

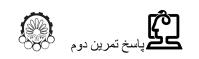


به نام خدا

پاسخ تمرین دوم

جبر خطی کاربردی – بهار 1401

دانشکده مهندسی کامپیوتر دانشگاه صنعتی امیرکبیر



الف) غلط.

(راه اول): آوردن مثال نقض

(راه دوم): زیرا برای اینکه منطبق باشند باید تقسیم بندی ستونی A و تقسیم بندی سطری B باید هماهنگ باشد. (پاراگراف قبل از EXAMPLE 3 صفحه EXAMPLE 3 کتاب در سی

(u) درست. طبق تئوری u کتاب درسی می دانیم بر ای اینکه یک ماتریس $u \times n$ وارون پذیر باشد، باید دقیقا $u \times n$ عنصر $u \times n$ داشته باشد.

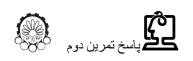
ت) درست. در اینصورت طبق تئوری R کتاب درسی این ماتریس، یک ماتریس معکوس پذیر است و دوباره طبق همین تئوری می دانیم که ستون های هر ماتریس معکوس پذیر R^n را اسپن می کنند. پس طبق تعریف پایه، این مجموعه یک پایه برای R^n خواهد بود.

ج) غلط مثال نقض A = I, B = -I در اینصورت A + B = 0، که وارون پذیر نیست.

چ) غلط مثال نقض:

 $A = [1\ 1\ 1\ 0\],\ B = [0\ 1\ 1\ 1\] o \{AB = [1\ 2\ 0\ 1\]\ BA = [1\ 0\ 2\ 1\] o AB
et BA$ ه) غلط طبق تئوری 12 کتاب در سی میدانیم که اگر یک ماتریس $m \times m$ باشد آنگاه فضای پوچ آن زیر فضایی از R^n خواهد بود.





$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

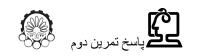
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, [3] \rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad LUx = b \quad , \quad Ux = y \quad \rightarrow \quad Ly = b$$

$$Ly = b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} \rightarrow y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Ux = y \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



3- ياسخ:

راه اول:

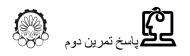
$$B(I - AB) = (I - BA)B$$

 $B = (I - BA)B(I - AB)^{-1}$
 $BA = (I - BA)B(I - AB)^{-1}A$
 $I - BA = I - (I - BA)B(I - AB)^{-1}A$
 $(I - BA) + (I - BA)B(I - AB)^{-1}A = I$
 $(I - BA)(I + B(I - AB)^{-1}A) = I \rightarrow (I - BA)^{-1} = (I + B(I - AB)^{-1}A)$

راه دوم: برهان خلف.

فرض خلف: I-BA وارون پذیر نیست.

پس معادله X = x (غیر صفر) دارد. حال X = 0 X = x (از سمت چپ X = x) BAx = x (غیر صفر) دارد. حال X = x (از سمت چپ در این معادله ضرب می کنیم و به عبارت X = x X = x میرسیم و از عبارت قبل می دانیم که X = x مخالف صفر است. حال می توانیم X = x را در نظر بگیریم و معادله خود را به صورت X = x بازنویسی کنیم که شکل دیگری از معادله ی می توانیم X = x و این خلاف فرض سوال X = x اورون پذیر نیست و این خلاف فرض سوال است و فرض خلف باطل و حکم اثبات می شود.



- با اجرای مراحل حذف گاوس- جوردن خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -12 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -12 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & c - 6 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -12 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & c - 6 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & -7 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & c - 6 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & -7 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & c - 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & -7 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & c - 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}
1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{-3c+6}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\
0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}
1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{-3c+6}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{9c-8}{2} & -2 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & 1
\end{bmatrix}$$

در این مرحله توقف میکنیم. برای اینکه ماتریس A وارون پذیر باشد باید:

$$\frac{9c-8}{2}\neq 0 \rightarrow 9c \neq 8 \rightarrow c \neq \frac{8}{9}$$

- حال جواب قسمت اول بدست آمده است. با فرض c=1 به حل ادامه میدهیم تا وارون بدست آید.



