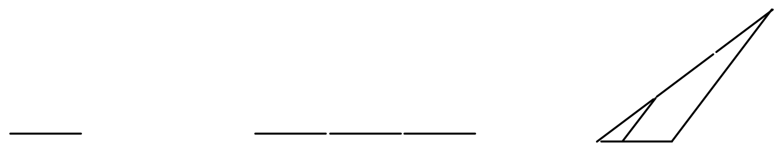
۱. اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

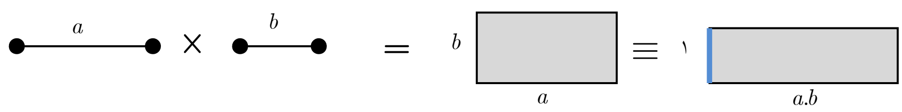
مقدمه

مفهوم عدد یکی از مهم‌ترین مفاهیمی است که بشر با آن مواجه بوده و در طول تاریخ تحول بسیار یافته است. شاید بتوان گفت که او ابتدا توانست مفهوم یکی و مفهوم چندتایی را تمییز دهد و سپس برای شمارش اشیاء اعداد طبیعی را انتزاع کند. همچنین به تدریج توانایی معرفی عمل‌های جمع و ضرب را که با نیازهای او ارتباط مستقیم داشت پیدا کرد. به‌دنبال این پیشرفت نیاز او به معرفی عددهای صفر، منفی و گویا آشکار شد و عمل‌های جمع و ضرب و تفریق و تقسیم روی این عددها گسترش یافت.
اما آشنایی انسان با اعداد غیر گویا با دید هندسی آغاز شد. اگر یک پاره‌خط را به عنوان مقیاس در نظر بگیریم و به آن عدد ۱ (یک) را نسبت دهیم، با تقسیم آن به قسمت‌های مساوی و کنار هم قرار دادن آنها می‌توانیم پاره‌خطهای متناظر با هر عدد گویای مثبت را بدست آوریم.

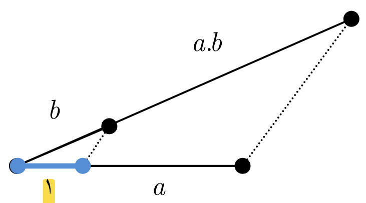


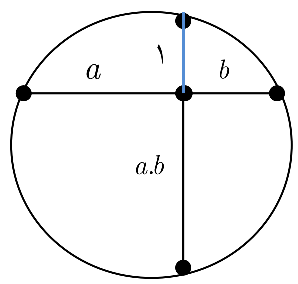
اعمال جمع و ضرب را نیز می‌توان به راحتی به کمک پاره‌خطها نمایش داد.
جمع پاره‌خطها. جمع دو پاره‌خط از کنار هم قرار دادن دو پاره‌خط بدست می‌آید به‌گونه‌ای که دو پاره‌خط تنها در نقاط انتهایی خود مشترک باشند.

ضرب پاره‌خطها. ضرب دو پاره‌خط مساحت مستطیلی است که اضلاع آن پاره‌خطهای مورد نظرند. ولی با این تعریف حاصل ضرب دو پاره‌خط، دیگر پاره‌خط نخواهد بود! این مشکل به این صورت قابل حل است که ضرب دو پاره‌خط را پاره‌خطی تعریف کنیم که مساحت مستطیل ایجاد شده با آن و پاره‌خط واحد (پاره‌خط مقیاس)، برابر مساحت مستطیل ایجاد شده با دو پاره‌خط مفروض باشد.



شاید شما روشهای بهتری برای تعریف ضرب پاره‌خط در ذهن داشته باشید. مثلاً با ایجاد شکل‌های زیر ضرب دو پاره‌خط را می‌توان تعریف کرد که البته نتایج همه یکی خواهد بود. با این حال از لحاظ تاریخی این ابزار (تشابه و قضیه تالس) بعد از تعریف ضرب دو پاره‌خط به کمک مساحت بدست آمدند.





سادگی جمع نسبت به ضرب

با کمی دقت در تعریف ضرب در می‌یابیم که برای ضرب دو پاره‌خط به پاره‌خط واحد نیاز داریم و با تغییر پاره‌خط واحد حاصل ضرب دو پاره‌خط داده شده تغییر خواهد کرد. این در حالی است که برای جمع دو پاره‌خط نیازی به انتخاب مقیاس نداریم. یعنی جمع کردن دارای ماهیتی ساده‌تر از ضرب کردن است.

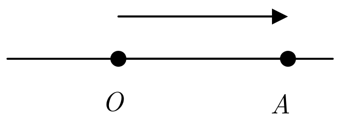
اعداد غیر گویا

ابتدا تصور می‌شد همه پاره‌خط‌ها متناظر اعداد گویا اند. اما قضیه فیثاغورث نشان داد پاره‌خطی وجود دارد که متناظر با هیچ عدد گویایی نیست (وتر مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائمه واحد). این آغاز آشنایی بشر با اعداد غیر گویا بود. اعدادی که به راحتی برای بشر قابل پذیرش نبودند و مشکلات زیادی ایجاد کردند. مثلاً چگونه می‌توان اعمال جمع و ضرب را که روی اعداد گویا تعریف شده بود برای این اعداد نیز گسترش داد. راه حل این مشکل در دید هندسی به اعداد یافت شد. در دید هندسی، عمل‌های جمع و ضرب روی همه پاره‌خط‌ها قابل انجام است. در واقع این تنها روش گذشتگان برای معرفی اعمال جمع و ضرب روی همه اعداد حقیقی (اعداد گویا و غیر گویا) بود. بنابراین تلاش‌های بسیاری برای بدست آوردن و بیان ویژگی‌های جمع و ضرب انجام شد. مسلماً خواننده با اعداد حقیقی و اعمال جبری روی آنها آشنا است. هدف ما نیز در اینجا بیان چگونگی تعریف اعمال جبری روی همه اعداد حقیقی نیست. در واقع ما خلاف جهت تاریخی حرکت می‌کنیم و به کمک اعداد حقیقی و اعمال جبری روی آنها که برای ما آشنا هستند اعمال جبری روی نقاط یک خط را معرفی می‌کنیم. به این ترتیب می‌توانیم مشابه این اعمال را برای نقاط یک صفحه و یا نقاط فضای سه بعدی معرفی کنیم.

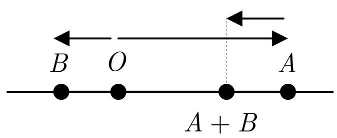
اعمال جبری روی نقاط یک خط

به کمک مطالب قسمت قبل به راحتی می‌توانیم نقاط یک خط را با هم جمع و ضرب کنیم. روش زیر برای این کار در واقع نمایشی هندسی است برای اعمال جمع و ضرب روی اعداد حقیقی که شامل اعداد منفی نیز هستند.

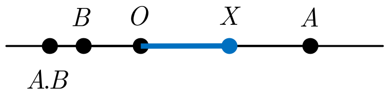
۱. نقطه‌ای از خط را به عنوان مبدأ انتخاب می‌کنیم (و آن را همیشه با O نمایش می‌دهیم). این نقطه برای انجام همه اعمال جبری روی نقاط یک خط ضروری است. بعد از انتخاب این نقطه هر نقطه از خط با پاره‌خطی جهت‌دار متناظر می‌شود که ابتدای آن O و انتهایش آن نقطه است.



