۱. فضای برداری

در فصل پیش ساختار جبری $\mathbb{R}^n$ و زیرفضاهای آن بررسی شد. همه نتایج فصل پیش با توجه به ساختار جبری معرفی شده روی $\mathbb{R}^n$ به‌دست آمدند. بنابراین هر جای دیگر که ساختار جبری مشابهی وجود داشته باشد نتایج فصل پیش نیز برقرار خواهند بود. برای مثال مجموعه چند جمله‌ای‌های حقیقی با درجه کمتر از n دارای ساختار جبری مشابه $\mathbb{R}^n$ است. هر دو چند جمله‌ای را می‌توان باهم جمع کرد و یک عدد حقیقی را در یک چند جمله‌ای ضرب کرد. این دو عمل دارای ویژگی‌های مشابه عمل‌های جمع برداری و ضرب اسکالر در $\mathbb{R}^n$ اند. بنابراین مفاهیمی مثل زیرفضاها، مجموعه‌های مستقل خطی، پایه و بعد برای این مجموعه نیز قابل تعریف اند و قضایای فصل پیش در مورد این مفاهیم همچنان برقرار خواهند بود. چند جمله‌ای‌های مختلط نیز دارای ویژگی‌هایی مشابه‌اند. تنها فرقی که در اینجا وجود دارد این است که اسکالرها می‌توانند مختلط باشند. ولی چون اعداد مختلط نیز دارای ساختار جبری مشابه اعداد حقیقی است هیچ مشکلی در تعمیم مفاهیم فصل پیش برای چند جمله‌ای‌های مختلط ایجاد نمی‌شود. در این فصل این موضوع را به صورتی جامع بررسی می‌کنیم. ابتدا آن دسته از ویژگی‌های جبری‌ای را که در بررسی‌های ما مهم بودند مورد بازبینی قرار می‌دهیم.

میدان مجموعه‌ای با ساختار جبری مشابه $\mathbb{R}$

ویژگی‌های جبری اعداد حقیقی که در فصل پیش مورد استفاده قرار گرفتند عبارتند از

۱. (ویژگی‌های جمع). $\mathbb{R}$ به همراه عمل جمع یک گروه آبلی است، یعنی

- (شرکت پذیری). برای هر s,t,r در $\mathbb{R}$ داریم $(s+t)+r=s+(t+r)$.
- (جابجایی). برای هر s,t در $\mathbb{R}$ داریم $s+t=t+s$.
- (وجود عضو خنثی). جمع هر عددی در $\mathbb{R}$ با صفر برابر است با همان عدد.
- (وجود عضو قرینه یا وارون جمع). برای هر عددی مانند $t\in\mathbb{R}$، عددی مانند $s\in\mathbb{R}$ وجود دارد که $t+s=0$. (معمولاً قرینه t را با $-t$ نمایش می‌دهیم.)

۲. (ویژگی‌های ضرب). $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ به همراه عمل ضرب یک گروه آبلی است، یعنی

- (شرکت پذیری). برای هر s,t,r در $\mathbb{R}$ داریم $(s.t).r=s.(t.r)$.
- (جابجایی). برای هر s,t در $\mathbb{R}$ داریم $s.t=t.s$.
- (وجود عضو خنثی ضرب). حاصلضرب هر عدد حقیقی در ۱ برابر است با همان عدد.
- (وجود عضو وارون ضرب). برای هر عدد ناصفری مانند $s\in\mathbb{R}$ عددی مانند t وجود دارد که $s.t=1$. (معمولاً وارون t را با t^{-1} یا $\frac{1}{t}$ نمایش می‌دهیم.)

۳. (رابطه جمع و ضرب نسبت به هم). عمل ضرب روی عمل جمع پخش می‌شود، یعنی

- برای هر s,t,r در $\mathbb{R}$ داریم $(s+t).r=s.r+t.r$.

این ویژگی‌ها برای اعمال جمع و ضرب اعداد مختلط یا گویا نیز برقرار اند. در نتیجه مجموعه اسکالرها می‌توانند اعداد مختلط یا گویا باشند. مجموعه‌های زیاد دیگری نیز با این ساختار جبری وجود دارند که مثال‌هایی از آنها را جلوتر می‌بینیم.

