دانشکده مهندسی کامپیوتر

به نام یزدان پاک

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبر خطی کاربردی

دکتر امیرمزلقانی

نیم‌سال دوم ۰۱ - ۰۰

پاسخ تشریحی تمرین سری اول

فصل اول

در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل *ala،spring2022@gmail.com* و یا تلگرام تدریس‌یاران درس در ارتباط باشید.

پرسش اول

ماتریس‌های زیر متعلق به ماتریس افزوده سه دستگاه معادله خطی است، در هر مرحله پس از مشخص کردن جایگاه (درایه) و ستون محوری و با استفاده از روش حذف گاوس جردن ماتریس‌ها را به شکل کاهش یافته سطری در بیاورید و سپس در مورد جواب دستگاه‌ها بحث کنید. (در صورت داشتن جواب عمومی، جواب‌ها را به صورت پارامتریک بنویسید.)

پاسخ

$$a)\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۲ & ۰ \\ -۹ & ۱۲ & -۶ & ۰ \\ -۶ & ۸ & -۴ & ۰ \end{bmatrix}$$

ردیف اول را به ۳ تقسیم می‌کنیم:
$$\begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۴}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۰ \\ -۹ & ۱۲ & -۶ & ۰ \\ -۶ & ۸ & -۴ & ۰ \end{bmatrix}$$

۹ برابر ردیف اول را به ردیف دوم اضافه می‌کنیم:
$$\begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۴}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۶ & ۸ & -۴ & ۰ \end{bmatrix}$$

۶ برابر ردیف اول را به ردیف سوم اضافه می‌کنیم:
$$\begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۴}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

این دستگاه معادلات، فقط یک نقطه و یک ستون محوری دارد که ستون اول است و بی‌شمار جواب دارد که به صورت زیر هستند:

$$x_۱ = \frac{۴x_۲ - ۲x_۳}{۳} \qquad x_۲ ، x_۳: free$$

$$b)\begin{bmatrix} ۱ & -۷ & ۰ & ۶ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۲ & -۳ \\ -۱ & ۷ & -۴ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

مقادیر ردیف سوم را با ردیف اول جمع می‌کنیم:
$$\begin{bmatrix} ۱ & -۷ & ۰ & ۶ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۲ & -۳ \\ ۰ & ۰ & -۴ & ۸ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

۴ برابر ردیف دوم را به ردیف سوم اضافه می‌کنیم: $\begin{bmatrix} ۱ & -۷ & ۰ & ۶ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۲ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

با توجه به نقاط محوری تنها دو ستون ماتریس (اول و سوم)، این دستگاه معادلات بی‌شمار جواب دارد که به صورت زیر هستند:

$$x_۱ = ۵ + ۷x_۲ - ۶x_۴ \qquad x_۳ = -۳ + ۲x_۴ \qquad x_۲ ، x_۴: free$$

$$c)\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

از مقادیر ردیف اول، ردیف دوم را تفریق می‌کنیم و از ردیف چهارم، ردیف دوم را.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & -۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۲ & -۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

ردیف سوم و چهارم را جابجا می‌کنیم. $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & -۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۲ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

ردیف اول را از یک دوم ردیف سوم کم می‌کنیم. $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۲ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

حال ماتریس را به فرم نردبانی کاهش یافته تبدیل می‌کنیم. $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

این دستگاه معادلات دارای ۴ سطر و ۴ ستون محوری است و تنها یک جواب دارد.

$$x_۱ = ۰ \qquad x_۲ = ۰ \qquad x_۳ = -۱ \qquad x_۴ = ۱$$

پرسش دوم

ثابت کنید دو ماتریس زیر هم ارز سطری نیستند.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ a & -۱ & ۰ \\ b & c & ۳ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

پاسخ

برای اثبات این موضوع هر دو ماتریس را به فرم پلکانی کاهش یافته تبدیل می‌کنیم. در صورتی که بعد از تبدیل، برای هر دو به ماتریس یکسانی نرسیم ماتریس‌ها هم‌ارز سطری نیستند.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۲=R_۲+۲R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۳=R_۳-R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۲=R_۲/۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_۳=R_۳-۲R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ a & -۱ & ۰ \\ b & c & ۳ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ b & c & ۳ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ b & c & ۳ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

اثبات شد.

پرسش سوم

برای $g.h،k$ مقادیری تعیین کنید تا سیستم زیر:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۴ & ۷ & g \\ ۰ & ۳ & -۵ & h \\ -۲ & ۵ & k & ۱ \end{bmatrix}$$

آ) جواب یکتا داشته باشد.

