‌ای مینیمال AB و BA با هم مساوی‌اند؟

۴۴.۵ : فرض کنیم F یک هیأت بوده و $A \in F^{n\times n}$. اگر $T : F[x] \to F^{n\times n}$ با ضابطهٔ $T(f(x)) = f(A)$ باشد، آن گاه نشان دهید:

الف) اگر A قطری باشد، آن گاه هر عضو R_T قطری است.

ب) اگر A بالا (پایین) مثلثی باشد، آن گاه هر عضو R_T بالا (پایین) مثلثی است.

ج) برای $n \geq 2$، ماتریس $A \in F^{n\times n}$ وجود ندارد به قسمی که تبدیل خطی T پوشا باشد.

د) برای $n \geq 2$، ماتریس $A \in F^{n\times n}$ وجود ندارد به قسمی که $\{I_n, A, A^2, \ldots\}$ فضای $F^{n\times n}$ روی F تولید کند.

۴۵.۵ : فرض کنیم $A \in F^{n\times n}$.

الف) اگر $T : F^{n\times n} \to F^{n\times n}$ با ضابطهٔ $T(D) = AD$ باشد، آن گاه نشان دهید چندجمله‌ای مینیمال T برابر با چندجمله‌ای مینیمال A است.

ب) اگر $T : F^{n\times n} \to F^{n\times n}$ با ضابطهٔ $T(D) = DA$ باشد، آیا این درست است که A و T مقادیر سرشت‌نمای مساوی دارند؟

۴۶.۵ : فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F باشد و $T \in L(V,V)$، $m \in \mathbb{N}$، و $\lambda \in F$ به قسمی باشند که $(T - \lambda I)^m = 0$. ثابت کنید تنها مقدار ویژهٔ T، λ است.

۴۷.۵ : فرض کنیم F یک هیأت است و $A \in F^{n\times n}$ به قسمی باشد که $rank(A) = 1$. ثابت کنید $\lambda \in F$ به طوریکتا به قسمی وجود دارد که $A^2 = \lambda A$ و چنانچه $\lambda \neq 1$، $I_n - A$ معکوس‌پذیر است.

۴۸.۵ : فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت F باشد. ثابت کنید $T \in L(V,V)$ قطری شدنی است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال T به صورت حاصل‌ضرب عاملهای خطی متمایز باشد.

۴۹.۵ : فرض کنیم A ماتریس مختلط $n \times n$ای باشد، که $\det(A) \neq 0$. ثابت کنید ماتریس مختلط B به قسمی وجود دارد که $B^2 = A$.

فصل ۶

فضاهای ضرب داخلی

۶.۱ ضرب داخلی

در بحث تابعک خطی ما نقش هیأت اسکالر را بیشتر مورد استفاده قرار دادیم. حال مجدداً می‌خواهیم توابعی را مورد بررسی قرار دهیم که برد این توابع همانند تابعکهای خطی، زیرمجموعه‌ای از هیأت اسکالر فضای برداری می‌باشد. همچنین با این توابع همانند فضای $\mathbb{R}^{۲}$ می‌توانیم صحبت از طول بردار و زاویه بین دو بردار را به میان آوریم.

در این فصل و زمان صحبت از این توابع هیأت اسکالر F را به $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ محدود می‌کنیم و تعریف و نتایج حاصل به ویژگیهای این هیأتها وابسته است.

مزدوج عدد مختلط $z = x + iy$ را با $\overline{z} = x - iy$ نمایش میدهیم و بدیهی است که

$$z\overline{z} = x^{۲} + y^{۲}$$

فرض کنیم V فضای برداری روی هیأت F باشد. **ضرب داخلی** تابعی مانند $<,>: V \times V \to F$ (نقش (α,β) را با $<\alpha,\beta>$ نمایش می‌دهیم) است که به ازای هر $x, y \in F$ و $\alpha,\beta,\gamma \in V$ سه شرط زیر برقرار باشد.

۱) $<x\alpha + y\beta, \gamma> = x<\alpha,\gamma> + y<\beta,\gamma>$.

۲) $<\alpha,\beta> = \overline{<\beta,\alpha>}$.

۳) $\alpha = 0$ اگر و تنها اگر $<\alpha,\alpha> = 0$.

۴) $<\alpha,\alpha> \geq 0$.

فضای ضرب داخلی، یک فضای برداری است که روی آن یک ضرب داخلی تعریف شده است و با توجّه به اینکه هیأت اسکالر $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد، آن را فضای ضرب داخلی حقیقی یا مختلط می‌نامیم.

قضیه ۱.۶ : برای هر $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ در $\mathbb{C}^n$ تعریف می‌کنیم:

$$<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

در این صورت $\mathbb{C}^n$ همراه با ضرب فوق یک فضای ضرب داخلی است. $\mathbb{R}^n$ نیز با ضرب فوق یک فضای ضرب داخلی می‌باشد.

برهان: برهان را بعهدهٔ متعلم واگذار می‌کنیم.

■

ضرب داخلی در قضیهٔ ۱.۶، را ضرب داخلی متعارف روی $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$ می‌نامیم.

قضیه ۲.۶ : فرض کنیم $\mathfrak{B} = \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}_n}$ پایهٔ مرتب برای فضای برداری با بعد متناهی روی F باشد. در این صورت برای هر $\alpha, \beta \in V$، تعریف می‌کنی،

$$<\alpha,\beta> = <[\alpha]_{\mathfrak{B}}, [\beta]_{\mathfrak{B}}>$$

که سمت راست ضرب داخلی متعارف روی $F^{n\times 1}$ است. در این صورت V همراه ضرب فوق یک فضای ضرب داخلی است.

برهان: با توجّه به خواص ماتریس مختصات یک بردار و قضیهٔ ۱.۶، واضح است.

■

در یک فضای ضرب داخلی **نرم** یا **طول** بردار α را با $||\alpha||$ نمایش می‌دهیم و قرار می‌دهیم،

$$||\alpha|| = \sqrt{<\alpha,\alpha>}$$

اگر V فضای ضرب داخلی باشد، آن‌گاه به ازای هر $x,y \in F$ و $\alpha,\beta,\gamma \in V$ خواهیم داشت:

۱) $<\alpha, \beta+\gamma> = <\alpha, \beta> + <\alpha, \gamma>$.

۲) $<\alpha, x\beta> = \overline{x} <\beta, \alpha>$.

۳) $<\alpha, \circ> = \circ$.

۴) $\alpha = \circ$ اگر و تنها اگر $||\alpha|| = \circ$.

قضیه ۳.٦ : فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت به ازای $x \in F$ و $\alpha, \beta \in V$ داریم:

۱) $||x\alpha|| = |x|\,||\alpha||$.

۲) $|<\alpha, \beta>| \leq ||\alpha||\,||\beta||$ (نامساوی کوشی—شوارتز).

۳) $||\alpha+\beta|| \leq ||\alpha|| + ||\beta||$ (نامساوی مثلث).

برهان: ۱) با توجّه به خواص نرم داریم:

$$\begin{aligned} ||x\alpha||^{۲} &= <x\alpha, x\alpha> \\ &= x <\alpha, x\alpha> \\ &= x\overline{x} <\alpha, \alpha> \\ &= |x|^{۲}\,||\alpha||^{۲} \end{aligned}$$

۲) اگر $\alpha = \circ$، با توجّه به مطلب قبل از قضیه، حکم برقرار است. حال فرض کنیم $\alpha \neq \circ$، پس $||\alpha|| \neq \circ$. اگر قرار دهیم،

$$\gamma = \beta - \frac{<\beta, \alpha>}{||\alpha||^{۲}}\alpha$$

آن‌گاه،

$$\begin{aligned} \circ \leq ||\gamma||^{۲} &= <\beta - \tfrac{<\beta,\alpha>}{||\alpha||^{۲}}\alpha, \beta - \tfrac{<\beta,\alpha>}{||\alpha||^{۲}}\alpha> \\ &= <\beta, \beta> - \tfrac{<\beta,\alpha><\alpha,\beta>}{||\alpha||^{۲}} \\ &= ||\beta||^{۲} - \tfrac{|<\alpha,\beta>|^{۲}}{||\alpha||^{۲}} \end{aligned}$$

از این رو،

$$|<\alpha, \beta>| \leq ||\alpha||\,||\beta||$$

۳) از گزارهٔ (۲) و خواص اعداد مختلط، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
||\alpha+\beta||^2 &= <\alpha+\beta,\alpha+\beta> \\
&= <\alpha,\alpha> + <\alpha,\beta> + <\beta,\alpha> + <\beta,\beta> \\
&= ||\alpha||^2 + 2\Re <\alpha,\beta> + ||\beta||^2 \\
&\leq ||\alpha||^2 + 2||\alpha||\,||\beta|| + ||\beta||^2 \\
&= (||\alpha|| + ||\beta||)^2
\end{aligned}$$

از این رو،

$$||\alpha+\beta|| \leq ||\alpha|| + ||\beta||$$

■

با توجه به روند اثبات گزارهٔ (۲) قضیهٔ ۳.۶، $|<\alpha,\beta>| = ||\alpha||\,||\beta||$ اگر و تنها اگر $\gamma = \beta - \frac{<\beta,\alpha>}{||\alpha||^2}\alpha = 0$ به بیان دیگر اگر و تنها اگر α و β وابستهٔ خطی باشد.

اگر V فضای ضرب داخلی روی هیأت F باشد، دو بردار $\alpha,\beta \in V$ را **متعامد** نامیم، هرگاه $<\alpha,\beta>=0$ و یک مجموعه متعامد است اگر و تنها اگر هر دو عنصر متمایز آن متعامد باشند. زیرمجموعهٔ $X = \{\alpha_i\}_{i\in I}$ از V را مجموعهٔ **متعامد یکه** می‌گوییم، هرگاه برای هر $i,j \in I$، $<\alpha_i,\alpha_j>=\delta_{ij}$. مجموعهٔ **متعامد یکه کامل**، مجموعهٔ متعامد یکه‌ای است، که به طور سره مشمول در هیچ مجموعهٔ متعامد یکه نیست.

قضیه ۴.۶ : فرض کنیم V فضای ضرب داخلی روی هیأت F باشد و X زیرمجموعهٔ متعامد از بردارهای ناصفر V است. در این صورت:

۱) اگر $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in X$ و $x_1,\dots,x_n \in F$ به قسمی باشند که $\beta = \sum_{k\in\mathbb{N}_n} x_k\alpha_k$، آن‌گاه برای هر $i \in \mathbb{N}_n$،

$$x_i = \frac{<\beta,\alpha_i>}{||\alpha_i||^2}$$

۲) X مستقل خطی است.

برهان: ۱) چون برای هر i و j متمایز در $\mathbb{N}_n$، $<\alpha_i,\alpha_j>=0$، پس برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
<\beta,\alpha_i> &= <\textstyle\sum_{k\in\mathbb{N}_n} x_k\alpha_k, \alpha_i> \\
&= \textstyle\sum_{k\in\mathbb{N}_n} x_k <\alpha_k,\alpha_i> \\
&= x_i <\alpha_i,\alpha_i>
\end{aligned}$$

از این رو برای هر $i \in \mathbb{N}_n$،

$$x_i = \frac{< \beta, \alpha_i >}{||\alpha_i||^۲}$$

۲) با توجّه به گزارهٔ (۱)، بدیهی است.

■

در یک فضای ضرب داخلی، عنصری بر یک مجموعه متعامد است، در صورتی که بر هر عنصر آن مجموعه عمود باشد. واضح است اگر یک عنصر بر یک مجموعه‌ای عمود باشد، آن‌گاه بر زیرفضای تولید شده توسط آن مجموعه نیز عمود است.

قضیه ۵.۶ : (نامساوی بسل) فرض کنیم $E = \{e_۱, \dots, e_n\}$ یک زیرمجموعهٔ متعامد یکه متناهی، فضای ضرب داخلی V روی هیأت F باشد. اگر $\alpha \in V$ و برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $x_i =< \alpha, e_i >$، آن‌گاه،

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_n} |x_i| \leq ||\alpha||$$

و عنصر $\beta = \alpha - \sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_i e_i$ بر $Span(E)$ عمود است.

برهان: واضح است که

$$\begin{aligned} ۰ \leq ||\beta|| &= < \beta, \beta > \\ &= < \alpha - \textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_i e_i, \alpha - \sum_{j\in\mathbb{N}_n} x_j e_j > \\ &= < \alpha, \alpha > - \textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_i < e_i, \alpha > - \sum_{j\in\mathbb{N}_n} \overline{x_j} < \alpha, e_j > \\ &\quad + \textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}_n} \sum_{j\in\mathbb{N}_n} x_i \overline{x_j} < e_i, e_j > \\ &= ||\alpha||^۲ - \textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}_n} |x_i|^۲ - \sum_{i\in\mathbb{N}_n} |x_i|^۲ + \sum_{i\in\mathbb{N}_n} |x_i|^۲ \\ &= ||\alpha||^۲ - \textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}_n} |x_i|^۲ \end{aligned}$$

پس،

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_n} |x_i| \leq ||\alpha||$$

برای اثبات قسمت دوّم نیز داریم،

$$\begin{aligned} < \beta, e_i > &= < \alpha - \textstyle\sum_{j\in\mathbb{N}_n} x_j e_j, e_i > \\ &= < \alpha, e_i > - \textstyle\sum_{j\in\mathbb{N}_n} x_j < e_i, e_i > \\ &= x_i - x_i \\ &= ۰ \end{aligned}$$

بنابراین β بر E عمود است و در نتیجه بر $Span(E)$ عمود می‌باشد.

■

اگر E زیرمجموعهٔ فضای ضرب داخلی V روی هیأت F باشد، قرار می‌دهیم،

$$E^{\perp} = \{\alpha \in V : \forall \beta \in E(< \alpha, \beta >= 0)\}$$

به سادگی دیده خواهد شد که $E^{\perp}$ زیرفضای V است و $Span(E) \subseteq (E^{\perp})^{\perp} = E^{\perp\perp}$. اگر E زیرفضای V باشد، $E^{\perp}$ را **متمم متعامد** E می‌نامیم.

قضیه ٦.٦ : فرض کنیم $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ یک زیرمجموعهٔ متعامد یکه متناهی، فضای ضرب داخلی V با بعد متناهی روی هیأت F باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱) E مجموعهٔ متعامد یکهٔ کامل است.

۲) $E^{\perp} = (0)$.

۳) E پایهٔ V است.

۴) برای هر $\alpha \in V$،

$$\alpha = \sum_{j \in \mathbb{N}_n} < \alpha, e_j > e_j$$

۵) (اتحاد پارسوال) برای هر $\alpha, \beta \in V$،

$$< \alpha, \beta >= \sum_{j \in \mathbb{N}_n} < \alpha, e_j >< e_j, \beta >$$

٦) برای هر $\alpha \in V$،

$$||\alpha||^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}_n} | < \alpha, e_j > |^2$$

برهان: ۲ $\Rightarrow$ ۱) اگر $0 \neq \alpha \in V$ و برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $< \alpha, e_i >= 0$، آن‌گاه $E \cup \{\frac{\alpha}{||\alpha||}\}$ یک مجموعهٔ متعامد است که فرض E مجموعهٔ متعامد یکهٔ کامل است، تناقض دارد.

۳ $\Rightarrow$ ۲) فرض کنیم $\alpha \in V \setminus Span(E)$. پس بنابر قضیهٔ ٥.٦، $0 \neq \beta = \alpha - \sum_{i \in \mathbb{N}_n} x_i e_i$ بر E عمود است، که در اینجا برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $x_i =< \alpha, e_i >$. از این رو گزارهٔ (۲) برقرار نیست و لذا $V = Span(E)$. حال با توجّه به قضیهٔ ۴.٦، E پایهٔ V است.

۴ ⇐ ۳) فرض کنیم $\alpha \in V$. پس $x_1, \ldots, x_n \in F$ به قسمی وجود دارند که $\alpha = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_i e_i$. از این رو

$$\begin{aligned} <\alpha, e_j> &= <\sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_i e_i, e_j> \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_i <e_i, e_j> \\ &= x_j \end{aligned}$$

۵ ⇐ ۴) فرض کنیم $\alpha, \beta \in V$. پس

$$\begin{aligned} <\alpha, \beta> &= <\sum_{i\in\mathbb{N}_n} <\alpha, e_i> e_i, \sum_{j\in\mathbb{N}_n} <\beta, e_j> e_j> \\ &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}_n} <\alpha, e_i> \overline{<\beta, e_j>} <e_i, e_j> \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}_n} <\alpha, e_i><e_i, \beta> \end{aligned}$$

۶ ⇐ ۵) بدیهی است.

۱ ⇐ ۶) فرض کنیم E_1 مجموعهٔ متعامد یکه باشد که $E \subsetneqq E_1$. اگر $\alpha \in E_1 \setminus E$، آن‌گاه $\alpha \neq 0$ و α بر E عمود است. از این رو،

$$||\alpha|| = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} |<\alpha, e_i>|^2 = 0$$

که تناقض است.

■

در گزارهٔ (۴) قضیهٔ ۶.۶،

$$\alpha = \sum_{j\in\mathbb{N}_n} <\alpha, e_j> e_j$$

بسط فوریهٔ α نسبت به پایهٔ متعامد $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ و اسکالرهای $<\alpha, e_j>$ را **ضرایب فوریهٔ** α می‌نامیم.

قضیه ۷.۶ : (فرآیند گرام اشمیت) فرض کنیم $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ زیرمجموعهٔ مستقل خطی فضای ضرب داخلی V روی هیأت F باشد. برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، قرار می‌دهیم:

$$\beta_i = \frac{\alpha_i - \sum_{k=1}^{i-1} <\alpha_i, \beta_k> \beta_k}{||\alpha_i - \sum_{k=1}^{i-1} <\alpha_i, \beta_k> \beta_k||}$$

در این صورت:

۱) $\mathfrak{B}_1 = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ زیرمجموعهٔ متعامد یکهٔ V است.

۲) $Span(\mathfrak{B}) = Span(\mathfrak{B}_1)$.

برهان: چون $\mathfrak{B}$ مستقل خطی است، پس $\alpha_1 \neq 0$ و در نتیجه $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{||\alpha_1||}$ بردار یکه است، $Span(\alpha_1) = Span(\beta_1)$، و $\{\beta_1\}$ مستقل خطی می‌باشد. حال فرض کنیم حکم برای $i - 1$ برقرار باشد. اگر $\beta_i = 0$، آن‌گاه

$$\alpha_i \in Span(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}) = Span(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$$

که این با استقلال خطی $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i\}$ مغایرت دارد، پس $\beta_i \neq 0$ و $||\beta_i|| = 1$. حال فرض کنیم $j < i$. لذا با توجّه به فرض استقراء اگر قرار دهیم،

$$\gamma_i = \alpha_i - \sum_{k=1}^{i-1} < \alpha_i, \beta_k > \beta_k$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} < \beta_i, \beta_j > &= < \tfrac{\gamma_i}{||\gamma_i||}, \beta_j > \\ &= \tfrac{1}{||\gamma_i||}(< \alpha_i, \beta_j > - \textstyle\sum_{k=1}^{i-1} < \alpha_i, \beta_k >< \beta_k, \beta_j >) \\ &= \tfrac{1}{||\gamma_i||}(< \alpha_i, \beta_j > - < \alpha_i, \beta_j >) \\ &= 0 \end{aligned}$$

از این رو $\{\beta_1, \dots, \beta_i\}$ مجموعهٔ متعامد یکه است. واضح است که

$$\{\beta_1, \dots, \beta_i\} \subseteq Span(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$$

پس بنابر قضیهٔ ۵.۳،

$$Span(\beta_1, \dots, \beta_i) \subseteq Span(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$$

و از قضایای ۱۷.۳ و ۴.۶، نتیجه می‌شود:

$$Span(\beta_1, \dots, \beta_i) = Span(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$$

■

قضیه ۸.۶ : هر فضای ضرب داخلی با بعد متناهی دارای یک پایهٔ متعامد یکه است.

برهان: بنابر قضیهٔ ۷.۶، حکم بدیهی است.

■

قضیه ۹.۶ : در هر فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، هر زیرمجموعهٔ متعامد یکهٔ آن مشمول در یک پایهٔ متعامد یکه است.

برهان: با توجّه به قضایای ۴.۶ و ۱۱.۳، و فرآیند گرام اشمیت، حکم برقرار است.

■

واضح است که زیرفضای یک فضای ضرب داخلی با همان ضری داخلی فضا، یک فضای ضرب داخلی است. از این رو می‌توان قضیهٔ زیر را که به **قضیهٔ تصویر** شهرت دارد را بیان کرد.

قضیه ۱۰.۶ : فرض کنیم W زیرفضای، فضای ضرب داخلی V با بعد متناهی روی هیأت F باشد. در این صورت:

۱) $V = W \oplus W^{\perp}$.

۲) $W^{\perp\perp} = W$.

۳) اگر $\alpha \in W$ و $\beta \in W^{\perp}$، آن‌گاه $||\alpha + \beta||^{۲} = ||\alpha||^{۲} + ||\beta||^{۲}$.

برهان: ۱) روشن است که $W + W^{\perp} \subseteq V$. بنابر قضیهٔ ۸.۶، می‌توانیم فرض کنیم $\{\alpha_۱, \dots, \alpha_n\}$ پایهٔ متعامد یکه برای W باشد. بنابراین اگر $\beta \in V$، بنابر قضیهٔ ۵.۶،

$$\gamma = \beta - \sum_{i \in \mathbb{N}_n} < \beta, \alpha_i > \alpha_i$$

متعلق به $W^{\perp}$ است و در نتیجه،

$$\beta = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} < \beta, \alpha_i > \alpha_i + \gamma \in W + W^{\perp}$$

پس $W + W^{\perp} = V$. حال فرض کنیم $\alpha \in W \cap W^{\perp}$. بنابراین،

$$||\alpha|| = < \alpha, \alpha > = ۰$$

لذا $\alpha = \circ$ و در نتیجه $V = W \oplus W^{\perp}$.

۲) واضح است که $W \subseteq W^{\perp\perp}$. حال فرض کنیم $\gamma \in W^{\perp\perp}$، پس بنابر گزارهٔ (۱)، $\alpha \in W$ و $\beta \in W^{\perp}$ به قسمی وجود دارند که $\gamma = \alpha + \beta$. از این رو،

$$\begin{aligned} \circ &= <\gamma, \beta> \\ &= ||\beta||^{۲} \end{aligned}$$

و در نتیجه $\beta = \circ$ و $\gamma \in W$. لذا $W^{\perp\perp} \subseteq W$ و حکم اثبات است.

۳) بنابر گزارهٔ (۲)، روشن است که:

$$\begin{aligned} ||\alpha + \beta||^{۲} &= <\alpha + \beta, \alpha + \beta> \\ &= <\alpha, \alpha> + <\alpha, \beta> + <\beta, \alpha> + <\beta, \beta> \\ &= ||\alpha||^{۲} + ||\beta||^{۲} \end{aligned}$$

■

در قضیهٔ زیر رابطهٔ تابعکهای خطی روی فضای ضرب داخلی را با ضرب داخلی آنها بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۱.٦ : فرض کنیم V و W فضاهای ضرب داخلی با بعد متناهی روی هیأت F باشند. در این صورت:

۱) برای هر $\beta \in V$، $f_\beta : V \to F$ با ضابطهٔ $f_\beta(\alpha) =< \alpha, \beta >$ یک تابعک خطی روی V است.

۲) اگر $f \in V^\star$، آن‌گاه بردار یکتای $\beta \in V$ به قسمی وجود دارد که $f = f_\beta$.

۳) اگر $T \in L(V, W)$، آن‌گاه عملگر یکتای $T^\star \in L(W, V)$ به قسمی وجود دارد که برای هر $\alpha \in V$ و $\beta \in W$،

$$< T(\alpha), \beta >=< \alpha, T^\star(\beta) >$$

برهان: ۱) به سادگی بررسی می‌شود.

۲) بنابر قضیهٔ ۸.٦، پایهٔ متعامد یکهٔ $\{\alpha_۱, \ldots, \alpha_n\}$ برای V وجود دارد. اگر قرار دهیم،

$$\beta = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \overline{f(\alpha_i)} \alpha_i$$

آن‌گاه برای هر $j \in \mathbb{N}_n$،

$$\begin{aligned} f_\beta(\alpha_j) &= <\alpha_j, \sum_{i\in\mathbb{N}_n} \overline{f(\alpha_i)}\alpha_i> \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}_n} <\alpha_j, \overline{f(\alpha_i)}\alpha_i> \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}_n} f(\alpha_i)\delta_{ij} \\ &= f(\alpha_j) \end{aligned}$$

لذا بنابر قضیهٔ ۶.۴، $f = f_\beta$. حال فرض کنیم $\gamma = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_i\alpha_i \in V$ به قسمی باشد که $f = f_\gamma$. پس مشابه استدلال قبل، برای هر $j \in \mathbb{N}_n$،

$$f(\alpha_j) = f_\gamma\alpha_j = \overline{x_j}$$

از این رو $\beta = \gamma$.

۳) فرض کنیم $\beta \in W$، پس $T' : V \to F$ با ضابطهٔ $T'(\alpha) =< T(\alpha), \beta >$ یک تابعک خطی روی V است. لذا بنابر گزارهٔ (۲)، بردار یکتای $\beta' \in V$ به قسمی وجود دارد که $T' = f_{\beta'}$. حال $T^\star : W \to V$ با ضابطهٔ $T^\star(\beta) = \beta'$ تعریف می‌کنیم. با توجّه به یکتایی β'، $T^\star$ یک تابع است. برای هر $\alpha \in V$ و $\beta, \gamma \in W$، و $x \in F$، داریم:

$$\begin{aligned} <\alpha, T^\star(x\beta+\gamma)> &= <T(\alpha), x\beta+\gamma> \\ &= \overline{x} <T(\alpha), \beta> + <T(\alpha), \gamma> \\ &= \overline{x} <\alpha, T^\star(\beta)> + <\alpha, T^\star(\gamma)> \\ &= <\alpha, xT^\star(\beta) + T^\star(\gamma)> \end{aligned}$$

از این رو $T^\star \in L(W, V)$. حال فرض کنیم $T_1 \in L(W, V)$ به قسمی باشد که برای هر $\alpha \in V$ و $\beta \in W$، $<T(\alpha), \beta> = <\alpha, T_1(\beta)>$. بنابر قضیهٔ ۸.۶، پایهٔ متعامد یکهٔ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ برای V وجود دارد و بنابر قضیهٔ ۴.۶، واضح است که:

$$\begin{aligned} T_1(\beta) &= \sum_{i\in\mathbb{N}_n} <\alpha_i, T_1(\beta)> \alpha_i \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}_n} <T(\alpha_i), \beta> \alpha_i \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}_n} <\alpha_i, T^\star(\beta)> \alpha_i \\ &= T^\star(\beta) \end{aligned}$$

■

تبدیل خطی یکتای $T^\star \in L(W,V)$ در گزارهٔ (۳) قضیهٔ ۱۱.۶ را **الحاقی**، $T \in L(V,W)$ می‌نامیم.

قضیه ۱۲.۶ : فرض کنیم V، W، و Z فضاهای ضرب داخلی با بعد متناهی روی هیأت F باشند. اگر $f,g \in L(V,W)$ و $h \in L(W,Z)$، آن‌گاه:

۱) برای هر $\lambda \in F$، $(\lambda f+g)^\star = \overline{\lambda} f^\star + g^\star$.

۲) $(h \circ f)^\star = f^\star \circ h^\star$.

۳) $(f^\star)^\star = f$.

برهان: ۱) برای هر $\alpha \in V$ و $\beta \in W$،

$$\begin{aligned} <(\lambda f+g)(\alpha),\beta> &= <\lambda f(\alpha)+g(\alpha),\beta> \\ &= \lambda <f(\alpha),\beta> + <g(\alpha),\beta> \\ &= \lambda <\alpha, f^\star(\beta)> + <\alpha, g^\star(\beta)> \\ &= <\alpha, (\overline{\lambda} f^\star + g^\star)(\beta)> \end{aligned}$$

لذا بنابر یکتایی تبدیل خطی الحاقی، لازم می‌آید که:

$$(\lambda f+g)^\star = \overline{\lambda} f^\star + g^\star$$

گزاره‌های (۲) و (۳) به طور مشابه اثبات می‌شود.

■

فرض کنیم V و W فضاهای ضرب داخلی با بعد متناهی روی هیأت F باشند. اگر $T \in L(V,W)$ یکریختی باشد که برای هر $\alpha,\beta \in V$،

$$<T(\alpha),T(\beta)> = <\alpha,\beta>$$

آن‌گاه T را **یکریختی ضرب داخلی** می‌نامیم و هر یکریختی ضرب داخلی متعلق به $L(V,V)$ را **عملگر یکانی** روی V می‌گوییم.

قضیه ۱۳.۶ : فرض کنیم V و W فضاهای ضرب داخلی با بعد متناهی روی هیأت F باشند $\dim(V)=\dim(W)$. اگر $T \in L(V,W)$، گزاره‌های زیر معادلند:

۱) T یکریختی ضرب داخلی است.

۲) T یکریختی فضای برداری است و $T^{-1} = T^{\star}$.

۳) $T \circ T^{\star} = id_W$.

۴) $T^{\star} \circ T = id_V$.

برهان: ۲ $\Leftarrow$ ۱) با توجه به تعریف یکریختی ضرب داخلی، واضح است T یکریختی فضای برداری می‌باشد. حال برای هر $\alpha \in V$ و $\beta \in W$،

$$\begin{aligned} < T(\alpha), \beta > &= < T(\alpha), T(T^{-1}(\beta)) > \\ &= < \alpha, T^{-1}(\beta) > \end{aligned}$$

لذا بنابر یکتایی تبدیل خطی الحاقی، لازم می‌آید که $T^{-1} = T^{\star}$.

۳ $\Leftarrow$ ۲) چون $T^{-1} = T^{\star}$، بدیهی است.

۴ $\Leftarrow$ ۳) بنابر گزارهٔ (۳)، T پوشاست و چون $\dim(V) = \dim(W)$، بنابر قضیهٔ ۱۲.۴، T یکریختی فضای برداری می‌باشد و $T^{-1} = T^{\star}$. از این رو $T^{\star} \circ T = id_V$.

۱ $\Leftarrow$ ۴) بنابر گزارهٔ (۴)، T یک به یک است و چون $\dim(V) = \dim(W)$، بنابر قضیهٔ ۱۲.۴، T یکریختی فضای برداری می‌باشد و $T^{-1} = T^{\star}$. در نتیجه برای هر $\alpha \in V$ و $\beta \in W$،

$$\begin{aligned} < T(\alpha), T(\beta) > &= < \alpha, T^{\star}(T(\beta)) > \\ &= < \alpha, \beta) > \end{aligned}$$

از این رو T یکریختی ضرب داخلی است.

■

اگر $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$، آن‌گاه **الحاقی** یا **ترانهادهٔ مزدوج** ماتریس A را با $A^{\star} = (a^{\star}_{ij}) \in F^{n\times m}$ نمایش می‌دهیم و برای هر $i \in \mathbb{N}_n$ و $j \in \mathbb{N}_m$، $a^{\star}_{ij} = \overline{a_{ji}}$. همچنین ماتریس A را **خودالحاقی** یا **هرمیتی** می‌نامیم، هرگاه $A = A^{\star}$. به طور مشابه اگر V فضای ضرب داخلی با بعد متناهی روی هیأت F باشد و $T \in L(V, V)$ به قسمی باشد که $T^{\star} = T$، آن‌گاه T را عملگر **خودالحاقی** یا **هرمیتی** می‌نامیم. لذا بنابر قضیهٔ ۱۴.٦، که به دنبال می‌آید، عملگر T خودالحاقی است اگر و تنها اگر ماتریس نمایش آن نسبت به هر پایهٔ متعامد یکه خودالحاقی باشد.

قضیه ۱۴.٦ : فرض کنیم $\mathfrak{B}_{1} = \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}_n}$ و $\mathfrak{B}_{2} = \{\beta_i\}_{i\in\mathbb{N}_m}$ به ترتیب پایه‌های متعامد یکهٔ مرتبی، برای فضاهای ضرب داخلی V و W با بعد متناهی روی هیأت F باشند و $T \in L(V,W)$. اگر $A = Mat[T;\mathfrak{B}_{1},\mathfrak{B}_{2}]$، آن‌گاه $A^\star = Mat[T^\star;\mathfrak{B}_{2},\mathfrak{B}_{1}]$.

