به نام او

تمرینات درس مبانی ماتریس ها و جبر خطی - سری پنجم ۹۶/۲/۱۳

۱- فرض کنید $\{v_1,\dots,v_k\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی از فضای برداری V، باشد و $\{w_1,\dots,w_k\}$ یک زیرمجموعه از V باشد. ثابت کنید نگاشت خطی $\varphi: V \to V$ وجود دارد که $\varphi(v_i)=w_i$ برای هر $i=1,\dots,k$. با چه شرطی روی $\{v_1,\dots,v_k\}$، φ یکتاست؟

۲- فرض کنید $T: V \to W$ یک نگاشت خطی باشد و $v_1,\dots,v_n \in V$. کدام گزاره درست و کدام غلط است؟

الف) اگر $\{v_1,\dots,v_n\}$ مستقل خطی باشد، آنگاه $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}$ مستقل خطی است.

ب) اگر $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}$ مستقل خطی باشد، آنگاه $\{v_1,\dots,v_n\}$ مستقل خطی است.

۳- فرض کنید P_2 فضای برداری چندجمله‌ای ها از درجه حداکثر ۲ با ضرایب از $\mathbb{R}$ در متغیر x باشد. پایه های B و C به صورت زیر از این فضا را در نظر بگیرید:

$$B=\{1,x,x^2\}$$
$$C=\{1,x-1,(x-1)^2\}$$

ماتریس P_C^B، P_B^C و مختصات $f(x)=x-3$ را نسبت به این دو پایه بنویسید.

۴- فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ نگاشت خطی است، $f(1,2)=(1,0,1)$ و $f(0,1)=(2,-1,1)$ است. ضابطه‌ی f را تعیین کنید.

۴- در هر مورد آیا تابع داده شده یک نگاشت خطی است؟ در صورتی که پاسخ مثبت است، پایه‌ای برای $\ker f$ و $\operatorname{Im} f$ بنویسید:

الف) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y) \longmapsto (x^2, 2y)$

ب) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (2x+y, -y)$

ج) $f: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$
$A \longmapsto A + A^t$

۵- فرض کنید V و W فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{Q}$ باشند و $T: V \to W$ نگاشتی باشد که $T(v_1+v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ برای هر $v_1, v_2 \in V$.
ثابت کنید T یک نگاشت خطی است.

۶- فرض کنید F میدانی با ۹ عضو باشد. نشان دهید فضای برداری روی میدان F با ۷۲ عضو وجود ندارد.

* این هفته کوئیز نخواهیم داشت.