جبرخطی کاربردی

نیمسال دوم ۹۶-۹۷

مدرس :دکتر ناظر فرد

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات

مجموعه سوالات فصل ۱ (معادلات خطی در جبر خطی)

توجه!!! :

- ضمن تبریک عید باستانی نوروز به دانشجویان گرامی و آرزوی سالی خوش ،خرم و همراه با موفقیت برای عزیزان ،سری اول تمرینات با موضوع معادلات خطی در جبر خطی تقدیم شما می شود.
- این سری تمرین شامل ۱۲ سوال نظری است که سوالات شبیه سازی نیز به زودی در اختیار شما قرار خواهد گرفت.
- پس از حل مسائل آن ها را به صورت یک فایل pdf در قسمت مورد نظر آپلود کنید همچنین تمرینات عملی و شبیه سازی را نیز در یک پوشه قرار دهید و در قسمت در نظر گرفته شده با توجه به اصول ارسال تمارین که در کانال و مودل قرار گرفته است ارسال کنید.
- تمرینات نظری را به شکل:

  9531000_T_Sokratis Papastathopoulos_HW1.pdf

  و تمرینات عملی و شبیه سازی را به شکل:

  9531000_S_Sokratis Papastathopoulos_HW1.pdf

  ارسال فرمایید.
- مهلت تحویل تمارین ساعت ۱۱:۵۵ روز جمعه ۹۷/۱/۲۴ خواهد بود.

تمارین:

۱. در زیر دو دستگاه معادلات مشاهده می کنید،برای این دستگاه ها ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل دهید سپس ماتریس افزوده آن ها را به شکل کاهش یافته سطری پلکانی در بیاورید و در مورد تعداد جواب های این دستگاه ها بحث کنید و آن ها را به شکل پارامتریک برداری بیان کنید،در نهایت یک توصیف هندسی از این جواب ها ارائه دهید.

$$\begin{cases} x_۱ + ۳x_۲ - ۵x_۳ &= ۴ \\ x_۱ + ۴x_۲ + -۸x_۳ &= ۷ \\ -۳x_۱ - ۷x_۲ + ۹x_۳ &= -۶ \end{cases} \qquad \begin{cases} x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ &= ۱ \\ -۴x_۱ - ۹x_۲ + ۲x_۳ &= -۱ \\ -۳x_۲ - ۶x_۳ &= -۳ \end{cases}$$

.

۲. در دستگاه معادلات زیر h و k را به گونه ای انتخاب کنید که :

۱. معادلات جواب نداشته باشند.

۲. معادلات جواب یکتا داشته باشند.

۳. بیش از یک جواب داشته باشند.

به هر قسمت به طور جداگانه پاسخ دهید.

$$\begin{cases} x_۱ + hx_۲ &= ۲ \\ ۴x_۱ + ۸x_۲ &= k \end{cases} \qquad \begin{cases} x_۱ + ۳x_۲ &= ۲ \\ ۳x_۱ + hx_۲ &= k \end{cases}$$

۳. تمام جواب های ممکن برای $x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵$ از دستگاه معادلات زیر بیابید.

$$\begin{array}{ccccc} x_۵ & + & x_۲ & = & yx_۱ \\ x_۱ & + & x_۳ & = & yx_۲ \\ x_۲ & + & x_۴ & = & yx_۳ \\ x_۳ & + & x_۵ & = & yx_۴ \\ x_۴ & + & x_۱ & = & yx_۵ \end{array}$$

y یک پارامتر است.

۴. در مورد تعداد جواب های دستگاه معادلات زیر را برای مقادیر مختلف a, b مشخص کنید.

$$\begin{array}{ccccccc} ax_۱ & + & bx_۲ & + & ۲x_۳ & = & ۱ \\ ax_۱ & + & (۲b-۱)x_۲ & + & ۳x_۳ & = & ۱ \\ ax_۱ & + & bx_۲ & + & (b+۳)x_۳ & = & ۲b-۱ \end{array}$$

۵. خطوط راست در صفحه xy را در نظر بگیرید نشان دهید سه خط

$$\begin{array}{ccccccccc} l_۱ & : & ax & + & by & + & c = & ۰ \\ l_۲ & : & bx & + & cy & + & a = & ۰ \\ l_۳ & : & cx & + & ay & + & b = & ۰ \end{array}$$

در یک نقطه متقاطعند اگر و فقط اگر $a+b+c=۰$ باشند.

۶. درستی و نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید در صورت درست بودن آن را ثابت کنید و در صورت نادرست بودن برای آن ها مثال نقض بزنید.

۱. اگر $v_۱, v_۲, v_۳$ وب خطی باشند و $v_۲, v_۳, v_۴$ وابسته خطی باشند آنگاه $v_۱$ ترکیب خطی از $v_۲, v_۳$ است و $v_۴$ ترکیب خطی از $v_۱, v_۲, v_۳$ است.

۲. اگر $A = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ یک مجموعه از بردار ها عضو $\mathbb{R}^n$ که مستقل خطی باشند و $span(A) = \mathbb{R}^n$ آنگاه $B = \{v_۱ + v_۲, v_۲ + v_۳, \dots, v_{n-۱} + v_n, v_n + v_۱\}$ نیز مجموعه مستقل خطی است که $span(B) = \mathbb{R}^n$.

۳. $v_۱, v_۲, \dots, v_n$ بردار هایی مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر هیچکدام از v_i ها را نتوان به شکل ترکیب خطی بقیه بردار ها نوشت.

۴. اگر هر $r-۱$ بردار از مجموعه بردار های $v_۱, v_۲, \dots, v_r$ مستقل خطی باشند آنگاه $v_۱, v_۲, \dots, v_r$ مستقل خطی است.

