## «پاسخنامه تمرین دوم»

-1

تابع trace را برابر با جمع درایه‌های قطر اصلی یک ماتریس مربعی در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم :trace(AB)=trace(BA)

فرض می‌کنیم $AB = (C_{ij})$ و $BA = (C'_{ij})$. داریم:

$$trace(AB) = \sum_{i=1}^{n} C_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, a_{ik}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} C'_{kk} = trace(BA)$$

از این دانسته در بخش‌های (آ) و (ت) استفاده شده است.

**آ)** صحیح است.

$$AB - BA = A \Rightarrow AB = (B+I)A \xrightarrow{if\ A\ is\ invertible} A^{-1}AB = A^{-1}(B+I)A$$
$$B = A^{-1}(B+I)A \Rightarrow trace(B) = trace(A^{-1}(B+I)A) \Rightarrow$$
$$trace(B) = trace\big(AA^{-1}(B+I)\big) = trace(B+I) = trace(B) + n \Rightarrow$$
$$0 = n \ ※ \ \Rightarrow A\ is\ not\ invertible$$

**ب)** صحیح است. هر ماتریس مربعی M را می‌توان به صورت حاصل‌جمع یک ماتریس بالامثلثی $M_1$ با یک ماتریس پایین‌مثلثی $M_2$ نوشت به گونه‌ای که تمام عناصر بالای قطر اصلی به ماتریس $M_1$ و تمام عناصر پایین قطر اصلی به ماتریس $M_2$ منتقل شوند و هر عنصر روی قطر اصلی M تقسیم بر 2 شود و بین دو ماتریس $M_1$ و $M_2$ توزیع شود. بدین ترتیب دترمینان هر کدام از ماتریس‌های $M_1$ و $M_2$ برابر با حاصل‌ضرب عناصر روی قطر اصلی‌اش است. اگر درایه‌ای بر روی قطر اصلی ماتریس M برابر با صفر بوده باشد، آن درایه را در ماتریس $M_1$ برابر با k+ و در ماتریس $M_2$ برابر با K- قرار می‌دهیم. (k : یک عدد دلخواه)

**پ)** نادرست است. مثال نقض:

$$if\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}:\ A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A\,, det(A) = 0$$

**ت)** نادرست است. A و B را دو ماتریس مربعی $n \times n$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$AB - BA = I \Rightarrow trace(AB - BA) = trace(I) \Rightarrow trace(AB) - trace(BA) = n$$
$$\Rightarrow trace(AB) - trace(AB) = n \Rightarrow 0 = n \text{ ※}$$

ث) نادرست است.

$$A = B^4 + 3B^2 + 7B + 3I = (B + I)(B^3 - B^2 + 4B + 3I)$$
$$if\ B = -I : det(A) = 0$$

-2

آ)

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}^T \Rightarrow \left(adj(A)\right)^T = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$adj(A^T) = \begin{bmatrix} \det(A^T_{11}) & -\det(A^T_{21}) & \cdots & (-1)^{n+1}\det(A^T_{n1}) \\ -\det(A^T_{12}) & \det(A^T_{22}) & \cdots & (-1)^{n+2}\det(A^T_{n2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n}\det(A^T_{1n}) & (-1)^{2+n}\det(A^T_{2n}) & \cdots & \det(A^T_{nn}) \end{bmatrix}^T$$

$$\xrightarrow{\det(A^T)=\det(A)} adj(A^T) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}^T = (C^T)^T = C$$

اگر در صورت سوال گفته می‌شد که A معکوس‌پذیر است:

$$(*)\ (A^T)^{-1} = \frac{adj(A^T)}{det(A^T)} \Rightarrow adj(A^T) = (A^T)^{-1}\det(A^T) = (A^{-1})^T\det(A)$$

$$(**)\ A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)} \Rightarrow adj(A) = A^{-1}det(A) \Rightarrow \left(adj(A)\right)^T = (A^{-1}det(A))^T$$
$$= (A^{-1})^T det(A)$$

$$(*),(**) : adj(A^T) = \left(adj(A)\right)^T \blacksquare$$

ب)

$$adj(A^{-1}) = adj\left(\frac{1}{\det(A)}adj(A)\right) \overset{*}{\rightarrow} adj(A^{-1}) = \left(\frac{1}{\det(A)}\right)^{n-1} adj(adj(A))$$