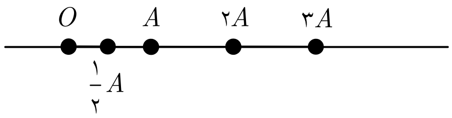
۲. جمع دو نقطه A و B. جمع دو نقطه A و B در واقع جمع پاره‌خط‌های جهت‌دار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است به این صورت که یکی از پاره‌خط‌ها را انتقال می‌دهیم که ابتدای آن بر انتهای پاره‌خط دیگر قرار گیرد. نقطه حاصل (انتهای پاره‌خط جابجا شده) جمع دو نقطه A و B خواهد بود.



۳. ضرب دو نقطه A و B. برای ضرب ابتدا باید مقیاس را مشخص کرد. یک نقطه از خط غیر از O را مانند X به عنوان ۱ انتخاب می‌کنیم. حال به کمک این مقیاس (یعنی پاره‌خط OX) پاره‌خط‌های OA و OB را در هم ضرب می‌کنیم. اگر A و B در یک طرف O قرار داشتند پاره‌خط حاصل را در همان طرف که X قرار دارد جدا می‌کنیم، در غیر این صورت آن را در طرف دیگر جدا می‌کنیم. دقت کنید که برای تعریف ضرب دو نقطه انتخاب نقطه ۱ نیز ضروری است و با تغییر آن حاصل ضرب دو نقطه نیز تغییر خواهد کرد در حالی که جمع دو نقطه چنین نبود.



۴. ضرب یک نقطه در یک عدد! با اینکه برای ضرب دو نقطه به مقیاس نیاز داریم اگر نقطه A را با خودش n بار جمع کنیم نقطه nA بدست می‌آید که مستقل از انتخاب مقیاس است. به صورت مشابه می‌توانیم نقطه $\frac{۱}{m}A$ و $\frac{m}{n}A$ را بدون داشتن مقیاس بدست آوریم. توجه داشته باشید که در این روند ما یک عدد گویا را در نقطه A ضرب می‌کنیم. این عدد نقطه‌ای از خط نیست که برای ضرب کردن آن در نقطه A نیاز به مقیاس داشته باشیم. به این ترتیب می‌توانیم اعداد گویا و حتی اعداد حقیقی را در یک نقطه ضرب کنیم بدون اینکه مقیاسی نیاز داشته باشیم. این نوع ضرب را که با ضرب دو نقطه ماهیتی متفاوت دارد ضرب اسکالر می‌نامیم.



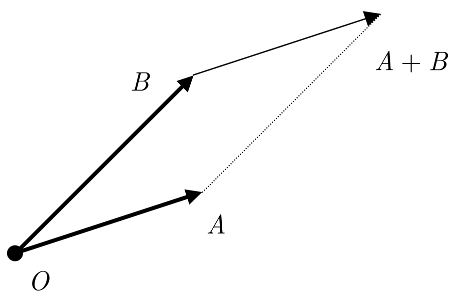
با توجه به مطالب بالا چنین به نظر می‌رسد که ساختار جبری جمع و ضرب اسکالر به مراتب ساده‌تر از ساختار جبری ضرب نقاط در هم است. در ادامه ساختارهای جمع و ضرب اسکالر را که ماهیتی ساده‌تر دارند به مجموعه‌های بزرگتری مانند صفحه و فضا گسترش می‌دهیم.

معرفی ساختارهای جبری مشابه برای صفحه و فضا

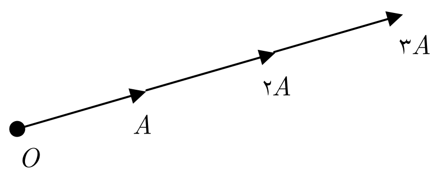
از بین ساختارهای جبری معرفی شده روی نقاط یک خط، جمع و ضرب اسکالر را می‌توان به راحتی به فضاهای بزرگتر گسترش داد.

۱. نقطه‌ای را به عنوان مبدأ در نظر می‌گیریم (و آن را با O نمایش می‌دهیم). به این ترتیب هرنقطه با یک پاره‌خط جهت‌دار متناظر می‌شود که ابتدای آن O و انتهایش آن نقطه است.

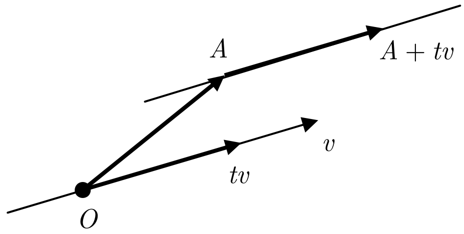
۲. جمع دو نقطه A و B. جمع دو نقطه A و B در واقع جمع پاره‌خط‌های جهت‌دار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است به این صورت که یکی از پاره‌خط‌ها را انتقال می‌دهیم که ابتدای آن بر انتهای پاره‌خط دیگر قرار گیرد. نقطه حاصل (انتهای پاره‌خط جابجا شده) جمع دو نقطه A و B خواهد بود. این همان قاعده متوازی الاضلاع برای جمع $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است. بنابراین $A+B$ رأس چهارم متوازی الاضلاعی است که سه رأس دیگرش O، A و B است.

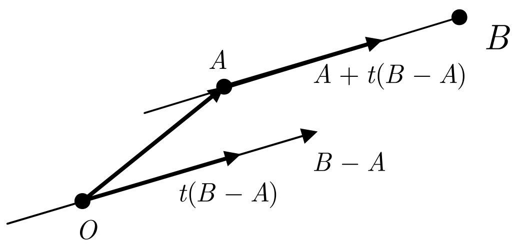


۳. ضرب اسکالر. اگر نقطه A را n بار با خودش جمع کنیم نقطه nA بدست می‌آید. نقطه‌ای هم که با m بار جمع شدن برابر A می‌شود $\frac{۱}{m}A$ است. به این ترتیب ضرب یک عدد در نقطه A را می‌توان معرفی کرد.



اکنون می‌توانیم به کمک این جمع و ضرب نمایشی ساده برای بعضی اشکال هندسی ارائه کنیم. برای مثال $A+tv$ زمانی که t روی اعداد حقیقی تغییر کند خط گذرنده از A و موازی Ov را بدست می‌دهد. بنابراین خط گذرنده از دو نقطه A و B را می‌توان با رابطه $A+t(B-A)=(۱-t)A+tB$ نمایش داد. اگر $P=A+t(B-A)$ نقطه‌ای دلخواه از خط AB باشد آنگاه $\overrightarrow{AP}=P-A=t(B-A)=t\overrightarrow{AB}$. به طور مشابه $\overrightarrow{PB}=(۱-t)\overrightarrow{AB}$. به این ترتیب نقاط پاره‌خط $\overline{AB}$ دقیقاً نقاطی به صورت $(۱-t)A+tB$ خواهند بود که در آن $۰\le t\le ۱$.





به همین صورت می‌توان نشان داد که

۱. وسط پاره‌خط $\overline{AB}$ برابر است با $\frac{A+B}{۲}$.

۲. محل برخورد میانه‌های مثلث ABC برابر است با $\frac{A+B+C}{۳}$.

۳. سه نقطه A، B و C روی یک خط قرار دارند اگر و تنها اگر ضرایب حقیقی a، b و c وجود داشته باشد که $a+b+c=۱$ و $aA+bB+cC=۰$.

