بردارهای $y = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}$، $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر زیرفضای W از $span\{v_1 , v_2\}$ به وجود

بیاید، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) نزدیک ترین نقطه به y در زیرفضای W.

ب) فاصله y از زیرفضای W.

پاسخ الف)

Note that $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ are orthogonal. The Best Approximation Theorem says that $\hat{\mathbf{y}}$, which is the orthogonal projection of y onto $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, is the closest point to $\mathbf{y}$ in W. This vector is

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

پاسخ ب)

The distance from the point $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^4$ to a subspace W is defined as the distance from $\mathbf{y}$ to the closest point in W. Since the closest point in W to $\mathbf{y}$ is $\hat{\mathbf{y}} = \text{proj}_W \mathbf{y}$, the desired distance is $\| \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \|$. One computes that

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}, \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ and } \| \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \| = 8.$$