$$(adj(A))^{-1} = \frac{1}{\det\big(adj(A)\big)}adj\big(adj(A)\big) \overset{**}{\rightarrow} \big(adj(A)\big)^{-1} = \frac{1}{(\det(A))^{n-1}}adj\big(adj(A)\big) \ \blacksquare$$

$$* : (kA)^{-1} = \frac{1}{\det(kA)}adj(kA) \Rightarrow adj(kA) = \det(kA)\,(kA)^{-1} = k^n \det(A)\,(kA)^{-1}$$

$$\xrightarrow{AA^{-1}=I \ and \ (kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)=I} adj(kA) = k^n \det(A)\frac{1}{k}A^{-1} = k^{n-1}\det(A)\,A^{-1} = \boldsymbol{k^{n-1}}\mathbf{adj(A)}$$

$$** : \ A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}adj(A) \Rightarrow adj(A) = A^{-1}\det(A) \overset{\times A}{\rightarrow} A \times adj(A) = AA^{-1}\det(A)$$

$$= \det(A)I \xrightarrow{\text{از دو طرف det می‌گیریم}} \det\big(A \times adj(A)\big) = det(\det(A)I) = (\det(A))^n$$

$$\Rightarrow \det(A).\det\big(adj(A)\big) = (\det(A))^n \Rightarrow \det\big(adj(A)\big) = (\mathbf{det}(\boldsymbol{A}))^{\boldsymbol{n-1}}$$

**پ)**

$$A \ is \ diagonal : \forall i,j \ 1 \le i \le n \,, 1 \le j \le n \,, i \ne j : \ a_{ij} = 0$$

$$[adj(A)]_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ji}|$$

می‌دانیم دستیابی به $A_{ji}$ نیازمند حذف سطر j و ستون i از ماتریس A است. با حذف سطر j از ماتریس A، ستون j تنها درایه‌ی (احتمالاً) غیرصفر خود ($a_{jj}$) را از دست می‌دهد و اگر $i \ne j$ باشد، این ستون تماماً صفر به ماتریس $A_{ji}$ منتقل می‌شود و $|A_{ji}| = 0$ خواهد بود. بدین ترتیب تمام عناصر غیر قطر اصلی در ماتریس adj(A) برابر با صفر هستند و adj(A) یک ماتریس قطری می‌باشد. ■

**ت)**

$$B(I - AB) = (I - BA)B \Rightarrow B = (I - BA)B(I - AB)^{-1} \Rightarrow$$
$$BA = (I - BA)B(I - AB)^{-1}A \ \Rightarrow I - BA = I - (I - BA)B(I - AB)^{-1}A \ \Rightarrow$$
$$(I - BA) + (I - BA)B(I - AB)^{-1}A \ = I \Rightarrow (I - BA)(I + B(I - AB)^{-1}A) = I \Rightarrow$$
$$I + B(I - AB)^{-1}A = (I - BA)^{-1} \ \blacksquare$$

**ث)** با توجه به قسمت (ب) همین سوال داریم:

$$adj\big(adj(A)\big) = adj(A^{-1})(\det(A))^{n-1} \xrightarrow{\text{از دو طرف det می‌گیریم}}$$
$$\big|adj\big(adj(A)\big)\big| = |adj(A^{-1})(\det(A))^{n-1}| = ((\det(A))^{n-1})^n|adj(A^{-1})|$$
$$\xrightarrow{\text{با توجه صورت سوال قسمت (ب)}} \big|adj\big(adj(A)\big)\big| = (\det(A))^{n(n-1)}\frac{1}{|adj(A)|} =$$

$$(\det(A))^{n(n-1)}\frac{1}{(\det(A))^{n-1}}=(\det(A))^{n(n-1)-(n-1)}=(\det(A))^{(n-1)(n-1)}\ \blacksquare$$

3- در حالت کلی و به ازای ماتریس‌های دلخواه A و B و C این رابطه تنها برای n=1 برقرار است.
$(AB-BA)^2$ خود یک ماتریس $n\times n$ محسوب می‌شود که در حالت کلی ویژگی بخصوصی ندارد و از آن‌جا که ضرب ماتریس‌ها بطور کلی قابلیت جابه‌جایی ندارد، به ازای n های بزرگتر از 1 این رابطه همواره برقرار نیست؛ مگر در حالت‌های خاص همچون همانی بودن ماتریس C، برابر بودن دو ماتریس A و B یا قطری بودن دو ماتریس A و B.

