به نام یزدان پاک

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبر خطی کاربردی

دکتر امیرمزلقانی

نیم‌سال دوم ۰۱ - ۰۰

تمرین سری سوم

فصل چهارم

پاسخ تمرین را به صورت خوانا و تمیز با نام $HW3\_StudentName\&StudentID$ (مثال: $HW3\_AylarSedaei9831128$) در سامانه کورسز بارگذاری کنید.

در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل ala.spring2022@gmail.com و یا تلگرام تدریس‌یاران درس در ارتباط باشید.

بخش اول: تمرینات تئوری

پرسش اول

سطح سوال: متوسط

اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد که $rank\,(A) = r$ که $r > ۰$، U شکل سطری پلکانی ماتریس A است. نشان دهید یک ماتریس وارون‌پذیر مانند E وجود دارد که $A = EU$. با استفاده از این موضوع A را بصورت حاصل جمع r ماتریس با رنک ۱ بنویسید.

پرسش دوم

سطح سوال: سخت

فرض کنید $W۲$ و $W۱$ زیرفضاهای فضای برداری V باشند، تعریف می‌کنیم:

$$W۱ + W۲ = \{\omega۱ + \omega۲ \mid \omega۱ \in W۱, \omega۲ \in W۲\}$$

آ) نشان دهید:

$$W_۱ + W_۲ + \ \dots + W_n = span(\bigcup_{i=۱}^{n} W_i)$$

ب) نشان دهید $W۱ + W۲$ و $W۱ \cap W۲$ زیرفضای V هستند و همچنین نشان دهید:

$$W۱ \cap W۲ \subseteq W۱ \cup W۲ \subseteq W۱ + W۲$$

پ) نشان دهید:

$$dim(W_۱ + W_۲) = dim(W_۱) + dim(W_۲) - dim(W_۱ \cap W_۲)$$

ت) درستی یا نادرستی تساوی زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن اثبات بیاورید و در صورت نادرست بودن مثال نقض بزنید:

$$W_۳ \cap (W_۱ + W_۲) = (W_۳ \cap W_۱) + (W_۳ \cap W_۲)$$

ث) اگر $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ باشد آنگاه به $W_1 + W_2$ جمع مستقیم نیز می‌گویند و آن را با $W_1 \oplus W_2$ نشان می‌دهند. حال درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را بررسی و اثبات کنید:

اگر V_1 زیرفضایی از فضای برداری V باشد و اگر زیرفضای برداری یکتای V_2 موجود باشد که $V = V_1 \oplus V_2$ آنگاه $V_1 = V$.

پرسش سوم

سطح سوال: متوسط

در هر یک از قسمت‌های زیر ابتدا مختصات بردار داده شده V را در هر یک از پایه‌ها بیابید، سپس ماتریس انتقال از پایه‌ی B به پایه‌ی C را محاسبه کنید.

آ)

$$V = \mathbb{P}_3[x] \qquad v = p(x) = 8 + x + 6x^2 + 9x^3$$
$$B = \{2 + 3x + 4x^2 - x^3, 3x + 5x^2 + 2x^3, -5x^2 - 5x^3, 4 + 4x + 4x^2\}$$
$$C = \{1 - x^3, 1 + x, x + x^2, x^2 + x^3\}$$

ب)

$$V = M_2(\mathbb{R}) \qquad v = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$B = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}$$
$$C = \{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}$$

پ)

$$V = \mathbb{R}^3 \qquad v = (1،7،7)$$
$$B = \{(-7،4، 4)\ ،(4،2، -1)، (-7،5،0)\}$$
$$C = \{(1،1،0)، (0،1،1)،(3، -1، -1)\}$$

پرسش چهارم

سطح سوال: آسان

مشخص کنید کدام مجموعه‌ها، یک پایه برای $\mathbb{R}^۳$ می باشد.

$$S_۱ = \left\{\begin{bmatrix}۱\\۷\\۲\end{bmatrix}، \begin{bmatrix}۳\\۱\\-۱\end{bmatrix}، \begin{bmatrix}-۲\\-۵\\۴\end{bmatrix}\right\} \qquad S_۲ = \left\{\begin{bmatrix}۱\\۴\\۱\end{bmatrix}، \begin{bmatrix}۷\\۵\\-۳\end{bmatrix}، \begin{bmatrix}۳\\۶\\-۵\end{bmatrix}\right\} \qquad S_۳ = \left\{\begin{bmatrix}۱\\۲\\۲\end{bmatrix}، \begin{bmatrix}۳\\۱\\۷\end{bmatrix}\right\}$$

$$S_۴ = \left\{\begin{bmatrix}۳\\۰\\۵\end{bmatrix}، \begin{bmatrix}۲\\۴\\-۱\end{bmatrix}، \begin{bmatrix}-۲\\۰\\۵\end{bmatrix}\right\} \qquad S_۵ = \left\{\begin{bmatrix}-۴\\۳\\۵\end{bmatrix}، \begin{bmatrix}۷\\۷\\۱\end{bmatrix}، \begin{bmatrix}۳\\۸\\۶\end{bmatrix}، \begin{bmatrix}-۱\\۹\\۸\end{bmatrix}\right\}$$