۵. یک سیستم معادلات خطی کاهش یافته(دستگاه معادلاتی که تعداد معادلات کمتر از متغیر ها باشد) با توجه به نوع ضرایب می تواند فقط یک جواب داشته باشد یا جواب نداشته باشد.

۶. شکل اکولون (echelon) یک ماتریس یکتاست.

۷. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $ad - bc \neq ۰$ آنگاه $Ax = ۰$ فقط جواب بدیهی دارد.

۷. مربع های جادویی (magic squre)یکی از ساختار های جالب ترکیبیاتی در ریاضی هستند که در بخش ها گوناگون ریاضی کاربرد دارند و ارتباطات جالبی بین مربع جادویی و ساختار های گرافی و ... وجود دارد،حتی این ساختار ها در علوم دیگر از جمله مکانیک و کامپیوتر نیز کاربرد دارند و هنوز تعداد زیادی مسئله حل نشده در این زمینه وجود دارد. مربع جادویی یا وفقی جدولی است $n \times n$ که خانه های آن با اعداد مثبت ۱ تا $n^۲$ پر شده است به نحوی که مجموع اعداد هر ستون عمودی و هر سطر افقی و قطر آن عدد ثابتی را نشان می دهد برای مثال شکل زیر یک مربع جادویی ۳ × ۳ است:

۶	۷	۲
۱	۵	۹
۸	۳	۴

§ اگر تعداد مربع های جادویی ۶ × ۶ را بیابید نمره درس جبر خطی کاربردی شما ۲۰ منظور می شود :) §
اگر M_i یک مارتیس $i \times i$ باشد که درایه های آن اعداد متناظر بر روی یک مربع جادویی $i \times i$ باشد آنگاه حاصل ضرب های ماتریسی زیر را بیابید:

$$M_۱ \times \begin{bmatrix} ۱ \end{bmatrix} \qquad M_۲ \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad M_۳ \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad M_n \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ \vdots \\ ۱ \end{bmatrix}_{n \times ۱}$$

همچینین تعیین کنید یک ماتریس M_i با کدامیک از اعمال سطری پلکانی همچنان به شکل جادویی می ماند.

۸. گزاره های زیر ثابت کنید:

۱. اگر معادله $Ax = b$ به ازای هر $b \in \mathbb{R}^n$ جواب داشته باشد و به ازای $b = ۰$ فقط جواب بدیهی داشته باشد آنگاه ماتریس B را بدین شکل از ماتریس A می سازیم که تمامی ستون های کمتر از n ام ماتریس A را با ستون n ام جمع می کنیم و در ستون n ام ماتریس B قرار می دهیم ثابت کنید معادله $Bx = b$ به ازای هر $b \in \mathbb{R}^n$ جواب دارد و به ازای $b = ۰$ فقط جواب بدیهی دارد.

۲. نشان دهید اگر معادله $Ax = ۰$ بیش از یک جواب داشته باشد و A به شکل $[a_۱ a_۲ \ldots a_n]$ باشد که a_i ها ستون های ماتریس A هستند آنگاه وجود دارد عدد صحیح مانند k ای که $۱ < k \leq n$ و $Bx = a_k$ سازگار باشد ($B = [a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۱}]$)
.

۳. فرض کنید w حوابی از $Ax = b$ باشد و تعریف می کنیم $v_h = w - p$.نشان دهید v_h جوابی از $Ax = ۰$ است.این نشان می دهد که هر جوابی از $Ax = b$ به شکل $w = p + v_h$ است که p یک جواب خاص از $Ax = b$ است و v_h جوابی از $Ax = ۰$.

۹. u, v را دو بردار مستقل خطی عضو $\mathbb{R}^۳$ در نظر بگیرید و P را صفحه ای در نظر بگیرید که از این دو بردار و نقطه ۰ می گذرد. نمایش پارامتریک P به شکل $x = su + tv (s, t \in \mathbb{R})$ است .نشان دهید که یک تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ صفحه P را به صفحه ای که از ۰ می گذرد یا به خطی که از ۰ می گذرد و یا به مبدا مختصات در $\mathbb{R}^۳$ نگاشت می کند و همچنین چه چیزی باید در مورد $T(u), T(v)$ صدق کند که تصویر صفحه P یک صفحه باشد.

۱۰. فرض کنید که $span\{v_۱, v_۲, \ldots, v_p\} = \mathbb{R}^n$ و $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک ترکیب خطی باشد که

$$\forall i \in \{۱, \ldots, p\} \;\; T(v_i) = ۰$$

آنگاه نشان دهید که T یک تبدیل صفر است.(به تبدیلی تبدیل صفر گویند که $\forall x \in \mathbb{R}^n \;\; T(x) = ۰$)

۱۱. فرض کنید $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی باشد نشان دهید اگر T دو بردار مستقل خطی را به یک مجموعه وابسته خطی نگاشت کند آنگاه $T(x) = ۰$ جواب غیر بدیهی دارد.

۱۲. در هر کدام از تبدیل های زیر مشخص کنید تبدیل خطی هست یا نه و در صورت خطی بودن ماتریس استاندارد آن را مشخص کنید.

۱.

$$\begin{aligned} &T : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲ \\ &(x_۱, x_۲) \longrightarrow (۴x_۱ - ۲x_۲, ۳|x_۲|) \end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned} &T : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲ \\ &(x_۱, x_۲) \longrightarrow (sin(x_۱), x_۲) \end{aligned}$$

.۳

$$
\begin{aligned}
T : \mathbb{R}^{۳} &\longrightarrow \mathbb{R}^{۳} \\
(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}) &\longrightarrow (۳x_{۱}, x_{۱} - x_{۲}, ۲x_{۱} + x_{۲} + x_{۳})
\end{aligned}
$$