Linear Algebra

A First Course with Applications to Differential Equations

Tom M. Apostol

۱

فضاهای خطی

۱۰۱ مقدمه

در ریاضیات به نمونه‌های زیادی از اشیاء ریاضی برمی‌خوریم که می‌توانند با هم جمع و یا در اعداد حقیقی ضرب شوند. قبل از همه، اعداد حقیقی خود از این اشیاءاند. سایر مثالها عبارتند از توابع حقیقی، اعداد مختلط، سریهای نامتناهی، بردارها در فضای n، و توابع برداری. در این فصل یکی از مفاهیم کلی ریاضی، به نام ***فضای خطی***، را مطرح می‌کنیم که همهٔ این مثالها و بسیاری دیگر را به عنوان حالاتی خاص دربردارد.

بطور خلاصه، یک فضای خطی مجموعه‌ای است از عناصر از هر نوع که می‌توان برآنها اعمالی (به‌نام **جمع** و ***ضرب در اعداد***) را انجام داد. در تعریف فضای خطی نه سرشت عنصرها را مشخص می‌کنیم و نه می‌گوییم اعمال چطور صورت می‌گیرند. در عوض، قید می‌کنیم که اعمال خواص معینی دارند و آنها را اصول موضوع فضای خطی می‌انگاریم. حال به شرح مبسوط این اصول می‌پردازیم.

۲۰۱ تعریف فضای خطی

فرض کنیم V مجموعه‌ای ناتهی از اشیاء، که **عنصر** خوانده می‌شوند، باشد. V را درصورتی یک ***فضای خطی*** نامیم که در ده اصل موضوع زیر که به سه گروه تقسیم شده‌اند صدق کند:

اصول موضوع بسته بودن

اصل موضوع ۱. بسته بودن تحت جمع. به‌هر جفت عنصر x و y در V عنصر منحصر بفردی در V مربوط است به نام **مجموع** x و y که با $x + y$ نموده می‌شود.

اصل موضوع ۲. بسته بودن تحت ضرب در اعداد حقیقی. به هر x در V و هر عدد حقیقی a عنصری در V مربوط است بـه نام ***حاصل ضرب*** a و x که با ax نشان داده می‌شود.

اصول موضوع جمع

اصل موضوع ۳. قانون تعویضپذیری. به‌ازای‌هر x و y در V داریم $x + y = y + x$.

اصل موضوع ۴. قانون شرکتپذیری. به ازای هر x، y، و z در V داریم

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

اصل موضوع ۵. وجود عنصر صفر. عنصـری در V، کـه با O نموده می‌شود، هست بطوری که

$$x + O = x \text{ ، } V \text{ به‌ازای هر } x \text{ در }$$

اصل موضوع ۶. وجود قرینه. به‌ازای‌هر x در V عنصر $(-1)x$ این خاصیت را داردکه

$$x + (-1)x = O.$$

اصول موضوع ضرب در اعداد

اصل موضوع ۷. قانون شرکتپذیری. به ازای هر x در V و هر دو عدد حقیقی a و b داریم

$$a(bx) = (ab)x.$$

اصل موضوع ۸. قانون پخشپذیری برای جمع در V. به ازای هـر x و y در V و هر a ی حقیقی داریم

$$a(x + y) = ax + ay.$$

اصل موضوع ۹. قانون پخشپذیری برای جمع اعداد. به ازای هـر x در V و هر a و b حقیقی داریم

$$(a + b)x = ax + bx.$$

اصل موضوع ۱۰. وجود همانی. به ازای هر x در V داریم $1x = x$.

گاهی فضاهای خطـی را، که در فوق تعریف شد، فضاهای خطی **حقیقی** می‌نامند تا بر ضرب عناصر V در اعداد حقیقی تاکید شده باشد. اگر در اصول موضوع ۲، ۷، ۸، و

۹ **عدد حقیقی** را با **عدد مختلط** عوض کنیم ، نهاد حاصل **فضای خطی مختلط** نام خواهد داشت . گاهی فضای خطی را **فضای برداری خطی** و یا فقط **فضای برداری** می‌نامند؛ اعدادی که بـه‌عنوان ضریب به‌کار رفته **اسکالر** نیز خوانده می‌شوند . اسکالرهای یک فضای خطی حقیقی اعداد حقیقی و اسکالرهای یک فضای خطی مختلط اعداد مختلط هستند . ماعمدتاً با فضاهای خطـی حقیقی سر و کار داریم ، اما تمام قضایا برای فضاهای خطی مختلط نیز اعتبار دارند . هرگاه اصطلاح فضای خطی را بی‌توضیح به‌کار بردیم ، فرض آن است که فضا می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد .

۳.۱ چند مثال از فضاهای خطی

اگر مجموعهٔ V را مشخص کنیم و بگوییم چطور عنصرهایش با هم جمع و در اعداد ضرب می‌شوند ، بـه نمونهٔ ملموسی از فضـاهای خطی دست خواهیم یافت . به آسانی می‌توان تحقیق کرد که هریک از مثالهای زیر در تمام اصول موضوع فضای خطی حقیقی صدق می‌کند .

مثال ۱. فرض کنیم $V = \mathbf{R}$ ، یعنی مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی ، و $x + y$ و ax جمع و ضرب معمولی اعداد حقیقی باشند .

مثال ۲. فرض کنیم $V = \mathbf{C}$ ، یعنی مجموعهٔ تمام اعداد مختلط ، و $x + y$ را جمع معمولی اعداد مختلط و ax را ضرب عدد مختلط x در عدد حقیقی a تعریف می‌کنیم . با اینکه عنصرهای V مختلط‌اند ، این یک فضای خطی حقیقی است ، چونکه اسکالرهایش حقیقی هستند .

مثال ۳. فرض کنیـم $V = V_n$ ، یعنی V فضای برداری تمام n تاییهای اعداد حقیقی باشد ، که در آن جمع و ضرب در اسکالرها طبق معمول برحسب مؤلفه‌ها تعریف شده‌اند .

مثال ۴. فرض کنیم V مجموعهٔ تمام بردارهایی در V_n باشد که بر بردار معلوم و ناصفر N عمودند . اگر $n = 2$ ، این فضا خط مستقیمی است مار بر O که N یک بردار قائم آن است . اگر $n = 3$ ، این فضا صفحه‌ای است مار بر O که N یک بردار قائم آن می‌باشد .

مثالهای زیر **فضاهای تابعی** نام دارند . عنصرهای V توابعی حقیقی‌اند ، و در آن

جمع دوتابع f و g طبق معمول تعریف می‌شود : به‌ازای هر x حقیقی دراشتراک قلمروهای f و g ،

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) .$$

ضرب تابع f در اسکالر حقیقی a این‌طور تعریف خواهد شد : af تابعی است که مقدارش در هر x از قلمرو f مساوی $af(x)$ است . عنصر صفر تابعی است که مقادیرش همه جا صفرند . به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که هریک از مجموعه‌های زیر یک فضای تابعی است .

مثال ۵ . مجموعهٔ تمام توابعی که بر یک بازهٔ معلوم تعریف شده‌اند .

مثال ۶ . مجموعهٔ تمام چند جمله‌ایها .

مثال ۷ . مجموعهٔ تمام چند جمله‌ایها از درجهٔ نابیشتر از n که n ثابت است . (هرگاه این مجموعه را درنظر گرفتیم ، فرض است که چند جمله‌ای صفر نیز در آن قرار دارد .) مجموعهٔ تمام چند جمله‌ایها از درجهٔ n یک فضای خطی نیست ، چونکه اصول موضوع بسته بودن برقرار نیستند . مثلاً ، مجموع دو چندجمله‌ای از درجهٔ n لزوماً از درجهٔ n نیست .

مثال ۸ . مجموعهٔ تمام توابع پیوسته بر یک بازهٔ معلوم . اگر بازه $[a, b]$ باشد ، این فضا را به $C(a, b)$ نشان خواهیم داد .

مثال ۹ . مجموعهٔ تمام توابعی که در یک نقطهٔ معلوم مشتقپذیرند .

مثال ۱۰ . مجموعهٔ تمام توابعی که بریک بازهٔ معلوم انتگرالپذیرند .

مثال ۱۱ . مجموعهٔ تمام توابع f که $f(1) = 0$. دراین مثال عدد 0 مهم است . اگر 0 را با عدد ناصفر c عوض کنیم ، اصول موضوع بسته بودن نقض خواهند شد .

مثال ۱۲ . مجموعهٔ تمام جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل خطی‌وهمگن $y'' + ay' + by = 0$ ،

که درآن a و b ثابتهای معلومی هستند. دراینجا نیز 0 اهمیت دارد. مجموعهٔ جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرهمگن در اصول موضوع بسته بودن صدق نمی‌کند.

این امثله و بسیاری دیگر نشان می‌دهند که مفهوم فضای خطی چگونه در جبر، هندسه، و آنالیز نفوذ دارد. وقتی از اصول موضوع فضای خطی قضیه‌ای نتیجه‌شود، یکباره مطلبی حاصل می‌شود که برای هر نمونهٔ ملموس معتبر است. با یکی کردن مثالهای مختلف بدین راه بینش عمیقتری از هر یک به‌دست خواهد آمد. گاهی اطلاع ویژه‌ای از یک مثال خاص در پیش بینی و یا تعبیر نتایج برقرار برای سایر مثالها موثر است و روابطی را که جز این ممکن است از نظر دور بمانند آشکار خواهد ساخت.

۴.۱ نتایج مقدماتی اصول موضوع

قضایای زیر به‌آسانی از اصول موضوع فضای خطی نتیجه می‌شوند.

قضیهٔ ۱.۱ . یکتایی عنصر صفر. ***در هر فضای خطی یک و فقط یک عنصر صفر وجود دارد.***

برهان. اصول موضوع ۵ به‌ما می‌گوید که دست کم یک عنصر صفر وجود دارد. فرض‌کنیم دو عنصر صفر، مثلاً O_1 و O_2، وجود می‌داشت. با فرض $x = O_1$ و $O = O_2$ در اصل موضوع ۵ داریم $O_1 + O_2 = O_1$. همچنین، با اختیار $x = O_2$ و $O = O_1$ خواهیم داشت $O_2 + O_1 = O_2$. اما، طبق قانون تعویضپذیری، $O_1 + O_2 = O_2 + O_1$. درنتیجه، $O_1 = O_2$.

قضیهٔ ۲.۱ . یکتایی عنصر قرینه. ***در هرفضای خطی هرعنصر درست یک قرینه دارد؛ یعنی، به‌ازای هر x، یک و فقط یک y هست که $x + y = O$.***

برهان. اصل موضوع ۶ به‌ما می‌گوید که x دست کم یک قرینه، یعنی $(-1)x$ را، دارد. فرض کنیم x دو قرینه، مثلاً y_1 و y_2 را، داشته باشد. دراین صورت، $x + y_1 = O$ و $x + y_2 = O$. با افزودن y_2 به دوطرف معادلهٔ اول و استفاده از اصل موضوع ۵، ۴، و

۳ داریم

$$y_2 + (x + y_1) = y_2 + O = y_2$$

و

$$y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = O + y_1 = y_1 + O = y_1.$$

بنابراین، $y_1 = y_2$ ؛ درنتیجه، x درست یک قرینه، یعنی $(-1)x$ را، خواهد داشت.

نماد گذاری. قرینهٔ x را با $-x$ نشان می‌دهیم، و تفاضل $y - x$ را مساوی مجموع $y + (-x)$ تعریف می‌کنیم.

قضیهٔ زیر چند خاصیت را که بر اعمال جبری مقدماتی یک فضای خطی حاکمند وصف می‌کند.

قضیهٔ ۱۰۳. *فرض کنیم x و y عنصرهای دلخواه یک فضای خطی بوده و a و b اسکالرهای دلخواهی باشند. دراین صورت، خواص زیر را خواهیم داشت:*

(آ) $0x = O$؛

(ب) $aO = O$؛

(پ) $(-a)x = -(ax) = a(-x)$؛

(ت) هرگاه $ax = O$، آنگاه $a = 0$ یا $x = O$؛

(ث) هرگاه $ax = ay$ و $a \neq 0$، آنگاه $x = y$؛

(ج) هرگاه $ax = bx$ و $x \neq O$، آنگاه $a = b$؛

(چ) $-(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y$؛

(ح) $x + x = 2x$، $x + x + x = 3x$، و بطور کلی، $\sum_{i=1}^{n} x = nx$.

ما (آ) و (ب) و (پ) را ثابت می‌کنیم و بقیه را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم.

برهان (آ). فرض کنیم $z = 0x$. می‌خواهیم ثابت کنیم $z = O$. با افزودن z به خودش و استفاده از اصل موضوع ۹، داریم

$$z + z = 0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = z.$$

حال $-z$ را به‌طرفین فوق می‌افزاییم تا $z = O$ به‌دست آید.

برهان (ب) . فرض کنیم $z = aO$ ، z را به‌خودش می‌افزاییم ، و از اصل موضوع ۸ استفاده می‌کنیم .

برهان (پ) . فرض کنیم $z = (-a)x$. با افزودن z به ax واستفاده‌از اصل‌موضوع ۹ ، داریم

$$z + ax = (-a)x + ax = (-a + a)x = 0x = O;$$

پس z قرینهٔ ax است : $z = -(ax)$. بهمین نحو ، اگر $a(-x)$ را به ax اضافه و از اصل موضوع ۸ و خاصیت (ب) استفاده کنیم ، درمی‌یابیم که $a(-x) = -(ax)$.

۱ . ۵ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۲۸ معین کنید که اگر جمع و ضرب در اسکالرهای حقیقی طبق معمول تعریف شوند ، مجموعه‌ها فضای خطی حقیقی هستند یا خیر . برای آنهایی که نیستند بگویید کدام اصول موضوع برقرار نمی‌باشند . توابع تمرینهای ۱ تا ۱۷ حقیقی‌اند . در تمرینهای ۳ و ۴ و ۵ هر قلمرو شامل 0 و 1 ، و در تمرینهای ۷ تا ۱۲ حاوی تمام اعداد حقیقی است .

۱ . تمام توابع گویا .

۲ . تمام توابع گویای f/g که درجهٔ f از درجهٔ g نابیشتراست (به‌انضمام $f = 0$) .

۳ . تمام f هایی که $f(0) = f(1)$.

۴ . تمام f هایی که $2f(0) = f(1)$.

۵ . تمام f هایی که $f(1) = 1 + f(0)$.

۶ . تمام توابع پله‌ای تعریف شده بر $[0, 1]$.

۷ . تمام f هایی که وقتی $x \to +\infty$ ، $f(x) \to 0$.

۸ . تمام توابع زوج .

۹ . تمام توابع فرد .

۱۰ . تمام توابع کراندار .

۱۱ . تمام توابع صعودی .

۱۲ . تمام توابع با دورهٔ تناوب 2π .

۱۳ . تمام f های انتگرالپذیر بر $[0, 1]$ که $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$.

۱۴ . تمام f های انتگرالپذیر بر $[0,1]$ که $\int_0^1 f(x)\,dx \geq 0$.

۱۵ . تمام f هایی که در $f(x) = f(1-x)$ به‌ازای هر x صدق می‌کنند .

۱۶ . تمام چند جمله‌ایهای تیلور[1] از درجهٔ نابیشتر از n به‌ازای n ی ثابت (به‌انضمام چند جمله‌ای صفر) .

۱۷ . تمام جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل همگن مرتبهٔ دوم خطی

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

که در آن P و Q توابعی معلوم و همه‌جا پیوسته‌اند .

۱۸ . تمام دنباله‌های حقیقی کراندار .

۱۹ . تمام دنباله‌های حقیقی همگرا .

۲۰ . تمام سریهای حقیقی همگرا .

۲۱ . تمام سریهای حقیقی به‌طور مطلق همگرا .

۲۲ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که $z = 0$.

۲۳ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که $x = 0$ یا $y = 0$.

۲۴ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که $y = 5x$.

۲۵ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که $3x + 4y = 1$ و $z = 0$.

۲۶ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که مضربهای اسکالر $(1, 2, 3)$ اند .

۲۷ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که مؤلفه‌هایشان در یک دستگاه سه معادلهٔ خطی به شکل

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \qquad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \qquad a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$$

صدق می‌کنند .

۲۸ . تمام بردارهایی در V_n که ترکیب خطی دو بردار معلوم A و B اند .

۲۹ . فرض کنید $V = \mathbf{R}^+$ ، یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت ، باشد . "مجموع" x و y در V را حاصل ضرب $x \cdot y$ (به‌معنی معمولی) ، و "حاصل ضرب" x از V در اسکالر c را x^c تعریف کنید . ثابت کنید V یک فضای خطی حقیقی است که 1 عنصر صفر آن است .

۳۰ . (آ) ثابت کنید اصل موضوع ۱۰ را می‌توان از سایر اصلها نتیجه گرفت .

---

1. Taylor

(ب) ثابت کنید اگر اصل موضوع ۶ با اصل موضوع ′۶ زیر عوض شود، دیگر نمی‌توان اصل موضوع ۱۰ را از سایر اصول نتیجه گرفت.

اصل موضوع ′۶ . به‌ازای هر x در V عنصری مثل y در V هست که $x + y = O$.

۳۱ . فرض کنید S مجموعهٔ تمام جفتهای مرتب (x_1, x_2) از اعداد حقیقی باشد. در هر حالت معین کنید آیا S با اعمال جمع و ضرب در اسکالرهای تعریف شده یک فضای خطی هست یا نه. اگر مجموعه یک فضای خطی نیست، نشان دهید کدام اصول نقض شده‌اند:

(آ) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ ، $a(x_1, x_2) = (ax_1, 0)$ ؛

(ب) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$ ، $a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$ ؛

(پ) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, x_2 + y_2)$ ، $a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$ ؛

(ت) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|)$ ، $a(x_1, x_2) = (|ax_1|, |ax_2|)$.

۳۲ . قسمتهای (ت) تا (ح) قضیهٔ ۳۰۱ را ثابت کنید.

۶۰۱ زیرفضاهای یک فضای خطی

فرض کنیم V یک فضای خطی و S یک زیر مجموعهٔ ناتهی آن باشد. چنانچه S نیز با همان جمع و ضرب در اسکالرها یک فضای خطی باشد، S یک **زیر فضای** V نامیده می‌شود. قضیهٔ زیر در تعیین اینکه زیر مجموعه‌ای از یک فضای خطی زیر فضا هست یا نه محک ساده‌ای می‌باشد.

قضیهٔ ۴۰۱ . ***فرض کنیم S یک زیر مجموعهٔ ناتهی فضای خطی V باشد. در این صورت، S یک زیر فضاست اگر و فقط اگر در اصول موضوع بسته بودن صدق کند.***

برهان. اگر S یک زیرفضا باشد، در تمام اصول موضوع یک فضای خطی صدق می‌کند؛ و درنتیجه، بخصوص، در اصول موضوع بسته بودن صدق خواهد کرد.

حال نشان می‌دهیم که اگر S در اصول موضوع بسته بودن صدق کند، در سایر اصول نیز صادق است. گوییم قوانین تعویضپذیری و شرکتپذیری جمع (اصول ۳ و ۴) و اصول موضوع ضرب در اسکالرها (اصول ۷ تا ۱۰) خودبخود در S برقرارند، زیرا برای تمام عناصر V چنین‌اند. می‌ماند تحقیق اصول ۵ و ۶، وجود عنصر صفر در S ، و وجودقرینه

برای هر عنصر در S .

فرض کنیم x یک عنصر S باشد . (S ، چون ناتهی است ، دست کم یک عنصر دارد .) بنابه اصل موضوع ۲ ، بهازای هر اسکالر a ، ax در S است . با فرض $a = 0$ نتیجه می‌شود که $0x$ در S می‌باشد . اما ، طبق قضیهٔ ۱.۳ (آ) ، $0x = O$. پس $O \in S$ و اصل موضوع ۵ برقرار است . با فرض $a = -1$ می‌بینیم که $(-1)x$ نیز در S است . اما $x + (-1)x = O$ ، زیرا x و $(-1)x$ هر دو در V هستند . لذا ، اصل موضوع ۶ در S صادق است . بنابراین ، S یک زیر فضای V می‌باشد .

تعریف . فرض کنیم S یک زیر مجموعهٔ ناتهی فضای خطی V باشد . عنصر x در V به شکل

$$x = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i ,$$

که درآن $x_1, \ldots, x_k$ همه در S بوده و $c_1, \ldots, c_k$ اسکالر هستند ، را یک **ترکیب خطی متناهی** از عناصر S می‌نامیم . مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی متناهی از عناصر S دراصول موضوع بسته‌بودن صدق می‌کند ؛ و در نتیجه ، یک زیر فضای V است . ما این را **زیرفضای پیموده شده بوسیلهٔ** S ، یا **پیمای خطی** S ، می‌خوانیم و بسا $L(S)$ نشانش می‌دهیم . اگر S تهی باشد ، $L(S)$ را مساوی $\{O\}$ ، یعنی مجموعه‌ای فقط مرکب از عنصر صفر ، تعریف می‌کنیم .

مجموعه‌های مختلف می‌توانند یک زیر فضا را بپیمایند . مثلاً ، فضای V_2 بوسیلهٔ هریک از مجموعه بردارهای $\{i, j\}$ ، $\{i, j, i + j\}$ ، و $\{O, i, -i, j, -j, i + j\}$ پیموده می‌شود . فضای تمام چند جمله‌ایها از درجهٔ نابیشتر از n به وسیلهٔ مجموعهٔ

$$\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$$

مرکب از $n + 1$ چندجمله‌ای پیموده می‌شود . این فضا به وسیلهٔ مجموعه‌های $\{1, t/2, t^2/3, \ldots, t^n/(n + 1)\}$ و $\{1, (1 + t), (1 + t)^2, \ldots, (1 + t)^n\}$ نیز پیموده می‌شود . فضای تمام چند جمله‌ایها بوسیلهٔ مجموعهٔ نامتناهی $\{1, t, t^2, \ldots\}$ از چند جمله‌ایها پیموده خواهد شد .

در اینجا طبعاً "چند سؤال مطرح می‌شود . مثلاً" ، چه فضاهایی بوسیلهٔ یک مجموعهٔ متناهی پیموده می‌شوند ؟ اگر یک فضا را بتوان به وسیلهٔ مجموعه‌ای متناهی پیمود ، دست

کم چند عنصر برای این‌کار لازم است ؟ برای بحث در باب اینها و مسائل مربوطه، مفاهیم ***وابستگی*، *استقلال*، *پایه‌ها***، و **بعد** را معرفی می‌کنیم . با این مفهومها در جلد یک در بررسی فضای برداری V_n برخوردیم . حال آنها را به فضاهای خطی کلی تعمیم می‌دهیم .

۷.۱ مجموعه‌های وابسته و مستقل در یک فضای خطی

تعریف . مجموعهٔ S از عناصر در فضای خطی V را ***وابسته*** نامیم هرگاه مجموعه‌ای متناهی از عنصرهای متمایز در S ، مثلاً $x_1, \ldots, x_k$ ، و مجموعهٔ نظیرش از اسکالرهای $c_1, \ldots, c_k$ ، که همه صفر نیستند، وجود داشته باشند بطوری که

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = O .$$

هر معادله به شکل $\sum c_i x_i = O$ ، که در آن همهٔ c_i ها صفر نباشند، یک ***نمایش نابدیهی*** O نام دارد . مجموعهٔ S را **مستقل** نامیم اگر که وابسته نباشد . دراین‌حال، به‌ازای هر انتخاب از عناصر متمایز $x_1, \ldots, x_k$ در S و اسکالرهای $c_1, \ldots, c_k$ ،

$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = O$ ایجاب می‌کند که $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$.

با اینکه وابستگی و استقلال از خواص مجموعه‌هاست، ما آنها را برای خود عنصرها نیز به‌کار می‌بریم . مثلاً ، عنصرهای یک مجموعهٔ مستقل را عنصرهای مستقل خواهیم نامید .

درحالت متناهی بودن S ، تعریف بالا بر تعریفی که در جلد یک برای V_n داده شد منطبق است . لیکن تعریف فوق به مجموعه‌های متناهی محدود نخواهد شد .

مثال ۱ . اگر زیر مجموعهٔ T از S وابسته باشد، خود S نیز وابسته است . این منطقاً معادل آن است که بگوییم هر زیر مجموعهٔ یک مجموعهٔ مستقل مستقل است .

مثال ۲ . اگر عنصری در S مضرب اسکالری از دیگری باشد، S وابسته است .

مثال ۳ . اگر $O \in S$ ، S وابسته است .

مثال ۴. مجموعهٔ تهی مستقل است.

بسیاری از مجموعه‌های وابسته و مستقل از بردارهای V_n در جلد یک بحث شدند. مثالهای زیر این مفهومها را در فضاهای تابعی نشان می‌دهند. در هرحالت، فضای‌خطی زمینهٔ V مجموعهٔ تمام توابع حقیقی است که برخط حقیقی تعریف شده‌اند.

مثال ۵. فرض کنیم به‌ازای هر t ی حقیقی $u_1(t) = \cos^2 t$ ، $u_2(t) = \sin^2 t$ ، و $u_3(t) = 1$. اتحاد فیثاغورس نشان می‌دهد که $u_1 + u_2 - u_3 = O$. بنابر این، سه تابع u_1 ، u_2 ، و u_3 وابسته می‌باشند.

مثال ۶. فرض کنیم به‌ازای $k = 0, 1, 2, \ldots$ و هر t ی حقیقی $u_k(t) = t^k$. مجموعهٔ $S = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ مستقل است. برای اثبات این مطلب کافی است نشان دهیم به ازای هر n ، $n + 1$ چند جمله‌ای $u_0, u_1, \ldots, u_n$ مستقل‌اند. گوییم هر رابطه به شکل $\sum c_k u_k = O$ به این معنی است که به‌ازای هر t ی حقیقی

$$\sum_{k=0}^{n} c_k t^k = 0 \qquad (۱\cdot۱)$$

این، وقتی $t = 0$ ، نتیجه می‌دهد که $c_0 = 0$. با مشتقگیری از (۱۰۱) و گذاردن $t = 0$ درآن داریم $c_1 = 0$. با تکرار این عمل در می‌یابیم که هر ضریب c_k صفر می‌باشد.

مثال ۷. هرگاه $a_1, \ldots, a_n$ اعداد حقیقی متمایزی باشند، n تابع نمایی

$$u_1(x) = e^{a_1 x}, \ldots, u_n(x) = e^{a_n x}$$

مستقل خواهند بود. این را می‌توان به استقرا بر n ثابت کرد. نتیجه وقتی $n = 1$ بدیهی است. پس فرض‌کنیم برای $n - 1$ تابع نمایی درست باشد و اسکالرهای $c_1, \ldots, c_n$ را قسمی می‌گیریم که

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e^{a_k x} = 0. \qquad (۲\cdot۱)$$

فرض‌کنیم a_M ماکزیمم n عدد $a_1, \ldots, a_n$ باشد. با ضرب طرفین (۲۰۱) در $e^{-a_M x}$ داریم

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e^{(a_k - a_M)x} = 0 . \qquad (۳ \cdot ۱)$$

اگر $k \neq M$ ، عدد $a_k - a_M$ منفی است . پس، وقتی در (۳۰۱) $x \to +\infty$ ، هرجمله با $k \neq M$ به صفر میل می‌کند و خواهیم داشت $c_M = 0$. حال اگر از (۲۰۱) جملهٔ M م را حذف کرده فرض استقرا را به‌کار بریم ، می‌بینیم که هر یک از $n - 1$ ضریب باقیمانده نیز صفر است .

قضیهٔ ۵۰۱ . فرض کنیم $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ یک مجموعهٔ مستقل از k عنصر در فضای خطی V بوده و $L(S)$ زیرفضای پیموده شده به‌وسیلهٔ آن باشد . دراین صورت ، هرمجموعه از $k + 1$ عنصر در $L(S)$ وابسته خواهد بود .

برهان. اثبات به‌استقرا بر k ، یعنی عدهٔ عنصرهای S ، صورت می‌گیرد . ابتدا فرض می‌کنیم $k = 1$. پس، طبق فرض، S از یک عنصر مانند x_1 تشکیل شده که، چون S مستقل است، $x_1 \neq O$. حال دو عنصر متمایز y_1 و y_2 را در $L(S)$ اختیار می‌کنیم . در این صورت ، هریک مضرب اسکالر x_1 است ، مثلاً " $y_1 = c_1x_1$ و $y_2 = c_2x_1$ ، که در آنها c_1 و c_2 هر دو 0 نیستند . با ضرب y_1 در c_2 و y_2 در c_1 و تفریقشان از هم ، داریم

$$c_2y_1 - c_1y_2 = O .$$

این یک نمایش نابدیهی O است ؛ در نتیجه، y_1 و y_2 وابسته هستند . این مطلب قضیه را وقتی $k = 1$ ثابت می‌کند .

حال فرض‌کنیم قضیه برای $k - 1$ درست باشد ، و ثابت می‌کنیم برای k نیز چنین است . مجموعه‌ای مرکب از $k + 1$ عنصردر $L(S)$ ، مثلاً "مجموعهٔ $T = \{y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}\}$، را اختیار می‌کنیم . می‌خواهیم ثابت کنیم T وابسته است . گوییم چون هر y_i در $L(S)$ است ، به‌ازای هر $i = 1, 2, \ldots, k + 1$ می‌توان نوشت

$$y_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j . \qquad (۴ \cdot ۱)$$

تمام a_{i1} ها راکه در x_1 ضرب شده‌اند امتحان می‌کنیم و برهان را ، بنابرآنکه این اسکالرها همه صفرند یا نه، به دو حالت تقسیم می‌کنیم :

حالت ۱ . به‌ازای هر $i = 1, 2, \ldots, k + 1$ ، $a_{i1} = 0$. دراین‌حالت، مجموع (۴۰۱)

شامل x_1 نیست؛ در نتیجه، هر y_i در T در پیمای خطی مجموعهٔ $S' = \{x_2, \ldots, x_k\}$ است. امـا S' مستقل‌است‌واز $k-1$ عنصر تشکیل شده است. بنابه فرض استقرا، قضیـه برای $k-1$ درست‌است، پس T وابسته می‌باشد. این قضیه را درحالت ۱ ثابت خواهد کـرد.

حالت ۲. همهٔ a_{i1} ها صفر نیستند. فرض‌کنیم $a_{11} \neq 0$. (در صورت لزوم، می‌توان y هارا مجددا" شماره‌گذاری کرد.) با فرض $i = 1$ در (۴۰۱) و ضرب دوطرف آن در c_i، که $c_i = a_{i1}/a_{11}$، داریم

$$c_i y_1 = a_{i1} x_1 + \sum_{j=2}^{k} c_i a_{1j} x_j .$$

اگر از این معادلهٔ (۴۰۱) را کم کنیم، به‌ازای $i = 2, \ldots, k+1$ خواهیم داشت

$$c_i y_1 - y_i = \sum_{j=2}^{k} (c_i a_{1j} - a_{ij}) x_j .$$

این‌معادله‌هریک از k عنصر $c_i y_1 - y_i$ را به‌صورت ترکیبی خطی از $k-1$ عنصرمستقل $x_2, \ldots, x_k$ بیان می‌کند. بنابه فرض استقرا، k عنصر $c_i y_1 - y_i$ باید وابسته باشند. پس، به‌ازای اسکالرهایی چون $t_2, \ldots, t_{k+1}$ که همه صفر نیستند، داریم

$$\sum_{i=2}^{k+1} t_i (c_i y_1 - y_i) = O ,$$

که از آن خواهیم داشت

$$\left(\sum_{i=2}^{k+1} t_i c_i \right) y_1 - \sum_{i=2}^{k+1} t_i y_i = O .$$

اما این یک ترکیب خطی نابدیهی از $y_1, \ldots, y_{k+1}$ است که عنصر صفر را نمایش می‌دهد. پس عنصرهای $y_1, \ldots, y_{k+1}$ باید وابسته باشند. این برهان را تمام خواهد کرد.

۸۰۱ پایه‌ها و بعد

تعریف. مجموعهٔ متناهی S از عنصرها درفضای خطی V را یک ***پایهٔ متناهی*** V گوییم هرگاه S مستقل بوده‌و V را بپیماید. V را ***با بعد متناهی*** نامیم هرگاه V پایهٔ متناهی داشته و یا فقط‌از O تشکیل شده باشد. در غیر این‌صورت، V ***با بعد نامتناهی*** خوانده

خواهد شد .

قضیهٔ ۱ ۰ ۶ ۰ هرگاه V یک فضای خطی با بعد متناهی باشد ، پایه‌های متناهی V یک تعداد عنصر خواهند داشت .

برهان . فرض کنیم S و T دو پایهٔ متناهی از V باشند . همچنین ، S از k عنصر و T از m عنصر تشکیل شده باشد . چون S مستقل است و V را می‌پیماید ، قضیهٔ ۱ ۰ ۵ می‌گوید که هر مجموعه از $k+1$ عنصر در V وابسته است . لذا ، هر مجموعه با بیش از k عنصر در V وابسته می‌باشد . چون T یک مجموعهٔ مستقل است ، باید داشته باشیم $m \leq k$. همین استدلال با تعویض S و T با هم نشان می‌دهد که $k \leq m$. بنابراین، $k = m$.

تعریف . اگر فضای خطی V یک پایهٔ n عنصری داشته باشد ، عدد صحیح n **بعد** V نامیده می‌شود ، و می‌نویسیم $n = \dim V$. چنانچه $V = \{O\}$ ، می‌گوییم V دارای بعد 0 است .

مثال ۱ . فضای V_n دارای بعد n است . یک پایه عبارت است از مجموعهٔ n برداریکهٔ مختصات .

مثال ۲ . فضای تمام چند جمله‌ایهای $p(t)$ از درجهٔ نابیشتر از n دارای بعد $n+1$ است . یک پایه عبارت است از مجموعهٔ $n+1$ چندجمله‌ای $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. هرچند جمله‌ای از درجهٔ نابیشتر از n یک ترکیب خطی از این $n+1$ چند جمله‌ای است .

مثال ۳ . فضای جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل $y'' - 2y' - 3y = 0$ دارای بعد 2 است . یک پایه از دو تابع $u_1(x) = e^{-x}$ و $u_2(x) = e^{3x}$ تشکیل شده است . هر جواب ترکیبی خطی از این دو تابع است .

مثال ۴ . فضای تمام چند جمله‌ایهای $p(t)$ با بعد نامتناهی است . با آنکه مجموعهٔ

نامتناهی $\{1, t, t^2, \ldots\}$ این فضا را می‌پیماید، هیچ مجموعهٔ **متناهی** از چند جمله‌ایها فضا را نخواهد پیمود.

قضیهٔ ۷۰۱ . ***فرض کنیم V یک فضای خطی با بعد متناهی بوده و $\dim V = n$. در این صورت،***

(آ) هرمجموعه از عنصرهای مستقل در V زیر مجموعه‌ای از یک پایهٔ V است؛

(ب) هرمجموعه از n عنصر مستقل یک پایهٔ V می‌باشد.

برهان. برای اثبات (آ)، فرض کنیم $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ مجموعهٔ مستقلی از عناصر V باشد. اگر $L(S) = V$ ، S یک پایه است. درغیر این‌صورت، عنصری چون y در V وجود دارد که در $L(S)$ نیست. این عنصر را به S می‌افزاییم و مجموعهٔ جدید $S' = \{x_1, \ldots, x_k, y\}$ را درنظر می‌گیریم. اگراین مجموعه وابسته می‌بود، اسکالرهایی چون $c_1, \ldots, c_{k+1}$ که همه صفر نیستند وجود می‌داشت بطوری که

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i + c_{k+1} y = O .$$

اما $c_{k+1} \neq 0$ ، زیرا $x_1, \ldots, x_k$ مستقل هستند. پس می‌شد این معادله را نسبت به y حل کرد و دید که $y \in L(S)$ ، متناقض با اینکه y در $L(S)$ نیست. لذا، مجموعهٔ S' مستقل ولی شامل $k + 1$ عنصر است. اگر $L(S') = V$ ، S' یک پایه است و، چون S زیر مجموعهٔ S' است، قسمت (آ) ثابت می‌شود. اگر S' پایه نباشد، می‌توان با S' مثل S استدلال کرد و مجموعهٔ جدید S'' را که $k + 2$ عنصر دارد و مستقل است به‌دست آورد. چنانچه S'' پایه باشد، قسمت (آ) ثابت می‌شود. در غیراین صورت، عمل را ادامه خواهیم داد. در چندمرحله باید به یک پایه برسیم، زیرا درغیر این‌صورت مآلا" مجموعهٔ مستقلی با $n + 1$ عنصر به‌دست می‌آید، که با قضیهٔ ۵۰۱ تعارض خواهد داشت. بنابراین، قسمت (آ) ثابت شده است.

برای اثبات (ب)، فرض‌کنیم S یک‌مجموعهٔ مستقل با n عنصر باشد. بنابرقسمت (آ)، S زیر مجموعهٔ یک پایه، مثلا" B ، است. اما، طبق قضیهٔ ۶۰۱ ، B درست n عنصر دارد؛ در نتیجه، $S = B$.

۹.۱ مولفه‌ها

فرض کنیم V یک فضای خطی با بعد n باشد، و پایه‌ای را با عنصرهای $e_1, \ldots, e_n$ و با همین ترتیب درنظر می‌گیریم. این پایهٔ مرتب را با n تایی $(e_1, \ldots, e_n)$ نشان می‌دهیم. اگر $x \in V$، می‌توان x را به‌صورت ترکیبی خطی از عنصرهای این پایه نوشت:

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i . \qquad (۵.۱)$$

ضرایب این معادله n تایی مرتب $(c_1, \ldots, c_n)$ از اعداد را که به‌طور منحصر بفرد به‌وسیلهٔ x مشخص می‌شوند معین می‌کنند. در واقع، اگر نمایش دیگری از x به‌صورت ترکیبی خطی از $e_1, \ldots, e_n$ داشته باشیم، مثلاً $x = \sum_{i=1}^{n} d_i e_i$، با تفریق این از (۵.۱) داریم $\sum_{i=1}^{n} (c_i - d_i)e_i = O$. اما چون عناصر پایه مستقل‌اند، این ایجاب می‌کند که به‌ازای هر i، $c_i = d_i$؛ در نتیجه، خواهیم داشت $(c_1, \ldots, c_n) = (d_1, \ldots, d_n)$.

مؤلفه‌های n تایی مرتب $(c_1, \ldots, c_n)$ که با معادلهٔ (۵.۱) مشخص می‌شوند **مؤلفه‌های** x **نسبت به پایهٔ مرتب** $(e_1, \ldots, e_n)$ نام دارند.

۱۰.۱ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، فرض کنید S مجموعهٔ تمام (x, y, z) هایی در V_3 باشد که مؤلفه‌هایشان در شرط داده شده صدق می‌کنند. تعیین کنید آیا S زیر فضای V_3 هست یا نه. در صورت زیر فضا بودن S، $\dim S$ را حساب کنید.

۱. $x = 0$.

۲. $x + y = 0$.

۳. $x + y + z = 0$.

۴. $x = y$.

۵. $x = y = z$.

۶. $x = y$ یا $x = z$.

۷. $x^2 - y^2 = 0$.

۸. $x + y = 1$.

۹. $y = 2x$ و $z = 3x$.

۱۰. $x + y + z = 0$ و $x - y - z = 0$.

فرض کنید P_n فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی از درجهٔ نابیشتر از n باشد، که n ثابت است. در تمرینهای ۱۱ تا ۲۰، S را مجموعهٔ تمام چند جمله‌ایهای f در P_n بینگارید که در شرط داده شده صدق می‌کنند. تعیین کنید آیا S زیر فضای P_n هست یا نه. درصورت زیر فضا بودن S، $\dim S$ را حساب کنید.

۱۱. $f(0) = 0$.

۱۲. $f'(0) = 0$.

۱۳ . $f''(0) = 0$.　　۱۴ . $f(0) + f'(0) = 0$.

۱۵ . $f(0) = f(1)$.　　۱۶ . $f(0) = f(2)$.

۱۷ . f زوج است .　　۱۸ . f فرد است .

۱۹ . درجهٔ f از k ، که $k < n$ ، نابیشتر است یا $f = 0$

۲۰ . درجهٔ f مساوی k ، که $k < n$ ، است یا $f = 0$.

۲۱ . زیر فضایی را در فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(t)$ وصف کنید که به وسیلهٔ هریک از زیر مجموعه‌های زیر از چند جمله‌ایها پیموده می‌شود ، و بعد این زیرفضا را مشخص نمایید :

(آ) $\{1, t^2, t^4\}$ ؛ (ب) $\{t, t^3, t^5\}$ ؛ (پ) $\{t, t^2\}$ ؛ (ت) $\{1 + t, (1 + t)^2\}$.

۲۲ . درایـــن تمرین ، $L(S)$ زیرفضایی است که به‌وسیلهٔ زیر مجموعهٔ S از فضای خطی V پیموده می‌شود . احکام (آ) تا (ج) را اثبات نمایید .

(آ) $S \subseteq L(S)$.

(ب) اگر $S \subseteq T \subseteq V$ و T زیر فضای V باشد ، $L(S) \subseteq T$. این خاصیت این‌طور توصیف می‌شـود کـه می‌گویند $L(S)$ **کوچکترین** زیرفضایی از V است که شامل S می‌باشد .

(پ) زیرمجموعهٔ S از V زیرفضای V است اگر و فقط اگر $L(S) = S$.

(ت) اگر $S \subseteq T \subseteq V$ ، $L(S) \subseteq L(T)$.

(ث) اگر S و T زیرفضاهای V باشند ، $S \cap T$ نیز چنین است .

(ج) اگر S و T زیرمجموعه‌های V باشند ، $L(S \cap T) \subseteq L(S) \cap L(T)$.

(چ) مثالی بزنید که در آن $L(S \cap T) \neq L(S) \cap L(T)$.

۲۳ . فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی باشد که‌برخط حقیقی تعریف شده‌اند . تعیین‌کنیدآیا زیر مجموعه‌های زیراز V وابسته‌اند یا مستقل . بعد زیر فضای پیموده شده به‌وسیلهٔ هر مجموعه را حساب کنید .

(آ) $\{1, e^{ax}, e^{bx}\}, a \neq b$.　　(ب) $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$.

(پ) $\{1, e^{ax}, xe^{ax}\}$.　　(ت) $\{e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}\}$.

(ث) $\{e^x, e^{-x}, \cosh x\}$.　　(ج) $\{\cos x, \sin x\}$.

(چ) $\{\cos^2 x, \sin^2 x\}$.　　(ح) $\{1, \cos 2x, \sin^2 x\}$.

(خ) $\{\sin x, \sin 2x\}$.　　(د) $\{e^x \cos x, e^{-x} \sin x\}$.

۲۴ . فرض کنید V یک فضای خطی با بعد متناهی باشد، و S را زیرفضایی از V بینگارید. هریک از احکام زیر را ثابت نمایید:

(آ) S با بعد متناهی است و $\dim S \leq \dim V$ ؛

(ب) $\dim S = \dim V$ اگر و فقط اگر $S = V$ ؛

(پ) هرپایهٔ S بخشی از یک پایهٔ V است؛

(ت) یک پایهٔ V لازم نیست پایه‌ای از S را دربر داشته باشد.

۱۱۰۱ ضربهای داخلی، فضاهای اقلیدسی. نرمها

در هندسهٔ اقلیدسی معمولی، آن خواصی که به اندازه‌گیری طول پاره‌خطها و زوایای بین خطوط تکیه دارند خواص **متری** نامیده می‌شوند. دربررسی ما از V_n، طولها و زوایا به‌وسیلهٔ ضرب نقطه‌ای تعریف شدند. حال این مفهومها را به فضاهای خطی کلیتر تعمیم می‌دهیم. ابتدا تعمیم ضرب نقطه‌ای‌را، که ***ضرب داخلی*** نام دارد، معرفی کرده، سپس طول و زاویه را برحسب ضرب داخلی تعریف می‌کنیم.

در جلد یک حاصلضرب نقطه‌ای دوبردار $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ در V_n با فرمول

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{۶۰۱}$$

تعریف شد. در فضای خطی کلی، به‌جای $x \cdot y$ می‌نویسیم (x, y)، و ضرب را، به عوض با یک فرمول، به‌طور اصل موضوعی تعریف می‌کنیم. یعنی، چند خاصیت را که می‌خواهیم ضربهای داخلی داشته باشند بیان می‌کنیم و آنها را به‌عنوان ***اصول موضوع*** درنظر می‌گیریم.

تعریف. گوییم فضای خطی و حقیقی V ضرب داخلی دارد هرگاه به هر جفت عنصر x و y در V عدد حقیقی منحصر بفردی چون (x, y) مربوط شده باشد که در اصول موضوع زیر به‌ازای هر x, y, z از V و هر اسکالر حقیقی c صدق نماید:

(۱) $(x, y) = (y, x)$ (تعویضپذیری یا تقارن)؛

(۲) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ (پخشپذیری یا خطی)؛

(۳) $c(x, y) = (cx, y)$ (شرکتپذیری یا همگنی)؛

(۴) اگر $x \neq O$، $(x, x) > 0$ (مثبتی).

یک فضای خطی حقیقی با ضرب داخلی یک ***فضای اقلیدسی حقیقی*** نامیده می‌شود.

تذکر. با فرض $c = 0$ در (۳) می‌بینیم که به‌ازای هر y ، $(O, y) = 0$.

در یک فضای خطی مختلط ، حاصل ضرب داخلی (x, y) عدد مختلطی است که در همان اصول موضوع صادق برای ضرب داخلی حقیقی صدق می‌کند ، جز آنکه اصل موضوع تقارن با رابطهٔ

$$(x, y) = \overline{(y, x)} \qquad \text{(تقارن هرمیتی*)} \qquad (1')$$

که در آن $\overline{(y, x)}$ مزدوج مختلط (y, x) است ، عوض می‌شود . دراصل موضوع همگنی ، ضریب اسکالر c می‌تواند هر عدد مختلط باشد . از اصل موضوع همگنی و (۱′) رابطهٔ لنگهٔ

$$(x, cy) = \overline{(cy, x)} = \bar{c}\overline{(y, x)} = \bar{c}(x, y) \qquad (3')$$

به‌دست خواهد آمد .

هر فضای خطی مختلط دارای ضرب داخلی یک ***فضای اقلیدسی مختلط*** نام دارد . (گاهی اصطلاح ***فضای یکه‌ای*** نیز بدان اطلاق می‌شود .) یک مثال فضای برداری مختلط $V_n(\mathrm{C})$ است که در بخش ۱۲.۱۶ جلد یک به اختصار از آن بحث شد .

با آنکه عمدتاً به فضاهای اقلیدسی حقیقی نظر داریم ، قضایای این فصل برای فضاهای اقلیدسی مختلط نیز معتبرند . هرگاه اصطلاح فضای اقلیدسی را بی‌توضیح بیشتر به‌کاربردیم ، فرض است که فضا می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد .

خواننده باید تحقیق کند که هریک از مثالهای زیر در تمام اصول موضوع ضرب داخلی صدق می‌کند .

مثال ۱. در V_n فرض می‌کنیم $(x, y) = x \cdot y$ ، یعنی حاصل ضرب نقطه‌ای معمولی x و y ، باشد .

مثال ۲. اگر $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ دو بردار در V_2 باشند ، (x, y) را با فرمول

---

* ***به افتخار شارل هرمیت*** (Charles Hermite , 1822-1901) ، ***ریاضیدان فرانسوی ، که در جبر و آنالیز تحقیقات زیادی کرده است .***

$$(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

تعریف می‌کنیم . ایــن مثال نشان می‌دهد که در یک فضای خطی ممکن است بیش از یک ضرب داخلی وجود داشته باشد .

مثال ۳ . فرض کنیم $C(a, b)$ فضای خطی تمام توابع حقیقی و پیوسته بر بازهٔ $[a, b]$ باشد . حاصل ضرب داخلی دو تابع f و g را با فرمول

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\, dt$$

تعریف می‌کنیم . این فرمول شبیه معادلهٔ (۱ . ۶) است ، که حاصل ضرب نقطه‌ای دوبردار در V_n را تعریف می‌کرد . مقادیر تابعی $f(t)$ و $g(t)$ نقش مؤلفه‌های x_i و y_i را دارند ، و انتگرالگیری جای جمعبندی را گرفته است .

مثال ۴ . در فضای $C(a, b)$ تعریف می‌کنیم

$$(f, g) = \int_a^b w(t)f(t)g(t)\, dt,$$

که در آن w تابع مثبت ثابتی در $C(a, b)$ است . تابع w **تابع وزن** نامیده می‌شود . در مثال ۳، به‌ازای هر t داریم $w(t) = 1$.

مثال ۵ . در فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی تعریف می‌کنیم

$$(f, g) = \int_0^\infty e^{-t}f(t)g(t)\, dt .$$

این انتگرال مجازی، بخاطر سازهٔ نمایی ، به‌ازای هر دو چند جمله‌ای f و g همگراست .

قضیهٔ ۱ . ۸ . *در فضای اقلیدسی V ، هر ضرب داخلی در نامساوی کشی [1] ــ شوارتز [2] صدق می‌کند :*

به‌ازای هر x و y در V ، $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$.

بعلاوه ، تساوی برقرار است اگر و فقط اگر x و y وابسته باشند .

برهان . اگر $x = O$ یا $y = O$ ، نتیجه واضح است . پس می‌توان فرض کرد که هردوی x

1. Cauchy 2. Schwarz

و y ناصفر باشند. فرض کنیم $z = ax + by$ ، که در آن a و b اسکالرهایی هستند که بعدا" مشخص می‌شوند. به‌ازای هر a و b داریم $(z, z) \geq 0$. هرگاه این نامساوی را برحسب x و y و با انتخاب مناسبی از a و b بنویسیم، نامساوی کشی ـ شوارتز را خواهیم داشت.

برای بیان (z, z) برحسب x و y ، از خواص (‎۱′‎)، (۲)، و (‎۳′‎) استفاده می‌کنیم:

$$(z, z) = (ax + by, ax + by) = (ax, ax) + (ax, by) + (by, ax) + (by, by)$$
$$= a\bar{a}(x, x) + a\bar{b}(x, y) + b\bar{a}(y, x) + b\bar{b}(y, y) \geq 0 .$$

با فرض $a = (y, y)$ و حذف سازهٔ مثبت (y, y) در این نامساوی داریم

$$(y, y)(x, x) + \bar{b}(x, y) + b(y, x) + b\bar{b} \geq 0 .$$

حال فرض می‌کنیم $b = -(x, y)$. دراین‌صورت، $\bar{b} = -(y, x)$ ونامساوی آخر به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$(y, y)(x, x) \geq (x, y)(y, x) = |(x, y)|^2 .$$

این نامساوی کشی ـ شوارتز را ثابت می‌کند. تساوی در سراسر برهان برقرار است اگر و فقط اگر $z = O$. این، به نوبهٔ خود، برقرار است اگر و فقط اگر x و y وابسته باشند.

مثال. با اعمال قضیهٔ ۱.۸ درمورد $C(a, b)$ مجهز به‌ضرب داخلی $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$ ، می‌بینیم که نامساوی کشی ـ شوارتز به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right).$$

از ضرب داخلی می‌توان برای معرفی مفهوم متری طول در هر فضای اقلیدسی استفاده کرد.

تعریف. در فضای اقلیدسی V ، عدد نامنفی $\|x\|$ ، که با معادلهٔ

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

تعریف می‌شود، **نرم عنصر** x نام دارد.

نامساوی کشی ـ شوارتز برحسب نرمها شکل زیر را خواهد یافت:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\| .$$

چون ضرب داخلی به طرق مختلف تعریف می‌شود ، نرم یک عنصر به انتخاب ضرب داخلی بستگی دارد . ما این عدم یکتایی را انتظار داشتیم . این امر مشابه آن است که می‌توان ، بسته به انتخاب مقیاس یا واحد اندازه‌گیری ، هر عدد را طول یک پاره‌خط دانست . قضیهٔ زیر خواص اساسی نرمها را که به ضرب داخلی انتخاب شده بستگی ندارند به‌دست می‌دهد .

قضیهٔ ۹.۱ . ***در یک فضای اقلیدسی ، هر نرم به‌ازای هر دو عنصر x و y و هر اسکالر c خواص زیر را دارد :***

(آ) ***اگر*** $x = O$ ، $\|x\| = 0$ ؛

(ب) ***اگر*** $x \neq O$ ، $\|x\| > 0$ ***(مثبتی)*** ؛

(پ) $\|cx\| = |c| \, \|x\|$ ***(همگنی)*** ؛

(ت) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ***(نامساوی مثلثی)*** .

در (ت) تساوی در صورتی برقرار است که $x = O$ ***یا*** $y = O$ ***یا به‌ازای*** $c > 0$ ***ای*** ، $y = cx$.

برهان . خواص (آ) و (ب) و (پ) فوراً از اصول موضوع ضرب داخلی نتیجه می‌شوند . برای اثبات (ت) توجه می‌کنیم که

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x)$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + \overline{(x, y)} .$$

مجموع $(x, y) + \overline{(x, y)}$ حقیقی است . نامساوی کشی ـ شوارتز نشان می‌دهد که $|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|$ و $|\overline{(x, y)}| \leq \|x\| \, \|y\|$. درنتیجه ، داریم

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

این (ت) را ثابت می‌کند . وقتی $y = cx$ ، که در آن $c > 0$ ، خواهیم داشت

$$\|x + y\| = \|x + cx\| = (1 + c) \, \|x\| = \|x\| + \|cx\| = \|x\| + \|y\| .$$

تعریف . در فضای اقلیدسی حقیقی V ، زاویهٔ بین دو عنصر ناصفر x و y مساوی عددی مانند θ در بازهٔ $0 \leq \theta \leq \pi$ تعریف می‌شود که در معادلهٔ

$$\cos\theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \ \|y\|} \qquad (۷۰۱)$$

صدق می‌کند .

تذکر . نامساوی کشی ــ شوارتز نشان می‌دهد که خارج قسمت سمت راست (۷۰۱) دربازهٔ $[-1, 1]$ واقع است ؛ در نتیجه ، فقط یک θ در $[0, \pi]$ هست کـه کسینوس آن مساوی این خارج قسمت است .

۱۲۰۱ تعامد در فضای اقلیدسی

تعریف . در فضای اقلیدسی V ، دو عنصر x و y را **متعامد** گوییم هرگاه حاصل ضرب داخلی آنها صفر باشد . زیر مجموعهٔ S از V را **متعامد** نامیم هرگاه بـه‌ازای هر جفت‌عنصر متمایز x و y در S ، $(x, y) = 0$. یک مجمــوعهٔ متعامد را **متعامدیکه** نامیم هرگاه هر عنصر آن نرم یک داشته باشد .

عنصر صفر به هر عنصر V متعامد است ؛ این تنـها عنصری است که به خودش متعامد است . قضیهٔ زیر رابطهٔ تعامد را با استقلال نشان می‌دهد .

قضیهٔ ۱۰۰۱ . ***در فضای اقلیدسی V ، هرمجموعهٔ متعامد از عناصر ناصفر مستقل است . درحالت خــاص ، در فضای اقلیدسی و با بعد متناهی V که $\dim V = n$ ، هر مجموعهٔ متعامد مرکب از n عنصرناصفر یک پایهٔ V می‌باشد .***

برهان . فرض کنیم S یک مجموعهٔ متعامد از عناصر ناصفر در V بوده ، و ترکیبی خطی و متناهی از عناصر S مساوی صفر باشد ، مثلاً" داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = O ,$$

که در آن هر $x_i \in S$. با ضرب داخلی دو طرف این رابطه در x_1 و استفاده از این امر که اگــر $i \neq 1$ ، $(x_1 , x_i) = 0$ ، خواهیــم داشت $c_1(x_1, x_1) = 0$. اما چون $x_1 \neq O$ ، $(x_1 , x_1) \neq 0$ ؛ در نتیجه ، $c_1 = 0$. با تکرار این استدلال برای x_j بـه‌جای x_1 ، معلوم می‌شود که هر $c_j = 0$. این ثابت می‌کند که S مستقل است . اگر $\dim V = n$ و S از n

عنصر تشکیل شده باشد، قضیهٔ ۷۰۱ (ب) نشان می‌دهد که S یک پایهٔ V می‌باشد.

مثال. فرض کنیم در فضای خطی و حقیقی $C(0, 2\pi)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ ، S مجموعهٔ توابع مثلثاتی $\{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$u_0(x) = 1$ ؛ و به‌ازای $n = 1, 2, \ldots$ ، $u_{2n-1}(x) = \cos nx$ و $u_{2n}(x) = \sin nx$.

اگر $m \neq n$ ، روابط تعامدی

$$\int_0^{2\pi} u_n(x)u_m(x)\,dx = 0$$

را داریم. در نتیجه، S یک مجموعهٔ متعامد است. چون هیچ عضو S عنصر صفر نیست، S مستقل می‌باشد. نرم هر عنصر S را می‌توان به‌آسانی حساب کرد. داریم $(u_0, u_0) = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$ و، به‌ازای $n \geq 1$ ،

$$(u_{2n-1}, u_{2n-1}) = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi, \qquad (u_{2n}, u_{2n}) = \int_0^{2\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi.$$

بنابراین، $\|u_0\| = \sqrt{2\pi}$ و، به‌ازای $n \geq 1$ ، $\|u_n\| = \sqrt{\pi}$. با تقسیم هر u_n بر نرمش، مجموعهٔ متعامدیکهٔ $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ به‌دست می‌آید که در آن $\varphi_n = u_n/\|u_n\|$. لذا، خواهیم داشت

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ و، به‌ازای } n \geq 1 \text{ ، } \varphi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \text{ و } \varphi_{2n}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} .$$

در بخش ۱۴۰۱ ثابت می‌کنیم هر فضای اقلیدسی با بعد متناهی دارای پایهٔ متعامد است. قضیهٔ بعدی طرز محاسبهٔ مؤلفه‌های یک عنصر را نسبت به این پایه نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۱۱۰۱ . ***فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی n بوده، و $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ یک پایهٔ متعامد V باشد. اگر x به صورت ترکیبی خطی از عناصر پایه بیان شده باشد، مثلاً***

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i , \tag{۸۰۱}$$

مولفه‌های آن نسبت به پایهٔ مرتب $(e_1, \ldots, e_n)$ از فرمولهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$\text{به‌ازای } j = 1, 2, \ldots, n \text{ ، } c_j = \frac{(x, e_j)}{(e_j, e_j)} . \tag{۹۰۱}$$

بخصوص، اگر S یک پایهٔ متعامدیکه باشد، هر c_j از

$$c_j = (x, e_j) \tag{۱۰۰۱}$$

به‌دست خواهد آمد.

برهان. با ضرب داخلی دوطرف (۸۰۱) در e_j داریم

$$(x, e_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i(e_i, e_j) = c_j(e_j, e_j)$$

چراکه‌اگر $i \neq j$ ، $(e_i, e_j) = 0$. ازاین (۹۰۱) نتیجه می‌شود، و وقتی $(e_j, e_j) = 1$ ، (۱۰۰۱) را خواهیم داشت.

چنانچه $\{e_1, \ldots, e_n\}$ یک پایهٔ متعامد یکه باشد، معادلهٔ (۹۰۱) را می‌توان به شکل

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i \tag{۱۱۰۱}$$

نوشت.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که در یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی و با پایهٔ متعامد یکه، حاصل ضرب داخلی دو عنصر را می‌توان برحسب مؤلفه‌های آنها حساب کرد.

قضیهٔ ۱۲۰۱ . فرض‌کنیم V یک‌فضای‌اقلیدسی با بعد متناهی n بوده، و $\{e_1, \ldots, e_n\}$ یک پایهٔ متعامد یکهٔ آن باشد. دراین‌صورت، به‌ازای هر جفت عنصر x و y در V داریم

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)\overline{(y, e_i)} \qquad \text{(فرمول پارسوال [1])} \tag{۱۲۰۱}$$

بخصوص، وقتی $x = y$ ، خواهیم داشت

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2. \tag{۱۳۰۱}$$

1. Parseval

برهان. با ضرب دوطرف معادلهٔ (۱۱۰۱) در y واستفاده از خاصیت خطی ضرب داخلی، (۱۲۰۱) به‌دست می‌آید. وقتی $x = y$ ، معادلهٔ (۱۲۰۱) به (۱۳۰۱) تحویل می‌شود.

تذکر. معادلهٔ (۱۲۰۱) به‌افتخار پارسوال (حدود ۱۸۳۶ – ۱۷۷۶)، که این نوع فرمول را در یک فضای تابعی خاص به‌دست آورد، نامگذاری شده است. معادلهٔ (۱۳۰۱) تعمیم قضیهٔ فیثاغورس[1] است.

۱۳۰۱ تمرین

۱. فرض کنید $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ بردارهای دلخواهی در V_n باشند. در هر حالت، که (x, y) با فرمولی تعریف شده، معین کنید که (x, y) یک ضرب داخلی برای V_n هست یا نه. در حالتی که نیست، بگویید کدام اصول موضوع برقرار نیستند:

(آ) $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i |y_i|$ ؛ (ب) $(x, y) = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|$ ؛

(پ) $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j$ ؛ (ت) $(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2\right)^{1/2}$ ؛

(ث) $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

۲. فرض کنید سه اصل موضوع اول ضرب داخلی حقیقی (تقارن، خطی، همگنی) را نگهداشته و اصل چهارم را با این اصل جدید عوض کرده باشیم: (′۴) : $(x, x) = 0$ اگر و فقط اگر $x = O$. ثابت کنید یا به ازای هر $x \neq O$ ، $(x, x) > 0$ یا به ازای هر $x \neq O$ ، $(x, x) < 0$.

[**راهنمایی.** فرض کنید به‌ازای $x \neq O$ ی $(x, x) > 0$ و به ازای $y \neq O$ ی $(y, y) < 0$. در فضای پیموده شده به وسیلهٔ $\{x, y\}$ عنصری مانند $z \neq O$ بیابید که $(z, z) = 0$.]

ثابت کنید که احکام تمرینهای ۳ تا ۷ به‌ازای هر x و y در یک فضای اقلیدسی

1. Pythagoras

حقیقی معتبرند .

۳ . $(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $\|x + y\| = \|x - y\|$.

۴ . $(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

۵ . $(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر به‌ازای هر c ی حقیقی $\|x + cy\| \geq \|x\|$.

۶ . $(x + y, x - y) = 0$ اگر و فقط اگر $\|x\| = \|y\|$.

۷ . هرگاه عنصرهای ناصفر x و y با هم زاویهٔ θ بسازند ، آنگاه

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\|x\|\,\|y\| \cos \theta .$$

۸ . در فضای خطی و حقیقی $C(1, e)$ ، ضرب داخلی را با معادلهٔ

$$(f, g) = \int_1^e (\log x) f(x) g(x)\, dx$$

تعریف کنید .

(آ) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ ، $\|f\|$ را محاسبه کنید .

(ب) چند جمله‌ای خطی $g(x) = a + bx$ را که به تابع ثابت $f(x) = 1$ متعامد است پیدا کنید .

۹ . در فضای خطی و حقیقی $C(-1, 1)$ قرار دهید $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt$ ، و سه‌تابع u_1, u_2, u_3 را که با

$$u_1(t) = 1, \qquad u_2(t) = t, \qquad u_3(t) = 1 + t$$

داده شده‌اند در نظر بگیرید . ثابت کنید دوتای آنها متعامدند ، دوتا با هم زاویهٔ $\pi/3$ می‌سازند ، و دوتا با هم زاویهٔ $\pi/6$ می‌سازند .

۱۰ . در فضای خطی P_n مرکب از تمام چند جمله‌ایهای حقیقی با درجهٔ نابیشتر از n تعریف کنید

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$$

(آ) ثابت کنید (f, g) یک ضرب داخلی برای P_n است .

(ب) (f, g) را وقتی $f(t) = t$ و $g(t) = at + b$ محاسبه کنید .

(پ) هرگاه $f(t) = t$ ، تمام چند جمله‌ایهای خطی متعامد به f را بیابید .

۱۱ . در فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی تعریف‌کنید $(f, g) = \int_0^\infty e^{-t} f(t) g(t)\, dt$.

(آ) ثابت کنید این انتگرال مجازی به ازای تمام چند جمله‌ایهای f و g به‌طور

مطلق همگراست .

(ب) اگر به ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$ ، $x_n(t) = t^n$ ، ثابت‌کنید $(x_n, x_m) = (m+n)!$.

(پ) (f,g) را وقتی $f(t) = (t+1)^2$ و $g(t) = t^2 + 1$ محاسبه کنید .

(ت) تمام چند جمله‌ایهای خطی $g(t) = a + bt$ و متعامد به $f(t) = 1 + t$ را پیدا کنید .

۱۲ . در فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی ، تعیین کنید (f,g) که با فرمولی تعریف شده یک ضرب داخلی هست یا نه . درحالتی که نیست ، نشان دهید کدام اصول نقض شده‌اند . در (پ) ، f' و g' مشتق هستند :

(آ) $(f,g) = f(1)g(1)$ ؛ (ب) $(f,g) = \left| \int_0^1 f(t)g(t)\, dt \right|$ ؛

(پ) $(f,g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)\, dt$ ؛ (ت) $(f,g) = \left(\int_0^1 f(t)\, dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\, dt\right)$.

۱۳ . فرض کنید V از تمام دنباله‌های نامتناهی $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی تشکیل شده که به ازای آنها سری Σx_n^2 همگراست . اگر $x = \{x_n\}$ و $y = \{y_n\}$ دو عنصر از V باشند ، تعریف کنید

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n .$$

(آ) ثابت کنید این سری به‌طور مطلق همگراست .

[**راهنمایی .** با استفاده‌ازنامساوی کشی ــ شوارتز ، مجموع $\sum_{n=1}^{M} |x_n y_n|$ راتخمین بزنید .]

(ب) ثابت کنید V یک فضای خطی با ضرب داخلی (x, y) است .

(پ) هرگاه به‌ازای $n \geq 1$ ، $x_n = 1/n$ و $y_n = 1/(n+1)$ ، (x, y) را محاسبه‌کنید .

(ت) هرگاه به‌ازای $n \geq 1$ ، $x_n = 2^n$ و $y_n = 1/n!$ ، (x, y) را محاسبه نمایید .

۱۴ . فرض کنید V مجموعهٔ تمام توابع حقیقی و پیوستهٔ f بر $[0, +\infty)$ باشد که انتگرال $\int_0^\infty e^{-t} f^2(t)\, dt$ همگراست ، و تعریف کنید $(f,g) = \int_0^\infty e^{-t} f(t)g(t)\, dt$.

(آ) ثابت کنید انتگرال معرف (f,g) به ازای هر جفت f و g در V به‌طورمطلق همگراست .

[**راهنمایی .** با استفاده از نامساوی کشی ــ شوارتز ، انتگرال $\int_0^M e^{-t} |f(t)g(t)|\, dt$ را تخمین بزنید .]

(ب) ثابت کنید V یک فضای خطی با ضرب داخلی (f,g) است.

(پ) هرگاه $f(t) = e^{-t}$ و $g(t) = t^n$ که $n = 0, 1, 2, \ldots$ ، (f,g) را محاسبه‌کنید.

۱۵ . ثابت‌کنید درهر فضای اقلیدسی مختلط، ضرب داخلی به‌ازای هر عنصر x ، y ، و z ، و هر a و b مختلط از خواص زیر برخوردار است:

(آ) $(ax, by) = a\bar{b}(x, y)$ ؛ (ب) $(x, ay + bz) = \bar{a}(x, y) + \bar{b}(x, z)$.

۱۶ . ثابت کنید در هر فضای اقلیدسی اتحادهای زیر برقرارند:

(آ) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + (y, x)$ ؛

(ب) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 2(x, y) + 2(y, x)$ ؛

(پ) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

۱۷ . ثابت کنید که اگر در فضای تمام توابع مختلط پیوسته بر بازهٔ $[a, b]$ ضرب داخلی با فرمول

$$(f,g) = \int_a^b w(t)f(t)\overline{g(t)}\, dt,$$

که در آن w یک تابع مثبت ثابت و پیوسته بر $[a, b]$ است، تعریف شود، این فضا به یک فضای یکه‌ای تبدیل می‌شود.

۱۴۰۱ ساختن مجموعه‌های متعامد. فرایند گرام[1] ــ اشمیت[2]

هر فضای خطی بــا بعد متناهی دارای پایهٔ متناهی است. چنانچه فضا اقلیدسی باشد، همیشه می‌توان یک پایهٔ **متعامد** را ساخت. این مطلب از یک قضیهٔ کلی نتیجه می‌شود که برهان آن طــرز ساختن مجموعه‌های متعــامد را در هر فضای اقلیدسی، با بعد متناهی یا نامتناهی، نشــان می‌دهد. ایــن ساختن بــه افتخار گرام (۱۹۱۶ — ۱۸۵۰) واشمیت (۱۹۲۱ — ۱۸۴۵) ***فرایند متعامد سازی گرام ــ اشمیت*** نامیده شده است.

قضیهٔ ۱۳۰۱ . قضیهٔ متعامد سازی. ***فرض‌کنیــم $x_1, x_2, \ldots$ دنبالـه‌ای متنـاهی یا نامتناهی ازعنصرها در فضای اقلیدسی V ، و $L(x_1, \ldots, x_k)$ زیر فضای پیموده شده به وسیلهٔ k عنصر اول بـاشد. دراین صورت، دنباله‌ای مانند $y_1, y_2, \ldots$ از عناصر V هست که به‌ازای هر عدد صحیح k از خواص زیر برخوردار است:***

---

1. Gram 2. Schmidt

(آ) عنصر y_k به هر عنصر زیر فضای $L(y_1, \ldots, y_{k-1})$ متعامد است ؛

(ب) زیرفضای پیموده شده به وسیلهٔ $y_1, \ldots, y_k$ همان زیر فضای پیموده شده به‌وسیلهٔ $x_1, \ldots, x_k$ است :

$$L(y_1, \ldots, y_k) = L(x_1, \ldots, x_k);$$

(پ) دنبالهٔ $y_1, y_2, \ldots$ ، صرف نظر از سازه‌های اسکالر ، منحصر بفرد است ؛ یعنی ، هرگاه $y'_1, y'_2, \ldots$ دنبالهٔ دیگری از عناصر V و دارای خواص (آ) و (ب) به‌ازای هر k باشد ، آنگاه به‌ازای هر k اسکالری مانند c_k هست بطوری که $y'_k = c_k y_k$.

برهان. عنصرهای $y_1, y_2, \ldots$ را به‌استقرا می‌سازیم . در شروع ، y_1 را مساوی x_1 می‌گیریم . حـال فـرض کنیم $y_1, \ldots, y_r$ را ساخته باشیم بطوری که (آ) و (ب) وقتی $k = r$ برقرار باشند ، و y_{r+1} را با معادلهٔ

$$y_{r+1} = x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} a_i y_i \tag{۱۴۰۱}$$

تعریف می‌کنیم ، کـه درآن باید اسکالرهای $a_1, \ldots, a_r$ تعیین شوند . به‌ازای $j \le r$ ، حاصل ضرب داخلی y_{r+1} در y_j مساوی است با

$$(y_{r+1}, y_j) = (x_{r+1}, y_j) - \sum_{i=1}^{r} a_i(y_i, y_j) = (x_{r+1}, y_j) - a_j(y_j, y_j),$$

چرا که اگر $j \ne i$ ، $(y_i, y_j) = 0$. اگر $y_j \ne O$ ، می‌توان با فرض

$$a_j = \frac{(x_{r+1}, y_j)}{(y_j, y_j)} \tag{۱۵۰۱}$$

y_{r+1} را به y_j متعامد ساخت . اگر $y_j = O$ ، y_{r+1} به‌ازای هر انتخابی از a_j به y_j متعامد است ، و در ایـن حالت a_j را صفر اختیار می‌کنیم . پس y_{r+1} تعریف شده است و به هر عنصر قبلی $y_1, \ldots, y_r$ متعامد است . لذا ، به هر عنصر زیر فضای

$$L(y_1, \ldots, y_r)$$

متعامد می‌باشد . این (آ) را وقتی $k = r + 1$ ثابت خواهد کرد .

برای اثبات (ب) وقتی $k = r + 1$ ، باید نشان داد که اگر $L(y_1, \ldots, y_r) = L(x_1, \ldots, x_r)$ ، $L(y_1, \ldots, y_{r+1}) = L(x_1, \ldots, x_{r+1})$. r عنصـر اول $y_1, \ldots, y_r$ در

$$L(x_1, \dots, x_r)$$

قرار دارند؛ و در نتیجه، در زیر فضای وسیعتر $L(x_1, \dots, x_{r+1})$ واقعند. عنصر جدید y_{r+1} که با (۱۴۰۱) داده شده تفاضل دو عنصر در $L(x_1, \dots, x_{r+1})$ است؛ در نتیجه، آن نیز در $L(x_1, \dots, x_{r+1})$ می‌باشد. این ثابت می‌کند که

$$L(y_1, \dots, y_{r+1}) \subseteq L(x_1, \dots, x_{r+1}).$$

معادلهٔ (۱۴۰۱) نشان می‌دهد که x_{r+1} مجموع دو عنصر در $L(y_1, \dots, y_{r+1})$ است؛ در نتیجه، استدلال مشابهی شمول در جهت دیگر را به‌ما می‌دهد:

$$L(x_1, \dots, x_{r+1}) \subseteq L(y_1, \dots, y_{r+1}).$$

این امر (ب) را وقتی $k = r + 1$ ثابت می‌کند. لذا، (آ) و (ب) به استقرا بر k ثابت شده‌اند.

بالاخره، (پ) را بــه استقرا بر k ثابت می‌کنیم. حالت $k = 1$ واضح است. پس فرض می‌کنیم (پ) به‌ازای $k = r$ درست باشد و عنصر y'_{r+1} را درنظر می‌گیریم. بخاطر (ب)، این عنصر در

$$L(y_1, \dots, y_{r+1})$$

است؛ و درنتیجه، می‌توان نوشت

$$y'_{r+1} = \sum_{i=1}^{r+1} c_i y_i = z_r + c_{r+1} y_{r+1} ,$$

که در آن $z_r \in L(y_1, \dots, y_r)$. می‌خواهیم ثابت کنیم $z_r = O$. گوییم، طبق خاصیت (آ)، هردوی y'_{r+1} و $c_{r+1}y_{r+1}$ به z_r متعامدند. پس تفاضلشان، z_r، نیز به z_r متعامد است. به عبارت دیگر، z_r به خودش متعامد است؛ و درنتیجه، $z_r = O$. این برهــان قضیهٔ متعامد سازی را تمام خواهد کرد.

در ساختن زیر، فرض کنید به‌ازای r ی داشته باشیم $y_{r+1} = O$. دراین صورت، از (۱۴۰۱) معلــوم می‌شود کــه x_{r+1} ترکیبی خطــی از $y_1, \dots, y_r$، و در نتیجـــه از $x_1, \dots, x_r$، است. پس عنصــرهای $x_1, \dots, x_{r+1}$ وابسته می‌باشند. به عبارت دیگر، اگر k عنصر اول $x_1, \dots, x_k$ مستقل باشند، عنصرهای نظیرشان $y_1, \dots, y_k$ **ناصفرهستند**. دراین حــالت ضرایب a_i در (۱۴۰۱) از (۱۵۰۱) به‌دست می‌آیند، و فرمولهای معرف $y_1, \dots, y_k$ شکل زیر را خواهند یافت:

$$y_1 = x_1 \text{ ؛ به‌ازای } r = 1, 2, \ldots, k-1 \text{ ، } y_{r+1} = x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{(x_{r+1}, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i \quad (۱۶۰۱)$$

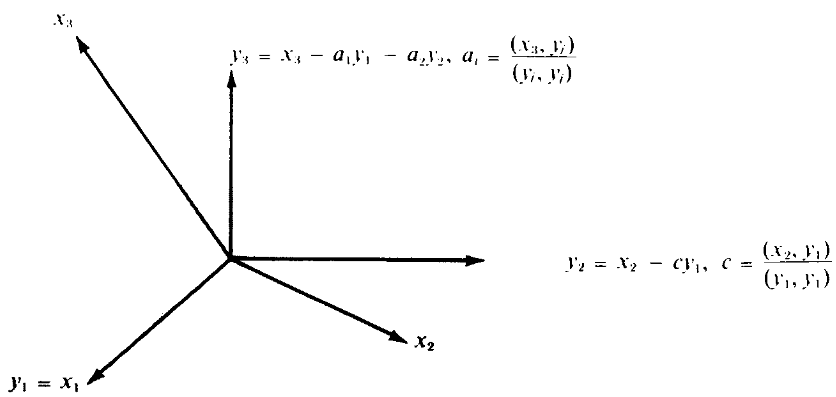
این فرمولها فرایند گرام ــ اشمیت را برای ساختن یک مجموعهٔ متعامد از عنصرهای ناصفر $y_1, \ldots, y_k$ که همان زیر فضای پیموده شده به وسیلهٔ مجموعهٔ مستقل $x_1, \ldots, x_k$ را می‌پیماید توصیف می کنند. درحالت خاص، اگر $x_1, \ldots, x_k$ پایهٔ یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی باشد، $y_1, \ldots, y_k$ یک پایهٔ متعامد برای همان فضا می‌باشد. می‌توان این پایه‌را با **نرمیده کردن** هر عنصر y_i ، یعنی تقسیم آن بر نرمش، به یک پایهٔ متعامد یکه نیز بدل کرد. لذا، به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱۳۰۱، داریم

قضیهٔ ۱۴۰۱ . *هرفضای اقلیدسی با بعد متناهی دارای یک پایهٔ متعامد یکه است.*

اگر x و y عنصرهای یک فضای اقلیدسی باشند و $y \neq O$ ، عنصر

$$\frac{(x, y)}{(y, y)} y$$

تصویر x ***در امتداد*** y نامیده می‌شود. در فرایند گرام ــ اشمیت (۱۶۰۱)، ما عنصر y_{r+1} را با تفریق تصویر x_{r+1} در امتداد هر $y_1, \ldots, y_r$ از x_{r+1} می‌سازیم. شکل ۱۰۱ این ساختن را در فضای برداری V_3 به‌طور هندسی نشان می‌دهد.



شکل ۱۰۱ فرایند گرام ــ اشمیت در V_3 . مجموعهٔ متعامد $\{y_1, y_2, y_3\}$ از مجموعهٔ مستقل $\{x_1, x_2, x_3\}$ ساخته شده است.

مثال ۱. در V_4 ، برای زیرفضای پیموده شده به وسیلهٔ سه بردار $x_1 = (1, -1, 1, -1)$ ، $x_2 = (5, 1, 1, 1)$ ، و $x_3 = (-3, -3, 1, -3)$ یک پایهٔ متعامد یکه بیابید.

حل. با استفاده از فرایند گرام ـ اشمیت داریم

$$y_1 = x_1 = (1, -1, 1, -1),$$
$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = x_2 - y_1 = (4, 2, 0, 2),$$
$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 = x_3 - y_1 + y_2 = (0, 0, 0, 0).$$

چون $y_3 = O$ ، سه بردار x_1, x_2, x_3 باید وابسته باشند. اما چون y_1 و y_2 ناصفرند، بردارهای x_1 و x_2 مستقل می‌باشند. لذا، $L(x_1, x_2, x_3)$ یک زیر فضا با بعد 2 است. مجموعهٔ $\{y_1, y_2\}$ یک پایهٔ متعامد برای این زیر فضاست. با تقسیم هریک از y_1 و y_2 بر نرمش به یک پایهٔ متعامد یکه مرکب از دو بردار

$$\frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 0, 1) \qquad \text{و} \qquad \frac{y_1}{\|y_1\|} = \tfrac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$$

دست می‌یابیم.

مثال ۲. چند جمله‌ایهای لژاندر[1]. در فضای خطی تمام چند جمله‌ایها با ضرب داخلی $(x, y) = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt$ ، دنبالهٔ نامتناهی $x_0, x_1, x_2, \ldots$ را، که در آن $x_n(t) = t^n$ ، در نظر می‌گیریم. با اعمال قضیهٔ متعامد سازی بر این دنباله، دنبالهٔ دیگر $y_0, y_1, y_2, \ldots$ از چند جمله‌ایها به‌دست می‌آید که اول بار لژاندر (۱۷۵۲ – ۱۸۳۳)، ریاضیدان فرانسوی، درکارهایش در زمینهٔ نظریهٔ پتانسیل به آن برخورد کرد. چند جمله‌ایهای اول این دنباله به آسانی با فرایند گرام ـ اشمیت قابل محاسبه‌اند. قبل از همه، داریم $y_0(t) = x_0(t) = 1$. و چون

$$(y_0, y_0) = \int_{-1}^{1} dt = 2 \qquad \text{و} \qquad (x_1, y_0) = \int_{-1}^{1} t\,dt = 0 ،$$

---

1. Legendre

معلوم می‌شود که

$$y_1(t) = x_1(t) - \frac{(x_1, y_0)}{(y_0, y_0)} y_0(t) = x_1(t) = t.$$

حال، با استفاده از روابط

$$(x_2, y_0) = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \tfrac{2}{3}, \quad (x_2, y_1) = \int_{-1}^{1} t^3\, dt = 0, \quad (y_1, y_1) = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \tfrac{2}{3},$$

داریم

$$y_2(t) = x_2(t) - \frac{(x_2, y_0)}{(y_0, y_0)} y_0(t) - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1(t) = t^2 - \tfrac{1}{3}.$$

بهمین ترتیب، معلوم می‌شود که

$$y_3(t) = t^3 - \tfrac{3}{5}t, \qquad y_4(t) = t^4 - \tfrac{6}{7}t^2 + \tfrac{3}{35}, \qquad y_5(t) = t^5 - \tfrac{10}{9}t^3 + \tfrac{5}{21}t.$$

ما با این چند جمله‌ایها مجددا" در فصل ۶ در بررسی بیشتر معادلات دیفرانسیل برمی‌خوریم، و ثابت خواهیم کرد که

$$y_n(t) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n.$$

چند جمله‌ایهای P_n، که از

$$P_n(t) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} y_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

به دست می‌آیند، به **چند جمله‌ایهای لژاندر** معروفند، و چند جمله‌ایها دردنباله‌ٔ متعامد یکهٔ نظیر $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ، که از $\varphi_n = y_n/\|y_n\|$ به دست می‌آیند، به **چند جمله‌ایهای نرمیدهٔ لژاندر** شهرت دارند. از فرمولهای فوق برای $y_0, \ldots, y_5$ معلوم می‌شود که

$$\varphi_0(t) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad \varphi_1(t) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, t, \quad \varphi_2(t) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{2}}\,(3t^2 - 1), \quad \varphi_3(t) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{7}{2}}\,(5t^3 - 3t),$$

$$\varphi_4(t) = \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{9}{2}}\,(35t^4 - 30t^2 + 3), \qquad \varphi_5(t) = \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{11}{2}}\,(63t^5 - 70t^3 + 15t).$$

۱۵۰۱ متممهای متعامد. تصویرها

فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی و S زیر فضایی با بعد متناهی از آن باشد. مسئلهٔ تقریب زیر را مطرح می‌کنیم: **به فرض معلوم بودن x در V، می‌خواهیم عنصری را در**

S **تعیین کنیم کـه فاصله‌اش تا** x **حتی‌الامکان کوچک باشد** . فاصلهٔ بین عنصرهای x و y مساوی نرم$\|x-y\|$تعریف می‌شود .

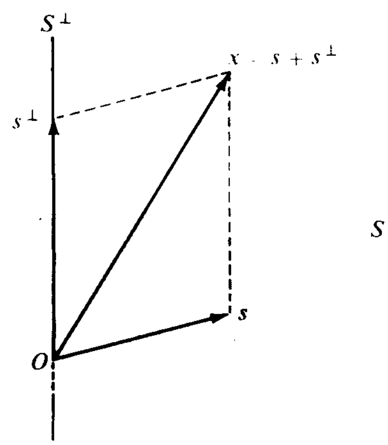
قبل از آنکه مسئله به شکل کلی مطرح شود ، حالت خاصی را که در شکل ۲۰۱ نموده شده درنظر مـی‌گیریم . در اینجا V فضای برداری V_3 و S یک زیر فضای دوبعدی آن ، یعنی یک صفحهٔ ماربر مبداء ، است . به فرض معلوم بودن x در V ، مسئله یافتن نقطهٔ s در S است که به x نزدیکترین باشد .

واضح است که اگر $x \in S$ ، $s = x$ جواب است . و اگر x در S نباشد ، نزدیکترین نقطهٔ s با وارد کـردن عمـود از x به صفحه به‌دست می‌آید . این مثال ساده راه حل مسئلهٔ کلی تقریب را گشوده و ما را به بحث زیر می‌کشاند .

تعریف . فرض کنیم S یک زیـر مجموعهٔ فضای اقلیدسی V باشد . یک عنصر در V را **متعامد** به S گوییم هرگاه به هر عنصر S متعامد باشد . مجموعهٔ تمام عناصر متعامد بـه S را با $S^{\perp}$ نموده و "عمود بر S " می‌نامیم .

به‌آسانی تحقیق می‌شود که $S^{\perp}$ ، چه‌خود S زیر فضای V باشد یا نه ، یک زیرفضای V است . درحالتی که S زیر فضاست ، $S^{\perp}$ **متمم متعامد** S نام دارد .

مثال . اگر ، مثل شکل ۲۰۱ ، S صفحه‌ای ماربر مبداء باشد ، $S^{\perp}$ خطی است ماربر مبداء



شکل ۲۰۱ تعبیر هندسی قضیهٔ تجزیهٔ متعامد در V_3

و عمود براین صفحه. این مثال تعبیر هندسی قضیهٔ بعدی نیز خواهد بود.

قضیهٔ ۱۵۰۱ . قضیهٔ تجزیهٔ متعامد. *فرض‌کنیم V یک فضای اقلیدسی و S یک زیر فضای با بعد متناهی‌آن باشد. دراین صورت، هر عنصر x در V را می‌توان به‌طورمنحصر بفرد به‌صورت مجموع دوعنصر، یکی در S و یکی در $S^{\perp}$ ، بیان کرد؛ یعنی، داریم*

$$x = s + s^{\perp} \text{ ، که‌درآن } s \in S \text{ و } s^{\perp} \in S^{\perp} \text{ .} \tag{۱۷۰۱}$$

بعلاوه، نرم x از فرمول فیثاغورس

$$\|x\|^2 = \|s\|^2 + \|s^{\perp}\|^2 \tag{۱۸۰۱}$$

به‌دست خواهد آمد.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم تجزیهٔ متعامد (۱۷۰۱) عملاً" وجود دارد. گوییم چون S با بعد متناهی است، S دارای یک پایهٔ متعامد یکهٔ متناهی، مثلاً" $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ، است. به‌فرض معلوم بودن x ، عنصرهای s و $s^{\perp}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i, \qquad s^{\perp} = x - s. \tag{۱۹۰۱}$$

توجه‌کنید که هر جملهٔ $(x, e_i)e_i$ تصویر x در امتداد e_i است. s مجموع تصاویر x در امتداد هر عنصر پایه است. چون s ترکیبی خطی از عناصر پایه است، s در S قرار دارد. تعریف $s^{\perp}$ نشان می‌دهد که معادلهٔ (۱۷۰۱) برقرار است. برای اثبات واقع بودن $s^{\perp}$ در $S^{\perp}$ ، حاصل ضرب داخلی $s^{\perp}$ را با هر عنصر پایهٔ e_j درنظر می‌گیریم. داریم

$$(s^{\perp}, e_j) = (x - s, e_j) = (x, e_j) - (s, e_j).$$

اما از (۱۹۰۱) درمی‌یابیم که $(s, e_j) = (x, e_j)$ ؛ در نتیجه، $s^{\perp}$ به e_j متعامد است. بنابراین، $s^{\perp}$ به هر عنصر در S متعامد است، که به این معنی است که $s^{\perp} \in S^{\perp}$.

حال ثابت می‌کنیم تجزیهٔ متعامد (۱۷۰۱) منحصر بفرد است. فرض‌کنیم x دو نمایش این چنینی، مثلاً"

$$x = s + s^{\perp} \quad \text{و} \quad x = t + t^{\perp} \text{ ،}$$

را داشته باشد، که درآنها s و t در S اند و $s^{\perp}$ و $t^{\perp}$ در $S^{\perp}$. می‌خواهیم ثابت کنیم $s = t$ و $s^{\perp} = t^{\perp}$. گوییم از (۲۰۰۱) داریم $s - t = t^{\perp} - s^{\perp}$ ؛ در نتیجه،کافی

است ثابت کنیم $s - t = O$. اما $s - t \in S$ و $s^\perp - t^\perp \in S^\perp$ ؛ در نتیجه، $s - t$ هم به $s^\perp - t^\perp$ متعامد است و هم با آن مساوی. چون عنصر صفر تنها عنصر متعامد به خود است، بایستی داشته باشیم $s - t = O$. این نشان می‌دهد که تجزیه منحصر بفرد است.

بالاخره، ثابت می‌کنیم نرم x از فرمول فیثاغورس به‌دست می‌آید. گوییم داریم

$$\|x\|^2 = (x, x) = (s + s^\perp, s + s^\perp) = (s, s) + (s^\perp, s^\perp),$$

بقیهٔ جملات، بدلیل متعامد بودن s و $s^\perp$ ، صفرند. این (۱۸۰۱) را ثابت خواهد کرد.

تعریف. فرض کنیم S یک زیرفضای با بعد متناهی فضای اقلیدسی V بوده، و $\{e_1, \ldots, e_n\}$ یک پایهٔ متعامد یکهٔ آن باشد. اگر $x \in V$ ، عنصر s که با معادلهٔ

$$s = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i$$

تعریف می‌شود **تصویر x بر زیر فضای S** نامیده می‌شود.

حال ثابت می‌کنیم تصویر x بر S جواب مسئلهٔ تقریبی است که در آغاز این بخش مطرح شد.

۱۶۰۱ بهترین تقریب عنصرها در یک فضای اقلیدسی به‌وسیلهٔ عنصرهای یک‌زیرفضای با بعد متناهی

قضیهٔ ۱۶۰۱ . قضیهٔ تقریب. *فرض‌کنیم S یک‌زیرفضای با بعد متناهی فضای اقلیدسی V بوده، و x عنصر دلخواهی‌از V باشد. دراین صورت، تصویر x بر S از هر عنصر دیگر S به x نزدیکتر است؛ یعنی، اگر s تصویر x بر S باشد، به‌ازای‌هر t در S داریم*

$$\|x - s\| \le \|x - t\| \,;$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $t = s$.

برهان. بنابر قضیهٔ ۱۵۰۱ می‌توان نوشت $x = s + s^\perp$ ، که درآن $s \in S$ و $s^\perp \in S^\perp$.

پس، به‌ازای هر t در S داریم

$$x - t = (x - s) + (s - t).$$

چون $s - t \in S$ و $x - s = s^{\perp} \in S^{\perp}$، این یک تجزیهٔ متعامد $x - t$ است؛ درنتیجه، نرم آن از فرمول فیثاغورس

$$\|x - t\|^2 = \|x - s\|^2 + \|s - t\|^2$$

به‌دست می‌آید. اما $\|s - t\|^2 \geq 0$. بنابراین، داریم $\|x - t\|^2 \geq \|x - s\|^2$، که در آن تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $s = t$. این برهان را تمام خواهد کرد.

مثال ۱۰. تقریب توابع پیوسته بر $[0, 2\pi]$ به وسیلهٔ چندجمله‌ایهای مثلثاتی. فرض کنیم $V = C(0, 2\pi)$، یعنی فضای خطی تمام توابع حقیقی پیوسته بر بازهٔ $[0, 2\pi]$ باشد، و ضرب داخلی را با معادلهٔ $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ تعریف می‌کنیم. در بخش ۱۲۰۱ مجموعهٔ متعامد یکه از توابع مثلثاتی $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ارائه شد که در آن

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{؛ و به‌ازای } k \geq 1\text{، } \varphi_{2k-1}(x) = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \text{ و } \varphi_{2k}(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}. \qquad (۲۱۰۱)$$

$2n + 1$ عنصر $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}$ زیرفضای S با بعد $2n + 1$ را می‌پیمایند، و عنصرهای S ***چندجمله‌ایهای مثلثاتی*** نامیده می‌شوند.

اگر $f \in C(0, 2\pi)$، f_n را تصویر f برزیرفضای S می‌انگاریم. دراین‌صورت، داریم

$$f_n = \sum_{k=0}^{2n} (f, \varphi_k)\varphi_k \text{، که‌درآن } (f, \varphi_k) = \int_0^{2\pi} f(x)\varphi_k(x)\,dx. \qquad (۲۲۰۱)$$

اعداد (f, φ_k) **ضرایب فوریهٔ**[1] f نام دارند. با استفاده از این فرمولها در (۲۱۰۱)، می‌توان (۲۲۰۱) را به شکل

$$f_n(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (۲۳۰۱)$$

نوشت، که درآن به ازای $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

---

1. Fourier

قضیهٔ تقریب می‌گوید که چند جمله‌ای مثلثاتی (۱‏.۲۳) f را بهتر از هر چند جمله‌ای مثلثاتی دیگــر در S تقریب می‌کند، در این معنی که نرم $\|f-f_n\|$ حتی‌المقدور کوچک است.

مثال ۲. تقریب توابع پیوسته بر $[-1,1]$ به وسیلهٔ چند جمله‌ایهای از درجهٔ نابیشتر از n. فرض کنیم $V = C(-1,1)$، یعنی فضای توابع پیوستهٔ حقیقی بر $[-1,1]$ بوده، و $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. $n+1$ چندجمله‌ای نرمیده‌شدهٔ لژاندار $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$، که در بخش ۱۴.۱ معرفی شد، زیر فضای S با بعد $n+1$ مرکب از تمام چند جمله‌ایهای از درجهٔ نابیشتر از n رامی‌پیمایند. اگر $f \in C(-1,1)$، f_n را تصویر f بر S می‌گیریم. در این صورت، داریم

$$f_n = \sum_{k=0}^{n}(f,\varphi_k)\varphi_k \quad \text{، که در آن} \quad (f,\varphi_k) = \int_{-1}^{1} f(t)\varphi_k(t)\,dt$$

این چنــد جمله‌ای از درجهٔ نابیشتر از n است که به‌ازای آن $\|f-f_n\|$ کوچکترین است. مثلاً، وقتی $f(x) = \sin \pi x$، ضرایب (f,φ_k) از

$$(f,\varphi_k) = \int_{-1}^{1} \sin \pi t\, \varphi_k(t)\,dt$$

به دست می‌آیند. بخصوص، داریم $(f,\varphi_0) = 0$ و

$$(f,\varphi_1) = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}}\, t \sin \pi t\,dt = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{2}{\pi}.$$

پس چند جمله‌ای خطی $f_1(t)$ که به $\sin \pi t$ بر $[-1,1]$ نزدیکترین است عبارت خواهد بود از

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{2}{\pi}\,\varphi_1(t) = \frac{3}{\pi}\,t.$$

چون $(f,\varphi_2) = 0$، این نزدیکترین تقریب درجهٔ دوم نیز می‌باشد.

۱۷.۱ تمرین

۱. در هرحالت، برای زیر فضایی از V_3 که به‌وسیلهٔ بردارهای زیر پیموده می‌شود یک پایهٔ متعامد یکه بیابید:

(آ) $x_1 = (1,1,1), \quad x_2 = (1,0,1), \quad x_3 = (3,2,3)$؛

(ب) $x_1 = (1, 1, 1)$، $x_2 = (-1, 1, -1)$، $x_3 = (1, 0, 1)$.

