دانشکده مهندسی کامپیوتر

به نام یزدان پاک

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبر خطی کاربردی

دکتر امیرمزلقانی

نیم‌سال دوم ۰۱ - ۰۰

پاسخ تشریحی تمرین سری پنجم

در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل *ala.spring2022@gmail.com* و یا تلگرام تدریس‌یاران درس در ارتباط باشید.

پرسش اول

ماتریس فرم مربعی عبارات زیر را پیدا کنید.

پاسخ

الف)

$$[x_1\ x_2]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + dx_2^2 + (b+c)x_1x_2$$

در نتیجه ماتریس مربعی برابر است با:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

ب)

$$[x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix} ax_1 +\ bx_2 + cx_3 \\ dx_1 +\ ex_2 +\ fx_3 \\ gx_1 +\ hx_2 +\ ix_3 \end{bmatrix}$$

$$= ax_1^2 + ex_2^2 + ix_3^2 + (b+d)x_1x_2 + (c+g)x_1x_3 + (f+h)x_2x_3$$

در نتیجه ماتریس مربعی برابر است با:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

پرسش دوم

الف) ماتریس $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -16 & 4 & -6 \\ 16 & 4 & 10 \end{bmatrix}$ را قطری‌سازی کنید به طوری که $B = PDP^{-1}$..

ب) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ را قطری سازی عمودی کنید. به طوری که $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

پاسخ

الف) مقادیر ویژه را به دست می‌آوریم:

$$det(A-\lambda \mathrm{I}) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 48\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 14\lambda + 48) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 6 \quad \lambda_3 = 8$$

اکنون یک پایه از eigenspace هر مقدار ویژه را به دست می آوریم و آن را نرمال می‌کنیم:

$$\lambda_1 = 0:\ X = x_1\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 6:\ X = x_2\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\\ 1\end{bmatrix} \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 8:\ X = x_3\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \rightarrow v_3 = \begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

در نهایت داریم:

$$P = [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3}\\ 4 & 0 & -2\end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix},$$

برای بررسی صحت پاسخ، ماتریس‌های PDP^{-1} را ضرب می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که برابر با B شود.

ب) مقادیر ویژه را به دست می‌آوریم:

$$det(A-\lambda \mathrm{I}) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 3) = 0 \ \rightarrow\ \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 3$$

اکنون یک پایه از eigenspace هر مقدار ویژه را به دست می آوریم و آن را نرمال می‌کنیم:

$$\lambda_1 = 0 : \ X = x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 : \ X = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در نهایت داریم:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

پرسش سوم

تجزیه SVD ماتریس‌های $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

پاسخ

الف) در ابتدا ماتریس $A^T A$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$$

سپس بردار ویژه های این ماتریس را بدست می‌آوریم.

$$\det(A^T A - 0I) = \begin{vmatrix} 20 - \lambda & -10 \\ -10 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda = \lambda(\lambda - 25) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 25 \end{cases}$$

$$\lambda_1 : \ A^T A - \lambda I = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$basis\ for\ null(A^T A - 0I) \colon \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\lambda_2 :\ A^T A - 25I = \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ -10 & -20 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -5 & -10 & 0 \\ -10 & -20 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$basis\ for\ null(A^T A - 25I) \colon \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

سپس بردارها را نرمالیزه کرده و در ماتریس V قرار می‌دهیم.

$$V^T = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

حال باید ماتریس های Σ, U را بدست آوریم.

$$\begin{cases} Av_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \\ Av_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} \to u_1 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{\begin{bmatrix} -2\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}}{5} = \begin{bmatrix} \frac{-2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

باتوجه به آنکه مقدار Av_1 برابر با بردار صفر شد، باید دوبردار دیگر برای ماتریس U بیابیم.

$$u_1 . x = 0 \to \frac{-2\sqrt{5}}{5} x_1 + \frac{-\sqrt{5}}{5} x_2 = 0$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-x_2}{2} \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad , \qquad u_3 = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

ب) ابتدا باید یک $orthonormal\ set$ از $eigenvalue$های A^TA بدست آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^TA - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 81-\lambda & -27 \\ -27 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(81-\lambda) - 9 \times 81 = \lambda^2 - 90\lambda = 0$$

$$\lambda(90-\lambda) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 90 \end{cases}$$