تعریف. به مجموعه ناتهی F با دو عمل + و. *میدان* گوییم هرگاه این دو عمل دارای ویژگی‌های بالا باشند، یعنی

۱. (ویژگی‌های جمع). F به همراه عمل جمع یک گروه آبلی باشد، یعنی

- **(شرکت پذیری). برای هر s,t,r در F داشته باشیم $(s+t)+r=s+(t+r)$.**
- **(جابجایی). برای هر s,t در F داشته باشیم $s+t=t+s$.**
- **(وجود عضو خنثی). عضوی مانند 0 در F وجود داشته باشد که برای هر s در F، $s+0=s$. (به این عضو معمولاً صفر میدان گفته می‌شود)**
- **(وجود عضو قرینه). برای هر $t\in F$ عضوی مانند $s\in F$ وجود داشته باشد که $t+s=0$. (معمولاً قرینه t را با $-t$ نمایش می‌دهند)**

۲. (ویژگی‌های ضرب). مجموعه اعضای ناصفر با عمل ضرب یک گروه آبلی باشد، یعنی

- **(شرکت پذیری). برای هر s,t,r در F داشته باشیم $(s.t).r=s.(t.r)$.**
- **(جابجایی). برای هر s,t در F داشته باشیم $s.t=t.s$.**
- **(وجود عضو خنثی ضرب). عضوی ناصفر مانند ۱ در F وجود داشته باشد که برای هر $s\in F$، $s.1=s$. (به این عضو معمولاً یک گفته می‌شود)**
- **(وجود عضو وارون ضرب). برای هر عضو ناصفر مانند t عضوی مانند s وجود داشته باشد که $s.t=1$.**

۳. (رابطه جمع و ضرب نسبت به هم). عمل ضرب روی عمل جمع پخش شود، یعنی

- **برای هر s,t,r در F داشته باشیم $(s+t).r=s.r+t.r$.**

نکات زیر به سادگی از ویژگی‌های بالا نتیجه می‌شود.

- صفر و یک در میدان یکتا هستند. (یعنی عضو دیگری با ویژگی آنها وجود ندارد.)
- وارون جمعی یک عضو (قرینه آن عضو) و وارون ضربی یک عضو ناصفر یکتا هستند.
- حاصل ضرب صفر در هر عضو میدان برابر صفر می‌شود.
- حاصل‌ضرب دو عضو ناصفر یک عضو ناصفر است.

مثال. فرض کنید n یک عدد طبیعی است. دو عدد صحیح را همنهشت به پیمانه n گوییم هرگاه باقی‌مانده آنها بر n برابر باشند. به عبارت دیگر $x \underset{n}{\equiv} y$ اگر $n \mid x - y$. همنهشتی یک رابطه هم‌ارزی روی عداد صحیح است. مجموعه دسته‌های این هم‌ارزی را با $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{Z}_n$ نمایش می‌دهند. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که جمع و ضرب اعداد صحیح روی $\mathbb{Z}_n$ اعمال جمع و ضربی القا می‌کنند که همه ویژگی‌های جمع و ضرب میدان را جز احتمالاً وجود عضو وارون ضرب دارند. اگر n به صورت حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد آنگاه حاصل‌ضرب دسته‌های هم‌ارزی متناظر این دو عدد برابر دسته هم‌ارزی عدد صفر است. بنابراین در این حالت $\mathbb{Z}_n$ میدان نیست. اما اگر n عددی اول باشد این مشکل وجود ندارد و درنتیجه $\mathbb{Z}_p$ اگر p اول باشد یک میدان است. توجه کنید که این میدان p عضو دارد و اگر یک را p بار با خودش جمع کنیم عضو صفر بدست می‌آید. به عبارت دیگر در این میدان $p = ۰$. مشخصه یک میدان کوچک‌ترین عدد طبیعی p است که اگر p بار یک را با خودش جمع کنیم عضو صفر بدست می‌آید. اگر چنین عددی وجود نداشت می‌گوییم مشخصه میدان برابر بینهایت است. خواننده به‌سادگی می‌تواند بررسی کند که مشخصه یک میدان حتماً باید اول باشد.

فضای برداری مجموعه‌ای با ساختار مشابه $\mathbb{R}^n$

در قسمت قبل ویژگی‌های جبری مورد نیاز برای اسکالرها بررسی شدند. در این قسمت ویژگی‌های جبری $\mathbb{R}^n$ مورد توجه قرار خواهند گرفت. $\mathbb{R}^n$ دارای دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالر است که دارای ویژگی‌های زیر اند.

