

سوال:

فرض کنید دو بردار  $u$  و  $v$ ، دو بردار مستقل خطی در فضای برداری  $\mathbb{R}^3$  باشند. همچنین فرض کنید  $P$  صفحه ای است که شامل نقاط  $u, v$  و صفر (مبدأ) می باشد. معادله پارامتری صفحه  $P$  برابر است با  $x = tu + sv$  ( $t, s \in \mathbb{R}$ ). در صورتی که تبدیل خطی مانند  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  تعریف شده باشد، اعمال این تبدیل خطی بر صفحه  $P$ ، یا (الف) یک صفحه را گذرا از مبدأ را منتج می شود، یا (ب) یک خط که از مبدأ می گذرد و یا (ج) بردار صفر (مبدأ در  $\mathbb{R}^3$ ) خواهد بود. توضیح دهید برای این که اعمال تبدیل خطی  $T$  بر صفحه  $P$  منجر به هر یک از حالات (الف)، (ب) و (ج) شود، حاصل  $T(u)$  و  $T(v)$  باید دارای چه وضعیتی باشند؟

پاسخ:

هر نقطه  $x$  در صفحه  $P$  معادله پارامتری  $x = tu + sv$  ( $t, s \in \mathbb{R}$ ) را برآورده می کند. از آن جایی که تبدیل  $T$ ، یک تبدیل خطی است، بنابراین تصویر  $T(x)$  معادله پارامتری را حفظ می کند.

$$T(x) = T(tu + sv) = tT(u) + sT(v) \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

پس نتیجه می گیریم که مجموعه تصاویر این صفحه،  $\text{Span}\{T(u), T(v)\}$  خواهد بود.

(الف) در صورتی که  $T(u)$  و  $T(v)$  مستقل خطی باشند، آنگاه  $\text{Span}\{T(u), T(v)\}$  صفحه ای خواهد بود که از نقاط  $T(u), T(v)$  و  $0$  می گذرد.

(ب) در صورتی که  $T(u)$  و  $T(v)$  وابسته خطی بوده و هر دو همزمان صفر نباشند، آنگاه  $\text{Span}\{T(u), T(v)\}$  خطی گذرا از مبدأ خواهد بود.

(ج) در صورتی که  $T(u) = T(v) = 0$  باشد، آنگاه  $\text{Span}\{T(u), T(v)\}$  مجموعه برداری  $\{0\}$  خواهد بود.