ب) بی نهایت جواب داشته باشد.

پ) جواب نداشته باشد.

پاسخ

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۴ & ۷ & g \\ ۰ & ۳ & -۵ & h \\ -۲ & ۵ & k & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{R3=R3+۲\times R1} \begin{bmatrix} ۱ & -۴ & ۷ & g \\ ۰ & ۳ & -۵ & h \\ ۰ & -۳ & k+۱۴ & ۲g+۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R3=R3+R2} \begin{bmatrix} ۱ & -۴ & ۷ & g \\ ۰ & ۳ & -۵ & h \\ ۰ & ۰ & k+۹ & ۲g+۱+h \end{bmatrix}$$

آ) به ازای $k+۹ \neq ۲g+۱+h$ یا به عبارت دیگر $۲g+h-k \neq ۸$ سیستم جواب یکتا دارد.

ب) اگر $k+۹ = ۲g+۱+h = ۰$ آنگاه $x۳$ متغیر آزاد می‌شود و بی‌نهایت جواب به ازای $x۳$ های متفاوت داریم.

پ) اگر $k = -۹$ ولی $۲g+۱+h \neq ۰$ آنگاه ردیف آخر ماتریس ردیف pivot می‌شود و طبق تئوری۲ (وجود و یکتایی جواب) اگر ردیفی از ماتریس به شکل $[۰ \quad \cdots \quad ۰ \quad b]$ داشته باشیم آنگاه دستگاه جواب ندارد.

پرسش چهارم

تمام جواب‌های ممکن برای $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$، $x_۵$ از دستگاه معادلات زیر بیابید. y یک پارامتر است.

$$\begin{aligned} x_۵ + x_۲ &= yx_۱ \\ x_۱ + x_۳ &= yx_۲ \\ x_۲ + x_۴ &= yx_۳ \\ x_۳ + x_۵ &= yx_۴ \\ x_۴ + x_۱ &= yx_۵ \end{aligned}$$

پاسخ

دو طرف تساوی‌ها را با هم جمع می‌کنیم. جواب به شکل زیر در می‌آید:

$$۲(x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵) = y(x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵)$$

اگر $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ \neq ۰$ باشد آنگاه به ازای $y = ۲$ دستگاه یک جواب دارد و جواب آن به شکل

$$x_۱ = x_۲ = x_۳ = x_۴ = x_۵ = c$$

که c هر عددی می‌تواند باشد. (این موضوع از حل معادله به ازای $y = ۲$ به دست می‌آید.) و اگر $y \neq ۲$ باشد آنگاه با حذف $x_۵$ ،$x_۴$ ،$x_۳$ به روش جایگذاری مقادیر معادل یک متغیر در معادله به معادلات زیر می‌رسیم:

$$(y^۲ + y - ۱)(x_۲ - x_۱) = ۰$$

$$(y^۲ + y - ۱)[x_۲ - (y - ۱)x_۱] = ۰$$

اگر $y \neq ۲$ و $y^۲ + y - ۱$ پاسخ مسئله به شکل زیر است.

$$x_۱ = s \qquad x_۲ = t \qquad x_۳ = kt - s$$

$$x_۴ = \left(k^۲ - ۱\right)t - ks \qquad x_۵ = ks - t$$

که t, s مقادیری دلخواه، و k جواب معادله $y^۲ + y - ۱$ است.

پرسش پنجم

در مورد تعداد جواب‌های دستگاه معادلات زیر برای مقادیر مختلف a, b بحث کنید.

$$\begin{aligned} ax_۱ + bx_۲ + ۲x_۳ &= ۱ \\ ax_۱ + (۲b - ۱)x_۲ + ۳x_۳ &= ۱ \\ ax_۱ + bx_۲ + (b + ۳)x_۳ &= ۲b - ۱ \end{aligned}$$

پاسخ

ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم. سپس ماتریس را به شکل نردبانی کاهش یافته سطری در می‌آوریم و جواب‌های معادله را می‌یابیم.

$$\begin{bmatrix} a & b & ۲ & ۱ \\ a & ۲b - ۱ & ۳ & ۱ \\ a & b & b + ۳ & ۲b - ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{R3=R3-R1،\, R2=R2-R1} \begin{bmatrix} a & b & ۲ & ۱ \\ ۰ & b - ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & b + ۱ & ۲b - ۲ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1=R_1+\frac{2}{b^2-1}R_3}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \frac{(5-b)(b-1)}{b^2-1} \\ 0 & b-1 & 0 & \frac{2(1-b)}{b+1} \\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{(5-b)(b-1)}{(b^2-1)a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2(1-b)}{b^2-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2b-2}{b+1} \end{bmatrix}$$