برهان: بنابر قضیهٔ ۴.٦، برای هر $j \in \mathbb{N}_n$،

$$T(\alpha_j) = \sum_{i\in\mathbb{N}_m} < T(\alpha_j),\beta_i > \beta_i$$

لذا بنابر تعریف $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$، برای هر $i \in \mathbb{N}_m$ و $j \in \mathbb{N}_n$،

$$a_{ij} =< T(\alpha_j),\beta_i >$$

به طور مشابه برای هر $j \in \mathbb{N}_m$،

$$T^\star(\beta_j) = \sum_{i\in\mathbb{N}_m} < T^\star(\beta_j),\alpha_i > \alpha_i$$

و در نتیجه اگر $Mat[T^\star;\mathfrak{B}_{2},\mathfrak{B}_{1}] = (b_{ij}) \in F^{n\times m}$، آن‌گاه برای هر $i \in \mathbb{N}_n$ و $j \in \mathbb{N}_m$،

$$\begin{aligned} b_{ij} &= < T^\star(\beta_j),\alpha_i > \\ &= \overline{< \alpha_i,T^\star(\beta_j) >} \\ &= \overline{< T(\alpha_i),\beta_j >} \\ &= \overline{a_{ji}} \end{aligned}$$

از این رو $A^\star = Mat[T^\star;\mathfrak{B}_{2},\mathfrak{B}_{1}]$.

■

ماتریس $A \in F^{n\times n}$، را ماتریس **یکانی** نامیم، هرگاه A^{-1} وجود داشته باشد و $A^\star = A^{-1}$. لذا بنابر قضایای ۱۳.٦ و ۱۴.٦، ماتریس A یکانی است اگر و تنها اگر آن ماتریس نمایش یک یکریختی ضرب داخلی باشد.

تمرینات

۱.٦ : فرض کنیم V فضای ضرب داخلی با پایهٔ متناهی $\mathfrak{B} = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ روی هیأت F باشد. نشان دهید:

الف) اگر $x_1, \ldots, x_n \in F$، آن‌گاه بردار یکتای $\alpha \in V$ به قسمی وجود دارد که برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $< \alpha, \alpha_i >= x_i$.

ب) اگر $\alpha \in V$ به قسمی باشد که برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $< \alpha, \alpha_i >= 0$، آن‌گاه $\alpha = 0$.

ج) برای هر $\alpha, \beta \in V$، $\alpha = \beta$ اگر و تنها اگر برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $< \alpha, \alpha_i >=< \beta, \alpha_i >$.

د) اگر $\mathfrak{B}$ پایهٔ یکهٔ متعامد باشد، آن‌گاه برای هر $\alpha, \beta \in V$،

$$< \alpha, \beta >= \sum_{i \in \mathbb{N}_n} < \alpha, \alpha_i > \overline{< \beta, \alpha_i >}$$

هـ) فرض کنیم $\mathfrak{B}$ پایهٔ مرتب یکهٔ متعامد است. اگر $T \in L(V, V)$ و $A = (a_{ij})$ ماتریس نمایش T در پایهٔ مرتب $\mathfrak{B}$ باشد، آن‌گاه برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$،

$$a_{ij} =< T(\alpha_j), \alpha_i >$$

۲.۶ : فرض کنیم V فضای ضرب داخلی با بعد متناهی روی هیأت F باشد. برای هر $\alpha, \beta \in V$، ثابت کنید:

الف) $< \alpha, \beta >= Re < \alpha, \beta > + iRe < \alpha, i\beta >$.

ب) $||\alpha \pm \beta||^2 = ||\alpha||^2 \pm 2Re < \alpha, \beta > + ||\beta||^2$.

ج) در حالت $F = \mathbb{R}$، $< \alpha, \beta >= \frac{1}{4}||\alpha + \beta||^2 - \frac{1}{4}||\alpha - \beta||^2$

د) $< \alpha, \beta >= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{4} i^n ||\alpha + i^n \beta||^2$.

۳.۶ : فرض کنیم V فضای ضرب داخلی با پایهٔ مرتب و متناهی $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ روی هیأت F باشد. اگر برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$، قرار دهیم،

$$a_{ij} =< \alpha_j, \alpha_i >$$

آن‌گاه ماتریس $A = (a_{ij}) \in F^{n \times n}$ را **ماتریس ضرب داخلی در پایهٔ مرتب** $\mathfrak{B}$ می‌نامیم. ثابت کنید:

الف) $A = A^*$، یعنی؛ A هرمیتی است.

ب) با کمی تسامح برای هر $\alpha, \beta \in V$،

$$< \alpha, \beta >= [\beta]^\star_{\mathfrak{B}} \;\; A \;\; [\alpha]_{\mathfrak{B}}$$

ج) با کمی تسامح برای هر $0 \neq \alpha \in V$،

$$[\alpha]^\star_{\mathfrak{B}} \;\; A \;\; [\alpha]_{\mathfrak{B}} > 0$$

د) A معکوس‌پذیر است.

۴.۶ : فرض کنیم برای هر $f, g \in \mathbb{R}_n[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$،

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

نشان دهید:

الف) $\mathbb{R}_n[x]$ با ضرب فوق یک فضای ضرب داخلی است.

ب) برای هر $f, g \in \mathbb{R}_n[x]$،

$$\left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_0^1 f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

ج) اگر $\mathfrak{B} = \{1, x, \ldots, x^n\}$، ماتریس ضرب داخلی در پایهٔ مرتب $\mathfrak{B}$ را به دست آورید.

۵.۶ : برای هر $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$، تعریف می‌کنیم

$$< A, B >= tr(B^\star A)$$

که در آن $B^\star = \overline{B^t}$. نشان دهید:

الف) $\mathbb{C}^{n \times n}$ با ضرب فوق یک فضای ضرب داخلی است.

ب) برای هر $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$،

$$|tr(AB)| \leq (tr(AA^t))^{\frac{1}{2}} (tr(BB^t))^{\frac{1}{2}}$$

ج) $\mathbb{R}^{n\times n}$ با ضرب فوق یک فضای ضرب داخلی است.

د) فرض کنیم T_P عملگر خطی روی فضای ضرب داخلی $\mathbb{C}^{n\times n}$ با ضابطهٔ $T_P(A) = P^{-1}AP$ باشد، که در اینجا $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ماتریس معکوس‌پذیر است. در این صورت $(T_P)^\star = T_{P^\star}$.

٦.٦ : فرض کنیم $A \in F^{m\times n}$ و $rank(A) = n$. ثابت کنید ماتریسهای $B \in F^{m\times n}$ و $C \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارند که

الف) $A = BC$.

ب) C یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر مثبت روی قطر اصلی است.

ج) $\{B^{(1)}, \ldots, B^{(n)}\}$ زیرمجموعهٔ متعامد یکهٔ $F^{m\times 1}$ است.

برهان: فرایند گرام اشمیت را روی ستونهای A اعمال می‌کنیم. چون $rank(A) = n$، پس $\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$ زیرمجموعهٔ مستقل خطی $F^{m\times 1}$ است. برای هر $k \in \mathbb{N}_n$، قرار دهیم:

$$B^{(k)} = \frac{A^{(k)} + \sum_{i=1}^{k-1} < A^{(k)}, B^{(i)} > B^{(i)}}{||A^{(k)} + \sum_{i=1}^{k-1} < A^{(k)}, B^{(i)} > B^{(i)}||}$$

بنابراین $\{B^{(1)}, \ldots, B^{(n)}\}$ زیرمجموعهٔ متعامد یکهٔ $F^{m\times 1}$ است و

$$Span(B^{(1)}, \ldots, B^{(n)}) = Span(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$$

فرض کنیم برای هر $i > j$، $c_{ij} = 0$ و برای سایر $i, j \in \mathbb{N}_n$، $c_{ij} =< A^{(j)}, B^{(i)} >$. در این صورت $C = (c_{ij})$ یک ماتریس بالا مثلثی است و بنابر قضیهٔ ۴.٦، برای هر $k \in \mathbb{N}_n$،

$$\begin{aligned} A^{(k)} &= \sum_{i=1}^{k} < A^{(k)}, B^{(i)} > B^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_{ik} B^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_{ik} B^{(i)} \\ &= BC^{(k)} \end{aligned}$$

بنابراین $A = BC$.

۷.٦ : فرض کنیم $A \in F^{n\times n}$ و $rank(A)=n$. ثابت کنید ماتریس بالا مثلثی یکتایی با عناصر مثبت روی قطر اصلیِ $C \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارد که AC ماتریس یکانی است.

برهان: بنابر تمرینِ ٦.٦، ماتریس ماتریس بالا مثلثی با عناصر مثبت روی قطر اصلیِ $C_1 \in F^{n\times n}$ و ماتریس B که گردایهٔ ستونهای آن یک پایهٔ متعامد یکهٔ $F^{n\times 1}$ است، به قسمی وجود دارند که $A = BC_1$. لذا $B^tB = I_n$.

۸.٦ : فرض کنیم $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}_n}$ گردایهٔ ناتهی از زیرفضاهای، فضای ضرب داخلی V با بعد متناهی روی هیأت F باشد. برای $W = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} W_i$ ثابت کنید که:

الف) برای هر $j \in \mathbb{N}_n$، $W_j^\perp = \sum_{j\neq i\in\mathbb{N}_n} W_i$ اگر و تنها اگر $W = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} \oplus W_i$.

ب) اگر $W = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} \oplus W_i$ و برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $\alpha_i \in W_i$، آن‌گاه:

$$||\alpha_1 + \cdots + \alpha_n||^2 = ||\alpha_1||^2 + \cdots + ||\alpha_n||^2$$

۹.٦ : فرض کنیم W_1 و W_2 دو زیرفضا از یک فضای ضرب داخلی V با بعد متناهی روی هیأت F باشند. ثابت کنید:

الف) اگر $W_1 \subseteq W_2$، آن‌گاه $W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$.

ب) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

ج) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

برهان: الف) با توجّه به تعریف متمم متعامد، واضح است.

ب) چون W_1 و W_2 زیرمجموعهٔ $W_2 + W_2$ می‌باشند، بنابر رابطهٔ (الف)،

$$(W_1 + W_2)^\perp \subseteq W_1^\perp \cap W_2^\perp$$

همچنین $W_1 \cap W_2$ زیرمجموعهٔ W_1 و W_2 است، پس بنابر خواص جمع زیرفضاهای برداری و رابطهٔ (الف)، داریم،

$$W_1^\perp + W_2^\perp \subseteq (W_1 \cap W_2)^\perp$$

از این رو بنابر رابطهٔ (الف)، قضیهٔ ۱۰.۶، و روابط فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= (W_1 \cap W_2)^{\perp\perp} \\ &\subseteq (W_1^{\perp} + W_2^{\perp})^{\perp} \\ &\subseteq W_1^{\perp\perp} \cap W_2^{\perp\perp} \\ &= W_1 \cap W_2 \end{aligned}$$

لذا $W_1 \cap W_2 = (W_1^{\perp} + W_2^{\perp})^{\perp}$ و بنابر قضیهٔ ۱۰.۶،

$$(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$$

ج) در رابطهٔ (ب) به جای W_1 و W_2 به ترتیب $W_1^{\perp}$ و $W_2^{\perp}$ را قرار می‌دهیم. حال با توجّه به قضیهٔ ۱۰.۶، نتیجه حاصل خواهد شد.

۱۰.۶ : فرض کنیم V فضای ضرب داخلی با بعد متناهی روی هیأت F باشد و $T \in L(V,V)$. ثابت کنید $\ker(T^{\star}) = (Img(T))^{\perp}$ و $Img(T^{\star}) = (\ker(T))^{\perp}$.

۱۱.۶ : فرض کنیم $\mathfrak{B}_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ و $\mathfrak{B}_2 = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ به ترتیب پایه‌های مرتب متعامد یکهٔ فضای ضرب داخلی V با بعد متناهی روی هیأت F باشند.

الف) اگر $U \in L(V,V)$ به قسمی باشد که برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $U(\alpha_i) = \beta_i$، آن‌گاه ماتریس $P = Mat[U; \mathfrak{B}_1]$ ماتریس یکانی است و برای هر $\alpha \in V$،

$$[\alpha]_{\mathfrak{B}_1} = P[\beta]_{\mathfrak{B}_2}$$

ب) ماتریسهای A و B را **هم‌ارز یکانی** نامیم، هرگاه ماتریس یکانی P به قسمی وجود داشته باشد که $B = P^{-1}AP$. اگر $T \in L(V,V)$ باشد، آن‌گاه $Mat[T; \mathfrak{B}_1]$ و $Mat[T; \mathfrak{B}_2]$ هم‌ارز یکانی هستند.

پیوست A

راهنمایی تمرینات

A.۱ تمرینات فصل اوّل

۱) فرض کنیم e عضو خنثیٰ G باشد. چون $H \neq \emptyset$، پس بنابر قضیهٔ ۱.۱، برای $k \in H$، لازم می‌آید که $kk^{-1} = e \in H$. حال اگر e_1 عضو خنثیٰ H باشد،

$$\begin{array}{rcll} e & = & ee_1 & \text{عضو خنثی } G \text{ است و } e_1 \in G \quad e \\ & = & e_1 & \text{عضو خنثی } H \text{ است و } e \in H \quad e_1 \end{array}$$

۲) واضح است I_n عضو خنثیٰ G می‌باشد. حال اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$، آن گاه A معکوس‌پذیر نیست. حال فرض کنیم $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ متعلق به G باشند. لذا برای هر $k, i \in \mathbb{N}_n$، $\sum_{j=1}^{n} b_{kj} = 1$ و $\sum_{t=1}^{n} a_{it} = 1$. پس جمع عناصر سطر iام AB برابر است با:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \\ &= 1 \end{aligned}$$

از این رو فقط گزاره (ج) نادرست است.

۳) فرض کنیم $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$. حال با توجّه به خواص میدان خواهیم داشت:

$$r(A+B) = (r(a_{ij}+b_{ij})) = (ra_{ij}+rb_{ij}) = (ra_{ij}) + (rb_{ij}) = rA + rB$$
$$(r+s)A = ((r+s)a_{ij}) = (ra_{ij}+sa_{ij}) = (ra_{ij}) + (sa_{ij}) = rA + sA$$
$$r(sA) = r(sa_{ij}) = (r(sa_{ij})) = ((rs)a_{ij}) = (rs)A$$

۴) برای تسهیل در نوشتن، قرار می‌دهیم:

$$a^t_{ij} = a_{ji}$$

الف) فرض کنیم $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$. از این رو درایهٔ سطر rام و ستون sام $(AB)^t$ برابر است بادرایهٔ سطر sام و ستون rام AB می‌باشد و برابر با،

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^n a_{sk}b_{kr} &= \textstyle\sum_{k=1}^n a^t_{ks}b^t_{rk} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n b^t_{rk}a^t_{ks} \end{aligned}$$

می‌باشد که درایهٔ سطر rام و ستون sام B^tA^t است. لذا $(AB)^t = B^tA^t$.

ب) با توجّه به گزارهٔ (الف)، واضح است که،

$$I_n = I^t_n = (AA^{-1})^t = (A^{-1})^tA^t$$

به طریق مشابه $A^t(A^{-1})^t = I_n$. پس $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

ج) فرض کنیم $A = (a_{ij})$. قرار می‌دهیم $A + A^t = (b_{ij})$، $AA^t = (c_{ij})$، و $A - A^t = (d_{ij})$. بنابراین،

$$b_{ij} = a_{ij} + a^t_{ij} = a^t_{ji} + a_{ji} = b_{ji}$$
$$c_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^n a_{ik}a^t_{kj} = \sum_{k=1}^n a^t_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk}a^t_{ki} = c_{ji}$$
$$d_{ij} = a_{ij} - a^t_{ij} = a^t_{ji} - a_{ji} = -b_{ji}$$

لذا $A + A^t$ و AA^t متقارن هستند و $A - A^t$ پاد متقارن می‌باشد.

د) فرض کنیم $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$. قرار می‌دهیم $AB = (c_{ij})$ $BA = (d_{ij})$. اگر A، B، و AB متقارن باشند، آن گاه،

$$\begin{aligned} c_{ij} &= c_{ji} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n a_{kj}b_{ik} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj} \\ &= d_{ij} \end{aligned}$$

بنابراین $AB = BA$.

فرض منیم A و B متقارن باشند و $AB = BA$. در این صورت،

$$\begin{array}{rcl} c_{ij} & = & d_{ij} \\ & = & \sum_{k=۱}^{n} b_{ik}a_{kj} \\ & = & \sum_{k=۱}^{n} a_{jk}b_{ki} \\ & = & \sum_{k=۱}^{n} a_{jk}b_{ki} \\ & = & c_{ji} \end{array}$$

پس AB متقارن است.

۵) چون برای هر $v, w \in \mathbb{C}$، $\overline{\overline{v}} = v$ و $\overline{v + w} = \overline{v} + \overline{w}$، پس بنابر تمرین ۴.۱، گزاره‌ها برقرار می‌باشند.

٦) برای تسهیل در نوشتن، قرار می‌دهیم:

$$\delta_{ij}(rs) = \begin{cases} ۱ & \text{هرگاه } (i,j) = (r,s) \\ ۰ & \text{هرگاه } (i,j) \neq (r,s) \end{cases}$$

بنابراین $E_{rs} = (\delta_{ij}(rs))$.

الف) فرض کنیم $E_{ij}E_{kt} = (c_{rs})$. پس،

$$\begin{aligned} c_{rs} &= \sum_{p=۱}^{n} \delta_{rp}(ij)\delta_{ps}(kt) \\ &= \begin{cases} \delta_{rs}(it) & \text{هرگاه} j = k \\ ۰ & \text{هرگاه} j \neq k \end{cases} \\ &= \delta_{jk}\delta_{rs}(it) \end{aligned}$$

ب) واضح است که،

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_{p=۱}^{n} \delta_{ip}(rs)a_{pj} \\ &= \begin{cases} a_{sj} & \text{هرگاه } i = r \\ ۰ & \text{هرگاه } i \neq r \end{cases} \\ &= \delta_{ir}a_{sj} \end{aligned}$$

ج) مشابه گزارهٔ (ب) است.

د) چون،

$$(I_n + E_{ij})(I_n - E_{ij}) = (I_n - E_{ij})(I_n + E_{ij}) = I_n$$

پس $I_n - E_{ij}$ معکوس $I_n + E_{ij}$ می‌باشد.

ه) اگر r و s عناصر متمایز در $\mathbb{N}_n$ باشند، آن گاه $AE_{rs} = E_{rs}A$ و بنابر گزاره‌های (ب) و (ج)، برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$، خواهیم داشت:

$$\delta_{sj} a_{ir} = \delta_{ir} a_{sj}$$

اکنون اگر قرار دهیم $i = r$ و $j = s$، آن گاه $a_{rr} = a_{ss}$ و چنانچه قرار دهیم $i = r$ و $j = r$، آن گاه $a_{sr} = 0$. پس A مضربی از ماتریس همانی است.

۷) الف) فرض کنیم $r, s \in \mathbb{N}$ و $r \neq s$. گیریم $G_{rs} = (a_{ij})$ و $G_{sr} = (b_{ij})$. قرار می‌دهیم $G_{rs}G_{sr} = (c_{ij})$. در این صورت:

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\
&= \begin{cases} a_{rr}b_{rr} + a_{rs}b_{sr} & \text{هرگاه } (i,j) = (r,r) \\ a_{sr}b_{rs} + a_{ss}b_{ss} & \text{هرگاه } (i,j) = (s,s) \\ a_{rr}b_{rs} + a_{rs}b_{ss} & \text{هرگاه } (i,j) = (r,s) \\ a_{sr}b_{rr} + a_{ss}b_{sr} & \text{هرگاه } (i,j) = (s,r) \\ \delta_{ij} & \text{سایر جاها} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & \text{هرگاه } (i,j) = (r,r) \\ (-\sin(\theta))(-\sin(\theta)) + \cos^2(\theta) & \text{هرگاه } (i,j) = (s,s) \\ \cos(\theta)(-\sin(\theta)) + \sin(\theta)\cos(\theta) & \text{هرگاه } (i,j) = (r,s) \\ (-\sin(\theta))\cos(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta) & \text{هرگاه } (i,j) = (s,r) \\ \delta_{ij} & \text{سایر جاها} \end{cases} \\
&= \delta_{ij}
\end{aligned}$$

بنابراین $G_{rs}G_{sr} = I_n$. پس بنابر قضیهٔ ۱۰.۲، G_{rs}، معکوس G_{sr} می‌باشد.. به طور مشابه نیز ثابت می‌شود که G_{rr} معکوس‌پذیر است.

ب) چون G_{rs}، ترانهادهٔ G_{sr} می‌باشد، با توجّه به گزارهٔ (الف)، G_{sr} متعامد است. از این رو براحتی گزاره اثبات می‌شود.

۸) فرض کنیم $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$. اگر $j \gneqq i$، آن گاه،

$$a_{i۱}=a_{i۲}=\cdots=a_{i(i-۱)}=۰ \quad \text{و} \quad b_{ij}=b_{(i+۱)j}=\cdots=b_{nj}=۰$$

لذا درایهٔ سطر iام و ستون jام ماتریس AB، یعنی؛ $\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kj}$ مساوی صفر است. بنابراین ماتریس AB بالا مثلثی است.

۹) فرض کنیم،

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ & ۱ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$$

با توجّه به تمرین ۸.۱، $BA=(c_{ij})$ بالا مثلثی است. همچنین واضح است که برای هر عدد طبیعی n،

$$n-۲(n+۱)+(n+۲)=۰ \qquad (\star)$$

حال فرض کنیم $i \lneqq j$. بایستی نشان دهیم $c_{ij}=۰$.

$$c_{ij}=\begin{cases} ۱\times۲-۱\times۲=۰ & \text{هرگاه } i=n-۱ \text{ یا } j=i+۱ \\ ۰ & \text{هرگاه } i\lneqq n-۱ \text{ و } j\gneqq i+۱ \end{cases} \quad (\text{با توجه به } \star)$$

از طرفی برای هر $i\in\mathbb{N}_n$، $c_{ii}=۱$. پس $BA=I_n$. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $AB=I_n$. پس $B=A^{-۱}$.

۱۰) ج) فرض کنیم $A=(a_{ij})$، $A^t=(b_{ij})$، و $AA^t=(c_{ij})$. در این صورت:

$$\begin{aligned} tr(AA^t) &= \sum_{i=۱}^{n} c_{ii} \\ &= \sum_{i=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{ki} \\ &= \sum_{i=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}a_{ik} \\ &= \sum_{i,k\in\mathbb{N}_n} a_{ik}^{۲} \end{aligned}$$

د) اگر $A=۰$، واضح است که $tr(AA^t)=۰$. حال اگر $tr(AA^t)=۰$، بنابر گزارهٔ (ج)،

$$tr(AA^t)=\sum_{i,k\in\mathbb{N}_n} a_{ik}^{۲}$$

چون برای هر $i,k\in\mathbb{N}_n$، $a_{ik}\in\mathbb{R}$، لازم می آید که $a_{ik}=۰$، یعنی؛ $A=۰$.

۱۱) فرض کنیم $H = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$. واضح است که $a \in H$، پس $H \neq \emptyset$. حال فرض کنیم $x, y \in H$. لذا $m, n \in \mathbb{Z}$ به قسمی وجود دانند که $x = a^m$ و $y = a^n$. چون $n - m \in \mathbb{Z}$ و $x^{-1}y = a^{n-m}$، پس $x^{-1}y \in H$. از این رو بنابر قضیهٔ ۱.۱، H زیرگروه G است.

۱۲) لزوم این گزاره بدیهی است. حال فرض کنیم برای هر $a, b \in H$، $ab \in H$، نشان می‌دهیم که H زیرگروه G می‌باشد. اگر $a \in H$، آن گاه $a, a^۲, a^۳, \ldots \in H$. پس اعداد طبیعی $r \lneqq s$ به قسمی وجود دارند که $a^r = a^s$. از این رو،

$$\begin{array}{rcl} a^{s-r-۱}a & = & aa^{s-r-۱} \\ & = & a^{s-r} \\ & = & e \in H \end{array}$$

پس $e \in H$ و $a^{s-r-۱} \in H$، معکوس a می‌باشد. فرض کنیم $a, b \in H$، پس $a^{-۱}, b \in H$ و با توجّه به فرض، $a^{-۱}b$ متعلق به H است. از این رو بنابر قضیهٔ ۱.۱، H زیرگروه G است.

۱۳) الف) گیریم $H = \{e, a, a^۲, \ldots, a^{n-۱}\}$. واضح است که $H \subseteq < a >$. حال فرض کنیم $x \in < a >$، پس $m \in \mathbb{Z}$ به قسمی وجود دارد که $x = a^m$. بنابر قضیهٔ تقسیم در $\mathbb{Z}$، اعداد صحیح r و q به قسمی وجود دارند که $m = qn + r$، که در اینجا $۰ \leq r \lneqq n$. با توجّه به این که $o(a) = n$، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{rcl} x & = & a^m \\ & = & a^{qn+r} \\ & = & (a^n)^q a^r \\ & = & e^q a^r \\ & = & a^r \in H \end{array}$$

بنابراین $H = < a >$.

ب) اگر اعداد صحیح متمایز $j \lneqq i$ به قسمی باشند که $a^i = a^j$، آن گاه $i - j \in \mathbb{N}$ و $a^{i-j} = e$، که با $o(a) = \infty$ تناقض دارد.

ج) چون G متناهی است، پس $o(a)$ متناهی می‌باشد و بنابر گزارهٔ (الف)، زیرگروه $< a >$ دارای $o(a)$ عنصر است. لذا بنابر قضیهٔ لاگرانژ، $|G|$ بر $o(a)$ بخشپذیر می‌باشد.

د) چون $a^m = e$، پس $o(a) = n$ عدد طبیعی است. حال بنابر قضیهٔ تقسیم، اعداد صحیح r و q به قسمی وجود دارند که $m = qn + r$، که در اینجا $0 \le r \lneqq n$. اگر $r \neq 0$، آن گاه،

$$\begin{aligned} e &= a^m \\ &= a^{qn+r} \\ &= (a^n)^q a^r \\ &= e^q a^r \\ &= a^r \end{aligned}$$

لذا بایستی $n = o(a) \le r$ که تناقض است. پس $r = 0$ و m بر $o(a)$ بخشپذیر می‌باشد.

هـ) واضح است که اعداد صحیح n' و m' به قسمی وجود دارند که $m = m'd$ و $n = n'd$. در این صورت،

$$\begin{aligned} (a^m)^{n'} &= (a^n)^{m'} \\ &= e^{m'} \\ &= e \end{aligned}$$

همچنین اگر برای $k \in \mathbb{N}$، $(a^m)^k = e$، آن گاه بنابر (د) و این که $(m', n') = 1$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} n|mk &\Rightarrow n'|m'k \\ &\Rightarrow n'|k \end{aligned}$$

پس $n' \le k$. بنابراین $o(a^m) = n'$.

۱۴) بنابر تمرینِ ۱۳.۱، بدیهی است.

۱۵) فرض کنیم $o(a) = n \in \mathbb{N}$. پس $a^n = e$ و،

$$\begin{aligned} (aH)^n &= a^n H \\ &= eH \\ &= H \end{aligned}$$

لذا بنابر تمرینِ ۱۳.۱، $o(aH)|o(a)$.

۱۶) اگر $|G| = 1$، حکم به انتفاء مقدم درست است. حال فرض کنیم که برای تمام گروههایی که دارای مرتبهٔ کمتر از $|G| \gneqq 1$، حکم برقرار باشد. اگر $x \in G$ به قسمی

وجود داشته باشد که $p|o(x)$، آن‌گاه $m \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود دارد که $o(x) = pm$. بنابر تمرینِ ۱۳.۱، $o(x^m) = p$ و $x^m \in G$.

حال فرض کنیم به ازای هر $x \in G$، $o(x)$ بر p بخش‌پذیر نباشد. حال گیریم $x \in G$ عضو خنثیِ G نباشد، پس بزرگترین مقسوم علیه مشترک p و $o(x)$ یک است و بنابر تمرینِ ۱۳.۱، $H =< a >$ به قسمی می‌باشد که $\frac{G}{H}$ گروهی از مرتبهٔ کمتر $|G|$ بوده و بر p بخش‌پذیر است. از این رو بنابر فرض استقراء $aH \in \frac{G}{H}$ به قسمی وجود دارد که $o(aH) = p$. لذا بنابر تمرینِ ۱۵.۱، $m \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود دارد که $o(a) = pm$ یک تناقض است.

۱۷) الف) چون $AA^t = I_n$ و $BB^t = I_n$، پس

$$\begin{aligned} AB(AB)^t &= ABB^tA^t \\ &= AI_nA^t \\ &= AA^t \\ &= I_n \end{aligned}$$

و به طور مشابه $(AB)^tAB = I_n$. از این رو AB متعامد است.

ب) قرار می‌دهیم $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-۱}$. چون $I_n = AA^t = -A^۲$، پس بنابر تمرین ۴.۱، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} BB^t &= (I_n - A)(I_n + A)^{-۱}((I_n + A)^{-۱})^t(I_n - A)^t \\ &= (I_n - A)(I_n + A)^{-۱}((I_n + A)^t)^{-۱}(I_n - A^t) \\ &= (I_n - A)(I_n + A)^{-۱}((I_n + A^t)^{-۱}(I_n + A) \\ &= (I_n - A)(I_n + A)^{-۱}((I_n - A)^{-۱}(I_n + A) \\ &= (I_n - A)[(I_n - A)(I_n + A)]^{-۱}(I_n + A) \\ &= (I_n - A)(I_n - A^۲)^{-۱}(I_n + A) \\ &= (I_n - A)(۲I_n)^{-۱}(I_n + A) \\ &= \tfrac{۱}{۲}(I_n - A)I_n(I_n + A) \\ &= \tfrac{۱}{۲}(I_n - A^۲) \\ &= I_n \end{aligned}$$

از این رو B متعامد است.

۱۸) بنابر تمرینات ۳.۱ و ۴.۱، بدیهی است.

۱۹) فرض کنیم $1 \leq i \neq j \leq n$. لذا $tr(E_{ij}) = 0$ و $tr(E_{ii} - E_{jj}) = 0$. از این رو بنابر فرض و تمرینِ ۱۰.۱، خواهیم داشت:

$$a_{ij} = tr(E_{ij}A) = 0$$

و

$$\begin{aligned} a_{ii} - a_{jj} &= tr(E_{ii}A) - tr(E_{jj}A) \\ &= tr((E_{ii} - E_{jj})A) \\ &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین $a_{ij} = 0$ و $a_{ii} = a_{jj}$ و در نتیجه $A = a_{11}I_n$.

۲۰) فرض کنیم F یک میدان با مشخصهٔ ناصفر p باشد. اگر $2 \leq n, m \leq p - 1$ به قسمی باشند که $p = nm$، آن گاه

$$\begin{aligned} (n1)(m1) &= (nm)1 \\ &= p1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

پس بنابر خواص میدان F، $n1 = 0$ یا $m1 = 0$. لذا بنابر تعریف مشخصهٔ یک میدان، $p \leq n$ یا $p \leq m$ که با $2 \leq n, m \leq p - 1$ مغایرت دارد. پس p عددی اوّل است.

۲۱) چون $a \neq 0$ و $(n1)a = na = 0$، بنابر خواص میدان بایستی $n1 = 0$ و در نتیجه بنابر تعریف مشخصهٔ میدان، $p = char(F)$ ناصفر است. چون p کوچکترین عدد طبیعی است که $p1 = 0$، پس در گروه $(F, +)$، $o(1)$ برابر با p است. از آنجا که $n1 = 0$، بنابر تمرینِ ۱۳.۱، n بر p بخشپذیر می‌باشد.

۲۲) چون F میدان متناهی است، بنابر تمرینِ ۲۰.۱، $p = char(F)$ عددی اوّل می‌باشد. از طرفی p کوچکترین عدد طبیعی بوده که $p1 = 0$، پس در گروه $(F, +)$، $o(1)$ برابر با p است. حال فرض کنیم q عدد اوّلی باشد که $|F|$ بر q بخشپذیر است. بنابر تمرینِ ۱۶.۱، گروه $(F, +)$ دارای عنصری چون $a \neq 0$ بوده به طوری که $o(a) = q$. لذا $qa = 0$ و از تمرینِ ۱۳.۱، نتیجه می‌شود که $p|q$. از این رو $p = q$. بنابراین $|F|$ فقط دارای عامل اوّل p است و $n \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود دارد که $|F| = p^n$.

۲۳) الف) با توجّه به فرض $1 + 1 = 0$ = $2(1_F)$، پس بنابر تعریف مشخصه، لازم می آید که $char(F) = 2$.