۲. در هر حالت، برای زیر فضایی از V_4 که به‌وسیلهٔ بردارهای زیر پیموده می‌شود یک پایهٔ متعامد یکه بیابید:

(آ) $x_1 = (1, 1, 0, 0)$، $x_2 = (0, 1, 1, 0)$، $x_3 = (0, 0, 1, 1)$، $x_4 = (1, 0, 0, 1)$؛

(ب) $x_1 = (1, 1, 0, 1)$، $x_2 = (1, 0, 2, 1)$، $x_3 = (1, 2, -2, 1)$.

۳. در فضای خطی حقیقی $C(0, \pi)$ با ضرب داخلی $(x, y) = \int_0^\pi x(t)y(t)\,dt$، فرض کنید به ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$، $x_n(t) = \cos nt$، وثابت‌کنید تابعهای $y_0, y_1, y_2, \ldots$ که

$$y_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ و به‌ازای } n \geq 1 \text{، } y_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nt$$

یک مجموعهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهند که همان زیر فضای پیموده شده به وسیلهٔ $x_0, x_1, x_2, \ldots$ را می‌پیماید.

۴. در فضای خطی تمام چندجمله‌ایهای حقیقی با ضرب داخلی $(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)\,dt$، فرض کنید به‌ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$، $x_n(t) = t^n$، و ثابت کنید تابعهای

$$y_0(t) = 1, \quad y_1(t) = \sqrt{3}\,(2t - 1), \quad y_2(t) = \sqrt{5}\,(6t^2 - 6t + 1)$$

یک مجموعهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهند که همان زیر فضای پیموده شده به وسیلهٔ $\{x_0, x_1, x_2\}$ را می‌پیماید.

۵. فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی و پیوستهٔ f بر $[0, +\infty)$ باشد که انتگرال $\int_0^\infty e^{-t}f^2(t)\,dt$ به‌ازای آنها همگراست. تعریف‌کنید $(f, g) = \int_0^\infty e^{-t}f(t)g(t)\,dt$، و فرض کنید $y_0, y_1, y_2, \ldots$ مجموعهٔ حاصل از اعمال فرایند گرام ــ اشمیت بر $x_0, x_1, x_2, \ldots$، که $x_n(t) = t^n$ به‌ازای $n \geq 0$، باشد. ثابت کنید $y_0(t) = 1$، $y_1(t) = t - 1$، $y_2(t) = t^2 - 4t + 2$، و $y_3(t) = t^3 - 9t^2 + 18t - 6$.

۶. در فضای خطی حقیقی $C(1, 3)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_1^3 f(x)g(x)\,dx$، فرض کنید $f(x) = 1/x$، و نشان دهید که نزدیکترین چند جمله‌ای ثابت g به f، $g = \frac{1}{2}\log 3$ است. $\|g - f\|^2$ را به‌ازای این g حساب کنید.

۷. در فضای خطی حقیقی $C(0, 2)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_0^2 f(x)g(x)\,dx$، فرض‌کنید $f(x) = e^x$، و نشان دهید که نزدیکترین چند جمله‌ای ثابت g به f، $g = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$ است. $\|g - f\|^2$ را به‌ازای این g حساب کنید.

۸. در فضای خطی حقیقی $C(-1, 1)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx$، فرض

کنید $f(x) = e^x$ ، و نزدیکترین چند جمله‌ای خطی g به f را پیدا کنید. $\|g - f\|^2$ را به‌ازای این g محاسبه نمایید.

۹ . در فضای خطی حقیقی $C(0, 2\pi)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx$ ، فرض کنید $f(x) = x$ ، و در زیر فضای پیموده شده به وسیلهٔ
$u_0(x) = 1 , u_1(x) = \cos x , u_2(x) = \sin x$ ، نزدیکترین چند جمله‌ای مثلثاتی به f را بیابید.

۱۰ . در فضای خطی V تمرین ۵ ، فرض کنید $f(x) = e^{-x}$ ، و نزدیکترین چند جمله‌ای خطی به f را بیابید.

۲

تبدیلات خطی وماتریسها

۱.۲ تبدیلات خطی

یکی از هدفهای غایی آنالیز بررسی جامع توابعی است که قلمرو و بردشان زیرمجموعه‌هایی از فضاهای خطی‌اند. این تابعها را **تبدیل**، **نگاشت**، یا **عملگر** می‌نامند، و در این فصل ساده‌ترین آنها، به‌نام تبدیلات **خطی**، که در تمام شاخه‌های ریاضی دیده می‌شوند مطرح می‌گردند. خواص تبدیلات کلیتر را اغلب با تقریب آنها به وسیلهٔ تبدیلات خطی به‌دست می‌آورند.

ابتدا چند نماد و اصطلاح مربوط به تابعهای دلخواه را معرفی می‌کنیم. فرض کنیم V و W دو مجموعه باشند. علامت

$$T: V \to W$$

را برای بیان اینکه T تابعی است که قلمروش V بوده و مقادیرش در W اند به‌کار می‌بریم. به‌ازای هر x در V، عنصر $T(x)$ در W را **نقش** x **تحت** T می‌نامیم، و می‌گوییم T، x **را بروی** $T(x)$ **می‌نگارد**. اگر A زیر مجموعهٔ V باشد، مجموعهٔ تمام نقشهای $T(x)$ به ازای x در A **نقش** A **تحت** T نام دارد و با $T(A)$ نموده می‌شود. نقش قلمرو V، یعنی $T(V)$، برد T می‌باشد.

حال فرض کنیم V و W فضاهایی خطی و دارای یک مجموعه از اسکالر باشند، و تبدیل خطی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف. هرگاه V و W فضاهایی خطی باشند، تابع $T: V \to W$ در صورتی یک **تبدیل خطی** از V بتوی W است که از دو خاصیت زیر بهره‌مند باشد:

(آ) به‌ازای هر x و y در V ، $T(x+y) = T(x) + T(y)$:

(ب) به‌ازای هر x در V و هر اسکالر c ، $T(cx) = cT(x)$.

این خواص‌را می‌توان با لفظ بیان‌کرد و این‌طور گفت که T جمع و ضرب در اسکالر را حفظ می‌کند . دو خاصیت در یک فرمول خلاصه می‌شوند که می‌گوید به‌ازای هر x و y در V و هر دو اسکالر a و b

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y) \cdot$$

به استقرا ، رابطهٔ کلیتر

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i)$$

را به‌ازای هر n عنصر $x_1, \ldots, x_n$ در V و هر n اسکالر $a_1, \ldots, a_n$ خواهیم داشت .

خواننده می‌تواند به‌آسانی تحقیق کند که مثالهای زیر تبدیلاتی خطی‌اند .

مثال ۱ . تبدیل همانی . تبدیل $T: V \to V$ ، که به‌ازای هر x در V ، $T(x) = x$ ، **تبدیل همانی** نام دارد و با I یا I_V نموده می‌شود .

مثال ۲ . تبدیل صفر . تبدیل $T: V \to V$ ، که هر عنصر V را بروی O می‌نگارد، **تبدیل صفر** نام دارد و با O نموده می شود .

مثال ۳ . ضرب در اسکالر ثابت c . در اینجاداریم $T: V \to V$ ، که به‌ازای هر x در V ، $T(x) = cx$. وقتی $c = 1$ ، این همان تبدیل همانی است ؛ و وقتی $c = 0$ ، تبدیل صفر است .

مثال ۴ . معادلات خطی . فرض‌کنیم $V = V_n$ و $W = V_m$. با معلوم بودن mn عدد حقیقی a_{ik} ، که $i = 1, 2, \ldots, m$ و $k = 1, 2, \ldots, n$ ، $T: V_n \to V_m$ را بـه‌این صورت تعریف می‌کنیم : T هر بـردار $x = (x_1, \ldots, x_n)$ در V_n را طبـق معـادلات زیر بروی بردار $y = (y_1, \ldots, y_m)$ در V_m می‌نگارد :

به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, m$ ، $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$.

مثال ۵. ضرب داخلی در یک عنصر ثابت. فرض‌کنیم V یک فضای اقلیدسی حقیقی باشد. به‌ازای عنصر ثابت z در V، $T: V \to \mathbf{R}$ را به‌این صورت تعریف می‌کنیم: اگر $x \in V$، $T(x) = (x, z)$ یعنی حاصل ضرب داخلی x در z.

مثال ۶. تصویر بر یک زیر فضا. فرض‌کنیم V یک فضای اقلیدسی و S یک زیر فضای بابعدمتناهی‌آن باشد. $T: V \to S$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: اگر $x \in V$، $T(x)$ عبارت است از تصویر x بر S.

مثال ۷. عملگرمشتقگیری. فرض‌کنیم V فضای خطی تمام توابع حقیقی f باشد که بر بازهٔ باز (a, b) مشتقپذیر است. تبدیل‌خطیی که هر f در V را بروی مشتقش f' می‌نگارد **عملگر مشتقگیری** نام دارد و با D نموده می‌شود. بنابر این، داریم $D: V \to W$، که به ازای هر f در V، $D(f) = f'$. فضای W از تمام f' ها تشکیل شده است.

مثال ۸. عملگرانتگرالگیری. فرض‌کنیم V فضای خطی تمام توابع حقیقی و پیوسته بر بازهٔ $[a, b]$ باشد. به ازای $f \in V$، $g = T(f)$ را تابعی در V می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر $a \leq x \leq b$، $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

تبدیل T را **عملگر انتگرالگیری** می‌نامند.

۲.۲ فضای پوچ و برد

در این بخش، T یک تبدیل خطی از فضای خطی V بتوی فضای خطی W است.

قضیهٔ ۱.۲. مجموعهٔ $T(V)$ (برد T) یک زیر فضای W است. بعلاوه، T عنصر صفر V را بروی عنصر صفر W می‌نگارد.

برهان. برای اثبات‌اینکه $T(V)$ زیر فضای W است، فقط‌کافی است اصول موضوع بسته بودن تحقیق شوند. دو عنصر $T(x)$ و $T(y)$ را از $T(V)$ اختیار می‌کنیم. پس $T(x) + T(y) = T(x + y)$؛ در نتیجه، $T(x) + T(y)$ در $T(V)$ است. همچنین، به

ازای‌هراسکالر c داریم $cT(x) = T(cx)$ ؛ در نتیجه ، $cT(x)$ در $T(V)$ می‌باشد . بنابر-این ، $T(V)$ یک زیر فضای W است . با اختیار $c = 0$ در $T(cx) = cT(x)$ معلوم می‌شود که $T(O) = O$.

تعریف . مجموعهٔ تمام عناصری از V که به‌وسیلهٔ T بروی O نگاشته می‌شوند **فضای پوچ** T نام دارد و با $N(T)$ نموده می‌شود . بنابر این ، داریم

$$N(T) = \{x \mid T(x) = O \quad \text{و} \quad x \in V\}.$$

فضای پوچ گاهی **هستهٔ** T نیز نامیده می‌شود .

قضیهٔ ۲۰۲ . فضای پوچ T یک زیر فضای V است .

برهان . هرگاه x و y در $N(T)$ باشند ، $x + y$ و cx به‌ازای‌هراسکالر c نیزچنین‌اند ، زیـــرا

$$T(x + y) = T(x) + T(y) = O \quad \text{و} \quad T(cx) = cT(x) = O\,.$$

مثالهای زیر ، فضاهای پوچ تبدیلات خطی بخش ۱۰۲ را توصیف می‌کنند .

مثال ۱ . تبدیل همانی . فضای پوچ $\{O\}$ است ؛ یعنی ، زیر فضایی که فقط از عنصر صفر تشکیل شده است .

مثال ۲ . تبدیل صفر . چون هر عنصر V بروی صفر نگاشته می‌شود ، فضای پوچ خود V است .

مثال ۳ . ضرب در اسکالر ثابت c . اگر $c \neq 0$ ، فضای‌پوچ فقط شامل O است ؛ و اگر $c = 0$ ، فضای پوچ V می‌باشد .

مثال ۴ . معادلات خطی . فضای پوچ از تمام بردارهای $(x_1, \ldots, x_n)$ در V_n تشکیل شده که

به‌ازای m ، ... ، $i = 1, 2$ ، $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0$.

مثال ۵. ضرب داخلی در عنصر ثابت z . فضای‌پوچ از تمام عنصرهایی در V تشکیل شده که به z متعامدند.

مثال ۶. تصویر بر زیر فضای S . به‌ازای $x \in V$ (بنابرقضیه‌ٔ ۱۵۰۱) تجزیهٔ متعامد منحصربفرد $x = s + s^{\perp}$ را داریم. چون $T(x) = s$ ، $T(x) = O$ اگر و فقط اگر $x = s^{\perp}$. پس فضای پوچ مساوی $S^{\perp}$ ، یعنی متمم متعامد S ، است.

مثال ۷. عملگر مشتقگیری. فضای پوچ از تمام توابعی تشکیل شده که بر بازهٔ مفروض ثابت هستند.

مثال ۸. عملگر انتگرالگیری. فضای پوچ فقط از تابع صفر تشکیل شده است.

۳۰۲ پوچه و رتبه

مجدداً در این بخش T یک تبدیل خطی از فضای خطی V بتوی فضای خطی W است. ما به رابطهٔ بین بعدهای V ، فضای پوچ $N(T)$ ، و برد $T(V)$ نظر داریم. اگر V با بعد متناهی باشد، فضای پوچ نیز با بعد متناهی است، چونکه زیر فضای V است. بعد $N(T)$ را **پوچهٔ** T می‌نامیم. در قضیهٔ زیر ثابت می‌کنیم برد نیز با بعد متناهی است؛ بعدش **رتبهٔ** T نام دارد.

قضیهٔ ۳۰۲ . قضیهٔ پوچه بعلاوهٔ رتبه. ***هرگاه V با بعد متناهی باشد، $T(V)$ نیز با بعد متناهی است و داریم***

$$\dim N(T) + \dim T(V) = \dim V. \tag{۱۰۲}$$

به عبارت دیگر، پوچه بعلاوهٔ رتبهٔ یک تبدیل خطی مساوی بعد قلمروآن است.

برهان. فرض کنیم $n = \dim V$ ، و $e_1, \ldots, e_k$ پایه‌ای از $N(T)$ باشد که

$k = \dim N(T) \leq n$. طبق قضیهٔ ۷۰۱ ، این عنصرها بخشی از یک پایهٔ V ، مثلاً " پایهٔ

$$e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{k+r}, \tag{۲۰۲}$$

هستند که $k + r = n$. ثابت می‌کنیم r عنصر

$$T(e_{k+1}), \ldots, T(e_{k+r}) \tag{۳۰۲}$$

یک پایهٔ $T(V)$ را تشکیل می‌دهند؛ و لذا، ثابت می‌شود که $\dim T(V) = r$. چون $k + r = n$ ، این (۱۰۲) را نیز ثابت خواهد کرد.

ابتدا نشان می‌دهیم که r عنصر (۳۰۲) $T(V)$ را می‌پیمایند. گوییم هرگاه $y \in T(V)$ ، به ازای x ی در V داریم $y = T(x)$ ، و می‌توانیم بنویسیم $x = c_1e_1 + \cdots + c_{k+r}e_{k+r}$. در نتیجه، چون $T(e_1) = \cdots = T(e_k) = O$ ،

$$y = T(x) = \sum_{i=1}^{k+r} c_iT(e_i) = \sum_{i=1}^{k} c_iT(e_i) + \sum_{i=k+1}^{k+r} c_iT(e_i) = \sum_{i=k+1}^{k+r} c_iT(e_i) \cdot$$

این نشان می‌دهد که عنصرهای (۳۰۲) $T(V)$ را می‌پیمایند.

حال نشان می‌دهیم که این عنصرها مستقل‌اند. فرض کنیم اسکالرهایی چون $c_{k+1}, \ldots, c_{k+r}$ باشند بطوری که

$$\sum_{i=k+1}^{k+r} c_iT(e_i) = O .$$

این ایجاب می‌کند که

$$T\left(\sum_{i=k+1}^{k+r} c_ie_i\right) = O ;$$

در نتیجه، عنصر $x = c_{k+1}e_{k+1} + \cdots + c_{k+r}e_{k+r}$ در فضای پوچ $N(T)$ واقع است. این یعنی اسکالرهایی چون $c_1, \ldots, c_k$ وجود دارند بطوری که $x = c_1e_1 + \cdots + c_ke_k$ ؛ در نتیجه، داریم

$$x - x = \sum_{i=1}^{k} c_ie_i - \sum_{i=k+1}^{k+r} c_ie_i = O .$$

اما، چون عنصرهای (۲۰۲) مستقل‌اند، این ایجاب می‌کند که تمام c_i ها صفر باشند. لذا، عنصرهای (۳۰۲) مستقل می‌باشند.

تذکر. اگر V با بعد نامتناهی باشد، دست کم یکی از $N(T)$ یا $T(V)$ با بعد نامتناهی

است. برهان مجمل این مطلب در تمرین ۳۰، بخش ۴۰۲، آمده است.

۴۰۲ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، تبدیل $T: V_2 \to V_2$ با فرمولی برای $T(x, y)$، که (x, y) نقطهٔ دلخواهی از V_2 است، تعریف شده است. در هر حالت معین کنید که T خطی است یا نه. در صورت خطی بودن T، فضای پوچ و برد آن را توصیف و پوچه و رتبهٔ آن را محاسبه کنید.

۱. $T(x, y) = (y, x)$.

۲. $T(x, y) = (x, -y)$.

۳. $T(x, y) = (x, 0)$.

۴. $T(x, y) = (x, x)$.

۵. $T(x, y) = (x^2, y^2)$.

۶. $T(x, y) = (e^x, e^y)$.

۷. $T(x, y) = (x, 1)$.

۸. $T(x, y) = (x + 1, y + 1)$.

۹. $T(x, y) = (x - y, x + y)$.

۱۰. $T(x, y) = (2x - y, x + y)$.

همین کار را در تمرینهای ۱۱ تا ۱۵ با تبدیل $T: V_2 \to V_2$ مذکور در آنها انجام دهید.

۱۱. T هر نقطه را به‌قدر زاویهٔ φ حول مبداء می‌چرخاند؛ یعنی، T یک نقطه به مختصات قطبی (r, θ) را به‌نقطه به مختصات قطبی $(r, \theta + \varphi)$، که φ ثابت است، می‌نگارد. همچنین، T، O را به‌خود آن می‌نگارد.

۱۲. T هر نقطه را به منعکسش نسبت به خط ثابتی ماربر مبداء می‌نگارد.

۱۳. T هر نقطه را به نقطهٔ $(1, 1)$ می‌نگارد.

۱۴. T هرنقطه‌به‌مختصات قطبی (r, θ) را به نقطه به مختصات قطبی $(2r, \theta)$ می‌نگارد. همچنین، T، O را به‌خود آن می‌نگارد.

۱۵. T هر نقطه به مختصات قطبی (r, θ) را به‌نقطه‌به مختصات قطبی $(r, 2\theta)$ می‌نگارد. همچنین، T، O را به‌خود آن می‌نگارد.

همین‌کار را در تمرینهای ۱۶ تا ۲۳ با تبدیل $T: V_3 \to V_3$ که با فرمولی برای $T(x, y, z)$، که (x, y, z) نقطهٔ دلخواهی از V_3 است، تعریف شده انجام دهید.

۱۶. $T(x, y, z) = (z, y, x)$.

۱۷. $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.

۱۸. $T(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$.

۱۹. $T(x, y, z) = (x, y, 1)$.

۲۰. $T(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z - 1)$.

۲۱. $T(x, y, z) = (x + 1, y + 2, z + 3)$.

۲۲ . $T(x, y, z) = (x, y^2, z^3)$.　　　۲۳ . $T(x, y, z) = (x + z, 0, x + y)$.

در هر یک از تمرینهای ۲۴ تا ۲۷ ، تبدیل $T: V \to V$ بنحوی توصیف شده است . در هر حالت معین کنید که T خطی است یا نه . در صورت خطی بودن ، فضای پوچ وبرد آن را توصیف و پوچه و رتبهٔ آن را وقتی متناهی‌اند حساب کنید .

۲۴ . فرض کنید V فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ از درجهٔ نابیشتر از n باشد . اگر $p \in V$ ، $q = T(p)$ یعنی به ازای هر x حقیقی $q(x) = p(x + 1)$.

۲۵ . فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی مشتقپذیر بر بازهٔ باز $(-1, 1)$ باشد . اگر $f \in V$ ، $g = T(f)$ یعنی به ازای هر x در $(-1, 1)$ ، $g(x) = xf'(x)$.

۲۶ . فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی پیوسته بر $[a, b]$ باشد . اگر $f \in V$ ، $g = T(f)$ یعنی

$$\text{به ازای } a \le x \le b \text{ ، } g(x) = \int_a^b f(t) \sin (x - t)\, dt \text{ .}$$

۲۷ . فرض کنید V فضای تمام توابع حقیقی دوبار مشتقپذیر بر بازهٔ باز (a, b) باشد . اگر $y \in V$ ، تعریف کنید $T(y) = y'' + Py' + Qy$ که در آن P و Q ثابتهای معینی هستند .

۲۸ . فرض کنید V فضای خطی تمام دنباله‌های حقیقی همگرا مانند $\{x_n\}$ باشد ، و تبدیل $T: V \to V$ را به این صورت تعریف کنید : هرگاه $x = \{x_n\}$ یک دنبالهٔ همگرا با حد a باشد ، قرار دهید $T(x) = \{y_n\}$ که در آن به ازای $n \ge 1$ ، $y_n = a - x_n$. ثابت کنید T خطی است و فضای پوچ و برد T را مشخص نمایید .

۲۹ . فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی پیوسته بر بازهٔ $[-\pi, \pi]$ باشد . همچنین ، S را زیر مجموعهٔ V مرکب از جمیع f هایی بگیرید که در سه معادلهٔ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t\, dt = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t\, dt = 0$$

صدق می‌کنند .

(آ) ثابت کنید S یک زیر فضای V است .

(ب) ثابت کنید S شامل $f(x) = \cos nx$ و $f(x) = \sin nx$ به ازای هر $n = 2, 3, \ldots$ است .

(پ) ثابت کنید S با بعد نامتناهی است .

فرض کنید تبدیل خطی $T: V \to V$ به این صورت تعریف شده باشد: اگر $f \in V$، $g = T(f)$ یعنی

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \{1 + \cos(x - t)\} f(t)\, dt.$$

(ت) ثابت کنید $T(V)$، یعنی برد T، با بعد متناهی است، و پایه‌ای برای $T(V)$ پیدا کنید.

(ث) فضای پوچ T را مشخص نمایید.

(ج) جمیع $c \neq 0$ های حقیقی و تمام f های ناصفر در V را که $T(f) = cf$ پیدا کنید. (توجه کنید که چنین f ی در برد T جای دارد.)

۳۰. فرض کنید $T: V \to W$ یک تبدیل خطی از فضای خطی V بتوی فضای خطی W باشد. ثابت کنید هرگاه V با بعد نامتناهی باشد، دست کم یکی از $T(V)$ یا $N(T)$ با بعد نامتناهی است.

[**راهنمایی.** فرض کنید $\dim N(T) = k$، $\dim T(V) = r$، $e_1, \ldots, e_k$ یک پایهٔ $N(T)$، $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{k+n}$ که $n > r$، عنصرهایی مستقل در V باشند. عنصرهای $T(e_{k+1}), \ldots, T(e_{k+n})$ بدلیل $n > r$ وابسته‌اند. از این امر تناقض بدست آورید.]

۵.۲ اعمال جبری بر تبدیلات خطی

تابعهایی که مقادیرشان در فضای خطی W اند را می‌توان طبق تعریف زیر با هم جمع و یا در اسکالرهای در W ضرب کرد.

تعریف. فرض کنیم $T: V \to W$ و $S: V \to W$ دو تابع با قلمرو مشترک V و با مقادیر در فضای خطی W باشند. اگر c یک اسکالر در W باشد، مجموع $S + T$ و حاصل ضرب cT را به‌ازای هر x در V با معادلات زیر تعریف می‌کنیم:

$$(S + T)(x) = S(x) + T(x), \qquad (cT)(x) = cT(x). \tag{۴.۲}$$

ما بخصوص به حالتی نظر داریم که در آن V یک فضای خطی است و همان اسکالرهای W را دارد. در این حالت مجموعهٔ تمام تبدیلات خطی از V بتوی W را با $\mathscr{L}(V, W)$ نشان می‌دهیم.

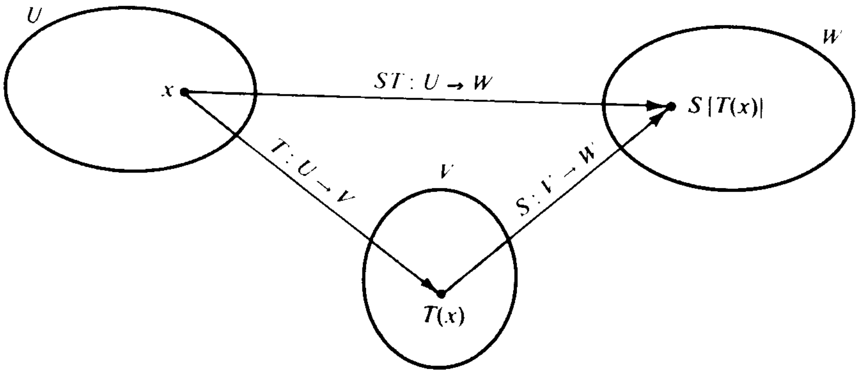
هرگاه S و T دو تبدیل خطی در $\mathscr{L}(V, W)$ باشند، به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که $S + T$ و cT نیز تبدیلاتی خطی در $\mathscr{L}(V, W)$ اند. از این بیشتر می‌توان گفت: با اعمالی که هم اینک تعریف شد، مجموعهٔ $\mathscr{L}(V, W)$ خود یک فضای خطی جدید می‌شود؛ تبدیل صفر به عنوان عنصر صفر این فضا، و تبدیل $T(1-)$ به عنوان قرینهٔ T عمل می‌کند. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که هر ده اصل موضوع فضاهای خطی برقرارند. لذا، خواهیم داشت

قضیهٔ ۴۰۲ . مجموعهٔ $\mathscr{L}(V, W)$ مرکب از تمام تبدیلات خطی از V بتوی W با اعمال جمع و ضرب در اسکالر که در (۴۰۲) تعریف شد یک فضای خطی است.

عمل جبری جالبتر بر تبدیلات خطی **ترکیب** یا **ضرب** تبدیلات است. در این عمل از نهاد جبری یک فضای خطی استفاده نمی‌شود و می‌توان آن را کاملاً " کلی و به‌صورت زیر تعریف کرد.

تعریف. فرض کنیم U, V, W مجموعه باشند. $T: U \to V$ را تابعی با قلمرو U و مقادیر در V، و $S: V \to W$ را تابعی با قلمرو V و مقادیر در W می‌انگاریم. در این صورت، ترکیب ST تابعی است مانند $ST: U \to W$ که با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

به ازای هر x در U، $(ST)(x) = S[T(x)]$.



شکل ۱۰۲ نمایش ترکیب دو تبدیل

بنابراین، برای نگاشتن x به وسیلهٔ ST ، ابتدا x را به‌وسیلهٔ T و سپس $T(x)$ را به‌وسیلهٔ S می‌نگاریم. این مطلب در شکل ۱۰۲ توضیح شده است.

ما در بررسیمان از حساب دیفرانسیل و انتگرال بارها به ترکیب توابع حقیقی برخورده‌ایم، و دیده‌ایم که این عمل در حالت کلی تعویضپذیر نیست. لکن، مثل‌حالت توابع حقیقی، ترکیب در قانون شرکتپذیری صدق می‌کند.

قضیهٔ ۵۰۲ . هرگاه $T: U \to V$ ، $S: V \to W$ ، و $R: W \to X$ سه تابع باشند، آنگاه

$$R(ST) = (RS)T.$$

برهان. توابع $R(ST)$ و $(RS)T$ هر دو دارای قلمرو U و مقادیر در X اند، و به‌ازای هر x در U داریم

$[R(ST)](x) = R[(ST)(x)] = R[S[T(x)]]$ و $[(RS)T](x) = (RS)[T(x)] = R[S[T(x)]]$

که $R(ST) = (RS)T$ را ثابت می‌کند.

تعریف. فرض‌کنیم $T: V \to V$ تابعی باشد که V را بتوی آن می‌نگارد. توانهای‌صحیح T به صورت زیر به استقرا تعریف می‌شوند:

$T^0 = I$ ؛ و به‌ازای $n \geq 1$ ، $T^n = TT^{n-1}$.

در اینجا I تبدیل همانی‌است. خواننده می‌تواند تحقیق کند که قانون شرکتپذیری قانون‌نماها، یعنی $T^mT^n = T^{m+n}$ ، را به‌ازای‌هر دوعدد صحیح و نامنفی m و n ایجاب می‌کند.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که ترکیب تبدیلات خطی مجددا" خطی است.

قضیهٔ ۶۰۲ . هرگاه U, V, W فضاهایی خطی و دارای یک اسکالر باشند و $T: U \to V$ و $S: V \to W$ تبدیلاتی خطی باشند، آنگاه ترکیب $ST: U \to W$ خطی خواهد بود.

برهان. به ازای هر x و y در U و هر اسکالر a و b داریم

$$(ST)(ax + by) = S[T(ax + by)] = S[aT(x) + bT(y)] = aST(x) + bST(y).$$

از تلفیق ترکیب با اعمال جبری جمع و ضرب اسکالرها در $\mathscr{L}(V, W)$ قضیهٔ زیر به دست می‌آید.

قضیهٔ ۷۰۲ . فرض کنیم U, V, W **فضاهایی خطی و دارای یک اسکالر بوده،** S **و** T **در** $\mathscr{L}(V, W)$ **باشند، و** c **یک اسکالر دلخواه باشد.**

(آ) به‌ازای هر تابع R **با مقادیر در** V **داریم**

$$(S + T)R = SR + TR \quad \text{و} \quad (cS)R = c(SR)\ ;$$

(ب) و به‌ازای هر تبدیل خطی $R: W \to U$ **خواهیم داشت**

$$R(S + T) = RS + RT \quad \text{و} \quad R(cS) = c(RS)\ .$$

اثبات، کاربرد مستقیم تعریف ترکیب است و به‌عنوان تمرین گذارده می‌شود.

۶۰۲ معکوسها

ضمن بررسی توابع حقیقی آموختیم که چطور با معکوس‌کردن توابع یکنوا توابع جدیدی بسازیم. حال می‌خواهیم فرایند معکوس‌سازی را به ردهٔ کلیتری از توابع تعمیم دهیم.

به فرض معلوم بودن T ، هدف ما، در صورت امکان، یابش تابع دیگر S است که ترکیبش با T تبدیل همانی باشد. چون ترکیب درحالت کلی تعویضپذیر نیست، باید بین ST و TS فرق گذارده شود. لذا، دو نوع معکوس معرفی می‌کنیم، که ما آنها را معکوسهای چپ و راست خواهیم نامید.

تعریف. فرض کنیم V و W دومجموعه‌باشندو $T: V \to W$ یک تابع. تابع $S: T(V) \to V$ را در صورتی **معکوس چپ** T می‌نامیم که‌به‌ازای هر x در V ، $S[T(x)] = x$ ؛ یعنی، در صورتی که

$$ST = I_V,$$

که درآن I_V تبدیل همانی بر V است. تابع $R: T(V) \to V$ را در صورتی **معکوس راست** T می‌نامیم که به‌ازای هر y در $T(V)$ ، $T[R(y)] = y$ ؛ یعنی، درصورتی‌که

$$TR = I_{T(V)},$$

که در آن $I_{T(V)}$ تبدیل همانی بر $T(V)$ می‌باشد.

مثال. تابع بدون معکوس چپ ولی با دو معکوس راست. فرض‌کنیم $V = \{1, 2\}$ و $W = \{0\}$. $T: V \to W$ را به‌این صورت تعریف می‌کنیم: $T(1) = T(2) = 0$. این تابع دو معکوس راست $R: W \to V$ و $R': W \to V$ دارد که با

$$R(0) = 1, \qquad R'(0) = 2$$

تعریف می‌شوند. تابع نمی‌تواند معکوس چپی مثل S داشته باشد، زیرا این ایجاب خواهد کرد که

$$1 = S[T(1)] = S(0) \quad \text{و} \quad 2 = S[T(2)] = S(0).$$

این مثال ساده نشان می‌دهد که معکوسهای چپ الزاماً موجود نیستند و معکوسهای راست لزوماً منحصر بفرد نمی‌باشند.

هر تابع مانند $T: V \to W$ دست کم یک معکوس راست دارد. در واقع، هر y در $T(V)$ به ازای دست کم یک x در V به شکل $y = T(x)$ است. چنانچه یکی از این x ها را اختیار و تعریف کنیم $R(y) = x$، به‌ازای هر y در $T(V)$ خواهیم داشت $T[R(y)] = T(x) = y$؛ در نتیجه، R یک معکوس راست است. عدم یکتایی احتمالاً پیش می‌آید، چرا که ممکن است بیش از یک x در V بروی y مفروضی در $T(V)$ نگاشته شود. بزودی (در قضیهٔ ۹۰۲) ثابت می‌کنیم که اگر هر y در $T(V)$ نقش دقیقاً یک x در V باشد، معکوسهای راست منحصر بفرد می‌باشند.

ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر معکوس چپ موجود باشد منحصر بفرد است و، درعین حال، معکوس راست نیز هست.

قضیهٔ ۸۰۲. *تابع $T: V \to W$ می‌تواند حداکثر یک معکوس چپ داشته باشد. اگر T معکوس چپ S را دارا باشد، S معکوس راست نیز خواهد بود.*

برهان. فرض‌کنیم T دو معکوس چپ داشته باشد: $S: T(V) \to V$ و $S': T(V) \to V$. y دلخواهی در $T(V)$ اختیار و ثابت می‌کنیم $S(y) = S'(y)$. گوییم به ازای x ی در

V ، $y = T(x)$ ؛ در نتیجه، چون هر دوی S و S' معکوسهای چپ‌اند، داریم

$$S'[T(x)] = x \quad \text{و} \quad S[T(x)] = x \; .$$

پس $S(y) = x$ و $S'(y) = x$ ؛ درنتیجه، به‌ازای هر y در $T(V)$ ، $S(y) = S'(y)$. لذا، $S = S'$ ، که ثابت می‌کند معکوسهای چپ منحصر بفرد هستند.

حال ثابت می‌کنیم هر معکوس چـپ S معکوس راست نیز هست. عنصر دلخواهی مثل y در $T(V)$ اختیار و ثابت می‌کنیم $T[S(y)] = y$. گوییم چون $y \in T(V)$ ، به‌ازای x ی در V داریم $y = T(x)$. اما S یک معکوس چپ است. پس

$$x = S[T(x)] = S(y) .$$

بااعمال T نتیجه می‌شودکه $T(x) = T[S(y)]$. اما $y = T(x)$ ؛ درنتیجـه، $y = T[S(y)]$ ، که برهان را تمام خواهد کرد.

قضیهٔ زیر جمیع توابع معکوس چپ دار را توصیف می‌کند.

قضیهٔ ۹.۲ . *تابع $T: V \to W$ معکوس‌چپ دارد اگر و فقط‌اگر T عنصرهای متمایز V را به عنصرهای متمایز W بنگارد؛ یعنی، اگر و فقط‌اگر به‌ازای هر x و y در V ، $x \neq y$ ایجاب کند که $T(x) \neq T(y)$.* (۵.۲)

تذکر. شرط (۵.۲) با عبارت زیر معادل است:

$T(x) = T(y)$ ایجاب کند که $x = y$. (۶.۲)

هرتابع مانند T که در (۵.۲) یا (۶.۲) به‌ازای هر x و y در V صدق کند **یک به یک** بر V نامیده می‌شود.

برهان. فرض‌کنیم T معکوس S داشته‌و $T(x) = T(y)$. می‌خواهیم ثابت کنیم $x = y$ ، با اعمال S معلوم می‌شودکه $S[T(x)] = S[T(y)]$ ؛ چون $S[T(x)] = x$ و $S[T(y)] = y$ ، نتیجه می‌شود که $x = y$ ، و این ثابت می‌کند که هر تابع معکوس چپ دار بر قلمرو خود یک به یک است.

حال عکس قضیه را ثابت می‌کنیم. فرض‌کنیم T بر V یک به یک باشد. تابعی‌مانند $S: T(V) \to V$ نشان می‌دهیم که معکوس چپ T باشد. گوییم هرگاه $y \in T(V)$ ، به‌ازای

x ی در V ، $y = T(x)$. بنابـر (۶۰۲) ، **درست یک** x در V هست کـه به ازای آن $y = T(x)$. $S(y)$ را مساوی این x تعریف می‌کنیم ؛ یعنی ، S را بر $T(V)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$S(y) = x \quad \text{یعنی} \quad T(x) = y \cdot$$

در این صورت ، به‌ازای هر x در V داریم $S[T(x)] = x$ ؛ در نتیجه ، $ST = I_V$. لذا ، این S یک معکوس چپ T می‌باشد .

تعریف . فرض کنیم $T: V \to W$ بر V یک به‌یک باشد . **معکوس چپ منحصر بفرد** T (که می‌دانیم **معکوس راست** نیز هست) با T^{-1} نموده می‌شود . می‌گوییم T **معکوسپذیر** است ، و T^{-1} را **معکوس** T می‌نامیم .

نتایج این بخش در باب توابع دلخواه است . حال این مفاهیم را برای تبدیلات خطی به کار می‌بریم .

۷۰۲ تبدیلات خطی یک‌به‌یک

در این بخش ، V و W فضاهایی خطی و دارای یک اسکالر هستند ، و $T: V \to W$ یک تبدیل خطی در $\mathscr{L}(V, W)$ است . خطی بودن T به ما توان بیان خاصیت یک به یک را به چند طریق معادل می‌بخشد .

قضیهٔ ۱۰۰۲ . ***فرض کنیم $T: V \to W$ یک تبدیل خطی در $\mathscr{L}(V, W)$ باشد . در این صورت ، احکام زیر با هم معادل هستند :***

(آ) T بر V یک به یک است ؛

(ب) T معکوسپذیر است ، و معکوسش $T^{-1}: T(V) \to V$ خطی است ؛

(پ) به‌ازای هر x در V ، $T(x) = O$ ایجاب می‌کنـد که $x = O$ ؛ یعنی ، فضای پوچ $N(T)$ فقط شامل عنصر صفر V است .

برهان . ثابت می‌کنیم (آ) ایجاب می‌کند (ب) را ، (ب) ایجاب می‌کند (پ) را ، و (پ) ایجاب می‌کند (آ) را . ابتدا فرض کنیم (آ) برقرار باشد . پس T (بنابر قضیهٔ

۹.۲) معکوس‌دارد، و باید نشان دهیم که T^{-1} خطی است. برای این‌کار دو عنصردلخواه u و v را در $T(V)$ اختیار می‌کنیم. دراین صورت، به‌ازای x و y ی در V ، $u = T(x)$ و $v = T(y)$. چون T خطی است، به‌ازای هر دو اسکالر a و b داریم

$$au + bv = aT(x) + bT(y) = T(ax + by).$$

پس، با اعمال T^{-1} ، داریم

$$T^{-1}(au + bv) = ax + by = aT^{-1}(u) + bT^{-1}(v) ;$$

در نتیجه، T^{-1} خطی است. لذا، (آ) حکم (ب) را ایجاب می‌کند.

حال فرض کنیم (ب) برقرار باشد. x ی در V اختیار می‌کنیم بطوری که $T(x) = O$. چون T^{-1} خطی است، با اعمال آن داریم $x = T^{-1}(O) = O$. لذا، (ب) نیز حکم (پ) را ایجاب می‌کند.

بالاخره، فرض‌کنیم (پ) برقرار باشد. دو عنصر دلخواه u و v را در V که $T(u) = T(v)$ اختیار می‌کنیم. بنابر خطی بودن، $T(u - v) = T(u) - T(v) = O$ ؛ در نتیجه، $u - v = O$. لذا، T بر V یک به یک است، و برهان قضیه تمام خواهد بود.

زمانی که V با بعد متناهی است، خاصیت یک به یک را می‌توان برحسب استقلال و بعدیت، به صورت آمده در قضیهٔ زیر، تنظیم کرد.

قضیهٔ ۱۱.۲ . فرض‌کنیم $T: V \to W$ یک‌تبدیل‌خطی در $\mathscr{L}(V, W)$ بوده، و V با بعد متناهی باشد، مثلاً " $\dim V = n$. دراین صورت، احکام زیر با هم معادل هستند:

(آ) T بر V یک بیک یک است؛

(ب) هرگاه $e_1, \ldots, e_p$ عنصرهایی مستقل در V باشند، $T(e_1), \ldots, T(e_p)$ عنصرهایی مستقل در $T(V)$ اند؛

(پ) $\dim T(V) = n$ ؛

(ت) هرگاه $\{e_1, \ldots, e_n\}$ یک‌پایهٔ V باشد، $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ یک‌پایهٔ $T(V)$ می‌باشد.

برهان. ثابت می‌کنیم (آ) حکم (ب)، (ب) حکم (پ)، (پ) حکم (ت)، و (ت) حکم (آ) را ایجاب می‌کند. فرض‌کنیم (آ) برقرار باشد. همچنین، $e_1, \ldots, e_p$ عنصرهای مستقلی از V بوده و عنصرهای $T(e_1), \ldots, T(e_p)$ را در $T(V)$ در نظر می‌گیریم. فرض

کنیم به‌ازای اسکالرهایی چون $c_1, \ldots, c_p$

$$\sum_{i=1}^{p} c_i T(e_i) = O \ .$$

بنابر خطی بودن، داریم

$$T\left(\sum_{i=1}^{p} c_i e_i\right) = O \ ;$$

و در نتیجه، چون T یک به یک است،

$$\sum_{i=1}^{p} c_i e_i = O \ .$$

اما $e_1, \ldots, e_p$ مستقل اند، پس $c_1 = \cdots = c_p = 0$. لذا، (آ) حکم (ب) را ایجاب می‌کند.

حال فرض‌کنیم (ب) برقرار باشد. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ را یک پایهٔ V می‌انگاریم. بنابر (ب)، n عنصر $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ در $T(V)$ مستقل‌اند. بنابر این، $\dim T(V) \geq n$. اما، بنابر قضیهٔ ۳۰۲، داریم $\dim T(V) \leq n$. لذا، $\dim T(V) = n$؛ و در نتیجه، (ب) نیز حکم (پ) را ایجاب می‌کند.

حال فرض کنیم (پ) برقرار باشد، و $\{e_1, \ldots, e_n\}$ را یک پایهٔ V می‌انگاریم. عنصر دلخواه y را در $T(V)$ اختیار می‌کنیم. پس به‌ازای x ی در V، $y = T(x)$؛ و درنتیجه، خواهیم داشت

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \text{ ؛ و لذا، } y = T(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(e_i) \ .$$

بنابر این، $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ فضای $T(V)$ را می‌پیماید. اما فرض کرده‌ایم $\dim T(V) = n$، پس $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ یک پایهٔ $T(V)$ می‌باشد. بنابر این، (پ) نیز حکم (ت) را ایجاب می‌کند.

بالاخره، فرض کنیم (ت) برقرار باشد. ثابت می‌کنیم $T(x) = O$ ایجاب می‌کند که $x = O$. فرض کنیم $\{e_1, \ldots, e_n\}$ پایه‌ای از V باشد. اگر $x \in V$، می‌توانیم بنویسیم

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \text{ ؛ و در نتیجه، } T(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(e_i) \ .$$

اگر $T(x) = O$، چون $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ مستقل‌اند، $c_1 = \cdots = c_n = 0$. بنابراین، $x = 0$؛

درنتیجه، T بر V یک‌به‌یک است. پس (ت) نیز حکم (آ) را ایجاب می‌کند، و برهان تمام خواهد بود.

۸۰۲ تمرین

۱. فرض کنید $V = \{0, 1\}$، و تمام توابع $T: V \to V$ را توصیف کنید. رویهم چهار تابع وجود دارد. آنها را T_1, T_2, T_3, T_4 نامیده، جدول ضربی بسازید که ترکیب هر جفت از آنها را نشان دهد. کدام توابع بر V یک به یک اند و معکوسهای آنها چیستند؟

۲. فرض کنید $V = \{0, 1, 2\}$، و تمام توابع $T: V \to V$ را که $T(V) = V$ توصیف کنید. رویهم شش تابع وجود دارد. آنها را $T_1, \ldots, T_6$ نامیده، جدول ضربی بسازید که ترکیب هر جفت از آنها را نشان دهد. کدام توابع بر V یک به یک اند ومعکوسهای آنها چیستند؟

در تمرینهای ۳ تا ۱۲، تابع $T: V_2 \to V_2$ با فرمولی تعریف شده که $T(x, y)$ را، که (x, y) نقطهٔ دلخواهی در V_2 است، به‌دست می‌دهد. درهرحالت، معین کنید T بر V_2 یک به‌یک‌است یانه. درصورت بودن، بردآن $T(V_2)$ را توصیف کنید. فرض کنید به‌ازای‌هرنقطهٔ (u, v) در $T(V_2)$، $(x, y) = T^{-1}(u, v)$، وفرمولهایی برای تعیین x و y و برحسب u و v ارائه دهید.

۳. $T(x, y) = (y, x)$.

۴. $T(x, y) = (x, -y)$.

۵. $T(x, y) = (x, 0)$.

۶. $T(x, y) = (x, x)$.

۷. $T(x, y) = (x^2, y^2)$.

۸. $T(x, y) = (e^x, e^y)$.

۹. $T(x, y) = (x, 1)$.

۱۰. $T(x, y) = (x + 1, y + 1)$.

۱۱. $T(x, y) = (x - y, x + y)$.

۱۲. $T(x, y) = (2x - y, x + y)$.

در تمرینهای ۱۳ تا ۲۰، تابع $T: V_3 \to V_3$ با فرمولی تعریف شده که $T(x, y, z)$ را، که (x, y, z) نقطهٔ دلخواهی در V_3 است، به‌دست می‌دهد. درهر حالت، تعیین کنید T بر V_3 یک به یک است یانه. درصورت‌بودن، بردآن $T(V_3)$ را توصیف‌کنید. فرض کنید به ازای هر نقطهٔ (u, v, w) در $T(V_3)$، $(x, y, z) = T^{-1}(u, v, w)$، وفرمولهایی برای تعیین x، y، و z برحسب u، v، و w ارائه دهید.

۱۳. $T(x, y, z) = (z, y, x)$.

۱۴. $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.

۱۵ . $T(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$.
۱۶ . $T(x, y, z) = (x, y, x + y + z)$.

۱۷ . $T(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z - 1)$.
۱۸ . $T(x, y, z) = (x + 1, y + 2, z + 3)$.

۱۹ . $T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$.
۲۰ . $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$.

۲۱ . فرض کنید $T: V \to V$ تابعی باشد که V را بتوی آن می‌نگارد . توانها به استقرا وبا فرمولهای $T^0 = I$ ؛ بەازای $n \geq 1$ ، $T^n = TT^{n-1}$ تعریف می‌شوند . ثابت کنید قانون شرکتپذیری برای ترکیب قانون نماها ، یعنی $T^mT^n = T^{m+n}$ ، را ایجاب می‌کند . اگر T معکوسپذیر باشد ، ثابت کنید T^n نیز معکوسپذیر است و $(T^n)^{-1} = (T^{-1})^n$.

در تمرینهای ۲۲ تا ۲۵ ، S و T تابعهایی هستند با قلمرو V و مقادیر در V . در حالت کلی ، $ST \neq TS$. اگر $ST = TS$ ، می‌گوییم که S و T تعویض می‌شوند .

۲۲ . ثابت کنید که اگر S و T تعویض شوند ، بە ازای هر عدد صحیح $n \geq 0$ ، $(ST)^n = S^nT^n$.

۲۳ . ثابت کنید هرگاه S و T معکوسپذیر باشند ، ST نیز معکوسپذیر است و $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$. به عبارت دیگر ، معکوس ST ترکیب معکوسها ، به ترتیب عکس ، است .

۲۴ . ثابت کنید هرگاه S و T معکوسپذیر باشند و تعویض شوند ، معکوسهای آنها نیز تعویض می‌شوند .

۲۵ . فرض کنید V یک فضای خطی باشد ، و ثابت کنید که اگر S و T تعویض شوند ،

$(S + T)^2 = S^2 + 2ST + T^2$ و $(S + T)^3 = S^3 + 3S^2T + 3ST^2 + T^3$.

این فرمولها در صورت $ST \neq TS$ چطور باید اصلاح شوند ؟

۲۶ . فرض کنید S و T تبدیلاتی خطی از V_3 بتوی V_3 باشند که با فرمولهای

$S(x, y, z) = (z, y, x)$ و $T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$ ،

که در آنها (x, y, z) نقطهٔ دلخواهی از V_3 است ، تعریف شده‌اند .

(آ) نقش (x, y, z) را تحت هریک از تبدیلات زیر معین کنید :

$$ST,\ TS,\ ST - TS,\ S^2,\ T^2,\ (ST)^2,\ (TS)^2,\ (ST - TS)^2.$$

(ب) ثابت کنید S و T بر V_3 یک به یک است ، و نقش (u, v, w) را تحت هریک از تبدیلات زیر بیابید :

$$S^{-1},\ T^{-1},\ (ST)^{-1},\ (TS)^{-1}$$

(پ) نقش (x, y, z) را تحت $(T - I)^n$ به‌ازای هر $n \geq 1$ بیابید.

۲۷ . فرض کنید V فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ باشد. همچنین، D عملگر مشتقگیری، و T عملگر انتگرالگیری باشد که هر چند جمله‌ای p را بروی چند جمله‌ای q که با $q(x) = \int_0^x p(t)\, dt$ داده می‌شود می‌نگارد. ثابت کنید $DT = I_V$ ولی $TD \neq I_V$، و فضای پوچ و برد TD را توصیف کنید.

۲۸ . فرض کنید V فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ باشد. همچنین، D عملگر مشتقگیری بوده، و T تبدیل خطیی باشد که $p(x)$ را بروی $xp'(x)$ می‌نگارد.

(آ) فرض کنید $p(x) = 2 + 3x - x^2 + 4x^3$، و نقش p را تحت هریک از تبدیلات زیر بیابید:

$$D,\ T,\ DT,\ TD,\ DT - TD,\ T^2D^2 - D^2T^2\ .$$

(ب) p هایی را در V بیابید که $T(p) = p$.

(پ) p هایی را در V بیابید که $(DT - 2D)(p) = O$.

(ت) p هایی را در V بیابید که $(DT - TD)^n(p) = D^n(p)$.

۲۹ . فرض کنید V و D مثل تمرین ۲۸ باشند ولی T تبدیل خطیی باشد که $p(x)$ را بروی $xp(x)$ می‌نگارد. ثابت کنید $DT - TD = I$ و، به‌ازای $n \geq 2$، $DT^n - T^nD = nT^{n-1}$.

۳۰ . فرض کنید T و S در $\mathscr{L}(V, V)$ بوده و $ST - TS = I$. ثابت کنید به ازای هر $n \geq 1$، $ST^n - T^nS = nT^{n-1}$.

۳۱ . فرض کنید V فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ باشد. همچنین، R, S, T توابعی باشند که چند جمله‌ای دلخواه $p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ در V را بروی چند جمله‌ایهای $r(x), s(x), t(x)$ می‌نگارند، که

$$r(x) = p(0)\,, \qquad s(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}\,, \qquad t(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{k+1}\,.$$

(آ) فرض کنید $p(x) = 2 + 3x - x^2 + x^3$، و نقش p را تحت هریک از تبدیلات زیر بیابید:

$$R,\ S,\ T,\ ST,\ TS,\ (TS)^2,\ T^2S^2,\ S^2T^2,\ TRS,\ RST\ .$$

(ب) ثابت کنید R و S و T خطی‌اند، و فضای پوچ و برد هریک را مشخص کنید.

(پ) ثابت کنید T بر V یک به‌یک است، و معکوس آن را معین کنید.

(ت) اگر $n \geq 1$، $(TS)^n$ و S^nT^n را برحسب I و R بیان کنید.

۳۲ . به تمرین ۲۸ در بخش ۴۰۲ باز می‌گردیم . آیا T بر V یک به یک است ؟ درصورت بودن ، معکوس آن را وصف کنید .

۹۰۲ تبدیلات خطی با مقادیر مقرر

همانطور که قضیهٔ زیر توضیح داده ، اگر V با بعد متناهی باشد ، همیشه می‌توان تبدیل خطی $T: V \to W$ را طوری ساخت که در عنصرهای پایهٔ V مقادیر مقرر داشته باشد .

قضیهٔ ۱۲۰۲ . فرض‌کنیم $e_1, \dots, e_n$ یک پایهٔ فضای خطی و n بعدی V بوده و $u_1, \dots, u_n$ ، n عنصر دلخواه در فضای خطی W باشد . در این‌صورت ، یک‌و فقط یک‌تبدیل خطی مانند $T: V \to W$ هست که

$$\text{به‌ازای } k = 1, 2, \dots, n \text{ ، } T(e_k) = u_k \, . \qquad (۷۰۲)$$

این T عنصر دلخواه x در V را به‌این صورت می‌نگارد :

$$\text{هرگاه } x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \text{ ، } T(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k \, . \qquad (۸۰۲)$$

برهان . هر x در V را می‌توان به‌طور منحصر بفرد به صورت ترکیبی خطی‌از $e_1, \dots, e_n$ بیان کرد ، ضریبهای $x_1, \dots, x_n$ مولفه‌های x نسبت به پایهٔ مرتب $(e_1, \dots, e_n)$ اند . اگر T با (۸۰۲) تعریف شود ، به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که T خطی است . اگر به‌ازای k ای $x = e_k$ ، تمام مولفه‌های x جز مولفهٔ k ام که یک است ، صفرند ؛ و در نتیجه ، طبق مطلوب ، (۸۰۲) ایجاب می‌کند که $T(e_k) = u_k$.

برای اثبات اینکه فقط یک تبدیل خطی صادق در (۷۰۲) وجود دارد ، فرض‌کنیم T' تبدیل دیگری باشد و $T'(x)$ را حساب می‌کنیم . داریم

$$T'(x) = T'\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k T'(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k = T(x) \, .$$

چون به‌ازای هر x در V ، $T'(x) = T(x)$ ، خواهیم داشت $T' = T$ ، که برهان را تمام خواهد کرد .

مثال . تبدیل خطی $T: V_2 \to V_2$ را طوری معین کنید که عنصرهای پایهٔ $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ و

$j = (0, 1)$ را به‌صورت زیر بنگارد:

$$T(i) = i + j, \qquad T(j) = 2i - j.$$

حل. اگر $x = x_1 i + x_2 j$ عنصر دلخواهی از V_2 باشند، $T(x)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$T(x) = x_1 T(i) + x_2 T(j) = x_1(i + j) + x_2(2i - j) = (x_1 + 2x_2)i + (x_1 - x_2)j$$

۱۰۰۲ نمایشهای ماتریسی تبدیلات خطی

قضیهٔ ۱۲۰۲ نشان می‌دهد که تبدیل خطی $T: V \to W$ از فضای خطی و با بعد متناهی V کاملا" با عملش بر مجموعهٔ مفروض $e_1, \ldots, e_n$ از بردارهای پایه مشخص می‌شود. حال فرض‌کنیم فضای W نیز با بعد متناهی بوده، مثلا" $\dim W = m$ ، و $w_1, \ldots, w_m$ پایه‌ای از W باشد.

(بعدهای n و m ممکن است مساوی باشند یا نباشند.) چون T مقادیرش در W است، هر عنصر $T(e_k)$ را می‌توان بطور منحصر بفرد به‌صورت ترکیبی خطی از عناصر پایهٔ $w_1, \ldots, w_m$ نوشت؛ مثلا"، به‌صورت

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{m} t_{ik} w_i ,$$

که در آن $t_{1k}, \ldots, t_{mk}$ مولفه‌های $T(e_k)$ نسبت به پایهٔ مرتب $(w_1, \ldots, w_m)$ اند. ما m تایی $(t_{1k}, \ldots, t_{mk})$ را به‌صورت قائم نشان می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} t_{1k} \\ t_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{mk} \end{bmatrix} . \qquad (۹\cdot۲)$$

این آرایه یک **بردار ستونی** یا یک **ماتریس ستونی** نام دارد. برای هریک از n عنصر $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ یک بردار ستونی داریم. با گذاردنشان در کنار هم و قرار یک جفت کروشه در اطرافشان به آرایهٔ مستطیلی شکل زیر دست می‌یابیم:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}.$$

این آرایه یک **ماتریس** مرکب از m **سطر** و n **ستون** نامیده می‌شود.

ما آن را یک ماتریس m در n و یا یک ماتریس $m \times n$ می‌نامیم. سطر اول ماتریس $1 \times n$، $(t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{1n})$ است. ماتریس $m \times 1$ (۹۰۲) ستون k ام است. اسکالرهای t_{ik} طوری اندیسگذاری شده‌اند که اولین زیرنویس، یعنی i، اولین **سطر**، و دومین زیرنویس، یعنی k، **معرف ستونی** است که t_{ik} درآن ظاهر می‌شود. ما t_{ik} را **درایه** ik یا **عنصر** ik ماتریس می‌نامیم. نماد فشرده‌تر

$$(t_{ik})_{i,k=1}^{m,n} \quad \text{یا} \quad (t_{ik})$$

نیز برای ماتریسی که درایهٔ ik آن t_{ik} است به‌کار می‌رود.

پس، هر تبدیل خطی T از فضای n بعدی V بتوی فضای m بعدی W یک ماتریس $m \times n$ مانند (t_{ik}) را به دست می‌دهد که ستونهای آن از مولفه‌های $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ نسبت به پایهٔ $(w_1, \ldots, w_m)$ تشکیل شده است. این ماتریس را **نمایش ماتریسی** T نسبت به پایهٔ مرتب $(e_1, \ldots, e_n)$ از V و $(w_1, \ldots, w_m)$ از W می‌نامیم. به محض دانستن ماتریس (t_{ik})، مولفه‌های هر عنصر $T(x)$ نسبت به پایهٔ $(w_1, \ldots, w_m)$ را می‌توان بنحوی که درقضیهٔ زیروصف‌شده مشخص کرد.

قضیهٔ ۱۳۰۲. فرض کنیم T یک تبدیل خطی در $\mathscr{L}(V, W)$ باشد، که $\dim V = n$ **و** $\dim W = m$. **همچنین،** $(e_1, \ldots, e_n)$ **و** $(w_1, \ldots, w_m)$ **پایه‌های مرتبی از V و W بوده و (t_{ik}) ماتریس $m \times n$ی باشد که درایه‌هایش با معادلات زیر مشخص می‌شود:**

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{m} t_{ik} w_i \,،\; k = 1, 2, \ldots, n \quad \text{به‌ازای} \qquad (۱۰۰۲)$$

در این صورت، عنصر دلخواه

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \qquad (۱۱۰۲)$$

در V با مولفه‌های $(x_1, \ldots, x_n)$ نسبت به $(e_1, \ldots, e_n)$ به وسیلهٔ T بروی عنصر

$$T(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i \qquad (۱۲۰۲)$$

در W با مولفه‌های $(y_1, \ldots, y_m)$ نسبت بـــه $(w_1, \ldots, w_m)$ نگاشته می‌شود. y_i ها با معادلات خطی زیر به مولفه‌های x مربوط می‌گردند:

$$\text{به‌ازای } i = 1, 2, \ldots, m \text{ ،} \quad y_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k \text{ .} \qquad (۱۳۰۲)$$

برهان. با اعمال T در هر طرف (۱۱۰۲) و استفاده از (۱۰۰۲) نتیجه می‌شود که

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k T(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{m} t_{ik} w_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k \right) w_i = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i \, ,$$

که در آن هر y_i از (۱۳۰۲) به دست می‌آید. این برهان را تمام خواهد کرد.

بااختیارپایه‌های $(e_1, \ldots, e_n)$ و $(w_1, \ldots, w_m)$ برای V و W ، هر تبدیل خطی $T: V \to W$ صاحب یک نمایش ماتریسی مانند (t_{ik}) می‌شود. بعکس، اگر از mn اسکالر دلخواه که‌به شکل‌ماتریس مستطیلی شکل (t_{ik}) آراسته شده شروع و برای V و W یک‌جفت پایهٔ مرتب اختیار کنیم، به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که درست یک تبدیل خطی مانند $T: V \to W$ هست که این نمایش ماتریسی را دارد. برای این‌کار کافی است T را در عنصرهای پایهٔ V با معادلات (۱۰۰۲) تعریف‌کنیم. در این صورت، طبق قضیهٔ ۱۲۰۲، یک و فقط یک تبدیل خطی مانند $T: V \to W$ با این مقادیر مقرر وجود دارد. حال نقش $T(x)$ نقطهٔ دلخواه x در V از معادلات (۱۲۰۲) و (۱۳۰۲) به‌دست خواهد آمد.

مثال ۱. ساختن تبدیل خطی یک ماتریس. با ماتریس 2×3

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

شروع کرده، پایهٔ معمولی بردارهای یکهٔ مختصات را برای V_3 و اختیار می‌کنیم. پس ماتریس فوق نمایش تبدیل خطی $T: V_3 \to V_2$ است که بردار دلخواه (x_1, x_2, x_3) در V_3 را طبق معادلات خطی

$$y_1 = 3x_1 + \ x_2 - 2x_3 \, ,$$

$$y_2 = x_1 + 0x_2 + 4x_3$$

بروی بردار (y_1, y_2) در V_2 می‌نگارد.

مثال ۲. ساختن نمایش ماتریسی یک تبدیل خطی. فرض کنیم V فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ باشد که درجه‌شان از 3 نابیشتر است. این فضا دارای‌بعد 4 است، وپایهٔ $(1, x, x^2, x^3)$ رابرای‌آن‌اختیار می‌کنیم. فرض کنیم D عملگرمشتقگیری باشدکه‌هرچند جمله‌ای $p(x)$ در V را بروی‌مشتقش $p'(x)$ می‌نگارد. می‌توان D راتبدیلی خطی از V بتوی W گرفت، که W فضای 3 بعدی تمام‌چند جمله‌ایهای حقیقی با درجهٔ نابیشتراز 2 است. در W پایهٔ $(1, x, x^2)$ را اختیار می‌کنیم. برای یافتن نمایش‌ماتریسی D نسبت‌به این پایه‌ها، هر عنصر پایهٔ V را تبدیل (مشتق می‌گیریم) و آن را به‌صورت ترکیبی خطی از عنصرهای پایهٔ W بیان می‌کنیم. لذا، داریم

$$D(1) = 0 = 0 + 0x + 0x^2, \qquad D(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2,$$

$$D(x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2, \qquad D(x^3) = 3x^2 = 0 + 0x + 3x^2.$$

ضرایب این چند جمله‌ایها **ستونهای** نمایش ماتریسی D را مشخص می‌کنند. پس نمایش مطلوب ماتریس 3×4 زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

برای تاکید در اینکه‌نمایش ماتریسی نه فقط به عناصر پایه بلکه به ترتیب آنها نیز بستگی دارد، ترتیب عناصر پایه در W را معکوس و، در عوض، از پایهٔ مرتب $(x^2, x, 1)$ استفاده می‌کنیم. دراین صورت، عناصر پایهٔ V به همان چند جمله‌ایهای بالا تبدیل می‌شوند، منتها مولفه‌های این چند جمله‌ایها نسبت به پایهٔ جدید $(x^2, x, 1)$ به ترتیب عکس ظاهر می‌شوند. لذا، نمایش ماتریسی D در اینجا

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

خواهد شد .

حال ، با استفاده از پایهٔ $(1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)$ برای V و پایهٔ $(1, x, x^2)$ برای W ، نمایش ماتریسی سومی برای D پیدا می‌کنیم . عناصر پایهٔ V به صورت زیر تبدیل می‌یابند :

$$D(1) = 0, \qquad D(1+x) = 1, \qquad D(1+x+x^2) = 1+2x,$$

$$D(1+x+x^2+x^3) = 1+2x+3x^2 \; ;$$

در نتیجه ، نمایش ماتریسی در این حالت عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۱۱۰۲ ساختن نمایش ماتریسی به شکل قطری

چون از یک تبدیل خطی می‌توان با اختیار پایه‌های مختلف نمایشهای ماتریسی متفاوتی ساخت ، طبیعی است با اختیار پایه‌هایی سعی کنیم ماتریس حاصل شکل سادهٔ خاصی داشته باشد . قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که می‌توان تمام درایه‌ها را ، جز احتمالا" در امتداد قطری که از گوشهٔ بالا یی چپ ماتریس شروع شده ، 0 گرداند . روی این قطر یک رشته یک داریم که پس از آن صفرها آمده‌اند ، تعداد یکها مساوی رتبهٔ تبدیل است . ماتریس (t_{ik}) که در آن وقتی $i \neq k$ ، $t_{ik} = 0$ ، یک **ماتریس قطری** نامیده می‌شود .

قضیهٔ ۱۴۰۲ . ***فرض کنیم V و W فضاهایی خطی با بعد متناهی باشند ، با $\dim V = n$ و $\dim W = m$. همچنین ، $T \in \mathscr{L}(V, W)$ و T رتبهٔ $r = \dim T(V)$ باشد . در این صورت ، پایه‌ای مانند $(e_1, \ldots, e_n)$ از V و پایه‌ای مانند $(w_1, \ldots, w_m)$ از W هست بطوری که***

به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, r$ ، $T(e_i) = w_i$ (۱۴۰۲)

و

به‌ازای $i = r+1, \ldots, n$ ، $T(e_i) = O$. (۱۵۰۲)

لذا ، تمام درایه‌های ماتریس (t_{ik}) از T نسبت به این پایه‌ها صفرند جز r درایهٔ قطری

$$t_{11} = t_{22} = \cdots = t_{rr} = 1 .$$

برهان. ابتدا برای W یک پایه می‌سازیم. چون $T(V)$ زیر فضای W است و $\dim T(V) = r$، فضای $T(V)$ پایه‌ای r عنصری در W، مثلاً $w_1, \ldots, w_r$، را دارد. طبق قضیهٔ ۷۰۱، این عنصرها زیر مجموعه‌ای از یک پایهٔ W را تشکیل می‌دهند. پس می‌توان عنصرهای $w_{r+1}, \ldots, w_m$ را به این زیر مجموعه افزود بطوری که

$$(w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_m) \tag{۱۶۰۲}$$

یک پایه برای W باشد.

حال برای V یک پایه می‌سازیم. هریک از r عنصر w_i در (۱۶۰۲) نقش دست‌کم یک عنصر در V است. یکی از این عنصرها را در V اختیار می‌کنیم و آن را e_i می‌نامیم. پس، به ازای $i = 1, 2, \ldots, r$، $T(e_i) = w_i$؛ در نتیجه، (۱۴۰۲) برقرار است. حال فرض کنیم k بعد فضای پوچ $N(T)$ باشد. بنابر قضیهٔ ۳۰۲، داریم $n = k + r$. چون $\dim N(T) = k$، فضای $N(T)$ پایه‌ای مرکب از k عنصر در V دارد که آنها را به $e_{r+1}, \ldots, e_{r+k}$ نشان می‌دهیم. معادلهٔ (۱۵۰۲) برای هریک از این عنصرها برقرار است. پس، برای اتمام برهان، باید نشان داد که مجموعهٔ مرتب

$$(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{r+k}) \tag{۱۷۰۲}$$

یک پایهٔ V است. گوییم چون $\dim V = n = r + k$، کافی است نشان دهیم این عنصرها مستقل هستند. فرض کنیم ترکیبی خطی از آنها صفر باشد؛ مثلاً،

$$\sum_{i=1}^{r+k} c_i e_i = O. \tag{۱۸۰۲}$$

با اعمال T و استفاده از معادلات (۱۴۰۲) و (۱۵۰۲) درمی‌یابیم که

$$\sum_{i=1}^{r+k} c_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{r} c_i w_i = O.$$

اما $w_1, \ldots, w_r$ مستقل‌اند؛ و در نتیجه، $c_1 = \cdots = c_r = 0$. بنابراین، r جملهٔ اول (۱۸۰۲) صفر هستند، پس (۱۸۰۲) به

$$\sum_{i=r+1}^{r+k} c_i e_i = O$$

تقلیل می‌یابد. اما $e_{r+1}, \ldots, e_{r+k}$ مستقل‌اند، زیرا یک پایه برای $N(T)$ تشکیل می‌دهند؛ و در نتیجه، $c_{r+1} = \cdots = c_{r+k} = 0$. لذا، تمام c_i ها در (۱۸۰۲) صفر می‌باشند؛ و در

نتیجه، عنصرهای (۱۷۰۲) یک پایه برای V تشکیل می‌دهند. این برهان را تمام خواهد کرد.

مثال. به مثال ۲ در بخش ۱۰۰۲ باز می‌گردیم، که در آن D عملگر مشتقگیری است که فضای V مرکب از چند جمله‌ایهای با درجهٔ نابیشتر از 3 را بتوی فضای W مرکب از چند جمله‌ایهای با درجهٔ نابیشتر از 2 می‌نگارد. در این مثال $T(V) = W$، پس T دارای رتبهٔ 3 است. روش اثبات قضیهٔ ۱۴۰۲ را به‌کار برده، پایه‌ای برای W، مثلاً" پایهٔ $(1, x, x^2)$ را، اختیار می‌کنیم. یک مجموعه از چند جمله‌ایها در V که بروی این عنصرها نگاشته می‌شوند عبارت است از $(x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{3}x^3)$. این مجموعه را با افزودن چند جمله‌ای ثابت 1، که پایهٔ فضای پوچ D است، وسیع می‌سازیم تا پایه‌ای برای V به‌دست آید. لذا، اگر از پایهٔ $(x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{3}x^3, 1)$ برای V و پایهٔ $(1, x, x^2)$ برای W استفاده کنیم، نمایش ماتریسی نظیر برای D به شکل قطری

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

خواهد بود.

۱۲۰۲ تمرین

در تمام تمرینهای مربوط به فضای برداری V_n، پایهٔ معمولی بردارهای یکهٔ مختصات اختیار شود مگر آنکه پایهٔ دیگری تصریح شده باشد. در تمرینهای مربوط به ماتریس تبدیل خطی $T: V \to W$ که $V = W$، در هر دوی V و W یک پایه اختیار شود مگر آنکه انتخابی جز این تصریح شده باشد.

۱. ماتریس هریک از تبدیلات خطی زیر از V_n بتوی V_n را مشخص کنید:

(آ) تبدیل همانی؛

(ب) تبدیل صفر؛

(پ) ضرب در اسکالر ثابت c.

۲. ماتریس هریک از تصویرهای زیر را مشخص کنید:

(آ) $T: V_3 \to V_2$، که در آن $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$؛

(ب) $T: V_3 \to V_2$، که در آن $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$؛

(پ) $T: V_5 \to V_3$ ، که درآن $T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4)$.

۳ . تبدیل خطی $T: V_2 \to V_2$ بردارهای پایهٔ $\boldsymbol{i}$ و $\boldsymbol{j}$ را این‌طور می‌نگارد :

$$T(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \qquad T(\boldsymbol{j}) = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} .$$

(آ) $T(3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j})$ و $T^2(3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j})$ را برحسب $\boldsymbol{i}$ و $\boldsymbol{j}$ حساب کنید .

(ب) ماتریسهای T و T^2 را معین کنید .

(پ) قسمت (ب) را در حالتی حل کنید که $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ با (e_1, e_2) عوض شده‌باشد ، که‌در آن $e_1 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}, e_2 = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.

۴ . تبدیل خطی $T: V_2 \to V_2$ به صورت زیر تعریف شده است : منعکس هر بردار (x, y) را نسبت به محور y به دست آورده بعد طولش را دوبرابر می‌کنیم تا $T(x, y)$ حاصل شود . ماتریسهای T و T^2 را مشخص نمایید .

۵ . فرض کنید $T: V_3 \to V_3$ یک تبدیل خطی باشد بطوری که

$$T(\boldsymbol{k}) = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}, \qquad T(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i}, \qquad T(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} .$$

(آ) $T(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})$را حساب کنید و پوچه و رتبهٔ T را مشخص نمایید .

(ب) ماتریس T را مشخص کنید .

۶ . برای تبدیل خطی تمرین ۵، هر دو پایه را (e_1, e_2, e_3) بگیرید‌که‌درآن $e_1 = (2, 3, 5)$ ، $e_2 = (1, 0, 0)$ ، $e_3 = (0, 1, -1)$ ، وماتریس T را نسبت به‌پایه‌های جدید معین‌نمایید .

۷ . تبدیل خطی $T: V_3 \to V_2$ بردارهای پایه را به‌صورت زیر می‌نگارد :

$$T(\boldsymbol{i}) = (0, 0), \; T(\boldsymbol{j}) = (1, 1), \; T(\boldsymbol{k}) = (1, -1) .$$

(آ) $T(4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$ را حساب کنید و پوچه و رتبهٔ T را مشخص نمایید .

(ب) ماتریس T را مشخص کنید .

(پ) ازپایهٔ $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ در V_3 وپایهٔ (w_1, w_2)در V_2 ، که $w_1 = (1, 1)$ ، $w_2 = (1, 2)$ ، استفاده کرده، ماتریس T را نسبت به این پایه‌ها مشخص کنید .

(ت) مبناهای (e_1, e_2, e_3) برای V_3 و(w_1, w_2) برای V_2 را طوری‌بیابید‌که‌ماتریس T نسبت به آنها به شکل قطری باشد .

۸ . تبدیل خطی $T: V_2 \to V_3$ بردارهای پایه را به این صورت می‌نگارد :

$$T(\boldsymbol{i}) = (1, 0, 1) \; , \; T(\boldsymbol{j}) = (-1, 0, 1) .$$

(آ) $T(2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j})$ را حساب کنید و پوچه و رتبهٔ T را مشخص نمایید .

(ب) ماتریس T را مشخص کنید .

(پ) پایه‌های (e_1, e_2) را برای V_2 و (w_1, w_2, w_3) را برای V_3 طوری بیابید که ماتریس T نسبت به آنها به شکل قطری باشد.

۹. تمرین ۸ را در حالتی حل کنید که $T(i) = (1, 0, 1)$ و $T(j) = (1, 1, 1)$.

۱۰. فرض کنید V و W فضاهایی خطی هریک با بعد 2 و هریک با پایهٔ (e_1, e_2) باشند. همچنین، $T: V \to W$ یک تبدیل خطی باشد بطوری که

$$T(e_1 + e_2) = 3e_1 + 9e_2, \ T(3e_1 + 2e_2) = 7e_1 + 23e_2 .$$

(آ) $T(e_2 - e_1)$ را حساب کنید و پوچه و رتبهٔ T را مشخص نمایید.

(ب) ماتریس T را نسبت به پایهٔ مفروض مشخص کنید.

(پ) پایهٔ (e_1, e_2) را برای V به‌کار برید، و پایهٔ جدیدی برای W به شکل $(e_1 + ae_2, 2e_1 + be_2)$ بیابید که ماتریس T نسبت به آنها به شکل قطری باشد.

در فضای خطی تمام توابع حقیقی، هریک از مجموعه‌های زیر مستقل است و یک زیر فضای با بعد متناهی از V را می‌پیماید. مجموعه را پایه‌ای از V بگیرید و فرض کنید $D: V \to V$ عملگر مشتقگیری باشد. درهر حالت، ماتریسهای D و D^2 را نسبت به این پایه پیدا کنید.

۱۱. $(\sin x, \cos x)$.

۱۲. $(1, x, e^x)$.

۱۳. $(1, 1 + x, 1 + x + e^x)$.

۱۴. (e^x, xe^x).

۱۵. $(-\cos x, \sin x)$.

۱۶. $(\sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x)$.

۱۷. $(e^x \sin x, e^x \cos x)$.

۱۸. $(e^{2x} \sin 3x, e^{2x} \cos 3x)$.

۱۹. پایهٔ $(1, x, x_2^2, x_3^3)$ را در فضای خطی V مرکب از همهٔ چندجمله‌ایهای حقیقی از درجهٔ نابیشتر از 3 اختیار کنید. فرض کنید D عملگر مشتقگیری بوده و $T: V \to V$ تبدیلی خطی باشد که $p(x)$ را بروی $x'p(x)$ می‌نگارد. ماتریس هریک از تبدیلات زیر را نسبت به پایهٔ داده شده معین کنید: (آ) T؛ (ب) DT؛ (پ) TD؛ (ت) $TD - DT$؛ (ث) T^2؛ (ج) $T^2D^2 - D^2T^2$.

۲۰. به تمرین ۱۹ بازمی‌گردیم. فرض کنید W نقش V تحت TD باشد. برای V و W پایه‌هایی بیابید که ماتریس DT نسبت به آنها به شکل قطری باشد.

۱۳.۲ فضاهای خطی از ماتریسها

دیدیم که‌چطورماتریسها به‌طورطبیعی به‌صورت نمایشهای تبدیلات خطی ظاهر می‌شوند.

ماتریسها را می‌توان اشیائی موجود به ذات خود، بدون آنکه لزوما" به تبدیلات خطی مربوط باشند، نیز در نظر گرفت. بدین ترتیب، ماتریسها ردهٔ دیگری از اشیاء ریاضی را تشکیل می‌دهند که بر آنها می‌توان اعمال جبری تعریف کرد. ارتباطشان با تبدیلات خطی می‌تواند انگیزهٔ این تعریفها باشد، لکن این ارتباط فعلا" نادیده گرفته می‌شود.

فرض کنیم m و n دو عدد صحیح مثبت بوده، و $I_{m,n}$ مجموعهٔ تمام جفتهای (i,j) از اعداد صحیح باشد که $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$. هر تابع مانند A که قلمروش $I_{m,n}$ باشد یک **ماتریس** $m \times n$ خوانده می‌شود. مقدار تابعی $A(i,j)$ **درایهٔ** ij یا **عنصر** ij ماتریس نام دارد و با a_{ij} نیز نموده می‌شود. رسم است که جمیع مقادیر تابعی را دریک آرایهٔ مستطیلی شکل مرکب از m سطر و n ستون نمایش می‌دهند، به این شکل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

عناصر a_{ij} می‌توانند اشیاء دلخواهی از هر نوع باشند. معمولا"، این عنصرها اعدادی حقیقی یا مختلط هستند، اما گاهی بجاست ماتریسهایی در نظر گرفته شود که عنصرهای آن اشیاء دیگری، مثلا" تابع، باشند. ما ماتریسها را با نماد فشرده‌تر

$$A = (a_{ij}) \quad \text{یا} \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$$

نیز نشان خواهیم داد. اگر $m = n$، ماتریس یک **ماتریس مربعی** نام دارد. هر ماتریس $1 \times n$ یک **ماتریس سطری**، و هر ماتریس $m \times 1$ یک **ماتریس ستونی** نامیده می‌شود.

دو تابع مساوی‌اند اگر و فقط اگر دارای یک قلمرو بوده و در هر عنصر از قلمرو یک مقدار را بگیرند. چون ماتریسها تابع هستند، دو ماتریس $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ مساوی‌اند اگر و فقط اگر تعداد سطرها و ستونهای آنها یکی بوده و به ازای هر جفت (i,j)، $a_{ij} = b_{ij}$.

حال فرض کنیم درایه‌ها اعداد (حقیقی یا مختلط) باشند، و جمع ماتریسها و ضرب در اسکالرها را به‌همان روش معمول برای توابع حقیقی یا مختلط تعریف می‌کنیم.

تعریف. هرگاه $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ دو ماتریس $m \times n$ بوده و c یک اسکالر باشد، ماتریسهای $A + B$ و cA را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad cA = (ca_{ij}).$$

مجموع فقط وقتی تعریف می‌شود که A و B یک اندازه داشته باشند.

مثال. هرگاه

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}،$$

داریم

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \qquad 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$(-1)B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

ماتریس صفر O را ماتریس $m \times n$ تعریف می‌کنیم که تمام عناصر آن 0 اند. بااین تعریفها، به آسانی می‌توان تحقیق کرد که گردآیهٔ تمام ماتریسهای $m \times n$ یک فضای خطی است. این فضای خطی را به $M_{m,n}$ نشان می‌دهیم. اگر درایه‌ها اعدادی حقیقی باشند، فضای $M_{m,n}$ یک فضای خطی حقیقی است. و اگر درایه‌ها مختلط باشند، $M_{m,n}$ یک فضای خطی مختلط می‌باشد. همچنین، به آسانی ثابت می‌شود که این فضا بعدش mn است. در واقع، یک پایهٔ $M_{m,n}$ از mn ماتریس تشکیل شده که یک درایهٔ مساوی 1 دارند و بقیه مساوی 0 . مثلاً"، شش ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

یک پایه برای مجموعهٔ تمام ماتریسهای 2×3 تشکیل می‌دهند.

۱۴۰۲ یکریختی بین تبدیلات خطی و ماتریسها

حال به رابطهٔ بین ماتریسها و تبدیلات خطی باز می‌گردیم. فرض کنیم V و W فضاهایی خطی با بعد متناهی بوده و $\dim V = n$ و $\dim W = m$. پایهٔ $(e_1, \ldots, e_n)$ را برای V و پایهٔ $(w_1, \ldots, w_m)$ را برای W اختیار می‌کنیم. دراین بحث، این پایه را ثابت نگه

می‌داریم. فرض کنیم $\mathscr{L}(V, W)$ فضای خطی تمام تبدیلات خطی از V بتوی W باشد. اگر $T \in \mathscr{L}(V, W)$، $m(T)$ را ماتریس T نسبت به پایه‌های فوق می‌انگاریم. یادآور می‌شویم که $m(T)$ به این صورت تعریف می‌شود:

نقش هر عنصرپایه‌مانند e_k به صورت‌ترکیبی‌خطی از عناصر پایهٔ W بیان‌می‌شود:

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{m} t_{ik} w_i \text{ ، به‌ازای } k = 1, 2, \ldots, n \quad (۱۹.۲)$$

ضریبهای اسکالر t_{ik} درایه‌های ik ماتریس $m(T)$ هستند. لذا، داریم

$$m(T) = (t_{ik})_{i,k=1}^{m,n}. \quad (۲۰.۲)$$

معادلهٔ (۲۰.۲) تابع جدید m را تعریف می‌کند که قلمروش $\mathscr{L}(V, W)$ بوده ومقادیرش ماتریسهایی در $M_{m,n}$ اند. چون هر ماتریس $m \times n$ ماتریس $m(T)$ به ازای T ای در $\mathscr{L}(V, W)$ است، برد m مساوی $M_{m,n}$ می‌باشد. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که تبدیل $m: \mathscr{L}(V, W) \to M_{m,n}$ بر $\mathscr{L}(V, W)$ خطی و یک به یک است.

قضیهٔ ۱۵.۲. قضیهٔ یکریختی. *به‌ازای هر S و T در $\mathscr{L}(V, W)$ و هر اسکالر c داریم*

$$m(S + T) = m(S) + m(T) \text{ و } m(cT) = cm(T)$$

بعلاوه،

$$m(S) = m(T) \text{ ایجاب می‌کند که } S = T \text{ ،}$$

در نتیجه، m بر $\mathscr{L}(V, W)$ یک به‌یک می‌باشد.

برهان. ماتریس $m(T)$ از ضریبهای t_{ik} در (۱۹.۲) تشکیل شده است. همچنین، ماتریس $m(S)$ از ضریبهای s_{ik} در معادلات زیر متشکل است:

$$S(e_k) = \sum_{i=1}^{m} s_{ik} w_i \text{ ، به‌ازای } k = 1, 2, \ldots, n \quad (۲۱.۲)$$

چون داریم

$$(S + T)(e_k) = \sum_{i=1}^{m} (s_{ik} + t_{ik}) w_i \quad \text{و} \quad (cT)(e_k) = \sum_{i=1}^{m} (ct_{ik}) w_i \text{ ،}$$

خواهیم داشت $m(S + T) = (s_{ik} + t_{ik}) = m(S) + m(T)$ و $m(cT) = (ct_{ik}) = cm(T)$. این خطی بودن m را ثابت می‌کند.

برای اثبات یک به یک بودن m ، فرض کنیم $m(S) = m(T)$ که در آن $S = (s_{ik})$ و $T = (t_{ik})$. معادلات (۱۹۰۲) و (۲۱۰۲) نشان می‌دهند که به ازای هر عنصر پایهٔ e_k ، $S(e_k) = T(e_k)$ ؛ در نتیجه، به‌ازای هر x در V ، $S(x) = T(x)$ ؛ و لذا، $S = T$.

تذکر. تابع m یک **یکریختی** نامیده می‌شود. m ، به‌ازای پایه‌های مفروضی، یک تناظر یک به یک بین مجموعهٔ تبدیلات خطی $\mathscr{L}(V, W)$ و مجموعهٔ ماتریسهای $m \times n$ ، $M_{m,n}$ برقرار می‌کند. اعمال جمع و ضرب در اسکالرها تحت این تناظر حفظ می‌شوند. فضاهای خطی $\mathscr{L}(V, W)$ و $M_{m,n}$ **یکریخت** گفته می‌شوند. ضمناً، قضیهٔ ۱۱۰۲ نشان می‌دهد که قلمرو یک تبدیل خطی یک به یک بعد برد خود را دارد. بنابراین، $\dim \mathscr{L}(V, W) = \dim M_{m,n} = mn$.

هرگاه $V = W$ و برای V و W یک پایه اختیار کنیم، ماتریس $m(I)$ که نظیر تبدیل همانی $I: V \to V$ است یک ماتریس قطری $n \times n$ است که هر درایهٔ قطری آن 1 و بقیه مساوی 0 اند. این ماتریس **ماتریس همانی** یا **ماتریس یکه** نامیده و با I یا I_n نموده می‌شود.

۱۵۰۲ ضرب ماتریسها

بعضی از تبدیلات خطی را می‌توان به‌وسیلهٔ ترکیب در هم ضرب کرد. حال ضرب ماتریسها را طوری تعریف می‌کنیم که حاصل ضرب دو ماتریس نظیر ترکیب تبدیلات خطیی باشد که آنها را نمایش می‌دهند.

یادآور شویم که اگر $S: V \to W$ و $T: U \to V$ تبدیلاتی خطی باشند، ترکیب آنها $ST: U \to W$ تبدیلی است خطی که به صورت زیر تعریف می‌شود:

به‌ازای هر x در U ، $ST(x) = S[T(x)]$.

فرض کنیم U ، V ، و W با بعد متناهی باشند، مثلاً،

$$\dim U = n, \qquad \dim V = p, \qquad \dim W = m.$$

برای U و V و W پایه‌هایی اختیار می‌کنیم. نسبت به این پایه‌ها، ماتریس $m(S)$ یک ماتریس $m \times p$ ، ماتریس T یک ماتریس $p \times n$ ، و ماتریس ST یک ماتریس $m \times n$ است. با تعریف ضرب ماتریسی زیر می‌توانیم رابطهٔ $m(ST) = m(S)m(T)$ را نتیجه بگیریم.

این رابطه خاصیت یکریختی را به حاصل ضربها تعمیم می‌دهد .

تعریف . فرض کنیم A یک ماتریس $m \times p$ باشد و B یک ماتریس $p \times n$ ؛ مثلاً ،

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,p}$ و $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{p,n}$.

در این صورت ، حاصل ضرب AB مساوی ماتریس $m \times n$ ، $C = (c_{ij})$ تعریف می‌شود که درایهٔ ij آن از رابطهٔ

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad (۲۲۰۲)$$

به دست می‌آید .

تذکر . حاصل ضرب AB را نمی‌توان تعریف کرد مگر اینکه تعداد ستونهای A مساوی عدهٔ سطرهای B باشد .

اگر سطر i م A را به A_i و ستون j م B را به B^j نشان داده و آنها را بردارهایی p بعدی فرض کنیم ، مجموع (۲۲۰۲) چیزی جز حاصل ضرب نقطه‌ای $A_i \cdot B^j$ نخواهد بود . به‌عبارت دیگر ، درایهٔ ij ، AB حاصل ضرب نقطه‌ای سطر i م A با ستون j م B می‌باشد :

$$AB = (A_i \cdot B^j)_{i,j=1}^{m,n} .$$

بنابر این ، ضرب ماتریسی را می‌توان تعمیمی از ضرب نقطه‌ای دانست .

مثال ۱ . فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. چون A ماتریسی 2×3 و B ماتریسی 2×3 است ، حاصل ضرب AB ماتریس 2×2 زیر می‌باشد :

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 21 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

درایه‌های AB به صورت زیر محاسبه می‌شوند :

$$A_1 \cdot B^1 = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = 17,$$

$$A_1 \cdot B^2 = 3 \cdot 6 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 21,$$

$$A_2 \cdot B^1 = (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$A_2 \cdot B^2 = (-1) \cdot 6 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -7.$$

مثال ۲. فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

در اینجا A ماتریسی 2×3 و B ماتریسی 3×1 است، پس AB ماتریس 2×1 زیر است:

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 \\ A_2 \cdot B^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \end{bmatrix},$$

زیرا $A_1 \cdot B^1 = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = -9$ و
$A_2 \cdot B^1 = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 8$.

مثال ۳. اگر A و B ماتریسهایی مربعی و دارای یک اندازه باشند، AB و BA هر دو تعریف شده‌اند. مثلاً، اگر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

داریم

$$AB = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ و } BA = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

این مثال نشان می‌دهد که در حالت کلی $AB \neq BA$. اگر $AB = BA$، می‌گوییم A و B **تعویض می‌شوند**.

مثال ۴. اگر I_p ماتریس همانی $p \times p$ باشد، به‌ازای هر ماتریس $n \times p$ مانند A،

$I_pA = A$ ، و به‌ازای هر ماتریس $m \times p$ مانند B ، $BI_p = B$. به عنوان مثال ،

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}.$$

حال ثابت می‌کنیم که ماتریس ترکیب ST حاصل ضرب ماتریسهای $m(S)$ و $m(T)$ است .

قضیهٔ ۱۶۰۲ . فرض‌کنیم $T: U \to V$ و $S: V \to W$ تبدیلاتی‌خطی‌باشند ،که U, V, W فضاهایی خطی و با بعد متناهی هستند . در این صورت ، به‌ازای پایه‌هایی ثابت ، ماتریسهای S ، T ، و ST با معادلهٔ

$$m(ST) = m(S)m(T)$$

بهم مربوط می‌شوند .

برهان . فرض‌کنیم $\dim U = n$ ، $\dim V = p$ ، و $\dim W = m$.همچنین، $(u_1, \ldots, u_n)$ پایهٔ U ، $(v_1, \ldots, v_p)$ پایهٔ V ، و $(w_1, \ldots, w_m)$ پایهٔ W باشد . نسبت به این‌پایه‌ها داریم $m(S) = (s_{ij})_{i,j=1}^{m,p}$ ، که در آن به‌ازای $k = 1, 2, \ldots, p$ ، $S(v_k) = \sum_{i=1}^{m} s_{ik}w_i$ ؛ و $m(T) = (t_{ij})_{i,j=1}^{p,n}$ ، که درآن به‌ازای $j = 1, 2, \ldots, n$ ، $T(u_j) = \sum_{k=1}^{p} t_{kj}v_k$. بنابراین ، داریم

$$ST(u_j) = S[T(u_j)] = \sum_{k=1}^{p} t_{kj}S(v_k) = \sum_{k=1}^{p} t_{kj}\sum_{i=1}^{m} s_{ik}w_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{p} s_{ik}t_{kj}\right)w_i ;$$

در نتیجه ، خواهیم داشت

$$m(ST) = \left(\sum_{k=1}^{p} s_{ik}t_{kj}\right)_{i,j=1}^{m,n} = m(S)m(T)$$

قبلاً دیدیم که ضرب ماتریسی همیشه در قانون تعویضپذیری صدق نمی‌کند . اما قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که در قوانین شرکتپذیری و پخشپذیری صدق می‌کند .

قضیهٔ ۱۷۰۲ . قوانین شرکتپذیری و پخشپذیری برای ضرب ماتریسی . ماتریسهای A و B و C مفروضند .

(آ) اگرحاصل ضربهای $A(BC)$ و $(AB)C$ معنی داشته باشند ، داریم

$$A(BC) = (AB)C \quad (\text{قانون شرکتپذیری}).$$

(ب) فرض‌کنیم A و B دارای یک اندازه باشند . اگر AC و BC معنی داشته باشند ، داریم

$$(A + B)C = AC + BC \quad (\text{قانون پخشپذیری از راست})$$

حال آنکه اگر CA و CB معنی داشته باشند ، خواهیم داشت

$$C(A + B) = CA + CB \quad (\text{قانون پخشپذیری از چپ}).$$

برهان . این خواص را می‌توان مستقیما" از تعریف ضرب ماتریسی نتیجه گرفت ، اما ما استدلال زیر را ترجیح می‌دهیم . فضاهای خطی با بعد متناهی U ، V ، W ، و X و تبدیلات خطی $T: U \to V$ ، $S: V \to W$ ، و $R: W \to X$ را در نظر می‌گیریم با این خاصیت که به‌ازای پایه‌های ثابتی داشته باشیم

$$A = m(R), \qquad B = m(S), \qquad C = m(T).$$

بنابرقضیهٔ ۱۶۰۲ داریم $m(RS) = AB$ و $m(ST) = BC$. از قانون شرکتپذیری برای ترکیب معلوم می‌شود که $R(ST) = (RS)T$. اگر قضیهٔ ۱۶۰۲ را بار دیگر بر این معادله اعمال کنیم ، خواهیم داشت $m(R)m(ST) = m(RS)m(T)$ یا $A(BC) = (AB)C$ ، که (آ) را ثابت می‌کند . برهان (ب) را می‌توان با گفتار مشابهی بیان داشت .

تعریف . اگر A یک ماتریس‌مربعی‌باشد ، توانهای‌صحیح A را به استقرا تعریف می‌کنیم :

$$A^0 = I \text{؛ به ازای } n \geq 1 \text{ ، } A^n = AA^{n-1} .$$

۱۶۰۲ تمرین

۱ . اگر
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$
، $B + C$ ، AB ، BA ، AC ، CA ، و $A(2B - 3C)$ را حساب کنید .

۲ . فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، و تمام ماتریسهای 2×2 مانند B را بیابید که (آ) $AB = O$ ؛ (ب) $BA = O$.

۳ . در هر یک ازحالات زیر ، a, b, c, d را طوری بیابید که در معادلهٔ داده شده صدق کنند :

(آ) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}؛$$

(ب) $$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{bmatrix} .$$

۴ . $AB - BA$ را در هر یک از حالات زیر حساب کنید :

(آ) $$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}؛$$

(ب) $$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 11 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

۵ . ثابت کنید که اگر A یک ماتریس‌مربعی‌باشد ، به‌ازای‌هردوعددصحیح $m \geq 0, n \geq 0$ ، $A^n A^m = A^{m+n}$.

۶ . فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. تحقیق‌کنیدکه $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، و A^n را محاسبه نمایید .

۷ . فرض کنید $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. تحقیق کنید که $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ ، و A^n را محاسبه نمایید .

۸ . فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. تحقیق کنید که $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، و A^3 و A^4 را محاسبه‌نمایید . برای A^n یک فرمول کلی حدس بزنید و آن را به استقرا ثابت‌کنید .

۹ . فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. ثابت کنید $A^2 = 2A - I$ ، و A^{100} را محاسبه نمایید .

۱۰ . تمام ماتریسهای 2×2 مانند A را بیابید که $A^2 = O$.

۱۱ . (آ) ثابت کنید ماتریس 2×2 ی A با هر ماتریس 2×2 تعویض می‌شود اگر و فقط اگر با هر یک از چهار ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعویض شود .

(ب) تمام این A ها را پیدا کنید .

