دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

کاربرد های جبر خطی

نیم‌سال دوم ۹۷-۹۶

مدرس: دکتر امیرمزلقانی

فصل دوم (جبر ماتریسی)

توجه:

- این تمرین از مباحث مربوط به فصل دوم (جبر ماترسی) طراحی شده است که شامل ۹ مساله و یک تمرین شبیه سازی می باشد.
- کلاس تدریسیار هفته بعد از موعد تحویل مربوط به رفع مشکلات این تمرین است. تا زمان کلاس سوالات خود را از طریق ایمیل زیر بپرسید.

$aut.la2018@gmail.com$

- مساله ها را در یک فایل pdf و فایل کد های مربوط به تمرین های شبیه سازی و گزارش های آنها را به طور مجزا در یک پوشه قرار دهید.
- پاسخ های تمرین را در قالب یک فایل به صورت الگوی زیر آپلود کنید.

9531000_Jakub_Błaszczykowski_HW2.zip

- مهلت تحویل جمعه ۱۷ فروردین ۱۳۹۷ ساعت ۲۳:۵۴

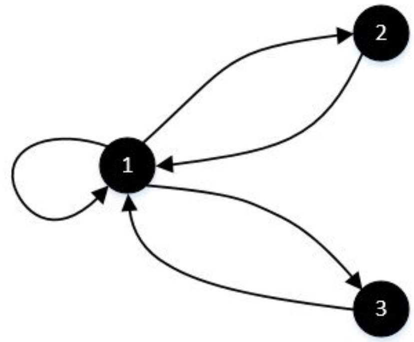
مسئله‌ی ۱ .

الف) اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد و داشته باشیم $A^{۲} + I = ۰$ نشان دهید n زوج است.

ب) اگر به ازای یک عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $A^n = ۰$ آنگاه $I - A$ معکوس پذیر است.

مسئله‌ی ۲ . یک گراف جهت دار با n راس را میتوان با یک ماتریس $n \times n$ نشان داد که یک بودن درایه a_{ij} مشخص کننده وجود یال از راس iام به راس jام است. به این ماتریس، ماتریس مجاورت می‌گویند. درایه i و j ماتریس $A^{۲}$ نشان دهنده تعداد مسیرهای به طول ۲ از راس i به راس j است. چرا؟

درایه i و j ماتریس A^k تعداد مسیرهای به طول k از راس i به راس j است. به کوچکتری k که A^k هیچ درایه صفری نداشته باشد قطر این ماتریس مجاورت می‌گویند. قطر ماتریس مجاورت گراف زیر را بدست اورید:



مسئله‌ی ۳ . به سوالات زیر در مورد عملگر ترانهاده در ماتریس ها پاسخ دهید: (ماتریس M متقارن است، اگر و تنها اگر $M = M^T$.)

الف) ترانهاده ماتریس زیر را بدست اورید:

$$M = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & -۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۴ & ۸ \end{bmatrix}$$

ب) با توجه به مقدار M در مورد قبل مقدار MM^T را بدست آورید و متقارن بودن آن را برسی کنید.

ج) ثابت کنید برای هر ماتریس M ،ماتریس $M + M^T$ یک ماتریس متقارن است.

د) برای هر ماتریس M در مورد متقارن بودن یا ویژگی‌های ترانهاده ماتریس $M - M^T$ تحقیق کنید.

ه) ثابت کنید ترانهاد هر ماتریس مقدماتی یک ماتریس مقدماتی است. آنها را بدست آورید. (یعنی $P_{i,j}^T$ و $M_i(c)^T$ و $A_{i,j}(c)^T$ را بر حسب ماتریس های مقدماتی به دست آورید.)

مسئله‌ی ۴. اگر A و B ماتریس‌هایی $n \times n$ و $C = A + B$ و $D = A - B$ به طوری که D و C معکوس پذیرند.
نشان دهید:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} C^{-1} + D^{-1} & C^{-1} - D^{-1} \\ C^{-1} + D^{-1} & C^{-1} - D^{-1} \end{bmatrix}\right)$$

مسئله‌ی ۵.

درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید و درصورت نادرست بودن مثال نقض ارائه دهید و در صورت درست بودن آن را اثبات کنید:

۱. هر ماتریس مربعی را میتوان به صورت جمع دو ماتریس معکوس پذیری نوشت.