ب) چون $char(F) = ۲$، پس برای هر $a \in F$، $۲a = ۲(۱_F)a = \circ a = \circ$، یعنی؛ $a = -a$.

۲۴) الف) چون $char(F) \neq ۲$، پس $a = ۱ + ۱ \neq \circ$. از این رو،

$$\begin{aligned} A(a^{-۱}A + I_n) &= (a^{-۱}A + I_n)A \\ &= I_n \end{aligned}$$

و در نتیجه $A^{-۱} = a^{-۱}A + I_n$.

ب) فرض کنیم $C = I_n + B(I_n - AB)^{-۱}A$. پس،

$$\begin{aligned} (I_n - BA)C &= I_n + B(I_n - AB)^{-۱}A - BA - BAB(I_n - AB)^{-۱}A \\ &= I_n - BA + B(I_n - AB)(I_n - AB)^{-۱}A \\ &= I_n - BA + BI_nA \\ &= I_n \end{aligned}$$

و به طور مشابه $C(I_n - BA) = I_n$. از این رو $C = (I_n - BA)^{-۱}$.

۲۵) قرار می‌دهیم:

$$H = \{a_\circ + a_۱x + \cdots + a_{n-۱}x^{n-۱} + I : a_\circ, a_۱, \ldots, a_{n-۱} \in F\}$$

واضح است که $H \subseteq \frac{F[x]}{I}$. حال فرض کنیم $g(x) + I \in \frac{F[x]}{I}$. بنابر قضیهٔ تقسیم در $F[x]$، چندجمله‌ایهای $q(x), r(x) \in F[x]$ به قسمی وجود دارند که $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$، که در اینجا $r(x) = \circ$ یا $\deg(r) \lneqq \deg(f)$. بنابر خواص همدسته‌ها، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} g(x) + I &= q(x)f(x) + r(x) + I \\ &= (q(x)f(x) + I) + (r(x) + I) \\ &= I + (r(x) + I) \\ &= r(x) + I \end{aligned}$$

پس $H \subseteq \frac{F[x]}{I}$ و در نتیجه $\frac{F[x]}{I} = H$.

۲.A تمرینات فصل دوّم

۱) با اعمال سطری $R_۴ \to R_۴ + R_۱$، $R_۵ \to R_۵ - R_۴ + R_۳ + R_۲ + R_۱$، و $R_۳ \leftrightarrow R_۲$ بر ماتریس A به ماتریس،

$$B_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۳ & ۰ & ۵ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۴ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۳ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

می‌رسیم و با اعمال سطری $R_۱ \to R_۲ - R_۱$، و $R_۴ \to R_۲ - R_۴$ بر ماتریس $B_۱$ به ماتریس،

$$B_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۴ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

می‌رسیم و با اعمال سطری $\frac{۱}{۲}R_۲$، و $R_۴ \to R_۴ - R_۳$ بر ماتریس $B_۲$ به ماتریس،

$$B_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۴ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

می‌رسیم و با اعمال سطری $R_۳ \to R_۴ - R_۳$، $\frac{۱}{۴}R_۴$، و $R_۲ \to R_۲ + R_۴\frac{۳}{۸}-$ بر ماتریس $B_۳$ به ماتریس زیر که تحویل شده سطری پلکانی بوده و هم ارز سطری ماتریس A است، می‌رسیم.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۸} \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲)

۳)

۴)

۵)

۶)

۷) الف) اگر E ماتریس مقدماتی سطری نوع دوم باشد، آن گاه بنابر قضیهٔ ۲.۲، $EE = I_n$ و $E^t = E$. از این رو E متعامد است. اگر A ماتریس جایگشتی باشد، آن گاه ماتریس‌های مقدماتی سطری نوع دوم $E_1, \ldots, E_k \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارند که $A = E_1E_2\cdots E_kI_n$. لذا $AA^t = I_n$ و در نتیجه A متعامد است.

ب) فرض کنیم $i, j, r, s \in \mathbb{N}_n$ چهار عدد متمایز باشند. اگر E_1 و E_2 ماتریس‌های مقدماتی سطری نوع دوم به ترتیب از تعویض سطر i با سطر j و از تعویض سطر r با سطر s ماتریس همانی به دست آمده باشند، آن گاه $E_1E_2 = E_2E_1$. حال اگر A ماتریس مورد نظر گزاره باشد و برای هر $k \in \mathbb{N}_{\frac{n}{2}}$، E_k از تعویض سطر $2k-1$ با سطر $2k$ ماتریس همانی به دست آمده باشد، آن گاه $A = E_1E_2\cdots E_{\frac{n}{2}}I_n$. حال با توجّه به توضیحات داده شده، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{rcl} AA & = & E_1E_2\cdots E_{\frac{n}{2}}E_1E_2\cdots E_{\frac{n}{2}} \\ & = & E_1E_1E_2E_2\cdots E_{\frac{n}{2}}E_{\frac{n}{2}} \\ & = & I_nI_n\cdots I_n \\ & = & I_n \end{array}$$

پس بنابر قضیهٔ ۱۰.۲، $A^{-1} = A$.

۸)

۹)

۱۰) می‌دانیم که اگر $R = (r_{ij})$ آن گاه:

برای هر $i \in \mathbb{N}_t$، $a_{jk_i} = \delta_{ji}$.

برای هر $i \in \mathbb{N}_t$، اگر $j \lneq k_i$، $a_{ij} = 0$.

حال برای هر $i \in \mathbb{N}_t$، مؤلفهٔ k_i سمت چپ و راست،

$$x = a_1R_1 + a_2R_2 + \cdots + a_tR_t$$

برابر است و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x_{k_i} &= a_۱ r_{۱k_i} + \cdots + a_t r_{tk_i} \\ &= a_۱ \delta_{۱i} + \cdots + a_t \delta_{ti} \\ &= a_i \end{aligned}$$

(۱۱)

۱۲) الف) چون $AB = ۰$، پس برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $AB^{(i)} = ۰$ و از آنجا که A معکوس‌پذیر است، لازم می‌آید که $B^{(i)} = ۰$. بنابراین $B = ۰$.

ب) چون A معکوس‌پذیر نیست، پس بنابر قضیهٔ ۹.۲، $۰ \neq X \in F^{n\times ۱}$ به قسمی وجود دارد که $AX = ۰$. پس اگر $B \in F^{n\times n}$ ماتریسی باشد که تمام ستون‌های آن برابر ماتریس X است، آن گاه $B \neq ۰$ و $AB = ۰$.

۱۳) چون $m \gneqq n$، بنابر قضیهٔ ۸.۲، $۰ \neq X \in F^{m\times ۱}$ به قسمی وجود دارد که $BX = ۰$ و در نتیجه $ABX = ۰$. پس بنابر قضیهٔ ۹.۲، AB معکوس‌پذیر نیست.

۱۴) چون A پوچتوان است، پس $k \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود دارد که $A^k = ۰$. همچنین واضح است که،

$$\begin{aligned} I_n &= I_n - A^k \\ &= (I_n - A)(I_n + A + A^۲ + \cdots + A^{k-۱}) \end{aligned}$$

و،

$$(I_n + A + A^۲ + \cdots + A^{k-۱})(I_n - A) = I_n$$

پس $I_n - A$ معکوس‌پذیر است.

۱۵) واضح است که برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$،

$$a_{ij} = \int_۰^۱ x^{i+j-۲}$$

فرض کنیم $\circ \neq Y = \begin{bmatrix} y_{۱} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times ۱}$ و $f(x) = \sum_{i=۱}^n y_i x^i$. بدیهی است که f تابع ناصفر و پیوسته روی بازهٔ $[\circ, ۱]$ می‌باشد. از این رو،

$$f^{۲}(x) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}_n} y_i y_j x^{i+j-۲}$$

و،

$$\begin{array}{rcl} \circ \lneqq \int_{\circ}^{۱} f^{۲}(x) & = & \int_{\circ}^{۱} (\sum_{i,j\in\mathbb{N}_n} y_i y_j x^{i+j-۲}) \\ & = & \sum_{i,j\in\mathbb{N}_n} y_i y_j \int_{\circ}^{۱} x^{i+j-۲} \\ & = & \sum_{i=۱}^n \sum_{j=۱}^n y_i y_j a_{ij} \\ & = & \sum_{i=۱}^n y_i (\sum_{j=۱}^n y_j a_{ij}) \end{array}$$

بنابراین تنها درایهٔ $Y^t AY$، یعنی؛

$$\sum_{i=۱}^n y_i (\sum_{j=۱}^n y_j a_{ij})$$

مخالف صفر می‌باشد، پس $Y^t AY \neq \circ$. حال اگر A معکوس‌پذیر نباشد، بنابر قضیهٔ ۹.۲، $\circ \neq Y \in \mathbb{R}^{n\times ۱}$ به قسمی وجود دارد که $AY = \circ$ و در نتیجه $Y^t AY = \circ$ که یک تناقض می‌باشد.

۱۶) چون A دارای n سطر است، پس بنابر قضیهٔ ۱۵.۲، حکم بدیهی است.

۱۷) اگر n عدد فرد باشد، $(-۱)^n = -۱$ و با توجّه به تمرین قبل خواهیم داشت،

$$|A| = |A^t| = |-A| = (-۱)^n |A| = -|A|$$

و چون $char(F) = \circ$، پس $|A| = \circ$.

۱۸) الف) اگر $\det(A) \neq \circ$، بنابر قضیهٔ ۱۷.۲، A معکوس پذیر است و در نتیجه $A = I_n$ که با فرض مغایرت دارد.

ب) چون،

$$\begin{array}{rcl} (I_n - \lambda A)(I_n + \frac{\lambda}{۱-\lambda} A) & = & I_n \\ & = & (I_n + \frac{\lambda}{۱-\lambda} A)(I_n - \lambda A) \end{array}$$

بنابراین حکم برقرار است.

۱۹) الف) با توجّه به $(\star)$ و تعریف چندجمله‌ای مشخصه واضح است.

ب) با استقراء روی n اثبات می‌کنیم. اگر $n \in \mathbb{N}_۲$، به راحتی اثبات می‌شود. حال فرض کنیم $۳ \leq n \in \mathbb{N}$ و حکم برای کمتر از n برقرار باشد. دترمینان $B = xI_n - A$ را بر حسب سطر اوّل بسط می‌دهیم. در این صورت برای هر $۲ \leq j \leq n$، متغیر x حداکثر در $n - ۲$ درایهٔ $B(۱|j)$ ظاهر می‌شود. از این رو $b_{۱j}(-۱)^{۱+j}|B(۱|j)|$ یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه $n - ۲$ می‌باشد. پس ضریب $x^{n-۱}$ در $\chi_A(x)$ برابر است با ضریب $x^{n-۱}$ در،

$$b_{۱۱}(-۱)^{۱+۱}|B(۱|۱)| = x|B(۱|۱)| - a_{۱۱}|B(۱|۱)| \qquad (\star\star)$$

است. واضح است ضریب $x^{n-۱}$ در $\chi_{A(۱|۱)}(x) = |B(۱|۱)|$، با توجه به تکین بودن چندجمله‌ای مشخصه، ۱ است و با توجّه به فرض استقراء ضریب $x^{n-۲}$ در $|B(۱|۱)|$ برابر با قرینهٔ

$$tr(A(۱|۱)) = \sum_{i=۲}^{n} a_{ii}$$

می‌باشد. لذا بنابر $(\star\star)$، قرینهٔ ضریب $x^{n-۱}$ در $\chi_A(x)$ برابر با $tr(A)$ است. و از $(\star)$ نتیجه می‌شود که،

$$tr(A) = c_۱d_۱ + \cdots + c_kd_k$$

ج) بنابر قضایای ۱۸.۲ و ۲۰.۲،

$$\begin{aligned} \det(xI_n - A^{-۱}) &= \det(-xA^{-۱}(\tfrac{۱}{x}I_n - A)) \\ &= \det(-xA^{-۱})\det(\tfrac{۱}{x}I_n - A) \\ &= \tfrac{۱}{\det(A)}(-x)^n\chi_A(\tfrac{۱}{x}) \end{aligned}$$

د) فرض کنیم،

$$\chi_A(x) = x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱x + a_۰$$

در این صورت $\det(A) = (-۱)^n a_۰ \neq ۰$ و،

$$\begin{aligned} \det(xI_n - A^{-۱}) &= \tfrac{۱}{(-۱)^n a_۰}(-۱)^n x^n(\tfrac{۱}{x^n} + a_{n-۱}\tfrac{۱}{x^{n-۱}} + \cdots + a_۱\tfrac{۱}{x} + a_۰) \\ &= \tfrac{۱}{a_۰} + \tfrac{a_{n-۱}}{a_۰}x + \cdots + \tfrac{a_۱}{a_۰}x^{n-۱} + x^n \end{aligned}$$

لذا بنابر گزارهٔ (ج)،

$$\begin{array}{rcl} tr(A^{-1}) & = & -\frac{a_1}{a_0} \\ & = & (-1)^{n+1}\frac{a_1}{\det(A)} \end{array}$$

۲۰) چون $\det(\lambda_1 I_n - A) = \det((\lambda_1+\lambda_2)I_n - (\lambda_2 I_n + A))$، پس حکم برقرار می‌باشد.

۲۱) فرض کنیم $\chi_A(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. بنابر تمرینِ ۱۹.۲، $\chi_A(x) = x^3 - 1$. پس از $\chi_A(A) = 0$ نتیجه می‌شود که $A^3 = I_3$.

۲۲) ب) فرض کنیم $A, B \in F^{n\times n}$ دو ماتریس متشابه باشند. پس ماتریس معکوس‌پذیر $P \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارد که $B = P^{-1}AP$. بنابر قضایای ۱۸.۲ و ۲۰.۲، خواهیم داشت،

$$\begin{array}{rcl} \chi_B(x) & = & \det(xI_n - P^{-1}AP) \\ & = & \det(P^{-1}(xI_n - A)P) \\ & = & \det(P^{-1})\det(xI_n - A)\det(P) \\ & = & \det(P^{-1})\det(P)\det(xI_n - A) \\ & = & \chi_A(x) \end{array}$$

۲۳) فرض کنیم $\chi_A(x) = x^2 + ax + b$. بنابر تمرینِ ۱۹.۲، $tr(A) = -a$ و $\det(A) = b$. از این رو،

$$\begin{array}{rcl} tr(A) = 0 & \Leftrightarrow & \chi_A(x) = x^2 + \det(A) \\ & \Leftrightarrow & \chi_A(1) = 1 + \det(A) \end{array}$$

۲۴) چون A ماتریس متعامد است، پس بنابر قضیهٔ ۱۸.۲،

$$1 = |I_n| = |AA^t| = |A||A^t| = |A|^2$$

و در نتیجه $\det(A) = \pm 1$. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$، آن گاه A یک ماتریس متعامد است و $\det(A) = -1$.

۲۵) اگر $n = 2$، به راحتی اثبات می‌شود. حال فرض کنیم $3 \leq n \in \mathbb{N}$ و حکم برای کمتر از n برقرار باشد. با توجّه به راهنمایی مسئله و قضیهٔ ۱۵.۲، خواهیم داشت:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

اگر بر حسب سطر اوّل دترمینان را بسط دهیم، خواهیم داشت:

$$V_n = (x_n - x_1)\cdots(x_2 - x_1)V_{n-1}$$

لذا بنابر فرض استقراء $V_n = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$.

۲۶) چون $\phi = fg' - f'g$، پس،

$$\begin{array}{rcl} \phi' & = & (f'g' + fg'') - (f'g' + f''g) \\ & = & fg'' - f''g \\ & = & \begin{vmatrix} f & g \\ f'' & g'' \end{vmatrix} \end{array}$$

۲۷) اگر عمل $R_i - R_1 \to R_i$ برای $2 \leq i \leq 4$ انجام دهیم بنابر قضیهٔ ۱۵.۲، دترمینان برابر خواهد بود با،

$$\det \begin{bmatrix} x & y & y & y \\ y-x & x-y & 0 & 0 \\ y-x & 0 & x-y & 0 \\ y-x & 0 & 0 & x-y \end{bmatrix}$$

حال چنانچه ستونهای دوّم، سوّم، و چهارم را به ستون اوّل اضافه کنیم، بنابر قضیهٔ ۱۵.۲، دترمینان برابر خواهد بود با،

$$\det \begin{bmatrix} x+3y & y & y & y \\ 0 & x-y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-y \end{bmatrix} = (x+3y)(x-y)^3$$

۲۸) اگر $n = 2$، به راحتی اثبات می‌شود. حال فرض کنیم $3 \leq n \in \mathbb{N}$ و حکم برای کمتر از n برقرار باشد. گیریم $B = xI_n - A$. در این صورت $B(1|n)$ یک ماتریس بالا مثلثی است که درایه‌های روی قطر آن برابر با -1 می‌باشد، لذا $|B(1|n)| = (-1)^{n-1}$. همچنین $\det(B(1|1)) = \chi_{A(1|1)}(x)$ در شرایط فرض استقراء صدق می‌کند. بنابراین،

$$\begin{array}{rcl} \chi_A(x) & = & x(-1)^2 \det(B(1|1)) + a_0(-1)^{n+1}\det(B(1|n)) \\ & = & x(x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-1} + \cdots + a_1) + a_0(-1)^{2n} \\ & = & x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

۲۹)

۳۰) الف) واضح است که برای هر $i,j \in \mathbb{N}_n$، بنابر قضیهٔ ۱۴.۲، $|A^t(j|i)| = |A(i|j)|$.
از طرفی چون ماتریس الحاقی ترانهادهٔ ماتریس همسازه می‌باشد، پس برای هر $i,j \in \mathbb{N}_n$، درایهٔ موقعیت (i,j)ام ماتریس $(adj(A))^t$ برابر با $(-1)^{i+j}|A(i|j)|$ و همچنین درایهٔ موقعیت (i,j)ام ماتریس $adj(A^t)$ برابر با $(-1)^{i+j}|A^t(j|i)|$ است.
بنابراین $(adj(A))^t = adj(A^t)$.

ب) با توجّه به قضیهٔ ۱۷.۲، بدیهی است.

ج) بنابر قضایای ۱۸.۲ و ۱۹.۲،

$$\begin{aligned} |A||adj(A)| &= |A\ adj(A)| \\ &= ||A|I_n| \\ &= |A|^n|I_n| \\ &= |A|^n \end{aligned}$$

و با توجّه به قضیهٔ ۱۷.۲، $|A| \neq 0$. پس،

$$|adj(A)| = |A|^{n-1}$$

د) بنابر قضیهٔ ۱۹.۲، داریم:

$$\begin{gathered} adj(A)\ A = A\ adj(A) = |A|I_n \\ adj(B)\ A = B\ adj(B) = |B|I_n \\ adj(AB)\ AB = AB\ adj(AB) = |AB|I_n \end{gathered}$$

از این رو بنابر قضیهٔ ۱۸.۲،

$$\begin{aligned} AB\ adj(B)adj(A) &= A(B\ adj(B))adj(A) \\ &= A(|B|I_n)adj(A) \\ &= |B|(A\ adj(A)) \\ &= |B||A|I_n \\ &= |BA|I_n \end{aligned}$$

و به طور مشابه:

$$adj(B)adj(A)\ AB = |BA|I_n$$

بنابراین:

$$adj(AB) = adj(B)adj(A)$$

ه) بنابر گزارهٔ (ب) و قضیهٔ ۱۷.۲، $|A| = 0$ اگر و تنها اگر A معکوس‌پذیر نباشد اگر و تنها اگر $adj(A)$ معکوس‌پذیر نباشد اگر و تنها اگر $adj(adj(A))$ معکوس‌پذیر نباشد اگر و تنها اگر

$$|adj(adj(A))| = 0$$

حال فرض کنیم $|A| \neq 0$. بنابر گزارهٔ (ج)،

$$\begin{aligned} |adj(adj(A))| &= |adj(A)|^{n-1} \\ &= (|A|^{n-1})^{n-1} \\ &= |A|^{(n-1)^2} \end{aligned}$$

A.۳ تمرینات فصل سوّم

۱) فضای برداری نیست، زیرا اگر $e = (e_1, e_2)$ عضو خنثیٰ آن باشد، آن گاه

$$(1,1) + e = (1 + e_1, 0) \neq (1,1)$$

که با تعریف عضو خنثیٰ مغایرت دارد.

۲) چون ماتریس ضرایب دستگاه هم‌ارز سطری،

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{23}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

می‌باشد. پس،

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{13}{2}x_5 \\ x_2 &= -x_4 + \frac{23}{3}x_5 \\ x_3 &= -4x_5 \end{cases}$$

از این رو،

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_4(1, -1, 0, 1, 0) + x_5(\frac{13}{2}, \frac{23}{3}, -4, 0, 1)$$

و W توسط $\{(1, -1, 0, 1, 0), (\frac{13}{2}, \frac{23}{3}, -4, 0, 1)\}$ تولید می‌شود.

۳) بنابر فرض $W \in \mathcal{F}$ وجود دارد. لذا $\circ \in W$ و درنتیجه $\circ \in \bigcup \mathcal{F}$. پس $\bigcup \mathcal{F} \neq \emptyset$. حال فرض کنیم $\alpha, \beta \in \bigcup \mathcal{F}$ و $r \in F$. بنابراین $W_1, W_2 \in \mathcal{F}$ به قسمی وجود دارند که $\alpha \in W_1$ و $\beta \in W_2$. بنابر فرض از کلیت مسئله کاسته نمی‌شود چنانچه فرض کنیم $W_1 \subseteq W_2$ و درنتیجه $\alpha, \beta \in W_2$. چون W_2 زیرفضای برداری V روی هیأت F است، پس $r\alpha + \beta \in W_2$. از این رو $r\alpha + \beta \in \bigcup \mathcal{F}$. بنابر قضیهٔ ۳.۳، $\bigcup \mathcal{F}$ زیرفضای برداری V است.

۴) فرض کنیم $W_2 \not\subseteq W_1$ و $W_1 \not\subseteq W_2$. لذا $\alpha, \beta \in V$ به قسمی وجود دارند که $\alpha \in W_1 \setminus W_2$ و $\beta \in W_2 \setminus W_1$. پس بنابر فرض $\alpha + \beta \in W_1 \cup W_2$. اگر $\alpha + \beta \in W_1$، آن گاه $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha \in W_1$ که تناقض است و به طور مشابه از $\alpha + \beta \in W_2$ نتیجه می‌شود که $\alpha \in W_2$ که تناقض می‌باشد. لذا $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$.

۵) الف) تابع ثابت صفر متعلق به V_e و V_o می‌باشد، پس V_e و V_o ناتهی هستند. حال فرض کنیم $f, g \in V_e$، و $r \in \mathbb{R}$ باشند. در این صورت برای هر $x \in \mathbb{R}$، خواهیم داشت،

$$\begin{aligned}(rf+g)(-x) &= (rf)(-x) + g(-x) \\ &= rf(-x) + g(-x) \\ &= rf(x) + g(x) \\ &= (rf)(x) + g(x) \\ &= (rf+g)(x)\end{aligned}$$

از این رو $rf + g \in V_e$. لذا بنابر قضیهٔ ۳.۳، V_e زیرفضای V روی هیأت $\mathbb{R}$ است و به طور مشابه V_o نیز چنین می‌باشد.

ب) بنابر تعریف مجموع زیرفضاها، $V_e + V_o \subseteq V$. حال فرض کنیم $f \in V$. چون $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \in V_e$ و $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \in V_o$، پس $f = h + g \in V_e + V_o$. لذا $V = V_e + V_o$. از آنجا که تنها تابع زوج و فرد، تابع ثابت صفر است، لازم می‌آید که $V_e \cap V_o = (\circ)$ و در نتیجه $V = V_e \oplus V_o$.

٦) الف) چون $y \in Span(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, z)$، اسکالرهای $c_1, \ldots, c_n, c \in F$ به قسمی وجود دارند که،

$$y = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n + cz$$

بنابر فرض، $y \notin Span(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$، پس بایستی $c \neq 0$ و در نتیجه،

$$z = c^{-1}y - c^{-1}(c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n)$$

و $z \in Span(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, y)$.

۷) فرض کنیم $A \in Span(\mathcal{A})$. پس اسکالرهای $x_1, \ldots, x_n \in F$ و $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ به قسمی وجود دارند که،

$$A = x_1A_1 + \cdots + x_nA_n$$

حال بنابر تمرینِ ۱.۱۰،

$$tr(A) = x_1tr(A_1) + \cdots + x_ntr(A_n) = 0$$

لذا اثر هر عضو متعلق به $Span(\mathcal{A})$، صفراست. از این رو $E_{11} \in F^{n\times n} \setminus Span(\mathcal{A})$ و حکم برقرار می‌باشد.

۸) چون بنابر تمرینِ ۱.۱۰، اثر هر عضو $\mathcal{A}$ صفراست، پس مشابه تمرینِ ۳.۷، حکم برقرار می‌باشد.

۹) می‌دانیم برای هر $A \subseteq F[x]$، $Span(A) = Span(A \setminus \{0\})$. از این رو می‌توانیم فرض کنیم که برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $p_(x) \neq 0$ و قرار می‌دهیم:

$$m = \max\{\deg(p_i) : i \in \mathbb{N}_n\}$$

بنابر قضیهٔ ۱.۱۳، هر عضو $Span(P_1(x), \ldots, P_n(x))$ یا صفر است یا حداکثر از درجهٔ m می‌باشد. لذا حکم برقرار است.

۱۰) فرض کنیم α و β دو بردار وابستهٔ خطی فضای برداری V روی هیأت F باشند. پس $x_1, x_2 \in F$ به قسمی وجود دارند که $x_1\alpha + x_2\beta = 0$ و حداقل یکی از x_iها ناصفر است. فرض کنیم x_1 ناصفر باشد. لذا $\alpha = x_1^{-1}x_2\beta$.

۱۱) فرض کنیم $a, b, c \in \mathbb{R}$ به قسمی باشند که،

$$a(1, 2, 3) + b(4, 5, 6) + c(x, y, z) = 0$$

پس،

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & x \\ ۲ & ۵ & y \\ ۳ & ۶ & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = ۰ \qquad (\star)$$

حال مجموعهٔ مذکور مستقل خطی است، اگر و تنها اگر دستگاه $(\star)$ دارای جواب بدیهی باشد. پس بنابر قضایای ۹.۲ و ۱۷.۲، دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه $(\star)$ بایستی صفر باشد، یعنی؛

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۴ & x \\ ۲ & ۵ & y \\ ۳ & ۶ & z \end{vmatrix} = -۳(x - ۲y + z) = ۰$$

بنابراین $x, y, z \in \mathbb{R}$ بایستی در شرط $x - ۲y + z = ۰$ صدق کنند.

۱۲) فرض کنیم $(a, b, c, d) \in Span(\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳, \alpha_۴)$. پس $x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \in \mathbb{R}$ به قسمی وجود دارند که،

$$x_۱\alpha_۱ + x_۲\alpha_۲ + x_۳\alpha_۳ + x_۴\alpha_۴ = (a, b, c, d)$$

در این صورت،

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & -۵ & -۴ & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۰ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \qquad (\star)$$

ماتریس افزوده دستگاه $(\star)$ هم‌ارز سطری با،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۰ & \frac{۱}{۳} & \frac{۴}{۳} & \frac{۱}{۳}a + \frac{۲}{۳}b \\ ۰ & ۱ & \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}(a-b) \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & a - ۳b + c \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۲a - ۲b + d \end{array}\right]$$

است. بنابراین $a - ۳b + c = ۰$ و $-۲a - ۲b + d = ۰$. لذا $a = -\frac{۱}{۴}c + \frac{۳}{۸}d$ و $b = \frac{۱}{۴}c + \frac{۱}{۸}d$. پس،

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &= (-\tfrac{۱}{۴}c + \tfrac{۳}{۸}d, \tfrac{۱}{۴}c + \tfrac{۱}{۸}d, c, d) \\ &= c(-\tfrac{۱}{۴}, \tfrac{۱}{۴}, ۱, ۰) + d(\tfrac{۳}{۸}, \tfrac{۱}{۸}, ۰, ۱) \end{aligned}$$

از این رو $\{(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0), (\frac{3}{8}, \frac{1}{8}, 0, 1)\}$ پایه‌ای برای $Span(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ می‌باشد و $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ مستقل خطی نبوده و پایه‌برای $\mathbb{R}^4$ نیست.

۱۳) مجموعه،

$$\{E_{11}, E_{11} + E_{12}, E_{21} + E_{22}, E_{22}\} \subseteq F^{2\times 2}$$

در شرایط خواسته شده صدق می‌کند.

۱۴) ماتریس ضرایب دستگاه هم‌ارز سطری ماتریس زیر است.

$$\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} & 0 & \overline{1} \\ 0 & 0 & \overline{1} & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموعهٔ $\{(\overline{9}, \overline{1}, 0, 0)^t, (\overline{1}, 0, 0, \overline{1})^t\}$ تشکیل پایه یک برای فضای جواب دستگاه روی هیأت $\mathbb{Z}_{11}$ می‌دهد.

۱۵) الف) فرض کنیم $(a, b, c, d) \in V$. پس $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ به قسمی وجود دارند که،

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = (a, b, c, d)$$

در این صورت،

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

ماتریس افزوده دستگاه $(\star)$ هم‌ارز سطری با،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 & b - d \\ 0 & 0 & -3 & a - 4b + 3d \\ 0 & 0 & 0 & 3a - 14b + c + 13d \end{array}\right] \qquad (\star)$$

بنابراین $(a, b, c, d) \in V$ اگر و تنها اگر $3a - 14b + c + 13d = 0$. از این رو $\alpha \in V$ و $\beta, \gamma \notin V$.

ب) با توجّه به محاسبات قسمت (الف)، $\dim(V) = ۳$ و چون $\beta \notin V$، پس بنابر قضیهٔ ۱۰.۳، $\{\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳, \beta\}$ مستقل خطی است و از آنجا که $\dim \mathbb{R}^۴ = ۴$، لازم می آید که $\dim(V + W) = ۴$. به سادگی دیده می‌شود که ماتریس $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ هم ارز سطری ماتریس سطری پلکانی،

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -\frac{۱۳}{۵} & \frac{۱۷}{۵} \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱۳}{۵} & \frac{۱۲}{۵} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

پس $\dim(W) = ۲$ و بنابر قضیهٔ ۲۰.۳، $\dim(V \cap W) = ۱$.

۱۶) ماتریس A هم ارز سطری با ماتریس سطری پلکانی،

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

می‌باشد. پس بنابر قضیهٔ ۲۳.۳، $\{(-۲, ۱, ۰, ۰, ۰)^t, (-۳, ۰, -۲, ۱, ۰)^t\}$ پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه همگن است.

۱۷) فرض کنیم $i \in \mathbb{N}_n$ و $x_i = ۰$. در این صورت،

$$x_۱\alpha_۱ + \ldots + x_{i-۱}\alpha_{i-۱} - \beta + x_{i+۱}\alpha_{i+۱} + \ldots + x_n\alpha_n = ۰$$

در نتیجه $\mathfrak{B}_i$ مستقل خطی نیست. پس شرط لازم و کافی برای این که هر $\mathfrak{B}_i$ مستقل خطی باشد، آن است که هر x_i ناصفر باشد.

۱۸) به طور کلی اگر $\mathfrak{B} = \{\alpha_۱, \ldots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای فضای برداری V روی هیات F باشد، آن گاه هر زیرمجموعهٔ n عضوی $\mathfrak{B}_۱ = \{\alpha_۱, \ldots, \alpha_n, \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i\}$، پایه‌ای برای V باشد. فرض کنیم $k \in \mathbb{N}_n$ و اسکالرهایی در F به قسمی وجود داشته باشند که،

$$\sum_{k \neq i \in \mathbb{N}_n} x_i\alpha_i + x \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i = ۰$$

بنابراین،

$$x\alpha_k + \sum_{k \neq i \in \mathbb{N}_n} (x_i + x)\alpha_i = ۰$$

چون $\mathfrak{B}$ پایه است $x = ۰$ و در نتیجه برای هر $k \neq i \in \mathbb{N}_n$، $x_i = ۰$. از این رو $\mathfrak{B}_۱$ مستقل خطی است و چون $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{B}_۱|$، پس بنابر قضیهٔ ۱۶.۳، $\mathfrak{B}_۱$ یک پایه است.