پرسش پنجم

سطح سوال: متوسط

فرض کنید V یک فضای برداری برای تمام دنباله های به صورت زیر باشد.

$$(a_i)_{i=۱}^{\infty} = (a_۱، a_۲، \dots)$$

همچنین U یک زیرمجموعه از V مطابق عبارت زیر تعریف شود.

$$U = \{(a_i)_{i=۱}^{\infty} \in V \mid a_{k+۲} - ۵a_{k+۱} + ۳a_k = ۰، k = ۱، ۲، \dots\}$$

ثابت کنید U یک زیرفضا از V است.

پرسش ششم

سطح سوال: متوسط

اگر $P[x]$, $P_n[x]$ (تمامی چند جمله‌ای های حداکثر از درجه n با ضرایب حقیقی را با نماد $P_n[x]$ نشان می‌دهیم و همچنین مجموعه تمام چند جمله‌ای ها با ضرایب حقیقی را با $P[x]$ نشان می‌دهیم) فضاهای برداری با ضرایب حقیقی باشند آنگاه:

آ) نشان دهید اگر $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ پایه‌ای برای $P_n[x]$ باشد آنگاه:

$\{1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^{n-1}\}, \ a \in R$

نیز پایه‌ای برای $P_n[x]$ است.

ب) مختصات

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \in P_n[x]$

را نسبت به پایه

$\{1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^{n-1}\}, \ a \in R$

بیابید.

پ) فرض کنید $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ و متمایز باشند. برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$

$f_i(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \ldots (x - a_n)$

را در نظر بگیرید. نشان دهید $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ نیز پایه‌ای برای $P_n[x]$ است.

پرسش هفتم

سطح سوال: آسان

ماتریس A به صورت $m \times n$ را در نظر بگیرید. موارد زیر در ارتباط با فضای پوچ و $rank$ را اثبات کنید.

$$null(A) = null(A^T A)$$

$$rank(A) = rank(A^T A)$$

پرسش هشتم

سطح سوال: متوسط

تبدیل خطی T از فضای برداری R^3 به R^3 را داریم. فرض کنید k=3 کوچک ترین عدد صحیح و مثبت است و داریم $T^k = 0$. در صورتی که به ازای $x \in R^3$ داشته باشیم $T^2 x \neq 0$،

نشان دهید بردارهای x، Tx و $T^2 x$ پایه‌هایی برای R^3 هستند.

بخش دوم: تمرین عملی

در این تمرین قصد داریم یک آشنایی ابتدایی با پردازش تصویر داشته باشیم. 😎

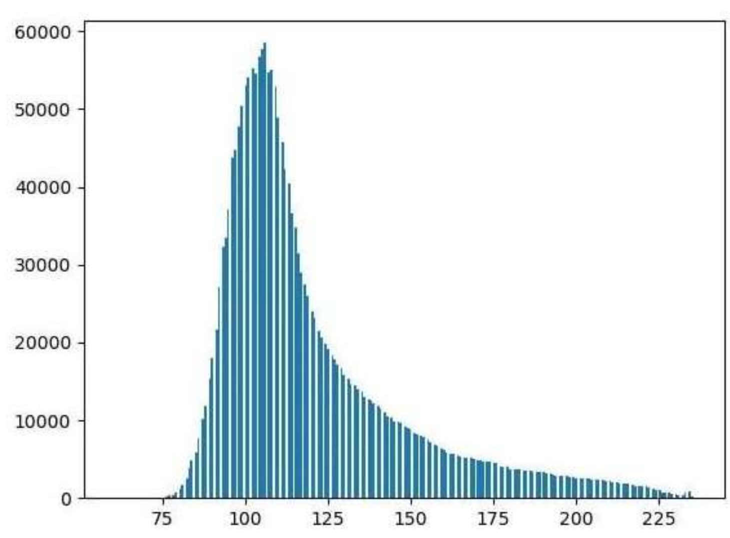
تصاویر در کامپیوتر به صورت یک ماتریس از پیکسل‌ها می‌باشند. تصاویر سیاه و سفید، دارای یک کانال رنگ هستند و می توان آن ها را با یک ماتریس دو بعدی نمایش داد.

