linear Aljebra (Basic) «بسم الله الرحمن الرحیم» (شمیلا بیاتی) جلسه ۱ 93/6/22

← مراجع:

① linear Aljebra by Lay (4th edition)

فصل ۱ و 2 (ماتریس‌ها و دستگاه‌های معادلات خطی)

② linear Aljebra by Hoffman

فصل 2 و 3 و 5 و 6

← ارزیابی:

I) TA ③ نمره

II*) فعالیت کلاسی + تمرینات تحویلی + شرکت فعال در کلاس ③ نمره

III) کوئیز و میان ترم ⑦ نمره

III) پایان ترم ⑦ نمره

ماتریس‌ها:

* قرارداد:

در طول این فصل منظور از میدان $\mathbb{F}$، مجموعه اعداد مختلط با جمع و ضرب معمولی آنهاست.

تعریف:

فرض کنید F یک میدان باشد، در این صورت یک ماتریس $m\times n$ با درایه‌های F را به صورت یک آرایه‌ی مستطیلی نمایش می‌دهیم، یعنی اگر $a_{ij}\in F$ که $i=1,\dots,m$ ، $j=1,\dots,n$، آنگاه نمایش یک ماتریس $m\times n$ به شکل زیر است:

ردیف ستون

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

گاهی برای سادگی آن را با $(a_{ij})_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم، ماتریس یک تابع به شکل زیر است:

$$f:\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}\longrightarrow F$$
$$(i,j)\longmapsto a_{ij}$$

فرض کنید $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{m\times n}$، آنگاه $A=B$ اگر و تنها اگر

$a_{ij}=b_{ij}$ به ازای هر i و j.

اگر $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{m\times n}$ تعریف کنیم:

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

اگر $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{n\times k}$ تعریف کنیم:

$$A_{m\times n}B_{n\times k}=(c_{ij})_{m\times k}$$

$$c_{ij}=\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}$$

اگر $A=(a_{ij})$، $a_{ij}\in F$، $\lambda\in F$ تعریف کنیم،

$$\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$$

نمادگذاری: مجموعه تمام ماتریس‌های $m\times n$ با درایه‌هایی از F را با $M_{m\times n}(F)$ و اگر $m=n$ باشد آن را با $M_n(F)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $A=(a_{ij})_{m\times n}$ عضوی از $M_{m\times n}(F)$ باشد. تابع زیر را وابسته به A تعریف می‌کنیم:

$$T_A : F^{n} \longrightarrow F^{m}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

$$(x_1, \dots, x_n)$$

تمرین: اگر $B=(b_{ij})$ ، $A=(a_{ij})$ اعضای $M_{m,n}(F)$ باشند، آنگاه $A=B$ اگر و تنها اگر $T_A=T_B$.

به علاوه داریم:

$$T_{A+B} = T_A + T_B$$

تمرین: اگر $A\in M_{m,n}(F)$ ، $B\in M_{n,k}(F)$ آنگاه

$$T_{AB} = T_A \circ T_B$$

ترکیب توابع

از این رابطه در تمرین قبل شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها را نتیجه بگیرید.

حکم: $A(BC) = (AB)C \xrightarrow{\text{ت ۱}} T_{A(BC)} = T_{(AB)C} \xrightarrow{\text{تمرین 2}}$ $\blacksquare$

تعریف:

ماتریس همانی $n\times n$ را با I_n نمایش می‌دهیم که

$$I_n = (a_{ij})_{n\times n} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

$*$

$$I_n A = A I_n = A \quad (\mathrm{I})$$
$$JA = AJ = A \quad (\mathrm{II})$$
$$\rightarrow I_n \overset{\mathrm{II}}{=} I_n J \overset{\mathrm{I}}{=} J$$

لذا دیدیم برای هر $A \in M_n(F)$، $I_n A = A I_n = A$

ماتریس یا همانی فوق یکتاست یعنی اگر برای $J \in M_n(F)$ نیز داشته باشیم: $I_n = J$

تعریف:

فرض کنید $A \in M_n(F)$، گوییم A معکوس‌پذیر (یا وارون‌پذیر) است اگر ماتریس $J \in M_n(F)$ وجود داشته باشد که $AJ = JA = I_n$

در این صورت J را با A^{-1} نمایش می‌دهیم.

تعریف:

اگر $A \in M_{1,n}(F)$ ، A را ماتریس سطری، و اگر $B \in M_{n,1}(F)$ آنرا ماتریس ستونی گوییم. و اگر $A \in M_n(F)$ آنرا ماتریس مربعی گوییم. منظور از ماتریس صفر که با 0 نمایش داده می‌شود ماتریسی است که همه درایه‌هایش صفر باشد.

تعریف:

اگر $A \in M_{m,n}(F)$ ، ترانهاده A را با A^t نمایش می‌دهیم که $A^t \in M_{n,m}(F)$ است و اگر $A = (a_{ij})$ آنگاه درایه‌ی (r,s) ام A^t برابر a_{sr} است.

ماتریس A را متقارن می‌نامیم اگر $A = A^t$ و A را پادمتقارن گوییم اگر $A = -A^t$

تمرین: فرض کنید A، B ماتریس‌هایی با درایه‌های از میدان F باشند و $\lambda \in F$ آنگاه:

(i) $(A^t)^t = A$

(ii) $(A+B)^t = A^t + B^t$

(iii) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

(iv) $(AB)^t = B^t A^t$

مثال. فرض کنید $B, A \in M_n(F)$ باشند. A متقارن، B پادمتقارن باشند، در مورد ماتریس‌های زیر اظهار نظر کنید.

الف) $AB + BA$ $\xrightarrow{\text{پادمتقارن}}$ $(AB+BA)^t = (AB)^t + (BA)^t$

$= B^t A^t + A^t B^t = -BA + A(-B)$

$= -(BA + AB)$

ب) B^2 متقارن

$(B^2)^t = (-B)^2 = B^2$

مثال. ثابت کنید هر ماتریس $A \in M_n(\mathbb{R})$ را می‌توان به صورت حاصل جمع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشت، به علاوه نمایش A در صورت چنین تجزیه‌ای یکتاست.

$$B = \underbrace{\frac{A+A^t}{2}}_{\text{متقارن}} \qquad C = \underbrace{\frac{A-A^t}{2}}_{\text{پادمتقارن}} \qquad A = B + C$$

فرض کنید T یک ماتریس متقارن و S یک ماتریس پادمتقارن است.

$$A = T + S \Rightarrow A^t = T^t + S^t = T - S$$

جمع دو رابطه: $T = \frac{A+A^t}{2}$ تفاضل دو رابطه $S = \frac{A-A^t}{2}$

تعریف: اگر $A \in M_n(F)$، رد A (trace of A) را با $tr(A)$ نمایش می‌دهیم اگر $A = a_{ij}$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

تمرین: اگر A, B ماتریس‌هایی با درایه‌هایی از F باشند، $\lambda \in F$ آنگاه

(i) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

(ii) $tr(\lambda A) = \lambda\, tr(A)$

(iii) $tr(AB) = tr(BA)$ $\longrightarrow$ چیز دیگری نمی‌توان گفت

تمرین: اگر $A \in M_n(\mathbb{R})$، آنگاه،

$$tr(AA^t) \geq 0 \quad \text{(مجموع مربعات)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

که صفر باشند

به‌ویژه $tr(AA^t) = 0$ اگر و تنها اگر $A = 0$

تعریف:

ماتریس مربعی $A \in M_n(F)$ معکوس راست دارد اگر $B \in M_n(F)$ وجود داشته باشد که $AB = I_n$. به طور مشابه گوییم A معکوس چپ دارد اگر $C \in M_n(F)$ وجود داشته باشد $CA = I_n$.

لم: اگر $A \in M_n(F)$، B معکوس راست A، C معکوس چپ A باشد آنگاه $B = C$.

$$B = I_n B = (CA)B = C(AB) = CI_n = C \quad \blacksquare$$

تمرین: اگر $A, B \in M_n(F)$ معکوس‌پذیر باشند، آنگاه:

i) $(A^{-1})^{-1} = A$

ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

iii) حاصل جمع دو ماتریس معکوس‌پذیر لزوماً معکوس‌پذیر نیست.

تعریف:

فرض کنید $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$. ترانهاده‌ی مزدوج A را با A^* نمایش می‌دهیم

که $A=(a_{ij})$

* نماد الحاقی ترانهاده است

$$A^* = (\overline{a_{ij}})^T = (\overline{a_{ji}})$$

$$z = x + iy \longrightarrow \bar{z} = x - iy$$

A را ماتریس هرمیتی (Hermitian Matrix) نامیم اگر $A = A^*$

تمرین. اگر $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ ، $\lambda\in\mathbb{C}$ آنگاه:

(i) $(A+B)^* = A^* + B^*$ (ii) $(A^*)^* = A$

(iii) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ (iv) $(AB)^* = B^* A^*$

تعریف:

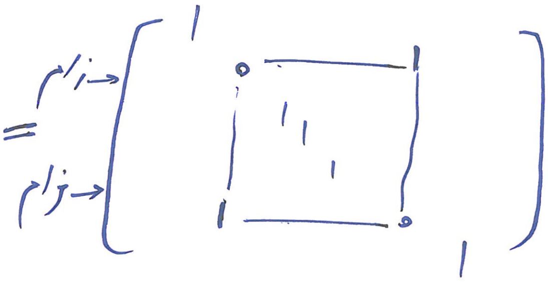
ماتریس $A\in M_n(F)$ را یک ماتریس مقدماتی گوییم اگر A یکی از سه حالت زیر باشد:

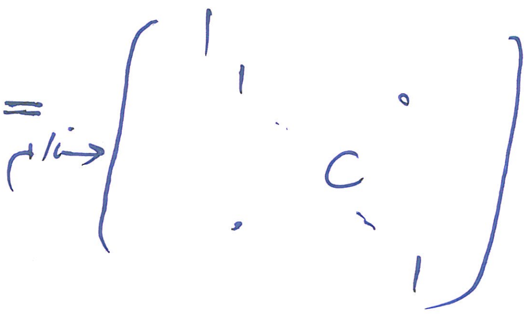
(i) A از تعویض دو سطر I_n بدست آمده باشد

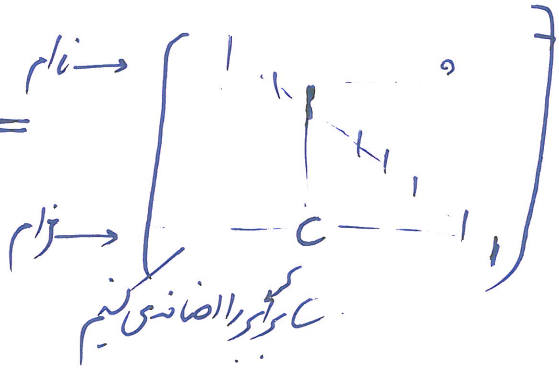
(ii) اگر A از ضرب کردن یک عدد ناصفر در یک سطر I_n بدست آمده باشد

(iii) اگر A از جمع کردن مضربی از یک سطر I_n با سطر دیگر بدست آمده باشد

اگر ماتریس مقدماتی که از تعویض سطر iام و jام در I_n به دست آمده باشد با P_{ij}، اگر از ضرب کردن $c \neq 0$ در سطر iام به دست آمده باشد با $M_i(c)$ و اگر ماتریس مقدماتی که از اضافه کردن c برابر سطر iام به سطر jام به دست آمده باشد با $A_{ij}(c)$ نمایش می دهیم.

$P_{ij} =$ 

$M_i(c) =$ 

$A_{ij}(c) =$ 

اگر ماتریس مقدماتی P_{ij} یا $M_i(c)$ یا $A_{ij}(c)$ را از سمت چپ در یک ماتریس دلخواه $A \in M_n(F)$، حاصل ماتریس است که به ترتیب سطر iام و jام A عوض شده است یا ماتریسی که سطر iام A در c ضرب شده یا ماتریسی که c برابر سطر iام A به سطر jام آن افزوده شده باشد.

نکته: ماتریس های مقدماتی معکوس پذیرند و معکوس آنها نیز ماتریس مقدماتی است:

$(P_{ij})(P_{ij}) = I_n$

i) $(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$

ii) $(M_i(c))^{-1} = M_i(1/c)$

iii) $(A_{ij}(c))^{-1} = A_{ij}(-c)$

تعریف:

ماتریس $A \in M_{mn}(F)$ را تحویل یافته سطری پلکانی می نامیم اگر شرایط زیر برقرار باشد:

(1) اولین درایه ی ناصفر هر سطر یک باشد (مکان این درایه را محور سطر می نامیم

(2) هیچ سطر صفری بالای یک سطر ناصفر نباشد به عبارت دیگر تمام سطرهای صفر در پایین ماتریس باشند.

(3) تمام درایه های دیگری که در ستون یک محور قرار دارند صفر باشند، یعنی اگر اولین درایه ناصفر یک سطر را اقم باشیم بقیه درایه های ستون متناظر صفر باشد

(4) محورهای سطرها به صورت پلکانی قرار بگیرند یعنی در دو سطر متوالی ناصفر اولین درایه ناصفر سطر بالایی بیشتر به سمت چپ باشد.

فرض کنید $A \in M_{m n}(F)$ با عملیات زیر همواره می‌توان به یک ماتریس تحویل یافته (+مثال) سطری پلکانی رسید:

$i := 1$

تا زمانی که $i \leq m$ مراحل زیر را انجام دهیم:

اگر سطر i ام صفر است آنگاه $i := i+1$

و اگر نه کوشش اولین درایه‌ی ناصفر سطر i ام را با ضرب در عدد مناسب در سطر یک کنیم

و پس با افزودن مضرب مناسب از این سطر به سطرهای دیگر، سایر درایه‌های مربوط به ستون سطر i ام را صفر کنیم

در نهایت با جابجا کردن سطرها، آن را پلکانی می‌کنیم و سطرهای صفر را در پایین ماتریس قرار دهیم.

* تذکر: در الگوریتمی که در بالا توضیح داده شد از یکی از سه عملیات زیر در هر مرحله استفاده می‌شود که عملیات سطری مقدماتی نام دارند:

1. سطری را در عدد ناصفر ضرب کنیم
2. مضربی از یک سطر را به سطر دیگر افزودیم
3. جای دو سطر را عوض کنیم

*** * اگر یک ماتریس A با استفاده از عملیات سطری مقدماتی از ماتریس B بدست آمده باشد گوییم A, B هم ارز سطری هستند.

نتیجه: هر ماتریس $A \in M_{m,n}(F)$ با یک ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی هم ارز سطری است.

لم. اگر ماتریس $A \in M_{m,n}(F)$ یک سطر صفر داشته باشد، آنگاه حتماً A معکوس ناپذیر است؟

برهان خلف: فرض کنید معکوس پذیر است پس $B \in M_n(F)$ وجود دارد که

سطر صفر دارد — سطر صفر ندارد

$$AB = I_n$$

گزاره: اگر $A \in M_n(F)$ تحویل یافته سطری پلکانی باشد، معکوس پذیر باشد، آنگاه $A = I_n$ است.

(* ایده مهم و کاربردی)

اثبات:

فرض کنید محور سطر iام در ستون c_i باشد و می‌دانیم چون سطر صفر نداریم هر سطر محور دارد، داریم:

$$1 \leq c_1 < \cdots < c_n \leq n$$

پس $c_i = i$ برای هر $i = 1, \dots, n$ یعنی محورها دقیقاً روی قطر اصلی قرار دارند

پس $A = I_n$ (به وضوح بقیه درایه‌ها صفر اند.)

گزاره: اگر $A \in M_n(F)$، A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر A هم ارز سطری I_n باشد. به عبارت دیگر A حاصل ضرب ماتریس‌های مقدماتی باشد.

$\Longleftrightarrow$ حاصل ضرب ماتریس مقدماتی

I_n و A هم ارزی سطری دارند

$$E_s \cdots E_1 A = I_n \Longleftrightarrow A = (E_s \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_s^{-1}$$

اگر $E_1, \dots, E_s$ ماتریس‌های مقدماتی باشند و $A = E_1 \cdots E_s$ چون هر E_i معکوس پذیر است، پس A معکوس پذیر است.

($\Leftarrow$) فرض کنیم A معکوس پذیر است، فرض کنیم با ضرب کردن ماتریس‌های مقدماتی $E_1, \dots, E_s$ در A به ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی B برسیم.

$$E_s \cdots E_1 A = \underbrace{B}_{\text{تحویل یافته}}$$

معکوس پذیر $\rightarrow$ معکوس پذیر

پس B از یک طرف تحویل یافته سطری پلکانی است و از طرف دیگر چون حاصل ضرب ماتریس‌های معکوس پذیر است خود معکوس پذیر است لذا از گزاره‌ی قبل $B = I_n$ است لذا

* ایده‌ی قبل

$$E_s \cdots E_1 A = I_n \Rightarrow A = (E_s \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_s^{-1}$$

گزاره:
اگر $A \in M_n(F)$ معکوس راست (چپ) داشته باشد، آنگاه A معکوس پذیر است.

اثبات:
فرض کنیم برای $AB = I_n$

برهان خلف فرض کنیم A معکوس پذیر نباشد. با ضرب در ماتریس‌های مقدماتی $E_1, \dots, E_s$، فرض کنیم ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی $C = E_1 \cdots E_s A$

راه دیگر آمدیم: مانند استدلالی که قبلاً داشتیم می‌توان نشان داد که C سطر صفر دارد، وگرنه C برابر I_n می‌شود که در تناقض با معکوس‌ناپذیری A است.

$$\xrightarrow{\text{ضرب در } B} \underbrace{CB}_{\text{سطر صفر دارد}} = \underbrace{E_1 \cdots E_s}_{\text{معکوس‌پذیر لذا سطر صفر ندارد}} \overbrace{AB}^{I_n}$$

→ نکته‌ی بسیار مهم ***

گزاره: فرض کنیم $A, A_1, \dots, A_k \in M_n(F)$، اگر $A = A_1 \cdots A_k$، A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر $i = 1, \dots, k$، ماتریس A_i معکوس‌پذیر باشد.

اثبات: $(\Rightarrow)$ قبلاً ثابت شده است (با استقرا) (*کمک از قضیه جابجایی یک ماتریس با معکوس خود)

$(\Leftarrow)$ فرض کنیم A معکوس‌پذیر باشد، پس B وجود دارد

$$AB = A_1(A_2 \cdots A_k B) = I$$

$\Rightarrow$ A_1 معکوس راست دارد $\Rightarrow$ A_1 وارون‌پذیر $\Rightarrow (A_2 \cdots A_k B)A_1 = I$

$\Rightarrow$ A_2 وارون راست دارد $\Rightarrow$ استقرا ■

تمرین. ترانهاده‌ی ماتریس‌های مقدماتی معکوس‌پذیر است.

$P_{ij}^t = P_{ij}$ $\qquad$ $A_{ij}^t(C) = A_{ji}(C)$

$M_i^t(C) = M_i(C)$

تمرین. یک بار با استفاده از تمرین قبل و یکبار به طور مستقیم نشان دهید $A\in M_n(F)$

تحویلی معکوس پذیر باشد، آنگاه A^t نیز معکوس پذیر است،

$$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$$

تمرین: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. نشان دهید A یک ماتریس تحویل پذیر است اگر و تنها اگر $ad \neq bc$.

دستگاه معادلات خطی:

فرض کنید $x_1, \ldots, x_n$ مجهولاتی در میدان F باشند، همچنین a_{ij} ها در $i = 1, \ldots, m$ و $j = 1, \ldots, n$ و $b_1, \ldots, b_m$ اعضای F باشند.

معادلات زیر را یک دستگاه m-معادله‌ای خطی n-مجهولی می‌نامیم:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

لذا این پس دستگاه فوق را به اختصار یک دستگاه معادلات می‌نامیم. $(a_{ij})_{m\times n}$ را ماتریس ضرایب، و $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ را ماتریس ثابت‌ها می‌نامیم.

دستگاه فوق را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$(a_{ij})_{m\times n}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ → * به ضرایب m, n دقت شود

اگر $b_1 = \cdots = b_m = 0$، گوییم دستگاه معادلات همگن (در غیر این صورت ناهمگن) نامیده

ماتریس الحاقی:

اگر $A\in M_{m,n}(F)$ و $B\in M_{m,k}(F)$، ماتریس $C=(A|B)_{m,(n+k)}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{if } C=(c_{ij}) \Rightarrow \begin{cases} a_{ij} & 1\leqslant j\leqslant n \\ b_{i(j-n)} & n+1\leqslant j\leqslant n+k \end{cases}$$

همچنین اگر $A\in M_{m,n}(F)$ و $B\in M_{l,n}(F)$ به طور مشابه $\left(\dfrac{A}{B}\right)$ را تعریف می‌کنیم.

- فرض می‌کنیم دستگاه $AX=B$ داده شده باشد که $A=(a_{ij})_{m\times n}$

و $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$ برای حل این دستگاه ماتریس $(A|B)$ را تشکیل می‌دهیم

مرحله اول کار

با اعمال سطری مقدماتی روی این ماتریس، $(A'|B')$ را بدست آوردیم که در آن A' سطری پلکانی تحویل یافته باشد. دو حالت اتفاق می‌افتد.

حالت اول. اگر سطری از A' صفر باشد و درایه‌ی متناظر در B' صفر نباشد در این صورت دستگاه جواب ندارد

حالت دوم. اگر برای هر سطر صفر A'، درایه‌ی متناظر در B' نیز صفر باشد،

تعداد سطرهای ناصفر A' باشد، آنگاه:

حالت (1-2): اگر $r=n$، آنگاه

$$A' = \begin{pmatrix} I_n \\ \hline 0 \end{pmatrix}$$

$$A' \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = b'_1 \\ \vdots \\ x_n = b'_n \end{matrix}$$

دستگاه جواب یکتا است.

حالت (2-2): اگر $r<n$، دستگاه بی‌نهایت جواب دارد، در نتیجه اگر فرض (حالت دوم) برقرار باشد و $m<n$، دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

* البته اول باید چک شود تناقض یعنی $\neq 0 = 0$ بدست نیاید.

*مهم گزاره: اگر $A \in M_n(F)$ باشد، A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر دستگاه معادلات $AX=B$ جواب یکتا داشته باشد. (*روش برای اثبات معکوس پذیری)

* هر چیزی می‌تواند باشد.

اثبات. فرض کنید A معکوس پذیر و X_1، X_2 جواب دستگاه باشند:

$$AX_1 = B = AX_2 \xrightarrow{A^{-1}\ \text{ضرب کنید}} X_1 = A^{-1}B = X_2 \quad ■$$

برعکس فرض کنید دستگاه $AX=B$ جواب یکتا داشته باشد. هرگاه A معکوس ناپذیر باشد، در این صورت در ماتریس A' با بکارگیری نکته فوق سطر صفر داریم لذا حالت (1،2) نمی‌تواند اتفاق بیفتد. ■

$\langle A \rangle_\ell = M_n(F) \longrightarrow$ ***راه دوم جبری

مثال. فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$، پادمتقارن باشد، ثابت کنید ماتریس $I_n + A$ وارون‌پذیر است. (راه حل جالب)

حل. نشان می‌دهیم دستگاه $(I_n + A)X = 0$ جواب یکتا داشته باشد.