۱۲ . هر یک از ماتریسهای 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

که در آنها b و c اعدادحقیقی دلخواهی‌هستند ، درمعادلهٔ $A^2 = I$ صدق‌می‌کند . تمام ماتریسهای 2×2 ی A را بیابید که $A^2 = I$.

۱۳ . اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$ ، ماتریسهای 2×2 ی C و D را بیابید که $AC = B$ و $DA = B$.

۱۴ . (آ) تحقیق کنید که اتحادهای جبری

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \text{ و } (A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

برای‌ماتریسهای 2×2 ی $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ برقرار نیستند .

(ب) طرفهای راست این اتحادها را طوری اصلاح کنید که برای تمام ماتریسهای مربعی A و B برقرار باشند .

(پ) اتحادهای مذکور در (آ) برای چه ماتریسهای A و B برقرارند ؟

۱۷۰۲ دستگاههای معادلات خطی

فرض کنیم $A = (a_{ij})$ یک‌ماتریس $m \times n$ از اعدادبوده و $c_1, \ldots, c_m$ ، m عدد باشند . هرمجموعه مرکب از m معادله به شکل

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = c_i \text{ ، بەازای } i = 1, 2, \ldots, m \qquad (۲۳۰۲)$$

یک**دستگاه** m **معادلهٔ خطی و** n **مجهول** نام‌دارد . در اینجا $x_1, \ldots, x_n$ مجهول گرفته می‌شوند . یک **جواب** دستگاه یک n تایی مانند $(x_1, \ldots, x_n)$ از اعداد است که به‌ازای آن تمام معادلات برقرارند . ماتریس A **ماتریس ضرایب** دستگاه نامیده می‌شود .

دستگاههای خطی را می‌توان به کمک تبدیلات خطی بررسی کرد . پایه‌های معمولی مرکب از بـردارهای یـکهٔ مختصات رادر V_n و V_m اختیار می‌کنیم . ماتریس ضرایب A تبدیل خطـی $T: V_n \to V_m$ را مشخص می‌کند که بردار دلخواه $x = (x_1, \ldots, x_n)$ در V_n را بروی بردار $y = (y_1, \ldots, y_m)$ در V_m می‌نگارد که با m معادلهٔ خطی زیر مشخص می‌شود :

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \text{ ، بەازای } i = 1, 2, \ldots, m \, .$$

فرض‌کنیم $c = (c_1, \ldots, c_m)$ برداری‌در V_m باشد که مؤلفه‌هایش اعداد آمده در دستگاه (۲۳۰۲) اند . این دستگاه را می‌توان به شکل ساده‌تر

$$T(x) = c$$

نوشت . دستگاه جواب دارد اگر و فقط اگر c در برد T باشد . اگر درست یک x در V_n بروی c نگاشته‌شود ، دستگاه‌دقیقا "یک جواب دارد . و اگر بیش از یک x بروی c نگاشته شود ، دستگاه بیش از یک جواب خواهد داشت .

مثال ۱ . یک دستگاه بدون جواب دستگاه $x + y = 1, \ x + y = 2$ جواب ندارد . مجموع دو عدد نمی‌تواند هم 1 و هم 2 باشد .

مثال ۲ . یک دستگاه دارای فقط یک جواب . دستگاه $x + y = 1 , x - y = 0$ درست یک جواب دارد : $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

مثال ۳. یک دستگاه با بیش از یک جواب. دستگاه $x + y = 1$ ، مرکب از یک معادلهٔ دو مجهولی ، بیش از یک جواب دارد . هر دو عدد که مجموعشان 1 باشد جواب است .

به هر دستگاه خطی (۲۳۰۲) می‌توان دستگاه دیگر زیر را مربوط ساخت :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0 \text{ ، } i = 1, 2, \ldots, m \text{ به‌ازای }$$

که از تعویض c_i در (۲۳۰۲) با 0 به دست می‌آید . این دستگاه را **دستگاه همگن** نظیر (۲۳۰۲) می‌نامند . اگر $c \neq O$ ، دستگاه (۲۳۰۲) یک **دستگاه غیر همگن** نامیده می‌شود .
بردار x در V_n در دستگاه همگن صدق می‌کند اگر و فقط اگر

$$T(x) = O,$$

که در آن T تبدیل‌خطیی است که به وسیلهٔ ماتریس ضرایب مشخص می‌شود . دستگاه همگن‌همیشه‌یک‌جواب ، یعنی $x = O$، را دارد ، ولی ممکن است جوابهای دیگر نیزداشته باشد. مجموعهٔ جوابهای‌دستگاه‌همگن‌فضای‌پوچ T است . قضیهٔ زیر رابطهٔ بین جوابهای دستگاه همگن و جوابهای دستگاه غیر همگن را وصف می‌کند .

قضیهٔ ۱۸۰۲ . ***فرض‌کنیم‌دستگاه‌غیرهمگن (۲۳۰۲) دارای جوابی ، مثلاً " b ، باشد .***
(آ) اگر بردار x یک جواب دستگاه غیر همگن باشد ، بردار $v = x - b$ یک جواب دستگاه همگن نظیر آن است .
(ب) اگر v یک جواب دستگاه همگن باشد ، بردار $x = v + b$ یک جواب دستگاه غیر همگن خواهد بود .

برهان. فرض کنیم $T: V_n \to V_m$ تبدیل خطیی باشد که به وسیلهٔ ماتریس ضرایب ، به صورت وصف شده در بالا ، مشخص می‌شود . چون b یک جواب دستگاه غیر همگن است ، داریم $T(b) = c$. فرض‌کنیم x و v دو بردار در V_n باشند بطوری که $v = x - b$. در این صورت ، داریم

$$T(v) = T(x - b) = T(x) - T(b) = T(x) - c.$$

بنابراین ، $T(x) = c$ اگر و فقط اگر $T(v) = O$. این هم (آ) و هم (ب) را ثابت خواهد کرد .

این قضیه نشان می‌دهد که مسئلهٔ یافتن تمام جوابهای یک دستگاه غیر همگن طبعاً " به دو بخش تقسیم می‌شود: (۱) یافتن تمام جوابهای v دستگاه همگن، یعنی تعیین فضای پوچ T، و (۲) یافتن یک جواب خصوصی b دستگاه غیر همگن. بدین ترتیب، باافزودن b به هر بردار v در فضای پوچ T، تمام جوابهای $x = v + b$ دستگاه غیر همگن به‌دست خواهد آمد.

فرض‌کنیم k بعد $N(T)$ (پوچهٔ T) باشد. اگربتوان k جواب مستقل $v_1, \ldots, v_k$ دستگاه همگن را پیدا کرد، این جوابها یک پایه برای $N(T)$ تشکیل می‌دهند، و می‌توان هر v در $N(T)$ را با تشکیل تمام ترکیبات خطی ممکن مانند

$$v = t_1v_1 + \cdots + t_kv_k ,$$

که در آن $t_1, \ldots, t_k$ اسکالرهای دلخواهی هستند، به دست آورد. این ترکیب خطی **جواب عمومی دستگاه همگن** نامیده می‌شود. اگر b یک جواب خصوصی دستگاه غیر همگن باشد، تمام جوابها از رابطهٔ

$$x = b + t_1v_1 + \cdots + t_kv_k$$

به دست می‌آیند. این ترکیب خطی **جواب عمومی دستگاه غیر همگن** نامیده می‌شود. حال قضیهٔ ۱۸۰۲ را می‌توان به شکل زیر بیان کرد.

قضیهٔ ۱۹۰۲ . فرض کنیم $T: V_n \to V_m$ یک تبدیل خطی باشد بطوری که $T(x) = y$، که در آن $x = (x_1, \ldots, x_n)$، $y = (y_1, \ldots, y_m)$، و

به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, m$، $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$.

همچنین، فرض‌کنیم k پوچهٔ T باشد. اگر $v_1, \ldots, v_k$، k جواب مستقل دستگاه همگن $T(x) = O$ بوده و b یک جواب خصوصی دستگاه غیر همگن $T(x) = c$ باشد، جواب عمومی دستگاه غیر همگن

$$x = b + t_1v_1 + \cdots + t_kv_k$$

است، که در آن $t_1, \ldots, t_k$ اسکالرهای دلخواهی هستند.

این قضیه راه یافتن جواب خصوصی b دستگاه غیر همگن و همچنین طرز تعیین جوابهای $v_1, \ldots, v_k$ دستگاه همگن را به ما نمی‌گوید. فقط این را می‌گوید که وقت جواب

داشتن دستگاه غیر همگن باید منتظر چه بود. مثال زیر، با اینکه خیلی ساده است، قضیه را توضیح خواهد داد.

مثال. معادلهٔ $x + y = 0$ دستگاه همگن مربوط به دستگاه $x + y = 2$ است. پس فضای پوچ از تمام بردارهایی در V_2 به شکل $(t, -t)$ تشکیل شده که t دلخواه است. چون $(t, -t) = t(1, -1)$، این یک زیر فضای یک بعدی V_2 با پایهٔ $(1, -1)$ می‌باشد. یک جواب خصوصی دستگاه غیر همگن $(0, 2)$ است. پس جواب عمومی دستگاه غیر همگن عبارت است از

$$x = t, \quad y = 2 - t \quad \text{یا} \quad (x, y) = (0, 2) + t(1, -1)$$

که t دلخواه می‌باشد.

۱۸۰۲ روشهای محاسبه

حال به محاسبهٔ جوابهای یک دستگاه خطی غیر همگن می‌پردازیم. گرچه برای حل این مسئله روشهای متعددی تعبیه شده، اما اگر دستگاه بزرگ باشد، تمام آنها به محاسبهٔ زیادی نیاز خواهند داشت. مثلاً"، حل یک دستگاه ده معادله و به همین تعداد مجهول حتی به کمک یک ماشین حساب رومیزی، چند ساعت وقت خواهد گرفت.

ما روش معروفی را مطرح می‌کنیم، به نام **روش حذف گاوس[1] ـ ژردان[2]**، که نسبتاً" ساده است و می‌توان آن را برای کامپیوترهای الکترونیکی با سرعت زیاد به آسانی برنامه ریزی کرد. این روش از سه نوع عمل اساسی بر معادلات یک دستگاه خطی تشکیل شده است:

(۱) *تعویض دو معادله با هم؛*

(۲) *ضرب تمام جملات یک معادله در یک اسکالر ناصفر؛*

(۳) *افزودن مضربی از یک معادله به دیگری.*

هربار که یکی از این اعمال بر دستگاه صورت گیرد، دستگاه جدیدی با همان جوابها به‌دست می‌آید. دو دستگاه این‌طوری **معادل** نامیده می‌شوند. با تکرار این اعمال به طرز اصولی، مآلاً"، به یک دستگاه معادل می‌رسیم که می‌توان آن را با معاینه حل کرد.

---

1. Gauss 2. Jordan

ما این روش را با چند مثال خاص توضیح می‌دهیم . این کار طرز استفاده از روش را در حالت کلی روشن می‌سازد .

مثال ۱ . یک دستگاه با جواب منحصر بفرد .
دستگاه

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 4z &= -3 \\ x - 2y + z &= 5 \\ x - 4y + 6z &= 10 \end{aligned}$$

را درنظر می‌گیریم . این دستگاه خاص جواب منحصر بفرد $x = 124,\ y = 75,\ z = 31$ را دارد ، که ما آن را با فرایند حذف گاوس ــ ژردان به دست می‌آوریم . برای کاستن از زحمت کار ، حروف x, y, z و علامت تساوی را نمی‌نویسیم ، بلکه در عوض با ***ماتریس افزودهٔ***

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 10 \end{array}\right] \tag{۲۴۰۲}$$

کار می‌کنیم ، که با الحاق طرفهای راست دستگاه به ماتریس ضرایب به دست می‌آید . سه عمل اساسی مذکور در بالا بر سطرهای ماتریس افزوده اعمال می‌شوند و ***اعمال سطری*** نام دارند . در هرمرحله از فرایند می‌توان حروف x, y, z را باز گرداند و علامات تساوی را در امتداد خط قائم گذاشت تا معادلات به دست آیند . هدف نهایی این است که پس از یک سری اعمال سطری به ماتریس افزودهٔ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{array}\right] \tag{۲۵۰۲}$$

برسیم . دستگاه معادلات نظیر عبارت است از $x = 124,\ y = 75,\ z = 31$ ، که جواب مطلوب را به‌دست می‌دهد .

اولین قدم یافتن 1 درگوشه بالایی چپ ماتریس است . این قدم را می‌توان با تعویض سطر اول ماتریس (۲۴۰۲) با سطر دوم یا سوم برداشت ، و یا اینکه سطر اول رادر $\frac{1}{2}$ ضرب کرد . با تعویض سطرهای اول و دوم با هم خواهیم داشت

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 6 & 10 \end{array}\right].$$

قدم بعد صفر کردن تمام درایه‌های باقیمانده در ستون اول، بدون دست زدن به سطراول، است. برای این کارسطراول را در 2− ضرب و حاصل را به سطر دوم می‌افزاییم. بعد سطر اول را در 1− ضرب ونتیجه را به سطر سوم اضافه می‌کنیم. پس از این دو عمل خواهیم داشت

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -13 \\ 0 & -2 & 5 & 5 \end{array}\right]. \qquad (۲۶\cdot۲)$$

حال این عمل را بر ماتریس کوچکتر $\left[\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & -13 \\ -2 & 5 & 5 \end{array}\right]$، که مجاور دو صفر ظاهر شده، انجام می‌دهیم. می‌توان باضرب سطر دوم (۲۶۰۲) در 1− در گوشهٔ بالایی چپ آن 1 به دست آورد. این کار ماتریس

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & -2 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

را به ما می‌دهد. با ضرب سطر دوم در 2 و افزودن نتیجه به سطر سوم خواهیم داشت

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{array}\right]. \qquad (۲۷\cdot۲)$$

در این مرحله دستگاه معادلات نظیر عبارت است از

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 5 \\ y - 2z &= 13 \\ z &= 31. \end{aligned}$$

این معادلات را می‌توان با شروع از سومی و بازگشت به عقب حل کرد تا داشته باشیم

$$z = 31, \qquad y = 13 + 2z = 13 + 62 = 75,$$
$$x = 5 + 2y - z = 5 + 150 - 31 = 124.$$

و یا اینکه فرایند گاوس ـ ژردان را با صفر کردن تمام درایه‌های بالای عناصر قطری در ستونهای دوم و سوم ادامه داد. با ضرب سطر دوم (۲۷۰۲) در 2 و افزودن نتیجه به سطر اول خواهیم داشت

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 31 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{array}\right].$$

بالاخره، با ضرب سطر سوم در 3 و افزودن نتیجه به سطر اول، و سپس ضرب سطر سوم در 2 و اضافه کردن نتیجه به سطر دوم، ماتریس (۲۵۰۲) به دست خواهد آمد.

مثال ۲. یک دستگاه با بیش از یک جواب. دستگاه 3 معادله و 5 مجهول زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 4z + u - v &= -3 \\ x - 2y + z - u + v &= 5 \\ x - 4y + 6z + 2u - v &= 10. \end{aligned} \qquad (۲۸۰۲)$$

ماتریس افزودهٔ نظیر عبارت است از

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 4 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & -1 & 10 \end{array}\right].$$

ضرایب x, y, z و طرفهای راست مثل مثال ۱ هستند. اگر همان اعمال سطری مثال ۱ را اعمال کنیم، مآلا" به ماتریس افزودهٔ

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -16 & 19 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 11 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 31 \end{array}\right]$$

خواهیم رسید . دستگاه معادلات نظیر را می‌توان نسبت به x ، y ، و z و برحسب u و v حل کرد ، که خواهیم داشت

$$\begin{aligned} x &= 124 + 16u - 19v \\ y &= \ \ 75 + \ \ 9u - 11v \\ z &= \ \ 31 + \ \ 3u - \ \ 4v. \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $u = t_1$ و $v = t_2$ ، که در آنها t_1 و t_2 حقیقی و دلخواه هستند ، و x, y, z را از این معادلات به دست آوریم ، بردار (x, y, z, u, v) در V_5 به صورت

$$(x, y, z, u, v) = (124 + 16t_1 - 19t_2, 75 + 9t_1 - 11t_2, 31 + 3t_1 - 4t_2, t_1, t_2)$$

یک جواب خواهد بود . این بردار را می‌توان با جدا کردن قسمتهای شامل t_1 و t_2 این طور نوشت :

$$(x, y, z, u, v) = (124, 75, 31, 0, 0) + t_1(16, 9, 3, 1, 0) + t_2(-19, -11, -4, 0, 1).$$

این معادله جواب عمومی دستگاه است . بردار $(124, 75, 31, 0, 0)$ جواب خصوصی دستگاه غیرهمگن (۲۸۰۲) است . دو بردار $(16, 9, 3, 1, 0)$ و $(-19, -11, -4, 0, 1)$ جوابهای دستگاه همگن نظیر هستند . چون این بردارها مستقل‌اند ، برای فضای تمام جوابهای دستگاه همگن یک پایه تشکیل می‌دهند .

مثال ۳. یک دستگاه بدون جواب . دستگاه

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 4z &= -3 \\ x - 2y + \ \ z &= \ \ \ 5 \\ x - 4y + 5z &= \ \ 10 \end{aligned} \qquad (۲۹۰۲)$$

را در نظر می‌گیریم . این دستگاه تقریبا" با دستگاه مثال ۱ یکی است جز اینکه ضریب z در معادلهٔ سوم از 6 به 5 تغییر کرده است . ماتریس افزودهٔ نظیر عبارت است از

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 5 & 10 \end{array}\right]$$

با استفاده از همان اعمال‌سطری مثال ۱ برای تبدیل (۲۴۰۲) به (۲۷۰۲)، به ماتریس افزوده‌ٔ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 31 \end{array}\right] \qquad (۳۰۰۲)$$

خواهیم رسید. سطرپایینی به‌صورت معادله عبارت است از $31 = 0$. لذا، دستگاه اصلی جواب ندارد، چرا که دو دستگاه (۲۹۰۲) و (۳۰۰۲) معادل می‌باشند.

در هر یک از مثالهای پیش، تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر نبود. در حالتی که معادلات از مجهولات بیشتر باشند، باز هم فرایند گاوس ـ ژردان قابل به‌کار بردن است. مثلاً، دستگاه مثال ۱ را در نظر می‌گیریم، که‌دارای جواب $x = 124, y = 75, z = 31$ است. اگر به این دستگاه یک معادلهٔ جدید که همین سه‌تایی درآن صدق کند، مثلاً معادلهٔ $2x - 3y + z = 54$، را اضافه کنیم، روش حذف به ماتریس افزوده‌ٔ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

راکه سطری از صفر در پایین دارد منجر می‌شود. اما اگر در معادلهٔ جدید سه تایی $(124, 75, 31)$ صدق نکند، مثلاً معادلهٔ $x + y + z = 1$، فرایند حذف به ماتریس افزوده‌ای به شکل

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right]$$

ختم می‌شود، که در آن $a \neq 0$. در اینجا آخرین سطر، معادلهٔ تضاد دار $a = 0$ را به دست می‌دهد، مبین آنکه دستگاه جواب ندارد.

۱۹.۲ معکوس ماتریسهای مربعی

فرض کنیم $A = (a_{ij})$ یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد . اگر ماتریس $n \times n$ دیگری چون B باشد بطوری که $BA = I$ ، که در آن I ماتریس‌همانی $n \times n$ است ، A **نامنفرد** و B **معکوس چپ** A نامیده می‌شود .

پایهٔ معمولی مرکب از بردارهای یکهٔ مختصات در V_n را اختیار و فرض می‌کنیم $T: V_n \to V_n$ تبدیل‌خطیی باشد که ماتریسش $m(T) = A$ است . در این صورت ، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت .

قضیهٔ ۲۰.۲ . *ماتریس A نامنفرد است اگر و فقط اگر T معکوسپذیر باشد . هرگاه $BA = I$ ، آنگاه $B = m(T^{-1})$.*

برهان فرض‌کنیم A نامنفردبوده‌و $BA = I$. ثابت‌می‌کنیم $T(x) = O$ تساوی $x = O$ را ایجاب می‌کند . گوییم فرض کنیم x طوری باشد که $T(x) = O$ ، و X را ماتریس‌ستونی $n \times 1$ ی می‌انگاریم که از مؤلفه‌های x تشکیل شده است . چون $T(x) = O$ ، ماتریس حاصل ضرب AX یک ماتریس ستونی $n \times 1$ است که از چند صفر تشکیل شده است ؛ در نتیجه ، $B(AX)$ نیز یک ماتریس ستونی متشکل از چند صفر است . اما $B(AX) = (BA)X = IX = X$ ، پس هر مولفهٔ x مساوی 0 است . لذا ، T معکوسپذیر است ، و معادلهٔ $TT^{-1} = I$ ایجاب می‌کند که $m(T)m(T^{-1}) = I$ یا $Am(T^{-1}) = I$. با ضرب این رابطه از چپ در B خواهیم داشت $m(T^{-1}) = B$. بعکس ، اگر T معکوسپذیر باشد ، $T^{-1}T$ تبدیل‌همانی است ، پس $m(T^{-1})m(T)$ ماتریس همانی می‌باشد . بنابراین ، A نامنفرد است و $m(T^{-1})A = I$.

تمام خواص تبدیلات خطی معکوسپذیر همتاهایی برای ماتریسهای نامنفرد دارند . بخصوص ، معکوسهای چپ (درصورت وجود) منحصر بفردند ، و هر معکوس چپ معکوس راست نیز هست . به عبارت دیگر ، هرگاه A نامنفرد بوده و $BA = I$ ، آنگاه $AB = I$. ما B را **معکوس** A می‌نامیم و به A^{-1} نشان می‌دهیم . A^{-1} نیز نامنفرد است و معکوس آن A خواهد بود .

حال نشان می‌دهیم که مسئلهٔ تعیین درایه‌های معکوس یک ماتریس نامنفرد معادل

است با حل n دستگاه خطی غیر همگن و مستقل.

فرض کنیم $A = (a_{ij})$ نامنفردو $A^{-1} = (b_{ij})$ معکوس‌آن‌باشد. درایه‌های A و A^{-1} به وسیلهٔ n^2 معادلهٔ

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \delta_{ij} \qquad (۳۱۰۲)$$

بهم مربوط می‌شوند، که در آنها اگر $i = j$ ، $\delta_{ij} = 1$ و، اگر $i \neq j$ ، $\delta_{ij} = 0$. به‌ازای هر j ثابت می‌توان این را یک دستگاه غیر همگن مرکب از n معادلهٔ خطی و n مجهول $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}$ گرفت. چون A نامنفرد است، هریک از این دستگاهها جواب منحصر بفرد دارد، که ستون j م B است. این دستگاهها همه دارای یک ماتریس ضرایب A هستند و فقط در طرفهای راست با هم فرق دارند. مثلا"، اگر A یک ماتریس 3×3 باشد، 9 معادله در (۳۱۰۲) وجود دارد که می‌توان آنها را به‌صورت 3 دستگاه خطی مستقل با ماتریسهای افزودهٔ زیر بیان کرد:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{array}\right].$$

اگرفرایند گاوس ــ ژردان رابه‌کاربریم، بترتیب به ماتریسهای افزودهٔ زیر خواهیم‌رسید:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{11} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & 1 & 0 & b_{22} \\ 0 & 0 & 1 & b_{32} \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{33} \end{array}\right].$$

در عمل از اینکه هرسه دستگاه یک ماتریس ضرایب دارند سود جسته و هر سه دستگاه را یکباره با کار بر ماتریس بزرگ شدهٔ

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

حل می‌کنیم. در این صورت، فرایند حذف به ماتریس

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{12} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right]$$

منجر می‌شود . ماتریس طرف راست خط قائم معکوس مطلوب است ، و ماتریس سمت چپ خط ماتریس همانی 3×3 می‌باشد .

لازم نیست نامنفرد بودن A را از پیش بدانیم . در حالتی که A **منفرد** باشد (نامنفرد نباشد) ، باز هم می‌توان روش گاوس ــ ژردان را به‌کار برد ، اما جایی در عمل یکی از عناصر قطری صفر می‌شود ، و امکان اینکه A به ماتریس همانی بدل شود وجود ندارد .

یک دستگاه n معادلهٔ خطی و n مجهول ، مثلا"

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = c_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

را می‌توان به‌طور ساده‌تر و به شکل یک معادلهٔ ماتریسی مانند

$$AX = C$$

نوشت ، که در آن $A = (a_{ij})$ ماتریس ضرایب است ، و X و C ماتریسهای ستونی

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}$$

می‌باشند . چنانچه A نامنفرد باشد ، دستگاه جواب منحصر بفرد $X = A^{-1}C$ را خواهد داشت .

۲۰۰۲ تمرین

فرایند حذف گاوس ــ ژردان را در هر یک از دستگاههای زیر به‌کار برید .
در صورت وجود یک جواب ، جواب عمومی را معین نمایید .

۱ .
$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 5 \\ 2x - y + 4z &= 11 \\ -y + z &= 3 . \end{aligned}$$

۲ .
$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ x + y - z &= 1 . \end{aligned}$$

۳ .
$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ 7x + 4y + 5z &= 3 . \end{aligned}$$

۴ .
$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ 7x + 4y + 5z &= 3 \\ x + y - z &= 0 . \end{aligned}$$

۵ .
$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z + u &= 1 \\ x + y - 3z + 2u &= 2 \\ 6x + y - 4z + 3u &= 7 . \end{aligned}$$

۶ .
$$\begin{aligned} x + y - 3z + u &= 5 \\ 2x - y + z - 2u &= 2 \\ 7x + y - 7z + 3u &= 3 . \end{aligned}$$

۷ .
$$\begin{aligned} x + y + 2z + 3u + 4v &= 0 \\ 2x + 2y + 7z + 11u + 14v &= 0 \\ 3x + 3y + 6z + 10u + 15v &= 0 . \end{aligned}$$

۸ .
$$\begin{aligned} x - 2y + z + 2u &= -2 \\ 2x + 3y - z - 5u &= 9 \\ 4x - y + z - u &= 5 \\ 5x - 3y + 2z + u &= 3 . \end{aligned}$$

۹ . ثابت کنید دستگاه $x + y + 2z = 2,\ 2x - y + 3z = 2,\ 5x - y + az = 6$ در حالت $a \neq 8$ جواب منحصر بفرد دارد . تمام جوابها را وقتی $a = 8$ بیابید .

۱۰ . (آ) جمیع جوابهای دستگاه

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 6z + 2u &= -1 \\ x - y + z - u &= -2 \end{aligned}$$

را مشخص کنید .

(ب) تمام جوابهای دستگاه

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 6z + 2u &= -1 \\ x - y + z - u &= -2 \\ x + y + z \qquad &= 6 \end{aligned}$$

را مشخص کنید .

۱۱ . این تمرین طرز تعیین کلیهٔ ماتریسهای 2×2 نامنفرد را بازگو می‌کند . ثابت‌کنید

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = (ad - bc)I ,$$

و نتیجه بگیرید که $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ نامنفرد است اگر و فقط اگر $ad - bc \neq 0$ ، که در این

صورت معکوس آن عبارت است از

$$\frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

معکوس هریک از ماتریسهای تمرین ۱۲ تا ۱۶ را مشخص کنید.

۱۲. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

۱۳. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

۱۴. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$.

۱۵. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

۱۶. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

۲۱.۲ تمرینات گوناگون درباب ماتریسها

۱. ثابت کنید که اگر یک ماتریس مربعی یک سطر یا یک ستون صفر داشته باشد منفرد است.

۲. برای هریک از احکام زیر درباب ماتریسهای $n \times n$ برهان بیاورید و یا مثال نقض بزنید:

(آ) هرگاه $AB + BA = O$، $A^2B^3 = B^3A^2$؛

(ب) هرگاه A و B نامنفرد باشند، $A + B$ نامنفرد است؛

(پ) هرگاه A و B نامنفرد باشند، AB نامنفرد است؛

(ت) هرگاه A و B و $A + B$ نامنفرد باشند، $A - B$ نامنفرد است؛
(ث) هرگاه $A^3 = O$، $A - I$ نامنفرد است؛
(ج) هرگاه حاصل ضرب k ماتریس، یعنی $A_1 \cdots A_k$، نامنفرد باشد، هریک از A_i ها نامنفرد است.

۳. هرگاه $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$، ماتریس نامنفرد P راطوری‌پیداکنید که $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

۴. ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & i \\ i & b \end{bmatrix}$، که درآن $i^2 = -1$، $a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$، و $b = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$، دارای این خاصیت است که $A^2 = A$. جمیع ماتریسهای 2×2 ی A با درایه‌های مختلط که $A^2 = A$ را به‌طور کامل توصیف نمایید.

۵. ثابت کنید که اگر $A^2 = A$، $(A + I)^k = I + (2^k - 1)A$.

۶. در نظریهٔ نسبیت خاص از مجموعه معادلاتی به شکل

$$x' = a(x - vt),\ y' = y,\ z' = z,\ t' = a(t - vx/c^2)$$

استفاده می‌شود. در اینجا v سرعت جسم متحرک، c سرعت نور، و $a = c/\sqrt{c^2 - v^2}$ که $|v| < c$. تبدیل‌خطیی‌که‌برداردو بعدی (x, t) را بروی (x', t') می‌نگارد**تبدیل‌لورنتس**[1] نام دارد. ماتریس‌آن نسبت به پایه‌های معمولی به $L(v)$ نموده می‌شود و به‌صورت زیر است:

$$L(v) = a\begin{bmatrix} 1 & -v \\ -vc^{-2} & 1 \end{bmatrix}.$$

توجه کنید که $L(v)$ نامنفرداست و $L(0) = I$. ثابت کنید $L(v)L(u) = L(w)$، که‌در آن $w = (u + v)c^2/(uv + c^2)$. به عبارت دیگر، حاصل ضرب دو تبدیل لورنتس یک تبدیل لورنتس است.

۷. هرگاه سطرها و ستونهای ماتریس مستطیلی شکل A با هم عوض‌شوند، ماتریس به دست آمده **ترانهادهٔ** A نام دارد و با A^t نموده می‌شود. مثلاً، هرگاه

---

1. Lorentz

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ، آنگاه $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

ثابت کنید ترانهاده‌ها از خواص زیربرخوردارند :

(آ) $(A^t)^t = A$ ؛ (ب) $(\ .\ + B)^t = A^t + B^t$ ؛ (پ) $(cA)^t = cA^t$ ؛

(ت) $(AB)^t = B^tA^t$ ؛ (ث) اگر A نامنفرد باشد ، $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

۸ . ماتریس مربعی A در صورتی یک **ماتریس متعامد** نامیده می‌شود که $AA^t = I$.

تحقیق کنید که ماتریس 2×2 ی $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ به ازای هر θ ی حقیقی متعامد است . ثابت کنید که اگر A یک ماتریس متعامد $n \times n$ باشد ، سطرهایش، به‌عنوان بردارهایی در V_n ، یک مجموعهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهند .

۹ . برای هریک‌از احکام‌زیر در باب ماتریسهای $n \times n$ یا برهان بیاورید یا مثال‌نقض:

(آ) هرگاه A و B متعامد باشند ، $A + B$ نیز متعامد است ؛

(ب) هرگاه A و B متعامد باشند ، AB نیز متعامد است ؛

(پ) هرگاه A و B متعامد باشند ، B نیز متعامد است .

۱۰ . ***ماتریسهای هادامار***[1]، به‌نام‌ژاک هادامار(۱۹۶۳–۱۸۶۵)، ماتریسهای $n \times n$ ی هستند که خواص زیر را دارند :

I . هر درایه 1 یا -1 است ؛

II . هرسطر ، به‌صورت برداری در V_n ، طولش $\sqrt{n}$ است ؛

III. حاصل ضرب نقطه‌ای هر دو سطر متمایز 0 است .

ماتریسهای هادامار در بعضی از مسائل هندسه و نظریهٔ اعداد ظاهر می‌شوند ، و اخیرا " از آنها برای ساختن کلمات رمزی بهینه در ارتباطات فضایی استفاده شده است . با وجود سادگی آشکار آنها ، مسائل حل نشدهٔ بسیاری را موجب شده‌اند . درحال حاضر مسئلهٔ حل نشدهٔ اساسی تعیین کلیهٔ n هایی است که به‌ازای آنها یک‌ماتریس هادامار $n \times n$ وجود داشته‌باشد . این تمرین حل ناقصی از این مسئله را به اجمال شرح می‌دهد .

---

1. Hadamard

(آ) جمیع ماتریسهای هادامار 2×2 را مشخص کنید (دقیقا" 8 تا هستند).
(ب) این‌قسمت‌از تمرین، برهان ساده‌ای از قضیهٔ زیر را به اجمال شرح می‌دهد:
هرگاه A یک‌ماتریس‌هادامار $n \times n$ باشدکه $n > 2$، آنگاه n مضربی‌از 4 می‌باشد.
برهان بر دو لم بسیارسادهٔ زیر در باب بردارهای در فضای n استوار است. این لمها را ثابت کنید و با اعمال آنها بر سطرهای ماتریس هادامار قضیه را اثبات نمایید.

لم ۱. ***هرگاه X, Y, Z بردارهای متعامدی در V_n باشند، آنگاه داریم***

$$(X + Y) \cdot (X + Z) = \|X\|^2.$$

لم ۲. ***می‌نویسیم***

$$X = (x_1, \ldots, x_n), \quad Y = (y_1, \ldots, y_n), \quad Z = (z_1, \ldots, z_n).$$

چنانچه مؤلفه‌های x_i, y_i, z_i یا 1 یا -1 باشند، حاصل ضرب $(x_i + y_i)(x_i + z_i)$ یا 0 یا 4 است.

۳
دترمینانها

۱.۳ مقدمه

مفهوم دترمینان در بسیاری از کاربردهای جبر خطی در هندسه و آنالیز نقشی مهم دارد. در این فصل خواص اساسی دترمینانها و بعضی از کاربردهای آنها مطالعه می‌شوند.

دترمینانهای مرتبهٔ دو و سه در جلد یک بـه عنوان نمادهای مناسبی برای بیان فرمولها به شکل فشرده معرفی شدند. به‌یاد می‌آوریم که یک دترمینان مرتبهٔ دو بافرمول

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (۱.۳)$$

تعریف شد. علـیرغم تشابه در نمـاد، دترمینان $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ (که با خطوط قائم نوشته می‌شود) با ماتریس $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (که با کروشه‌نوشته می‌شود) فرق معنی دارد. دترمینان **عدد** است کـه به ماتریس طبق فرمول (۱.۳) مربوط می‌شود. برای تاکید براین ارتباط همچنین می‌نویسیم

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

دترمینانهای مرتبهٔ سه در جلد یک برحسب دترمینانهای مرتبهٔ دو با فرمول زیر تعریف شده بودند:

$$(\text{۲.۳})\ \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

در این فصل از حالت کلیتر دترمینان یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n به‌ازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ بحث می‌شود. دیدگاه ما این است که دترمینان را تابعی بگیریم که به هر ماتریس‌مربعی A عددی به‌نام دترمینان A را مربوط می‌کند که با $\det A$ نموده می‌شود. می‌توان این تابع را با یک فرمول صریح که تعمیم یافتهٔ (۱.۳) و (۲.۳) است تعریف کرد. این فرمول مجموعی‌است شامل $n!$ حاصل‌ضرب از درایه‌های A. اگر n بزرگ باشد، این فرمول خیلی بزرگ است و بندرت در عمل به‌کار می‌رود. به‌نظر می‌رسد که بررسی دترمینانها از دیدگاهی دیگر که روشن‌تر بر خواص اصلی آنها تاکید کند ارجح باشد. این خواص، که درکاربردها اهمیت دارند، ***اصول موضوع*** تابع دترمینان گرفته می‌شوند. اصولاً برنامهٔ کار ما از سه قسمت تشکیل می‌شود: (۱) انگیزش انتخاب اصول موضوع؛ (۲) نتیجه‌گیری خواص دیگر دترمینانها از اصول موضوع؛ (۳) اثبات اینکه یک و فقط یک تابع وجود دارد که در اصول موضوع صدق می‌کند.

۲.۳ انگیزهٔ انتخاب اصول موضوع برای تابع دترمینان

در جلد یک ثابت شد که حاصل ضرب سه‌گانهٔ اسکالر سه‌بردار A_1, A_2, A_3 در فضای 3 را می‌توان به صورت دترمینان یک ماتریس که سطرهایش این بردارها باشند بیان کرد؛ یعنی، داریم

$$A_1 \times A_2 \cdot A_3 = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

که در آن $A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$ ، $A_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ ، و $A_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$.

اگر سطرها مستقل خطی باشند، حاصل ضرب سه‌گانهٔ اسکالر ناصفر است؛ قدرمطلق حاصل ضرب مساوی حجم متوازی‌السطوحی است که به‌وسیلهٔ سه بردار A_1, A_2, A_3 معین می‌شود. اگر سطرها وابسته باشند، حاصل ضرب سه‌گانهٔ اسکالر صفر است. دراین حالت بردارهای A_1, A_2, A_3 همصفحه‌اند و متوازی‌السطوح به یک شکل مسطح با حجم صفر تباه

می‌شود .

بعضی از خــواص ضرب سه‌گانهٔ اسکالر به‌عنوان انگیزش انتخاب اصول موضوع تابع دترمینان در بعدهای بالاتر به‌کار می‌روند . برای آنکه این خواص به شکلی مناسب تعمیم بیان شوند ، ضرب سه‌گانهٔ اسکالر را تابعی از سه‌بردار سطری A_1, A_2, A_3 می‌گیریم . این تابع را با d نشان می‌دهیم . بنابر این ،

$$d(A_1, A_2, A_3) = A_1 \times A_2 \cdot A_3 .$$

حال توجه خود را به‌خواص زیر معطوف می‌کنیم :

(آ) **همگنی نسبت به هر سطر.** به‌عنوان مثال ، همگنی نسبت به سطر اول می‌گوید که

به‌ازای هر اسکالر t ، $d(tA_1, A_2, A_3) = t\, d(A_1, A_2, A_3)$ ؛

(ب) **جمعی نسبت به هر سطر.** به‌عنوان مثـال ، جمعی نسبت به سطر دوم می‌گوید که

به‌ازای هر بردار C ، $d(A_1, A_2 + C, A_3) = d(A_1, A_2, A_3) + d(A_1, C, A_3)$ ؛

(پ) حاصل ضرب سه‌گانهٔ اسکالر در صورتی صفر است که دو سطر مساوی باشند ؛

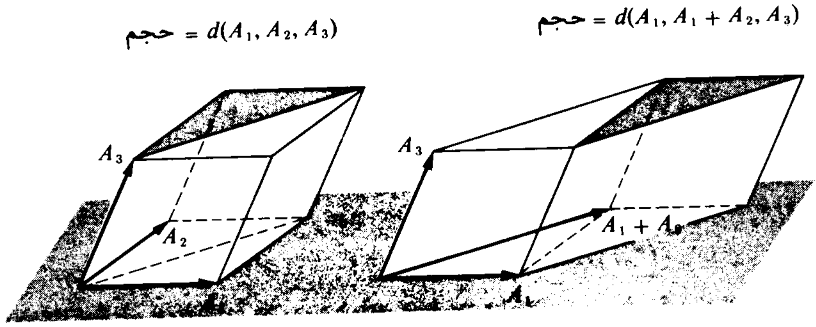
(ت) نرمیده سازی :

$d(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) = 1$ ، که درآن $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$، $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$، $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$.

هریک از این خواص را می‌توان به آسانی از خواص ضرب نقطه‌ای و خارجی به‌دست آورد . بعضی از اینها از رابطهٔ هندسی بین حاصل ضرب سه‌گانهٔ اسکالر و حجم متوازی السطوح معین شده به‌وسیلهٔ بردارهای هندسی A_1, A_2, A_3 ناشی می‌شوند . معنی هندسی خاصیت جمعــی (ب) در حــالتی خاص فایدهٔ بخصوصی دارد . اگر در (ب) فرض کنیم $C = A_1$، دومین جملهٔ سمت راست بخاطر (پ) صفر است ، و رابطهٔ (ب) خواهد شد

$$d(A_1, A_2 + A_1, A_3) = d(A_1, A_2, A_3) . \qquad (۳ \cdot ۳)$$

این خاصیت در شکل ۳ ۱۰ مجسم شده است ، که یک متوازی السطوح معین شده به وسیلهٔ A_1, A_2, A_3 ومتوازی السطـوح دیگـر معیــن شده به وسیلهٔ $A_1, A_1 + A_2, A_3$ را نشان می‌دهد . معــادلهٔ (۳ ۰ ۳) صرفــا" می‌گوید که این دو متوازی السطوح دارای یک حجم هستند . این امر از نظر هندسی واضح است ، زیرا متوازی‌السطوحها دارای یک ارتفاع‌اند و مساحت قاعده‌های آنها یکی است .



شکل ۳۰۱

تعبیر هندسی خاصیت $d(A_1, A_2, A_3) = d(A_1, A_1 + A_2, A_3)$. دو متوازی السطوح دارای یک حجم‌اند.

۳۰۳ مجموعهٔ اصول موضوع برای تابع دترمینان

خواص‌ضرب سه‌گانهٔ اسکالر مذکور در بخش پیش‌را می‌توان به‌طرز مناسبی تعمیم داد و به عنوان اصول موضوع برای دترمینانهای مرتبهٔ n به‌کار برد. فرض‌کنیم $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی یا مختلط باشد، و سطرهای آن را با $A_1, \ldots, A_n$ نشان‌می‌دهیم. بنابر این، سطر i ام A برداری است در فضای n که عبارت است از

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) .$$

دترمینان را تابعی از n سطر $A_1, \ldots, A_n$ می‌گیریم و مقادیر آن را با $d(A_1, \ldots, A_n)$ یا $\det A$ نشان می‌دهیم.

تعریف اصل موضوعی تابع دترمینان. تابع‌حقیقی یا مختلط d، که به‌ازای هر n تایی مرتب از بردارهای $A_1, \ldots, A_n$ در فضای n تعریف شده است، در صورتی یک ***تابع دترمینان*** از مرتبهٔ n نامیده می‌شود که دراصول موضوع زیر به‌ازای هر انتخابی از بردارهای $A_1, \ldots, A_n$ و C در فضای n صدق کند:

اصل موضوع ۱. همگنی نسبت به‌هر سطر. اگر سطر k ام A_k در اسکالر t ضرب شود، دترمینان نیز در t ضرب می‌شود:

$$d(\ldots, tA_k, \ldots) = t\, d(\ldots, A_k, \ldots) ;$$

اصل موضوع ۲. جمعی نسبت به هر سطر. به‌ازای هر k داریم

$$d(A_1, \ldots, A_k + C, \ldots, A_n) = d(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n) + d(A_1, \ldots, C, \ldots, A_n);$$

اصل موضوع ۳. دترمینان درصورت تساوی دو سطر صفر می‌شود:

هرگاه به‌ازای i و j ای که $i \neq j$، $A_i = A_j$، آنگاه $d(A_1, \ldots, A_n) = 0$.

اصل موضوع ۴. دترمینان ماتریس همانی مساوی ۱ است:

$d(I_1, \ldots, I_n) = 1$، که در آن I_k بردار یکهٔ مختصات k ام است.

دو اصل موضوع اول می‌گویند که دترمینان یک ماتریس تابعی خطی از هر سطر آن است. ایـن را اغلب این‌طور وصف می‌کنند که می‌گویند دترمینان یک تابع **چند خطی** از سطرهای خـودش است. باچند بار استفاده از خاصیت خطی نسبت به سطر اول می‌توان نوشت

$$d\left(\sum_{k=1}^{p} t_k C_k, A_2, \ldots, A_n\right) = \sum_{k=1}^{p} t_k\, d(C_k, A_2, \ldots, A_n),$$

که درآن $t_1, \ldots, t_p$ اسکالربوده‌و $C_1, \ldots, C_p$ بردارهای دلخواهی در فضای n می‌باشند.

گاهی شکل ضعیفتر اصل موضوع ۳ را به‌کار می‌برند:

اصل موضوع ۳′. دترمینان در صورت تساوی دو سطر مجاور صفر می‌شود:

هرگاه به‌ازای $k = 1, 2, \ldots, n-1$، $A_k = A_{k+1}$، آنگاه $d(A_1, \ldots, A_n) = 0$.

نکتهٔ قابل توجه آن است که، به‌ازای n داده شده، یک و فقط یک تابع مانند d هست کـه در اصول موضوع ۱، ۲، ۳′، و ۴ صدق می‌کند. اثبات این امر را، که یکی از نتایج عمدهٔ این فصل است، بعداً" خواهیم داد. قضیهٔ بعدی خواصی از دترمینانها را می‌دهد کـه فقط از اصـول موضوع ۱، ۲، و ۳′ نتیجه می‌شوند. یکی از این خواص اصل موضوع ۳ است. متذکر می‌شویم که اصل موضوع ۴ در برهان این قضیه به‌کار نرفته است. این امر بعداً"، وقتی یکتایی تابع دترمینان را ثابت می‌کنیم، مفید خواهد افتاد.

قضیهٔ ۱۰۳ . تابع دترمینان صادق در اصول موضوع ۱ ، ۲ ، و ۳′ از خواص زیر نیز بهره‌مند است :

(آ) دترمینان در صورت O بودن سطری از آن صفر است ;

هرگاه به‌ازای k ای $A_k = O$ ، آنگاه $d(A_1, \ldots, A_n) = 0$ ؛

(ب) دترمینان در صورت تعویض دو سطر مجاور با هم تغییر علامت می‌دهد :

$$d(\ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots) = -d(\ldots, A_{k+1}, A_k, \ldots);$$

(پ) دترمینان در صورت تعویض هر دو سطر A_i و A_j که $i \neq j$ با هم تغییر علامت می‌دهد ؛

(ت) دترمینان در صورت تساوی دو سطر آن صفر است :

هرگاه به‌ازای i و j ای که $i \neq j$ ، $A_i = A_j$ ، آنگاه $d(A_1, \ldots, A_n) = 0$ ؛

(ث) دترمینان در صورتی که سطرهایش وابسته باشند صفر است .

برهان. برای اثبات (آ) کافی است در اصل موضوع ۱ قرار دهیم $t = 0$. برای اثبات (ب) ، فرض کنیم B ماتریسی باشد با همان سطرهای A جز سطر k و $k+1$. فرض کنیم هر دو سطر B_k و B_{k+1} مساوی $A_k + A_{k+1}$ باشند . دراین صورت ، طبق اصل موضوع ۳′ ، $\det B = 0$. بنابر این ، می‌توان نوشت

$$d(\ldots, A_k + A_{k+1}, A_k + A_{k+1}, \ldots) = 0.$$

با اعمال خاصیت جمعی در مورد سطرهای k و $k+1$ ، می‌توان این معادله را به‌صورت زیر نوشت :

$$d(\ldots, A_k, A_k, \ldots) + d(\ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots) + d(\ldots, A_{k+1}, A_k, \ldots) + d(\ldots, A_{k+1}, A_{k+1}, \ldots) = 0.$$

جملات اول و چهارم ، طبق اصل موضوع ۳′ ، صفرند . لذا ، جملات دوم و سوم قرینهٔ یکدیگرند ، که (ب) را ثابت می‌کند .

برای اثبات (پ) می‌توان فرض کرد $i < j$. سطرهای A_i و A_j را می‌توان با تعویض سطرهای مجاور به‌تعدادی فرد بار با یکدیگر عوض کرد . ابتدا سطر A_j را متوالیا" با سطرهای مجاور قبلی $A_{j-1}, A_{j-2}, \ldots, A_i$ عوض می‌کنیم . این مستلزم $j - i$ تعویض است . بعد سطر A_i را متوالیا" با سطرهای مجاور بعدی $A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_{j-1}$ عوض می‌کنیم . این مستلزم $j - i - 1$ تعویض دیگر است . هر تعویض سطرهای مجاور علامت

دترمینان را عوض‌می‌کند. چون‌رویهم $(j-i)+(j-i-1)=2(j-i)-1$ تعویض (تعدادی فرد) وجود دارد، دترمینان به تعدادی فرد بار تغییر علامت می‌دهد، که‌این (پ) را ثابت خواهد کرد.

برای‌اثبات (ت)، فرض‌کنیم B ماتریس حاصل از تعویض سطرهای A_i و A_j با هم در A باشد. چون $A_i=A_j$، داریم $B=A$؛ و در نتیجه، $\det B=\det A$. اما، طبق (پ)، $\det B=-\det A$. بنابر این، $\det A=0$.

برای‌اثبات (ث)، فرض کنیم اسکالرهایی چون $c_1,\ldots,c_n$، که همه صفرنیستند، وجود داشته باشند بطوری که $\sum_{k=1}^{n} c_kA_k=O$. در این صورت، هرسطر A_k که در آن $c_k\neq 0$ را می‌توان بصورت ترکیبی خطی از سطرهای دیگر نوشت. برای سادگی، فرض کنیم A_1 ترکیبی خطی از سطرهای دیگر باشد؛ مثلاً، $A_1=\sum_{k=2}^{n} t_kA_k$. بنابر خاصیت خطی نسبت به سطر اول داریم

$$d(A_1,A_2,\ldots,A_n)=d\left(\sum_{k=2}^{n}t_kA_k,A_2,\ldots,A_n\right)=\sum_{k=2}^{n}t_k\,d(A_k,A_2,\ldots,A_n).$$

اما هر جملهٔ $d(A_k,A_2,\ldots,A_n)$ در مجموع آخر صفر است، زیرا A_k حداقل با یکی از $A_2,\ldots,A_n$ مساوی است. بنابر این، کل مجموع صفر است. چنانچه سطر A_i ترکیبی خطی از سطرهای دیگر باشد، با استفاده از خاصیت خطی نسبت به سطر i م، به همین نحو استدلال می‌کنیم. این امر (ث) را ثابت خواهد کرد.

۴.۳ محاسبهٔ دترمینانها

در این‌مرحله محاسبهٔ چند دترمینان، فقط با استفاده از اصول موضوع و خواص مذکوردر قضیهٔ ۱.۳ و این فرض‌که توابع دترمینان وجود دارند، ممکن است آموزنده باشد. در هریک از امثلهٔ زیر، از اصل موضوع ۴ تا آخرین مرحلهٔ محاسبه استفاده نخواهد شد.

مثال ۱. دترمینان یک ماتریس 2×2. ثابت می‌کنیم که

$$\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \qquad (۴.۳)$$

بردارهای سطری را به‌صورت ترکیبهایی خطی از بردارهای یکهٔ مختصات $i=(1,0)$ و

$j = (0, 1)$ می‌نویسیم :

$$A_1 = (a_{11}, a_{12}) = a_{11}\boldsymbol{i} + a_{12}\boldsymbol{j}, \qquad A_2 = (a_{21}, a_{22}) = a_{21}\boldsymbol{i} + a_{22}\boldsymbol{j}.$$

با استفاده از خاصیت خطی نسبت به سطر اول داریم

$$d(A_1, A_2) = d(a_{11}\boldsymbol{i} + a_{12}\boldsymbol{j}, A_2) = a_{11}\, d(\boldsymbol{i}, A_2) + a_{12}\, d(\boldsymbol{j}, A_2).$$

حال با استفاده از خاصیت خطی نسبت به سطر دوم خواهیم داشت

$$d(\boldsymbol{i}, A_2) = d(\boldsymbol{i}, a_{21}\boldsymbol{i} + a_{22}\boldsymbol{j}) = a_{21}\, d(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) + a_{22}\, d(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = a_{22}\, d(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}),$$

زیرا $d(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) = 0$. بهمین نحو ، به‌دست می‌آوریم که

$$d(\boldsymbol{j}, A_2) = d(\boldsymbol{j}, a_{21}\boldsymbol{i} + a_{22}\boldsymbol{j}) = a_{21}\, d(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}) = -a_{21}\, d(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}).$$

لذا ، خواهیم داشت

$$d(A_1, A_2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, d(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}).$$

اما ، طبق اصل موضوع ۴ ، $d(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = 1$ ؛ در نتیجه ، همانطور که حکم شده ،

$$d(A_1, A_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\ .$$

این استدلال نشان می‌دهد که اگر برای ماتریسهای 2×2 تابع دترمینان وجود داشته باشد ، حتما" باید به شکل (۴۰۳) باشد . بعکس، به آسانی ثابت می‌شود که این فرمول معرف یک تابع دترمینان از مرتبهٔ 2 است . بنابراین ، نشان داده‌ایم که یک و فقط یک تابع دترمینان از مرتبهٔ 2 وجود دارد .

مثال ۲. دترمینان یک ماتریس قطری. هرماتریس مربعی به شکل

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

یک ***ماتریس قطری*** نامیده می‌شود . هر درایهٔ a_{ij} غیر واقع بر قطر اصلی $(i \neq j)$ صفر است . ثابت می‌کنیم دترمینان A مساوی حاصل ضرب عناصر قطری آن است :

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{۵۰۳}$$

سطر k ام A چیزی جز مضرب اسکالر بردار یکهٔ k ام مختصات نیست : $A_k = a_{kk}I_k$. با استفادهٔ مکرر از خاصیت همگنی برای استخراج سازه‌ها یکی یکی ، خواهیم داشت

$$\det A = d(A_1, \ldots, A_n) = d(a_{11}I_1, \ldots, a_{nn}I_n) = a_{11} \cdots a_{nn}\, d(I_1, \ldots, I_n).$$

این فرمول را می‌توان به شکل

$$\det A = a_{11} \cdots a_{nn} \det I$$

نوشت، کـه در آن I ماتریس همانی است. اصل موضوع ۴ به‌ما می‌گوید که $\det I = 1$؛ در نتیجه، (۵۰۳) به‌دست خواهد آمد.

مثال ۳. دترمینان ماتریس بالا مثلثی. هر ماتریس مربعی به شکل

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

یک ***ماتریس بالا مثلثی*** نـام‌دارد. تمام درایه‌های زیر قطر اصلی صفرند. ثابت می‌کنیم دترمینان چنین ماتریسی مساوی حاصل ضرب عناصر قطری آن است:

$$\det U = u_{11}u_{22} \cdots u_{nn}.$$

ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر یک عنصر قطری مانند u_{ii} مساوی 0 باشد، $\det U = 0$. اگر آخـرین عنصر قطری u_{nn} صفر باشد، سطر آخر O است و، طبق قضیهٔ ۱۰۳ (آ)، $\det U = 0$. پس فـرض کنیم عنصر قطری پیشتری مانند u_{ii} صفر باشد. برای مشخص بودن وضع، مثلاً $u_{22} = 0$. در این‌صورت، هریک از $n - 1$ بردار سطری $U_2, \ldots, U_n$ دارای دو مولفهٔ اول صفر است. از اینرو، این بردارها زیر فضایی با بعد حداکثر $n - 2$ را می‌پیمایند. بنـابر ایـن، این $n - 1$ سطر (و در نتیجه، ***تمام*** سطرها) وابسته‌اند. پس، بنابر قضیهٔ ۱۰۳ (ث)، $\det U = 0$. بهمین ترتیب، در می‌یابیم که اگر یکی از عنصرهای قطری صفر باشد، $\det U = 0$.

حال می‌پردازیم به حالت کلی. ابتدا سطر اول U_1 را به‌صورت مجموعی از دوبردار سطری می‌نویسیم:

$$U_1 = V_1 + V_1',$$

که در آن $V_1 = [u_{11}, 0, \ldots, 0]$ و $V_1' = [0, u_{12}, u_{13}, \ldots, u_{1n}]$. طبق خـاصیت خطی نسبت به سطر اول داریم

$$\det U = \det(V_1, U_2, \ldots, U_n) + \det(V_1', U_2, \ldots, U_n).$$

اما $\det(V_1', U_2, \ldots, U_n) = 0$ ، زیرا دترمینان یک ماتریس بالامثلثی با یک عنصر قطری 0 است. بنابراین، داریم

$$\det U = \det(V_1, U_2, \ldots, U_n). \tag{۶.۳}$$

حال با بردار سطری U_2 همین‌کار را کرده، آن را به‌صورت یک مجموع بیان می‌کنیم:

$$U_2 = V_2 + V_2',$$

که در آن

$V_2 = [0, u_{22}, 0, \ldots, 0]$ و $V_2' = [0, 0, u_{23}, \ldots, u_{2n}]$.

با استفاده از اینها در طرف راست (۶.۳) و اعمال خاصیت خطی نسبت به سطر دوم، داریم

$$\det U = \det(V_1, V_2, U_3, \ldots, U_n), \tag{۷.۳}$$

زیرا $\det(V_1, V_2', U_3, \ldots, U_n) = 0$. با تکرار استدلال در مورد هرسطر بعدی در طرف راست (۷.۳)، مآلاً" خواهیم داشت

$$\det U = \det(V_1, V_2, \ldots, V_n),$$

که درآن $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ یک ماتریس قطری با همان عنصرهای قطری U است. لذا، طبق مثال ۲، داریم

$$\det U = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn},$$

که همان مطلوب می‌باشد.

مثال ۴. محاسبه به وسیلهٔ فرایند گاوس ـ ژردان. فرایند حذف گاوس ـ ژردان برای حل دستگاههای معادلات خطی نیز یکی از بهترین روشها برای محاسبهٔ دترمینانهاست. به‌یاد می‌آوریم کـه این روش مشتمل بود برسه نوع عمل در مورد سطرهای یک ماتریس:

(۱) تعویض دوسطر باهم؛

(۲) ضرب تمام عنصرهای یک سطر در یک اسکالر ناصفر؛

(۳) افزودن مضرب اسکالری از یک سطر به سطر دیگر.

با انجام پی‌درپی این اعمال بنحوی اصولی می‌توان هر ماتریس مربعی A را به‌یک ماتریس بالامثلثی U بدل کرد که اینک راه محاسبهٔ دترمینان آن را می‌دانیم. به‌آسانی می‌توان رابطهٔ بین $\det A$ و $\det U$ را مشخص نمود. هربار که عمل (۱) صورت گیرد،

دترمینان تغییرعلامت می‌دهد. هربار (۲) با اسکالر $c \neq 0$ انجام شود، دترمینان در c ضرب می‌شود. و هربار (۳) صورت گیرد، دترمینان تغییر نخواهد کرد. بنابراین، هرگاه عمل (۱) p بار انجام شود و $c_1, \ldots, c_q$ ضریبهای اسکالر ناصفری باشند که در عمل (۲) به‌کار رفته‌اند، آنگاه خواهیم داشت

$$\det A = (-1)^p (c_1 c_2 \cdots c_q)^{-1} \det U. \qquad (۸\cdot۳)$$

مجدداً " ملاحظه می‌شود که این فرمول فقط نتیجه‌ای است از سه اصل موضوع اول، وبرهان آن به‌اصل موضوع ۴ بستگی ندارد.

۵۰۳ قضیهٔ یکتایی

در مثال ۳ بخش پیش نشان دادیم که اصول موضوع ۱، ۲، و ۳ فرمول $\det U = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn} \det I$ را ایجاب می‌کنند. از تلفیق این با (۸۰۳) می‌بینیم که به‌ازای‌هر ماتریس $n \times n$ مانند A اسکالری چون c (وابسته به A) وجود داردبطوری که

$$d(A_1, \ldots, A_n) = c\, d(I_1, \ldots, I_n). \qquad (۹\cdot۳)$$

بعلاوه، این فرمول نتیجه‌ای است فقط از اصول موضوع ۱، ۲، و ۳. از این می‌توان به آسانی ثابت کرد که بیش از یک تابع دترمینان نمی‌تواند موجود باشد.

قضیهٔ ۲۰۳. قضیهٔ یکتایی برای دترمینانها. *فرض‌کنیم تابع d در هر چهار اصل موضوع تابع دترمینان از مرتبهٔ n صدق کند، و f تابعی دیگر و صادق در اصول موضوع ۱، ۲، و ۳ باشد. در این صورت، به‌ازای هرانتخابی از بردارهای $A_1, \ldots, A_n$ در فضای n داریم*

$$f(A_1, \ldots, A_n) = d(A_1, \ldots, A_n) f(I_1, \ldots, I_n). \qquad (۱۰\cdot۳)$$

بخصوص، اگر f در اصل موضوع ۴ نیز صدق کند، خواهیم داشت

$$f(A_1, \ldots, A_n) = d(A_1, \ldots, A_n).$$

برهان. فرض‌کنیم

$$g(A_1, \ldots, A_n) = f(A_1, \ldots, A_n) - d(A_1, \ldots, A_n) f(I_1, \ldots, I_n)\cdot$$

ثابت می‌کنیم به‌ازای هرانتخابی از $A_1, \ldots, A_n$ داریم $g(A_1, \ldots, A_n) = 0$. گوییم

چون d و f هر دو در اصول موضوع ۱، ۲، و ۳ صدق می‌کنند، این در مورد g نیز صادق است. لذا، g نیز در معادلهٔ (۹.۳) صدق می‌کند، زیرا این معادله فقط از سه اصل موضوع اول نتیجه شده بود. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$g(A_1, \ldots, A_n) = c\, g(I_1, \ldots, I_n), \tag{۱۱.۳}$$

که در آن c یک اسکالر وابسته به A است. با اختیار $A = I$ در تعریف g و توجه به این امر که d در اصل موضوع ۴ صدق می‌کند، درمی‌یابیم که

$$g(I_1, \ldots, I_n) = f(I_1, \ldots, I_n) - f(I_1, \ldots, I_n) = 0 .$$

بنابراین، معادلهٔ (۱۱.۳) خواهد شد $g(A_1, \ldots, A_n) = 0$. این برهان را تمام خواهد کرد.

۶.۳ تمرین

در این تمرینها می‌توانید وجود یک تابع دترمینان را دانسته بگیرید. دترمینانهای مرتبهٔ 3 را می‌توان با معادلهٔ (۲.۳) حساب کرد.

۱. هریک از دترمینانهای زیر را حساب کنید:

(آ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$؛ (ب) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$؛ (پ) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$.

۲. هرگاه $\det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$، دترمینان هریک از ماتریسهای زیر را حساب کنید:

(آ) $\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$؛ (ب) $\begin{bmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{bmatrix}$؛

(پ) $\begin{bmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

۳. (آ) ثابت کنید که $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

(ب) فرمولهای نظیر را برای دترمینانهای

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

پیدا کنید.

۴. دترمینان هریک از ماتریسهای زیر را با تبدیلشان به یک ماتریس بالامثلثی حساب کنیـــد:

(آ) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$؛ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix}$؛ (پ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{bmatrix}$؛

(ت) $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}$؛ (ث) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

۵. ماتریس پایین مثلثی $A = (a_{ij})$ ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی‌آن 0 اند؛ یعنی، هرگاه $i < j$ ، آنگاه $a_{ij} = 0$. ثابت کنید دترمینان این ماتریس مساوی حاصل ضرب درایه‌های قطری آن است: $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

۶. فرض کنید f_1, f_2, g_1, g_2 چهار تـابع مشتقپذیر بر بازهٔ (a, b) باشند. به‌ازای هر x در (a, b) تعریف کنید

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}$$

و ثابت کنید

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix}$$

۷. تعمیم تمرین ۶ را برای دترمینان

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix}$$

بیان و اثبات کنید.

۸ . (آ) ثابت کنید هرگاه $F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}$ ، آنگاه $F'(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) \end{vmatrix}$.

(ب) با فرض برقراری معادلهٔ (۲۰۳)، نتیجهٔ متناظر را برای دترمینانهای 3×3 بیان و اثبات کنید.

۹ . فرض‌کنید U و V دو ماتریس $n \times n$ بالا مثلثی باشند.

(آ) ثابت کنید هریک از $U + V$ و UV یک ماتریس بالامثلثی است.

(ب) ثابت کنید $\det (UV) = (\det U)(\det V)$.

(پ) هرگاه $\det U \neq 0$ ، ثابت کنید یک ماتریس بالامثلثی مانند U^{-1} هست بطوری که $UU^{-1} = I$ ، و نتیجه‌بگیرید که $\det (U^{-1}) = 1/\det U$.

۱۰ . $\det A$ ، $\det (A^{-1})$ ، و A^{-1} را در مورد ماتریس بالامثلثی

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حساب کنید.

۷۰۳ فرمول ضرب برای دترمینانها

در این بخش، با فرض وجود تابع دترمینان، از قضیهٔ یکتایی استفاده کرده ثابت می‌کنیم که دترمینان حاصل ضرب دوماتریس مربعی مساوی حاصل ضرب دترمینانهای آنهاست:

$$\det (AB) = (\det A)(\det B).$$

به‌یاد می‌آوریم که حاصل ضرب AB دوماتریس $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ ماتریسی است چون $C = (c_{ij})$ که درایهٔ i, j آن از فرمول

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad (۱۲۰۳)$$

به‌دست می‌آیـد. حاصل ضرب فقط‌وقتی تعریف می‌شود که تعداد ستونهای سازهٔ سمت چپ، یعنـی A، مساوی تعداد سطرهای سازهٔ سمت راست، یعنی B، است. این در صورتی که A و B هر دو مربعی و به یک اندازه باشند همواره چنین است.

در اثبات فرمـول ضرب از رابطهٔ ساده‌ای استفاده می‌شود که بین سطرهای AB و سطرهای A برقرار است. مـا آن را به‌صورت یـک لم بیان می‌کنیم. طبق معمول، فرض می‌کنیم A_i سطر i م ماتریس A باشد.

لم ۳۰۳ . ***هرگاه A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times p$ باشد، آنگاه داریم***

$$(AB)_i = A_iB \cdot$$

یعنی، سطر i م حاصل ضرب AB مساوی حاصل ضرب ماتریس سطری A_i در B است.

برهان. فرض‌کنیم B^j ستون j م B بوده‌و $C = AB$. دراین‌صورت، مجموع (۱۲۰۳) را می‌توان حاصل ضرب نقطه‌ای سطر i م A در ستون j م B گرفت:

$$c_{ij} = A_i \cdot B^j .$$

بنابر این، سطر i م C_i مساوی ماتریس سطری زیر است:

$$C_i = [A_i \cdot B^1, A_i \cdot B^2, \ldots, A_i \cdot B^p].$$

اما این نیز نتیجه‌ای است از ضرب ماتریسی ماتریس سطری A_i در B، زیرا

$$A_iB = [a_{i1}, \ldots, a_{in}] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = [A_i \cdot B^1, \ldots, A_i \cdot B^p].$$

بنابراین، $C_i = A_iB$، که لم را ثابت خواهد کرد.

قضیهٔ ۴۰۳ . فرمول ضرب برای دترمینانها. *برای هر دوماتریس $n \times n$ مانند A و B داریم*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) .$$

برهان. چون $(AB)_i = A_iB$، باید ثابت کنیم که

$$d(A_1B, \ldots, A_nB) = d(A_1, \ldots, A_n)\, d(B_1, \ldots, B_n).$$

با استفادهٔ مجدد از لم، نیز داریم $B_i = (IB)_i = I_iB$ ، که در آن I ماتریس همانی $n \times n$ است. بنابراین، $d(B_1, \ldots, B_n) = d(I_1B, \ldots, I_nB)$ ، و باید ثابت کنیم‌که

$$d(A_1B, \ldots, A_nB) = d(A_1, \ldots, A_n)\, d(I_1B, \ldots, I_nB).$$

B را ثابت می‌گیریم و تابع f را با فرمول

$$f(A_1, \ldots, A_n) = d(A_1B, \ldots, A_nB)$$

تعریف می‌کنیم. معادله‌ای که می‌خواهیم ثابت کنیم این‌طور می‌گوید که

$$f(A_1, \ldots, A_n) = d(A_1, \ldots, A_n) f(I_1, \ldots, I_n). \qquad (۱۳ \cdot ۳)$$

اما تحقیق اینکه f در اصول موضوع ۱، ۲، و ۳ برای تابع دترمینان صدق می‌کند ساده است؛ در نتیجه، طبق قضیهٔ یکتایی، معادلهٔ (۱۳۰۳) به‌ازای هر ماتریس A برقرار می‌باشد. این برهان را تمام خواهد کرد.

کاربردهای فرمول ضرب در دو بخش بعدی داده شده‌اند.

۸.۳ دترمینان معکوس یک ماتریس نامنفرد

به‌یاد می‌آوریم که ماتریس مربعی A را **نامنفرد** گوییم اگر که **معکوس چپی** چون B داشته باشد بطوری که $BA = I$. اگر معکوس چپ وجود داشته باشد، منحصر بفرد بوده ومعکوس راست نیز هست؛ یعنی، $AB = I$. معکوس را با A^{-1} نشان می‌دهیم. رابطهٔ بین $\det A$ و $\det A^{-1}$ به همان اندازه که انتظار می‌رود طبیعی است.

قضیهٔ ۵.۳ . *هرگاه ماتریس A نامنفرد باشد، آنگاه* $\det A \neq 0$ *و داریم*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}. \qquad (۱۴ \cdot ۳)$$

برهان. از فرمول ضرب داریم

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det (AA^{-1}) = \det I = 1.$$

بنابراین، $\det A \neq 0$ و (۱۴۰۳) برقرار است.

قضیهٔ ۵.۳ نشان می‌دهد که صفر نشدن $\det A$ شرطی لازم برای نامنفرد بودن A

است. بعداً ثابت می‌کنیم این شرط کافی نیز هست؛ یعنی، هرگاه $\det A \neq 0$، آنگاه A^{-1} وجود خواهد داشت.

۹.۳ دترمینانها و استقلال بردارها

از قضیهٔ ۵.۳ می‌توان محک ساده‌ای برای آزمودن استقلال بردارها نتیجه گرفت.

قضیهٔ ۶.۳. *یک مجموعهٔ مرکب از n بردار $A_1, \ldots, A_n$ در فضای n مستقل است اگر و فقط اگر $d(A_1, \ldots, A_n) \neq 0$.*

برهان. قبلاً در قضیهٔ ۲.۳ (ث) ثابت شد که وابستگی ایجاب می‌کند که $d(A_1, \ldots, A_n) = 0$. برای اثبات عکس، فرض کنیم $A_1, \ldots, A_n$ مستقل باشند و ثابت می‌کنیم $d(A_1, \ldots, A_n) \neq 0$.

فرض کنیم V_n فضای خطی n تاییهای اسکالرها باشد. چون $A_1, \ldots, A_n$، n عنصر مستقل در فضای n بعدی‌اند، یک پایه برای V_n تشکیل می‌دهند. پس، طبق قضیهٔ ۱۲.۲، یک تبدیل خطی مانند $T: V_n \to V_n$ هست که این n بردار را بروی بردارهای یکهٔ مختصات می‌نگارد:

$$\text{به‌ازای } k = 1, 2, \ldots, n \text{ ، } T(A_k) = I_k .$$

بنابراین، یک ماتریس $n \times n$ مانند B هست بطوری که

$$\text{به‌ازای } k = 1, 2, \ldots, n \text{ ، } A_k B = I_k .$$

اما، طبق لم ۳.۳، داریم $A_k B = (AB)_k$، که درآن A ماتریسی است با سطرهای $A_1, \ldots, A_n$. بنابر این، $AB = I$؛ در نتیجه، A نامنفرد است و $\det A \neq 0$.

۱۰.۳ دترمینان یک ماتریس قطری قالبی

هر ماتریس مربعی C به شکل

$$C = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix},$$

که در آن A و B ماتریسهایی مربعی بوده و هر O یک ماتریس صفر باشد، یک ***ماتریس قطری قالبی*** با دو قالب قطری A و B نامیده می‌شود. یک نمونه ماتریس 5×5

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&2&3\\0&0&4&5&6\\0&0&7&8&9\end{bmatrix}$$

است . قالبهای قطری در این حالت عبارتند از

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}.$$

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که دترمینان یک ماتریس قطری قالبی مساوی حاصلضرب دترمینانهای قالبهای قطری آن است .

قضیهٔ ۷۰۳ . *برای هر دو ماتریس مربعی A و B داریم*

$$\det\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}=(\det A)(\det B). \tag{۱۵۰۳}$$

برهان. فرض کنیم A ماتریسی $n\times n$ و B ماتریسی $m\times m$ باشد . ملاحظه می‌شود که ماتریس قطری قالبی را می‌توان به صورت حاصل ضرب

$$\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&O\\O&I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n&O\\O&B\end{bmatrix}$$

نوشت ، که در آن I_n و I_m بترتیب ماتریسهای همانی از مرتبهٔ n و m اند . بنابراین ، طبق فرمول ضرب برای دترمینانها ، داریم

$$\det\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}A&O\\O&I_m\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix}I_n&O\\O&B\end{bmatrix}. \tag{۱۶۰۳}$$

حال دترمینان $\det \begin{bmatrix} A & O \\ O & I_m \end{bmatrix}$ را به‌عنوان تابعی از n سطر A درنظر می‌گیریم. این امر بخاطرقالب صفرها درگوشهٔ راست بالایی میسراست. به‌آسانی معلوم می‌شود که این تابع در چهاراصل موضوع تابع دترمینان ازمرتبهٔ n صدق می‌کند. لذا، طبق قضیهٔ یکتایی، باید داشته باشیم

$$\det \begin{bmatrix} A & O \\ O & I_m \end{bmatrix} = \det A.$$

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که $\det \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & B \end{bmatrix} = \det B$. بنابراین، (۱۶۰۳) رابطهٔ (۱۵۰۳) را ایجاب خواهد کرد.

۱۱۰۳ تمرین

۱. برای هریک از احکام زیر در مورد ماتریسهای مربعی یا برهان بیاورید یا مثال نقض:

(آ) $\det (A + B) = \det A + \det B$؛

(ب) $\det \{(A + B)^2\} = \{\det (A + B)\}^2$؛

(پ) $\det \{(A + B)^2\} = \det (A^2 + 2AB + B^2)$؛

(ت) $\det \{(A + B)^2\} = \det (A^2 + B^2)$.

۲. (آ) قضیهٔ ۷۰۳ را به‌ماتریسهای قطری قالبی با سه قالب قطری تعمیم دهید:

$$\det \begin{bmatrix} A & O & O \\ O & B & O \\ O & O & C \end{bmatrix} = (\det A)(\det B)(\det C).$$

(ب) تعمیم برای ماتریسهای قطری قالبی با هر تعداد قالب قطری را بیان و اثبات نمایید.

۳. فرض کنید $B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$، و ثابت کنید

$$\det A = \det \begin{bmatrix} c & d \\ g & h \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \det B = \det \begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix}.$$

۴ . تعمیم تمرین ۳ را برای ماتریسهای $n \times n$ بیان و اثبات کنید .

۵ . فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{bmatrix}$ ، و ثابت کنید $\det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} g & h \\ z & w \end{bmatrix}$.

۶ . تعمیم تمرین ۵ برای ماتریسهای $n \times n$ به شکل

$$A = \begin{bmatrix} B & O \\ C & D \end{bmatrix}$$

که در آن B, C, D ماتریسهایی مربعی بوده و O ماتریس صفر است ، را بیان و اثبات نمایید .

۷ . با استفاده از قضیهٔ ۶.۳ ، تعیین کنید آیا مجموعه‌های زیر از بردارها وابسته خطی‌اند یا مستقل خطی :

(آ) $A_1 = (1, -1, 0), A_2 = (0, 1, -1), A_3 = (2, 3, -1)$ ؛

(ب) $A_1 = (1, -1, 2, 1), A_2 = (-1, 2, -1, 0), A_3 = (3, -1, 1, 0), A_4 = (1, 0, 0, 1)$ ؛

(پ) $A_1 = (1, 0, 0, 0, 1), A_2 = (1, 1, 0, 0, 0), A_3 = (1, 0, 1, 0, 1), A_4 = (1, 1, 0, 1, 1)$
$A_5 = (0, 1, 0, 1, 0)$?

۱۲.۳ فرمولهای بسط برای دترمینانها . مینورها و همسازه‌ها

ما هنوز ، جز در حالت 2×2 ، نشان نداده‌ایم که یک تابع دترمینان عملاً وجود دارد . در این بخش از خاصیت خطی و قضیهٔ یکتایی استفاده کرده نشان می‌دهیم که اگر دترمینانها وجود داشته باشند ، می‌توان آنها را با فرمولی حساب کرد که هر دترمینان مرتبهٔ n را به‌صورت ترکیبی خطی از دترمینانهای مرتبهٔ $n - 1$ بیان می‌کند . معادلهٔ (۲.۳) در بخش ۱۰.۳ نمونه‌ای است از این فرمول در حالت 3×3 . فرمول کلی زوشی را برای اثبات وجود توابع دترمینان به وسیلهٔ استقرا به دست خواهد داد .

هر سطر یک ماتریس $n \times n$ مانند A را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از n بردار یکهٔ مختصات $I_1, \ldots, I_n$ بیان‌کرد . مثلاً ، سطر اول A_1 را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$A_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} I_j .$$

چون دترمینانها نسبت به سطر اول خطی‌اند ، داریم

$$d(A_1, A_2, \ldots, A_n) = d\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} I_j, A_2, \ldots, A_n\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, d(I_j, A_2, \ldots, A_n). \quad (۱۷\cdot۳)$$

لذا ، برای محاسبهٔ $\det A$ کافی است $d(I_j, A_2, \ldots, A_n)$ را برای هر بردار یکهٔ مختصات I_j حساب کنیم .

از نماد A'_{1j} برای نمایش ماتریس حاصل از A به‌وسیلهٔ تعویض سطر اول A_1 با بردار یکهٔ I_j استفاده می‌کنیم . مثلاً ، اگر $n = 3$ ، سه ماتریس از این نوع وجود دارد :

$$A'_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A'_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A'_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

توجه کنید که $\det A'_{1j} = d(I_j, A_2, \ldots, A_n)$. حال معادلهٔ (۱۷۰۳) را می‌توان به‌شکل زیر نوشت :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \det A'_{1j}. \quad (۱۸\cdot۳)$$

این فرمول یک **فرمول بسط** نامیده می‌شود ؛ این فرمول دترمینان A را به‌صورت ترکیبی خطی از عناصر سطر اول آن بیان می‌کند .

استدلالی که در اثبات (۱۸۰۳) بکار رفت را می‌توان به‌جای سطر اول بر سطر k ام اعمال کرد . نتیجه فرمول بسطی است برحسب عناصر سطر k ام .

قضیهٔ ۸۰۳ . بسط نسبت به همسازه‌ها . ***فرض کنیم A'_{kj} ماتریسی باشد که از A به‌وسیلهٔ تعویض سطر k ام A_k با بردار یکهٔ مختصات I_j به‌دست می‌آید . در این صورت، فرمول بسط***

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \det A'_{kj} \quad (۱۹\cdot۳)$$

را خواهیم داشت ، که دترمینان A را به‌صورت ترکیبی خطی از عناصر سطر k ام بیان می‌کند . عدد $\det A'_{kj}$ همسازهٔ درایهٔ a_{kj} نامیده می‌شود .

در قضیهٔ بعد ثابت می‌کنیم هر همسازه ، صرف‌نظر از علامت بعلاوه یا منها ، مساوی دترمینان یک ماتریس از مرتبهٔ $n - 1$ است . این ماتریسهای کوچکتر ***مینورها*** نامیده می‌شوند .

تعریف. به فرض معلوم بودن ماتریس مربعی A از مرتبهٔ $n \geq 2$ ، ماتریس مربعی از مرتبهٔ $n-1$ که با حذف سطر k ام و ستون j م از A به دست می‌آید **مینور** k,j ، A نامیده شده و با A_{kj} نموده می‌شود.

مثال. ماتریس $A=(a_{kj})$ از مرتبهٔ 3 دارای نه مینور است. سه‌تا از آنها عبارتند از

$$A_{11}=\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad A_{12}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad A_{13}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

معادلهٔ (۲۰۳) دترمینان یک ماتریس 3×3 را به‌صورت ترکیبی خطی از دترمینانهای این سه مینور بیان می‌کند. این فرمول را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + a_{13}\det A_{13}.$$

قضیهٔ بعدی این فرمول را به‌حالت $n \times n$ به‌ازای هر $n \geq 2$ تعمیم می‌دهد.

قضیهٔ ۹۰۳. بسط نسبت به‌مینورهای سطر k ام. *به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ مانند A که $n \geq 2$ ، همسازهٔ a_{kj} به مینور A_{kj} با فرمول*

$$\det A'_{kj} = (-1)^{k+j}\det A_{kj} \tag{۲۰۰۳}$$

مربوط می‌شود. بنابراین، بسط $\det A$ نسبت به عنصرهای سطر k ام از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}\det A_{kj}. \tag{۲۱۰۳}$$

برهان. روش اثبات را ابتدا با توجه به حالت خاص $k=j=1$ نشان می‌دهیم. ماتریس A'_{11} دارای شکل زیر است:

$$A'_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

با انجام اعمـــال سطری مقـــدماتی از نوع (۳) می‌توان هر درایه‌ٔ زیر ۱ درستون اول را، بی‌آنکه درایه‌های دیگـــر دست بخورند، صفر کرد. مثلا"، اگر سطر اول A'_{11} را در $-a_{21}$ ضرب کرده و حاصل را به سطر دوم بیافزاییم، سطر دوم جدید $(0, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n})$ می‌شود. با تکرار این اعمال سطری مقدماتی ماتریس جدیدی خواهیم داشت که آن را با A^0_{11} نشان می‌دهیم و دارای شکل زیر است:

$$A^0_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

چون اعمال سطری از نوع (۳) دترمینان را تغییر نمی‌دهد، خواهیم داشت

$$\det A^0_{11} = \det A'_{11}. \tag{۲۲.۳}$$

اما A^0_{11} یک ماتریس قطری قالبی است؛ در نتیجه، طبق قضیهٔ ۷.۳، داریم

$$\det A^0_{11} = \det A_{11},$$

که در آن A_{11} عبارت است از مینور 1, 1 ماتریس A:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

بنابر این، $\det A'_{11} = \det A_{11}$، که (۲۰.۳) را به‌ازای $k = j = 1$ ثابت می‌کند.

اکنون حالت خاص $k = 1$ و j دلخواه را درنظر می‌گیریم، و ثابت می‌کنیم

$$\det A'_{1j} = (-1)^{j-1} \det A_{1j}. \tag{۲۳.۳}$$

همینکه (۲۳.۳) ثابت شد، فرمول کلینـــر (۲۰.۳) فورا" نتیجه می‌شود، زیرا ماتریس A'_{kj} رامی‌توان با $k-1$ تعویض‌پی در پی سطرهای مجاور به ماتریسی به شکل B'_{1j} تبدیل کـــرد. دترمینان در هر تعویض تغییر علامت می‌دهد؛ در نتیجه، داریم

$$\det A'_{kj} = (-1)^{k-1} \det B'_{1j}, \qquad (۲۴\cdot۳)$$

که در آن B یک ماتریس $n \times n$ است که سطر اول آن I_j بوده و مینور $1,j$ ماتریس B_{1j} ماتریس A_{kj} است. بنابر (۲۳۰۳)، داریم

$$\det B'_{1j} = (-1)^{j-1} \det B_{1j} = (-1)^{j-1} \det A_{kj};$$

در نتیجه، از (۲۴۰۳) معلوم می‌شود که

$$\det A'_{kj} = (-1)^{k-1}(-1)^{j-1} \det A_{kj} = (-1)^{k+j} \det A_{kj}.$$

بنابراین، اگر (۲۳۰۳) را ثابت کنیم، (۲۰۰۳) نیز ثابت شده است. حال می‌پردازیم به اثبات (۲۳۰۳). ماتریس A'_{1j} دارای شکل زیر است:

$$A'_{1j} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

با اعمال سطری مقدماتی از نوع (۳)، ستونی از صفر زیر 1 به‌وجود آورده و ماتریس را به‌ماتریس زیر تبدیل می‌کنیم:

$$A^0_{1j} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

مثل قبل، دترمینان تغییر نمی‌کند؛ در نتیجه، $\det A^0_{1j} = \det A'_{1j}$. مینور $1,j$ ، A_{1j} دارای شکل زیر است:

$$A_{1j} = \begin{bmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

حال $\det A^0_{1j}$ را به‌عنوان تابعی از $n-1$ سطر A_{1j} در نظر می‌گیریم؛ مثلاً،

$\det A^0_{1j} = f(A_{1j})$. تابع f درسه اصل موضوع اول تابع دترمینان از مرتبهٔ $n-1$ صدق می‌کند . بنابراین ، طبق قضیهٔ یکتایی ، می‌توانیم بنویسیم

$$f(A_{1j}) = f(J)\det A_{1j}\,, \qquad (۲۵۰۳)$$

که در آن J ماتریس همانی از مرتبهٔ $n-1$ است . پس، برای اثبات (۲۳۰۳) باید نشان دهیم که $f(J) = (-1)^{j-1}$. اما $f(J)$ ، طبق تعریف ، دترمینان ماتریس زیر است:

$$C = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{سطر } j \text{ م} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \uparrow \\ \text{ستون } j \text{ م} & \end{array}$$

درایه‌ها در امتداد خطوط مایل همه 1 هستند . درایه‌های دیگری که نموده نشده‌اند همه 0 می‌باشند . با تعویض پی در پی سطر اول C با سطرهای $2, 3, \ldots, j$ ، بعد از $j-1$ تعویض، به ماتریس همانی $n \times n$ ، I می‌رسیم . دترمینان در هر تعویض تغییر علامت می‌دهد ؛ در نتیجه ، $\det C = (-1)^{j-1}$. بنابر این ، $f(J) = (-1)^{j-1}$ ، که (۲۳۰۳) ؛ و لذا ، (۲۰۰۳) را ثابت می‌کند .

۱۳۰۳ وجود تابع دترمینان

در این بخش با استقرا بر n ، یعنی اندازهٔ یک ماتریس، ثابت می‌کنیم توابع دترمینان از هر مرتبه وجود دارند . قبلاً" به‌ازای $n = 2$ نشان داده‌ایم که تابع دترمینان وجود دارد . حالت $n = 1$ را نیز می‌توان با تعریف $\det [a_{11}] = a_{11}$ سامان‌داد .

اگر فرض کنیم یک تابع دترمینان از مرتبهٔ $n-1$ وجود دارد ، نامزد مناسب برای تابع دترمینان از مرتبهٔ n یکی از فرمولهای بسط قضیهٔ ۹۰۳ ، مثلاً" ، بسط نسبت به

مینورهای سطر اول است. لیکن، اگر فرمولی دیگر ولی مشابه که برحسب مینورهای **ستون** اول بیان شده است را به‌کار بریم، تحقیق اصول موضوع آسانتر خواهد بود.

قضیهٔ ۳.۱۰۰ *فرض کنیم دترمینانهای مرتبهٔ $n-1$ وجود داشته باشند. به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ مانند $A = (a_{jk})$، فرض کنیم f تابعی باشد که با فرمول*

$$f(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1} \qquad (۳.۲۶)$$

تعریف شده است. در این صورت، f در چهار اصل موضوع یک تابع دترمینان از مرتبهٔ n صدق می‌کند. بنابراین، به استقرا، دترمینانهای مرتبهٔ n به‌ازای هر n وجود خواهند داشت.

برهان. هر جمله از مجموع در (۳.۲۶) را تابعی از سطرهای A می‌گیریم و می‌نویسیم

$$f_j(A_1, \ldots, A_n) = (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1}.$$

اگر ثابت کنیم هر f_j در اصول موضوع ۱ و ۲ صدق می‌کند، این امر برای f نیز درست است.

به اثر ضرب سطر اول A در اسکالر t توجه می‌کنیم. مینور A_{11} تغییری نمی‌کند، زیرا به سطر اول ارتباطی ندارد. ضریب a_{11} در t ضرب شده است؛ در نتیجه، داریم

$$f_1(tA_1, A_2, \ldots, A_n) = ta_{11} \det A_{11} = tf_1(A_1, \ldots, A_n).$$

اگر $j > 1$، سطر اول هر مینور A_{j1} در t ضرب شده است و ضریب a_{j1} تغییر نکرده است؛ در نتیجه، باز خواهیم داشت

$$f_j(tA_1, A_2, \ldots, A_n) = tf_j(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

بنابراین، هر f_j نسبت به سطر اول همگن است.

اگر سطر k ام A در t ضرب شود، که $k > 1$، مینور A_{k1} تغییر نمی‌کند ولی a_{k1} در t ضرب می‌شود؛ در نتیجه، f_k نسبت به سطر k ام همگن می‌باشد. چنانچه $k \neq j$، ضریب a_{j1} تغییر نمی‌کند ولی سطری از A_{j1} در t ضرب می‌شود. بنابراین، هر f_j نسبت به سطر k ام همگن می‌باشد.

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که هر f_j نسبت به هر سطر جمعی است؛ در نتیجه، f در اصول موضوع ۱ و ۲ صدق می‌کند. حال ثابت می‌کنیم f در اصل موضوع ۳′، یعنی

شکل ضعیف اصل موضوع ۳، صدق می‌کند، دراین صورت، از قضیهٔ ۱۰۳ نتیجه می‌شود که f در اصل موضوع ۳ نیز صدق خواهد کرد.

برای اثبات اینکه f در اصل موضوع ۳´ صدق می‌کند، فرض کنیم دو سطر مجاور A مساوی باشند؛ مثلاً $A_k = A_{k+1}$. در این صورت، جز مینورهای A_{k1} و $A_{k+1,1}$ ، هر مینور A_{j1} دو سطر مساوی دارد؛ در نتیجه، $\det A_{j1} = 0$. لذا، مجموع (۲۶۰۳) فقط از دو جملهٔ نظیر به $j = k$ و $j = k + 1$ تشکیل شده است:

$$f(A_1, \ldots, A_n) = (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k+1,1} \det A_{k+1,1}. \quad (۲۷۰۳)$$

اما $A_{k1} = A_{k+1,1}$ و $a_{k1} = a_{k+1,1}$ ، زیرا $A_k = A_{k+1}$. بنابراین، دو جمله در (۲۷۰۳) فقط در علامت فرق دارند؛ در نتیجه، $f(A_1, \ldots, A_n) = 0$. بنابر این، f در اصل موضوع ۳´ صدق می‌کند.

بالاخره، ثابت می‌کنیم f در اصل موضوع ۴ صدق می‌کند. گوییم وقتی $A = I$ ، داریم $a_{11} = 1$ و، به‌ازای $j > 1$ ، $a_{j1} = 0$. همچنین، A_{11} ماتریس همانی از مرتبهٔ $n - 1$ است؛ در نتیجه، هر جمله در (۲۶۰۳)، جز اولی که مساوی 1 است، صفر می‌باشد. بنابراین، $f(I_1, \ldots, I_n) = 1$ ؛ درنتیجه، f در اصل موضوع ۴ صدق خواهد کرد.

در برهان فوق می‌شد از تابع f' که برحسب مینورهای ستون k ام A_{jk} به‌جای مینورهای ستون اول A_{j1} تعریف شده استفاده کرد. درواقع، اگر فرض کنیم

$$f(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det A_{jk}, \quad (۲۸۰۳)$$

درست همان نوع برهان نشان می‌دهد که این f در هر چهار اصل موضوع تابع دترمینان صدق می‌کند. چون توابع دترمینان منحصر بفرد هستند، فرمولهای بسط در (۲۸۰۳) و فرمولهای (۲۱۰۳) همه مساوی $\det A$ می‌باشند.

فرمولهای بسط (۲۸۰۳) نه فقط وجود توابع دترمینان را ثابت می‌کنند بلکه جنبهٔ جدیدی از نظریهٔ دترمینانها را نیز ظاهر می‌سازند، و آن رابطهٔ بین خواص سطری و خواص ستونی می‌باشد. این ارتباط در بخش بعد بیشتر مطرح می‌شود.

۱۴۰۳ دترمینان یک ترانهاده

به هر ماتریس A ماتریس دیگری، به‌نام ***ترانهادهٔ*** A ، مربوط است که با A^t نموده می‌شود. سطرهای A^t ستونهای A می‌باشند. مثلاً، هرگاه

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$ ، آنگاه $$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

تعریف صوری آن را می‌توان به شکل زیر داد :

تعریف ترانهاده. *ترانهادهٔ* یک ماتریس $m \times n$ مانند $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m;n}$ ماتریس $n \times m$ است مانند A^t که درایهٔ i, j آن a_{ji} است .

با آنکه ترانهش در مورد هر ماتریس مستطیلی شکل قابل انجام است ، ما عمدتاً "به ماتریسهای مربعی توجه داریم . اینک ثابت می‌کنیم که ترانهش یک ماتریس مربعی دترمینان آن را تغییر نمی‌دهد .

قضیهٔ ۱۱۰۳ . *به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ مانند A داریم*

$$\det A = \det A^t.$$

برهان. اثبات به استقرا بر n است . به‌ازای $n = 1$ و $n = 2$ نتیجه به آسانی حاصل است . پس فرض کنیم قضیه برای ماتریسهای مرتبهٔ $n - 1$ درست باشد . فرض کنیم $A = (a_{ij})$ و $B = A^t = (b_{ij})$. با بسط $\det A$ نسبت به مینورهای ستون اول و $\det B$ نسبت به مینورهای سطر اول ، داریم

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1}, \qquad \det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} b_{1j} \det B_{1j}.$$

اما از تعریف ترانهاده داریم $b_{1j} = a_{j1}$ و $B_{1j} = (A_{j1})^t$. چون صحت قضیه برای ماتریسهای مرتبهٔ $n - 1$ فرض شده است ، خواهیم داشت $\det B_{1j} = \det A_{j1}$. بنابراین ، مجموعهای فوق جمله به جمله مساوی‌اند ؛ در نتیجه ، $\det A = \det B$.

۱۵۰۳ ماتریس همسازه‌ای

قضیهٔ ۵۰۳ نشان داد که هرگاه A نامنفرد باشد ، آنگاه $\det A \neq 0$. قضیهٔ بعدی عکس آن را ثابت می‌کند ؛ یعنی ، هرگاه $\det A \neq 0$ ، آنگاه A^{-1} وجود دارد . بعلاوه ، فرمول صریحی برای بیان A^{-1} برحسب ماتریسی که از همسازه‌های درایه‌های A تشکیل می‌شود به

دست می‌دهد .

در قضیهٔ ۹۰۳ ثابت شد که همسازهٔ i, j درایهٔ a_{ij} مساوی $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ است ، که در آن A_{ij} مینور i, j ماتریس A می‌باشد . این همسازه را با $\operatorname{cof} a_{ij}$ نشان می‌دهیم . بنابراین ، طبق تعریف ،

$$\operatorname{cof} a_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} .$$

تعریف ماتریس همسازه‌ای . ماتریسی که درایهٔ i, j آن $\operatorname{cof} a_{ij}$ است ***ماتریس همسازه‌ای**** A نامیده و با $\operatorname{cof} A$ نموده می‌شود . بنابراین ، داریم

$$\operatorname{cof} A = (\operatorname{cof} a_{ij})_{i,j=1}^{n} = ((-1)^{i+j} \det A_{ij})_{i,j=1}^{n} .$$

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که حاصل ضرب A و ترانهادهٔ ماتریس همسازه‌ای آن ، صرف‌نظر از یک سازهٔ اسکالر ، ماتریس همانی I است .

قضیهٔ ۱۲۰۳ . *به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ مانند A ، که $n \geq 2$ ، داریم*

$$A(\operatorname{cof} A)^{t} = (\det A) I . \tag{۲۹۰۳}$$

بخصوص ، اگر $\det A \neq 0$ ، معکوس A وجود دارد و از رابطهٔ

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{cof} A)^{t}$$

به‌دست می‌آید .

