

سوال :

یک پایه متعامد یکه ( orthonormal basis ) برای فضای ستونی ( column space ) ماتریس A به دست آورید .

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

پاسخ : ابتدا فرآیند Gram-Schmidt را بر روی ستون های ماتریس اعمال می کنیم :

$$v_1 = x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{(6 \times -1) + (-8 \times 3) + (-2 \times 1) + (-4 \times 1)}{(-1 \times -1) + (3 \times 3) + (1 \times 1) + (1 \times 1)} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3 &= x_3 - \frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{6}{12} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{(18 + 3 + 6 + 3)}{(9 + 1 + 1 + 1)} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

اکنون باید بردار ها را یکه کنیم . برای یکه کردن بردار ها کفایت هریک را بر اندازه ی خود بردار تقسیم کنیم :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|} \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|} \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|} \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$