۱. مقادیر x را طوری بدست آورید که ماتریس A معکوس‌پذیر باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 0 & 7+x & -3 \\ 0 & 4 & x \end{bmatrix}$$

پاسخ:

می‌دانیم که ماتریس تنها در صورتی معکوس‌پذیر است که دترمینان آن صفر باشد. پس باید در ابتدا دترمینان ماتریس را محاسبه کنیم.

$$det(A) = 2\begin{vmatrix} 7+x & -3 \\ 4 & x \end{vmatrix}$$

$$= 2\big(x(7+x) - 4(-3)\big) = 2(x^2 + 7x + 12) = 2(x+3)(x+4)$$

با توجه به حاصل دترمینان، ماتریس A به ازای همه x ها به غیر از $x = -3$ و $x = -4$ معکوس‌پذیر است.

---

۲. ماتریس های $A\ , B, C$ را درنظر بگیرید. نشان دهید $det(A) = det(b) + det(C)$. توجه داشته باشید که $A \neq B + C$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1+v_1 \\ a_{21} & a_{22} & u_2+v_2 \\ a_{31} & a_{32} & u_3+v_3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & u_3 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & v_3 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

دترمینان A را روی ستون سوم ماتریس A محاسبه می‌کنیم.

$$\det(A) = (u_1+v_1).\det(A_{13}) - (u_2+v_2).\det(A_{23}) + (u_3+v_3).\det(A_{33})$$

$$= u_1.\det(A_{13}) - u_2.\det(A_{23}) + u_3.\det(A_{33}) + v_1.\det(A_{13}) - v_2.\det(A_{23}) + v_3.\det(A_{33})$$

$$= \det(B) + \det(C)$$

---

۴. مقادیر x را به گونه‌ای تعیین کنید که ماتریس مربعی M ، $singular$ شود.

$$M = \begin{bmatrix} x & x^2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

برای آنکه M یک ماتریس منفرد شود، باید دترمینان M برابر با صفر شود.

$$\det(M) = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}.0.\begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.(-1).\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}.1.\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + (x-2) + (3x - 2x^2) = -2x^2 + 4x - 2$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین ماتریس M به ازای $x = 1$ منفرد خواهد بود.

---

۵. اگر R یک مثلث با راس‌های (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (x_3, y_3) باشد، نشان دهید که:

$$area\ of\ triangle = \frac{1}{2} \times det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

مثلث را به مثلثی هم مساحت با یک راس در مبدا تبدیل می‌کنیم (مثلث را شیفت می‌دهیم) و (x_3, y_3) را از تمام رئوس کم می‌کنیم. حالا این مثلث راس‌هایی برابر $(0,0)$ و $(x_1 - x_3, y_1 - y_3)$ و $(x_2 - x_3, y_2 - y_3)$ دارد. می‌دانیم مثلث مساحتی برابر $\frac{1}{2}$ مساحت متساوی‌الضلاع با ضلع‌های v_1 و v_2 دارد. پس مساحت مثلث برابر است با:

$$\frac{1}{2}|det[v_1 v_2]| = \frac{1}{2}\left|\det \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix}\right|$$

حال می‌توانیم ثابت کنیم عبارت صورت سوال، طی چند عملیات سطری و گسترش $cofactor$ ها برای حساب کردن دترمینان برابر همین عبارت بالاست:

$$det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & 0 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix}$$

طبق تئوری ۵:

$$\det \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix}$$

پس مساحت مثلث برابر است با:

$$\frac{1}{2} \times \det \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \times det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

۶. فرض کنید H مجموعه تمام بردارهای به فرم $(a-3b, b-a, a, b)$ است که a و b اعداد دلخواهی می‌باشند.

$$H = \{(a-3b\,, b-a\,, a\,, b)\} : \; a, b \in R$$

نشان دهید H یک زیرفضا از R^4 است.

پاسخ:

بردار های H را به صورت بردارهای ستونی می‌نویسیم. در این صورت هر بردار دلخواه در H به فرم زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} a-3b \\ b-a \\ a \\ b \end{bmatrix} = a\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + b\underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2}$$

این محاسبات نشان می‌دهد که $H = Span\{v_1, v_2\}$ به طوریکه v_1 و v_2 بردارهایی هستند که در بالا با رنگ آبی مشخص شده‌اند.

