به نام او

تمرینات مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - سری پنجم

۱- چندجمله‌ای مشخصه‌ی $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ را محاسبه کرده و درستی قضیه کیلی - همیلتون را برای آن تحقیق کنید. (سطح ۱)

۲- در مورد درستی یا نادرستی گزاره زیر نظر دهید: (سطح ۱)

اگر چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس‌های A و B یکسان باشد، آنگاه A و B مقادیر ویژه یکسان دارند و برعکس.

۳- فرض کنید $A \in M_n(F)$ و $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی آن باشد. ثابت کنید $a_{n-1} = -\operatorname{tr}A$. (سطح ۲)

۴- ثابت کنید هر ماتریس $A \in M_n(F)$ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو ماتریس معکوس‌پذیر نوشت. (سطح ۲)

۵- فرض کنیم $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ و $f(x)$ چندجمله‌ای مشخصه B باشد. ثابت کنید ماتریس $f(A)$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر A و B مقدار ویژه‌ی مشترک نداشته باشند. (سطح ۲)

۶- فرض کنید برای $A \in M_n(F)$ دو مقدار ویژه‌ی λ_1 و λ_2 را داشته باشیم و u_1 و u_2 بردارهای ویژه‌ی وابسته به این دو باشند. نشان دهید $u_1 + u_2$ نمی‌تواند مقدار ویژه باشد. (سطح ۱)

۷- اگر $A \in M_n(\mathbb{R})$، نشان دهید عدد حقیقی مثبت λ وجود دارد که $I_n - \frac{1}{\lambda}A$ معکوس‌پذیر باشد. (سطح ۱)

۸- فرض کنید $A,B \in M_n(\mathbb{R})$ و A معکوس پذیر باشد. ثابت کنید حداکثر n عدد حقیقی t وجود دارد که $tA+B$ معکوس پذیر نباشد. (سطح ۳)

۹- ماتریس $A \in M_3(\mathbb{C})$ را در نظر بگیرید $tr(A)=tr(A^{-1})=0$ و $\det A=1$. ثابت کنید $A^3=I_3$. (سطح ۳)