دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

کاربرد های جبر خطی

نیم‌سال دوم ۹۷-۹۶

مدرس: دکتر امیرمزلقانی

پاسخ تمرین سری دوم

توجه:

- دانشجویان گرامی پاسخ های سوالات را به دقت بخوانید و با پاسخ های خود مقایسه کنید تا در صورتی که سوالی را نتوانسته اید حل کنید یا غلط حل کرده اید متوجه آن شوید.
- روز یکشنبه ۱۹ فروردین ماه کلاس حل تمرین با موضوع بررسی مسائل تمرین دوم ساعت ۱۲:۳۰ تا ۱۳:۱۵ در کلاس ۰۱ تشکیل خواهد شد.

حل. سوال ۱.

الف)

$$A^2 = I \to A^2 = -I$$

$$\det(A^2) = \det(-I) \to \det(A^2) = (-1)^n \to \det(A) \cdot \det(A) = -1$$

$$\det(A)^2 = (-1)^n \to \text{n is even}$$

ب)

$$A^n = 0$$

$$I - A^n = I \to (I - A) \cdot (1 + A^2 + A^3 + \cdots + A^{n-1}) = I$$

$$(1 + A^2 + A^3 + \cdots + A^{n-1}) = A^{-1}$$

حل. سوال۲.

الف) درایه a_{ij} از ماتریس A^2 برابر با مجموع زیر است:

$$a_{i1}.a_{1j} + a_{i2}.a_{2j} + a_{i3}.a_{3j} + \cdots + a_{in}.a_{nj}$$

یک بودن مقدار a_{i1} وجود یال از راس i به راس ۱ و عنصر a_{1j} وجود یال از راس ۱ به راس j را نشان می‌دهند. در اینصورت یک بودن مقدار $a_{i1}.a_{1i}$ وجود مسیری به طول ۲ که از i به j که از راس ۱ می‌گذرد را نشان می‌دهد. پس مجموع بالا تعداد همهی مسیرهای به طول دو از i به j را نشان می‌دهد.

ب)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

حل. سوال۳.

الف)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

ب) متقارن است:

$$\begin{pmatrix} 30 & 17 \\ 17 & 85 \end{pmatrix}$$

ج) اگر عناصر ماتریس M را m_{ij} وعناصر ماتریس $M+M^T$ را با b_{ij} نشان دهیم داریم :

$$b_{ij} = m_{ij} + m_{ji}$$
$$b_{ji} = m_{ji} + m_{ij}$$
$$\to b_{ij} = b_{ji}$$

د) اگر عناصر ماتریس M را m_{ij} وعناصر ماتریس $M-M^T$ را با b_{ij} نشان دهیم داریم :

پاد متقارن است.

$$b_{ij} = m_{ij} - m_{ji}$$
$$b_{ji} = m_{ji} - m_{ij}$$
$$\to b_{ij} = -b_{ji}$$

ه)

$$M_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \to (M_i(c))^T = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = M_i(c)$$

$$P_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \to (P_{ij})^T=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}=P_{ij}$$

$$A_{ij}(m)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & m & & 0 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \to (A_{ij}(m))^T=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & m & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}=A_{ji}(m)$$

حل. سوال۴.

$$B=\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C^{-1}+D^{-1} & C^{-1}-D^{-1} \\ C^{-1}-D^{-1} & C^{-1}+D^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (A+B)^{-1}+(A-B)^{-1} & (A+B)^{-1}-(A-B)^{-1} \\ (A+B)^{-1}-(A-B)^{-1} & (A+B)^{-1}+(A-B)^{-1} \end{pmatrix}$$

$\to$

$a_{11}=A.(A+B)^{-1}+A.(A-B)^{-1}+B.(A+B)^{-1}-B.(A-B)^{-1}=(A+B).(A+B)^{-1}+(A-B).(A-B)^{-1}=2$

$a_{22}=B.(A+B)^{-1}-B.(A-B)^{-1}+A.(A+B)^{-1}+A.(A-B)^{-1}=(A+B).(A+B)^{-1}+(A-B).(A-B)^{-1}=2$

$a_{12}=A.(A+B)^{-1}-A.(A-B)^{-1}+B.(A+B)^{-1}+B.(A-B)^{-1}=(A+B).(A+B)^{-1}-(A-B).(A-B)^{-1}=0$

$a_{21}=B.(A+B)^{-1}+B.(A-B)^{-1}+A.(A+B)^{-1}-A.(A-B)^{-1}=(A+B).(A+B)^{-1}-(A-B).(A-B)^{-1}=0$

$B=2I$

حل. سوال۵.