در این حالت طبق قضیه ۱ در کتاب درسی، H یک زیرفضا از R^4 است.

---

۷. A را بیابید به نحوی که مجموعه‌های داده شده $Col\ A$ باشند.

$$\left\{\begin{bmatrix} 2s+3t \\ r+s-2t \\ 4r+s \\ 3r-s-t \end{bmatrix} : r, s, t \text{ real}\right\}$$

$$\left\{\begin{bmatrix} b-c \\ 2b+c+d \\ 5c-4d \\ d \end{bmatrix} : b, c, d \text{ real}\right\}$$

پاسخ:

الف) هر یک از المان‌های این مجموعه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$r\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

به طوری که هر یک از r, s, t می‌توانند اعداد حقیقی باشند. بنابراین، این مجموعه $Col\ A$ است به طوری که:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

ب) هر یک از المان‌های این مجموعه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$b\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-1\\1\\5\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\1\\-4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&1\\0&5&-4\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\c\\d\end{bmatrix}$$

به طوری که هر یک از r, s, t می‌توانند اعداد حقیقی باشند. بنابراین، این مجموعه $Col\ A$ است به طوری که:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&1\\0&5&-4\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

---

۸. فرض کنید V یک فضای برداری و B یک پایه آن باشد و w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 بردار هایی از V باشند و A ماتریس کاهش‌یافته است که ستون هایش w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 هستند و به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&3&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

الف) $dim(V)$ چقدر است ؟

ب)اگر $S = span(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ آنگاه $dim(S)$ چند است ؟

پاسخ:

الف) اگر دقت کنیم ستون‌های این ماتریس داری ۵ المان هستند یعنی هر بردار که براساس پایه B نوشته شده است دارای پنج المان می‌باشد و این موضوع به ما نشان می‌دهد که پایه B دارای ۵ عضو است. پس $dim(V) = 5$.

ب) همانطور که دیده می‌شود تنها ستون‌های یک و دو که نماینده بردارهای w_1, w_2 قبل از کاهش یافتن می‌باشند دارای درایه محوری می‌باشد. پس تنها این دو بردار در بین بردارها مستقل هستند و مابقی وابسته خطی هستند. پس اگر بخواهیم برای این زیرفضا پایه بنویسیم همین ۲ بردار کافیست. پس $dim(S) = 2$.

۹. درایه‌های خالی در ماتریس A را به گونه‌ای پر کنید که ماتریس A به ترتیب دارای $rank\ 1$، $rank\ 2$ و $rank\ 3$ باشد.

$$A = \begin{pmatrix} & -3 & \\ 1 & 3 & -1 \\ & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

پاسخ:

برای اینکه ماتریس A دارای $rank\ 1$ باشد، باید سطر اول و سوم ضرایبی از هم باشند. بنابراین:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

برای اینکه ماتریس A دارای $rank\ 2$ باشد، باید سطر اول ضریبی از سطر دوم باشد، اما مضربی از سطر سوم نباشد. بنابراین:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

اگر درایه‌های خالی ماتریس A را به صورت تصادفی پر کنیم، به احتمال زیاد ماتریس A دارای $rank\ 3$ خواهد بود. بنابراین درایه‌های خالی را با ۰ و ۱ پر می‌کنیم:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

ماتریس A_3 را به فرم نردبانی در می‌آوریم تا مطمئن شویم دارای $rank\ 3$ است:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 9 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 9 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow\ rank\ 3$$

---

۱۰. بردارهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

نشان دهید $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ یک پایه برای R^3 است. ماتریس مختصات B را برای u پیدا کنید و u را به صورت ترکیب خطی از بردارهای v_1, v_2, v_3 بنویسید.

پاسخ:

بردارهای v_i را به عنوان ستون قرار می‌دهیم:

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

از آنجایی که $|P_B| = 2 \neq 0$ ، بنابراین ستون‌های P_B مستقل خطی‌اند و پایه‌ای برای R^3 محسوب می‌شوند. P_B ماتریس انتقال از پایه‌ی B به پایه‌ی استاندارد است، یعنی $v = P_B[v]_B$. بنابراین با محاسبه‌ی ${P_B}^{-1}$ می‌توان ماتریس مختصات B را برای u بدست آورد:

$$[\mathbf{u}]_B = P_B^{-1}\mathbf{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}_B$$

در نتیجه:

$$\mathbf{u} = 5\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3.$$