۴. صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با دو بردار ناصفر و غیر هم راستای $Ov_۱,Ov_۲$ تولید می‌شود برابر است با

$$\{A+t_۱v_۱+t_۲v_۲ \mid t_۱,t_۲\in\mathbb{R}\}$$

۵. صفحه‌ای که از سه نقطه A، B و C می‌گذرد برابراست با

$$\begin{aligned}&\{A+t_۱(B-A)+t_۲(C-A)\ :\ t_۱,t_۲\in\mathbb{R}\}=\\&\{(۱-t_۱-t_۲)A+t_۱B+t_۲C\ :\ t_۱,t_۲\in\mathbb{R}\}=\\&\{aA+bB+cC\ :\ a+b+c=۱\}\end{aligned}$$

۶. مجموعه نقاط درون یا روی مثلث ABC برابر است با

$$\{aA+bB+cC\ :\ a+b+c=۱\,,\,۰\le a,b,c\le ۱\}$$

۷. چهار نقطه A، B، C و D روی یک صفحه قرار دارند اگر و تنها اگر ضرایب حقیقی a، b، c و d وجود داشته باشند که $a+b+c+d=۱$ و $aA+bB+cC+dD=۰$.

توجه. جمع نقاط و ضرب اسکالر آنها به مبدأ وابسته است. بدون مبدأ جمع و ضرب اسکالر نقاط معنی ندارد و با عوض شدن مبدأ حاصل جمع دو نقطه و ضرب یک عدد در یک نقطه تغییر خواهد کرد. به همین جهت معمولاً وابستگی به مبدأ را در عبارت‌ها به‌شکلی نمایش می‌دهند. مثلاً بجای عبارت $۲A+۳B$ از عبارت $۲\overrightarrow{OA}+۳\overrightarrow{OB}$ استفاده می‌کنند. به پاره‌خط جهت دار $\overrightarrow{OA}$ بردار گویند. بنابراین حاصل عبارت $۲A+۳B$، زمانی که O مبدأ است، برابر نقطه P می‌شود اگر وتنها اگر $۲\overrightarrow{OA}+۳\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}$. با مشخص بودن مبدأ بین نقاط و بردارها یک تناظر یک به یک ایجاد می‌شود و می‌توان بجای نقاط، برداها و بجای بردارها، نقاط را استفاده کرد.

توجه. با توجه به مطالب بالا عبارت $aA+bB$ که در آن A و B دو نقطه دلخواه و a و b دو عدد حقیقی‌اند، به مبدأ وابسته است و با تغییر مبدأ تغییر می‌کند. با این حال بعضی ترکیب‌های به شکل بالا مستقل از مبدأ هستند. مثلاً $\frac{۱}{۲}A+\frac{۱}{۲}B$ نقطه وسط پاره‌خط AB است و بنابراین مستقل از مبدأ خواهد بود.

قضیه. عبارت $aA+bB$ **مستقل از مبدأ است اگر و تنها اگر** $a+b=۱$.

اثبات. فرض کنید حاصل عبارت $aA+bB$ زمانی که $O_۱$ مبدأ است برابر P شده است. یعنی $a\overrightarrow{O_۱A}+b\overrightarrow{O_۱B}=\overrightarrow{O_۱P}$. اگر $O_۲$ را به عنوان مبدأ انتخاب کنیم حاصل عبارت $aA+bB$ برابر است با

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{O_۲A}+b\overrightarrow{O_۲B} &= a(\overrightarrow{O_۲O_۱}+\overrightarrow{O_۱A})+b(\overrightarrow{O_۲O_۱}+\overrightarrow{O_۱B})=(a+b)\overrightarrow{O_۲O_۱}+a\overrightarrow{O_۱A}+b\overrightarrow{O_۱B}\\ &=(a+b)\overrightarrow{O_۲O_۱}+\overrightarrow{O_۱P}=(a+b-۱)\overrightarrow{O_۲O_۱}+\overrightarrow{O_۲P}\end{aligned}$$

بنابراین اگر نقطه $O_۲$ مبدأ باشد حاصل عبارت $aA+bB$ برابر P می‌شود اگر و تنها اگر $a+b-۱=۰$.

قضیه. عبارت $a_۱A_۱+a_۲A_۲+\cdots+a_kA_k$ **مستقل از مبدأ است اگر و تنها اگر** $a_۱+a_۲+\cdots+a_k=۱$.

$\mathbb{R}^n$ و صفحه‌های تعمیم یافته در آن

مختصات دکارتی و جمع و ضرب در این مختصات

یکی از متداول‌ترین و مناسب‌ترین روش نمایش نقاط صفحه و فضا به کمک اعداد، استفاده از دستگاه مختصات دکارتی است. به این صورت که در صفحه دو محور مدرج عمود برهم که از مبدأ می‌گذرند انتخاب کرده و هر نقطه را با زوج اعداد حاصل از تصویرهایش روی آن دو محور نمایش می‌دهیم. در فضای سه بعدی نیز همین کار را با سه محور مدرج عمود برهم انجام می‌دهیم. جمع و ضرب اسکالر در این نمایش شکل ساده‌ای خواهند داشت. با توجه به شکلهای زیر اگر $A=(x_۱,y_۱)$ و $B=(x_۲,y_۲)$ نقاط دلخواهی باشند و $r\in\mathbb{R}$ نیز عدد حقیقی دلخواهی باشد خواهیم داشت

$$\begin{aligned} A+B &= (x_۱,y_۱)+(x_۲,y_۲)=(x_۱+x_۲,y_۱+y_۲)\\ rA &= r(x_۱,y_۱)=(rx_۱,ry_۱)\end{aligned}$$

جمع و ضرب در دستگاه مختصات دکارتی برای فضا نیز کاملاً مشابه بالا خواهد بود.
بنابراین خط با اعداد حقیقی و صفحه با دوتایی‌های مرتب و فضا با سه‌تایی‌های مرتب از آن اعداد مشخص می‌شوند. با این دید می‌توان مفهوم خط و صفحه و فضا را به مجموعه همه n تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی که آن را با $\mathbb{R}^n$ نمایش می‌دهیم، گسترش داد.

$$\mathbb{R}^n=\{(x_۱,\dots,x_n)\ :\ x_i\in\mathbb{R}\}$$

ساختار جبری ارائه شده برای خط و صفحه و فضا را نیز می‌توان به راحتی برای این فضاهای بزرگتر گسترش داد. برای هر دو نقطه $A=(x_۱,\dots,x_n)$ و $B=(y_۱,\dots,y_n)$ در $\mathbb{R}^n$ و هر عدد حقیقی $r\in\mathbb{R}$ جمع و ضرب اسکالر را به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$A+B:=(x_۱+y_۱,\dots,x_n+y_n),\qquad rA:=(rx_۱,\dots,rx_n)$$

به این ترتیب مفاهیم هندسی‌ای مانند خط و پاره‌خط و صفحه و ... را که به کمک جمع و ضرب اسکالر قابل بیان بودند می‌توان برای $\mathbb{R}^n$ نیز گسترش داد. این کار با تفصیل در بخشهای بعدی انجام می‌شود.
در قسمت‌های قبل دیدیم که با مشخص بودن مبدأ بین نقاط فضا و پاره‌خط‌های جهت‌دار تناظری یک به یک ایجاد می‌شود. در نمایش دکارتی مبدأ کاملاً مشخص است. بنابراین هم می‌توانیم به n تایی‌های مرتب اعداد حقیقی به عنوان نقطه نگاه کنیم و هم می‌توانیم آنها را بردار تصور کنیم. به همین سبب اعضای $\mathbb{R}^n$ را گاهی نقطه و گاهی بردار می‌نامیم، اگر چه دیدگاه برداری غالب است.