$b = 1$: بی‌شمار جواب

$b = 5، a = 0$: بدون جواب

$b = 5، a \neq 0$: یک جواب

$b = -1$: بدون جواب

$b \neq \pm 1،5 \text{ ، } a \neq 0$: یک جواب

$b \neq 1،5 \text{ ، } a = 0$: بدون جواب

پرسش ششم

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه دهید و در صورت درست بودن آن را اثبات کنید:

۱. اگر $vi \in \mathbb{R}^n$ و $\{v_1، v_2، \ldots، v_n\}$ یک مجموعه وابسته خطی باشد، هریک از v_i ها را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از بقیه اعضا نوشت.

   پاسخ: نادرست. برای این قسمت مثال نقضی در $\mathbb{R}^3$ می‌زنیم. فرض کنید:
   $A = \{(1، 0، 0)، (0، 1، 0)، (0، 0، 1)، (0، 2، 2)\}$
   که A یک مجموعه وابسته خطی است زیرا: (۱ ،۰ ،۰)۲ + (۰ ،۱ ،۰)۲ = (۲ ،۲ ،۰). اما (۰ ،۰ ،۱) را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی بقیه بردارها نوشت،

۲. اگر A زیر مجموعه‌هایی از بردارها در$\mathbb{R}^n$ باشد به طوری که $A \subset \mathbb{R}^n$ و بردارهای عضو مجموعه A مستقل خطی باشند آنگاه $span(A) = \mathbb{R}^n$.

پاسخ: نادرست. برای این گزاره، مثال نقضی در $\mathbb{R}^2$ می‌زنیم. به وضوح $A = \{(۱، ۰)\}$ یک مجموعه مستقل خطی از بردارهاست. اما $span(A) \neq \mathbb{R}^2$. بلکه $span(A)$ تمامی نقاط واقع در محور y ها را شامل می‌شود و این تناقض است.

۳. اگر $S \subseteq \mathbb{R}^n$ مستقل خطی باشد و $v \in (\mathbb{R}^n - span(S))$ آنگاه $S \cup \{v\}$ نیز مستقل خطی است.

پاسخ: درست. به برهان خلف فرض می‌کنیم که $S \cup \{v\}$ مستقل خطی نباشد و $\forall i\ w_i \in S$ آنگاه:

$$\exists \alpha_i\ \alpha_i \neq ۰ \quad \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n + \beta v = ۰$$

حالا دو حالت پیش می‌آید. اگر $\beta = ۰$ باشد آنگاه

$$\exists \alpha_i\ \alpha_i \neq ۰ \quad \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n = ۰$$

که این با مستقل خطی بودن S در تناقض است زیرا نتوانستیم ترکیب خطی از بردارهای S را بیابیم که مساوی صفر باشد اما ضرایب آن‌ها صفر نباشد. پس در این حالت فرض خلف باطل و حکم درست است. در حالت دیگر فرض می‌کنیم که $\beta \neq ۰$. آنگاه می‌نویسیم

$$\exists \alpha_i\ \alpha_i \neq ۰ \quad \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n = -\beta v$$

در نتیجه: $v = \frac{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n}{-\beta}$. پس از اینجا نتیجه می‌شود $v \in span(S)$ و در آن صورت، $v \notin (\mathbb{R}^n - span(S))$ خواهد بود که با فرض سوال در تناقض است در نتیجه فرض خلف باطل و حکم درست است.

۴. بردارهای $v_۱، v_۲، v_۳$ مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر بردارهای $v_۱$ و $v_۱ + v_۲$ و $v_۱ + v_۲ + v_۳$ از هم مستقل باشند.

پاسخ: درست. اگر بردارهای $v_۱، v_۲، v_۳$ مستقل خطی باشند، می‌توان نوشت $av_۱ + bv_۲ + cv_۳ = ۰$ تنها در صورتی که $a، b، c = ۰$. پس، برای برقراری معادله‌ی زیر،

$$av_۱ + b(v_۱ + v_۲) + c(v_۱ + v_۲ + v_۳) = (a + b + c)v_۱ + (b + c)v_۲ + cv_۳ = ۰$$

باید ضرایب $(b + c)$ و $(a + b + c)$ برابر با صفر باشند. و با توجه به فرض استقلال خطی $v_۱، v_۲، v_۳$ و در نتیجه، صفر بودن ضرایب $a، b، c$، ضرایب مذکور هم صفر هستند و معادله بالا برقرار می‌شود.