یک جواب این دستگاه $X_0 = 0$، فرض کنیم X جواب دیگری باشد.

$$(I_n + A)X_{n\times 1} = 0$$

$$X^t(I_n + A)X \overset{(*)}{=} 0 \longrightarrow X^tX + X^tAX = 0$$

$$\longrightarrow X^tX = -X^tAX \quad (I)$$

$$\xrightarrow{\text{ترانهاده } *} X^t(I_n - A)X = 0 \longrightarrow X^tX - X^tAX = 0$$

$$\longrightarrow X^tX = X^tAX \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} X^tX = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \longrightarrow x_i = 0 \longrightarrow X = 0$$

محاسبه‌ی معکوس یک ماتریس:

فرض کنیم $A \in M_n(F)$ معکوس‌پذیر باشد، پس ماتریس‌های مقدماتی $E_1, \ldots$ تا E_s وجود دارند که،

$$E_s \cdots E_1 A = I_n \longrightarrow A^{-1} = E_s \cdots E_1$$

مثال. آیا ماتریس $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ معکوس پذیر است، اگر جواب (+) است A^{-1} را بیابید.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{A_{13}(-1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&-1&3&-1&0&1\end{array}\right)$$

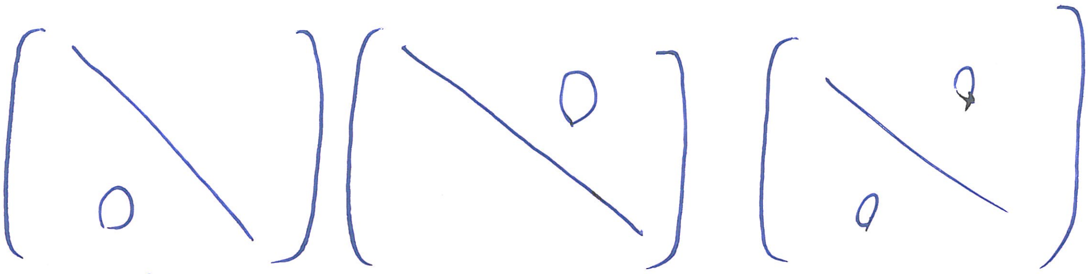
$$\xrightarrow[A_{21}(-2),\,A_{23}(1)]{M_2(\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&-1&0\\0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&-\frac{5}{2}&-1&\frac{1}{2}&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{31}(-2),\,A_{32}(-\frac{1}{2})]{M_3(-\frac{2}{3})}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\0&1&0&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&\frac{1}{5}\\0&0&1&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix}\frac{1}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\end{matrix}}_{A^{-1}}$$

تعریف:

$A \in M_n(F)$ را بالامثلثی (پایین مثلثی) گوییم هرگاه 0 برای تمامی $A=(a_{ij})$ داشته باشیم برای $i>j$ (برای $i<j$)



قطری   پایین مثلثی   بالامثلثی

تعریف:

$A \in M_n(F)$ را خودتوان گوییم هرگاه $A^2=A$ ، A را پوچ توان گوییم هرگاه $K \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد $A^K=0$.

مقادیر ویژه:

فرض کنیم $A \in M_n(\mathbb{C})$، عدد $\lambda \in \mathbb{C}$ را یک مقدار ویژه‌ی A می‌نامیم هرگاه $\lambda I_n - A$ معکوس‌ناپذیر باشد.

λ مقدار ویژه $\Longleftrightarrow$ $(\lambda I_n - A)X = 0$ دستگاه جواب ناصفر داشته باشد

$$\exists X \neq 0 \quad \lambda X - AX = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\exists X \neq 0 \quad AX = \lambda X$$

$$A \in M_n(F) \,,\; P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

تعریف: $P(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n$

$$P(x) = x^2 + 1 \longrightarrow P(A) = A^2 + 1$$

قضیه: فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$ و $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط باشد، در این صورت $\gamma \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه‌ی $P(A)$ است اگر و تنها اگر $\gamma = P(\lambda)$ برای یک مقدار ویژه‌ی λ از A.

مثال. ثابت کنید تنها مقدار ویژه‌ی ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ برابر ۱ است و سپس با در نظر گرفتن

مقادیر ویژه‌ی $P(A)$ را بیابید. $P(x) = x^4 - 3x^2 - 8$

* تنها نکته فقط توجه به تعریف است.

$$\lambda I_2 - A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$ معکوس‌ناپذیر باشد

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$P(A) = A^4 - 3A^2 + 8I_2$$

$$P(1) = 1 - 3 + 8 = 6$$

اثبات. فرض کنیم $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه‌ی A باشد، می‌خواهیم نشان دهیم $P(\lambda)$ مقدار ویژه‌ی $P(A)$ است، یعنی معکوس‌ناپذیر است $P(\lambda)I_n - P(A)$:

($\Leftarrow$)(* ایده تجزیه $x^n - a^n$)

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$P(\lambda)I_n - P(A) = a_n\lambda^n I_n + \cdots + a_1\lambda I_n + a_0 I_n$$
$$-(a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I_n)$$
$$= a_n(\lambda^n I_n - A^n) + \cdots + a_0(I_n - I_n)$$

$$\Rightarrow (*) = (\lambda I_n - A)\underbrace{(\cdots)}_{C}$$

لذا چون $\lambda I_n - A$ معکوس‌ناپذیر است پس حاصل‌ضرب فوق معکوس‌ناپذیر است.

(* ایده: تجزیه چندجمله‌ای ها در اعداد مختلط)

عکس: فرض کنیم $\gamma \in \mathbb{C}$ مقدار ویژه‌ی $P(A)$ باشد، چندجمله‌ای $P(x)-\gamma$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ریشه‌های آن باشند، پس $\Leftarrow$

$$\underline{P(x)-\gamma} = K(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_m) \quad (**)$$

چندجمله‌ای که تحلیل

می‌دانیم $P(A)-\gamma I_n$ معکوس ناپذیر است، پس اگر سمت راست تساوی فوق را روی A در نظر بگیریم، آنگاه $K(A-\lambda_1 I_n)\cdots(A-\lambda I_n)$ نیز معکوس ناپذیر است،

پس λ_i مقدار ویژه A است، از $(**)$ داریم،

λ_i ها مقدار ویژه‌ی A است.

$$\underline{P(\lambda_i)-\gamma=0}$$

* جایگذاری *

پس $\gamma = P(\lambda_i)$ ■

مثال. فرض کنید A یک ماتریس پوچ توان باشد، ثابت کنید تنها مقدار ویژه‌ی A صفر باشد $\Leftrightarrow$

(* ایده: جایگذاری سپس تعریف)

$0 I_n - A = -A \quad (*) \Longrightarrow$ معکوس ناپذیر است $\Longrightarrow$ 0 مقدار ویژه

$\exists K \ A^K = 0 \Longrightarrow$ A معکوس ناپذیر است $(*)$

(* ایده: استفاده از قضیه قبل)

برهان خلف

$\lambda \neq 0$ مقدار ویژه‌ی باشد

مقدار ویژه باشد، اگر $P(x)=x^K$ آنگاه $P(\lambda)=\lambda^K \neq 0$ یک مقدار ویژه‌ی $P(A)=A^K=0$ است.

پس $\lambda^K I_n - A^K = \lambda^K I_n - 0 = \lambda I_n$

معکوس پذیر نیست. ✗. ■

سؤال: فرض کنید A ماتریس باشد که تنها مقدار ویژه‌ی آن صفر است. آیا می‌توان نتیجه گرفت که A پوچ توان است. خیر...

Hoffman

تعریف:

فرض کنیم G یک مجموعه ناتهی باشد و تابع $+: G\times G \longrightarrow G$
$(g_1,g_2)\longrightarrow g_1+g_2$

گوییم G با یک عمل جمع یک گروه آبلی است، اگر شرایط زیر برقرار باشد:

1) $(g_1+g_2)+g_3=g_1+(g_2+g_3)$ بخش

(2) عضو خنثی

(3) عضو قرینه

(4) جابجایی ← آبلی

مثال 1) Q، C، Z، R با جمع اعداد گروه آبلی است

2) IN گروه آبلی نیست.

3) $M_n(R)$ با جمع ماتریس‌ها گروه آبلی است.

تعریف:

مجموعه ناتهی F با عمل $+: F\times F \longrightarrow F$ و عمل ضرب $\cdot: F\times F \longrightarrow F$
$(r_1,r_2)\longrightarrow r_1+r_2$ $(r_1,r_2)\longrightarrow r_1\cdot r_2$

را یک میدان می‌نامیم هرگاه خواص زیر برقرار باشد:

(1) خواص جمع: F با عمل $(+)$ یک گروه آبلی باشد

(2) خواص ضرب:

1-2: ضرب شرکت پذیر است، $a(bc)=(ab)c$

2-2: عضو $I_F \in F$ وجود دارد که $\forall a \in F \quad I_F a = a I_F = a$

3-2: اگر 0_F عضو خنثای عمل جمع باشد آنگاه $F\setminus\{0\}$ هر عضو دارای وارون نسبت به عمل ضرب وارون دارند:

$\forall r \neq 0 \in F \quad r r^{-1} = r^{-1} r = I_F$

4-2: ضرب جابجایی است. ← آبلی هم است.

5-3: توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع یعنی:

$\forall a,b,c \in F \quad a(b+c) = ab+ac$

- $M_n(\mathbb{R})$ با جمع و ضرب ماتریس‌ها میدان نیست زیرا تمام ماتریس‌ها معکوس پذیر نیستند.

- $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ و $\mathbb{Q}$ با جمع و ضرب معمولی.

- $\mathbb{Z}$ نیز یک میدان نیست. (ضربش وارون ندارد)

- $\mathbb{R}^n$ هم نیست چون وارون ندارد هر عضوی.

- $\mathbb{Z}_2$ با جمع و ضرب میدان است.

تعریف:

اگر V یک گروه آبلی باشد، F یک میدان باشد با تابع $\cdot : F\times V \to V$
$(r,v)\mapsto rv$

شرایط زیر را داشته باشد، گوییم V یک فضای برداری روی میدان F است:

جمع در F — ملزم 2 به 2 Homomorphic می‌دن ! — جمع در V

(i) $(r_1+r_2)v = r_1v + r_2v \quad \forall r_1,r_2\in F,\ \forall v\in V$

(ii) $r(v_1+v_2) = rv_1 + rv_2 \quad \forall r\in F, \forall v_1,v_2\in V$

ضرب اسکالر

(iii) $r_1r_2(v) = r_1(r_2v) \quad \forall r_1,r_2\in F, \forall v\in V$

ضرب در F

(iv) $1_F v = v \quad \forall v\in V$

ضرب تعریف شده در بالا را ضرب اسکالری گوییم.

اعضای V را بردار، و اعضای F را اسکالر می‌نامیم.

مثال. اگر F یک میدان، $V = M_{m,n}(F)$ آنگاه با جمع معمولی ماتریس‌ها و ضرب اسکالر زیر یک فضای برداری روی F داریم.

$\lambda[a_{ij}] := [\lambda a_{ij}]$

مثال. اگر F یک میدان باشد و $V = F^n$ باشد با ضرب اسکالر زیر یک فضای برداری روی F داریم:

$\forall (a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)\in F^n$

$(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n) := (a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$

$r(a_1,\dots,a_n) := (ra_1,\dots,ra_n)$

[illegible] میدان

مثال: با جمع و ضرب معمولی اعداد $\mathbb{C}$ روی $\mathbb{R}$ و فضای برداری هست.

" " " " $\mathbb{R}$ روی $\mathbb{C}$ " " نیست.

مثال: اگر $V=\{f: X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ تابع}\}$ جایی که X یک مجموعه ناتهی است، با جمع و ضرب اسکالر زیر V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ خواهد شد.

$$\forall f_1, f_2 \in V \quad (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad (r f_1)(x) = r f_1(x)$$

تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری روی F باشد و W زیرمجموعه ناتهی از V باشد. گوییم W یک زیرفضای V است اگر W با جمع و ضرب اسکالر القایی از V خود یک فضای برداری باشد.

گزاره: فرض کنید V یک فضای برداری روی F باشد $\emptyset \neq W \subseteq F$. W را زیرفضای V است، اگر و تنها اگر

$$\forall v_1, v_2 \in W, \forall \lambda \in F \quad v_1 + v_2 \in W, \lambda v_1 \in W$$

گزاره: فرض کنید V یک فضای برداری روی F باشد، $\emptyset \neq W \subseteq V$، W یک زیرفضای V است اگر و تنها اگر

$$\forall v_1, v_2 \in W, \forall \lambda \in F \quad \lambda v_1 + v_2 \in W$$

اثبات: یکبار قرار دهیم $v_2 = 0$ و یکبار $\lambda = 1$.

تمرین. فرض کنید V یک فضای برداری روی F باشد ، $r, v \in V$:

اسکالر   بردار صفر

(i) $0 \cdot v = 0$

بردار صفر

(ii) $r \cdot 0 = 0$

(iii) $r \cdot v = 0 \Rightarrow r = 0$ یا $v = 0$

(iv) $(-r)v = r(-v) = -(rv)$

*ایده:

iii) اگر $r = 0$ آنگاه مسئله حل شده است. لذا $r \neq 0$ ، r معکوس پذیر است.

$$v = r^{-1}(r\,v) = r^{-1} \cdot 0 = 0 \quad \blacksquare$$

مثال. فضای برداری F^n روی F را در نظر بگیرید. در این صورت

$$W = \{(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) \mid a_1, \dots, a_n \in F\}$$

یک زیرفضای F^n است.

ساده و مهم

مثال. اگر V یک فضای برداری روی F باشد $\{0\}$, V زیرفضاهای بدیهی V هستند.

مثال. دستگاه معادلات خطی $AX=0$ ، مجموعه جواب های دستگاه فوق یک زیرفضای F^n است.

(*می گوییم بردار صفر را حفظ کند البته اگر زیرفضای برداری باشد.)

$AX_1 = 0$

$AX_2 = 0$

$A(X_1 + X_2) = 0$

$A(\lambda X_1) = \lambda(AX_1) = 0$

لم: اشتراک هر گردایه از زیرفضاهای V یک زیرفضای V است.

اثبات: (ایده مشابه اثبات $\mathbb{N}$ در مجموعه های استقرایی در درس مبانی)

فرض کنیم I یک مجموعه اندیس گذار باشد و $A=\{W_i \mid W_i$ زیرفضای V، $i\in I\}$ گردایه‌ای از زیرفضاهای V باشد.

چون هر W_i زیرفضا است لذا

$$\forall i\in I \quad 0\in W_i$$

$$\Rightarrow 0\in \bigcap_{i\in I} W_i \neq \emptyset$$

* مرحله اول هر اثبات

فرض کنیم $\alpha\in F$ و $v_1, v_2 \in \bigcap_{i\in I} W_i$، آنگاه برای هر $i\in I$ داریم:

$$v_1, v_2 \in W_i \xrightarrow{W_i \text{ زیرفضا}} \alpha v_1 + v_2 \in W_i$$

$$\Rightarrow \alpha v_1 + v_2 \in \bigcap_{i\in I} W_i \quad \blacksquare$$

* مجموعه بردارها $(V, +)$

* میدان $(F, +, \cdot)$

* ضرب اسکالر $\cdot : F \times V \longrightarrow V$

* زیرفضا $W \subseteq V \iff \alpha w_1 + w_2 \in W$

تعریف:

فرض کنیم V یک فضای برداری روی F باشد و $S \subseteq V$ باشد، در این صورت

$\bigcap\limits_{\substack{W \text{ زیرفضای } V \\ S \subseteq W}} W$ را زیرفضای تولید شده توسط S می‌نامیم و با $\langle S \rangle$ نمایش

می‌دهیم. می‌توان دید $\langle S \rangle$ کوچک‌ترین زیرفضای V شامل S است.

مجموعه‌ی S را یک مولد برای V می‌نامیم اگر $\langle S \rangle = V$

مثال. $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$

مثال. اگر V فضای برداری باشد، $W \subseteq V$ یک زیرفضا باشد آن‌وقت الزاماً

$\langle W \rangle = W$

$$W \subseteq \bigcap_{\substack{Y \text{ زیرفضا} \\ W \subseteq Y}} Y \subseteq W$$

گزاره: فرض کنید $\emptyset \neq S \subseteq V$ زیرفضای تولید شده توسط S برابر است با

$$\langle S\rangle = \left\{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \;\middle|\; \begin{array}{l} n\in\mathbb{N} \\ \alpha_1,\dots,\alpha_n\in F \\ v_1,\dots,v_n\in S \end{array} \right\}$$

* یعنی نشان بدیم $\langle S\rangle$ کوچکترین زیرفضای شامل S است:

مجموعه سمت راست را A قرار می‌دهیم، اولاً به سادگی می‌توان دید که A زیرفضای V است، ثانیاً نشان می‌دهیم A کوچکترین زیرفضای شامل S است (مراحل حل). فرض کنیم W زیرفضای شامل S باشد، بنابراین به صورت بدیهی (اندیس‌ها قسمت دوم) برای $\forall n\in\mathbb{N}$ و $\forall \alpha_1,\dots,\alpha_n\in F$ و $\forall v_1,\dots,v_n\in S$ عضو $\cap W$

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in W$ پس $A\subseteq W$ ■

تعریف:

فرض کنیم V یک فضای برداری باشد روی F، زیرمجموعه ناتهی S از V را مستقل خطی نامیم هرگاه:

$\forall v\in S \quad v\notin \langle S\setminus\{v\}\rangle$

اگر S مستقل خطی نباشد گوییم وابسته خطی است.

گزاره:

اگر V یک فضای برداری و W زیرمجموعه مستقل خطی آن باشد و $w\in V-\langle W\rangle$، آنگاه $W\cup\{w\}$ مستقل خطی است.

اثبات:

اولاً واضح است که $w\notin\langle (W\cup\{w\})\setminus\{w\}\rangle$، حال فرض کنیم $u\in W$ می‌خواهیم نشان دهیم $u\notin\langle (W\cup\{w\})\setminus\{u\}\rangle$ برای خلف فرض می‌کنیم چنین نباشد

به برهان خلف فرض کنیم

$\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots \alpha_n, \beta \in F$

$, \exists u_1, \dots, u_n \in W \setminus \{u\}$

$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \beta w$

اولاً $\beta = 0$ زیرا اگر $\beta \neq 0$

$\Rightarrow w = \beta^{-1} [u - (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n)] \in W$

و این تناقض با فرض $w \notin \langle W \rangle$ دارد، پس $\beta = 0$ لذا

$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$

یعنی $u \in \langle W \setminus \{u\} \rangle$ و این تناقض است با استقلال خطی W دارد. ▨

تمرین. اگر V یک فضای برداری باشد، $w \in \langle W \rangle$ جایی که W یک زیرمجموعه است، آنگاه $\langle W \cup \{w\} \rangle = \langle W \rangle$

تمرین. نشان دهید هر زیرمجموعه ی یک مجموعه ی مستقل خطی خود مستقل خطی است.

تمرین. نشان دهید هر زیرمجموعه شامل یک مجموعه وابسته خطی خود وابسته خطی است.

قضیه

فرض کنیم V یک فضای برداری باشد و $W \subseteq V$ ناتهی باشد. W مستقل خطی است اگر و تنها اگر

بسیار مهم * همه نرم‌ها باید

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F, \ \forall v_1, \dots, v_n \in W$

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

اثبات. فرض کنیم W مستقل خطی باشد و برای یک ترکیب خطی $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ و

اعضای ناصفر داشته باشیم $\alpha_i \neq 0$

$$\alpha_i v_i = - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \alpha_j v_j \xrightarrow{\alpha_i \neq 0}$$

$$v_i = - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \alpha_i^{-1} \alpha_j v_j \Rightarrow v_i \in \langle W \setminus \{v_i\} \rangle \quad \times$$

که این با فرض مستقل خطی بودن تناقض است.

برعکس فرض کنیم W بر حسب w وابسته خطی باشد پس $w \in W$

وجود دارد که $w \in \langle W \setminus \{w\} \rangle$ لذا وجود دارد $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ و

$v_1, \dots, v_n \in W$ به طوریکه $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$$\Rightarrow w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n - w = 0$$

که ضریب w ناصفر است $\times$ ∎

نتیجه:

اگر V یک فضای برداری باشد $W \subseteq V$ یک مجموعه ناتهی متناهی است

$W = \{w_1, \dots, w_n\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \quad \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

تعریف فضای پایه:

فرض کنیم V فضای برداری باشد زیرمجموعه B از V را یک پایه فضای V

می‌نامیم اگر B مولد V باشد و مستقل خطی باشد.

مثال. یک پایه برای فضای برداری $\mathbb{R}^n$ روی $\mathbb{R}$

$$B = \{e_i \mid i=1,\dots,n\}$$

که e_i برداری است که مولفه iام آن 1 و باقی درایه‌ها صفر هستند.

$$\forall (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$(a_1,\dots,a_n) = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \Rightarrow \langle B \rangle = \mathbb{R}^n$$

استقلال خطی:

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$$
$$\Rightarrow (\alpha_1,\dots,\alpha_n) = (0,\dots,0)$$

مثال. یک پایه برای $M_{m,n}(F)$

$$B = \{E_{ij} \in M_{m,n}(F) \mid \text{ماتریسی که درایه } ij \text{ام آن } 1 \text{ و باقی درایه‌ها صفر باشند.}\}$$

مثال. $\mathbb{C}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است.

برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ که $\alpha \neq 0$، مجموعه $\{\alpha\}$ یک پایه $\mathbb{C}$ روی $\mathbb{C}$ است. $\{i\}$

مثال. $\mathbb{C}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است. $\{1, i\}$

مثال. فضای برداری توابع چندجمله‌ای روی متغیر x، با ضرایب حقیقی روی $\mathbb{R}$ بیابید.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

یک پایه‌ی متناهی : $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

تمرین. فضای برداری $\mathbb{R}$ روی $\mathbb{Q}$ پایه‌ی شمارا ندارد.

REVISED
7:19 PM, Sep 7, 2016

به نام او

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

«جلسه 7»

۱- نشان دهید اگر ماتریس A خودتوان باشد، آنگاه $I_n - A$ نیز خودتوان است $(A \in M_n(F))$.

۲- فرض کنید A و B ماتریس‌های $n \times n$ باشند و ماتریس وارون پذیر P وجود داشته باشد که $P^{-1}AP$ و $P^{-1}BP$ قطری باشند. ثابت کنید $AB = BA$.

