



جبر خطی کاربردی

نیمسال اول ۹۸-۹۷

مدرس: دکتر ناظر فرد



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

تمرین شماره ۲

توجه!!! :

- تمرین زیر مربوط به فصل ۲ (جبر ماتریسی) می باشد که شامل ۷ سوال نظری و ۲ سوال شبیه سازی است .
- پاسخ های تمرین را در قالب یک فایل به صورت الگوی زیر آپلود کنید.
- مهلت تحویل تمرین رور دوشنبه ۹۷/۸/۱۴ ساعت ۲۳:۵۵ خواهد بود.

تمرین:

۱. اگر ممکن است ماتریس  $A_{4 \times 3}$  را بسازید به طوریکه  $\dim Nul A = 2$  و  $\dim Col A = 2$  . (اگر نیست توضیح دهید چرا)

۲. فرض کنید که  $b_1, b_2, \dots, b_p$  زیرفضای  $W$  را  $span$  کنند و  $a_1, a_2, \dots, a_q$  یک مجموعه از درون  $W$  است که بیش تر از  $P$  تا برداردارد ( $q > p$ ) نشان دهید مجموعه ی  $a_1, a_2, \dots, a_q$  وابسته ی خطی است .

۳. فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد و ماتریس های  $C, D : n \times m$  موجود باشند به طوری که  $AD = I_m$  و  $CA = I_n$  . ثابت کنید  $m = n$  و  $C = D$  . (راهنمایی به ضرب  $CAD$  فکر کنید)

۴. فرض کنید  $A, B$  و  $X$  ماتریس های  $n \times n$  هستند و  $A, X$  و  $A - AX$  وارون پذیرند فرض کنید

$$(A - AX)^{(-1)} = X^{(-1)}B \quad (1)$$

الف) توضیح دهید چرا  $B$  وارون پذیر است.

ب) معادله (۱) را برای  $X$  حل کنید. اگر نیاز دارید تا ماتریسی را وارون کنید ، توضیح دهید چرا وارون پذیر است.

۵. معادله تولید  $x = Cx + d$  ،  $Leontief$  ، معمولاً همراه یک معادله هزینه ی دوگانه است:

$$p = C^T p + v$$

که  $p$  بردار هزینه و درایه هایش قیمت بر حسب واحد هستند برای هر بخش خروجی و  $v$  بردار ارزش افزوده است که درایه هایش ارزش افزوده بر واحد خروجی را نشان میدهد . (ارزش افزوده شامل کارمزد، سود، ضرر و ...) تولید ناخالص داخلی ( $GDP$ ) را می توان به دو شکل نمایش داد :

$$GDP = p^T d = v^T x$$

تساوی دوم را ثابت کنید (راهنمایی  $p^T x$  را به دو صورت حساب کنید)

۶. فرض کنید ماتریس  $A$  معکوس پذیر است، توضیح دهید چرا  $A^T A$  هم معکوس پذیر است. سپس نشان دهید

$$A^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T$$

۷. با داشتن بردار  $X$  و ماتریس  $B$ ،  $[X]_B$  را بدست آورید .  
(الف)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 19 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

۸. برنامه ای بنویسید که یک ماتریس  $m \times n$  به عنوان ورودی بگیرد و  $dimCOLA$  و  $dimNULA$  را به عنوان خروجی بدهد. ورودی: در خط اول دو عدد  $n, m$  داده میشوند و در  $m$  خط بعدی در خط  $j$  ام  $n$  عدد به عنوان اعداد سطر  $j$  ام داده میشوند. خروجی: دو عدد که اولی  $dimCOLA$  و دومی  $dimNULA$  ماتریس ورودی است.

۹. برنامه ای بنویسید که با داشتن بردار  $X : n \times 1$  و ماتریس  $B : m \times n$ ،  $[X]_B$  را به عنوان خروجی بدهد. ورودی: در خط اول دو عدد  $n, m$  داده میشوند و در  $n$  خط بعدی در هر خط ۱ عدد به عنوان سطر  $i$  ام بردار  $X$  و در  $m$  خط بعدی در خط  $j$  ام  $n$  عدد به عنوان اعداد سطر  $j$  ام ماتریس  $B$  داده می شوند. خروجی:  $m$  عدد در  $m$  خط به عنوان اعداد بردار  $[X]_B$ . (در هر خط یک عدد قرار دهید که نشان دهنده ی عدد آن سطر است)