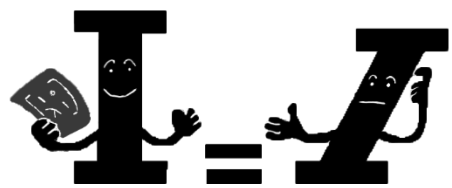
به نام خدا



پاسخ تمرین پنجم

جبر خطی کاربردی – پاییز ۱۴۰۰

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) دو وکتور u, v متعامد هستند اگر و تنها اگر $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|u\|^2$.

- درست. تئوری ۶.۲ کتاب درسی.

ب) اگر ستون های ماتریس $A_{m\times n}$، $orthnormal$ باشند، آنگاه $\|Ax\| = \|x\|$.

- درست، بخش a تئوری ۶.۸ کتاب درسی.

ج) در صورتی که در معادله $Ax = b$، b یک بردار $orthogonal$ نسبت به تمامی بردار های ستونی ماتریس A باشد، آنگاه جواب $least\ squares$ برای این معادله تمامی بردار های $\hat{x}$ خواهند بود که $A\hat{x} = \mathbf{0}$.

- درست، در صورتی که بردار b بر تمامی بردار های ستونی ماتریس A عمود باشد، آنگاه تصویر بردار b بر روی $Col\ A$ برابر $\hat{\mathrm{b}} = 0$ باشد. پس بنابراین می توان جواب مساله $least\ squares$ را به صورت $A\hat{\mathrm{x}} = \hat{\mathrm{b}} = 0$ می توان نوشت.

د) هر ماتریس دلخواهی را می توان به فرم تجزیه QR نوشت.

- نادرست، همانطور که در تعریف نیز مشاهده می شود، این تعریف برای ماتریس های $m \times n$ با ستون های مستقل خطی تعریف شده است و اعمال این تجزیه، بر روی تمامی ماتریس ها امکان پذیر نیست.

ذ) هر ماتریس متقارن ، n تا مقدار ویژه ی حقیقی متمایز دارد.

- غلط. n تا مقدار ویژه دارد ولی لزومی ندارد متمایز باشند.

ه) در یک عبارت مثبت معین مانند Q به ازای تمام x ها در $\mathbb{R}^n$ مقدار $Q(x)$ بزرگتر از صفر می باشد.

- غلط. در $x = 0$ مقدار $Q(x)$ برابر است با صفر.

پ) اگر مقدار ویژه$(eigenvalue)$ های یک ماتریس متقارن مانند A، همگی منفی باشند، آنگاه فرم درجه دوم $(quadratic\ form)$ x^TAx، نامعین است.

- غلط. منفی معین است. (تئوری ۵ فصل ۷ کتاب درسی)

۲- وکتور های زیر را در نظر بگیرید.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

همچنین وکتور v_4 که بر وکتور های v_1, v_3 عمود است و $v_2 \cdot v_4 = -3$ را در نظر بگیرید. عبارت های خواسته شده را محاسبه کنید.

الف) $v_1 \cdot v_2$

ب) $v_3 \cdot v_4$

پ) $(2v_1 + 3v_2 - v_3) \cdot v_4$

ج) $\|v_1\|, \|v_2\|, \|v_3\|$

چ) فاصله بین v_1 و v_2

پاسخ

الف)

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = [-1 \quad 0 \quad 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = -6$$

ب) از آنجا که v_4 بر v_3 عمود است، پس $v_3 . v_4 = 0$.

پ) مشابه قسمت قبل داریم:

$$(2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3) \cdot \boldsymbol{v}_4 = 2\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_4 + 3\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_4 - \boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{v}_4$$

$$\rightarrow \qquad ۲\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_4 + 3\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_4 - \boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{v}_4$$
$$= 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-3) - 0 = -9.$$

ج) می دانیم که طول یک وکتور برابر است با: $\|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w}}$. پس داریم:

$$\|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\boldsymbol{v}_2\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\|\boldsymbol{v}_3\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{17}$$

چ) می‌دانیم که فاصله بین دو وکتور برابر است با $\|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|$. پس ابتدا وکتور $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ را محاسبه می کنیم و سپس اندازه آن را بدست می آوریم.