۳- فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ روی $\mathbb{C}$ باشد. نشان دهید اگر $AA^* = 0$، آنگاه $A = 0$.

۴- فرض کنید $A \in M_n(F)$. ثابت کنید برای هر ماتریس $B \in M_n(F)$ داریم $AB = BA$ اگر و تنها اگر $\lambda \in F$ وجود داشته باشد به طوری که $A = \lambda I_n$.

E_{ij}

۵- اگر $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ و $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a$ برای هر $j = 1, \dots, n$، ثابت کنید a یک مقدار ویژه‌ی A است.

۶- اگر $A \in M_n(\mathbb{C})$ متقارن و با درایه‌های حقیقی باشد، ثابت کنید مقدارهای ویژه A حقیقی هستند.

A^*

۷- از بین گزاره‌های زیر هر کدام درست است اثبات کنید و در غیر این صورت مثال نقض بیاورید. هرگاه

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$

الف) $tr(AB) = tr(A)\,tr(B)$؛

ب) $tr(AB) = tr(BA)$؛

ج) اگر A پوچ‌توان باشد، $I_n + A$ وارون پذیر است؛

د) اگر A و B پوچ‌توان باشند و $AB = BA$، آنگاه $A+B$ و AB نیز پوچ‌توانند.

۸- آیا می‌توان ماتریس‌های $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ را چنان یافت که $AB-BA=I_n$ ؟

۹- فرض کنید $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. ثابت کنید اگر $A=AB-BA$ ؛ آنگاه A معکوس‌پذیر نیست.

$$I=A^{-1}AB-A^{-1}BA$$

$$I=A\underbrace{A^{-1}B}-\underbrace{A^{-1}B}_{C}A$$

$$I=AC-CA$$

① فرض کنید A ماتریس مربعی خودتوان باشد اگر λ مقدار ویژه A باشد نشان دهید $\lambda=1$ یا $\lambda=0$.

② تمام ماتریس‌های مربعی 2×2 را بیابید که $A^2=0$.

③ حل دستگاه

$$\begin{cases} 4x+8y-12z=44 \\ 3x+6y-8z=32 \\ -2x-y=-7 \end{cases}$$

3. فرض کنید $A\in M_n(F)$ بالامثلثی اکید باشد ثابت کنید $A^n=0$.

حل. با استقرا. اگر $n=1$ آنگاه $A=0$

فرض کنیم حکم برای ماتریس $(n-1)\times(n-1)$ برقرار باشد

$$A=\begin{pmatrix}[B]_{(n-1)\times(n-1)} & [b]\\ (0) & 0\end{pmatrix}$$

که B بالامثلثی است.

$$A^2=\begin{pmatrix}B & [b]\\ (0) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & [b]\\ (0) & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^2 & B[b]\\ (0) & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n=\begin{pmatrix}B^n & B^{n-1}[b]\\ (0) & 0\end{pmatrix}\xRightarrow{\text{طبق فرض}}[0]$$

تمرین. فرض کنید

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

نشان دهید $R(\theta)$ دارای مقدار ویژه است اگر و تنها اگر $R(\theta)=\pm I$.

$B=A^{-1}AB=A^{-1}(A+B)=I+A^{-1}B\to I=B-A^{-1}B$

$I=B(I-A^{-1})$

4. اگر B, A دو ماتریس مربعی باشند بطوریکه $A+B=AB$ و A دارای وارون باشد

$A^{-1}(A+B)B^{-1}=A^{-1}ABB^{-1}$

نشان دهید B نیز دارای وارون است $A^{-1}+B^{-1}=I$

(*)

*)

یادآوری: (لم زرن)

فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب ناتهی باشد، اگر هر زیر مجموعه کلاً مرتب A (زنجیر) یک کران بالا در A داشته باشد، آنگاه A دارای عضو ماکسیمال است.

قضیه: هر فضای برداری ناصفر یک پایه دارد. V

اثبات: قرار دهیم $\sum = \{W \subseteq V \mid W \text{ مستقل خطی}\}$، $(\sum, \subseteq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب است. اگر $0 \neq v \in V$ آنگاه $\{v\}$ مستقل خطی است، لذا $\sum$ ناتهی است.

فرض کنیم $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ زیرمجموعه کلاً مرتب از $\sum$ باشد، پس قرار دهید $W = \bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha$ در این صورت W نیز مستقل خطی است زیرا اگر

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ و $v_1, \dots, v_n \in W$ چون مجموعه $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ کلاً مرتب است، پس $\alpha_0 \in I$ وجود دارد که $v_1, \dots, v_n \in W_{\alpha_0}$ و لذا اگر $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ لذا استقلال خطی W_{α_0} نتیجه می‌شود که $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

پس اجتماع این ها W یک کران بالا برای $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ است، لذا طبق لم زرن

Σ یک عضو ماکسیمال دارد. این عضو ماکسیمال را B می نامیم.

ثابت می کنیم B پایه است زیرا اگر $\langle B\rangle \subsetneq V$ آنگاه $v\in V\setminus\langle B\rangle$ وجود دارد و از گزاره قبل داشتیم نتیجه می شود $B\cup\{v\}$ مستقل خطی است که با ماکسیمال بودن B در تناقض است. ■

گزاره:

فرض کنیم W یک زیرمجموعه مستقل خطی از V باشد آنگاه پایه B از V وجود دارد که شامل W باشد. به عبارت دیگر هر زیرمجموعه مستقل خطی از یک فضا را می توان به یک پایه فضا بسط داد.

اثبات:

لم زورن را برای مجموعه زیر با رابطه شمول بنویسید

$\Sigma = \{A\subseteq V \mid W\subseteq A,\ A$ مستقل خطی باشد $\}$

(تمرین)

لم:

فرض کنید V یک فضای برداری باشد، $v_1,\dots,v_n \in V$ بردارهای متمایز ناصفر باشند. در این صورت مجموعه v_1 تا v_n وابسته خطی است اگر و تنها اگر $\exists\, 2\le k\le n$

$v_k\in\langle v_1,\dots,v_{k-1}\rangle$

اثبات:

$(\longrightarrow)$ بدیهی است زیرا اگر $v_k\in\langle v_1,\dots,v_{k-1}\rangle \subseteq \langle v_1,\dots,\hat{v}_k,\dots\rangle$ آنگاه مجموعه مورد نظر وابسته خطی است.

($\Leftarrow$) فرض کنیم $\{v_1, \dots, v_n\}$ وابسته خطی باشد، پس ضرایب $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ وجود دارند که

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

ولی تمام ضرایب صفر نیستند. فرض کنید k بزرگترین اندیس باشد که در ترکیب خطی فوق $\alpha_k \neq 0$، در این صورت قطعاً $k \neq 1$ زیرا اگر $k = 1$ داریم

$$\alpha_1 v_1 = 0 \xrightarrow{v_1 \neq 0} \alpha_1 = 0 \quad \times$$

چون $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$ پس $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$

$$\Rightarrow v_k = -\alpha_k^{-1} (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1})$$

$$\Rightarrow v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle \quad \blacksquare$$

لم: اگر $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک زیرمجموعه‌ی مستقل خطی V و $\{w_1, \dots, w_m\}$ یک مولد V باشد آنگاه $m \geq n$

اثبات: مجموعه‌ی $\{v_1, w_1, \dots, w_m\}$ وابسته خطی است، پس با استفاده از لم قبل وجود دارد $1 \leq i \leq m$ به طوری که $w_i \in \langle v_1, w_1, \dots, w_{i-1} \rangle$ پس $\{v_1, w_1, \dots, \hat{w}_i, \dots, w_m\}$ نیز یک مولد V است. با ادامه روند فوق $\{v_1, v_2, w_1, \dots, \hat{w}_i, \dots, w_m\}$ وابسته خطی است. پس با استفاده از لم قبل مجدداً یکی از اعضای این مجموعه توسط قبلی‌ها تولید می‌شود و چون $\{v_2, v_1\}$ مستقل خطی‌اند پس عضو مذکور یکی از اعضای w باقی‌مانده است. با ادامه این روند اگر بار mام حذف $n > m$ ... پس از m مرحله تمام wها از مجموعه حذف شده‌اند. در نتیجه داریم $\{v_m, \dots, v_1\}$ این مجموعه مولد است پس در نتیجه $\{v_1, \dots, v_m, \dots, v_n\}$ وابسته خطی است $\times$. $\blacksquare$

③

← ~~صفحه 46~~
← ~~" 51~~
← صفحه 55
← " 57 *

← ~~[illegible]~~
← سؤال کوئیز ② + نمونه + TA حل جلسه قبل

نتیجه:

← اگر V یک فضای برداری باشد و $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایه‌ی V باشد، آنگاه هر پایه‌ی V متناهی است.

اثبات: با توجه به لم قبل هر زیرمجموعه‌ی V که بیش از تعداد اعضای مجموعه‌ی مولد B عضو داشته باشد نمی‌تواند مستقل خطی باشد. پس هر زیرمجموعه‌ی مستقل خطی و لذا هر پایه‌ی V حداکثر n عضو دارد. ∎

← اگر V یک فضای برداری و $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ و $B_2=\{w_1,\dots,w_n\}$ پایه‌ی V باشند آنگاه $n=m$.

(اثبات: هر بار یکی را مستقل خطی و دیگری را پایه بگیریم.)

تعریف:

با توجه به نتیجه فوق اگر V یک فضای برداری باشد و یک پایه‌ی n عضوی داشته باشد، هر پایه‌ی آن نیز n عضوی است که این عدد را بعد V می‌نامیم و با $\dim V$ نمایش می‌دهیم.

* بعد فضای برداری $\{0\}$ را برابر صفر قرار داده می‌کنیم، همچنین اگر V پایه‌ی متناهی نداشته باشد، گوییم V بعد نامتناهی است.

$\langle \emptyset \rangle = \{0\}$

مثال. بعد فضای F^n روی میدان F:

$\dim(F^n) = n$

مثال. بعد فضای برداری ماتریس‌های بالامثلثی در $M_n(F)$ روی میدان F:

$\dim V = n+(n-1)+(n-2)+\dots+1$

$\dim(W) = \frac{n(n+1)}{2}$

تمرین تحویلی. مجموعه‌ی ماتریس‌های متقارن زیرفضایی از $M_n(\mathbb{R})$ است، یک پایه و بعد این فضا را مشخص کنید.

تمرین تحویلی. میدان F را با جمع و ضرب معمولی ماتریس‌ها به شکل زیر در نظر بگیرید.

$$F = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq M_n(\mathbb{R})$$

ثابت کنید $M_n(\mathbb{R})$ یک فضای برداری روی میدان فوق است و یک پایه برای آن مشخص کنید.

$$B = \{A_1, \dots, A_m\}$$

$$A = \lambda A_1 + \dots + \lambda_m A_m$$

تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری باشد و $W_1, \dots, W_n$ زیرفضاهای آن باشند. تعریف می‌کنیم:

$$W_1 + \dots + W_n = \{u_1 + \dots + u_n \mid u_i \in W_i \quad i = 1, \dots, n\}$$

تمرین ثابت کنید

$$\boxed{W_1 + \dots + W_n = \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} W_i \right\rangle}$$

نتیجه: حاصل جمع زیرفضاها خود زیرفضا است.

تمرین تحویلی. فرض کنید W_1, W_2 زیرفضاهای V باشند. $W_1 \cup W_2$ یک زیرفضای V است اگر و تنها اگر $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$.

قضیه: فرض کنیم V یک فضای برداری باشد و W_1, W_2 دو زیرفضای V با بعد متناهی باشند. آنگاه

$$\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2)$$

اثبات: فرض کنیم: $\dim W_1 = n$, $\dim W_2 = m$, $\dim(W_1\cap W_2)=t$

فرض کنید $\{u_1,\dots,u_t\}$ یک پایه برای $W_2\cap W_1$ باشد [پس می‌توان آن را به یک پایه] *ادامه:

پایه‌ی $\{u_1,\dots,u_t,v_1,\dots,v_{n-t}\}$ از W_1 و همچنین $B_2=\{u_1,\dots,u_t,w_1,\dots,w_{m-t}\}$ از W_2

B_1

[توسعه داد.] ثابت می‌کنیم $\{u_1,\dots,u_t,v_1,\dots,v_{n-t},w_1,\dots,w_{m-t}\}$ یک پایه‌ی W_1+W_2 است.

استقلال خطی:

$$\sum_{i=1}^{t}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{n-t}\beta_i v_i+\sum_{i=1}^{m-t}\gamma_i w_i=0 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{\sum \alpha_i u_i+\sum\beta_i v_i}_{\in W_1}=\underbrace{\sum -\gamma_i w_i}_{\in W_2}\right)$$ *ادامه:

$$\Rightarrow \sum(-\gamma_i)w_i\in W_1\cap W_2$$

پس وجود دارند $\mu_1,\dots,\mu_t$ به طوری که،

$$\sum(-\gamma_i)w_i=\sum_{i=1}^{t}\mu_i u_i$$

$$\Rightarrow \sum \mu_i u_i+\sum\gamma_i w_i=0$$

چون ترکیب خطی فوق صفر $\{u_i\},\{w_i\}$ یک پایه برای W_2، لذا مستقل خطی هستند، پس $\forall i\ \gamma_i=0$, $\forall i\ \mu_i=0$ پس با جایگذاری در $(*)$ داریم:

$$\sum \alpha_i u_i + \sum \beta_i v_i = 0$$

یعنی یک ترکیب خطی از اعضای پایه‌ی W_1 صفر شده است، پس

$\forall i \ \alpha_i = 0 \ , \ \forall i \ \beta_i = 0$

پس B مستقل خطی است و به سادگی با توجه به تعریف (+) می‌توان فهمید مولد نیز است. □

گزاره: فرض کنیم V یک فضای برداری و $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایه‌ی آن باشد. آنگاه برای هر $v \in V$ اسکالرهای $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ به طور یکتا وجود دارند که $v=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n$

اثبات یکتایی:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$$

$$\Rightarrow (\alpha_1-\beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n-\beta_n)v_n = 0 \longrightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \forall i \ ■$$

منظور از یک پایه‌ی مرتب، یک پایه از فضای برداری است که یک ترتیبی روی اعضای آن در نظر گرفته شده است، یا به عبارت دیگر یک پایه‌ی مرتب یک دنباله از اعضای مستقل خطی فضا است که مولد فضا نیز باشد.

اگر $\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایه‌ی مرتب باشد، $v \in V$، و $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ اسکالرهایی باشند که $v=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n$ آنگاه $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in F^n$ را مختصات v نسبت به پایه‌ی مرتب B می‌نامیم.

مثال. فضای برداری $\mathbb{R}^3$ و $B_1=\{i,j,k\}$ ، $B_2=\{i+j, i+k, i\}$ ، $v=(1,2,3)$

$$(1,2,3) = \alpha(i+j) + \beta(i+k) + \gamma i \Rightarrow \overset{\text{دستگاه}}{\cdots} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \\ \gamma = -4 \end{cases}$$

پس $2, 3, -4$ مختصات v نسبت به پایه‌ی B_2 است.

ماتریس گذار از یک پایه به پایه‌ی دیگر:

فرض کنیم $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ و $C=\{w_1,\dots,w_n\}$ دو پایه‌ی مرتب فضای V باشند.

$$w_1=\alpha_{11}v_1+\dots+\alpha_{1n}v_n$$

$$\vdots$$

$$w_n=\alpha_{n1}v_1+\dots+\alpha_{nn}v_n$$

ماتریس $P=(\alpha_{ij})^t$ را در نظر بگیرید، فرض کنیم $v\in V$ با مختصات $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ نسبت به پایه‌ی C را داریم. پس

$$v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}v_j\Big)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\alpha_{ij}\Big)}_{\text{مختصات نسبت به پایه‌ی } B}v_j \qquad (*)$$

پس مختصات نسبت به B همان $P\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ است، P را ماتریس گذار از پایه‌ی C به پایه‌ی B نام دارد.

مهم

تمرین: ماتریس گذار از B_1 به B_2 و یکبار ماتریس گذار B_2 به B_1 را در مثال فوق بیابید.

ماتریس P یک ماتریس معکوس پذیر است [در واقع کافی است نشان دهیم دستگاه $PX=0$ جواب منحصر به فرد دارد] برهان خلف: فرض کنیم $P\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=0$ و $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\neq 0$ در این صورت

با استفاده از رابطه (*) داریم $\sum \alpha_i w_i = 0$ (مستقل خطی) در حالی که تمام α_i ها صفر نیستند. ※ *ادامه:

پس ماتریس گذار از C به B معکوس پذیر است و اگر $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ مختصات نسبت به پایه C و $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ مختصات نسبت به B باشند، آنگاه داریم:

$$P\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

بنابراین P^{-1} ماتریس گذار از B به C است.

مثال. اگر P ماتریس گذار از پایه‌ی B به خودش باشد برابر I_n می‌شود.

گزاره: فرض کنید V یک فضای برداری و $C=\{w_1,\dots,w_n\}$ یک پایه‌ی آن باشد. اگر $P\in M_n(F)$ یک ماتریس معکوس پذیر باشد، پایه‌ی یکتای B وجود دارد که P ماتریس گذار از C به B است.

اثبات تمرین تحویلی.

تمرین:

اگر V یک فضای برداری و $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایه‌ی آن باشد، $\alpha\in F$ فرض کنید v و w دو عضو V با مختصات $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ و $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ آنگاه مختصات $\alpha v+w$ برابر $\alpha(\alpha_1,\dots,\alpha_n)+(\beta_1,\dots,\beta_n)$ است.

تعریف :

اگر $A\in M_{m\times n}(F)$ و سطرهای A را با $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in F^n$ نمایش دهیم

زیرفضای تولید شده توسط $\langle \alpha_1,\dots,\alpha_n\rangle \subseteq F^n$ را فضای سطری

ماتریس A می‌نامیم.

به طور مشابه زیرفضای تولید شده توسط ستون‌های A در F^m را فضای ستونی می‌نامیم

* تذکر : اگر با استفاده از عملیات سطری مقدماتی ماتریس B را از روی A بسازیم، فضای

سطری تغییر نمی‌کند.

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&0\\3&6&1\\4&8&1\end{pmatrix}$$

فضای سطری $A = \langle (1,2,1),(2,4,0),(3,6,1),(4,8,1)\rangle \subseteq \mathbb{R}$

تحویل یافته سطری پلکانی $\longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \longrightarrow$ دو سطر ناصفر دارد $\longrightarrow$ بعد فضا برابر 2 است

امتحان میان ترم ✕

نسخه تکمیلی

آزمون مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

مدت آزمون: ۸۰ دقیقه

۱- فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$ و $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط باشد. ثابت کنید مجموعه مقادیر ویژه $P(A)$ برابر است با

$$\{P(\lambda) \mid \lambda \text{ مقدار ویژه‌ی } A \text{ باشد}\}$$

۲- فضای برداری $\mathbb{R}^2$ روی $\mathbb{R}$ را درنظر بگیرید.

الف) زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ مثال بزنید که تحت جمع بسته باشد ولی تحت ضرب اسکالر بسته نباشد.

ب) آیا $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$ یک زیرفضای $\mathbb{R}^2$ است؟

۳- ثابت کنید تنها ماتریس وارون‌پذیر خودتوان، ماتریس همانی است.

۴- فرض کنید $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایه فضای برداری V روی F باشد و $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in F$ ناصفر باشند. ثابت کنید $C=\{\lambda_1 v_1,\dots,\lambda_n v_n\}$ نیز یک پایه V است و موارد زیر را مشخص کنید:

الف) ماتریس گذار از پایه مرتب B به C؟

ب) مختصات بردار $w=v_1+\dots+v_n$ نسبت به هر دو پایه

۵- فرض کنید $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ ناصفر باشند، A متقارن و B پادمتقارن باشد. ثابت کنید $\{A,B\}$ مستقل خطی است.

۶- فرض کنید $A_1,\dots,A_m\in M_n(\mathbb{R})$ و همچنین فرض کنید بردار ناصفر $Y\in\mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد که $A_1Y=\dots=A_mY=0$. ثابت کنید $\{A_1,\dots,A_m\}$ نمی‌تواند مولد $M_n(\mathbb{R})$ باشد.

نگاشت خطی:

تعریف: فرض کنیم W, V دو فضای برداری روی میدان F باشند و $T: W \longrightarrow V$ یک تابع باشد، گوییم T یک نگاشت خطی است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

(1) $\forall v, w \in V \quad T(v+w) = T(v) + T(w)$

(2) $\forall u \in V \ , \ \forall \alpha \in F \quad T(\alpha w) = \alpha T(v)$

تمرین: اگر $T: V \longrightarrow W$ نگاشت خطی باشد، آنگاه:

i) $T(0_V) = 0_W$

ii) $T(-v) = -T(v) \quad \forall v \in V$

مثال. نگاشت همانی $id_V : V \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی است.

مثال. نگاشت ثابت $T: V \longrightarrow V$، $v \longmapsto 0_V$ (تنها نگاشت ثابت) خطی است.

مثال. $T: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$، $A \longmapsto tr(A)$ خطی است.

مثال. فرض کنیم V یک فضای برداری روی F، $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه‌ی آن باشد تابع را به شکل زیر در نظر بگیرید که در آن برای $v \in V$، $T(v)$ مختصات v نسبت به B_F باشد: $T: V \longrightarrow F^n$، $u \longmapsto T(v)$، T نگاشت خطی است.

مثال. اگر $C'(\mathbb{R})$ مجموعه‌ی توابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ باشد، آنگاه

$$D: C'(\mathbb{R}) \longrightarrow C'(\mathbb{R})$$
$$f(x) \longmapsto f'(x)$$

خطی است.

گزاره: (توصیه می‌کنم آنقدر گزاره‌ی ضعیفی است که اثبات آن هم بدیهی و ساده است.)

فرض کنیم V و W فضای برداری و $B = \{V_1, \dots, V_n\}$ پایه‌ای برای V باشد، اگر $w_1, \dots, w_n$ بردارهایی از W باشند که لزوماً متمایز نیستند، آنگاه تنها یک نگاشت خطی یکتای $T(v_i) = w_i$ با $i = 1, \dots, n$

اثبات:

اگر $v \in V$، می‌دانیم اسکالرهای یکتای $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ وجود دارند که

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

در این صورت (با توجه به ویژگی نگاشت خطی) داریم:

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n \qquad \blacksquare$$

تعریف: فرض کنیم $T: V \to W$ یک نگاشت خطی باشد، هسته T را $\ker T$ نشان می‌دهیم و برابر است با

$$\ker T = \{v \in V \mid T(v) = 0\} \subseteq V$$

و تصویر T را با $\operatorname{Im} T$ نشان داده‌ایم.

$$\operatorname{Im} T = \{T(v) \in W \mid v \in V\} \subseteq W$$

گزاره: اگر $T: V \to W$ خطی باشد $\ker T$ زیرفضای V، و $\operatorname{Im} T$ زیرفضای W است.

