جبرخطی کاربردی

نیمسال دوم ۹۶ـ۹۷

مدرس :دکتر ناظر فرد

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات

پاسخ تمرین سری ۳

توجه!!! :

پاسخ سوالات را به دقت از سولوشن که بر روی کانال قرار گرفته است بیابید و به طور کامل مطالعه کنید،برخی سوالات دارای پاسخ بدیهی بودند که صرفا برای تمرین بیشتر در نظر گرفته شده بودند که از آوردن حل آن ها خودداری کردیم.

تمارین:

۱. در هر مورد مشخص کنید آیا زیر مجموعه ی داده شده یک زیر فضا از فضای برداری مشخص شده می باشد یا خیر.

۱. تمامی زوج مرتب هایی مثل (x, y) از $\mathbb{R}^2$ با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر زیر:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', 0), c(x, y) = (cx, 0)$$

۲. $\{(a, b, a + b)|a, b \in \mathbb{R}\}$ در فضای برداری $\mathbb{R}^3$.

۳. $\{A \in M_n(\mathbb{R})|\det(A) = 0\}$ در $M_n(\mathbb{R})$. (منظور از $M_n(\mathbb{R})$ مجموعه تمام ماتریس های $n \times n$ با درایه هایی از مجموعه اعداد حقیقی است.)

۴. $\{p(x)|p(x) = p(-x), p(x) \in \mathbb{P}[x]\}$ در فضای برداری $\mathbb{P}[x]$ (تمامی چند جمله های حداکثر از درجه n با ضرایب حقیقی را با نماد $\mathbb{P}_n[x]$ نشان می دهیم و همچنین مجموعه تمام چند جمله ها با ضرایب حقیقی را با $\mathbb{P}[x]$ نشان می دهیم)

۵. $\{p(x)|p(x) = ax^2, a \in \mathbb{R}\}$ در فضای برداری $\mathbb{P}_3[x]$.

۲. اگر V, W فضا ها برداری باشند، $V \times W$ تمام زوج مرتب هایی به شکل (v, w) است که $v \in V, w \in W$ و تعریف می کنیم:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

و

$$k(v, w) = (kv, kw), \qquad k \in \mathbb{R}$$

۱. نشان دهید $V \times W$ یک فضای برداری است.

۲. نشان دهید اگر بعد V و W متناهی باشد آنگاه بعد $V \times W$ نیز متناهی است.

۳. بعد $V \times W$ را در صورتی که $dimV = m, dimW = n$ بیابید.

۴. توضیح دهید چرا $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ با $\mathbb{R}^3$ یکسان است.

۵. پایه ای برای $\mathbb{R}^2 \times M_2(\mathbb{R})$ بیابید.

۶. بعد $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ را بیابید.

(a) It is obvious that $V \times W$ is closed under the addition and scalar multiplication. If 0_v and 0_w are zero vectors of V and W, respectively, then $(0_v, 0_w)$ is the zero vector of $V \times W$. It is routine to check that other conditions for a vector space are also satisfied.

(b) If $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ is a basis for V and $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ is a basis for W, one may show that (α_i, β_j), $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, form a basis for $V \times W$.

(c) mn.

(d) Identify $(x, (y, z)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ with $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(e) Let $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Then e_1, e_2 are a basis for $\mathbb{R}^2$. Let E_{ij} be the 2×2 matrix with (i, j)-entry 1 and all other entries 0, $i, j = 1, 2$. Then E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} are a basis for $M_2(\mathbb{R})$. The eight vectors (e_s, E_{ij}), $s = 1, 2$, $i, j = 1, 2$, form a basis for $\mathbb{R}^2 \times M_2(\mathbb{R})$.

(f) 16.

حل. ◀

۳. فرض کنید $W_۱, W_۲$ زیر فضا های فضای برداری V باشند، تعریف می کنیم :

$$W_۱ + W_۲ = \{w_۱ + w_۲ | w_۱ \in W_۱, w_۲ \in W_۲\}$$

.

۱. نشان دهید :

$$W_۱ + W_۲ + \cdots + W_n = span(\bigcup_{i=۱}^{n} W_i)$$

حل.

$$v \in W_۱ + W_۲ + \cdots + W_n \longleftrightarrow \exists\ w_۱, w_۲, \cdots, w_n \quad w_۱ \in W_۱, w_۲ \in W_۲, \cdots w_n \in W_n \quad v = w_۱ + w_۲ + \cdots + w_n$$

$$\longleftrightarrow w_۱, w_۲, \cdots, w_n \in \bigcup_{i=۱}^{n} W_i \longrightarrow w_۱ + w_۲ + \cdots + w_n \in span(\bigcup_{i=۱}^{n} W_i) \longleftrightarrow v \in span(\bigcup_{i=۱}^{n} W_i)$$

◀

۲. نشان دهید $W_۱ \cap W_۲, W_۱ + W_۲$ زیر فضای V هستند و همچنین نشان دهید:

$$W_۱ \cap W_۲ \subseteq W_۱ \cup W_۲ \subseteq W_۱ + W_۲$$

.