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

با توجه به نمایش خط در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ می‌توانیم خطی را که از $A=(a_۱,\dots,a_n)$ می‌گذرد و با بردار ناصفر $v=(b_۱,\dots,b_n)$ تولید می‌شود، به صورت مجموعه زیر تعریف کنیم.

$$\{A+tv\ \mid\ t\in\mathbb{R}\}=\{(a_۱+tb_۱,\dots,a_n+tb_n)\ \mid\ t\in\mathbb{R}\}$$

بنابراین خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد برابر است با

$$\begin{aligned}\{A+t(B-A)\ :\ t\in\mathbb{R}\} &= \{(۱-t)A+tB\ :\ t\in\mathbb{R}\}\\ &= \{aA+bB\ :\ a+b=۱\}\end{aligned}$$

اگر $P = (1-t)A + tB$ نقطه‌ای روی خط AB باشد آنگاه

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= P - A = t(B-A) = t\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{BP} &= P - B = (1-t)(A-B) = (1-t)\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

به این ترتیب پاره‌خط $\overline{AB}$ نیز کاملاً مشابه قبل برابر است با تمام نقاط $(1-t)A + tB$ که $0 \leq t \leq 1$.
صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با بردارهای v_1 و v_2 تولید می‌شود برابر است با

$$\{A + t_1v_1 + t_2v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

به این ترتیب صفحه‌ای که از سه نقطه A، B و C می‌گذرد برابراست با

$$\begin{aligned}&\{A + t_1(B-A) + t_2(C-A) \;:\; t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} =\\ &\{(1 - t_1 - t_2)A + t_1B + t_2C \;:\; t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} =\\ &\{aA + bB + cC \;:\; a + b + c = 1\}\end{aligned}$$

و به صورت کلی *صفحه تعمیم یافته*‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با بردارهای $v_1, \ldots, v_k$ تولید می‌شود برابر است با

$$\{A + t_1v_1 + t_2v_2 + \cdots + t_kv_k \mid t_i \in \mathbb{R}\}$$

با توجه به تعریف بالا نقطه A صفحه تعمیم یافته‌ای است که از نقطه A می‌گذرد و با هیچ برداری تولید نمی‌شود. خط و صفحه معمولی نیز یک صفحه تعمیم یافته هستند. در ادامه به صفحه‌های تعمیم یافته (شامل خط و صفحه معمولی) به صورت خلاصه "*صفحه*" می‌گوییم. بنابراین دقت کنید که آن را با صفحه معمولی اشتباه نگیرید.

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

تعریف و مثال

در قسمت قبل به کمک ساختار جبری $\mathbb{R}^n$ صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ را معرفی کردیم. در ادامه خواهیم دید که اگر صفحه‌ای از مبدأ $\mathbb{R}^n$ (یعنی نقطه $(O=(0,0,\dots,0)$ بگذرد خود دارای ساختاری جبری مشابه ساختار جبری $\mathbb{R}^n$ می‌شود. طبق تعریف، صفحه‌های شامل مبدأ به شکل $\left\{t_1v_1+\cdots+t_kv_k \;\mid\; t_i\in\mathbb{R}\right\}$ هستند. بنابراین به راحتی می‌توان گزاره زیر را نشان داد.

گزاره. صفحه π از مبدأ می‌گذرد اگر و تنها اگر جمع هر دو عضوش و ضرب اسکالر اعداد حقیقی در هر عضوش، داخل آن صفحه قرار گیرند.

با توجه به این نکته، جمع برداری و ضرب اسکالر که جبر روی $\mathbb{R}^n$ را تشکیل می‌داد، روی صفحه‌های گذرنده از مبدأ نیز یک ساختار جبری ایجاد می‌کنند که همه ویژگی‌های ساختار جبری روی $\mathbb{R}^n$ را دارا است. (چون در واقع همان جمع و ضرب اسکالر $\mathbb{R}^n$ است که به زیرمجموعه‌ای از آن تحدید شده است.) چنین زیرمجموعه‌هایی را زیرفضای $\mathbb{R}^n$ گویند.

تعریف ۱. زیرمجموعه ناتهی $V\subset\mathbb{R}^n$ را زیرفضای آن می‌گوییم هرگاه

۱. برای هر v_1 و v_2 در V داشته باشیم $v_1+v_2\in V$.

۲. برای هر v در V و هر r در $\mathbb{R}$ داشته باشیم $rv\in V$.

به عبارت دیگر V زیرفضا است اگر برای هر v_1 و v_2 در V و هر r در $\mathbb{R}$ داشته باشیم $v_1+rv_2\in V$.

به این ترتیب صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ که از مبدأ می‌گذرند زیرفضای $\mathbb{R}^n$ اند. کمی جلوتر ثابت می‌کنیم که زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ نیز صفحه‌های گذرنده از مبدأ هستند. یعنی این دو مفهوم یکسانند. دقت کنید تعریف زیرفضا تعریفی کاملاً جبری است و بیان ساده‌تری نسبت به تعریف صفحه دارد و این نکته موجب می‌شود خیلی از خواص صفحه‌ها را به صورتی ساده‌تر بدست آوریم.

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ و زیرفضای تولید شده

به راحتی از تعریف زیرفضا نتایج زیر به‌دست می‌آیند.

قضیه ۱. هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ شامل مبدأ است.

اثبات. چون هر زیرفضایی ناتهی اند برداری مانند v در آن وجود دارد و به خاطر بسته بودن تحت ضرب اسکالر $0.v=(0,\dots,0)$ نیز باید در آن باشد.

قضیه ۲. اشتراک هر تعداد زیرفضای $\mathbb{R}^n$، خود زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ است.

اثبات. فرض کنید V_αها زیرفضاهایی از $\mathbb{R}^n$ باشند. از آنجایی که همه آنها شامل بردار صفر هستند اشتراک آنها نیز شامل بردار صفر است و در نتیجه ناتهی است. اگر $v_1,v_2\in\bigcap V_\alpha$ آنگاه برای هر α داریم $v_1,v_2\in V_\alpha$ و درنتیجه $v_1+rv_2\in V_\alpha$. بنابراین $v_1+rv_2\in\bigcap V_\alpha$ و این نشان می‌دهد اشتراک V_αها خود یک زیرفضا است.

قضیه ۳. فرض کنید $S\subset\mathbb{R}^n$ زیرمجموعه‌ای دلخواه از $\mathbb{R}^n$ باشد. زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که هم شامل S است و هم درون همه زیرفضاهای شامل S قرار دارد. به بیان دیگر کوچک‌ترین زیرفضای شامل S وجود دارد.

اثبات. خود $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضایی است که شامل S است. اشتراک همه زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ که شامل S اند، طبق قضیه بالا خود زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ می‌شود که شامل S نیز است. این زیرفضا همان کوچک‌ترین زیرفضای مورد نظر است.

تعریف ۲. کوچک‌ترین زیرفضای شامل $S\subset\mathbb{R}^n$ را زیرفضای تولید شده توسط مجموعه S می‌نامیم و آن را با $\langle S\rangle$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید V یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$، و $v_1,...,v_k$ بردارهایی متمایز از آن باشد. از آنجایی که V تحت جمع برداری و ضرب اسکالر بسته است بردارهایی به صورت $t_1v_1+\cdots+t_kv_k$ نیز داخل V است. به چنین عبارت‌هایی ترکیب خطی k بردار $v_1,...,v_k$ می‌گوییم. بنابر قرار داد ترکیب خطی صفرتا بردار را بردار صفر قرار می‌دهیم. به این ترتیب واضح است که ترکیب خطی هر تعداد از اعضای V باز داخل V قرار دارد.