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\| = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$$

۳- فرض کنید a, b وکتور هایی در $\mathbb{R}^n$ باشند به طوریکه $\|a\| = \|b\| = 1$ و $a \cdot b = -\frac{1}{2}$.

طول وکتور $\|a - b\|$ را بدست آورید.

پاسخ

می دانیم طول یک وکتور برابر است با $\|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{w}}$ و همچنین ضرب داخلی دو وکتور خاصیت جا به جایی دارد پس داریم:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$$

طبق بالا:

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a} = -\frac{1}{2}$$

حال مقدار $\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2$ محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 &= (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^T(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \ \text{(طبق تعریف طول وکتور)} \\ &= (\boldsymbol{a}^T - \boldsymbol{b}^T)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b} \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2 - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a} + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\ &= 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| = \sqrt{3}$$

۴- فرض کنید $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ یک مجموعه متشکل از وکتور های غیر صفر در $\mathbb{R}^n$ باشد. اگر مجموعه S یک مجموعه $orthogonal$ باشد، آنگاه:

الف) نشان دهید که S یک مجموعه مستقل خطی است.

ب) اگر $k = n$، آنگاه نشان دهید که S یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

پاسخ

الف) طبق تعریف استقلال خطی می دانیم برای اینکه این مجموعه مستقل خطی باشد، معادله زیر فقط باید جواب $trivial$ داشته باشد.

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

یعنی $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$.

بدین منظور به ازای هر $0 \le i \le k$ ضرب داخلی v_i در عبارت بالا را محاسبه می کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{0} \\ &= \boldsymbol{v}_i \cdot (c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k) \\ &= c_1\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_k \end{aligned}$$

از آنجا که S یک مجموعه متعامد است، پس به ازای هر $i \neq j$، $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = 0$. بنابراین در معادله بالا همه عبارت ها به جز عبارت i ام برابر ۰ هستند. داریم:

$$۰ = c_i\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = c_i\|\boldsymbol{v}_i\|^2$$

و از آنجا که $v_i \neq 0$ پس اندازه آن نیز ۰ نخواهد بود. پس می توان نتیجه گرفت که به ازای $i = 1,2,\dots,k$ $c_i = 0$. بنابراین طبق تعریف استقلال خطی، این مجموعه مستقل خطی است.

ب) اگر $k = n$، آنگاه طبق قسمت الف مجموعه ای متشکل از n وکتور مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ خواهیم داشت. بنابراین S یک $spanning\ set$ برای $\mathbb{R}^n$ خواهد بود و می توان گفت یک پایه برای آن است.

۵- تجزیه QR ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&1\\3&2&0\\4&2&1\end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

پاسخ

همانطور که مشاهده می شود، ستون های ماتریس A مستقل خطی است. برای تجزیه ماتریس A به فرم QR باید در ابتدا یک پایه $orthonormal$ برای فضای $Col\ A$ پیدا کرد. برای این کار می توانیم از الگوریتم $Gram-Schmidt$ استفاده کنیم.

بردار های مستقل ما به شکل زیر می باشد.

$$x_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},x_2=\begin{bmatrix}0\\2\\2\\2\end{bmatrix},x_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

طبق الگوریتم $Gram-Schmidt$ داریم:

$$v_1=x_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

$$v_2=x_2-\frac{x_2\cdot v_1}{v_1\cdot v_1}v_1=\begin{bmatrix}0\\2\\2\\2\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}0\\2\\2\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\2\\2\end{bmatrix}-\frac{18}{30}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\\\frac{1}{5}\\-\frac{2}{5}\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3\\4\\1\\-2\end{bmatrix}$$

$$v_3 = x_3 - \frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{6}{30} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{\frac{2}{5}}{\frac{30}{25}} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \\ 1 - \frac{2}{5} - \frac{4}{15} \\ -\frac{3}{5} - \frac{1}{15} \\ 1 - \frac{4}{5} + \frac{2}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

خب تا به این جا بردار های $orthogonal$ را محاسبه کرده ایم.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, v_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, v_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اما برای محاسبه Q لازم است که پایه $orthogonal$ حاصل را به یک پایه $orthonormal$ تبدیل کنیم.

