جبرخطی کاربردی

نیمسال اول ۹۸-۹۷

مدرس :دکتر ناظر فرد

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات

تمرین شماره۴

توجه!!! :

- تمارین زیر مربوط به فصل ۴ (فضای برداری) می باشد که شامل ۸ سوال نظری است .
- پاسخ های تمرین را در قالب یک فایل به صورت الگوی زیر آپلود کنید.

9531000_Sokratis_Papastathopoulos_HW4.pdf

- مهلت تحویل تمارین رور دوشنبه ۹۷/۱۰/۳ ساعت ۲۳:۵۵ خواهد بود.

تمارین:

در این سری سوالات مظور از $\mathbb{P}[x]$ تمامی چند جمله ای ها با متغیر x هستند و $\mathbb{P}_n[x]$ تمامی چند جمله ای از درجه حداکثر n هستند،همچنین $M_n(\mathbb{R})$ تمامی ماتریس های مربعی $n \times n$ با درایه های از اعداد حقیقی هستد.

۱. در هر مورد مشخص کنید آیا زیر مجموعه ی داده شده یک زیر فضا از فضای برداری مشخص شده می باشد یا خیر.

۱. $\{(x,y) | \frac{x}{y} = 1, x, y \in \mathbb{R}\}$ در فضای برداری $\mathbb{R}^2$.

۲. $\{p(x) | p(-x) = -p(x), p(x) \in \mathbb{P}[x]\}$ در فضای برداری $\mathbb{P}[x]$.

۲. فرض کنید W_1, W_2 زیر فضا های فضای برداری V باشند، تعریف می کنیم :

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 | w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

.

۱. نشان دهید $W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ زیر فضای V هستند و همچنین نشان دهید:

$$W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$$

.

۲. نشان دهید :

$$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$$

.

۳. نتیجه گیری قسمت ۱ را با استفاده از دو خط که از مبدا مختصات xy می گذرند توجیه کنید.

۴. درستی یا نادرستی تساوی زیر را بررسی کنید در صورت درست بودن اثبات و در صورت نادرست بودن مثال نقض بزنید:

$$W_3 \cap (W_1 + W_2) = (W_3 \cap W_1) + (W_3 \cap W_2)$$

.

۵. نشان دهید $W_1 + W_2$ کوچکترین زیر فضایی از V است که شامل $W_1 \cup W_2$ است.

۳. اگر $T : V \longrightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد ثابت کنید $kernel$ این تبدیل خطی زیر فضایی V و $Range$آن زیر فضایی از W است.

۴. ثابت کنید هر تبدیل خطی به شکل $T : V \longrightarrow W$ هر پایه در V را به پایه ای در W می نگارد.

۵. برای ماتریس مربعی A نشان دهید

$$V = \{X|AX = XA\}$$

که همان مجموعه تمام ماتریس های قابل جا به جایی با A هستند یک فضای برداری است و با فرض اینکه

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

یک پایه برای V بیابید.

۶. درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید(A, B ماتریس و $r(A)$ نشان دهنده رنک ماتریس A است):

۱. اگر $r(A) = r(B)$ آنگاه $r(A^۲) = r(B^۲)$.

۲. $r(A - B) \leq r(A) - r(B)$.

۳. اگر $r(AB) = ۰$ باشد آنگاه یا $r(A) = ۰$ یا $r(B) = ۰$.

۷. فرض کنید $T : V \longrightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد ثابت کنید رابطه زیر برقرار است:

$$dim(ker(T) \cap W) = dim(W) - dim(T(W))$$

۸. در هر یک از قسمت های زیر ابتدا مختصات بردار داده شده (v) را در هریک از پایه ها بیابید سپس ماتریس انتقال از یک پایه (B) به پایه (C) دیگر را محاسبه کنید.

۱.

$$V = \mathbb{P}_۳[x] \qquad v = p(x) = ۸ + x + ۶x^۲ + ۹x^۳$$
$$B = \{۲ + ۳x + ۴x^۲ - x^۳, ۳x + ۵x^۲ + ۲x^۳, -۵x^۲ - ۵x^۳, ۴ + ۴x + ۴x^۲\}$$
$$C = \{۱ - x^۳, ۱ + x, x + x^۲, x^۲ + x^۳\}$$

۲.

$$V = M_۲(\mathbb{R}) \qquad v = \begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$
$$B = \{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\}$$
$$C = \{\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\}$$

۳.

$$V = \mathbb{R}^۳ \qquad v = (۱, ۷, ۷)$$
$$B = \{(-۷, ۴, ۴), (۴, ۲, -۱), (-۷, ۵, ۰)\}$$
$$C = (۱, ۱, ۰), (۰, ۱, ۱), (۳, -۱, -۱)$$