۲. اگر $A^2 = A$ باشد و $A \neq 0$ باشد A معکوس پذیر است.

۳. A و B ای وجود دارند به طوری که $AB - BA = I$.

۴. اگر ماتریس B یک ماتریس ۳ × ۳ باشد، $A = B^4 + 3B^2 + 7B + 3I_3$ معکوس پذیر است.

مسئله‌ی ۶. با استفاده از ماتریس های بلوکی مقدار A^2 را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

مسئله‌ی ۷. اگر ماتریس A را بتوان به صورت $A = PDP^{-1}$ تجزیه کرد، به طوری که P یک ماتریس معکوس پذیر و D به صورت زیر باشد:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ابتدا A^2 و A^3 را محاسبه کنید سپس رابطه ای برای محاسبه A^k به دست آورید

مسئله‌ی ۸. یکی از روش های کد گذاری اطلاعات، استفاده از رمزهای برپایه ترانهاده ماتریس است. پیام

NO HOMEWORK TONIGHT

را در نظر بگیرید. اگر آن را در یک ماتریس ۶×۳ نوشته و سپس ترانهاده ماتریس فوق را محاسبه کنیم (از Q به عنوان پرکننده درایه های خالی ماتریس استفاده می کنیم)

$$\begin{bmatrix} N & O & H & O & M & E \\ W & O & R & K & T & O \\ N & I & G & H & T & Q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} N & W & N \\ O & O & I \\ H & R & G \\ O & K & H \\ M & T & T \\ E & O & Q \end{bmatrix} \tag{۱}$$

صورت رمز شده پیام برابر

NWNOOIHRGOKHMTTEOQ

می شود.

همچنین می توان ترتیب قرار گرفتن ستون های ماتریس را نیز جابه‌جا کرد و به عنوان کلید رمزنگاری همراه با متن رمز شده در اختیار طرف مقابل قرار داد تا با استفاده از آن به رمزگشایی از پیام بپردازد برای مثال اگر بخواهیم پیام فوق را با این روش و با استفاده از کلید ۱۴۶۳۵۲ رمز کنیم،ماتریس حاصل برابر:

$$\begin{bmatrix} N & O & H & O & M & E \\ W & O & R & K & T & O \\ N & I & G & H & T & Q \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} N & O & E & H & M & O \\ W & K & O & R & T & O \\ N & H & Q & G & T & I \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} N & W & N \\ O & K & H \\ E & O & Q \\ H & R & G \\ M & T & T \\ O & O & I \end{bmatrix} \tag{۲}$$

و پیام حاصل برابر

NWNOKHEOQHRGMTTOOI

می شود. (توجه کنید که مخاطب شما باید کلید رمز را بداند تا بتواند متن پیام را به دست اورد.)

همچنین می توان به ازای هر حرف الفبا، عددی متناظر با آن به کار برد. برای مثال اگربه ترتیب از ۰ برای حرف A تا ۲۶ برای حرف Z در نظر بگیریم پیام

MATH IS DISCRETE

به

12 0 19 7 8 18 3 8 18 2 17 4 19 4 16 16

تبدیل می شود.

۱. با ترکیب دو روش بالا پیام

HAPPY NEW YEAR

را رمز کنید. (توجه کنید که علاوه بر متن رمز شده،باید کلید رمز را نیز اعلام کنید)

۲. در صورتی که تنها عملیات مجاز ترانهاده و جابه جایی سطر ها (و نه ستون ها) باشد، چگونه می توان این عملیات رمز نگاری را انجام داد؟

۳. پیام

13 4 14 8 14 22 13 3 7 14 7 0 14 17 14 24 12 10 11 18

را رمز گشایی کنید. (فرض کنید از از جابه جایی ستون ها استفاده نشده است) (در عملیات رمزنگاری معمولا تبادل کلید در مرحله اول صورت می گیرد که هر مرحله نیاز به انتقال آن نباشد تا امنیت آن بیشتر حفظ شود. در این سوال شما باید ماتریس های با ابعاد مختلف را در نظر بگیرید تا بتوانید این رمز را بگشایید!)

مسئله‌ی ۹.