داريم:

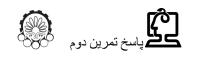
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 9 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 0 & \frac{26}{3} & \frac{59}{6} & -18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 9 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین معکوس A بدست آمد:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 7 & 8 & -15 & -3\\ -4 & -5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$



5- پاسخ:

ب) برای ماتریس $n\times n$ به نام n میتوان گفت $null\ space$ آن دارای بردارهای nای میباشد که $n\times n$ باید $m\times n$ باید n باید از n باید از آنجاییکه n باید n باید از n

m-dimensional ماتریس A شامل بردارهای y است که y=Ax به طوری که $x\in R^n$ ماتریس A شامل بردارهای y است و y=Ax المن و y=Ax است و y=Ax

از آنجایی که یک صفحه یک زیرفضای ۲بعدی است، پس z = nullity = 2 توسط یک بردار z = span می شود. z = range بنابر این z = range است و z = range .

rank of A+ nullity of A=n.

n = 1 و nullity = 2 و n = 3

6- باسخ:

الف) زیر فضا نیست چون \cdot جز جواب تساوی 2x + y - 3z = 2 نیست.

ب)

فرض کنید S شامل تمام بردارهایی است که در عبارت ریاضی زیر صدق می کنند:

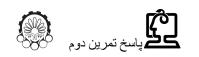
$$v \in R$$
 , $v = (b_1, b_2, b_3)$, $b_2b_3 = 0$

 $v_1+v_2=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$ اگر $v_1=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$ برای آنکه $v_1=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$ برای آنکه $v_1+v_2=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$ برای آنکه $v_1+v_2=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$ برای آنکه $v_1+v_2=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$

 $(a_2+b_2).(a_3+b_3)=0 \rightarrow a_2 a_3 + a_2 b_3 + b_2 a_3 + b_2 b_3 = 0 \rightarrow a_2 b_3 + b_2 a_3 = 0$ داريم:

$$v_1 = (1,0,1)$$
 , $v_2 = (1,1,0) \in S$ \rightarrow $v_1 + v_2 = (2,1,1) \notin S$

از آنجاییکه S تحت جمع بسته نیست، میتوان نتیجه گرفت که زیرفضا نمیباشد.



ج) بردار صفر را شامل نمیشود در نتیجه زیرفضا نیست.

(2

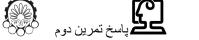
فرض کنید S شامل تمام بردار هایی است که در عبارت ریاضی زیر صدق می کنند:

$$v = (b_1, b_2, b_3)$$
 , $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$ \rightarrow $b_3 = b_2 - 3b_1$

داريم:

$$\begin{split} v_1 &= (a_1,a_2,a_3) \ , v_2 = (b_1,b_2,b_3) \in S \\ v_1 &+ v_2 = (a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3) \\ a_3 &= a_2 - 3b_1 \ , \quad b_3 = b_2 - 3b_1 \\ &\to a_3 + b_3 = (a_2+b_2 - 3b_1 - 3a_1) \quad \to \quad v_1 + v_2 \in S \end{split}$$

و بدیهی است که تحت عملیات ضرب اسکالر نیز بسته است پس میتوان گفت یک زیرفضا میباشد.



7 - پاسخ:

الف) فرم كاهش يافته A را بدست مياوريم:

Pivot position با توجه به اینکه در ستون های یک و دو
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ستون های یک و دو ماتریس اولیه پایه های فضای ستونی را تشکیل میدهند.

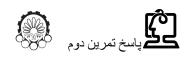
$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

با حل این تساوی داریم: Ax = 0

فرم كاهش يافته:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 = 0 \\ x_2 + \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 \\ -\frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4$$



در نتیجه:

$$Null A = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ج)

$$[A \quad p \] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 8/3 & 4 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

معادله ی Ax = p جواب دارد در نتیجه p در فضای ستونی ماتریس A قرار دارد.

د) خير چون $q \in \mathbb{R}^4$ نيست.

8- باسخ:

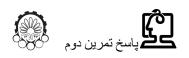
AB اگر ستون های B وابسته خطی باشند ستون های AB نیز وابسته خطی هستند.

حل. اگر ستون های ماتریس hB وابسته خطی باشند آنگاه بردار غیر صفری مانند x وجود دارد که x=0. در نتیجه x را از دو طرف در عبارت ضرب می کنیم داریم x=0 در x=0 و در نتیجه داریم x=0 از انجاییکه x=0 یک بردار غیر صفر است پس ستون های x=0 نیز وابسته خطی هستند.

(ب) اگر A,B و $C^{-1}(A+X)B^{-1}=I_n$ بیابید. آنگاه جواب معادله $n\times n$ بیابید. $C^{-1}(A+X)B^{-1}=I_n$ بیابید. $N\times n$ بیابید.