قضیه ۴. $\langle S\rangle=\{t_1v_1+\cdots+t_lv_l \quad | l\in N\cup\{0\} \ , \ v_i\in S\}$**. به عبارت دیگر فضای تولید شده توسط مجموعه S برابر است با مجموعه همه ترکیب‌های خطی اعضای S.**

اثبات. طبق آنچه در بالا بیان شد هر ترکیب خطی از اعضای S باید داخل همه فضاهای برداری شامل S، به خصوص فضای برداری تولید شده توسط S، قرار داشته باشد. اگر نشان دهیم مجموعه همه ترکیب‌های خطی اعضای S خود یک زیرفضا است، این زیرفضا کوچک‌ترین زیرفضای شامل S، یعنی همان زیرفضای تولید شده توسط S خواهد بود. پس باید نشان دهیم مجموعه ترکیب‌های خطی اعضای S یک زیرفضا است. طبق قرار داد بالا بردار صفر در این مجموعه قرار دارد و درنتیجه این مجموعه ناتهی است. همچنین واضح است که جمع دو ترکیب خطی از اعضای S و ضرب یک اسکالر در آن باز به شکل ترکیب خطی‌ای از اعضای S است. بنابراین مجموعه ترکیب‌های خطی اعضای S یک فضای برداری است.

دقت کنید که در بالا مجموعه S ممکن است تهی یا نامتناهی باشد. اگر S تهی باشد مجموعه ترکیب‌های خطی اعضای S (طبق قرارداد بالا) تنها شامل بردار صفر است. اگر نامتناهی باشد یک ترکیب خطی از اعضای S در واقع ترکیبی خطی از متناهی عضو آن است. مجموع نامتناعی هیچ معنی‌ای نمی‌دهد. سری‌هایی هم که در آنالیز به آن برخورد می‌کنیم تنها به کمک مفهوم فاصله و همگرایی می‌توانند معنی پیدا کنند که فعلاً ما هیچ مطلبی در مورد چنین ساختارهایی برای یک فضای برداری بیان نکرده‌ایم.

قضیه ۵. اگر $R\subseteq S\subseteq\mathbb{R}^n$ آنگاه $\langle R\rangle\subseteq\langle S\rangle\subseteq\mathbb{R}^n$.

قضیه ۶. اگر $V\subset\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه $\langle V\rangle=V$.

قضیه ۷. اگر V و W دو زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشند آنگاه مجموعه

$$V+W:=\{v+w \quad | v\in V \ , \ w\in W\}$$

نیز یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است و داریم $\langle V\cup W\rangle=V+W$.

اثبات. $V+W$ ناتهی است زیرا شامل صفر است. فرض کنید $u,u'\in V+W$. بنابراین طبق تعریف $v,v'\in V$ و $w,w'\in W$ یافت می‌شوند که $u=v+w$ و $u'=v'+w'$. در نتیجه

$$u+ru'=(v+rv')+(w+rw')\in V+W$$

به این ترتیب $V+W$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ است که شامل دو زیرفضای V و W نیز است. هر زیرفضایی نیز که شامل V و W باشد باید مجموع‌هایی به شکل $v+w$ را که $v\in V$ و $w\in W$ است داشته باشد. بنابراین $V+W$ کوچک‌ترین زیرفضای شامل V و W است.

تعریف ۳. زیرفضای $V\subseteq\mathbb{R}^n$ را با تولید متناهی گوییم اگر متناهی بردار $v_1,...,v_k$ یافت شوند که فضای V را تولید کنند.

با توجه به قضیه ۵ زیرفضای تولید شده توسط بردارهای $v_1,...,v_k$ همان صفحه تولید شده توسط $v_1,...,v_k$ است که از مبدأ می‌گذرد. در واقع زیرفضاهایی که با متناهی بردار تولید می‌شوند صفحه‌هایی هستند که از مبدأ می‌گذرند. در قسمت‌های بعد نشان می‌دهیم همه زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ با تولید متناهی هستند و در نتیجه زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ همان صفحه‌های گذرنده از مبدأ اند.

استقلال خطی

معیاری برای بزرگی صفحه‌های تعیم یافته

در این قسمت می‌خواهیم معیاری برای بزرگی یک صفحه تعمیم یافته بدست آوریم. مثلاً نقطه که یک صفحه تعمیم یافته است کوچکتر از یک خط است و خط نیز کوچکتر از صفحه معمولی و صفحه معمولی کوچکتر از فضای سه بعدی اطراف ما است. به نظر می‌آید که تعداد بردارهای تولید کننده یک صفحه تعمیم یافته بتواند معیار مورد نظر باشد. مثلاً نقطه با هیچ برداری تولید نمی‌شود و ما آن را صفر بعدی

می‌دانیم. خط با یک بردار تولید می‌شود و ما آن را یک بعدی می‌دانیم. صفحه معمولی و فضای سه بعدی نیز به ترتیب با دو بردار و سه بردار تولید می‌شوند و ما آنها را دو بعدی و سه بعدی می‌دانیم. به این ترتیب شاید بتوان بُعد یک صفحه تعمیم یافته را تعداد بردارهای تولید کننده آن تعریف کرد و انتظار داشت که این مفهوم همان معیار مورد نظر برای بزرگی یک صفحه تعمیم یافته باشد. اما مشکلاتی و جود دارد.

یک صفحه تعمیم یافته که با یک بردار مانند $v \in \mathbb{R}^n$ تولید می‌شود یک خط در $\mathbb{R}^n$ است به شرط اینکه $v \neq ۰$. اگر $v = ۰$ باشد در واقع این صفحه تعمیم یافته یک نقطه است. به عبارت دیگر در این حالت با حذف کردن v صفحه تعمیم یافته تغییری نمی‌کند. همچنین صفحه تعمیم یافتهای که با دو بردار $v_۱, v_۲ \in \mathbb{R}^n$ تولید می‌شود یک صفحه معمولی در $\mathbb{R}^n$ است به شرط اینکه $v_۱, v_۲$ مضربی از یکدیگر نباشند. اگر هر دو صفر باشند آنگاه با حذف کردن آنها صفحه تعمیم یافته تولید شده تغییری نمی‌کند و در هر دو صورت این صفحه تعمیم یافته یک نقطه خواهد بود. اگر $v_۱$ ناصفر باشد و $v_۲ = rv_۱$ آنگاه واضح است که صفحه تعمیم یافته یک خط در راستای $v_۱$ خواهد بود. به عبارت دیگر با حذف $v_۲$ صفحه تعمیم یافته تغییری نخواهد کرد. این دو مثال نشان می‌دهند که تعداد بردارهایی که یک صفحه تعمیم یافته را تولید می‌کنند زمانی ممکن است معیاری برای بزرگی آن باشند که با حذف هر یک، صفحه تولید شده تغییر کند. به بیانی دیگر باید مجموعه مولدی برای صفحه بیابیم که هیچ عضو زائدی نداشته باشد. با این حال هنوز مسئله‌ای دیگر وجود دارد و آن اینکه ممکن است مجموعه‌های مولد متفاوتی برای یک صفحه وجود داشته باشند که هیچ یک دارای عضو زائد نیز نباشند. در این صورت بعد آن صفحه تعداد اعضای کدام یک باید باشد؟ در ادامه نشان می‌دهیم همه این مجموعه‌ها تعداد اعضایی برابر دارند و در نتیجه در تعریف بُعد مشکلی وجود نخواهد داشت. برای سادگی فرض می‌کنیم صفحه تعمیم یافته مورد نظر از مبدأ می‌گذرد زیرا آنچه در این بحث مهم است بردارهای مولد یک صفحه است که با انتقال تغییری نمی‌کنند.