حال فرض می‌کنیم بردارهای $v_۱$ و $v_۱ + v_۲$ و $v_۱ + v_۲ + v_۳$ از هم مستقل باشند. بنابراین ضرایب a، b، c در معادله‌ی زیر، برابر با صفر هستند.

$$av_۱ + b(v_۱ + v_۲) + c(v_۱ + v_۲ + v_۳) = ۰$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که $(a + b + c)v_۱ + (b + c)v_۲ + cv_۳ = ۰$ و به دلیل صفر بودن هر یک از ضرایب a، b، c در معادله‌ی بالا، می‌توان نتیجه گرفت خود بردارهای $v_۱$، $v_۲$، $v_۳$ مستقل خطی هستند و رابطه «اگر و تنها اگر»، اثبات می‌شود.

۵. اگر یکی از سطرهای فرم پلکانی ماتریس افزوده‌ای $[۰ \quad ۰ \quad ۰ \quad ۱ \quad ۰]$ باشد، سیستم خطی متناظر با آن ناسازگار خواهد بود.

پاسخ: نادرست. ناسازگاری در فرم پلکانی یک ماتریس افزوده، فقط هنگامی پیش می‌آید که سطری به صورت $[۰ \quad ۰ \quad ۰ \quad ۰ \quad b]$ داشته باشیم.

۶. ستون‌های ماتریس ۵×۴ مستقل خطی هستند.

پاسخ: نادرست. مثال نقض می‌آوریم. در ماتریس ۵×۴ زیر ستون‌ها مستقل خطی نیستند.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ & ۴ & ۸ \\ ۱ & ۰ & ۳ & ۶ & ۵ \\ ۰ & ۶ & ۴ & ۸ & ۷ \\ -۲ & ۵ & ۲ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

چون برای ستون سوم و چهارم داریم: $c_۴ - ۲\, c_۳ = ۰$ پس این دو ستون به هم وابسته خطی هستند.

۷. اگر بردارهای x, y, z, w در $R^۴$ به گونه‌ای باشند که y ترکیب خطی از z, w, x نباشد آنگاه مجموعه $\{x, y, z, w\}$ مستقل خطی است.

پاسخ: نادرست. مثال نقض می‌زنیم. فرض کنید:

$$A = \{(۱، ۰، ۰،۰)، (۰، ۱، ۰،۰)، (۰، ۰، ۱،۰)، (۰، ۲، ۲،۰)\}$$

در این مثال، بردار (۰،۰ ،۰ ،۱) را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی بقیه بردارها نوشت. اما A یک مجموعه وابسته خطی است زیرا: $۲(۰، ۰، ۱،۰) + ۲(۰، ۱، ۰،۰) = (۰، ۲، ۲،۰)$.

۸. تبدیلی که هر بردار به شکل (x, y, z) در فضای $R^۳$ را به صفحه $y = ۰$ تصویر می‌کند، خطی نیست.

پاسخ: نادرست. برای تصویر شدن هر بردار از فضای $R^۳$ روی صفحه $y = ۰$، باید تبدیل T را انجام دهیم که یک تبدیل خطی است: $T(x، y، z) = (x، ۰، z)$

$$\begin{aligned} T\big(a(x، y، z) + b(x'، y'، z')\big) &= T(ax + bx'، ay + by'، az + bz') \\ &= (ax + bx'، ۰، az + bz') = a(x، ۰، z) + b(x'، ۰، z') \\ &= a\, T(x، y، z) + b\, T(x'، y'، z') \end{aligned}$$

پرسش هفتم

فرض کنید $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی باشد نشان دهید اگر T دو بردار مستقل خطی را به یک مجموعه وابسته خطی نگاشت کند آنگاه $T(x) = ۰$ جواب غیر بدیهی دارد.

پاسخ

فرض کنیم $v_۱، v_۲$ دو بردار مستقل خطی باشند و

$$T(v_۱) = u_۱ \qquad\qquad T(v_۲) = u_۲$$

$u_۱، u_۲$ وابسته خطی هستند پس می‌توان گفت $k \neq ۰$ $u_۱ = ku_۲$ پس می‌توانیم جواب بردار $v_۱ - kv_۲$ را تحت نگاشت بیابیم از آنجا که $k \neq ۰$ و $v_۱، v_۲$ مستقل خطی هستند، پس $v_۱ - kv_۲ \neq ۰$.

از نکات بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$T(v_۱ - kv_۲) = T(v_۱) - k\, T(v_۲) = u_۱ - ku_۲ = ۰$$

پس یک جواب غیربدیهی برای مسئله یافتیم و حکم اینگونه ثابت می‌شود.