اثبات:

اولاً $0 \in \ker T$ پس $\ker \neq \emptyset$

$$\text{if } v_1, v_2 \in \ker T \rightarrow T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2) = 0$$

$$\rightarrow \alpha v_1 + v_2 \in \ker T$$

تعریف:

اگر $T: V \rightarrow W$ نگاشت خطی باشد بعد $\operatorname{Im} T$ را با $\operatorname{rank} T$ نمایش می‌دهیم و رتبه T می‌نامیم.

$$\dim \operatorname{Im} T = \operatorname{rank} T$$

قضیه:

فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ نگاشت خطی باشد گزاره‌های زیر معادلند:

I) T یک به یک است.

II) $\ker T = \{0\}$

III) T هر زیرمجموعه مستقل خطی در V را به یک زیرمجموعه مستقل خطی در W تصویر کند.

اثبات:

(1→2) فرض کنیم $v \in \ker T$، $T(v) = 0$ از طرفی $T(0) = 0$ پس چون T یک به یک است داریم، $v = 0$

(2→1) فرض کنیم:

$$T(v_1) = T(v_2) \rightarrow T(v_1) - T(v_2) = T(v_1 - v_2) = 0$$

$$\rightarrow v_1 - v_2 \in \ker T \rightarrow v_1 - v_2 = 0 \rightarrow v_1 = v_2$$

(3⟵2) فرض کنیم $\{V_1, \dots, V_r\}$ در V مستقل خطی باشند، می‌خواهیم نشان دهیم $\{T(V_1), \dots, T(V_r)\}$ مستقل خطی است: (*فرض و حکم را مشخص کن با داده‌ها!!)

$$\alpha_1 T(V_1) + \dots + \alpha_r T(V_r) = 0 \rightarrow T(\alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_r V_r) = 0$$

$$\rightarrow \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_r V_r \in KerT = \{0\} \rightarrow \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_r V_r = 0 \rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$$

(2⟵3) برهان خلف فرض کنیم $0 \neq V \in KerT$ پس $T(V) = 0$

$\{V\}$ مستقل خطی است در حالی که $\{T(V)\}$ مستقل خطی نیست. ※

■

قضیه: اگر $T: V \longrightarrow W$ تبدیل خطی باشد، V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، آنگاه:

$$\dim V = \dim KerT + \underbrace{\dim ImT}_{RankT}$$

اثبات:

فرض کنیم $\{V_1, \dots, V_r\}$ یک پایه برای $KerT$ می‌توان آن را به یک پایه V مانند $\{V_1, \dots, V_r, \dots, V_n\}$ توسعه داد. ادعا می‌کنیم $\{T(V_{r+1}), \dots, T(V_n)\} = B$ یک پایه برای ImT است. ممکن است در حل مسائل کاربرد داشته باشد.

اولاً B مولد است، زیرا برای هر عضو $T(V) \in ImT$ داریم: $V = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_n V_n$ *

$$T(V) = T(*) = \underbrace{\alpha_1 T(V_1) + \dots + \alpha_r T(V_r)}_{0} + \dots + \alpha_n T(V_n)$$

استقلال خطی B فرض کنیم:

$$\alpha_{r+1} T(V_{r+1}) + \dots + \alpha_n T(V_n) = 0$$

$$\rightarrow T(\alpha_{r+1} V_{r+1} + \dots + \alpha_n V_n) = 0 \rightarrow \alpha_{r+1} V_{r+1} + \dots + \alpha_n V_n \in KerT$$

و $\{V_1, \dots, V_r\}$ پایه $KerT$ است لذا ضرایب $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ وجود دارد که $\alpha_{r+1}V_{r+1} + \dots + \alpha_n V_n = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_r V_r$

$\rightarrow \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r - \alpha_{r+1} v_{r+1} - \cdots - \alpha_n v_n = 0$

استقلال خطی $\{v_1, \dots, v_n\}$ $\rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ ■

$\{v_1, \dots, v_n\}$ $\dim \ker T = 1$ $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $B = \{v_1, v_2\}$

$(a,b) \longmapsto (a,0)$

$\ker T = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a,0) = (0,0)\} = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\} \rightarrow \dim \ker T = 1$

نکته:

فرض کنیم $T: V \longrightarrow V$ تبدیل خطی است، آنگاه یک به یک است (اگر و تنها اگر) آنگاه پوشا باشد (اگر V متناهی) $\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$

تمرین: اگر $T: V \longrightarrow W$ ایزومورفیسم باشد $T^{-1}: W \longrightarrow V$ نیز ایزومورفیسم است.

تعریف:

اگر $T: V \longrightarrow W$ خطی یک به یک و پوشا باشد گوییم آنگاه یک نگاشت (ایزومورفیسم) می‌باشد، فضای V و W را ایزومورف یا یکسان می‌نامیم می‌نامیم

مثال. 1. $id: V \longrightarrow V$

2. $T: M_{m,n}(F) \longrightarrow M_{n,m}(F)$

$A \longmapsto A^t$

3. اگر B یک ماتریس باشد، نگاشت خطی $T: M_n(F) \longrightarrow M_n(F)$ ایزومورفیسم

$A \longmapsto AB$

است اگر و تنها اگر B معکوس پذیر باشد.

گزاره: اگر V, W فضاهای برداری ایزومورف از بعد متناهی باشند، آنگاه $\dim V = \dim W$.

اثبات. فرض کنیم $T: V \longrightarrow W$ یک ایزومورفیسم باشد.

$$\dim V = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} T}_{\substack{1\text{-}1 \,\|\\ 0}} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} T}_{\substack{\text{onto} \,\| \\ \dim W}}$$

گزاره: اگر V و W فضاهای برداری (با بعد متناهی) روی F باشند و $\dim V = \dim W$، آنگاه V, W ایزومورفند.

اثبات. فرض کنیم $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای از V باشد و $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ پایه‌ای از W باشد. * ایده: تعریف نگاشت خطی

$$T: V \longrightarrow W, \quad v_i \longmapsto w_i \quad i = 1, \dots, n$$

در این صورت اگر $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ داریم $T(v) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$. خوش‌تعریفی و خطی بودن T ساده است.

اثبات یک به یک بودن: فرض کنیم $v \in \operatorname{Ker} T$، فرض کنیم $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$$0 = T(v) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n \xrightarrow{\text{استقلال خطی } C} \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \Longrightarrow v = 0$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Ker} T = \{0\} \quad \blacksquare$$

تمرین: فرض کنیم $T: V \to W$ نگاشت خطی باشد، ثابت کنید T پوشا است اگر و تنها اگر هر مولد V را به مولد W ببرد.

نتیجه: فرض کنیم $T: V \to W$ نگاشت خطی باشد، T ایزومورفیسم است اگر و تنها اگر هر پایه V را به پایه‌ای از W ببرد.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & W \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

ماتریس نگاشت‌های خطی:

فرض کنیم V, W فضاهای برداری روی F با بعد به ترتیب m, n باشند، $T: V \to W$ یک نگاشت خطی باشد، اگر $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ پایه‌ای از V و $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ پایه‌ای از W باشند، می‌توان ضرایب α_{ij} را به شکل زیر یافت:

$$\begin{cases} T(v_1) = \alpha_{11} w_1 + \dots + \alpha_{1n} w_n \\ \vdots \\ T(v_m) = \alpha_{m1} w_1 + \dots + \alpha_{mn} w_n \end{cases}$$

ماتریس $P = (\alpha_{ij})^t$ را ماتریس نگاشت خطی نسبت به پایه‌های B, C می‌نامیم و با $M(T, B, C)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم مختصات یک بردار $v \in V$ را نسبت به پایه‌ی B با $[V]_B$ نمایش می‌دهیم،
آنگاه:

$$[T(v)]_C = \underbrace{M(T, B, \vec{C})}\, [V]_B$$

* ماتریس نگاشت است که یک بردار از B می‌گیرد و چیزی که نگاشت در طرف دیگر نشان می‌دهد را به ما می‌دهد.

$$\overbrace{V}^{T(\sum \beta_i V_i)} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i T(V_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \beta_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} w_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha_{ij}\right)}_{(\alpha_{ij})^t \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}}_{[T(V)]_C} w_j$$

* به اثبات دقت کن مفهوم را می‌رساند، ساده است، سوالاتش هم که بلدی حل کنی.

مثال. فرض کنید $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \longmapsto (3x+y,\ x-y+z,\ 0)$$

$B = \{i, i+j, i+j+k\}$ ، $C = \{i, j, k\}$ ،

$$M(T, B, C) = ?$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \overbrace{T(i)}^{T(V_m)} = T(1,0,0) = (3,1,0) & = & \overbrace{3i + 1j + 0k}^{\alpha_{ij} w_n} \\ T(i+j) = T(1,1,0) = (4,0,0) & = & 4i + 0j + 0k \\ T(i+j+k) = T(1,1,1) = (4,1,0) & = & 4i + 1j + 0k \end{array}\right.$$

T بعد

* دقت کن پایه‌ی B را از چپ C نوشتیم
لذا مختصات B به C را دادیم.

$$\Longrightarrow M(T, B, C) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$[i+j]_B = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $M(T,B,C)\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{[V]_B} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$ $[T(V)]_C$

از طرفی $T(i+j) = (4,0,0) = [T(i,j)]_C$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rrr] \arrow[d] & & & T(V) \\
& V \arrow[r, "T"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & W \arrow[d, phantom, "\cong"] & \\
& F^m \arrow[r] & F^n & \\
{[V]_B} \arrow[rrr, mapsto] & & & M(T,B,C)[V]_B \arrow[uuu]
\end{tikzcd}$$

پایه‌اش B ، پایه‌اش C

$M(T,B,C)[V]_B = [T(V)]_C$

* شکل مهم است، ساده ولی بسیار مفهومی و مهم!

مثال. اگر نگاشت $id: V \longrightarrow V$ همانی باشد، و $\dim V<\infty$، B و C دو پایه‌ی باشند، $M(id,B,C)$ همان گذار از B به C است.

مثال. اگر $A\in M_{m,n}(F)$، $T_A: F^n \longrightarrow F^m$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

ماتریس این نگاشت نسبت به پایه‌های کانونیک F^n و F^m را بدست آورید.

ماتریس A بدست می‌آید.

$T_A(e_1) = \dots \quad T(e_1)+\dots+T(e_n)$

$\vdots$

$T_A(e_n) =$

ماتریس نمایش خطی:

$T: V \longrightarrow W$

V پایه: $B=\{v_1,\dots,v_n\}$

W پایه: $C=\{w_1,\dots,w_n\}$

$v \longmapsto T(v)$

$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} \in F^n \longmapsto M(T,B,C)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \in F^m$

$T(v_1)=\alpha_{11}w_1+\dots+\alpha_{1m}w_m$

$\vdots$

$T(v_n)=\alpha_{n1}w_1+\dots+\alpha_{nm}w_m$

$M(T,B,C):=(\alpha_{ij})^t$

قضیه: فرض کنیم V و W دو فضای برداری با بعد m، n باشند و B، C به ترتیب پایه‌هایی از آن دو باشند، آنگاه تابع زیر یک (ایزومورفیسم) است.

$$\varphi: \mathcal{L}(V,W) \longrightarrow M_{n,m}(\mathbb{F})$$
$$T \longmapsto M(T,B,C)$$

اثبات. (خطی بودن) φ ساده است.

(یک به یک بودن) φ، فرض کنیم

می‌دانیم برای $v\in V$

$\varphi(T)=M(T,B,C)=0$

$[T(v)]_C = M(T,B,C)[v]_B$

$= 0\,[v]_B = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

(یعنی مختصات بردار $T(v)$ برابر صفر است)

$\Rightarrow T(v)=0 \quad \forall v\in V \Rightarrow T=0 \Rightarrow (\ker\varphi=\{0\}) \Rightarrow 1\text{-}1$

ادامه*

(پوشایی) فرض کنیم $A\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ می‌خواهیم نگاشت خطی $T:V\to W$ را چنان بیابیم که $(M(T,B,C)=A)$ ایده*

برای این منظور $i=1,\dots,m$ قرار می‌دهیم

* هر چیزی را می‌خواهیم توصیف.

$$M(T,B,C)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{1i}\\ \vdots\\ \alpha_{ni}\end{pmatrix}$$

درایه‌ی iام

پس $\begin{pmatrix}\alpha_{1i}\\ \vdots\\ \alpha_{ni}\end{pmatrix}$ همان مختصات $T(w_i)$ است نسبت به پایه‌ی C می‌باشند یعنی

اگر $C=\{w_1,\dots,w_n\}$ داریم

$$T(w_i)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}w_j$$

چون T روی هر عضو پایه مشخص شده است، پس ضابطه‌ی T به طور کامل با توجه به خطی بودن مشخص می‌شود. ■

*نکته: اگر V از بعد m و W از بعد n باشد آنگاه،

$$\dim L(V,W)=\dim L(W,V)=mn$$

قضیه: اگر $T:V\to W$ ، $S:W\to Y$ نگاشت‌های خطی باشند، B,C,D به ترتیب پایه‌های V,W و Y باشند و فرض کنیم این فضاها از بعد متناهی باشند آنگاه

$$M(S\circ T,B,D)=M(S,C,D)M(T,B,C)$$

اثبات: فرض کنید $v\in V$ ، از قبل می‌دانیم:

$$(T(v))_C=M(T,B,C)[v]_B$$

$(S(T(v)))_D = M(S,C,D)\,[T(v)]_C$

$\overset{\text{جایگذاری}}{=} M(S,C,D)\,M(T,B,C)\,[v]_B$

از یکتایی ماتریس نگاشت خطی $S\circ T$ نسبت به پایه‌های B، D نتیجه می‌شود، لذا

$$M(S,C,D)\,M(T,B,C) = M(S\circ T, B, D)$$

نتیجه: اگر V و W فضاهای برداری با بعد n و $T: V \longrightarrow W$ نگاشت خطی باشد، T ایزومورفیسم است اگر و تنها اگر برای هر پایه‌ی B, C از V, W ماتریس $M(T,B,C)$ معکوس پذیر باشد.

اثبات: فرض کنید T ایزومورفیسم باشد، پس نگاشت خطی $T^{-1}: W \longrightarrow V$ را داریم،

$$I_n = M(id, B, B) = M(\overset{*\text{ادعا}}{T^{-1}\circ T}, B, B) = M(T^{-1}, C, B) \times M(T, B, C)$$

پس $M(T,B,C)$ معکوس پذیر است، برعکس فرض کنیم $M(T,B,C)$ معکوس پذیر باشد، از قضیه‌ای که داشتیم (با توجه به ایزومورفیسم بودن φ) یک نگاشت خطی $S: W \longrightarrow V$ وجود دارد که $M(T,B,C) = (M(S,C,B))^{-1}$، پس

*ادعا

$$I_n = M(T,B,C)\,\underset{\text{ضرب ماتریس‌ها}}{\cdot}\,M(S,C,B)$$

$$\Rightarrow M(T\circ S, C, C) = I_n$$

پس $T\circ S = id_W$، به طور مشابه $S\circ T = id_V$ ثابت می‌شود. ∎

~~کجا به تعریف isomo رسیدیم؟~~

تابع هم وارون چپ دارد و هم راست لذا isomo است.

نمادگذاری:

اگر $T:V\to V$ خطی باشد، B یک پایه‌ی V باشد، معمولاً به جای نماد $M(T,B,B)$ از نماد $M(T,B)$ استفاده می‌کنیم.

نتیجه (از قضیه‌ی قبل):

اگر $T:V\to V$ خطی باشد، B یک پایه‌ی V باشد، $\dim V<\infty$، آنگاه T ایزومورفیسم است اگر و تنها اگر $M(T,B)$ معکوس‌پذیر باشد. در این صورت:

$$M(T^{-1},B)=M(T,B)^{-1}$$

اثبات. کافی است قرار دهیم $V=W$ و $B=C$ لذا داریم:

$$M(T,B)M(T^{-1},B)=M(T\circ T^{-1},B)=M(id,B)=I_n$$

نمادگذاری:

فرض کنیم B، B' پایه‌هایی از فضای برداری V با بعد متناهی باشد، ماتریس گذار از B به B' را با $P^{B}_{B'}$ نمایش دهیم.

$M(id,B,B')$

نتیجه: اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی و B، B' دو پایه‌ی آن باشند، $T:V\to V$ خطی باشد آنگاه:

$$M(T,B')=P^{B}_{B'}M(T,B)P^{B'}_{B}$$

شهود:

$$V, B'\text{ پایه} \longrightarrow V, B\text{ پایه} \xrightarrow[T]{M(T,B)} T(V), B\text{ پایه} \longrightarrow T(V), B'\text{ پایه}$$

$\underset{T}{M(T,B')}$ ایده*:

اثبات ۱:

$$M(T,B')=M(\boxed{id\circ T\circ id},B')=$$
$$M(id,B,B')M(T,B)M(id,B',B)=P^{B}_{B'}M(T,B)P^{B'}_{B}$$

اثبات ۲:

$(T(v))_{B'}=M(T,B')(v)_{B'}$ $\qquad (v)_B$

$M(T,B,B')(T(v))_{B'}=M(T,B,B')M(T,B)I_n(v)_{B'}$

$(T(v))_B=M(T,B,B')M(T,B')M(T,B',B)\;M(T,B,B')(v)_{B'}$

بنابراین: $(T(v))_B=M(T,B)(v)_B$، $M(T,B)$، $M(T,B)M(T,B')$

تعریف: ماتریس $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ را متشابه نامیم هرگاه ماتریس وارون‌پذیر $P\in M_n(\mathbb{F})$ وجود داشته باشد

$$A=P^{-1}BP$$

تمرین. رابطه‌ی تشابه بین ماتریس‌های $n\times n$ با درایه‌های $\mathbb{F}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

مثال. طبق قضیه‌ی فوق برای تبدیل خطی $T:V\to V$ و پایه‌های B ، B' داریم $M(T,B)=P_B^{B'}M(T,B')P_{B'}^{B}$
و چون $P_B^{B'}$ ، $P_{B'}^{B}$ معکوس یکدیگرند پس $M(T,B)$ ، $M(T,B')$ متشابه هم هستند

گزاره:

اگر A ، B دو ماتریس متشابه باشند آنگاه $tr(A)=tr(B)$

تعریف:

اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد و B یک پایه‌ی دلخواه آن باشد، $T:V\to V$ نیز یک تبدیل خطی باشد، رد تبدیل T را با $Tr(T)$ نمایش داده و تعریف می‌کنیم:

$$tr(T)=tr(M(T,B))$$

با توجه به گزاره‌ی فوق $tr(T)$ به پایه‌ی انتخاب شده وابسته نیست.

مثال. فرض کنید $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ، $(x,y)\longmapsto(3x-y,4y)$ مطلوب است $tr(T)$ ؟

$T(1,0)=(3,0)$

$T(0,1)=(-1,4)$

$$M(T,B)=\begin{bmatrix}3&-1\\0&4\end{bmatrix}$$

$$tr(T)=tr(M(T,B))=7$$

دوگان فضاهای برداری:

تعریف:

اگر V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. دوگان V را با V^* نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$V^*=L(V,\mathbb{F})$$

گزاره:

اگر $\dim V < \infty$ آنگاه $V \cong V^*$ زیرا

$$\dim V^* = \dim \mathcal{L}(V, \mathbb{F}) = \dim V \times \dim \mathbb{F} = \dim V \times 1$$

* لذا بنابر قضیه قبل ابعاد یکسان دارند (یکریخت‌اند).

فرض کنیم $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای از V باشد، پایه $B^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ از V^* را به شکل زیر تعریف کنیم و پایه دوگان B می‌نامیم.

$$f_i : V \longrightarrow \mathbb{F} \qquad f_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

اثبات: (استقلال خطی)

(فایده: چون ابعاد برابر است، با پایه‌ای مقدار اندازه آن امتحان کنیم)

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$$

$$(\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0)\, v_i \rightarrow \lambda_1 f_1(v_i) + \cdots + \lambda_i f_i(v_i) + \cdots + \lambda_n f_n(v_i) = 0$$

$$\rightarrow \lambda_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

چون i دلخواه بود لذا $\forall i \quad \lambda_i = 0$ پس B^* مستقل خطی است و چون به اندازه‌ی $\dim V^*$ عضو دارد پس پایه V^* است. ■

به نام او

۱- یک نگاشت خطی $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ معرفی کنید که برد آن زیرفضای تولید شده توسط

$\underset{\alpha_2}{(0,1,1)}$ و $\underset{\alpha_1}{(-1,4,-2)}$ باشد.

۲- فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی و $T: V \to V$ نگاشت خطی باشد که

$\operatorname{Im} T = \ker T$. ثابت کنید $\dim V$ عدد زوج است و مثالی از چنین نگاشتی بیاورید.

دوران ساده

۳- فرض کنید $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ نگاشت خطی با ضابطه $T(z_1, z_2) = (0, z_1)$ باشد.

B را پایه کانونیک $\mathbb{C}^2$ و C را پایه $\{(1,i), (-i,2)\}$ در نظر بگیرید. ماتریس‌های

$M(T,B,C)$ و $M(T,C,B)$ را بیابید.

۴- نگاشت خطی $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ را به شکل زیر در نظر بگیرید. آیا T معکوس‌پذیر است؟

$$T(x,y,z) = (2x,\ x-y+z,\ 2y-z).$$

۵- فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی و T یک نگاشت خطی از V به V باشد که

$\operatorname{rank} T = \operatorname{rank} T^2$. ثابت کنید $(\ker T) \cap (\operatorname{Im} T) = \{0\}$.

۶- اگر V یک فضای برداری n-بعدی و $T: V \to V$ یک نگاشت خطی باشد، ثابت کنید نگاشت

خطی $S: V \to V$ وجود دارد که

$n = \operatorname{rank} T + \operatorname{rank} S$ و $TS = 0$.

۷- فرض کنید T نگاشت خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ و U نگاشت خطی از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^n$ باشد و $n > m$.

ثابت کنید UT وارون‌پذیر نیست. چون dim با هم برابر است.

$\ker T = \ker T^2$

$T(u)=0 \quad \exists v\ T(v)=u \overset{*T}{\Longrightarrow} T(T(v)) = T(u)=0$

$u \in \ker T \cap \operatorname{Im} T \quad \Rightarrow v \in \ker T^2$

$u = T(v) = 0 \Rightarrow \ker T \cap \operatorname{Im} T = 0$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $\ker T = \ker T^2$

اگر ثابت کنیم $\ker T \subseteq \ker T^2$ ، $\ker T^2 \subseteq \ker T$

(I) $\ker T \subseteq \ker T^2$

$w \in \ker T \Rightarrow T(T(w)) = 0$

94/8/19

جلسه 16

۸- فرض کنید T عملگری خطی روی $\mathbb{R}^3$ باشد که ماتریسش در پایه‌ی کانونیک برابر است با:

ثابت کنید T نگاشت ... وارون پذیر است

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

پایه‌ای برای $Im\,T$ و $Ker\,T$ بیابید.