$\lambda = 90$:

$$(A^TA - 90I)x = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -9 & -27 \\ -27 & -81 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -9 & -27 & 0 \\ -27 & -81 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -9 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = -3x_2$$

$$x = \begin{bmatrix} -3x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow v_1{}' = \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$\lambda = 0$:

$$(A^T A - 0I)x = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 81 & -27 & 0 \\ -27 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 81 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = \frac{x_2}{3}$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{3} \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow v_2{}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$$V = [v_1{}' \quad v_2{}'] = \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

حال $singular\ value$ها را مشخص می‌کنیم که مجذور $eigenvalue$های ما می‌باشند و سازنده‌ی زیرماتریس D از ماتریس Σ ما هستند.

$$\sigma_1 = 30, \qquad \sigma_2 = 0$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حال تنها کافی است ماتریس U را بسازیم.

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1{}' = \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$$

حال باید U را گسترش دهیم یا $extend$ کنیم چرا که دو ستون دیگر برای تشکیل ماتریس می‌خواهد. توجه شود که $\|Av_2\| = 0$ خواهد بود چون $\sigma_2 = 0$ است. چون این دو بردار دیگر U باید بر u_1 عمود باشند، پس داریم:

$$u_1 . x = 0 \rightarrow \frac{1}{3} x_1 - \frac{2}{3} x_2 - \frac{2}{3} x_3 = 0 \rightarrow x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x = \begin{bmatrix} 2x_2 + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حال باید الگوریتم $Gram\ Schmidt$ را روی w_1, w_2 اجرا کنیم تا تصویر عمود یکی بر دیگری یافت شود.

$$u_2 = w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = w_2 - \frac{w_2 . u_2}{u_2 . u_2} u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{-4}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{scaling\ by\ 5} u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$u_2{}' = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3{}' = \begin{bmatrix} \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$U = [u_1 \quad u_2{}' \quad u_3{}'] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

و در نهایت تجزیه SVD ماتریس A برابر خواهد شد با:

$$A = U\Sigma V = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

پرسش چهارم

فرض کنید $y = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ و $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$ و $W = span\,\{u_1\}$. مقدار $uu^T y$ و $proj_W y$ را حساب کنید.

پاسخ

$$uu^T y = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.3 \\ -0.3 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$proj_W y = \frac{y.u_1}{u_1.u_1}\, u_1 = \frac{\frac{7}{\sqrt{10}} - \frac{27}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{10} + \frac{9}{10}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = -2\sqrt{10} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

پرسش پنجم

فرض کنید ماتریسA یک ماتریس متقارن مثبت معین باشد. نشان دهید یک ماتریس متقارن مثبت معین مانند B وجود دارد که $B^2 = A$.

پاسخ

چون A یک ماتریس متقارن مثبت معین است بنابراین n مقدار ویژه حقیقی مثبت دارد به نام های $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ و میتوان آن را به شکل زیر تجزیه کرد.

$$A = SDS^T \ , D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

چون مقادیر ویژه مثبتند بنابراین ماتریس D’ را داریم که درایه هایش جذر درایه های D اند.

$$B = SD'S^T \Rightarrow B \ is \ symmetric \ and \ positive \ definite$$

$$B^2 = (SD'S^T)(SD'S^T) = SD'(S^TS)D'S^T = SD'^2S^T = SDS^T = A$$

پاسخ پرسش ششم

$$A = \begin{vmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 6-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 17\lambda^2 - 90\lambda + 144$$

$$= -(\lambda-3)(\lambda^2 - 14\lambda + 48)$$

$$= -(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-8)$$

Eigen values: $3, 6, 8$

$$\lambda = 3 \qquad A - 3I = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$[A - 3I \mid 0] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad v_1 = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 6 \qquad A - 6I = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$[A - 6I \mid 0] = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad v_2 = x_3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \sim \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 8 \qquad A - 8I = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$[A - 8I \mid 0] = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad v_3 = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = PDP^T \qquad P = [v_1 \ v_2 \ v_3]$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$