

سوال:

فرض کنید M یک ماتریس $n \times n$ بالا مثلثی باشد. اگر عناصر قطری آن همگی غیر صفر باشند، آنگاه

(الف) اثبات کنید که ستون‌های M مستقل خطی‌اند.

(ب) اگر همگی عناصر قطری آن غیر صفر نباشند، این نتیجه گیری برقرار خواهد بود یا خیر؟

پاسخ:

(الف) فرض کنید x یک ستون از M و 0 وکتور صفر با سایز n باشد. می‌دانیم ستون‌های ماتریس M مستقل خطی‌اند اگر و تنها اگر پاسخ دستگاه $Mx = 0$ وکتور $x = 0$ باشد.

ماتریس بالا مثلثی زیر را در نظر بگیرید:

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & \cdots & m_{1,n} \\ 0 & m_{2,2} & m_{2,3} & \cdots & m_{2,n} \\ 0 & 0 & m_{3,3} & \cdots & m_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{n,n} \end{bmatrix}$$

معادله $Mx = 0$ منجر به دستگاهی با n معادله و n متغیر خواهد شد، که برای یافتن جواب آن ماتریس افزوده $[M \ 0]$ را در نظر میگیریم.

از آنجا که M بالا مثلثی است، میتوانیم با back-substitution آن را حل کنیم. از پایین ترین سطر آن شروع میکنیم و معادله $m_{n,n}x_n = 0$ را داریم، از آنجا که $m_{n,n}$ عنصر قطری است پس طبق فرض مقدار آن غیر صفر خواهد بود و داریم $x_n = 0$.

سپس برای سطر بعدی معادله $m_{n-1,n-1}x_{n-1} + m_{n-1,n}x_n = 0$ را خواهیم داشت و از

آنجا که $x_n = 0$ و $m_{n-1,n-1} \neq 0$ خواهیم داشت $x_{n-1} = 0$.

و به همین ترتیب همه x_i به ازای $1 \leq i \leq n$ صفر خواهند شد. بنابراین جواب دستگاه $x = 0$ خواهد بود، پس ستون‌های M مستقل خطی‌اند.

(ب) خیر، مثال نقض: $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