الف) صحیح است. اگر ماتریس مربعی M را در نظر بگیریم ماتریس $\frac{M+M^T}{2}$ متقارن است.

ب)

$$a=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \det(a)=0$$

ج) میدانیم trace(AB) = trace(BA). تابع trace برابر با جمع درایه‌های قطر اصلی یک ماتریس مربعی است.

داریم:

$$AB-BA=I \to trace(AB-BA)=trace(I) \to trace(AB)-trace(BA)=n$$
$$\to trace(AB)-trace(AB)=n$$

د) داریم:

$$A=B^4+3B^2+7B+3I=(B+I)(B^3-B^2+4B+1)$$
$$\to B=-I \to \det(A)=0$$

حل. سوال۶.

$$A_{11}=I_4, A_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_{21}=0, A_{22}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} A_{11}^2+A_{12}A_{21} & A_{11}A_{12}+A_{12}A_{22} \\ A_{21}A_{11}+A_{22}A_{21} & A_{21}A_{12}+A_{22}^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & A_{12}+A_{12}A_{22} \\ 0 & A_{22}^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

حل. سوال۷.

$$A = PDP^{-1} \rightarrow A^2 = PDP^{-1}.PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$
$$\rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$$

$$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

حل. سوال۸.

۱)

H	A	P	P	Y	N	E	W	Y	E	A	R
7	0	15	15	24	13	4	22	24	4	0	17

$$\begin{pmatrix} H & A & P & P \\ Y & N & E & W \\ Y & E & A & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 15 & 15 \\ 24 & 13 & 4 & 22 \\ 24 & 4 & 0 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{key=2413} \begin{pmatrix} 3 & 15 & 7 & 15 \\ 13 & 22 & 24 & 4 \\ 4 & 17 & 24 & 0 \end{pmatrix} = W$$

$$W^T = \begin{pmatrix} 3 & 13 & 4 \\ 5 & 22 & 17 \\ 7 & 24 & 24 \\ 15 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow encrypted = 3.13.4.5.22.17.7.24.24.15.4.0$$

۲)

در صورتی که عملیات مجاز جابه‌جایی سطر و ترانهاده کردن باشد ابتدا عملیات ترانهاده را انجام داده سپس با استفاده از کلید به جا به جایی سطرها می‌پردازیم.

۳)

$$\begin{pmatrix} 13 & 4 & 14 & 8 & 14 \\ 22 & 13 & 3 & 7 & 14 \\ 7 & 0 & 14 & 17 & 14 \\ 24 & 12 & 10 & 11 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & E & O & I \\ O & W & N & D \\ H & O & H & A \\ O & R & O & Y \\ M & K & L & S \end{pmatrix} = W$$

$$W^T = \begin{pmatrix} N & O & H & O & M \\ E & W & O & R & K \\ O & N & H & O & L \\ I & D & A & Y & S \end{pmatrix} \rightarrow decrypted = NO.HOME.WORK.ON.HOLIDAYS$$

حل. سوال۹.

۱) با بسط دادن روی عنصر $A_{(m+n)(m+n)}$ ام ماتریس داریم:

$$\det(\begin{pmatrix} X & Y_{m,n} \\ 0_{n,m} & I_n \end{pmatrix}) = 1.\det(\begin{pmatrix} X & Y_{m,n-1} \\ 0_{n-1,m} & I_{n-1} \end{pmatrix}) = 1^2.\det(\begin{pmatrix} X & Y_{m,n-2} \\ 0_{n-2,m} & I_{n-2} \end{pmatrix})$$

$$= \cdots = 1^{n-1}.\det(\begin{pmatrix} X & Y_{m,1} \\ 0_{1,m} & I_1 \end{pmatrix}) = \det(X)$$

۲) داریم :

$$Y = \begin{pmatrix} -I_{m,m} & A \\ 0 & I_{n,n} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{pmatrix}$$

$$YX = \begin{pmatrix} -AB & 0 \\ -B & I \end{pmatrix} \rightarrow \det(YX) = \det(\begin{pmatrix} -AB & 0 \\ -B & I \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} -AB & 0 \\ -B & I \end{pmatrix}^T)$$

$$\det(Y).\det(X) = (-1)^m.\det(AB) \rightarrow (-1)^m.\det(X) = (-1)^m.\det(AB)$$

$$\rightarrow \det(X) = \det(AB)$$

۳) با اضافه کردن ضریبی از یک سطر به سطر دیگر یک ماتریس مقدار دترمینان آن تغییر نمی‌کند. داریم:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \det(A) = \det(A^T) = \det(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(\begin{pmatrix} \sum_{1}^{n} a_{1i} & \dots & \sum_{1}^{n} a_{ni} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ & & \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}) = 0$$