

سوال

فرض کنید A یک ماتریس 3×3 باشد و $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $W = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. همچنین داریم $Aw = 2w$ و $Av = -v$. مقدار $A^5 \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix}$ را بیابید.

پاسخ سوال

- از آنجا که اطلاعات داده شده فقط بر حسب v و w است، پس ما ابتدا $\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix}$ را بر حسب ترکیب خطی ای از v و w بدست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$$

ماتریس افزونه آن به شکل زیر خواهد بود:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ -1 & 3 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 5 & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -10 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[R_3-R_2]{R_1-2R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v} - 2\mathbf{w} \text{ و } b = -2 \text{ و } a = 3 \text{ پس}$$

حال باید مقدار زیر را محاسبه کنیم:

$$A^5 \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = A^5(3\mathbf{v} - 2\mathbf{w}) = 3A^5\mathbf{v} - 2A^5\mathbf{w} \quad (*)$$

طبق فرض می دانیم $Av = -v$ و با تکرار آن داریم $A^5\mathbf{v} = (-1)^5\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.
به طور مشابه با استفاده از $Aw = 2w$ داریم $A^5\mathbf{w} = 2^5\mathbf{w} = 32\mathbf{w}$.

با جایگذاری این دو در معادله (*) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A^5 \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} &= 3(-\mathbf{v}) - 2(32\mathbf{w}) \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - 64 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 - 128 \\ -6 + 64 \\ 3 - 192 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -131 \\ 58 \\ -189 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$