الف) فرض کنید X یک ماتریس $m \times m$ و Y یک ماتریس $m \times n$ و O و I به ترتیب ماتریس صفر و همانی باشند نشان دهید:

$$det(\begin{bmatrix} X & Y \\ O & I \end{bmatrix}) = det(X)$$

ب)اگر A یک ماتریس$m \times n$ و B یک ماتریس $n \times m$ باشند نشان دهید:

$$det(\begin{bmatrix} O & A \\ -B & I \end{bmatrix}) = det(AB)$$

ج) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد به طوری که جمع هر سطر آن برابر صفر است ثابت کنید دترمینان A برابر با صفر است.

سوالات شبیه سازی

مسئله‌ی ۱۰.

ماتریس متراکم (ماتریسی که بیشتر درایه های آن ـ مثلا بیش از نیمی از آنهاـ غیر صفر باشد) و معکوس پذیر A با ابعاد $n \times n$ را در نظر بگیرید، روش استاندارد حل دستگاه معادله خطی $Ax = b$ به صورت زیر است:

۱. تجزیه LU ماتریس A را بیابید: $A = LU$.

۲. اگر $Ux =: \hat{x}$ سیستم $L\hat{x} = b$ (که در آن L یک ماتریس پایین مثلثی است) را از طریق جایگزینی پیشرو $(forwardsubstitution)$ حل کنید.

۳. سیستم بالا مثلثی $\hat{x} = Ux$ را(که در آن U یک ماتریس بالا مثلثی است) از طریق جایگزینی عقب گرد $(backsubstitution)$ حل کنید.

بر این اساس به سوالات زیر پاسخ دهید:

(a) تابعی بنویسید که تجزیه LU ماتریس A را پیدا کند. فرض کنید که می توان ماتریس A را بدون استفاده از عمل جا به جایی دو سطر $row - interchange$ از بین اعمال سطری مقدماتی به ماتریس بالا مثلثی U تبدیل کرد. تابع شما باید ماتریس A را به عنوان ورودی بگیرد و ماتریس پایین مثلثی L و ماتریس بالا مثلثی U را باز گرداند.

```
Function [L, U] = lu_factor(A)

        [n , n1] = size(A);
        if n ~= n1
        error ("A must be square")
        end
        L = eye (n)
        U = zeros (n)

        ...
return;
```

در کد بالا شما باید قسمت .... را تکمیل کنید. برای این منظور تنها مقادیر بالای قطر اصلی ماتریس U که مقدار اولیه صفر گرفته است و مقادیر پایین قطر اصلی ماتریس L که برابر ماتریس همانی است را آپدیت کنید.

(b) تابع دیگری بنویسید که معادله b = Ax را از طریق مراحل ۱ و ۲ و ۳ را که در بالا ذکر شده است، حل کند. تابع شما باید به شکل زیر باشد:

```
function x =  linear_sys_solver(A,b)

        % compute the LU factorization of A
        % Solve Ly = b for y by forward substitution
        % Solve Ux = y by back substitution

return;
```

می توانید از کد خود مروبط به سوال ۸ تمرین اول در این بخش استفاده کنید

(c) تابع myinverse را برای محاسبه وارون ماتریس A با سایز $n \times n$ بنویسید. توجه کنید که باید از تابع lu_factor و توابع $forwardsubstitution$ و $backwardsubstitution$ که در بخش های قبل یا تمرین قبل نوشته اید استفاده

کنید. فرض کنید که $X = A^{-1}$ پس $AX = I_n$ از این نکته که $Ax_i = e_i$ به ازای $i = 1, ..., n$ که در آن x_i ستون i ام ماتریس X و e_i ستون i ام ماتریس I_n استفاده کنید. (توجه کنید که شما تنها یک بار می تواند از تجزیه LU ماتریس A را محاسبه کنید)

(d) ماتریس هیلبرت یک ماتریس مربعی است به گونه ای که $H_{i,j} = \frac{1}{1+i+j}$ ماتریس هیلبرت A از مرتبه ۵ و ۱۰ و۱۵و ۲۰ را بسازید و ماتریس وارون آنها (A^{-1}) را از طریق توابع آماده (مثلا در متلب از طریق تابع inv) به دست آورید. سپس ماتریس وارون آن را از طریق تابع myinverse که در بخش قبل نوشته اید به دست آورید (آن را A'^{-1} بنامید) مقادیر AA^{-1} و AA'^{-1} را به دست آورید و نتایج را مقایسه و تحلیل کنید. (راهنمایی: به ویژگی های ماتریس های ill-conditioned توجه کنید)