4- الف)

$$A=\begin{bmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}a&a&a&a\\0&b-a&b-a&b-a\\0&b-a&c-a&c-a\\0&b-a&c-a&d-a\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}a&a&a&a\\0&b-a&b-a&b-a\\0&0&c-a&c-b\\0&0&c-b&d-b\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}a&a&a&a\\0&b-a&b-a&b-a\\0&0&c-b&c-b\\0&0&0&d-c\end{bmatrix}=U$$

$$\begin{bmatrix}a\\a\\a\\a\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b-a\\b-a\\b-a\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c-b\\c-b\end{bmatrix},[d-c]\ \Rightarrow L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$A=LU=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&a&a&a\\0&b-a&b-a&b-a\\0&0&c-b&c-b\\0&0&0&d-c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{bmatrix}$$

ب)

درایه‌های محوری در ماتریس $U$ باید مخالف صفر باشند. بنابراین:

$$a\neq 0\,,b\neq a\,,c\neq b\,,d\neq c$$

-5

$$A_{11}=I_4,A_{12}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},A_{21}=0\,,A_{22}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} A_{11}^2 + A_{12}A_{21} & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ A_{21}A_{11} + A_{22}A_{21} & A_{21}A_{12} + A_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A_{12} + A_{12}A_{22} \\ 0 & A_{22}^2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

-6

**الف)**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} +$$
$$(-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 - (1 \times 1 - (-2) \times 3) + (1 \times 2 - (-2) \times 1) = -3$$

**ب)**

از سطر اول شروع می‌کنیم و هر سطر را از جمع عناصر همان سطر با منفی عناصر سطر زیری‌اش به دست می‌آوریم. در مرحله‌ی بعد سطر آخر را از جمع عناصر آن سطر با یک برابر عناصر سطر اول به‌علاوه‌ی دو برابر عناصر سطر دوم به‌علاوه‌ی سه برابر عناصر سطر سوم ... به‌علاوه‌ی n-1 برابر عناصر سطر یکی مانده به آخر به دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} =$$
$$(n-1) \times (-1)^{n+n} \times (-1)^{n-1} = (n-1)(-1)^{n-1}$$

**ج)**

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$0(-1)^{1+1}\cdots+0(-1)^{2+1}\cdots+\cdots+a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\end{vmatrix}=$$

$$a_n(-1)^{n+1}\left(a_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\end{vmatrix}+0+\cdots+0\right)=\cdots$$

$$=a_1\times a_2\times\cdots\times a_{n-1}\times a_n\times(-1)^{n+1}$$

**د)**

$$det(X_n)=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1}-x_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & x_n-x_1 & x_n^2-x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1}\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & (x_2-x_1) & (x_2-x_1)x_2 & \cdots & (x_2-x_1)x_2^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & (x_n-x_1) & (x_n-x_1)x_n & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-2}\end{vmatrix}=\prod_{k=2}^{n}(x_k-x_1)\begin{vmatrix}1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

ماتریس جدید بدست آمده همانند ماتریس اول است با این تفاوت که یک سطر و یک ستون کمتر دارد، که برای به دست آوردن دترمینان آن باید مانند قبل عمل کنیم. به همین این ترتیب در هر مرحله یک بُعد از ماتریس کم می‌شود تا اندازه‌ی آن به 1 برسد و در آن صورت دترمینانش 1 می‌شود. داریم:

$$det(X)=\left(\prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\right)\left(\prod_{k=3}^{n}(a_k-a_2)\right)\cdots\left(\prod_{k=n}^{n}(a_k-a_{n-1})\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{k=i+1}^{n}(a_k-a_i)$$

**ه)**

به جای هر سطر حاصل تفریق آن سطر با سطر بعدش را قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}a-b & \mathrm{b-a} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a-b & b-a & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{a-b} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \cdots & a\end{bmatrix}_{n\times n}$$

سپس به جای هر ستون حاصل جمع آن ستون با ستون بعدش را قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{a}-\mathrm{b} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 2\mathrm{b} & 3\mathrm{b} & \cdots & (n-1)\mathrm{b}+a \end{bmatrix}_{n\times n}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، درایه‌های بالای قطر اصلی همگی صفرند؛ بنابراین دترمینان از طریق محاسبه‌ی حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی به دست می‌آید: $(a-b)^{n-1}\big((n-1)b+a\big)$