برهان . با استفاده از قضیهٔ ۹۰۳ ، $\det A$ را برحسب همسازه‌های سطر k ام آن با فرمول

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \operatorname{cof} a_{kj} \tag{۳۰۰۳}$$

---

* *در بسیاری از نوشتجات ماتریسی انگلیسی ، transpose (ترانهاده) ماتریس همسازه‌ای ماتریس A ، adjugate ماتریس A نامیده می‌شود . بعضی از کتب قدیمی‌تر آن را adjoint ماتریس A نامیده‌اند . لیکن ، فرهنگ جاری انگلیسی اصطلاح adjoint را کلا "به شیء دیگری ، که در بخش ۸۰۵ مطرح می‌شود ، اختصاص داده است .*

بیان می‌کنیم . k را ثابت می‌گیریم و این رابطه را درمورد ماتریس جدید B که سطر i ام آن مساوی سطر k ام A ، به‌ازای $i \neq k$ ی، بوده‌و سطرهای دیگر آن همان سطرهای A اند به‌کار می‌بریم . در این صورت ، $\det B = 0$ ، زیرا سطرهای i م و k ام مساوی‌اند . با نوشتن $\det B$ برحسب همسازه‌های سطری i م خواهیم داشت

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \operatorname{cof} b_{ij} = 0 . \qquad (۳۱\cdot۳)$$

اما ، چون سطر i م B مساوی سطر k ام A است ،

به‌ازای هر j ، $b_{ij} = a_{kj}$ و $\operatorname{cof} b_{ij} = \operatorname{cof} a_{ij}$.

بنابراین ، (۳۱۰۳) می‌گوید که

$$\text{اگر } k \neq i \text{ ، } \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \operatorname{cof} a_{ij} = 0 \text{ .} \qquad (۳۲\cdot۳)$$

معادلات (۳۰۰۳) و (۳۲۰۳) را می‌توان با هم به صورت زیر نوشت :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \operatorname{cof} a_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{اگر } i = k \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } i \neq k \text{ ،} \end{cases} \qquad (۳۳\cdot۳)$$

اما مجموع سمت چپ (۳۳۰۳) همان درایهٔ k, i حاصل‌ضرب $A(\operatorname{cof} A)^t$ است . بنابراین ، (۳۳۰۳) رابطهٔ (۲۹۰۳) را ایجاب خواهد کرد .

به عنوان نتیجه‌ای مستقیم از قضایای ۵۰۳ و ۱۲۰۳ ، شرط لازم و کافی زیر را برای نامنفرد بودن یک ماتریس مربعی خواهیم داشت .

قضیهٔ ۱۳۰۳ . ***ماتریس مربعی A نامنفرد است اگر و فقط اگر $\det A \neq 0$.***

۱۶۰۳ قاعدهٔ کرامر

قضیهٔ ۱۲۰۳ را نیز می‌توان به‌کار برد و فرمولهای صریحی برای جوابهای یک دستگاه معادلات خطی با ماتریس‌ضرایب نامنفرد به‌دست آورد . این فرمولها ، به افتخار ریاضیدان سویسی گابریل کرامر[1] (۱۷۰۴ – ۱۷۵۲) ، **قاعدهٔ کرامر** نام یافته‌اند .

1. Gabriel Cramer

قضیهٔ ۱۴۰۳ . قاعدهٔ کرامر. هرگاه دستگاه

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

مرکب از n معادلهٔ خطی و n مجهول $x_1, \ldots, x_n$ دارای ماتریس ضرایب نامنفرد $A = (a_{ij})$ باشد، آنگاه برای دستگاه جواب منحصر بفردی وجود دارد که از فرمولهای زیر بهدست میآید:

$$\text{بهازای } j = 1, 2, \ldots, n \text{ ،} \quad x_j = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{cof} a_{kj} \text{ .} \qquad (۳۴۰۳)$$

برهان. دستگاه را میتوان به صورت یک معادلهٔ ماتریسی نوشت:

$$AX = B,$$

که درآن X و B ماتریسهایی ستونیاند: $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$. چون A نامنفرد است، جواب منحصر بفرد X وجود دارد بهاین صورت

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} (\operatorname{cof} A)^t B \qquad (۳۵۰۳)$$

فرمولهای (۳۴۰۳) با متحد گرفتن مولفهها در (۳۵۰۳) بهدست میآیند.

باید توجه داشت که فرمول مربوط به x_j در (۳۴۰۳) را میتوان به صورت خارج قسمت دو دترمینان نوشت:

$$x_j = \frac{\det C_j}{\det A},$$

که در آن C_j ماتریسیاست که از A با تعویض ستون j م A با ماتریس ستونی B بهدست میآید.

۱۷۰۳ تمرین

۱ . ماتریس همسازهای هریک از ماتریسهای زیر را تعیین کنید:

(آ) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ ؛ (ب) $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$ ؛ (پ) $\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 5 & 1\\ 1 & -1 & -2 & 6\\ -2 & 3 & 2 & 3\end{bmatrix}$.

۲ . معکوس هریک از ماتریسهای نامنفرد تمرین ۱ را مشخص نمایید .

۳ . تمام مقادیر اسکالر λ که بهازای آنها ماتریس $A - \lambda I$ منفرد است را بیابید مشروط بر اینکه A بهصورت زیر باشد :

(آ) $\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ ؛ (ب) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}$ ؛ (پ) $\begin{bmatrix}11 & -2 & 8\\ 19 & -3 & 14\\ -8 & 2 & -5\end{bmatrix}$.

۴ . اگر A یک ماتریس $n \times n$ با $n \geq 2$ باشد ، هریک از خواص زیر را در مورد ماتریس همسازهای آن ثابت کنید :

(آ) $\operatorname{cof}(A^t) = (\operatorname{cof} A)^t$ ؛ (ب) $(\operatorname{cof} A)^t A = (\det A) I$ ؛

(پ) $A(\operatorname{cof} A)^t = (\operatorname{cof} A)^t A$ (A با ترانهادهٔ ماتریس همسازهای خود تعویض میشود) .

۵ . دستگاههای زیر را با استفاده از قاعدهٔ کرامر حل کنید :

(آ) $x + 2y + 3z = 8, \quad 2x - y + 4z = 7, \quad -y + z = 1$ ؛

(ب) $x + y + 2z = 0, \quad 3x - y - z = 3, \quad 2x + 5y + 3z = 4$.

۶ . (آ) بگویید چرا هریک از معادلات زیر معادلهٔ دکارتی خط مستقیمی است درصفحهٔ xy که از دو نقطهٔ متمایز (x_1, y_1) و (x_2, y_2) میگذرد :

$$\det\begin{bmatrix}x - x_1 & y - y_1\\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1\end{bmatrix} = 0 ; \qquad \det\begin{bmatrix}x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{bmatrix} = 0 .$$

(ب) روابط نظیر را برای یک صفحه در فضای 3 که از سه نقطهٔ متمایز میگذرد بیان و اثبات کنید .

(پ) روابط نظیر را برای یک دایره در صفحهٔ xy که از سه نقطهٔ غیر واقع بریک

استقامت بیان و اثبات کنید.

۷. فرض کنید n^2 تابع f_{ij} داده شده که هریک بر بازه‌ی (a, b) مشتقپذیر است، و به ازای هر x در (a, b) تعریف کنید $F(x) = \det [f_{ij}(x)]$. ثابت کنید $F'(x)$ مجموع n دترمینان است:

$$F'(x) = \sum_{i=1}^{n} \det A_i(x),$$

که در آن $A_i(x)$ ماتریسی است که با مشتقگیری از توابع سطر i م $[f_{ij}(x)]$ به دست می‌آید.

۸. هر ماتریس $n \times n$ از توابع به شکل $W(x) = [u_j^{(i-1)}(x)]$، که در آن هر سطر بعداز اولی مشتق سطر قبلی است، به‌افتخار ریاضیدان لهستانی رونسکی[1] (۱۸۵۳ — ۱۷۷۸) **ماتریس رونسکی** نامیده می‌شود. ثابت کنید مشتق دترمینان $W(x)$ دترمینان ماتریسی است که با مشتقگیری از هر درایه در سطر آخر $W(x)$ به دست می‌آید. [**راهنمایی.** تمرین ۷ را به‌کار برید.]

1. J. M. H. Wronski

۴

مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه

۱.۴ تبدیلات خطی با نمایشهای ماتریسی قطری

فرض کنیم $T: V \to V$ یک تبدیل خطی بر فضای خطی با بعد متناهی V باشد. خواصی از T که ازهر دستگاه مختصات (پایه) برای V مستقل‌اند **خواص ذاتی** T نامیده می‌شوند. جمیع نمایشهای ماتریسی T در این خواص سهیم‌اند. اگر پایه طوری اختیار شود که ماتریس حاصل شکل ساده‌ٔ خاصی داشته باشد، احتمالاً" می‌توان بعضی از خواص ذاتی را مستقیماً" از نمایش ماتریسی به‌دست آورد.

از جمله ساده‌ترین ماتریسها ماتریسهای قطری هستند. لذا، ممکن است بپرسیم آیا هر تبدیل خطی یک‌نمایش ماتریسی قطری دارد یا نه. در فصل ۲ مسئلهٔ یافتن نمایش ماتریسی قطری تبدیل خطی $T: V \to W$، که در آن $\dim V = n$ و $\dim W = m$، مطرح شد. در قضیهٔ ۱۴.۲ ثابت کردیم که همیشه پایه‌ای مانند $(e_1, \ldots, e_n)$ برای V و پایه‌ای مانند $(w_1, \ldots, w_m)$ برای W وجود دارند بطوری که ماتریس T نسبت به این جفت پایه یک ماتریس قطری است. بخصوص، اگر $W = V$، ماتریس یک ماتریس قطری مربعی است. حالت جدید در اینجا این است که می‌خواهیم برای V و W **یک پایه** به‌کار بریم. با این قید، یافتن یک نمایش ماتریسی قطری برای T همیشه میسر نیست. لذا، به مسئلهٔ تعیین اینکه کدام تبدیلها دارای نمایش ماتریسی قطری‌اند می‌پردازیم.

نمادگذاری. اگر $A = (a_{ij})$ یک ماتریس قطری باشد، می‌نویسیم

$$A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

به آسانی می‌توان شرط لازم و کافی برای آنکه یک تبدیل خطی نمایش ماتریسی

قطری داشته باشد را بیان کرد .

قضیهٔ ۱۰۴ . تبدیل خطی $T: V \to V$ ، که در آن $\dim V = n$ ، داده شده است . هرگاه T دارای نمایش ماتریسی قطری باشد ، آنگاه مجموعهٔ مستقلی از عنصرهای $u_1, \ldots, u_n$ در V و مجموعهٔ نظیرش از اسکالرهای $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ وجود دارند بطوری که

به‌ازای $k = 1, 2, \ldots, n$ ، $T(u_k) = \lambda_k u_k$. (۱۰۴)

بعکس ، هرگاه مجموعهٔ مستقلی از عناصر $u_1, \ldots, u_n$ در V ومجموعهٔ نظیرش ازاسکالرهای $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ صادق در (۱۰۴) وجود داشته باشند ، آنگاه ماتریس

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

یک نمایش T نسبت به پایهٔ $(u_1, \ldots, u_n)$ می‌باشد .

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم T یک نمایش ماتریسی قطری مانند $A = (a_{ik})$ نسبت به پایه‌ای چون $(e_1, \ldots, e_n)$ داشته باشد . عمل T بر عناصر پایه از فرمول

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i = a_{kk} e_k$$

به دست می‌آید ، زیرا به‌ازای $i \neq k$ ، $a_{ik} = 0$. این رابطهٔ (۱۰۴) را به ازای $u_k = e_k$ و $\lambda_k = a_{kk}$ ثابت می‌کند .

حال فرض کنیم عناصر مستقل $u_1, \ldots, u_n$ و اسکالرهای $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ صادق در (۱۰۴) وجود داشته باشند . چون $u_1, \ldots, u_n$ مستقل‌اند ، پس تشکیل یک‌پایه برای V می‌دهند . هرگاه تعریف کنیم $a_{kk} = \lambda_k$ و ، به‌ازای $i \neq k$ ، $a_{ik} = 0$ ، آنگاه ماتریس $A = (a_{ik})$ یک ماتریس‌قطری‌است که T را نسبت‌به پایهٔ $(u_1, \ldots, u_n)$ نمایش می‌دهد .

بنابراین ، مسئلهٔ یافتن نمایش ماتریسی قطری یک تبدیل خطی به مسئلهٔ دیگری تبدیل شده‌است ، و آن یافتن عناصر مستقل $u_1, \ldots, u_n$ و اسکالرهای $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ صادق در (۱۰۴) است . عنصرهای u_k و اسکالرهای λ_k صادق در (۱۰۴) بترتیب **بردارهای ویژه** و **مقدارهای ویژهٔ** T نام دارند . در بخش بعد ، بردارهای ویژه و مقدارهای ویژه*

*** بردار ویژه‌ومقدار ویژه در انگلیسی بترتیب *eigenvector* و *eigenvalue* گفته می‌شوند ،** ←

را در محدودهٔ کلیتری بررسی خواهیم کرد .

۲۰۴ بردارهای ویژه و مقدارهای ویژهٔ یک تبدیل خطی

در این بحث ، V یک فضای خطی و S زیر فضایی از V است . فضاهای S و V لازم نیست با بعد متناهی باشند .

تعریف. فرض کنیم $T: S \to V$ یک تبدیل خطی از S بتوی V باشد . اسکالر λ یک **مقدار ویژهٔ** T نام دارد اگر عنصر ناصفری چون x در S باشد بطوری که

$$T(x) = \lambda x. \tag{۲۰۴}$$

عنصر x را یک **بردار ویژهٔ** T متعلق به λ می‌نامند . اسکالر λ یک مقدار ویژهٔ نظیر به x نامیده می‌شود .

نظیر به هر بردار ویژهٔ x دقیقاً " یک مقدار ویژه وجود دارد . در واقع ، هرگاه به ازای $x \neq O$ ی داشته باشیم $T(x) = \lambda x$ و $T(x) = \mu x$ ، آنگاه $\lambda x = \mu x$ ؛ در نتیجه ، $\lambda = \mu$.

تذکر. با اینکه معادلهٔ (۲۰۴) همیشه به ازای $x = O$ و هر اسکالر λ برقرار است ، تعریف O را به‌عنوان یک بردار ویژه مستثنی می‌کند . یک دلیل این تبعیض علیه O این است که برای هر بردار ویژهٔ x درست یک مقدار ویژهٔ λ داشته باشیم .

مثالهای زیر معنی این مفهومها را توضیح می‌دهند .

مثال ۱. ضرب در اسکالر ثابت. فرض کنیم $T: S \to V$ تبدیلی خطی باشد که با معادلهٔ $T(x) = cx$ به ازای هر x در S تعریف می‌شود ، و در آن c یک اسکالر ثابت

→ که ترجمه‌های ناقص واژه‌های آلمانی *Eigenvektor* و *Eigenwert* می‌باشند . برخی از مولفان انگلیسی زبان از اصطلاحات *characteristic vector* یا *proper vector* به عنوان مترادفهایی برای *eigenvector* استفاده می‌کنند . *eigenvalues* نیز *characteristic values* ، *proper values* ، یا *latent roots* نامیده می‌شوند .

می‌باشد. در این مثال هر عنصر ناصفر S یک بردار ویژهٔ متعلق به اسکالر c است.

مثال ۲. فضای ویژهٔ $E(\lambda)$ مرکب از تمام x هایی که $T(x) = \lambda x$. فرض کنیم $T: S \to V$ یک تبدیل خطی با مقدار ویژهٔ λ باشد. فرض کنیم $E(\lambda)$ مجموعهٔ ***تمام*** عنصرهای x در S باشد که $T(x) = \lambda x$. این مجموعه شامل عنصر صفر O و تمام بردارهای ویژهٔ متعلق به λ است. به آسانی ثابت می‌شود که $E(\lambda)$ یک زیرفضای S است، زیرا که اگر x و y در $E(\lambda)$ باشند، به‌ازای هر اسکالر a و b داریم

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y) = a\lambda x + b\lambda y = \lambda(ax + by)\cdot$$

بنابراین، $(ax + by) \in E(\lambda)$؛ در نتیجه، $E(\lambda)$ یک زیرفضا می‌باشد. فضای $E(\lambda)$ **فضای ویژهٔ** نظیر به λ نامیده می‌شود. این فضا ممکن است با بعد متناهی یا نامتناهی باشد. هرگاه $E(\lambda)$ با بعد متناهی باشد، آنگاه $\dim E(\lambda) \geq 1$، زیرا $E(\lambda)$ شامل دست کم یک عنصر ناصفر مانند x نظیر به λ هست.

مثال ۳. وجود مقدارهای ویژهٔ صفر. اگر یک بردار ویژه وجود داشته باشد، بنا به تعریف، نمی‌تواند صفر باشد. اما اسکالر صفر ***می‌تواند*** یک مقدار ویژه باشد. در واقع، اگر 0 یک مقدار ویژه برای x باشد، $T(x) = 0x = O$؛ در نتیجه، x در فضای پوچ T است. بعکس، اگر فضای پوچ T شامل عناصر ناصفری باشد، هریک از آنها یک بردار ویژه با مقدار ویژهٔ 0 است. در حالت کلی، $E(\lambda)$ فضای پوچ $T - \lambda I$ می‌باشد.

مثال ۴. انعکاس در صفحهٔ xy. فرض کنیم $S = V = V_3(\mathbf{R})$ و T یک انعکاس در صفحهٔ xy باشد. یعنی، فرض کنیم T بر بردارهای پایهٔ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ به صورت زیر عمل کند: $T(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i}, T(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j}, T(\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{k}$. هربردار ناصفر در صفحهٔ xy یک بردار ویژه با مقدار ویژهٔ یک است. بردارهای ویژهٔ باقی به شکل $c\boldsymbol{k}$ اند، که $c \neq 0$؛ هریک از آنها دارای مقدار ویژهٔ -1 می‌باشد.

مثال ۵. دوران صفحه به اندازهٔ زاویهٔ ثابت α. این مثال فایدهٔ بخصوصی دارد، زیرا نشان می‌دهد که وجود بردارهای ویژه ممکن است به میدان زمینه از اسکالرها بستگی داشته باشد. صفحه را می‌توان به دو طریق مختلف یک فضای خطی انگاشت: (۱) به‌صورت

یک فضای خطی **حقیقی** 2 بعدی، $V = V_2(\mathbf{R})$ ، با دو عنصر پایهٔ $(1, 0)$ و $(0, 1)$ ، و با اعداد حقیقی به عنوان اسکالرها؛ یا (۲) به صورت یک فضای خطی **مختلط** 1 بعدی، $V = V_1(\mathbf{C})$ ، با یک عنصر پایهٔ 1 ، و اعداد مختلط به‌عنوان اسکالرها.

ابتدا تعبیر دوم را درنظر می‌گیریم. هر عنصر $z \neq 0$ از $V_1(\mathbf{C})$ را می‌توان به‌شکل قطبی، یعنی $z = re^{i\theta}$ ، بیان کرد. هرگاه T ، z را به‌اندازهٔ α بچرخاند، آنگاه $T(z) = re^{i(\theta+\alpha)} = e^{i\alpha}z$. لذا، هر $z \neq 0$ یک بردار ویژه با مقدار ویژهٔ $\lambda = e^{i\alpha}$ است. توجه کنید که مقدار ویژهٔ $e^{i\alpha}$ حقیقی نیست مگر آنکه α مضرب صحیحی از π باشد.

حال صفحه را به صورت یک فضای خطی **حقیقی**، یعنی $V_2(\mathbf{R})$ ، درنظر می‌گیریم. چون اسکالرهای $V_2(\mathbf{R})$ اعدادی حقیقی‌اند، دوران T فقط وقتی مقدارهای ویژهٔ حقیقی دارد که α مضرب صحیحی از π باشد. به عبارت دیگر، هرگاه α مضرب صحیحی از π نباشد، آنگاه T مقدار ویژهٔ حقیقی ندارد؛ و در نتیجه، بردار ویژه نخواهد داشت. بنابر این، وجود بردارهای ویژه و مقدارهای ویژه ممکن است به انتخاب اسکالرها برای V بستگی داشته باشد.

مثال ۶. عملگر مشتقگیری. فرض کنیم V فضای خطی تمام توابع حقیقی f باشد که‌بر بازهٔ باز معلومی از هر مرتبه مشتق دارند. همچنین، D تبدیلی خطی باشد که هر f را بروی مشتقش می‌نگارد، $D(f) = f'$. بردارهای ویژهٔ D ، f های ناصفری هستند که‌در معادله‌ای به شکل

$$f' = \lambda f ,$$

به‌ازای λ ای حقیقی، صدق می‌کنند. این یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول است. همهٔ جوابهای آن از فرمول

$$f(x) = ce^{\lambda x}$$

به‌دست می‌آیند، که در آن c ثابت حقیقی دلخواهی است. بنابر این، بردارهای‌ویژهٔ D تمام توابع نمایی $f(x) = ce^{\lambda x}$ با $c \neq 0$ می‌باشند. بردار ویژهٔ نظیر به $f(x) = ce^{\lambda x}$ عبارت است‌از λ . در مثالهایی مثل‌این‌که در آنها V یک فضای تابعی است، بردارهای ویژه ***تابعهای ویژه*** نامیده می‌شوند.

مثال ۷. عملگر انتگرالگیری. فرض‌کنیم V فضای خطی جمیع توابع حقیقی پیوسته بر

بازهٔ متناهی $[a, b]$ باشد. هرگاه $f \in V$، $g = T(f)$ را تابع زیر تعریف می‌کنیم:

اگر $a \le x \le b$، $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

تابعهای ویژهٔ T (در صورت وجود) f های ناصفری هستند که در معادله‌ای به‌شکل

$$\int_a^x f(t)\, dt = \lambda f(x), \tag{۳۰۴}$$

به ازای λ ای حقیقی، صدق می‌کنند. اگر یک تابع ویژه وجود داشته باشد، می‌توان از این معادله مشتق گرفت و رابطهٔ $f(x) = \lambda f'(x)$ را به‌دست آورد، که از آن، مشروط بر اینکه $\lambda \neq 0$، خواهیم داشت $f(x) = ce^{x/\lambda}$. به عبارت دیگر، تنها نامزد برای تابعهای ویژه توابع نمایی به شکل $f(x) = ce^{x/\lambda}$ است با $c \neq 0$ و $\lambda \neq 0$. اما، اگر در (۳۰۴) قرار دهیم $x = a$، به‌دست می‌آوریم

$$0 = \lambda f(a) = \lambda c e^{a/\lambda}.$$

چون $e^{a/\lambda}$ هیچگاه صفر نیست، می‌بینیم که معادلهٔ $T(f) = \lambda f$ نمی‌تواند به‌ازای f ناصفر برقرار شود؛ در نتیجه، T تابع ویژه و مقدار ویژه نخواهد داشت.

مثال ۸. زیرفضای پیموده شده به‌وسیلهٔ یک بردار ویژه. فرض کنیم $T: S \to V$ تبدیلی خطی با مقدار ویژهٔ λ باشد. همچنین، x یک بردار ویژهٔ متعلق به λ بوده و $L(x)$ زیر فضای پیموده شده به وسیلهٔ x باشد. یعنی، $L(x)$ مجموعهٔ تمام مضارب اسکالر x باشد. به‌آسانی می‌توان نشان داد که T، $L(x)$ را بتوی خودش می‌نگارد. در واقع، اگر $y = cx$، داریم

$$T(y) = T(cx) = cT(x) = c(\lambda x) = \lambda(cx) = \lambda y.$$

هرگاه $c \neq 0$، آنگاه $y \neq O$؛ درنتیجه، هر عنصر ناصفر y از $L(x)$ نیز یک بردار ویژهٔ متعلق به λ است.

زیر فضای U از S تحت T **پایا** است درصورتی که T هر عنصر U را بروی عنصری از U بنگارد. هم اکنون نشان دادیم که زیر فضای پیموده شده به وسیلهٔ یک بردار ویژه تحت T پایا است.

۳.۴ استقلال خطی بردارهای ویژهٔ نظیر به مقدارهای ویژهٔ متمایز

یکی از مهمترین خواص مقدارهای ویژه درقضیهٔ زیرتوصیف شده است. مثل قبل، S یک زیرفضای فضای خطی V است.

قضیهٔ ۲.۴ . فرض کنیم $u_1, \ldots, u_k$ بردارهای ویژهٔ تبدیل خطی $T: S \to V$ بوده، و مقدارهای ویژهٔ نظیر $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ متمایز باشند. در این صورت، بردارهای ویژهٔ $u_1, \ldots, u_k$ مستقل میباشند.

برهان. اثبات به استقرا بر k است. نتیجه وقتی $k = 1$ واضح است. پس فرض کنیم نتیجه برای هر مجموعهٔ مرکب از $k - 1$ بردار ویژه ثابت شده باشد. همچنین، $u_1, \ldots, u_k$ ، k بردار ویژهٔ متعلق به مقدارهای ویژهٔ متمایز بوده، و اسکالرهای c_i وجود داشته باشند بطوری که

$$\sum_{i=1}^{k} c_i u_i = O. \tag{۴.۴}$$

با اعمال T در دو طرف (۴.۴) و استفاده از این امر که $T(u_i) = \lambda_i u_i$ ، درمییابیم که

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i u_i = O. \tag{۵.۴}$$

با ضرب (۴.۴) در λ_k و تفریق آن از (۵.۴)، معادلهٔ

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i(\lambda_i - \lambda_k) u_i = O$$

بهدست میآید. اما چون $u_1, \ldots, u_{k-1}$ مستقلاند، باید بهازای هر $i = 1, 2, \ldots, k - 1$ داشته باشیم $c_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$. چون مقدارهای ویژه متمایزند، بهازای $i \neq k$ داریم $\lambda_i \neq \lambda_k$؛ درنتیجه، بهازای $i = 1, 2, \ldots, k - 1$، $c_i = 0$. از (۴.۴) مشاهده میشود که c_k نیز 0 است؛ در نتیجه، بردارهای ویژهٔ $u_1, \ldots, u_k$ مستقل میباشند.

توجه کنید که قضیهٔ ۲.۴ در صورتی که عنصر صفر مجاز به بردار ویژه بودن باشد درست نیست. این دلیل دیگری است برای معاف کردن O از بردار ویژه بودن.

تذکار. عکس قضیهٔ ۲.۴ برقرار نیست. یعنی، هرگاه T دارای بردارهای ویژهٔ مستقل

$u_1, \ldots, u_k$ باشد، مقدارهای ویژهٔ نظیر $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ الزاماً" متمایز نیستند. مثلاً"، هرگاه T تبدیل همانی باشد، به‌ازای هر x، $T(x) = x$، آنگاه هر $x \neq O$ یک بردار ویژه است اما فقط یک مقدار ویژه وجود دارد، $\lambda = 1$.

قضیهٔ ۲.۴ نتایج مهمی در ابعاد متناهی دارد.

قضیهٔ ۳.۴ . هرگاه $\dim V = n$، هر تبدیل خطی $T: V \to V$ حداکثر n مقدار ویژهٔ متمایز دارد. هرگاه T درست n مقدار ویژهٔ متمایز داشته باشد، بردارهای ویژهٔ نظیر یک پایه برای V تشکیل می‌دهند و ماتریس T نسبت به این پایه یک ماتریس قطری است که درایه‌های قطری آن مقدارهای ویژه می‌باشند.

برهان. هرگاه $n + 1$ مقدار ویژهٔ متمایز وجود می‌داشت، آنگاه، طبق قضیهٔ ۲.۴، V شامل $n + 1$ عنصر مستقل می‌شد. این امر ممکن نیست، زیرا $\dim V = n$. حکم دوم از قضایای ۱.۴ و ۲.۴ نتیجه می‌شود.

تذکر. قضیهٔ ۳.۴ به‌ما می‌گوید که وجود n مقدار ویژهٔ متمایز شرطی است **کافی** برای آنکه T نمایش‌ماتریسی قطری داشته باشد. این شرط لازم نیست. تبدیلاتی خطی وجود دارند با تعداد مقادیر ویژهٔ متمایز کوچکتر از n که می‌توان آنها را با ماتریسهای قطری نمایش داد. تبدیل‌همانی یک نمونه از آنهاست. همهٔ مقدارهای ویژهٔ آن مساوی یکاند ولی می‌توان آن را با ماتریس همانی نمایش داد. قضیهٔ ۱.۴ به ما می‌گوید که وجود n بردار ویژهٔ مستقل **لازم و کافی** است برای آنکه T نمایش ماتریسی قطری داشته باشد.

۴.۴ تمرین

۱. (آ) ثابت‌کنید که اگر T مقدار ویژهٔ λ داشته باشد، aT مقدار ویژهٔ $a\lambda$ دارد.
(ب) ثابت‌کنید که اگر x یک بردار ویژه برای T_1 و T_2 باشد، x یک برداروِیژه برای $aT_1 + bT_2$ نیز هست. مقدارهای ویژه با هم چه ارتباطی دارند؟

۲. فرض کنید $T: V \to V$ دارای بردار ویژهٔ x متعلق به مقدار ویژهٔ λ باشد. ثابت کنید x یک بردار ویژهٔ T^2 متعلق به λ^2 است و، بطور کلی، x یک بردار ویژهٔ

T^n متعلق به λ^n است. سپس، با استفاده از تمرین ۱، نشان دهید که هرگاه P یک چند جمله‌ای باشد، x یک بردار ویژهٔ $P(T)$ متعلق به $P(\lambda)$ است.

۳. صفحه را به صورت یک فضای خطی حقیقی در نظر بگیرید، یعنی $V = V_2(\mathbf{R})$، و فرض کنید T دوران V به‌اندازهٔ $\pi/2$ رادیان باشد. با آنکه T بردار ویژه ندارد، ثابت کنید هر بردار ناصفر یک بردار ویژه برای T^2 است.

۴. هرگاه $T: V \to V$ این خاصیت را داشته باشد که T^2 دارای مقدار ویژهٔ نامنفی λ^2 باشد، ثابت کنید حداقل یکی از λ یا $-\lambda$ یک مقدار ویژه برای T است.

[**راهنمایی.** $T^2 - \lambda^2 I = (T + \lambda I)(T - \lambda I)$.]

۵. فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی مشتقپذیر بر $(0, 1)$ باشد. اگر $f \in V$، $g = T(f)$ را به‌این صورت تعریف کنید که به‌ازای هر t در $(0, 1)$، $g(t) = tf'(t)$. ثابت کنید هر λ ی حقیقی یک مقدار ویژه برای T است. و تابعهای ویژهٔ نظیر به λ را معین نمایید.

۶. فرض کنید V فضای خطی تمام چندجمله‌ایهای حقیقی مانند $p(x)$ از درجهٔ نابیشتر از n باشد. اگر $p \in V$، $q = T(p)$ را به‌این صورت تعریف کنید که به ازای هر t ی حقیقی $q(t) = p(t + 1)$. ثابت کنید T فقط مقدار ویژهٔ 1 را دارد. تابعهای ویژهٔ متعلق به این مقدار ویژه چیستند؟

۷. فرض کنید V فضای خطی تمام توابع پیوسته‌ای بر $(-\infty, +\infty)$ باشد که انتگرال $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ به‌ازای هر x حقیقی وجود دارد. اگر $f \in V$، $g = T(f)$ را با معادلهٔ $g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ تعریف کنید. ثابت کنید هر λ ی مثبت یک مقدار ویژه برای T است و تابعهای ویژهٔ نظیر به λ را معین نمایید.

۸. فرض کنید V فضای خطی تمام توابع پیوسته‌ای بر $(-\infty, +\infty)$ باشد که انتگرال $\int_{-\infty}^{x} t\,f(t)\,dt$ به‌ازای هر x حقیقی وجود دارد. اگر $f \in V$، $g = T(f)$ را با معادلهٔ $g(x) = \int_{-\infty}^{x} t\,f(t)\,dt$ تعریف کنید. ثابت کنید هر λ ی منفی یک مقدارویژه برای T است و تابعهای ویژهٔ نظیر به λ را معین نمایید.

۹. فرض کنید $V = C(0, \pi)$ فضای خطی حقیقی تمام توابع حقیقی پیوسته بر بازهٔ $[0, \pi]$ باشد. همچنین، S زیرفضای تمام توابع f ی باشد که دارای مشتق دوم پیوسته به‌صورت خطی‌اند و نیز در شرایط کرانه‌ای $f(0) = f(\pi) = 0$ صدق می‌کنند. فرض کنید $T: S \to V$ تبدیلی خطی باشد که هر f را بروی مشتق دوم آن می‌نگارد؛ یعنی،

$T(f) = f''$. ثابت کنید مقدارهای ویژهٔ T اعدادی به شکل $-n^2$ اند، که در آن $n = 1, 2, \ldots$. و تابعهای ویژهٔ نظیر به $-n^2$ عبارتند از $f(t) = c_n \sin nt$، که در آن $c_n \neq 0$.

۱۰ . فرض کنید V فضای خطی تمام دنبالههای همگرای حقیقی مانند $\{x_n\}$ باشد. $T: V \to V$ را بهصورت زیر تعریف کنید: اگر $x = \{x_n\}$ یک دنبالهٔ همگرا با حد a باشد، قرار دهید $T(x) = \{y_n\}$، که در آن به ازای $n \geq 1$، $y_n = a - x_n$. ثابت کنید T فقط دو مقدار ویژه دارد، $\lambda = 0$ و $\lambda = -1$، و بردارهای ویژهٔ متعلق به چنین λ ای را معین نمایید.

۱۱ . فرض کنید تبدیل خطی T دارای دو بردار ویژهٔ x و y متعلق به مقدارهای ویژهٔ متمایز λ و μ باشد. ثابت کنید که اگر $ax + by$ یک بردار ویژهٔ T باشد، $a = 0$ یا $b = 0$.

۱۲ . فرض کنید $T: S \to V$ یک تبدیل خطی بوده بطوری که هر عنصر ناصفر S یک بردار ویژه باشد. ثابت کنید اسکالری چون c هست بطوری که $T(x) = cx$. به عبارت دیگر، تنها تبدیل واجد این خاصیت ضرب اسکالری از همانی است.
[**راهنمایی.** از تمرین ۱۱ استفاده کنید.]

۵۰۴ حالت ابعاد متناهی. چندجملهایهای مشخص

هرگاه $\dim V = n$، مسئلهٔ یافتن مقدارهای ویژهٔ تبدیل خطی $T: V \to V$ را میتوان بهکمک دترمینانها حل کرد. میخواهیم آن اسکالرهای λ را بیابیم که معادلهٔ $T(x) = \lambda x$ دارای جواب $x \neq O$ باشد. معادلهٔ $T(x) = \lambda x$ را میتوان به شکل

$$(\lambda I - T)(x) = O$$

نوشت، که در آن I تبدیل همانی است. هرگاه فرض کنیم $T_\lambda = \lambda I - T$، آنگاه λ یک بردار ویژه است اگر و فقط اگر معادلهٔ

$$T_\lambda(x) = O \qquad (۶۰۴)$$

دارای جواب ناصفری چون x باشد، که در آن حالت T_λ (بخاطر قضیهٔ ۱۰۰۲) معکوسپذیر نیست. لذا، طبق قضیهٔ ۲۰۰۲، یک جواب ناصفر از (۶۰۴) وجود دارد اگر و فقط اگر ماتریس T_λ منفرد باشد. هرگاه A یک نمایش ماتریسی T باشد، آنگاه $\lambda I - A$ یک نمایش ماتریسی T_λ است. بنابر قضیهٔ ۱۳۰۳، ماتریس $\lambda I - A$ منفرد است اگر و فقط اگر

$\det(\lambda I - A) = 0$. بنابراین ، اگر λ یک مقدار ویژهٔ T باشد ، در معادلهٔ

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{۷.۴}$$

صدق می‌کند . بعکس، هر λ در میدان زمینه از اسکالرها که در (۷.۴) صدق کند یک مقدار ویژه است . این امر ما را به بررسی دترمینان $\det(\lambda I - A)$ به عنوان تابعی از λ وامی‌دارد .

قضیهٔ ۴.۴ . *هرگاه A یک ماتریس $n \times n$ بوده و I ماتریس همانی $n \times n$ باشد ، تابع f تعریف شده با*

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

یک چندجمله‌ای از λ و از درجهٔ n است . بعلاوه ، جمله با بالاترین درجه λ^n است ، و جملهٔ ثابت $f(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$ می‌باشد .

برهان . رابطهٔ $f(0) = \det(-A)$ فوراً از تعریف f نتیجه می‌شود . ثابت می‌کنیم f فقط در حالت $n \leq 3$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است . اثبات در حالت کلی را می‌توان به استقرا انجام داد و به عنوان تمرین باقی می‌ماند . (ر.ک. تمرین ۹ در بخش ۸.۴ .)

به‌ازای $n = 1$ دترمینان چندجمله‌ای خطی $f(\lambda) = \lambda - a_{11}$ است . به‌ازای $n = 2$ داریم

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}),$$

که یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم از λ است . به‌ازای $n = 3$ خواهیم داشت

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a_{11}) \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} -a_{21} & -a_{23} \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} -a_{21} & \lambda - a_{22} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{vmatrix}.$$

دو جملهٔ آخر چندجمله‌ایهایی خطی از λ اند. جملهٔ اول یک چندجمله‌ای درجهٔ سه است، جمله با بالاترین درجه λ^3 است.

تعریف. اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، دترمینان

$$f(\lambda) = \det (\lambda I - A)$$

چندجمله‌ای مشخص A نامیده می‌شود.

ریشه‌های چندجمله‌ای مشخص A اعدادی مختلط‌اند، و بعضی از آنها ممکن است حقیقی باشند. چنانچه F میدان حقیقی $\mathbf{R}$ یا میدان مختلط $\mathbf{C}$ باشد، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت:

قضیهٔ ۵.۴. *فرض کنیم $T: V \to V$ یک تبدیل خطی باشد، که در آن V اسکالرهایش در F بوده و $\dim V = n$. همچنین، A یک نمایش ماتریسی T باشد. در این صورت، مجموعهٔ مقدارهای ویژهٔ T از آن ریشه‌های چندجمله‌ای مشخص A که در F اند تشکیل شده است.*

برهان. بحث قبل از قضیهٔ ۴.۴ نشان می‌دهد که هر مقدار ویژهٔ T در معادلهٔ $\det (\lambda I - A) = 0$ صدق می‌کند و هر ریشهٔ چندجمله‌ای مشخص A که در F باشد یک مقدار ویژهٔ T است.

ماتریس A به انتخاب پایه برای V بستگی دارد، اما مقدارهای ویژهٔ T بی‌توسل به‌یک پایه‌تعریف شده بودند. از اینرو، **مجموعهٔ** ریشه‌های چندجمله‌ای مشخص A باید از انتخاب پایه مستقل باشد. از این بیشتر می‌شود گفت. در یکی از بخشهای آتی ثابت می‌کنیم که چندجمله‌ای مشخص خود از انتخاب پایه مستقل است. حال می‌پردازیم به محاسبهٔ مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه در حالت ابعاد متناهی.

۶.۴ محاسبهٔ مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه درحالت ابعاد متناهی

درحالت‌ابعاد متناهی، مقدارهای ویژه و بردارهای ویژهٔ تبدیل خطی T مقدارهای‌ویژه

وبردارهای ویژهٔ هرنمایش ماتریسی T نیز نامیده می‌شوند. بنابر این، مقدارهای ویژهٔ ماتریس مربعی A ریشه‌های چند جمله‌ای مشخص $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ است. بردارهای ویژهٔ نظیر به مقدار ویژهٔ λ آن بردارهای ناصفر $X = (x_1, \ldots, x_n)$ هستند که به صورت ماتریسهای ستونی $n \times 1$ در معادلهٔ ماتریسی

$$AX = \lambda X \quad \text{یا} \quad (\lambda I - A)X = O$$

صدق می‌کنند. این یک دستگاه مرکب از n معادلهٔ خطی برای مولفه‌های $x_1, \ldots, x_n$ است. به‌محض دانستن λ، می‌توان بردارهای ویژه را با حل این دستگاه به دست‌آورد. این امر را با سه مثال که کیفیات مختلفی را نشان می‌دهند توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. ماتریس با مقدارهای ویژهٔ متمایز. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

دارای چندجمله‌ای مشخص

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

است؛ در نتیجه، سه مقدار ویژهٔ متمایز وجود دارند: 1، -1، و 3. برای یافتن بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda = 1$، دستگاه $AX = X$، یا

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

را حل می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= x_2 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 &= x_3, \end{aligned}$$

که می‌توان آن را به‌صورت

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$
$$-x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$$

نوشت. با افزودن معادلات اول و سوم خواهیم داشت $x_3 = 0$؛ و در این صورت، هر سه معادله به $x_1 + x_2 = 0$ تحویل می‌شوند. بنابر این، بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda = 1$ عبارتند از $X = t(1, -1, 0)$، که در آنها t هر اسکالر ناصفر است.

با محاسباتی مشابه، بردارهای ویژهٔ $X = t(0, 1, -1)$ نظیر به $\lambda = -1$، و $X = t(2, 3, -1)$ نظیر به $\lambda = 3$، که در آنها t هر اسکالر ناصفر است، را خواهیم یافت. چون مقدارهای ویژه متمایزند، بردارهای ویژهٔ نظیر، یعنی $(1, -1, 0)$، $(0, 1, -1)$، و $(2, 3, -1)$، مستقل می‌باشند. نتایج را می‌توان در یک جدول به‌صورت زیر خلاصه کرد. در ستون سوم بعد فضای ویژهٔ $E(\lambda)$ را قید کرده‌ایم.

مقدار ویژه λ	بردارهای ویژه	$\dim E(\lambda)$
1	$t(1, -1, 0), \quad t \neq 0$	1
-1	$t(0, 1, -1), \quad t \neq 0$	1
3	$t(2, 3, -1), \quad t \neq 0$	1

مثال ۲. ماتریس با مقدارهای ویژهٔ مکرر. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

دارای چندجمله‌ای مشخص

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

است. مقدارهای ویژه عبارتند از 2، 2، و 4. (ذکر مقدار ویژهٔ 2 دوبار برای

و بردارهای ویژهٔ هر نمایش ماتریسی T نیز نامیده می‌شوند. بنابر این، مقدارهای ویژهٔ ماتریس مربعی A ریشه‌های چند جمله‌ای مشخص $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ است. بردارهای ویژهٔ نظیر به‌مقدار ویژهٔ λ آن بردارهای ناصفر $X = (x_1, \ldots, x_n)$ هستند که به صورت ماتریسهای ستونی $n \times 1$ در معادلهٔ ماتریسی

$$(\lambda I - A)X = O \quad \text{یا} \quad AX = \lambda X$$

صدق می‌کنند. این یک دستگاه مرکب از n معادلهٔ خطی برای مولفه‌های $x_1, \ldots, x_n$ است. به‌محض دانستن λ، می‌توان بردارهای ویژه را با حل این دستگاه به دست‌آورد. این امر را با سه مثال که کیفیات مختلفی را نشان می‌دهند توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. ماتریس با مقدارهای ویژهٔ متمایز. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

دارای چندجمله‌ای مشخص

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

است؛ در نتیجه، سه مقدار ویژهٔ متمایز وجود دارند: 1، -1، و 3. برای یافتن بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda = 1$، دستگاه $AX = X$، یا

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

را حل می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= x_2 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 &= x_3, \end{aligned}$$

که می‌توان آن را به‌صورت

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -x_1 - \ \ x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

نوشت. با افزودن معادلات اول و سوم خواهیم داشت $x_3 = 0$؛ و در این صورت، هر سه معادله به $x_1 + x_2 = 0$ تحویل می‌شوند. بنابر این، بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda = 1$ عبارتند از $X = t(1, -1, 0)$، که در آنها t هر اسکالر ناصفر است.

با محاسباتی مشابه، بردارهای ویژهٔ $X = t(0, 1, -1)$ نظیر به $\lambda = -1$، و $X = t(2, 3, -1)$ نظیر به $\lambda = 3$، که در آنها t هر اسکالر ناصفر است، را خواهیم یافت. چون مقدارهای ویژه متمایزند، بردارهای ویژهٔ نظیر، یعنی $(1, -1, 0)$، $(0, 1, -1)$، و $(2, 3, -1)$، مستقل می‌باشند. نتایج را می‌توان در یک جدول به‌صورت زیر خلاصه کرد. در ستون سوم بعد فضای ویژهٔ $E(\lambda)$ را قید کرده‌ایم.

مقدار ویژه λ	بردارهای ویژه	$\dim E(\lambda)$
1	$t(1, -1, 0),\ \ t \neq 0$	1
-1	$t(0, 1, -1),\ \ t \neq 0$	1
3	$t(2, 3, -1),\ \ t \neq 0$	1

مثال ۲. ماتریس با مقدارهای ویژهٔ مکرر. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

دارای چندجمله‌ای مشخص

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

است. مقدارهای ویژه عبارتند از 2، 2، و 4. (ذکر مقدار ویژهٔ 2 دوبار برای

تاکید درآن است که ریشهٔ مضاعف چندجمله‌ای مشخص می‌باشد.) برای یافتن بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda = 2$ ، دستگاه $AX = 2X$ را حل می‌کنیم، که به دستگاه

$$-x_2 + x_3 = 0$$
$$x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

تحویل می‌شود. این دستگاه دارای جواب $x_2 = x_3 = -x_1$ است؛ در نتیجه، بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda = 2$ عبارتند از $t(-1, 1, 1)$، که درآنها $t \neq 0$. بهمین‌نحو، بردارهای ویژهٔ $t(1, -1, 1)$ ، نظیر به مقدار ویژهٔ $\lambda = 4$ ، را به‌دست می‌آوریم. نتایج را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

مقدار ویژه	بردارهای ویژه	$\dim E(\lambda)$
2, 2	$t(-1, 1, 1), \quad t \neq 0$	1
4	$t(1, -1, 1), \quad t \neq 0$	1

مثال ۳. ماتریس دیگر با مقدارهای ویژهٔ مکرر. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

دارای چندجمله‌ای مشخص $(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 7)$ است. وقتی $\lambda = 7$ ، دستگاه $AX = 7X$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$5x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$$
$$-3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0.$$

این معادله دارای جواب $x_2 = 2x_1, x_3 = 3x_1$ است؛ در نتیجه، بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda = 7$ عبارتند از $t(1, 2, 3)$ ، که در آنها $t \neq 0$. به‌ازای مقدار ویژهٔ $\lambda = 1$ ، دستگاه $AX = X$ تکرار سه بار معادلهٔ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

است. برای حل این معادله می‌توان فرض کرد $x_1 = a, x_2 = b$ ، که در آنها a و b

دلخواهند ، وسپس $x_3 = -a - b$ را اختیار نمود . لذا ،هر بردار ویژهٔ نظیر به $\lambda = 1$ به شکل

$$(a, b, -a-b) = a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1)$$

است ، که در آن $a \neq 0$ یا $b \neq 0$. این یعنی بردارهای $(1, 0, -1)$ و $(0, 1, -1)$ یک پایه برای $E(1)$ تشکیل می‌دهند . بنابراین ، وقتی $\lambda = 1$ ، $\dim E(\lambda) = 2$. نتایج را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد :

مقدار ویژه	بردارهای ویژه	$\dim E(\lambda)$
7	$t(1, 2, 3), \quad t \neq 0$	1
1, 1	$a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1)$, a و b هردو 0 نیستند	2

توجه کنید کــه در این مثال سه بردار ویژهٔ مستقل ولی فقط دو مقدار ویژهٔ متمایز وجود دارنــد .

۷.۴ اثر یک ماتریس

فرض کنیم $f(\lambda)$ چندجمله‌ای مشخص یک ماتریس $n \times n$ مانند A باشد . n ریشهٔ $f(\lambda)$ را با $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ نشان می‌دهیم ، بطوری که هر ریشه به قدر ضریب تکرارش آمده است . در این صورت ، تجزیهٔ

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

را خواهیم داشت . می‌توان $f(\lambda)$ را برحسب توانهای نزولی از λ به صورت زیر نیزنوشت :

$$f(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 .$$

از مقایسهٔ ایــن بــا شکل‌تجزیه شده معلوم می‌شود که جملهٔ ثابت c_0 و ضریب λ^{n-1} از فرمولهای

$$c_{n-1} = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \quad \text{و} \quad c_0 = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

به دست می‌آیند . چون نیز داریم $c_0 = (-1)^n \det A$ ، ملاحظه می‌شود که

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A .$$

یعنی ، **حاصل ضرب ریشه‌های چندجمله‌ای مشخص A مساوی دترمینان A است .**

مجموع ریشه‌های $f(\lambda)$ *اثر* A نامیده و بــا $\operatorname{tr} A$ نموده می‌شود . لذا ، طبق تعریف ،

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

ضریب λ^{n-1} از رابطهٔ $c_{n-1} = -\text{tr}\, A$ به دست می‌آید. همچنین، می‌توان این ضریب را از شکل دترمینانی $f(\lambda)$ حساب کرد و به دست آورد که

$$c_{n-1} = -(a_{11} + \cdots + a_{nn}) \,.$$

(اثبات این فرمول در تمرین ۱۲ از بخش ۸.۴ خواسته شده است). دو فرمول برای c_{n-1} نشان می‌دهند که

$$\text{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

یعنی، ***اثر A مساوی مجموع عناصر قطری A نیز هست.***

چون محاسبهٔ مجموع عناصر قطری آسان است، می‌توان از آن به عنوان یک امتحان عددی در محاسبات مقدارهای ویژه استفاده کرد. خواص دیگر اثر در مجموعه تمرینات زیر توصیف شده‌اند.

۸.۴ تمرین

مقدارهای ویژه و بردارهای ویژهٔ هر یک از ماتریسهای تمرینات ۱ تا ۳ را معین کنید. همچنین، به‌ازای هر مقدار ویژهٔ λ، بعد فضای ویژهٔ $E(\lambda)$ را محاسبه نمایید.

۱. (آ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$؛ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$؛ (پ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$؛ (ت) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

۲. $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}, a > 0, b > 0$.

۳. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

۴. ماتریسهای

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

در نظریهٔ مکانیک کوانتمی چرخش الکترون می‌آیند و، به افتخار ولفگانگ پاولی[1]

---

1. Wolfgang Pauli

(۱۹۰۰ – ۱۹۵۸) فیزیکدان، **ماتریسهای چرخش پاولی** نامیده می‌شوند. تحقیق کنید که همهٔ این ماتریسها دارای مقدارهای ویژهٔ 1 و -1 هستند. سپس، تمام ماتریسهای 2×2 با درایه‌های مختلط که دارای دو مقدار ویژهٔ 1 و -1 هستندرا مشخص نمایید.

۵. جمیع ماتریسهای 2×2 با درایه‌های حقیقی را معین کنید که مقدارهای ویژهٔ آنها (آ) حقیقی و متمایز باشند؛ (ب) حقیقی و مساوی باشند؛ (پ) مزدوج مختلط باشند.

۶. با این فرض که بردارهای $(1, 1, 1)$، $(1, 0, -1)$، و $(1, -1, 0)$ بردارهای ویژهٔ ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

هستند، a, b, c, d, e, f را معین نمایید.

۷. مقدارهای‌ویژه و بردارهای‌ویژهٔ هریک‌از ماتریسهای زیر را حساب کنید. همچنین، بعد فضای ویژهٔ $E(\lambda)$ را به‌ازای هر مقدار ویژهٔ λ محاسبه نمایید:

(آ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$؛ (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{bmatrix}$؛ (پ) $\begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$.

۸. مقدارهای ویژهٔ هریک از پنج ماتریس زیر را حساب کنید:

(آ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$؛ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$؛ (پ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$؛

(ت) $\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}$؛ (ث) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

این ماتریسها را ، به‌افتخار پل دیراک[1] (ـ ۱۹۰۲) ، فیزیکدان انگلیسی ، **ماتریسهای دیراک** می‌نامند . این ماتریسها در حل معادلهٔ نسبی موج در مکانیک کوانتم ظاهر می‌شوند .

۹ . هرگاه A و B ماتریسهایی $n \times n$ باشند ، و B یک ماتریس‌قطری باشد ، (به‌استقرا) ثابت کنید که دترمینان $f(\lambda) = \det(\lambda B - A)$ یک چندجمله‌ای از λ است ، بطوری که $f(0) = (-1)^n \det A$ و ضریب λ^n مساوی حاصل‌ضرب درایه‌های قطری B می‌باشد .

۱۰ . ثابت کنید که ماتریس‌قطری A و ترانهادهٔ آن A^t یک چندجمله‌ای مشخص دارند .

۱۱ . هرگاه A و B ماتریسهایی $n \times n$ باشند ، و A نامنفرد باشد ، ثابت کنید که AB و BA دارای یک مجموعه از مقدارهای ویژه‌اند . **تذکر.** می‌توان نشان داد که AB و BA ، حتی اگر A منفرد باشد ، یک چندجمله‌ای مشخص دارند ، اما لازم نیست این را ثابت کنید .

۱۲ . فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با چندجمله‌ای مشخص $f(\lambda)$ باشد . (به استقرا) ثابت کنید که ضریب λ^{n-1} در $f(\lambda)$ مساوی $-\operatorname{tr} A$ است .

۱۳ . فرض کنید A و B ماتریسهایی $n \times n$ بوده و $\det A = \det B$ و $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$. ثابت کنید که اگر $n = 2$ ، A و B یک چندجمله‌ای مشخص دارند ، اما این مطلب در حالت $n > 2$ الزاماً درست نیست .

۱۴ . هریک از احکام زیر را در مورد اثر ثابت کنید :

(آ) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$ ؛

(ب) $\operatorname{tr}(cA) = c \operatorname{tr} A$ ؛

(پ) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ ؛

(ت) $\operatorname{tr} A^t = \operatorname{tr} A$.

۹.۴ ماتریسهایی که یک تبدیل خطی را نمایش می‌دهند . ماتریسهای متشابه

در این بخش ثابت می‌کنیم که دو نمایش ماتریسی مختلف یک تبدیل خطی دارای یک چندجمله‌ای مشخص‌اند . برای این‌کار رابطهٔ بین ماتریسهایی که نمایشگر یک تبدیل اند را دقیقتر بررسی می‌کنیم .

---

1. Paul A. M. Dirac

به یاد می‌آوریم که نمایشهای ماتریسی چگونه تعریف شده‌اند. فرض کنیم $T: V \to W$ یک تبدیل خطی از فضای n بعدی V بتوی فضای m بعدی W باشد. همچنین، $(e_1, \ldots, e_n)$ و $(w_1, \ldots, w_m)$ بترتیب پایه‌هایی مرتب برای V و W باشند. نمایش ماتریسی T نسبت به این پایه‌ها ماتریس $m \times n$ ای است که ستونهایش از مؤلفه‌های $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ نسبت به پایهٔ $(w_1, \ldots, w_m)$ تشکیل شده است. با انتخاب پایه‌های مختلف نمایشهای ماتریسی مختلف به‌دست می‌آیند.

اکنون حالتی را درنظر می‌گیریم که در آن $V = W$، و برای V و W یک پایهٔ مرتب $(e_1, \ldots, e_n)$ اختیار می‌کنیم. فرض‌کنیم $A = (a_{ik})$ ماتریس T نسبت به‌این پایه باشد. این یعنی که چنین داریم:

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i \quad \text{،} \quad k = 1, 2, \ldots, n \ \text{به‌ازای} \tag{۸.۴}$$

حال پایهٔ مرتب دیگر $(u_1, \ldots, u_n)$ را برای V و W اختیار کرده و فرض می‌کنیم $B = (b_{kj})$ ماتریس T نسبت به‌این پایهٔ جدید باشد. در این صورت، چنین خواهیم داشت:

$$T(u_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} u_k \quad \text{،} \quad j = 1, 2, \ldots, n \ \text{به‌ازای} \tag{۹.۴}$$

چون هر u_j در فضای پیموده شده به‌وسیلهٔ $e_1, \ldots, e_n$ است، می‌توان به‌ازای اسکالر-هایی چون c_{kj} چنین نوشت:

$$u_j = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} e_k \quad \text{،} \quad j = 1, 2, \ldots, n \ \text{به‌ازای} \tag{۱۰.۴}$$

ماتریس $n \times n$، $C = (c_{kj})$ معین شده به وسیلهٔ این اسکالرها نامنفرد است، زیرا تبدیل خطیی را نمایش می‌دهد که یک پایهٔ V را بروی پایهٔ دیگر V می‌نگارد. با اعمال T در دو طرف (۱۰.۴) معادلات زیر را نیز خواهیم داشت:

$$T(u_j) = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} T(e_k) \quad \text{،} \quad j = 1, 2, \ldots, n \ \text{به‌ازای} \tag{۱۱.۴}$$

دستگاههای معادلات در (۸.۴) تا (۱۱.۴) را می‌توان، با معرفی ماتریسها با درایه‌های برداری، ساده‌تر به شکل ماتریسی نوشت. فرض کنیم

$$U = [u_1, \ldots, u_n] \quad \text{و} \quad E = [e_1, \ldots, e_n]$$

ماتریسهای سطری $n \times 1$ ی باشند که درایه‌های آنها عنصرهای پایهٔ مورد سؤال باشند. دراین‌صورت، مجموعهٔ معادلات در (۱۰۰۴) را می‌توان به صورت یک معادلهٔ ماتریسی نوشت:

$$U = EC. \tag{۱۲۰۴}$$

بهمین نحو، اگر معرفی کنیم

$E' = [T(e_1), \ldots, T(e_n)]$ و $U' = [T(u_1), \ldots, T(u_n)]$ ،

معادلات (۸۰۴)، (۹۰۴)، و (۱۱۰۴) بترتیب خواهند شد

$$E' = EA, \qquad U' = UB, \qquad U' = E'C. \tag{۱۳۰۴}$$

همچنین، از (۱۲۰۴) داریم

$$E = UC^{-1}.$$

برای یافتن رابطهٔ بین A و B ، U' را به دو طریق برحسب U بیان می‌کنیم. از (۱۳۰۴) داریم

$$U' = UB$$

و

$$U' = E'C = EAC = UC^{-1}AC.$$

بنابراین، $UB = UC^{-1}AC$. اما هر درایه دراین معادلهٔ ماتریسی ترکیبی خطی از بردارهای پایهٔ $u_1, \ldots, u_n$ است. چون u_i ها مستقل‌اند، باید داشته باشیم

$$B = C^{-1}AC.$$

بنابراین، قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیهٔ ۶۰۴. هرگاه دو ماتریس $n \times n$ ، A و B یک تبدیل خطی T را نمایش دهند، آنگاه ماتریس نامنفردی چون C هست بطوری که

$$B = C^{-1}AC.$$

بعلاوه، هرگاه A ماتریس T نسبت به پایهٔ $E = [e_1, \ldots, e_n]$ و B ماتریس T نسبت به پایهٔ $U = [u_1, \ldots, u_n]$ باشد، آنگاه می‌توان ماتریس نامنفرد C را طوری اختیار کرد که دو پایه را برطبق معادلهٔ ماتریسی $U = EC$ بهم ربط دهد.

عکس قضیهٔ ۶۰۴ نیز درست است.

قضیهٔ ۷.۴ . فرض‌کنیم A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند که با معادله‌ای به شکل $B = C^{-1}AC$ بهم مربوطند ، که در آن C یک ماتریس $n \times n$ نامنفرد است . در این صورت ، A و B یک تبدیل خطی را نمایش می‌دهند .

برهان . پایهٔ $E = [e_1, \ldots, e_n]$ را برای‌فضای n بعدی V اختیار می‌کنیم . فرض‌کنیم $u_1, \ldots, u_n$ بردارهایی باشد که با معادلات زیر معین می‌شوند :

$$u_j = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} e_k \text{ ، به‌ازای } j = 1, 2, \ldots, n \qquad (۱۴.۴)$$

که‌درآن اسکالرهای c_{kj} درایه‌های C می‌باشند . چون C نامنفرد است ، یک تبدیل‌خطی معکوسپذیر را نمایش می‌دهد ؛ در نتیجه ، $U = [u_1, \ldots, u_n]$ نیز یک پایهٔ V است ، و داریم $U = EC$.

فرض‌کنیم T تبدیل خطیی باشد که دارای نمایش ماتریسی A نسبت به پایهٔ E است ، و S تبدیلی باشد که دارای نمایش ماتریسی B نسبت به پایهٔ U است . دراین صورت ، چنین خواهیم داشت :

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i \text{ ، به‌ازای } k = 1, 2, \ldots, n \qquad (۱۵.۴)$$

و

$$S(u_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} u_k \text{ ، به‌ازای } j = 1, 2, \ldots, n \, . \qquad (۱۶.۴)$$

با نشان دادن اینکه به ازای هر j ، $T(u_j) = S(u_j)$ ، ثابت می‌کنیم که $S = T$.

معادلات (۱۵.۴) و (۱۶.۴) را می‌توان ساده‌تر و به شکل ماتریسی زیر نوشت :

$$[T(e_1), \ldots, T(e_n)] = EA, \qquad [S(u_1), \ldots, S(u_n)] = UB.$$

همچنین ، با اعمال T بر (۱۴.۴) رابطهٔ $T(u_j) = \sum c_{kj} T(e_k)$ به دست می‌آید ، یا اینکه

$$[T(u_1), \ldots, T(u_n)] = EAC.$$

اما داریم

$$UB = ECB = EC(C^{-1}AC) = EAC,$$

که نشان می‌دهد که به‌ازای هر j ، $T(u_j) = S(u_j)$. بنابراین ، به‌ازای هر x در V ،

ماتریسهای سطری $n \times 1$ ی باشند که درایه‌های آنها عنصرهای پایهٔ مورد سؤال باشند. دراین‌صورت، مجموعهٔ معادلات در (۱۰.۴) را می‌توان به صورت یک معادلهٔ ماتریسی نوشت:

$$U = EC. \tag{۱۲.۴}$$

بهمین نحو، اگر معرفی کنیم

$$E' = [T(e_1), \ldots, T(e_n)] \quad \text{و} \quad U' = [T(u_1), \ldots, T(u_n)]،$$

معادلات (۸.۴)، (۹.۴)، و (۱۱.۴) بترتیب خواهند شد

$$E' = EA, \qquad U' = UB, \qquad U' = E'C. \tag{۱۳.۴}$$

همچنین، از (۱۲.۴) داریم

$$E = UC^{-1}.$$

برای یافتن رابطهٔ بین A و B، U' را به دو طریق برحسب U بیان می‌کنیم. از (۱۳.۴) داریم

$$U' = UB$$

و

$$U' = E'C = EAC = UC^{-1}AC.$$

بنابراین، $UB = UC^{-1}AC$. اما هر درایه دراین معادلهٔ ماتریسی ترکیبی خطی از بردارهای پایهٔ $u_1, \ldots, u_n$ است. چون u_i ها مستقل‌اند، باید داشته باشیم

$$B = C^{-1}AC.$$

بنابراین، قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ام.

قضیهٔ ۶.۴ . هرگاه دو ماتریس $n \times n$، A و B یک تبدیل خطی T را نمایش دهند، آنگاه ماتریس نامنفردی چون C هست بطوری که

$$B = C^{-1}AC.$$

بعلاوه، هرگاه A ماتریس T نسبت به پایهٔ $E = [e_1, \ldots, e_n]$ و B ماتریس T نسبت به پایهٔ $U = [u_1, \ldots, u_n]$ باشد، آنگاه می‌توان ماتریس نامنفرد C را طوری اختیار کرد که دو پایه را برطبق معادلهٔ ماتریسی $U = EC$ بهم ربط دهد.

عکس قضیهٔ ۶.۴ نیز درست است.

قضیهٔ ۷۰۴ . فرض کنیم A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند که با معادله‌ای به شکل $B = C^{-1}AC$ بهم مربوطند ، که در آن C یک ماتریس $n \times n$ نامنفرد است . در این صورت ، A و B یک تبدیل خطی را نمایش می‌دهند .

برهان . پایهٔ $E = [e_1, \ldots, e_n]$ را برای فضای n بعدی V اختیار می‌کنیم . فرض کنیم $u_1, \ldots, u_n$ بردارهایی باشد که با معادلات زیر معین می‌شوند :

$$u_j = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} e_k \text{ ، به‌ازای } j = 1, 2, \ldots, n \tag{۱۴۰۴}$$

که درآن اسکالرهای c_{kj} درایه‌های C می‌باشند . چون C نامنفرد است ، یک تبدیل خطی معکوسپذیر را نمایش می‌دهد ؛ در نتیجه ، $U = [u_1, \ldots, u_n]$ نیز یک پایهٔ V است ، و داریم $U = EC$.

فرض کنیم T تبدیل خطیی باشد که دارای نمایش ماتریسی A نسبت به پایهٔ E است ، و S تبدیلی باشد که دارای نمایش ماتریسی B نسبت به پایهٔ U است . دراین صورت ، چنین خواهیم داشت :

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i \text{ ، به‌ازای } k = 1, 2, \ldots, n \tag{۱۵۰۴}$$

و

$$S(u_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} u_k \text{ ، به‌ازای } j = 1, 2, \ldots, n \text{ .} \tag{۱۶۰۴}$$

با نشان دادن اینکه به ازای هر j ، $T(u_j) = S(u_j)$ ، ثابت می‌کنیم که $S = T$.

معادلات (۱۵۰۴) و (۱۶۰۴) را می‌توان ساده‌تر و به شکل ماتریسی زیر نوشت :

$$[T(e_1), \ldots, T(e_n)] = EA, \qquad [S(u_1), \ldots, S(u_n)] = UB.$$

همچنین ، با اعمال T بر (۱۴۰۴) رابطهٔ $T(u_j) = \sum c_{kj} T(e_k)$ به دست می‌آید ، یا اینکه

$$[T(u_1), \ldots, T(u_n)] = EAC.$$

اما داریم

$$UB = ECB = EC(C^{-1}AC) = EAC,$$

که نشان می‌دهد که به‌ازای هر j ، $T(u_j) = S(u_j)$. بنابراین ، به‌ازای هر x در V ،

$T(x) = S(x)$ ؛ در نتیجه، $T = S$. به عبارت دیگر، ماتریسهای A و B یک تبدیل خطی را نمایش می‌دهند.

تعریف. دو ماتریس $n \times n$ مانند A و B را **متشابه** گویند در صورتی‌که ماتریس نامنفردی چون C باشد بطوری که $B = C^{-1}AC$.

با تلفیق قضایای ۶.۴ و ۷.۴ می‌توان قضیهٔ زیر را به‌دست آورد.

قضیهٔ ۸.۴ . ***دو ماتریس $n \times n$ متشابه‌اند اگر و فقط اگر هر دو یک تبدیل خطی را نمایش دهند.***

ماتریسهای متشابه در خواص زیادی سهیم هستند. مثلاً، دارای یک دترمینان‌اند، زیرا

$$\det (C^{-1}AC) = \det (C^{-1})(\det A)(\det C) = \det A .$$

این خاصیت قضیهٔ زیر را به‌ما خواهد داد.

قضیهٔ ۹.۴ . ***ماتریسهای متشابه دارای یک چندجمله‌ای مشخص، و لذا مقدارهای ویژهٔ مساوی، می‌باشند.***

برهان. اگر A و B متشابه باشند، ماتریس نامنفردی چون C هست بطوری که $B = C^{-1}AC$. بنابراین، داریم

$$\lambda I - B = \lambda I - C^{-1}AC = \lambda C^{-1}IC - C^{-1}AC = C^{-1}(\lambda I - A)C .$$

این نشان می‌دهد که $\lambda I - B$ و $\lambda I - A$ متشابه‌اند؛ در نتیجه،

$$\det (\lambda I - B) = \det (\lambda I - A) .$$

قضایای ۸.۴ و ۹.۴ با هم نشان می‌دهند که تمام نمایشهای ماتریسی تبدیل خطی T یک چندجمله‌ای مشخص دارند. این چندجمله‌ای چندجمله‌ای مشخص T نیز نامیده می‌شود.

قضیهٔ بعـدی ترکیبی است از قضایای ۵.۴ ، ۲.۴ ، و ۶.۴ . در قضیهٔ ۱۰.۴ ، F یا میدان حقیقی $\mathbf{R}$ است یا میدان مختلط $\mathbf{C}$.

قضیهٔ ۱۰.۴ . *فرض کنیم $T: V \to V$ تبدیلی خطـی باشد ، که در آن V اسکالرهایش در F بوده و $\dim V = n$. همچنین ، چنـد جمله‌ای مشخص T دارای ریشه‌های متمایـز $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ در F باشد . در این صورت ، خواهیم داشت*

(آ) بردارهای ویژهٔ $u_1, \ldots, u_n$ نظیر یک پایه برای V تشکیل می‌دهند ؛

(ب) ماتریس T نسبت بـه پایهٔ مـرتب $U = [u_1, \ldots, u_n]$ ماتریس قطری Λ است که مقدارهای ویژه را به‌عنوان درایه‌های قطری دارد :

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) ;$$

(پ) هرگاه A ماتریس T نسبت به پایهٔ دیگر $E = [e_1, \ldots, e_n]$ باشد ، آنگاه

$$\Lambda = C^{-1}AC,$$

که در آن C ماتریس نامنفردی است که دو پایه را با معادلهٔ

$$U = EC$$

بهم مربوط می‌کند .

برهان. طبق قضیـهٔ ۵.۴ ، هر ریشهٔ λ_i یک مقدار ویژه است . چون n ریشهٔ متمایز وجود دارد ، قضیهٔ ۲.۴ می‌گوید که بردارهای ویژهٔ $u_1, \ldots, u_n$ نظیر مستقل می‌باشند . لذا ، تشکیل یک پایه برای V می‌دهند . این (آ) را ثابت می‌کند . چون $T(u_i) = \lambda_i u_i$ ، ماتریس T نسبت بـه U ماتریس قطـری Λ است ، که (ب) را ثابت می‌کند . برای اثبات (پ) از قضیهٔ ۶.۴ استفاده می‌کنیم .

تذکر. ماتریس نـامنفرد C در قضیهٔ ۱۰.۴ یـک ***ماتریس قطـری سـاز*** نامیده می‌شود . هرگاه $(e_1, \ldots, e_n)$ پایهٔ بـردارهای یکـهٔ مختصات $(I_1, \ldots, I_n)$ باشد . آنگاه معادلهٔ $U = EC$ در قضیهٔ ۱۰.۴ نشان می‌دهد کـه ستون k ام C از مولفه‌های بردار ویژهٔ u_k نسبت به $(I_1, \ldots, I_n)$ تشکیل شده است .

هرگاه مقدارهای ویژهٔ A متمایز باشند ، A با یک ماتریس قطری متشابه است . هرگاه مقدارهای ویژه متمایز نباشند ، A باز هم ممکن است متشابه یک ماتریس قطری باشد . این

رخ می‌دهد اگر و فقط اگر k بردار ویژهٔ مستقل نظیر به هر مقدار ویژه با ضریب تکرار k وجود داشته باشد. مثالهایی در مجموعه تمرینات زیر خواهند آمد.

۱۰۰۴ تمرین

۱. ثابت کنید که ماتریسهای $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ دارای مقدارهای ویژهٔ مساوی‌اند اما متشابه نیستند.

۲. در هر حالت، ماتریس نامنفرد C را طوری بیابید که $C^{-1}AC$ یک ماتریس قطری باشد یا توضیح دهید چرا چنین C ای وجود ندارد:

(آ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$؛ (ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$؛ (پ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$؛

(ت) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

۳. سه پایه در صفحه داده شده است. یک نقطه نسبت به این پایه‌ها بترتیب دارای مولفه‌های (x_1, x_2)، (y_1, y_2)، و (z_1, z_2) است. فرض کنید $[y_1, y_2] = [x_1, x_2]A$، $[z_1, z_2] = [x_1, x_2]B$، و $[z_1, z_2] = [y_1, y_2]C$، که در آنها A, B, C ماتریسهایی 2×2 می‌باشند. C را برحسب A و B بیان کنید.

۴. در هر حالت، نشان دهید که مقدارهای ویژهٔ A متمایز نیستند، اما A سه بردار ویژهٔ مستقل دارد. ماتریس نامنفرد C را طوری بیابید که $C^{-1}AC$ یک ماتریس قطری باشد:

(آ) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$؛ (ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

۵. نشان دهید که هیچیک از ماتریسهای زیر با یک ماتریس قطری متشابه نیست، اما هریک با یک ماتریس مثلثی شکل به صورت $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$، که در آن λ یک مقدار ویژه است، متشابه می‌باشد:

(آ) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$؛ (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

۶ . مقدارهای ویژه و بردارهای ویژهٔ ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ را تعیین کنید و ، بدینوسیله ، نشان دهید که این ماتریس با یک ماتریس قطری متشابه نیست .

۷ . (آ) ثابت کنید ماتریس مربعی A نامنفرد است اگر و فقط اگر 0 یک مقدار ویژهٔ A نباشد .

(ب) ثابت کنید که اگر A نامنفرد باشد ، مقدارهای ویژهٔ A^{-1} معکوسهای مقادیر ویژهٔ A می‌باشند .

۸ . فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد بطوری که $A^2 = -I$ ، و احکام زیر را در مورد A ثابت کنید :

(آ) A نامنفرد است ؛

(ب) n زوج است ؛

(پ) A مقدار ویژهٔ حقیقی ندارد ؛

(ت) $\det A = 1$.

۵

مقدارهای ویژهٔ عملگرهایی که بر فضاهای اقلیدسی عمل می کنند

۱۰۵ مقدارهای ویژه و ضربهای داخلی

در این فصل چند خاصیت مقدارهای ویژه و بردارهای ویژهٔ تبدیلاتی خطی که برفضاهای اقلیدسی ، یعنی فضاهایی خطی که ضرب داخلی دارند ، عمل می‌کنند را توصیف می‌کنیم . ابتدا خواص اساسی ضربهای داخلی را یادآور می‌شویم.

در یک فضای اقلیدسی **حقیقی ،** حاصل ضرب داخلی (x, y) دو عنصر x و y عددی است حقیقی که دارای خواص زیر است :

(۱) $(x, y) = (y, x)$ (تقارن) ؛

(۲) $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$ (خطی) ؛

(۳) $(cx, y) = c(x, y)$ (همگنی) ؛

(۴) اگر $x \neq O$ ، $(x, x) > 0$ (مثبتی) .

در یک فضای اقلیدسی **مختلط ،** حاصل ضرب داخلی عددی است مختلط و برخوردار از همان خواص، با این تفاوت که تقارن با **تقارن هرمیتی** عوض می شود :

$$(x, y) = \overline{(y, x)}, \tag{۱´}$$

که در آن خط افقی نشانگر مزدوج مختلط است . در (۳) اسکالر c مختلط است . از (۱´) و (۳) خواهیم داشت

$$(x, cy) = \bar{c}(x, y), \tag{۳´}$$

مبین آنکه اسکالرها ، وقتی از سازهٔ دوم خارج می شوند ، مزدوج خواهند شد . با فرض $x = y$ در (۱´) ، می‌بینیم که (x, x) حقیقی است ؛ درنتیجه، خاصیت (۴) درحالتی که فضا مختلط است معنی دارد .

وقتی اصطلاح فضای اقلیدسی را بدون توضیح اضافی به‌کار می‌بریم فرض این است که فضا می‌تواند هم حقیقی و هم مختلط باشد. با آنکه اغلب کاربردهای ما درفضاهای با بعد متناهی است، این قید را در آغاز لازم نمی‌دانیم.

اولین قضیه نشان می‌دهد که مقدارهای ویژه را (در صورت وجود) می‌توان برحسب حاصل ضرب داخلی بیان کرد.

قضیهٔ ۱۰۵ . فرض کنیم E یک فضای اقلیدسی بوده، V زیر فضایی از E باشد، و $T: V \to E$ تبدیلی خطی دارای مقدار ویژهٔ λ با بردار ویژهٔ نظیر x باشد. در این صورت، خواهیم داشت

$$\lambda = \frac{(T(x), x)}{(x, x)}. \tag{۱۰۵}$$

برهان. چون $T(x) = \lambda x$ ، داریم

$$(T(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x).$$

و چون $x \neq O$ ، می‌توان با تقسیم بر (x, x) رابطهٔ (۱۰۵) را به‌دست آورد.

از معادلهٔ (۱۰۵) به‌آسانی چند خاصیت از مقدارهای ویژه نتیجه می‌شود. مثلاً، از تقارن هرمیتی ضرب داخلی فرمول لنگهٔ

$$\bar{\lambda} = \frac{(x, T(x))}{(x, x)} \tag{۲۰۵}$$

را برای مزدوج مختلط λ داریم. از (۱۰۵) و (۲۰۵) می‌بینیم که λ حقیقی است $(\lambda = \bar{\lambda})$ اگر و فقط اگر $(T(x), x)$ حقیقی باشد؛ یعنی، اگر و فقط اگر

به‌ازای بردار ویژهٔ x ، $(T(x), x) = (x, T(x))$.

(این شرط در یک فضای اقلیدسی حقیقی بداهتاً برقرار است.) همچنین، λ موهومی محض است $(\lambda = -\bar{\lambda})$ اگر و فقط اگر $(T(x), x)$ موهومی محض باشد؛ یعنی، اگر و فقط اگر

به‌ازای بردار ویژهٔ x ، $(T(x), x) = -(x, T(x))$.

۲۰۵ تبدیلات هرمیتی و هرمیتی اریب

در این بخش دونوع مهم از عملگرهای خطی را که بر فضاهای اقلیدسی عمل می‌کنندمعرفی

می‌کنیم . این عملگرها ، بسته به اینکه فضای اقلیدسی زمینه ضرب داخلی حقیقی یا مختلط داشته باشد ، دو دسته اسم مختلف دارند . در حالت حقیقی ، تبدیلها **متقارن** و **متقارن اریب** خوانده می‌شوند ؛ و در حالت مختلط، آنها را **هرمیتی** و **هرمیتی اریب** می‌نامند . این تبدیلات در کاربردهای مختلف بسیار ظاهر می‌شوند . مثلا" ، عملگرهای هرمیتی بر فضاهای با بعدنامتناهی‌نقش مهمی در مکانیک کوانتم دارند . ما عمدتا" حالت مختلط را مورد بحث قرار می‌دهیم ، زیرا این حالت مشکلات اضافی به‌بار نخواهد آورد .

تعریف . فرض کنیم E یک‌فضای‌اقلیدسی بوده و V زیر فضایی از E باشد . تبدیل‌خطی $T: V \to E$ بر V **هرمیتی** نامیده می‌شود اگر که

به‌ازای هر x و y در V ، $(T(x), y) = (x, T(y))$.

عملگر T بر V **هرمیتی اریب** خوانده می‌شود اگر که

به‌ازای هر x و y در V ، $(T(x), y) = -(x, T(y))$.

به عبارت دیگر ، عملگر هرمیتی T را می‌توان از یک سازهٔ یک حاصل ضرب‌داخلی به سازهٔ دیگر بدون تغییر مقدار حاصل ضرب انتقال داد ، ولی انتقال در یک عملگر هرمیتی اریب علامت حاصل ضرب را تغییر خواهد داد .

تذکر . همانطور که قبلا" ذکر شد ، اگر E یک فضای اقلیدسی **حقیقی** باشد ، تبدیلات هرمیتی **متقارن** نیز نامیده‌می‌شوند ؛ تبدیلات‌هرمیتی اریب **متقارن اریب** نیز نام‌دارند .

مثال ۱ . تقارن و تقارن اریب درفضای $C(a, b)$. فرض کنیم $C(a, b)$ فضای تمام‌توابع حقیقی پیوسته بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ با ضرب داخلی‌حقیقی

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\, dt$$

باشد . فرض کنیم V یک زیر فضای $C(a, b)$ باشد . هرگاه $T: V \to C(a, b)$ یک تبدیل خطی باشد ، آنگاه $(f, T(g)) = \int_a^b f(t)Tg(t)\, dt$ ، که در آن به‌جای $T(g)(t)$ نوشته‌ایم $Tg(t)$. بنابراین ، شرطهای تقارن و تقارن اریب به صورت زیر درمی‌آیند :

اگر T متقارن باشد ، $\int_a^b \{f(t)Tg(t) - g(t)Tf(t)\}\, dt = 0$ ؛ (۳۰۵)

واگر T متقارن‌اریب باشد ، $\int_a^b \{f(t)Tg(t) + g(t)Tf(t)\}\, dt = 0$. (۴۰۵)

مثال ۲ . ضرب در یک تابع ثابت . درفضای $C(a, b)$ مثال ۱ ، تابع ثابت p را اختیار و تعریف می‌کنیم $T(f) = pf$ ، یعنی مساوی حاصل‌ضرب p و f . به‌ازای این T ، معادلهٔ (۳۰۵) برای هر f و g در $C(a, b)$ برقرار است ، چونکه انتگرالدهٔ آن صفر است . لذا ، ضرب در یک تابع ثابت یک عملگر متقارن می‌باشد .

مثال ۳ . عملگر مشتقگیری . در فضای $C(a, b)$ مثال ۱ ، فرض کنیم V زیرفضای مرکب از تمام توابعی چون f باشد که در بازهٔ باز (a, b) مشتق پیوسته دارند و در **شرط کرانه‌ای** $f(a) = f(b)$ نیز صدق می‌کنند . همچنین ، $D: V \to C(a, b)$ عملگر مشتقگیری باشد که با $D(f) = f'$ داده می‌شود . به‌آسانی ثابت می‌شود که D متقارن اریب است . در این حالت ، انتگرالده در (۴۰۵) مشتق حاصل ضرب fg است ؛ در نتیجه ، انتگرال مساوی

$$\int_a^b (fg)'(t)\, dt = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

می‌باشد . چون هردوی f و g در شرط کرانه‌ای صدق می‌کنند ، داریم $f(b)g(b) - f(a)g(a) = 0$. لذا ، شرط کرانه‌ای تقارن اریب D را ایجاب خواهد کرد . تنها توابع ویژه‌درزیر فضای V توابع ثابت هستند . اینها به مقدار ویژهٔ 0 تعلق‌دارند .

مثال ۴ . عملگرهای اشتروم[1] ــ لیوویل[2] . این مثال در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی اهمیت دارد . فضای $C(a, b)$ مثال ۱ را دیگر بار به کار برده ، فرض می‌کنیم V زیر فضای تمام f هایی باشد که در $[a, b]$ مشتق دوم پیوسته دارد و نیز در دو شرط کرانه‌ای

$$p(a)f(a) = 0, \qquad p(b)f(b) = 0 \qquad (۵۰۵)$$

صدق می‌کند ، که در آنها p یک تابع ثابت در $C(a, b)$ با مشتق پیوسته بر $[a, b]$ است . فرض کنیم q تابع ثابت دیگری در $C(a, b)$ بوده و $T: V \to C(a, b)$ عملگری باشد که‌با معادلهٔ

---

1. Sturm   2. Liouville

$$T(f) = (pf')' + qf$$

تعریف می‌شود . این عملگر را **عملگر اشتروم ــ لیوویل** می‌نامند . برای آزمودن تقارن آن ، ملاحظه می‌کنیم که $fT(g) - gT(f) = f(pg')' - g(pf')'$. با استفاده از این در (۳۰۵) و انتگرالگیری از $\int_a^b g\cdot(pf')'\,dt$ و $\int_a^b f\cdot(pg')'\,dt$ به طریقهٔ جزء به جزء ، درمی‌یابیم که

$$\int_a^b \{fT(g) - gT(f)\}\,dt = fpg'\Big|_a^b - \int_a^b pg'f'\,dt - gpf'\Big|_a^b + \int_a^b pf'g'\,dt = 0,$$

زیرا f و g هر دو در شرایط کرانه‌ای (۵۰۵) صدق می‌کنند . لذا ، T بر V متقارن می‌باشد . تابعهای ویژهٔ T ، f های ناصفری هستند که ، به‌ازای λ ای حقیقی ، در یک معادلهٔ دیفرانسیل به شکل

$$(pf')' + qf = \lambda f$$

بر $[a, b]$ ، و نیز در شرایط کرانه‌ای (۵۰۵) ، صدق می‌کنند .

۳۰۵ مقدارهای ویژه و بردارهای ویژهٔ عملگرهای هرمیتی و هرمیتی اریب

با توجه به مقادیر ویژه ، قضیهٔ زیر را داریم .

قضیهٔ ۲۰۵ . فرض‌کنیم T مقدار ویژهٔ λ را دارا باشد . در این صورت ، خواهیم‌داشت

(آ) هرگاه T هرمیتی باشد ، λ حقیقی است : $\lambda = \bar{\lambda}$ ؛

(ب) هرگاه T هرمیتی اریب باشد ، λ موهومی محض می‌باشد : $\lambda = -\bar{\lambda}$.

برهان . فرض کنیم x یک بردار ویژهٔ نظیر به λ باشد . در این صورت ، داریم

$$\lambda = \frac{(T(x), x)}{(x, x)} \qquad \text{و} \qquad \bar{\lambda} = \frac{(x, T(x))}{(x, x)} \ .$$

هرگاه T هرمیتی باشد ، داریم $(T(x), x) = (x, T(x))$ ؛ درنتیجه ، $\lambda = \bar{\lambda}$. هرگاه T هرمیتی اریب باشد ، خواهیم داشت $(T(x), x) = -(x, T(x))$ ؛ در نتیجه ، $\lambda = -\bar{\lambda}$.

تذکر . اگر T **متقارن** باشد ، قضیهٔ ۲۰۵ چیز نوی در باب مقادیر ویژهٔ T نمی‌گوید ، چرا که اگر حاصل ضرب داخلی حقیقی باشد ، تمام مقدارهای ویژه باید حقیقی باشند . اگر T **متقارن اریب** باشد ، مقدارهای ویژهٔ T باید هم حقیقی و هم موهومی محض باشند .

بنابراین، تمام مقادیر ویژهٔ یک عملگر متقارن اریب (در صورت وجود) باید صفرباشند.

۴۰۵ تعامد بردارهای ویژهٔ نظیر به مقدارهای ویژهٔ متمایز

مقادیر ویژهٔ متمایز هر تبدیل خطی (طبق قضیهٔ ۲۰۴) نظیرند به بردارهای ویژهٔ مستقل. در مورد تبدیلات هرمیتی و هرمیتی اریب سخن بیشتر است:

قضیهٔ ۳۰۵ . فرض کنیم T یک تبدیل هرمیتی یا هرمیتی اریب بوده، و λ و μ مقدارهای ویژهٔ متمایز T با بردارهای ویژهٔ نظیر x و y باشند. دراین صورت، x و y متعامد می‌باشند؛ یعنی، $(x, y) = 0$.

برهان. می‌نویسیم $T(x) = \lambda x$ ، $T(y) = \mu y$ ، و دو حاصل ضرب داخلی $(T(x), y)$ و $(x, T(y))$ را با هم مقایسه می‌کنیم. داریم $(T(x), y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ و $(x, T(y)) = (x, \mu y) = \bar{\mu}(x, y)$. این، در صورتی که T هرمیتی باشد، نتیجه می‌دهد که $\lambda(x, y) = \bar{\mu}(x, y) = \mu(x, y)$ ، زیرا $\mu = \bar{\mu}$. بنابراین، $(x, y) = 0$ ، زیرا $\lambda \neq \mu$. اگر T هرمیتی اریب باشد، خواهیم داشت $\lambda(x, y) = -\bar{\mu}(x, y) = \mu(x, y)$ ، که باز ایجاب می‌کند که $(x, y) = 0$.

مثال. قضیهٔ ۳۰۵ را در مورد توابع ناصفری که در یک معادلهٔ دیفرانسیل به شکل

$$(pf')' + qf = \lambda f \tag{۶۰۵}$$

بر بازه‌ای چون $[a, b]$ صادق بوده و در شرایط کرانه‌ای $p(a)f(a) = p(b)f(b) = 0$ نیز صدق می‌کنند به‌کار می‌بریم. نتیجه می‌شود که هر دو جواب f و g نظیر به مقادیر متمایز از λ متعامدند. مثلاً، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت توافقی ساده را درنظر می‌گیریم:

$$f'' + k^2 f = 0$$

بر بازهٔ $[0, \pi]$ ، که در آن $k \neq 0$. این معادله به شکل (۶۰۵) است با فرض $p = 1$ ، $q = 0$ ، و $\lambda = -k^2$. همهٔ جوابها از $f(t) = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$ به‌دست می‌آیند. شرط کرانه‌ای $f(0) = 0$ ایجاب می‌کند که $c_1 = 0$. شرط کرانه‌ای دوم، یعنی $f(\pi) = 0$ ، ایجاب می‌کند که $c_2 \sin k\pi = 0$. چون در یک جواب ناصفر $c_2 \neq 0$ ، باید داشته‌باشیم $\sin k\pi = 0$ ، به‌این معنی که k یک عدد صحیح می‌باشد. به عبارت دیگر، جوابهای

ناصفر صادق در شرایط کرانه‌ای وجود دارند اگر و فقط اگر k یک عدد صحیح باشد. این جوابها عبارتند از $f(t) = \sin nt,\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. حال شرط تعامد ناشی از قضیهٔ ۳۰۵ به رابطهٔ آشنای

$$\int_0^\pi \sin nt \sin mt \, dt = 0,$$

در صورتی که m^2 و n^2 اعداد صحیح متمایزی باشند، تبدیل می‌شود.

۵۰۸ تمرین

۱ . فرض کنید E یک فضای اقلیدسی، V یک زیر فضا، و $T: V \to E$ یک تبدیل خطی معلوم باشد. همچنین، λ یک اسکالر و x عنصر ناصفری از V باشد. ثابت کنید λ یک مقدار ویژهٔ T با x به عنوان یک بردار ویژه است اگر و فقط اگر به‌ازای هر y در E ، $(T(x), y) = \lambda(x, y)$.

۲ . فرض کنید به‌ازای هر x در فضای خطی V ، $T(x) = cx$ ، که در آن c یک اسکالر ثابت است. ثابت کنید T در صورتی متقارن است که V یک فضای اقلیدسی حقیقی باشد.

۳ . فرض‌کنید $T: V \to V$ یک تبدیل هرمیتی باشد.

(آ) ثابت کنید T^n به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n هرمیتی است، و T^{-1} در صورتی که T معکوسپذیر باشد هرمینی می‌باشد.

(ب) اگر T هرمیتی اریب باشد، در باب T^n و T^{-1} چه نتایجی می‌توان گرفت؟

۴ . فرض کنید $T_1: V \to E$ و $T_2: V \to E$ دو تبدیل هرمیتی باشند.

(آ) ثابت کنید $aT_1 + bT_2$ به‌ازای هر دو اسکالر حقیقی a و b هرمیتی است.

(ب) ثابت‌کنید حاصلضرب (ترکیب) T_1T_2 در صورتی که T_1 و T_2 تعویض شوند هرمیتی است؛ یعنی، هرگاه

$$T_1T_2 = T_2T_1 .$$

۵ . فرض کنید $V = V_3(\mathbf{R})$ با ضرب نقطه‌ای معمولی به عنوان ضرب داخلی باشد. همچنین، T انعکاس نسبت به صفحهٔ xy باشد؛ یعنی، $T(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i}$ ، $T(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j}$ ، و $T(\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{k}$. ثابت کنید T متقارن است.

۶ . فرض کنید $C(0, 1)$ فضای‌خطی‌حقیقی‌تمام توابع پیوستهٔ‌حقیقی‌بر $[0, 1]$ باضرب داخلی

$(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ باشد. همچنین، V زیرفضای تمام f هایی باشدکه $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$. فرض کنید $T: V \to C(0, 1)$ عملگر انتگرالگیری باشد که با $Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ تعریف می‌شود. ثابت کنید T متقارن اریب می‌باشد.

۷ . فرض کنید V فضای اقلیدسی حقیقی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی با ضرب داخلی $(f,g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt$ باشد. معین کنید از تبدیلات $T: V \to V$ زیر کدامها متقارن کدامها متقارن اریب‌اند:

(آ) $Tf(x) = f(-x)$؛ (ب) $Tf(x) = f(x)f(-x)$؛ (پ) $Tf(x) = f(x) + f(-x)$؛

(ت) $Tf(x) = f(x) - f(-x)$ ؟

۸ . به مثال ۴ در بخش ۲۰۵ بازگشته، ضرب داخلی را به‌صورت

$$(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)w(t)\,dt$$

تغییر دهید، که در آن w یک تابع ثابت مثبت در $C(a, b)$ است، و عملگر اشتروم ــ لیوویل T را به‌صورت

$$T(f) = \frac{(pf')' + qf}{w}$$

تعریف کنید. ثابت کنید که عملگر تغییر یافته بر زیر فضای V متقارن است.

۹ . فرض کنید V یک زیرفضای فضای اقلیدسی مختلط E باشد. همچنین، $T: V \to E$ یک تبدیل خطی بوده، و تابع اسکالر Q را بر V به صورت زیر تعریف کنید:

به‌ازای هر x در V ، $Q(x) = (T(x), x)$.

(آ) ثابت کنیدکه‌اگر T بر V هرمیتی باشد، $Q(x)$ به‌ازای‌هر x حقیقی‌می‌باشد.

(ب) ثابت کنیدکه اگر T هرمیتی اریب باشد، $Q(x)$ به‌ازای هر x موهومی محض است.

(پ) ثابت کنید به‌ازای هر اسکالر t ، $Q(tx) = t\bar{t}Q(x)$.

(ت) ثابت کنید که $Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + (T(x), y) + (T(y), x)$ ، وفرمول نظیر را برای $Q(x + ty)$ پیدا نمایید.

(ث) ثابت کنید که اگر به‌ازای هر x ، $Q(x) = 0$ ، به‌ازای هر x ، $T(x) = O$.

(ج) ثابت کنید که اگر به‌ازای هر x ، $Q(x)$ حقیقی باشد، T هرمیتی می‌باشد.

[**راهنمایی .** از اینکه $Q(x + ty)$ به‌ازای‌هر‌اسکالر t مساوی‌مزدوجش‌است‌استفاده

نمایید .]

۱۰ . این تمرین نشان می‌دهد که چند جمله‌ایهای لژاندر (که در بخش ۱۴۰۱ معرفی شدند) تابعهای ویژهٔ یک عملگر اشتروم ــ لیوویل هستند . چند جمله‌ایهای لژاندر با معادلات زیر تعریف می‌شوند :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} f_n^{(n)}(t) \quad \text{،} \quad \text{که‌درآن } f_n(t) = (t^2 - 1)^n \ .$$

(آ) تحقیق کنید که $(t^2 - 1) f'_n(t) = 2nt f_n(t)$.

(ب) با مشتقگیری‌از معادلهٔ قسمت (آ) $n + 1$ بارو استفاده از فرمول لایب نیتز[1] (ر.ک. ص ۲۷۵ ، جلد یک) ، نتیجه بگیرید که

$$(t^2 - 1) f_n^{(n+2)}(t) + 2t(n + 1) f_n^{(n+1)}(t) + n(n + 1) f_n^{(n)}(t) =$$
$$2nt f_n^{(n+1)}(t) + 2n(n + 1) f_n^{(n)}(t) .$$

(پ) نشان دهید که معادلهٔ قسمت (ب) را می‌توان به شکل

$$[(t^2 - 1) P'_n(t)]' = n(n + 1) P_n(t)$$

نیز نوشت . این نشان می‌دهد که $P_n(t)$ یک تابع ویژهٔ عملگر اشتروم ــ لیوویل T است که بر بازهٔ $[-1 , 1]$ با رابطهٔ $T(f) = (pf')'$ ، که در آن $p(t) = t^2 - 1$ ، داده‌می‌شود . تابع ویژهٔ $P_n(t)$ متعلق به مقدار ویژهٔ $\lambda = n(n + 1)$ است . دراین مثال ، شرایط کرانه‌ای تقارن خودبخود برقرارند ، زیرا $p(1) = p(-1) = 0$.