۹- فرض کنید T یک عملگر خطی روی V باشد که $Im\,T \subseteq Ker\,T$. ثابت کنید $T + id_V$ وارون پذیر است.

۱۰- فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، T و S عملگرهای خطی روی V باشند. ثابت کنید پایه‌های B و C از V وجود دارند که $M(T,B) = M(S,C)$ اگر و تنها اگر یک عملگر خطی معکوس پذیر U روی V وجود داشته باشد که $T = USU^{-1}$.

← linear maps problems

دوگان فضاهای برداری:

V فضای برداری روی $\mathbb{F}$ ، نگاشت خطی: $f: V \xrightarrow{\text{خطی}} \mathbb{F}$

دوگان V: $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$

$$\dim V < \infty \Rightarrow \dim V^* = \dim V \Rightarrow V^* \cong V$$

V	V^*
v	f
B	B^*
$f_i \in B^*$	$v_i \in B$
نظیر i ام	نظیر i ام

پایه V: $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$

$f_i : V \to \mathbb{F}$

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

فرض کنیم $v \in V$ با مختصات $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ نسبت به پایه B را داریم یعنی $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ لذا

$$f_i(v) = \alpha_1 f_i(v_1) + \dots + \alpha_i f_i(v_i) + \dots + \alpha_n f_i(v_n) = \boxed{\alpha_i}$$

فرض کنیم $f \in V^*$ با مختصات $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ نسبت به پایه B^* باشد یعنی

$$f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$$

$$f(v_i) = \lambda_1 f_1(v_i) + \dots + \lambda_i f_i(v_i) + \dots + \lambda_n f_n(v_i) = \boxed{\lambda_i}$$

مثال. $B=\{i,j,k\}$ $\mathbb{R}^3$

$f_1: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_1(i)=1$

$f_1(j)=f_1(k)=0$

$f_1(a,b,c)=f(ai+bj+ck)=a$

$f_2(a,b,c)=b \qquad f_3(a,b,c)=c$

دوگان دوّم فضای برداری:

$$V^{**}=(V^*)^*=L(V^*,\mathbb{F})$$

$$i: V \longrightarrow V^{**}$$

$$v \longmapsto i(v): V^* \longrightarrow \mathbb{F}$$

$$\underset{V \to \mathbb{F}}{T} \longmapsto T(v)=i(v)(T)$$

ادعا می‌کنیم i نگاشت خطی و یک به یک است:

$$i(v_1+v_2)(T)=T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)=i(v_1)(T)+i(v_2)(T)$$

$$i(v_1+v_2)=i(v_1)+i(v_2)$$

به طور مشابه $i(\alpha v)=\alpha i(v)$

یک به یک بودن i: فرض کنید برای $v\in V$ داریم: $i(v)=0$

$$\Rightarrow \forall \underset{V\to\mathbb{F}}{T}\in V^* \qquad i(v)(T)=T(v)=0$$

پس اگر یک پایه B و دوگان آن یعنی B^* را در نظر بگیریم با اثر دادن هر $f_i\in B^*$ متوجه می‌شویم که تمام مختصات v صفر است. لذا

$$\Rightarrow v=0$$

* نکته: اگر $\dim V<\infty$ آنگاه نگاشت ϕ یک ایزومورفیسم است.

<u>اثبات</u>: در این حالت چون $V \rightsquigarrow V^* \rightsquigarrow V^{**}$ ، $B \dashrightarrow D=B^* \rightsquigarrow D^*$ ، $\dim V=\dim V^*=\dim V^{**}$

پس از یک‌به‌یک بودن ϕ، پوشایی نیز نتیجه می‌شود.

تمرین: فرض کنیم $\dim V<\infty$ و فضای V^* را در نظر بگیرید، اگر D یک پایه دلخواه V^* باشد، می‌توان پایه B از V را چنان یافت که $D=B^*$

<u>راهنمایی</u>: V^{**} در این حالت با V ایزومورفیسم است، از طرفی می‌توان دوگان D یعنی D^* در V^{**} را یافت کنیم.

$$D^*=\{g_1,\dots,g_n\} \qquad D=\{f_1,\dots,f_n\} \Rightarrow g_i(f_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

می‌دانیم ϕ ایزومورفیسم است، پس پایه $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ ، V وجود دارد که $\phi(v_j)=g_j$

حال باید ثابت کنیم

$$f_i(v_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

تعریف: اگر $D\subseteq V$ ، $H\subseteq V^*$ قرار می‌دهیم.

$$D^\perp=\{f\in V^* \mid f(D)=\{0\}\}\subseteq V^* \longrightarrow$$

* fهایی که D در Ker آنها قرار دارد

$$H^\perp=\{v\in V \mid f(v)=0\ \ \forall f\in H\}\subseteq V$$

تمرین. اگر $D \subseteq V$، $H \subseteq V^*$ آنگاه $D^\perp$ زیرفضای V^* و $H^\perp$ زیرفضای V است.

$$\forall f_1, f_2 \in D^\perp, \ \alpha \in F$$

$$\forall u \in D \quad (\alpha f_1 + f_2)(u) = \alpha f_1(u) + f_2(u)$$

$$\Rightarrow \alpha f_1 + f_2 \in D^\perp$$

مثال.

$$\{0\} \subseteq V \rightsquigarrow \{0\}^\perp = V^*$$

$$V \subseteq V \rightsquigarrow V^\perp = \{0\}$$

$$\{0\} \subseteq V^* \rightsquigarrow \{0\}^\perp = V$$

$$V^* \subseteq V^* \rightsquigarrow (V^*)^\perp = \{0\}$$

توضیح

در واقع اگر $v \in (V^*)^\perp$ یعنی برای هر $T \in V^*$ داریم $T(v) = 0$ اما می‌دانیم وقتی $v \neq 0$ پس $\{v\}$ مستقل خطی است، لذا پایه‌ای از V وجود دارد که شامل v باشد و چون می‌توان اعضای پایه را به دلخواه مشخص کرد پس نگاشتی را در نظر بگیریم که $T(v) = 1$

* تعبیر. اگر $H \subseteq V^*$ آنگاه $H^\perp = \bigcap_{f \in H} \operatorname{Ker} f$

تمرین. اگر $D \subseteq V$ و $H \subseteq V^*$ آنگاه

$$D^\perp \overset{?}{=} (\langle D \rangle)^\perp$$

$$V \in H^\perp \overset{?}{=} (\langle H \rangle)^\perp$$

تمرین. اگر $A \subseteq B \subseteq V$ (یا V^*) آنگاه

$$B^\perp \subseteq A^\perp$$

[*مهم درک شود!!!]

یک مثال کامل!

1 از 2

$\mathbb{R}^3 \qquad B=\{(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2),(a_3,b_3,c_3)\}$

$(\mathbb{R}^3)^* \xrightarrow{\text{پایه}} D=\{f_1=2x-y,\ f_2=x+y,\ f_3=z\}$

$(\mathbb{R}^3)^{**} \qquad D^*=\{h_1,h_2,h_3\}$

$$(\mathbb{R}^3)^* = \left\{ T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; a,b,c\in\mathbb{R} \right\}$$
$$(x,y,z) \longmapsto ax+by+cz$$

$$h_i : (\mathbb{R}^3)^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h_1(2x-y)=1 \qquad h_1(x+y)=h_1(z)=0$$

$$h_1(ax+by+cz)$$
$$ax+by+cz = \lambda_1(2x-y)+\lambda_2(x+y)+\lambda_3(z)$$

$$i:\mathbb{R}^3 \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^{**}$$
$$v \longmapsto i(v) : (\mathbb{R}^3)^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$T \longmapsto T(v)$$

$i(v_1)=h_1$

$i(v_2)=h_2$

$i(v_3)=h_3$

ضابطه $i(v_1)$
$$\begin{cases} i(v_1)(f_1) = f_1(v_1)=1 \\ i(v_1)(f_2) = f_2(v_1)=0 \\ i(v_1)(f_2) = f_3(v_1)=0 \end{cases}$$

$i(v_1)=i(a,b,c)=h_1$

$$\begin{cases} 2a_1-b_1=1 \\ a_1+b_1=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow (a_1,b_1,c_1)=\left(\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},0\right)$$

$\{w_1, \dots, w_n\} =$ پایه ثابت $\qquad V^* \qquad V^{**}$

$B = \{u_1, \dots, u_n\} \overset{?}{=}$

$B^* = D = \{f_1, \dots, f_n\}$

$V_1 = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$

$$\begin{cases} f_1(v_1) = 1 \\ f_2(v_1) = 0 \\ \vdots \\ f_n(v_1) = 0 \end{cases}$$

* باید پایه توسیع
$v_1, \dots, v_n$ را جاگذاری و با استفاده از
$f_1, \dots, f_n$ آنها را محاسبه کنیم.

2 از 2

$\mathbb{R}^3$

$D: xoy$ صفحه $\in \mathbb{R}^3 \qquad B = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

$$D^\perp = \left\{ T: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{خطی}} \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto \alpha x + \beta y + \gamma z \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall a,b \in \mathbb{R} \\ \alpha a + \beta b = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto \gamma z \;\middle|\; \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$X \in (\mathbb{R}^3)^*$

$\{X\}^\perp = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid X(a,b,c) = a = 0\} = \{(0,b,c) \mid b,c \in \mathbb{R}\}$

$\{X,Y\}^\perp = \underbrace{(\ker X)}_{\text{صفحه } yoz} \cap \underbrace{(\ker Y)}_{\text{صفحه } xoz} =$ محور Z

یادآوری :

$D \subseteq V \qquad H \subseteq V^*$

$D^\perp = \{f \in V^* \mid f(D) = \{0\}\} \subseteq V^*$

$H^\perp = \{v \in V \mid f(v) = 0 \quad \forall f \in H\} \subseteq V$

قضیه: فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، اگر W زیرفضای V باشد، آنگاه:

(i) $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$

(ii) $W^{\perp\perp} = W$

اثبات. فرض کنیم $\{w_1, \dots, w_t\}$ یک پایه برای W باشد و $B = \{w_1, \dots, w_t, \dots, w_n\}$ توسیع آن به پایه‌ای برای V باشد. فرض کنیم $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ پایه دوگان B باشد.

* ایده: (I) ادعا می‌کنیم $\{f_{t+1}, \dots, f_n\}$ پایه‌ای برای $W^{\perp}$ است:

$f \in W^{\perp}$ را به دلخواه در نظر بگیرید، چون $f \in V^*$ پس $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ وجود دارد که

$$f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$$

(I) می‌دانیم $\lambda_i = f(w_i)$، یعنی

$$f = f(w_1) f_1 + \dots + f(w_t) f_t + \dots + f(w_n) f_n$$

می‌دانیم $f(w_1) = \dots = f(w_t) = 0$ زیرا $f \in W^{\perp}$ پس $f = f(w_{t+1}) f_{t+1} + \dots + f(w_n) f_n$

یعنی $\{f_{t+1}, \dots, f_n\}$ مولد $W^{\perp}$ هستند و چون مستقل خطی هستند پس پایه این فضا هستند.

* ایده: (I) (ii) (فضای برداری V^* و زیرفضای $W^{\perp}$ آن را در نظر بگیرید) پس با استفاده از (i) داریم

$$\dim W^{\perp} + \dim W^{\perp\perp} = \dim V^* = \dim V$$

از طرفی

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$$

پس

$$\dim W^{\perp\perp} = \dim W$$

(II) به علاوه $W \subseteq W^{\perp\perp}$ (در تمرین) این مطلب اگر پایه W و $W^{\perp}$ را داشته باشند

* این را دقت کن!

قسمت (ii) را در نظر بگیریم و فرض کنیم $w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_t w_t$ عضو دلخواه از W باشد، آنگاه برای هر $f = \lambda_{t+1} f_{t+1} + \dots + \lambda_n f_n$ در $W^\perp$ داریم:

$$f(w) = (\lambda_{t+1} f_{t+1} + \dots + \lambda_n f_n)(w)$$
$$= \lambda_{t+1} f_{t+1}(w) + \dots + \lambda_n f_n(w)$$

و چون w ترکیب خطی از w_1 تا w_t است، پس $f_{t+1}(w) = \dots = f_n(w) = 0$ لذا

$$f(w) = 0 \Rightarrow w \in W^{\perp\perp}$$

* به تعریف توجه شود.

* نتیجه: اگر $\dim V < \infty$ و $H \subseteq V^*$ یک زیرفضای آن باشد، آنگاه

(i) $\dim H + \dim H^\perp = \dim V$

(ii) $H^{\perp\perp} = H$

- زیرفضاهای برداری سره $\mathbb{R}^2$ ← خطوط گذرنده از مبدأ، $\{(0,0)\}$، اشتراک دو صفحه

- " " " $\mathbb{R}^3$ ← صفحات گذرنده از مبدأ، خطوط گذرنده از مبدأ، اشتراک دو صفحه
$\{(0,0,0)\}$، اشتراک سه صفحه

تعریف: اگر V یک فضای برداری از بعد n باشد، هر زیرفضای V از بعد $n-1$ یک ابرفضا نام دارد.

قضیه: فرض کنید V یک فضای برداری از بعد n باشد و W یک زیرفضا از بعد K باشد $(K < n)$ در این صورت W اشتراک $n-K$ ابرفضا است. (*مهم)

← خودتان بنویسید!

اثبات. فرض کنیم $\{w_1,\dots,w_k\}$ پایه‌ای از W باشد و $B=\{w_1,\dots,w_n\}$ توسعه آن به پایه‌ای از V باشد. قبلاً دیدیم که اگر $B^*=\{f_1,\dots,f_n\}$ پایه دوگان باشد، آنگاه $\{f_{k+1},\dots,f_n\}$ پایه‌ای از $W^\perp$ است. ادعا می‌کنیم

$$W=\{f_{k+1},\dots,f_n\}^\perp \quad (*)$$

* تمام ایده در این اثبات استفاده از مفهوم $\perp$ که بعد هم عضو بر هر طرف بگیرد، بسته به طرف دیگر هم است.

در این صورت $W=\bigcap_{j=k+1}^{n}\ker f_j$ و هر $\ker f_j$ یک ابرصفحه است زیرا

$$\dim\ker f_j=\dim V-\dim \mathbb{F}=V-1$$

حال برای اثبات $(*)$ فرض می‌کنیم $w\in W$. پس می‌توان w را به شکل $\alpha_1w_1+\dots+\alpha_kw_k$ نوشت، پس برای هر f_j که $j=k+1,\dots,n$ داریم:

$$f_j(w)=f_j(\alpha_1w_1+\dots+\alpha_kw_k)=\alpha_1\cancel{f_j(w_1)}+\dots+\alpha_k\cancel{f_j(w_k)}=0$$

$$\Rightarrow w\in\{f_{k+1},\dots,f_n\}^\perp$$

برعکس اگر برای $v=\alpha_1w_1+\dots+\alpha_nw_n$ داشته باشیم: $v\in\{f_{k+1},\dots,f_n\}^\perp$

$$\Rightarrow f_j(\alpha_1w_1+\dots+\alpha_nw_n)=0 \qquad \forall j=k+1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \alpha_1f_j(w_1)+\dots+\alpha_nf_j(w_n)=0$$

$$\Rightarrow \alpha_j\underbrace{f_j(w_j)}_{1}=0\Rightarrow\alpha_j=0\qquad\forall j=k+1,\dots,n$$

$$\Rightarrow v=\alpha_1w_1+\dots+\alpha_kw_k\Rightarrow v\in W \qquad \blacksquare$$

تعریف: فرض کنیم $T:V\to W$ خطی باشد. ترانهاده‌ی T را با T^t نمایش می‌دهیم و به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

تابعی است از مجموعه توابع به مجموعه توابع

$$(V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{g} F)$$

$$T^t: W^* \to V^*$$
$$g \mapsto goT$$

* دقت کن دامنه تابع تعریف می‌کنی

گزاره: T^t یک نگاشت خطی است.

اثبات. تمرین

$$T^t(\alpha g_1+g_2)=\alpha T^t(g_1)+T^t(g_1)$$

گزاره. اگر $T:V\to W$ خطی باشد

$$\ker T^t = (\operatorname{Im} T)^\perp$$

اثبات.

* فقط توجه به مفهوم

$$g\in\ker T^t \iff T^t(g)=gT=0$$

$$\iff \forall v\in V\ g(T(v))=0 \iff g\in(\operatorname{Im}T)^\perp$$

قضیه: فرض کنیم $\dim V<\infty$ ، $T:V\to W$ خطی باشد، آنگاه $\operatorname{rank}T^t=\operatorname{rank}T$

اثبات.

$$T^t: W^*\to V^*$$

$$\dim W=\dim W^* = \dim\ker T^t+\operatorname{rank}T^t=\dim(\operatorname{Im}T)^\perp+\operatorname{rank}T^t$$

$$=(\dim W-\dim \operatorname{Im}T)+\operatorname{rank}T^t$$

$$\Rightarrow \underbrace{\dim \operatorname{Im}T}_{\operatorname{rank}T}=\operatorname{rank}T^t$$

قضیه: فرض کنیم $T: V \longrightarrow W$ و $dim V, dim W < \infty$ ، C, B به ترتیب پایه‌ای برای V و W باشند. در این صورت اگر C^*, B^* دوگان این پایه‌ها باشند:

$$M^t(T,B,C) = M(T^t, C^*, B^*)$$

اثبات. فرض کنیم $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ، $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ ، $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ ، $C^* = \{g_1, \dots, g_m\}$

فرض کنیم $M(T,B,C) = [a_{ij}]$ ، $M(T^t, C^*, B^*) = [b_{ij}]$

$$T(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j \quad \text{I}$$

$$T^t(g_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} f_j$$

فرض کنیم $f \in V^*$ ، می‌دانیم:

$$f = \sum_{j=1}^{n} f(v_j) f_j)$$

* ایده:

پس اگر $T^t(g_i) \in V^*$ نیز داریم:

$$T^t(g_i) = \sum \cancel{T^t(g_i)(v_j) f_j} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(g_i T)(v_j)} f_j \quad \text{II}$$

$$T^t g_i (v_j) f_j$$

از طرفی داریم:

$$(g_i T)(v_j) = g_i(T(v_j)) \stackrel{\text{I}}{=} g_i\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{kj} g_i(w_k) = a_{ij} g_i(w_i) = a_{ij}$$

پس با جاگذاری در II داریم:

$$T^t(g_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j$$

از قبل هم داشتیم $T^t(g_j) = \sum_{i=1} b_{ji} f_i$ پس

$\forall i,j \quad b_{ji} = a_{ij} \Rightarrow [a_{ij}]^t = [b_{ij}]$ ■

* اگر $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$، می‌دانیم ماتریس نگاشت $T_A : F^n \longrightarrow F^m$ ، $X \longmapsto AX$ نسبت به پایه‌های کانونیک همان A است. بنابراین صدق $Im T_A$ برابر فضای ستونی ماتریس A است.

اثبات.

$$AX = [\beta_{1_{m\times 1}} \cdots \beta_{n_{m\times 1}}] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n$$ ■

قضیه: بعد فضای سطری ماتریس $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ با بعد فضای ستونی آن برابر است.

اثبات.

$T_A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$ ، $X \longmapsto AX$ ، $T_A^t : (\mathbb{F}^m)^* \longrightarrow (\mathbb{F}^n)^*$.

* ادعا: (I)

می‌دانیم (بعد فضای ستونی ماتریس A = $rank\, T_A = rank\, T_A^t$)

اگر B, C به ترتیب پایه‌ی کانونیک $\mathbb{F}^m, \mathbb{F}^n$ باشند داریم،

$$\left(A^t = M(T_A, B, C)^t = M(T_A^t, C^*, B^*)\right)^{(II)}$$

همچنین طبق گزاره قبل داریم،

بعد فضای ستونی A^t $= M(T_A^t, C^*, B^*)$

$\Rightarrow$ بعد فضای ستونی A^t = بعد فضای سطری A $\Rightarrow$ بعد فضای سطری A = بعد فضای ستونی A ■

تعریف: اگر $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$، بعد فضای سطری A که طبق قضیه قبل با بعد فضای ستونی آن برابر است را رتبه A می‌نامیم و با $\operatorname{Rank} A$ نمایش می‌دهیم.

تمرین: فرض کنید $\dim V < \infty$ ، $t : \mathcal{L}(V,V) \longrightarrow \mathcal{L}(V^*,V^*)$
$$f \longrightarrow f^t$$
ثابت کنید نگاشت بالا ۱-۱ است.

مثال: فرض کنید $f_1, f_2, f_3 \in (\mathbb{R}^3)^*$ به شکل زیر داده شده باشند:

$f(x,y,z) = x+2y$

$f(x,y,z) = 3y+z$

$f(x,y,z) = 2x+2y$

مطلوب است: $H = \{f_1, f_2, f_3\}^{\perp}$

(ج) * چون باید برای هر $f_i \in H$ ، اسکالر برابر صفر شود ما با حل دستگاه زیر جواب کلی متعلق به این فضا را بدست آورد

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ 3y+z=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تحویل پلکانی سطری}} \cdots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \{f_1, f_2, f_3\}^{\perp} = \{(0,0,0)\}$$

مثال: فرض کنید W زیرفضای از $\mathbb{R}^4$ باشد که توسط $\alpha_1 = (0,-1,2,6)$ ، $\alpha_2 = (2,-1,0,3)$ تولید شود. مطلوب است: $W^{\perp}$ ؟

$$W^{\perp} = \left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z,w) \longmapsto ax+by+cz+dw \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} a,b,c,d \in \mathbb{R} \\ f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} f(\alpha_1) = -b+2c+6d = 0 \\ f(\alpha_2) = 2a-b+3d = 0 \end{cases}$$

* همیشه طبق تعریف راه‌حل را بنویس و بعد از آن سوالات را حل کن!

* تذکر: اگر شرط وجود معکوس ضربی برای اعضای ناصفر را از تعریف میدان حذف کنیم، یک حلقه‌ی جابجایی یکدار خواهیم داشت. در طول این فصل همواره K را یک $(M_n(K))$ حلقه‌ی جابجایی یکدار در نظر می‌گیریم. مثلاً $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{R}^n$ ، $\mathbb{Q}$ با جمع و ضرب معمولی مثال‌هایی از حلقه‌ی جابجایی یکدار هستند.

$$D : M_n(K) \longrightarrow K$$

تعریف: فرض کنید D یک تابع باشد، گوییم D یک تابع n خطی است اگر نسبت به هر سطر ماتریس‌ها خطی باشد یعنی اگر ماتریس با سطرهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ را با $D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ نمایش دهیم، برای آن داریم:

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \lambda\alpha_i + \alpha'_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \quad *$$

$$= \lambda D(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) + D(\alpha_1 + \dots + \alpha'_i + \dots + \alpha_n)$$

مثال. در هر یک از مثال‌های زیر $D : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ مشخص کنید، در هر حالت آیا D دو خطی است؟

الف) $D\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\right) = x_{11}$ ✗

ب) $D\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\right) = x_{11}x_{21}$ ✓

ج) $D(\quad , \quad) = x_{12} + x_{21}$ ✗

حل. نسبت به هر سطر ارتباط را می‌نویسیم و بررسی می‌کنیم. *

* توجه کنید در بررسی n-خطی بودن D، هر بار با ثابت نگه داشتن تمام سطرها به غیر از سطر iام می‌خواهیم ببینیم آیا D نسبت به سطر iام خطی است یا نه. در این حالت برای سادگی به جای $D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ فقط می‌نویسیم $D(\alpha_i)$.