حل. می دانیم $۰ \in W_۱, ۰ \in W_۲$ پس ۰ عضو $W_۱ + W_۲$ هست از سوی دیگر اگر $v_۱ \in W_۱ + W_۲, v_۲ \in W_۱ + W_۲$ باشد،آنگاه طبق تعریف داریم :

$$\exists w_۱ \in W_۱, w_۲ \in W_۲ \ \ v_۱ = w_۱ + w_۲ \quad , \quad \exists w'_۱ \in W_۱, w'_۲ \in W_۲ \ \ v_۲ = w'_۱ + w'_۲$$

در نتجه:

$$v_۱ + v_۲ = w_۱ + w_۲ + w'_۱ + w'_۲ = \underbrace{w_۱ + w'_۱}_{\in W_۱} + \underbrace{w_۲ + w'_۲}_{\in W_۲} \longrightarrow v_۱ + v_۲ \in W_۱ + W_۲$$

همچنین باید ثابت کنیم اگر $v \in W_1 + W_2$ باشد آنگاه kv هم چنین است که k یک اسکالر است.

$$\exists w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \;\; v = w_1 + w_2 \longrightarrow kv = \underbrace{kw_1}_{\in W_1} + \underbrace{kw_2}_{\in W_2} \longrightarrow kv \in W_1 + W_2$$

پس $W_1 + W_2$ یک زیر فضای V است.
حال باید ثابت کنیم $W_1 \cap W_2$ زیر فضای V است. می دانیم صفر عضو هر دو زیر فضا است پس صفر در اشتراک آن ها نیز وجود دارد،حال باید ثابت می کنیم که :

$$v_1 \in W_1 \cap W_2, v_2 \in W_1 \cap W_2 \longrightarrow v_1 \in W_1 \wedge v_1 \in W_2, v_2 \in W_1, v_2 \in W_2$$

$$\longrightarrow v_1 + v_2 \in W_1 \wedge v_1 + v_2 \in W_2 \longrightarrow v_1 + v_2 \in W_1 \cap W_2$$

به همین شکل ثابت می شود ضرب یک اسکالر در اعضای $W_1 \cap W_2$ عضو $W_1 \cap W_2$ است پس زیر فضا بودن اشتراک دو زیر فضا نیز ثابت می شود.
اکنون باید ثابت کنیم رابطه بالا برقرار است بدیهی است که اشتراک دو زیر فضا زیر مجموعه اجتماع آن است (این رابطه برای هر دو مجموعه ای فارغ از زیر فضا بودن یا نبودن صادق است) کافی است ثابت کنیم:

$$W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$$

برای اثبات این موضوع از رابطه قسمت ۱ استفاده می کنیم، طبق قسمت ۱ می دانیم:

$$W_1 + W_2 = span(W_1 \cup W_2)$$

واضح است که اگر مجموعه ای به شکل A داشته باشیم آنگاه:

$$A \subseteq span(A)$$

زیرا :

$$span(A) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}, a_i \in A$$

و فرض کنید در هر مرحله $(\lambda_i = 1)$ و $(\lambda_j = 0, j \neq i)$ در این صورت $A \subseteq span(A)$. ◀

۳. نشان دهید :

$$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$$

.

حل. فرض کنیم :

$$diamW_1 = n, dimW_2 = m, dim(W_1 \cap W_2) = t$$

همچنین فرض کنید: $\{u_1, u_2, \cdots, u_t\}$ یک پایه برای $W_1 \cap W_2$ باشد،پس می توان آنرا به یک پایه $B_1 = \{u_1, u_2, \cdots, u_t, v_1, v_2, \cdots, v_{n-t}\}$ از W_1 و همچنین $B_2 = \{u_1, u_2, \cdots, u_t, w_1, w_2, \cdots, w_{m-t}\}$ از W_2 توسعه داد.ثابت می کنیم:

$$B = \{u_1, u_2, \cdots, u_t, v_1, v_2, \cdots, v_{n-t}, w_1, w_2, \cdots, w_{m-t}\}$$

یک پایه برای $W_1 + W_2$ است.که رد این صورت حکم مسئله نیز ثابت می شود ،برای اثبات پایه بودن باید استقلال خطی و مولد بودن را ثابت می کنیم(مولد بودن یعنی ترکیب های خطی یک مجموعه تمامی اعضای آن مجموعه را تولید می کنند که در واقع بیانگر این است که اگر $if \;\; A \subseteq B \rightarrow span(A) = B$ در بحث ما می گوییم بردار هایی مولد یک فضا یا زیر فضا هستند که تمامی اعضای آن ها را بتوان با ترکیب خطی این بردار ها تولید کرد.)
استقلال خطی :