۶۰۵ وجود یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژه برای عملگرهای هرمیتی وهرمیتی اریب که بر فضاهای با بعد متناهی عمل می‌کنند

هردوقضیهٔ ۲۰۵و۳۰۵ مبتنی‌براین‌فرض‌اندکه T مقدارویژه‌دارد . همانطورکه‌میدانیم ، مقادیر ویژه لزوماً وجودندارند . اما ، هرگاه T بریک‌فضای ***مختلط*** با بعد***متناهی*** عمل‌کند ، مقدارهای ویژه‌همیشه‌وجوددارند ، زیراریشه‌های‌چندجمله‌ای‌مشخص‌می‌باشند . اگر T هرمیتی باشد ، همهٔ مقادیرویژه‌حقیقی‌اند واگر T هرمیتی‌اریب‌باشد ، همهٔ مقادیرویژه‌موهومی محض‌می‌باشند.

همچنین ، می‌دانیم که دو مقدار ویژهٔ متمایز در صورتی متعلق به بردارهای ویژهٔ متعامدند که T هرمیتی یا هرمیتی اریب باشد . با استفاده از این خاصیت می‌توان ثابت

---

1. Leibniz

کرد که T مجموعه‌ای متعامد یکه از بردارهای ویژه دارد که تمام فضا را می‌پیماید . (به‌یاد می‌آوریم که یک مجموعهٔ متعامد را متعامد یکه نامند در صورتی که نرم عنصرهایش ۱ باشد .)

قضیهٔ ۴۰۵ . فرض کنیم $\dim V = n$ و $T: V \to V$ هرمیتی یا هرمیتی اریب باشد . در این صورت ، n بردار ویژهٔ $u_1, \ldots, u_n$ از T هست که یک پایهٔ متعامد یکه برای V تشکیل می‌دهند . بنابراین ، ماتریس T نسبت به این پایه ماتریس قطری $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ است ، که در آن λ_k مقدار ویژهٔ متعلق به u_k می‌باشد .

برهان . از استقرا بر بعد n استفاده می‌کنیم . هرگاه $n = 1$ ، آنگاه T دقیقاً یک مقدار ویژه دارد . هر بردار ویژهٔ u_1 با نرم 1 یک پایهٔ متعامد یکه برای V می‌باشد .

حال فرض کنیم قضیه برای هر فضای اقلیدسی با بعد $n - 1$ درست باشد . برای اثبات اینکه برای V نیز درست است ، یک مقدار ویژه مانند λ_1 برای T و یک بردار ویژهٔ u_1 نظیر آن با نرم 1 را اختیار می‌کنیم . در این صورت ، $T(u_1) = \lambda_1 u_1$ و $\|u_1\| = 1$. فرض کنیم S زیرفضای پیموده شده به‌وسیلهٔ u_1 باشد . فرض استقرا را بر زیرفضای $S^\perp$ مرکب از تمام عناصری در V که متعامد به u_1 اند ، یعنی

$$S^\perp = \{x \mid x \in V, (x, u_1) = 0\},$$

اعمال می‌کنیم . برای این کار لازم است بدانیم که $\dim S^\perp = n - 1$ و T ، $S^\perp$ را بتوی خودش می‌نگارد .

از قضیهٔ ۷۰۱ (آ) می‌دانیم که u_1 جزئی از یک پایهٔ V ، مثلاً پایهٔ $(u_1, v_2, \ldots, v_n)$ ، است . می‌توان ، بی‌آنکه به کلیت خللی وارد شود ، فرض کرد این یک پایهٔ متعامد یکه است . (اگر نباشد ، با اعمال فرایند گرام ـ اشمیت و با ثابت گرفتن u_1 به عنوان عنصر اول پایه ، آن را به یک پایهٔ متعامد یکه تبدیل می‌کنیم .) حال x دلخواهی در $S^\perp$ اختیار کرده و می‌نویسیم

$$x = x_1 u_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n .$$

در این صورت ، $x_1 = (x, u_1) = 0$ ، زیرا پایه متعامد یکه است ؛ در نتیجه ، x در فضای پیموده شده به‌وسیلهٔ $v_2, \ldots, v_n$ می‌باشد . بنابراین ، $\dim S^\perp = n - 1$.

حال نشان می‌دهیم که T ، $S^\perp$ را بتوی خودش می‌نگارد . فرض کنیم T هرمیتی باشد . اگر $x \in S^\perp$ ، داریم

$$(T(x), u_1) = (x, T(u_1)) = (x, \lambda_1 u_1) = \lambda_1(x, u_1) = 0;$$

در نتیجه ، $T(x) \in S^{\perp}$. چون T بر $S^{\perp}$ هرمیتی است ، می‌توان با اعمال فرض استقرا دریافت که T دارای $n-1$ بردار ویژهٔ $u_2, \ldots, u_n$ است که یک پایهٔ متعامد یکه برای $S^{\perp}$ تشکیل می‌دهند . بنابراین ، مجموعهٔ متعامد $u_1, \ldots, u_n$ یک پایهٔ متعامد یکهٔ V است . این قضیه‌را درحالتی‌که T هرمیتی‌است ثابت می‌کند . حالتی که در آن T هرمیتی اریب است با استدلالی مشابه ثابت می‌شود .

۷.۵ نمایشهای ماتریسی برای عملگرهای هرمیتی و هرمیتی اریب

در این بخش‌فرض‌می‌کنیم V یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی باشد . یک تبدیل‌هرمیتی یا هرمیتی اریب را می‌توان برحسب عملش برعنصرهای یک پایه مشخص کرد .

قضیهٔ ۵.۵ . فرض کنیم $(e_1, \ldots, e_n)$ یک‌پایهٔ V بوده و $T: V \to V$ تبدیلی خطی باشد . دراین صورت ،

(آ) T هرمیتی است اگر و فقط اگر به‌ازای هر i و j ، $(T(e_j), e_i) = (e_j, T(e_i))$ ؛

(ب) T هرمیتی اریب است اگر و فقط اگر به‌ازای هر i و j ،

$$(T(e_j), e_i) = -(e_j, T(e_i)) \cdot$$

برهان . دو عنصر دلخواه x و y را در V اختیار و هریک را برحسب عناصر پایه ، مثلاً به صورت $x = \sum x_j e_j$ و $y = \sum y_i e_i$ ، بیان می‌کنیم . دراین صورت ، داریم

$$(T(x), y) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j T(e_j), y\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(T(e_j), \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_j \bar{y}_i (T(e_j), e_i).$$

بهمین نحو ، خواهیم داشت

$$(x, T(y)) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_j \bar{y}_i (e_j, T(e_i)).$$

حکمهای (آ) و (ب) فوراً از این معادلات نتیجه می‌شوند .

حال این مفهومها را برحسب یک نمایش ماتریسی T توصیف می‌کنیم .

قضیهٔ ۶.۵ . فرض کنیم $(e_1, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ متعامد یکهٔ V بوده ، و $A = (a_{ij})$

نمایش ماتریسی تبدیل خطی $T: V \to V$ نسبت به این پایه باشد. در این صورت،

(آ) T هرمیتی است اگر و فقط اگر به‌ازای هر i و j، $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$؛

(ب) T هرمیتی اریب است اگر و فقط اگر به‌ازای هر i و j، $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$.

برهان. چون A ماتریس T است، داریم $T(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$. باضرب‌داخلی $T(e_j)$ در e_i و استفاده از خاصیت خطی ضرب داخلی، خواهیم داشت

$$(T(e_j), e_i) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k , e_i\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(e_k , e_i).$$

اما $(e_k , e_i) = 0$ مگر اینکه $k = i$؛ در نتیجه، مجموع آخر به $a_{ij}(e_i , e_i) = a_{ij}$ ساده می‌شود، زیرا $(e_i , e_i) = 1$. لذا، چنین داریم:

به‌ازای هر i, j، $a_{ij} = (T(e_j), e_i)$.

با تعویض نقش i و j، مزدوج گرفتن و استفاده از تقارن هرمیتی ضرب داخلی، در می‌یابیم که

به‌ازای هر i, j، $\bar{a}_{ji} = (e_j , T(e_i))$.

حال با اعمال قضیهٔ ۵.۵ برهان تمام خواهد شد.

۸.۵ ماتریسهای هرمیتی و هرمیتی اریب. الحاقی یک ماتریس

تعریف زیر را قضیهٔ ۶.۵ القا می‌کند.

تعریف. ماتریس مربعی $A = (a_{ij})$ را **هرمیتی** نامند درصورتی که به‌ازای هر i و j، $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. ماتریس A را **هرمیتی اریب** می‌نامند در صورتی که به‌ازای هر i و j، $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$.

قضیهٔ ۶.۵ بیان می‌کند که تبدیل T بر فضای با بعد متناهی V، بسته به اینکه ماتریسش نسبت به یک پایهٔ متعامد یکه هرمیتی یا هرمیتی اریب باشد، هرمیتی یا هرمیتی اریب است.

این ماتریسها را می‌توان به طریق دیگر نیز وصف کرد. فرض کنیم $\bar{A}$ ماتریس حاصل از تعویض هر درایهٔ A با مزدوج مختلط خود باشد. ماتریس $\bar{A}$ **مزدوج** A نامیده می‌شود.

ماتریس A هرمیتی است اگر و فقط اگر مساوی ترانهادهٔ مزدوج خود باشد؛ یعنی، $A = \bar{A}^t$. هرمیتی اریب است اگر که $A = -\bar{A}^t$.

ترانهادهٔ مزدوج خود نامی خاص دارد:

تعریف الحاقی یک ماتریس. به‌ازای هر ماتریس A، ترانهادهٔ مزدوج آن، یعنی $\bar{A}^t$، ***الحاقی*** A نیز نامیده و با A^* نموده می‌شود.

بنابراین، ماتریس مربعی A هرمیتی‌است درصورتی که $A = A^*$، و هرمیتی‌اریب است درصورتی که $A = -A^*$. یک ماتریس هرمیتی **خود الحاقی** نیز نامیده می‌شود.

تذکر. در بسیاری‌از کتب قدیمی‌تر انگلیسی در باب ماتریسها، از اصطلاح *adjoint* (به معنی الحاقی) برای ترانهادهٔ ماتریس همسازه‌ای، که مفهوم کاملاً متفاوتی است، استفاده شده است. تعریف ما در اینجا همساز با فرهنگ جاری در نظریهٔ عملگرهای خطی است.

۹۰۵ قطری سازی یک ماتریس هرمیتی یا هرمیتی اریب

قضیهٔ ۷۰۵. ***هر ماتریس $n \times n$ هرمیتی یا هرمیتی اریب A با ماتریس قطری $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ از مقدارهای ویژهٔ آن متشابه است. بعلاوه، داریم***

$$\Lambda = C^{-1}AC,$$

که در آن C یک ماتریس نامنفرد است که معکوسش الحاقی آن می‌باشد، $C^{-1} = C^*$.

برهان. فرض کنیم V فضای n تاییها از اعداد مختلط باشد، و $(e_1, \dots, e_n)$ را پایهٔ متعامد یکه‌از بردارهای یکهٔ مختصات می‌گیریم. اگر $x = \sum x_i e_i$ و $y = \sum y_i e_i$، حاصل ضرب داخلی آنها را $(x, y) = \sum x_i \bar{y}_i$ فرض می‌کنیم. به‌ازای ماتریس معلوم A، فرض می‌کنیم T تبدیلی باشد که نسبت به پایهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژهٔ $(u_1, \dots, u_n)$ دارای نمایش ماتریسی قطری $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ است، که در آن λ_k مقدار ویژهٔ متعلق به u_k است. چون A و Λ هردو T را نمایش می‌دهند، پس‌متشابهند؛ در نتیجه، داریم $\Lambda = C^{-1}AC$، که در آن $C = (c_{ij})$ ماتریس نامنفردی‌است که دو پایه را بهم مربوط می‌کند:

$$[u_1, \ldots, u_n] = [e_1, \ldots, e_n]C.$$

این معادله نشان می‌دهد که ستون j ام C از مولفه‌های u_j نسبت به $(e_1, \ldots, e_n)$ تشکیل شده است. بنابراین، c_{ij} مولفهٔ i ام u_j است. حاصل ضرب داخلی u_j و u_i ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$(u_j, u_i) = \sum_{k=1}^{n} c_{kj}\bar{c}_{ki}.$$

چون $\{u_1, \ldots, u_n\}$ یک مجموعهٔ متعامد یکه است، این نشان می‌دهد که $CC^* = I$؛ در نتیجه، $C^{-1} = C^*$.

تذکر. برهان قضیهٔ ۷٫۵ طرز مشخص‌کردن ماتریس قطری ساز C را نیز بازگو می‌کند. یک‌مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژهٔ $u_1, \ldots, u_n$ را پیدا می‌کنیم و بعد ازمولفه‌های u_j (نسبت به پایهٔ بردارهای یکهٔ مختصات) به‌عنوان درایه‌های ستون j ام C استفاده می‌کنیم.

مثال ۱. ماتریس‌هرمیتی حقیقی $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ دارای‌مقدارهای‌ویژهٔ $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 6$ است. بردارهای‌ویژهٔ متعلق به 1 عبارتند از $t(2, -1)$، که $t \neq 0$. و بردارهای ویژهٔ متعلق به 6 عبارتند از $t(1, 2)$، که $t \neq 0$. دو بردار ویژهٔ $u_1 = t(2, -1)$ و $u_2 = t(1, 2)$ به‌ازای $t = 1/\sqrt{5}$ یک مجموعهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهند. بنابراین، ماتریس

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس قطری ساز برای A است. دراین حالت، $C^* = C^t$، زیرا C حقیقی‌است. به‌آسانی تحقیق می‌شود که $C^tAC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

مثال ۲. هرگاه A از قبل یک ماتریس قطری باشد، ماتریس قطری ساز C در قضیهٔ ۷٫۵ یا A را بی‌تغییر می‌گذارد و یا فقط درایه‌های قطری را تغییر آرایش می‌دهد.

۱۰۰۵ ماتریسهای یکه‌ای . ماتریسهای متعامد

تعریف . ماتریس مربعی A **یکه‌ای** نام دارد اگر که $AA^* = I$. و آن را **متعامد** خوانند اگر که $AA^t = I$.

تذکر . هر ماتریس یکه‌ای حقیقی متعامد است ، زیرا $A^* = A^t$.

قضیهٔ ۷۰۵ می‌گوید که یک ماتریس هرمیتی هرمیتی یا هرمیتی اریب را همیشه می‌توان به وسیلهٔ یک ماتریس قطری حقیقی قطری کرد . این امر برای ماتریسهای هرمیتی اریب حقیقی درست **نیست** . (ر.ک. تمرین ۱۱ در بخش ۰۱۱۰۵)

ما مفاهیم مربوطهٔ زیر را نیز داریم .

تعریف . ماتریس مربعی A با درایه‌های حقیقی یا مختلط **متقارن** نامیده می‌شود اگر که $A = A^t$ ؛ **متقارن اریب** است اگر که $A = -A^t$.

مثال ۰۳ هرگاه A حقیقی باشد ، الحاقی آن مساوی ترانهادهٔ آن است ، $A^* = A^t$. بنابراین ، هر ماتریس هرمیتی **حقیقی** متقارن است ، اما یک ماتریس متقارن لزوما "هرمیتی نیست .

مثال ۰۴ هرگاه $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 \\ 3-i & 4i \end{bmatrix}$ ، آنگاه $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ 3+i & -4i \end{bmatrix}$ ،

$A^t = \begin{bmatrix} 1+i & 3-i \\ 2 & 4i \end{bmatrix}$ ، و $A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 3+i \\ 2 & -4i \end{bmatrix}$.

مثال ۰۵ دو ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{bmatrix}$ هرمیتی‌اند . اولی متقارن است ، ولی دومی نیست .

مثال ۰۶ دو ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} i & -2 \\ 2 & 3i \end{bmatrix}$ هرمیتی اریب‌اند . اولی متقارن اریب است ،

ولی دومی نیست .

مثال ۷. همهٔ عناصر قطری یک ماتریس هرمیتی حقیقی‌اند ، همهٔ عناصر قطری یک ماتریس هرمیتی اریب موهومی محض‌اند ، و همهٔ عناصر قطری یک ماتریس متقارن اریب صفر می‌باشند .

مثال ۸. به‌ازای هر ماتریس مربعی و دلخواه A ، ماتریس $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ هرمیتی است ، و ماتریس $C = \frac{1}{2}(A - A^*)$ هرمیتی اریب می‌باشد . مجموع آنها A است . پس، هر ماتریس مربعی A را می‌توان به‌صورت مجموعی چون $A = B + C$ نوشت ، که در آن B هرمیتی و C هرمیتی اریب باشد . به‌آسانی تحقیق می‌شود که این تجزیه منحصر بفرد است . همچنین ، هر ماتریس مربعی A را می‌توان به‌طور منحصر بفرد به‌صورت مجموعی از یک ماتریس متقارن ، یعنی $\frac{1}{2}(A + A^t)$ ، و یک ماتریس متقارن اریب ، یعنی $\frac{1}{2}(A - A^t)$ ، بیان کرد .

مثال ۹. اگر A متعامد باشد ، داریم

$$1 = \det (AA^t) = (\det A)(\det A^t) = (\det A)^2 ;$$

در نتیجه، $\det A = \pm 1$.

۱۱.۵ تمرین

۱ . از ماتریسهای زیر کدامها متقارن ، کدامها متقارن اریب ، کدامها هرمیتی ، و کدامها هرمیتی اریب‌اند :

(آ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ؛ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & i & 2 \\ i & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 4i \end{bmatrix}$ ؛ (پ) $\begin{bmatrix} 0 & i & 2 \\ -i & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ ؛

(ت) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ ؟

۲ . (آ) تحقیق کنید که ماتریس 2×2 ، $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ یک ماتریس متعامد

است .

(ب) فرض کنید T تبدیل خطی با ماتریس A ی فوق نسبت به پایهٔ معمولی $\{i,j\}$ باشد . ثابت کنید T هر نقطه در صفحه با مختصات قطبی (r, α) را بروی نقطه با مختصات قطبی $(r, \alpha + \theta)$ می‌نگارد . لذا ، T یک دوران صفحه حول مبداء است ، θ زاویهٔ دوران می‌باشد .

۳ . فرض کنید V فضای 3 حقیقی با بردارهای پایهٔ معمولی i, j, k باشد . ثابت کنید هریک از ماتریسهای زیر متعامد است و تبدیل نموده شده را نمایش می‌دهد :

(آ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (انعکاس نسبت به صفحهٔ xy) ؛

(ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (انعکاس نسبت به محور x) ؛

(پ) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (انعکاس نسبت به مبداء) ؛

(ت) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (دوران حول محور x) ؛

(ث) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (دوران حول محور x و پس از آن انعکاس نسبت به صفحهٔ yz) .

۴ . ماتریس متعامد و حقیقی A را **سره** نامند اگر که $\det A = 1$ ، و **ناسره** خوانند اگر که $\det A = -1$.

(آ) ثابت کنید که اگر A یک ماتریس 2×2 سره باشد ، به ازای θ ای $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. این ماتریس یک دوران به اندازهٔ زاویهٔ θ را نمایش می‌دهد .

(ب) ثابت کنید که $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ماتریسهایی ناسره‌اند. ماتریس اول نمایشگر یک انعکاس صفحهٔ xy نسبت به محور x است؛ دومی نمایشگر یک انعکاس نسبت به محور y می‌باشد. جمیع ماتریسهای 2×2 ناسره را پیدا کنید.

در تمرینهای ۵ تا ۸، (آ) یک مجموعهٔ متعامد از بردارهای ویژه برای A بیابید، و (ب) ماتریس یکه‌ای C را طوری بیابید که $C^{-1}AC$ یک ماتریس قطری باشد.

۵. $A = \begin{bmatrix}9 & 12\\ 12 & 16\end{bmatrix}$.

۶. $A = \begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$.

۷. $A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

۸. $A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

۹. از ماتریسهای زیر کدامها یکه‌ای‌اند و کدامها متعامد (a, b, θ حقیقی‌اند):

(آ) $\begin{bmatrix}e^{ia} & 0\\ 0 & e^{ib}\end{bmatrix}$؛ (ب) $\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$؛ (پ) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{6}\\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{6}\\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6}\end{bmatrix}$؟

۱۰. در نظریهٔ نسبیت خاص از معادلات

$$x' = a(x - vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = a(t - vx/c^2)$$

استفاده می‌شود. در اینجا v سرعت جسم متحرک، c سرعت نور، و $a = c/\sqrt{c^2 - v^2}$ است. تبدیل خطیی که (x, y, z, t) را بروی (x', y', z', t') می‌نگارد **تبدیل لورنتس** نام دارد.

(آ) فرض‌کنید $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict)$ و $(x_1', x_2', x_3', x_4') = (x', y', z', ict')$. نشان دهید که چهار معادله را می‌توان به صورت یک معادلهٔ ماتریسی نوشت:

$$[x_1', x_2', x_3', x_4'] = [x_1, x_2, x_3, x_4]\begin{bmatrix}a & 0 & 0 & -iav/c\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ iav/c & 0 & 0 & a\end{bmatrix}.$$

(ب) ثابت کنید که ماتریس 4×4 قسمت (آ) متعامد است ولی یکه‌ای نیست.

۱۱ . فرض کنید a یک عدد حقیقی ناصفر و A ماتریس متقارن اریب $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$
باشد .
(آ) برای A یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژه بیابید .
(ب) ماتریس یکه‌ای C را طوری بیابید که $C^{-1}AC$ یک ماتریس قطری باشد .
(پ) ثابت کنید ماتریس متعامد حقیقی مانند C نیست که $C^{-1}AC$ یک ماتریس قطری باشد .

۱۲ . ثابت کنید که اگر مقدارهای ویژهٔ ماتریس هرمیتی یا هرمیتی اریب A همه مساوی c باشند ، $A = cI$.

۱۳ . ثابت کنید که اگر A یک ماتریس متقارن اریب حقیقی باشد ، هر دوی $I - A$ و $I + A$ نامنفردند و $(I - A)(I + A)^{-1}$ متعامد می‌باشد .

۱۴ . برای هریک از احکام زیر درباب ماتریسهای $n \times n$ برهان بیاورید یا مثال نقض:
(آ) هرگاه A و B یکه‌ای باشند ، $A + B$ نیز یکه‌ای است ؛
(ب) هرگاه A و B یکه‌ای باشند ، AB نیز یکه‌ای است .
(پ) هرگاه A و AB یکه‌ای‌باشند ، B نیز یکه است ؛
(ت) هرگاه A و B یکه‌ای باشند ، $A + B$ یکه‌ای نیست .

۱۲.۵ فرمهای درجهٔ دوم

فرض کنیم V یک‌فضای اقلیدسی **حقیقی** بوده و $T: V \to V$ یک عملگر متقارن باشد . این یعنی T را می‌توان از یک سازهٔ یک حاصل ضرب داخلی به سازهٔ دیگر انتقال داد :

به‌ازای هر x و y در V ، $(T(x), y) = (x, T(y))$.

با معلوم بودن T ، تابع حقیقی Q را بر V با معادلهٔ

$$Q(x) = (T(x), x)$$

تعریف می‌کنیم . تابع Q **فرم درجهٔ دوم** مربوط به T نامیده می‌شود . اصطلاح "درجهٔ دوم" را قضیهٔ زیر القا می‌کند ، که نشان می‌دهد که ، در حالت ابعاد متناهی ، $Q(x)$ یک چند جمله‌ای درجهٔ دوم از مولفه‌های x است .

قضیهٔ ۸.۵ . فرض کنیم $(e_1, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ متعامد یکه برای فضای اقلیدسی

حقیقی V باشد . همچنین ، $T: V \to V$ یک‌تبدیل‌متقارن بوده ، و $A = (a_{ij})$ ماتــریــس T نسبت به این پایه باشد . در این صورت ، فــرم درجهٔ دوم $Q(x) = (T(x), x)$ با A به صورت زیر مربوط می‌شود :

$$\text{اگر } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ ، } Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \text{ .} \qquad (۷\cdot۵)$$

برهان. بنابر خاصیت خطی داریم $T(x) = \sum x_i T(e_i)$. بنابر این ،

$$Q(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i), \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j (T(e_i), e_j).$$

این (۷٫۵) را ثابت می‌کند ، زیرا $a_{ij} = a_{ji} = (T(e_i), e_j)$.

مجموع مذکور در (۷٫۵) ، حتی اگر A متقارن هم نباشد ، با معنی است .

تعریف. فرض کنیــم V یک فضای اقلیدسی حقیقی با پایهٔ متعامدیکهٔ $(e_1, \ldots, e_n)$ بوده ، و $A = (a_{ij})$ یک‌ماتریس $n \times n$ ازاسکالرها باشد . تابع اسکالر Q که در هرعنصر $x = \sum x_i e_i$ از V با مجموع مضاعف

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad (۸\cdot۵)$$

تعریف می‌شود ، **فرم درجهٔ دوم مربوط به A** نامیده می‌شود .

هرگاه A یک ماتــریس قطری باشد ، آنگاه به‌ازای $j \neq i$ ، $a_{ij} = 0$ ؛ در نتیجه ، مجموع (۸٫۵) فقط شامل جملات مربع است و می‌توان آن را ساده‌تر و به صورت

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$$

نوشت . در این حالت ، فرم درجهٔ دوم یک **فرم قطری** نام دارد .

مجموع مضاعف (۸٫۵) را می‌توان به صورت حاصل ضرب سه ماتریس نیز بیان کرد .

قضیهٔ ۹٫۵ . فرض کنیــم $X = [x_1, \ldots, x_n]$ یک ماتــریس سطــری $1 \times n$ بوده ، و

$A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. در این صورت، XAX^t یک ماتریس 1×1 با درایهٔ

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \qquad (۹\cdot۵)$$

می‌باشد.

برهان. حاصل‌ضرب XA یک ماتریس $1 \times n$ است: $XA = [y_1, \ldots, y_n]$، که در آن درایهٔ y_j حاصل ضرب نقطه‌ای X با ستون j م A است:

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}.$$

بنابراین، حاصل ضرب XAX^t یک‌ماتریس 1×1 است که تنها درایه‌اش حاصل ضرب نقطه‌ای

$$\sum_{j=1}^{n} y_j x_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}\right) x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

می‌باشد.

تذکر. رسم است که ماتریس 1×1، XAX^t را با مجموع (۹۰۵) یکی می‌گیرند و حاصل ضرب XAX^t را یک فرم درجهٔ دوم می‌نامند. معادلهٔ (۸۰۵) به‌صورت ساده‌تر زیر نوشته می‌شود:

$$Q(x) = XAX^t.$$

مثال ۱. فرض کنیم $X = [x_1, x_2]$، $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. در این صورت، داریم

$$XA = [x_1, x_2]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = [x_1 - 3x_2, -x_1 + 5x_2];$$

و در نتیجه،

$$XAX^t = [x_1 - 3x_2, -x_1 + 5x_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - 3x_2x_1 - x_1x_2 + 5x_2^2.$$

مثال ۲. فرض کنیم $X = [x_1, x_2]$، $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$. دراین صورت، داریم

$$XBX^t = [x_1, x_2]\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_1x_2 + 5x_2^2.$$

در دو مثال ۱ و ۲، مجموع دو جملهٔ حاصل ضرب مخلوط می‌شود $-4x_1x_2$ ؛ در نتیجه، $XAX^t = XBX^t$. این مثالها نشان می‌دهند که ماتریسهای مختلف می‌توانند به یک فرم درجهٔ دوم ختم شوند. توجه کنید که یکی از این ماتریسها متقارن است. این امر در قضیهٔ بعدی توضیح شده است.

قضیهٔ ۱۰۰۵ . به‌ازای‌هر ماتریس $n \times n$ ، A و هر ماتریس سطری $1 \times n$ ، X داریم $XAX^t = XBX^t$ ، که در آن B ماتریس متقارن $B = \frac{1}{2}(A + A^t)$ است.

برهان. چون XAX^t یک ماتریس 1×1 است، پس مساوی ترانهادهٔ خودش است، $XAX^t = (XAX^t)^t$. اما ترانهادهٔ یک حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب ترانهاده‌ها به ترتیب عکس است؛ درنتیجه، داریم $(XAX^t)^t = XA^tX^t$. بنابراین،

$$XAX^t = \tfrac{1}{2}XAX^t + \tfrac{1}{2}XA^tX^t = XBX^t \cdot$$

۱۳۰۵ تحویل یک فرم درجهٔ دوم حقیقی به شکل قطری

هر ماتریس متقارن و حقیقی A هرمیتی است. بنابر این، طبق قضیهٔ ۷۰۵، با ماتریس قطری $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ازمقدارهای‌ویژه‌اش‌متشابه‌است. بعلاوه، داریم $\Lambda = C^tAC$ ، که در آن C یک ماتریس متعامد می‌باشد. حال نشان می‌دهیم که می‌توان، با استفاده از C ، فرم درجهٔ دوم XAX^t را به یک فرم قطری بدل کرد.

قضیهٔ ۱۱۰۵ . فرض کنیم XAX^t فرم درجهٔ دوم مربوط به ماتریس متقارن و حقیقی A بوده، و C یک ماتریس متعامد باشد که A را به ماتریس قطری $\Lambda = C^tAC$ تبدیل می‌کند. در این صورت، داریم

$$XAX^t = Y\Lambda Y^t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$

که در آن $Y = [y_1, \ldots, y_n]$ ماتریس سطری $Y = XC$ است، و $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقدارهای

ویژهٔ A می‌باشند .

برهان . چون C متعامد است ، داریم $C^{-1} = C^t$. بنابراین ، معادلهٔ $Y = XC$ ایجاب می‌کند که $X = YC^t$ ، و خواهیم داشت

$$XAX^t = (YC^t)A(YC^t)^t = Y(C^tAC)Y^t = Y\Lambda Y^t.$$

تذکر . قضیهٔ ۱۱۰۵ ایـن‌طور تـوصیف می‌شود که می‌گویند تبدیل خطی $Y = XC$ فرم درجهٔ دوم XAX^t را به فرم قطری $Y\Lambda Y^t$ تحویل می‌کند .

مثال ۱ . فرم درجهٔ دوم متعلق به ماتریس همانی مساوی است با

$$XIX^t = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|X\|^2;$$

یعنی ، مساوی مربع طول بردار $X = (x_1, \ldots, x_n)$. تبدیل خطی $Y = XC$ ، که در آن C یک ماتـریس متعـامد است ،فرم درجـهٔ دوم جـدید $Y\Lambda Y^t$ را به‌دست می‌دهد که $\Lambda = CIC^t = CC^t = I$. چـون $XIX^t = YIY^t$ ، داریم $\|X\|^2 = \|Y\|^2$ ؛ درنتیجه ، Y همان طـول X را دارد . یک تبـدیل‌خطی که طول هر بردار را حفظ کند یک **یکمتری** نامیده می‌شود . این تبدیلات با تفصیل بیشتر در بخش ۱۹۰۵ مطرح می‌شوند .

مثال ۲ . ماتریس متعامد C را طوری تعیین کنید که فرم درجهٔ دوم

$$Q(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

را به یک فرم قطری تحویل کند .

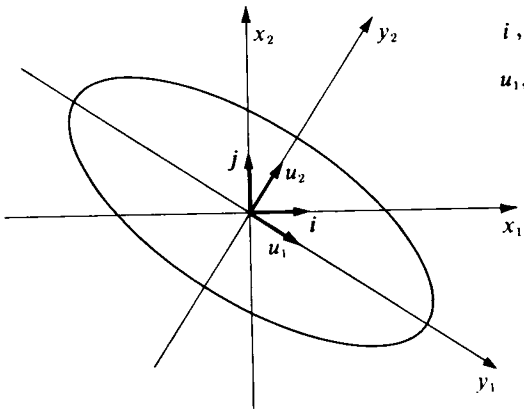
حل . می‌نویسیم $Q(x) = XAX^t$ ، که در آن $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. این ماتریس متقارن در مثال ۱ بعد از قضیهٔ ۷۰۵ قطری شده بود . مقدارهای ویژه‌اش $\lambda_1 = 1 , \lambda_2 = 6$ هستند ، و یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژه عبارت است از u_1 , u_2 ، که

$$u_1 = t(2, -1),\ u_2 = t(1, 2),\ t = 1/\sqrt{5}\ .$$

یک ماتریس قطری ساز متعامد $C = t\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ است . فرم قطری نظیر خواهد بود

$$Y\Lambda Y^t = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = y_1^2 + 6y_2^2.$$

نتیجهٔ مثال ۲ تعبیر هندسی ساده‌ای دارد که در شکل ۱۰۵ مجسم شده است. تبدیل خطی $Y = XC$ را می‌توان یک دوران دانست که پایهٔ i, j را بروی پایهٔ جدید u_1, u_2 می‌نگارد. یک نقطه به مختصات (x_1, x_2) نسبت به پایهٔ اول دارای مختصات جدید (y_1, y_2) نسبت به پایهٔ دوم است. چون $XAX^t = Y\Lambda Y^t$ ، مجموعه نقاط (x_1, x_2) صادق در معادلهٔ $XAX^t = c$ به ازای c ای، با مجموعه نقاط (y_1, y_2) صادق در $Y\Lambda Y^t = c$ یکی است. معادلهٔ دوم، نوشته شده به صورت $y_1^2 + 6y_2^2 = c$ ، معادلهٔ دکارتی یک بیضی است اگر $c > 0$.



شکل ۱۰۵ دوران محورها به وسیلهٔ یک ماتریس متعامد. بیضی در دستگاه x_1x_2 دارای معادلهٔ دکارتی $XAX^t = 9$ ، و در دستگاه y_1y_2 دارای معادلهٔ $Y\Lambda Y^t = 9$ است.

بنابراین، معادلهٔ $XAX^t = c$ ، نوشته شده به صورت $2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = c$ ، همان بیضی در دستگاه مختصات اصلی را نمایش می‌دهد. شکل ۱۰۵ نشان می‌دهد که بیضی نظیر است به $c = 9$.

۱۴۰۵ چند کاربرد در هندسهٔ تحلیلی

با استفاده از تحویل یک فرم درجهٔ دوم به یک فرم قطری می‌توان مجموعهٔ تمام نقاط

(x, y) در صفحه که در یک معادلهٔ دکارتی به شکل

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (۱۰.۵)$$

صدق می‌کنند را شناسایی کرد. درخواهیم یافت که این مجموعه همیشه یک مقطع مخروطی است؛ یعنی، یک بیضی، هذلولی، سهمی، یا یکی از حالات تباه شدهٔ آنها (مجموعهٔ تهی، یک نقطهٔ تنها، یا یک یا دو خط مستقیم) است. نوع مخروطی را جملات درجهٔ دوم تعیین می‌کنند؛ یعنی، به وسیلهٔ فرم درجهٔ دوم $ax^2 + bxy + cy^2$ معین می‌شود. برای همسازی با نمادگذاری قبلی، به‌جای x می‌نویسیم x_1، به‌جای y می‌نویسیم x_2، و این فرم درجهٔ دوم را به‌صورت یک حاصل ضرب ماتریسی بیان می‌کنیم:

$$XAX^t = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2,$$

که در آن $X = [x_1, x_2]$ و $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$. این فرم را با دوران $Y = XC$ به یک فرم قطری $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ تحویل می‌کنیم، که در آن λ_1, λ_2 مقدارهای ویژهٔ A هستند. یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژهٔ u_1, u_2 محورهای مختصات جدیدی را مشخص می‌کند، که معادلهٔ دکارتی (۱۰.۵) نسبت به آنها خواهد شد

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d'y_1 + e'y_2 + f = 0, \quad (۱۱.۵)$$

با ضرایب جدید d' و e' در جملات خطی. در این معادله جملهٔ حاصل ضرب مخلوط y_1y_2 وجود ندارد؛ در نتیجه، نوع مخروطی را می‌توان به‌آسانی با بررسی مقدارهای ویژهٔ λ_1 و λ_2 مشخص کرد. هرگاه مخروطی تباه شده نباشد، معادلهٔ (۱۱.۵) نمایشگر یک **بیضی** است اگر λ_1, λ_2 یک علامت داشته باشند، یک **هذلولی** است اگر λ_1, λ_2 مختلف العلامه باشند، و یک **سهمی** است اگر λ_1 یا λ_2 صفر باشد. سه حالت نظیر به $\lambda_1\lambda_2 > 0$، $\lambda_1\lambda_2 < 0$، و $\lambda_1\lambda_2 = 0$ می‌باشند. این امر را با چند مثال خاص توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 13y - \frac{1}{4} = 0$. این معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 4x_1 + 13x_2 - \tfrac{1}{4} = 0. \quad (۱۲.۵)$$

فرم درجهٔ دوم $2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ همانی است که در مثال ۲ بخش پیش از آن بحث شد. ماتریس آن دارای مقدارهای ویژهٔ $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$ است، و یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژه $u_1 = t(2, -1),\ u_2 = t(1, 2)$ می‌باشد، که $t = 1/\sqrt{5}$. یک ماتریس

قطری ساز متعامد $C = t\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ است . این ماتریس قسمت درجهٔ دوم (۱۲۰۵) را به شکل $y_1^2 + 6y_2^2$ تحویل می‌کند . برای تعیین اثر آن بر قسمت حقیقی ، معادلهٔ دوران $Y = XC$ را به‌شکل $X = YC^t$ می‌نویسیم و به‌دست می‌آوریم که

$$[x_1, x_2] = \frac{1}{\sqrt{5}}[y_1, y_2]\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-y_1 + 2y_2).$$

بنابراین ، قسمت حقیقی $4x_1 + 13x_2$ به

$$\frac{4}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2) + \frac{13}{\sqrt{5}}(-y_1 + 2y_2) = -\sqrt{5}\, y_1 + 6\sqrt{5}\, y_2$$

تبدیل می‌شود . معادلهٔ دکارتی تبدیل شده خواهد شد

$$y_1^2 + 6y_2^2 - \sqrt{5}\, y_1 + 6\sqrt{5}\, y_2 - \tfrac{1}{4} = 0.$$

با کامل کردن مربعها نسبت به y_1 و y_2 ، این رابطه را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$(y_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{5})^2 + 6(y_2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{5})^2 = 9.$$

این معادلهٔ یک بیضی است به مرکز $(\frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{1}{2}\sqrt{5})$ در دستگاه y_1y_2 . همانطور که شکل ۲۰۵ نشان داده، جهتهای مثبت محورهای y_1 و y_2 به وسیلهٔ بردارهای ویژهٔ u_1 و u_2 معین می‌شوند .

این معادله را می‌توان با نوشتن

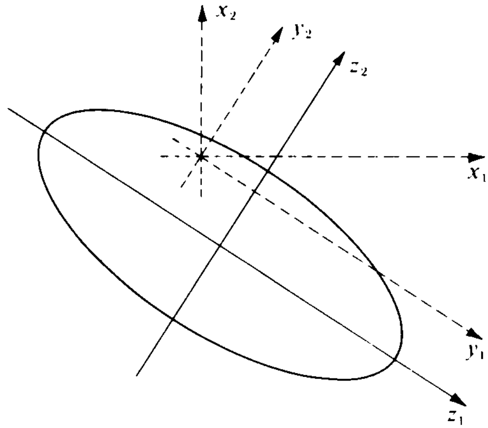
$$z_1 = y_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}, \qquad z_2 = y_2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

ساده‌ترکرد . از نظر هندسی ، این یعنی محورهای مختصات جدیدی انتخاب کنیم موازی محورهای y_1y_2 ولی مبداء جدید در مرکز بیضی باشد . در دستگاه z_1z_2 ، معادلهٔ بیضی فقط خواهد بود

$$z_1^2 + 6z_2^2 = 9 \quad \text{یا} \quad \frac{z_1^2}{9} + \frac{z_2^2}{3/2} = 1 .$$

این بیضی و هرسه دستگاه مختصات در شکل ۲۰۵ نموده شده است.

مثال ۲. $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 10y - 13 = 0$. این معادله را به صورت زیر



شکل ۲۰۵ دوران و انتقال محورهای مختصات .

پس از دوران $Y = XC$ انتقال $z_1 = y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{5},\ z_2 = y_2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ آمده است .

می‌نویسیم :

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 - 4x_1 + 10x_2 - 13 = 0 .$$

قسمت درجهٔ دوم XAX^t است ، که در آن $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. این ماتریس مقدارهای ویژهٔ $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2$ را دارد . یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژه عبارت است از $u_1 = t(2, -1),\ u_2 = t(1, 2)$ ، که $t = 1/\sqrt{5}$. یک ماتریس قطری ساز متعامد $C = t\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ می‌باشد . معادلهٔ دوران $X = YC^t$ نتیجه می‌دهد که

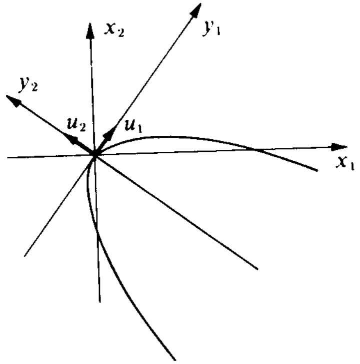
$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2), \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-y_1 + 2y_2).$$

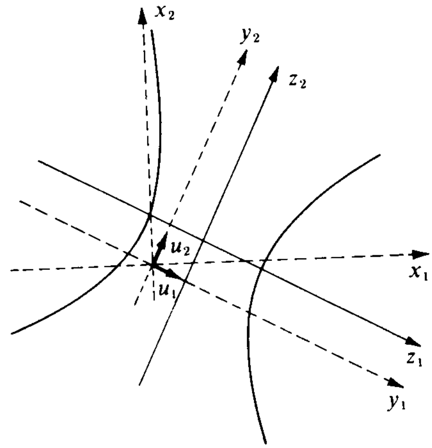
بنابراین ، معادلهٔ تبدیل شده خواهد شد

$$3y_1^2 - 2y_2^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2) + \frac{10}{\sqrt{5}}(-y_1 + 2y_2) - 13 = 0$$

یا

$$3y_1^2 - 2y_2^2 - \frac{18}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{16}{\sqrt{5}}y_2 - 13 = 0 .$$





(آ) هذلولی : $3z_1^2 - 2z_2^2 = 12$ (ب) سهمی : $y_1^2 + y_2 = 0$

شکل ۳۰۵ منحنیها در مثالهای ۲ و ۳

با کامل کردن مربعها نسبت به y_1 و y_2 ، معادلهٔ

$$3(y_1 - \tfrac{3}{5}\sqrt{5})^2 - 2(y_2 - \tfrac{4}{5}\sqrt{5})^2 = 12$$

به‌دست می‌آید ، که‌نمایش‌یک هذلولی به مرکز $(\frac{3}{5}\sqrt{5}, \frac{4}{5}\sqrt{5})$ در دستگاه y_1y_2 است . انتقال $z_1 = y_1 - \frac{3}{5}\sqrt{5}, z_2 = y_2 - \frac{4}{5}\sqrt{5}$ این معادله را ساده‌تر خواهد کرد :

$$3z_1^2 - 2z_2^2 = 12 \quad \text{یا} \quad \frac{z_1^2}{4} - \frac{z_2^2}{6} = 1 \; .$$

هذلولی در شکل ۳۰۵ (آ) نشان داده شده است . بردارهای ویژهٔ u_1 و u_2 جهتهای محورهای مثبت y_1 و y_2 را معین خواهند کرد .

مثال ۳. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0$. این معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 20x_1 + 15x_2 = 0 .$$

ماتریس متقارن برای قسمت درجهٔ دوم مساوی است با $A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$. مقدارهای ویژهٔ آن عبارتند از $\lambda_1 = 25 , \lambda_2 = 0$. یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژه

$u_1 = \frac{1}{5}(3, 4)$, $u_2 = \frac{1}{5}(-4, 3)$ است . یک ماتریس قطری ساز متعامد $C = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ می‌باشد . معادلهٔ دوران $X = YC^t$ نتیجه می‌دهد که

$$x_1 = \tfrac{1}{5}(3y_1 - 4y_2), \qquad x_2 = \tfrac{1}{5}(4y_1 + 3y_2).$$

بنابر این ، معادلهٔ دکارتی تبدیل شده خواهد شد

$$25y_1^2 - \tfrac{20}{5}(3y_1 - 4y_2) + \tfrac{15}{5}(4y_1 + 3y_2) = 0.$$

این معادله به $y_1^2 + y_2 = 0$ ساده می‌شود ، معادلهٔ یک سهمی که راسش در مبداء است . این سهمی در شکل ۳۰۵ (ب) نموده شده است .

مثال ۴ . حالات تباه شده. اطلاعاتی فقط از مقدارهای ویژه ، این امر را که معادلهٔ دکارتی یک مقطع مخروطی تباه شده را نمایش می‌دهد یا نه مشخص نمی‌کند . مثلا" ، سه معادلهٔ $x^2 + 2y^2 = 1$ ، $x^2 + 2y^2 = 0$ ، و $x^2 + 2y^2 = -1$ همه دارای مقدارهای ویژهٔ یکسانند ؛ اولی نمایشگر یک بیضی تباه‌نشده است ، دومی فقط نقطهٔ $(x, y) = (0, 0)$ صادق درخود را دارد ؛ و سومی نمایشگر مجموعهٔ تهی است . دو حالت اخیر را می‌توان حالات تباه شده‌ای از بیضی دانست .

نمودار معادلهٔ $y^2 = 0$ محور x است . معادلهٔ $y^2 - 1 = 0$ دو خط موازی $y = 1$ و $y = -1$ را نمایش می‌دهد . اینها را می‌توان حالات تباه شده‌ای از سهمی گرفت . معادلهٔ $x^2 - 4y^2 = 0$ نمایشگر دوخط متقاطع است ، زیرا در صورتی برقرار است که $x - 2y = 0$ یا $x + 2y = 0$. این را می‌توان حالت تباه شده‌ای از هذلولی دانست .

بهرحال ، اگر معادلهٔ دکارتی $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ نمایشگر یک مقطع مخروطی تباه‌نشده باشد ، **نوع** مخروطی را می‌توان کاملا" آسان معین کرد . چند جمله‌ای مشخص ماتریس فرم درجهٔ دوم $ax^2 + bxy + cy^2$ عبارت است از

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - a & -b/2 \\ -b/2 & \lambda - c \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - \tfrac{1}{4}b^2) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

پس ، حاصل ضرب مقدارهای ویژه مساوی است با

$$\lambda_1\lambda_2 = ac - \tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{1}{4}(4ac - b^2).$$

چون نوع مخروطی را علامت جبری حاصل ضرب $\lambda_1\lambda_2$ تعیین می‌کند ، ملاحظه می‌کنیم که مخروطی ، بسته به‌اینکه $4ac - b^2$ **مثبت** ، **منفی** ، یا **صفر** باشد ، **بیضی** ، **هذلولی** ، یا

سهمی خواهد بود. عدد $4ac - b^2$ **مبین** فرم درجهٔ دوم $ax^2 + bxy + cy^2$ نامیده می‌شود. در مثالهای ۱، ۲ و ۳، مبین بترتیب دارای مقادیر 34 ، -24 ، و 0 است.

۱۵۰۵ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۷، (آ) برای فرم درجهٔ دوم یک ماتریس متقارن مانند A بیابید؛ (ب) مقدارهای ویژهٔ A را پیدا کنید؛ (پ) یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژه بیابید؛ (ت) یک ماتریس قطری ساز متعامد مانند C پیدا کنید.

۱ . $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$.

۲ . x_1x_2 .

۳ . $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$.

۴ . $34x_1^2 - 24x_1x_2 + 41x_2^2$.

۵ . $x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

۶ . $2x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2$.

۷ . $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$.

در تمرینهای ۸ تا ۱۸، مقطع مخروطی نموده شده با معادلهٔ دکارتی را شناسایی کرده و آن را بکشید.

۸ . $y^2 - 2xy + 2x^2 - 5 = 0$.

۹ . $y^2 - 2xy + 5x = 0$.

۱۰ . $y^2 - 2xy + x^2 - 5x = 0$.

۱۱ . $5x^2 - 4xy + 2y^2 - 6 = 0$.

۱۲ . $19x^2 + 4xy + 16y^2 - 212x + 104y = 356$.

۱۳ . $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 52x + 14y = 6$.

۱۴ . $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 2 = 0$.

۱۵ . $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$.

۱۶ . $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 2x - y - 4 = 0$.

۱۷ . $x^2 + 4xy - 2y^2 - 12 = 0$.

۱۸ . $xy + y - 2x - 2 = 0$.

۱۹ . به‌ازای چه مقدار (یا مقادیری) از c، نمودار معادلهٔ دکارتی $2xy - 4x + 7y + c = 0$ یک‌جفت خط است؟

۲۰ . ثابت کنید که اگر معادلهٔ $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ نمایش یک بیضی باشد، مساحت ناحیهٔ محدود به آن مساوی $2\pi/\sqrt{4ac - b^2}$ است. این امر به مبین $4ac - b^2$ معنی هندسی می‌بخشد.

*** ۱۶۰۵ مقدارهای ویژهٔ یک تبدیل متقارن به‌عنوان مقادیر فرم درجهٔ دوم آن**

حال شرط اینکه V با بعد متناهی باشد را حذف می‌کنیم و رابطهٔ بین مقدارهای ویژهٔ یک عملگر متقارن و فرم درجهٔ دوم آن را به‌دست می‌آوریم.

فرض کنیم x یک بردار ویژه با نرم 1 متعلق به مقدار ویژهٔ λ باشد. دراین‌صورت، $T(x) = \lambda x$؛ درنتیجه، داریم

$$Q(x) = (T(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) = \lambda, \qquad (۱۳۰۵)$$

زیرا $(x, x) = 1$. مجموعهٔ تمام x های در V وصادق در $(x, x) = 1$ را **کرهٔ یکه** در V می‌نامند. معادلهٔ (۱۳۰۵) قضیهٔ زیر را ثابت می‌کند.

قضیهٔ ۱۲۰۵ . فرض کنیم $T: V \to V$ یک تبدیل متقارن بر فضای اقلیدسی حقیقی V بوده، و $Q(x) = (T(x), x)$. در این صورت، مقدارهای ویژهٔ T (در صورت وجود) در میان مقادیری است که Q بر کرهٔ یکه در V می‌گیرد.

مثال. فرض کنیم $V = V_2(\mathbf{R})$ با پایهٔ معمولی $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ و ضرب نقطه‌ای معمولی به عنوان ضرب داخلی باشد. همچنین، T تبدیل متقارن با ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ باشد. دراین صورت، فرم درجهٔ دوم T عبارت است از

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_i x_j = 4x_1^2 + 8x_2^2.$$

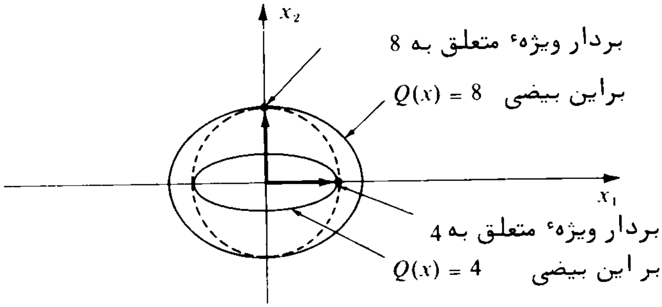
مقدارهای ویژهٔ T عبارتنداز $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 8$. به‌آسانی معلوم می‌شود که این مقدارهای ویژه بترتیب مینیمم و ماکزیممی است که Q بر دایرهٔ یکهٔ $x_1^2 + x_2^2 = 1$ می‌گیرد. در واقع، براین دایره داریم

$$Q(x) = 4(x_1^2 + x_2^2) + 4x_2^2 = 4 + 4x_2^2,$$

که‌درآن $-1 \le x_2 \le 1$. این کوچکترین مقدار خود، یعنی 4، را وقتی دارد که $x_2 = 0$، و بزرگترین مقدار خود، یعنی 8، را وقتی دارد که $x_2 = \pm 1$.

---

* **بخشهای ستاره دار را می‌توان، بی‌آنکه به‌تسلسل مطلب خللی وارد شود، حذف کرد یا به تعویق انداخت.**



شکل ۴۰۵ رابطهٔ هندسی بین مقدارهای ویژهٔ T
و مقادیر Q بر کرهٔ یکه با یک مثال دوبعدی مجسم شده است .

شکل ۴۰۵ دایرهٔ یکه و دو بیضی را نشان می‌دهد . بیضی داخلی دارای معادلهٔ دکارتی $4x_1^2 + 8x_2^2 = 4$ است ، و از تمام نقاط $x = (x_1, x_2)$ در صفحه تشکیل شده که در $Q(x) = 4$ صدق می‌کنند . بیضی خارجی دارای معادلهٔ دکارتی $4x_1^2 + 8x_2^2 = 8$ است ، و از جمیع نقاط صادق در $Q(x) = 8$ متشکل است . نقاط $(\pm 1, 0)$ ، که در آنها بیضی داخلی با دایرهٔ یکه تماس دارد ، بردارهای ویژهٔ متعلق به مقدار ویژهٔ 4 هستند . نقاط $(0, \pm 1)$ واقع بر بیضی خارجی بردارهای ویژهٔ متعلق به مقدار ویژهٔ 8 می‌باشند .

مثال پیش خواص اکستریمی مقادیر ویژه را که به‌طور کلی برقرارند توصیف می‌کند . در بخش بعد ثابت می‌کنیم که کوچکترین و بزرگترین مقدار ویژه (درصورت وجود) همیشه مینیمم و ماکزیمم Q برکرهٔ یکه‌اند . در بحث ما از این خواص اکستریمی از قضیهٔ زیر درباب فرمهای درجهٔ دوم استفاده می‌شود . باید توجه داشت که در این قضیه لازم نیست V با بعد متناهی باشد .

قضیهٔ ۱۳۰۵ . *فرض کنیم $T: V \to V$ یک تبدیل متقارن بر فضای اقلیدسی حقیقی V با فرم درجهٔ دوم $Q(x) = (T(x), x)$ باشد . همچنین ، Q بر V تغییر علامت ندهد . در این صورت ، اگر به‌ازای x ی در V ، $Q(x) = 0$ ، نیز خواهیم داشت $T(x) = O$. به‌عبارت دیگر ، اگر Q تغییر علامت ندهد ، فقط بر فضای پوچ T صفر خواهد شد .*

برهان. فرض کنیم به‌ازای x ی در V ، $Q(x) = 0$ ، و y عنصری در V باشد. t ی حقیقی و دلخواه را اختیار کرده و $Q(x + ty)$ را درنظر می‌گیریم. با استفاده از خاصیت خطی T ، خاصیت خطی ضرب داخلی، و تقارن T ، داریم

$$\begin{aligned} Q(x+ty) &= (T(x+ty), x+ty) = (T(x) + tT(y), x+ty) \\ &= (T(x), x) + t(T(x), y) + t(T(y), x) + t^2(T(y), y) \\ &= Q(x) + 2t(T(x), y) + t^2 Q(y) = at + bt^2, \end{aligned}$$

که $a = 2(T(x), y)$ و $b = Q(y)$. اگر Q بر V نامنفی باشد، نامساوی زیر را خواهیم داشت:

به‌ازای هر t حقیقی، $at + bt^2 \geq 0$.

به عبارت دیگر، چند جمله‌ای درجهٔ دوم $p(t) = at + bt^2$ مینیمم خود را در $t = 0$ دارد. لذا، $p'(0) = 0$. اما $p'(0) = a = 2(T(x), y)$ ؛ در نتیجه، $(T(x), y) = 0$ چون y دلخواه بود، می‌توان درحالت خاص $y = T(x)$ را اختیار کرد و به‌دست آورد که $(T(x), T(x)) = 0$. این ثابت می‌کند که $T(x) = O$.

اگر Q بر V نامثبت باشد، به‌ازای هر t خواهیم داشت $p(t) = at + bt^2 \leq 0$ ؛ درنتیجه، p ماکزیمم خود را در $t = 0$ دارد؛ و درنتیجه، مثل قبل، $p'(0) = 0$.

* ۱۷۰۵ خواص اکسترمال مقدارهای ویژهٔ یک تبدیل متقارن

حال ثابت می‌کنیم که مقادیر اکسترمال‌یک فرم درجهٔ دوم بر کرهٔ یکه مقدارهای ویژه می‌باشند.

قضیهٔ ۱۴۰۵ . *فرض کنیم $T: V \to V$ یک تبدیل خطی متقارن‌بر فضای اقلیدسی حقیقی V بوده، و $Q(x) = (T(x), x)$. فرض‌کنیم درمیان تمام مقادیری‌که Q برکرهٔ یکه می‌گیرد یک اکسترمم* (ماکزیمم یا مینیمم) در نقطهٔ u که $(u, u) = 1$ وجود داشته باشد. دراین*

---

* *اگر V با بعد نامتناهی باشد، فرم درجهٔ دوم Q لزوماً " بر کرهٔ یکه اکسترمم ندارد. این حالتی است که T مقدار ویژه ندارد. درحالت ابعاد متناهی، Q همیشه جایی برکرهٔ یکه ماکزیمم و مینیمم دارد. این امر نتیجه‌ای است از یک قضیهٔ کلیتر درباب مقادیر اکستریم توابع پیوسته. برای حالت خاصی از این قضیه، ر.ک. بخش ۱۶۰۹.*

صورت ، u یک بردار ویژه برای T است ؛ مقدار ویژهٔ نظیر $Q(u)$ است ، یعنی مقدار اکستریم Q برکرهٔ یکه.

برهان. فرض کنیم Q در u مینیمم داشته باشد . در این صورت ، چنین داریم :

$$\text{به‌ازای هر } x \text{ که } (x, x) = 1 \text{ ،} \quad Q(x) \geq Q(u) \text{ .} \tag{۱۴.۵}$$

فرض کنیم $\lambda = Q(u)$. اگر $(x, x) = 1$ ، داریم $Q(u) = \lambda(x, x) = (\lambda x, x)$ ؛ در نتیجه ، نامساوی (۱۴.۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$(T(x), x) \geq (\lambda x, x) \tag{۱۵.۵}$$

مشروط براینکه $(x, x) = 1$. حال ثابت می‌کنیم (۱۵.۵) به‌ازای **هر** x در V معتبر است . فرض کنیم $a = \|x\|$. پس $x = ay$ ، که در آن $\|y\| = 1$. بنابراین ،

$$(T(x), x) = (T(ay), ay) = a^2(T(y), y) \qquad \text{و} \qquad (\lambda x, x) = a^2(\lambda y, y) \text{ .}$$

اما $(T(y), y) \geq (\lambda y, y)$ ، زیرا $(y, y) = 1$. با ضرب دو طرف این نامساوی در a^2 ، (۱۵.۵) به‌ازای $x = ay$ به‌دست می‌آید .

چون

$$(T(x), x) - (\lambda x, x) = (T(x) - \lambda x, x) \text{ ,}$$

می‌توان نامساوی (۱۵.۵) را به شکل $(T(x) - \lambda x, x) \geq 0$ نوشت ، یا

$$(S(x), x) \geq 0 \text{ ، که در آن } S = T - \lambda I \text{ .} \tag{۱۶.۵}$$

وقتی $x = u$ ، نامساوی (۱۴.۵) ، و در نتیجه (۱۶.۵) ، را داریم . تبدیل خطی S متقارن است . نامساوی (۱۶.۵) می‌گوید که فرم درجهٔ دوم Q_1 ، که با $Q_1(x) = (S(x), x)$ داده می‌شود ، بر V نامنفی است . وقتی $x = u$ ، داریم $Q_1(u) = 0$. لذا ، طبق قضیهٔ ۱۳.۵ ، باید داشته باشیم $S(u) = O$. به عبارت دیگر ، $T(u) = \lambda u$ ؛ در نتیجه ، u یک بردار ویژه برای T است ، و $\lambda = Q(u)$ مقدار ویژهٔ نظیر می‌باشد . این برهان را در صورتی که Q در u مینیمم داشته باشد تمام می‌کند .

اگر در u ماکزیمم وجود داشته باشد ، نامساویهای برهان قبلی عکس می‌شوند و قضیهٔ ۱۳.۵ را در مورد فرم درجهٔ دوم نامثبت Q_1 به‌کار می‌بریم .

* ۱۸.۵ حالت ابعاد متناهی

حال فرض کنیم $\dim V = n$. دراین صورت ، T دارای n مقدار ویژهٔ حقیقی است که

می‌توان آنها را به‌ترتیب صعودی آراست :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

طبق قضیهٔ ۱۴۰۵ ، کوچکترین مقدار ویژهٔ λ_1 مینیمم Q برکرهٔ یکه است ، و بزرگترین مقدار ویژه ماکریمم Q برکرهٔ یکه می‌باشد . حال نشان می‌دهیم که مقادیر ویژهٔ میانی نیز به‌عنوان مقادیر اکسترمم Q ، که به زیر مجموعه‌های معینی از کرهٔ یکه محدود شده ، ظاهر می‌شوند .

فرض کنیم u_1 یک بردار ویژه بر کرهٔ یکه باشد که Q را مینیمم می‌سازد . در این صورت ، $\lambda_1 = Q(u_1)$. اگر λ یک مقدار ویژه غیر از λ_1 باشد ، هر بردار ویژهٔ متعلق به λ باید متعامد به u_1 باشد . لذا ، طبیعی است که این بردار ویژه را در متمم متعامد زیر فضای پیموده شده به وسیلهٔ u_1 جستجو کنیم .

فرض کنیم S زیر فضای پیموده شده به‌وسیلهٔ u_1 باشد . متمم متعامد $S^\perp$ از تمام عناصری در V تشکیل شده که به u_1 متعامدند . بخصوص، $S^\perp$ از تمام بردارهای ویژهٔ متعلق به‌مقادیرویژهٔ $\lambda \neq \lambda_1$ تشکیل شده‌است . به‌آسانی تحقیق می‌شودکه $\dim S^\perp = n-1$ و T ، $S^\perp$ را بتوی خود آن می‌نگارد .* فرض کنیم S_{n-1} کرهٔ یکه در زیر فضای $(n-1)$ بعدی $S^\perp$ باشد . (کرهٔ یکهٔ S_{n-1} زیر مجموعهٔ کرهٔ یکه در V است .) با اعمال قضیهٔ ۱۴۰۵ در مورد زیرفضای $S^\perp$ ، درمی‌یابیم که $\lambda_2 = Q(u_2)$ ، که در آن u_2 نقطه‌ای است که Q را بر S_{n-1} مینیمم می‌کند .

بردار ویژهٔ بعدی λ_3 را می‌توان به همین نحو به صورت مقدار مینیمم Q برکرهٔ یکهٔ S_{n-2} در فضای $(n-2)$ بعدی مرکب از تمام عناصر متعامد به u_1 و u_2 به دست آورد . با ادامهٔ این‌کار معلوم می‌شود که هر مقدار ویژهٔ λ_k مقدارمینیممی است که Q بر کرهٔ یکهٔ S_{n-k+1} در یک زیر فضای با بعد $n-k+1$ می‌گیرد . ماکزیمم این مینیممهانیز مقدار **ماکزیممی** است که Q بر هر کرهٔ S_{n-k+1} می‌گیرد . مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ نظیر $u_1, \ldots, u_n$ یک پایهٔ متعامد یکه برای V تشکیل می‌دهند .

۱۹۰۵ تبدیلات یکه‌ای

این فصل را بـا بحثی مختصر از ردهٔ مهم دیگری از تبدیلات به‌نام تبدیلات یکه‌ای به

---

* *این اثبات در برهان قضیهٔ ۴۰۵ ، بخش ۶۰۵ ، صورت گرفت .*

پایان می‌بریم . این تبدیلات در حالت ابعاد متناهی با ماتریسهای یکه‌ای نمایش داده می‌شوند .

تعریف . فرض کنیم E یک فضای اقلیدسی و V زیرفضایی از E باشد . تبدیل خطی $T: V \to E$ بر V **یکه‌ای** نام دارد اگر که

به‌ازای هر x و y در V ، $(T(x), T(y)) = (x, y)$. (۱۷۰۵)

وقتی E یک فضای اقلیدسی حقیقی است ، تبدیل یکه‌ای **تبدیل متعامد** نیز نامیده می‌شود .

معادلهٔ (۱۷۰۵) این‌طور توصیف می‌شود که می‌گویند T حاصل ضربهای داخلی را حفظ می‌کند . بنابراین ، طبیعی است منتظر باشیم که T تعامد و نرمها را نیز حفظ کند ، چرا که اینها از ضرب داخلی مشتق می‌شوند .

قضیهٔ ۱۵۰۵ . هرگاه $T: V \to E$ یک تبدیل یکه‌ای بر V باشد ، آنگاه به‌ازای هر x و y در V

(آ) $(x, y) = 0$ ایجاب می‌کند که $(T(x), T(y)) = 0$ (T تعامد را حفظ می‌کند) ؛

(ب) $\|T(x)\| = \|x\|$ (T نرمها را حفظ می‌کند) ؛

(پ) $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ (T فواصل را حفظ می‌کند) ؛

(ت) T معکوسپذیر است ، و T^{-1} بر $T(V)$ یکه‌ای می‌باشد .

برهان . قسمت (آ) فوراً " از معادلهٔ (۱۷۰۵) نتیجه می‌شود . قسمت (ب) با فرض $x = y$ در (۱۷۰۵) به‌دست می‌آید . قسمت (پ) از (ب) حاصل می‌شود ، زیرا

$$T(x) - T(y) = T(x - y).$$

برای اثبات (ت) ، (ب) را به‌کار می‌بریم که نشان می‌دهد که $T(x) = O$ تساوی $x = O$ را ایجاب می‌کند ؛ درنتیجه ، T معکوسپذیر می‌باشد . هرگاه $x \in T(V)$ و $y \in T(V)$ ، می‌توانیم بنویسیم $x = T(u) , y = T(v)$ ؛ درنتیجه ، خواهیم داشت

$$(T^{-1}(x), T^{-1}(y)) = (u, v) = (T(u), T(v)) = (x, y).$$

لذا ، T^{-1} بر $T(V)$ یکه‌ای می‌باشد .

با توجه به مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

قضیهٔ ۱۶۰۵ . فرض کنیم $T: V \to E$ یک تبدیل یکه‌ای بر V باشد.

(آ) هرگاه T دارای بردار ویژهٔ λ باشد، آنگاه $|\lambda| = 1$.

(ب) هرگاه x و y بردارهای ویژهٔ متعلق به مقادیر ویژهٔ متمایز λ و μ باشند، آنگاه x و y متعامد می‌باشند.

(پ) هرگاه $V = E$ ، $\dim V = n$ ، و V یک فضای مختلط باشد، آنگاه بردارهای ویژه‌ای چون $u_1, \ldots, u_n$ از T وجود دارند که یک پایهٔ متعامد یکه برای V می‌سازند. ماتریس T نسبت به این پایه ماتریس قطری $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ است، که در آن λ_k مقدار ویژهٔ متعلق به u_k می‌باشد.

برهان. برای اثبات (آ) فرض کنیم x یک بردار ویژهٔ متعلق به λ باشد. پس $x \neq O$ و $T(x) = \lambda x$. با اختیار $x = y$ در معادلهٔ (۱۷۰۵) خواهیم داشت

$$(\lambda x, \lambda x) = (x, x) \quad \text{یا} \quad \lambda\bar{\lambda}(x, x) = (x, x)$$

چون $(x, x) > 0$ و $|\lambda|^2 = \lambda\bar{\lambda}$ ، این ایجاب می‌کند که $|\lambda| = 1$.

برای اثبات (ب) می‌نویسیم $T(x) = \lambda x$ ، $T(y) = \mu y$ ، و حاصل ضرب داخلی $(T(x), T(y))$ را به‌دو راه حساب می‌کنیم. چون T یکه‌ای است، داریم

$$(T(x), T(y)) = (x, y)\,.$$

و نیز، چون x و y بردارهای ویژه‌اند، خواهیم داشت

$$(T(x), T(y)) = (\lambda x, \mu y) = \lambda\bar{\mu}(x, y)\,.$$

بنابراین، $\lambda\bar{\mu}(x, y) = (x, y)$ ؛ در نتیجه، $(x, y) = 0$ مگر آنکه $\lambda\bar{\mu} = 1$. اما، بنابر (آ)، $\lambda\bar{\lambda} = 1$ ؛ درنتیجه، اگر می‌داشتیم $\lambda\bar{\mu} = 1$ ، نیز خواهیم داشت $\lambda\bar{\lambda} = \lambda\bar{\mu}$ ، $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$ ، $\lambda = \mu$ ، که با فرض متمایز بودن λ و μ در تضاد است. بنابراین، $\lambda\bar{\mu} \neq 1$ و $(x, y) = 0$.

قسمت (پ) به استقرا بر n و خیلی شبیه به اثبات قضیهٔ ۴۰۵ ، که نتیجهٔ نظیر برای عملگرهای هرمیتی است، ثابت می‌شود. تنها تغییر لازم در آن قسمت از برهان است که نشان می‌دهد T ، $S^{\perp}$ را بتوی خودش می‌نگارد، که

$$S^{\perp} = \{x \mid x \in V, \quad (x, u_1) = 0\}.$$

دراینجا u_1 یک‌بردارویژهٔ T با مقدار ویژهٔ λ_1 است . از معادلهٔ $T(u_1) = \lambda_1 u_1$ معلوم می‌شود که

$$u_1 = \lambda_1^{-1} T(u_1) = \bar{\lambda}_1 T(u_1)\,,$$

زیرا $\lambda_1 \bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2 = 1$. حال x دلخواهی در $S^{\perp}$ اختیار و توجه می‌کنیم که

$$(T(x), u_1) = (T(x), \bar{\lambda}_1 T(u_1)) = \lambda_1 (T(x), T(u_1)) = \lambda_1 (x, u_1) = 0\,.$$

بنابراین ، اگر $x \in S^{\perp}$ ، $T(x) \in S^{\perp}$ ؛ در نتیجه ، T ، $S^{\perp}$ را بتوی خودش می‌نگارد . بقیهٔ برهان مثل برهان قضیهٔ ۴۰۵ است ؛ لذا،جزئیات را تکرار نمی‌کنیم .

دو قضیهٔ بعدی خواص تبدیلات یکه‌ای بر یک فضای با بعد متناهی را توصیف می‌کنند . ما فقط نکات مهم برهانها را ذکر می‌کنیم .

قضیهٔ ۱۷۰۵ . فرض‌کنیم $\dim V = n$ ، و $E = (e_1, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ ثابت V باشد . در این صورت ، تبدیل خطی $T: V \to V$ یکه‌ای است اگر و فقط اگر به‌ازای هر i و j ، $(T(e_i), T(e_j)) = (e_i, e_j)$. (۱۸۰۵)

بخصوص ،اگر E متعامد یکه باشد ، T یکه‌ای است اگر و فقط اگر T ، E را بروی یک پایهٔ متعامد یکه بنگارد .

طرح برهان . می‌نویسیم $x = \sum x_i e_i\,,\ y = \sum y_j e_j$. در این صورت ، داریم

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\,,\ \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \bar{y}_j (e_i\,, e_j)\,,$$

و

$$(T(x), T(y)) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j T(e_j)\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \bar{y}_j (T(e_i), T(e_j))\,.$$

حال (x, y) را با $(T(x), T(y))$ مقایسه می‌کنیم .

قضیهٔ ۱۸۰۵ . فرض کنیم $\dim V = n$ ، و $(e_1, \ldots, e_n)$ یک‌پایهٔ متعامدیکهٔ V باشد . همچنین ، $A = (a_{ij})$ نمایش‌ماتریسی تبدیل خطی $T: V \to V$ نسبت به این پایه باشد . در این صورت ، T یکه‌ای است اگر و فقط اگر A یکه‌ای باشد ؛ یعنی ، اگر و فقط اگر

$$A^* A = I. \qquad (۱۹۰۵)$$

طرح برهان . چون (e_i , e_j) درایهٔ ij ماتریس‌همانی است ، معادلهٔ (۱۹۰۵) ایجاب می‌کند که

$$(e_i , e_j) = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ki} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \bar{a}_{kj} . \qquad (۲۰۰۵)$$

چون A ماتریس T است ، خواهیم داشت $T(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$, $T(e_j) = \sum_{r=1}^{n} a_{rj} e_r$ ؛ در نتیجه ،

$$(T(e_i), T(e_j)) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k , \sum_{r=1}^{n} a_{rj} e_r \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} a_{ki} \bar{a}_{rj} (e_k , e_r) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \bar{a}_{kj} .$$

حال این را با (۲۰۰۵) مقایسه و از قضیهٔ ۱۷۰۵ استفاده می‌کنیم .

قضیهٔ ۱۹۰۵ . هر ماتریس یکه‌ای A دارای خواص زیر است :

(آ) A نامنفرد است و $A^{-1} = A^*$ ؛

(ب) هریک از A^t ، $\bar{A}$ ، و A^* یک ماتریس یکه‌ای است ؛

(پ) مقدارهای ویژهٔ A اعدادی مختلط با قدر مطلق یک‌اند ؛

(ت) $|\det A| = 1$ ؛ هرگاه A حقیقی باشد ، آنگاه $\det A = \pm 1$.

اثبات قضیهٔ ۱۹۰۵ تمرین و به عهدهٔ خواننده است .

۲۰۰۵ تمرین

۱ . (آ) فرض‌کنیم $T: V \to V$ تبدیل $T(x) = cx$ باشد ، که در آن c یک ثابت معین است . ثابت کنید T یکه‌ای است اگر و فقط اگر $|c| = 1$.

(ب) ثابت کنید که اگر V یک بعدی باشد ، تنها تبدیلات یکه‌ای بر V همانهای وصف شده در (آ) هستند . بخصوص ، اگر V یک فضای حقیقی یک بعدی باشد ، فقط دو تبدیل متعامد وجود دارند : $T(x) = x$ و $T(x) = -x$.

۲ . احکام زیر را در مورد ماتریس متعامد حقیقی $n \times n$ ، A ثابت کنید :

(آ) هرگاه λ یک مقدار ویژهٔ حقیقی A باشد ، آنگاه $\lambda = 1$ یا $\lambda = -1$ ؛

(ب) هرگاه λ یک مقدار ویژهٔ مختلط A باشد ، آنگاه مزدوج مختلط $\bar{\lambda}$ نیز یک مقدار ویژهٔ A است . به عبارت دیگر ، مقدارهای ویژهٔ غیر حقیقی A به صورت

جفتهای مزدوج ظاهر می‌شوند ؛

(پ) هرگاه n فرد باشد ، آنگاه A دست کم یک مقدار ویژهٔ حقیقی دارد .

۳ . فرض کنید V یک فضای اقلیدسی حقیقی با بعد n باشد . تبدیل متعامد $T: V \to V$ با دترمینان 1 یک **دوران** نامیده می‌شود . ثابت کنید که اگر n فرد باشد ، 1 یک مقدار ویژه برای T است . این نشان می‌دهد که هر دوران یک فضای‌فرد بعدی دارای یک محور ثابت است . [**راهنمایی .** از تمرین ۲ استفاده نمایید .]

۴ فرض کنید A یک ماتریس متعامد حقیقی با مقدار ویژهٔ -1 و ازدرجهٔ تکرار k باشد . ثابت کنید که $\det A = (-1)^k$.

۵ . ثابت کنید که اگر T خطی و نرم نگهدار باشد ، T یکه‌ای است .

۶ . ثابت کنید که اگر $T: V \to V$ یکه‌ای و هرمیتی باشد ، $T^2 = I$.

۷ . فرض کنید $(e_1, \ldots, e_n)$ و $(u_1, \ldots, u_n)$ دو پایهٔ متعامد یکه برای فضای اقلیدسی V باشند. ثابت‌کنید یک تبدیل یکه‌ای مانند T هست‌که یکی از این پایه‌ها را بروی دیگری می‌نگارد .

۸ . a ی حقیقی را طوری بیابید که ماتریس زیر یکه‌ای باشد :

$$\begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}a(2i-1) \\ ia & \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}a(1-i) \\ a & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}a(2-i) \end{bmatrix}.$$

۹ . ثابت‌کنید که‌اگر A یک‌ماتریس‌هرمیتی اریب باشد ، $I - A$ و $I + A$ هر دونامنفردند و $(I - A)(I + A)^{-1}$ یکه‌ای می‌باشد .

۱۰ . ثابت کنید که اگر A یک ماتریس یکه‌ای بوده و $I + A$ نامنفرد باشد ، $(I - A)(I + A)^{-1}$ هرمیتی اریب است .

۱۱ . ثابت کنید که اگر A هرمیتی باشد ، $A - iI$ نامنفرد است و $(A - iI)^{-1}(A + iI)$ یکه‌ای .

۱۲ . ثابت کنید هر ماتریس یکه‌ای را می‌توان به وسیلهٔ یک ماتریس یکه‌ای قطری کرد .

۱۳ . یک ماتریس مربعی را **نرمال** گویند اگر که $AA^* = A^*A$. از انواع ماتریسهای زیر کدامها نرمال‌اند :

(آ) ماتریسهای هرمیتی ؛ (ب) ماتریسهای هرمیتی اریب ؛

(پ) ماتریسهای متقارن ؛ (ت) ماتریسهای متقارن اریب ؛

(ث) ماتریسهای یکه‌ای ؛ (ج) ماتریسهای متعامد ؟

۱۴ . ثابت کنید که اگر A یک ماتریس نرمال بوده $(AA^* = A^*A)$ و U یک ماتریس یکه‌ای باشد ، U^*AU نرمال است .

۶

معادلات دیفرانسیل خطی

۱۰۶ مقدمهٔ تاریخی

سرآغاز معادلات دیفرانسیل قرن هفدهم میلادی است ، و آن زمانی است که نیوتن[1] ، لایب نیتز ، و برنولیها[2] موفق به حل چند معادلهٔ دیفرانسیل مراتب اول و دوم ساده که از هندسه و مکانیک ناشی شده بودند گردیدند . این کشفیات اولیه ، که شروعشان حدود ۱۶۹۰ بود ، ظاهراً " این فکر را پیش‌آورد که جواب همهٔ معادلات دیفرانسیل مبتنی بر مسائل هندسی و فیزیکی را می‌توان برحسب توابع مقدماتی آشنای حساب دیفرانسیل و انتگرال بیان کرد . از اینرو ، اغلب کارهای اولیه در جهت دستیابی به روشهای ابتکاری برای حل معادلات دیفرانسیل به‌وسیلهٔ ابزارهای مقدماتی ، یعنی جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم ، ترکیب ، و انتگرالگیری ، است که تعدادی متناهی بار بر توابع آشنای حساب دیفرانسیل و انتگرال صورت می‌گیرند .

چند روش خاص نظیر جداسازی متغیرها و استفاده از سازه‌های انتگرالگیری قبل از پایان قرن هفده بیش و کم به‌طور تصادفی طرح شده بودند . در قرن هجده روندهایی اصولی‌تر ، عمدتاً " به‌وسیلهٔ اویلر[3] ، لاگرانژ[4] ، و لاپلاس[5] ، ارائه شدند . بسرعت معلوم شد که معادلات دیفرانسیل نسبتاً " کمی را می‌توان با ابزارهای مقدماتی حل کرد . ریاضیدانان رفته رفته دریافتند که تلاش در کشف روشهایی برای حل همهٔ معادلات دیفرانسیل بیهوده است . درعوض، پرسش دراین باب که یک معادلهٔ دیفرانسیل جواب دارد یا نه ، و درصورت داشتن ، سعی دریافتن خواص جواب از خود معادلهٔ دیفرانسیل

---

1. Newton 2. Bernoullis 3. Euler 4. Lagrange 5. Laplace

بیشتر مفیداست. دراین چارچوب، ریاضیدانان معادلات دیفرانسیل را منابع جدیدی از توابع یافتند.

یک دورهٔ مهم در تاریخ این نظریه اوایل قرن نوزدهم بود، که سبک کلی کار با روش دقیقتری در حساب دیفرانسیل و انتگرال همسو شد. در سالهای ۱۸۲۰ تا ۱۸۳۰، کشی اولین "قضیهٔ وجودی" معادلات دیفرانسیل را به دست آورد. وی ثابت کرد که هر معادلهٔ مرتبهٔ اول به شکل

$$y' = f(x, y),$$

در صورتی که طرف راست آن $f(x, y)$ در شرایط عمومی معینی صدق کند، دارای جواب است. یک نمونهٔ مهم معادلهٔ ریکاتی [1] است:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x),$$

که در آن P، Q، و R توابعی معلوم‌اند. کارهای کشی وجود جواب معادلهٔ ریکاتی در هر بازهٔ باز مانند $(-r, r)$ حول مبدأ، در صورتی که P، Q، و R در $(-r, r)$ بسط به صورت سری توانی داشته باشند، را ایجاب می‌کنند. در سال ۱۸۴۱، ژزف لیوویل (۱۸۰۹–۱۸۸۲) نشان داد که در بعضی حالات نمی‌توان این جواب را با وسایل مقدماتی به دست آورد.

تجربه نشان داده که جز در مواردی، به دست آوردن نتایج با عمومیت بسیار در باب جوابهای معادلات دیفرانسیل مشکل است. در بین این معادلات، معادلات دیفرانسیل خطی هستند، که با تنوع بسیار در مسائل علمی ظاهر می‌شوند. چند نوع سادهٔ آن در جلد یک مطرح شدند ــ معادلات خطی مرتبهٔ اول و معادلات خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت. بخش زیر مروری است بر نتایج اصلی مربوط به این معادلات.

۲.۶ مرور نتایج مربوط به معادلات خطی مراتب اول و دوم

یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول معادله‌ای است به شکل

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad (۱.۶)$$

که در آن P و Q توابعی معلوم‌اند. در جلد یک برای این معادله یک قضیهٔ وجودی‌ـ یکتایی ثابت کردیم (قضیهٔ ۳.۸)، که مجدداً آن را در اینجا بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۶ . فرض کنیم P و Q بر بازهٔ J پیوسته باشند. نقطهٔ a را در J اختیار کرده، فرض می‌کنیم b عدد حقیقی دلخواهی باشد. دراین صورت، یک و فقط یک تابع

---

1. Ricatti

مانند $y=f(x)$ هست که در معـادلهٔ دیفرانسیل (۱۰۶) و شرط اولیهٔ $f(a)=b$ صدق می‌کند. این تابع با فرمول صریح

$$f(x) = be^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_a^x Q(t)e^{A(t)}\,dt \qquad (۲۰۶)$$

داده می‌شود، که در آن

$$A(x) = \int_a^x P(t)\,dt\,.$$

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم معادلاتی به شکل زیر می‌باشند:

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = R(x)\,.$$

اگر ضرایب P_0, P_1, P_2 و طرف راست R بر بازه‌ای چون J پیوسته بوده، و P_0 بر J هرگز صفر نباشد، قضیهٔ وجودی (مذکور در بخش ۵۰۶) همیشه وجود جوابها را روی بازهٔ J تضمین خواهد کرد. با این وجود، فرمولی کلی شبیه به (۲۰۶) برای بیان این جوابها برحسب P_0، P_1، P_2، و R وجود ندارد. از اینرو، حتی در این تعمیم نسبتا "سادهٔ (۱۰۶)"، نظریه جز در حالات خاص خیلی ناقص است. چنانچه ضرایب ثابت بوده و R صفر باشد، همهٔ جوابها را می‌توان به‌طور صریح برحسب توابع چندجمله‌ای، نمایی، و مثلثاتی به‌وسیلهٔ قضیهٔ زیر که در جلد یک ثابت شد (قضیهٔ ۷۰۸) معین کرد.

قضیهٔ ۲۰۶ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (۳۰۶)$$

را درنظر می‌گیریم، که درآن a و b ثابتهای حقیقی معلومی هستند. فرض کنیم $d=a^2-4b$. دراین صورت، هر جواب (۳۰۶) بر بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ به شکل

$$y = e^{-ax/2}[c_1u_1(x) + c_2u_2(x)] \qquad (۴۰۶)$$

است، که درآن c_1 و c_2 ثابت بوده، و توابع u_1 و u_2 طبق علامت جبری d به صورت زیر تعیین می‌شوند:

(آ) هرگاه $d=0$، آنگاه $u_1(x)=1$ و $u_2(x)=x$؛

(ب) هرگاه $d>0$، آنگاه $u_1(x)=e^{kx}$ و $u_2(x)=e^{-kx}$، که در آنها $k=\frac{1}{2}\sqrt{d}$؛

(پ) هرگاه $d<0$، آنگاه $u_1(x)=\cos kx$ و $u_2(x)=\sin kx$، که درآنها $k=\frac{1}{2}\sqrt{-d}$.

عدد $d=a^2-4b$ مبین معادلهٔ درجهٔ دوم

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{۵۰۶}$$

است . این معادله *معادله‌ٔ*مشخص‌معادله‌ٔ دیفرانسیل (۳۰۶) است . ریشه‌های آن عبارتند از

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{d}}{2}, \qquad r_2 = \frac{-a - \sqrt{d}}{2}.$$

علامت جبری d سرشت این ریشه‌ها را تعیین می‌کند . اگر $d > 0$ ، هر دو ریشه حقیقی‌اند و جواب (۴۰۶) را می‌توان به‌شکل

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

بیان کرد . اگر $d < 0$ ، ریشه‌های r_1 و r_2 اعداد مختلط مزدوج می‌باشند . هریک از توابع نمایی مختلط $f_1(x) = e^{r_1 x}$ و $f_2(x) = e^{r_2 x}$ یک جواب مختلط معادله‌ٔ دیفرانسیل (۳۰۶) است . جوابهای حقیقی را با معاینهٔ قسمتهای حقیقی و موهومی f_1 و f_2 به‌دست می‌آوریم . چنانچه بنویسیم $r_1 = -\frac{1}{2}a + ik$, $r_2 = -\frac{1}{2}a - ik$ ، که درآن $k = \frac{1}{2}\sqrt{-d}$ ، داریم

$$f_1(x) = e^{r_1 x} = e^{-ax/2} e^{ikx} = e^{-ax/2} \cos kx + i e^{-ax/2} \sin kx$$

و

$$f_2(x) = e^{r_2 x} = e^{-ax/2} e^{-ikx} = e^{-ax/2} \cos kx - i e^{-ax/2} \sin kx .$$

جواب عمومی به‌شکل معادله‌ٔ (۴۰۶) ترکیبی خطی از قسمتهای حقیقی و موهومی $f_1(x)$ و $f_2(x)$ است .

۳۰۶ تمرین

این تمرینها از فصل ۸ در جلد یک انتخاب شده است تا مروری باشد برمطالب مقدماتی معادلات دیفرانسیل خطی مراتب اول و دوم .

معادلات خطی مرتبهٔ اول. در تمرینهای ۱ ، ۲ ، و ۳ ، مسئله با مقدار اولیه را بر بازهٔ داده شده حل کنید .

۱ . $y' - 3y = e^{2x}$ بر $(-\infty, +\infty)$ ، با $y = 0$ وقتی $x = 0$.

۲ . $xy' - 2y = x^5$ بر $(0, +\infty)$ ، با $y = 1$ وقتی $x = 1$.

۳ . $y' + y \tan x = \sin 2x$ بر $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ ، با $y = 2$ وقتی $x = 0$.

۴ . اگر تعدادی از یک نوع باکتری بمیزانی متناسب با تعداد آنها در هر لحظه رشد کنندوعده‌ٔ آنهادرهرساعت‌دوبرابرگردد،افزایش‌آنهاپس‌ازدوساعت‌چه‌خواهد بود ؟

۵ یک منحنی با معادلهٔ دکارتی $y = f(x)$ از مبداء می‌گذرد . خطوط مرسوم از یک

نقطهٔ دلخواه منحنی به موازات محورهای مختصات یک مستطیل می‌سازند، که دو ضلعش بر محورها قرار دارند. منحنی هرچنین مستطیلی را به دو ناحیهٔ A و B تقسیم می‌کند، که یکی مساحتی n برابر دیگری دارد. تابع f را پیدا نمایید.

۶. (آ) فرض کنید u یک جواب ناصفر معادلهٔ مرتبهٔ دوم $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشد. نشان دهید که جانشانی $y = uv$ معادلهٔ

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

را به یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول نسبت به v' تبدیل می‌کند.

(ب) یک جواب ناصفر معادلهٔ $y'' - 4y' + x^2(y' - 4y) = 0$ را با معاینه به دست آورده، با استفاده از روش قسمت (آ)، جوابی از معادلهٔ

$$y'' - 4y' + x^2 (y' - 4y) = 2xe^{-x^3/3}$$

را بیابید که، وقتی $x = 0$، $y = 0$ و $y' = 4$.

معادلات خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت. در تمرینهای ۷ تا ۱۰، همهٔ جوابهای بر $(-\infty, +\infty)$ را پیدا نمایید.

۷. $y'' - 4y = 0$.

۸. $y'' + 4y = 0$.

۹. $y'' - 2y' + 5y = 0$.

۱۰. $y'' + 2y' + y = 0$.

۱۱. تمام مقادیر ثابت k را طوری بیابید که معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + ky = 0$ یک جواب نابدیهی مانند $y = f_k(x)$ داشته باشد که $f_k(0) = f_k(1) = 0$. به‌ازای هر مقدار مجاز از k، جواب نظیر $y = f_k(x)$ را مشخص کنید. هم مقادیر مثبت و هم منفی k را درنظربگیرید.

۱۲. ثابت کنید که اگر (a, b) یک نقطه در صفحه بوده و m عددی حقیقی باشد، معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + k^2y = 0$ دقیقا "یک جواب دارد که نمودارش از نقطهٔ (a, b) گذشته و در آن دارای شیب m باشد. حالت $k = 0$ را جداگانه بررسی کنید.

۱۳. درهرحالت، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم بیابید که u_1 و u_2 در آن صدق کنند.

(آ) $u_1(x) = e^x$، $u_2(x) = e^{-x}$. (ب) $u_1(x) = e^{2x}$، $u_2(x) = xe^{2x}$.

(پ) $u_1(x) = e^{-x/2} \cos x$، $u_2(x) = e^{-x/2} \sin x$.

(ت) $u_1(x) = \sin (2x + 1)$، $u_2(x) = \sin (2x + 2)$.

(ث) $u_1(x) = \cosh x$، $u_2(x) = \sinh x$.

۱۴. جسمی دارای حرکت توافقی ساده است. تغییر مکان اولیهٔ آن 1، سرعتش 1، و شتابش -12 است. تغییر مکان و شتاب را وقتی سرعت $\sqrt{8}$ است حساب کنید.

۴.۶ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n

یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n معادله‌ای است به‌شکل

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = R(x). \qquad (۶.۶)$$

توابع $P_0, P_1, \ldots, P_n$ که در مشتقات مختلف تابع مجهول y ضرب شده‌اند **ضرایب** معادله نامیده می‌شوند. در بحث کلی ما از معادلهٔ خطی، فرض این است که تمام ضرایب بر بازه‌ای چون J پیوسته‌اند. واژهٔ "بازه" اشاره به یک بازهٔ کراندار یا بازهٔ بی‌کران دارد.

در معادلهٔ دیفرانسیل (۶.۶)، ضریب پیشرو P_0 نقشی خاص دارد، چرا که مرتبهٔ معادله‌را مشخص می‌کند. نقاطی که در آنها $P_0(x) = 0$ **نقاط منفرد** معادله نامیده می‌شوند. نقاط منفرد گاهی مسائلی ایجاد می‌کنند که نیاز به بررسی خاص دارند. برای احتراز از این مسائل، فرض می‌کنیم تابع P_0 هرگز بر J صفر نمی‌شود. دراین صورت، می‌توان دوطرف معادلهٔ (۶.۶) را بر P_0 تقسیم کرد و معادلهٔ دیفرانسیل را به شکلی با ضریب پیشرو 1 نوشت. بنابراین، در بحث کلی ما، فرض می‌شود که معادلهٔ دیفرانسیل به‌شکل

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = R(x) \qquad (۷.۶)$$

می‌باشد.

بحث معادلات خطی را می‌توان با استفاده از نماد عملگر ساده کرد. فرض کنیم $\mathscr{C}(J)$ فضای خطی تمام توابع حقیقی پیوسته بر بازهٔ J باشد. فرض کنیم $\mathscr{C}^n(J)$ زیر فضای مرکب از تمام توابع f باشد که n مشتق اول آن $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ بر J موجود و پیوسته‌اند. فرض‌کنیم $P_1, \ldots, P_n$ ، n تابع در $\mathscr{C}(J)$ باشند، و عملگر $L: \mathscr{C}^n(J) \to \mathscr{C}(J)$ را که با

$$L(f) = f^{(n)} + P_1 f^{(n-1)} + \cdots + P_n f$$

داده شده است درنظر می‌گیریم. خود عملگر L را گاهی به‌صورت

$$L = D^n + P_1 D^{n-1} + \cdots + P_n$$

می‌نویسیم، که‌درآن D^k عملگر مشتق k ام می‌باشد. با نماد عملگر، معادلهٔ دیفرانسیل (۷.۶) به‌صورت سادهٔ

$$L(y) = R \qquad (۸.۶)$$

نوشته می‌شود. یک جواب این معادله تابع y در $\mathscr{C}^n(J)$ است که بر بازهٔ J در (۸.۶) صدق کند.

به‌آسانی تحقیق می‌شود که $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$ ، و نیز، به‌ازای هرثابت

c ، $L(cy) = cL(y)$. بنابراین ، L یک عملگر **خطی** است . به این دلیل ، معادلهٔ $L(y) = R$ را یک معادلهٔ خطی می‌نامند . **عملگر** L یک **عملگر دیفرانسیل خطی مرتبهٔ** n نامیده می‌شود .

به هر معادلهٔ خطی $L(y) = R$ می‌توان معادلهٔ

$$L(y) = 0$$

را مربوط کرد ، که درآن طرف راست با صفر عوض شده است . این معادله **معادلهٔ همگن** نظیر به $L(y) = R$ نام دارد . وقتی R متحد صفر نباشد ، معادلهٔ $L(y) = 0$ یک **معادلهٔ غیرهمگن** نامیده می‌شود . خواهیم دیدکه همیشه ، وقتی معادلهٔ همگن نظیر قابل حل باشد ، معادلهٔ غیر همگن نیز قابل حل است . از اینرو ، بررسی خود را با معادلهٔ همگن آغاز می‌کنیم .

مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ همگن فضای پوچ $N(L)$ عملگر L است . این فضا ، **فضای جواب** معادله نیز نام دارد . فضای جواب یک زیرفضای $\mathscr{C}^n(J)$ است . با اینکه $\mathscr{C}^n(J)$ با بعد نامتناهی است ، ثابت می‌شود که فضای جواب $N(L)$ همیشه با بعد متناهی است . در واقع ، ثابت خواهیم کرد که

$$\dim N(L) = n, \tag{۹.۶}$$

که درآن n مرتبهٔ عملگر L می‌باشد . معادلهٔ (۹.۶) **قضیهٔ بعدیت** برای عملگرهای دیفرانسیل خطی نام دارد . قضیهٔ بعدیت از قضیهٔ وجودی ـ یکتایی ، که درزیر مطرح می‌شود ، نتیجه خواهد شد .

۵.۶ قضیهٔ وجودی ـ یکتایی

قضیهٔ ۳.۶ . قضیهٔ وجودی ـ یکتایی برای معادلات خطی مرتبهٔ n . فرض‌کنیم $P_1, P_2, \ldots, P_n$ توابع پیوسته‌ای بر بازهٔ باز J بوده ، و L عملگر دیفرانسیل خطی

$$L = D^n + P_1 D^{n-1} + \cdots + P_n$$

باشد . هرگاه $x_0 \in J$ و $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ ، n عدد حقیقی باشند ، آنگاه یک و فقط یک تابع مانند $y = f(x)$ هست‌که درمعادلهٔ دیفرانسیل‌همگن $L(y) = 0$ بر J و نیز در شرایط اولیهٔ

$$f(x_0) = k_0, f'(x_0) = k_1, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1}$$

صدق می‌کند .