۱۹) الف) فرض کنیم $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $y = (y_۱, \ldots, _n)$ متعلق به F^n باشند. لذا واضح است که $\theta(x_۱, \ldots, x_n) = \sum_{i=۱}^n x_i\alpha_i \in V$ و از خوش‌تعریفی ضرب اسکالر و مستقل خطی بودنِ $\mathfrak{B}$ نتیجه می‌شود که،

$$\begin{array}{rcl} x = y & \Leftrightarrow & \forall i \in \mathbb{N}_n \, (x_i = y_i) \\ & \Leftrightarrow & \forall i \in \mathbb{N}_n \, (x_i - y_i = ۰) \\ & \Leftrightarrow & \sum_{i=۱}^n (x_i - y_i)\alpha_i \\ & \Leftrightarrow & \sum_{i=۱}^n x_i\alpha_i = \sum_{i=۱}^n y_i\alpha_i \\ & \Leftrightarrow & \theta(x) = \theta(y) \end{array}$$

از این رو θ تابع یک به یک است. فرض کنیم $\alpha \in V$، پس اسکالرهای $x_۱, \ldots, x_n \in F$ به قسمی وجود دارند که $\alpha = \sum_{i=۱}^n x_i\alpha_i$ و در نتیجه $\theta(x_۱, \ldots, x_n) = \alpha$، یعنی؛ θ تابع پوشا است.

ب) بنابر گزارهٔ (الف)، واضح است.

۲۰) با توجّه به تمرینِ ۲۲.۱، عدد اوّل p و $m \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود دارند که $|F| = p^m$. حال اگر $\dim V = n$، آن گاه بنابر تمرینِ ۱۹.۳، $|V| = |F|^n = p^{nm}$.

۲۱) الف) بررسی می‌کنیم به چند طریق می‌توان $\{\alpha_۱, \ldots, \alpha_m\}$ انتخاب کرد به طوری که مستقل خطی باشد. واضح است که باید عناصر ناصفر باشند. از این رو تعداد طرق انتخاب $\alpha_۱$، بنابر تمرینِ ۱۹.۳، $q^n - ۱$ است. حال اگر $\{\alpha_۱, \ldots, \alpha_k\}$ مستقل خطی باشد، آن گاه برای این که بتوانیم $\alpha_{k+۱}$ به این مجموعه اضافه کنیم تا مستقل خطی باقی بماند، بایستی $\alpha_{k+۱} \notin Span(\alpha_۱, \ldots, \alpha_k)$. حال با توجّه به تمرینِ ۱۹.۳ و قضیهٔ ۱۰.۳، تعداد طرق انتخاب $\alpha_{k+۱}$ برابر با $q^n - q^k$ می‌باشد. لذا بنابر اصل ضرب تعداد زیرمجموعه‌های مستقل خطی m عنصری V برابر است با:

$$(q^n - ۱)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{m-۱})$$

ب) اگر W زیرفضاهای m بعدی V باشد، آن گاه هر پایهٔ W، m عنصر دارد و بنابر گزارهٔ (الف)، تعداد پایه‌های متمایز W برابر است با:

$$(q^m - 1)(q^m - q)\cdots(q^m - q^{m-1})$$

از این رو بنابر گزارهٔ (الف)، تعداد زیرفضاهای m بعدی V برابر است با:

$$\frac{(q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{m-1})}{(q^m - 1)(q^m - q)\cdots(q^m - q^{m-1})}$$

۲۲) الف) اگر $W = V$، کافی است قرار دهیم $U = (0)$. فرض کنیم $dimV = n$، $dimW = m$، و $m < n$. اگر $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ پایه‌ای برای W باشد، چون W زیرفضای V است، پس بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، می‌توان B را به پایه‌ای برای V گسترش داد. فرض می‌کنیم،

$$\mathfrak{B}' = \{\alpha_1 \ldots, \alpha_m, \ldots, \alpha_n\}$$

پایه‌ای برای V باشد، قرار می‌دهیم:

$$U = Span(\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n)$$

واضح است که،

$$\{\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n\}$$

مستقل خطی می‌باشد و در نتیجه پایه‌ای برای فضای U است. از این رو $W + U \subseteq V$. حال برای هر $x \in V$، $c_1, \cdots, c_n \in F$ به قسمی وجود دارند که،

$$x = (c_1\alpha_1 + \cdots + c_m\alpha_m) + (c_{m+1}\alpha_{m+1} + \cdots + c_n\alpha_n) \in U + W$$

پس $V = W + U$. واضح است که،

$$\dim(V) = m + (n - m) = \dim(W) + \dim(U)$$

پس بنابر قضیهٔ ۱۹.۳، $V = U \oplus W$.

۲۳) اگر $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ متناهی و برابر با n باشد، بنابر تمرینِ ۱۹.۳، $|R| = |\mathbb{Q}^n| = \aleph_0$، در حالی که $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ و این تناقض است.

۲۴) فرض کنیم $x, y, z \in F$ به قسمی باشند که،

$$x(a+b) + y(a+c) + z(b+c) = ۰$$

لذا،

$$(x+y)a + (x+z)b + (y+z)c = ۰$$

چون $\{a, b, c\}$ مستقل خطی است، پس،

$$x + y = x + z = y + z = ۰$$

و در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب هم‌ارز سطری، ماتریس سطری پلکانی زیر است،

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + z \\ x - z \\ ۲z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

چون $char(F) = ۰$، پس $x = y = z = ۰$.

۲۵) با توجّه به قضیهٔ ۳.۱۰، بدیهی است.

۲۶) فرض کنیم به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $\dim V_i = n_i$ و $\dim V = n$.

الف) واضح است که $\{n_۱, n_۲, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}_n$ و چون،

$$n_۱ \leq n_۲ \leq \cdots \leq n_i \leq \cdots \leq n$$

پس لازم می‌آید که $t \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود داشته باشد که برای هر $t \leq k$، $n_t = n_k$ و با توجّه به قضیهٔ ۳.۱۷، $V_t = V_k$.

گزارهٔ (ب) به طور مشابه اثبات می‌شود.

۲۷) الف) فرض کنیم $x_1,\dots,x_n \in F$ به قسمی باشند که،

$$x_1\alpha_1 + x_2(\alpha_1+\alpha_2) + \cdots + x_n\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$$

در نتیجه،

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)\alpha_1 + (\sum_{i=2}^{n} x_i)\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$$

چون $\mathfrak{B}$ مستقل خطی است، پس،

$$x_n = 0, x_n + x_{n+1} = 0, \dots, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

از این رو همهٔ x_iها صفرند، یعنی؛ $\mathfrak{B}_1$ مجموعه مستقل خطی است و بنابر قضیهٔ ۱۶.۳، $\mathfrak{B}_1$ پایه‌ای برای V است.

ب) فرض کنیم $x_1,\dots,x_n \in F$ به قسمی باشند که،

$$x_1\alpha_1 + x_2(\alpha_1+\alpha_2) + x_3(\alpha_1+\alpha_3) + \cdots + x_n(\alpha_1+\alpha_n) = 0$$

در نتیجه،

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$$

چون $\mathfrak{B}$ مستقل خطی است، پس،

$$x_n = 0, x_{n-1} = 0, \dots, x_2 = 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

از این رو همهٔ x_iها صفرند، یعنی؛ $\mathfrak{B}_2$ مجموعه مستقل خطی است و بنابر قضیهٔ ۱۶.۳، $\mathfrak{B}_2$ پایه‌ای برای V است.

ج) فرض کنیم $x_1,\dots,x_n \in F$ به قسمی باشند که،

$$x_1(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i) + x_2(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\delta_{2i}}\alpha_i) + \cdots + x_n(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\delta_{ni}}\alpha_i) = 0$$

در نتیجه،

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)\alpha_1 + (\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\delta_{2i}} x_i)\alpha_2 + \cdots + (\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\delta_{ni}} x_i)\alpha_n = 0$$

چون $\mathfrak{B}$ مستقل خطی است، پس،

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i & = & 0 \\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\delta_{2i}} x_i & = & 0 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\delta_{ni}} x_i & = & 0 \end{cases}$$

ماتریس ضرایب دستگاه فوق، هم‌ارز سطری ماتریس زیر است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{bmatrix}$$

چون $char(F) \neq 2$، پس $|A| = 2^{n-1} \neq 0$. لذا جواب دستگاه فقط صفر است. از این رو $\mathfrak{B}_3$ مجموعه مستقل خطی بوده و بنابر قضیهٔ ۱۶.۳، $\mathfrak{B}_3$ پایه‌ای برای V است.

۲۸) $\Leftarrow$) فرض کنیم $\{\alpha_1-\alpha, \ldots, \alpha_n-\alpha\}$ پایه‌ای برای V باشد و $\alpha = b_1\alpha_1+\cdots+b_n\alpha_n$ به قسمی باشد که $b_1 + \cdots + b_n = 1$. از این رو،

$$b_1(\alpha_1 - \alpha) + \cdots + b_n(\alpha_n - \alpha) = 0$$

و بنابر فرض $b_1 = \cdots = b_n = 0$، که با $b_1 + \cdots + b_n = 1$ مغایرت دارد.

$\Rightarrow$) فرض کنیم $x_1, \ldots, x_n \in F$ به قسمی باشند که،

$$x_1(\alpha_1 - \alpha) + x_2(\alpha_2 + \alpha) + \cdots + x_n(\alpha_n + \alpha) = 0$$

در نتیجه،

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

اگر $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$، چون $\mathfrak{B}$ پایه است، لازم می آید که،

$$x_1 = \cdots = x_n = 0$$

حال فرض کنیم $\sum_{i=1}^{n} x_i \neq 0$. برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، قرار می‌دهیم $b_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$. بنابر این $\alpha = b_1\alpha_1 + \cdots + b_n\alpha_n$ به قسمی است که $b_1 + \cdots + b_n = 1$، و این با فرض مغایرت دارد. لذا $\{\alpha_1 - \alpha, \ldots, \alpha_n - \alpha\}$ مستقل خطی است و بنابر قضیهٔ ۱۶.۳، پایه‌ای برای V می‌باشد.

۲۹) فرض کنیم $x_1, \ldots, x_n \in F$ به قسمی باشند که،

$$x_1(\alpha_1 - \alpha) + x_2(\alpha_2 - \alpha) + \cdots + x_n(\alpha_n - \alpha) = 0$$

در نتیجه،

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

اگر $\sum_{i=1}^{n} x_i \neq 0$، آن گاه $\alpha \in Span(\mathcal{B})$ که با فرض مغایرت دارد. پس $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ و چون $\mathfrak{B}$ مستقل خطی می‌باشد، لازم می آید که،

$$x_1 = \cdots = x_n = 0$$

در نتیجه $\{\alpha_1 - \alpha, \ldots, \alpha_n - \alpha\}$ مستقل خطی است.

۳۰) فرض کنیم $\dim V = n$. اگر،

$$\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$$

پایه‌ای برای W باشد، آن گاه بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in V$ به قسمی وجود دارند که،

$$\mathfrak{B}' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

پایه‌ای برای V می‌باشد. واضح است که با هر k بردار دلخواه از $\mathfrak{B}'$ یک زیرفضای k بعدی تولید می‌شود و تعداد کل حالاتی که می توان k بردار از مجموعه n عضوی $\mathfrak{B}'$ انتخاب کرد برابر است با،

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

از طرفی بنا به فرض، چون W تنها زیرفضای k بعدی V است، پس $1 = \frac{n!}{k!(n-k)!}$، یعنی؛ $k = 0$ یا $k = n$. از این رو $W = V$ یا $W = (0)$.

۳۱) فرض کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & \cdots & f_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

لزوم) اگر $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ جواب دستگاه $AX = 0$ باشد، آن‌گاه خواهیم داشت،

$$c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n = 0$$

و چون S مستقل خطی است لازم می‌آید که،

$$c_1 = \cdots = c_n = 0$$

یعنی؛ دستگاه $AX = 0$ فقط دارای جواب بدیهی صفر است. پس بنابر قضایای ۹.۲ و ۱۷.۲، $W(x) = |A| \neq 0$.

کفایت) فرض کنیم $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ به قسمی باشند که،

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i = 0$$

و حداقل یکی از c_iها ناصفر باشد. گیریم $c_i \neq 0$. پس،

$$f_i = -\sum_{i \neq j \in \mathbb{N}_n}^{n} c_i^{-1} c_j f_j$$

در نتیجه برای هر $k \in \mathbb{N}$،

$$f_i^{(k)} = -\sum_{i \neq j \in \mathbb{N}_n}^{n} c_i^{-1} c_j f_j^{(k)}$$

از این رو ستون iام ماتریس A به صورت ترکیب خطی سایر ستونها نوشته می‌شود. بنابراین $W(x) = |A| = ۰$ یک تناقض است. لذا S مستقل خطی است.

ج) برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، قرار می‌دهیم $f_i(x) = \exp(\alpha_i x)$. رونسکین f_iها برابر است با،

$$W(x) = f_۱ f_۲ \cdots f_n \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ \alpha_۱ & \alpha_۲ & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_۱^۲ & \alpha_۲^۲ & \cdots & \alpha_n^۲ \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_۱^{(n-۱)} & \alpha_۲^{(n-۱)} & \cdots & \alpha_n^{(n-۱)} \end{vmatrix}$$

بنابر تمرینِ ۲۵.۲،

$$W(x) = f_۱ f_۲ \cdots f_n \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i) \neq ۰$$

لذا حکم بنابر گزارهٔ (ب) برقرار است.

۳۲) الف) ماتریس صفر متعلق به V و W می‌باشد، پس V و W ناتهی هستند. حال فرض کنیم $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in V$، و $r \in F$ باشند و $rA + B = (c_{ij})$. لذا خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} c_{ij} &= ra_{ij} + b_{ij} \\ &= ra_{ji} + b_{ji} \\ &= c_{ji} \end{aligned}$$

از این رو $rA + B \in V$. لذا بنابر قضیهٔ ۳.۳، V زیرفضای $F^{n\times n}$ روی هیأت F است و به طور مشابه W نیز چنین می‌باشد.

ب) بنابر تعریف مجموع زیرفضاها، $V + W \subseteq F^{n\times n}$. حال فرض کنیم $A \in F^{n\times n}$. چون $B = \frac{۱}{۲}(A + A^t) \in V$ و $D = \frac{۱}{۲}(A - A^t) \in W$، پس $A = B + D \in V + W$. لذا $F^{n\times n} = V + W$. از آنجا که تنها ماتریس متقارن و پادمتقارن، ماتریس صفر است، لازم می آید که $V \cap W = (۰)$ و در نتیجه $F^{n\times n} = V \oplus W$.

ج) قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \{E_{ii} : i \in \mathbb{N}_n\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} : i,j \in \mathbb{N}_n \& i \lneqq j\} \\ \mathfrak{B}_۱ &= \{E_{ij} - E_{ji} : i,j \in \mathbb{N}_n \& i \lneqq j\} \end{aligned}$$

فرض کنیم $A = (a_{ij}) \in V$ و $B = (b_{ij}) \in W$. لذا،

$$\begin{array}{lll} A & = & \sum_{i\in\mathbb{N}_n} a_{ii}E_{ii} + \sum_{1\leq i\lneqq j\leq n} a_{ij}(E_{ij}+E_{ji}) \\ B & = & \sum_{1\leq i\lneqq j\leq n} a_{ij}(E_{ij}-E_{ji}) \end{array}$$

از این رو بنابر گزاره (الف)، $F^{n\times n} = Span(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{B}_1)$. همچنین واضح است که $|\mathfrak{B}| = \frac{1}{2}n(n+1)$، $|\mathfrak{B}_1| = \frac{1}{2}n(n-1)$، و $|\mathfrak{B}|+|\mathfrak{B}_1| = n^2 = \dim F^{n\times n}$. پس بنابر قضیهٔ ۱۶.۳، $\mathfrak{B}\cup\mathfrak{B}_1$ پایه‌ای برای $F^{n\times n}$ می‌باشد. بنابراین $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{B}_1$ مستقل خطی هستند و بنابر قضیهٔ ۱۹.۳، $\dim(V)+\dim(W) = \dim F^{n\times n}$، پس بایستی $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{B}_1$ به ترتیب پایه برای V و W باشند و نهایتاً داریم که $\dim(V) = \frac{1}{2}n(n+1)$ و $\dim(W) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

۳۳) فرض کنیم $A = E_{12} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$، پس $A^2 = 0$.

اگر $X = E_{21} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$، آن‌گاه $\{X, AX\} = \{E_{21}, E_{11}\}$ مستقل خطی است. بنابراین گزارهٔ (الف) درست نیست.

چون بعد فضا ۴ است، بنابراین گزارهٔ (ب) صحیح نیست.

فرض کنیم اسکالرهای $c_1,\ldots,c_k \in \mathbb{R}$ به قسمی باشند که،

$$c_1 A\cdots + c_k A^k = 0$$

حال با توجّه به فرض، اگر طرفین رابطهٔ فوق را در A^{k-1} ضرب کنیم، خواهیم داشت،

$$c_1A^k = c_1A^k + c_2A^{k+1}\cdots + c_kA^{k+K-1} = 0$$

و در نتیجه $c_1 = 0$. اگر طرفین رابطهٔ فوق را در A^{k-2} ضرب کنیم به طور مشابه نتیجه خواهد شد که $c_2 = 0$ و با ادامه این روند،

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

و بنابراین گزارهٔ (ج) درست نیست.

اگر $X = E_{11} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$، آن‌گاه $\{X, AX\} = \{X, 0\}$ وابستهٔ خطی است. بنابراین گزارهٔ (د) نیز صحیح نیست.

۳۴) اگر $n=1$، آن گاه $\{I_1\}$ پایه‌ای برای $F^{1\times 1}$ است که با هم عناصر جابجا می‌شود. حال فرض کنیم $n\geq 2$ و عناصر پایهٔ $\mathfrak{B}=\{A_j\}_{j\in J}$ با هم جابجا شوند. در این صورت همهٔ عناصر $F^{n\times n}$ با هم جابجا می‌شوند. پس بنابر گزاره (هـ) تمرینِ ۶.۱، هر عنصر $F^{n\times n}$ مضربی از ماتریس همانی است، لذا قطری است، که غیر ممکن می‌باشد، چون E_{12} قطری نیست. پس چنین پایه‌ای وجود ندارد.

۳۵) الف) فرض کنیم برای هر $0\leq i\leq n$، $f_i=f^{(i)}$ و ضریب پیشرو f برابر با a باشند. لذا $f_n(x)=n!a\neq 0$ و رونسکین f_iها برابر است با،

$$W(x)=\begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ f_{n-1} & f_n & \cdots & 0 & 0 \\ f_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

از این رو اگر n زوج باشد، $W(x)=(-1)^{\frac{1}{2}n}(n!a)^{n+1}\neq 0$ و اگر n فرد باشد، $W(x)=(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)}(n!a)^{n+1}\neq 0$. پس بنابر تمرینِ ۳۱.۳، $\mathfrak{B}=\{f,f',f'',\ldots,f^{(n)}\}$ مستقل خطی است. لذا بنابر قضیهٔ ۱۶.۳، چون تعداد عناصر $\mathfrak{B}$ برابر با بعد فضای برداری $F_n[x]$ است، نتیجه می‌شود که $\mathfrak{B}$ پایه‌ای برای $F_n[x]$ می‌باشد.

ب) مشابه گزارهٔ (الف) اثبات می‌شود.

۳۶) واضح است که $W\neq\emptyset$. اگر $A,B\in W$ و $r\in F$، آن گاه برای هر $i\in\mathbb{N}_n$، $A^{(i)},B^{(i)}\in Span(\mathfrak{B})$ و در نتیجه $rA^{(i)}+B^{(i)}\in Span(\mathfrak{B})$. پس $rA+B\in W$ و بنابر قضیهٔ ۳.۳، W زیر فضای $F^{n\times n}$ است.

برای هر $i\in\mathbb{N}_m$ و $j\in\mathbb{N}_n$، $A_{ij}\in F^{n\times n}$ را ماتریسی در نظر می‌گیریم که ستون jام آن X_i است و دیگر ستون های آن صفرند. بنابراین،

$$\mathfrak{B}_1=\{A_{ij}: i\in\mathbb{N}_m \,\&\, j\in\mathbb{N}_n\}\subseteq W$$

لذا بنابر قضیهٔ ۵.۳، $Span(\mathfrak{B}_1)\subseteq W$. حال فرض کنیم $B\in W$. پس برای هر $j\in\mathbb{N}_n$، $B^{(j)}\in Span(\mathfrak{B})$ و در نتیجه $x_{1j},\ldots,x_{mj}\in F$ به قسمی وجود دارند که،

$$B^{(j)}=x_{1j}X_1+\cdots+x_{mj}X_m$$

از این رو،

$$B_j = x_{۱j}A_{۱j} + \cdots + x_{mj}A_{mj}$$

ماتریسی است که ستون jام آن $B^{(j)}$ است و دیگر ستون های آن صفرند. لذا،

$$B = \sum_{j\in\mathbb{N}_n}\sum_{i\in\mathbb{N}_m} x_{ij}A_{ij}$$

یعنی؛ $W \subseteq Span(\mathfrak{B}_۱)$ و نهایتاً $W = Span(\mathfrak{B}_۱)$. فرض کنیم اسکالرهای x_{ij} به قسمی باشند که

$$\sum_{j\in\mathbb{N}_n}\sum_{i\in\mathbb{N}_m} x_{ij}A_{ij} = ۰$$

اگر سمت چپ تساوی را مساوی B قرار دهیم، آن گاه برای هر $j \in \mathbb{N}_n$، $B^{(j)}$ برابر با ستون jام ماتریس $\sum_{i\in\mathbb{N}_m} x_{ij}A_{ij}$ می‌باشد. لذا ستون jام این ماتریس، یعنی؛ $\sum_{i\in\mathbb{N}_m} x_{ij}X_i$ مساوی صفر است و چون $\mathfrak{B}$ مستقل خطی است، لازم می آید که برای هر $i \in \mathbb{N}_m$، $x_{ij} = ۰$. بنابراین $\mathfrak{B}_۱$ مستقل خطی بوده و پایه‌ای برای W می‌باشد. از این رو $\dim(W) = |\mathfrak{B}_۱| = mn$.

۳۷) الف) بنابر تعریف ایده آل، $I \neq \emptyset$ و اگر $f, g \in I$ و $r \in F$، آن گاه $rf + g \in I$. از این رو بنابر قضیهٔ ۳.۳، I زیرفضای برداری $F[x]$ است.

ب) فرض کنیم $\deg(p) = n$. بنابر تمرینِ ۲۵.۱، $\mathfrak{B} = \{۱ + I, x + I, \ldots, x^{n-۱} + I\}$ فضای $\frac{F[x]}{I}$ تولید می‌کند. حال فرض کنیم اسکالرهای $a_۰, a_۱, \ldots, a_{n-۱} \in F$ به قسمی وجود داشته باشند که،

$$a_۰(۱ + I) + a_۱(x + I) + \cdots + a_{n-۱}(x^{n-۱} + I) = ۰ = I$$

در این صورت $\sum_{i=۰}^{n-۱} a_ix^i + I = I$ و بنابر خواص همدسته‌ها، بایستی $\sum_{i=۰}^{n-۱} a_ix^i \in I$. چون هر عنصر ناصفر I مضربی از $p(x)$ است، پس درجهٔ آن ناکمتر از n می‌باشد. از این رو $\sum_{i=۰}^{n-۱} a_ix^i = ۰$ و در نتیجه $a_۰ = a_۱ = \cdots = a_{n-۱} = ۰$. لذا $\mathfrak{B}$ پایه $\frac{F[x]}{I}$ است و بعد آن برابر با $\deg(p)$ می‌باشد.

۳۸)

۳۹)

۴۰)

۴۱) برای هر $i \in \mathbb{N}_m$، عمل سطری مقدماتی $R_{n+1-i} - R_i \to R_{n+1-i}$ روی ماتریس A انجام می‌دهیم، ماتریس حاصل یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی است و دارای $m + 1$ سطر ناصفر می‌باشد. پس بنابر قضیهٔ ۲۶.۳، $r(A) = m + 1$.

۴۲) **الف: لزوم)** اگر دستگاه $AX = Y$ دارای جواب $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه:

$$c_1 A^{(1)} + c_2 A^{(2)} + \cdots + c_n A^{(n)} = AC = Y$$

از این رو،

$$Y \in span(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)})$$

و در نتیجه بنابر تمرینِ ۶.۳،

$$\begin{aligned} r(A) &= \dim span(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}) \\ &= \dim span(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}, Y) \\ &= r(A|Y) \end{aligned}$$

کفایت) فرض کنیم،

$$\begin{aligned} W_1 &= span(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}) \\ W_2 &= span(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}, Y) \end{aligned}$$

چون،

$$\begin{aligned} \dim W_1 &= r(A) \\ &= r(A|Y) \\ &= \dim W_2 \end{aligned}$$

بنابراین $Y \in W_1$ و در نتیجه اسکالرهای $c_1, \ldots, c_n \in F$ به قسمی وجود دارند که،

$$Y = c_1 A^{(1)} + c_2 A^{(2)} + \cdots + c_n A^{(n)} = A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

از این رو دستگاه $AX = Y$ دارای جواب است.

ب) فرض کنیم $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ جوابهای دستگاه $AX = Y$ باشند. از این رو،

$$\begin{aligned} c_1 A^{(1)} + \cdots + c_n A^{(n)} &= AC \\ &= Y \\ &= AD \\ &= d_1 A^{(1)} + \cdots + d_n A^{(n)} \end{aligned}$$

و در نتیجه،

$$(c_1 - d_1)A^{(1)} + \cdots + (c_n - d_n)A^{(n)} = 0$$

از طرفی $r(A) = n$ و A دارای n ستون می‌باشد، پس مجموعهٔ ستونهای A مستقل خطی است. از این رو برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $c_i = d_i$، یعنی؛ $C = D$. لذا بنابر گزارهٔ (۱)، دستگاه دارای جواب یکتا می‌باشد.

۴۳) الف) فرض کنیم $\mathfrak{B}_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ و $\mathfrak{B}_2 = \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ به ترتیب پایه‌هایی برای فضای سطری A و B باشند. برای هر $i \in \mathbb{N}_m$، $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s \in F$ به قسمی وجود دارند که،

$$A_{(i)} = x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r \qquad \text{و} \qquad B_{(i)} = y_1\beta_1 + \cdots + y_s\beta_s$$

از این رو،

$$A_{(i)} + B_{(i)} = x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r + y_1\beta_1 + \cdots + y_s\beta_s \in Span(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2)$$

پس،

$$\{A_{(i)} + B_{(i)} : i \in \mathbb{N}_m\} \subseteq Span(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2)$$

لذا بنابر قضیهٔ ۵.۳، فضای سطری $A + B$ زیرمجموعهٔ $Span(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2)$ می‌باشد و در نتیجه:

$$r(A + B) \leq r(B) + r(B)$$

ب) واضح است که،

$$\begin{aligned} (DA)^{(j)} &= DA^{(j)} \\ &= a_{1j}D^{(1)} + a_{2j}D^{(2)} + \cdots + a_{nj}D^{(n)} \end{aligned}$$

یعنی؛ هر ستون DA ترکیب خطی ستونهای D است، پس،

$$r(DA) \leq r(D)$$

حال با توجّه به این مطالب داریم:

$$\begin{array}{rcl} r(DA) & = & r((DA)^t) \\ & = & r(A^tD^t) \\ & \leq & r(A^t) \\ & = & r(A) \end{array}$$

از این رو:

$$r(DA) \leq \min\{r(A), r(D)\}$$

۴۴) چون P^t و Q معکوس‌پذیر هستند، پس A^t و AP به ترتیب هم‌ارز سطری P^tA^t و QAP هستند. لذا بنابر قضیهٔ ۲۵.۳، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{rcl} r(A) & = & r(A^t) \\ & = & r(P^tA^t) \\ & = & r(AP) \\ & = & r(QAP) \\ & = & r(B) \end{array}$$

۴۵) بنابر قضایای ۵.۲، ۲۵.۳، و ۲٦.۳، ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی $R \in F^{m\times n}$ و ماتریس معکوس‌پذیر $P \in F^{m\times m}$ به قسمی وجود دارند که $A = PR$ و R دارای k سطر ناصفر است. برای $i \in \mathbb{N}_k$، $R_i \in F^{m\times n}$ ماتریسی در نظر می‌گیریم که سطر iام آن با سطر iام R برابر است و دیگر درایه‌های آن صفر است. لذا بنابر قضیهٔ ۲۵.۳، $r(PR_i) = ۱$ و همچنین $A = R_۱ + \cdots + R_k$.

A.۴ تمرینات فصل چهارم

۱) با توجه به قضیهٔ ۷.۴، فقط گزاره‌های (ج) نادرست است.

۲) الف) چون T یک تابع برداری n متغیر است، پس برای هر $i \in \mathbb{N}_m$، تابع اسکالر $T_i : F^n \to F$ به قسمی وجود دارد که $T = (T_1, \ldots, T_m)$. حال برای $\alpha, \beta \in F^n$ و $r \in F$، خواهیم داشت $T(r\alpha + \beta) = rT(\alpha) + T(\beta)$ و در نتیجه،

$$\begin{aligned}(T_1(r\alpha+\beta), \ldots, T_m(r\alpha+\beta)) &= r(T_1(\alpha), \ldots, T_m(\alpha)) + (T_1(\beta), \ldots, T_m(\beta)) \\ &= (rT_1(\alpha) + T_1(\beta), \ldots, rT_m(\alpha) + T_m\beta))\end{aligned}$$

لذا برای هر $i \in \mathbb{N}_m$، $T_i(r\alpha + \beta) = rT_i(\alpha) + T_i\beta)$، یعنی؛ $T_i \in L(F^n, F)$.

ب) $\Leftarrow$) فرض کنیم $\{e_1, \ldots, e_n\}$ پایهٔ متعارف F^n باشد. واضح است که،

$$\begin{aligned}T(x_1, \ldots, x_n) &= T(\textstyle\sum_{i \in \mathbb{N}_n} x_i e_i) \\ &= \textstyle\sum_{i \in \mathbb{N}_n} x_i T(e_i)\end{aligned}$$

لذا کافی است برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، قرار دهیم $a_i = T(e_i)$.

$\Rightarrow$) بدیهی است.

۳) مجموعهٔ $\{(۲,۳,۴), (۴,۵,۶), (۰,۰,۱)\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۳$ است. لذا بنابر قضیهٔ ۶.۴، $T \in L(\mathbb{R}^۳, \mathbb{R}^۲)$ به قسمی وجود دارد که $T(۲,۳,۴) = (۱,۰)$، $T(۴,۵,۶) = (۰,۱)$، و $T(۰,۰,۱) = (۰,۰)$. حال فرض کنیم $(a,b,c) \in \mathbb{R}^۳$. پس اسکالرهای $x_۱, x_۲, x_۳ \in \mathbb{R}$ به قسمی وجود دارند که،

$$x_۱(۲,۳,۴) + x_۲(۴,۵,۶) + x_۳(۰,۰,۱) = (a,b,c)$$

و در نتیجه،

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۰ \\ ۲ & ۵ & ۰ \\ ۳ & ۶ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

حال از حل دستگاه نتیجه می‌شود که $x_۱ = -\frac{۵}{۳}a + \frac{۴}{۳}b$، $x_۲ = -\frac{۱}{۳}(b - ۲a)$، و $x_۳ = a - b + c$. از این رو،

$$\begin{aligned}T(a,b,c) &= (-\tfrac{۵}{۳}a + \tfrac{۴}{۳}b)T(۲,۳,۴) + \tfrac{۱}{۳}(۲a - b)T(۴,۵,۶) + (a - b + c)T(۰,۰,۱) \\ &= (-\tfrac{۵}{۳}a + \tfrac{۴}{۳}b, \tfrac{۱}{۳}(۲a - b))\end{aligned}$$

۴) الف) با توجّه به تمرینِ ۲.۴، واضح است.

ب) فرض کنیم $(a,b,c) \in R_T$. پس $(x,y,z) \in F^۳$ به قسمی وجود دارد که، $T(x,y,z)=(a,b,c)$. از این رو،

$$\begin{cases} x-y+۲z &= a \\ ۲x+y &= b \\ -x-۲y+۲z &= c \end{cases}$$

ماتریس افزوده دستگاه فوق هم‌ارز سطری ماتریس،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳}(a+b) \\ ۰ & ۱ & -\frac{۴}{۳} & \frac{۱}{۳}(b-۲a) \\ ۰ & ۰ & ۰ & -a+b+c \end{array}\right] \qquad (\star)$$

پس $(a,b,c) \in R_T$ اگر و تنها اگر $-a+b+c=۰$ و در نتیجه،

$$(a,b,c)=b(۱,۱,۰)+c(۰,۱,۱)$$

پس $\{(۱,۱,۰),(۰,۱,۱)\}$ پایه‌ای برای R_T است و $r(T)=۲$.