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n-t} \beta_i v_i + \sum_{i=1}^{m-t} \gamma_i w_i = 0 (\star) \longrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{t} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n-t} \beta_i v_i}_{\in W_1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m-t} -\gamma_i w_i}_{\in W_2}$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{m-t} -\gamma_i w_i \in W_1 \cap W_2$$

پس وجود دارد $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_t$ به طوری که:

$$\sum_{i=1}^{m-t} -\gamma_i w_i = \sum_{i=1}^{t} \mu_i u_i$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{m-t} \gamma_i w_i + \sum_{i=1}^{t} \mu_i u_i = 0$$

چون ترکیب خطی فوق صفر ، μ_i ها ، w_i ها یک پایه برای w_2 و ذا مستقل خطی هستند
پس : $\forall i \;\; \mu_i = 0, \forall i \;\; \gamma_i = 0$ با جایگذاری در $\star$ داریم :

$$\sum_{i=1}^{t} u_i + \sum_{i=1}^{n-t} = 0$$

یعنی ترکیب خطی از اعضای پایه W_1 صفر شده است ،پس :

$$\forall i \alpha_i = 0, \forall i \beta_i = 0$$

پس B مستقل خطی است.
مولد بودن: باید ثابت کنیم هر $w \in W_1 + W_2$ را می توان به صورت ترکیب خطی B نوشت.
می دانیم طبق تعریف :

$$\exists w'_1 \in W_1, w'_2 \in W_2 \quad w = w'_1 + w'_2$$
$$\longrightarrow w'_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_t u_t + \alpha_{t+1} v_1 + \alpha_{t+2} v_2 + \cdots + \alpha_n v_{n-t}$$
$$\longrightarrow w'_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_t u_t + \beta_{t+1} w_1 + \beta_{t+2} w_2 + \cdots + \beta_m w_{m-t}$$

$$\begin{aligned}\longrightarrow w = w'_1 + w'_2 =& (\alpha_1 + \beta_1) u_1 + (\alpha_2 + \beta_2) u_2 + \cdots + (\alpha_t + \beta_t) u_t + \\ & \alpha_{t+1} v_1 + \alpha_{t+2} v_2 + \cdots + \alpha_n v_{n-t} + \beta_{t+1} w_1 + \beta_{t+2} w_2 + \cdots + \beta_m w_{m-t}\end{aligned}$$

پس توانستیم w را برحسب B بنویسیم و در نتیجه B مولد و مستقل خطی است و پایه است و حکم ثابت می شود. ▶

۴. نتیجه گیری قسمت ۲ را با استفاده از دو خط که از مبدا مختصات xy می گذرند توجیه کنید.

حل. فرض کنید دو خط متقاطع داریم که در یک نقطه مشترکند،خط اول را با W_1 و خط دوم را با W_2 نشان می دهیم. آنگاه : $W_1 \cap W_2$ یک نقطه خواهد بود،و $W_1 \cup W_2$ از خود این دو خط متقاطع تشکیل خواهد شد.در این صورت $W_1 + W_2$ صفحه گذرنده از این دو خط خواهد بود.که رابطه ۲ به وضوح با این فرضیات مشخص است. ▶

۵. چه زمانی $W_1 \cup W_2$ زیر فضایی از V است؟

In general, $W_1 \cup W_2$ is not a subspace; take the x- and y-axes. $W_1 \cup W_2$ is a subspace if and only if one of W_1 and W_2 is contained in the other: $W_1 \subseteq W_2$ or $W_2 \subseteq W_1$, i.e., $W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2$.

حل. ▶

If S is a subspace containing W_1 and W_2, then every vector in the form $w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$, is contained in S. Thus $W_1 + W_2$ is contained in S.

۶. اگر $W_1 + W_2$ کوچکترین زیر فضایی از V باشد که شامل $W_1 \cup W_2$ است،و اگر S زیر فضایی از V باشد که شامل $W_1 \cup W_2$ است آنگاه: $W_1 + W_2 \subseteq S$.

حل. ▶

۴. نشان دهید $\{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$ در V مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر بردار های مختصات آن

$\{[u_1]_{\mathcal{B}}, [u_2]_{\mathcal{B}}, \cdots, [u_p]_{\mathcal{B}}\}$ در $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی باشند.

۵. فرض کنید S یک مجموعه متناهی در V باشد به طوری که هر $x \in V$ نمایشی یکتا از ترکیب خطی اعضای S داشته باشد،نشان دهید S پایه V است.