۱. (ویژگی‌های جمع برداری). $\mathbb{R}^n$ با عمل جمع برداری یک گروه آبلی است، یعنی

(شرکت پذیری). برای هر u, v, w در $\mathbb{R}^n$ داریم $(u+v)+w = u+(v+w)$.

(جابجایی). برای هر u, v در $\mathbb{R}^n$ داریم $u+v = v+u$.

(وجود عضو خنثی). جمع بردار صفر با هر بردار در $\mathbb{R}^n$ برابر همان بردار است.

(وجود عضو قرینه). برای هر $v \in \mathbb{R}^n$ عضوی مانند $u \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد که $v+u=0$. (معمولاً قرینه v را با $-v$ نمایش می‌دهیم)

۲. (ویژگی‌های ضرب اسکالر).

(شرکت پذیری). برای هر s, t در $\mathbb{R}$ و هر v در $\mathbb{R}^n$ داریم $(s.t).v = s.(t.v)$.

برای هر v در $\mathbb{R}^n$ داریم $1.v = v$.

۳. (رابطه جمع و ضرب اسکالر نسبت به هم). عمل ضرب اسکالر روی عمل جمع اعضای $\mathbb{R}^n$ و همچنین جمع اعداد در میدان $\mathbb{R}$ پخش می‌شود، یعنی

برای هر t در $\mathbb{R}$ و هر u, v در $\mathbb{R}^n$ داریم $t.(u+v) = t.u + t.v$.

برای هر s, t در $\mathbb{R}$ و هر v در $\mathbb{R}^n$ داریم $(s+t).v = s.v + t.v$.

توجه داشته باشید که در اینجا اسکالرها خود یک میدان اند و دارای جمع و ضرب هستند. همچنین می‌توانیم آنها را در بردارها ضرب کنیم که حاصل یک بردار می‌شود. این ضرب با عمل ضرب بین اسکالرها تفاوت دارد. با این حال به آن ضرب اسکالر گوییم و منظورمان ضرب یک اسکالر در یک بردار است. دو بردار را نیز می‌توان جمع کرد که نتیجه آن یک بردار می‌شود. اگر چه ویژگی‌های جمع برداری همان ویژگی‌های جمع بین اسکالرها هستند اما این دو جمع با هم متفاوت اند.

تعریف فضای برداری

فرض کنید اعضای مجموعه V را بتوان با هم جمع کرد به گونه‌ای که حاصل باز عضوی از آن مجموعه باشد. همچنین فرض کنید بتوان اعداد میدان F را (که معمولاً به آنها اسکالر می‌گوییم) در اعضای V ضرب کرد به گونه‌ای که حاصل باز عضوی در V باشد. در این صورت می‌گوییم V به همراه این دو عمل یک *فضای برداری روی میدان* F است هرگاه این دو عمل دارای ویژگی‌های زیر باشند.

۱. (ویژگی‌های جمع). V به همراه عمل جمع یک گروه آبلی باشد، یعنی

(شرکت پذیری). برای هر u, v, w در V داشته باشیم $(u+v)+w = u+(v+w)$.

(جابجایی). برای هر u, v در V داشته باشیم $u+v = v+u$.

(وجود عضو خنثی). عضوی مانند 0 در V وجود داشته باشد که برای هر v در V، $v+0 = v$. معمولاً به این عضو صفر V گوییم و نباید آن را با صفر میدان F اشتباه کنید.

(وجود عضو قرینه). برای هر $v \in V$ عضوی مانند $u \in V$ وجود داشته باشد که $v+u=0$. (معمولاً قرینه v را با $-v$ نمایش می‌دهیم).

۲. (ویژگی‌های ضرب اسکالر).

(شرکت پذیری) برای هر s, t در F و هر v در V داشته باشیم $(st).v = s.(t.v)$.

برای هر v در V داشته باشیم $1.v = v$.

---

۳. (رابطه جمع و ضرب اسکالر نسبت به هم). عمل ضرب اسکالر روی عمل جمع اعضای V و همچنین جمع اعداد در میدان پخش شود، یعنی

برای هر t در F و هر u,v در V داشته باشیم $t.(u+v)=t.u+t.v$.

برای هر s,t در F و هر v در V داشته باشیم $(s+t).v=s.v+t.v$.