ج) فرض کنیم $T(x,y,z)=۰$. پس با توجّه به دستگاه $(\star)$، که در آن $(a,b,c)=۰$، نتیجه می‌شود که $x=-\frac{۲}{۳}z$ و $y=\frac{۴}{۳}z$. از این رو $(x,y,z)=z(-\frac{۲}{۳},\frac{۴}{۳},۱)$، یعنی؛ $\{(-\frac{۲}{۳},\frac{۴}{۳},۱)\}$ پایه‌ای برای $\ker(T)$ است و $n(T)=۱$.

۵) الف) اگر $\alpha \in V_۱$، آن گاه $(T+\mathrm{id}_V)(\alpha)=۰$ و در نتیجه $T(\alpha)=-\mathrm{id}_V(\alpha)\in V_۱$. از این رو $V_۱$ تحت T پایا است. حال فرض کنیم $\alpha \in V_۲$. پس $(T-\mathrm{id}_V)^۲(\alpha)=۰$ و،

$$\begin{aligned} (T-id_V)^۲(T(\alpha)) &= (T^۲-۲T+id_V)(T(\alpha)) \\ &= T^۳(\alpha)-۲T^۲(\alpha)+T(\alpha) \\ &= T((T^۲-۲T+id_V)(\alpha)) \\ &= T(۰) \\ &= ۰ \end{aligned}$$

لذا $T(\alpha)\in V_۲$ و در نتیجه $V_۱$ نیز تحت T پایا است.

ب) برای $\alpha=(x,y,z)\in V$،

$$\begin{aligned} (T+id_V)(\alpha) &= (x-z,x+y+z,y+۲z) \\ (T-id_V)^۲(\alpha) &= (x-y+z,۲(-x+y-z),x-y+z) \end{aligned}$$

اگر $\alpha \in V_۱$، آن گاه،

$$\begin{cases} x - z & = & ۰ \\ x + y + z & = & ۰ \\ y + ۲z & = & ۰ \end{cases}$$

لذا $x = z$ و $y = -۲z$ و $\alpha = z(۱, -۲, ۱)$. از این رو $\{(۱, -۲, ۱)\}$ پایه‌ای برای $V_۱$ است. حال فرض کنیم $\alpha \in V_۲$. بنابراین،

$$\begin{cases} x - y + z & = & ۰ \\ ۲(-x + y - z) & = & ۰ \end{cases}$$

پس $x - y + z = ۰$ و در نتیجه $\alpha = y(۰, ۱, ۱) + z(-۱, ۰, ۱)$. از این رو $\{(-۱, ۰, ۱), (۰, ۱, ۱)\}$ پایه‌ای برای $V_۲$ است.

ج) بنابر تعریف جمع زیرفضاها، $V_۱ + V_۲ \subseteq V$. چون،

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} \neq ۰$$

پس $\{(۱, -۲, ۱), (-۱, ۰, ۱), (۰, ۱, ۱)\}$ پایه‌ای برای V است. لذا برای $\alpha \in V$، $x, y, z \in \mathbb{R}$ به قسمی وجود دارند که،

$$\alpha = x(۱, -۲, ۱) + y(-۱, ۰, ۱) + z(۰, ۱, ۱)$$

از این رو بنابر گزارهٔ (ب)، $\alpha \in V_۱ + V_۲$. پس $V \subseteq V_۱ + V_۲$ و در نتیجه $V = V_۱ + V_۲$. چون $\dim(V) = \dim(V_۱) + \dim(V_۲)$، بنابر قضیهٔ ۱۹.۳، $V = V_۱ \oplus V_۲$.

۶) الف) فرض می‌کنیم،

$$\mathfrak{B}_۱ = \{\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_{n-p}\}$$

یک پایهٔ مرتب برای $\ker(T)$ باشد و،

$$\mathfrak{B}_۲ = \{\beta_۱, \beta_۲, \ldots, \beta_p\}$$

اگر،

$$\mathfrak{B}_3 = \{T(\beta_1), T(\beta_2), \dots, T(\beta_p)\}$$

واضح است که $Span(\mathfrak{B}_3) \subseteq R_T$. حال اگر $w \in R_T$، $v \in V$ به قسمی وجود دارد که $T(v) = w$. از این رو اسکالرهای $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_{n-p} \in F$ به قسمی وجود دارند که،

$$v = \sum_{i=1}^{p} x_i\beta_i + \sum_{i=1}^{n-p} y_i\alpha_i$$

چون،

$$\sum_{i=1}^{n-p} y_i T(\alpha_i) = 0$$

خواهیم داشت که:

$$\begin{array}{rcl} w &=& T(v) \\ &=& T(\sum_{i=1}^{p} x_i\beta_i + \sum_{i=1}^{n-p} y_i\alpha_i) \\ &=& \sum_{i=1}^{p} x_iT(\beta_i) + \sum_{i=1}^{n-p} y_iT(\alpha_i) \\ &=& \sum_{i=1}^{p} x_iT(\beta_i) \in Span(\mathfrak{B}_3) \end{array}$$

لذا $Span(\mathfrak{B}_3) = R_T$. حال بنابر قضیهٔ ۱٦.۳، $\mathfrak{B}_3$ پایه‌ای برای R_T می‌باشد.

ب) با توجّه به گزاره (الف)، بدیهی است.

۷) فرض می‌کنیم $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ پایهٔ متعارف $\mathbb{Z}_7^3$ باشد. بنابر قضیهٔ ٦.۴، $T \in L(\mathbb{Z}_7^3, \mathbb{Z}_7^3)$ به قسمی وجود دارد که $T(e_1) = (\overline{3}, \overline{0}, \overline{5})$، $T(e_2) = (\overline{2}, \overline{1}, \overline{4})$، و $T(e_3) = 0$. لذا بنابر تمرینِ ٦.۴، $R_T = Span(T[\mathfrak{B}])$ و در نتیجه T در شرایط خواسته شده صدق می‌کند.

۸) فرض کنیم $\beta \in W$.

$$\begin{array}{rcl} \beta \in Span(T[A]) &\Leftrightarrow& \exists x_1, \dots, x_t \in F \& \alpha_1, \dots, \alpha_t \in A(\beta = \sum_{i\in\mathbb{N}_t} x_iT(\alpha_i)) \\ &\Leftrightarrow& \exists x_1, \dots, x_t \in F \& \alpha_1, \dots, \alpha_t \in A(\beta = T(\sum_{i\in\mathbb{N}_t} x_i\alpha_i)) \\ &\Leftrightarrow& \beta \in T[Span(A)] \end{array}$$

۹)

۱۰) الف) بنابر قضیهٔ ۸.۴، $n(T)+r(T)=n$ و چون $\circ \leq (\sqrt{n(T)}-\sqrt{r(T)})^{۲}$، پس $۲\sqrt{n(T)}\sqrt{r(T)} \leq n(T)+r(T)=n$. بنابراین $n(T)r(T) \leq \frac{n^{۲}}{۴}$.

ب) برای هر $\alpha \in V$، $T(T(\alpha)) = T^{۲}(\alpha) = \circ$، پس $R_T \subseteq \ker(T)$. بنابراین $r(T) \leq n(T)$ و بنابر قضیهٔ ۸.۴، $۲r(T) \leq n(T)+r(T)=n$.

۱۱) هر عضو R_T، بنابر تمرینِ ۱۰.۱، دارای اثر صفر است،. از این رو $E_{۱۱} \notin R_T$، پس T پوشا نیست.

۱۲) الف) برای هر $E_{i۱} \in F^{n\times ۱}$،

$$T_A(E_{i۱}) = A^{(i)} \qquad (\star)$$

لذا بنابر قضیهٔ ۶.۴،

$$\begin{array}{rcl} T_A = \circ & \Leftrightarrow & \forall i \in \mathbb{N}_n (T_A(E_{i۱})) = \circ \\ & \Leftrightarrow & \forall i \in \mathbb{N}_n (A^{(i)}) = \circ \\ & \Leftrightarrow & A = \circ \end{array}$$

ب) $\Rightarrow$) فرض کنیم T_A پوشا بوده و $\beta \in F^{m\times ۱}$. پس،

$$\alpha = [\begin{array}{ccc} x_۱ & \cdots & x_n \end{array}]^t \in F^{n\times ۱}$$

به قسمی وجود دارد که $T_A(\alpha)=\beta$. با توجّه به رابطهٔ $(\star)$ خواهیم داشت که،

$$\begin{array}{rcl} \beta & = & T_A(\sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_i E_{i۱}) \\ & = & \sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_i T_A(E_{i۱}) \\ & = & \sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_i A^{(i)} \end{array}$$

پس $F^{m\times ۱} \subseteq Span(A^{(۱)},\ldots,A^{(n)})$ و بدیهی است که رابطهٔ عکس شمول نیز برقرار می‌باشد. از این رو $Span(A^{(۱)},\ldots,A^{(n)}) = F^{m\times ۱}$.

$\Leftarrow$) با توجّه به رابطهٔ $(\star)$، $F^{m\times ۱} = Span(A^{(۱)},\ldots,A^{(n)}) \subseteq R_T$ و چون $R_T \subseteq F^{m\times ۱}$، پس $R_T = F^{m\times ۱}$، یعنی، T_A پوشا است.

ج) $\Rightarrow$) فرض کنیم T_A یک به یک بوده و $x_۱,\ldots,x_n \in F$ به قسمی وجود داشته باشند که،

$$x_۱A^{(۱)}+\cdots+x_nA^{(n)} = \circ$$

لذا با توجّه به رابطهٔ $(\star)$، خواهیم داشت که،

$$\begin{aligned} 0 &= \textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_iA^{(i)} \\ &= \textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_iT_A(E_{i1}) \\ &= T_A(\textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_iE_{i1}) \end{aligned}$$

چون T_A یک به یک است، پس $\sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_iE_{i1} = 0$ و در نتیجه $x_1 = \cdots = x_n = 0$، یعنی؛ ستون‌های A مستقل خطی هستند.

$\Leftarrow$) فرض کنیم ستون‌های A مستقل خطی بوده و،

$$\alpha = [\begin{array}{ccc} x_1 & \cdots & x_n \end{array}]^t \in F^{n\times 1}$$

به قسمی باشد که $T_A(\alpha) = 0$. پس بنابر رابطهٔ $(\star)$،

$$\begin{aligned} 0 &= T_A(\textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_iE_{i1}) \\ &= \textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_iT_A(E_{i1}) \\ &= \textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_iA^{(i)} \end{aligned}$$

و چون ستون‌های A مستقل خطی است، پس $x_1 = \cdots = x_n = 0$ و در نتیجه $\ker(T_A) = (0)$. لذا بنابر قضیهٔ ۲.۴، T_A یک به یک می‌باشد.

د) اگر T_A یکریختی باشد، بنابر قضیهٔ ۲.۴،

$$\begin{aligned} n &= \dim(F^{n\times 1}) \\ &= \dim(F^{m\times 1}) \\ &= m \end{aligned}$$

هـ) فرض کنیم A ماتریس مربع قطری $n \times n$ باشد. در این صورت $\ker(T_A) = \{X \in F^{n\times 1} : AX = 0\}$ و بنابر قضیهٔ ۲۳.۳، $n(T_A) = n - r(A)$. قضیهٔ ۲۶.۳، $r(A)$ برابر با تعداد درایه‌های ناصفر روی قطر است، پس حکم برقرار می‌باشد.

۱۳) الف) واضح است که،

$$\begin{aligned} B \in \ker(T) &\Leftrightarrow [AB^{(1)} \cdots AB^{(n)}] = AB = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n (AB^{(i)} = 0) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n (B^{(i)} \in \ker(T_A)) \end{aligned}$$

ب) بنابر تمرینِ ۳۶.۳ و گزارهٔ (الف)، بدیهی است.

ج) بنابر قضیهٔ ۸.۴، $n(T) + r(T) = m^۲$ و $n(T_A) + r(T_A) = m$. لذا بنابر گزارهٔ (ب)، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{rcl} r(T) & = & m^۲ - n(T) \\ & = & m^۲ - n(T_A)m \\ & = & m^۲ - (m - r(T_A))m \\ & = & r(T_A)m \end{array}$$

۱۴) فرض کنیم $\mathfrak{B} = \{e_۲, e_۴, \ldots\}$. واضح است که $\mathfrak{B}$ زیرمجموعهٔ R_T و $\ker(T)$ بوده و لذا بنابر قضیهٔ ۵.۳، $Span(\mathfrak{B})$ زیرفضای R_T و $\ker(T)$ می‌باشد. فرض کنیم $\alpha \in \ker(T)$. پس $x_۱, \ldots, x_n \in F$ به قسمی وجود دارند که $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} x_i e_i$ و در نتیجه،

$$\begin{array}{rcl} ۰ & = & T(\alpha) \\ & = & \sum_{i \in \mathbb{N}_n} x_i T(e_i) \\ & = & \sum_{i \in \mathbb{N}(o,n)} x_i e_{i+۱} \end{array}$$

که در اینجا $\mathbb{N}(o,n)$ مجموعهٔ اعداد فرد طبیعی کمتر یا مساوی n است. چون $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ پایه‌ای برای فضای برداری V است، پس برای هر $i \in \mathbb{N}(o,n)$، $x_i = ۰$ و در نتیجه $\alpha \in Span(\mathfrak{B})$. از این رو $\ker(T) = Span(\mathfrak{B})$.

فرض کنیم $\beta \in R_T$. لذا $\alpha \in V$ و $x_۱, \ldots, x_n \in F$ به قسمی وجود دارند که $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} x_i e_i$ و $T(\alpha) = \beta$. از این رو،

$$\begin{array}{rcl} \beta & = & T(\alpha) \\ & = & \sum_{i \in \mathbb{N}_n} x_i T(e_i) \\ & = & \sum_{i \in \mathbb{N}(o,n)} x_i e_{i+۱} \in Span(\mathfrak{B}) \end{array}$$

بنابراین $R_T = Span(\mathfrak{B})$ و حکم اثبات است.

۱۵) فرض کنیم $R_T = \ker(T)$. پس بنابر قضیهٔ ۸.۴، $n = n(T) + r(T) = ۲r(T)$، یعنی؛ n زوج است.

فرض کنیم F یک هیأت باشد و $T \in L(F^۲, F^۲)$ به قسمی باشد که $T(e_۱) = e_۲$ و $T(e_۲) = ۰$. لذا $R_T = \ker(T)$.

۱٦) ب $\Rightarrow$ الف) اگر $T(T(\alpha)) = \circ$، آن گاه $T(\alpha) \in R_T \cap \ker(T) = (\circ)$ و در نتیجه $T(\alpha) = \circ$.

الف $\Rightarrow$ ب) فرض کنیم $\beta \in R_T \cap \ker(T)$. پس $\alpha \in V$ به قسمی وجود دارد که $\beta = T(\alpha)$. از این رو $T^{۲}(\alpha) = T(\beta) = \circ$. پس بنابر گزارهٔ (ب)، $\beta = T(\alpha) = \circ$، یعنی؛ $R_T \cap \ker(T) = (\circ)$.

۱۷) الف) فرض کنیم $x_۱, \ldots, x_n \in F$ به قسمی وجود دارند که $\sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_i\alpha_i = \circ$. پس بنابر قضیهٔ ۱.۴،

$$\begin{array}{rcl}\sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_iT(\alpha_i) & = & T(\sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_i\alpha_i) \\ & = & \circ\end{array}$$

لذا بنابر فرض برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $x_i = \circ$.

ب) با توجّه به قضایای ۱۳.۳ و ٦.۴، بدیهی است.

۱۸) واضح است که برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $T^n(\alpha_i) = x\alpha_i$. پس بنابر قضیهٔ ٦.۴، $T^n = x\, id_V$. اگر $x \neq \circ$، آن‌گاه $x^{-۱} \in F$ وجود دارد و چون $x^{-۱}T^{n-۱}T = id_V$، پس $T^{-۱} = x^{-۱}T^{n-۱}$ و،

$$T^{-۱}(\alpha_j) = \begin{cases} \alpha_{j-۱} & j \in \{۲,۳,\ldots,n\} \text{اگر} \\ x^{-۱}\alpha_n & j = ۱ \text{اگر} \end{cases}$$

۱۹) فرض کنیم $\circ \neq X_\circ \in F^{n\times ۱}$. $T : W \to F^{n\times ۱}$ با ضابطهٔ $T(A) = AX_\circ$ در نظر بگیرید. واضح است که T یک تبدیل خطی یک به یک می‌باشد. از این رو $n(T) = \circ$ و چون $R_T \subseteq F^{n\times ۱}$، پس $r(T) \leq \dim(F^{n\times ۱}) = n$. لذا بنابر قضیهٔ ۸.۴،

$$\begin{array}{rcl}\dim(W) & = & r(T) + n(T) \\ & = & r(T) \\ & \leq & n\end{array}$$

۲۰) الف) اگر $n(T_۱) = \circ$، آن گاه بنابر قضیهٔ ۸.۴، $r(T_۱) = \dim V$ و بدیهی است که $r(T_۱) \leq \dim W$، در نتیجه $\dim V \leq \dim W$، که یک تناقض است. لذا بنابر قضیهٔ ۲.۴، $T_۱$ یک به یک نیست. چون $(\circ) \neq ker(T_۱) \subseteq \ker(T_۲T_۱)$، پس $T_۲T_۱$ نیز یک به یک نیست. واضح است که $T : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطه $T(x,y) = x$ یک تبدیل خطی پوشا است.

ب) اگر $T_۱$ پوشا باشد، آن گاه $\dim W = r(T)$ و از قضیهٔ ۸.۴، نتیجه می‌شود که $\dim W \leq \dim V$، که یک تناقض است. واضح است که $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطه $T(x) = (x, ۰)$ یک تبدیل خطی یک به یک است.

۲۱) اگر $T(x, y) = (۰, x)$ و $U(x, y) = (۰, y)$، آن گاه $TU = ۰$ و $UT \neq ۰$.

۲۲) الف) برای هر $\alpha \in V$، $T(T(\alpha)) = ۰$. پس $R_T \subseteq \ker(T)$.

ب) بنابر قضیهٔ ۸.۴ و گزارهٔ (الف)، $\dim(V) = r(T) + n(T) \leq ۲n(T)$.

ج) اگر $T(x, y) = (۰, x)$، آن گاه $T^۲ = ۰$ و $T \neq ۰$.

۲۳) چون $TU = id_V$ و id_V یک به یک است، پس U عملگر یک به یک روی فضای برداری با بعد متناهی V است. لذا بنابر قضیهٔ ۱۲.۴، U معکوس‌پذیر بوده و $U^{-۱} = T$، به عبارت دیگر $U = T^{-۱}$.

اگر $T, U \in L(\mathbb{R}[x], \mathbb{R}[x])$ به قسمی باشند که،

$$T(\sum_{i=۰}^{\infty} a_i x^i) = \sum_{i=۱}^{\infty} i a_i x^{i-۱}$$

و،

$$U(\sum_{i=۰}^{\infty} a_i x^i) = \sum_{i=۰}^{\infty} \frac{a_i}{i+۱} x^{i+۱}$$

آن گاه TU تابع همانی روی $\mathbb{R}[x]$ است ولی UT چنین نیست.

۲۴) الف) بنابر قضیهٔ ۸.۴،

$$\begin{aligned} [r(T^۲) + n(T^۲) &= \dim(V) \\ &= r(T) + n(T) \end{aligned}$$

پس بنابر فرض $n(T^۲) = n(T)$ و چون $\ker(T) \subseteq \ker(T^۲)$، پس بنابر قضیهٔ ۱۷.۳، $\ker(T) = \ker(T^۲)$.

فرض کنیم $\beta \in R_T \cap \ker(T)$. پس $\alpha \in V$ به قسمی وجود دارد که $\beta = T(\alpha)$. از این رو $T^۲(\alpha) = ۰$. پس $\alpha \in \ker(T^۲) = \ker(T)$ و درنتیجه $\beta = T(\alpha) = ۰$، یعنی؛ $R_T \cap \ker(T) = (۰)$.

ب) به طور مشابه ثابت می‌شود که $R_T = R_{T^2}$. فرض کنیم $\alpha \in V$، پس $T(\alpha) \in R_T = R_{T^2}$. لذا $\beta \in V$ به قسمی وجود دارد که $T(\alpha) = T^2(\beta)$. بنابراین $T(\alpha - T(\beta)) = 0$، یعنی؛ $\alpha - T(\beta) \in \ker(T)$. از این رو $\alpha \in \ker(T) + R_T$ و در نتیجه $V = \ker(T) + R_T$. حال از گزارهٔ (الف) نتیجه می‌شود که $V = \ker(T) \oplus R_T$.

۲۵) فرض کنیم $\alpha \in R_{T_1} \cap \ker(T_2)$. پس $\beta \in V$ به قسمی وجود دارد که $T_1(\beta) = \alpha$ و چون $\alpha \in \ker(T_2)$ و $T_2T_1 = id_V$،

$$\begin{aligned} \beta &= T_2T_1(\beta) \\ &= T_2(\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

از این رو $\alpha = T_1(0) = 0$ و در نتیجه $R_{T_1} \cap \ker(T_2) = (0)$.

واضح است که $R_{T_1} \oplus \ker(T_2) \subseteq W$. حال فرض کنیم $\alpha \in W$. پس،

$$\begin{aligned} T_2T_1(T_2(\alpha)) = T_2(\alpha) &\Rightarrow T_2(T_1T_2(\alpha) - \alpha) = 0 \\ &\Rightarrow T_1T_2(\alpha) - \alpha \in \ker(T_2) \end{aligned}$$

از آنجا که $T_1T_2(\alpha) \in R_{T_1}$، لازم می آید که،

$$\alpha = T_1T_2(\alpha) - (T_1T_2(\alpha) - \alpha) \in R_{T_1} \oplus \ker(T_2)$$

بنابراین $W = R_{T_1} \oplus \ker(T_2)$.

۲۶) الف) فرض کنیم $\mathfrak{B}_1$ پایه‌ای برای $\ker(T)$ باشد. بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، $\mathfrak{B}_2 \subseteq V$ به قسمی وجود دارد که $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ پایه‌ای برای V است. لذا بنابر تمرینِ ۶.۴، $T[\mathfrak{B}_2]$ پایه‌ای برای R_T می‌باشد و با استفادهٔ مجدد از قضیهٔ ۱۱.۳، $\mathfrak{B}_3 \subseteq V$ به قسمی وجود دارد که $\mathfrak{B}_4 = \mathfrak{B}_3 \cup T[\mathfrak{B}_2]$ پایه‌ای برای V می‌گردد. بنابر قضیهٔ ۶.۴، $U \in L(V,V)$ به قسمی وجود دارد که برای هر $\alpha \in \mathfrak{B}_3$، $U(\alpha) = 0$ و برای هر $\alpha \in \mathfrak{T}[B_2]$، $U(T(\alpha)) = \alpha$. واضح است که دو عملگر خطی T و TUT روی پایهٔ $\mathfrak{B}_4$ با هم برابرند، لذا بنابر قضیهٔ ۶.۴، $TUT = T$.

ب) با توجّه به (الف)، TU خودتوان است.

۲۷) $\Rightarrow$) فرض کنیم $\ker(T_2) = R_{T_1}$. بنابر قضیهٔ ۸.۴،

$$\begin{aligned} r(T_1) + r(T_2) &= n(T_2) + r(T_2) \\ &= n \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) فرض کنیم $r(T_۱)+r(T_۲)=n$. بنابر قضیهٔ ۸.۴، واضح است که $n(T_۲)=r(T_۱)$. چون $T_۲T_۱=\circ$، پس $r(T_۱)\subseteq \ker(T_۲)$. لذا بنابر قضیهٔ ۱۷.۳، $\ker(T_۲)=R_{T_۱}$.

۲۸) $\Rightarrow$) فرض کنیم T معکوس‌پذیر باشد. پس برای هر $i\in\{\circ,۱,\dots,n\}$، $T(x^i)=(\lambda-i)x^i\neq\circ$ و در نتیجه $\lambda\neq i$.

$\Leftarrow$) فرض کنیم $\lambda\notin\{\circ,۱,\dots,n\}$. اگر $p(x)=\sum_{i=\circ}^n a_ix^i\in\ker(T)$، آن گاه $T(p(x))=\circ$، یعنی؛ $\sum_{i=\circ}^n(\lambda-i)a_ix^i=\circ$. لذا برای هر $i\in\mathbb{N}_n$، $(\lambda-i)a_i=\circ$ و از فرض نتیجه می‌شود که برای هر $i\in\mathbb{N}_n$، $a_i=\circ$، یعنی؛ $p=\circ$. از این رو بنابر قضیهٔ ۲.۴، T یک به یک است و با توجّه به قضیهٔ ۱۲.۴، T معکوس‌پذیر می‌باشد.

۲۹) الف) واضح است که $\ker(T)$ مجموعه تمام ماتریس‌های متقارن است. پس بنابر تمرینِ ۳۲.۳، $n(T)=\frac{۱}{۲}n(n+۱)$.

ب) بنابر قضیهٔ ۸.۴،

$$\begin{array}{rcl} R_T &=& n^۲-\frac{۱}{۲}n(n+۱)\\ &=& \frac{۱}{۲}n(n-۱)\end{array}$$

همچنین واضح است که R_T زیرفضای ماتریس‌های پادمتقارن می‌باشد. از این رو بنابر قضیهٔ ۱۷.۳ و تمرینِ ۳۲.۳، R_T برابر با فضای ماتریس‌های پادمتقارن بوده و $\dim(R_T)=\frac{۱}{۲}n(n-۱)$.

۳۰) چون $W\subsetneqq V$، پس $\alpha\in V\setminus W$ وجود دارد. حال فرض کنیم $\beta\in V$. در این صورت $\alpha+\beta\in V\setminus W$ و بنابر فرض داریم،

$$\begin{array}{rcl} T(\beta) &=& T(\beta)+T(\alpha)\\ &=& T(\beta+\alpha)\\ &=& \circ\end{array}$$

پس $T=\circ$.

۳۱) الف) فرض کنیم $\beta\in R_T$، پس $\alpha\in V$ به قسمی وجود دارد که $T(\alpha)=\beta$. از این رو

$$\begin{array}{rcl} T(\beta) &=& T^۲(\alpha)\\ &=& T(\alpha)\\ &=& \beta\end{array}$$

برعکس، اگر $T(\beta) = \beta$، بدیهی است که $\beta \in R_T$.

ب) اگر $\alpha \in V$، واضح است که $\alpha - T(\alpha) \in \ker(T)$، $T(\alpha) \in R_T$، و همچنین،

$$\alpha = (\alpha - T(\alpha)) + T(\alpha)$$

بنابراین $V = \ker(T) + R_T$. حال اگر $\beta \in \ker(T) \cap R_T$، آن‌گاه بنابر گزارهٔ (الف) $T(\beta) = \beta$ و چون $\beta \in \ker(T)$، پس $\beta = ۰$. از این رو $V = \ker(T) \oplus R_T$.

ج) بدیهی است.

۳۲) فرض کنیم $V = \sum_{i=۱}^{n} \oplus V_i$. برای هر $x \in V$، به طوریکتا برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $x_i \in V_i$ به قسمی وجود دارد که

$$x = \sum_{i=۱}^{n} x_i$$

حال برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $p_i \in L(V, V)$ با ضابطهٔ $p_i(x) = x_i$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $V_i = R_{p_i}$ و،

$$\ker(p_i) = \sum_{i \neq j \in \mathbb{N}_n} V_j$$

از این رو برای هر i و j متمایز در $\mathbb{N}_n$ و هر $x \in V$،

$$\begin{array}{rcl} p_i p_j(x) & = & p_i(p_j(x)) \\ & = & p_i(x_j) \\ & = & ۰ \end{array}$$

پس $p_i p_j = ۰$. فرض کنیم $x \in V$. لذا،

$$\begin{array}{rcl} x & = & \sum_{i=۱}^{n} x_i \\ & = & \sum_{i=۱}^{n} p_i(x) \\ & = & (\sum_{i=۱}^{n} p_i)(x) \end{array}$$

بنابراین $p_۱ + \cdots + p_n = id_V$.

برعکس، فرض کنیم p_iها در گزاره‌های (الف) و (ب) صدق کنند. از این رو برای هر $i \in \mathbb{N}_n$،

$$\begin{array}{rcl} p_i & = & p_i \, id_V \\ & = & \sum_{j=۱}^{n} p_i p_j \\ & = & p_i^۲ \end{array}$$

پس بنابر تمرینِ ۳۱.۴، $V = \ker(p_i) \oplus Img(p_i)$. برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، قرار می‌دهیم $V_i = Img(p_i)$. پس برای هر $x \in V$،

$$\begin{array}{rcl} x & = & id_V(x) \\ & = & (\sum_{i=1}^{n} p_i)(x) \\ & = & \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \in \sum_{i=1}^{n} V_i \end{array}$$

بنابراین $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$. حال فرض کنیم برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $x_i \in V_i$ به قسمی باشد که،

$$x_1 + \cdots + x_n = 0$$

از تمرینِ ۳۱.۴، نتیجه می‌شود که برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $p(x_i) = x_i$. از این رو بنابر گزارهٔ (ب) و قضیهٔ ۱.۴، برای هر $j \in \mathbb{N}_n$، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & p_j(0) \\ & = & p_j(\sum_{i=1}^{n} x_i) \\ & = & p_j(\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i)) \\ & = & \sum_{i=1}^{n} p_j(p_i(x_i)) \\ & = & p_j^2(x_j) \\ & = & p_j(x_j) \\ & = & x_j \end{array}$$

لذا بنابر قضیهٔ ۹.۳، $V = \sum_{i=1}^{n} \oplus V_i$.

۳۳) الف) اگر $\alpha \in \ker(T^i)$، آن گاه بنابر قضیهٔ ۱.۴،

$$\begin{array}{rcl} T^{i+1}(\alpha) & = & T^i(T(\alpha)) \\ & = & T(0) \\ & = & 0 \end{array}$$

و در نتیجه $\alpha \in \ker(T^{i+1})$.

ب) اگر $\alpha \in \ker(T^{i+1})$، آن گاه،

$$\begin{array}{rcl} T^i(T(\alpha)) & = & T^{i+1}(\alpha) \\ & = & 0 \end{array}$$

و در نتیجه $T(\alpha) \in \ker(T^i)$.

ج) بنابر گزارهٔ (الف)، $\ker(T^{i+1}) \subseteq \ker(T^{i+2})$. حال فرض کنیم $\alpha \in \ker(T^{i+2})$. لذا بنابر گزارهٔ (ب)، $T(\alpha) \in \ker(T^{i+1})$ و از فرض نتیجه می‌شود که،

$$\begin{aligned} T^{i+1}(\alpha) &= T^{i}(T(\alpha)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

و $\alpha \in \ker(T^{i+1})$. بنابراین $\ker(T^{i+1}) = \ker(T^{i+2})$. حال با استفاده از استقراء ریاضی حکم به سادگی اثبات می‌شود.

هـ) چون $T^k = 0$، پس $\ker(T^k) = V$. اگر برای $i \in \mathbb{N}_{k-1}$، $\ker(T^i) = \ker(T^{i+1})$، آن گاه بنابر گزارهٔ (ج)، $\ker(T^i) = \ker(T^k) = V$. بنابراین $T^i = 0$ که با فرض ما مغایرت دارد.

د) از گزارهٔ (ب) نتیجه می‌شود که مجموعهٔ مذکور، زیرمجموعهٔ $\ker(T^i)$ است. حال فرض کنیم اسکالرهای x_i و y_j به قسمی باشند که،

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r + y_1T(\gamma_1) + \cdots + y_tT(\gamma_t) = 0$$

در این صورت،

$$\sum_{i=1}^{t} y_iT(\gamma_i) = -\sum_{j=1}^{r} x_j\alpha_j \in \ker(T^{i-1})$$

پس $T(\sum_{i=1}^{t} y_i\gamma_i) \in \ker(T^{i-1})$ و در نتیجه، $\sum_{i=1}^{t} y_i\gamma_i \in \ker(T^i)$. حال با توجّه به پایهٔ $\ker(T^{i+1})$، بایستی $\sum_{i=1}^{t} y_i\gamma_i = 0$ و در نتیجه هر $y_i = 0$. از این رو $\sum_{j=1}^{r} x_j\alpha_j = 0$ که نتیجه می‌دهد هر $x_j = 0$ و حکم اثبات است.

