

به نام او

تمرینات مابین ماتریس و جبر خطی - سری اول . ۹۵، ۱۱، ۲۰

- ۱- فرض کنید  $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$  . هر یک از گزاره‌های زیر را ثابت یا رد کنید .  
الف) اگر  $A \neq 0$  و  $AB = AC$  ، آنگاه  $B = C$  .  
ب) اگر  $A$  یاقسمت‌پذیر و وارانش پذیر باشد ،  $A^{-1}$  نیز یاقسمت‌پذیر است . (سطح ۱)

- ۲- الف) فرض کنید  $A, B \in M_n(F)$  ماتریس‌های قطری باشند . نشان دهید  $AB$  نیز ماتریس قطری است و  $AB = BA$  .  
ب) فرض کنید  $A \in M_n(F)$  : اگر برابر هر  $B \in M_n(F)$  داشته باشیم

$$AB = BA, \text{ ثابت کنید } \lambda \in F \text{ وجود دارد که } A = \lambda I_n .$$

(سطح ۱)

- ۳- برابر  $A \in M_4(F)$  داریم  $A^4 + 3A^2 - 7A + 2I_4 = 0$  . نشان دهید  $A$  وارانش پذیر است . (سطح ۱)

- ۴- با عملیات سطر مقدماتی مکس ماتریس زیر را بسازید : (سطح ۱)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ۵- فرض کنید  $A \in M_n(F)$  یک ماتریس بلاشتی باشد . با یک از طرق عمده سطر مقدماتی روی  $A$  و ماتریس‌های هم از سطر با آن ، ثابت کنید  $A$  مکس پذیر است اگر و تنها اگر هر عضو روی قطر اصلی آن صفر

باشد. ثابت کنید در این حالت  $A^{-1}$  نیز بلا مشکی است... (مسئله ۲)

۶- ثابت کنید  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  وجود ندارند که  $AB - BA = I_n$ .  
(مسئله ۲)

۷- اگر  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  و  $AB - BA = A$ ، ثابت کنید  $A$  معکوس پذیر نیست.  
(مسئله ۲)

۸- فرض کنید  $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ . ثابت کنید

الف) اگر  $A^*AB = 0$  آنگاه  $AB = 0$ .

ب) اگر  $A^*AB = A^*AC$ ، آنگاه  $AB = AC$ .

(مسئله ۲)