معمولاً اعضای V را *بردار* می‌نامیم و به عمل جمع آنها *جمع برداری* می‌گوییم. هر گاه روشن باشد که با چه میدانی سروکار داریم، به V برای اختصار *فضای برداری* می‌گوییم. معمولاً هم صفر میدان را و هم صفر فضای برداری را با ۰ نمایش می‌دهیم. این ممکن است کمی گمراه کننده بنظر برسد. به هر حال باید دقت داشت که اگر ۰ در یک بردار ضرب شود صفر میدان است و اگر با یک بردار جمع شود صفر فضای برداری است.

نکات زیر به سادگی از ویژگی‌های بالا نتیجه می‌شود.

- بردار صفر در یک فضای برداری یکتا است. یعنی عضو دیگری با ویژگی آن وجود ندارد. زیرا

$$\left.\begin{array}{l}\forall v\in V \;:\; \circ+v=v\\ \forall v\in V \;:\; \overset{*}{\circ}+v=v\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \circ=\circ+\overset{*}{\circ}=\overset{*}{\circ}$$

- قرینه هر بردار یکتا است. زیرا فرض کنید u,u' هردو قرینه بردار v باشد. آنگاه

$$u=u+\circ=u+(v+u')=(u+v)+u'=\circ+u'=u'$$

- اگر $u+v=w+v$ آنگاه $u=w$. برای اثبات کافی است دو طرف تساوی را با قرینه v جمع کنید.
- اگر $t.u=t.w$ و t اسکالری ناصفر باشد آنگاه $u=w$. برای اثبات کافی است دو طرف تساوی را در وارون t ضرب کنید و از ویژگی $۱.v=v$ استفاده کنید.
- حاصل ضرب عدد صفر در هر بردار برابر بردار صفر می‌شود. کافی است دو طرف تساوی $\circ.v=(\circ+\circ).v=\circ.v+\circ.v$ را با قرینه $\circ.v$ جمع کنید.
- حاصل ضرب قرینه عدد ۱ در هر برداری برابر قرینه آن بردار می‌شود. به عبارت دیگر همیشه $-v=(-۱).v$. زیرا

$$\circ=\circ.v=(۱+(-۱)).v=۱.v+(-۱).v=v+(-۱).v$$

زیرفضاهای برداری

فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و $W\subseteq V$ مجموعه‌ای ناتهی از آن باشد. W را زیرفضای برداری V گوییم اگر با همان جمع برداری و ضرب اسکالر روی V خود یک فضای برداری روی میدان F باشد. به این ترتیب لازم است که جمع هر دو بردار در W برداری در W باشد. همچنین باید حاصل ضرب هر عدد در هر بردار W، برداری در W باشد. به عبارت دیگر W باید تحت عمل جمع برداری و ضرب اسکالر V بسته باشد. یعنی جمع هر دو عضو W و ضرب هر اسکالر در هر عضو W همچنان برداری در W باشد.

از طرفی دیگر اگر زیر مجموعه ناتهی $W\subseteq V$ تحت جمع برداری و ضرب اسکالر روی V بسته باشد آنگاه با توجه به ویژگی‌های بالا بردار صفر و قرینه هر عضو W، در W قرار خواهند داشت. ویژگی‌های دیگر عمل جمع برداری و ضرب اسکالر به وضوح برای بردارهای داخل W نیز برقرارند زیرا برای همه بردارهای داخل V برقرارند. بنابراین W با جمع برداری و ضرب اسکالر روی V خود یک فضای برداری خواهد بود.

گزاره. **زیر مجموعه ناتهی W از فضای برداری V زیرفضای برداری آن است اگر و تنها اگر تحت جمع برداری و ضرب اسکالر بسته باشد. به عبارت دیگر زیر مجموعه ناتهی W از فضای برداری V زیرفضای برداری آن است اگر و تنها اگر برای هر $r\in F$ و هر $w_۱,w_۲\in W$ داشته باشیم $w_۱+rw_۲\in W$.**

ویژگی‌های فضای برداری

همه ویژگی‌هایی که در فصل قبل برای $\mathbb{R}^n$ نشان دادیم برای یک فضای برداری دلخواه نیز برقرار اند. برای یادآوری همه آنها را در اینجا به صورت خلاصه ذکر می‌کنیم. اثبات این ویژگی‌ها کاملاً شبیه اثبات آنها برای $\mathbb{R}^n$ است.