۳۴) بنابر گزارهٔ (د) تمرینِ ۳۳.۴ و قضیهٔ ۱۱.۳، می‌توانیم فرض کنیم برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $\mathfrak{B}_i = \{\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{id_i}\} \neq \emptyset$ به قسمی وجود دارد که برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $\bigcup_{j=1}^{i} \mathfrak{B}_j$ پایه‌ای برای $\ker(T^i)$ باشد. چون $\ker(T^n) = V$، پس $|\bigcup_{j=1}^{n} \mathfrak{B}_i| = n$. از این رو هر $\mathfrak{B}_i$ تک عنصری است، یعنی؛ $n(T) = |\mathfrak{B}_1| = 1$. لذا بنابر قضیهٔ ۸.۴، $r(T) = n - 1$.

۳۵) الف) چون A هم‌ارز سطری ماتریس،

$$R = \begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

است، پس بنابر قضایای ۲۵.۳ و ۲۶.۳، $\mathfrak{B} = \{R_{(۱)}, R_{(۲)}, R_{(۳)}\}$ پایه‌ای برای V می‌باشد.

ب) بنابر گزارهٔ (الف) قضیهٔ ۲۶.۳، $aR_{(۱)} + cR_{(۲)} + eR_{(۳)} = \alpha$. پس،

$$[\alpha]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} a \\ c \\ e \end{bmatrix}$$

۳۶) چون ماتریس $\begin{bmatrix} \alpha_۱ \\ \alpha_۲ \\ \alpha_۳ \end{bmatrix}$، هم‌ارز سطری $I_۳$ می‌باشد، پس $\mathfrak{B}$ تشکیل یک پایه برای $F^۳$ می‌دهند.

فرض کنیم $x_۱\alpha_۱ + x_۲\alpha_۲ + x_۳\alpha_۳ = (a, b, c)$. پس

$$(x_۱, x_۲, x_۳) = (b + ۲c, b, a + b + c)$$

بردار مختصات (a, b, c) نسبت به پایهٔ $\mathfrak{B}$ است.

۳۷) الف) فرض کنیم $x_۱, x_۲, x_۳ \in \mathbb{R}$ به قسمی باشند که $x_۱f_۱ + x_۲f_۲ + x_۳f_۳ = ۰$. در این صورت به ازای ۰، $\frac{\pi}{۲}$، و π خواهیم داشت،

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ & = & ۰ \\ x_۱ + x_۲i - x_۳i & = & ۰ \\ x_۱ - x_۲ - x_۳ & = & ۰ \end{cases}$$

و در نتیجه x_iها صفرند، یعنی؛ $\{f_۱, f_۲, f_۳\}$ مستقل خطی است. به طور مشابه اثبات می‌شود که g_iها نیز مستقل خطی می‌باشند.

ب) واضح است که،

$$\begin{cases} g_۱(x) & = & f_۱(x) \\ g_۲(x) & = & \frac{۱}{۲}(f_۲(x) + f_۳(x)) \\ g_۳(x) & = & -\frac{i}{۲}(f_۲(x) - f_۳(x)) \end{cases}$$

پس کافی است قرار دهیم:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}$$

۳۸) بنابر گزارهٔ (ب) تمرینِ ۳۵.۳، $\mathfrak{B}$ پایه است. حال فرض کنیم $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ به قسمی باشند که $f(x) = x_1 g_1 + x_2 g_2 + x_3 g_3$. در این صورت خواهیم داشت،

$$\begin{cases} c_0 &= x_1 + tx_2 + t^2 x_3 \\ c_1 &= x_2 + 2tx_3 \\ c_2 &= x_3 \end{cases}$$

بنابراین،

$$(x_1, x_2, x_3) = (c_0 - tc_1 - 3t^2 c_2, c_1 - 2tc_2, c_2)$$

بردار مختصات f در پایهٔ $\mathfrak{B}$ است.

۳۹) الف) فرض کنیم $x, y, z \in \mathbb{R}$ به قسمی باشند که،

$$x(1, 0, 1) + y(-1, 2, 1) + z(2, 1, 1) = (a, b, c)$$

در این صورت خواهیم داشت،

$$\begin{cases} x - y + 2z &= a \\ 2y + z &= b \\ x + y + z &= c \end{cases}$$

ماتریس افزوده دستگاه فوق هم‌ارز سطری ماتریس،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-a-3b+5c}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a+b+c}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+b-c}{2} \end{array}\right]$$

پس بردار مختصات (a, b, c)، برابر است با،

$$[(a, b, c)]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \frac{-a-3b+5c}{4} \\ \frac{-a+b+c}{4} \\ \frac{a+b-c}{2} \end{bmatrix}$$

ب)با توجّه به گزارهٔ (الف)،

$$[T(۱,۰,۱)]_{\mathfrak{B}}=\begin{bmatrix}\frac{۱۷}{۴}\\ -\frac{۳}{۴}\\ -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\quad,[T(-۱,۲,۱)]_{\mathfrak{B}}=\begin{bmatrix}\frac{۳۵}{۴}\\ \frac{۱۵}{۴}\\ -\frac{۷}{۲}\end{bmatrix}\quad,[T(۲,۱,۱)]_{\mathfrak{B}}=\begin{bmatrix}۱\\ ۰\\ ۳\end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$Mat[T;\mathfrak{B}]=\begin{bmatrix}\frac{۱۷}{۴} & \frac{۳۵}{۴} & ۱\\ -\frac{۳}{۴} & \frac{۱۵}{۴} & ۰\\ -\frac{۱}{۲} & -\frac{۷}{۲} & ۳\end{bmatrix}$$

ج) چون دترمینان $Mat[T;\mathfrak{B}]$ ناصفراست، پس بنابر قضایای ۱۷.۲ و ۱۸.۴، T معکوس‌پذیر است. فرض کنیم $T^{-۱}(a,b,c)=(x,y,z)$. پس $T(x,y,z)=(a,b,c)$ و در نتیجه،

$$\begin{cases}۳x+z &= a\\ -۲x+y &= b\\ -x+۲y+۴z &= c\end{cases}$$

لذا،

۴۰) اگر $\sin(\theta)=۰$، آن گاه $A=B$ و حکم برقرار است. حال فرض کنیم $\sin(\theta)\neq ۰$ و F هیأت اعداد مختلط باشند. بنابر قضیهٔ ۶.۴، $T\in L(F^۲,F^۲)$ به قسمی وجود دارد که،

$$T(۱,۰)=(\cos(\theta),\sin(\theta))\qquad \text{و}\qquad T(۰,۱)=(-\sin(\theta),\cos(\theta))$$

چون $\mathfrak{B}=\{(۱,۰),(۰,۱)\}$ پایهٔ متعارف $F^۲$ است، پس $A=Mat[T;\mathfrak{B}]$. حال فرض کنیم $\mathfrak{B}_۱=\{\alpha_۱,\alpha_۲\}$ پایه‌ای برای $F^۲$ باشد که $B=Mat[T;\mathfrak{B}_۱]$. قرار می‌دهیم $\alpha_۱=(x_۱,y_۱)$. لذا بنابر قضیهٔ ۱۳.۴، $[T(\alpha_۱)]_{\mathfrak{B}}=A[\alpha_۱]_{\mathfrak{B}}$ و چون $[T(\alpha_۱)]_{\mathfrak{B}_۱}=B^{(۱)}$، خواهیم داشت،

$$\begin{aligned}\exp(i\theta)\alpha_۱ &= T(\alpha_۱)\\ &= (x_۱\cos(\theta)-y_۱\sin(\theta),x_۱\sin(\theta)+y_۱\cos(\theta))\end{aligned}$$

حال با توجّه به دستگاه،

$$\begin{cases}x_۱\exp(i\theta) &= x_۱\cos(\theta)-y_۱\sin(\theta)\\ y_۱\exp(i\theta) &= x_۱\sin(\theta)+y_۱\cos(\theta)\end{cases}$$

نتیجه می‌شود $\alpha_۱ = (i,۱)$. به طور مشابه نتیجه می‌شود که $\alpha_۲ = (۱,i)$. لذا پایهٔ $\mathfrak{B}_۱$ وجود دارد. اگر P ماتریس تغییر مختصات از پایهٔ $\mathfrak{B}_۱$ به پایهٔ $\mathfrak{B}$ باشد، آن گاه بنابر تعریف ماتریس تغییر مختصات و قضیهٔ ۲۱.۴،

$$B = P^{-۱}AP \quad \text{و} \quad P = \begin{bmatrix} i & ۱ \\ ۱ & i \end{bmatrix}$$

بنابراین دو ماتریس A و B بر روی هیأت اعداد مختلط متشابه‌اند.

۴۱) با توجّه به روند اثبات قضایای ۱۷.۴ و ۲۰.۴، بدیهی است.

۴۲) لزوم) فرض کنیم $\mathfrak{B}$ پایه‌ای برای $\ker(T_۱) = \ker(T_۲)$ باشد. لذا بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، $\mathfrak{D} \subseteq V$ به قسمی وجود دارد که $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{D}$ پایه‌ای برای V است. واضح است که،

$$\mathfrak{B}_۲ = \{T_۲(d) : d \in \mathfrak{D}\} \quad \text{و} \quad \mathfrak{B}_۱ = \{T_۱(d) : d \in \mathfrak{D}\}$$

زیرمجموعه‌های مستقل خطی W هستند؟ از این رو بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، زیرمجموعه‌های $\mathfrak{M}_۱$ و $\mathfrak{M}_۲$ از W به قسمی وجود دارند که $|\mathfrak{M}_۲| = |\mathfrak{M}_۱|$، و $\mathfrak{B}_۱ \cup \mathfrak{M}_۱$ و $\mathfrak{B}_۲ \cup \mathfrak{M}_۲$ پایه‌هایی برای W هستند. فرض کنیم $f : \mathfrak{M}_۱ \to \mathfrak{M}_۲$ یک تابع دوسویی باشد. عملگر خطی $T : W \to W$ به قسمی وجود دارد که برای هر $d \in \mathfrak{D}$ و $s \in \mathfrak{M}_۱$، $T(T_۱(d)) = T_۲(d)$ و $T(s) = f(s)$. واضح است که T معکوس‌پذیر است و $T_۲ = TT_۱$.

کفایت) بدیهی است.

۴۳) الف) اگر T_A و T_B به ترتیب تبدیلات خطی وابسته به A و B باشند، آن‌گاه $\ker(T_A)$ فضای جواب دستگاه همگن $AX = ۰$ بوده و همچنین، $\ker(T_B)$ فضای جواب دستگاه همگن $BX = ۰$ است. لذا $\ker(T_A) = \ker(T_B)$. پس بنابر تمرینِ ۴۲.۴، عملگر معکوس‌پذیر $T : F^{n\times ۱} \to F^{n\times ۱}$ به قسمی وجود دارد که $T_B = TT_A$. گیریم $\mathfrak{B}_۱$ و $\mathfrak{B}_۲$ به ترتیب پایه‌های مرتب متعارف (استانده) $F^{m\times ۱}$ و $F^{n\times ۱}$ باشند. بنابراین $A = Mat[T_A; \mathfrak{B}_۱, \mathfrak{B}_۲]$ و $B = Mat[T_B; \mathfrak{B}_۱, \mathfrak{B}_۲]$. چون T معکوس‌پذیر است، پس

$Mat[T;\mathfrak{B}_2] = P$ ماتریس معکوس‌پذیر است. نهایتاً داریم که

$$\begin{array}{rcl} B & = & Mat[T_B;\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2] \\ & = & Mat[TT_A;\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2] \\ & = & Mat[T;\mathfrak{B}_2]Mat[T_A;\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2] \\ & = & PA \end{array}$$

لذا A و B هم ارز سطری هستند.

ب) با توجّه به الف بدیهی است.

۴۴) $\Leftarrow$) فرض کنیم،

$$\mathfrak{B}' = \{\beta_1,\ldots,\beta_n\} \quad \text{و} \quad \mathfrak{B} = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$$

پایه‌های مرتب فضا برداری V روی هیأت F به قسمی باشند که،

$$Mat[S;\mathfrak{B}'] = Mat[T;\mathfrak{B}]$$

حال قرار دهیم،

$$Mat[S;\mathfrak{B}'] = (b_{ij}) \quad \text{و} \quad Mat[T;\mathfrak{B}] = (a_{ij})$$

بنابر قضیهٔ ۶.۴، تبدیل خطی $U : V \to V$ به قسمی وجود دارد که برای هر $i \in \mathbb{N}_n$،

$$U(\alpha_i) = \beta_i$$

لذا بنابر قضیهٔ ۱۲.۴، U معکوس‌پذیر است. حال بنابر فرض برای هر $j \in \mathbb{N}_n$، $A^{(j)} = B^{(j)}$ و خواهیم داشت،

$$\begin{array}{rcl} TU(\alpha_j) & = & T(U(\alpha_j)) \\ & = & T(\beta_j) \\ & = & \sum_{i\in\mathbb{N}_n} a_{ij}\beta_i \\ & = & \sum_{i\in\mathbb{N}_n} b_{ij}U(\alpha_i) \\ & = & U(\sum_{i\in\mathbb{N}_n} b_{ij}\alpha_i) \\ & = & U(S(\beta_j)) \\ & = & US(\beta_j) \end{array}$$

پس بنابر قضیهٔ ۶.۴، $TU = US$ و در نتیجه $T = USU^{-1}$.

$\Leftarrow$) فرض کنیم $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتب برای V روی هیأت F باشد. بنابر فرض و قضیهٔ ۱۲.۴، $TU = US$ و $\mathfrak{B}' = \{U(\alpha_1), \ldots, U(\alpha_n)\}$ پایه‌ای برای V است. حال قرار دهیم $Mat[S;\mathfrak{B}] = (a_{ij})$، $Mat[T;\mathfrak{B}'] = (b_{ij})$،

و برای هر $j \in \mathbb{N}_n$، $U(\alpha_j) = \beta_j$. لذا خواهیم داشت،

$$\begin{array}{rcl} TU(\alpha_j) = US(\alpha_j) & \Rightarrow & T(\beta_j) = U(S(\alpha_j)) \\ & \Rightarrow & \sum_{i\in\mathbb{N}_n} b_{ij}\beta_i = U(\sum_{i\in\mathbb{N}_n} a_{ij}\alpha_i) \\ & \Rightarrow & \sum_{i\in\mathbb{N}_n} b_{ij}U(\alpha_i) = U(\sum_{i\in\mathbb{N}_n} a_{ij}\alpha_i) \\ & \Rightarrow & U(\sum_{i\in\mathbb{N}_n} b_{ij}\alpha_i) = U(\sum_{i\in\mathbb{N}_n} a_{ij}\alpha_i) \end{array}$$

چون U یک به یک است، پس $\sum_{i\in\mathbb{N}_n} b_{ij}\alpha_i = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} a_{ij}\alpha_i$ و در نتیجه برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$، $b_{ij} = a_{ij}$ و عبارت دیگر $Mat[T;\mathfrak{B}'] = Mat[S;\mathfrak{B}]$.

۴۵) الف) برای هر $i \in \mathbb{N}_{n-1}$، $[T(\alpha_i)]_{\mathfrak{B}} = E_{(i+1)1} \in F^{n\times 1}$ و $[T(\alpha_n)]_{\mathfrak{B}} = (0) \in F^{n\times 1}$. بنابراین،

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ب) برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $T^n(\alpha_i) = 0$. لذا بنابر قضیهٔ ٦.۴، $T^n = 0$. و چون $T^{n-1}(\alpha_1) = \alpha_n \neq 0$، پس $T^{n-1} \neq 0$.

ج) بنابر فرض $\beta_1 \in V$، به قسمی وجود دارد که $S^{n-1}(\beta_1) \neq 0$. تعریف می‌کنیم برای هر $2 \leq i \in \mathbb{N}_n$، $\beta_i = S(\beta_{i-1})$. مدعی می‌شویم $\mathfrak{B}' = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ پایه‌ای برای V است و بنابر گزارهٔ (الف)، $Mat[S;\mathfrak{B}'] = A$. فرض کنیم اسکالرهای $x_1, \ldots, x_n \in F$ به قسمی باشند که $\sum_{i\in\mathbb{N}_n} x_i\beta_i = 0$. با اثر S^{n-1} بر این عنصر نتیجه می‌شود که $x_1S^{n-1}(\beta_1) = 0$ و در نتیجه $x_1 = 0$ و به همین ترتیب به استقراء روی i و با اثر S^{n-i}، نتیجه می‌شود که برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $x_i = 0$. لذا $\mathfrak{B}'$ مستقل خطی است و بنابر قضیهٔ ١٦.٣، $\mathfrak{B}'$ پایه‌ای برای V می‌باشد.

د) گیریم $T, U \in L(F^{n\times 1}, F^{n\times 1})$ به قسمی باشند که $T(X) = MX$ و $U(X) = NX$. واضح است که $T^n = 0 = U^n$ و $T^{n-1} \neq 0 \neq U^{n-1}$. لذا بنابر گزارهٔ (ج)، پایه‌های مرتب $\mathfrak{B}_1$ و $\mathfrak{B}_2$ برای $F^{n\times 1}$ به قسمی وجود دارند که

$Mat[T;\mathfrak{B}_۱] = A = Mat[U;\mathfrak{B}_۲]$. اگر $\mathfrak{B}_۳$ پایهٔ متعارف $F^{n\times ۱}$ باشد، آن گاه $Mat[T;\mathfrak{B}_۳] = M$ و $Mat[U;\mathfrak{B}_۳] = N$. لذا بنابر قضیهٔ ۲۱.۴، M و N با A متشابه هستند و در نتیجه M و N متشابه می‌باشد.

۴۶) الف) اگر $T = ۰$، آن‌گاه هر پایه‌ای در گزارهٔ (الف) صدق می‌کند. حال فرض کنیم $m \in \mathbb{N}$، به قسمی باشد که $T^m = ۰$ و $T^{m-۱} \neq ۰$. به صورت استقرایی پایهٔ $\mathfrak{B}$ را می‌سازیم. واضح است که $\alpha \in V$ به قسمی وجود د ارد که $T^{m-۱}(\alpha) \neq ۰$. قرار می‌دهیم:

$$\alpha_۱ = T^{m-۱}(\alpha)$$

حال فرض کنیم مجموعهٔ مستقل خطی $\{\alpha_۱,\dots,\alpha_k\}$ به قسمی باشد که در شرایط خواسته شده صدق می‌کند. اگر $Span(\alpha_۱,\dots,\alpha_k) = V$، برهان تمام است. حال فرض کنیم $W = Span(\alpha_۱,\dots,\alpha_k)$ برابر با V نباشد.

اگر $R_T \subseteq W$، آن گاه $\alpha_{k+۱} \in V \setminus W$ در نظر می‌گیریم. بنابر قضیهٔ ۱۰.۳، $\{\alpha_۱,\dots,\alpha_{k+۱}\}$ مستقل خطی است و روشن است که $T(\alpha_{k+۱}) \in R_T \subseteq W$.

حال فرض کنیم $R_T \not\subseteq W$. واضح است که،

$$m \in \{r \in \mathbb{N} : Img(T^r) \subseteq W\}$$

لذا بنابر خوش‌ترتیبی اعداد طبیعی، $r \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود دارد که،

$$Img(T^{r-۱}) \not\subseteq W \quad \text{و} \quad Img(T^r) \subseteq W$$

$\alpha_{k+۱} \in Img(T^{r-۱}) \setminus W$ در نظر می‌گیریم. لذا بنابر قضیهٔ ۱۰.۳، $\{\alpha_۱,\dots,\alpha_{k+۱}\}$ مستقل خطی است و بدیهی است که $T(\alpha_{k+۱}) \in Img(T^r) \subseteq W$.

از آنجا که بعد V متناهی است، این روند زمانی متوقف می‌شود و α_iهای ساخته شده، تشکیل یک پایه می‌دهد.

ب) بنابر گزارهٔ (الف)، اسکالرهایی در F به قسمی وجود دارند که،

$$\begin{aligned} T(\alpha_۱) &= ۰ \\ T(\alpha_۲) &= a_{۱۲}\alpha_۱ \\ T(\alpha_۳) &= a_{۱۳}\alpha_۱ + a_{۲۳}\alpha_۲ \\ &\vdots \\ T(\alpha_n) &= a_{۱n}\alpha_۱ + \cdots + a_{n-۱,n}\alpha_{n-۱} \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$Mat[T;\mathfrak{B}] = \begin{bmatrix} \circ & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ \circ & \circ & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & a_{n-۱,n} \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ \end{bmatrix}$$

۴۷) فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی هیأت F به ترتیب از ابعاد n و m باشند و $T \in L(V,W)$ دارای رتبهٔ p باشد. بنابر قضیهٔ ۸.۴،

$$\begin{aligned} n(T) &= \dim(V) - r(T) \\ &= n - p \end{aligned}$$

لذا می‌توانیم فرض کنیم،

$$\mathfrak{B}_۱ = \{\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_{n-p}\}$$

یک پایهٔ مرتب برای $\ker(T)$ باشد. بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، $\mathfrak{B}_۱$ را به پایهٔ مرتب،

$$\mathfrak{B}_۲ = \{\beta_۱, \beta_۲, \ldots, \beta_p, \alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_{n-p}\}$$

برای V گسترش می‌دهیم. اگر،

$$\mathfrak{B}_۳ = \{T(\beta_۱), T(\beta_۲), \ldots, T(\beta_p)\}$$

بنابر تمرینِ ۶.۴، $\mathfrak{B}_۳$ پایه‌ای برای R_T است. حال این پایهٔ بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، قابل گسترش به پایهٔ مرتب،

$$\mathfrak{B}_۴ = \{T(\beta_۱), T(\beta_۲), \ldots, T(\beta_p), \gamma_۱, \gamma_۲, \ldots, \gamma_{m-p}\}$$

برای W می‌باشد. بنابراین برای هر $j \in \mathbb{N}_p$،

$$T(\beta_j) = \sum_{i=۱}^{p} \delta_{ij} T(\beta_i) + \sum_{i=۱}^{n-p} \circ \gamma_i$$

و برای هر $j \in \mathbb{N}_{n-p}$،

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=۱}^{p} \circ T(\beta_i) + \sum_{i=۱}^{n-p} \circ \gamma_i$$

از این رو،

$$Mat[T;\mathfrak{B}_۲,\mathfrak{B}_۴]=\left[\begin{array}{cc} I_p & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{array}\right]\in F^{m\times n}$$

که یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی است. پس بنابر قضیهٔ ۲۶.۳، رتبهٔ $Mat[T;\mathfrak{B}_۲,\mathfrak{B}_۴]$ برابر است با $r(T)=p$. حال اگر $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{B}'$ به ترتیب پایه‌های مرتب برای V و W باشند، آن‌گاه بنابر قضایای ۱۹.۴ و ۲۱.۴، ماتریسهای معکوس‌پذیر P و Q به قسمی وجود دارند که

$$Mat[T;\mathfrak{B},\mathfrak{B}']=Q^{-۱}Mat[T;\mathfrak{B}_۲,\mathfrak{B}_۴]P$$

و بنابر تمرینِ ۴۴.۳،

$$\begin{array}{rcl} r(Mat[T;\mathfrak{B},\mathfrak{B}']) & = & r(Mat[T;\mathfrak{B}_۲,\mathfrak{B}_۴]) \\ & = & p \end{array}$$

پس حکم برقرار می‌باشد.

۴۸) الف) فرض کنیم $R_T=Span(\alpha_۱)$. پس بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، می‌توانیم مجموعهٔ $\{\alpha_۱\}$ را به پایهٔ

$$\mathfrak{B}=\{\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots,\alpha_n\}$$

برای فضای V گسترش دهیم. بنابراین برای هر $i\in\mathbb{N}_n$، $\lambda_i\in F$ به قسمی وجود دارد که $T(\alpha_i)=\lambda_i\alpha_۱$. لذا

$$Mat[T;\mathfrak{B}]=\left[\begin{array}{cccc} \lambda_۱ & \lambda_۲ & \cdots & \lambda_n \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \end{array}\right]$$

۴۹) الف) بنابر تمرین ۴۹.۴، اسکالرهای $\lambda_۱,\lambda_۲,\ldots,\lambda_n\in F$ و پایهٔ مرتب،

$$\mathfrak{B}'=\{\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots,\alpha_n\}$$

برای فضای V به قسمی وجود دارند که،

$$Mat[T;\mathfrak{B}']=\left[\begin{array}{cccc} \lambda_۱ & \lambda_۲ & \cdots & \lambda_n \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \end{array}\right]$$

لذا بنابر قضیهٔ ۲۱.۴، ماتریس‌های $Mat[T;\mathfrak{B}]$ و $Mat[T;\mathfrak{B}']$ متشابه هستند و در نتیجه،

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 &=& tr(Mat[T;\mathfrak{B}']) \\ &=& tr(A) \\ &=& 0 \end{array}$$

از این رو $T(\alpha_1) = \lambda_1\alpha_1 = 0$ و برای هر $2 \leq i \leq n$،

$$\begin{array}{rcl} T^2(\alpha_i) &=& T(\lambda_i\alpha_1) \\ &=& \lambda_i T(\alpha_1) \\ &=& 0 \end{array}$$

لذا بنابر قضیهٔ ۶.۴، $T^2 = 0$ و از گزارهٔ (۳) قضیهٔ ۱۴.۴، نتیجه می‌شود که،

$$0 = Mat[T^2;\mathfrak{B}] = A^2$$

یعنی؛ A پوچ‌توان است.

ب) چون $A^2 = 0$ و $r(A) = 1$، پس $T^2 = 0$ و $T \neq 0$. از این رو $\alpha_1 \in V$ به قسمی وجود دارد که $T(\alpha_1) = \alpha_2 \neq 0$ و $T(\alpha_2) = T^2(\alpha_1) + 0$. لذا $0 \neq \alpha_2 \in \ker(T)$. چون $r(T) = 1$، پس بنابر قضیهٔ ۸.۴، $n(T) = n - 1$. حال بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، می‌توانیم مجموعهٔ $\{\alpha_2\}$ را به پایهٔ،

$$\{\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\}$$

برای فضای $\ker(T)$ گسترش دهیم و چون $\alpha_1 \notin \ker(T)$، بنابر قضایای ۱۰.۳ و ۱۶.۳،

$$\mathfrak{B}' = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$$

پایهٔ مرتبی برای V است. واضح است که $Mat[T;\mathfrak{B}'] = E_{21}$. از این رو بنابر قضیهٔ ۲۱.۴، ماتریس‌های A و E_{21} متشابه هستند.

۵۰) فرض کنیم $\mathfrak{B}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ پایه‌ای برای $\ker(T)$ باشد. پس بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، $\alpha_n \in V$ به قسمی وجود دارد که $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup \{\alpha_n\}$ پایه‌ای برای V است. اگر $T(\alpha_n) = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} a_i\alpha_i$ و $U(\alpha_n) = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} b_i\alpha_i$، آن گاه،

$$\begin{array}{rcl} TU(\alpha_n) &=& T(\sum_{i\in\mathbb{N}_n} b_i\alpha_i) \\ &=& \sum_{i\in\mathbb{N}_n} b_i T(\alpha_i) \\ &=& b_n T(\alpha_n) \\ &=& \sum_{i\in\mathbb{N}_n} b_n a_i\alpha_i \end{array}$$

همچنین برای هر $1 \le i \le n-1$،

$$T(\alpha_i) = U(\alpha_i) = TU(\alpha_i) = 0$$

از این رو،

$$Mat[T;\mathfrak{B}] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}, \qquad Mat[U;\mathfrak{B}] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{bmatrix}$$

$$Mat[TU;\mathfrak{B}] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_n a_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_n a_n \end{bmatrix}$$

لذا واضح است که $tr(TU) = tr(T)tr(U)$.

۵۱) بنابر تمریناتِ ۴۳.۳ و ۴۸.۴، و قضیهٔ ۱۴.۴، بدیهی است.

۵۲) فرض کنیم $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ پایه‌ای برای $\ker(T)$ باشد. لذا بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in V$ به قسمی وجود دارند که $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V است. بنابر قضیهٔ ۶.۴، $S \in L(V,V)$ به قسمی وجود دارد که $S(\alpha_{k+1}) = \cdots = S(\alpha_n) = 0$ و برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، $S(\alpha_i) = \alpha_i$. از این رو $TS = 0$ و $r(T) + r(S) = n$.

۵۳) بنابر قضیهٔ ۱۵.۴ و تمرینِ ۲۶.۴، بدیهی است.

۵۴) فرض کنیم $X \in F^{n\times 1}$. پس اسکالرهای $x_1, \ldots, x_n \in F$ به قسمی وجود دارند که $X = \sum_{j=1}^n x_j E_{j1}$. لذا

$$\begin{aligned} T(X) &= T(\textstyle\sum_{j=1}^n x_j E_{j1}) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n x_j T(E_{j1}) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n x_j (\sum_{i=1}^r a_{ij} P^{(i)}) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^r x_j a_{ij} P^{(i)} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^r (\sum_{j=1}^n x_j a_{ij}) P^{(i)} \\ &= PAX \end{aligned}$$

فرض کنیم $D \in F^{n\times n}$ دارای رتبهٔ r است و T_D تبدیل خطی وابسته به ماتریس D باشد. حال اگر $\mathfrak{B}$ پایهٔ متعارف $F^{n\times 1}$ باشد، بنابر تمرینِ ۴۸.۴،

$$\begin{aligned} r(T_D) &= r(Mat[T_D;\mathfrak{B}]) \\ &= r(D) \\ &= r \end{aligned}$$

از این رو بنابر قسمت اوّل تمرین، برای هر $X \in F^{n\times 1}$،

$$\begin{aligned} DX &= T(X) \\ &= PAX \end{aligned}$$

پس $D = PX$.

۵۵) چون $char(F) \neq ۲$، پس $۲(۱_F) \neq ۰$ در F معکوس‌پذیر است. برای تسهیل در نوشتن معکوس آن را با $\frac{۱}{۲}$ نمایش می‌دهیم. برای هر $\alpha \in V$، واضح است که،

$$\alpha = \frac{۱}{۲}(T(\alpha)+\alpha) + \frac{۱}{۲}(\alpha - T(\alpha))$$

چون $T^۲ = I$، داریم،

$$\begin{aligned} T(\tfrac{۱}{۲}(T(\alpha)+\alpha)) &= \tfrac{۱}{۲}(T^۲(\alpha)+T(\alpha)) \\ &= \tfrac{۱}{۲}(\alpha + T(\alpha)) \end{aligned}$$

پس،

$$\frac{۱}{۲}(T(\alpha)+\alpha) \in \ker(T+I)$$

و به طور مشابه،

$$\frac{۱}{۲}(\alpha - T(\alpha)) \in \ker(T-I)$$

بنابراین،

$$\alpha \in \ker(T+I) + \ker(T-I)$$

از طرفی بدیهی است که،

$$\ker(T+I) + \ker(T-I) \subseteq V$$

پس،

$$\ker(T+I) + \ker(T-I) = V$$

حال نشان می‌دهیم که،

$$\ker(T+I)\cap\ker(T-I)=(\circ)$$

فرض کنیم،

$$\alpha\in\ker(T+I)\cap\ker(T-I)$$

از این رو $T(\alpha)+\alpha=\circ$ و $T(\alpha)-\alpha=\circ$. لذا $۲\alpha=\circ$ و چون $char(F)\neq ۲$، لازم می‌آید که $\alpha=\circ$.