مثال. فرض کنید $1 \le j_1, \dots, j_n \le n$ اعداد طبیعی باشند. آنگاه نگاشت D به شکل n-خطی است که $c \in K$ ثابت است:

$$D : M_n(K) \longrightarrow K$$

$$[a_{ij}] \longmapsto c a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}$$

فرض کنید تمام سطرها بجز سطر iام را ثابت نگه داشته‌ایم، می‌خواهیم نشان دهیم،

$$D(\lambda \alpha_i + \alpha_i') = \lambda D(\alpha_i) + D(\alpha_i') \qquad \begin{cases} \alpha_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \\ \alpha_i' = (a_{i1}', \dots, a_{in}') \end{cases}$$

$$D(\lambda \alpha_i + \alpha_i') = D(\lambda a_{i1} + a_{i1}', \dots, \lambda a_{in} + a_{in}')$$

$$= c a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (\lambda a_{ij_i} + a_{ij_i}') a_{i+1 j_{i+1}} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \lambda (c a_{1j_1} \cdots a_{nj}) + (c a_{1j_1} \cdots a_{ij_i}' \cdots a_{nj_n}) \quad \blacksquare$$

مثال. تمام نگاشت‌های 2-خطی روی $M_2(\mathbb{R})$ را بیابید.

$$D : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$D\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = D((a,b),(c,d)) = D(a(1,0) + b(0,1), (c,d))$$

$$\overset{n\text{-خطی}}{=} a D((1,0),(c,d)) + b D((0,1),(c,d)) = a[D((1,0), c(1,0) + d(0,1))]$$

$$+ b[D((0,1), c(1,0) + d(0,1))] \overset{n\text{-خطی}}{=} [ac D((1,0),(1,0)) + ad D((1,0),(0,1))]$$

$$+ [bc D((0,1),(1,0)) + bd D((0,1),(0,1))]$$

$$= acD\left(\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\right) + adD\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right) + bcD\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right) + bdD\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\right)$$

تمرین: فرض کنید D_1, D_2 دو تابع n-خطی روی $M_n(K)$ باشند، $\lambda \in K$، ثابت کنید $\lambda D_1 + D_2$ نیز تابع n-خطی است.

تعریف: فرض کنیم D یک تابع n-خطی باشد. گوییم D متناوب است هرگاه برای هر ماتریس $A \in M_n(K)$ که دو سطر مساوی داشته باشد، $D(A)=0$.

گزاره: فرض کنید D یک تابع n-خطی متناوب باشد. اگر $A \in M_n(K)$، A' ماتریسی باشد که از تعویض دو سطر A بدست آمده است، آنگاه $D(A) = -D(A')$.

* استفاده از افزایش دو ماتریس مساوی صفر قرار دادن و استفاده از تعریف

اثبات: فرض کنیم سطر iام و jام A را جابجا کرده ایم، A' بدست آمده است:

$$A = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) \qquad A' = (\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$$

$$D(A + A') = D(2\alpha_1, \dots, \alpha_i + \alpha_j, \dots, \alpha_i + \alpha_j, \dots, 2\alpha_n) = 0$$

$$0 = D(2\alpha_1, \dots, \alpha_i + \alpha_j, \dots, \alpha_j + \alpha_i, \dots, 2\alpha_n)$$

$$= 2^{n-2} D(\alpha_1, \dots, \alpha_i + \alpha_j, \dots, \alpha_j + \alpha_i, \dots, \alpha_n)$$

$$= 2^{n-2} D(\alpha_i + \alpha_j, \alpha_j + \alpha_i) = 2^{n-2}\left[D(\alpha_i, \alpha_j + \alpha_i) + D(\alpha_j, \alpha_j + \alpha_i)\right]$$

$$= 2^{n-2}\left[D(\alpha_i, \alpha_j) + D(\alpha_i, \alpha_i) + D(\alpha_j, \alpha_i) + D(\alpha_j, \alpha_j)\right] = 2^{n-2}\left[D(A) + D(A')\right]$$

$\blacksquare$

مثال. D: n-خطی، $A \in M_n(K)$، $\lambda \in K$ $\qquad D(\lambda A) = \lambda^n A$

تعریف:

گوییم تابع $D: M_n(K) \to K$ یک تابع دترمینان است هرگاه D ویژگی‌های زیر را داشته باشد

I) D ، n-خطی باشد II) متناوب باشد III) $D(I_n)=1$

مثال. تمام توابع دترمینان روی $M_2(\mathbb{R})$ را مشخص کنید.

$$D\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ac\,\cancel{D\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)} + ad\,D\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)}_{1} + bc\,D\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)}_{-1} + bd\,\cancel{D\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)}$$

$$= ad - bc$$

لم. فرض کنید D یک نگاشت n-خطی است که در آن هر ماتریس A که دو سطر مجاور مساوی دارد، $D(A)=0$ ، آنگاه D متناوب است.

اثبات. می‌توان عیناً اثباتی را که قبلاً داشتیم را دنبال کرد و نشان داد هرگاه دو سطر مجاور یک ماتریس A را تعویض کنیم و ماتریس A' را بسازیم، آنگاه: $D(A) = -D(A')$

می‌خواهیم نشان دهیم اگر سطرهای i-ام و j-ام که لزوماً مجاور نیستند را هم تعویض کنیم نتیجه مشابهی داریم: فرض کنیم $i<j$ $D(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)$

ابتدا با تعویض سطرهای متوالی سطر α_i را در مکان j-ام قرار دهیم، حال با تعویض سطرهای متوالی α_j را در مکان i-ام قرار می‌دهیم $j-i-1$ تعویض لازم داریم.

$$= (-1)^{j-i}(-1)^{j-i-1} D(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)$$

$$= (-1)^{2(j-i)-1} D(A) = -D(A') \quad \blacksquare$$

فرض کنیم A ماتریس با دو سطر برابر i-ام و j-ام باشد $D(A)=D(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)$

با تعویض دو سطر i-ام و j-ام از طرفی می‌دانیم مقدار D قرینه می‌شود و از طرف دیگر چون سطر i-ام و j-ام برابرند مجدداً ماتریس A بدست می‌آید. پس

$$D(A) = -D(A) \Rightarrow D(A)=0$$

[فرض بر این است که مشخصه حلقه 2 نباشد]

*ایده اینجا بود!

$D: M_n(K) \longrightarrow K$

(I) خطی نسبت به هر سطر

(II) متناوب $\rightarrow$ A دو سطر برابر $\rightarrow$ $D(A)=0$

(III) $D(I_n)=1$

[اگر D روی ماتریس‌هایی که دو سطر مجاورشان برابرند صفر شود $\Rightarrow$ متناوب $\Rightarrow$ اگر A' با تعویض دو سطر بدست آید $D(A)=-D(A')$]

نمادگذاری:
فرض کنیم $D: M_{n-1}(K) \rightarrow K$ یک نگاشت $(n-1)$-خطی باشد. در این صورت برای هر ماتریس $A \in M_n(K)$، ماتریسی که از حذف سطر i-ام و ستون j-ام A بدست آید با $A(i|j)$ نمایش می‌دهیم.

$$\boxed{D_{ij}(A) = D(A(i|j))}$$

قضیه: اگر $D: M_{n-1}(K) \rightarrow K$ یک نگاشت $(n-1)$-خطی متناوب باشد، آنگاه برای هر $j=1,\dots,n$ نگاشت

$$E_j([a_{ij}]_{n\times n}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \underbrace{D_{ij}(A)}$$

$\leftarrow$ * بسط دترمینان روی یک ستون

یک n-خطی متناوب است و اگر D دترمینان باشد، E_j نیز یک دترمینان است.

اثبات. نگاشت $D_{ij}: M_n(K) \rightarrow K$، $A \longmapsto D(A(i|j))$ نسبت به تمام سطرها بجز سطر i-ام خطی است.

پس نگاشت (*ایده) $D_{ij}: M_n(K) \longrightarrow K$، $A=[a_{ij}] \longmapsto a_{ij} D(A(i|j))$ نسبت به تمام سطرها خطی است.

یعنی D_{ij} نیز n-خطی است. لذا طبق می‌دانیم ترکیب خطی نگاشت‌های n-خطی مجدداً نگاشت n-خطی است، پس E_j نیز n-خطی است.

حال نشان می‌دهیم E_j نیز متناوب می‌باشد. فرض کنیم $A \in M_n(K)$ با سطرهای $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ در α_k و α_{k+1} دو سطر مساوی (* بنا بر قضیه‌ای بیان شده در جلسات گذشته که دو سطر مجاور هم باشند کافیست) باشند. کافی است نشان دهیم $E_j(A) = 0$

ترکیب $D_{ij}(A)$ اگر $i \neq k$ و $i \neq k+1$ چون $A(i|j)$ دو سطر مساوی دارد

پس $D_{ij}(A) = 0$ بنابراین $E_j(A)$ به شکل زیر در می‌آید:

$$E_j(A) = (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{k+1+j} a_{k+1j} D_{k+1j}(A)$$

چون سطر k و $(k+1)$ برابرند پس $a_{kj} = a_{k+1j}$ و $A(k|j) = A(k+1|j)$

پس $E_j(A) = 0$ لذا E_j متناوب است. $E_j(I_n) = 1$

حال فرض کنید D نگاشت دترمینان باشد و $D(I_{n-1}) = 1$ می‌خواهیم نشان دهیم:

$$E_j(I_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{درایه‌ی } I_n} D_{ij}(I_n), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

که

پس $E_j(I_n) = (-1)^{2j} \times 1 \times D(I_n(j|j)) = (-1)^{2j} D(I_{n-1}) = 1 \times 1 = 1$ ▨

* تذکر: در قضیه فوق E_jها در واقع بسط نسبت به ستون j-ام است.

نتیجه ← : اگر $n \in \mathbb{N}$ ، آنگاه یک تابع دترمینان $D: M_n(K) \to K$ وجود دارد.

اثبات. با استقراء روی n، نگاشت $D: M_1(K) \to K$ ، $[a] \mapsto a$ یک-خطی است و حال با توجه به قضیه قبل نتیجه بدست می‌آید. ▨

جایگشت ها:

← فرض کنیم $n\in\mathbb{N}$ ، هر دنباله $(K_1,\dots,K_n)$ که $K_1,\dots,K_n\in\{1,\dots,n\}$ دو به دو متمایزند یک جایگشت از مرتبه n گفته می شود. می توان یک جایگشت $\sigma=(K_1,\dots,K_n)$ را به عنوان یک تابع دوسوی در نظر گرفت که

$$S:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\},\quad i\mapsto K_i$$

تعداد جایگشت های مرتبه n برابر $n!$ است.

← می توان با تعدادی تعویض دو به دوی اجزا پس از چند مرحله به جایگشت $(1,\dots,n)$ رسید. این مراحل و تعداد آنها یکتا نیست ولی ثابت می شود اگر در یکبار با تعدادی فرد تعویض به $(1,\dots,n)$ رسیدیم از هر روش دیگری بخواهیم با تعویض های متوالی اجزا به $(1,\dots,n)$ برسیم باز تعداد تعویض ها فرد خواهد بود (به طور مشابه برای تعداد تعویض های زوج)

← اگر σ جایگشتی باشد که با تعداد فرد تعویض بتوان به $(1,\dots,n)$ رسید σ را یک جایگشت فرد و در غیر این صورت یک جایگشت زوج می نامیم و تعریف می کنیم:

$$\mathrm{Sign}(\sigma)=\begin{cases}1 & \sigma\ \text{زوج}\\ -1 & \sigma\ \text{فرد}\end{cases}$$

مثلاً: $\mathrm{Sgn}(1,3,2)=-1$ ، $\mathrm{Sgn}(2,3,1)=1$

← مجموعه تمام جایگشت های مرتبه n را با S_n نمایش می دهیم:

$$S_3=\{(1,2,3),(1,3,2),(2,3,1),(2,1,3),(3,1,2),(3,2,1)\}$$

ملاک های دترمینان:

فرض کنیم D یک نگاشت n-خطی متناوب باشد و $e_1,\dots,e_n$ به ترتیب سطرهای ماتریس I_n باشند یعنی e_j سطری است که درایه j-ام آن برابر 1 و بقیه درایه ها صفر هستند:

$A=[a_{ij}]\in M_n(K)$

فرض کنیم $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ سطرهای A باشند: $D(A) = D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$= D\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i} e_i, \alpha_2, \dots, \alpha_n\right) \overset{\text{خطی بودن نسبت به سطر}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} D(e_i, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

با تکرار این مرحله برای سطرهای دوم تا n-ام داریم:

$$D(A) = \sum_{1 \le j_1, \dots, j_n \le n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} D(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$$ * حالت‌هایی را بدست آورده

چون D متناوب است، در حاصل جمع فوق اگر برای یک $r \neq s$ داشته باشیم $j_r = j_s$ آنگاه $D(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = 0$ لذا مجموع فوق به شکل زیر درمی‌آید:

$$= \sum_{\sigma = (j_1, \dots, j_n) \in S_n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} D(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$$

با قرارداد i-ام در $\sigma = (j_1, \dots, j_n)$ را با σ_i نشان دهیم داریم:

* این‌ها توسط [illegible] مشخص است

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma_1} \cdots a_{n\sigma_n} D(e_{\sigma_1}, \dots, e_{\sigma_n})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma_1} \cdots a_{n\sigma_n} D(e_1, \dots, e_n)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma_1} \cdots a_{n\sigma_n} D(I_n) \quad (*)$$

اگر D بخواهد تابع دترمینان باشد، آنگاه در شرایط فوق باید $D(I_n) = 1$ لذا نتیجه زیر را داریم:

نتیجه: از هر مرتبه n، دقیقاً یک تابع دترمینان وجود دارد که $D((a_{ij})) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\,\sigma\, a_{1\sigma_1} \cdots a_{n\sigma_n}$ نگاشت فوق را از این پس با det نمایش می‌دهیم.

نکته: ← مهم *

اگر D یک نگاشت n-خطی متناوب باشد، آنگاه برای هر ماتریس $A\in M_n(K)$ داریم

$$D(A)=(\det A)\,D(I_n)$$

نکته: ← اگر $n>1$ ، $A=[a_{ij}]\in M_n(K)$

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A(i|j)$$

فرمول فوق بسط دترمینان نسبت به ستون j-ام نام دارد و $(-1)^{i+j}\det A(i|j)$ همسازه (i,j)-ام دارد.

مثال. $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$.

کی بشور اینا دیگه

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_2}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}$$

$$\sigma=(1,2)\longrightarrow \operatorname{sgn}(\sigma)=1$$

$$\tau=(2,1)\longrightarrow \operatorname{sgn}(\sigma)=-1$$

$$\Rightarrow \det(A)=1\times a_{11}\times a_{22}+(-1)a_{12}\times a_{21}$$

قضیه: اگر $A,B\in M_n(K)$ ، آنگاه $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

اثبات. فرض کنیم B یک ماتریس ثابت باشد:

$$\left(D:M_n(K)\longrightarrow K,\quad A\longmapsto \det(AB)\right)^{*}$$

ابتدا ثابت می‌کنیم D یک نگاشت n-خطی متناوب است؛ فرض کنیم سطرهای ماتریس A را $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ نمایش دهیم:

$$D(A)=D(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\det(AB)=\det(\alpha_1B,\dots,\alpha_nB)$$

با تعریف ضربی ماتریس

برای n-خطی داریم:

$$D(\alpha_1,\dots,\lambda\alpha_i+\alpha'_i,\dots,\alpha_n)=\det(\alpha_1B,\dots,(\lambda\alpha_i+\alpha'_i)B,\dots,\alpha_nB)$$

چون $\det$، n-خطی است پس عبارت فوق برابر است با:

$$\lambda\det(\alpha_1B,\dots,\alpha_nB)+\det(\alpha_1B,\dots,\alpha'_iB,\dots,\alpha_nB)$$

$$=\lambda D(\alpha_1,\dots,\alpha_n)+D(\alpha_1,\dots,\alpha'_i,\dots,\alpha_n)$$

پس D، n-خطی است، حال برای اثبات متناوب بودن D، فرض کنیم $\alpha_i=\alpha_j$

$$D(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\det(\alpha_1B,\dots,\alpha_iB,\dots,\alpha_jB,\dots,\alpha_nB)$$

اما می‌دانیم $\alpha_iB=\alpha_jB$، از طرفی چون $\det$ متناوب است لذا عبارت فوق برابر صفر می‌باشد پس D متناوب است، حال لذا n-خطی بودن و متناوب بودن D داریم: قضیه قبل

* ادامه:

$$D(A)=\det(A)D(I_n)$$

اما $D(A)=\det(AB)$، $D(I_n)=\det(I_nB)$ پس

$$\det(AB)=\det(A)\det(B)\quad\blacksquare$$

تمرین: $\det\begin{bmatrix}A&B\\0&C\end{bmatrix}=\det A\det C$

قضیه: فرض کنید $A\in M_n(K)$، آنگاه $\det(A)=\det(A^t)$

اثبات: با فرض $A=[a_{ij}]$

$$\det A^t=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{\sigma_1,1}\cdots a_{\sigma_n,n}$$

$$\sigma=(1,3,2)\qquad \sigma^{-1}:\begin{cases}1\to1\\3\to2\\2\to3\end{cases}\qquad \sigma^{-1}=(1,3,2)$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau)=\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$$

اگر $\sigma\in S_n$ را به عنوان یک تابع ۱-۱، پوشا در نظر بگیریم، می‌توان جایگشت متناظر با تابع داریم

آن را با σ^{-1} نمایش داد، برابر $\sigma \in S_n$ ، ما داریم:

از طرفی دقت کنید:

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)$$

$$1 = \operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) \Rightarrow \operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$$

فرمول جمع روی تمام اعضای $\sigma \in S_n$ است، چون این اعضا همگی وارون‌پذیرند، پس می‌توان:

$$\sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\, a_{\sigma_1^{-1},1} \cdots a_{\sigma_n^{-1},n}$$

از طرفی برای هر i, j اگر:

$$\sigma_i = \sigma(i) = j \Rightarrow \sigma_j^{-1} = \sigma^{-1}(j) = i$$

پس بنابراین $a_{\sigma_j^{-1} j}$ عضو متناظر $a_{i\sigma_i}$ را داریم یعنی:

$$\det A^t = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdots a_{n\sigma_n}$$

* ایده: (اما فرق ندارد که جمع روی $\sigma \in S_n$ باشد یا $\sigma^{-1} \in S_n$ پس فرمول دقیقاً فرمول $\det(A)$ است.) ■

تعریف: اگر $A \in M_n(K)$، ماتریس الحاقی کلاسیک A که با $\operatorname{adj}(A)$ نمایش می‌دهیم ماتریس $n \times n$ است که درایه‌ی (i,j)ام آن $(-1)^{i+j} \det A(j|i)$ است یعنی درایه‌ی (i,j)ام آن همسازه (j,i)ام A است.

تمرین: ثابت کنید

$$\operatorname{adj}(A^t) = (\operatorname{adj}A)^t$$

گزاره: فرض کنید $A \in M_n(K)$ آنگاه

$$(\operatorname{adj}A)A = A(\operatorname{adj}A) = (\det A) I_n$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $(\operatorname{adj} A)A=(\det A)I_n$، برای این منظور نشان می‌دهیم

برای هر $n \geq j, i \geq 1$ درایه (i,j)-ام از طرفین برابر است. (I) ابتدا فرض کنید $i=j$

اگر $\operatorname{adj} A=[C_{ij}]$ داریم: درایه (j,j) از سمت چپ $=\sum_{k=1}^{n} C_{jk}a_{kj}$

دقت کن!

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}\det A(k|j)\,a_{kj} \overset{*}{=} \det A =$$ درایه (j,j)-ام سمت راست

ایده بخش اصلی اثبات $(II)*$

حال می‌خواهیم نشان دهیم اگر $i\neq j$ درایه (i,j)-ام ماتریس $(\operatorname{adj} A)A$ برابر صفر است،

برای این منظور ماتریس B را این شکل در نظر بگیریم که ستون iام ماتریس A در ستون jام جایگزین شده است:

$$0=\det B=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}b_{kj}B(k|j)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{(-1)^{k+j}a_{ki}A(k|j)}_{C_{jk}}=\sum_{k=1}^{n}C_{jk}a_{ki}=$$ درایه (j,i)ام $(\operatorname{adj} A)A$

پس اعضای خارج از قطر اصلی در $(\det A)I_n$ و در $(\operatorname{adj} A)A$ برابر صفر هستند

پس نهایتاً $(\operatorname{adj} A)A=(\det A)I_n$

حال تساوی فوق را برحسب A^t می‌نویسیم:

$$(\operatorname{adj} A^t)A^t=(\det A^t)I_n$$

$$(\operatorname{adj} A)^tA^t=(\det A)I_n \xrightarrow[\text{گرفتن}]{\text{ترانهاده}} A(\operatorname{adj} A)=(\det A)I_n \quad \blacksquare$$

$A \in M_n(K)$ $\quad (\operatorname{adj} A)A = A(\operatorname{adj} A) = (\det A) I_n$

قضیه: اگر $A \in M_n(K)$، آنگاه A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $\det A$ عضو وارون‌پذیر K باشد، در این حالت:

$$A^{-1} = (\det A)^{-1}(\operatorname{adj} A)$$

اثبات: ($\Rightarrow$) با استفاده از قضیه‌ی قبل بدیهی است.

($\Leftarrow$) اگر A وارون‌پذیر باشد، پس $AA^{-1} = I_n$

$$\Rightarrow (\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1$$

$\Rightarrow \det A$: وارون‌پذیر ■

نتیجه: اگر F یک میدان باشد و $A \in M_n(F)$، A وارون‌پذیر است $\iff \det A \neq 0$

قاعده‌ی کرامر:

دستگاه معادلات خطی $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید که $A \in M_n(K)$

$$(\operatorname{adj} A)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = (\operatorname{adj} A)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix} \Rightarrow \det A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = (\operatorname{adj} A)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$$

حال برای درایه‌ی iام طرفین داریم:

$$\det A \, x_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A(j|i))\, b_j$$

* تمام ایده در این دو خط است

B_i: ماتریسی است که به جز ستون i، ستون‌های A است فقط به جای ستون iام، $\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$ است.