مقدار هر پیکسل نشان‌دهنده‌ی میزان روشنایی آن پیکسل، و از ۰ تا ۲۵۵ متغیر است. به این صورت که مقدار ۰ نشانه عدم وجود روشنایی (رنگ سیاه) و مقدار ۲۵۵ نشان دهنده روشنایی مطلق (رنگ سفید) است.

تصاویر رنگی دارای سه کانال رنگ می‌باشند که هر کانال نشان‌دهنده‌ی یکی از رنگ‌های اصلی RGB (قرمز، سبز و آبی) است. بنابراین هر پیکسل یک تصویر رنگی، یک ماتریس سه‌بُعدی است و همان طور که می‌توان حدس زد، پیکسل با مقدار (۲۵۵ ,۲۵۵ ,۲۵۵) به معنی وجود هر سه رنگ اصلی به صورت کامل است و رنگ سفید را به وجود می‌آورد.

تمرین اول

با یک تمرین ساده شروع می‌کنیم. در این بخش می‌خواهیم با استفاده از کتابخانه matplotlib در پایتون، نموداری از رنگ‌های موجود در عکس ضمیمه شده را رسم کنیم. به شکل زیر نگاه کنید:



محور افقی در این نمودار، همان بازه‌ی کانال‌های رنگ است و محور عمودی به اندازه تعداد پیکسل‌ها می‌باشد. تعداد پیکسل‌ها به ازای هر عدد از محور افقی رسم شده است.

این کار را برای هر سه رنگ RGB به صورت جداگانه انجام دهید. همچنین برداشت خود را از سه نمودار به‌دست آمده بیان کنید.

تمرین دوم

در این بخش به تشکیل یک سایه با استفاده از جبر خطی می‌پردازیم.

یکی از تبدیل هایی که با آن آشنا شدیم Shear Transformation می‌باشد که ماتریس استاندارد آن به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ \lambda & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس فوق هنگامی که بر روی تصاویر اثر بگذارد، سبب کج شدن آن ها می‌شود.

توجه: تضمین می‌کنیم عکس‌هایی که برای تست‌کیس در نظر گرفته می‌شوند، پس‌زمینه سفید خواهند داشت.

راهنمایی:

- ابتدا تصویر ضمیمه شده مربوط به این بخش را دریافت و به ماتریس تبدیل کنید.
- یک ماتریس جدید تشکیل دهید. بهتر است اندازه ماتریس را اندکی بیشتر در نظر بگیرید و رنگ سطر و ستون‌های اضافه شده را سفید قرار دهید، چرا که ممکن است سایه از عکس خارج شود.
- ماتریس ابتدایی را در ماتریس جدید کپی کنید با این تفاوت که قسمت سفید را نادیده گرفته و قسمت های دیگر را به صورت خاکستری در ماتریس جدید وارد شوند.
- دو ماتریس را ترکیب کرده و ماتریس نهایی را بسازید و عکس خروجی را نمایش دهید.

تمرین سوم

در مورد ماتریس Toeplitz تحقیق کنید و تابعی طراحی کنید که دو بردار هم اندازه c و r را گرفته و یک ماتریس Toeplitz با این بردارها بسازد، آن را با عملیات سطری مقدماتی به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل کند و در انتها، دترمینان آن را محاسبه و بر گرداند.

توجه: استفاده از توابع آماده چه در ساخت ماتریس و چه در محاسبه دترمینان، مجاز نیست.

راهنمایی: ماتریس Toeplitz به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} c_1 & r_2 & r_3 & r_4 & \cdots & r_n \\ c_2 & c_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{n-1} \\ c_3 & c_2 & c_1 & r_2 & \cdots & r_{n-2} \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & \cdots & r_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \cdots & c_1 \end{bmatrix}$$

نکات مهم تمرین عملی:

- تمرین عملی این سری از تمارین، تحویل آنلاین دارد. پس حتماً تسلط کافی را داشته باشید.
- خواندن عکس با هر کتابخانه‌ای قابل انجام است اما ادامه‌ی تمرینات حتماً باید با استفاده از کتابخانه‌های $numpy$ و $matplotlib$ انجام شود.
- انجام این تمرینات در بهتر شدن دید شما به مباحث تئوری درس، تاثیر به‌سزایی دارد. بنابراین تمرینات را خودتان انجام دهید و از تقلب اکیداً خودداری کنید.
- مهلت ارسال تمرین عملی، ۷ روز پس از پایان مهلت ارسال تمرین تئوری است.