

مسئله

بدون محاسبه A و A^{-1} و A^2 و A^{-2} حاصل عبارتی

$A^{-1}x + A^{-2}y$ بدست آورید.

L و U حاصل تجزیه $A = LU$ هستند

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = LU \rightarrow A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1} L^{-1} \rightarrow A^{-2} = (U^{-1} L^{-1})^2$$

$$\rightarrow A^{-2} = U^{-1} L^{-1} U^{-1} L^{-1} \rightarrow A^{-1}x + A^{-2}y = U^{-1} L^{-1}x + U^{-1} L^{-1} U^{-1} L^{-1}y$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}x = U^{-1} L^{-1}x = U^{-1}(L^{-1}x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-2}y = U^{-1}(L^{-1}(U^{-1}(L^{-1}y)))$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^{-1}x + A^{-2}y = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$