

سوال:

فرض کنید  $T$  یک تبدیل خطی یک به یک می باشد، بنابراین  $T(u) = T(v)$  همیشه  $u = v$  را نتیجه می دهد. نشان دهید در صورتی که مجموعه تصاویر  $\{T(v_1), \dots, T(v_p)\}$  وابسته خطی باشد، آن گاه مجموعه برداری  $\{v_1, \dots, v_p\}$  نیز وابسته خطی خواهد بود.

پاسخ:

در صورتی که  $\{T(v_1), \dots, T(v_p)\}$  وابسته خطی باشد، در این صورت، در میان ضرایب  $c_1, \dots, c_p$  حداقل یک مقدار غیرصفر وجود خواهد داشت.

$$c_1 T(v_1) + \dots + c_p T(v_p) = 0$$

از آن جایی که این تبدیل خطی می باشد می توان از خواص خطی بود استفاده کرد.

$$T(c_1 v_1 + \dots + c_p v_p) = c_1 T(v_1) + \dots + c_p T(v_p) = 0 = T(0)$$

از آن جایی که ترکیب یک به یک می باشد، می توان از

$$T(c_1 v_1 + \dots + c_p v_p) = T(0)$$

نتیجه گرفت که

$$c_1 v_1 + \dots + c_p v_p = 0$$

از آن جایی که در این رابطه ترکیب خطی، تمامی ضرایب صفر نمی باشند و حداقل یک مقدار غیرصفر وجود دارد،  $\{v_1, \dots, v_p\}$  وابسته خطی خواهد بود.