۵۶) فرض کنیم T_A تبدیل خطی وابسته به ماتریس A بوده و $\mathfrak{B}$ پایهٔ متعارف $F^{n\times ۱}$ باشد. از این رو $Mat[T;\mathfrak{B}]=A$. لذا بنابر قضیهٔ ۱۴.۴،

$$Mat[T^{۲};\mathfrak{B}]=A^{۲}=I_n \text{ و } ،\quad Mat[T+I;\mathfrak{B}]=A+I_n \text{ ، }\quad Mat[T-I;\mathfrak{B}]=A-I_n$$

پس $T^{۲}=I$ و از تمرینِ ۵٦.۴، نتیجه می‌شود که،

$$\ker(T-I)\oplus\ker(T+I)=F^{n\times ۱}$$

با توجّه به قضیهٔ ۱۹.۳،

$$n(T-I)+n(T+I)=n$$

و از قضیهٔ ۸.۴، نتیجه می‌شود که،

$$r(T-I)+r(T+I)=n$$

از این رو بنابر تمرینِ ۴۸.۴،

$$r(A+I_n)+r(A-I_n)=n$$

۵۷) الف) فرض کنیم $T_A:F^{n\times ۱}\to F^{n\times ۱}$ عملگر وابسته به ماتریس A است. واضح است که $T_A^{۲}=T_A$ و بنابر تمرین ۴۸.۴، $r(T_A)=r(A)$. لذا بنابر تمرین ۳۱.۴، $F^{n\times ۱}=R_{T_A}\oplus\ker(T_A)$. حال بنابر قضایای ۱۹.۳ و ۸.۴، پایه‌های $\{\alpha_۱,\dots,\alpha_k\}$ و $\{\alpha_{k+۱},\dots,\alpha_n\}$ به ترتیب برای R_{T_A} و $\ker(T_A)$ به قسمی وجود دارند که

$\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای $F^{n\times 1}$ می‌باشد. حال با توجه گزارهٔ (الف) تمرینِ ۳۱.۴، برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، $T_A(\alpha_i) = \alpha_i$ و بدیهی است که برای هر $k + 1 \leq i \leq n$، $T_A(\alpha_i) = 0$. بنابراین

$$Mat[T_A; \mathfrak{B}] = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حال بنابر قضیهٔ ۲۱.۴، ماتریس معکوس‌پذیر $P \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارد که $A = P^{-1} Mat[T_A; \mathfrak{B}]P$. از این رو بنابر تمرین ۱۰.۱،

$$\begin{aligned} tr(A) &= tr(P^{-1} Mat[T_A; \mathfrak{B}]P) \\ &= tr(PP^{-1} Mat[T_A; \mathfrak{B}]) \\ &= tr(Mat[T_A; \mathfrak{B}]) \\ &= k \end{aligned}$$

ب) فرض کنیم $\mathfrak{B}$ پایهٔ گزارهٔ (الف) و $T_B : F^{n\times 1} \to F^{n\times 1}$ عملگر وابسته به ماتریس B باشد. حال اگر قرار دهیم $Mat[T_B; \mathfrak{B}] = (b_{ij})$ و $C = (b_{ij}) \in F^{k\times k}$، آن گاه بنابر قضیهٔ ۱۵.۴، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Mat[T_B T_A; \mathfrak{B}] &= Mat[T_B; \mathfrak{B}] Mat[T_A; \mathfrak{B}] \\ &= Mat[T_B; \mathfrak{B}] \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

فرض کنیم $\mathfrak{B}' = \{E_{11}, \ldots, E_{n1}\}$. لذا بنابر قضیهٔ ۱۵.۴،

$$\begin{aligned} Mat[T_B T_A; \mathfrak{B}'] &= Mat[T_B; \mathfrak{B}'] Mat[T_A; \mathfrak{B}'] \\ &= BA \end{aligned}$$

پس بنابر قضیهٔ ۲۱.۴، ماتریس معکوس‌پذیر $P \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارد که،

$$\begin{aligned} BA &= P^{-1} Mat[T_B T_A; \mathfrak{B}]P \\ &= P^{-1} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P \end{aligned}$$

مشابهاً حکم برای AB برقرار می‌باشد.

۵۸) الف) فرض کنیم $\mathfrak{B}$ پایهٔ مرتب برای فضای برداری V باشد. قرار می‌دهیم $A = Mat[E;\mathfrak{B}]$ و برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، $A_i = Mat[E_i;\mathfrak{B}]$. پس بنابر قضیهٔ ۱۵.۴،

$$A = A_1 + \cdots + A_k$$

لذا بنابر تمرینات ۴۸.۴ و ۵۸.۴، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{rcl} r(E) & = & r(A) \\ & = & tr(A) \\ & = & tr(A_1) + \cdots + tr(A_k) \\ & = & r(A_1) + \cdots + r(A_k) \\ & = & r(E_1) + \cdots + r(E_k) \end{array}$$

واضح است که $R_E \subseteq R_{E_1} + \cdots + R_{E_k}$. از این رو بنابر قضایای ۱۷.۳ و ۱۹.۳، $R_E = R_{E_1} \oplus \cdots \oplus R_{E_k}$.

ب) فرض کنیم $\mathfrak{B}_i = \{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{id_i}\}$ پایه‌ای برای R_{E_i} باشد. لذا بنابر گزارهٔ (الف) و قضیهٔ ۱۹.۳، $\mathfrak{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i$ پایه‌ای برای R_E است. حال فرض کنیم $\alpha_{ir} \in \mathfrak{B}_i$. پس بنابر گزارهٔ (الف) تمرینِ ۳۱.۴،

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{ir} & = & E(\alpha_{ir}) \\ & = & \sum_{j\in\mathbb{N}_k} E_j(\alpha_{ir}) \\ & = & \alpha_{ir} + \sum_{i\neq j\in\mathbb{N}_k} E_j(\alpha_{ir}) \end{array}$$

و در نتیجه $\sum_{i\neq j\in\mathbb{N}_k} E_j(\alpha_{ir}) = 0$. حال با توجه به گزارهٔ (الف) و قضیهٔ ۹.۳، برای هر $i \neq j \in \mathbb{N}_k$، $E_j(\alpha_{ir}) = 0$ و به عبارت دیگر، $E_j[\mathfrak{B}_i] = \{0\}$. از این رو برای هر i و j متمایز در $\mathbb{N}_k$، $E_jE_i = 0$.

۵۹) فرض کنیم $\mathfrak{B}$ پایه‌ای مرتب برای V با بعد n باشد و $A = Mat[T;\mathfrak{B}]$. اگر $B \in F^{n\times n}$، بنابر قضیهٔ ۱۵.۴، $U \in L(V,V)$ به قسمی وجود دارد که $B = Mat[U;\mathfrak{B}]$. لذا بنابر فرض و قضیهٔ ۱۴.۴، $AB = BA$ و از تمرینِ ۶.۱، نتیجه می‌شود که $\alpha \in F$ به قسمی وجود دارد که $A = \alpha I_n$. بنابراین $T = \alpha\, id_V$.

۶۰) بنابر گزارهٔ (۲) قضیهٔ ۲۵.۴،

$$f(x,y) = f(1,2)f_1(x,y) + f(2,3)f_2(x,y)$$

از این رو $\alpha = -8$ و $\beta = -11$.

۶۱) اگر فرض کنیم $p_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$، $p_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$، و $p_3(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ به قسمی باشند که $\{p_1, p_2, p_3\}$ پایهٔ مورد نظر باشد، آن گاه،

$$\begin{cases} 1 &= f_1(p_1) = \int_0^1 p_1 = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 \\ 0 &= f_2(p_1) = \int_0^2 p_1 = 2a_0 + 2a_1 + \frac{8}{3}a_2 \\ 0 &= f_3(p_1) = \int_0^3 p_1 = 3a_0 + \frac{9}{2}a_1 + 9a_2 \end{cases}$$

و از دستگاه فوق نتیجه می‌شود که $p_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. به طور مشابه $p_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$، و $p_3(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$.

۶۲) الف) برای هر $3 \le i \le n$، اگر $(i-2)$ برابر سطر اوّل را به سطر iام اضافه کنیم، $i-1$ برابر سطر دوّم حاصل خواهد شد. از این رو داریم که،

$$A \sim \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ 3A_2 \\ \vdots \\ (n-1)A_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A_2 \\ -A_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

پس $\{A_1, A_2\}$ پایه‌ای برای فضای سطری A است.

ب) فرض کنیم $x = (x_1, \dots, x_n)$ در فضای پوچ شده توسط f_iها باشد. بنابراین

$$\begin{cases} f_1(x) &= 0x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 - \cdots - (n-1)x_n = 0 \\ f_2(x) &= x_1 + 0x_2 - x_3 - 2x_4 - \cdots - (n-2)x_n = 0 \\ &\vdots \\ f_n(x) &= (n-1)x_1 + (n-2)x_2 + (n-3)x_3 + (n-4)x_4 + \cdots + 0x_n = 0 \end{cases}$$

بنابراین x در فضای پوچ شده توسط f_iها است اگر و تنها اگر x^t جواب دستگاه $AX = 0$ باشد. چون بنابر قضایایِ ۲۳.۳ و ۲۶.۳، بعد فضای جواب دستگاه $AX = 0$ برابر است با $n - r(A) = n - 2$ می‌باشد، پس بعد زیر فضای پوچ شده توسط f_iها نیز $n - 2$ است.

۶۳) الف) فرض کنیم اسکالرهای $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ به قسمی باشند که،

$$x_1\phi_a + x_2\phi_b + x_3\phi_c = 0$$

حال با اثر تابعک فوق به ترتیب روی ۱، x و x^2 خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 a + x_2 b + x_3 c & = & 0 \\ x_1 a^2 + x_2 b^2 + x_3 c^2 & = & 0 \end{cases}$$

دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه فوق، دترمینان ماتریس واندرموند می‌باشد که برابر است با $(c-a)(c-b)(b-a) \neq 0$. لذا بنابر قضایای ۹.۲ و ۱۷.۲، دستگاه دارای فقط جواب بدیهی صفر است، یعنی؛ $\mathfrak{B}$ مستقل خطی است. می‌دانیم که بعد فضای $\mathbb{R}_2[x]$ برابر با ۳ می‌باشد، پس بنابر قضایای ۱۶.۳ و ۲۵.۴، $\mathfrak{B}$ پایه‌ای برای $(\mathbb{R}_2[x])^*$ است.

ب) واضح است.

ج) با توجّه به گزارهٔ (ب)، کافی است پایهٔ

$$\left\{ \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}, \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}, \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \right\}$$

در نظر بگیریم.

۶۴) الف) واضح است که عملگر خطی صفر روی V متعلق به A است. حال فرض کنیم $T_1, T_2 \in A$ و $r \in F$. بنابراین برای هر $\alpha \in W$، $T_1(\alpha) = T_2(\alpha) = 0$ و خواهیم داشت،

$$\begin{array}{rcl} (rT_1 + T_2)(\alpha) & = & (rT_1)(\alpha) + T_2(\alpha) \\ & = & rT_1(\alpha) + T_2(\alpha) \\ & = & 0 \end{array}$$

لذا $rT_1 + T_2 \in A$ و بنابر قضیهٔ ۳.۳، A زیرفضای $L(V,V)$ است.

ب) فرض کنیم $\mathfrak{B}_1 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ پایه‌ای برای W باشد. پس بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، $\mathfrak{B}_2 = \{\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n\} \subseteq V$ به قسمی وجود دارد که $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ پایه‌ای برای V است. بنابراین $V = Span(\mathfrak{B}_1) \oplus Span(\mathfrak{B}_2)$، که در اینجا $W = Span(\mathfrak{B}_1)$. لذا $T \in A$ اگر و تنها اگر $T|_W = 0$. حال قرار می‌دهیم $W_1 = Span(\mathfrak{B}_2)$ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \theta : A & \rightarrow & L(W_1, V) \\ \quad T & \rightarrow & T|_{W_1} \end{cases}$$

به سادگی دیده می‌شود که θ یک یکریختی است، پس بنابر قضایایِ ۷.۴ و ۱٦.۴،

$$\begin{aligned}\dim(A) &= \dim(L(W_1, V))\\ &= \dim(W_1)\dim(V)\\ &= (n-m)n\end{aligned}$$

٦۵) الف) فرض کنیم $f \in (W_1 + W_2)^\circ$. پس،

$$W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2 \subseteq \ker(f)$$

و در نتیجه، $f \in W_1^\circ \cap W_2^\circ$.

حال فرض کنیم $f \in W_1^\circ \cap W_2^\circ$ و $x \in W_1 + W_2$. بنابراین $a \in W_1$ و $b \in W_2$ به قسمی وجود دارند که $x = a + b$. از این رو،

$$f(x) = f(a) + f(b) = 0 + 0 = 0$$

لذا $f \in (W_1 + W_2)^\circ$.

ب) فرض کنیم $f \in W_1^\circ + W_2^\circ$ و $x \in W_1 \cap W_2$. پس $f_1 \in W_1^\circ$ و $f_2 \in W_2^\circ$ به قسمی وجود دارند که $f = f_1 + f_2$. لذا،

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0 + 0 = 0$$

و در نتیجه،

$$W_1^\circ + W_2^\circ \subseteq (W_1 \cap W_2)^\circ$$

حال با توجّه به قضیهٔ ۱۷.۳، کافی است ثابت کنیم،

$$\dim(W_1^\circ + W_2^\circ) = \dim(W_1 \cap W_2)^\circ$$

فرض کنیم $\dim(V) = n$. بنابر گزارهٔ (الف) و قضایای ۲۰.۳ و ۳۲.۴، داریم:

$$\begin{aligned}\dim(W_1^\circ + W_2^\circ) &= \dim(W_1^\circ) + \dim(W_2^\circ) - \dim(W_1^\circ \cap W_2^\circ)\\ &= n - \dim(W_1) + n - \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2)^\circ\\ &= 2n - \dim(W_1) - \dim(W_2) - [n - \dim(W_1 + W_2)]\\ &= n - [\dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2)]\\ &= n - \dim(W_1 \cap W_2)\\ &= \dim(W_1 \cap W_2)^\circ\end{aligned}$$

۶۶) فرض کنیم $\alpha,\beta \in V$ به قسمی باشند که $f(\alpha) \neq \circ$ و $g(\beta) \neq \circ$. مدعی می‌شویم $\gamma \in V$ به گونه‌ای وجود دارد که $f(\gamma) \neq \circ \neq g(\gamma)$.

اگر $g(\alpha) \neq \circ$، قرار می‌دهیم $\gamma = \alpha$ و اگر $f(\beta) \neq \circ$، قرار می‌دهیم $\gamma = \beta$. حال فرض کنیم $f(\beta) = \circ = g(\alpha)$. از این رو کافی است قرار می‌دهیم $\gamma = \alpha + \beta$. بنابراین برای هر $\lambda \in F$،

$$\begin{aligned}
\lambda h(\gamma) &= h(\lambda\gamma) \\
&= f(\lambda\gamma)g(\lambda\gamma) \\
&= \lambda^{۲} f(\gamma)g(\gamma) \\
&= \lambda^{۲} h(\gamma)
\end{aligned}$$

از طرفی $h(\gamma) \neq \circ$، پس برای $\lambda \in F$، $\lambda = \lambda^{۲}$ یک تناقض است.

۶۷) الف) فرض کنیم،

$$\mathfrak{B} = \{E_{۱۱}, E_{۱۲}, E_{۲۱}, E_{۲۲}\} \subseteq F^{۲\times۲}$$

پایهٔ مرتب برای $F^{۲\times۲}$ باشد. اگر $P = (p_{ij}) \in F^{۲\times۲}$، آن گاه برای هر $i,j \in \mathbb{N}_{۲}$،

$$T(E_{ij}) = p_{۱i}E_{۱j} + p_{۲i}E_{۲j}$$

از این رو

$$Mat[T;\mathfrak{B}] = \begin{bmatrix} p_{۱۱} & \circ & p_{۱۲} & \circ \\ \circ & p_{۱۱} & \circ & p_{۱۲} \\ p_{۲۱} & \circ & p_{۲۲} & \circ \\ \circ & p_{۲۱} & \circ & p_{۲۲} \end{bmatrix}$$

و در نتیجه $tr(T) = ۲tr(P)$.

۶۸) با توجّه به قضیهٔ ۱۵.۴، بعد فضای W، برابر با بعد زیرفضای تولیدشده توسط $\{AB - BA : A,B \in F^{n\times n}\}$ در $F^{n\times n}$ می‌باشد. لذا بنابر قضیهٔ ۳۰.۴، $\dim_F W$ برابر است با $n^{۲} - ۱$.

۶۹) چون $P = Mat[id_V;\mathfrak{B}_{۱},\mathfrak{B}_{۲}]$، پس برای هر $j \in \mathbb{N}_n$،

$$\alpha_j = \sum_{i=۱}^{n} p_{ij}\beta_i$$

حال فرض کنیم $Q = (q_{ij}) \in F^{n\times n}$ ماتریس تغییر وضعیت از پایهٔ $\mathfrak{B}_1^\star$ به پایهٔ $\mathfrak{B}_2^\star$ باشد. لذا برای هر $i \in \mathbb{N}_n$،

$$\alpha_i^\star = \sum_{k=1}^{n} q_{ki}\beta_k^\star$$

پس با کمی تسامح برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$، داریم:

$$\begin{array}{rcl} \delta_{ij} & = & \alpha_i^\star(\alpha_j) \\ & = & \sum_{k=1}^{n} q_{ki}\beta_k^\star(\alpha_j) \\ & = & \sum_{k=1}^{n} q_{ki}\beta_k^\star(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\beta_i) \\ & = & \sum_{k=1}^{n} q_{ki}(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\beta_k^\star(\beta_i)) \\ & = & \sum_{k=1}^{n} q_{ki}p_{kj} \end{array}$$

$$= [q_{1i} \cdots q_{ni}] \begin{bmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix}$$

از این رو $Q^tP = I_n$ و بنابر قضیهٔ ۱۰.۲، $Q = (P^{-1})^t$.

۷۰) فرض کنیم $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ و $\mathfrak{B}_1 = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}\}$ پایهٔ مرتب متعارف $\mathbb{R}^3$ باشد. پس بنابر تمرینِ ۷۰.۴، A^t ماتریس تغییر وضعیت از پایهٔ مرتب $\mathfrak{B}^\star$ به پایهٔ مرتب $\mathfrak{B}_1^\star$ می‌باشد. از این رو،

$$\alpha_i^\star = a_{1i}E_{11}^\star + a_{2i}E_{12}^\star + a_{3i}E_{13}^\star$$

فرض کنیم $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. لذا برای هر $i \in \mathbb{N}_3$، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_i^\star(x, y, z) & = & \sum_{k=1}^{3} a_{ki}E_{1k}^\star(x, y, z) \\ & = & \sum_{k=1}^{3} a_{ki}E_{1k}^\star(xE_{11} + yE_{12} + zE_{13}) \\ & = & a_{1i}x + a_{2i}y + a_{3i}z \end{array}$$

A.۵ تمرینات فصل پنجم

۱) اگر $D = diag(d_{۱۱}, \dots, d_{nn})$، آن گاه $xI_n - D = diag(x - d_{۱۱}, \dots, x - d_{nn})$ و در نتیجه $\chi_D = \prod_{i=۱}^{n}(x - d_{ii})$.

۲) ماتریس ضرایب دستگاه $(I_۳ - A)X = ۰$، هم‌ارز سطری،

$$R = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

است. بنابراین $X^t = x(۱, ۲, ۰) + z(۰, -۱, ۱)$ و در نتیجه $\{[۱\ ۲\ ۰]^t, [۰\ -۱\ ۱]^t\}$ پایه‌ای برای زیرفضای ویژه وابسته به مقدار ویژه $x = ۱$ است.

۳) فرض کنیم $\lambda \in \mathbb{R}$ مقدار ویژهٔ T باشد. در این صورت $f \in V$ $f \neq ۰$ به قسمی وجود دارد که $T(f) = \lambda f$ و با مشتق‌گیری از طرفین نتیجه می‌شود که $f(x) = \lambda f'(x)$. اگر $\lambda \neq ۰$، آن گاه $c \in \mathbb{R}$ به قسمی وجود دارد که $f(x) = \exp(\frac{۱}{\lambda}x + c)$. لذا $۰ = T(f)(۰) = \lambda f(۰) = \lambda \exp(c)$، که یک تناقض می‌باشد. اگر $\lambda = ۰$، آن گاه $T(f) = ۰$ و در نتیجه $f = ۰$ که با فرض ناصفر بودنِ f مغایرت دارد.

۴) با توجّه به تعریف دترمینان یک عملگر خطی و تمرینِ ۱۹.۲، واضح است.

۵) فرض کنیم $\mathfrak{B}$ پایهٔ متعارف $\mathbb{R}^۳$ باشد. با توجّه به تعریف دترمینان یک عملگر خطی و تمرینِ ۱۹.۲، $tr(Mat[T, \mathfrak{B}]$ برابر با $\lambda_۱ m_۱ + \lambda_۲ m_۲$ است که برابر با صفر می‌باشد.

۶) در ابتدا فرض کنیم A به صورت بلوکی زیر باشد.

$$A = \begin{bmatrix} c_۱ I_{d_۱} & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & c_۲ I_{d_۲} & \cdots & ۰ \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & c_k I_{d_k} \end{bmatrix}$$

بنابراین برای $D \in V$، چون $AD = DA$، داریم:

$$\begin{bmatrix} c_۱ D_{(۱)} \\ \vdots \\ c_۱ D_{(d_۱)} \\ \vdots \\ c_k D_{(\beta)} \\ \vdots \\ c_k D_{(n)} \end{bmatrix} = [\underbrace{c_۱ D^{(۱)} \cdots c_۱ D^{(d_۱)}}_{d_۱\ \text{ستون}} \cdots \underbrace{c_k D^{(\beta)} \cdots c_k D^{(n)}}_{d_k\ \text{ستون}}]$$

$d_۱ + \cdots + d_s \gneqq i \leqq d_۱ + \cdots + d_{s+۱}$ و $j \leqq d_۱ + \cdots + d_s$، یا $d_۱ + \cdots + d_{s+۱} \gneqq j$ وجود دارد $t \neq s + ۱$ به طوری که $c_{s+۱} d_{ij} = c_t d_{ij}$ و در نتیجه $d_{ij} = ۰$. از این رو D به صورت ماتریس بلوکی زیر می‌باشد.

$$D = \begin{bmatrix} D_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & D_۲ & \cdots & ۰ \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & D_k \end{bmatrix} \qquad (\star)$$

که در آن، D_i بلوکی از D است که متعلق به $F^{d_i \times d_i}$ می‌باشد. واضح است که هر ماتریس به صورت $(\star)$ نیز متعلق به V است. لذا،

$$\mathfrak{B} = \{E_{ij} \ : \ \exists s \in \mathbb{N}_k (d_۱ + \cdots + d_s \gneqq i, j \leqq d_۱ + \cdots + d_{s+۱}) \ \text{یا} \ \ i, j \in \mathbb{N}_{d_۱}\}$$

پایه‌ای برای V است و در نتیجه $\dim_F V = d_۱^۲ + \cdots + d_k^۲$.

۷) با توجّه به قضیهٔ ۸.۴ و تمرینِ ؟؟، حکم بدیهی است.

۸) بنابر گزارهٔ (ب) تمرینِ ۴۷.۴، $\chi_A = x^n$. بنابراین

$$f(x) = \det(xI_n - I_n - A) = \det((x - ۱)I_n - A) = (x - ۱)^n$$

۹) کافی است نشان دهیم $\det(aI_n - A) = ۰$. اگر برای هر $۱ \neq j \in \mathbb{N}_n$، ستون jام را به ستون اوّل ماتریس $aI_n - A$ اضافه کنیم، بنابر فرض درایهٔ ستون اوّل سطر iام برابر با $a - \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} = ۰$ می‌باشد، یعنی؛ ستون اوّل ماتریس حاصل صفر است. لذا $\det(aI_n - A) = ۰$. حال به سادگی دیده خواهد شد که $X \in F^{n \times ۱}$ که همهٔ درایه‌های آن از یک هیأت است، بردار ویژهٔ متناظر به a می‌باشد.

۱۰) فرض کنیم $\alpha \in \ker a_nT^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1T + a_0I$. بنابر فرض $k \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود دارد که $T^k = 0$. از این رو

$$\begin{aligned} a_0^k\alpha &= (a_0I)^k(\alpha) \\ &= (-a_nT^n - a_{n-1}T^{n-1} - \cdots - a_1T)^k(\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

چون $a_0 \neq 0$، پس $a_0^k \neq 0$ و در نتیجه $\alpha = 0$. لذا بنابر قضیهٔ ۲.۴،

$$a_nT^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1T + a_0I$$

T یک به یک است.

۱۱) الف) واضح است که $\chi_A(x) = x^2 - (a+d)x + ad - cb$. حال با کمی محاسبه نتیجه می‌شود که $\chi_A(A) = 0$.

ب) بنابر فرض داریم، $\chi_A(x) = x^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$. لذا $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ و $\lambda_1\lambda_2 = ad - cb$. بنابراین،

$$A\alpha_1 = \begin{bmatrix} ab + b\lambda_1 - ab \\ cb + d\lambda_1 - da \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b\lambda_1 \\ d\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b\lambda_1 \\ \lambda_1(\lambda_1 - a) \end{bmatrix}$$

از این رو $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$ و α_1 بردار ویژهٔ متناظر به مقدار ویژهٔ λ_1 است. برای α_1 به طور مشابه اثبات می‌شود.

ج) چون f چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس A دارای تنها مقدار ویژهٔ می‌باشد، پس $f(x) = (x-\lambda)^2$. فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$. لذا بنابر قضیهٔ تقسیم، $c_0 + c_1x, q(x) \in F[x]$ به قسمی وجود دارند که

$$x^n = f(x)q(x) + c_0 + c_1x \qquad (\star)$$

بنابر گزارهٔ الف، $f(A) = \circ$. پس با قرار دادن A در $(\star)$ به دست می‌آوریم:

$$A^n = c_\circ I_۲ + c_۱ A$$

حال اگر از $(\star)$ مشتق بگیریم و سپس λ را در آن و در $(\star)$ قرار دهیم، چون $f(\lambda) = f'(\lambda) = \circ$، خواهیم داشت:

$$n\lambda^{n-۱} = c_۱$$
$$\lambda^n = c_\circ + c_۱\lambda = c_\circ + n\lambda^n$$

لذا،

$$c_\circ = (۱ - n)\lambda^n$$

حال نتیجه می‌شود،

$$A^n = n\lambda^{n-۱}A + (۱ - n)\lambda^n I_۲$$

۱۲)

۱۳) فرض کنیم $\mathfrak{B}_۱ = \{\alpha_۱, \dots, \alpha_k\}$ پایه‌ای برای W باشد. لذا بنابر قضیهٔ ۱۱.۳، $\alpha_{k+۱}, \dots, \alpha_n \in V$ به قسمی وجود دارند که $\mathfrak{B}_۲ = \{\alpha_۱, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V است. چون W تحت T پایا می‌باشد، پس برای هر $j \in \mathbb{N}_k$، اسکالرهای $a_{۱j}, \dots, a_{kj} \in F$ به قسمی وجود دارند که $T(\alpha_j) = \sum_{i\in\mathbb{N}_k} a_{ij}\alpha_i$ و در نتیجه،

$$[T(\alpha_j)]_{\mathfrak{B}_۲} = [a_{۱j} \; \cdots \; a_{kj} \; \circ \; \cdots \; \circ]^t \in F^{n\times ۱}$$

$$[T(\alpha_j)]_{\mathfrak{B}_۲} = [a_{۱j} \; \cdots \; a_{kj}]^t \in F^{k\times ۱}$$

با توجّه به روند اثبات قضیهٔ ۲۲.۳، $\mathfrak{B}_۳ = \{\alpha_{k+۱} + W, \dots, \alpha_n + W)\}$ پایه‌ای برای $\frac{V}{W}$ است. پس برای هر $k + ۱ \leq j \leq n$، اسکالرهای $c_{۱j}, \dots, c_{rj} \in F$ به قسمی وجود دارند که،

$$\overline{T}(\alpha_j + W) = \sum_{i\in\mathbb{N}_r} c_{ij}(\alpha_{k+i} + W)$$

که در اینجا $r = n - k$. از این رو بنابر خواص همدسته‌ها،

$$T(\alpha_j) - \sum_{i\in\mathbb{N}_r} c_{ij}\alpha_{k+i} \in W$$

و در نتیجه اسکالرهای $b_{۱j}, \ldots, b_{kj} \in F$ به قسمی وجود دارند که،

$$T(\alpha_j) = \sum_{i\in\mathbb{N}_k} b_{ij}\alpha_i + \sum_{i\in\mathbb{N}_r} c_{ij}\alpha_{k+i}$$

از این رو،

$$[T(\alpha_j)]_{\mathfrak{B}_۲} = [b_{۱j} \cdots b_{kj}\ c_{۱j} \cdots c_{rj}]^t \in F^{n\times ۱}$$

$$[\overline{T}(\alpha_j + W)]_{\mathfrak{B}_۲} = [c_{۱j} \cdots c_{rj}]^t \in F^{r\times ۱}$$

حال اگر قرار دهیم،

$C = (c_{ij}) \in F^{r\times r}$ و $B = (b_{ij}) \in F^{k\times r}$ و $A = (a_{ij}) \in F^{k\times k}$

آن گاه،

$$Mat[\overline{T}; \mathfrak{B}_۳] = C \qquad Mat[T|_W; \mathfrak{B}_۱] = A$$

و،

$$Mat[T; \mathfrak{B}_۲] = \begin{bmatrix} A & B \\ ۰ & C \end{bmatrix}$$

لذا بنابر تمرینِ ۳۲.۲،

$$\chi_T = \det(xI_k - A)\det(xI_r - C) = f(x)g(x)$$

۱۴) چون A معکوس‌پذیر است، پس $A + xB$ معکوس‌پذیر نیست اگر و تنها اگر $I_n - xA^{-۱}B$ معکوس‌پذیر نباشد اگر و تنها اگر چندجمله‌ای $\det(I_n - xA^{-۱}B)$ برابر با صفر باشد. لذا با توجّه به فرض برای تعداد متناهی $x \in F$، $A + xB$ معکوس‌پذیر نیست.

۱۵) بنابر تمرینِ ۱۱.۴، T معکوس‌پذیر نیست، از این رو بنابر تعریف دترمینان T و قضایای ۱۷.۲ و ۱۸.۴، $\det(T) = \circ$.

۱٦) واضح است که χ_A یک چندجمله‌ای تکین درجهٔ ۳ می‌باشد. گیریم $\chi_A(x) = x^۳ + a_۲x^۲ + a_۱x + a_\circ$. بنابر تمرینِ ۱۹.۲، $(-۱)^۳a_\circ = \det(A) > \circ$ و در نتیجه $\chi_A(\circ) = a_\circ < \circ$. از طرفی چون $\lim_{x\to\infty} = \infty$، پس وجود دارد $a > \circ$ به قسمی که $\chi_A(a) > \circ$. لذا بنابر قضیهٔ مقدار میانی در حساب دیفرانسیل و انتگرال، χ_A دارای یک ریشه مثبت است، یعنی؛ A یک مقدار ویژهٔ مثبت دارد.

۱۷) فرض کنیم $\lambda = a + ib$ مقدار ویژه A باشد. پس بردار ناصفر $\alpha = X + iY$ به قسمی وجود دارد که $A\alpha = \lambda\alpha$. از این رو $AX = aX - bY$ و $AY = aY + bX$. حال اگر به ترتیب از چپ معادلات را در Y^t و X^t ضرب کنیم، خواهیم داشت،

$$\left\{\begin{array}{lcl} Y^tAX & = & aY^tX - bY^tY \\ X^tAY & = & aX^tY + bX^tX \end{array}\right.$$

و،

$$\begin{array}{lcl} aX^tY + bX^tX & = & X^tAY \\ & = & (Y^tAX)^t \\ & = & (aY^tX - bY^tY)^t \\ & = & aX^tY - bY^tY \end{array}$$

بنابراین،

$$b(X^tX + Y^tY) = b(\sum_{i\in\mathbb{N}_n}(x_i^۲ + y_i^۲)) = \circ$$

و چون $\alpha \neq \circ$، پس $b = \circ$ و در نتیجه $\lambda \in \mathbb{R}$.

۱۸)

۱۹) فرض کنیم $\lambda_۱, \cdots, \lambda_n \in F$ مقادیر ویژه متمایز T باشند و برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، زیر فضای وابسته به مقدار ویژه λ_i را با V_{λ_i} نشان می‌دهیم. در این صورت برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $\dim(V_{\lambda_i}) \geq ۱$ و بنابر قضایای ۱۹.۳ و ۴.۵،

$$n \leq \dim(\sum_{i\in_n} \oplus V_{\lambda_i} \leq \dim(V) = n$$

لذا $\dim(\sum_{i\in\mathbb{N}_n} \oplus V_{\lambda_i} = n$ و بنابر قضیهٔ ۵.۵، T قطری شدنی می‌باشد.

۲۰) $\Rightarrow$ بدیهی است.

$\Leftarrow$ چون A قطری شدنی است، پس پایهٔ مرتب $\mathfrak{B} = \{\alpha_۱, \cdots, \alpha_n\}$ برای $F^{n\times ۱}$ به قسمی وجود دارد که همهٔ عناصر آن بردار ویژه A هستند. با توجّه به $\chi_A(x) = (x-c)^n$، برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $A\alpha_i = c\alpha_i$. لذا اگر $P \in F^{n\times n}$ به قسمی باشد که برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $P^{(i)} = [A\alpha_i]_{\mathfrak{B}}$، آن گاه $P = cI_n$. و از این رو برای $D = cI_n$، داریم $P^{-۱}AP = D$، و در نتیجه $A = cI_n$.