تذکر . **بردار** $(f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n-1)}(x_0))$ در فضای n ***بردار مقدار اولیه***ٔ f در x_0 خوانده می‌شود . قضیهٔ ۳.۶ به ما می‌گوید که اگر نقطهٔ x_0 را در J و یک بردار را در فضای n اختیارکنیم ، معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ دقیقاً " یک جواب $y = f(x)$ بر J با این بردار به‌عنوان بردار مقدار اولیه در x_0 دارد . مثلاً " ، وقتی $n = 2$ ، دقیقاً " یک جواب با مقدار مقرر $f(x_0)$ و مشتق مقرر $f'(x_0)$ در نقطهٔ مقرر x_0 وجود خواهد داشت .

برهان قضیهٔ وجودی ـ یکتایی نتیجه‌ای است از قضایای وجودی ـ یکتایی کلیتر که در فصل ۷ مطرح می‌شوند . برهانی دیگر برای حالت معادلات با ضرایب ثابت در بخش ۹.۷ داده شده است .

۶.۶ بعد فضای جواب یک معادلهٔ خطی همگن

قضیهٔ ۴.۶ . قضیهٔ بعدیت . ***فرض کنیم $L: \mathscr{C}^n(J) \to \mathscr{C}(J)$ یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n باشد که با***

$$L = D^n + P_1 D^{n-1} + \cdots + P_n \tag{۱۰.۶}$$

داده شده‌است . دراین صورت ، فضای جواب معادلهٔ $L(y) = 0$ دارای بعد n می‌باشد .

برهان. فرض کنیم V_n فضای خطی n بعدی n تاییها از اسکالرها باشد . همچنین ، T تبدیل خطیی باشد که هر تابع f در فضای جواب $N(L)$ را بروی بردار مقدار اولیهٔ f در x_0 می‌نگارد ؛ یعنی ،

$$T(f) = (f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n-1)}(x_0)),$$

که درآن x_0 یک نقطهٔ ثابت در J است . قضیهٔ یکتایی می‌گوید که $T(f) = 0$ ایجاب می‌کند که $f = 0$. از اینرو ، طبق قضیهٔ ۱۰.۲ ، T بر $N(L)$ یک به یک می‌باشد . بنابراین ، T^{-1} نیز یک به یک است و V_n را بروی $N(L)$ می‌نگارد ، و قضیهٔ ۱۱.۲ نشان می‌دهد که

$$\dim N(L) = \dim V_n = n .$$

حال که می‌دانیم هر فضای جواب بعدش n است ، هر مجموعه از n جواب مستقل یک پایه می‌باشد . لذا ، به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ بعدیت ، داریم

قضیهٔ ۵.۶ . فرض‌کنیم $L: \mathscr{C}^n(J) \to \mathscr{C}(J)$ یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n باشد . هرگاه $u_1, \ldots, u_n$ ، n جواب مستقل معادلهٔ دیفرانسیل همگن $L(y) = 0$ بر J باشد ، آنگاه هر جواب $y = f(x)$ بر J را می‌توان به‌شکل

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x) \qquad (۱۱.۶)$$

بیان کرد ، که درآن $c_1, \ldots, c_n$ ثابت می‌باشند .

تذکر . چون همهٔ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل $L(y) = 0$ از فرمول (۱۱.۶) به‌دست می‌آیند ، ترکیب خطی سمت راست ، با ثابتهای دلخواه $c_1, \ldots, c_n$ ، را گاهی **جواب عمومی** معادلهٔ دیفرانسیل می‌نامند .

قضیهٔ بعدیت به‌ما می‌گوید که فضای جواب یک‌معادلهٔ‌دیفرانسیل خطی همگن مرتبهٔ n همیشه یک پایه‌مرکب از n جواب دارد ، اما طرز تعیین این پایه را به‌ما نمی‌گوید . درواقع ، برای تعیین یک پایه از جوابهای یک معادلهٔ خطی روش ساده‌ای وجود ندارد . بهرحال ، روشهای خاصی برای **معادلات خاص** تعبیه شده‌اند . از جملهٔ این معادلات ، معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت‌اند ، که اینک به آنها می‌پردازیم .

۷.۶ جبر عملگرهای ثابت ضریب

یک عملگر ثابت ضریب A عملگری است خطی به شکل

$$A = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n , \qquad (۱۲.۶)$$

که‌درآن D عملگر مشتق بوده و $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ثابتهایی حقیقی می‌باشند . اگر $a_0 \neq 0$ ، گوییم عملگر دارای مرتبهٔ n است . عملگر A را می‌توان بر هر تابع مانند y که بربازه‌ای n مشتق دارد اعمال کرد ؛ نتیجه تابعی است مانند $A(y)$ که با

$$A(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y$$

داده می‌شود . دراین بخش ، نظرمان معطوف توابعی است که بر $(-\infty, +\infty)$ ازهرمرتبه مشتق دارند . مجموعهٔ تمام چنین توابع را با $\mathscr{C}^\infty$ نشان داده و آن را ردهٔ **توابع بی‌نهایت بار مشتقپذیر** می‌نامیم . هرگاه $y \in \mathscr{C}^\infty$ ، آنگاه $A(y)$ نیز در $\mathscr{C}^\infty$ می‌باشد .

اعمال جبری معمول بر تبدیلات خطی (**جمع ، ضرب دراسکالرها ، و ترکیب یا ضرب**)

را می‌توان، درحالت خاص، برعملگرهای ثابت ضریب اعمال کرد. فرض کنیم A و B دو عملگر ثابت ضریب (نه لزوما" از یک مرتبه) باشند. چون مجموع $A + B$ و مضارب اسکالر λA نیز عملگرهایی ثابت ضریب‌اند، مجموعهٔ تمام عملگرهای ثابت ضریب یک فضای خطی می‌باشد. حاصل‌ضرب A و B (باهرترتیب) نیز یک عملگر ثابت ضریب است. بنابراین، مجموعها، حاصل‌ضربها، و مضارب اسکالر عملگرهای ثابت ضریب در قوانین معمولی تعویضپذیری، شرکتپذیری، و پخشپذیری صادق به‌وسیلهٔ تمام تبدیلات خطی صدق می‌کنند. همچنین، ازآنجاکه به‌ازای هر دوعدد صحیح و مثبت r و s داریم $D^rD^s = D^sD^r$، هر دوعملگر ثابت ضریب تعویض خواهند شد؛ $AB = BA$

به‌هر عملگر ثابت ضریب A چند جملهٔ p_A به نام چند جمله‌ای مشخص A رامربوط می‌کنیم. اگر A با (۱۲.۶) داده شده باشد، p_A چند جمله‌ایی است که همان ضرایب A را دارد. یعنی، به‌ازای هرعدد حقیقی r، داریم

$$p_A(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_n.$$

بعکس، اگر چندجمله‌ای حقیقی p معلوم باشد، عملگر نظیری مانند A هست که ضرایبش با ضرایب p یکسان است. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که این ارتباط بین عملگرها و چند‐جمله‌ایها یک تنـاظر یک به یک است. بعلاوه، این تناظر به مجموعها، حاصل‌ضربها، و مضارب اسکالر عملگرها بترتیب مجموعها، حاصل‌ضربها، و مضارب‌اسکالر چندجمله‌ایهای مشخص آنها را مربوط می‌نماید.

قضیهٔ ۶.۶. فرض کنیم A و B عملگرهایی ثابت ضریب‌باچندجمله‌ایهای مشخص p_A و p_B بوده، و λ یک عدد حقیقی باشد. دراین صورت،

(آ) $A = B$ **اگر و فقط اگر** $p_A = p_B$؛

(ب) $p_{A+B} = p_A + p_B$؛

(پ) $p_{AB} = p_A \cdot p_B$؛

(ت) $p_{\lambda A} = \lambda \cdot p_A$.

برهان. ابتدا به‌قسمت (آ) می‌پردازیم. فرض کنیم $p_A = p_B$. می‌خواهیم ثابت کنیم که، به‌ازای‌هر y در $\mathscr{C}^\infty$، $A(y) = B(y)$. چون $p_A = p_B$، هردو چند جمله‌ای درجه

و ضرایب یکسان دارنـد . بنابراین، A و B مرتبه و ضرایب یکسان خواهند داشت؛ در نتیجه، به‌ازای هر y در $\mathscr{C}^\infty$ ، $A(y) = B(y)$.

حال ثابت می‌کنیم $A = B$ رابطهٔ $p_A = p_B$ را ایجاب می‌کند . رابطهٔ $A = B$ یعنی، به‌ازای هر y در $\mathscr{C}^\infty$ ، $A(y) = B(y)$. فرض کنیم $y = e^{rx}$ ، که درآن r یک ثابت است . چون به‌ازای هر $k \geq 0$ ، $y^{(k)} = r^k e^{rx}$ ، داریم

$$A(y) = p_A(r)e^{rx} \qquad \text{و} \qquad B(y) = p_B(r)e^{rx}.$$

معادلهٔ $A(y) = B(y)$ ایجاب می‌کند که $p_A(r) = p_B(r)$. چون r دلخواه است، باید داشته باشیم $p_A = p_B$. این برهان قسمت (آ) را کامل می‌کند .

قسمتهای (ب)، (پ)، و (ت) فوراً از تعریف چندجمله‌ای مشخص نتیجه خواهند شد .

از قضیهٔ ۶.۶ نتیجه می‌شود که هر رابطهٔ جبری مربوط به مجموعها، حاصل‌ضربها، و مضارب اسکالر چندجمله‌ایهای p_A و p_B در مورد عملگرهای A و B نیز برقرارند . بالاخص، اگر بتوان چندجمله‌ای مشخص p_A را به‌حاصل ضربی از دو یا چند چندجمله‌ای تجزیه کرد، هر سازه باید چندجمله‌ایِ مشخص یک عملگر ثابت ضریب باشد؛ درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۶.۶، تجزیه‌ای نظیر برای عملگر A وجود دارد . مثلاً، هرگاه $p_A(r) = p_B(r)p_C(r)$ ، آنگاه $A = BC$. هرگاه $p_A(r)$ به‌صورت حاصل ضربی از n سازهٔ خطی قابل تجزیه باشد، مثلاً

$$p_A(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2)\cdots(r - r_n), \tag{۱۳.۶}$$

آنگاه تجزیهٔ نظیر از A شکل

$$A = a_0(D - r_1)(D - r_2)\cdots(D - r_n)$$

را خواهد داشت .

قضیهٔ اساسی جبر به‌ما می‌گوید که هرچند جمله‌ای $p_A(r)$ از درجهٔ $n \geq 1$ دارای تجزیه‌ای است به شکل (۱۳.۶)، که درآن $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ریشه‌های معادلهٔ

$$p_A(r) = 0,$$

به‌نام **معادلهٔ مشخص** A، می‌باشند . هرریشه به‌قدر درجهٔ تکرار آن نوشته می‌شود . ریشه‌ها ممکن است حقیقی یا مختلط باشند . چون $p_A(r)$ ضرایب حقیقی دارد، ریشه‌های مختلط به‌صورت جفتهای مزدوج می‌باشند، $\alpha + i\beta,\ \alpha - i\beta$ اگر $\beta \neq 0$. دوسازهٔ خطی نظیر

به‌هر جفت‌اینچنینی را می‌توان در یک سازه‌ٔ درجه‌ٔ دوم $r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 + \beta^2$ با ضرایب حقیقی تلفیق کرد. بنابراین، هرچند جمله‌ای $p_A(r)$ را می‌توان به‌صورت حاصل ضربی ازچندجمله‌ایهای خطی و درجه‌ٔ دوم با **ضرایب حقیقی** تجزیه نمود. این تجزیه تجزیه‌ٔ نظیری‌ازعملگر A به‌دست می‌دهد که حاصل ضربی است از عملگرهای ثابت ضریب مرتبه‌ٔ اول و مرتبه‌ٔ دوم با ضرایب حقیقی.

مثال ۱. فرض‌کنیم $A = D^2 - 5D + 6$. چون چندجمله‌ای‌مشخص $p_A(r)$ دارای‌تجزیه‌ٔ $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3)$ است، عملگر A دارای تجزیه‌ٔ

$$D^2 - 5D + 6 = (D-2)(D-3)$$

می‌باشد.

مثال ۲. فرض کنیم $A = D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1$. چندجمله‌ای‌مشخص $p_A(r)$ دارای تجزیه‌ٔ

$$r^4 - 2r^3 + 2r^2 - 2r + 1 = (r-1)(r-1)(r^2+1)$$

است؛ درنتیجه، A تجزیه‌ٔ $A = (D-1)(D-1)(D^2+1)$ را خواهد داشت.

۸.۶ تعیین یک پایه از جوابها برای معادلات خطی با ضرایب ثابت به‌وسیله‌ٔ تجزیه‌ٔ عملگرها

قضیه‌ٔ زیرنشان می‌دهد که چگونه تجزیه‌ٔ عملگرهای ثابت ضریب درحل معادلات‌دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت یاری دهنده است.

قضیه‌ٔ ۷.۶. *فرض‌کنیم L یک‌عملگر ثابت ضریب باشد که بتوان آن را به‌صورت‌حاصل ضربی از عملگرهای ثابت ضریب، مثلاً*

$$L = A_1 A_2 \cdots A_k ,$$

تجزیه کرد. دراین‌صورت، فضای‌جواب معادله‌ٔ دیفرانسیل خطی $L(y) = 0$ شامل فضای جواب هرمعادله‌ٔ دیفرانسیل $A_i(y) = 0$ است. به‌عبارت دیگر،

به‌ازای هر $i = 1, 2, \ldots, k$، $N(A_i) \subseteq N(L)$. (۱۴.۶)

برهان. اگر u در فضای پوچ آخرین سازهٔ A_k باشد، داریم $A_k(u) = 0$ ؛ درنتیجه،

$$L(u) = (A_1A_2 \cdots A_k)(u) = (A_1 \cdots A_{k-1})A_k(u) = (A_1 \cdots A_{k-1})(0) = 0\,.$$

از اینرو، فضای پوچ L شامل فضای پوچ آخرین سازهٔ A_k است. اما، چون عملگرهای ثابت ضریب تعویض می‌شوند، می‌توان سازه‌ها را طوری آراست که هریک از آنها آخرین سازه‌باشد. این (۱۴۰۶) را ثابت خواهد کرد.

اگر $L(u) = 0$، عملگر L را **صفرساز** u می‌نامند. قضیهٔ ۷۰۶ می‌گوید که اگرسازهٔ A_i از L، u را صفر کند، L نیز u را صفر خواهد ساخت.

نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان، با استفاده از این قضیه، معادلات دیفرانسیل همگن‌با ضرایب ثابت را حل کرد. مثالهای مختلفی می‌زنیم تا کیفیات مختلف مربوط به سرشت ریشه‌های معادلهٔ مشخص را نشان دهند.

حالت I . ریشه‌های متمایز حقیقی

مثال ۱. برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D^3 - 7D + 6)y = 0 \qquad (۱۵۰۶)$$

یک پایه از جوابها پیدا کنید.

حل. این معادله به شکل $L(y) = 0$ است با

$$L = D^3 - 7D + 6 = (D - 1)(D - 2)(D + 3)\,.$$

فضای پوچ $D - 1$ شامل $u_1(x) = e^x$ است، از آن $D - 2$ شامل $u_2(x) = e^{2x}$ است، و ازآن $D + 3$ شامل $u_3(x) = e^{-3x}$ می‌باشد. در فصل ۱ (ص ۱۰) ثابت کردیم که u_1, u_2, u_3 مستقل هستند. چون سه جواب مستقل یک معادلهٔ مرتبهٔ سوم یک‌پایه برای فضای جواب تشکیل می‌دهند، جواب عمومی (۱۵۰۶) با

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-3x}$$

داده می‌شود.

به روشی که درحل مثال ۱ به‌کاررفت، می‌توان‌برای‌فضای‌جواب‌هر عملگر ثابت ضریب که قابل تجزیه به سازه‌های خطی متمایز است یک پایه به‌دست آورد.

قضیهٔ ۸.۶ . فرض‌کنیم L یک عملگر ثابت ضریب باشدکه‌معادلهٔ‌مشخص‌آن $p_L(r) = 0$ دارای n ریشهٔ حقیقی و متمایز $r_1, r_2, \ldots, r_n$ است . دراین صورت ، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $L(y) = 0$ بربازهٔ $(-\infty, +\infty)$ از فرمول

$$y = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{r_k x} \qquad (۱۶.۶)$$

به‌دست می‌آید .

برهان. تجزیهٔ زیر را داریم :

$$L = a_0(D - r_1)(D - r_2) \cdots (D - r_n).$$

چون‌فضای پوچ $(D - r_k)$ شامل $u_k(x) = e^{r_k x}$ است ، فضای پوچ L شامل n تابع

$$u_1(x) = e^{r_1 x}, \qquad u_2(x) = e^{r_2 x}, \ldots, u_n(x) = e^{r_n x} \qquad (۱۷.۶)$$

می‌باشد . درفصل ۱ (ص ۱۰) ثابت شد که این توابع مستقل هستند . بنابراین ، اینها یک پایه برای فضای جواب معادلهٔ $L(y) = 0$ تشکیل می‌دهند ؛ درنتیجه ، جواب عمومی با (۱۶.۶) داده خواهد شد .

حالت II . ریشه‌های حقیقی ، که بعضی تکرار شده‌اند.

اگر تمام ریشه‌ها حقیقی بوده ولی متمایز نباشند ، توابع (۱۷.۶) مستقل نیستند ؛ و در نتیجه ، یک پایه برای فضای جواب تشکیل نمی‌دهند . اگر ریشهٔ r از درجهٔ تکرار m باشد ، $(D - r)^m$ یک‌سازهٔ L خواهد بود . قضیهٔ زیر طرز به‌دست آوردن m جواب‌مستقل در فضای پوچ این سازه را نشان می‌دهد .

قضیهٔ ۹.۶ . m تابع

$$u_1(x) = e^{rx}, \qquad u_2(x) = xe^{rx}, \ldots, u_m(x) = x^{m-1}e^{rx}$$

m عنصر مستقل‌اند که به وسیلهٔ عملگر $(D - r)^m$ صفر می‌شوند .

برهان. استقلال این توابع از استقلال چندجمله‌ایهای $1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}$ نتیجه می‌شود . برای اثبات اینکه $u_1, u_2, \ldots, u_m$ به‌وسیلهٔ $(D - r)^m$ صفر می‌شوند ، بر m استقرا می‌کنیم .

اگر $m = 1$ ، فقط یـک تابع وجود دارد ، $u_1(x) = e^{rx}$ ، که بوضوح توسط $(D - r)$ صفر می‌شود . پس فرض کنیم قضیه به ازای $m - 1$ درست باشد . این یعنی توابعی چون $u_1, \ldots, u_{m-1}$ وجود دارند که به‌وسیلهٔ $(D - r)^{m-1}$ صفر می‌شوند . چون

$$(D - r)^m = (D - r)(D - r)^{m-1} ,$$

توابع $u_1, \ldots, u_{m-1}$ نیز به وسیلهٔ $(D - r)^m$ صفر می‌شوند . بـرای تکمیل برهان ، باید نشان دهیم کـه $(D - r)^m$ نیز u_m را صفر می‌سازد . لذا ، رابطهٔ زیر رادرنظر می‌گیریم :

$$(D - r)^m u_m = (D - r)^{m-1}(D - r)(x^{m-1}e^{rx}) .$$

داریم

$$\begin{aligned}(D - r)(x^{m-1}e^{rx}) &= D(x^{m-1}e^{rx}) - rx^{m-1}e^{rx}\\ &= (m - 1)x^{m-2}e^{rx} + x^{m-1}re^{rx} - rx^{m-1}e^{rx}\\ &= (m - 1)x^{m-2}e^{rx} = (m - 1)u_{m-1}(x) .\end{aligned}$$

وقتی $(D - r)^{m-1}$ را در دو طـرف معادلهٔ اخیر اعمال کنیم ، در طرف راست 0 به‌دست می‌آوریم ، زیـرا $(D - r)^{m-1}$ ، u_{m-1} را صفر می‌سازد . بنابراین ، $(D - r)^m u_m = 0$ ؛ درنتیجه ، u_m به‌وسیلهٔ $(D - r)^m$ صفر می‌شود . این برهان را تمام خواهد کرد .

مثال ۲ . جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $L(y) = 0$ ، که‌درآن

$$L = D^3 - D^2 - 8D + 12 ,$$

را پیدا کنید .

حل . عملگر L دارای تجزیهٔ

$$L = (D - 2)^2(D + 3)$$

است . طبق قضیهٔ ۶ . ۹ ، دو تابع

$$u_1(x) = e^{2x}, \qquad u_2(x) = xe^{2x}$$

در فضای پوچ $(D - 2)^2$ هستند . تابع $u_3(x) = e^{-3x}$ در فضای پوچ $(D + 3)$ است . چون u_1, u_2, u_3 مستقل‌اند (ر . ک . تمرین ۱۷ از بخـش ۶ . ۹) ، یک پایه برای فضای پوچ L تشکیل می‌دهند ؛ درنتیجه ، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از

$$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{-3x} .$$

قضیهٔ ۹.۶ طرز یافتن یک پایه از جوابها برای هر معادلهٔ خطی مرتبهٔ n م با ضرایب ثابت که معادلهٔ مشخص آن فقط ریشه‌های حقیقی، و برخی تکراری، دارد را بازگو می‌کند. اگر ریشه‌های **متمایز** $r_1, r_2, \ldots, r_k$ بوده و بترتیب از درجات تکرار $m_1, m_2, \ldots, m_k$ باشند، آن بخش از پایه که نظیر به r_p است با m_p تابع

$u_{q,p}(x) = x^{q-1}e^{r_p x}$ داده می‌شود، که $q = 1, 2, \ldots, m_p$.

وقتی p مقادیر $1, 2, \ldots, k$ را می‌گیرد، رویهم $m_1 + \cdots + m_k$ تابع خواهیم داشت. در تمرین ۱۷ از بخش ۹.۶ با برهانی به‌اختصار نشان دادیم که همهٔ این تابعها مستقل هستند. چون مجموع درجات تکرار $m_1 + \cdots + m_k$ مساوی n، یعنی مرتبهٔ معادله، است، توابع $u_{p,q}$ یک پایه برای فضای جواب معادله تشکیل می‌دهند.

مثال ۳. معادلهٔ $(D^6 + 2D^5 - 2D^3 - D^2)y = 0$ را حل کنید.

حل. داریم $D^6 + 2D^5 - 2D^3 - D^2 = D^2(D-1)(D+1)^3$. بخشی از پایه که نظیر به‌سازهٔ D^2 است مساوی است با $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x$؛ بخشی که نظیر به‌سازهٔ $(D-1)$ است مساوی $u_3(x) = e^x$ است؛ و بخشی که نظیر به سازهٔ $(D+1)^3$ است مساوی $u_4(x) = e^{-x}$, $u_5(x) = xe^{-x}$, $u_6(x) = x^2e^{-x}$ می‌باشد. شش تابع $u_1, \ldots, u_6$ مستقل هستند؛ در نتیجه، جواب عمومی معادله عبارت خواهد بود از

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^x + (c_4 + c_5x + c_6x^2)e^{-x}.$$

حالت III . ریشه‌های مختلط

اگر نماییهای مختلط به‌کار رفته باشند، لازم نیست بین ریشه‌های حقیقی و مختلط معادلهٔ مشخص معادلهٔ دیفرانسیل $L(y) = 0$ فرق گذارده شود. اگر جوابهای حقیقی مطلوب باشند، عملگر L را به سازه‌های خطی و درجهٔ دوم با ضرایب حقیقی تجزیه می‌کنیم. هر جفت ریشهٔ مختلط مزدوج مانند $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ به یک سازهٔ درجهٔ دوم مانند

$$D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2 \tag{۱۸.۶}$$

نظیر است. فضای پوچ این عملگر مرتبهٔ دوم شامل دو تابع مستقل $u(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ و $v(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ است. اگر جفت ریشه‌های $\alpha \pm i\beta$ از درجهٔ تکرار m باشند، سازهٔ درجهٔ دوم به‌توان m خواهد بود. فضای پوچ عملگر

$$[D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2]^m$$

شامل $2m$ تابع مستقل

$$u_q(x) = x^{q-1}e^{\alpha x}\cos \beta x, \qquad v_q(x) = x^{q-1}e^{\alpha x}\sin \beta x, \qquad q = 1, 2, \ldots, m$$

است. این مطلب را می‌توان به‌آسانی و به استقرا بر m ثابت کرد. (برهانها در تمرین ۲۰ از بخش ۹.۶ به‌اختصار بیان شده‌اند.) مثالهای زیر چند حالت را توضیح می‌دهند.

مثال ۴. $y''' - 4y'' + 13y' = 0$. معادلهٔ مشخص، یعنی $r^3 - 4r^2 + 13r = 0$، دارای ریشه‌های $0, 2 \pm 3i$ است؛ پس جواب عمومی عبارت خواهد بود از

$$y = c_1 + e^{2x}(c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x).$$

مثال ۵. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$. معادلهٔ مشخص مساوی است با

$$r^3 - 2r^2 + 4r - 8 = (r-2)(r^2+4) = 0;$$

ریشه‌هایش عبارتند از $2, 2i, -2i$؛ درنتیجه، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x.$$

مثال ۶. $y^{(5)} - 9y^{(4)} + 34y''' - 66y'' + 65y' - 25y = 0$. معادلهٔ مشخص را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(r-1)(r^2 - 4r + 5)^2 = 0;$$

ریشه‌هایش عبارتند از $1, 2 \pm i, 2 \pm i$؛ درنتیجه، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل خواهد شد

$$y = c_1 e^x + e^{2x}[(c_2 + c_3 x)\cos x + (c_4 + c_5 x)\sin x].$$

۹.۶ تمرین

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل تمرینهای ۱ تا ۱۲ را پیدا کنید.

۱. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.

۲. $y''' - y' = 0$.

۳. $y''' + 4y'' + 4y' = 0$.

۴. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

۵. $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0$.

۶. $y^{(4)} - 16y = 0$.

۷ . $y^{(4)} + 16y = 0$.　　　۸ . $y''' - y = 0$.

۹ . $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.　　　۱۰ . $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

۱۱ . $y^{(6)} + 4y^{(4)} + 4y'' = 0$.　　　۱۲ . $y^{(6)} + 8y^{(4)} + 16y'' = 0$.

۱۳ . هرگاه m یک ثابت مثبت باشد ، جواب خصوصی $y = f(x)$ معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''' - my'' + m^2y' - m^3y = 0$$

که در شرط $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 1$ صدق می‌کند را پیدا نمایید .

۱۴ . یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت‌دارای‌معادلهٔ مشخص $f(r) = 0$ است . ثابت کنید اگر تمام ریشه‌های معادلهٔ مشخص منفی باشند، هر جواب‌معادلهٔ دیفرانسیل ، وقتی $x \to +\infty$ ، به‌صفر نزدیک می‌شود . اگرتمام ریشه‌های معادلهٔ مشخص‌نامثبت باشند ، چه نتیجه‌ای درباب رفتار تمام جوابها بر $[0, +\infty)$ حاصل می‌شود ؟

۱۵ . درهر حالت زیر ، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت بیابید که توابع داده شده درآن صدق کنند :

(آ) $u_1(x) = e^x, \quad u_2(x) = e^{-x}, \quad u_3(x) = e^{2x}, \quad u_4(x) = e^{-2x}$ ؛

(ب) $u_1(x) = e^{-2x}, \quad u_2(x) = xe^{-2x}, \quad u_3(x) = x^2e^{-2x}$ ؛

(پ) $u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = x, \quad u_3(x) = e^x, \quad u_4(x) = xe^x$ ؛

(ت) $u_1(x) = x, \quad u_2(x) = e^x, \quad u_3(x) = xe^x$ ؛

(ث) $u_1(x) = x^2, \quad u_2(x) = e^x, \quad u_3(x) = xe^x$ ؛

(ج) $u_1(x) = e^{-2x}\cos 3x, \quad u_2(x) = e^{-2x}\sin 3x, \quad u_3(x) = e^{-2x}, \quad u_4(x) = xe^{-2x}$ ؛

(چ) $u_1(x) = \cosh x, \quad u_2(x) = \sinh x, \quad u_3(x) = x\cosh x, \quad u_4(x) = x\sinh x$ ؛

(ح) $u_1(x) = \cosh x \sin x, \quad u_2(x) = \sinh x \cos x, \quad u_3(x) = x$!

۱۶ . فرض کنید $r_1, \ldots, r_n$ ، n عدد حقیقی متمایز بوده ، و $Q_1, \ldots, Q_n$ ، n چند‌جمله‌ای باشند که هیچکدام چندجمله‌ای صفر نباشد . ثابت کنید n تابع

$$u_1(x) = Q_1(x)e^{r_1x}, \ldots, u_n(x) = Q_n(x)e^{r_nx}$$

مستقل می‌باشند .

طرح برهان . از استقرا بر n استفاده کنید . به‌ازای $n = 1$ و $n = 2$ نتیجه به آسانی تحقیق می‌شود . فرض کنید حکم به‌ازای $n = p$ درست بوده ، و $c_1, \ldots, c_{p+1}$ ، $p + 1$ اسکالر حقیقی باشند بطوری که

$$\sum_{k=1}^{p+1} c_k Q_k(x) e^{r_k x} = 0 .$$

دوطرف این رابطه را در $e^{-r_{p+1}x}$ ضرب کرده از معادلهٔ حاصل مشتق بگیرید . بعد ، با استفاده از فرض استقرا ، نشان دهید که همهٔ c_k ها صفرند . می‌توان برهانی دیگر برمبنای مرتبهٔ بزرگی ، وقتی $x \to +\infty$ ، بصورتی که در مثال ۷ از بخش ۷۰۱ (ص ۱۲) شد ، ارائه داد .

۱۷ . فرض‌کنید $m_1, m_2, \ldots, m_k$ ، k عدد صحیح مثبت بوده ، $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ، k عدد حقیقی متمایز باشند ، و $n = m_1 + \cdots + m_k$. به‌ازای هر جفت عدد صحیح p, q صادق در $1 \le p \le k, 1 \le q \le m_p$ ، قرار دهید

$$u_{q,p}(x) = x^{q-1} e^{r_p x} .$$

به‌عنوان مثال ، وقتی $p = 1$ ، توابع نظیر عبارت خواهند بود از

$$u_{1,1}(x) = e^{r_1 x}, \qquad u_{2,1}(x) = x e^{r_1 x}, \ldots, u_{m_1,1}(x) = x^{m_1 - 1} e^{r_1 x} .$$

ثابت‌کنیدکه n تابع $u_{q,p}$ مستقل می‌باشند . [**راهنمایی .** از تمرین ۱۶ استفاده کنید .]

۱۸ . فرض کنید L یک عملگر دیفرانسیل خطی ثابت ضریب مرتبهٔ n با چند جمله‌ای مشخص $p(r)$ باشد . همچنین ، L' عملگر ثابت ضریبی باشدکه‌چندجمله‌ای مشخص آن مساوی مشتق $p'(r)$ است . مثلاً ، اگر $L = 2D^2 - 3D + 1$ ، $L' = 4D - 3$. بطور کلی ، مشتق m م $L^{(m)}$ را عملگری‌تعریف‌می‌کنیم‌که‌چندجمله‌ای مشخص آن مشتق m م $p^{(m)}(r)$ باشد . (عملگر $L^{(m)}$ را نباید با توان m م L^m خلط کرد .)

(آ) ثابت کنید که اگر u دارای n مشتق باشد ،

$$L(u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} u^{(k)} .$$

(ب) ثابت کنید که اگر u دارای $n - m$ مشتق باشد ،

به‌ازای $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ ، $L^{(m)}(u) = \sum_{k=0}^{n-m} \frac{p^{(k+m)}(0)}{k!} u^{(k)}$ ، که درآن $L^{(0)} = L$.

۱۹ . به‌نمادهای تمرین ۱۸ بازمی‌گردیم . ثابت‌کنیدکه‌اگر u و v دارای n مشتق‌باشند ،

$$L(uv) = \sum_{k=0}^{n} \frac{L^{(k)}(u)}{k!} v^{(k)} .$$

[**راهنمایی .** از تمرین ۱۸ بهمراه فرمول لایب‌نیتز برای مشتق k ام حاصل ضرب، یعنی

$$(uv)^{(k)} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} u^{(k-r)} v^{(r)},$$

استفاده نمایید .]

۲۰ . (آ) فرض کنید $p(t) = q(t)^m r(t)$ ، که درآن q و r چندجمله‌ای بوده و m عدد صحیح مثبتی می‌باشد . ثابت کنید $p'(t) = q(t)^{m-1}s(t)$ ، که‌درآن s یک‌چندجمله‌ای است .

(ب) فرض کنید L یک عملگر ثابت ضریب باشد که u را صفر می‌کند ، که u تابع معلومی از x است . فرض کنید $M = L^m$ ، یعنی توان m ام L ، که $m > 1$. ثابت کنید هریک از مشتقات $M', M'', \ldots, M^{(m-1)}$ نیز u را صفر می‌سازد .

(پ) با استفاده از قسمت (ب) و تمرین ۱۹ ، ثابت کنید M هریک از توابع $u, xu, \ldots, x^{m-1}u$ را صفر می‌کند .

(ت) با استفاده از قسمت (پ) ، نشان دهید که عملگر $(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2)^m$ هریک از توابع $x^q e^{\alpha x} \sin \beta x$ و $x^q e^{\alpha x} \cos \beta x$ ، به ازای $q = 1, 2, \ldots, m-1$ ، را صفر می‌کند .

۲۱ . فرض کنید L یک عملگر ثابت ضریب مرتبهٔ n با چندجمله‌ای مشخص $p(r)$ باشد . ثابت کنید اگر α ثابت بوده و u دارای n مشتق باشد ،

$$L(e^{\alpha x}u(x)) = e^{\alpha x} \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(\alpha)}{k!} u^{(k)}(x).$$

۱۰.۶ رابطهٔ بین معادلات همگن و غیرهمگن

حال بـه معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n کلی با ضرایبی که لزوماً ثابت نیستند باز می‌گردیم . قضیهٔ زیر رابطهٔ بین جوابهای معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ و جوابهای معادلهٔ غیرهمگن $L(y) = R(x)$ را توضیح می‌دهد .

قضیهٔ ۱۰.۶ . فرض‌کنیم $L: \mathscr{C}_n(J) \to \mathscr{C}(J)$ یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n باشد . همچنین ، $u_1, \ldots, u_n$ ، n جواب مستقل معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ بوده ، و y_1 یک‌جواب

خصوصی معـادله‌ٔ غیرهمگن $L(y) = R$ باشد ، که درآن $R \in \mathscr{C}(J)$. دراین صورت ، هر جواب $y = f(x)$ معادله‌ٔ غیرهمگن به‌شکل

$$f(x) = y_1(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x) \tag{۱۹.۶}$$

است ، که درآن $c_1, \ldots, c_n$ ثابت می‌باشند .

برهان. بنابرخاصیت خطی ، داریم

$$L(f - y_1) = L(f) - L(y_1) = R - R = 0 .$$

ازاینرو ، $f - y_1$ فضای‌جواب معادله‌ٔ همگن $L(y) = 0$ است ؛ درنتیجه ، $f - y_1$ ترکیبی خطی از $u_1, \ldots, u_n$ اســت ؛ مثلا" ، $f - y_1 = c_1u_1 + \cdots + c_nu_n$. این (۱۹.۶) را ثابت می‌کند .

چون همهٔ جوابهای $L(y) = R$ در (۱۹.۶) یـافت می‌شوند ، مجموع سمت راست (۱۹.۶) (با ثابتهای دلخواه $c_1, c_2, \ldots, c_n$) جواب عمومی معادلهٔ غیرهمگن نامیده می‌شود . قضیهٔ ۱۰.۶ می‌گوید که جواب عمومی معادلهٔ غیرهمگن با افزودن جواب‌عمومی معادلهٔ همگن به y_1 به‌دست می‌آید .

تذکر. قضیهٔ ۱۰.۶ مشابه هندسی ساده‌ای دارد که در آگاهی از معنی آن یاری دهنده است . برای تعیین تمام نقاط یک صفحه ، یک‌نقطهٔ خاص روی آن اختیار کرده و تمام‌نقاط صفحهٔ ماربر مبـداء و مـوازی آن را به‌این نقطه می‌افزاییم . برای یافتن تمام جوابهای $L(y) = R$ ، یک جـواب خصـوصی‌را یافته و تمام جوابهای معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ را بدان می‌افزاییم . مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ غیرهمگن شبیه به یک صفحهٔ ماربر یک‌نقطهٔ خاص است . فضای جواب معادلهٔ همگن شبیه صفحه‌ای است ماربر مبداء و موازی با آن .

برای آنکه‌از قضیهٔ ۱۰.۶ عملا" استفاده کنیم ، باید دو مسئله را حل کنیم : (۱) جواب عمومی معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ را پیدا کرده ، و (۲) یک جواب خصوصی‌معادلهٔ غیرهمگن $L(y) = R$ را بیابیم . در بخش بعد نشان می‌دهیم که همیشه ، اگر بتوان‌مسئلهٔ (۱) را حل کرد ، مسئلهٔ (۲) نیز قابل حل است .

۱۱۰۶ تعیین یک جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن . روش تغییر پارامتر

حال به مسئلهٔ تعیین یک جواب خصوصی y_1 معادلهٔ غیرهمگن $L(y) = R$ می‌پردازیم . روشی را توضیح می‌دهیم ، به‌نام **تغییر پارامتر** ، که به‌ما طرز تعیین y_1 ، در صورتی که n جواب مستقل $u_1, \ldots, u_n$ معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ را بدانیم ، را بازگو می‌کند . این روش جوابی خصوصی به شکل

$$y_1 = v_1u_1 + \cdots + v_nu_n \tag{۲۰۰۶}$$

به‌دست می‌دهد ، که درآن $v_1, \ldots, v_n$ توابعی هستند که می‌توان آنها را برحسب $u_1, \ldots, u_n$ و طرف‌راست R حساب‌کرد . این روش به‌دستگاهی مرکب از n معادلهٔ جبری خطی منجر می‌شود که مشتقات $v_1', \ldots, v_n'$ درآن صدق می‌کنند . این دستگاه همیشه قابل حل است ، زیرا دارای ماتریس ضرایب ناصفر است . پس انتگرالگیری از مشتقات ، توابع مطلوب $v_1, \ldots, v_n$ را خواهد داد . این روش برای اولین بار توسط یوهان برنولی[1] برای حل معادلات خطی مرتبهٔ اول به‌کار رفت ، و سپس لاگرانژ آن را در ۱۷۷۴ برای حل معادلات خطی مرتبهٔ دوم به‌کار گرفت .

درحالت مرتبهٔ n م ، جزئیات را می‌توان با استفاده از نمادهای بردار و ماتریس ساده کرد . طرف راست (۲۰۰۶) را می‌توان به‌صورت حاصل ضرب داخلی ، یعنی

$$y_1 = (v, u), \tag{۲۱۰۶}$$

نوشت ، که درآن v و u توابعی از بردارهای n بعدی هستند به صورت

$$v = (v_1, \ldots, v_n), \qquad u = (u_1, \ldots, u_n).$$

v را طوری اختیار می‌کنیم که حاصل ضرب داخلی معرف y_1 ، با فرض $L(u) = 0$ که $L(u) = (L(u_1), \ldots, L(u_n))$ ، درمعادلهٔ $L(y) = R$ صدق کند .

ابتدا به محاسبهٔ مشتق اول y_1 می‌پردازیم . داریم

$$y_1' = (v, u') + (v', u). \tag{۲۲۰۶}$$

n تابع $v_1, \ldots, v_n$ داریم که بایستی معین شوند ؛ پس باید بتوان n شرط برآنها گذارد . اگر این شرط را بگذاریم که دومین جملهٔ سمت راست (۲۲۰۶) باید صفر شود ، فرمول مربوط به y_1' ،

درصورتی که $(v', u) = 0$ ، به $y_1' = (v, u')$ ساده می‌شود .

---

1. Johann Bernoulli

با مشتقگیری از رابطهٔ مربوط به y_1' ، درمی‌یابیم که

$$y_1'' = (v, u'') + (v', u').$$

اگر v را بتوان طوری اختیار کرد که $(v', u') = 0$ ، فرمول مربوط به y_1'' نیزساده شده‌و ، درصورتی که نیز $(v', u') = 0$ ، $y_1'' = (v, u'')$.

اگر به‌همین نحو برای $n-1$ مشتق اول y_1 ادامه دهیم ، درخواهیم یافت که ، درصورتی که‌نیز $(v', u^{(n-2)}) = 0$ ، $y_1^{(n-1)} = (v, u^{(n-1)})$.

تا اینجا $n-1$ شرط بر v گذارده‌ایم . اگر یکبار دیگر مشتق بگیریم ، خواهیم داشت

$$y_1^{(n)} = (v, u^{(n)}) + (v', u^{(n-1)}).$$

این‌بار شرط $(v', u^{(n-1)}) = R(x)$ را قایل شده‌ایم ، و آخرین معادله ، درصورتی که نیز $(v', u^{(n-1)}) = R(x)$ ، خواهد شد $y_1^{(n)} = (v, u^{(n)}) + R(x)$.

حال فرض کنیم بتوان n شرط برای v برقرار کرد . فرض کنیم

$$L = D^n + P_1(x)D^{n-1} + \cdots + P_n(x) \cdot$$

وقتی L را بر y_1 اعمال کنیم ، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} L(y_1) &= y_1^{(n)} + P_1(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y_1 \\ &= \{(v, u^{(n)}) + R(x)\} + P_1(x)(v, u^{(n-1)}) + \cdots + P_n(x)(v, u) \\ &= (v, L(u)) + R(x) = (v, 0) + R(x) = R(x). \end{aligned}$$

بنابراین، $L(y_1) = R(x)$ ؛ درنتیجه ، y_1 یک جواب معادلهٔ غیرهمگن است .

این روش، درصورتی که بتوان n شرط‌گذارده شده بر v را برقرار کرد ، موفق خواهد بود . این‌شرطها می‌گویند که ، به‌ازای $k = 0, 1, \ldots, n-2$ ، $(v', u^{(k)}) = 0$ ، و $(v', u^{(n-1)}) = R(x)$. این n معادله را می‌توان به‌صورت یک معادلهٔ ماتریسی واحد نوشت :

$$W(x)v'(x) = R(x)\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (۲۳\cdot۶)$$

که درآن $v'(x)$ یک ماتریس ستونی $n \times 1$ گرفته شده ، و W یک تابع ماتریسی $n \times n$ است که سطرهایش از مولفه‌های u و مشتقات پی‌درپی آن تشکیل شده‌اند :

$$W = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

ماتریس W ، بخاطر ج .ام .اچ .رونسکی (۱۸۵۳–۱۷۷۸) ، **ماتریس رونسکی** $u_1, \ldots, u_n$ نامیده می‌شود .

دربخش بعد ثابت مـی‌کنیم که ماتریس رونسکی نامنفرد است . بنابراین، می‌توان دوطرف (۲۳۰۶) را در $W(x)^{-1}$ ضرب کرده به‌دست آورد که

$$v'(x) = R(x)W(x)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

دو نقطه‌ٔ c و x را دربازه‌ٔ J مورد نظـر اختیار می‌کنیم و از این معادله‌ٔ برداری روی بازه‌ٔ از c تا x انتگرال می‌گیریم تا رابطه‌ٔ زیر به‌دست آید :

$$v(x) = v(c) + \int_c^x R(t)W(t)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = v(c) + z(x),$$

که درآن

$$z(x) = \int_c^x R(t)W(t)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt.$$

حال فرمول $y_1 = (u, v)$ برای جواب خصوصی خواهد شد

$$y_1 = (u, v) = (u, v(c) + z) = (u, v(c)) + (u, z).$$

اولین جمله‌ٔ $(u, v(c))$ در معادله‌ٔ همگن صدق می‌کند ، چرا که ترکیبی خطی از $u_1, \ldots, u_n$ است . بنـابراین، می‌توان این جمله را حذف و از جمله‌ٔ دوم (u, z) به‌عنوان یک جواب

خصوصی معادلهٔ غیرهمگن استفاده نمود . به‌عبارت دیگر ، یک جواب خصوصی $L(y) = R$ با حاصل ضرب داخلی

$$(u(x), z(x)) = \left(u(x), \int_c^x R(t)W(t)^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix} dt\right)$$

داده می‌شود . توجه کنید که لازم نیست تابع R بربازهٔ J پیوسته باشد . آنچه لازم است این است که R بر $[c, x]$ انتگرالپذیر باشد .

نتایج این بخش را می‌توان در قضیهٔ زیر خلاصه کرد .

قضیهٔ ۱۱۰۶ . فرض‌کنیم $u_1, \ldots, u_n$ ، n جواب مستقل معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n ، $L(y) = 0$ ، بربازهٔ J باشد . دراین صورت ، یک جواب خصوصی y_1 معادلهٔ غیرهمگن $L(y) = R$ از فرمول

$$y_1(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)v_k(x)$$

به‌دست می‌آید ، که درآن $v_1, \ldots, v_n$ درایه‌های ماتریس ستونی $n \times 1$ ، v است که از معادلهٔ

$$v(x) = \int_c^x R(t)W(t)^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix} dt \qquad (۲۴۰۶)$$

مشخص می‌شوند . دراین فرمول ، W ماتریس رونسکی $u_1, \ldots, u_n$ است ، و c نقطهٔ دلخواهی در J می‌باشد .

تذکر . انتگرال معین (۲۴۰۶) را می‌توان با هر انتگرال نامعین

$$\int R(x)W(x)^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix} dx$$

عوض کرد .

مثال ۱ . جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' - y = \frac{2}{1 + e^x}$$

را بر بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ پیدا کنید .

حل . معادلهٔ همگن $(D^2 - 1)y = 0$ دو جواب مستقل $u_1(x) = e^x$, $u_2(x) = e^{-x}$ دارد .
ماتریس رونسکی u_1 و u_2 عبارت است از

$$W(x) = \begin{bmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{bmatrix}.$$

چون $\det W(x) = -2$ ، ماتریس نامنفرد است و معکوسش مساوی است با

$$W(x)^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^x & e^x \end{bmatrix}.$$

بنابراین ،

$$W(x)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -e^{-x} \\ e^x \end{bmatrix}$$

و داریم

$$R(x)W(x)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\,\frac{2}{1 + e^x}\begin{bmatrix} -e^{-x} \\ e^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{e^{-x}}{1 + e^x} \\ \dfrac{-e^x}{1 + e^x} \end{bmatrix}.$$

با انتگرالگیری از هر مؤلفهٔ بردار سمت راست . درمی‌یابیم که

$$v_1(x) = \int \frac{e^{-x}}{1 + e^x}\,dx = \int \left(e^{-x} - 1 + \frac{e^x}{1 + e^x}\right) dx = -e^{-x} - x + \log(1 + e^x)$$

و

$$v_2(x) = \int \frac{-e^x}{1 + e^x}\,dx = -\log(1 + e^x).$$

بنابراین، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل خواهد بود

$$\begin{aligned} y &= c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x) \\ &= c_1e^x + c_2e^{-x} - 1 - xe^x + (e^x - e^{-x})\log(1 + e^x). \end{aligned}$$

۱۲۰۶ نامنفردی ماتریس رونسکی n جواب مستقل یک معادلهٔ خطی همگن

در این بخش ثابت می‌کنیم که ماتریس رونسکی W مرکب از n جواب مستقل $u_1, \ldots, u_n$ معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ نامنفرد است. این‌کار را با اثبات اینکه دترمینان W یک تابع نمایی است که هرگز بر بازهٔ J موردنظر صفر نیست انجام می‌دهیم.

فرض‌کنیم به‌ازای هر x در J، $w(x) = \det W(x)$، و معادلهٔ دیفرانسیل برقرار با $u_1, \ldots, u_n$ به‌شکل

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = 0 \tag{۲۵.۶}$$

باشد. دراین صورت، داریم

قضیهٔ ۱۲۰۶ . *دترمینان رونسکی در معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول*

$$w' + P_1(x)w = 0 \tag{۲۶.۶}$$

بر J صدق می‌کند. بنابراین، اگر $c \in J$، داریم

$$w(x) = w(c)\exp\left[-\int_c^x P_1(t)\,dt\right] \qquad (\text{فرمول آبل}^{1}). \tag{۲۷.۶}$$

بعلاوه، به‌ازای هر x در J، $w(x) \neq 0$.

برهان. فرض‌کنیم u بردار سطری $u = (u_1, \ldots, u_n)$ باشد. چون هر مولفهٔ u در معادلهٔ دیفرانسیل (۲۵.۶) صدق می‌کند، u نیز چنین خواهد کرد. سطرهای ماتریس رونسکی W بردارهای $u, u', \ldots, u^{(n-1)}$ هستند. بنابراین، می‌توان نوشت

$$w = \det W = \det(u, u', \ldots, u^{(n-1)}).$$

مشتق w دترمینان ماتریسی است که با مشتقگیری از سطر آخر W به‌دست می‌آید (ر.ک. تمرین ۸ از بخش ۱۷.۳)؛ یعنی،

---

1. Abel

$$w' = \det(u, u', \ldots, u^{(n-2)}, u^{(n)}).$$

با ضرب سطر آخر w در $P_1(x)$ ، نیز داریم

$$P_1(x)w = \det(u, u', \ldots, u^{(n-2)}, P_1(x)u^{(n-1)}).$$

با افزودن دو معادلهٔ اخیر، درمی‌یابیم که

$$w' + P_1(x)w = \det(u, u', \ldots, u^{(n-2)}, u^{(n)} + P_1(x)u^{(n-1)}).$$

اما سطرهای این دترمینان آخر وابسته‌اند، زیرا u در معادلهٔ دیفرانسیل (۶۰۲۵) صدق می‌کند. بنابراین، دترمینان صفر است، که به‌معنی آن است که w در (۶۰۲۶) صدق می‌نماید. با حل (۶۰۲۶) فرمول آبل (۶۰۲۷) به‌دست خواهد آمد.

حال ثابت می‌کنیم به‌ازای c ای در J ، $w(c) \neq 0$. این عمل را به برهان خلف انجام می‌دهیم. فرض کنیم به‌ازای هر t در J ، $w(t) = 0$. t ی ثابتی در J ، مثلاً $t = t_0$ ، اختیار کرده، دستگاه خطی

$$W(t_0)X = O$$

از معادلات جبری، که درآن X یک بردار ستونی است، را در نظر می‌گیریم. چون $\det W(t_0) = 0$ ، ماتریس $W(t_0)$ منفرد است؛ درنتیجه، این دستگاه یک جواب ناصفر، مثلاً $X = (c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$ ، دارد. با استفاده از مولفه‌های این بردار ناصفر، فرض کنیم f ترکیب خطی

$$f(t) = c_1u_1(t) + \cdots + c_nu_n(t)$$

باشد. تابع f تعریف شده به‌این صورت در $L(f) = 0$ بر J صدق می‌کند، زیرا ترکیبی خطی از $u_1, \ldots, u_n$ است. معادلهٔ ماتریسی $W(t_0)X = O$ ایجاب می‌کند که

$$f(t_0) = f'(t_0) = \cdots = f^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

ازاینرو، f در $t = t_0$ دارای بردار مقدار اولیهٔ O است؛ درنتیجه، طبق قضیهٔ یکتایی، f جواب صفر است. این یعنی $c_1 = \cdots = c_n = 0$ ، که یک تناقض می‌باشد. بنابراین، به‌ازای t ای در J ، $w(t) \neq 0$. با اختیار c مساوی این t در فرمول آبل، ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر x در J ، $w(x) \neq 0$. این برهان قضیهٔ ۶۰۱۲ را کامل خواهد کرد.

۱۳۰۶ روشهای خاص برای تعیین یک جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن . تحویل به یک دستگاه معادلات خطی مرتبهٔ اول

اگرچه تغییر پارامتر روشی کلی برای تعیین یک جواب خصوصی $L(y) = R$ است ، اما روشهای خاصی نیز هستند که اغلب ، وقتی معادلات شکلهای خاص دارند ، آسانتر به کار می‌روند . مثلاً ، اگر معادله ضرایب ثابت داشته باشد ، می‌توان مسئله را به حل رشته‌ای از معادلات خطی مرتبهٔ اول تحویل کرد . روش عمومی را با یک مثال ساده به بهترین وجه نشان می‌دهیم .

مثال ۱ . یک جواب خصوصی معادلهٔ

$$(D-1)(D-2)y = xe^{x+x^2} \qquad (۲۸\cdot۶)$$

را بیابید .

حل . فرض کنیم $u = (D-2)y$. دراین صورت ، معادله خواهد شد

$$(D-1)u = xe^{x+x^2}.$$

این یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول نسبت به u است ، که می‌توان آن را با استفاده از قضیهٔ ۱۰۶ حل کرد . یک جواب خصوصی برابر است با

$$u = \tfrac{1}{2}e^{x+x^2}.$$

با جانشانی این در معادلهٔ $u = (D-2)y$ ، داریم

$$(D-2)y = \tfrac{1}{2}e^{x+x^2},$$

که یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول نسبت به y است . با حل این به‌وسیلهٔ قضیهٔ ۱۰۶ ، درمی‌یابیم که یک جواب خصوصی (با $y_1(0) = 0$) عبارت خواهد بود از

$$y_1(x) = \tfrac{1}{2}e^{2x}\int_0^x e^{t^2-t}\,dt.$$

با اینکه انتگرال‌را نمی‌توان برحسب توابع مقدماتی حساب کرد ، ما آن را حل‌شده محسوب می‌کنیم ، چرا که جواب برحسب انتگرالهای توابع آشنا بیان شده است . جواب عمومی (۲۸۰۶) عبارت است از

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \tfrac{1}{2}e^{2x}\int_0^x e^{t^2-t}\,dt.$$

۱۴.۶ روش صفرساز برای تعیین یک جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن

حال روشی را توضیح می‌دهیم که از آن می‌توان، درصورتی که معادلهٔ $L(y) = R$ ضرایب ثابت داشته و طرف راست R به‌وسیلهٔ یک عملگر ثابت ضریب صفر شود، یعنی $A(R) = 0$، استفاده نمود. این روش، دراصل، خیلی ساده است. عملگر A را دردو طرف معادلهٔ دیفرانسیل $L(y) = R$ به‌کار می‌بریم و معادلهٔ جدید $AL(y) = 0$ را به‌دست می‌آوریم که تمام جوابهای معادلهٔ اصلی باید درآن صدق کنند. چون AL عملگر ثابت ضریب دیگری است، می‌توان فضای پوچ آن‌را با محاسبهٔ ریشه‌های معادلهٔ مشخص AL معین کرد. پس، مسئله‌ای‌که می‌ماند انتخاب تابع خاصی چون y_1 از این فضای پوچ است که در $L(y_1) = R$ صدق نماید. مثالهای زیر طرز عمل را نشان خواهند داد.

مثال ۱. یک جواب خصوصی معادلهٔ

$$(D^4 - 16)y = x^4 + x + 1$$

را بیابید.

حل. طرف راست، که‌یک‌چندجمله‌ای‌درجهٔ 4 است، به‌وسیلهٔ عملگر D^5 صفر می‌شود. بنابراین، هرجواب معادلهٔ فوق یک جواب معادلهٔ

$$D^5(D^4 - 16)y = 0 \qquad (۲۹.۶)$$

است. ریشه‌های معادلهٔ مشخص‌عبارتند از $0, 0, 0, 0, 0, 2, -2, 2i, -2i$؛ درنتیجه، همهٔ جوابهای (۲۹.۶) در ترکیب خطی

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4 + c_6e^{2x} + c_7e^{-2x} + c_8\cos 2x + c_9\sin 2x$$

قرار دارند. می‌خواهیم c_i را طوری اختیار کنیم که $L(y) = x^4 + x + 1$، که‌درآن $L = D^4 - 16$. چون چهار جملهٔ آخر به‌وسیلهٔ L صفر می‌شوند، می‌توان فرض‌کرد $c_6 = c_7 = c_8 = c_9 = 0$ و $c_1, \ldots, c_5$ را طوری یافت که

$$L(c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4) = x^4 + x + 1 .$$

به‌عبارت دیگر، جواب‌خصوصی y_1 را جستجو می‌کنیم که یک چند جمله‌ای درجهٔ 4 باشد که‌در $L(y_1) = x^4 + x + 1$ صدق نماید. برای آنکه اعمال ساده شوند، می‌نویسیم

$$16y_1 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e .$$

این ایجاب می‌کند که $16y_1^{(4)} = 24a$؛ درنتیجه، $y_1^{(4)} = 3a/2$. باجانشانی درمعادلهٔ

دیفرانسیل $L(y_1) = x^4 + x + 1$ ، باید a, b, c, d, e را طوری تعیین کنیم که در

$$\tfrac{3}{2}a - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e = x^4 + x + 1$$

صدق کنند . با متحد گرفتن ضرایب همتوان x ، خواهیم داشت

$$a = -1, \quad b = c = 0, \quad d = -1, \quad e = -\tfrac{5}{2};$$

درنتیجه ، جواب خصوصی y_1 عبارت خواهد بود از

$$y_1 = -\tfrac{1}{16}x^4 - \tfrac{1}{16}x - \tfrac{5}{32}.$$

مثال ۲. معادلهٔ دیفرانسیل $y'' - 5y' + 6y = xe^x$ را حل کنید .

حل. این معادلهٔ دیفرانسیل به‌شکل

$$L(y) = R \qquad (۳۰.۶)$$

است ، که درآن $R(x) = xe^x$ و $L = D^2 - 5D + 6$. معادلهٔ همگن نظیر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$(D-2)(D-3)y = 0;$$

این معادله جوابهای مستقل $u_2(x) = e^{3x}$ ، $u_1(x) = e^{2x}$ را دارد . حال یکجواب خصوصی y_1 معادلهٔ غیرهمگن را جستجو می‌کنیم . تابع $R(x) = xe^x$ را یکجواب معادلهٔ همگن

$$(D-1)^2 y = 0$$

می‌گیریم . بنابراین ، اگر عملگر $(D-1)^2$ را دردوطرف (۳۰.۶) اعمال کنیم ، درمی‌یابیم که هر تابع صادق در (۳۰.۶) باید در معادلهٔ

$$(D-1)^2(D-2)(D-3)y = 0$$

نیز صدق نماید . این معادلهٔ دیفرانسیل دارای ریشه‌های مشخص 3 ,2 ,1 ,1 است ؛ درنتیجه ، تمام جوابهایش در ترکیب خطی

$$y = ae^x + bxe^x + ce^{2x} + de^{3x},$$

که درآن a, b, c, d ثابت‌اند ، یافت می‌شوند . می‌خواهیم a, b, c, d را طوری اختیار کنیم که جواب حاصل y_1 در $L(y_1) = xe^x$ صدق نماید . چون به‌ازای هر c و d ، $L(ce^{2x} + de^{3x}) = 0$ ، فقط کافی است a و b طوری اختیار شوند که $L(ae^x + bxe^x) = xe^x$ و $c = d = 0$ را اختیار می‌کنیم . اگر قرار دهیم

$$y_1 = ae^x + bxe^x,$$

داریم

$$D(y_1) = (a+b)e^x + bxe^x, \qquad D^2(y_1) = (a+2b)e^x + bxe^x;$$

در نتیجه، معادلهٔ $(D^2 - 5D + 6)y_1 = xe^x$ خواهد شد

$$(2a - 3b)e^x + 2bxe^x = xe^x.$$

با حذف e^x و متحد گرفتن ضرایب همتوان x، درمی‌یابیم که $a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{2}$. بنابراین، $y_1 = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{2}xe^x$، و جواب عمومی $L(y) = R$ با فرمول

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \tfrac{3}{4}e^x + \tfrac{1}{2}xe^x$$

داده می‌شود.

روش به‌کار رفته در امثلهٔ پیش **روش صفرساز** نامیده می‌شود. این روش همیشه، در صورتی که بتوان یک عملگر ثابت ضریب مانند A یافت که R را صفر کند، بکار است. از معادلات دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت، می‌دانیم که تنها توابع حقیقی که به‌وسیلهٔ عملگرهای ثابت ضریب صفر می‌شوند ترکیبات خطی از جملاتی هستند به‌شکل

$$x^{m-1}e^{\alpha x}, \qquad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

که درآنها m یک عدد صحیح مثبت بوده و α و β ثابتهایی حقیقی می‌باشند. تابع $y = x^{m-1}e^{\alpha x}$ جواب یک‌معادلهٔ دیفرانسیل با یک ریشهٔ مشخص α از درجهٔ تکرار m است. بنابراین، این تابع دارای صفرساز $(D-\alpha)^m$ است. هریک از توابع $y = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ و $y = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$ جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل با ریشه‌های مشخص مختلط $\alpha \pm i\beta$

جدول ۶.۱

صفر ساز	تابع
D^m	$y = x^{m-1}$
$D - \alpha$	$y = e^{\alpha x}$
$(D-\alpha)^m$	$y = x^{m-1}e^{\alpha x}$
$D^2 + \beta^2$	$y = \cos\beta x$ یا $y = \sin\beta x$
$(D^2 + \beta^2)^m$	$y = x^{m-1}\cos\beta x$ یا $y = x^{m-1}\sin\beta x$
$D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)$	$y = e^{\alpha x}\cos\beta x$ یا $y = e^{\alpha x}\sin\beta x$
$[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^m$	$y = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ یا $y = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

است ، که‌هریک از درجهٔ تکرار m می‌باشد ؛ درنتیجه ، اینها به‌وسیلهٔ عملگر $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^m$ صفر می‌شوند . بخاطر سهولت در ارجاع ، این صفرسازها را درجدول ۱.۶ ، همراه با چند حالت خاص از آنها ، ذکر می‌کنیم .

باآنکه روش صفرساز عملاً " خیلی کار است ، اما به‌معادلاتی محدود می‌شود که طرف راست‌آنها R دارای یک صفرساز ثابت ضریب است . اگر $R(x)$ به شکل e^{x^2} ، $\log x$ ، یا $\tan x$ باشد ،روش کارنخواهد کرد ؛ دراین صورت ، برای یافتن یک جواب خصوصی باید از روش تغییر پارامتر یا روشی دیگر استفاده کرد .

۱۵.۶ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۱۰ ، جواب عمومی را بربازهٔ $(-\infty, +\infty)$ پیدا کنید .

۱ . $y'' - y' = x^2$.

۲ . $y'' - 4y = e^{2x}$.

۳ . $y'' + 2y' = 3xe^{x}$.

۴ . $y'' + 4y = \sin x$.

۵ . $y'' - 2y' + y = e^{x} + e^{2x}$.

۶ . $y''' - y' = e^{x}$.

۷ . $y''' - y' = e^{x} + e^{-x}$.

۸ . $y''' + 3y'' + 3y' + y = xe^{-x}$.

۹ . $y'' + y = xe^{x}\sin 2x$.

۱۰ . $y^{(4)} - y = x^2e^{-x}$.

۱۱ . نشان‌دهید که اگر عملگر ثابت ضریب A ، f را ، و عملگر ثابت ضریب B ، g را صفر کند ، حاصل ضرب AB ، $f+g$ را صفر خواهد کرد .

۱۲ . فرض‌کنید A یک عملگر ثابت ضریب با چندجمله‌ای مشخص p_A باشد .

(آ) با استفاده از روش صفرساز ، ثابت کنید معادلهٔ دیفرانسیل $A(y) = e^{\alpha x}$ در صورتی یک جواب خصوصی به شکل

$$y_1 = \frac{e^{\alpha x}}{p_A(\alpha)}$$

دارد که α یک صفر چندجمله‌ای p_A نباشد .

(ب) ثابت‌کنید که‌اگر α یک‌صفر سادهٔ p_A (از درجهٔ تکرار 1) باشد ، معادلهٔ $A(y) = e^{\alpha x}$ جواب خصوصی

$$y_1 = \frac{xe^{\alpha x}}{p'_A(\alpha)}$$

را خواهد داشت .

(پ) نتایج (آ) و (ب)، وقتی α یک صفر p_A از درجهٔ تکرار m است، راتعمیم دهید.

۱۳ . دو عملگر ثابت ضریب A و B داده شده است که چندجمله‌ایهای مشخص آنها صفر مشترک ندارند، و فرض کنید $C = AB$.

(آ) ثابت کنید هر جواب معادلهٔ دیفرانسیل $C(y) = 0$ به شکل $y = y_1 + y_2$ است، که درآن $A(y_1) = 0$ و $B(y_2) = 0$.

(ب) ثابت کنید توابع y_1 و y_2 قسمت (آ) به‌طور منحصر بفرد مشخص‌اند؛ یعنی، به‌ازای y صادق در $C(y) = 0$ ، فقط یک جفت y_1 ، y_2 با خواص قسمت (آ) وجود دارد.

۱۴ . اگر $L(y) = y'' + ay' + by$ ، که درآن a و b ثابت‌اند، f را آن‌جواب خصوصی $L(y) = 0$ بگیرید که در شرایط $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ صدق می‌کند. نشان دهید که یک جواب خصوصی $L(y) = R$ از فرمول

$$y_1(x) = \int_c^x f(x - t)R(t)\,dt\,,$$

به‌ازای انتخابی از c ، به‌دست می‌آید. بالاخص، اگر ریشه‌های معادلهٔ مشخص مساوی باشند، مثلاً $r_1 = r_2 = m$ ، نشان دهید که فرمول مربوط به $y_1(x)$ خواهد شد

$$y_1(x) = e^{mx}\int_c^x (x - t)e^{-mt}R(t)\,dt\,.$$

۱۵ . فرض کنید Q عملگر "ضرب در x" باشد؛ یعنی، به‌ازای هر y در ردهٔ $\mathscr{C}^\infty$ و هر x حقیقی، $Q(y)(x) = x \cdot y(x)$. فرض کنید I عملگر همانی باشد، که به‌ازای هر y در $\mathscr{C}^\infty$ با $I(y) = y$ تعریف می‌شود.

(آ) ثابت کنید که $DQ - QD = I$

(ب) نشان دهید که $D^2Q - QD^2$ یک عملگر ثابت ضریب مرتبهٔ اول است، و این عملگر را صریحاً" به‌صورت یک چند جمله‌ای خطی از D مشخص نمایید.

(پ) نشان دهید که $D^3Q - QD^3$ یک عملگر ثابت ضریب مرتبهٔ دوم است، و این عملگر را صریحاً" به‌صورت یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم از D مشخص نمایید.

(ت) تعمیم مربوط به عملگر $D^nQ - QD^n$ را حدس بزنید، و حدس خود را به‌استقرا ثابت کنید.

در تمرینهای ۱۶ تا ۲۰ ، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل را دربازهٔ داده شده بیابید .

۱۶ . $(0, +\infty)$ ، $y'' - y = 1/x$.

۱۷ . $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ، $y'' + 4y = \sec 2x$.

۱۸ . $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ، $y'' - y = \sec^3 x - \sec x$.

۱۹ . $(-\infty, +\infty)$ ، $y'' - 2y' + y = e^{e^x}(e^x - 1)^2$.

۲۰ . $(0, +\infty)$ ، $y''' - 7y'' + 14y' - 8y = \log x$.

۱۶.۶ تمرینات گوناگون درباب معادلات دیفرانسیل خطی

۱ . منحنی انتگرال $y = u(x)$ معادلهٔ دیفرانسیل $y'' - 3y' - 4y = 0$ منحنی انتگرال $y = v(x)$ معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + 4y' - 5y = 0$ را در مبداء قطع می‌کند . توابع u و v را درحالتی معین کنید که دو منحنی در مبداء یک شیب داشته و

$$\lim_{x\to\infty} \frac{[v(x)]^4}{u(x)} = \frac{5}{6}.$$

۲ . منحنی انتگرال $y = u(x)$ معادلهٔ دیفرانسیل $y'' - 4y' + 29y = 0$ منحنی انتگرال $y = v(x)$ معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + 4y' + 13y = 0$ را در مبداء قطع می‌کند . دو منحنی در مبداء دارای یک شیب هستند . u و v را در صورتی تعیین کنید که $u'(\pi/2) = 1$.

۳ . فرض کنید معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + 4xy' + Q(x)y = 0$ دو جواب به‌شکل $y_1 = u(x)$ و $y_2 = xu(x)$ ، که $u(0) = 1$ ، داشته باشد . $u(x)$ و $Q(x)$ را صریحا" برحسب x معین کنید .

۴ . فرض‌کنید $L(y) = y'' + P_1y' + P_2y$. برای‌حل معادلهٔ‌غیرهمگن $L(y) = R$ به‌وسیلهٔ تغییر پارامتر ، نیاز است که دو جواب، مستقل خطی از معادلهٔ همگن را بدانیم . این‌تمرین نشان می‌دهد که اگر یک جواب u_1 از $L(y) = 0$ معلوم باشد ، و u_1 هرگز بر بازه‌ای چون J صفر نشود ، جواب دوم u_2 معادلهٔ همگن از فرمول‌زیر به‌دست می‌آید :

$$u_2(x) = u_1(x)\int_c^x \frac{Q(t)}{[u_1(t)]^2}\,dt,$$

که درآن $Q(x) = e^{-\int P_1(x)dx}$ ، و c نقطهٔ دلخواهی در J است . این دو جواب بر J مستقل می‌باشند .

(آ) ثابت کنید تابع u_2 در $L(y) = 0$ صدق می‌کند .

(ب) ثابت کنید u_1 و u_2 بر J مستقل هستند .

۵ . جواب عمومی معادلهٔ

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3e^{2x}\ .$$

به‌ازای $x > 0$ ، را با این فرض که معادلهٔ همگن جوابی به‌شکل $y = e^{mx}$ دارد بیابید.

۶ . یک جواب ناصفر معادلهٔ دیفرانسیل

$$(y'' - 4y') + x^2(y' - 4y) = 0$$

را با تحقیق به‌دست آورده و ، سپس، جواب عمومی معادله را پیدا نمایید .

۷ . جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$4x^2y'' + 4xy' - y = 0$$

را ، با این فرض که یک جواب خصوصی به‌شکل $y = x^m$ به‌ازای $x > 0$ دارد ، پیدا نمایید .

۸ . در معادلهٔ

$$x(1-x)y'' - (1-2x)y' + (x^2 - 3x + 1)y = (1-x)^3$$

یک جواب معادلهٔ همگن‌را با امتحان به‌دست آورده و ، سپس، جواب عمومی معادلهٔ فوق را پیدا نمایید .

۹ . جواب عمومی معادلهٔ

$$(2x - 3x^3)y'' + 4y' + 6xy = 0$$

را ، با این‌فرض که جوابی به‌صورت یک چندجمله‌ای‌از x دارد ، پیدا نمایید .

۱۰ . جواب عمومی معادلهٔ

$$x^2(1-x)y'' + 2x(2-x)y' + 2(1+x)y = x^2$$

را ، با این فرض که معادلهٔ همگن جوابی به شکل $y = x^c$ دارد ، پیدا کنید .

۱۱ . فرض‌کنید اگر $x > 0$ ، $g(x) = \int_1^x e^t/t\,dt$. (لازم نیست این انتگرال را حساب‌کنید .)
تمام مقادیر ثابت a را طوری بیابید که تابع f تعریف شده با

$$f(x) = \frac{1}{x} e^{ag(x)}$$

در معادلهٔ دیفرانسیل خطی

$$x^2y'' + (3x - x^2)y' + (1 - x - e^{2x})y = 0$$

صدق نماید. با استفاده از این اطلاعات، جواب عمومی معادله را بر بازهٔ $(0, +\infty)$ معین نمایید.

۱۷.۶ معادلات خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب تحلیلی

گوییم تابع f بر بازهٔ $(x_0 - r, x_0 + r)$ تحلیلی است اگر که f در این بازه بسط به صورت سری توانی داشته باشد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n ,$$

که به‌ازای $|x - x_0| < r$ همگراست. اگر ضرایب یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی و همگن

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = 0$$

در بازهٔ $(x_0 - r, x_0 + r)$ تحلیلی باشند، می‌توان نشان داد n جواب مستقل مانند $u_1, \ldots, u_n$ وجود دارند که هریک برهمان بازه تحلیلی می‌باشند. این قضیه را برای معادلات مرتبهٔ دوم ثابت می‌کنیم و، سپس، مثال مهمی را که در بسیاری از کاربردها ظاهر می‌شود مورد بحث قرار می‌دهیم.

قضیهٔ ۱۳.۶ . فرض‌کنیم P_1 و P_2 بر بازهٔ باز $(x_0 - r, x_0 + r)$ تحلیلی باشند؛ مثلاً"،

$$P_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n , \qquad P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n .$$

در این‌صورت، معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \tag{۳۱.۶}$$

دو جواب مستقل u_1 و u_2 دارد که برهمان بازه تحلیلی می‌باشند.

برهان. جوابی پیدا می‌کنیم به‌صورت سری توانی به‌شکل

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n , \tag{۳۲.۶}$$

که دربازهٔ دادهشده همگرا باشد . برای اینکار، سری فوق را بهجای P_1 و P_2 درمعادلهٔ دیفرانسیل قرارمیدهیم و، بعد، روابطی را بهدست میآوریم که ضرایب a_n باید درآنها صدق کنند تا تابع y داده شده با (۳۲۰۶) در معادلهٔ صدق نماید .

مشتقات y' و y'' را میتوان با مشتقگیری جمله بهجمله از سری توانی برای y به دست آورد (ر.ک. قضیهٔ ۹۰۱۱ در جلد یک) . این نتیجه میدهد که

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)a_{n+1}(x - x_0)^n ,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1)a_n(x - x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n + 2)(n + 1)a_{n+2}(x - x_0)^n .$$

حاصل ضربهای $P_1(x)y'$ و $P_2(x)y$ از سریهای توانی*

$$P_1(x)y' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k + 1)a_{k+1}b_{n-k}\right)(x - x_0)^n$$

و

$$P_2(x)y = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k c_{n-k}\right)(x - x_0)^n$$

به دست میآیند . وقتی این سریها را در معادلهٔ دیفرانسیل (۳۱۰۶) میگذاریم، در مییابیم که

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n + 2)(n + 1)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}[(k + 1)a_{k+1}b_{n-k} + a_k c_{n-k}]\right\}(x - x_0)^n = 0 .$$

بنابراین، معادلهٔ دیفرانسیل برقرار است اگر ضرایب a_n را طوری اختیار کنیم که در فرمول بازگشتی

$$(n + 2)(n + 1)a_{n+2} = -\sum_{k=0}^{n}[(k + 1)a_{k+1}b_{n-k} + a_k c_{n-k}] , \qquad (۳۳۰۶)$$

بهازای $n = 0, 1, 2, \ldots$ ، صدق نمایند . این فرمول a_{n+2} را برحسب ضرایب پیشتر $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ و ضرایب توابع معلوم P_1 و P_2 بیان میکند . برای دوضریب اول a_0 و

---

* خوانندهٔ ناآشنا با ضرب سریهای توانی میتواند به تمرین ۷ دربخش ۲۱۰۶ مراجعه کند .

a_1 مقادیر دلخواه اختیار کرده و، با استفاده از فرمول بازگشتی، بقیهٔ ضرایب $a_2, a_3, \ldots$ را برحسب a_0 و a_1 تعریف می‌نماییم. این صدق سری توانی (۳۲۰۶) در معادلهٔ دیفرانسیل (۳۱۰۶) را تضمین خواهد کرد. قدم بعدی در برهان این است که نشان دهیم که سریی که به این صورت تعریف شده به‌ازای هر x در بازهٔ $(x_0 - r, x_0 + r)$ همگرا می‌باشد. این کار با تحت تسلط درآوردن سری (۳۲۰۶) به‌وسیلهٔ سری توانی دیگری که همگرایی‌اش معلوم است صورت می‌گیرد. بالاخره، نشان می‌دهیم که می‌توان a_0 و a_1 را طوری اختیار کرد که دوجواب مستقل داشته باشیم.

حال ثابت می‌کنیم سری (۳۲۰۶)، که ضرایبش با (۳۳۰۶) تعریف می‌شوند، در بازهٔ مطلوب همگرا است.

نقطهٔ ثابت $x_1 \neq x_0$ را در بازهٔ $(x_0 - r, x_0 + r)$ اختیار کرده قرار می‌دهیم $t = |x_1 - x_0|$. چون سریهای مربوط به P_1 و P_2 به‌ازای $x = x_1$ به‌طور مطلق همگرایند، جملات این سریها کراندار می‌باشند؛ مثلاً"، به‌ازای $M_1 > 0,\ M_2 > 0$ ای،

$$|b_k|\, t^k \leq M_1 \quad \text{و} \quad |c_k|\, t^k \leq M_2 .$$

فرض کنیم M ماکزیمم M_1 و tM_2 باشد. دراین صورت، داریم

$$|b_k| \leq \frac{M}{t^k} \qquad \text{و} \qquad |c_k| \leq \frac{M}{t^{k+1}} .$$

فرمول بازگشتی نامساوی زیر را ایجاب می‌کند:

$$\begin{aligned}
(n+2)(n+1)\,|a_{n+2}| &\leq \sum_{k=0}^{n}\left\{(k+1)\,|a_{k+1}|\,\frac{M}{t^{n-k}} + |a_k|\,\frac{M}{t^{n-k+1}}\right\}\\
&= \frac{M}{t^{n+1}}\left\{\sum_{k=0}^{n}(k+1)\,|a_{k+1}|\,t^{k+1} + \sum_{k=0}^{n}|a_{k+1}|\,t^{k+1} + |a_0| - |a_{n+1}|\,t^{n+1}\right\}\\
&\leq \frac{M}{t^{n+1}}\left\{\sum_{k=0}^{n}(k+2)\,|a_{k+1}|\,t^{k+1} + |a_0|\right\} = \frac{M}{t^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}(k+1)\,|a_k|\,t^k .
\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $A_0 = |a_0|$، $A_1 = |a_1|$، و $A_2, A_3, \ldots$ را متوالیاً" با فرمول بازگشتی

$$(n+2)(n+1)A_{n+2} = \frac{M}{t^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}(k+1)A_k t^k \tag{۳۴۰۶}$$

به‌ازای $n \geq 0$ تعریف می‌کنیم. دراین صورت، به‌ازای هر $n \geq 0$، $|a_n| \leq A_n$؛ درنتیجه،

سری $\sum a_n(x-x_0)^n$ تحت تسلط سری $\sum A_n|x-x_0|^n$ است. حال، با استفاده از آزمون نسبت، نشان می‌دهیم که، اگر $|x-x_0|<t$ ، $\sum A_n|x-x_0|^n$ همگرا می‌باشد.

از تعویض n با $n-1$ در (۳۴۰۶) وتفریق t^{-1} برابر معادلهٔ حاصل‌از (۳۴۰۶)، درمی‌یابیم که $(n+2)(n+1)A_{n+2}-t^{-1}(n+1)nA_{n+1}=M(n+2)A_{n+1}$. بنابراین،

$$A_{n+2}=A_{n+1}\frac{(n+1)n+(n+2)Mt}{(n+2)(n+1)t},$$

و معلوم می‌شود که، وقتی $n\to\infty$ ،

$$\frac{A_{n+2}|x-x_0|^{n+2}}{A_{n+1}|x-x_0|^{n+1}}=\frac{(n+1)n+(n+2)Mt}{(n+2)(n+1)t}|x-x_0|\to\frac{|x-x_0|}{t}.$$

این حد، اگر $|x-x_0|<t$ ، از یک کمتر است. بنابراین، اگر $|x-x_0|<t$ ، $\sum a_n(x-x_0)^n$ همگرا می‌باشد. اما، چون $t=|x_1-x_0|$ و x_1 نقطهٔ دلخواهی دربازهٔ (x_0-r,x_0+r) بود، سری $\sum a_n(x-x_0)^n$ به‌ازای هر x در (x_0-r,x_0+r) همگرا می‌باشد.

دو ضریب اول a_0 و a_1 مقادیر اولیهٔ y و مشتق آن در x_0 را نمایش می‌دهند. هرگاه u_1 جواب به‌صورت سری توانی با $a_0=1$ و $a_1=0$ باشد، درنتیجه

$$u_1(x_0)=1 \quad \text{و} \quad u_1'(x_0)=0،$$

و u_2 جواب با $a_0=0$ و $a_1=1$ باشد، درنتیجه

$$u_2(x_0)=0 \quad \text{و} \quad u_2'(x_0)=1،$$

آنگاه جوابهای u_1 و u_2 مستقل خواهند بود. این برهان را تمام خواهد کرد.

۱۸۰۶ معادلهٔ لژاندر

در این بخش، جوابهای معادلهٔ لژاندر

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0, \qquad (۳۵۰۶)$$

که درآن α ثابت حقیقی دلخــواه است، را به‌صورت سری توانی به‌دست می‌آوریم. این معادله‌در مسائل‌جذب و جریان گرما با تقارن کــروی ظاهر می‌شود. وقتی α عددصحیح مثبتی باشد، درمی‌یابیم که معادله جوابهای چندجمله‌ای، به‌نام ***چندجمله‌ایهای لژاندر***، دارد. اینها همان چند جمله‌ایهایی هستند که قبلاً" در رابطه با فرایند

گرام ـ اشمیت (فصل ۱، صفحهٔ ۳۴) به‌آنها برخوردیم.

معادلهٔ لژاندر را می‌توان به‌صورت

$$[(x^2-1)y']' = \alpha(\alpha+1)y$$

نوشت، که به‌شکل

$$T(y) = \lambda y$$

است، که درآن T یک عملگر اشتروم ـ لیوویل می‌باشد، $T(f) = (pf')'$، با $p(x) = x^2 - 1$ و $\lambda = \alpha(\alpha+1)$. بنابر این، جوابهای ناصفر معادلهٔ لژاندر توابع ویژهٔ T متعلق به مقدار ویژهٔ $\alpha(\alpha+1)$ می‌باشند. چون $p(x)$ در شرایط کرانه‌ای

$$p(1) = p(-1) = 0$$

صدق می‌کند، عملگر T نسبت به ضرب داخلی

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

متقارن می‌باشد. نظریهٔ عمومی عملگرهای متقارن می‌گوید که توابع ویژهٔ متعلق به‌مقادیر ویژهٔ متمایز متعامد هستند (قضیهٔ ۳۰۵).

در معادلهٔ دیفرانسیل مذکور در قضیهٔ ۱۳۰۶، ضریب y'' مساوی یک است. معادلهٔ لژاندر را می‌توان با تقسیم بر $x^2 - 1$ به‌این شکل درآورد. از (۳۵۰۶) داریم

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0,$$

که درآن، اگر $x^2 \neq 1$،

$$P_1(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \qquad \text{و} \qquad P_2(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}\,.$$

چون به‌ازای $|x| < 1$، $1/(1-x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$، هردوی P_1 و P_2 در بازهٔ باز $(-1, 1)$ بسط به‌صورت سری توانی دارند؛ درنتیجه، قضیهٔ ۱۳۰۶ قابل اعمال می‌باشد. برای یافتن فرمول بازگشتی برای ضریبها، ساده‌تر آن است که معادله را به‌شکل (۳۵۰۶) رها کرده، سعی کنیم یک جواب به‌صورت سری توانی به‌شکل

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

که در بازهٔ باز $(-1, 1)$ معتبر است بیابیم. با مشتقگیری جمله به جمله از این سری، داریم

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{و} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

لذا ، خواهیم داشت

$$2xy' = \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^n,$$

و

$$\begin{aligned}(1-x^2)y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n]x^n.\end{aligned}$$

اگر این سریها را در معادلهٔ دیفرانسیل (۶.۳۵) بگذاریم ، می‌بینیم که معادله برقرار است اگر و فقط اگر ضرایب در رابطهٔ

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \alpha(\alpha+1)a_n = 0$$

به‌ازای هر $n \geq 0$ صدق نمایند . این معادله همان معادلهٔ

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-\alpha)(n+1+\alpha)a_n = 0,$$

یا

$$a_{n+2} = -\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n, \tag{۶.۳۶}$$

است . با این رابطه می‌توان $a_2, a_4, a_6, \ldots$ را متوالیا" برحسب a_0 معین کرد . بهمین نحو ، می‌توان $a_3, a_5, a_7, \ldots$ را برحسب a_1 حساب نمود . برای ضرایب با زیرنویسهای زوج داریم

$$a_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}a_0,$$

$$a_4 = -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{3\cdot 4}a_2 = (-1)^2\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}a_0,$$

و ، بطور کلی ،

$$a_{2n} = (-1)^n\frac{\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2n+2)\cdot(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2n-1)}{(2n)!}a_0.$$

این رابطه‌را می‌توان به‌استقرا ثابت کرد . برای ضرایب با زیرنویسهای فرد خواهیم داشت

$$u_1(x) = 1 + \frac{(m!)^2}{(2m!)} \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{(2m+2k)!}{(m-k)!\,(m+k)!\,(2k)!} x^{2k}. \tag{۴۰.۶}$$

به‌عنوان مثـال، وقتی $\alpha = 0, 2, 4, 6$ $(m = 0, 1, 2, 3)$ ، چندجمله‌ایهای نظیر خواهند بود

$$u_1(x) = 1, \qquad 1 - 3x^3, \qquad 1 - 10x^2 + \tfrac{35}{3}x^4, \qquad 1 - 21x^2 + 63x^4 - \tfrac{231}{5}x^6.$$

سری مربوط به $u_2(x)$ ، وقتی α زوج بـاشد ، یک چند جمله‌ای نیست ، زیرا ضریب x^{2n+1} هرگز صفر نمی‌باشد .

وقتی α یک عدد صحیح مثبت **فرد** باشد ، نقشهای u_1 و u_2 عوض می‌شوند ؛ سری مربوط به $u_2(x)$ یک چندجمله‌ای است و سری مربوط به $u_1(x)$ یک چندجمله‌ای نمی‌باشد . بطور مشخص، اگر $\alpha = 2m + 1$ ، داریم

$$u_2(x) = x + \frac{(m!)^2}{(2m+1)!} \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{(2m+2k+1)!}{(m-k)!\,(m+k)!\,(2k+1)!} x^{2k+1}. \tag{۴۱.۶}$$

مثلا" ، وقتی $\alpha = 1, 3, 5$ $(m = 0, 1, 2)$ ، چندجمله‌ایهای نظیر خواهند بود

$$u_2(x) = x, \qquad x - \tfrac{5}{3}x^3, \qquad x - \tfrac{14}{3}x^3 + \tfrac{21}{5}x^5.$$

۱۹.۶ چند جمله‌ایهای لژاندر

بعضی از خـواص جوابـهای چنـدجمله‌ای معادلهٔ لژاندر را می‌توان مستقیما" از معادلهٔ دیفرانسیل یا از فرمولهای (۴۰.۶) و (۴۱.۶) نتیجه گرفت . خواص دیگر از فرمول‌دیگر برای این چندجمله‌ایها ، که اینک آنـها را نتیجه می‌گیریم ، آسانتر به‌دست می‌آیند .

ابتدا فرمولی به‌دست می‌آوریم که (صرف نظر از سازه‌های ثابت) شامل چندجمله‌ایهای (۴۰.۶) و (۴۱.۶) است . فرض کنیم

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{r!\,(n-r)!\,(n-2r)!} x^{n-2r}, \tag{۴۲.۶}$$

که درآن $[n/2]$ بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از $n/2$ است . بزودی نشان می‌دهیم که این ***چندجمله‌ای لژاندر*** از درجهٔ n است‌که در فصل ۱ معرفی شد . وقتی n زوج باشد ، این چندجمله‌ای مساوی مضرب ثابتی از چندجمله‌ای $u_1(x)$ در معادلهٔ (۴۰.۶) است ؛ وقتی n فرد باشد ، این چند جمله‌ای مساوی مضرب ثابتی از چند جمله‌ای $u_2(x)$ در (۴۱.۶)

می‌باشد .* هفت چند جمله‌ای اول لژاندر با فرمولهای زیر داده می‌شوند :

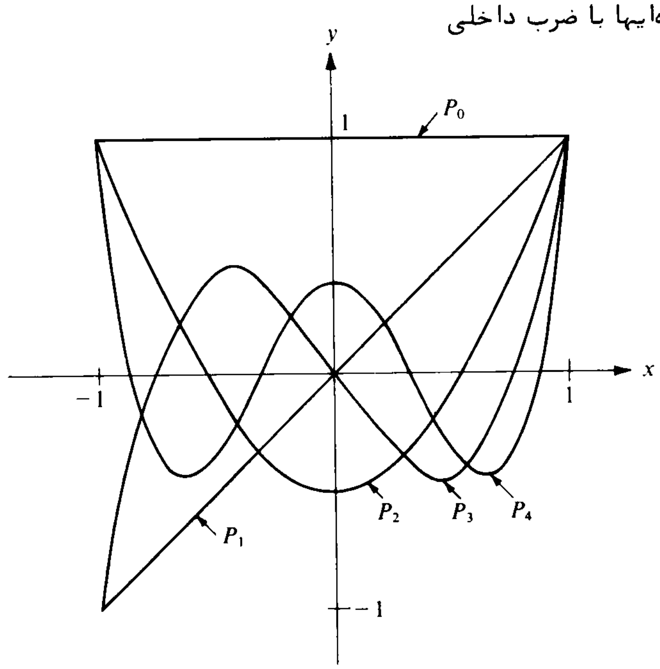
$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$

$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$

شکل ۶ ۱۰ نمودارهای پنج تابع اول را روی بازه‌ی $[-1, 1]$ نشان می‌دهد .

حال می‌توان نشان داد که ، صرف نظر از سازه‌های اسکالر ، چندجمله‌ایهای لژاندر آنهایی هستند که از اعمال فرایند متعامد سازی گرام ــ اشمیت بر دنباله‌ی $1, x, x^2, \ldots$ از چندجمله‌ایها با ضرب داخلی



شکل ۶ ۱۰ نمودار چندجمله‌ایهای لژاندار روی‌بازه‌ی $[-1, 1]$

---

* وقتی n زوج‌باشد ، مثلاً " $n = 2m$ ، می‌توان اندیس جمعبندی k در معادله‌ی (۶ ۴۰) را با اندیس جدید r ، که $r = m - k$ ، عوض کرد . با این‌کار می‌بینیم که مجموع (۶ ۴۰) مضرب ثابتی از $P_n(x)$ است . بهمین نحو ، وقتی n فرد باشد ، هر تغییر اندیس مجموع (۶ ۴۱) را به‌مضرب ثابتی از $P_n(x)$ بدل می‌سازد .

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$$

به‌دست می‌آیند.

ابتدا توجه می‌کنیم که، اگر $m \neq n$ ، چندجمله‌ایهای P_n و P_m متعامدند، زیرا توابع ویژهٔ یک عملگر متقارن متعلق به مقادیر ویژهٔ متمایز می‌باشند. همچنین، از آنجا که درجهٔ P_n مساوی n بوده و $P_0 = 1$ ، چندجمله‌ایهای $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ همان زیرفضای پیموده شده به‌وسیلهٔ $1, x, \ldots, x^n$ را می‌پیمایند. در بخش ۱۴۰۱ ، مثال ۲، مجموعهٔ متعامد دیگری از چندجمله‌ایهای $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ساختیم که $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x)$ همان زیرفضای پیموده شده به‌وسیلهٔ $1, x, \ldots, x^n$ را به‌ازای هر n می‌پیمایند. قضیهٔ متعامدسازی (قضیهٔ ۱۳۰۱) می‌گوید که، صرف نظر ازسازه‌های اسکالر، فقط یک مجموعه از توابع متعامد با این خاصیت وجود دارد. بنابر این، باید به‌ازای اسکالرهایی چون c_n داشته باشیم

$$P_n(x) = c_n y_n(x) \cdot$$

ضریب x^n در $y_n(x)$ مساوی یک است؛ در نتیجه، c_n ضریب x^n در $P_n(x)$ می‌باشد. از (۴۲۰۶) می‌بینیم که

$$c_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}.$$

۲۰۰۶ فرمول ردریگوز برای چندجمله‌ایهای لژاندر

در مجموع (۴۲۰۶) معرف $P_n(x)$ ملاحظه می‌شود که

$$\frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!}\, x^{n-2r} = \frac{d^n}{dx^n}\, x^{2n-2r} \qquad \text{و} \qquad \frac{1}{r!\,(n-r)!} = \frac{1}{n!}\binom{n}{r} ،$$

که درآن $\binom{n}{r}$ ضریب دوجمله‌ای است، و مجموع را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \binom{n}{r} x^{2n-2r}.$$

وقتی $[n/2] < r \le n$ ، جملهٔ x^{2n-2r} دارای درجه‌ای کمتر از n است؛ درنتیجه، مشتق n م آن صفر می‌باشد. بنابر این، اگر r مجاز به تغییر از 0 تا n باشد، مجموع تغییر نخواهد کرد. این نتیجه می‌دهد که

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} x^{2n-2r}.$$

حال می‌بینیم کــه مجموع سمت راست بسط دوجمله‌ای $(x^2-1)^n$ است. بنابراین، داریم

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n.$$

این فرمول، به‌افتخار اولیند ردریگوز [1] (۱۸۵۱ – ۱۷۹۴)، اقتصاددان و مصلح فرانسوی، به **فرمول ردریگوز** معروف شده است.

با استفاده‌ازفرمول ردریگوز و معادلهٔ دیفرانسیل، می‌توان چند خاصیت مهم‌چند جمله‌ایهای لژاندر را نتیجه گرفت. بعضی از این خواص درزیر ذکر شده‌اند. برهانهای آنها در مجموعه تمرینات بعدی به‌اختصار بیان می‌شوند.

به‌ازای هر $n \geq 0$ داریم

$$P_n(1) = 1.$$

بعلاوه، $P_n(x)$ تنها چندجمله‌ای است که در معادلهٔ لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

صدق می‌کند و، وقتی $x = 1$، دارای مقدار 1 می‌باشد.

به‌ازای هر $n \geq 0$ داریم

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

این‌نشان‌می‌دهد که P_n، وقتی n زوج باشد، یک تابع زوج، و، وقتی n فرد باشد، یک تابع فرد می‌باشد.

ما قبلاً رابطهٔ تعامدی را ذکر کرده‌ایم:

اگر $m \neq n$، $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0$.

وقتی $m = n$، رابطهٔ نرمی زیر را داریم:

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

هرچند جملــه‌ای درجــهٔ n را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از چند جمله‌ایهای

---

1. Olinde Rodrigues

لژانـدر $P_0, P_1, \ldots, P_n$ بیان کرد . در واقع ، اگر f یک چندجمله‌ای درجهٔ n باشد ، داریم

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x),$$

که درآن

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x)\, dx.$$

ازرابطهٔ تعامدی نتیجه می‌شود که ، به‌ازای هرچند جمله‌ای g از درجهٔ کمتر از n ،

$$\int_{-1}^{1} g(x) P_n(x)\, dx = 0 .$$

این خاصیت را می‌تـوان به‌کاربرد و ثابت کرد که چندجمله‌ای لژاندر P_n دارای n صفر حقیقی متمایز است و همه دربازهٔ باز $(-1, 1)$ قرار دارند .

۲۱۰۶ تمرین

۱ . معادلهٔ لژاندر (۳۵۰۶) به‌ازای $\alpha = 0$ دارای جواب چندجمله‌ای $u_1(x) = 1$ و یک جواب u_2 است ،که چندجمله‌ای نیست ، و با سری معادلهٔ (۴۱۰۶) داده‌می‌شود .

(آ) نشان دهید که مجموع سری مربوط‌به u_2 از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$u_2(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \quad \text{،} \quad |x| < 1 \text{ به‌ازای}$$

(ب) مستقیما "تحقیق کنید که تابع u_2 در قسمت (آ) ، وقتی $\alpha = 0$ ، یک‌جواب معادلهٔ لژاندر است .

