

به نام او

تمرینات مبتدیان خارج حلقه - سری یازدهم - ۹۲، ۱۰، ۲

۱- فرض کنید  $\dim V = n$ ،  $T$  یک عملگر خطی روی  $V$  باشد. درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید:

- الف)  $T$  قطری شدنی است اگر و تنها اگر  $n$  بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد.  
 ب) اگر  $T$  قطری شدنی باشد، آنگاه  $T$  مقدار ویژه  $n$  همواره دارد.  
 ج) اگر  $T$  مقدار ویژه  $n$  همواره داشته باشد، آنگاه  $T$  قطری شدنی است.  
 د) اگر  $n=2$  و  $B$  یک پایه  $V$  باشد و  $A = M(T, B)$ ، آنگاه

$$A^2 - (\text{tr} A)A + (\det A)I_r = 0$$

(سج ۱)

۲- فرض کنید  $\dim V < \infty$  و  $T, S$  عملگرهای خطی روی  $V$  باشند. اگر  $S$  به مقدار  $\dim V$  مقدار ویژه  $n$  همواره داشته باشد و  $TS = ST$ ، آنگاه  $T$  قطری شدنی است.

(سج ۱)

۳- فرض کنید  $T: M_r(\mathbb{C}) \rightarrow M_r(\mathbb{C})$  و  $A \in M_r(\mathbb{C})$  عملگر خطی به صورت زیر باشد:

$$T(X) = AX - XA$$

آنگاه اگر  $A$  قطری شدنی باشد،  $T$  نیز قطری شدنی است. (سج ۱)

۴- فرض کنید  $V$  یک فضای ضرب داخلی باشد و  $u, v, w \in V$ . کدام یک از گزاره‌ها

زیر درستی و کدام درستی است؟

(الف)  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| + \|v\|$

(ب)  $|\langle u, v \rangle| \leq \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2)$

(ج)  $|\langle u, v \rangle| \leq |\langle u, w \rangle| + |\langle w, v \rangle|$

(پراهانها: گزاره‌های فوق به ترتیب نادرست، درست، نادرست است)

(سطح ۲)

۵- دو فضای بردار  $P_3[x]$  (فضای چندجهت‌ها از درجه حداکثر ۳ روی میدان  $\mathbb{R}$ ) ضرب داخلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

الف) آء  $f(x)=1$  یک بردار یک در  $P_3[x]$  است؟

ب) یک پایه متعامد برای زیرفضای تولیدشده توسط  $\{x, x^2\}$  بیابید.

(ج) اگر تعریف کنیم  $[f, g] = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ ، آیا یک ضرب داخلی روی  $P_3[x]$  است؟  
(سطح ۲)

۶- فرض کنیم  $V$  یک فضای ضرب داخلی باشد و  $W$  زیرفضای  $V$  باشد. تعریف

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}$$

می‌کنیم  
نائب باشد

(سطح ۲)  $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$