اگر $T: R^3 \to R^3$ تبدیل خطی بدست آمده از تصویر عمودی (orthogonal projection) بر خط Span شده توسط بردار $v = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه یک فرمول صریح برای T(x) به ازای هر x در R^3 پیدا کنید.

پاسخ)

For any vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

we have $\mathbf{x} = T(\mathbf{x}) + \mathbf{v}$, where $\mathbf{v} = \mathbf{x} - T(\mathbf{x})$, which is perpendicular to the vector $\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$.

Since $T(\mathbf{x}) \in W$, we have $T(\mathbf{x}) = t\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ for some number t.

Thus $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} + \mathbf{v}$.

To determine the number t, we take the inner product with $\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ and obtain

$$\mathbf{x} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} + \mathbf{v} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9t$$

Here $\mathbf{v} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} = \mathbf{0}$ since $\mathbf{v}$ is perpendicular to $\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$.

Therefore we have $t = \frac{1}{9}(x_1 + 2x_2 + 2x_3)$, and the formula is

$$T(\mathbf{x}) = \frac{1}{9}(x_1 + 2x_2 + 2x_3)\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}.$$