ی) این مسئله را به روش استقرا حل می‌کنیم. با بررسی این ماتریس در ابعاد مختلف می‌توان به یک الگوی مشخص برای سایز n دست یافت:

$$n=2 \rightarrow A=\begin{bmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{bmatrix} \rightarrow \det(A)=(a+b)^2-ab=a^2+ab+b^2$$

$$n=3 \rightarrow A=\begin{bmatrix} a+b & ab & 0 \\ 1 & a+b & ab \\ 0 & 1 & a+b \end{bmatrix} \rightarrow \det(A)=a^3+a^2b+ab^2+b^3$$

می‌توان این الگو را برای ماتریس با سایز $n$ تعمیم داد:

$$\det(A)=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=\sum_{j=0}^{n} a^{n-j}\times b^{j}$$

-7

**روش اول:**

$$A_{adj}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 14 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ -33 & 25 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 14 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ -66 & 50 & -14 & 0 & 2 & 0 \\ 30 & -18 & 30 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]\sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 14 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -104 & 52 & -11 & 2 & 0 \\ 0 & 52 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} -156 & 0 & -156 & -9 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 52 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 52 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{array}\right]\sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 52 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 52 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 52 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 52 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 52 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 52 & -1 & 2 & 6 \end{array}\right]\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{52}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B_{adj}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -7 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -2 & -6 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]\sim$$

$$\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & \vdots & -4 & -2 & -6\\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 2 & -1 & 6\\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -1 & 1 & -4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -2 & 1 & -6\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$C_{adj} \sim \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -4 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & \vdots & 2 & 0 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & \vdots & -7 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -6 & 2 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow |C| = 0$$

$$\Rightarrow C \textit{ is not invertible}$$

روش دوم:

$$C_A = \left[(-1)^{i+j} M_{ij}\right], adj(A) = {C_A}^T$$

$$\begin{cases} C_{11} = \begin{vmatrix}25 & -7\\ -6 & 10\end{vmatrix} = 208 & C_{21} = -\begin{vmatrix}14 & -6\\ -6 & 10\end{vmatrix} = -104 & C_{31} = \begin{vmatrix}14 & -6\\ 25 & -7\end{vmatrix} = 52\\ C_{12} = -\begin{vmatrix}-33 & -7\\ 10 & 90\end{vmatrix} = 260 & C_{22} = \begin{vmatrix}-6 & -6\\ 10 & 10\end{vmatrix} = 0 & C_{32} = -\begin{vmatrix}-6 & -6\\ -33 & -7\end{vmatrix} = 156\\ C_{13} = \begin{vmatrix}-33 & 25\\ 90 & -6\end{vmatrix} = -52 & C_{23} = -\begin{vmatrix}-6 & 14\\ 10 & -6\end{vmatrix} = 104 & C_{33} = \begin{vmatrix}-6 & 14\\ -33 & 25\end{vmatrix} = 312 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_A = 52\begin{bmatrix}4 & 5 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 6\end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -6(208) - 14(-260) - 6(-52) = 52^2$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{52}\begin{bmatrix}4 & -2 & 1\\ 5 & 0 & 3\\ -1 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

$$C_B = \left[(-1)^{i+j} M_{ij}\right], adj(B) = {C_B}^T$$

$$\begin{cases} C_{11} = \begin{vmatrix}5 & 6\\ 3 & 4\end{vmatrix} = 2 & C_{21} = -\begin{vmatrix}-7 & -9\\ 3 & 4\end{vmatrix} = 1 & C_{31} = \begin{vmatrix}-7 & -9\\ 5 & 6\end{vmatrix} = 3\\ C_{12} = -\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 4\end{vmatrix} = -2 & C_{22} = \begin{vmatrix}-2 & -9\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 1 & C_{32} = -\begin{vmatrix}-2 & -9\\ 2 & 6\end{vmatrix} = -6\\ C_{13} = \begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 1 & C_{23} = -\begin{vmatrix}-2 & -7\\ 1 & 3\end{vmatrix} = -1 & C_{33} = \begin{vmatrix}-2 & -7\\ 2 & 5\end{vmatrix} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_B = \begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & -6 & 4\end{bmatrix}$$

$$\det(B) = -2(2) - (-7)(2) + (-9)(1) = 1$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} adj(B) = \begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -2 & 1 & -6\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

$C_C$ را به طور مشابه محاسبه می‌کنیم و $\det(C)$ را به دست می‌آوریم که برابر با صفر خواهد شد.