اما طرف راست تساوی اخیر همان $\det(B_i)$ است.

$$\begin{pmatrix} | & | & b_1 & | & | \\ | & | & \vdots & | & | \\ | & | & b_n & | & | \end{pmatrix}$$

ستون iام.

پس اگر $\det A \neq 0$ داریم:

$$\boxed{x_i = \frac{\det B_i}{\det A}}$$

مثال.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}}{\det A} \quad , \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}}{\det A}$$

(TA)

① فرض کنید $B=\{(1,0,1),(0,2,0),(-1,0,2)\}$ پایه مرتبی از $\mathbb{R}^3$ باشد، پایه دوگان B را حساب کنید

$$f = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z$$

را برحسب پایه جدید بنویسید.

② فرض کنید $T: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ به شکل $T(B)=BA-AB$ که در آن $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$ rank T را بیابید و پایه‌ای برای $\mathrm{Im}\,T$ بیابید.

③ فرض کنید $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ به شکل $T_A=\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}$

$A=\{(1,1),(2,3)\}$, $[T_A]=\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}$

باشد ماتریس آن برحسب پایه B به چه شکل است.

$B=\{(3,2),(4,1)\}$ به چه صورت است.

مقادیر ویژه :

$A-\lambda I_n$ معکوس‌پذیر نبود $\longleftrightarrow$ $(A-\lambda I_n)X=0$ جواب غیربدیهی دارد

$$\longleftrightarrow \exists X\neq 0 \quad (A-\lambda I_n)X=0 \longleftrightarrow \exists X\neq 0 \quad AX=\lambda X$$

* $T:V\to V$ ، $\det(M(T,B)) = \det(PM(T,C)P^{-1})$

λ مقدار ویژه : $\underline{\exists v\neq 0 \quad T(v)=\lambda v}$

تعریف:

فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $T:V\to V$ یک عملگر خطی باشد، $\underline{\lambda\in \mathbb{F}}$ را یک مقدار ویژه‌ی T (eigenvalue) می‌نامیم اگر بردار ناصفر v وجود داشته باشد که $T(v)=\lambda v$

* v را یک بردار ویژه‌ی وابسته به λ می‌نامیم هرگاه در $T(v)=\lambda v$ صدق کند، اگر λ یک مقدار ویژه‌ی T باشد، در این صورت مجموعه‌ی بردارهای ویژه‌ی وابسته به λ را با V_λ نمایش می‌دهیم که زیرفضای V است.

*تکرار مفید!

$$V_\lambda=\{v\in V \mid T(v)=\lambda v\}$$

$$V_\lambda = Ker(T-\lambda Id_V) \quad *$$

$$\begin{cases} T(v_1+v_2)=\lambda(v_1+v_2)=\lambda v_1+\lambda v_2=T(v_1)+T(v_2) \\ T(\alpha v_1)=\lambda(\alpha v_1)=\alpha(\lambda v_1)=\alpha T(v_1) \end{cases}$$

*دقت کن ساده است!

نتیجه: ←

اگر $T:V\to V$ عملگر خطی باشد، $\lambda\in \mathbb{F}$ مقدار ویژه‌ی T است، اگر و تنها اگر نگاشت $T-\lambda Id_V$ یک به یک نباشد.

- فرض کنید $\dim V<\infty$ ، B,C پایه‌هایی از V باشند، آنگاه برای $T:V\to V$ داریم،

چون $M(T,C)=P_C^B M(T,B) P_B^C$ و $P_C^B P_B^C = I_n$ پس $\det(M(T,C))=\det(M(T,B))$

تعریف:

اگر $\dim V < \infty$ و B پایه‌ای V باشد $T: V \to V$ عملگر خطی باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\det T = \det M(T, B)$$

*دقت کن گفتیم به پایه وابسته نیست!

نتیجه:

اگر $\dim V < \infty$ و $\lambda \in \mathbb{F}$ ، λ مقدار ویژه‌ی عملگر خطی $T: V \to V$ است، اگر و تنها اگر

$0 = \det(T - \lambda Id_V) \iff T - \lambda id_V$ معکوس ناپذیر باشد

*تذکر: با توجه به نتیجه‌ی فوق به دست آوردن مقادیر ویژه‌ی $T: V \to V$ وقتی $\dim V < \infty$ ، معادل است با یافتن $\lambda \in \mathbb{F}$ هایی که $\det(T - \lambda id_V)$ یا معادلاً $\det(\lambda id_V - T)$ برابر صفر شود؛ بنابراین کافی است ریشه‌های چندجمله‌ای $f(x) = \det(xI_n - A)$ را به دست آوریم که A ماتریس نمایش T است.

* $f(x)$ را چندجمله‌ای مشخصه (سرشت‌نما)ی A می‌نامیم.

* $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n است که تکین نرمال باشد یعنی ضریب x^n برابر 1 است.

پس λ مقدار ویژه‌ی A است اگر و تنها اگر $f(\lambda) = 0$

مثال. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. در این صورت چندجمله‌ای سرشت‌نمای A برابر است با

$$f(x) = \det(xI_2 - A) = \det\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1$$

مقادیر ویژه‌ی A ریشه‌های چندجمله‌ای هستند، بنابراین اگر $A \in M_2(\mathbb{R})$ در نظر بگیریم، A مقدار ویژه ندارد ولی اگر $A \in M_2(\mathbb{C})$ در نظر بگیرید دو مقدار ویژه‌ی i و $-i$ را دارد.

لم. اگر A و B دو ماتریس مشابه باشند، چندجمله‌ای مشخصه آنها برابر است.

اثبات. اگر A و B مشابه باشند پس ماتریس وارون‌پذیر P وجود دارد که: $A = PBP^{-1}$

$$\det(xI_n - B) = \det(P(xI_n - B)P^{-1}) = \det(xI_n - A)$$ ▨

با توجه به لم فوق اگر $\dim V < \infty$ ، B پایه‌ای از آن باشد و $T: V \to V$ عملگر خطی باشد. چندجمله‌ای مشخصه T را $\det(xI_n - M(T,B))$ تعریف می‌کنیم که با توجه به لم فوق، وابسته به B نیست.

← نتیجه:

اگر $\dim V = n$ ، آنگاه $T: V \to V$ حداکثر n مقدار ویژه دارد.

اثبات. توجه کنید $M(T,B)$ ماتریس $n \times n$ است، پس چندجمله‌ای مشخصه آن از درجه n است ... ▨

مثال. چندجمله‌ای سرشت‌نما، مقادیر ویژه و بردارهای وابسته به آن را برای نگاشت خطی زیر:

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (3x+2y+2z,\ x+2y+2z,\ -x-y)$$

$$T(1,0,0) = (3,1,-1)$$
$$T(0,1,0) = (2,2,-1) \quad \Rightarrow A = M(T,B) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$T(0,0,1) = (2,2,0)$$

$$\text{چندجمله‌ای سرشت‌نما} = \det(xI_n - A) = \det\begin{pmatrix} x-3 & -2 & -2 \\ -1 & x-2 & -2 \\ +1 & +1 & x \end{pmatrix}$$
$$= x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$$

$$\longrightarrow \text{مقادیر ویژه} = 1,2$$

برای بردارهای وابسته داریم: $T(v) = \lambda v$

ادامه حل بعد ...

$T(x,y,z) = 1(x,y,z) \Rightarrow T(x,y,z)-(x,y,z)=0$

$$\overbrace{\begin{bmatrix}-2 & -2 & -2\\ -1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}}^{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

لذا: $\dim Ker(id-T) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Im(id-T) = 3-2=1$

$$A \xrightarrow{\text{با اعمال سطری مقدماتی}} \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l}x+y+z=0\\ z=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=-y\\ z=0\end{array}\right.$$

$V_1 = \{(x,-x,0) \mid x\in\mathbb{R}\} = \langle(1,-1,0)\rangle$

به طور مشابه برای V_2 (ثابت شود $\dim V_2 = 1$ [*دقت کن] باید $\dim V_2 < 3$

تعریف:

فرض کنیم $\dim V<\infty$، عملگر خطی $T: V\longrightarrow V$ را در نظر بگیرید، گوییم T قطری شدنی است اگر پایه‌ای برای V وجود داشته باشد که هر عضو آن بردار ویژه‌ی T باشد.

$$\{\underbrace{v_1, v_2}_{\lambda_1}, \underbrace{v_3}_{\lambda_2}, \underbrace{v_4}_{\lambda_3}\}$$

فرض کنیم T قطری شدنی باشد و $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ پایه‌ای باشد که هر مولفه‌ی آن بردار ویژه است، $T(v_i)=\lambda_i v_i$، که البته لزوماً λ_i ها متمایز نیستند:

$$\left.\begin{array}{l}T(v_1)=\lambda_1 v_1\\ \vdots\\ T(v_n)=\lambda_n v_n\end{array}\right\} \Rightarrow M(T,B)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \cdots & 0\\ & \lambda_2 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

مثال. در مثالی که داشتیم با توجه به آنکه $\dim V_1 = \dim V_2 = 1$، پس نمی‌توان پایه‌ای به شکل بردارهای ویژه داشت و لذا T قطری شدنی نیست.

مثال.

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$T: V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto 0$$
$$\Rightarrow T(v) = \lambda v = 0 \Rightarrow V_0 = V$$

مثال.

$$id: V \longrightarrow V$$
$$T(v) = 1v \Longrightarrow \lambda = 1 \Rightarrow V_1 = V \Rightarrow M(T,B) = I_n$$

مثال.

$$T(x,y) = (y,x)$$

$$\begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \Longrightarrow V_{-1} = \cdots \quad \checkmark$$

* تذکر: اگر $\dim V < \infty$، T قطری شدنی است اگر و تنها اگر بردارهای ویژه‌ی T، V را تولید کنند.

* یادآوری: $A \in M_n(\mathbb{C})$، $P(x)$: چندجمله‌ای، $\{P(\lambda) \mid \lambda \text{ مقدار ویژه‌ی } A\} = P(A)$ مقادیر ویژه‌ی

گزاره:

اگر $\dim V < \infty$ و T یک عملگر خطی روی V باشد و $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب در $\mathbb{F}$ باشد، هرگاه λ مقدار ویژه T، $P(\lambda)$ مقدار ویژه‌ی $P(T)$ است. به ویژه اگر v یک بردار ویژه‌ی T وابسته به λ باشد، داریم:

$$P(T)(v) = P(\lambda)v$$

مثال.

$$T: V \longrightarrow V \qquad P(x) = x^2 + 2x + 1 \qquad P(T) = \underset{T \circ T}{T^2} + 2T + id_V$$

اثبات. کافی است توجه کنیم که اگر A ماتریس T نسبت به پایه‌ی B باشد، آنگاه ماتریس $P(T)$ نسبت به همان پایه‌ی $P(A)$ است. ▨

لم. اگر $\dim V<\infty$ ، T یک عملگر خطی روی V باشد ، $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ مقادیر ویژه‌ی متمایز T باشند

$W_1,\dots,W_k$ فضاهای بردارهای ویژه‌ی وابسته به این مقادیر باشند، آنگاه:

$$\dim(W_1+\dots+W_k)=\dim W_1+\dots+\dim W_k$$

* ایده: یعنی می‌گوید این اجزا اشتراک ندارند و همه مجزا هستند.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم اگر $w_i\in W_i$ که $i=1,\dots,k$ ، $\sum_{i=1}^{k} w_i=0$ آنگاه $\forall i \; w_i=0$

برای این منظور فرض کنید $f(x)$ یک چندجمله‌ای دلخواه باشد:

$$0=f(0)=f\Big(T\big(\sum_{i=1}^{k} w_i\big)\Big)=\sum_{i=1}^{k} f\big(T(w_i)\big)$$

* دقت کن $f(T)$ خطی است!

$$\overset{\text{لم قبل}}{=}\sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i)\, w_i$$

حال چندجمله‌ای f را به شکل مناسب انتخاب می‌کنیم که

$$\begin{cases} f(\lambda_i)=1 \\ f(\lambda_j)=0 & j\neq i \end{cases}$$

$$h(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_{i-1})(x-\lambda_{i+1})\cdots(x-\lambda_k)$$

$$\Rightarrow h(\lambda_i)=b \rightarrow f(x)=\frac{h(x)}{b}$$

برای f که بدین شکل انتخاب شده باشد با جاگذاری در تساوی فوق داریم:

$$1\times w_i=0 \Rightarrow w_i=0$$

← ادامه در جلسه بعد

لم ۷.

اگر $\dim V<\infty$، T یک عملگر خطی روی V باشد، و $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ مقادیر ویژه‌ی متمایز T باشند، و $W_1,\dots,W_k$ به ترتیب فضاهای ویژه‌ی وابسته به این مقادیر باشند، آنگاه:

$$\dim(W_1+\dots+W_k)=\sum_{i=1}^{k}\dim W_i$$

اثبات. جلسه پیش ثابت کردیم که اگر $w_i\in W_i$، $\sum w_i=0 \Leftarrow \forall i\ \ w_i=0$

*ایده قسمت دوم

فرض کنید B_i پایه‌ای از W_i که $i=1,\dots,k$ (از نتایج لم) $B=\bigcup_{i=1}^{k}B_i$ پایه‌ای از $\sum_{i=1}^{k}W_i$ است.

در این صورت چون برای $i\neq j$ داریم $B_i\cap B_j=\{0\}$، لذا

$$\dim\Big(\sum_{i=1}^{k}W_i\Big)=|B|=\Big|\bigcup_{i=1}^{k}B_i\Big|=\sum_{i=1}^{k}|B_i|=\sum_{i=1}^{k}\dim W_i$$

اولاً چون هر عضو $W_1+\dots+W_k$ به شکل $u_1+\dots+u_k$ است که $u_i\in W_i$ پس B مولّد است، ثانیاً B مستقل خطی است زیرا اگر

استفاده از اثبات مرحله قبل

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n_1}\alpha_{1j}w_{1j}}_{\in W_1}+\dots+\underbrace{\sum_{j=1}^{n_k}\alpha_{kj}w_{kj}}_{\in W_k}=0$$

که $w_{ij}\in B_i$ است. اگر قرار دهیم $i=1,\dots,k$

$$w_i=\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}w_{ij}\in W_i$$

از تساوی فوق داریم:

$$w_1+\dots+w_k=0$$

$$\Rightarrow w_i=\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}w_{ij}=0$$

پس طبق آنچه در ابتدا آمده است $w_1=\dots=w_k=0$.

$$\xRightarrow[B_i]{\text{مستقل خطی}}\alpha_{ij}=0 \quad ■$$

* تذکر: فرض کنیم $\dim V < \infty$ و T یک عملگر قطری شدنی باشد، پس یک پایه‌ی B وجود دارد که ماتریس T به پایه‌ی B به شکل زیر است:

$$M(T,B) = A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_n & \\ & & & & & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda I_{d_n} \end{bmatrix}$$

*

پس چندجمله‌ای مشخصه آن به شکل زیر است:

$$\det(xI_n - A) = (x-\lambda_1)^{d_1}(x-\lambda_2)^{d_2}\cdots(x-\lambda_k)^{d_k}$$ چیزی که می‌خواهیم اثبات کنیم

ادعا می‌کنیم d_i برابر با بعد W_i (یعنی زیرفضای بردارهای ویژه‌ی وابسته به λ_i است)، برای اثبات این مطلب قرار می‌دهیم:

$B_i = B \cap W_i =$ بردارهایی که در B که وابسته به λ_i است

* ایده

(نشان می‌دهیم $d_i = |B_i|$ برابر با $\dim W_i$ است)، پس $|B_i| \le \dim W_i$ به وضوح

حال به برهان خلف فرض می‌کنیم i چنان وجود داشته باشد که $|B_i| < \dim W_i$

آنگاه:

$$\dim V \ge \dim(W_1 + \dots + W_k) \overset{\text{مستقل}}{=} \dim W_1 + \dots + \dim W_k$$

$$> |B_1| + \dots + |B_k| = |B| = \dim V \quad \times \quad \blacksquare$$

قضیه: فرض کنیم $\dim V < \infty$، T عملگر خطی روی V باشد، $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ مقادیر ویژه‌ی متمایز T، $W_1, \dots, W_k$ زیرفضاهای وابسته به آنها باشند، موارد زیر معادل هستند:

(i) T قطری شدنی است.

(ii) چندجمله‌ای مشخصه T به صورت زیر باشد: $f(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}\cdots(x-\lambda_k)^{d_k}$

که $d_i = \dim W_i$

(iii) $\dim V = \sum_{i=1}^{k} \dim W_i$

اثبات: (i ⇐ ii) تذکر قبل

(ii ⇐ iii) می‌دانیم (ایده* درجه $f(x)$) برابر $\dim V$ است، از طرفی در اینجا:

$$\deg f = d_1+\cdots+d_k = \dim W_1+\cdots+\dim W_k$$

(iii ⇐ i) می‌دانیم $W_1+\cdots+W_k \subseteq V$ از طرفی $\dim\left(\sum W_i\right)=\sum \dim W_i \overset{(iii)}{=} \dim V$

پس $V=\sum_{i=1}^{k} W_i$ (*ایده: یکی زیرمجموعه دیگری و dim ها مساوی است.)

یعنی بردارهای ویژه‌ی T کل فضای V را تولید می‌کنند و لذا T قطری شدنی است. ∎

*تذکر: فرض کنیم $A\in M_n(\mathbb{F})$ گوییم قطری‌شدنی است هرگاه نگاشت زیر قطری شدنی باشد

$$T_A:\mathbb{F}^n\longrightarrow\mathbb{F}^n,\qquad X\longmapsto AX$$

اگر T_A قطری‌شدنی باشد، یعنی یک پایه $C=\{v_1,\dots,v_n\}$ وجود دارد که $M(T_A,C)$ یک ماتریس قطری است.

از طرفی می‌دانیم ماتریس T_A نسبت به پایه‌ی کانونیک $\mathbb{F}^n$ همان A است. چون ماتریس نگاشت نسبت به پایه‌های مختلف متشابه هستند، یعنی A با ماتریس قطری $M(T_A,C)$ متشابه‌اند.

ماتریس A قطری‌شدنی $\Rightarrow A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1\dots\lambda_n)\,P^{-1}$

تمرین. اگر $\dim V=n$، T عملگر خطی، T، n مقدار ویژه‌ی متمایز داشته باشد، آنگاه T قطری‌شدنی است.

$f(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$ ریشه چندجمله‌ای ≡ مقدار ویژه

~~مثال~~ فرض کنیم $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$ ماتریس P چنان بیابید که $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

$$\det(xI_3-A)=\det\begin{pmatrix}x-1&-1&-2\\1&x-2&-1\\0&-1&x-3\end{pmatrix}=(x-1)(x-2)(x-3)$$

ادعا می کنیم اگر $P=(\underbrace{X_1}_{\text{ستون اول}}\ X_2\ X_3)$ که X_i بردار ویژه ی وابسته به الف، تساوی مورد نظر برقرار می شود.

$$PA=A(X_1\ X_2\ X_3)=(AX_1\ AX_2\ AX_3)$$

$$=(1X_1\ 2X_2\ 3X_3)=(X_1\ X_2\ X_3)\begin{pmatrix}1&\cdot&\cdot\\\cdot&2&\cdot\\\cdot&\cdot&3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&\cdot&\cdot\\\cdot&2&\cdot\\\cdot&\cdot&3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

* ایده را بفهم راه حل را بیخیال!

قطری کردن.

$A \in M_n(\mathbb{F})$

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

مثلثی کردن (فرض کنیم $\mathbb{F}$ میدان بسته جبری باشد)

قضیه. اگر ماتریس A یک ماتریس $n\times n$ با درایه‌هایی از میدان $\mathbb{F}$ باشد، ماتریس معکوس پذیر P وجود دارد که PAP^{-1} یک ماتریس بالامثلثی است که درایه‌های روی قطر اصلی آن مقادیر ویژه‌ی A هستند.

اثبات. فرض کنید $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی A باشند، $u_1 \neq 0$ را یک بردار ویژه‌ی وابسته به λ_1 را توسعه به پایه‌ی $\{u_1,\dots,u_n\}$ از $\mathbb{F}^n$ می‌دهیم.

ایده*

$U_1 = [u_1\ u_2 \cdots u_n]$ معکوس پذیراند

$$AU_1 = (Au_1\ Au_2 \cdots Au_n) = (\lambda_1 v_1 \cdots) = U_1 \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$$

مثال. ماتریس زیر را به یک ماتریس مثلثی تحویل کنید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad f(x) = \det(xI_3 - A) = (x-1)^2(x-2)$$

ستون اول ویژگی مورد نظر را دارد و کار را با $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ادامه می‌دهیم، مقادیر ویژه‌ی B،

$$\det\begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 3 & x-4 \end{pmatrix} = x^2 - 3x - 4 + 6 = (x-2)(x-1)$$

مقادیر ویژه‌ی $B = 1, 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

مثلاً $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ یک بردار ویژه‌ی وابسته به 1 است

پایه $\{(1,1), (1,0)\}$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow U = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow U_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

فضاهای ضرب داخلی:

در طول این فصل $\mathbb{F}$ همواره نشان دهنده‌ی میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است، فرض کنیم V یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ باشد. گوییم $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ یک فضای ضرب داخلی است هرگاه نگاشت

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \longrightarrow \mathbb{F}$$
$$(v_1, v_2) \longmapsto \langle v_1, v_2\rangle$$

میدان

فضای برداری

در شرایط زیر صدق کند:

(1) خطی بودن نسبت به مولفه‌ی اول یعنی: $\forall \alpha\in\mathbb{F} \quad \forall v_1, v_2, v\in V$

$$\langle \alpha v_1 + v_2, v\rangle = \alpha\langle v_1, v\rangle + \langle v_2, v\rangle$$

(2) تقارن هرمیتی: $\forall v_1, v_2 \in V \quad \langle v_1, v_2\rangle = \overline{\langle v_2, v_1\rangle}$

(3) به ازای هر $v\neq 0$ داریم: $\langle v, v\rangle > 0$

نتیجه: به ازای هر $v\in V$ داریم:

$$\langle 0, v\rangle = \langle 0+0, v\rangle = \langle 0, v\rangle + \langle 0, v\rangle \Rightarrow \langle 0, v\rangle = 0$$

و به ویژه $\langle 0, 0\rangle = 0$

گزاره. به ازای هر $v_1, v_2, v\in V$ و $\alpha\in\mathbb{F}$

$$\langle v, \alpha v_1 + v_2\rangle = \bar{\alpha}\langle v, v_1\rangle + \langle v, v_2\rangle$$

مثال. ضرب داخلی کانونیک یا استاندارد روی $\mathbb{F}^n$:

$$\langle (x_1,\dots,x_n), (y_1,\dots,y_n)\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

دقت کن تعریف کرده است

(این ضرب روی $\mathbb{R}$ ضرب نقطه‌ای هم نام دارد)

مثال. روی $M_n(\mathbb{F})$:

$$\langle A, B\rangle := tr(AB^*)$$

مثال. فرض کنید V و W دو فضای برداری روی $\mathbb{F}$ باشند و $\langle \, , \, \rangle_W$ یک ضرب داخلی روی W باشد و $T: V \longrightarrow W$ خطی (I) یک‌به‌یک (II) باشد، یک ضرب داخلی روی V داریم:

$$\langle v_1, v_2 \rangle_V := \langle T(v_1), T(v_2) \rangle_W$$

$\Leftarrow$ روی هر فضای برداری V روی $\mathbb{F}$ یک ضرب داخلی می‌توان تعریف کرد.