استقلال خطی

بردار v_i در مجموعه $\{v_1,\dots,v_k\}$ را زائد می‌گوییم اگر با حذف کردن آن فضای تولید شده توسط این بردارها تغییر نکند. به عبارت دیگر v_i زائد است اگر

$$\langle v_1,\dots,v_k\rangle = \langle v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_k\rangle$$

در نتیجه مجموعه‌ای از بردارها که هیچ یک از اعضایش زائد نیست، مجموعه‌ای است که هیچ یک از بردارهای آن در فضای تولید شده توسط بردارهای دیگر قرار نگیرد. گزاره زیر بیان ساده‌تری برای معرفی این مجموعه‌ها ارائه می‌کند.

قضیه ۸. هیچ‌یک از بردارهای $v_1,\dots,v_k$ در فضای تولید شده توسط بقیه آنها قرار ندارد اگر و تنها اگر هیچ ترکیب خطی این بردارها مانند $t_1v_1+\cdots+t_kv_k$ صفر نشود مگر در حالتی که همه t_iها صفر باشند.

اثبات. اگر یکی از بردارها مانند v_k در فضای تولید شده توسط بقیه قرار داشته باشد آنگاه

$$v_k = t_1v_1+\cdots+t_{k-1}v_{k-1} \quad\Rightarrow\quad t_1v_1+\cdots+t_{k-1}v_{k-1}+(-1)v_k = 0$$

یعنی یک ترکیب خطی از v_iها با ضرایب غیرصفر وجود دارد که صفر شده است.

اگر ترکیب خطی $t_1v_1+\cdots+t_kv_k$ صفر بود در حالی که همه ضرایب آن صفر نبودند، مثلاً اگر $t_k \neq 0$ باشد آنگاه

$$t_1v_1+\cdots+t_{k-1}v_{k-1} = -t_kv_k \quad\Rightarrow\quad v_k = \frac{-t_1}{t_k}v_1+\cdots+\frac{-t_{k-1}}{t_k}v_{k-1}$$

بنابراین $v_k \in \langle v_1,\dots,v_{k-1}\rangle$.

تعریف ۴. به مجموعه‌ای از بردارها که هیچ ترکیب خطی آنها صفر نمی‌شود مگر این که همه ضرایب آن ترکیب خطی صفر باشند، مستقل خطی گوییم. اگر مجموعه‌ای مستقل خطی نباشد به آن وابسته خطی گوییم.

ویژگی‌های مجموعه‌های مستقل خطی

ویژگی‌های زیر به‌سادگی از تعریف استقلال خطی و وابستگی خطی نتیجه می‌شود.

۱. مجموعه تهی مستقل خطی است.

۲. مجموعه تک عضوی $\{v\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر $v \neq 0$.

۳. مجموعه دو عضوی $\{v_1,v_2\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر هیچ کدام مضرب دیگری نباشند.

۴. هر زیرمجموعه یک مجموعه مستقل خطی خود مجموعه‌ای مستقل خطی است. (در نتیجه هر مجموعه شامل یک مجموعه وابسته خطی، وابسته خطی است.)

۵. مجموعه $\{v_1,\dots,v_k\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر هیچ یک از اعضای آن در فضای تولید شده توسط دیگر اعضا قرار نگیرد. (قضیه ۹)

۶. فرض کنید $\{v_1,\dots,v_k\}$ مستقل خطی بوده و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ برداری دلخواه باشد. مجموعه $\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر $v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k\rangle$

اثبات. اگر $\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ مستقل خطی باشد طبق ویژگی (۵)، $v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k\rangle$. اگر این مجموعه مستقل خطی نباشد آنگاه ترکیب خطی $t_1v_1+\cdots+t_{k+1}v_{k+1}$ برابر صفر وجود دارد که همه ضرایب آن صفر نیست. ضریب v_{k+1} در این ترکیب خطی نمی‌تواند صفر باشد، زیرا در

این صورت ترکیب خطی‌ای از $v_1,\ldots,v_k$ صفر شده در حالی که همه ضرایب آن صفر نیست و این با استقلال خطی $\{v_1,\ldots,v_k\}$ متناقض است. در نتیجه داریم

$$v_{k+1}=\frac{-t_1}{t_{k+1}}v_1+\cdots+\frac{-t_k}{t_{k+1}}v_k \quad\Rightarrow\quad v_{k+1}\in\langle v_1,\ldots,v_k\rangle$$

ویژگی (۶) روشی عملی برای ساختن مجموعه‌های مستقل خطی بدست می‌دهد. به این ترتیب که ابتدا بردار ناصفری مانند v_1 را انتخاب می‌کنیم. طبق (۲) می‌دانیم $\{v_1\}$ مستقل خطی است. حال اگر $\langle v_1\rangle$ کل فضا نبود برداری مانند v_2 در فضا هست که در $\langle v_1\rangle$ قرار ندارد. طبق ویژگی (۶). $\{v_1,v_2\}$ مستقل خطی می‌شوند. این روند را تا زمانی که فضای تولید شده توسط بردارهای حاصل کل فضا نباشد می‌توان ادامه داد.

پایه و بُعد

تعریف ۵. مجموعه $\{v_1,\dots,v_k\}$ را یک پایه برای زیرفضای V گوییم هرگاه مستقل خطی باشد و V را تولید کند.

مجموعه $\{e_1=(1,0,\dots,0),\dots,e_n=(0,\dots,0,1)\}$ یک مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ است. زیرا

$$t_1e_1+\cdots+t_ne_n=0 \quad \Rightarrow \quad (t_1,\dots,t_n)=0 \;\Rightarrow\; t_1=\cdots=t_n=0$$

این مجموعه $\mathbb{R}^n$ را نیز تولید می‌کند زیرا عضو دلخواه $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ به صورت $a_1e_1+\cdots+a_ne_n$ است. بنابراین این مجموعه یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است که به آن پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ می‌گویند.

قضیه زیر نشان می‌دهد که هر دو پایه یک فضای برداری دارای تعداد اعضای برابر هستند. به این ترتیب معیاری را که برای سنجش بزرگی زیرفضاها و صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ به دنبال آن بودیم، بدست می‌آوریم.

قضیه ۹. اگر V فضای تولید شده توسط بردارهای $\{v_1,\dots,v_k\}$ باشد و $\{w_1,\dots,w_l\}$ زیرمجموعه‌ای مستقل خطی در V باشد. آنگاه

۱. $l\le k$.

۲. **$\{v_1,\dots,v_k\}$ را می‌توان با حذف بعضی از اعضایش به یک پایه V تقلیل داد.**

۳. **$\{w_1,\dots,w_l\}$ را می‌توان با اضافه کردن بردارهایی به یک پایه V گسترش داد.**