-8

**الف)** می‌دانیم یک ماتریس مانند A معکوس‌پذیر است، اگر و تنها اگر ماتریسی مانند B وجود داشته باشد که AB=I و BA=I، حال داریم:

$$A \times A^{-1} = I \Rightarrow \det(A).\det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

**ب)** ابتدا با استفاده از تئوری 6 از بخش 3.2 کتاب، $(\det(AB) = \det(A).\det(B))$ دترمینان خواسته شده را تجزیه می‌کنیم:

$$\det((A^4)^T B^{-1} A^{-4} (B^3)^T) = \det((A^4)^T).\det(B^{-1}).\det(A^{-4}).\det((B^3)^T) = \det(A^4).\det(B^{-1}).\det(A^{-4}).\det(B^3)$$

همچنین چون $\det(A^n) = \det(A \times A \times \cdots \times A) = \det(A).\det(A).\cdots.\det(A) = (\det(A))^n$ پس داریم:

$$\det(A^4).\det(B^{-1}).\det(A^{-4}).\det(B^3) = (\det(A))^4.\det(B^{-1}).\det(A^{-4}).(\det(B))^3$$

همچنین به راحتی مانند بالا قابل اثبات است که $\det(A^{-n}) = (\det(A^{-1}))^n$ و از طرفی داریم:

$$(\det(A))^4.\det(B^{-1}).\det(A^{-4}).(\det(B))^3 = (\det(A))^4.\frac{1}{\det(B)}.\frac{1}{(\det(A))^4}.(\det(B))^3 = (\det(B))^2$$

پس برای محاسبه‌ی دترمینان بالا تنها کافیست دترمینان B را به دست آوریم؛ که چون B یک ماتریس بالامثلثی است، پس det(B)=24 می‌شود و در نتیجه عبارت خواسته شده برابر است با $24^2 = 576$

-9

**آ)** ابتدا دترمینان ماتریس A را به روش کاهش سطری محاسبه می‌کنیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\sim -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \sim (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -19 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)[(-13)(-32) + 5(-76-20) + (-38+30)] = 72$$

برای محاسبه‌ی $x_3$ ستون $b$ را به جای ستون سوم ماتریس $A$ قرار می‌دهیم و بطور مشابه دترمینان را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 168 \Rightarrow x_3 = \frac{168}{72} = \frac{7}{3}$$

ب)

$$A_1(b) = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & -2 \\ b_2 & 6 & -1 \\ b_3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} b_1 & 1 & -2 \\ b_2 - 6b_1 & 0 & 11 \\ b_3 - b_1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\big(A_1(b)\big) = (-1) \begin{vmatrix} b_2 - 6b_1 & 11 \\ b_3 - b_1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -(7b_2 - 42b_1 - 11b_3 + 11b_1) = 31b_1 - 7b_2 + 11b_3$$

$$A_2(b) = \begin{bmatrix} 4 & b_1 & -2 \\ 3 & b_2 & -1 \\ 1 & b_3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & b_1 - 4b_3 & -22 \\ 0 & b_2 - 3b_3 & -16 \\ 1 & b_3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\big(A_2(b)\big) = \begin{vmatrix} b_1 - 4b_3 & -22 \\ b_2 - 3b_3 & -16 \end{vmatrix}$$

$$= -16(b_1 - 4b_3) + 22(b_2 - 3b_3) = -16b_1 + 22b_2 - 2b_3$$

$$A_2(b) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & b_1 \\ 3 & 6 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & b_1 - b_3 \\ -3 & 0 & b_2 - 6b_3 \\ 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\big(A_3(b)\big) = (-1) \begin{vmatrix} 3 & b_1 - b_3 \\ -3 & b_2 - 6b_3 \end{vmatrix}$$

$$= -1\big(3(b_2 - 6b_3 + b_1 - b_3)\big) = -3b_1 - 3b_2 + 21b_3$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & -3 & -22 \\ 0 & 3 & -16 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = (1) \begin{vmatrix} -3 & -22 \\ 3 & -16 \end{vmatrix} = 3 \times 16 + 3 \times 22 = 114$$

$$x_1 = \frac{|A_1(b)|}{|A|} = \frac{1}{114}(31b_1 - 7b_2 + 11b_3)$$

$$x_2 = \frac{|A_2(b)|}{|A|} = \frac{1}{114}(-16b_1 + 22b_2 - 2b_3)$$

$$x_3 = \frac{|A_3(b)|}{|A|} = \frac{1}{114}(-3b_1 - 3b_2 + 21b_3)$$