پرسش هشتم

مشخص کنید هریک از تبدیلات زیر خطی هستند یا نه، در صورتی که خطی باشند ماتریس استاندارد آنها را نیز بیابید.

پاسخ

در هر یک از تبدیلات باید دو شرط خطی بودن تبدیل بررسی شوند. یعنی:

$$T(av_۱ + \ bv_۲) = aT(v_۱) + b\,T(v_۲) \qquad \text{و} \qquad T(۰) = ۰$$

و در صورت برقراری دو شرط و خطی بودن تبدیل، باید ماتریس استاندارد تبدیل خطی را بیابیم.

$$A = \ [T(e_۱) \quad T(e_۲) \quad \cdots \quad T(e_n)]$$

که e_j همان j امین ستون ماتریس همانی است.

الف)

$$f\colon \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$$
$$(x_۱،x_۲) \to (۴\mathrm{x}_۱ - ۲x_۲، ۳|x_۲|)$$

پاسخ

ابتدا خطی بودن تبدیل را بررسی می‌کنیم. $\qquad T(۰، ۰) = (۴ \times ۰ - ۲ \times ۰، ۳|۰|) = (۰،۰)$

$$T(a(x_۱،x_۲) + \ b(y_۱،y_۲)) = T(ax_۱ + by_۱،ax_۲ + by_۲)$$
$$= (۴(ax_۱ + by_۱) - ۲(ax_۲ + by_۲)، \ ۳|(ax_۲ + by_۲)|)$$

$$aT(x_۱،x_۲) + bT(y_۱،y_۲) = (۴ax_۱ - ۲\ ax_۲، ۳\ a|x_۲|) + (۴\ by_۱ - ۲\ by_۲، ۳\ b|y_۲|)$$
$$= (۴(ax_۱ + by_۱) - ۲(ax_۲ + by_۲)، \ ۳|ax_۲| + ۳|by_۲|)$$

از آنجایی که دو عبارت بالا با هم برابر نیستند، پس $T(av_۱ + \ bv_۲) \neq aT(v_۱) + b\,T(v_۲)$ و تبدیل، خطی نیست.

ب)

$$T\colon \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$$
$$(x_۱، x_۲) \to (\sin(x_۱)\ ،\ x_۲)$$

پاسخ

ابتدا خطی بودن تبدیل را بررسی می‌کنیم. $\qquad T(۰، ۰) = (sin\,۰\ ،۰) = (۰،۰)$

$$T(a(x_۱،x_۲) + \ b(y_۱،y_۲)) = T(ax_۱ + by_۱،ax_۲ + by_۲)$$
$$= (sin(ax_۱ + by_۱) \text{ ، } ax_۲ + by_۲)$$

$$aT(x_۱،x_۲) + bT(y_۱،y_۲) = (asin\, x_۱ \text{ ،}ax_۲) + (bsin\, y_۱ \text{ ،}by_۲)$$
$$= (asin\, x_۱ + bsin\, y_۱ \text{ ، } ax_۲ + by_۲)$$

از آنجایی که دو عبارت بالا با هم برابر نیستند، پس $T(av_۱ + \ bv_۲) \neq aT(v_۱) + b\, T(v_۲)$ و تبدیل، خطی نیست،

ج)

$$T: \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$$
$$(x_۱\text{، } x_۲\text{،}x_۳) \to (۳x_۱\text{،}x_۱ - x_۲\text{، }۲x_۱ + x_۲ + x_۳)$$

پاسخ

ابتدا خطی بودن تبدیل را بررسی می‌کنیم. $T(۰\text{، }۰\text{، }۰) = (۰\text{، }۰\text{، }۰)$

$$T(a(x_۱،x_۲،x_۳) + \ b(y_۱،y_۲،y_۳)) = T(ax_۱ + by_۱،ax_۲ + by_۲،ax_۳ + by_۳)$$

$$= (۳(ax_۱ + by_۱)\text{، } ax_۱ + by_۱ - ax_۲ - by_۲\text{، }۲(ax_۱ + by_۱) + ax_۲ + by_۲ + ax_۳ + by_۳)$$

$$= (۳\ ax_۱\text{،}a(x_۱ - x_۲)\text{، }۲\ ax_۱ + ax_۲ + ax_۳)$$
$$+ (۳\ by_۱\text{،}b(y_۱ - y_۲)\text{، }۲\ by_۱ + by_۲ + by_۳)$$
$$= aT(x_۱،x_۲،x_۳) + b\ T(y_۱،y_۲،y_۳)$$