

تاریخ: ۱۷، ۸، ۹۶
 به نام او
 تمرینات مبتدی و حریفی - سری ششم - ۱۷، ۸، ۹۶

۱- جمع و ضرب اسکالر زیر را روی \mathbb{R}^2 در نظر بگیرید. آیا \mathbb{R}^2 با این جمع و ضرب اسکالر یک فضای برداری است؟ (مسئله ۱)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$c(x, y) := (cx, cy) \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

۲- فضای برداری \mathbb{R}^2 با جمع و ضرب اسکالر معمولی آن را در نظر بگیرید. زیرمجموعه‌های از \mathbb{R}^2 را مثال بزنید که تحت جمع بسته باشند ولی تحت ضرب اسکالر نه. زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R}^2 را مثال بزنید که تحت ضرب اسکالر بسته باشد ولی تحت جمع نه. (مسئله ۱)

۳- در هر مورد مشخص کنید آیا زیرمجموعه داده شده یک زیرفضا از فضای برداری مشخص شده می‌باشد یا خیر. (مسئله ۱)

الف) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ در فضای برداری \mathbb{R}^2 .

ب) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + 2c = 0\}$ در فضای برداری \mathbb{R}^3 .

ج) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$ در $M_n(\mathbb{R})$.

د) مجموعه تمام بردارهای عمود بر $(-1, 3, 1)$ در فضای برداری \mathbb{R}^3 .

۴- فرض کنید W_1 و W_2 زیرفضای V باشند. ثابت کنید $W_1 \cup W_2$ یک زیرفضای V است اگر و تنها اگر $W_2 \subseteq W_1$ یا $W_1 \subseteq W_2$. (مسئله ۲)

۵- فرض کنید V یک فضای بردار روی میدان F باشد و $\alpha, \omega \in V$ و $\alpha, \beta \in F$.

در چه صورت $\alpha\omega = \beta\omega$ ایجاب می‌کند $\alpha = \beta$ ؟ در چه صورت $\alpha\omega = \alpha\omega$ ایجاب می‌کند $\omega = 0$ ؟ (سوال ۱)

۶- با جمع و ضرب مقادیر، آیا \mathbb{C} فضای برداری روی \mathbb{R} است؟ \mathbb{R} روی \mathbb{C} چگونه؟ (سوال ۱)

۷- ثابت کنید زیرفضای غیربدیهی R^3 (مثلاً خطوط نوزده لایه مبدأ و صفحه نوزده لایه) لزماً هستند. (سوال ۲)

۸- ماتریس $A \in M_n(\mathbb{R})$ را در نظر بگیرید و هر سطر آن را به عنوان عنصر از فضای برداری \mathbb{R}^n بگیرید. ثابت کنید A متکدر پذیر است اگر و تنها اگر هر عنصر \mathbb{R}^n را بتوان به صورت ترکیب خطی سطرهای A نوشت. (سوال ۲)