۴. **V دارای پایه است و هر دو پایه برای V دارای تعداد اعضای برابر هستند.**

اثبات. قسمت (۱). روش اثبات با جای‌گذاری اعضای $\{w_1,\dots,w_l\}$ بجای اعضای $\{v_1,\dots,v_k\}$ است به‌گونه‌ای که در هر مرحله فضای تولید شده توسط مجموعه جدید همچنان V باشد. فرض کنید در مرحله iام $w_1,\dots,w_i$ را بجای i تا از بردارهای $\{v_1,\dots,v_k\}$ مثلاً $v_1,\dots,v_i$ قرار داده‌ایم به‌گونه‌ای که فضای تولید شده توسط این بردارها V است. یعنی

$$\langle w_1,\dots,w_i,v_{i+1},\dots,v_k\rangle=V$$

در ابتدا $i=0$ است. نشان می‌دهیم که w_{i+1} را می‌توان بجای یکی دیگر از v_jهای باقی مانده قرار داد که همچنان این خاصیت برقرار باشد. چون $w_{i+1}\in V=\langle w_1,\dots,w_i,v_{i+1},\dots,v_k\rangle$ خواهیم داشت

$$w_{i+1}=t_1w_1+\cdots+t_iw_i+t_{i+1}v_{i+1}+\cdots+t_kv_k.$$

در بالا همه ضرایب $t_{i+1},\dots,t_k$ نمی‌توانند صفر باشند زیرا در این صورت w_{i+1} به صورت ترکیب خطی $w_1,\dots,w_i$ خواهد بود و این با مستقل خطی بودن $\{w_1,\dots,w_l\}$ متناقض است. پس یکی از این ضرایب مثلاً t_{i+1} ناصفر است. بنابراین

$$v_{i+1}=\frac{-t_1}{t_{i+1}}w_1+\cdots+\frac{-t_i}{t_{i+1}}w_i+\frac{1}{t_{i+1}}w_{i+1}+\frac{-t_{i+2}}{t_{i+1}}v_{i+2}+\cdots+\frac{-t_k}{t_{i+1}}v_k$$

به عبارت دیگر

$$v_{i+1}\in\langle w_1,\dots,w_i,w_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\langle w_1,\dots,w_i,w_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle &= \langle w_1,\dots,w_i,w_{i+1},v_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle\\ &= \langle w_1,\dots,w_i,v_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle = V\end{aligned}$$

این الگوریتم تضمین می‌کند که اگر v_iای باقی مانده باشد آنگاه باید w_iای نیز باقی مانده باشد که بتوان w_i را بجای آن وارد مجموعه بالا کرد، زیرا اگر در مرحله $i < l$ ام v_jای وجود نداشته باشد آنگاه $w_{i+1} = t_1w_1 + \cdots + t_iw_i$ که با فرض مستقل خطی بودن $\{w_1,\dots,w_l\}$ متناقض است. در نتیجه $l \le k$.

قسمت (۲). اگر $\{v_1,\dots,v_k\}$ مستقل خطی نباشند یکی از اعضای آن زائد است و با حذفش فضای تولید شده توسط بقیه همچنان V خواهد بود. این روند را آنقدر انجام می‌دهیم تا دیگر عضو زائدی نماند. مجموعه حاصل طبق قضیه ۹ مستقل خطی است و همچنان V را تولید می‌کند.

قسمت (۳). اگر $\langle w_1,\dots,w_l\rangle \subsetneq V$، بنابر ویژگی ششم برای مجموعه‌های مستقل خطی، با اضافه کردن عضوی در V که در $\langle w_1,\dots,w_l\rangle$ نیست به مجموعه $\{w_1,\dots,w_l\}$، مجموعه مستقل خطی بزرگتری به‌دست می‌آید. از آنجایی که تعداد اعضای یک مجموعه مستقل خطی در V نمی‌تواند از k بیشتر باشد، با ادامه این کار سرانجام به مجموعه‌ای مستقل خطی می‌رسیم که V را تولید می‌کند.

قسمت (۴). فرض کنید $\{v_1,\dots,v_k\}$ و $\{w_1,\dots,w_l\}$ دو پایه برای V باشند. طبق تعریف پایه، $\{v_1,\dots,v_k\}$ فضای Vرا تولید می‌کند و $\{w_1,\dots,w_l\}$ مستقل خطی است. پس طبق قسمت اول این قضیه باید داشته باشیم $l \le k$. به همین صورت $\{w_1,\dots,w_l\}$ فضای Vرا تولید می‌کند و $\{v_1,\dots,v_k\}$ مستقل خطی است. بنابراین $k \le l$ و در نتیجه $k = l$ است.

طبق این قضیه زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ که با متناهی بردار تولید می‌شوند (یعنی صفحه‌های گذرنده از مبدأ)، دارای پایه هستند. ولی معلوم نیست که آیا همه زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ با متناهی بردار تولید می‌شوند یا خیر؟ گزاره زیر که نتیجه قضیه بالا است تضمین می‌کند که همه زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ با تولید متناهی اند و در نتیجه زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ همان صفحه‌های گذرنده از مبدأ در $\mathbb{R}^n$ خواهند بود.

قضیه ۱۰. هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ دارای پایه‌ای است که تعداد اعضایش از n بیشتر نیست.

اثبات. برای ساختن یک پایه برای زیرفضای $V \subset \mathbb{R}^n$، مجموعه‌ای مستقل خطی در آن می‌یابیم که دیگر نتوانیم آن را بزرگ‌تر کنیم. ابتدا قرار می‌دهیم $A = \varnothing$. می‌دانیم A مستقل خطی است و $\langle A\rangle \subset V$. به صورت استقرایی در هر مرحله یک عضو از V به مجموعه A اضافه می‌کنیم به گونه‌ای که A همچنان مستقل خطی بماند. اگر در مرحله kام، $\langle A\rangle = V$، آنگاه A پایه‌ای برای V خواهد بود، چون هم مستقل است و هم V را تولید می‌کند. اگر چنین نباشد، یعنی اگر $<A> \neq V$ عضوی از V وجود دارد که در $<A>$ نیست. با اضافه کردن آن عضو به A، مجموعه حاصل همچنان مستقل خطی باقی می‌ماند. از آنجا که A زیر مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ نیز هست و $\mathbb{R}^n$ نیز با n بردار تولید می‌شود، طبق قضیه قبل تعداد اعضای مجموعه A بیشتر از n نمی‌تواند باشد. بنابراین روند بزرگ کردن مجموعه A حداکثر تا n مرحله می‌تواند انجام شود.

تعریف ۶. تعداد اعضای هر یک از پایه‌های زیرفضای $V \subseteq \mathbb{R}^n$ را بُعد آن می‌گوییم و آن را با $\dim(V)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۱. اگر $V \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^n$ دو زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشند، آنگاه $\dim(V) \le \dim(W)$ و تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که $V = W$ باشد.

اثبات. فرض کنید A یک پایه برای V باشد. A مجموعه مستقل خطی است که داخل W نیز قرار دارد. طبق قضیه بالا تعداد اعضای A از تعداد اعضای پایه‌ای برای W بیشتر نخواهد بود. یعنی

$$\dim(V) = |A| \le \dim(W)$$

در صورتی که $V \neq W$ آنگاه عضوی در W وجود دارد که در $V = \langle A\rangle$ نیست. با اضافه کردن این بردار به A، مجموعه حاصل همچنان مجموعه‌ای مستقل خطی در W خواهد بود. پس تعداد اعضای آن نمی‌تواند از بعد W بیشتر باشد. یعنی

$$\dim(V) = |A| < |A + 1| \le \dim(W)$$

هر مجموعه مستقل خطی n عضوی در $\mathbb{R}^n$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ است. زیرا اگر پایه نباشد برداری در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که داخل فضای تولید شده توسط آن مجموعه قرار نگرفته و در نتیجه با اضافه کردنش به آن مجموعه $n+1$ بردار مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ بدست می‌آید در حالی که این فضای برداری با n بردار استاندارد $e_1,\ldots,e_n$ تولید شده است. با این استدلال می‌توان نتیجه گرفت که هر مجموعه مستقل خطی k عضوی در یک زیرفضای k بعدی یک پایه برای آن است.