۲ . نشان دهید که تابع f تعریف شده با معادلهٔ

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

به‌ازای $|x| < 1$ در معادلهٔ لژاندر (۳۵۰۶) به‌ازای $\alpha = 1$ صدق می‌کند . این تابع را بـه‌صورت ترکیبی‌خطی‌ازجوابهای u_1 و u_2 داده شده با معادلات (۳۸۰۶) و (۳۹۰۶) بیان نمایید .

۳ . معادلهٔ لژاندر (۳۵۰۶) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$[(x^2 - 1)y']' - \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$

(آ) هرگاه a, b, c ثابت بوده و $a > b$ و $4c + 1 > 0$ ، نشان دهید که یک معادلهٔ دیفرانسیل از نوع

$$[(x - a)(x - b)y']' - cy = 0$$

را می‌توان با تغییر متغیری به‌شکل $x = At + B$ ، که $A > 0$ ، به یک معادلهٔ لژاندر تبدیل کرد. A و B را برحسب a و b معین نمایید.

(ب) با استفاده از روش قسمت (آ)، معادلهٔ

$$(x^2 - x)y'' + (2x - 1)y' - 2y = 0$$

را به یک معادلهٔ لژاندر تبدیل نمایید.

۴ . دو جواب مستقل به صورت سری توانی **معادلهٔ هرمیتی**

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$$

را بر بازه‌ای به‌شکل $(-r, r)$ پیدا کنید. نشان دهید که یکی از اینها، وقتی α یک عدد صحیح نامنفی باشد، یک چندجمله‌ای می‌باشد.

۵ . یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$xy'' + (3 + x^3)y' + 3x^2y = 0$$

را به‌صورت سری توانی بیابید که به‌ازای هر x معتبر باشد، جواب دوم را به شکل $y = x^{-2} \sum a_n x^n$ بیابید که به‌ازای هر $x \neq 0$ معتبر باشد.

۶ . یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y'' + x^2y' - (\alpha x + 2)y = 0$$

را به‌صورت سری توانی بیابید که بر بازه‌ای به شکل $(-r, r)$ معتبر باشد.

۷ . فرض کنید دوتابع A و B بر بازهٔ $(x_0 - r, x_0 + r)$ تحلیلی باشند؛ مثلاً ،

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n.$$

می‌توان نشان داد که حاصل‌ضرب $C(x) = A(x)B(x)$ نیز بر $(x_0 - r, x_0 + r)$ تحلیلی است. این تمرین نشان می‌دهد که C دارای بسط به‌صورت سری توانی زیر است:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \text{، که درآن } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

(آ) با استفاده از قاعدهٔ لایب نیتز برای مشتق n م حاصل ضرب، نشان دهید

که مشتق n ام C مساوی است با

$$C^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{(k)}(x) B^{(n-k)}(x).$$

(ب) حال، با استفاده از این امر که $A^{(k)}(x_0) = k!\,a_k$ و $B^{(n-k)}(x_0) = (n-k)!\,b_{n-k}$، نتیجه بگیرید که

$$C^{(n)}(x_0) = n! \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

چون $C^{(n)}(x_0) = n!\,c_n$ ، این فرمول مطلوب برای c_n را ثابت خواهد کرد.

در تمرینهای ۸ تا ۱۴ ، $P_n(x)$ چند جملهای لژاندر درجهٔ n است. این تمرینها اثبات خواص چندجملهایهای لژاندر را که در بخش ۶.۲۰ توصیف شدهاند بهاختصار شرح می‌دهند.

۸ . (آ) با استفاده از فرمول ردریگوز، نشان دهید

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}(x+1)^n + (x-1)Q_n(x),$$

که درآن $Q_n(x)$ یک چندجملهای است.

(ب) ثابت کنید $P_n(1) = 1$ و $P_n(-1) = (-1)^n$.

(پ) ثابت کنید $P_n(x)$ تنها جواب چندجملهای معادلهٔ لژاندر (با $\alpha = n$) است که در $x = 1$ مقدار یک دارد.

۹ . (آ) با استفاده از معادلات دیفرانسیل برقرار بهوسیلهٔ P_n و P_m ، نشان دهید که

$$[(1-x^2)(P_n P'_m - P'_n P_m)]' = [n(n+1) - m(m+1)]P_n P_m.$$

(ب) هرگاه $m \neq n$ ، با انتگرالگیری از معادلهٔ قسمت (آ) از -1 تا 1 ، برهان دیگری برای رابطهٔ تعامدی

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0$$

به دست آورید.

۱۰ . (آ) فرض‌کنید $f(x) = (x^2-1)^n$. با استفاده از انتگرالگیری به طریقهٔ جزءبهجزء، نشان دهید که

$$\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)f^{(n)}(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} f^{(n+1)}(x)f^{(n-1)}(x)\,dx.$$

این فرمول را چندبار به‌کار برده، نتیجه بگیرید که انتگرال سمت چپ مساوی

$$2(2n)!\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$$

است.

(ب) جانشانی $x=\cos t$ انتگرال $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$ را به $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt$ بدل می‌کند. با استفاده از رابطهٔ

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$$

و فرمول ردریگوز، نتیجه بگیرید که

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

۱۱. (آ) نشان دهید

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n + Q_n(x),$$

که درآن $Q_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ کمتر از n است.

(ب) چندجمله‌ای $f(x)=x^4$ را به‌صورت ترکیبی خطی از P_0، P_1، P_2، P_3، و P_4 بیان کنید.

(پ) نشان دهید که هرچند جمله‌ای f از درجهٔ n را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از چندجمله‌ایهای لژاندر $P_0, P_1, \ldots, P_n$ بیان کرد.

۱۲. (آ) اگر f یک چندجمله‌ای درجهٔ n باشد، می‌نویسیم

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x).$$

[این امر، بجهت تمرین ۱۱ (پ)، میسر است.] به‌ازای یک m ثابت، که $0 \le m \le n$، دوطرف این معادله را در $P_m(x)$ ضرب کرده از -1 تا 1 انتگرال می‌گیریم. با استفاده از تمرینهای ۹ (ب) و ۱۰ (ب)، رابطهٔ زیر را نتیجه بگیرید:

$$c_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)\,dx.$$

۱۳ . با استفاده از تمرینهای ۹ و ۱۱ ، نشان دهید که ، به‌ازای هرچند جمله‌ای g از درجهٔ کمتر از n ، $\int_{-1}^{1} g(x)P_n(x)\,dx = 0$.

۱۴ . (آ) با استفاده از قضیهٔ رل ، نشان دهید که P_n نمی‌تواند در بازهٔ باز $(-1, 1)$ صفر مکرر داشته باشد . به‌عبارت دیگر ، هرصفر P_n واقع در $(-1, 1)$ باید یک صفر ساده باشد .

(ب) فرض‌کنیم P_n در بازهٔ $(-1, 1)$ دارای m صفر باشد . اگر $m = 0$ ، فرض کنید $Q_0(x) = 1$ ؛ و اگر $m \geq 1$ ، فرض کنید

$$Q_m(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m),$$

که درآن $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ، m صفر P_n در $(-1, 1)$ اند . نشان دهید که ، درهر نقطهٔ x از $(-1, 1)$ ، $Q_m(x)$ با $P_n(x)$ همعلامت است .

(پ) با استفاده از قسمت (ب) ، همراه با تمرین ۱۳ ، نشان دهید که نامساوی $m < n$ به تناقض می‌رسد . این نشان می‌دهد که P_n دارای n صفر حقیقی متمایز است ، که همهٔ آنها در بازهٔ باز $(-1, 1)$ قرار دارند .

۱۵ . (آ) نشان دهید که مقدار انتگرال $\int_{-1}^{1} P_n(x)P'_{n+1}(x)\,dx$ از n مستقل است .

(ب) انتگرال $\int_{-1}^{1} x\,P_n(x)P_{n-1}(x)\,dx$ را محاسبه نمایید .

۶.۲۲ روش فروبنیوس

در بخش ۶.۱۷ آموختیم که جوابهای به‌صورت سری توانی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \qquad (۶.۴۳)$$

در یک بازه حول نقطهٔ x_0 که درآن ضرایب P_1 و P_2 تحلیلی‌اند را چطور پیدا کنیم . اگر P_1 یا P_2 در مجاورت x_0 تحلیلی نباشد ، جوابهای به‌صورت سری توانی معتبر در مجاورت x_0 ممکن است موجود باشند یا که نباشند . به‌عنوان مثال ، فرض‌کنید بخواهیم یک جواب به‌صورت سری توانی معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y'' - y' - y = 0 \qquad (۶.۴۴)$$

را درنزدیکی $x_0 = 0$ بیابیم . اگرفرض‌کنیم جوابی چون $y = \sum a_k x^k$ وجود داشته باشد ، و این سری را در معادلهٔ دیفرانسیل بگذاریم ، به‌فرمول بازگشتی

$$a_{n+1} = \frac{n^2 - n - 1}{n + 1}\,a_n$$

خواهیم رسید . اگرچه با این‌کار سری توانی $y = \sum a_k x^k$ حاصل می‌شود که به‌طور صوری در (۴۴۰۶) صدق می‌کند ، آزمون نسبت نشان می‌دهد که این سری توانی **فقط** به‌ازای $x = 0$ همگرا است . بنابراین، هیچ جوابی از (۴۴۰۶) به‌صورت سری توانی که دربازهٔ بازی حول $x_0 = 0$ معتبر باشدوجود ندارد . این مثال قضیهٔ ۱۳۰۶ را از کار نمی‌اندازد ، زیرا ، وقتی معادلهٔ (۴۴۰۶) را به‌شکل (۴۳۰۶) درمی‌آوریم ، درمی‌یابیم که ضرایب P_1 و P_2 عبارتند از

$$P_1(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{و} \qquad P_2(x) = -\frac{1}{x^2} \; .$$

این توابع حول مبداء بسط به‌صورت سری توانی ندارند . مشکل در اینجا این است که ضریب y'' در (۴۴۰۶) ، وقتی $x = 0$ ، دارای مقدار 0 است ؛ به‌عبارت دیگر ، معادلهٔ دیفرانسیل در $x = 0$ نقطهٔ منفرد دارد .

برای درک مشکلات بررسی معادلات دیفرانسیل در مجاورت یک نقطهٔ منفرد به اطلاعاتی از نظریهٔ توابع یک متغیر مختلط نیاز داریم . با اینحال، چند حالت خاص و مهم ازمعادلات با نقاط منفرد وجود دارند که می‌توان آنها را با روشهای مقدماتی بررسی کرد . مثلاً ، فرض کنیم معادلهٔ دیفرانسیل (۴۳۰۶) بامعادله‌ای به شکل

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (۴۵۰۶)$$

معادل باشد ، که درآن P و Q دربازهٔ بازی چون $(x_0 - r, x_0 + r)$ بسط به‌صورت سری توانی دارند . دراین حالت ، می‌گوییم x_0 یک نقطهٔ منفرد **منتظم** معادله است . اگر دو طرف (۴۵۰۶) را بر $(x - x_0)^2$ تقسیم کنیم ، معادله به‌ازای $x \neq x_0$ خواهد شد

$$y'' + \frac{P(x)}{x - x_0} y' + \frac{Q(x)}{(x - x_0)^2} y = 0 \; .$$

اگر $P(x_0) \neq 0$ یا $Q(x_0) \neq 0$ ، یا اگر $Q(x_0) = 0$ و $Q'(x_0) \neq 0$ ، ضریب y' یا ضریب y حول نقطهٔ x_0 بسط به صورت سری توانی ندارد ؛ درنتیجه، قضیهٔ ۱۳۰۶ قابل اجرا نیست . درسال ۱۸۷۳ ، ریاضیدان آلمانی ، گئورگ فروبنیوس[1] (۱۸۴۹ – ۱۹۱۷) ، روش مفیدی برای بررسی این معادلات ارائه داد . ما قضیهٔ فروبنیوس را ذکر می‌کنیم امابرهانش

---

1. Georg Frobenius

را عرضه نخواهیم کرد.* در بخش‌بعد، برهان حالت خاص و مهمی از آن، یعنی معادلهٔ بسل[1]، به تفصیل بیان خواهد شد.

قضیهٔ فروبنیوس، بسته به سرشت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

$$t(t-1)+P(x_0)t+Q(x_0)=0, \qquad (۴۶\cdot۶)$$

به‌دوقسمت تقسیم می‌شود. این معادلهٔ درجهٔ دوم *معادلهٔ اندیسی* معادلهٔ دیفرانسیل (۴۵۰۶) است. ضرایب $P(x_0)$ و $Q(x_0)$ جملات ثابت در بسطهای P و Q به‌صورت سری توانی‌اند. فرض کنیم α_1 و α_2 ریشه‌های معادلهٔ اندیسی باشند. این ریشه‌ها ممکن است حقیقی یا مختلط، مساوی یا متمایز، باشند؛ نوع جوابی که به‌وسیلهٔ روش فروبنیوس به‌دست می‌آید تابع آن‌است که این ریشه‌ها به‌قدر عددی صحیح با هم تفاوت دارند یا نه.

قضیهٔ ۱۴۰۶ . حالت اول قضیهٔ فروبنیوس. *فرض کنیم α_1 و α_2 ریشه‌های معادلهٔ اندیسی بوده و $\alpha_2-\alpha_1$ یک عدد صحیح نباشد. دراین صورت، معادلهٔ دیفرانسیل (۴۵۰۶) دوجواب مستقل u_1 و u_2 به شکل زیر دارد:*

$$u_1(x)=|x-x_0|^{\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \quad \text{با} \quad a_0=1 \qquad (۴۷\cdot۶)$$

$$u_2(x)=|x-x_0|^{\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n \quad \text{با} \quad b_0=1. \qquad (۴۸\cdot۶)$$

هر دو سری در بازهٔ $|x-x_0|<r$ همگرایند، و معادلهٔ دیفرانسیل به‌ازای $0<|x-x_0|<r$ برقرار می‌باشد.

قضیهٔ ۱۵۰۶ . حالت دوم قضیهٔ فروبنیوس. *فرض کنیم α_1 ، α_2 ریشه‌های معادلهٔ اندیسی بوده، و $\alpha_1-\alpha_2=N$ ، یعنی مساوی عددی صحیح و نامنفی باشد. دراین*

---

* *برای مشاهدهٔ برهانی از آن، ر.ک.*

E. Hille, *Analysis*, Vol. II, Blaisdell Publishing Co., 1966

یا

E. A. Coddington, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, 1961.

1. Bessel

صورت ، معادلهٔ دیفرانسیل (۴۵.۶) جوابی مانند u_1 به شکل (۴۷.۶) و جواب مستقل دیگری مانند u_2 به شکل زیر دارد :

$$u_2(x) = |x - x_0|^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n + C\, u_1(x) \log |x - x_0| , \qquad (۴۹.۶)$$

که درآن $b_0 = 1$. ثابت C ، درصورت $N = 0$ ، ناصفر است . اگر $N > 0$ ، ثابت C ممکن است صفر باشد یا نباشد . مثل حالت ۱ ، هر دو سری در بازهٔ $|x - x_0| < r$ همگراست ، و جوابها به‌ازای $0 < |x - x_0| < r$ معتبر می‌باشند .

۲۳.۶ معادلهٔ بسل

در این بخش، با استفاده از روش فروبنیوس، معادلهٔ بسل

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

را ،که درآن α یک ثابت نامنفی است ، حل می‌کنیم . این معادله در مسائل مربوط به‌ارتعاشات جداره‌ها ، جریان‌گرما در سیلندرها ، وانتشار جریانات الکتریکی درهادیهای استوانه‌ای به‌کار می‌آید . بعضی از جوابهای آن به **معادلات بسل** معروفند . توابع بسل در بعضی مسائل نظریهٔ تحلیلی اعداد نیز ظاهر می‌شوند .

این معادله ، با اینکه قبلاً " در تحقیقات دانیل برنولی[1] (۱۷۳۲) و اویلر (۱۷۶۴) آمده است ، به افتخار ستاره‌شناس‌آلمانی ، اف . دبلیو ، بسل (۱۸۴۶ — ۱۷۸۴) ، به معادلهٔ بسل معروف است .

معادلهٔ‌بسل به شکل (۴۵.۶) است با $x_0 = 0$ ، $P(x) = 1$ ، و $Q(x) = x^2 - \alpha^2$ ؛ در نتیجه ، نقطهٔ x_0 یک نقطهٔ منفرد منتظم است . چون P و Q بر تمام خط حقیقی تحلیلی است ، سعی می‌کنیم جوابها را به‌شکل

$$y = |x|^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (۵۰.۶)$$

پیدا کنیم با $a_0 \neq 0$ ، که به‌ازای هر x حقیقی با استثنای احتمالی $x = 0$ معتبرباشد .

ابتدا x را بزرگتر از 0 می‌گیریم ؛درنتیجه ، $|x|^t = x^t$. مشتقگیری از (۵۰.۶) نتیجه می‌دهد که

---

1. Daniel Bernoulli

$$y' = tx^{t-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^t \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x^{t-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+t)a_n x^n.$$

بهمین نحو ، داریم

$$y'' = x^{t-2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+t)(n+t-1)a_n x^n.$$

اگر $L(y) = x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y$ ، معلوم می‌شود که

$$L(y) = x^t \sum_{n=0}^{\infty}(n+t)(n+t-1)a_n x^n + x^t \sum_{n=0}^{\infty}(n+t)a_n x^n$$

$$+ x^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - x^t \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^2 a_n x^n = x^t \sum_{n=0}^{\infty}[(n+t)^2 - \alpha^2]a_n x^n + x^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}.$$

حال قرار می‌دهیم $L(y) = 0$ ، x^t را حذف می‌کنیم ، و سعی می‌کنیم a_n را طوری‌تعیین کنیم که ضریب هرتوان x صفر شود . برای جملهٔ ثابت لازم داریم که $(t^2 - \alpha^2)a_0 = 0$. چون جوابی را می‌خواهیم که درآن $a_0 \neq 0$ ، این ایجاب می‌کند که

$$t^2 - \alpha^2 = 0. \qquad (۵۱.۶)$$

این **معادلهٔ اندیسی** است . ریشه‌هایش α و $-\alpha$ تنها مقادیر ممکن t اند که می‌توانند جوابی از نوع مطلوب به‌ما بدهند .

ابتدا انتخاب $t = \alpha$ را درنظر می‌گیریم . به‌ازای این t ، بقیهٔ معادلات برای تعیین ضرایب خواهند شد

$$[(1+\alpha)^2 - \alpha^2]a_1 = 0 \text{ و } [(n+\alpha)^2 - \alpha^2]a_n + a_{n-2} = 0 \text{ به‌ازای } n \geq 2 . \qquad (۵۲.۶)$$

چون $\alpha \geq 0$ ، اولین معادله ایجاب می‌کند که $a_1 = 0$. دومین فرمول را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+\alpha)^2 - \alpha^2} = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\alpha)}; \qquad (۵۳.۶)$$

درنتیجه ، $a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = 0$. برای ضرایب با زیرنویسهای زوج داریم

$$a_2 = \frac{-a_0}{2(2+2\alpha)} = \frac{-a_0}{2^2(1+\alpha)}, \qquad a_4 = \frac{-a_2}{4(4+2\alpha)} = \frac{(-1)^2 a_0}{2^4 2!\,(1+\alpha)(2+\alpha)},$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{6(6+2\alpha)} = \frac{(-1)^3 a_0}{2^6 3!\,(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)},$$

و ، بطور کلی ،

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n!\,(1+\alpha)(2+\alpha)\cdots(n+\alpha)}\,.$$

بنابراین ، انتخاب $t = \alpha$ به‌ما جواب

$$y = a_0 x^\alpha \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!\,(1+\alpha)(2+\alpha)\cdots(n+\alpha)}\right)$$

را می‌دهد . آزمون نسبت نشان می‌دهد که سری توانی در این فرمول به‌ازای هر x حقیقی همگراست .

در این بحث فرض کرده‌ایم $0 < x$. اگر $0 > x$ ، می‌توان بحث را با تعویض x^t به $(-x)^t$ تکرار کرد . مجدداً " درمی‌یابیم که t باید در معادلهٔ $t^2 - \alpha^2 = 0$ صدق کند . با اختیار $t = \alpha$ ، همان جواب به‌دست می‌آید ، جز آنکه سازهٔ خارجی x^α با $(-x)^\alpha$ عوض شده است . بنابراین ، تابع f_α که با معادلهٔ

$$f_\alpha(x) = a_0\,|x|^\alpha \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!\,(1+\alpha)(2+\alpha)\cdots(n+\alpha)}\right) \qquad (۵۴\cdot۶)$$

داده‌شده ، یک جواب معادلهٔ بسل است که به‌ازای هر $x \neq 0$ حقیقی معتبر می‌باشد . برای آن مقادیر α که $f'_\alpha(0)$ و $f''_\alpha(0)$ موجودند ، جواب به‌ازای $x = 0$ نیز معتبر می‌باشد .

حال ریشهٔ $t = -\alpha$ معادلهٔ اندیسی را درنظر می‌گیریم . به‌جای (۵۲۰۶) ، معادلات

$$[(1-\alpha)^2 - \alpha^2]a_1 = 0 \qquad \text{و} \qquad [(n-\alpha)^2 - \alpha^2]a_n + a_{n-2} = 0$$

را خواهیم داشت ، که خواهند شد

$$(1-2\alpha)a_1 = 0 \qquad \text{و} \qquad n(n-2\alpha)a_n + a_{n-2} = 0\,.$$

اگر 2α عددی صحیح نباشد ، این معادلات نتیجه می‌دهند که $a_1 = 0$ و ، به‌ازای $n \geq 2$ ،

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-2\alpha)}\,.$$

چون این فرمول بازگشتی همان فرمول (۵۳۰۶) است ، با $-\alpha$ به‌جای α ، به‌جواب

$$f_{-\alpha}(x) = a_0\,|x|^{-\alpha} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!\,(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)}\right) \qquad (۵۵\cdot۶)$$

می‌رسیم ، که‌به‌ازای هر $x \neq 0$ حقیقی معتبر است .

جواب $f_{-\alpha}$ با این فرض به‌دست آمده بود که 2α یک عدد صحیح مثبت نباشد . اما ،

سری برای $f_{-\alpha}$ ، حتی‌اگر 2α عدد صحیح مثبت باشد ، نیز با معنی است ، البته تاجایی که α یک عدد صحیح مثبت نباشد . می‌توان تحقیق کرد که $f_{-\alpha}$ به‌ازای چنین α ای در معادلهٔ بسل صدق می‌کند . بنابراین ، به‌ازای هر $\alpha \geq 0$ ، جواب به‌صورت سری f_α را داریم که با معادلهٔ (۵۴.۶) داده می‌شود ؛ و اگر α یک عدد صحیح نامنفی نباشد ، جواب دیگر $f_{-\alpha}$ را یافته‌ایم که با معادلهٔ (۵۵.۶) داده شده است . دو جواب f_α و $f_{-\alpha}$ مستقل‌اند ، زیرا یکی از آنها ، وقتی $x \to 0$ ، به ∞ میل می‌کند ، و دیگری نخواهد کرد . حال شکل جوابها را ساده می‌نماییم . برای این‌کار ، به‌چند خاصیت از تابع گامای اویلر نیاز داریم ، و برای یادآوری این خواص کمی از بحث خود خارج می‌شویم .

به‌ازای هر $s > 0$ حقیقی ، $\Gamma(s)$ را با انتگرال مجازی

$$\Gamma(s) = \int_{0+}^{\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$$

تعریف می‌کنیم . این انتگرال اگر $s > 0$ همگرا و ، اگر $s \leq 0$ ، واگراست . انتگرالگیری به‌طریقهٔ جزءبه‌جزء به معادلهٔ تابعی زیر منجر می‌شود :

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s). \qquad (۵۶.۶)$$

این ایجاب می‌کند که

$$\Gamma(s+2) = (s+1)\Gamma(s+1) = (s+1)s\,\Gamma(s),$$
$$\Gamma(s+3) = (s+2)\Gamma(s+2) = (s+2)(s+1)s\,\Gamma(s),$$

و ، بطور کلی ، به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n ،

$$\Gamma(s+n) = (s+n-1)\cdots(s+1)s\,\Gamma(s)\,. \qquad (۵۷.۶)$$

چون $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$ ، وقتی در (۵۷.۶) قرار دهیم $s = 1$ ، درمی‌یابیم که

$$\Gamma(n+1) = n!$$

بنابراین ، تابع گاما تعمیمی است از تابع فاکتوریل از اعداد صحیح به اعداد حقیقی مثبت .

معادلهٔ تابعی (۵۶.۶) را می‌توان برای تعمیم تعریف $\Gamma(s)$ به مقادیر منفی s که اعدادی صحیح نیستند به‌کار برد . معادلهٔ (۵۶.۶) را به‌شکل زیر می‌نویسیم :

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}. \qquad (۵۸.۶)$$

طرف راست با معنی است اگر $s + 1 > 0$ و $s \neq 0$. بنابر این، می‌توان، با استفاده از این معادله، $\Gamma(s)$ را به‌ازای $-1 < s < 0$ **تعریف کرد**. حال طرف راست (۵۸۰۶) با معنی است اگر $s + 2 > 0, s \neq -1, s \neq 0$ ، و می‌توان، با استفاده از این معادله، $\Gamma(s)$ را به‌ازای $-2 < s < -1$ تعریف نمود. اگر به همین نحو ادامه دهیم، می‌توانیم تعریف $\Gamma(s)$ را به‌استقرا به هر بازهٔ باز به شکل $-n < s < -n + 1$ ، که درآن n یک عدد صحیح مثبت است، تعمیم داد. حال معادلهٔ تابعی (۵۶۰۶) و تعمیم آن به (۵۷۰۶) به‌ازای هر s حقیقی که دو طرف با معنی باشند معتبر است.

حال به بحث معادلهٔ بسل باز می‌گردیم. سری مربوط به f_α در معادلهٔ (۵۴۰۶) شامل حاصل ضرب $(1 + \alpha)(2 + \alpha)\cdots(n + \alpha)$ است. این حاصل‌ضرب را می‌توان، با اختیار $s = 1 + \alpha$ در (۵۷۰۶)، برحسب تابع گاما بیان کرد. این نتیجه می‌دهد که

$$(1 + \alpha)(2 + \alpha)\cdots(n + \alpha) = \frac{\Gamma(n + 1 + \alpha)}{\Gamma(1 + \alpha)}.$$

بنابراین، اگر $a_0 = 2^{-\alpha}/\Gamma(1 + \alpha)$ را در معادلهٔ (۵۴۰۶) اختیار کنیم، و تابع حاصل $f_\alpha(x)$ را، وقتی $x > 0$ ، با $J_\alpha(x)$ نشان دهیم، جواب به‌ازای $x > 0$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

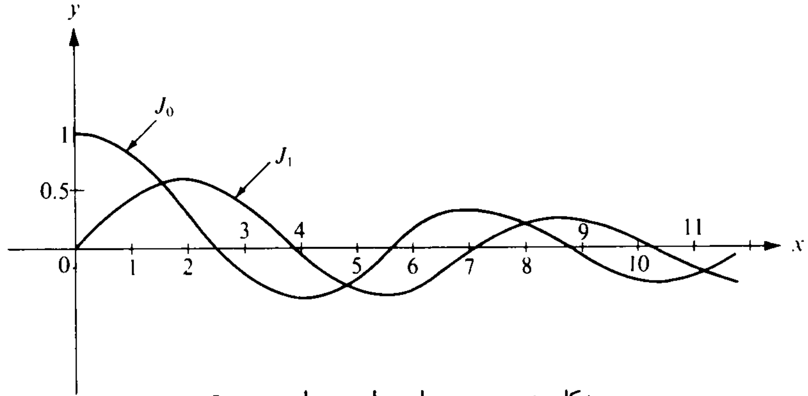
$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n + 1 + \alpha)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \qquad (۵۹۰۶)$$

تابع J_α تعریف شده با این معادله به‌ازای $x > 0$ و $\alpha \geq 0$ **تابع بسل نوع اول مرتبهٔ** α نامیده می‌شود. وقتی α یک عدد صحیح نامنفی باشد، مثلاً $\alpha = p$ ، تابع بسل J_p با سری توانی زیر داده می‌شود:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n + p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots).$$

این یک جواب معادلهٔ بسل به‌ازای $x < 0$ نیزهست. جداول مبسوطی از توابع بسل ساخته شده‌اند. نمودار دوتابع J_0 و J_1 در شکل ۲۰۶ نشان داده شده است.

حال تابع جدید $J_{-\alpha}$ را با تعویض α به $-\alpha$ در معادلهٔ (۵۹۰۶) تعریف می‌کنیم، درصورتی که α طوری باشد که $\Gamma(n + 1 - \alpha)$ معنی داشته باشد؛ یعنی، α یک عدد صحیح مثبت نباشد. بنابراین، اگر $x > 0$ و $\alpha > 0$ ، $\alpha \neq 1, 2, 3, \ldots$ ، تعریف می‌کنیم



شکل ۲۰۶ نمودار توابع بسل J_0 و J_1

$$J_{-\alpha}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1-\alpha)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

با فرض $s = 1 - \alpha$ در (۵۷۰۶)، خواهیم داشت

$$\Gamma(n+1-\alpha) = (1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha),$$

و ملاحظه می‌کنیم که سری مربوط به $J_{-\alpha}(x)$ همان سری مربوط به $f_{-\alpha}(x)$ در معادلهٔ (۵۵۰۶) به‌ازای $a_0 = 2^{\alpha}/\Gamma(1-\alpha),\ x > 0$ است. بنابراین، اگر α یک عدد صحیح مثبت نباشد، $J_{-\alpha}$ یک جواب معادلهٔ بسل به‌ازای $x > 0$ می‌باشد.

اگر α یک عدد صحیح نباشد، دو جواب $J_{\alpha}(x)$ و $J_{-\alpha}(x)$ بر محور حقیقی مثبت (بدلیل اینکه نسبت آنها ثابت نیست) مستقل خطی‌اند، و جواب عمومی معادلهٔ بسل به‌ازای $x > 0$ مساوی است با

$$y = c_1 J_{\alpha}(x) + c_2 J_{-\alpha}(x).$$

اگر α یک عدد صحیح نامنفی باشد، مثلاً $\alpha = p$ ، فقط دریافته‌ایم که جواب J_p و ضرایب ثابت آن به‌ازای $x > 0$ معتبرند. جواب دیگر، مستقل از این یکی، را می‌توان به روش توصیف شده در تمرین ۴ از بخش ۱۶۰۶ به‌دست آورد. این روش بیان می‌کند که، اگر u_1 یک جواب $y'' + P_1 y' + P_2 y = 0$ باشد که هرگز بر بازهٔ I صفرنشود، جواب دوم u_2 مستقل از u_1 با انتگرال

$$u_2(x) = u_1(x) \int_c^x \frac{Q(t)}{[u_1(t)]^2}\,dt$$

داده می‌شود، که در آن $Q(x) = e^{-\int P_1(x)dx}$. برای معادلهٔ بسل داریم $P_1(x) = 1/x$ ؛ درنتیجه، $Q(x) = 1/x$ و جواب دوم u_2 با فرمول

$$u_2(x) = J_p(x) \int_c^x \frac{1}{t[J_p(t)]^2}\, dt \tag{۶۰.۶}$$

داده می‌شود، درصورتی‌که c و x دربازهٔ I که درآن J_p صفر نمی‌شود قرار داشته باشند.

این جواب دوم را می‌توان به شکلهای دیگر درآورد. مثلاً، از معادلهٔ (۵۹.۶) می‌توان نوشت

$$\frac{1}{[J_p(t)]^2} = \frac{1}{t^{2p}}\, g_p(t),$$

که درآن $g_p(0) \neq 0$. دربازهٔ I ، تابع g_p دارای بسط به‌صورت سری توانی

$$g_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$$

است، که می‌توان‌آن‌را با متحد گرفتن ضرایب دراتحاد $g_p(t)\,[J_p(t)]^2 = t^{2p}$ تعیین‌کرد.

اگر وجود این بسط را فرض‌کنیم، انتگرالده در (۶۰.۶) شکل زیر را خواهد گرفت:

$$\frac{1}{t[J_p(t)]^2} = \frac{1}{t^{2p+1}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n .$$

با انتگرالگیری جمله‌به‌جمله از این فرمول از c تا x ، یک جملهٔ لگاریتمی $A_{2p} \log x$ (از توان t^{-1}) به‌انضمام یک‌سری بـه شکل $x^{-2p} \sum B_n x^n$ به‌دست می‌آید. بنابراین، معادلهٔ (۶۰.۶) شکل زیر را خواهد گرفت:

$$u_2(x) = A_{2p} J_p(x) \log x + J_p(x) x^{-2p} \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n .$$

می‌توان نشان داد کـه $A_{2p} \neq 0$. اگر $u_2(x)$ را در $1/A_{2p}$ ضرب کنیـم، جواب حاصل با $K_p(x)$ نموده می‌شود و به‌شکل زیر می‌باشد:

$$K_p(x) = J_p(x) \log x + x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n .$$

این شکل جـوابـی است که حالت دوم قضیهٔ فروبنیوس قول داده است.

با رسیدن به‌این‌فرمول، می‌توان تحقیق کرد که یک جواب به این شکل عملاً وجود دارد، بـه‌این تـرتیب که طرف راست را در معادلهٔ بسل گذاشته و ضرایب C_n را طوری

تعیین کرد که معادله برقرار شود. این محاسبات طولانی دارد و، درنتیجه، حذف شده است. نتیجهٔ نهایی را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$K_p(x) = J_p(x)\log x - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{p}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{h_n+h_{n+p}}{n!\,(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

که درآن $h_0 = 0$ و، به‌ازای $n \geq 1$ ، $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + 1/n$. سری سمت راست به‌ازای هر x حقیقی همگراست. تابع K_p ، که به‌ازای $x > 0$ با این فرمول تعریف شده است، **تابع بسل نوع دوم مرتبهٔ** p نامیده می‌شود. چون K_p مضرب ثابتی از J_p نیست، جواب عمومی معادلهٔ بسل دراین حالت به‌ازای $x > 0$ عبارت است از

$$y = c_1J_p(x) + c_2K_p(x).$$

خواص دیگر توابع بسل در مجموعه تمرینات زیر مطرح شده‌اند.

۲۴.۶ تمرین

۱. (آ) فرض کنید f یک جواب معادلهٔ بسل مرتبهٔ α بوده و، به‌ازای $x > 0$ ، $g(x) = x^{1/2}f(x)$. نشان دهید که g در معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + \left(1 + \frac{1-4\alpha^2}{4x^2}\right)y = 0$$

صدق می‌کند.

(ب) وقتی $4\alpha^2 = 1$ ، معادلهٔ دیفرانسیل در (آ) خواهد شد $y'' + y = 0$ ؛ جواب عمومی آن $y = A\cos x + B\sin x$ است. با این اطلاعات و معادلهٔ* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ، نشان دهید که، به‌ازای $x > 0$ ،

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\sin x \quad \text{و} \quad J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\cos x\,.$$

---

* تغییر متغیر $t = u^2$ نتیجه می‌دهد که

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_{0+}^{\infty} t^{-1/2}e^{-t}\,dt = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}.$$

(برای اثبات اینکه $2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$ ، ر.ک. تمرین ۱۶ از بخش ۱۱.۲۸).

(پ) فرمولهای قسمت (ب) را مستقیما " از سریهای مربوط به $J_{1/2}(x)$ و $J_{-1/2}(x)$ نتیجه بگیرید .

۲ . با استفاده از نمایش سری برای توابع بسل، نشان دهید که

(آ) $\frac{d}{dx}(x^{\alpha}J_{\alpha}(x)) = x^{\alpha}J_{\alpha-1}(x)$ ؛

(ب) $\frac{d}{dx}(x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)) = -x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)$.

۳ . فرض‌کنید به‌ازای $x > 0$ ، $F_{\alpha}(x) = x^{\alpha}J_{\alpha}(x)$ و $G_{\alpha}(x) = x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)$. توجه کنید که‌هر صفر مثبت J_{α} یک صفر F_{α} و نیز یک صفر G_{α} است . با استفاده از قضیهٔ رل‌و تمرین ۲ ، ثابت کنید صفرهای مثبت J_{α} و $J_{\alpha+1}$ بهم بافته شده‌اند ؛ یعنی ، بین هر جفت صفر مثبت J_{α} ، یک صفر $J_{\alpha+1}$ ، و بین هر جفت صفر مثبت $J_{\alpha+1}$ یک صفر J_{α} قرار دارد . (ر.ک. شکل ۶.۲۰ .)

۴ . (آ) از روابط تمرین ۲ روابط بازگشتی

$$\frac{\alpha}{x}J_{\alpha}(x) + J'_{\alpha}(x) = J_{\alpha-1}(x) \quad \text{و} \quad \frac{\alpha}{x}J_{\alpha}(x) - J'_{\alpha}(x) = J_{\alpha+1}(x)$$

را نتیجه بگیرید .

(ب) با استفاده از روابط قسمت (آ) ، فرمولهای

$$J_{\alpha-1}(x) + J_{\alpha+1}(x) = \frac{2\alpha}{x}J_{\alpha}(x) \quad \text{و} \quad J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x) = 2J'_{\alpha}(x)$$

را نتیجه بگیرید .

۵ . با استفاده از تمرین ۱ (ب) و یک فرمول بازگشتی مناسب ، نشان دهید که

$$J_{3/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right).$$

فرمول مشابهی نیز برای $J_{-3/2}(x)$ پیدا کنید . **تذکر.** $J_{\alpha}(x)$ به‌ازای هر α که نصف یک عدد صحیح فرد باشد ، یک تابع مقدماتی است .

۶ . ثابت کنید که

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(J_{\alpha}^2(x) + J_{\alpha+1}^2(x)) = \frac{\alpha}{x}J_{\alpha}^2(x) - \frac{\alpha+1}{x}J_{\alpha+1}^2(x)$$

و

$$\frac{d}{dx}(xJ_{\alpha}(x)J_{\alpha+1}(x)) = x(J_{\alpha}^2(x) - J_{\alpha+1}^2(x)).$$

۷ . (آ) با استفاده از اتحادهای تمرین ۶ ، نشان دهید که

$$J_0^2(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(x) = 1 \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)J_n(x)J_{n+1}(x) = \tfrac{1}{2}x \,.$$

(ب) از قسمت (آ) نتیجه بگیرید که ، به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ و هر $x \geq 0$ ، $|J_0(x)| \leq 1$ و $|J_n(x)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

۸ . فرض کنید به‌ازای $x > 0$ ، $g_\alpha(x) = x^{1/2} f_\alpha(ax^b)$ ، که درآن a و b ثابتهای ناصفری هستند . نشان دهید که g_α در معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y'' + (a^2b^2x^{2b} + \tfrac{1}{4} - \alpha^2b^2)y = 0$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر f_α یک جواب معادلهٔ بسل مرتبهٔ α باشد .

۹ . با استفاده از تمرین ۸ ، جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را برحسب توابع بسل به‌ازای $x > 0$ بیان نمایید :

(آ) $y'' + xy = 0$ ؛ (ب) $y'' + x^2y = 0$ ؛

(پ) $y'' + x^my = 0$ ؛ (ت) $x^2y'' + (x^4 + \frac{1}{8})y = 0$.

۱۰ . تمرین ۸ را ، وقتی f_α و g_α با معادلهٔ $g_\alpha(x) = x^c f_\alpha(ax^b)$ به‌ازای $x > 0$ بهم مربوط شده‌اند ، تعمیم دهید . سپس ، جواب عمومی هریک از معادلات زیر را برحسب توابع بسل به‌ازای $x > 0$ پیدا نمایید :

(آ) $xy'' + 6y' + y = 0$ ؛ (ب) $xy'' + 6y' + xy = 0$ ؛

(پ) $xy'' + 6y' + x^4y = 0$ ؛ (ت) $x^2y'' - xy' + (x+1)y = 0$.

۱۱ . یک اتحاد از توابع بسل وجود دارد به‌شکل

$$J_2(x) - J_0(x) = aJ_c''(x),$$

که درآن a و c ثابت هستند . a و c را مشخص نمایید .

۱۲ . یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل $xy'' + y' + y = 0$ به صورت سری توانی بیابید که به‌ازای $-\infty < x < +\infty$ همگرا باشد . نشان دهید که به‌ازای $x > 0$ می‌توان آن را برحسب یک تابع بسل بیان کرد .

۱۳ . یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی به شکل

$$x^2A(x)y'' + xP(x)y' + Q(x)y = 0,$$

را درنظر بگیرید ، که در آن $A(x)$ ، $P(x)$ ، و $Q(x)$ بسط به صورت سری توانی دارند :

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k, \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_kx^k, \qquad Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_kx^k,$$

با $a_0 \neq 0$ ، که هریک در بازهٔ باز $(-r, r)$ همگراست . هرگاه معادلهٔ دیفرانسیل جوابی به‌صورت سری به شکل

$$y = x^t \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n ,$$

داشته باشد ، که به‌ازای $0 < x < r$ معتبر است ، نشان دهید که t درمعادلهٔ درجهٔ دومی به شکل $t^2 + bt + c = 0$ صدق می‌کند ، و b و c را برحسب‌ضرایب سریهای مربوط به $A(x)$ ، $P(x)$ ، و $Q(x)$ معین کنید .

۱۴ . حالت خاص تمرین ۱۳ را درنظر بگیرید که در آن $A(x) = 1 - x$ ، $P(x) = \frac{1}{2}$ ، و $Q(x) = -\frac{1}{2}x$. یک جواب به صورت سری بیابید که t عددی صحیح نباشد .

۱۵ . معادلهٔ دیفرانسیل $2x^2y'' + (x^2 - x)y' + y = 0$ دو جواب مستقل به شکل

$$y = x^t \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n ,$$

دارد ، که به‌ازای $x > 0$ معتبرند . این جوابها را تعیین کنید .

۱۶ . معادلهٔ دیفرانسیل غیر خطی $y'' + y + \alpha y^2 = 0$ فقط‌وقتی "به طور ملایم" غیر خطی است که α ثابت ناصفر کوچکی باشد . فرض‌کنید جوابی وجود داشته باشد که بتوان آن را به‌صورت یک سری توانی از α به شکل زیر بیان کرد :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \alpha^n \quad (0 < \alpha < r \text{ (معتبر در بازه‌ای چون}) ,$$

و این جواب در شرایط‌کرانه‌ای $y = 1$ و $y' = 0$ وقتی $x = 0$ صدق‌می‌کند . برای همسازی با این شرایط‌کرانه‌ای ، سعی می‌کنیم ضرایب $u_n(x)$ را طوری بگیریم که $u_0(0) = 1$ ، $u_0'(0) = 0$ ، و به‌ازای $n \geq 1$ ، $u_n(0) = u_n'(0) = 0$. باجانشانی این سری در معادلهٔ دیفرانسیل ، توانهای مناسب α را متحد گرفته و بدینوسیله $u_0(x)$ و $u_1(x)$ را معین نمایید .

۷

دستگاههای معادلات دیفرانسیل

۱۰۷ مقدمه

اگرچه بررسی معادلات دیفرانسیل در قرن ۱۷ آغاز شد، اما تا قرن ۱۹ طول کشید تا ریاضیدانان دریافتند که تعداد نسبتاً کمی معادلهٔ دیفرانسیل را می‌توان به وسایل مقدماتی حل کرد. کارهای کشی، لیوویل، و دیگران اهمیت اثبات قضایایی کلی برای تضمین وجود جوابهای رده‌های خاصی از معادلات دیفرانسیل را نشان داد. در فصل ۶ استفاده از یک قضیهٔ وجودی ــ یکتایی در بررسی معادلات دیفرانسیل خطی توضیح شد. دراین فصل به برهانی از این قضیه و مطالب مربوط به آن خواهیم پرداخت.

نظریهٔ وجودی معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر را می‌توان با معرفی **دستگاه** معادلات به مرتبهٔ اول تحویل کرد. مثلاً، معادلهٔ مرتبهٔ دوم

$$y'' + 2ty' - y = e^t \qquad (۱۰۷)$$

را می‌توان با معرفی توابع مجهول y_1 و y_2، که

$$y_1 = y, \qquad y_2 = y_1',$$

به یک دستگاه از دو معادلهٔ مرتبهٔ اول تبدیل نمود. دراین صورت، داریم $y_2' = y_1'' = y''$؛ درنتیجه، (۱۰۷) را می‌توان به صورت یک دستگاه از دو معادلهٔ مرتبهٔ اول نوشت:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2ty_2 + e^t. \end{aligned} \qquad (۲۰۷)$$

حل جداگانهٔ این معادلات به روشهای فصل ۶ ممکن نیست، زیرا هریک از آنها شامل دو تابع مجهول هستند.

در این فصل، دستگاههایی را درنظر می‌گیریم مرکب از n معادلهٔ دیفرانسیل خطی

مرتبهٔ اول‌که‌شامل n تابع مجهول $y_1, \ldots, y_n$ هستند. این‌معادلات به‌شکل‌زیرمی‌باشند:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2 + \cdots + p_{1n}(t)y_n + q_1(t) \\
&\ \ \vdots \\
y_n' &= p_{n1}(t)y_1 + p_{n2}(t)y_2 + \cdots + p_{nn}(t)y_n + q_n(t).
\end{aligned} \tag{۳۰۷}
$$

توابع p_{ik} و q_i در (۳۰۷) توابع معلومی هستند که بر بازهٔ معلومی چون J تعریف شده‌اند. توابع $y_1, \ldots, y_n$ توابع مجهولی هستند که باید تعیین شوند. دستگاههای از این نوع ***دستگاههای خطی مرتبهٔ اول*** نام دارند. درحالت کلی، هر معادله در این نوع دستگاه‌بیش ازیک تابع مجهول را شامل است؛ و درنتیجه، معادلات را نمی‌توان‌جداگانه حل کرد.

یک‌معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n را همیشه می‌توان به یک دستگاه خطی بدل کرد. فرض‌کنیم معادلهٔ مرتبهٔ n م مفروض عبارت باشد از

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = R(t), \tag{۴۰۷}$$

که درآن ضرایب a_i توابع معلومی هستند. برای تبدیل این معادله به یک دستگاه، می‌نویسیم $y_1 = y$ و هر مشتق متوالی y را یک تابع مجهول جدید می‌گیریم. یعنی،قرار می‌دهیم

$$y_1 = y, \qquad y_2 = y_1', \qquad y_3 = y_2', \ldots, y_n = y_{n-1}',$$

و معادلهٔ (۴۰۷) را به‌صورت دستگاه زیر می‌نویسیم:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= y_3 \\
&\ \ \vdots \\
y_{n-1}' &= y_n \\
y_n' &= -a_n y_1 - a_{n-1} y_2 - \cdots - a_1 y_n + R(t).
\end{aligned} \tag{۵۰۷}
$$

بحث دستگاهها را می‌توان با استفاده از نمادهای بردار و ماتریس به نحو قابل ملاحظه‌ای ساده کرد. دستگاه کلی (۳۰۷) را درنظر می‌گیریم، و توابع برداری $Q = (q_1, \ldots, q_n)$، $Y = (y_1, \ldots, y_n)$، و تابع ماتریسی $P = [p_{ij}]$، که با معادلات

$$Y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t)), \qquad Q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t)), \qquad P(t) = [p_{ji}(t)]$$

به‌ازای هر t در J تعریف می‌شود ، را معرفی می‌کنیم . بردارها را به‌صورت ماتریسهای ستونی $n \times 1$ درنظر گرفته ، دستگاه (۳۰۷) را به‌شکل ساده‌تر

$$Y' = P(t)Y + Q(t) \tag{۶۰۷}$$

می‌نویسیم .

مثلا" ، در دستگاه (۲۰۷) داریم

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2t \end{bmatrix}, \qquad Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

ودر دستگاه (۵۰۷) داریم

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ R(t) \end{bmatrix}$$

یک مسئله با مقدار اولیه برای دستگاه (۶۰۷) یافتن یک تابع برداری مانند Y است که‌در (۶۰۷) صادق بوده و در یک شرط‌اولیه به شکل $Y(a) = B$ ، که درآن $a \in J$ و $B = (b_1, \ldots, b_n)$ یک بردار n بعدی معلوم است ، نیز صدق نماید .

درحالت $n = 1$ (حالت اسکالر) ، از قضیهٔ ۱۰۶ می‌دانیم که، اگر P و Q بر J پیوسته باشند ، همهٔ جوابهای (۶۰۷) از فرمول صریح

$$Y(x) = e^{A(x)}Y(a) + e^{A(x)} \int_a^x e^{-A(t)}Q(t)\,dt \tag{۷۰۷}$$

به‌دست می‌آیند ، که‌درآن $A(x) = \int_a^x P(t)\,dt$ و a نقطهٔ دلخواهی در J می‌باشد . نشان می‌دهیم که‌این فرمول رامی‌توان به‌نحو مناسبی برای دستگاهها تعمیم داد ؛ یعنی ، وقتی $P(t)$ یک تابع ماتریسی $n \times n$ و $Q(t)$ یک‌تابع برداری n بعدی باشد . برای این کار باید به انتگرال و نمایی ماتریسها معنی ببخشیم . لذا ، کمی از بحث خارج شده به حساب توابع ماتریسی می‌پردازیم .

۲۰۷ حساب توابع ماتریسی

تعمیم مفاهیم انتگرال و مشتق برای توابع ماتریسی سرراست است. اگر $P(t) = [p_{ij}(t)]$ ، انتگرال $\int_a^b P(t)\,dt$ را با معادلهٔ

$$\int_a^b P(t)\,dt = \left[\int_a^b p_{ij}(t)\,dt\right]$$

تعریف می‌کنیم. یعنی، انتگرال ماتریس $P(t)$ ماتریسی است که با انتگرالگیری از هردرایهٔ $P(t)$ به‌دست می‌آید، البته با این فرض که هر درایه بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد. خواننده می‌تواند خواص خطی انتگرالها را برای توابع ماتریسی تعمیم یافته تحقیق نماید.

پیوستگی و مشتقپذیری توابع ماتریسی نیز برحسب درایه‌ها تعریف می‌شوند. گوییم تابع ماتریسی $P = [p_{ij}]$ در t پیوسته است در صورتی که هر درایهٔ p_{ij} در t پیوسته باشد. مشتق P' با مشتقگیری از هر درایه تعریف می‌شود:

$$P'(t) = [p'_{ij}(t)],$$

واین‌درصورتی‌است‌که‌تمام مشتقات $p'_{ij}(t)$ موجود باشند. قواعد اساسی مشتقگیری‌درباب مجموعها و حاصل ضربها به‌آسانی تحقیق می‌شوند. مثلاً، اگر P و Q توابع ماتریسی مشتقپذیری باشند، داریم

$$(P + Q)' = P' + Q';$$

و اگر P و Q دارای یک اندازه باشند، نیز داریم

$$(PQ)' = PQ' + P'Q$$

و این درصورتی است که PQ تعریف شده باشد. قاعدهٔ‌زنجیره‌ای‌نیز برقرار است. یعنی، هرگاه $F(t) = P[g(t)]$ ، که‌درآن P یک‌تابع ماتریسی مشتقپذیر بوده و g یک تابع اسکالر مشتقپذیر باشد، آنگاه $F'(t) = g'(t)P'[g(t)]$. قضیهٔ مشتق صفر، و اولین و دومین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نیز برای توابع ماتریسی معتبرند. اثبات این خواص در مجموعه تمرینات بعدی خواسته شده است.

تعریف نمایی یک ماتریس چندان ساده نیست و نیاز به آمادگی بیشتری دارد. این امر در بخش بعد مطرح می‌شود.

۳۰۷ سریهای نامتناهی از ماتریسها. نرم ماتریسها

فرض‌کنیم $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی یا مختلط باشد. می‌خواهیم

نمایی e^A را طوری تعریف کنیم که بعضی از خواص اصلی نمایی حقیقی یا مختلط معمولی را داشته باشد. بخصوص، قانون نماها به شکل

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A} \quad \text{به‌ازای هر } s \text{ و } t \text{ حقیقی،} \tag{۸۰۷}$$

و رابطهٔ

$$e^{O} = I, \tag{۹۰۷}$$

که درآن O و I بترتیب ماتریسهای $n \times n$ صفر و همانی‌اند، را لازم داریم. ممکن است تعریف e^A مساوی ماتریس $[e^{a_{ij}}]$ طبیعی به‌نظر برسد، اما قابل قبول نیست، زیرا از هیچیک از خواص (۸۰۷) و (۹۰۷) برخوردار نیست. درعوض، e^A را با بسط به‌صورت سری توانی تعریف می‌کنیم:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

می‌دانیم این فرمول درصورتی که A عددی حقیقی یا مختلط باشد برقرار است، وثابت می‌کنیم که از آن درصورتی که A یک ماتریس باشد خواص (۸۰۷) و (۹۰۷) نتیجه می‌شوند. پیش از این کار لازم است معنی یک سری همگرا از ماتریسها را توضیح دهیم.

تعریف یک سری همگرا از ماتریسها. دنبالهٔ نامتناهی $\{C_k\}$ از ماتریسهای $m \times n$ که درایه‌های آنها اعدادی حقیقی یا مختلط‌اند مفروض است، و درایهٔ ij، C_k را با $c_{ij}^{(k)}$ نشان می‌دهیم. هرگاه تمام mn سری

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)} \qquad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n) \tag{۱۰۰۷}$$

همگرا باشند، گوییم سری $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ از ماتریسها همگراست، و مجموع آن ماتریس $m \times n$ی تعریف می‌شود که درایهٔ ij آن سری (۱۰۰۷) است.

یک آزمون ساده و مفید برای همگرایی یک سری از ماتریسها برحسب **نرم** یک ماتریس، که تعمیمی از قدر مطلق یک عدد است، قابل بیان است.

تعریف نرم یک ماتریس. هرگاه $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $m \times n$ با درایه‌های حقیقی یا مختلط باشد، نرم A، که با $\|A\|$ نموده می‌شود، عدد نامنفیی تعریف می‌شود که با فرمول

زیر داده می‌شود :

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|. \qquad (۱۱۰۷)$$

به عبارت دیگر ، نرم A مجموع قدرمطلقهای تمام درایه‌های آن است . تعریفهای دیگری از نرم وجود دارند که گهگاه به کار می‌روند ، ولی ما این‌تعریف را از آنجهت برگزیده‌ایم که خواص زیر به آسانی با آن ثابت می‌شوند .

قضیهٔ ۱۰۷ . خواص اساسی نرمها . *به‌ازای ماتریسهای مستطیلی شکل A و B ، و تمام اسکالرهای حقیقی یا مختلط c ، داریم*

$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|, \ \|AB\| \le \|A\|\ \|B\|, \ \|cA\| = |c|\ \|A\|.$$

برهان . نتیجه‌را فقط در مورد $\|AB\|$ ، با فرض اینکه A ، $m \times n$ و B ، $n \times p$ است ، ثابت می‌کنیم . اثبات سایر روابط ساده‌تر است و به‌عنوان تمرین می‌ماند .

با نوشتن $A = [a_{ik}], B = [b_{kj}]$ ، داریم $AB = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}]$ ؛ درنتیجه ، از (۱۱۰۷) خواهیم داشت

$$\|AB\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right| \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\sum_{j=1}^{p}|b_{kj}| \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\ \|B\| = \|A\|\ \|B\|.$$

توجه کنید که ، درحالت خاص $B = A$ ، نامساوی مربوط‌به $\|AB\|$ به‌صورت $\|A^2\| \le \|A\|^2$ درمی‌آید . به استقرا ، نیز داریم :

به‌ازای $k = 1, 2, 3, \ldots$ ، $\|A^k\| \le \|A\|^k$.

این نامساویها در بحث ماتریس نمایی مفید خواهند بود .

قضیهٔ بعدی‌شرط‌کافی مفیدی‌برای همگرایی یک سری از ماتریسها به‌دست می‌دهد .

قضیهٔ ۲۰۷ . آزمون‌همگرایی برای‌یک‌سری‌ماتریسی . *هرگاه $\{C_k\}$ دنباله‌ای‌از ماتریسهای $m \times n$ بوده بطوری که $\sum_{k=1}^{\infty}\|C_k\|$ همگرا باشد ، آنگاه سری ماتریسی $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ نیز همگرا می‌باشد .*

برهان. فرض‌کنیم درایهٔ ij ، C_k مساوی $c_{ij}^{(k)}$ باشد. چون $|c_{ij}^{(k)}| \le \|C_k\|$ ، همگرایی $\sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|$ همگرایی مطلق هر سری $\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)}$ را ایجاب می‌کند. بنابراین، هر سری $\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)}$ همگراست؛ و درنتیجه، سری ماتریسی $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ همگرا می‌باشد.

۴۰۷ تمرین

۱. تحقیق‌کنید که خاصیت‌خطی انتگرالها برای‌انتگرال توابع ماتریسی نیز برقراراست.

۲. هریک از قواعد مشتقگیری زیر را، با فرض مشتقپذیر بودن P و Q ، برای توابع ماتریسی‌تحقیق‌کنید. در (آ)، P و Q باید به یک اندازه باشند تا $P + Q$ معنی داشته‌باشد. در (ب) و (ت) لازم نیست یک اندازه داشته باشند مشروط بر اینکه حاصل‌ضربها معنی داشته باشند. در (پ) و (ت)، Q نامنفرد فرض خواهد شد.

(آ) $(P + Q)' = P' + Q'$. (ب) $(PQ)' = PQ' + P'Q$.

(پ) $(Q^{-1})' = -Q^{-1}Q'Q^{-1}$. (ت) $(PQ^{-1})' = -PQ^{-1}Q'Q^{-1} + P'Q^{-1}$.

۳. (آ) فرض‌کنید P یک تابع ماتریسی مشتقپذیر باشد. ثابت کنید که مشتقات P^2 و P^3 از فرمولهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$(P^2)' = PP' + P'P, \qquad (P^3)' = P^2P' + PP'P + P'P^2.$$

(ب) برای مشتق P^k یک فرمول کلی حدس بزنید و آن را به استقرا ثابت کنید.

۴. فرض‌کنید P یک تابع ماتریسی مشتقپذیر بوده، و g یک تابع اسکالر مشتقپذیر باشد که‌بردش زیر مجموعه‌ای‌ازقلمرو P است. تابع مرکب $F(t) = P[g(t)]$ راتعریف کرده و قاعدهٔ زنجیره‌ای $F'(t) = g'(t)P'[g(t)]$ را ثابت کنید.

۵. قضیهٔ مشتق صفر را برای توابع ماتریسی ثابت کنید: **هرگاه به‌ازای هر t دربازهٔ بازی مانند (a, b) ، $P'(t) = O$ ، آنگاه تابع ماتریسی P بر (a, b) ثابت است.**

۶. تعمیمهای اولین‌و دومین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را برای توابع ماتریسی بیان و اثبات کنید.

۷. برای انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء یک فرمول که درآن انتگرالدهها توابعی ماتریسی باشند بیان و اثبات کنید.

۸. خواص زیر را که مربوط‌به نرم ماتریسهاست اثبات نمایید:

$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|, \qquad \|cA\| = |c|\,\|A\|.$$

۹. ثابت کنید که اگر تابع ماتریسی P بر بازهٔ $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد،

$$\left\| \int_a^b P(t)\,dt \right\| \le \int_a^b \|P(t)\|\,dt .$$

۱۰ . فرض کنید D یک ماتریس قطری $n \times n$ باشد ؛ مثلا" ، $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
ثابت کنید سری ماتریسی $\sum_{k=0}^{\infty} D^k/k!$ همگراست و یک ماتریس قطری نیز هست :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}) .$$

(جملهٔ نظیر به $k = 0$ ماتریس همانی I فرض می‌شود .)

۱۱ . فرض کنید D یک ماتریس قطری $n \times n$ باشد :
$D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. ثابت کنید اگر سری ماتریسی $\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k$ همگرا باشد ،

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k = \text{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_1^k, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_n^k \right) .$$

۱۲ . فرض‌کنید سری‌ماتریسی $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ همگرا باشد ، که‌در آن هر C_k یک ماتریس $n \times n$ است . ثابت کنید سری ماتریسی $\sum_{k=1}^{\infty} (AC_kB)$ نیزهمگراست و مجموعش ماتریس

$$A \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k \right) B$$

می‌باشد . دراینجا A و B ماتریسهایی هستند که‌به‌ازای‌آنها AC_kB ها معنی‌دارند .

۵۰۷ ماتریس نمایی

با استفاده از قضیهٔ ۲۰۷ ، به‌آسانی ثابت می‌شود که سری ماتریسی

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \qquad (۱۲۰۷)$$

به‌ازای هــر ماتریس مربعی A با درایه‌های حقیقی یا مختلط همگراست . (جملهٔ نظیر به $k = 0$ ماتریس همانی I فرض می‌شود .) نرم هر جمله در نامساوی

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \le \frac{\|A\|^k}{k!}$$

صدق می‌کند . چون سری $\sum a^k/k!$ به‌ازای هر a ی حقیقی همگراست ، قضیهٔ ۲۰۷ ایجاب می‌کند که سری (۱۲۰۷) به‌ازای هر ماتریس مربعی A همگرا باشد .

تعریف ماتریس نمایی . به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ ، A با درایه‌های حقیقی یا مختلط، نمایی e^A را ماتریس $n \times n$ ی تعریف می‌کنیم که با سری همگرای (۱۲۰۷) داده می‌شود یعنی ،

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

توجه کنید که این تعریف $e^O = I$ را ایجاب می‌کند ، که درآن O یک ماتریس صفر است . خواص دیگر نمایی به‌کمک معادلات دیفرانسیل به‌دست می‌آیند .

۶۰۷ معادلهٔ دیفرانسیل برقرار به‌وسیلهٔ e^{tA}

فرض کنیم t یک عدد حقیقی ، A یک ماتریس $n \times n$ ، و $E(t)$ ماتریس $n \times n$ ی باشد که با

$$E(t) = e^{tA}$$

داده شده است . A را ثابت گرفته این ماتریس را به‌عنوان تابعی از t مطالعه می‌کنیم . ابتدا یک معادلهٔ دیفرانسیل برقرار به وسیلهٔ E را به‌دست می‌آوریم .

قضیهٔ ۳۰۷ . *به‌ازای هر t حقیقی ، تابع ماتریسی E تعریف شده با $E(t) = e^{tA}$ در معادلهٔ دیفرانسیل ماتریسی*

$$E'(t) = E(t)A = AE(t)$$

صدق می‌کند .

برهان . از تعریف ماتریس نمایی داریم

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

فرض کنیم $c_{ij}^{(k)}$ درایهٔ ij ، A^k باشد . دراین صورت ، درایهٔ ij ، $t^k A^k/k!$ مساوی $t^k c_{ij}^{(k)}/k!$ است . از اینرو ، از تعریف یک سری ماتریسی ، داریم

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c_{ij}^{(k)}\right]. \qquad (۱۳۰۷)$$

هر درایهٔ سمت‌راست (۱۳۰۷) یک‌سری توانی از t است ، که‌به‌ازای هر t همگراست .

بنابراین، مشتقش به‌ازای t وجوددارد وازسری‌مشتقگیری‌شدهٔ زیربه‌دست می‌آید:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kt^{k-1}}{k!} c_{ij}^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c_{ij}^{(k+1)} .$$

این نشان می‌دهد که مشتق $E'(t)$ وجود دارد و با سری ماتریسی

$$E'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^{k+1}}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right) A = E(t)A$$

داده می‌شود. درآخرین معادله از خاصیت $A^{k+1} = A^k A$ استفاده شده است. چون A با A^k تعویض می‌شود، نیز می‌شد بنویسیم $A^{k+1} = AA^k$ تا رابطهٔ $E'(t) = AE(t)$ به‌دست آید. این برهان را تمام خواهد کرد.

تذکر. برهان فوق همچنین نشان می‌دهد که A با e^{tA} تعویض می‌گردد.

۷۰۷ قضیهٔ یکتایی برای معادلهٔ دیفرانسیل ماتریسی $F'(t) = AF(t)$

دراین بخش، یک قضیهٔ یکتایی ثابت می‌کنیم که جمیع جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل ماتریسی $F'(t) = AF(t)$ را مشخص می‌کند. دربرهانش از قضیهٔ زیر استفاده می‌شود.

قضیهٔ ۴۰۷ . نامنفردی e^{tA} . *به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ ، A و هر اسکالر t داریم*

$$e^{tA}e^{-tA} = I . \tag{۱۴۰۷}$$

لذا، e^{tA} نامنفرد است و معکوسش e^{-tA} می‌باشد.

برهان. فرض کنیم F تابع ماتریسی باشد که به‌ازای هر t حقیقی با معادلهٔ

$$F(t) = e^{tA}e^{-tA}$$

تعریف می‌شود. با نشان دادن اینکه مشتق $F'(t)$ ماتریس صفر است، ثابت می‌کنیم $F(t)$ ماتریس همانی I است. با مشتقگیری از F به‌عنوان یک حاصلضرب، و استفاده از قضیهٔ ۳۰۷ ، درمی‌یابیم که

$$F'(t) = e^{tA}(e^{-tA})' + (e^{tA})'e^{-tA} = e^{tA}(-Ae^{-tA}) + Ae^{tA}e^{-tA}$$
$$= -Ae^{tA}e^{-tA} + Ae^{tA}e^{-tA} = O ,$$

زیرا A با e^{tA} تعویض می‌شود. لذا، طبق قضیهٔ مشتق صفر، F یک ماتریس ثابت است. اما $F(0) = e^{OA}e^{OA} = I$ ؛ درنتیجه، به‌ازای هر t ، $F(t) = I$. این (۱۴۰۷) را ثابت خواهد کرد.

قضیهٔ ۵۰۷ . قضیهٔ یکتایی . فرض کنیم A و B دو ماتریس $n \times n$ ثابت باشند . در این‌صورت ، تنها تابع ماتریسی $n \times n$ ، F صادق در مسئله با مقدار اولیهٔ

$$F'(t) = AF(t), \qquad F(0) = B$$

به‌ازای $-\infty < t < +\infty$ عبارت است از

$$F(t) = e^{tA}B. \tag{۱۵۰۷}$$

برهان . ابتدا توجه می‌کنیم که $e^{tA}B$ یک جواب است . حال فرض‌کنیم F یک جواب بوده و تابع ماتریسی

$$G(t) = e^{-tA}F(t)$$

را درنظر می‌گیریم . بامشتقگیری از این حاصل ضرب ، داریم

$$G'(t) = e^{-tA}F'(t) - Ae^{-tA}F(t) = e^{-tA}AF(t) - e^{-tA}AF(t) = O.$$

بنابراین ، $G(t)$ یک ماتریس ثابت می‌باشد :

$$G(t) = G(0) = F(0) = B.$$

به عبارت دیگر ، $e^{-tA}F(t) = B$. با ضرب در e^{tA} و استفاده از (۱۴۰۷) ، (۱۵۰۷) را خواهیم داشت .

تذکر . برهانی مشابه نشان می‌دهد که $F(t) = Be^{tA}$ تنها جواب مسئله با مقدار اولیهٔ

$$F'(t) = F(t)A, \qquad F(0) = B$$

است .

۸۰۷ قانون نماها برای ماتریسهای نمایی

قانون نماها ، یعنی $e^Ae^B = e^{A+B}$ ، همیشه برای نماییهای ماتریسی درست نیست . مثال نقض در تمرین ۱۳ از بخش ۱۲۰۷ آمده است . با اینحال ، به‌آسانی ثابت می‌شود که این فرمول برای ماتریسهای A و B که تعویض می‌شوند درست است .

قضیهٔ ۶۰۷ . فرض‌کنیم A و B دو ماتریس $n \times n$ باشندکه‌تعویض‌می‌شوند: $AB = BA$. دراین صورت ، داریم

$$e^{A+B} = e^Ae^B. \tag{۱۶۰۷}$$

برهان. از معادلهٔ $AB = BA$ درمی‌یابیم که

$$A^2B = A(BA) = (AB)A = (BA)A = BA^2;$$

درنتیجه، B با A^2 تعویض می‌شود. بنابر استقرا، B با هرتوانی از A تعویض می‌شود. با نوشتن e^{tA} به‌صورت یک سری توانی، درمی‌یابیم که B نیز با e^{tA} به‌ازای هر t حقیقی تعویض می‌گردد.

حال فرض کنیم F تابع ماتریسی باشد که با معادلهٔ

$$F(t) = e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB}$$

تعریف می‌شود. با مشتقگیری از $F(t)$ و استفاده از این امر که B با e^{tA} تعویض می‌شود، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} F'(t) &= (A + B)e^{t(A+B)} - Ae^{tA}e^{tB} - e^{tA}Be^{tB} \\ &= (A + B)e^{t(A+B)} - (A + B)e^{tA}e^{tB} = (A + B)F(t). \end{aligned}$$

بنابرقضیهٔ یکتایی، داریم

$$F(t) = e^{t(A+B)}F(0).$$

اما $F(0) = O$؛ درنتیجه، به‌ازای هر t، $F(t) = O$. بنابراین،

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}.$$

وقتی $t = 1$، (۱۶۰۷) به‌دست خواهد آمد.

مثال. ماتریسهای sA و tA به‌ازای هراسکالر s و t تعویض می‌شوند. بنابراین، خواهیم داشت

$$e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}.$$

۹۰۷ قضایای وجودی و یکتایی برای دستگاههای خطی همگن با ضرایب ثابت

معادلهٔ دیفرانسیل برداری $Y'(t) = AY(t)$، که درآن A یک ماتریس ثابت $n \times n$ بوده و Y یک تابع برداری n بعدی (به صورت یک ماتریس ستونی $n \times 1$) باشد، یک **دستگاه خطی همگن با ضرایب ثابت** نامیده می‌شود. بااستفاده از ماتریس نمایی، برای جواب چنین دستگاه فرمول صریحی به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۷۰۷. فرض کنیم A یک ماتریس ثابت $n \times n$، و B یک بردار n بعدی معلوم

باشد . دراین صورت ، مسئله با مقدار اولیهٔ

$$Y'(t) = AY(t), \qquad Y(0) = B, \tag{۱۷.۷}$$

بر بازهٔ $-\infty < t < +\infty$ **جواب منحصر بفرد دارد ، و این جواب با فرمول**

$$Y(t) = e^{tA}B \tag{۱۸.۷}$$

داده میشود . بطور کلی ، جواب منحصر بفرد مسئله با مقدار اولیهٔ

$$Y'(t) = AY(t), \qquad Y(a) = B,$$

مساوی $Y(t) = e^{(t-a)A}B$ **میباشد .**

برهان . مشتقگیری از (۱۸.۷) نتیجه میدهد که $Y'(t) = Ae^{tA}B = AY(t)$. چون $Y(0) = B$ ، این یک جواب مسئله با مقدار اولیهٔ (۱۷.۷) میباشد .

برای اثبات اینکه فقط یک جواب وجود دارد ، مثل برهان قضیهٔ ۵.۷ استدلال میکنیم . فرض کنیم $Z(t)$ تابع برداری دیگری باشد که در $Z'(t) = AZ(t)$ با $Z(0) = B$ صدق میکند ، و نیز $G(t) = e^{-tA}Z(t)$. دراین صورت ، بهآسانی تحقیق میشود که $G'(t) = O$ ؛ درنتیجه ، $G(t) = G(0) = Z(0) = B$. به عبارت دیگر ، $e^{-tA}Z(t) = B$. بنابراین ، $Z(t) = e^{tA}B = Y(t)$. حالتکلیتر با مقداراولیهٔ $Y(a) = B$ درست بههمین نحو اثبات میشود .

۱۰.۷ محاسبهٔ e^{tA}

قضیهٔ ۷.۷ فرمول صریحی برای حل یک دستگاه همگن با ضرایب ثابت بهدست میدهد ؛ با اینحال ، مشکل محاسبهٔ ماتریس نمایی e^{tA} هنوز برجاست . اگر میخواستیم e^{tA} را مستقیما" از تعریف سری حساب کنیم ، میبایستی تمام توانهای A^k را بهازای $k = 0, 1, 2, \ldots$ حسابکرده مجموع هر سری $\sum_{k=0}^{\infty} t^k c_{ij}^{(k)}/k!$ ، که درآن $c_{ij}^{(k)}$ درایهٔ ij A^k است ، را محاسبه کنیم . این درحالت کلی کاری است بیفرجام مگر اینکه A ماتریسی باشد که توانهایش بهآسانی قابل محاسبهباشند . مثلا" ، اگر A یک ماتریس قطری باشد ، مثلا"

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

هر توان A نیز یک ماتریس قطری است ؛ درواقع ،

$$A^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k).$$

بنابراین، دراین حالت، e^{tA} یک ماتریس قطری است که با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$e^{tA} = \text{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\lambda_1^k, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\lambda_n^k\right) = \text{diag}\,(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n}).$$

حالت سادهٔ دیگر وقتی است که A قطری می‌شود. مثلاً، اگر به‌ازای ماتریس نامنفردی چون C، $C^{-1}AC$ قطری باشد، مثلاً $C^{-1}AC = D$، خواهیم داشت

$$A = CDC^{-1},$$

که از آن درمی‌یابیم که

$$A^2 = (CDC^{-1})(CDC^{-1}) = CD^2C^{-1},$$

و، بطور کلی،

$$A^k = CD^kC^{-1}.$$

بنابراین، دراین حالت داریم

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}CD^kC^{-1} = C\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kD^k}{k!}\right)C^{-1} = Ce^{tD}C^{-1}.$$

دراینجا مشکل تعیین C و معکوس آن است. به محض دانستن اینها، e^{tA} به‌آسانی محاسبه می‌شود. البته، هر ماتریس قطری پذیر نیست؛ درنتیجه، درجهٔ مفید بودن نکات فوق محدود می‌باشد.

مثال ۱. e^{tA} را برای ماتریس 2×2، $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ حساب کنید.

حل. این ماتریس دارای مقادیر ویژهٔ متمایز $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1$ است؛ درنتیجه، ماتریس نامنفردی چون $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هست بطوری که $C^{-1}AC = D$، که درآن $D = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. برای تعیین C می‌توان نوشت $AC = CD$، یا

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

با ضرب ماتریسها، درمی‌یابیم که این معادله به‌ازای اسکالرهای a, b, c, d که

$a = 4c, b = -d$ برقرار است . با فرض $c = d = 1$ ، اختیار می‌کنیم

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

بنابراین ،

$$e^{tA} = Ce^{tD}C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{6t} & e^{6t} \\ -e^{t} & 4e^{t} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4e^{6t} + e^{t} & 4e^{6t} - 4e^{t} \\ e^{6t} - e^{t} & e^{6t} + 4e^{t} \end{bmatrix}.$$

مثال ۲ . دستگاه خطی

$$y_1' = 5y_1 + 4y_2$$
$$y_2' = y_1 + 2y_2$$

را با شرایط اولیهٔ $y_1(0) = 2, y_2(0) = 3$ حل کنید .

حل . دستگاه را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت :

$Y'(t) = AY(t)$ ، $Y(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ که درآن $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

بنابر قضیهٔ ۷.۷ ، جواب $Y(t) = e^{tA}Y(0)$ است . با استفاده از ماتریس e^{tA} که درمثال ۱ حساب شد ، درمی‌یابیم که

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4e^{6t} + e^{t} & 4e^{6t} - 4e^{t} \\ e^{6t} - e^{t} & e^{6t} + 4e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

که از آن خواهیم داشت

$$y_1 = 4e^{6t} - 2e^{t}, \qquad y_2 = e^{6t} + 2e^{t}.$$

روشهای زیادی برای محاسبهٔ e^{tA} درصورت قطری پذیر نبودن A وجود دارند . غالب این روشها نسبتاً " پیچیده‌اند و به تبدیلات ماتریسی مقدماتی نیاز دارند ، که این

نیاز بـه طبیعت درجات تکرار مقادیر ویژهٔ A بستگی دارد. در یکی از بخشهای بعدی، روشی عملـی و سر راست برای محاسبهٔ e^{tA} مطرح می‌شود که، چه A قطری پذیر باشد یا نه، قـابل به‌کار بـردن است. این روش به‌ازای هر ماتریس معتبر است و به هیچ نوع تبدیل مقـدماتی نیـاز ندارد. این روش به‌وسیلهٔ ای. ج. پوتزر[1] در مقـالـه‌ای در *American Mathematical Monthly*, Vol. 73 (1966), pp. 2–7 ارائـه شـده اسـت. روش‌بر قضیهٔ معروفی منسوب به آرتورکیلی[2] (۱۸۹۵ – ۱۸۲۱) و ویلیام روان هامیلتون[3] (۱۸۶۵ – ۱۸۰۵) استوار است که می‌گویدهر ماتریس مربعی در معادلهٔ مشخص‌خود صدق می‌کند. ابتدا قضیهٔ کیلی – هامیلتون را ثابت می‌کنیم و بعد، با استفاده از آن، فرمولهای پوتزر را برای محاسبهٔ e^{tA} به‌دست می‌آوریم.

۱۱۰۷ قضیهٔ کیلی – هامیلتون

قضیهٔ ۸۰۷ . قضیهٔ کیلی – هامیلتون. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ بـوده و

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 \tag{۱۹۰۷}$$

چندجمله‌ای مشخص آن باشد. دراین‌صورت، $f(A) = O$. به‌عبارت دیگر، A درمعادلهٔ

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0I = O \tag{۲۰۰۷}$$

صدق می‌کند.

برهان. برهان بر قضیهٔ ۱۲۰۳ استوار است که می‌گوید به‌ازای هر ماتریس مربعی A

$$A\,(\operatorname{cof} A)^t = (\det A)I. \tag{۲۱۰۷}$$

این فرمول را با A به‌جای $\lambda I - A$ به‌کار می‌بریم. چون $\det(\lambda I - A) = f(\lambda)$، معادلهٔ (۲۱۰۷) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(\lambda I - A)\{\operatorname{cof}(\lambda I - A)\}^t = f(\lambda)I. \tag{۲۲۰۷}$$

این معادله بـه‌ازای هر λ حقیقی معتبر است. ایدهٔ اثبات نشان می‌دهد که این‌معادله به‌ازای A به‌جای λ نیز معتبراست.

درایه‌های ماتریس $\operatorname{cof}(\lambda I - A)$ همسازه‌های $\lambda I - A$ هستند. هرچنین‌همسازه‌ای، با تقریب سازه‌ای چون ± 1، دترمینان یک مینور $\lambda I - A$ از مرتبهٔ $n - 1$ است. لذا،

---

1. E. J. Putzer   2. Arthur Cayley   3. William Rowan Hamilton

هر درایه‌ٔ $\mathrm{cof}\,(\lambda I - A)$ ، و درنتیجه هر درایه‌ٔ $\{\mathrm{cof}\,(\lambda I - A)\}^t$ ، یک چند جمله‌ای از λ و از درجه‌ٔ نابیشتر از $n-1$ است. بنابراین،

$$\{\mathrm{cof}\,(\lambda I - A)\}^t = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k B_k ,$$

که درآن هرضریب B_k یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های اسکالر است. با استفاده از این در (۲۲۰۷)، رابطه‌ٔ

$$(\lambda I - A)\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k B_k = f(\lambda) I$$

به‌دست می‌آید، که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$\lambda^n B_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k (B_{k-1} - AB_k) - AB_0 = \lambda^n I + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k c_k I + c_0 I .$$

دراین مرحله، با متحد گرفتن ضرایب همتوان λ در (۲۴۰۷)، معادلات زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= I \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= c_{n-1} I \\ &\vdots \\ B_0 - AB_1 &= c_1 I \\ -AB_0 &= c_0 I . \end{aligned} \tag{۲۵۰۷}$$

متحد گرفتن ضرایب مجاز است، زیرا (۲۴۰۷) با n^2 معادله‌ٔ اسکالر معادل است، که‌در هریک می‌توان ضرایب همتوان λ را متحد گرفت. حال معادلات (۲۵۰۷) را متوالیا "در $A^n, A^{n-1}, \ldots , A, I$ ضرب و نتایج را با هم جمع می‌کنیم. جملات سمت چپ حذف می‌شوند و به دست می‌آوریم که

$$O = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I .$$

این قضیهٔ کیلی ــ هامیلتون را ثابت می‌کند.

تذکر. هامیلتون این قضیه را در ۱۸۵۳ برای رده‌ٔ خاصی ازماتریسها ثابت کرد. چند سال بعد، کیلی اعلام کرد که قضیه برای جمیع ماتریسها درست است، اما برهانی برای

آن ارائه نداد .

مثال . ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ دارای چندجمله‌ای مشخص

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 6) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 20\lambda - 12$$

است . قضیه‌ٔ کیلی ـ هامیلتون می‌گوید که A در معادلهٔ

$$A^3 - 9A^2 + 20A - 12I = O \qquad (۲۶۰۷)$$

صدق می‌کند . با استفاده از این معادله ، می‌توان A^3 و تمام توانهای بالاتر A را برحسب I ، A ، و A^2 بیان کرد . مثلاً ، داریم

$$A^3 = 9A^2 - 20A + 12I,$$
$$A^4 = 9A^3 - 20A^2 + 12A = 9(9A^2 - 20A + 12I) - 20A^2 + 12A$$
$$= 61A^2 - 168A + 108I.$$

همچنین ، می‌توان از آن برای بیان A^{-1} به‌صورت یک چندجمله‌ای از A استفاده کرد . رابطهٔ (۲۶۰۷) را به‌صورت $A(A^2 - 9A + 20I) = 12I$ می‌نویسیم ، و خواهیم داشت

$$A^{-1} = \tfrac{1}{12}(A^2 - 9A + 20I).$$

۱۲۰۷ تمرین

درهریک از تمرینهای ۱ تا ۴، (آ) A^{-1} ، A^2 ، و همهٔ توانهای بالاتر A را به‌صورت ترکیبی خطی از I و A بیان کنید (قضیهٔ کیلی ـ هامیلتون می‌تواند مفید باشد) ؛ (ب) e^{tA} را محاسبه نمایید .

۱ . $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

۲ . $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

۳ . $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

۴ . $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

۵ . (آ) هرگاه $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ثابت کنید که $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$.

(ب) برای e^{tA} ، که $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ و a و b حقیقی‌اند ، فرمول نظیر را پیدا

کنید .

۶ . هرگاه $F(t) = \begin{bmatrix} t & t-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، ثابت کنید که $e^{F(t)} = eF(e^{t-1})$.

۷ . هرگاه $A(t)$ یک تابع اسکالراز t باشد ، مشتق $e^{A(t)}$ مساوی $e^{A(t)}A'(t)$ است . مشتق $e^{A(t)}$ وقتی $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ را محاسبه کرده نشان دهید که نتیجه مساوی هیچیک از حاصلضربهای $e^{A(t)}A'(t)$ و $A'(t)e^{A(t)}$ نیست .

در هر یک از تمرینهای ۸ ، ۹ ، و ۱۰ ، (آ) A^n را محاسبه کرده A^3 را برحسب I, A, A^2 بیان کنید ؛ (ب) e^{tA} را محاسبه نمایید .

۸ . $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

۹ . $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

۱۰ . $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

۱۱ . هرگاه $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، e^{tA} را بهصورت ترکیبی خطی از I, A, A^2 بیان کنید .

۱۲ . هرگاه $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ثابت کنید که $e^A = \begin{bmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2xy & x^2+y^2 & 2xy \\ y^2 & xy & x^2 \end{bmatrix}$ ، که در آن $x = \cosh 1$ و $y = \sinh 1$.

۱۳ . این مثال نشان میدهد که معادلهٔ $e^{A+B} = e^Ae^B$ همیشه برای نماییهای ماتریسی درست نیست . هریک از ماتریسهای e^Ae^B, e^Be^A, e^{A+B} را وقتی $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ حساب کنید ، و توجه کنید که سه نتیجه متمایز میباشند .

۱۳۰۷ روش پوتزر برای محاسبهٔ e^{tA}

قضیهٔ کیلی ـ هامیلتون نشان می‌دهد که توان n م ماتریس $n \times n$ ، A را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از توانهای پایین‌تر $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ بیان کرد. از این نتیجه می‌شود که هر توان بالاتر $A^{n+1}, A^{n+2}, \ldots$ را نیز می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ بیان داشت. بنابراین، در سری نامتناهی معرف e^{tA} ، هرجملهٔ $t^kA^k/k!$ ، که درآن $k \geq n$ ، ترکیبی خطی از $t^kI, t^kA, t^kA^2, \ldots, t^kA^{n-1}$ است. پس، می‌توان انتظار داشت که e^{tA} به‌صورت یک چندجمله‌ای از A به شکل

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} q_k(t)A^k \qquad (۲۷\cdot۷)$$

قابل بیان است، که درآن ضرایب اسکالر $q_k(t)$ به t بستگی دارند. پوتزر دو روش مفید برای بیان e^{tA} به‌صورت یک چندجمله‌ای از A ذکر می‌کند. قضیهٔ بعدی روش ساده‌تر را توضیح می‌دهد.

قضیهٔ ۹۰۷ . *فرض کنیم $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژهٔ ماتریس $n \times n$ ، A باشد، و یک دنباله از چندجمله‌ایها از A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$P_0(A) = I \text{ ؛ و به‌ازای } k = 1, 2, \ldots, n \text{ ،} \quad P_k(A) = \prod_{m=1}^{k} (A - \lambda_m I) \cdot \qquad (۲۸\cdot۷)$$

دراین صورت، داریم

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t)P_k(A), \qquad (۲۹\cdot۷)$$

که درآن ضرایب اسکالر $r_1(t), \ldots, r_n(t)$ به‌طور بازگشتی از دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} r_1'(t) &= \lambda_1 r_1(t), \qquad r_1(0) = 1, \\ r_{k+1}'(t) &= \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t), \qquad r_{k+1}(0) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned} \qquad (۳۰\cdot۷)$$

تذکر. معادلهٔ (۲۹۰۷) e^{tA} را مستقیما" به‌صورتی که در (۲۷۰۷) است بیان نمی‌کند، بلکه به‌صورت ترکیبی خطی از چند جمله‌ایهای $P_0(A), P_1(A), \ldots, P_{n-1}(A)$ بیان می‌کند. این چندجمله‌ایها به‌محض معلوم شدن مقادیر ویژهٔ A به‌آسانی محاسبه‌می‌شوند. همچنین،

ضرایب $r_1(t), \ldots, r_n(t)$ در (۳۰۰۷) به‌آسانی حساب می‌شوند. با آنکه این‌کار به‌حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی نیاز دارد، این دستگاه خاص دارای یک ماتریس مثلثی شکل است و جوابها را می‌توان بتوالی معین نمود.

برهان. — فرض کنیم $r_1(t), \ldots, r_n(t)$ توابع اسکالری باشدکه به‌وسیلهٔ (۳۰۰۷) معین می‌شوند، و تابع ماتریسی F را با معادلهٔ

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k(A) \tag{۳۱۰۷}$$

تعریف می‌کنیم. توجه‌کنیدکه $F(0) = r_1(0)P_0(A) = I$. با نشان دادن اینکه F درهمان معادلهٔ دیفرانسیل صادق به‌وسیلهٔ e^{tA}، یعنی $F'(t) = AF(t)$، صدق می‌کند، ثابت می‌کنیم که $F(t) = e^{tA}$.

با مشتقگیری از (۳۱۰۷) و استفاده از فرمولهای بازگشتی (۳۰۰۷)، داریم

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r'_{k+1}(t) P_k(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \{r_k(t) + \lambda_{k+1} r_{k+1}(t)\} P_k(A),$$

که درآن $r_0(t)$ مساوی 0 تعریف می‌شود. این رابطه را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) P_{k+1}(A) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) P_k(A),$$

بعد، با تفریق $\lambda_n F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_n r_{k+1}(t) P_k(A)$ از آن، رابطهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$F'(t) - \lambda_n F(t) = \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) \{P_{k+1}(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A)\}. \tag{۳۲۰۷}$$

اما از (۲۸۰۷) معلوم می‌شود که $P_{k+1}(A) = (A - \lambda_{k+1} I) P_k(A)$؛ درنتیجه،

$$\begin{aligned} P_{k+1}(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A) &= (A - \lambda_{k+1} I) P_k(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A) \\ &= (A - \lambda_n I) P_k(A). \end{aligned}$$

بنابراین، معادلهٔ (۳۲۰۷) خواهد شد

$$\begin{aligned} F'(t) - \lambda_n F(t) = (A - \lambda_n I) \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) P_k(A) &= (A - \lambda_n I)\{F(t) - r_n(t) P_{n-1}(A)\} \\ &= (A - \lambda_n I) F(t) - r_n(t) P_n(A). \end{aligned}$$

قضیهٔکیلی ــ هامیلتون‌ایجاب می‌کندکه $P_n(A) = O$؛ درنتیجه، معادلهٔ آخر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$F'(t) - \lambda_n F(t) = (A - \lambda_n I)F(t) = AF(t) - \lambda_n F(t),$$

که از آن معلـــوم می‌شود که $F'(t) = AF(t)$. چون $F(0) = I$ ، قضیهٔ یکتایی (قضیهٔ ۷۰۷) نشان می‌دهد که $F(t) = e^{tA}$.

مثال ۱ . اگر A یک ماتریس 2×2 باشد که هر دو مقدار ویژه‌اش مساوی λ اند ، e^{tA} را به‌صورت ترکیبی خطی از I و A بیان نمایید .

حل . با نوشتن $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ، باید دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$r_1'(t) = \lambda r_1(t), \qquad r_1(0) = 1,$$

$$r_2'(t) = \lambda r_2(t) + r_1(t), \qquad r_2(0) = 0$$

را حل کنیم . با حل این معادلات مرتبهٔ اول بتوالی ، در می‌یابیم که

$$r_1(t) = e^{\lambda t}, \qquad r_2(t) = te^{\lambda t}.$$

چون $P_0(A) = I$ و $P_1(A) = A - \lambda I$ ، فرمول مطلوب برای e^{tA} عبارت خواهد بود از

$$e^{tA} = e^{\lambda t} I + te^{\lambda t}(A - \lambda I) = e^{\lambda t}(1 - \lambda t)I + te^{\lambda t} A. \tag{۳۳۰۷}$$

مثال ۲ . مثال ۱ را درصـــورتی حل کنید که مقادیر ویژهٔ A ، λ و μ بوده‌و $\lambda \neq \mu$.

حل . دراین حالت دستگاه معادلات دیفرانسیل به‌صورت زیر است :

$$r_1'(t) = \lambda r_1(t), \qquad r_1(0) = 1,$$
$$r_2'(t) = \mu r_2(t) + r_1(t), \qquad r_2(0) = 0.$$

جوابهای آن عبارتند از

$$r_1(t) = e^{\lambda t}, \qquad r_2(t) = \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu}.$$

چون $P_0(A) = I$ و $P_1(A) = A - \lambda I$ ، فرمول مطلوب برای e^{tA} مساوی است با

$$e^{tA} = e^{\lambda t} I + \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu}(A - \lambda I) = \frac{\lambda e^{\mu t} - \mu e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} I + \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu} A. \tag{۳۴۰۷}$$

اگر مقادیر ویژهٔ λ, μ اعدادی مختلط باشند ، نماییهای $e^{\lambda t}$ و $e^{\mu t}$ نیز اعدادی

مختلط‌انـــد . اما ، اگر λ و μ مزدوجهای مختلط باشند ، اسکالرهای ضرب شده در I و A در (۳۴۰۷) حقیقی خواهند بود . مثلا " ، فرض کنیم

$$\lambda = \alpha + i\beta, \qquad \mu = \alpha - i\beta, \qquad \beta \neq 0.$$

دراین صورت ، $\lambda - \mu = 2i\beta$ ؛ درنتیجه ، معادلهٔ (۳۴۰۷) خواهد شد

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{(\alpha+i\beta)t}I + \frac{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i\beta}[A - (\alpha + i\beta)I] \\ &= e^{\alpha t}\left\{e^{i\beta t}I + \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i\beta}(A - \alpha I - i\beta I)\right\} \\ &= e^{\alpha t}\left\{(\cos\beta t + i\sin\beta t)I + \frac{\sin\beta t}{\beta}(A - \alpha I - i\beta I)\right\}. \end{aligned}$$

جملات شامل i حذف می‌شوند و به‌دست می‌آوریم که

$$e^{tA} = \frac{e^{\alpha t}}{\beta}\{(\beta\cos\beta t - \alpha\sin\beta t)I + \sin\beta t\, A\}. \tag{۳۵۰۷}$$

۱۴۰۷ روشهای دیگر برای محاسبهٔ e^{tA} در حالات خاص

روش‌پوتزر برای بیان e^{tA} به‌صورت یک چندجمله‌ای از A کاملا " کلی است ، چرا که‌برای جمیع ماتریسهای مربعی A اعتبار دارد . یک‌روش کلی همیشه ساده‌ترین روش برای‌استفاده در بعضی حالات خاص نیست . دراین بخش روشهای ساده‌تری برای محاسبهٔ e^{tA} درسه حالت‌خاص زیر ارائه می‌دهیم : (آ) وقتی همهٔ مقادیر ویژهٔ A مساویند ؛ (ب) وقتی همهٔ مقادیر ویـــژهٔ A متمایزند ؛ و (پ) وقتی A دو مقدار ویژهٔ متمایز دارد که دقیقا " یکی درجهٔ تکرارش 1 است .

قضیهٔ ۱۰۰۷ . هرگاه A یک‌ماتریس $n \times n$ باشدکه‌همهٔ‌مقادیرویژه‌اش مساوی λ است ، آنگاه خواهیم داشت

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}(A - \lambda I)^k. \tag{۳۶۰۷}$$

برهان . چون ماتریسهای $\lambda t I$ و $t(A - \lambda I)$ تعویض می‌شوند ، داریم

$$e^{tA} = e^{\lambda t I} e^{t(A-\lambda I)} = (e^{\lambda t} I) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k .$$

قضیهٔ کیلی ـ هامیلتون ایجاب می‌کند که، به‌ازای هر $k \geq n$ ، $(A - \lambda I)^k = O$ ؛ درنتیجه، قضیه ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۱۱۰۷ . ***هرگاه A یک ماتریس $n \times n$ با n مقدار ویژهٔ متمایز $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ باشد، آنگاه خواهیم داشت***

$$e^{tA} = \sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k} L_k(A) ,$$

که درآن $L_k(A)$ یک چندجمله‌ای از A از درجهٔ $n-1$ است که با فرمول زیر داده می‌شود:

$$\text{به‌ازای } k = 1, 2, \ldots, n ، \quad L_k(A) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_k - \lambda_j} .$$

تذکر. چند جمله‌ایهای $L_k(A)$ را ***ضرایب درونیابی لاگرانژ*** می‌نامند.

برهان. تابع ماتریسی F را با معادلهٔ

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k} L_k(A) \tag{۳۷۰۷}$$

تعریف‌کرده، تحقیق می‌کنیم که F در معادلهٔ دیفرانسیل $F'(t) = AF(t)$ با شرط‌اولیهٔ $F(0) = I$ صدق می‌کند. از (۳۷۰۷) معلوم می‌شود که

$$AF(t) - F'(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k} (A - \lambda_k I) L_k(A) .$$

بنابر قضیهٔ کیلی ـ هامیلتون، به‌ازای‌هر k داریم $(A - \lambda_k I) L_k(A) = O$ ؛ درنتیجه، F در معادلهٔ دیفرانسیل $F'(t) = AF(t)$ صدق می‌کند.

برای اتمام برهان باید نشان دهیم F در شرط‌اولیهٔ $F(0) = I$ صدق می‌کند، که به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(A) = I . \tag{۳۸۰۷}$$

برهانی از (۳۸۰۷) در تمرین ۱۶ از بخش ۱۵۰۷ مختصرا " آمده است .

در قضیهٔ بعدی به حالتی می‌پردازیم که A دو مقدار ویژهٔ متمایز دارد که دقیقا " یکی از آنها درجهٔ تکرارش 1 است .