برای این کار لازم است که هر یک از بردار ها را $normalize$ کنیم.

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{5}}}\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

خب حال که یک پایه $orthonormal$ برای $Col\ A$ پیدا کردیم، می توانیم ماتریس Q را تشکیل دهیم.

$$Q = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{3}{\sqrt{30}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{4}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{4}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

حال که Q را به دست آوردیم، باید R را محاسبه کنیم. برای محاسبه این ماتریس، از آن جایی که ماتریس Q یک ماتریس با ستون های $orthonormal$ است پس بنا به قضیه ۶ کتاب، $Q^TQ = I$. پس می توان رابطه تجزیه QR را به صورت زیر نوشت و با محاسبه یک ضرب ماتریس، R را محاسبه کرد.

$$A = QR \rightarrow Q^TA = Q^TQR = R$$

$$R=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{3}{\sqrt{30}} & \frac{4}{\sqrt{30}}\\ -\frac{3}{\sqrt{30}} & \frac{4}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{30}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{30}{\sqrt{30}} & \frac{18}{\sqrt{30}} & \frac{6}{\sqrt{30}}\\ 0 & \frac{6}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}}\\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

۶- فرض کنید که ماتریس A یک ماتریس $m \times n$ باشد به گونه ای که A^TA وارون پذیر می باشد. نشان دهید که در این صورت ستون های ماتریس A، مستقل خطی می باشند.

پاسخ

فرض کنید که معادله $Ax = \mathbf{0}$ را داریم. در صورتی که در دو سمت معادله از سمت چپ ماتریس A^T را ضرب کنیم خواهیم داشت $A^TAx = A^T\mathbf{0} = \mathbf{0}$ از آنجایی که ماتریس A^TA وارون پذیر است، بنابراین می توان گفت $x = \mathbf{0}$. بنابراین معادله $Ax = \mathbf{0}$ تنها یک جواب بدیهی دارد پس بنابراین طبق تعریف استقلال خطی، ستون های ماتریس A مستقل خطی خواهند بود.

۷- ماتریس A را قطری سازی عمودی کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ

مقادیر ویژه ی A را به دست می آوریم:

$$det(A - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0} \;\rightarrow\; \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{5} \,.\, \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2} \,.\, \boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{2}$$

اکنون یک پایه از $eigenspace$ هر مقدار ویژه را به دست می آوریم و آن را نرمال می کنیم:

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{5} : \; \boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{u_1} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}} \\ \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}} \\ \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2} : \; \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{u_2} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}} \\ \frac{-\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{6}}} \\ \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{2} : \; \boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{u_3} = \begin{bmatrix} \frac{-\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \\ \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \end{bmatrix}$$

در نهایت داریم:

$$P=[u_1\ u_2\ u_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{\mathbf{6}}} & \frac{-1}{\sqrt{\mathbf{2}}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{\mathbf{6}}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{\mathbf{6}}} & \frac{1}{\sqrt{\mathbf{2}}}\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix},$$

$$A = PDP^{-1} \xrightarrow{P\ is\ square\ and\ its\ columns\ are\ orthonormal(Theorem\ 6,\ \ section 6.2)} PDP^{T}$$

۸- عبارت $Q(x1,x2) = 3{x_1}^2 - 4x_1x_2 + 6{x_2}^2$ را در نظر بگیرید.

الف) مشخص کنید که آیا Q مثبت معین است یا منفی معین یا نامعین؟

ب) عبارت را با تغییر متغیر $(x = Py)$ به یک فرم $quadratic$ (چند جمله ای درجه ۲) که هیچ عبارت ضرب متقابل (مثل x_1x_2) یا همان $cross - product$ ای ندارد تبدیل کنید.