V فضای برداری

$\dim V < \infty$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$T: V \longrightarrow \mathbb{F}^n$$
$$v \longmapsto [v]_B$$

می‌برد به مختصاتش در $\mathbb{F}^n$ و با آن کار می‌کند

تعریف:

فضای برداری V را یک فضای ضرب داخلی می‌نامیم هرگاه یک ضرب داخلی $\langle , \rangle : V\times V \to \mathbb{F}$ روی V داشته باشیم.

تعریف:

فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد و $v\in V$. نرم v (Norm) را با $\|v\|$ نمایش می‌دهیم که برابر است با

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

تمرین:

اگر V یک فضای ضرب داخلی باشد، $\alpha,\beta\in V$ و K یک اسکالر باشد آنگاه:

(i) $\|K\alpha\| = |K|\,\|\alpha\|$

(ii) $\|\alpha\| > 0 \quad \forall \alpha \neq 0$

(iii) $|\langle\alpha,\beta\rangle| \leq \|\alpha\|\,\|\beta\|$

(iv) $\|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$

تعریف:

فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد، $\alpha,\beta\in V$ گوییم α, β متعامد هستند هرگاه:

$\langle \alpha,\beta\rangle = 0$

زیرمجموعه $S\subseteq V$ را یک مجموعه متعامد نامیم هرگاه هر دو عضو متمایز S بر هم عمود باشند. مجموعه متعامد S را یک مجموعه متعامد یکه نامیم هرگاه برای هر $v\in S$، $\|v\|=1$.

قضیه:

هر مجموعه از بردارهای ناصفر دو به دو متعامد مستقل خطی است.

اثبات:

فرض کنیم S یک مجموعه از بردارهای ناصفر و متعامد باشد و $v_1,\dots,v_k\in S$ و $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{F}$، برای آنها داریم،

$$\sum_{i=1}^{K}\alpha_i v_i = 0$$

$$0 = \left\langle \sum_{j=1} \alpha_j v_j , v_i \right\rangle = \sum_{j=1} \alpha_j \langle v_j , v_i \rangle$$

ایده *

$$= \alpha_i \underbrace{\langle v_i , v_i \rangle}_{>0} = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \blacksquare$$

قضیه: فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد و $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک زیرمجموعه‌ی مستقل خطی آن باشد، آنگاه زیرمجموعه متعامد $\{e_1, \dots, e_n\}$ از V وجود دارد که برای هر $n = 1, \dots, n$

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$$

تعریف مهم *

که در آن $e_1 = v_1$ ، $\left(e_m = v_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\langle v_m , e_i \rangle}{\|e_i\|^2} e_i \right)$ ، $m = 2, \dots, n$

اثبات: به (استقرا روی m). فرض می‌کنیم حکم برای m برقرار است و برای $m+1$ برقرار ثابت می‌کنیم

* ایده: ساختنی و اثبات برقراری با استقرا

$\{e_1, \dots, e_{m+1}\}$

عمود بودن e_{m+1} بر e_j که $1 \le j \le m$:

$$\langle e_{m+1} , e_j \rangle = \left\langle v_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle v_{m+1}, e_i \rangle}{\|e_i\|^2} e_i , e_j \right\rangle$$

$$= \langle v_{m+1} , e_j \rangle - \left\langle \frac{\langle v_{m+1}, e_j \rangle}{\|e_j\|^2} e_j , e_j \right\rangle$$

$$= \langle v_{m+1} , e_j \rangle - \frac{\langle v_{m+1}, e_j \rangle}{\cancel{\|e_j\|^2}} \cancel{\langle e_j , e_j \rangle} = 0$$

پس $\{e_1, \dots, e_{m+1}\}$ متعامد هستند، به علاوه نشان دهیم

بدیهی است، با تساوی $\dim$. $\blacksquare$

$$\langle v_1, \dots, v_{m+1} \rangle = \langle e_1, \dots, e_{m+1} \rangle$$

(فرآیند گرام - اشمیت) (Gram-Schmidt)

$\{v_1, \dots, v_n\} \rightsquigarrow \{e_1, \dots, e_n\}$

$\rightsquigarrow \left\{ \frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\}$

$\Leftarrow$ نتیجه: هر فضای برداری با بعد متناهی یک پایه متعامد یکه دارد.

گزاره:
اگر $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای V باشد، $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$$

گزاره:
اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ یک مجموعه‌ی متعامد در فضای برداری V با بعد متناهی باشد، آنگاه:
$$m \leq \dim V$$

تعریف:
فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی، W یک زیرفضای V باشد، $\alpha \in V$. بردار $\beta \in W$ را بهترین تقریب α در زیرفضای W نامیم هرگاه
$$\forall \gamma \in W \quad \|\beta - \alpha\| \leq \|\gamma - \alpha\|$$

تمرین: الف) ثابت کنید $\beta \in W$ یک بهترین تقریب $\alpha \in V$ است اگر و تنها اگر $\alpha - \beta$ بر هر بردار W عمود باشد.

ب) اگر یک بهترین تقریب $\alpha \in V$ توسط بردارهای W وجود داشته باشد، یکتاست. آن را تصویر متعامد α بر W می‌نامیم.

ج) اگر $\dim W < \infty$، $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای W باشد، آنگاه
$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha, \beta_i \rangle \beta_i$$
بهترین تقریب α روی W است.

تعریف: فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی و $S \subseteq V$ ناتهی باشد. مکمل متعامد S که با $S^{\perp}$ نمایش داده می‌شود مجموعه تمام بردارهای از V است بر تمام اعضای S عمود باشند.

تمرین: $S^{\perp}$ زیرفضای V است.

$S = \{0\} \qquad \{0\}^{\perp} = V$

$S = V \qquad V^{\perp} = \{0\}$

تعریف: فرض کنیم W_1, W_2 زیرفضاهای برداری V باشند. گوییم V جمع مستقیم W_1, W_2 است، می‌نویسیم $V = W_1 \oplus W_2$ هرگاه $V = W_1 + W_2$ و $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

قضیه: اگر V یک فضای ضرب داخلی باشد، $\dim V < \infty$ و W زیرفضای V باشد:

$V = W \oplus W^{\perp}$

اثبات. فرض می‌کنیم $\{V_1, \dots, V_K\}$ یک پایه‌ی W باشد، و آن را به $B = \{V_1, \dots, V_K, V_{K+1}, \dots, V_n\}$ که پایه‌ای برای V باشد توسیع می‌دهیم، می‌توان پایه‌ی متعامد C به فرایند گرام اشمیت از B ساخت که $\langle e_1, \dots, e_K \rangle = \langle V_1, \dots, V_K \rangle = W$.

$C = \{e_1, \dots, e_K, e_{K+1}, \dots, e_n\}$

چون C پایه‌ی متعامد است، پس هر یک از $e_{K+1}, \dots, e_n$ بر $e_1, \dots, e_K$ عمود است لذا بر W عمود است، پس

$\{e_{K+1}, \dots, e_n\} \subseteq W^{\perp}$

ادعا می‌کنیم: $\langle \{e_{K+1}, \dots, e_n\} \rangle = W^{\perp}$ (مرحله آخر اثبات)

برای نشان دادن این مطلب عضو دلخواه $u=\sum_{i=1}\alpha_i e_i$ از $W^\perp$ را در نظر می‌گیریم

* می‌گیم چون هر عضو از $W^\perp$ توسط بردارهای $k+1$ تا n تولید می‌شود لذا $W^\perp \subseteq$ آن فضا و لذا مساوی هستند.

$$\forall i=1,\dots,k \qquad 0=\langle u,e_i\rangle=\langle \overbrace{\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_k e_k+\cdots+\alpha_n e_n}^{u,}\rangle$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\langle e_j,e_i\rangle=\alpha_i\langle e_i,e_i\rangle$$

$$\Rightarrow 0=\alpha_i\underbrace{\langle e_i,e_i\rangle}_{>0}\Rightarrow \alpha_i=0$$

$$\Rightarrow u=\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i e_i \in \langle e_{k+1},\dots,e_n\rangle$$

قضیه (کیلی - هامیلتون)

فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد و T یک عملگر خطی روی V باشد. اگر $f(x)$ چندجمله‌ای مشخصه T باشد، آنگاه $f(T)=0$

* تذکر: اگر $A\in M_n(\mathbb{F})$، $f(x)$ چندجمله‌ای مشخصه آن باشد، آنگاه $f(A)=0$

مثال: ماتریس معکوس‌پذیر $A\in M_3(\mathbb{C})$ را در نظر بگیرید که $\det(A)=1$, $tr(A)=tr(A^{-1})=0$. ثابت کنید $A^3=I_3$

اثبات. فرض کنید $f(x)$ چندجمله‌ای مشخصه A، $g(x)$ چندجمله‌ای مشخصه A^{-1} باشد.

$$f(x)=\det(xI_3-A)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$
$$=x^3+\qquad -1$$

$$g(x)=\det(xI_3-A^{-1})=x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$$
$$=x^3+\qquad -1$$

$$x=0\rightarrow -1=-\det A=\det(-A)=-a_0$$

$$1=\det I_3=\det(A^{-1}A)=\det(A^{-1})\det(A)\Rightarrow \det(A^{-1})=1\Rightarrow b_0=-1$$

$$\det(xI_n - A) = \det\begin{pmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & x-a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(x-a_{ii}) + \cdots$$

$$\Rightarrow \left(-\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)x^{n-1} = -trA\,x^{n-1}$$

(* نکته. اگر $B \in M_n(\mathbb{F})$ ، ضریب X^{n-1} در چندجمله‌ای مشخصه‌ی B برابر $-tr(B)$ است.)

$$\begin{cases} \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \text{حاصل ضرب مقادیر ویژه} = \det A = -1 \\ \text{جمع ریشه‌ها} = 0 \end{cases}$$

2 نکته‌ی مهم

(* فرض کنیم λ یک مقدار ویژه‌ی A باشد ($\lambda \neq 0$ زیرا A معکوس پذیر است)، و فرض کنیم Y یک بردار ویژه‌ی ناصفر وابسته به λ باشد.

$$AY = \lambda Y \rightarrow A^{-1}AY = \lambda A^{-1}Y \rightarrow Y = \lambda A^{-1}Y \rightarrow A^{-1}Y = \frac{1}{\lambda}Y$$

پس λ مقدار ویژه‌ی A است اگر و تنها اگر $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه‌ی A^{-1} باشد) از طرفی مقادیر ویژه ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه هستند:

$$f(\lambda) = 0 \quad , \quad g(1/\lambda) = 0$$

$$f(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda + 1 = 0$$

$$g(1/\lambda) = \frac{1}{\lambda^3} + b_1 \times \frac{1}{\lambda} - 1 = 0 \Rightarrow -1 - b_1\lambda^2 + \lambda^3 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a_1\lambda = b_1\lambda^2 \xrightarrow{\lambda \neq 0} a_1 = b_1\lambda$$

اگر $b_1 \neq 0 \Leftarrow \lambda = \frac{a_1}{b_1} \Leftarrow$ A فقط یک مقدار ویژه دارد

$$\Rightarrow f(x) = (x-\lambda)^3 \xrightarrow{\text{تناقض با ضریب } x^2 \text{ صفر}} \Rightarrow b_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 1 \xrightarrow{\text{کیلی همیلتون}} f(A) = A^3 - I_3 = 0 \Rightarrow A^3 = I_3 \quad \blacksquare$$

5. مثال) $\dim V<\infty$ ، T عملگر خطی روی V است. T با هر عملگر خطی خودتوان روی V جابجا می‌شود. ثابت کنید هر بردار ناصفر V یک بردار ویژه‌ی T است:

$(P^2=P \Rightarrow TP=PT)$ فرض

فرض کنیم $0\neq v\in V$

$W=\langle v\rangle=\{\lambda v/\lambda\in\mathbb{F}\}$

یک پایه‌ی V : $B=\{v,u_1,\dots,u_n\}$

نگاشت تصویر

$$P:V\longrightarrow V$$
$$\alpha v+\sum_{i=1}^{n}\beta_i u_i\longmapsto \alpha v$$

$$\Rightarrow P^2=P \Rightarrow TP=PT$$

$$P(v)\overset{*}{=}v$$

$$\operatorname{Im}P\subseteq\langle v\rangle \Rightarrow P(T(v))\in\langle v\rangle \Rightarrow T(P(v))\in\langle v\rangle$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} T(v)\in W=\langle v\rangle \Rightarrow \exists\lambda\ T(v)=\lambda v$$

* تمرین‌ها و نکته‌های روی [illegible] فراموش نشود.

The End

... گذر این حسی که بی تو دوری می‌کنم به هم دلگیرم!

تمام آرزوم این بود یه رویایی که شد دردم!
یه بار نوبت ما شد ببین چی آرزو کردم،

یه عمره با خودم می‌گم خدا رو شکر خوشبخته،
خدا رو شکر خوشبختی چقدر این نقش سخته!

تو را آرزو کردم، این دنیا کمالت درد،
خیلی چیزا هست تو دنیا که نشه آرزو کرد ؟!

Mid Term

«بسم الله النور»

← ماتریس و دستگاه معادلات خطی (D.lay)

1. تعریف ماتریس، جمع و ضرب آن
2. تابع وابسته به یک ماتریس ($T_{A+B}=T_A+T_B$ و $T_{AB}=T_A \circ T_B$)
3. تعریف ماتریس معکوس‌پذیر و ترانهاده (متقارن و پادمتقارن)
4. تعریف رد A (trace) ($tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$) و خواص آن
5. تعریف ترانهادی مزدوج $A^*=A$ ← ماتریس هرمیتی
6. تعریف ماتریس مقدماتی ← نمادها و نحوه عمل در ضرب
7. معکوس ماتریس‌های مقدماتی و ترانهاده‌های آن‌ها
8. تعریف ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی
9. هر ماتریس به ماتریس سطری پلکانی تبدیل می‌شود، در کلاس هم‌ارزی قرار می‌گیرد.
10.
   1. A سطر صفر ← معکوس‌پذیر نیست
   2. تحویل یافته سطری پلکانی معکوس‌پذیر $= I_n$
   3. A معکوس‌پذیر $\longleftrightarrow$ $I_n \simeq A$
   4. معکوس راست ← معکوس‌پذیر
   5. $A=A_1 \cdots A_n$ معکوس‌پذیر $\longleftrightarrow$ A_i معکوس‌پذیر $\forall i$
11. حل دستگاه معادلات خطی
12. A معکوس‌پذیر است $\longleftrightarrow$ $AX=B$ جواب یکتا داشته باشد.
13. λ مقدار ویژه $\longleftrightarrow$ $\lambda I_n - A$ معکوس‌ناپذیر باشد
   $\longleftrightarrow$ $(\lambda I_n - A)X=0$ جواب ناصفر داشته باشد $\longleftrightarrow$ $AX=\lambda X$, $X \neq 0$
14. λ مقدار ویژه A $\longleftrightarrow$ $p(\lambda)$ مقدار ویژه $p(A)$
15. A پوچ‌توان است ← تنها مقدار ویژه A صفر باشد

← جبر خطی (Haffman)

1. تعریف گروه آبلی و میدان ← فضای برداری (X روی آن فضای برداری) [گروه، میدان]

② تعریف زیرفضا و زیرفضا است $\longleftrightarrow$ $\lambda V_1 + V_2 \in W$

③ اشتراک گردایه‌ای از زیرفضاها، زیرفضا است.

④ تعریف مولّد

⑤ تعریف مستقل خطی و وابسته خطی

⑥* قضیه مهم برای اثبات خطی بودن

⑦ تعریف پایه

⑧* لم زورن $\leftarrow$ ق: هر فضای برداری ناصفر یک پایه دارد. $\leftarrow$ هر زیرمجموعه مستقل خطی به پایه گسترش داد

⑨ لم (1): $v_1, \dots, v_n \in V$ متمایز وابسته خطی‌اند اگر و تنها اگر $\exists K \quad V_K \in \langle V_1, \dots, V_{K-1} \rangle$

⑩ لم (2): اگر $\{v_1, \dots, v_n\}$ مستقل خطی و $\{w_1, \dots, w_m\}$ مولد باشند داریم $m \geq n$.

⑪ نتیجه (1): اگر $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه V باشد آنگاه هر پایه‌ی V متناهی است.

⑫ نتیجه (2): اگر B_1 و B_2 دو پایه V باشند $|B_1| = |B_2|$.

⑬ تعریف بعد (dim)، بعد $\{0\}$ برابر ۰، نامتناهی پایه بعد ∞ است.

⑭ تعریف: $\langle \bigcup_{i=1}^{n} W_i \rangle = W_1 + \dots + W_n = \{u_1 + \dots + u_n \mid u_i \in W_i \quad 1 \leq i \leq n\}$

⑮ ق: $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

⑮ مثال‌های تجربه بعد و پایه

⑯ پایه مرتب $\leftarrow$ ماتریس گذار از یک پایه به پایه دیگر $\leftarrow$ معکوس‌پذیر است $\leftarrow$ هر ماتریس معکوس‌پذیر ...

⑰ فضای سطری یک ماتریس

Final

70, 79, 80, 85, 94, 103, 104

«بسم الله النور»

← نگاشت خطی

1) T 1-1 ↔ $\ker T=\{0\}$ ↔ T ایزو یعنی هر مجموعه مستقل خطی در V را به مستقل خطی در W تصویر کند.

2) ق: تبدیل خطی $T: V\to W$ ، $\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$ ⇐ $T: V\to V$ ، 1-1 ↔ ONTO

3) ماتریس نگاشت خطی

4) ق: $\varphi: L(V,W)\to M_{n\times m}(\mathbb{F})$ ، $T\mapsto M(T,B,C)$ یک ایزومورفیسم است. ⇐ $\dim L(W,V)=mn$

5) ق: T ایزومورفیسم ⇔ ماتریس $M(T,B,C)$ وارون پذیر باشد.

6) دوگان فضای برداری ، $\perp$

7) (i) $\dim W+\dim W^{\perp}=\dim V$ ، (ii) $W^{\perp\perp}=W$ زیرفضای خودش

8) $\ker T^{t}=(\operatorname{Im} T)^{\perp}$

9) $\operatorname{rank} T^{t}=\operatorname{rank} T$

10) $M^{t}(T,B,C)=M(T^{t},B,C)$

11) $T_A: \mathbb{F}^n\to \mathbb{F}^m$ ، $X\mapsto AX$ آنگاه $\operatorname{Im} T_A$ برابر فضای ستونی A ⇐ رتبه فضای سطری و ستونی هر ماتریس برابر است.

← دترمینان

با جابجایی دو سطر منفی

1) $D: M_n(K)\to K$ دترمینان (1) n-خطی (2) متناوب (3) $D(I_n)=1$

2) قضیه: $E_j([a_{ij}]_{n\times n})=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}D_{ij}(A)$ ← وجود دترمینان ← یکتایی دترمینان

3) D، n-خطی متناوب باشد داریم: $D(A)=(\det A)\,D(I_n)$

4) تعریف adj ← گ : $(\operatorname{adj} A)A=A(\operatorname{adj} A)=(\det A)I_n$

5) ق: A معکوس پذیر ⇔ $\det A$ معکوس پذیر

6) قاعده‌ی کرامر ← اثبات $x_i=\frac{\det B_i}{\det A}$

$$\boxed{\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A(i|j)}$$

$\boxed{\text{درایه‌ی } (i,j)\text{ام } \; (-1)^{i+j}\det A(j|i)}$

← مقادیر ویژه *

1) $T(v)=\lambda v$ ، $\lambda\in F$ ↔ نگاشت $T-\lambda I_{dv}$ یک به یک نباشد. (معکوس پذیر نباشد)

↔ $\det(T-\lambda I_{dv})=0$

2) بردار ویژه وابسته به λ : $V_\lambda=\ker(T-\lambda I_{dv})$

3) برای ... کافی است ریشه $f(x)=\det(xI_n-A)$ را بدست آوریم

$T(v_1)=\lambda v_1$ ، ... ، $T(v_n)=\lambda v_n$ ، $M(T,B)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$

4) T قطری شدنی اگر پایه‌ای از V موجود باشد که هر عضو آن بردار ویژه T باشد.

5) $P(x)$ چندجمله‌ای باشد: λ مقدار ویژه T ، $P(\lambda)$ مقدار ویژه $P(T)$: $P(T)(v)=P(\lambda)v$

۶) گر W_1 تا W_k متناظر با ویژه‌داده‌های λ_1 تا λ_k باشد داریم $\dim \sum W_i = \sum \dim W_i$

۷) چندجمله‌ای مشخصه: $\det(XI_n - A) = \prod (X-\lambda_i)^{d_i} \leftarrow \dim W_i = d_i$

۸) ق: (i) قطری‌شدنی $\Leftrightarrow$ (ii) (iii) $\dim V = \sum \dim W_i$

۹) ؟

← فضای ضرب داخلی

۱) $\langle v+\alpha v_1+v_2\rangle = \bar{\alpha}\langle v, v_1\rangle + \langle v, v_2\rangle$

۲) $\langle (x_1,\dots,x_n), (y_1,\dots,y_n)\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$

۳) $\langle A,B\rangle := tr(AB^*)$

۴) $T: V \to W$ خطی و ۱-۱ باشد داریم: $\langle v_1, v_2\rangle_V := \langle Tv_1, Tv_2\rangle_W$

۵) نرم V: $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ ← خواص

۶) ق: چند قضیه در مورد تعامد (همه ساده)

۷) بهترین تقریب α در زیرفضای W را داریم

۸) مکمل متعامد $S^\perp$، جمع مستقیم، ق: $V = W \oplus W^\perp$

~~۹~~) قضیه کیلی همیلتن!

۱۰) $B \in M_n(F)$، ضریب X^{n-1} در چندجمله‌ای مشخصه B برابر $-tr(B)$ است

۱۱) λ مقدار ویژه A ← $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه A^{-1}

$\boxed{\text{The End}}$

دلیل اینکه آرومم، امید لمس دستاته،

همین لبخند پنهانی کنار لحن گرمته!

دلیل اینکه تنهایی، همین دستایه تنهامه،

همین دنیای تاریکم، همین تردید چشماته!

شب حس پریدن، دچار شک بی‌رنگی، من آرومم تو تنهایی، حقیقت دلو دلتنگی!...