هر n برداری که $\mathbb{R}^n$ را تولید کنند مستقل خطی هستند. اگر n بردار داده شده مستقل خطی نباشند با حذف برداری از آنها مجموعه‌ای با کمتر از n عضو به‌دست می‌آید که همچنان $\mathbb{R}^n$ را تولید می‌کند در حالی که $\mathbb{R}^n$ دارای پایه‌ای n عضوی است و تعداد اعضای یک مجموعه مستقل خطی در یک فضا نمی‌تواند از تعداد مولدی برای آن بیشتر باشد. با همین استدلال می‌توان نتیجه گرفت که هر مجموعه مولد k عضوی در یک زیرفضای k بعدی یک پایه برای آن است.

در گذشته نشان دادیم که مجموع دو زیرفضای $\mathbb{R}^n$ خود یک زیرفضای آن است. اکنون می‌توانین رابطه بعد آن را با بعد آن دو زیرفضا به‌دست آوریم.

قضیه. فرض کنید $V,W \subseteq \mathbb{R}^n$ دو زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشند. در این صورت

$$\dim(V\cap W)+\dim(V+W)=\dim V+\dim W.$$

اثبات. فرض کنید $\{u_1,\ldots,u_k\}$ پایه‌ای برای $V\cap W$ باشد. این پایه را به پایه‌هایی برای V,W گسترش می‌دهیم. به این ترتیب فرض می‌کنیم $\{u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_s\}$ پایه‌ای برای V و $\{u_1,\ldots,u_k,w_1,\ldots,w_r\}$ پایه‌ای برای W باشد. ثابت می‌کنیم $\{u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_s,w_1,\ldots,w_r\}$ پایه‌ای برای $V+W$ است و در نتیجه حکم قضیه ثابت می‌شود. این مجموعه مستقل خطی است زیرا

$$\sum_{i=1}^{k}a_iu_i+\sum_{i=1}^{s}b_iv_i+\sum_{i=1}^{r}c_iw_i=0 \Rightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{k}a_iu_i+\sum_{i=1}^{s}b_iv_i=-\sum_{i=1}^{r}c_iw_i$$

از آنجایی که طرف راست تساوی بالا در W و طرف چپ آن در V قرار دارد بردار بالا داخل $V\cap W$ خواهد بود. بنابراین

$$\sum_{i=1}^{k}d_iu_i=-\sum_{i=1}^{r}c_iw_i \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{k}d_iu_i+\sum_{i=1}^{r}c_iw_i=0$$

چون $\{u_1,\ldots u_k,w_1,\ldots,w_k\}$ پایه‌ای برای W است پس همه ضرایب ترکیب خطی باید صفر باشند، یعنی

$$d_1=\cdots=d_k=c_1=\cdots=c_r=0$$

بنابراین داریم

$$\sum_{i=1}^{k}a_iu_i+\sum_{i=1}^{s}b_iv_i=0$$

از آنجایی که $\{u_1,\ldots u_k,v_1,\ldots,v_k\}$ پایه‌ای برای V است پس همه ضرایب ترکیب خطی بالا باید صفر باشند, یعنی

$$a_1=\cdots=a_k=b_1=\cdots=b_s=0$$

این نتیجه می دهد که $\{u_1,\ldots u_k,v_1,\ldots,v_s,w_1,\ldots,w_r\}$ مستقل خطی است. باید نشان دهیم که این مجموعه فضای $V+W$ را نیز تولید می‌کند. برای هر $x\in V+W$ بردارهای $v\in V$ و $w\in W$ وجود دارند که $x=v+w$. چون $v\in V$ و $w\in W$ داریم

$$v=\sum_{i=1}^{k}a_iu_i+\sum_{i=1}^{s}b_iv_i, \qquad w=\sum_{i=1}^{k}a_i^*u_i+\sum_{i=1}^{r}c_iw_i.$$

بنابراین

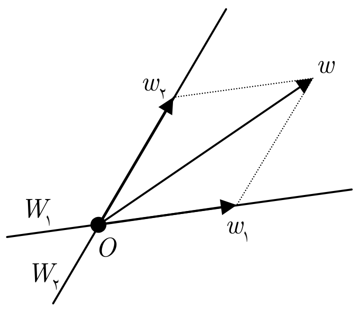
$$x=v+w=\sum_{i=1}^{k}(a_i+a_i^*)u_i+\sum_{i=1}^{r}b_iw_i+\sum_{i=1}^{s}c_iv_i$$

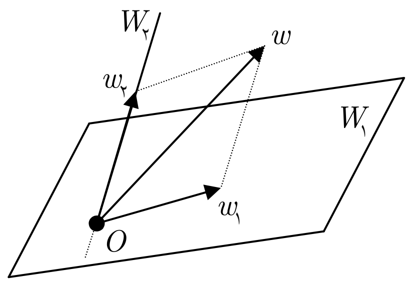
این نتیجه می دهد که

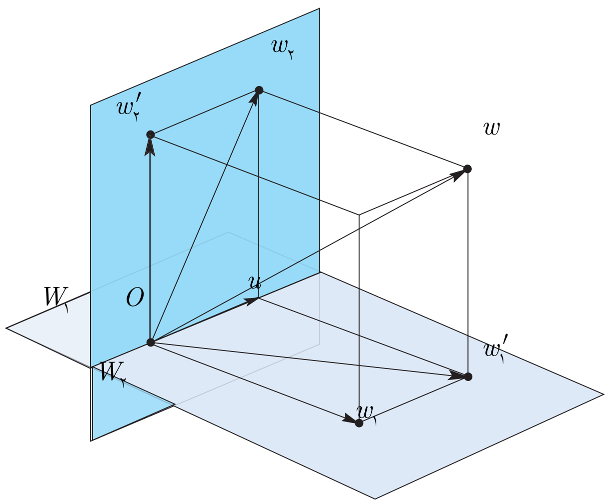
$$V+W\subseteq\langle u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_s,w_1,\dots,w_r\rangle$$

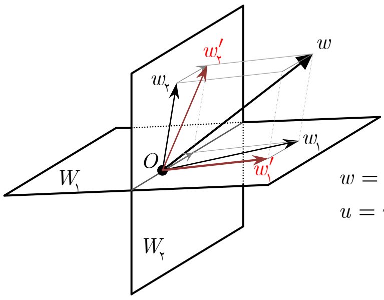
از آنجایی که اعضای این مجموعه داخل $V+W$ هستند فضای تولید شده توسط آنها داخل $V+W$ قرار دارد. بنابراین $V+W=\langle u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_s,w_1,\dots,w_r\rangle$. پس حکم اثبات شد.

بنابر قضیه بالا اگر $W_1\cap W_2=\{0\}$ آنگاه $\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)$. در واقع با توجه به اثبات بالا اجتماع پایه‌های W_1 و W_2 پایه‌ای برای W_1+W_2 خواهد بود. در این حالت هر عضو $w\in W=W_1+W_2$ نمایش یکتایی به صورت $w=w_1+w_2$ دارد که در آن $w_1\in W_1$ و $w_2\in W_2$. زیرا اگر $w=w_1+w_2=w_1'+w_2'$ دو نمایش به صورت بالا باشند آنگاه $w_1-w_1'=w_2'-w_2$. اما طرف چپ این تساوی در W_1 و طرف راست آن در W_2 قرار دارد. بنابراین این بردار باید در $W_1\cap W_2$ قرار داشته باشد، یعنی باید صفر باشد. در نتیجه $w_1=w_1'$ و $w_2=w_2'$. اگر $W_1\cap W_2\neq\{0\}$ آنگاه هیچ یک از این ویژگی‌ها برقرار نخواهند بود.









$$w = w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$$
$$u = w_1 - w_1' = w_2' - w_2 \in W_1 \cap W_2$$