پاسخ

الف) ابتدا ماتریس $quadratic$ را به دست می آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

اکنون مقادیر ویژه ی A را به دست می آوریم:

$$det(A - \boldsymbol{\lambda} i) = 0 \rightarrow (3 - \boldsymbol{\lambda})(6 - \boldsymbol{\lambda}) - (-2)(-2) = 0$$
$$\rightarrow \ \boldsymbol{\lambda}^2 - 9\boldsymbol{\lambda} + 14 = 0 \ \rightarrow \ \boldsymbol{\lambda} = 7, \boldsymbol{\lambda} = 2$$

از آنجایی که هر دو مقدار ویژه ی A، مثبت بودند طبق تئوری ۵ فصل ۷ کتاب درسی، Q مثبت معین است.

ب) ابتدا بردار ویژه ی هر مقدار ویژه را به دست می آوریم و آن را نرمال می کنیم و ماتریس P را تشکیل می دهیم :($A = PDP^{-1}$)

$$\boldsymbol{\lambda = 7} \ \rightarrow \ \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{-1}}{\sqrt{\mathbf{5}}} \\ \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda = 2} \ \rightarrow \ \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}} \\ \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}} \end{bmatrix}$$

$$P = [u \ \ v] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{\mathbf{5}}} & \frac{2}{\sqrt{\mathbf{5}}} \\ \frac{2}{\sqrt{\mathbf{5}}} & \frac{1}{\sqrt{\mathbf{5}}} \end{bmatrix} \ , \ D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

اکنون $x = Py$ در نظر می گیریم و داریم:

$$x^TAx = (Py)^TA(Py) = y^TP^TAPy = y^T(P^{-1}AP)y = y^TDy = 7{y_1}^2 + 2{y_2}^2$$

۹- تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بیابید. تمام محاسبات خود را نشان دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$\mathrm{AA^T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مقدار های ویژه برای AA^T : $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ است. در نتیجه $\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{2}$

سپس پایه های *orthogonal* $\mathrm{AA^T}$ برابر میشود با : $\mathrm{P_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathrm{P_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

برای پیدا کردن Q از فرمول $\mathrm{q_i} = \frac{1}{\sigma_i}\mathrm{A^TP_i}$ استفاده میکنیم.

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T$$

از آنجایی که $\mathrm{q_2}$ و $\mathrm{q_3}$ هم نیاز داریم و $\mathrm{q_1, q_2, q_3, q_4}$ باید پایه های *orthogonal* باشند پس :

$$\mathrm{q_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = P\Sigma Q^T \ , \sum = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۰- ثابت کنید اگر $A_{n\times n}$ یک ماتریس مثبت معین باشد، آن گاه قطری سازی عمودی ماتریس A،
$(A = PDP^{-1})$ برابر با تجزیه SVD آن خواهد بود.

پاسخ:

در قطری سازی عمودی، ماتریس P که ساخته می شود، دارای ستون های *orthonormal* می باشد بنابراین در این حالت داریم $\mathrm{P^T} = \mathrm{P^{-1}}$

اگر A یک ماتریس *positive definite* باشد آنگاه $\mathrm{A} = \mathrm{PDP^T}$ که P یک ماتریس *orthogonal* بوده و D یک ماتریس *diagonal* است. درایه های قطری ماتریس D مثبت اند زیرا آنها *eigenvalue* های یک ماتریس *positive definite* هستند.از آنجایی که P یک ماتریس *orthogonal* است، میتوان گفت $\mathrm{PP^T} = \mathrm{I}$ و ماتریس مربعی P^T وارون پذیر است.همچنین داریم $\mathrm{(P^T)^{-1}} = \mathrm{(P^{-1})^{-1}} = \mathrm{P} = \mathrm{(P^T)^T}$ بنابراین P^T یک ماتریس *orthogonal* است. بنابراین $\mathrm{A} = \mathrm{PDP^T}$ ویژگی هایی دارد که آنرا *SVD* میکند.

موفق باشید

تیم تدریسیاری جبر خطی پاییز ۱۴۰۰