حل. یافتن جواب این معادله شامل بررسی وجود جواب و یافتن آن است،حال برای اینکه ببینیم جواب اگر وجود داشته باشد چه چیزی باید باشد،فرض کنیم X جوابی باشد که در معادله مورد نظر ما صدق کند آنگاه هر دو طرف معادله را در C ضرب می کنیم. داریم:

$$CC^{-1}(A+X)B^{-1}=CI$$
, $I(A+X)B^{-1}=C$, $(A+X)B^{-1}B=CB$, $(A+X)I=CB$ داخل پرانتز را در I ضرب می کنیم و از دو طرف A را کم می کنیم آنگاه داریم:
$$AI+XI=CB, \quad A+X=CB, \quad X=CB-A$$



پس اگر جوابی وجود داشته باشد همان CB-A حال برای اینکه نشان دهیم واقعا CB-A جواب است آن را به جای X جایگذاری می کنیم و داریم:

$$C^{-1}[A + (CB - A)]B^{-1} = C^{-1}[CB]B^{-1} = C^{-1}CBB^{-1} = II = I$$

trc(AB) = trc(AB) (ج) اگر مجموع داریه های روی قطر اصلی یک ماتریس مربعی را با trc(A) نشان دهیم ثابت کنید: trc(BA)

حل. فرض کنید $BA=(C_{ij})$ و $AB=(C_{ij})$ داریم:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \qquad c'_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}, \qquad 1 \leq i,j \leq n$$

بنابراين:

$$trc(AB) = \sum_{i=1}^{n} C_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} C'_{kk} = trc(BA)$$

است. $A = \cdot$ انگاه $A = \cdot$ است. $trc(AA^T) = \cdot$ است.

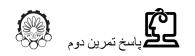
حل. فرض كنيد $A^T = (B_{ij})$ و $A = (a_{ij})$ بنابراين:

$$b_{ij}=a_{ji}$$
 $i=1,7,\cdots,n$ $j=1,7,\cdots,n$

حال با فرض $C_{ij}=\sum_{i=1}^n C_{ii}=1$ لذا $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ و چون $C_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ داريم:

$$\bullet = \sum_{i=1}^{n} C_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

ولی چون $b_{ki}=a_{ik}$ بنابراین: $\sum_{k=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}^\gamma$ برابر صفر است لذا تمام درایه ها صفر می باشند پس $A=\bullet$



A = P - A پس A = A + B فرض می کنیم

حال داريم:

$$A(A + B)^{-1}B = AP^{-1}(P-A) = AP^{-1}P - AP^{-1}A = A-AP^{-1}A$$

و از طرفی داریم:

$$B(A + B)^{-1}A = (P - A)P^{-1}A = PP^{-1}A - AP^{-1}A = A - AP^{-1}A$$

با توجه به عبارت بالا سمت راست و چپ تساوی پس از ساده سازی به مقدار یکسان رسیدند پس تساوی برقرار است.

10- باسخ:

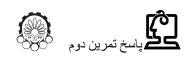
$$x = c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 \rightarrow [x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

- برای بدست آوردن این ضرایب کافی است تا دستگاه زیر را حل کنیم. داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$



اگر x یک بردار عضو R^n به صورتی که Ax=0 باشد، آنگاه بر اساس عبارت زیر x باید بردار صفر باشد (تمام المانهای این بردار صفر است)

$$x = I_n x = (CA)x = C(Ax) = C \times 0_m = 0_n$$

حال برای اینکه $\alpha = 0$ همواره جواب بدیهی داشته باشد، نباید تعداد ستونهایش از تعداد سطرهایش بیشتر باشد؛ زیرا در این صورت متغیر آزاد خواهیم داشت و دیگر تنها جواب ما جواب بدیهی نخواهد بود پس $m \leq m$.

: داريم R^m داريم عضو

$$b = I_m b = (AD)b = A(Db)$$

و میتوان نتیجه گرفت Ax=b جواب دارد و باید به ازای هر b دلخواه جواب داشته باشد (x=Db) . حال باید سطر و ستونهای ماتریس A به شکلی باشد که به ازای هر b دلخواه بتوان جوابی برای معادله b یافت و این یعنی نباید تعداد سطرهای ماتریس a از تعداد ستونهایش بیشتر باشد زیرا در این صورت سطرهایی وجود خواهند داشت که در آن ها المان محوری وجود ندارد و این امکان ایجاد ناسازگاری را به همراه دارد. پس a

. n=m و $m\leq n$ نتیجه می شود که $m\leq m$

حال براى اثبات C =D داريم:

$$(CA)D = I_nD = D$$

$$C(AD) = CI_m = C$$

$$C(AD) = (CA)D$$

 $\cdot C = D$ پس

موفق باشيد

تیم تدریسیاری جبر خطی بهار 1401