۲۱) الف) چون $\chi_A = x^۲ - tr(A)x + \det(A)$ و بنابر قضیهٔ کیلی $\chi_A(A) = ۰$، پس

$$\begin{array}{rcl} T_A(AX) & = & A^۲X \\ & = & tr(A)AX - \det(A)X \end{array}$$

واضح است که $T(X) = ۰X + AX$، لذا،

$$Mat[T_A; \mathfrak{B}] = \begin{bmatrix} ۰ & -\det(A) \\ ۱ & tr(A) \end{bmatrix}$$

ب) فرض کنیم $\mathfrak{B} = \{\alpha, \beta\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^{۲\times ۱}$ باشد. لذا بنابر فرض و تمرینِ ۱۰.۳، اسکالرهای $x, y \in \mathbb{R}$ به قسمی وجود دارند که $T(\alpha) = x\alpha$ و $T(\beta) = y\beta$. از طرفی برای یک $z \in \mathbb{R}$، $T(\alpha+\beta) = z(\alpha+\beta)$ و در نتیجه $(x-z)\alpha + (y-z)\beta) = ۰$. از آنجا که $\mathfrak{B}$ مستقل خطی است نتیجه می‌شود که $x = y = z$. از این رو $Mat[T; \mathfrak{B}] = x\, I_۲$ و نتیجه می‌شود که T مضرب اسکالری از تبدیل خطی همانی است.

ج) بنابر گزارهٔ (ب)، $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{۲\times ۱}$ به قسمی وجود دارند که $\mathfrak{B}_۱ = \{\alpha, T_A(\alpha)\}$ و $\mathfrak{B}_۲ = \{\beta, T_B(\beta)\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^{۲\times ۱}$ می‌باشند. چون چندجمله‌ایهای مشخصهٔ A و B برابر هستند، پس $\det(A) = \det(B)$ و $tr(A) = tr(B)$. لذا بنابر گزارهٔ (الف)،

$$Mat[T_A; \mathfrak{B}_۱] = \begin{bmatrix} ۰ & -\det(A) \\ ۱ & tr(A) \end{bmatrix} = Mat[T_B; \mathfrak{B}_۲]$$

از طرفی اگر $\mathfrak{B}$ پایهٔ متعارف $\mathbb{R}^{۲\times ۱}$ باشد، آن گاه $Mat[T_A; \mathfrak{B}] = A$ و $Mat[T_B; \mathfrak{B}] = B$. از این رو بنابر قضیهٔ ۲۱.۴، A و B با $Mat[T_B; \mathfrak{B}_۲]$ متشابه است و در نتیجه A و B متشابه می‌باشند.

۲۲) الف) چون برای هر $\alpha \in W_1$، $(g(T))(T(\alpha)) = T(g(T)(\alpha)) = 0$، پس W_1 تحت T پایا است. W_2 نیز به طور مشابه اثبات می‌شود.

ب) فرض کنیم $\alpha \in V$. بنابراین $0 = f(T)(\alpha) = g(T)h(T)(\alpha)$ و در نتیجه $h(T)(\alpha) \in W_2$، یعنی؛ $h(T)[V] \subseteq W_2$ و به طور مشابه $g(T)[V] \subseteq W_1$. بنابر فرض $g_1, h_1 \in F[x]$ به قسمی وجود دارند که،

$$g_1 g + h_1 h = 1$$

لذا،

$$\alpha = id_V(\alpha) = g(T)g_1(T)(\alpha) + h(T)h_1(T)(\alpha)$$

متعلق به $W_1 + W_2$ است. از این رو $V = W_1 + W_2$. فرض کنیم $\alpha \in W_1$ و $\beta \in W_2$ به قسمی باشند که $\alpha + \beta = 0$. در این صورت،

$$0 = h(T)(\alpha + \beta) = h(T)(\alpha)$$

و در نتیجه،

$$\alpha = id_V(\alpha) = g_1(T)g(T)(\alpha) + h_1(T)h(T)(\alpha) = 0$$

به طور مشابه‌ثابت می‌شود $\beta = 0$. لذا بنابر قضیهٔ ۹.۳، $V = W_1 \oplus W_2$.

۲۳) چون λ یک مقدار ویژهٔ ماتریس A است، پس $0 \neq X \in F^{n\times 1}$ به قسمی وجود دارد که $AX = \lambda X$. از طرفی بنابر قضیهٔ ۱۹.۲، $adj(A)\ A = |A|I_n$، و با توجّه به قضیهٔ ۱۷.۲، $|A| \neq 0$، از این رو داریم:

$$\begin{aligned} adj(A)\ A = \lambda\ adj(A)X & \\ &\Rightarrow \quad \det(A)X = \lambda\ adj(A)X \\ &\Rightarrow \quad adj(A)X = \frac{\det(A)}{\lambda}X \end{aligned}$$

لذا $\frac{\det(A)}{\lambda}$ یک مقدار ویژهٔ ماتریس $adj(A)$ است و X بردار ویژهٔ متناظر به مقدار ویژهٔ $\frac{\det(A)}{\lambda}$ می‌باشد.

حال اگر A قطری شدنی باشد، پس $F^{n\times 1}$ دارای یک پایهٔ $\mathfrak{B}$ از بردارهای ویژهٔ A می‌باشد. بنابر قسمت قبل هر عضو $\mathfrak{B}$ بردارهای ویژهٔ ماتریس $adj(A)$ است، پس ماتریس $adj(A)$ قطری‌پذیر می‌باشد.

۲۴) فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ پایه‌ای برای R_T و $\{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای $\ker(T)$ باشند. بنابر قضیهٔ ۱۹.۳، $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای V است. بنابر گزارهٔ (الف) برای هر $i \in \mathbb{N}_r$، $T(\alpha_i) = \alpha_i$ و بدیهی است که برای هر $r + 1 \leq i \leq n$، $T(\alpha_i) = 0$. بنابراین

$$Mat[T; \mathfrak{B}] = \left[\begin{array}{cc} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

و در نتیجه T قطری شدنی است.

۲۵) الف) بنابر برهان قضیهٔ ۱۵.۴، اگر V فضای برداری با بعد n و پایهٔ $\mathfrak{B}$ روی هیأت F باشد، آن‌گاه $T \in L(V, V)$ به قسمی وجود دارد که

$$Mat[T; \mathfrak{B}] = A$$

و در نتیجه برای هر $\alpha \in V$،

$$\begin{array}{rcl} [T^2(\alpha)]_{\mathfrak{B}} & = & A[T(\alpha)]_{\mathfrak{B}} \\ & = & A^2[\alpha]_{\mathfrak{B}} \\ & = & A[\alpha]_{\mathfrak{B}} \\ & = & [T(\alpha)]_{\mathfrak{B}} \end{array}$$

لذا $T^2 = T$ و بنابر تمرینِ ۲۶.۵، ماتریس A قطری شدنی است.

ب) بنابر گزارهٔ (الف)، ماتریس قطری D و ماتریس معکوس‌پذیر P در $F^{n \times n}$ به قسمی وجود دارند که $P^{-1}AP = D$. لذا،

$$\begin{array}{rcl} D^2 & = & P^{-1}APP^{-1}AP \\ & = & P^{-1}A^2P \\ & = & P^{-1}AP \\ & = & D \end{array}$$

فرض کنیم $D = diag(d_1, \dots, d_n)$. پس برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $d_i^2 = d_i$ و در نتیجه $d_i = 0$ یا $d_i = 1$. لذا بنابر قضیهٔ ۲۶.۳، $r(D) = tr(D)$. از این رو بنابر تمریناتِ ۱۰.۱ و ۴۴.۳، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{rcl} r(A) & = & r(D) \\ & = & tr(D) \\ & = & tr(P^{-1}AP) \\ & = & tr(APP^{-1}) \\ & = & tr(A) \end{array}$$

۲۶) واضح است که χ_A در $F[x]$ به عوامل خطی تجزیه می‌شود. فرض کنیم،

$$\chi_A(x) = (x-\lambda_1)^{d_1} + \cdots + (x-\lambda_k)^{d_k}$$

گیریم برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، α_i بردار ویژهٔ متناظر به λ_i باشد. قرار می‌دهیم،

$$P = [\underbrace{\alpha_1\, \alpha_1\, \cdots\, \alpha_1}_{d_1 \text{ مرتبه}} \cdots \underbrace{\alpha_k\, \alpha_k\, \cdots\, \alpha_k}_{d_k \text{ مرتبه}}]$$

و،

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k I_{d_k} \end{bmatrix}$$

بنابراین $AP = PD$.

ب)

۲۷) $\Leftarrow$) هر عنصر $\mathfrak{B}$، یک بردار ویژهٔ T و U است، پس برای $\alpha \in \mathfrak{B}$، $\lambda, \mu \in F$ به قسمی وجود دارند که $T(\alpha) = \lambda\alpha$ و $U(\alpha) = \mu\alpha$. از این رو

$$TU(\alpha) = \lambda\mu\alpha = \mu\lambda\alpha = UT(\alpha)$$

پس بنابر قضیهٔ ۶.۴، $TU = UT$.

$\Rightarrow$) فرض کنیم $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$ مقادیر ویژه T بوده و برای هر $i \in \mathbb{N}$، $V_i = \ker(T - \lambda_i id_V)$. چون T قطری شدنی است، پس بنابر قضیهٔ ۹.۵، برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، V_i تحت T پایا است و برای هر $\alpha \in V_i$، $T(\alpha) = \lambda_i\alpha$، پس

$$T(U(\alpha)) = U(T(\alpha)) = U(\lambda_i\alpha) = \lambda_i U(\alpha)$$

از این رو $U[V_i] \subseteq V_i$، یعنی؛ V_i تحت U پایا است. چون U قطری شدنی است، بنابر قضایای ۲۷.۴ و ۹.۵، $U_i = U|_{V_i} : V_i \to V_i$ قطری شدنی می‌باشد. گیریم $\mathfrak{B}_i$ پایهٔ مرتبی باشد که $Mat[U_i; \mathfrak{B}_i]$ قطری است، پس بنابر قضایای ۲۷.۴ و ۹.۵، $Mat[U; \bigcup_{i=1}^k \mathfrak{B}_i]$ قطری است و آنجا که هر عضو $\bigcup_{i=1}^k \mathfrak{B}_i$ بردار ویژهٔ T است، لازم می‌آید که $Mat[U; \bigcup_{i=1}^k \mathfrak{B}_i]$ قطری باشد.

۲۸) فرض کنیم T_A و T_B عملگرهای خطی وابسته به A و B باشند و $\mathfrak{B}$ پایهٔ متعارف $F^{n\times 1}$ در نظر بگیریم. در این صورت ماتریس نمایش T_A و T_B در پایهٔ مرتب $\mathfrak{B}$ به ترتیب A و B می‌باشند. لذا بنابر تمرینِ ۲۹.۵، حکم برقرار است.

۲۹) فرض کنیم $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ تمام مقادیر ویژه A باشند و برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $\alpha_i \neq 0$ بردار ویژهٔ متناظر به λ_i باشد. لذا بنابر تمرینِ ۲۰.۵، بعد زیرفضای V_{λ_i} وابسته به مقدار ویژه λ_i، یک است و $V_{\lambda_i} = Span(\alpha_i)$. چون،

$$AB\alpha_i = BA\alpha_i = \lambda_i B\alpha_i$$

یعنی؛ $B\alpha_i \in Span(\alpha_i)$، پس $\mu_i \in F$ به قسمی وجود دارد که $B\alpha_i = \mu_i\alpha_i$. بنابراین هر عضو پایهٔ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq F^{n\times 1}$ یک بردار ویژهٔ B می‌باشد، لذا B قطری شدنی است.

۳۰)

۳۱) فرض کنیم $p(x) \in F[x]$ چندجمله‌ای مینیمال T باشد. چون $T^k = 0$، پس بنابر خواص چندجمله‌ای مینیمال $p|x^k$. از طرفی بنابر تعمیم قضیهٔ کیلی هامیلتون، $p|\chi_T$ و در عوامل تحویل‌ناپذیر p و χ_T مشترک می‌باشند و همچنین $\deg(\chi_T) = dim(V) = n$، بنابر این $\chi_T = x^n$. لذا بنابر قضیهٔ کیلی هامیلتون، $\chi_T(T) = T^n = 0$.

۳۲) از تمرین ۳۳.۵، نتیجه می‌شود که $f(x) = x^n$ چندجمله‌ای مشخصهٔ A می‌باشد. لذا بنابر تمرین ۱۹.۲، قرینهٔ ضریب x^{n-1} در f برابر با $tr(A)$ بوده و در نتیجه $tr(A) = 0$.

۳۳) با استقراء روی $n \in \mathbb{N}$ حکم را اثبات می‌کنیم. برای $n = 1$ واضح است. حال فرض کنیم برای کمتر از $2 \leq n \in \mathbb{N}$ برقرار باشد و $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ به قسمی باشند که برای هر $m \in \mathbb{N}$، $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m = 0$. قرار می‌دهیم:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

واضح است که $m \in \mathbb{N}$،

$$tr(D^m) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m = 0$$

فرض کنیم $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ چندجمله‌ای مشخصه D باشد. لذا بنابر قضیهٔ کیلی − هامیلتون $f(D) = 0$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} 0 &= tr(f(D)) \\ &= tr(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I_n) \\ &= tr(D^n) + a_{n-1}tr(D^{n-1}) + \cdots + a_1 tr(D) + a_0 tr(I_n) \\ &= na_0 \end{aligned}$$

از طرفی بنابر تمرینِ ۱۹.۲،

$$0 = a_0 = (-1)^n \det(D) = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

بنابراین $i \in \mathbb{N}_n$ به قسمی وجود دارد که $\lambda_i = 0$. پس برای هر $m \in \mathbb{N}$، $\sum_{i \neq j \in \mathbb{N}_n} \lambda_j^m = 0$ و بنابر فرض استقراء،

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

۳۴) $\Leftarrow$) اگر ماتریس A پوچ‌توان باشد، آن‌گاه برای هر $m \in \mathbb{N}$، ماتریس A^m پوچ‌توان است و بنابر تمرین ۳۴.۵، $tr(A^m) = 0$.

$\Rightarrow$) واضح است که $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$، که در اینجا $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط می‌باشد. چون هیأت اعداد مختلط جبراً بسته است، همه ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه A، در هیأت اعداد مختلط قرار دارد. لذا بنابر قضیهٔ ۱۵.۵، ماتریس بالا مثلثی D و ماتریس معکوس‌پذیر P در $\mathbb{C}^{n\times n}$ به قسمی وجود دارند که $P^{-1}AP = D$. فرض کنیم $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ عناصر روی قطر D باشند. لذا چندجمله‌ای مشخصه A، در هیأت اعداد مختلط به صورت زیر است.

$$f(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$$

واضح است برای هر $m \in \mathbb{N}$،

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& tr(A^m) \\ &=& tr(D^m) \\ &=& \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m \end{array}$$

پس بنابر تمرین ۳۵.۵،

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

از این رو $f(x) = x^n$ و بنابر قضیهٔ کیلی ــ هامیلتون $f(A) = A^n = 0$.

۳۵) بنابر تمرین ۲۸.۲،

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

چندجمله‌ای مشخصهٔ A می‌باشد. لذا بنابر قضیهٔ کیلی هامیلتون $P(A) = 0$. حال فرض کنیم چندجمله‌ای

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m \in F[x]$$

به قسمی باشد که $g(A) = 0$ و $\deg(g(x)) \lneqq n$. تبدیل خطی $T : F^{n\times 1} \to F^{n\times 1}$ با ضابطهٔ $T(X) = AX$ در نظر می‌گیریم.واضح است که اگر

$$\mathfrak{B} = \{E_{11}, E_{21}, \ldots, E_{n1}\} \subseteq F^{n\times 1}$$

آن‌گاه $A = mat[T; \mathfrak{B}]$. بنابراین برای هر $i \in \mathbb{N}_{n-1}$، $A^i E_{11} = T^i(E_{11}) = T(E_{i1}) = E_{(i+1)1}$ و

$$T(E_{n1}) = -a_0 E_{11} - a_1 E_{21} + \cdots - a_{n-1} E_{n1}$$

چون $m \lneqq n$، پس:

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& g(A)E_{11} \\ &=& (b_0 I_n + b_1 A + \cdots + b_{m-1} A^{m-1} + b_m A^m) E_{11} \\ &=& b_0 I_n E_{11} + b_1 A E_{11} + \cdots + b_{m-1} A^{m-1} E_{11} + b_m A^m E_{11} \\ &=& b_0 E_{11} + b_1 E_{21} + \cdots + b_{m-1} E_{m1} + b_m E_{(m+1)1} \end{array}$$

از آنجا که $\mathfrak{B}$ مستقل خطی است، لازم می‌آید که

$$b_0 = b_1 = \cdots = b_m = 0$$

بنابراین A در هیچ چندجمله‌ای ناصفر با درجهٔ کمتر از n صدق نمی‌کند، لذا چندجمله‌ای مینیمال A برابر با $p(x)$ می‌باشد.

۳٦) بنابر تمرین ۳۷.۵، چندجمله‌ای مینیمال ماتریس زیر برابر با x^2 است.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

۳۷) اگر $f(x) = x^3 - 1$، آن گاه $f(A) = 0$. حال چنانچه $p(x)$ چندجمله‌ای مینیمال A باشد، آن گاه $p(x)|(x-1)(x^2+x+1)$. چون $\deg(p(x)) \leq \chi_A(x) = 2$، $p(A) = 0$، و $x^2 + x + 1$ تحویل‌ناپذیر است، لازم می‌آید که $p(x) = \chi_A(x) = x^2 + x + 1$. از این رو $tr(A) = -1$.

۳۸) الف) چون $A \neq 0$، پس برای $r, s \in \mathbb{N}_n$، $a_{rs} \neq 0$ و از طرفی $0 \neq a_{rs}^2 = a_{rr}a_{ss}$، لذا $a_{rr} \neq 0 \neq a_{ss}$. بنابراین

$$\begin{array}{rcl} 0 & \neq & \sum_{k=1}^n a_{rk}^2 \\ & = & \sum_{k=1}^n a_{rr}a_{kk} \\ & = & a_{rr}\sum_{k=1}^n a_{kk} \\ & = & a_{rr}tr(A) \end{array}$$

چون $a_{rr} \neq 0$، پس $tr(A) \neq 0$.

ب) برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$،

$$\begin{array}{rcl} a_{rr}(a_{ij} - a_{ji}) & = & a_{rr}a_{ij} - a_{rr}a_{ji} \\ & = & a_{ir}a_{jr} - a_{jr}a_{ir} \\ & = & 0 \end{array}$$

چون $a_{rr} \neq 0$، پس $a_{ij} = a_{ji}$ و در نتیجه A ماتریس متقارن است.

ج) اگر $A^{۲} = (b_{ij})$، آن‌گاه برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$، چون A ماتریس متقارن است، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{rcl} b_{ij} & = & \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}a_{kj} \\ & = & \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}a_{jk} \\ & = & \sum_{k=۱}^{n} a_{ij}a_{kk} \\ & = & a_{ij}\sum_{k=۱}^{n} a_{kk} \\ & = & a_{ij}tr(A) \end{array}$$

لذا $A^{۲} = tr(A)A$. بنابراین A ریشهٔ چندجمله‌ای $g(x) = x(x - tr(A))$ است. حال اگر $p(x)$ چندجمله‌ای مینیمال A باشد، آن‌گاه $g(x)$ بر $p(x)$ بخش‌پذیر است و در نتیجه $p(x)$ برابر با یکی از چندجمله‌ای زیر است

$$p_{۱}(x) = x, \qquad p_{۲}(x) = x - tr(A), \qquad g(x) = x(x - tr(A))$$

ولی $p_{۱}(A) = A \neq ۰$ و چنانچه $p_{(}A) = A - tr(A)I_n = ۰$، خواهیم داشت که

$A = tr(A)I_n$ و بنابر گزارهٔ (الف)، برای هر $i, j \in \mathbb{N}_n$،

$$\begin{array}{rcl} ۰ & \neq & (tr(A))^{۲} \\ & = & a_{ii}a_{jj} \\ & = & a_{ij}a_{ij} \\ & = & (a_{ij})^{۲} \end{array}$$

پس A نمی‌تواند مضرب ماتریس همانی باشد. از این رو $p(x) = g(x)$.

د) بنابر تعمیم قضیهٔ کیلی — هامیلتون و گزارهٔ (ج)، $p, q \in \mathbb{N}_n$ به قسمی وجود دارند که $p + q = n$ و $f(x) = x^p(x - tr(A))^q$ چندجمله‌ای مشخصهٔ A است. چون بنابر تمرینِ ۱۹.۲، ضریب $x^{n-۱}$ در $f(x)$ برابر با قرینهٔ $tr(A)$ می‌باشد، پس

$$qtr(A) = \left(\begin{array}{c} q \\ q - ۱ \end{array} \right) tr(A) = tr(A)$$

در نتیجه $q = ۱$ و $p = n - ۱$. از این رو $f(x) = x^{n-۱}(x - tr(A))$ چندجمله‌ای مشخصهٔ A است.

۳۹) الف) فرض کنیم $\mathfrak{B} = \{1, x, \dots, x^n\}$. چون برای هر عدد صحیح نامنفی i، $D(x^i) = ix^{i-1}$، پس،

$$Mat[D; \mathfrak{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

از این رو $\chi_A(x) = x^{n+1}$. از طرفی برای هر $k \in \mathbb{N}_n$، $D^k(x^n) \neq 0$ و چون چندجمله‌ای مینیمال D، $\chi_A(x)$ را عاد می‌کند، لازم می‌آید که چندجمله‌ای مینیمال D برابر با x^{n+1} است.

ب) واضح است که،

$$Mat[T; \mathfrak{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{n(n-1)}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

حال بنابر خواص ماتریس‌های بالا مثلثی، $\chi_T(x) = (x-1)^{n+1}$. پس تنها مقدار ویژهٔ T برابر با ۱ است.

۴۰) $\Rightarrow$) فرض کنیم T معکوس‌پذیر باشد ولی $a_0 = 0$. چون f چندجمله‌ای مینیمال می‌باشد و $T^{-1}T = I$، پس

$$\begin{aligned} f(T) = 0 \quad &\Rightarrow \quad T(T^{n-1} + a_{n-1}T^{n-2} + \cdots + a_1 I) = 0 \\ &\Rightarrow \quad T^{-1}T(T^{n-1} + a_{n-1}T^{n-2} + \cdots + a_1 I) = 0 \\ &\Rightarrow \quad T^{n-1} + a_{n-1}T^{n-2} + \cdots + a_1 I = 0 \end{aligned}$$

از این رو T ریشهٔ یک چندجمله‌ای با درجهٔ کمتر از $\deg(f) = n$ صدق می‌کند که با چندجمله‌ای مینیمال بودنِ f مغایرت دارد.

$\Leftarrow$) فرض کنیم $a_0 \neq 0$. بنابر تعریف چندجمله‌ای مینیمال داریم:

$$\begin{aligned} f(T) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_0 I = -T^n - a_{n-1}T^{n-1} - \cdots - a_1 T \\ &\Rightarrow \quad I = a_0^{-1}(-T^n - a_{n-1}T^{n-1} - \cdots - a_1 T) \\ &\Rightarrow \quad I = T(a_0^{-1}(-T^{n-1} - a_{n-1}T^{n-2} - \cdots - a_1 I)) \end{aligned}$$

به طور مشابه:

$$I = (a_0^{-1}(-T^{n-1} - a_{n-1}T^{n-2} - \cdots - a_1 I))T$$

بنابراین T معکوس‌پذیر است.

۴۱) الف) فرض کنیم $I_n - AB$ معکوس‌پذیر است و $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ به قسمی باشد که $(I_n - BA)X = 0$. در این صورت،

$$(I_n - AB)AX = A((I_n - BA)X = 0$$

و از فرض نتیجه می‌شود که $AX = 0$ و به عبارت دیگر، $X = 0$. لذا بنابر قضیهٔ ۹.۲، $I_n - BA$ معکوس‌پذیر است.

ب) فرض کنیم λ مقدار ویژهٔ AB باشد. اگر $\lambda = 0$، آن گاه،

$$\begin{aligned} 0 &= \det(AB) \\ &= \det(A)\det(B) \\ &= \det(B)\det(A) \\ &= \det(BA) \end{aligned}$$

در نتیجه λ مقدار ویژهٔ BA نیز می‌باشد. حال فرض کنیم $\lambda \neq 0$. بنابر خواص دترمینان،

$$\chi_{AB}(\lambda) = \lambda^n \det(I_n - \frac{1}{\lambda}AB) = 0$$

لذا از گزارهٔ (الف)، نتیجه خواهیم شد، $\det(I_n - \frac{1}{\lambda}BA) = 0$ و بنابراین

$$\chi_{BA}(\lambda) = \lambda^n \det(I_n - \frac{1}{\lambda}BA) = 0$$

یعنی؛ λ مقدار ویژهٔ BA است.

ج)

د) درست نیست، زیرا اگر $E_{12}, E_{22} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$، آن گاه $E_{12}E_{22} = E_{12}$ و $E_{22}E_{12} = 0$ و بنابراین x^2 و x به ترتیب چندجمله‌ایهای مینیمال آنها می‌باشند که برابر نیستند.

۴۲) الف) واضح است که ضرب، ضرب اسکالر، و جمع ماتریس‌های قطری، قطری است. لذا هر عضو R_T قطری است.

ب) بنابر تمرینِ ۴۷.۴، حاصل ضرب دو ماتریس بالا (پایین) مثلثی، بالا (پایین) مثلثی می‌باشد و چون ضرب اسکالر و جمع آنها نیز چنین است، پس حکم برقرار می‌باشد.

ج) فرض کنیم $A \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود داشته باشد که تبدیل خطی T پوشا گردد. چون،

$$\ker(T) = \{f(x) \in F[x] : f(A) = ۰\}$$

پس مولد تکین $\ker(T)$، چندجمله‌ای مینیمال A است. گیریم $p(x)$ باشد. لذا بنابر تمرینِ ۳۷.۳، بعد $\frac{F[x]}{\ker(T)}$ برابر با $\deg(p)$ است. از طرفی بنابر قضیهٔ ۵.۴،

$$\frac{F[x]}{\ker(T)} \cong R_T = F^{n\times n}$$

پس بنابر قضیهٔ ۷.۴، $\deg(p) = n^۲$ که با $\deg(p) \leq \deg(\chi_A) = n$ مغایرت دارد.

د) بنابر گزارهٔ (ج)، واضح است.

۴۳) الف) فرض کنیم $f(x) = x^m + a_{m-۱}x^{m-۱} + \cdots + a_۱x + a_۰$ و $g(x) = x^k + b_{k-۱}x^{k-۱} + \cdots + b_۱x + b_۰$ به ترتیب چندجمله‌ایهای مینیمال T و A باشند. واضح است که برای هر $r \in \mathbb{N}$ و $D \in F^{n\times n}$،

$$T^r(D) = A^rD$$

بنابر خواص چندجمله‌ای مینیمال $f(T) = ۰$ و $g(A) = ۰$. پس برای هر $D \in F^{n\times n}$، خواهیم داشت،

$$\begin{aligned}
۰ &= g(A)D \\
&= (A^k + b_{k-۱}A^{k-۱} + \cdots + b_۱A + b_۰I_n)D \\
&= A^kD + b_{k-۱}A^{k-۱}D + \cdots + b_۱AD + b_۰D \\
&= T^k(D) + b_{k-۱}T^{k-۱}(D) + \cdots + b_۱T(D) + b_۰I(D) \\
&= (T^k + b_{k-۱}T^{k-۱} + \cdots + b_۱T + b_۰I)(D) \\
&= g(T)(D)
\end{aligned}$$

از این رو $f(x)|g(x)$ و

$$\begin{array}{rcl} \circ &=& f(T)(D) \\ &=& (T^m + a_{m-1}T^{m-1} + \cdots + a_1T + a_\circ I)(D) \\ &=& T^m(D) + a_{m-1}T^{m-1}(D) + \cdots + a_1T(D) + a_\circ I(D) \\ &=& A^mD + a_{m-1}A^{m-1}D + \cdots + a_1AD + a_\circ D \\ &=& (A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1A + a_\circ I_n)D \\ &=& f(A)D \end{array}$$

لذا $g(x)|f(x)$. از طرفی f و g تکین هستند، بنابراین $f(x) = g(x)$.

۴۴) فرض کنیم $\dim(V) = n$. چون T در چندجمله‌ای $(x-\lambda)^m$ صدق می‌کند، پس اگر $p(x) \in F[x]$ چندجمله‌ای مینیمال T باشد، بنابر خواص چندجمله‌ای مینیمال، $(x-\lambda)^m$ بر $p(x)$ بخش‌پذیر است و در نتیجه تنها عامل $p(x)$، $x-\lambda$ می‌باشد. لذا بنابر تعمیم قضیهٔ کیلی ـ هامیلتون $f(x) = (x-\lambda)^n$ چندجمله‌ای مشخصهٔ T می‌باشد. از این رو تنها مقدار ویژهٔ T، λ است.

۴۵) بنابر برهان تمرین ۵۰.۴، A با ماتریس

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & \circ \end{bmatrix}$$

متشابه است. پس ماتریس معکوس‌پذیر $P \in F^{n\times n}$ به قسمی وجود دارد که $A = P^{-1}DP$. لذا $D^2 = \lambda_1 D$ و در نتیجه

$$A^2 = P^{-1}D^2P = \lambda_1(P^{-1}DP) = \lambda_1 A$$

واضح است که $p(x) = x(x-\lambda_1)$ چندجمله‌ای مینیمال A می‌باشد. لذا بنابر تعمیم قضیهٔ کیلی ـ هامیلتون تنها مقادیر ویژهٔ A، صفر و λ_1 می‌باشد. حال با توجّه به اینکه $\lambda_1 \neq 1$، بنابراین $\det(I_n - A) \neq \circ$، زیرا در غیر این صورت ۱ نیز ریشهٔ چندجمله‌ای مشخصهٔ A می‌باشد که تناقض است. لذا $I_n - A$ معکوس‌پذیر می‌گردد.

۴۶) فرض کنیم $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$ مقادیر ویژه T بوده و برای هر $i \in \mathbb{N}$، $V_i = \ker(T - \lambda_i id_V)$.

$\Leftarrow$) فرض کنیم T قطری شدنی باشد. پس از قضیهٔ ۵.۵، نتیجه می‌شود که اگر $\alpha \in V$، آن‌گاه برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، $\alpha_i \in V_i$ به قسمی وجود دارد که $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$. حال گیریم

$$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k)$$

پس برای هر $i \in \mathbb{N}_k$،

$$\begin{aligned} p(T)(\alpha_i) &= (T - \lambda_1 id_V)(T - \lambda_2 id_V) \cdots (T - \lambda_k id_V)(\alpha_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

و در نتیجه:

$$p(T)(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} p(T)(\alpha_i) = 0$$

بنابراین چندجمله‌ای مینیمال، چندجمله‌ای $p(x)$ را می‌شمارد. لذا بنابر قضیهٔ ۱۳.۵، $p(x)$ چندجمله‌ای مینیمال است.

$\Rightarrow$) فرض کنیم

$$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k)$$

چندجمله‌ای مینیمال T باشد. بنابر قضیهٔ ۹.۵، برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، V_i تحت T پایا است و برای هر $\alpha \in V_i$، $T(\alpha) = \lambda_i \alpha$، پس هر عضو V_i یک بردار ویژه وابسته به λ_i می‌باشد. پس از قضایای ۱۹.۳ و ۹.۵، نتیجه می‌شود که اگر برای هر $i \in \mathbb{N}_k$، $\mathfrak{B}_i$ پایه‌ای برای V_i باشد، آن‌گاه $\bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i$ پایه‌ای برای V است که هر عضو آن یک بردار ویژه برای T می‌باشد. لذا T قطری شدنی است.

۴۷)

۴۸)

کتاب‌نامه

[1] Kenneth Hoffman; Ray Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1971

[۲] مایکل اونان، ترجمهٔ علی اکبر محمدی حسن‌آبادی، جبرخطی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۳

[۳] عبدالرضا بازرگان لاری، جبرخطی کاربردی، انتشارات دانشگاه شیراز، ۱۳۷۹

[۴] تی.اس. بلایس‌وای.اف. رابرتسون، ترجمهٔ دکتر محمد مهدی ابراهیمی جبرخطی ، انتشارات دانشگاه پیام نور، چاپ پنجم آبان ۱۳۸۱

[۵] دکتر ناصررضا ارقامی، جبرخطی برای آمار، دانشگاه پیام نور، چاپ سوّم اسفند ۱۳۷۸