به نام خدا

تمرین چهارم

1401 بهار – جبر خطی کاربردی

توضیحات

- پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و درصورت مشاهده هرگونه **تقلب** نمره **صفر** برای کل تمرین منظور خواهد شد.
- پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.
- در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق ایمیل la.spring1401.aut@gmail.com سوال خود را بپرسید.
- مهلت ارسال پاسخ ها تا ساعت **23:55 تاریخ 13 خرداد** می‌باشد.
- با توجه به فشردگی برنامه تمرین ها در طول ترم، به هیچ عنوان امکان تمدید تمرین وجود نخواهد داشت.
- پاسخ خود را به صورت یک فایل pdf و با فرمت **HW?_Name_StudentNumber** آپلود کنید. (مثال: HW4_LeiliBarekatein_9831072).

دانشکده مهندسی کامپیوتر

1- درستی یا نادرستی عبارات زیر را با آوردن دلیل مناسب تعیین کنید.

الف) λ مقدار ویژه از A است اگر و فقط اگر مقدار ویژه ای از A^T باشد.

ب) اگر A یک ماتریس قطری شدنی باشد و B با A مشابه باشد آنگاه B نیز قطری شدنی است.

ت) اگر B با A و C با A مشابه باشد آنگاه B با C مشابه است.

ث) اگر A معکوس پذیر باشد و با B مشابه باشد آنگاه B معکوس پذیر است و معکوس A با معکوس B مشابه است.

ج) اگر A با B مشابه باشد، آنگاه A^2 با B^2 مشابه است.

چ) اگر A و B مشابه باشند آنگاه رتبه یکسانی دارند.

ح) اگر λ مقدار ویژه ماتریس واون پذیر A باشد آنگاه λ^{-1} مقدار ویژه ماتریس A^{-1} است.

خ) اگر $A^2 = 0$ آنگاه تنها مقدار ویژه A صفر است.

2- مقادیر ویژه ماتریس A را به دست آورده و سپس بردار های ویژه ی آن را مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3- فرض کنید میخواهیم دنباله فیبوناچی را با استفاده از مفاهیمی که تا به حال خوانده ایم مدل سازی کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix}$$

الف) ماتریس A را بیابید.

ب) مقادیر ویژه و بردار ویژه A را بیابید.

ج) ماتریس A را تجزیه طیفی کنید. $(A = PDP^{-1})$

د) ماتریس B را برحسب n بیابید.

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

هـ) رابطه صریح برای F_n بیابید.

4- فرض کنید A یک ماتریس 2×2 و حقیقی با یک مقدار ویژه مختلط $a - bi = e$ و بردار متناظر آن به نام v در فضای C^2 تعریف شده باشد

الف) نشان دهید

$$-bRe(v) + aIm(v) = A(Im(v)) \qquad aRe(v) + bIm(v) = A\big(Re(v)\big)$$

ب) اگر P و C به صورت زیر تعریف شوند

$$C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad P = (Re_v \quad Im_v) \qquad A = PCP^{-1}$$

ثابت کنید $AP = PC$.

5- فرض کنید $\varepsilon = \{e_1, e_2, e_3\}$ پایه استاندارد برای R^3 و $\beta = \{b_1, b_2, b_3\}$ پایه ای برای فضای برداری V باشد و $T : R^3 \to V$ یک تبدیل خطی باشد که:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_1)b_1 - (x_1 + x_2)b_2 + (x_1 - x_2)b_3$$

1. $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ را محاسبه کنید.
2. $[T(e_1)]_\beta, [T(e_2)]_\beta, [T(e_3)]_\beta$ را محاسبه کنید.
3. ماتریس تبدیل T را تحت پایه های ε, β بیابید.

6- ماتریس های زیر را در صورتی که بر مجموعه ی اعداد حقیقی قطری شدنی هستند، قطری سازی کنید.

$$b)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad a)\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

7- ثابت کنید:

1. مجموعه درایه های روی قطر اصلی هر ماتریس قطری شدنی برابر است با مجموع مقادیر ویژه ی آن ماتریس.
2. اگر A یک ماتریس مربعی باشد و $A^2 = A$ (چنین ماتریسی را ماتریس تصویر می نامند)، آنگاه مقادیر ویژه ی این ماتریس 0 یا 1 است.

8- فرضیات زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. نشان دهید v_1, v_2, v_3 بردار ویژه های A هستند.
2. فرض کنید x_0 برداری در R^3 باشد که درایه های آن نامنفی باشند و مجموعشان 1 باشد. ثابت کنید وجود دارند ثابت هایی مثل c_1, c_2, c_3 که $x_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ باشد. همچنین $w^T x_0$ را محاسبه کنید و نتیجه بگیرید $c_1 = 1$.
3. برای $k = 1, 2, 3, \ldots$ تعریف می کنیم $x_k = A^k x_0$ که x_0 در قسمت 2 معرفی شده است. نشان دهید $x_k \rightarrow v_1$ زمانی که k افزایش می یابد.

9- ماتریس A به همراه دنباله ی x_k که از power method به دست آمده، آورده شده است. بیشترین مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر با آن را تخمین بزنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$$

دنباله ی x_k به ترتیب k صعودی از چپ به راست:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6875 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.5577 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.5188 \\ 1 \end{bmatrix}$$

10- (امتیازی) فرض کنید A یک ماتریس n × n با مقادیر ویژه متمایز $\lambda_1 , \dots , \lambda_k$ باشد. موارد زیر را ثابت کنید :

1. بعد فضای ویژه مربوط به λ_k کمتر از تکرر آن است.
2. ماتریس A قطری شدنی است اگر و فقط اگر بعد فضای ویژه مربوط به λ_k برابر با تکرر آن باشد.

11-(امتیازی) ماتریس مربعی A را درنظر بگیرید.

الف)در صورتی که مجموع هر سطر آن برابر s باشد، نشان دهید s یک مقدار ویژه برای A است.

ب)اگر به جای سطر، مجموع درایه های ستون های این ماتریس s باشد، آیا گزاره همچنان درست است؟

پ)با توجه به گزاره های بالا فرض کنید جمع درایه های ستون یک ماتریس 1 باشد. فرض کنید که $\lambda \neq 1$ یک مقدار ویژه آن ماتریس باشد و w بردار ویژه متناظر با λ باشد. ثابت کنید که جمع درایه های w برابر صفر است.