حل. قسمت ۴.۴ سوال ۲۵. ▶

۶. با در نظر گرفتن $T : V \longrightarrow W$ فرض کنید H زیر فضایی غیر صفر از V باشد،و $T(H)$ مجموعه تمام بردار های تصویر شده H باشد که زیر فضای W است،ثابت کنید $dimT(H) \leq dimH$.

حل. قسمت ۴.۵ سوال ۳۱. ▶

۷. ماتریسی را (full rank) گویند هرگاه رنک آن بزرگترین مقدار ممکن را داشته باشد،ثابت کنید ماتریس $m \times n$ که تعداد سطر های آن بیشتر از ستون هایش باشد full rank است اگر و فقط اگر ستون های آن مستقل خطی باشند.

حل. قسمت ۴.۶ سوال ۲۶. ▶

۸. اگر A یک ماتریس $m \times n$ با رنک r باشد آنگاه می گوییم $A = CR$ یک (rank factorization) ماتریس A است هر گاه C یک ماتریس $m \times r$ با رنک r و R یک ماتریس $r \times n$ با رنک r باشد.چنین تقسیم بندی همیشه موجود است،با استفاده از این موضوع ثابت کنید برای هر دو ماتریس $m \times n$، A و B، نشان دهید:

$$rank(A + B) \leq rankA + rankB$$

حل. قسمت supplementary exercises سوال ۱۶. ▶

۹. (سوال امتیازی)فرض کنید V یک فضای برداری متناهی است و V_1, V_2 زیر فضا هایی از V هستند.اگر $dim(V_1 + V_2) = dim(V_1 \cap V_2) + 1$ آنگاه $V_1 + V_2$ یا برابر V_1 است یا V_2 و متقابلا $V_1 \cap V_2$یا برابر V_1 است یا V_2. هم ارز با جملات قبل اگر V_1, V_2 زیر مجموعه های هم نباشند،آنگاه:

$$dim(V_1 + V_2) \geq dim(V_1 \cap V_2) + 2$$

۱۰. (سوال امتیازی)فرض کنید U و V زیر فضا هایی از R^n باشند به طوری که

$$U = span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\} \qquad V = span\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q\}$$

فرض کنید:

$$W = span\{\alpha_i + \beta_j\} \quad i = 1, 2, \cdots, p \quad j = 1, 2, \cdots, q$$

اگر $dimU = s, dimV = t$ نشان دهید:

$$dimW \leq min\{n, s + t\}$$

۱۱. در هر یک از قسمت های زیر ابتدا مختصات بردار داده شده (v) را در هریک از پایه ها بیابید سپس ماتریس انتقال از یک پایه (B) به پایه (C) دیگر را محاسبه کنید.

۱.

$$V = \mathbb{P}_۳[x] \qquad v = p(x) = ۸ + x + ۶x^۲ + ۹x^۳$$
$$B = \{۲ + ۳x + ۴x^۲ - x^۳, ۳x + ۵x^۲ + ۲x^۳, -۵x^۲ - ۵x^۳, ۴ + ۴x + ۴x^۲\}$$
$$C = \{۱ - x^۳, ۱ + x, x + x^۲, x^۲ + x^۳\}$$

۲.

$$V = M_۲(\mathbb{R}) \qquad v = \begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$
$$B = \{ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \}$$
$$C = \{ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \}$$

۳.

$$V = \mathbb{R}^۳ \qquad v = (۱, ۷, ۷)$$
$$B = \{(-۷, ۴, ۴), (۴, ۲, -۱), (-۷, ۵, ۰)\}$$
$$C = (۱, ۱, ۰), (۰, ۱, ۱), (۳, -۱, -۱)$$

حل. برای حل این سوال قسمت دوم برای نمونه حل می شود حل دو قسمت دیگر نیز مشابه قسمت دوم می باشد که حل آن ها بر عهده خود شما دانشجویان گذاشته می شود. ابتدا مختصات v را نسبت به پایه های B و C می یابیم. پس مختصات v برحسب دو پایه برابراست با:

$$[v]_B = (-۱, -\frac{۲}{۳}, -\frac{۴}{۳}, -۱) \qquad\qquad [v]_C = (۲, -۳, -۱, -۱)$$

حال می خواهیم $\underset{C \leftarrow B}{P}$ برای این کار باید ماتریس زیرا را تشکیل می دهیم:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۳ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۵ & -۴ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۲ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array} \right)$$

حال ماتریس سمت چپ به شکل کاهش یافته سطری پلکانی در می اوریم و اعمال سطری پلکانی مشابه را بر روی ماتریس سمت راست نیز اعمال می کنیم در نهایت ماتریس سمت راست همان $\underset{C \leftarrow B}{P}$ خواهد بود.

◀