قضیهٔ ۱۲۰۷ . فرض‌کنیم A یک ماتریس $n \times n$ $(n \geq 3)$ باشد ، با دو مقدار ویژهٔ متمایز λ و μ ، که λ با درجهٔ تکرار $n-1$ و μ با درجهٔ تکرار 1 باشد . دراین‌صورت ، داریم

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k + \left\{\frac{e^{\mu t}}{(\mu-\lambda)^{n-1}} - \frac{e^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^k}{k!}(\mu-\lambda)^k\right\}(A-\lambda I)^{n-1}.$$

برهان . مثل برهان قضیهٔ ۱۰۰۷ ، شروع می‌کنیم به نوشتن

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k + e^{\lambda t}\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k$$
$$= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k + e^{\lambda t}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^{n-1+r}}{(n-1+r)!}(A-\lambda I)^{n-1+r}.$$

حال ، با استفاده از قضیهٔ کیلی ـ هامیلتون ، سری را روی r در شکل بسته محاسبه می‌کنیم . چون

$$A - \mu I = A - \lambda I - (\mu-\lambda)I ,$$

در می‌یابیم که

$$(A-\lambda I)^{n-1}(A-\mu I) = (A-\lambda I)^n - (\mu-\lambda)(A-\lambda I)^{n-1}.$$

طرف چپ ، بنابر قضیهٔ کیلی ـ هامیلتون ، O است؛ درنتیجه ،

$$(A-\lambda I)^n = (\mu-\lambda)(A-\lambda I)^{n-1}.$$

باچندبار استفاده از این رابطه ، درمی‌یابیم که

$$(A-\lambda I)^{n-1+r} = (\mu-\lambda)^r(A-\lambda I)^{n-1}.$$

لذا ، سری روی r خواهد شد

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^{n-1+r}}{(n-1+r)!}(\mu-\lambda)^r(A-\lambda I)^{n-1} = \frac{1}{(\mu-\lambda)^{n-1}} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(\mu-\lambda)^k(A-\lambda I)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{(\mu-\lambda)^{n-1}}\left\{e^{t(\mu-\lambda)} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!}(\mu-\lambda)^k\right\}(A-\lambda I)^{n-1}.$$

این برهان را تمام می‌کند .

فرمول صریح قضیهٔ ۱۲۰۷ را می‌توان با اعمال روش پوتزر نیز نتیجه گرفت ، اما جزئیات کار پیچیده‌تر است .

فرمولهای صریح قضایای ۱۰۰۷ ، ۱۱۰۷ ، و ۱۲۰۷ تمام ماتریسهای از مرتبهٔ $n \leq 3$ را می‌پوشانند . چون اغلب درعمل با حالت 3×3 مواجهیم ، فرمولهای این حالت برای سهولت در ارجاع ذیلا" ذکر شده‌اند .

حالت ۱ . هرگاه ماتریس 3×3 ، A دارای مقادیر ویژهٔ $\lambda, \lambda, \lambda$ باشد ، آنگاه

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\{I + t(A-\lambda I) + \tfrac{1}{2}t^2(A-\lambda I)^2\}.$$

حالت ۲ . هرگاه ماتریس 3×3 ، A دارای مقادیر ویژهٔ متمایز λ, μ, ν باشد ، آنگاه

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\frac{(A-\mu I)(A-\nu I)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)} + e^{\mu t}\frac{(A-\lambda I)(A-\nu I)}{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)} + e^{\nu t}\frac{(A-\lambda I)(A-\mu I)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}.$$

حالت ۳ . هرگاه ماتریس 3×3 ، A دارای مقادیر ویژهٔ λ, λ, μ ، که $\lambda \neq \mu$ ، باشد ، آنگاه

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\{I + t(A-\lambda I)\} + \frac{e^{\mu t} - e^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)^2}(A-\lambda I)^2 - \frac{te^{\lambda t}}{\mu-\lambda}(A-\lambda I)^2.$$

مثال . e^{tA} را وقتی $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ حساب کنید .

حل. مقادیرویژهٔ A عبارتند از $1, 1, 2$ ؛ درنتیجه، از فرمول حالت ۳ معلوم می‌شود که

$$e^{tA} = e^t\{I + t(A - I)\} + (e^{2t} - e^t)(A - I)^2 - te^t(A - I)^2. \qquad (۳۹.۷)$$

با دسته‌بندی توانهای A ، می‌توان این رابطه را به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$e^{tA} = (-2te^t + e^{2t})I + \{(3t + 2)e^t - 2e^{2t}\}A - \{(t + 1)e^t - e^{2t}\}A^2. \qquad (۴۰.۷)$$

دراین مرحله می‌توان $(A - I)^2$ یا A^2 را محاسبه‌کرد و، با انجام اعمال آمده در (۳۹.۷) یا (۴۰.۷)، نتیجه را به‌صورت یک ماتریس 3×3 نوشت:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} -2te^t + e^{2t} & (3t + 2)e^t - 2e^{2t} & -(t + 1)e^t + e^{2t} \\ -2(t + 1)e^t + 2e^{2t} & (3t + 5)e^t - 4e^{2t} & -(t + 2)e^t + 2e^{2t} \\ -2(t + 2)e^t + 4e^{2t} & (3t + 8)e^t - 8e^{2t} & -(t + 4)e^t + 4e^{2t} \end{bmatrix}.$$

۱۵.۷ تمرین

برای هریک از ماتریسهای تمرینات ۱ تا ۶، e^{tA} را به‌صورت یک چندجمله‌ای از A بیان کنید.

۱. $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

۲. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

۳. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

۴. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$.

۵. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

۶. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

۷. (آ) می‌دانیم که‌همهٔ مقادیرویژهٔ ماتریس 3×3 ، A مساوی λ است. ثابت‌کنید که

$$e^{tA} = \tfrac{1}{2}e^{\lambda t}\{(\lambda^2t^2 - 2\lambda t + 2)I + (-2\lambda t^2 + 2t)A + t^2A^2\}.$$

(ب) فرمول نظیر را درصورتی‌که A یک ماتریس 4×4 باشدکه همهٔ مقادیرویژه‌اش

مساوی λ است پیداکنید .

در هریک از تمرینهای ۸ تا ۱۵ ، دستگاه $Y' = AY$ با شرط اولیهٔ داده شده را حل کنید .

۸ . $Y(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

۹ . $Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -15 & 7 \end{bmatrix}$.

۱۰ . $Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

۱۱ . $Y(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

۱۲ . $Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$.

۱۳ . $Y(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

۱۴ . $Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

۱۵ . $Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

۱۶ . دراین تمرین، برهان مختصری برای معادلهٔ (۳۸۰۷) که در برهان قضیهٔ ۱۱۰۷ به

کاررفت ارائه می‌شود. فرض کنید $L_k(\lambda)$ چند جمله‌ایی از λ از درجهٔ $n-1$ باشد که با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$L_k(\lambda) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j},$$

که درآن $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ، n اسکالر متمایزند.

(آ) ثابت کنید که

$$L_k(\lambda_i) = \begin{cases} 0 \text{ ، اگر } \lambda_i \neq \lambda_k \\ 1 \text{ ، اگر } \lambda_i = \lambda_k \end{cases} .$$

(ب) فرض کنید $y_1, \ldots, y_n$ ، n اسکالر دلخواه بوده، و

$$p(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} y_k L_k(\lambda).$$

ثابت کنید $p(\lambda)$ تنها چندجمله‌ای ازدرجهٔ نابیشتراز $n-1$ است که در n معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\text{به‌ازای } k = 1, 2, \ldots, n \text{ ، } p(\lambda_k) = y_k .$$

(پ) ثابت کنید به‌ازای هر λ ، $\sum_{k=1}^{n} L_k(\lambda) = 1$ ، و نتیجه بگیرید که به‌ازای هر ماتریس مربعی A داریم

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(A) = I,$$

که درآن I ماتریس همانی می‌باشد.

۱۶.۷ دستگاههای خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت

حال مسئله با مقدار اولیهٔ غیرهمگن

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t), \qquad Y(a) = B, \tag{۴۱.۷}$$

بر بازهٔ J را درنظر می‌گیریم. دراینجا A یک ماتریس ثابت $n \times n$ ، Q یک تابع برداری n بعدی (به‌صورت یک ماتریس ستونی $n \times 1$) پیوسته بر J ، و a نقطهٔ مفروضی در J است. می‌توان با همان عملی که درحالت اسکالر به‌کار رفت به یک فرمول صریح برای جواب این مسئله دست یافت.

ابتدا طرفین (۴۱.۷) را در ماتریس نمایی e^{-tA} ضرب کرده، معادلهٔ دیفرانسیل

را به شکل

$$e^{-tA}\{Y'(t) - AY(t)\} = e^{-tA}Q(t) \qquad (۴۲۰۷)$$

می‌نویسیم . طرف چپ (۴۲۰۷) مشتق حاصل ضرب $e^{-tA}Y(t)$ است . بنابر این ، اگر از طرفین (۴۲۰۷) از a تا x ، که $x \in J$ ، انتگرال بگیریم ، خواهیم داشت

$$e^{-xA}Y(x) - e^{-aA}Y(a) = \int_a^x e^{-tA}Q(t)\,dt\,.$$

با ضرب این رابطه‌در e^{xA} ، فرمول‌صریح (۴۳۰۷) به‌دست می‌آید که در قضیهٔ زیرآمده است .

قضیهٔ ۱۳۰۷ . فرض‌کنیم A یک‌ماتریس‌ثابت $n \times n$ ، و Q یک تابع برداری n بعدی پیوسته بربازهٔ J باشد . دراین صورت ، مسئله با مقدار اولیهٔ

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t), \qquad Y(a) = B,$$

جواب منحصر بفردی بر J دارد که با فرمول صریح

$$Y(x) = e^{(x-a)A}B + e^{xA}\int_a^x e^{-tA}Q(t)\,dt \qquad (۴۳۰۷)$$

بیان می‌شود .

مثل‌حالت همگن ، مشکل به‌کار بردن این فرمول در عمل محاسبهٔ ماتریسهای نمایی است .

توجه کنید که جملهٔ اول ، یعنی $e^{(x-a)A}B$ ، جواب مسئلهٔ همگن $Y'(t) = AY(t),\ Y(a) = B$ است . جملهٔ دوم جواب مسئلهٔ غیرهمگن

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t), \qquad Y(a) = O$$

می‌باشد . قضیهٔ ۱۳۰۷ را با یک مثال توضیح می‌دهیم .

مثال . مسئله با مقدار اولیهٔ

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t), \qquad Y(0) = B,$$

را بر بازهٔ $(-\infty\,, +\infty)$ حل کنید ، که درآن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad Q(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ te^{2t} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

حل. بنابر قضیهٔ ۱۳۰۷ ، جواب به صورت زیر است :

$$Y(x) = e^{xA} \int_0^x e^{-tA} Q(t)\, dt = \int_0^x e^{(x-t)A} Q(t)\, dt. \qquad (۴۴۰۷)$$

مقادیر ویژهٔ A عبارتند از 2 ، 2 ، و 4 . برای محاسبهٔ e^{xA} از فرمول حالت ۳ ، بخش ۱۴۰۷ ، استفاده می‌کنیم تا به‌دست آید که

$$\begin{aligned} e^{xA} &= e^{2x}\{I + x(A-2I)\} + \tfrac{1}{4}(e^{4x} - e^{2x})(A-2I)^2 - \tfrac{1}{2}xe^{2x}(A-2I)^2 \\ &= e^{2x}\{I + x(A-2I) + \tfrac{1}{4}(e^{2x} - 2x - 1)(A-2I)^2\}. \end{aligned}$$

می‌توان ازتعویض x با $x-t$ دراین‌فرمول $e^{(x-t)A}$ رابه‌دست‌آورد. بنابراین، انتگرالده در (۴۴۰۷) عبارت است از

$$\begin{aligned} e^{(x-t)A}Q(t) &= e^{2(x-t)}\{I + (x-t)(A-2I) \\ &\quad + \tfrac{1}{4}[e^{2(x-t)} - 2(x-t) - 1](A-2I)^2\}Q(t) \end{aligned}$$

$$= e^{2x}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} + (A-2I)e^{2x}\begin{bmatrix} x-t \\ 0 \\ t(x-t) \end{bmatrix} + \frac{1}{4}(A-2I)^2 e^{2x}\begin{bmatrix} e^{2x}e^{-2t} - 2(x-t) - 1 \\ 0 \\ e^{2x}te^{-2t} - 2t(x-t) - t \end{bmatrix}.$$

با انتگرالگیری، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} Y(x) = \int_0^x e^{(x-t)A}Q(t)\, dt &= e^{2x}\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} + (A-2I)e^{2x}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}x^2 \\ 0 \\ \frac{1}{6}x^3 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{4}(A-2I)^2 e^{2x}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} - x - x^2 \\ 0 \\ \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

چون داریم

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad (A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} ،$$

خواهیم داشت

$$Y(x) = e^{2x}\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} + e^{2x}\begin{bmatrix} \frac{1}{6}x^3 \\ -\frac{1}{6}x^3 \\ x^2 + \frac{1}{6}x^3 \end{bmatrix} + e^{2x}\begin{bmatrix} \frac{3}{8}e^{2x} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \\ -\frac{3}{8}e^{2x} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \\ \frac{3}{8}e^{2x} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \end{bmatrix}$$

$$= e^{2x}\begin{bmatrix} \frac{3}{8}e^{2x} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}x^2 \\ -\frac{3}{8}e^{2x} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}x^2 \\ \frac{3}{8}e^{2x} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}x^2 \end{bmatrix}.$$

سطرهای این ماتریس توابع مطلوب y_1, y_2, y_3 می‌باشند.

۱۷۰۷ تمرین

۱ . فرض کنید Z یک جواب دستگاه غیرهمگن

$$Z'(t) = AZ(t) + Q(t)$$

بربازهٔ J با مقدار اولیهٔ $Z(a)$ باشد. ثابت کنید که دستگاه غیرهمگن

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t)$$

بر J با مقدار اولیهٔ $Y(a)$ فقط یک جواب دارد و این جواب از فرمول

$$Y(t) = Z(t) + e^{(t-a)A}\{Y(a) - Z(a)\}$$

به‌دست می‌آید. اغلب روشهای خاصی برای تعیین یک جواب خصوصی $Z(t)$ که‌شبیه تابع معلوم $Q(t)$ است وجود دارند. تمرینهای ۲، ۳، ۵، و ۷ چنین روشهایی را برای $Q(t) = C$ ، $Q(t) = e^{\alpha t}C$ ، $Q(t) = t^m C$ ، و $Q(t) = (\cos \alpha t)C + (\sin \alpha t)D$ ، که درآنها C و D بردارهای ثابتی‌اند، توضیح می‌دهند. اگر جواب خصوصی $Z(t)$ که‌به‌این‌طریق به‌دست می‌آید مقدار اولیهٔ لازم را نداشته باشد، $Z(t)$ را همانطور که در تمرین ۱ نموده شده اصلاح می‌کنیم تا جواب دیگری مانند $Y(t)$ با مقدار اولیهٔ لازم به‌دست آید.

۲ . (آ) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ ثابت بوده، و B و C بردارهای n بعدی ثابتی باشند. ثابت کنید جواب دستگاه

$$Y'(t) = AY(t) + C, \qquad Y(a) = B,$$

بر $(-\infty, +\infty)$ از فرمول

$$Y(x) = e^{(x-a)A}B + \left(\int_0^{x-a} e^{uA}\,du\right)C$$

به‌دست می‌آید .

(ب) هرگاه A نامنفرد باشد ، نشان‌دهید که انتگرال قسمت (آ) دارای مقدار $\{e^{(x-a)A} - I\}A^{-1}$ است .

(پ) $Y(x)$ راوقتی

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}, \quad a = 0$$

به‌طور صریح حساب کنید .

۳ . فرض کنید A یک ماتریس ثابت $n \times n$ بوده ، B و C بردارهایی ثابت و n بعدی باشند ، و α اسکالر مفروضی باشد .

(آ) ثابت کنید دستگاه غیر همگن $Z'(t) = AZ(t) + e^{\alpha t}C$ جوابی به شکل $Z(t) = e^{\alpha t}B$ دارد اگر و فقط اگر $(\alpha I - A)B = C$.

(ب) هرگاه α یک مقدار ویژهٔ A نباشد ، ثابت کنید بردار B را همیشه می‌توان طوری‌اختیار کرد که دستگاه قسمت (آ) جوابی به شکل $Z(t) = e^{\alpha t}B$ داشته باشد .

(پ) هرگاه α یک مقدار ویژهٔ A نباشد ، ثابت کنید هر جواب دستگاه $Y'(t) = AY(t) + e^{\alpha t}C$ به شکل $Y(t) = e^{tA}(Y(0) - B) + e^{\alpha t}B$ است ، که در آن $B = (\alpha I - A)^{-1}C$.

۴ . با استفاده از روش تمرین ۳ ، برای دستگاه غیرهمگن $Y'(t) = AY(t) + e^{2t}C$ ، که درآن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جوابی پیدا کنید .

۵ . فرض‌کنید A یک ماتریس ثابت $n \times n$ بوده ، B و C بردارهایی ثابت و n بعدی باشند ، و m یک عدد صحیح مثبت باشد .

(آ) ثابت کنید دستگاه غیرهمگن $Y'(t) = AY(t) + t^mC,\ Y(0) = B$ جوابی خصوصی به‌شکل

$$Y(t) = B_0 + tB_1 + t^2B_2 + \cdots + t^mB_m\ ,$$

که درآن $B_0, B_1, \ldots, B_m$ بردارهایی ثابت‌اند ، دارد اگر و فقط اگر

$$C = -\frac{1}{m!} A^{m+1} B.$$

ضرایب $B_0, B_1, \ldots, B_m$ این جواب را معین نمایید .

(ب) ثابت کنید اگر A نامنفرد باشد ، همیشه می‌توان بردار اولیهٔ B را طوری اختیار کرد که دستگاه قسمت (آ) جوابی به شکل معین داشته باشد .

۶ . دستگاه غیر همگن

$$y_1' = 3y_1 + y_2 + t^3$$

$$y_2' = 2y_1 + 2y_2 + t^3$$

را درنظر بگیرید .

(آ) یک جواب خصوصی به شکل $Y(t) = B_0 + tB_1 + t^2B_2 + t^3B_3$ پیدا کنید .

(ب) یک جواب دستگاه را با شرایط $y_1(0) = y_2(0) = 1$ پیدا کنید .

۷ . فرض‌کنید A یک ماتریس‌ثابت $n \times n$ بوده ، B, C, D بردارهایی ثابت و n بعدی باشند ، و α عدد حقیقی ناصفر معلومی باشد . ثابت کنید دستگاه غیرهمگن

$$Y'(t) = AY(t) + (\cos \alpha t)C + (\sin \alpha t)D, \qquad Y(0) = B,$$

جوابی خصوصی به شکل

$$Y(t) = (\cos \alpha t)E + (\sin \alpha t)F,$$

که درآن E و F بردارهایی ثابت‌اند ، دارد اگر و فقط اگر

$$(A^2 + \alpha^2 I)B = -(AC + \alpha D).$$

برای‌این جواب ، E و F را برحسب A, B, C معین‌کنید . توجه‌کنید که اگر $A^2 + \alpha^2 I$ نامنفرد باشد ، همیشه‌می‌توان بردار اولیهٔ B را طوری اختیار کرد که دستگاه‌جوابی به شکل معین داشته باشد .

۸ . (آ) یک جواب خصوصی دستگاه غیر همگن

$$y_1' = y_1 + 3y_2 + 4 \sin 2t$$

$$y_2' = y_1 - y_2$$

را بیابید .

(ب) یک جواب دستگاه با شرایط $y_1(0) = y_2(0) = 1$ را پیدا کنید .

در هریک از تمرینهای ۹ تا ۱۲ ، دستگاه غیرهمگن $Y'(t) = AY(t) + Q(t)$ را با

شرط اولیهٔ داده شده حل کنید.

۹. $Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2e^{t} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

۱۰. $Y(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} e \\ e^{2t} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

۱۱. $Y(0) = \begin{bmatrix} -\frac{1007}{442} \\ \frac{707}{221} \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 7e^{t} - 27 \\ -3e^{t} + 12 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

۱۲. $Y(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \\ t \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

۱۸.۷ دستگاه خطی کلی $Y'(t) = P(t)Y(t) + Q(t)$

قضیهٔ ۱۳.۷ برای جواب دستگاه خطی

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t), \qquad Y(a) = B,$$

که درآن A یک ماتریس $n \times n$ ثابت بوده و $Q(t)$، $Y(t)$ ماتریسهای ستونی $n \times 1$ ی هستند، یک فرمول صریح بهدست میدهد. اینک به حالت کلیتر

$$Y'(t) = P(t)Y(t) + Q(t), \qquad Y(a) = B, \tag{۴۵.۷}$$

میپردازیم، که درآن ماتریس $n \times n$، $P(t)$ لزوماً ثابت نیست.

هرگاه P و Q بر بازهٔ باز J پیوسته باشند، یک قضیهٔ وجودی ـ یکتایی کلی که در یکی از بخشهای آتی ثابت میشود میگوید که بهازای هر a در J و هر بردار اولیهٔ B درست یک جواب برای مسئله با مقدار اولیهٔ (۴۵.۷) وجود دارد. دراین بخش، با استفادهازاین نتیجه، فرمولی برای این جواب بهدست میآوریم که قضیهٔ ۱۳.۷ را تعمیم میدهد.

درحالت اسکالر ($n = 1$)، معادلهٔ دیفرانسیل (۴۵.۷) را میتوان بهصورت زیر حل کرد. قرار میدهیم $A(x) = \int_a^x P(t)\,dt$. سپس، با ضرب طرفین (۴۵.۷) در $e^{-A(t)}$، معادلهٔ دیفرانسیل را بهشکل

$$e^{-A(t)}\{Y'(t) - P(t)Y(t)\} = e^{-A(t)}Q(t) \tag{۴۶.۷}$$

می‌نویسیم . اما طرف چپ مشتق حاصل ضرب $e^{-A(t)}Y(t)$ است . بنابراین ، می‌توان با انتگرالگیری از طرفین از a تا x ، که a و x نقاطی در J اند ، به‌دست آورد که

$$e^{-A(x)}Y(x) - e^{-A(a)}Y(a) = \int_a^x e^{-A(t)}Q(t)\,dt .$$

با ضرب این رابطه در $e^{A(x)}$ فرمول صریح

$$Y(x) = e^{A(x)}e^{-A(a)}Y(a) + e^{A(x)}\int_a^x e^{-A(t)}Q(t)\,dt \tag{۴۷.۷}$$

به‌دست خواهد آمد .

تنها بخشی از این استدلال که مستقیما" در باب توابع ماتریسی به‌کار نمی‌رود این است که طرف چپ (۴۶.۷) مشتق حاصل ضرب $e^{-A(t)}Y(t)$ است . دراین مرحله از این استفاده‌شد که مشتق $e^{-A(t)}$ مساوی $-P(t)e^{-A(t)}$ است . درحالت اسکالر ، این نتیجه‌ای است از فرمول زیر برای مشتقگیری از توابع نمایی :

هرگاه $E(t) = e^{A(t)}$ ، آنگاه $E'(t) = A'(t)e^{A(t)}$.

متاسفانه ، این فرمول مشتقگیری ، وقتی A یک تابع ماتریسی باشد ، همیشه درست نیست . مثلا" ، برای تابع ماتریسی 2×2 ، $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ درست نیست . (ر.ک. تمرین ۷ از بخش ۱۲.۷ .) از اینرو ، برای تعمیم معادلهٔ (۴۷.۷) به‌حالت ماتریسی ، استدلالی اصلاح شده لازم است .

فرض کنید طرفین (۴۵.۷) را در یک ماتریس $n \times n$ نامعین مانند $F(t)$ ضرب‌کرده باشیم . این کار رابطهٔ

$$F(t)Y'(t) = F(t)P(t)Y(t) + F(t)Q(t)$$

را به‌ما می‌دهد . حال ، با افزودن $F'(t)Y(t)$ به طرفین این رابطه ، طرف چپ آن را به مشتق حاصلضرب $F(t)Y(t)$ تبدیل می‌کنیم . با این عمل ، معادلهٔ آخر نتیجه می‌دهد که

$$\{F(t)Y(t)\}' = \{F'(t) + F(t)P(t)\}Y(t) + F(t)Q(t) .$$

اگر بتوان ماتریس $F(t)$ را طوری اختیار کرد که مجموع $\{F'(t) + F(t)P(t)\}$ سمت راست ماتریس صفر باشد ، معادله آخر به

$$\{F(t)Y(t)\}' = F(t)Q(t)$$

ساده خواهد شد. با انتگرالگیری از این رابطه از a تا x ، خواهیم داشت

$$F(x)Y(x) - F(a)Y(a) = \int_a^x F(t)Q(t)\,dt.$$

هرگاه، علاوه براین، ماتریس $F(x)$ نامنفرد باشد، فرمول صریح

$$Y(x) = F(x)^{-1}F(a)Y(a) + F(x)^{-1}\int_a^x F(t)Q(t)\,dt \qquad (۴۸\cdot۷)$$

را خواهیم داشت. این فرمول تعمیمی است از فرمول اسکالر (۴۷·۷) . این فرایند در صورتی بکاراست که بتوان تابع ماتریسی $n \times n$ ، $F(t)$ را طوری پیدا کرد که در معادلهٔ دیفرانسیل ماتریسی

$$F'(t) = -F(t)P(t)$$

صدق کرده و نامنفرد باشد.

توجه کنید که این معادلهٔ دیفرانسیل خیلی شبیه معادلهٔ دیفرانسیل اصلی (۴۵·۷) با $Q(t) = 0$ است، جزآنکه تابع مجهول $F(t)$ بهجای یک ماتریس ستونی بودن یک ماتریس مربعی است. همچنین، تابع مجهول بهجای آنکه از چپ در $P(t)$ ضرب شده باشد از راست در $-P(t)$ ضرب شده است.

حال ثابت میکنیم که معادلهٔ دیفرانسیل برای F همیشه یک جواب نامنفرددارد. اثبات به قضیهٔ وجودی زیر برای دستگاههای خطی همگن بستگی دارد.

قضیهٔ ۱۴·۷ . فرض‌کنیم $A(t)$ یک تابع ماتریسی $n \times n$ باشد که بر یک بازهٔ باز J پیوسته است. هرگاه $a \in J$ و B یک بردار n بعدی معلوم باشد، دستگاه خطی همگن

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \qquad Y(a) = B,$$

یک جواب برداری n بعدی مانند Y بر J دارد.

برهانی از قضیهٔ ۱۴·۷ در بخش ۲۱·۷ داده میشود. بهکمک این قضیه میتوان قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

قضیهٔ ۱۵·۷ . اگر P یک تابع ماتریسی $n \times n$ باشد که بر بازهٔ باز J پیوسته است، و a نقطهای در J باشد، یک تابع ماتریسی $n \times n$ مانند F هست که در معادلهٔ دیفرانسیل

ماتریسی

$$F'(x) = -F(x)P(x) \tag{۴۹.۷}$$

بر J با مقدار اولیهٔ $F(a) = I$ صدق می‌کند. بعلاوه، $F(x)$ به‌ازای هر x در J نامنفرد می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $Y_k(x)$ یک جواب برداری معادلهٔ دیفرانسیل

$$Y_k'(x) = -P(x)^t Y_k(x)$$

بر J با برداراولیهٔ $Y_k(a) = I_k$، که I_k ستون k ام ماتریس همانی $n \times n$، I است، باشد. دراینجا $P(x)^t$ ترانهادهٔ $P(x)$ است. فرض کنیم $G(x)$ ماتریس $n \times n$ ی باشد که ستون k امش $Y_k(x)$ است. دراین صورت، G در معادلهٔ دیفرانسیل ماتریسی

$$G'(x) = -P(x)^t G(x) \tag{۵۰.۷}$$

بر J بامقداراولیهٔ $G(a) = I$ صدق می‌کند. حال ازطرفین (۵۰.۷) ترانهاده می‌گیریم. چون ترانهادهٔ یک حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب ترانهاده‌ها به‌ترتیب عکس است، داریم

$$\{G'(x)\}^t = -G(x)^t P(x).$$

همچنین، ترانهادهٔ مشتق G' مشتق ترانهادهٔ G^t است. بنابراین، ماتریس $F(x) = G(x)^t$ در معادلهٔ دیفرانسیل (۴۹.۷) با مقدار اولیهٔ $F(a) = I$ صدق می‌کند.

حال، بانشان دادن معکوس، ثابت می‌کنیم $F(x)$ نامنفرد است. فرض کنیم H تابع ماتریسی $n \times n$ ی باشد که ستون k امش جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$Y'(x) = P(x)\,Y(x)$$

با برداراولیهٔ (ستون k ام I) $Y(a) = I_k$ است. دراین صورت، H در مسئله بامقدار اولیهٔ

$$H'(x) = P(x)H(x), \qquad H(a) = I,$$

بر J صدق می‌کند. حاصل ضرب $F(x)H(x)$ دارای مشتق

$$F(x)H'(x) + F'(x)H(x) = F(x)P(x)H(x) - F(x)P(x)H(x) = O$$

به‌ازای هر x در J است. بنابراین، حاصل ضرب $F(x)H(x)$ ثابت است، $F(x)H(x) = F(a)H(a) = I$؛ درنتیجه، $H(x)$ معکوس $F(x)$ می‌باشد. این برهان را تمام خواهد کرد.

نتایج این بخش در قضیهٔ زیر خلاصه شده است.

قضیهٔ ۱۶۰۷ . *اگر P یک‌تابع ماتریسی $n \times n$ و Q یک تابع برداری n بعدی باشد، و هر دو بر بازهٔ باز J پیوسته باشند، جواب مسئله با مقدار اولیهٔ*

$$Y'(x) = P(x)\,Y(x) + Q(x), \qquad Y(a) = B, \tag{۵۱۰۷}$$

بر J با فرمول

$$Y(x) = F(x)^{-1}Y(a) + F(x)^{-1}\int_a^x F(t)Q(t)\,dt \tag{۵۲۰۷}$$

بیان مـی‌شود. ماتـریس $n \times n$ ، $F(x)$ ترانهادهٔ ماتریسی است که ستون k امش جواب مسئله با مقدار اولیهٔ

$$Y'(x) = -P(x)^t\,Y(x), \qquad Y(a) = I_k, \tag{۵۳۰۷}$$

می‌باشد، که درآن I_k ستون k ام ماتریس همانی I است.

اگرچه‌قضیهٔ ۱۶۰۷ فرمول صریحی برای جواب دستگاه خطی کلی (۵۱۰۷) به‌دست می‌دهد ،این فرمول بخاطرمشکلات تعیین تابع ماتریسی F ، همیشه‌برای محاسبهٔ جواب مفید نیست. تعیین F نیاز به حل n دستگاه خطی همگن (۵۳۰۷) دارد. در بخش بعد یک روش سـری تـوانی توصیف می‌شود که گاهی برای حل دستگاههای خطی همگن به‌کار می‌رود.

بار دیگر متـذکر مـی‌شویم که برهان قضیهٔ ۱۶۰۷ بر قضیهٔ ۱۴۰۷ ، یعنی قضیهٔ وجودی برای دستگاههای خطی همگن، که هنوز ثابت نشده است، استوار است.

۱۹۰۷ روش سری توانی برای حل دستگاههای خطی همگن

دستگاه خطی همگن

$$Y'(x) = A(x)\,Y(x), \qquad Y(0) = B, \tag{۵۴۰۷}$$

را درنظر می‌گیریم، که درآن ماتریس $n \times n$ ، $A(x)$ بسط به صورت سری توانی از x دارد که در بازهٔ بازی شامل مبداء همگراست؛ مثلاً ،

به‌ازای $|x| < r_1$ ، $A(x) = A_0 + xA_1 + x^2A_2 + \cdots + x^kA_k + \ldots$ ،

که‌درآن ضرایب $A_0, A_1, A_2, \ldots$ ماتریسهای $n \times n$ معلومی هستند. سعی می‌کنیم جوابی

به‌صورت سری توانی به شکل

$$Y(x) = B_0 + xB_1 + x^2B_2 + \cdots + x^kB_k + \cdots$$

با ضرایب برداری $B_0, B_1, B_2, \ldots$ بیابیم. چون $Y(0) = B_0$ ، شرط اولیه با اختیار (برداراولیهٔ مقرر) $B_0 = B$ برقرار می‌شود. برای تعیین بقیهٔ ضرایب، سری توانی مربوط به $Y(x)$ را در معادلهٔ دیفرانسیل گذاشته، ضرایب جملات همتوان x را متحد قرار می‌دهیم تا دستگاه معادلات زیر به‌دست آید:

$$(\text{۵۵.۷}) \cdot B_1 = A_0B, \qquad (k+1)B_{k+1} = \sum_{r=0}^{k} A_rB_{k-r} \text{ ، } \quad k = 1, 2, \ldots \text{ به‌ازای }$$

این معادلات را می‌توان بتوالی نسبت به بردارهای $B_1, B_2, \ldots$ حل کرد. اگر سری توانی حاصل برای $Y(x)$ در بازه‌ای چون $|x| < r_2$ همگرا باشد، $Y(x)$ یک جواب مسئله با مقدار اولیهٔ (۵۴.۷) در بازهٔ $|x| < r$ است، که درآن $r = \min\{r_1, r_2\}$.

مثلا"، اگر $A(x)$ یک ماتریس ثابت مانند A باشد، $A_0 = A$ و، به‌ازای $k \geq 1$ ، $A_k = O$ ؛ درنتیجه، دستگاه معادلات (۵۵.۷) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$B_1 = AB \text{ ؛ به‌ازای } k \geq 1 \text{ ، } (k+1)B_{k+1} = AB_k \cdot$$

با حل این معادلات بتوالی، درمی‌یابیم که

$$B_k = \frac{1}{k!}A^kB \text{ ، } k \geq 1 \text{ به‌ازای }$$

بنابراین، جواب به‌صورت سری دراین حالت خواهد شد

$$Y(x) = B + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^kB = e^{xA}B.$$

این با نتیجه‌ای که پیشتر برای دستگاههای خطی همگن با ضرایب ثابت به‌دست آمد مطابقت دارد.

۲۰.۷ تمرین

۱. فرض کنید p یک تابع حقیقی و Q یک تابع ماتریسی $n \times 1$ باشد، و هر دو بر بازهٔ J پیوسته باشند. همچنین، A یک ماتریس ثابت $n \times n$ باشد. ثابت کنید مسئله با مقدار اولیهٔ

$$Y'(x) = p(x)AY(x) + Q(x), \qquad Y(a) = B,$$

دارای جواب

$$Y(x) = e^{q(x)A}B + e^{q(x)A}\int_a^x e^{-q(t)A}Q(t)\,dt$$

بر J است، که درآن $q(x) = \int_a^x p(t)\,dt$.

۲ . حالت خاص تمرین ۱ که درآن A نامنفرد است، $a = 0$ ، $p(x) = 2x$ ، و $Q(x) = xC$ ، که درآن C یک بردار ثابت است را درنظر بگیرید. نشان دهید که جواب به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$Y(x) = e^{x^2A}(B + \tfrac{1}{2}A^{-1}C) - \tfrac{1}{2}A^{-1}C.$$

۳ . فرض کنید $A(t)$ یک تابع ماتریسی $n \times n$ بوده و $E(t) = e^{A(t)}$. همچنین، $Q(t)$ ، $Y(t)$ ، و B ماتریسهای ستونی $n \times 1$ ی باشند. فرض کنید بر بازهٔ باز J

$$E'(t) = A'(t)E(t) \;.$$

هرگاه $a \in J$ و A' و Q بر J پیوسته باشند، ثابت کنید که مسئله با مقداراولیهٔ

$$Y'(t) = A'(t)\,Y(t) + Q(t), \qquad Y(a) = B,$$

دارای جواب زیر بر J است:

$$Y(x) = e^{A(x)}e^{-A(a)}B + e^{A(x)}\int_a^x e^{-A(t)}Q(t)\,dt.$$

۴ . فرض کنید $E(t) = e^{A(t)}$. این تمرین چند نمونه از توابع ماتریسی $A(t)$ را توصیف می‌کند که برای آنها $E'(t) = A'(t)E(t)$.

(آ) فرض‌کنید $A(t) = t^rA$ ، که‌درآن A یک ماتریس ثابت $n \times n$ بوده و r یک عدد صحیح مثبت است. ثابت کنید $E'(t) = A'(t)E(t)$ بر $(-\infty, \infty)$.

(ب) فرض کنید $A(t)$ یک چندجمله‌ای از t با ضرایب ماتریسی باشد: مثلاً،

$$A(t) = \sum_{r=0}^{m} t^r A_r,$$

که درآن ضرایب تعویض می‌شوند: به‌ازای هر r و s ، $A_rA_s = A_sA_r$. ثابت کنید $E'(t) = A'(t)E(t)$ بر $(-\infty, \infty)$.

(پ) دستگاه خطی همگن

$$Y'(t) = (I + tA)\,Y(t), \qquad Y(0) = B$$

بر بازهٔ $(-\infty, \infty)$ ، که درآن A یک ماتریس ثابت $n \times n$ است، را حل کنید.

۵ . فرض کنید تابع ماتریسی $n \times n$ ، $A(x)$ بسط به‌صورت سری توانی همگرا به‌ازای $|x| < r$ دارد . برای حل دستگاه خطی همگن مرتبهٔ دوم

$$Y''(x) = A(x)\,Y(x), \qquad Y(0) = B, \qquad Y'(0) = C$$

یک روند به‌صورت سری توانی ارائه دهید .

۶ . دستگاه مرتبهٔ دوم $Y''(x) + A\,Y(x) = 0$ ، با $Y(0) = B,\ Y'(0) = C$ ، که درآن A یک ماتریس $n \times n$ ثابت است ، را درنظر بگیرید . ثابت کنید دستگاه جواب به‌صورت سری توانی

$$Y(x) = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} A^k}{(2k)!}\right)B + \left(xI + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} A^k}{(2k+1)!}\right)C$$

دارد ، که به‌ازای $-\infty < x < +\infty$ همگراست .

۲۱۰۷ اثبات قضیهٔ وجودی به روش تقریبات متوالی

دراین بخش وجود و یکتایی جواب دستگاه خطی همگن

$$Y'(t) = A(t)\,Y(t), \qquad (۵۶۰۷)$$

که درآن $A(t)$ یک تابع ماتریسی $n \times n$ بوده که بر بازهٔ باز J پیوسته است ، را ثابت می‌کنیم . ثابت می‌کنیم به‌ازای هر نقطهٔ a در J و هر بردار اولیهٔ معلوم B درست یک جواب مانند $Y(t)$ بر J هست که در شرط اولیهٔ $Y(a) = B$ صدق می‌کند .

روش تقریبات متوالی را به‌کار می‌بریم ، که روشی است تکراری که در مسائل بسیار دیگر نیز کاربرد دارد . این روش نخستین بار در ۱۸۳۸ به‌وسیلهٔ لیوویل در رابطه با معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم انتشار یافت ، و بعدها به‌وسیلهٔ ج . ساکه[1] در ۱۸۶۴ ، ال . فوکس[2] در ۱۸۷۰ ، و جی . پئانو[3] در ۱۸۸۸ به‌معادلات خطی مرتبهٔ n تعمیم یافت . در ۱۸۹۰ ، امیل پیکارد[4] (۱۹۴۱ — ۱۸۵۶) این روش‌راتعمیم داد تا معادلات دیفرانسیل غیرخطی را نیز دربرگیرد . بعضی ازنویسندگان برای تقدیر از کارهای اساسی او این روش را **روش پیکارد** می‌نامند . این روش‌نه فقط از حیث نظری جالب است ، بلکه می‌توان با استفاده از آن در بعضی حالات تقریبهایی عددی از جوابها به‌دست آورد .

روش با حدس اولیه‌ای از یک جواب معادلهٔ (۵۶۰۷) شروع می‌شود . بردار اولیهٔ

---

1. J. Caqué 2. L. Fuchs 3. G. Peano 4. Émile Picard

B را حدس اولیه می‌گیریم ، گرچه این امر ضرورت ندارد . بعد این حدس را در طرف راست معادله می‌گذاریم و معادلهٔ دیفرانسیل جدید

$$Y'(t) = A(t)B$$

را به‌دست می‌آوریم . طرف راست این معادله دیگر شامل تابع مجهول نیست ؛ درنتیجه ، معادله را می‌توان فوراً" با انتگرالگیری طرفین آن از a تا x ، که x یک نقطهٔ دلخواه در J است ، حل کرد . این معادله دقیقاً" یک جواب مانند Y_1 بر J دارد که در شرط اولیهٔ $Y_1(a) = B$ صدق می‌کند ؛ یعنی ،

$$Y_1(x) = B + \int_a^x A(t)B\,dt.$$

حال درطرف راست معادلهٔ دیفرانسیل اصلی (۵۶۰۷) $Y(t)$ را با $Y_1(t)$ عوض می‌کنیم تا معادلهٔ دیفرانسیل جدید

$$Y'(t) = A(t)\,Y_1(t)$$

به‌دست آید . این معادله دارای جواب منحصر بفرد Y_2 بر J با خاصیت $Y_2(a) = B$ است :

$$Y_2(x) = B + \int_a^x A(t)Y_1(t)\,dt. \qquad (۵۷۰۷)$$

سپس Y_2 را در طرف راست (۵۶۰۷) می‌گذاریم و معادلهٔ حاصل را حل کرده Y_3 را با خاصیت $Y_3(a) = B$ معین می‌کنیم ، و به‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر . این فرایند دنباله‌ای مانند $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ از توابع را تولید می‌کند ، که درآن $Y_0 = B$ و Y_{k+1} از Y_k به وسیلهٔ فرمول بازگشتی زیر معین می‌شود :

$$Y_{k+1}(x) = B + \int_a^x A(t)Y_k(t)\,dt \quad \text{،} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \text{ به‌ازای } . \qquad (۵۸۰۷)$$

هدف اثبات این امر است که دنبالهٔ توابعی که این‌طور تعریف می‌شود به یک تابع حدی مانند Y همگراست که‌جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل (۵۶۰۷) بر J است که درشرط اولیهٔ $Y(a) = B$ نیز صدق می‌کند . توابع $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ ***تقریبات متوالی*** به Y نامیده می‌شوند . پیش از بررسی همگرایی این فرایند ، روش را با یک مثال توضیح می‌دهیم .

مثال . مسئله با مقدار اولیهٔ $Y'(t) = A\,Y(t),\ Y(0) = B$ ، که درآن A یک ماتریس

$n\times n$ ثابت است، را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم جواب با فرمول $Y(x)=e^{xA}B$ به‌ازای هر x حقیقی داده می‌شود. نشان می‌دهیم که این جواب را چطور می‌توان به روش تقریبات متوالی به‌دست آورد.

حدس اولیه $Y_0(x)=B$ است. فرمول بازگشتی (۵۸۰۷) نتیجه می‌دهد که

$$Y_1(x)=B+\int_0^x AB\,dt=B+xAB,$$
$$Y_2(x)=B+\int_0^x AY_1(t)\,dt=B+\int_0^x (AB+tA^2B)\,dt=B+xAB+\tfrac{1}{2}x^2A^2B.$$

به استقرا درمی‌یابیم که

$$Y_k(x)=B+xAB+\tfrac{1}{2}x^2A^2B+\cdots+\frac{1}{k!}x^kA^kB=\left(\sum_{r=0}^{k}\frac{(xA)^r}{r!}\right)B.$$

مجموع طرف راست مجموع جزئی سری مربوط به e^{xA} است. بنابراین، وقتی $k\to\infty$، معلوم می‌شود که، به‌ازای هر x،

$$\lim_{k\to\infty} Y_k(x)=e^{xA}B\ .$$

بنابراین، دراین مثال می‌توان مستقیماً نشان داد که تقریبات متوالی به جوابی ازمسئله با مقدار اولیه بر $(-\infty,+\infty)$ همگراست.

برهان همگرایی دنبالهٔ تقریبات متوالی. حال به دنبالهٔ کلیی که با فرمول بازگشتی (۵۸۰۷) تعریف شد باز می‌گردیم. برای اثبات همگرایی دنباله، هر جملهٔ $Y_k(x)$ را به صورت یک مجموع توی هم‌رو می‌نویسیم:

$$Y_k(x)=Y_0(x)+\sum_{m=0}^{k-1}\{Y_{m+1}(x)-Y_m(x)\}. \tag{۵۹۰۷}$$

برای اثبات اینکه $Y_k(x)$، وقتی $k\to\infty$، به‌حدی میل می‌کند، ثابت می‌کنیم سری نامتناهی

$$\sum_{m=0}^{\infty}\{Y_{m+1}(x)-Y_m(x)\} \tag{۶۰۰۷}$$

به‌ازای هر x در J همگراست. برای این منظور کافی است ثابت کنیم که سری

$$\sum_{m=0}^{\infty}\|Y_{m+1}(x)-Y_m(x)\| \tag{۶۱۰۷}$$

همگراست . دراین سری از نرم ماتریسی که در بخش ۳۰۷ معرفی شد استفاده می‌کنیم ؛ نرم یک ماتریس مجموع قدر مطلقهای تمام درایه‌های آن است .

زیر بازهٔ بسته و کراندار J_1 از J را که شامل a است درنظر می‌گیریم . ثابت می‌کنیم سری (۶۱۰۷) به‌ازای هر x در J_1 تحت تسلط یک سری همگرا از ثابتهایی است که از x مستقل‌اند . این ایجاب می‌کند که سری بر J_1 **به‌طور یکنواخت** همگرا باشد .

برای تخمین اندازهٔ جملات در (۶۱۰۷) ، فرمول بازگشتی را چندبار به‌کارمی‌بریم . درآغاز ، داریم

$$Y_1(x) - Y_0(x) = \int_a^x A(t)B\,dt.$$

برای ساده بودن ، فرض‌کنیم $a < x$. دراین صورت ، می‌توان نوشت

$$\|Y_1(x) - Y_0(x)\| = \left\| \int_a^x A(t)B\,dt \right\| \le \int_a^x \|A(t)\|\,\|B\|\,dt. \qquad (۶۲۰۷)$$

چون هر درایهٔ $A(t)$ بر J پیوسته است ، هر درایه بر بازهٔ بسته و کراندار J_1 کراندار است . بنابراین ، $\|A(t)\| \le M$ ، که درآن M مجموع کرانهای همهٔ درایه‌های $A(t)$ بربازهٔ J_1 است . (عدد M به J_1 بستگی‌دارد .) بنابراین ، انتگرالده در (۶۲۰۷) به‌وسیلهٔ $M\,\|B\|$ کراندار است ؛ درنتیجه ، به‌ازای هر $x > a$ در J_1 داریم

$$\|Y_1(x) - Y_0(x)\| \le \int_a^x \|B\|\,M\,dt = \|B\|\,M(x-a)\ .$$

حال فرمول بازگشتی را بار دیگر به‌کار برده ، تفاضل $Y_2 - Y_1$ را برحسب $Y_1 - Y_0$ بیان می‌کنیم ، و سپس ، با استفاده از تخمینی که هم‌اینک برای $Y_1 - Y_0$ به‌دست آمد ، به‌ازای هر $x > a$ در J_1 خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\|Y_2(x) - Y_1(x)\| &= \left\| \int_a^x A(t)\{Y_1(t) - Y_0(t)\}\,dt \right\| \le \int_a^x \|A(t)\|\,\|B\|\,M(t-a)\,dt \\ &\le \|B\|\,M^2 \int_a^x (t-a)\,dt = \|B\|\,\frac{M^2(x-a)^2}{2!}\ .\end{aligned}$$

به‌استقرا ، درمی‌یابیم که

به‌ازای $m = 0, 1, 2, \ldots$ و هر $x > a$ در J_1 ،

$$\|Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\| \le \|B\|\,\frac{M^{m+1}(x-a)^{m+1}}{(m+1)!}\ .$$

اگر $x < a$ ، استدلالی مشابه همین نامساوی‌را با $|x-a|$ به‌جای $(x-a)$ به‌دست‌می‌دهد . اگر L طول بـازهٔ J_1 باشد ، بـه‌ازای هر x در J_1 داریم $|x-a| \leq L$ ؛ درنتیجه ، تخمین زیر را خواهیم داشت :
به‌ازای $m = 0, 1, 2, \ldots$ و هر x در J_1 ،

$$\| Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\| \leq \|B\| \frac{M^{m+1}L^{m+1}}{(m+1)!} \; .$$

بنابر این ، سری (۶۱۰۷) تحت تسلط سری همگرای

$$\|B\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ML)^{m+1}}{(m+1)!} = \|B\| \, (e^{ML} - 1)$$

است . این ثابت می‌کند که سری (۶۱۰۷) بر J_1 به‌طور یکنواخت همگراست .

استدلال فوق نشان می‌دهد که دنبالهٔ تقریبات متوالی همیشه همگراست و همگرایی بر J_1 یکنواخت است . فرض کنیم Y تابع حدی باشد . یعنی ، $Y(x)$ را به‌ازای هر x در J_1 با معادلهٔ

$$Y(x) = \lim_{k \to \infty} Y_k(x)$$

تعریف می‌کنیم . ثابت می‌کنیم Y از خواص زیر بهره‌مند است :

(آ) Y بر J_1 پیوسته است ؛

(ب) به‌ازای هر x در J_1 ، $Y(x) = B + \int_a^x A(t)Y(t)\,dt$ ؛

(پ) به‌ازای هر x در J_1 ، $Y(a) = B$ و $Y'(x) = A(x)Y(x)$.

قسمت (پ) نشان می‌دهد که Y یک جواب مسئله با مقدار اولیه بر J_1 است .

برهان (آ). هر تابع Y_k یک ماتـریس ستونی است که درایه‌هایش توابعی اسکالر و بر J_1 پیوسته‌اند . هر درایهٔ تابع حدی Y حد یک دنبالهٔ به‌طور یکنواخت همگرا از توابع پیوسته است ؛ درنتیجه ، بنابر قضیهٔ ۱۰۱۱ از جلد یک ، هر درایهٔ Y نیز بر J_1 پیوسته است . بنابراین ، خود Y بر J_1 پیوسته می‌باشد .

برهان (ب). فرمول بازگشتی (۵۸۰۷) می‌گوید که

$$Y_{k+1}(x) = B + \int_a^x A(t)Y_k(t)\,dt \, .$$

بنابراین،

$$Y(x) = \lim_{k\to\infty} Y_{k+1}(x) = B + \lim_{k\to\infty} \int_a^x A(t)Y_k(t)\,dt = B + \int_a^x A(t)\lim_{k\to\infty} Y_k(t)\,dt$$
$$= B + \int_a^x A(t)Y(t)\,dt.$$

تعویض علامت حد با علامت انتگرال، بدلیل همگرایی یکنواخت دنباله‌ٔ $\{Y_k\}$ بر J_1 ، مجاز می‌باشد.

برهان (پ). معادله‌ٔ $Y(a) = B$ فوراً از (ب) نتیجه می‌شود. بخاطر (آ)، انتگرالده در (ب) بر J_1 پیوسته‌است؛ درنتیجه، بنابراولین‌قضیه‌ٔ‌اساسی‌حساب‌دیفرانسیل‌وانتگرال، $Y'(x)$ موجود و مساوی $A(x)Y(x)$ بر J_1 می‌باشد.

بازه‌ٔ J_1 زیر بازه‌ٔ بسته‌وکراندار دلخواهی از J شامل a بود. اگر J_1 بزرگ‌شود، فرایند بـه‌دست‌آوردن $Y(x)$ تغییر نمی‌کند، زیرا که فقط مستلزم انتگرالگیری از a تا x است. چـون بـه‌ازای هر x در J یک زیربازه‌ٔ بسته و کراندار از J شامل a و x وجود دارد، پس یک جواب روی بازه‌ٔ کامل J وجود خواهد داشت.

قضیه‌ٔ ۱۷۰۷ . قضیه‌ٔ یکتایی برای دستگاههای خطی همگن. *هرگاه $A(t)$ بربازه‌ٔ باز J پیوسته باشد، معادله‌ٔ دیفرانسیل*

$$Y'(t) = A(t)Y(t)$$

حداکثر یک جواب بر J دارد که در شرط‌اولیه‌ٔ داده شده‌ٔ $Y(a) = B$ صدق می‌کند.

برهان. فرض‌کنیـم Y و Z دو جـواب بر J باشند. همچنیـن، J_1 زیر بازه‌ٔ بسته و کرانداری از J شامل a باشد. ثابت می‌کنیم به‌ازای هر x در J_1 ، $Z(x) = Y(x)$. این ایجاب می‌کند که بر بازه‌ٔ کامل J ، $Z = Y$.

چون هردوی Y و Z جوابند، داریم

$$Z'(t) - Y'(t) = A(t)\{Z(t) - Y(t)\}.$$

x را در J_1 اختیار کرده، از این معادله از a تا x انتگرال می‌گیریم تا به‌دست آید

$$Z(x) - Y(x) = \int_a^x A(t)\{Z(t) - Y(t)\}\,dt.$$

این رابطه نامساوی زیر را ایجاب می‌کند :

$$\|Z(x) - Y(x)\| \leq M \left| \int_a^x \|Z(t) - Y(t)\| \, dt \right|, \tag{۶۳.۷}$$

که درآن M یک‌کران بالایی برای $\|A(t)\|$ بر J_1 است. فرض کنیم M_1 یک کران بالایی برای‌تابع پیوسته‌ٔ $\|Z(t) - Y(t)\|$ بر J_1 باشد. دراین صورت، نامساوی (۶۳.۷) نتیجه می‌دهد که

$$\|Z(x) - Y(x)\| \leq M M_1 |x - a|. \tag{۶۴.۷}$$

با استفاده از (۶۴.۷) در طرف راست (۶۳.۷)، خواهیم داشت

$$\|Z(x) - Y(x)\| \leq M^2 M_1 \left| \int_a^x |t - a| \, dt \right| = M^2 M_1 \frac{|x - a|^2}{2}.$$

به استقرا، درمی‌یابیم که

$$\|Z(x) - Y(x)\| \leq M^m M_1 \frac{|x - a|^m}{m!}. \tag{۶۵.۷}$$

طرف راست، وقتی $m \to \infty$، به 0 نزدیک می‌شود؛ درنتیجه، $Z(x) = Y(x)$. این برهان را تمام خواهد کرد.

نتایج این بخش را می‌توان در قضیهٔ وجودی ــ یکتایی زیر خلاصه کرد.

قضیهٔ ۱۸.۷ . فرض کنیم A یک تابع ماتریسی $n \times n$ باشد که بر بازهٔ باز J پیوسته است. هرگاه $a \in J$ و B یک بردار n بعدی باشد، دستگاه خطی همگن

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \qquad Y(a) = B,$$

یک و فقط یک جواب برداری n بعدی بر J خواهد داشت.

۲۲.۷ روش تقریبات متوالی اعمال شده بر دستگاههای غیرخطی مرتبهٔ اول

روش‌تقریبات متوالی رامی‌توان بر بعضی از دستگاههای غیرخطی نیز اعمال کرد. دستگاه مرتبهٔ اول

$$Y' = F(t, Y) \tag{۶۶.۷}$$

را درنظر می‌گیریم، که درآن F یک تابع برداری n بعدی معلوم بوده، و Y یک تابع

برداری n بعدی مجهول است که باید تعیین شود. جوابی چون Y را جستجو می‌کنیم که در معادلهٔ

$$Y'(t) = F[t,\ Y(t)]$$

به‌ازای هر t در بازه‌ای مانند J صدق کرده و در شرط اولیهٔ مفروضی، مثلاً $Y(a) = B$ که $a \in J$ و B بردار n بعدی معلومی است، صادق باشد.

همانند حالت خطی، دنبالهٔ $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ از تقریبات متوالی را با اختیار $Y_0 = B$ و تعریف Y_{k+1} برحسب Y_k با فرمول بازگشتی

$$Y_{k+1}(x) = B + \int_a^x F[t,\ Y_k(t)]\, dt \quad \text{،} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \ \text{به‌ازای} \qquad (۶۷.۷)$$

می‌سازیم. این دنباله تحت شرایطی بر F به یک تابع حدی مانند Y همگراست که در معادلهٔ دیفرانسیل و شرط اولیهٔ داده شده صدق می‌کند.

پیش از پرداختن به همگرایی این فرایند، در چند مثال یک بعدی بحث می‌کنیم که برخی از مشکلات ناشی در عمل را نشان می‌دهند.

مثال ۱. مسئله با مقداراولیه و غیر خطی $y' = x^2 + y^2$ با $y = 0$ وقتی $x = 0$ را در نظر می‌گیریم. چند تقریب به‌حل آن را محاسبه می‌کنیم. $Y_0(x) = 0$ را اختیار وسه‌تقریب بعدی را به‌صورت زیر معین می‌کنیم:

$$Y_1(x) = \int_0^x t^2\, dt = \frac{x^3}{3},$$

$$Y_2(x) = \int_0^x [t^2 + Y_1^2(t)]\, dt = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9}\right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$Y_3(x) = \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63}\right)^2\right] dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

ملاحظه می‌شود که محاسبهٔ تقریبات دیگر کار زیادی لازم دارد. مثلاً، دو تقریب Y_4 و Y_5 بترتیب چندجمله‌ایهایی از درجهٔ 31 و 63 هستند.

مثال بعدی مشکل دیگری که ممکن است در محاسبهٔ تقریبات متوالی رخ دهدتوضیح می‌دهد.

مثال ۲. مسئله با مقدار اولیه و غیر خطی $y' = 2x + e^y$ با $y = 0$ وقتی $x = 0$ رادر نظر می‌گیریم . با حدس اولیهٔ $Y_0(x) = 0$ شروع کرده، به‌دست می‌آوریم که

$$Y_1(x) = \int_0^x (2t + 1)\,dt = x^2 + x\,,$$

$$Y_2(x) = \int_0^x (2t + e^{t^2+t})\,dt = x^2 + \int_0^x e^{t^2+t}\,dt\,.$$

دراینجا بیش‌ازاین نمی‌توان پیش رفت ، به‌این دلیل که انتگرال آخر را نمی‌توان برحسب توابع مقدماتی حساب کرد . اما ، به‌ازای x معلوم ، می‌توان یک تقریب عددی به‌انتگرال را حساب کرد و بدین وسیله یک تقریب به $Y_2(x)$ را به‌دست آورد .

بخاطر مشکلاتی که در دو مثال اخیر توضیح شد ، روش تقریبات متوالی گاهی در تعیین صریح جوابها عملا "چندان مفید نیست . ارزش واقعی روش در استفاده از آن برای اثبات قضایای وجودی است .

۲۳۰۷ برهان قضیهٔ وجودی ـ یکتایی برای دستگاههای غیرخطی مرتبهٔ اول

حال بـه قضیهٔ وجودی ـ یکتایی برای دستگاههای غیرخطی مرتبهٔ اول می‌پردازیم . با گذاردن قیود مناسب بر تابع سمت راست معادلهٔ دیفرانسیل

$$Y' = F(x, Y),$$

می‌توان روش اثبات برای حالت خطی در بخش ۲۱۰۷ را تعمیم داد .

فرض کنیم J بازهٔ بازی باشد که جواب روی آن جستجو می‌شود . همچنین ، $a \in J$ و B یک بـردار n بعدی معلوم باشد . فرض کنیم S مجموعه‌ای در فضای $(n + 1)$ باشد به‌صورت

$$S = \{(x, Y) \mid \ |x - a| \le h\,,\ \|Y - B\| \le k\},$$

که درآن $h > 0$ و $k > 0$. [هرگاه $n = 1$ ، این مجموعه مستطیلی است به مرکز (a, B) و قاعدهٔ $2h$ و ارتفـاع $2k$.] فرض کنیم قلمرو F شامل مجموعه‌ای مانند S از این نوع بوده و F بر S کراندار باشد؛ مثلا" ، به‌ازای هر (x, Y) در S ،

$$\|F(x, Y)\| \le M\,. \tag{۶۸۰۷}$$

که درآن M یک ثابت مثبت است .

حال فرض کنیم تابع مرکب $G(x) = F(x, Y(x))$ بر بازهٔ $(a - h\,, a + h)$ به‌ازای

هر تابع Y پیوسته‌بر $(a-h, a+h)$ وبااین‌خاصیت‌که‌به‌ازای‌هر x در $(a-h, a+h)$، $(x, Y(x)) \in S$ پیوسته باشد. این فرض وجود انتگرالهایی که در روش تقریبات متوالی ظاهر می‌شوند تضمین می‌کند، و نیز پیوستگی توابعی را که به‌این ترتیب ساخته می‌شوند ایجاب می‌نماید.

بالاخره، فرض‌کنیم F در شرطی به‌شکل

$$\|F(x, Y) - F(x, Z)\| \leq A \, \|Y - Z\|$$

به‌ازای هر جفت از نقاط (x, Y) و (x, Z) در S صدق کند، که درآن A یک ثابت مثبت است. این شرط‌را به‌افتخار رودلف لیپ شیتس[1] که اولین بار آن را در ۱۸۷۶ معرفی‌کرد **شرط‌لیپ شیتس** می‌نامند. شرط‌لیپ شیتس یک تابع را چندان محدود نمی‌کند و به‌کمک آن می‌توان برهان وجود و یکتایی را از حالت خطی به‌غیر خطی تعمیم داد.

قضیهٔ ۱۹۰۷ . وجود و یکتایی جوابهای دستگاههای غیرخطی مرتبهٔ اول. *فرض‌کنیم F در شرایط‌کرانداری، پیوستگی، و لیپ شیتس مذکور در فوق بر مجموعهٔ S صدق‌کند. همچنین، I بازهٔ باز $(a-c, a+c)$ باشد، که درآن $c = \min\{h, k/M\}$. دراین صورت، یک و فقط یک تابع مانند Y هست که بر I با خاصیت $Y(a) = B$ تعریف شده و چنان است که $(x, Y(x)) \in S$ و*

به‌ازای هر x در I، $Y'(x) = F(x, Y(x))$.

برهان. چون این برهان شبیه برهان حالت خطی است، ما فقط مراحل اصلی آن را توضیح می‌دهیم. قرار می‌دهیم $Y_0(x) = B$ و توابع برداری $Y_1, Y_2, \ldots$ را بر I بافرمول بازگشتی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{به‌ازای } m = 0, 1, 2, \ldots \text{،} \quad Y_{m+1}(x) = B + \int_a^x F[t, Y_m(t)]\, dt \qquad (۶۹.۷)$$

برای آنکه فرمول بازگشتی معنی‌دار باشد، لازم است بدانیم که به‌ازای هر x در I، $(x, Y_m(x)) \in S$. این را می‌توان به‌آسانی به استقرا بر m ثابت کرد. وقتی $m = 0$، داریم $(x, Y_0(x)) = (x, B)$، که در S است. سپس، فرض می‌کنیم به‌ازای m ی و هر

1. Rudolph Lipschitz

x در I ، $(x, Y_m(x)) \in S$. بااستفاده از (۶۹۰۷) و (۶۸۰۷) ، به‌دست می‌آوریم

$$\| Y_{m+1}(x) - B\| \le \left| \int_a^x \|F[t, Y_m(t)]\| \, dt \right| \le M \left| \int_a^x dt \right| = M\,|x-a| .$$

چون به‌ازای x در I ، $|x-a| \le c$ ، این ایجاب می‌کند که

$$\| Y_{m+1}(x) - B\| \le Mc \le k ,$$

نشانگرآنکه به‌ازای هر x در I ، $(x, Y_{m+1}(x)) \in S$. بنابر این ، فرمول بازگشتی به‌ازای هر $m \ge 0$ و هر x در I معنی دارد .

حال همگرایی دنباله‌ٔ $\{Y_m(x)\}$ درست مثل بخش ۲۱۰۷ ثابت می‌شود . می‌نویسیم

$$Y_k(x) = Y_0(x) + \sum_{m=0}^{k-1} \{Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\}$$

و ثابت می‌کنیم $Y_k(x)$ ، وقتی $k \to \infty$ ، به‌حدی میل می‌کند به‌این طریق که ثابت‌می‌کنیم سری نامتناهی

$$\sum_{m=0}^{\infty} \| Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\|$$

بر I همگرا است . این مطلب از نامساوی

$$\| Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\| \le \frac{MA^m\,|x-a|^{m+1}}{(m+1)!} \le \frac{MA^m c^{m+1}}{(m+1)!}$$

نتیجه می‌شود ، که به استقرا ، با استفاده از فرمول بازگشتی و شرط لیپ شیتس، ثابت‌شد . سپس، تابع حدی Y را با معادله‌ٔ

$$Y(x) = \lim_{m \to \infty} Y_m(x)$$

به‌ازای هر x در I تعریف‌کرده ، تحقیق می‌کنیم که ، درست مثل حالت خطی ، درمعادلهٔ انتگرال

$$Y(x) = B + \int_a^x F[t, Y(t)]\, dt$$

صدق می‌نماید . این مطلب وجود یک جواب را ثابت خواهد کرد . سپس، یکتایی را می‌توان با همان روش به‌کار رفته در اثبات قضیهٔ ۱۷۰۷ ثابت کرد .

۲۴۰۷ تمرین

۱ . مسئله با مقدار اولیه و خطی

$$y' + y = 2e^x \quad \text{با} \quad y = 1 \quad \text{وقتی} \quad x = 0$$

را درنظر بگیرید .

(آ) جواب دقیق Y این مسئله را بیابید .

(ب) روش تقریبات متوالی را ، با شروع از حدس اولیهٔ $Y_0(x) = 1$ ، به‌کار برید . $Y_n(x)$ را به‌طور صریح تعیین کرده ، نشان دهید که به‌ازای هر x حقیقی

$$\lim_{n \to \infty} Y_n(x) = Y(x) \ .$$

۲ . روش تقریبات متوالی را در مورد مسئله با مقدار اولیه و غیرخطی

$$y' = x + y^2 \quad \text{با} \quad y = 0 \quad \text{وقتی} \quad x = 0$$

به‌کار برید . $Y_0(x) = 0$ را حدس اولیه بگیرید و $Y_3(x)$ را حساب کنید .

۳ . روش تقریبات متوالی را در مورد مسئله با مقدار اولیه و غیرخطی

$$y' = 1 + xy^2 \quad \text{با} \quad y = 0 \quad \text{وقتی} \quad x = 0$$

به‌کار برید . $Y_0(x) = 0$ را حدس اولیه بگیرید و $Y_3(x)$ را حساب کنید .

۴ . روش تقریبات متوالی را در مورد مسئله با مقدار اولیه و غیرخطی

$$y' = x^2 + y^2 \quad \text{با} \quad y = 0 \quad \text{وقتی} \quad x = 0$$

به‌کار برید . با حدس اولیهٔ "نامناسب" $Y_0(x) = 1$ شروع کرده ، $Y_3(x)$ را حساب کنید ، و نتیجه را با نتایج مثال ۱ در بخش ۲۲۰۷ مقایسه نمایید .

۵ . مسئله با مقدار اولیه وغیرخطی

$$y' = x^2 + y^2 \quad \text{با} \quad y = 1 \quad \text{وقتی} \quad x = 0$$

را درنظر بگیرید .

(آ) روش‌تقریبات متوالی را ، با شروع از حدس اولیهٔ $Y_0(x) = 1$ ، به‌کاربرید و $Y_2(x)$ را محاسبه نمایید .

(ب) فرض کنید $R = [-1\,,1] \times [-1\,,1]$. کوچکترین M ی را بیابید که $|f(x,y)| \le M$ بر R . بازهٔ $I = (-c\,,c)$ راطوری بیابیدکه نمودار هر تابع تقریب Y_n روی I در R قرار داشته باشد .

(پ) فرض کنید جواب $y = Y(x)$ در همسایگی مبداء بسط به‌صورت سری توانی

داشته باشد . اولین شش جملهٔ ناصفر این بسط را معین کرده ، نتیجه را با نتیجهٔ قسمت (آ) مقایسه نمایید .

۶ . مسئله با مقدار اولیهٔ

$y' = 1 + y^2$ با $y = 0$ وقتی $x = 0$

را درنظر بگیرید .

(آ) روش تقریبات متوالی را ، با شروع از حدس اولیهٔ $Y_0(x) = 0$ به‌کار برید و $Y_4(x)$ را محاسبه کنید .

(ب) ثابت کنید هر تابع تقریب Y_n بر تمام محور حقیقی تعریف شده است .

(پ) بااستفاده از قضیهٔ ۱۹۰۷ ، نشان دهید که مسئله با مقدار اولیه در هربازه به شکل $(-h, h)$ حداکثر یک جواب دارد .

(ت) معادلهٔ دیفرانسیل را با جداسازی متغیرها حل کرده ، بدین وسیله نشان دهید که مسئله با مقدار اولیه دقیقاً " یک جواب مانند Y بر بازهٔ $(-\pi/2, \pi/2)$ داشته و بر هر بازهٔ بزرگتر جوابی ندارد . دراین مثال ، تقریبات متوالی بر تمام محور حقیقی تعریف شده‌اند ، اما فقط بر بازهٔ $(-\pi/2, \pi/2)$ به یک تابع حدی همگرا می‌باشند .

۷ . دو تابع مانند $y = Y(x)$ و $z = Z(x)$ را جستجو می‌کنیم که با هم در دستگاه معادلات

$$y' = z, \qquad z' = x^3(y + z)$$

با شرایط اولیهٔ $y = 1$ و $z = 1/2$ وقتی $x = 0$ صدق کنند . با حدسهای اولیهٔ $Y_0(x) = 1$, $Z_0(x) = 1/2$ شروع کرده ، بااستفاده‌ازروش‌تقریبات‌متوالی ، توابع تقریب

$$Y_3(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^5}{40} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^9}{192},$$

$$Z_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{x^5}{10} + \frac{3x^8}{64} + \frac{7x^9}{360} + \frac{x^{12}}{256}$$

را به‌دست آورید .

۸ . دستگاه معادلات

$$y' = 2x + z, \qquad z' = 3xy + x^2z$$

با شرایط اولیهٔ $y = 2$ و $z = 0$ وقتی $x = 0$ را درنظر بگیرید . باحدسهای اولیهٔ

$Y_0(x) = 2,\ Z_0(x) = 0$ شروع کرده ، از روش تقریبات متوالی استفاده کنید ، و $Y_3(x)$ و $Z_3(x)$ را معین نمایید .

۹ . مسئله با مقدار اولیهٔ

$$y'' = x^2y' + x^4y \text{ با } y = 5 \text{ و } y' = 1 \text{ وقتی } x = 0$$

را درنظر بگیرید . این مسئله را به مسئلهٔ معادل آن که شامل یک دستگاه دو معادله و دو تابع مجهول $y = Y(x)$ و $z = Z(x)$ ، که $z = y'$ ، باشد تغییر دهید . سپس، روش تقریبات متوالی را به‌کار برید ،ازحدسهای اولیهٔ $Y_0(x) = 5$ و $Z_0(x) = 1$ شروع کنید ، و $Y_3(x)$ و $Z_3(x)$ رامعین نمایید .

۱۰ . فرض کنید f بر مستطیل $R = [-1 , 1] \times [-1 , 1]$ به صورت زیر تعریف شده‌باشد :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x = 0 \text{ ،} \\ 2y/x & \text{اگر } x \neq 0 \text{ و } |y| \leq x^2 \text{ ،} \\ 2x & \text{اگر } x \neq 0 \text{ و } y > x^2 \text{ ،} \\ -2x & \text{اگر } x \neq 0 \text{ و } y < -x^2 \text{ ،} \end{cases}$$

(آ) ثابت کنید به‌ازای هر (x, y) در R ، $|f(x, y)| \leq 2$.

(ب) نشان دهید که f در شرط لیپ شیتس بر R صدق نمی‌کند .

(پ) به‌ازای هر C صادق در $|C| \leq 1$ ، نشان دهید که $y = Cx^2$ یک جواب مسئله با مقدار اولیهٔ $y' = f(x, y)$ با $y = 0$ وقتی $x = 0$ است . همچنین ، نشان دهید که نمودار هریک از این جوابها روی $(-1 , 1)$ در R قرار دارد .

(ت) روش تقریبات متوالی را در مورد این مسئله با مقدار اولیه ، با شروع از حدس اولیهٔ $Y_0(x) = 0$ ، به‌کار برید . $Y_n(x)$ را تعیین کرده ، نشان دهید که تقریبها به یک جواب مسئله بر بازهٔ $(-1 , 1)$ همگرا می‌باشند .

(ث) قسمت (ت) را ، با شروع از حدس اولیهٔ $Y_0(x) = x$ ، تکرار نمایید . $Y_n(x)$ را تعیین کرده ، نشان دهید که توابع تقریب به جوابی متمایز از هر جواب درقسمت (پ) همگرا می‌باشند .

(ج) قسمت (ت) را ، با شروع از حدس اولیهٔ $Y_0(x) = x^3$ ، تکرار کنید .

(چ) قسمت (ت) را ، با شروع از حدس اولیهٔ $Y_0(x) = x^{1/3}$ ، تکرار کنید .

* ۲۵.۷ تقریبات متوالی و نقاط ثابت عملگرها

ایدهٔ اصلی روش تقریبات متوالی نه‌فقط در اثبات قضایای وجودی معادلات دیفرانسیل به‌کار می‌رود بلکه از آن می‌توان برای مسائل مهم بسیار دیگر در آنالیز نیزاستفاده کرد. تا پایان این فصل روش تقریبات متوالی را در محدوده‌ای تنظیم می‌کنیم که به دیدگاه کاربردی آن وسعت زیادی خواهد بخشید.

در برهان قضیهٔ ۱۸.۷ ، دنبالهٔ $\{Y_k\}$ از توابع را طبق فرمول بازگشتی

$$Y_{k+1}(x) = B + \int_a^x A Y_k(t)\, dt$$

ساختیم. طرف‌راست‌این فرمول را می‌توان عملگری چون T دانست که بعضی توابع مانند Y را طبق معادلهٔ

$$T(Y) = B + \int_a^x A Y(t)\, dt$$

به توابع جدید $T(Y)$ تبدیل می‌کند. دربرهان‌قضیهٔ ۱۸.۷ دریافتیم که جواب Y مسئله با مقدار اولیهٔ $Y'(t) = A Y(t),\ Y(a) = B$ در معادلهٔ انتگرال

$$Y = B + \int_a^x A Y(t)\, dt$$

صدق می‌کند. با نماد عملگر، این می‌گوید که $Y = T(Y)$. به‌عبارت دیگر، جواب Y تحت عملگر T ثابت می‌ماند. چنین تابع Y یک **نقطهٔ ثابت** عملگر T نام دارد.

بسیاری از مسائل مهم درآنالیز را می‌توان طوری تنظیم کرد که جوابشان به‌وجود یک‌نقطهٔ ثابت عملگری وابسته باشد. از اینرو، مفید است سعی شود خواصی از عملگرها را کشف کنیم که وجود یک نقطهٔ ثابت را تضمین کنند. حال به بحث اصولی این مسئله می‌پردازیم.

* ۲۶.۷ فضاهای خطی نرمدار

برای تنظیم روش تقریبات متوالی به شکل کلی، شایسته است که در چارچوب فضاهای خطی کارکنیم. فرض‌کنیم S یک فضای خطی دلخواه باشد. وقتی از تقریب عنصر x در S به وسیلهٔ عنصر دیگر y در S صحبت می‌کنیم، تفاضل $x - y$ را درنظر می‌گیریم، که آن را **خطای** تقریب می‌نامیم. برای سنجش اندازهٔ این خطا یک نرم در فضا معرفی

می‌کنیم .

تعریف نرم . فرض‌کنیم S یک فضای‌خطی باشد . تابع حقیقی N تعریف شده بر S یک نرم است اگر خواص زیر را دارا باشد :

(آ) به‌ازای هر x در S ، $N(x) \geq 0$ ؛

(ب) به‌ازای هر x در S و هر اسکالر c ، $N(cx) = |c|\, N(x)$ ؛

(پ) به‌ازای هر x و y در S ، $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ ؛

(ت) $N(x) = 0$ ایجاب می‌کند که $x = O$.

هر فضای خطی با یک نرم یک ***فضای خطی نرمدار*** نامیده می‌شود .

نرم x راگاهی به‌جای $N(x)$ به‌صورت $\|x\|$ می‌نویسند . با این نماد ، خواص اساسی خواهند شد :

(آ) به‌ازای هر x در S ، $\|x\| \geq 0$ ؛

(ب) به‌ازای هر x در S و هراسکالر c ، $\|cx\| = |c|\, \|x\|$ ؛

(پ) به‌ازای هر x و y در S ، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ؛

(ت) $\|x\| = 0$ ایجاب می‌کند که $x = O$.

هرگاه x و y در S باشند ، $\|x-y\|$ را **فاصلهٔ** x تا y می‌نامیم .

اگر فضای S اقلیدسی باشد ، همواره نرمی دارد که از ضرب داخلی به‌ارث بردهٔ است ؛ یعنی ، $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. ولی ما به‌نرم خاصی توجه داریم که از یک ضرب داخلی ناشی نشود .

مثال . نرم ماکزیمم . فرض کنیم $C(J)$ فضای خطی توابع حقیقی پیوسته بربازهٔ بسته و کراندار J باشد . اگر $\varphi \in C(J)$ ، تعریف می‌کنیم

$$\|\varphi\| = \max_{x \in J} |\varphi(x)|,$$

که درآن علامت سمت راست یعنی ماکزیمم قدر مطلق φ بر J . خواننده می‌تواند تحقیق

کند که این نرم چهار خاصیت اساسی را داراست .

نرم ماکزیمم از یک ضرب داخلی ناشی نمی‌شود . برای اثبات این‌مطلب ، نشان می‌دهیم که نرم ماکزیمم از خاصیتی که همهٔ نرمهای ضرب داخلی دارند محروم است . مثلاً ، اگر یک نرم از یک ضرب داخلی ناشی شده باشد ، "قانون متوازی الاضلاع"

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

به‌ازای هر x و y در S برقرار است . (ر.ک. تمرین ۱۶ در بخش ۱۳۰۱ .) قانون متوازی الاضلاع همیشه به وسیلهٔ نرم ماکزیمم برقرار نیست . مثلاً ، فرض‌کنیم x و y توابعی باشند که بر بازهٔ $[0, 1]$ با

$$x(t) = t, \qquad y(t) = 1 - t$$

داده‌می‌شوند . دراین‌صورت ، داریم $\|x\| = \|y\| = \|x + y\| = \|x - y\| = 1$؛ درنتیجه ، قانون متوازی الاضلاع نقض خواهد شد .

* ۲۷۰۷ عملگرهای انقباض

دراین بخش ، فضای خطی نرمدار $C(J)$ مرکب‌ازهمهٔ توابع حقیقی پیوسته‌بربازهٔ کراندار بستهٔ J را درنظر می‌گیریم ، که در آن $\|\varphi\|$ نرم ماکزیمم است . عملگر

$$T\colon C(J) \to C(J)$$

را درنظر می‌گیریم که قلمروش $C(J)$ و بردش زیر مجموعه‌ای از $C(J)$ است . یعنی ، هرگاه φ بر J پیوسته باشد ، آنگاه $T(\varphi)$ نیز بر J پیوسته است . فرمولهای زیر چند نمونهٔ ساده‌از این عملگرها را نشان می‌دهند . درهرحالت ، φ یک تابع دلخواه در $C(J)$ است و $T(\varphi)(x)$ به‌ازای هر x در J با فرمول داده شده تعریف شده است :

$T(\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$ ، که درآن λ یک عدد حقیقی ثابت است ؛

$T(\varphi)(x) = \int_c^x \varphi(t)\,dt$ ، که درآن c نقطهٔ مفروضی در J است ؛

$T(\varphi)(x) = b + \int_c^x f[t, \varphi(t)]\,dt$ ، که درآن b ثابت بوده و ترکیب $f[t, \varphi(t)]$ بر J پیوسته است .

ما به آن عملگرهای T توجه داریم که به‌ازای آنها فاصلهٔ $\|T(\varphi) - T(\psi)\|$ از یک مضرب‌ثابت مانند $\alpha < 1$ از $\|\varphi - \psi\|$ کوچکتر باشد . این عملگرها را ***عملگرهای انقباض*** می‌نامند ؛ این‌عملگرها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند :

تعریف یک عملگر انقباض. عملگر $T: C(J) \to C(J)$ یک ***عملگر انقباض*** نامیده می‌شود اگر ثابتی چون α صادق در $0 \leq \alpha < 1$ باشد بطوری که به‌ازای هر جفت تابع φ و ψ در $C(J)$ داشته باشیم

$$\|T(\varphi) - T(\psi)\| \leq \alpha \|\varphi - \psi\| . \tag{۷۰.۷}$$

ثابت α یک ***ثابت انقباض*** برای T نامیده می‌شود.

تذکر. نامساوی (۷۰.۷) برقرار است اگر و فقط اگر

به‌ازای هر x در J، $|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| \leq \alpha \|\varphi - \psi\|$.

مثال ۱. فرض کنیم T عملگری باشد که با $T(\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$ تعریف می‌شود، که درآن λ یک ثابت است. چون

$$|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| = |\lambda|\,|\varphi(x) - \psi(x)| ,$$

داریم $\|T(\varphi) - T(\psi)\| = |\lambda|\,\|\varphi - \psi\|$. بنابراین، ایـن عمل یک عملگر انقباض است اگروفقط اگر $|\lambda| < 1$ ، که دراین حالت $|\lambda|$ را می‌توان به‌عنوان یک ثابت انقباض به‌کار- برد.

مثال ۲. فرض کنیم $T(\varphi)(x) = b + \int_c^x f[t, \varphi(t)]\,dt$ ، که‌درآن f در شرط لیپ شیتس به‌شکل

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq K|y - z|$$

به‌ازای هر x در J و هر y و z حقیقی صدق می‌کند. در اینجا K یک ثابت‌مثبت‌است. فرض‌کنیم $L(J)$ طول بازهٔ J باشد. اگر $KL(J) < 1$ ، به آسانی می‌توان نشان داد کـه T یک عملگر انقباض با ثابت انقباض $KL(J)$ است. درواقع، به‌ازای هر x در J ، داریم

$$|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| = \left|\int_c^x \{f[t, \varphi(t)] - f[t, \psi(t)]\}\,dt\right| \leq K\left|\int_c^x |\varphi(t) - \psi(t)|\,dt\right|$$
$$\leq K\|\varphi - \psi\|\left|\int_c^x dt\right| \leq KL(J)\,\|\varphi - \psi\| .$$

هرگاه $KL(J) < 1$ ، آنگاه T یک عملگر انقباض با ثابت انقباض $\alpha = KL(J)$ است.

* ۲۸.۷ قضیهٔ نقطهٔ ثابت برای عملگرهای انقباض

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که هر عملگر انقباض دارای نقطهٔ ثابت منحصر بفرد است.

قضیهٔ ۲۰۰۷ . فرض کنیم $T: C(J) \to C(J)$ یک عملگر انقباض باشد. در این صورت، یک و فقط یک تابع مانند φ در $C(J)$ هست بطوری که

$$T(\varphi) = \varphi . \tag{۷۱۰۷}$$

برهان. فرض کنیم φ_0 تابع دلخواهی در $C(J)$ باشد، و دنبالهٔ $\{\varphi_n\}$ از توابع را با فرمول بازگشتی زیر تعریف می‌کنیم :

$$\varphi_{n+1} = T(\varphi_n) \text{ ، } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ به‌ازای}$$

توجه کنید که به‌ازای هر n ، $\varphi_{n+1} \in C(J)$. ثابت می‌کنیم دنبالهٔ $\{\varphi_n\}$ به تابع حدی φ در $C(J)$ همگراست. روش اثبات شبیه روشی است که در برهان قضیهٔ ۱۸۰۷ به‌کار رفت. هر φ_n را به‌صورت یک مجموع توی هم‌رو می‌نویسیم :

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\} \tag{۷۲۰۷}$$

و همگرایی $\{\varphi_n\}$ را با نشان دادن اینکه سری نامتناهی

$$\varphi_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\} \tag{۷۳۰۷}$$

بر J به‌طور یکنواخت همگراست ثابت می‌کنیم. سپس، نشان می‌دهیم که مجموع این سری نقطهٔ ثابت مطلوب است.

همگرایی یکنواخت سری از مقایسهٔ آن با سری هندسی و همگرای

$$M\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k ,$$

که درآن $M = \|\varphi_0\| + \|\varphi_1\|$ و α یک ثابت انقباض برای T است، نتیجه می‌شود. مقایسه به‌وسیلهٔ نامساوی

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leq M\alpha^k \tag{۷۴۰۷}$$

صورت می‌گیرد، که به‌ازای هر x در J و هر $k \geq 1$ برقرار است. برای اثبات (۷۴۰۷)، توجه می‌کنیم که

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| = |T(\varphi_k)(x) - T(\varphi_{k-1})(x)| \leq \alpha \|\varphi_k - \varphi_{k-1}\| .$$

بنابراین، نامساوی (۷۴۰۷) درصورتی ثابت می‌شود که نشان دهیم به‌ازای هر $k \geq 1$ ،

$$\|\varphi_k - \varphi_{k-1}\| \leq M\alpha^{k-1} . \tag{۷۵۰۷}$$

حال (۷۵۰۷) را به استقرا ثابت می‌کنیم. به‌ازای $k = 1$، داریم

$$\|\varphi_1 - \varphi_0\| \le \|\varphi_1\| + \|\varphi_0\| = M,$$

که همان (۷۵۰۷) است. برای اثبات اینکه (۷۵۰۷)، درصورت برقرار بودن به‌ازای k، به‌ازای $k+1$ برقرار است، توجه می‌کنیم که

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| = |T(\varphi_k)(x) - T(\varphi_{k-1})(x)| \le \alpha \|\varphi_k - \varphi_{k-1}\| \le M\alpha^k.$$

چون این نامساوی به‌ازای هر x در J برقرار است، نیز باید داشته باشیم

$$\|\varphi_{k+1} - \varphi_k\| \le M\alpha^k.$$

این (۷۵۰۷) را به‌استقرا ثابت می‌کند. بنابراین، سری (۷۳۰۷) بر J به‌طور یکنواخت همگراست. اگر $\varphi(x)$ را مجموع آن بگیریم، خواهیم داشت

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\}. \qquad (۷۶۰۷)$$

تابع φ بر J پیوسته‌است، زیرامجموع یک‌سری‌به‌طوریکنواخت‌همگرااز توابع پیوسته است. برای‌اثبات اینکه φ یک نقطهٔ ثابت T است، $T(\varphi)$ را با $\varphi_{n+1} = T(\varphi_n)$ مقایسه می‌کنیم. با استفاده از خاصیت انقباض T، داریم

$$|T(\varphi)(x) - \varphi_{n+1}(x)| = |T(\varphi)(x) - T(\varphi_n)(x)| \le \alpha\,|\varphi(x) - \varphi_n(x)|. \qquad (۷۷۰۷)$$

اما، از (۷۲۰۷) و (۷۶۰۷)، درمی‌یابیم که

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| = \left|\sum_{k=n}^{\infty}\{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\}\right| \le \sum_{k=n}^{\infty}|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \le M\sum_{k=n}^{\infty}\alpha^k,$$

که درآخرین‌مرحله‌از (۷۴۰۷) استفاده کرده‌ایم. بنابر این، (۷۷۰۷) ایجاب می‌کندکه

$$|T(\varphi)(x) - \varphi_{n+1}(x)| \le M\sum_{k=n}^{\infty}\alpha^{k+1}.$$

وقتی $n \to \infty$، سری سمت راست به 0 میل می‌کند؛ درنتیجه، $\varphi_{n+1}(x) \to T(\varphi)(x)$. اما چون، وقتی $n \to \infty$، $\varphi_{n+1}(x) \to \varphi(x)$، این ثابت می‌کندکه به‌ازای هر x در J، $\varphi(x) = T(\varphi)(x)$. بنابراین، $\varphi = T(\varphi)$؛ درنتیجه، φ یک نقطهٔ ثابت می‌باشد.

بالاخره، ثابت می‌کنیم نقطهٔ ثابت φ منحصر بفرد است. فرض کنیم ψ تابع دیگری در $C(J)$ باشد که $T(\psi) = \psi$. دراین صورت، داریم

$$\|\varphi - \psi\| = \|T(\varphi) - T(\psi)\| \le \alpha\,\|\varphi - \psi\|.$$

ازاین نتیجه می‌شود که $0 \le \|\varphi - \psi\|(1 - \alpha)$. چون $\alpha < 1$، می‌توان، با تقسیم بر

$\alpha - 1$ ، نامساوی $0 \leq \|\psi - \varphi\|$ رانتیجه‌گرفت . اما ، چون نیز داریم $\|\varphi - \psi\| \geq 0$ ، این یعنی $\|\varphi - \psi\| = 0$ ؛ و درنتیجه ، $\varphi - \psi = 0$ ، و برهان قضیهٔ نقطهٔ ثابت‌تمام خواهد بود .

* ۲۹.۷ کاربردهای قضیهٔ نقطهٔ ثابت

برای‌آنکه‌وسعت کاربردهای قضیهٔ‌نقطهٔ ثابت را نشان دهیم ، از آن در اثبات دو قضیهٔ مهم استفاده می‌کنیم .

اولین قضیه شرطی کافی برای‌آنکه معادلهٔ $f(x, y) = 0$ معرف y به‌صورت تابعی از x باشد را به‌دست می‌دهد .

قضیهٔ ۲۱.۷ . قضیهٔ تابع ضمنی . *فرض‌کنیم f بر نوار مستطیلی شکل R :*

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty\}$$

*تعریف شده باشد . همچنین ، مشتق جزئی $D_2 f(x, y)$ موجود بوده**، *و درنامساویی به شکل*

$$0 < m \leq D_2 f(x, y) \leq M \tag{۷۸.۷}$$

به‌ازای هر (x, y) در R صدق کند ، که درآن m و M ثابتهایی که‌$m \leq M$ می‌باشند . بعلاوه ، به‌ازای‌هرتابع پیوستهٔ φ بر $[a, b]$ ، تابع مرکب $g(x) = f[x, \varphi(x)]$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد . دراین‌صورت ، یک و فقط یک تابع مانند $y = Y(x)$ وجود دارد ، که بر $[a, b]$ پیوسته است ، و به‌ازای هر x در $[a, b]$ ،

$$f[x, Y(x)] = 0 \text{ .} \tag{۷۹.۷}$$

تذکر. این نتیجه را ایـن‌طور توصیف می‌کنیم که می‌گوییم معادلهٔ $f(x, y) = 0$ ، y را به‌طور ضمنی به‌صورت تابعی از x در $[a, b]$ تعریف می‌کند .

برهان. فرض‌کنیم C فضای خطی توابع پیوسته بر $[a, b]$ بوده ، و عملگر $T: C \to C$ را با معادلهٔ

---

* $D_2 f(x, y)$ مشتق $f(x, y)$ نسبت به y است درحالی که x ثابت گرفته شده است .

$$T(\varphi)(x) = \varphi(x) - \frac{1}{M} f[x, \varphi(x)]$$

به‌ازای هر x در $[a, b]$ تعریف می‌کنیم . دراینجا M ثابت مثبت در (۷۸۰۷) است . تابع $T(\varphi) \in C$ هر وقت $\varphi \in C$. ثابت می‌کنیم T یک عملگر انقباض است . به محض دانستن این ، نتیجه می‌شود که T یک نقطهٔ ثابت منحصر بفرد مانند Y در C دارد . برای این تابع Y داریم $Y = T(Y)$ ، بدین معنی که ، به‌ازای هر x در $[a, b]$ ،

$$Y(x) = Y(x) - \frac{1}{M} f[x, Y(x)] \ .$$

این ، همانطور که مطلوب است ، (۷۹۰۷) را نتیجه می‌دهد .

برای نشان دادن اینکه T یک عملگر انقباض است ، تفاضل

$$T(\varphi)(x) - T(\psi)(x) = \varphi(x) - \psi(x) - \frac{f[x, \varphi(x)] - f[x, \psi(x)]}{M} \qquad (۸۰۰۷)$$

را درنظر می‌گیریم . بنابر قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقها ، داریم

$$f[x, \varphi(x)] - f[x, \psi(x)] = D_2f[x, z(x)][\varphi(x) - \psi(x)],$$

که درآن $z(x)$ بین $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ قرار دارد . بنابراین ، (۸۰۰۷) نتیجه می‌دهد که

$$T(\varphi)(x) - T(\psi)(x) = [\varphi(x) - \psi(x)]\left(1 - \frac{D_2f[x, z(x)]}{M}\right). \qquad (۸۱۰۷)$$

فرض (۷۸۰۷) ایجاب می‌کند که

$$0 \le 1 - \frac{D_2f[x, z(x)]}{M} \le 1 - \frac{m}{M}.$$

بنابراین ، (۸۱۰۷) نامساوی زیر را به‌دست می‌دهد :

$$|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| \le |\varphi(x) - \psi(x)| \left(1 - \frac{m}{M}\right) \le \alpha \, \|\varphi - \psi\| , \qquad (۸۲۰۷)$$

که درآن $\alpha = 1 - m/M$. چون $0 < m \le M$ ، داریم $0 \le \alpha < 1$. نامساوی (۸۲۰۷) به‌ازای‌هر x در $[a, b]$ معتبر است . بنابراین ، T یک عملگر انقباض می‌باشد . این برهان را تمام خواهد کرد .

کاربرد بعدی قضیهٔ نقطهٔ ثابت ، یک قضیهٔ وجودی برای معادلهٔ انتگرال

$$\varphi(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)\, dt \qquad (۸۳\cdot۷)$$

را ثابت می‌کند. در اینجا ψ یک تابع معلوم پیوسته بر $[a, b]$ ، λ یک ثابت معلوم ، و K تابع مفروضی است که بر مربع

$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$$

تعریف شده و کراندار است. تابع K **هستهٔ** معادلهٔ انتگرال نام دارد. فرض کنیم C فضای خطی توابع پیوسته بر $[a, b]$ باشد. همچنین، هستهٔ K چنان باشد که عملگر T داده شده با

$$T(\varphi)(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)\, dt$$

C را بتوی C بنگارد. به‌عبارت دیگر، فرض می‌کنیم $T(\varphi) \in C$ هر وقت $\varphi \in C$. یک جواب معادلهٔ انتگرال تابعی است چون φ در C که در (۸۳٠۷) صدق کند.

قضیهٔ ۲۲٠۷ . قضیهٔ وجودی برای معادلات انتگرال. *هرگاه، تحت شرایط پیشگفته، به‌ازای هر (x, y) در S ، و یک $M > 0$ ، داشته باشیم*

$$|K(x, y)| \leq M \,, \qquad (۸۴\cdot۷)$$

آنگاه، به‌ازای هر λ که

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b - a)} \qquad (۸۵\cdot۷)$$

یک و فقط یک تابع مانند φ در C هست که در معادلهٔ انتگرال (۸۳٠۷) صدق می‌کند.

برهان. ثابت می‌کنیم T یک عملگر انقباض است. دو تابع دلخواه φ_1 و φ_2 را در C اختیار و تفاضل

$$T(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]\, dt$$

را درنظر می‌گیریم. با استفاده از نامساوی (۸۴٠۷) ، می‌توان نوشت

$$|T(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x)| \leq |\lambda|\, M(b - a)\, \|\varphi_1 - \varphi_2\| = \alpha\, \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

که درآن $\alpha = |\lambda|\, M(b - a)$. بخاطر (۸۵٠۷) ، داریم $0 \leq \alpha < 1$ ؛ درنتیجه، T یک عملگر انقباض با ثابت انقباض α می‌باشد. بنابراین، T نقطهٔ ثابت منحصر بفرد φ در C می‌باشد. این تابع φ در (۸۳٠۷) صدق می‌نماید.