۱. اشتراک هر تعداد از زیرفضاها خود یک زیرفضای برداری است.

۲. کوچک‌ترین زیرفضای شامل مجموعه S وجود دارد که آن را زیرفضای تولید شده توسط S می‌نامیم و با $\langle S\rangle$ نمایش می‌دهیم. در واقع این زیرفضا برابر است با

$$\langle S\rangle = \{t_۱v_۱ + \ldots + t_kv_k : k \in \mathbb{N}\cup\{۰\}, v_i \in S, t_i \in F\}$$

یعنی $\langle S\rangle$ مجموعه همه ترکیب‌های خطی اعضای S است.

۳. اگر $S \subseteq T$ آنگاه $\langle S\rangle \subseteq \langle T\rangle$.

۴. اگر $W \subseteq V$ زیرفضایی از V باشد آن گاه $\langle W\rangle = W$.

۵. اگر $W_۱, W_۲ \subseteq V$ زیرفضاهایی از V باشند آنگاه

$$\langle W_۱ \cup W_۲\rangle = W_۱ + W_۲ \doteq \{w_۱ + w_۲ : w_۱ \in W_۱, w_۲ \in W_۲\}$$

۶. فرض کنید S یک مجموعه دلخواه از بردارها است. تغییرات زیر روی مجموعه S هیچ تغییری در فضای تولید شده توسط آن ایجاد نمی‌کند.

الف) جابجا کردن اعضای S. (واضح است)

ب) ضرب کردن یک عضو S در اسکالری ناصفر.

ج) جمع کردن مضربی از یک عضو S با عضو دیگر.

د) اضافه کردن عضوی از فضای تولید شده توسط S به S.

۷. مجموعه S را مستقل خطی گویند اگر هیچ ترکیب خطی از اعضای متمایز S برابر صفر نشود مگر اینکه همه ضرایبش صفر باشد. به عبارت دیگر اگر $v_۱, \ldots, v_k$ اعضایی متمایز در S باشند آنگاه

$$t_۱v_۱ + \cdots + t_kv_k = ۰ \quad \Rightarrow \quad t_۱ = \cdots = t_k = ۰$$

۸. S مستقل خطی است اگر وتنها اگر فضای تولید شده توسط مجموعه S با حذف هر عضو آن اکیداً کوچک شود. به عبارت دیگر S مستقل خطی است اگر وتنها اگر برای هر $s \in S$، داشته باشیم $\langle S \setminus \{s\}\rangle \subsetneq \langle S\rangle$.

۹. تهی مجموعه‌ای مستقل خطی است.

۱۰. هر زیر مجموعه یک مجموعه مستقل خطی خود مستقل خطی است.

۱۱. اگر S مستقل خطی باشد هر بردار $\langle S\rangle$ دارای نمایش یکتا به صورت ترکیب خطی اعضای S است.

۱۲. اگر S مستقل خطی و $v \notin \langle S\rangle$ آن گاه $S \cup \{v\}$ مستقل خطی است.

یک *پایه* برای فضای V مجموعه‌ای مستقل خطی است که آن فضا را نیز تولید کند. اگر یک فضایی با متناهی بردار تولید شود به آن فضا، فضای برداری با تولید متناهی می‌گوییم.

۱۳. اگر $V = \langle v_۱, \ldots, v_k\rangle$ و $\{w_۱, \ldots, w_l\} \subseteq V$ مستقل خطی باشد آنگاه

۱. $l \le k$

---

۲. v_iها را می‌توان به یک پایه برای V تقلیل داد.

۳. w_iها را می‌توان به یک پایه برای V گسترش داد.

۴. V دارای پایه است وتعداد اعضای هر دو پایه V یکسان است.

بنابراین هر فضای برداری با تولید متناهی دارای یک پایه است و تعداد اعضای هر دو پایه آن نیز یکسان است. به این عدد *بُعد* آن فضای برداری می‌گوییم. دقت کنید که اگر فضایی با تولید متناهی نباشد آنگاه هیچ پایه متناهی نخواهد داشت. به همین سبب به این فضاهای برداری فضای با بعد نامتناهی نیز گفته می‌شود. البته قضیه بالا چیزی در مورد وجود پایه برای این نوع فضاها نمی‌گوید. ولی به روشی دیگر می‌توان نشان داد هر فضای برداری دارای پایه است.

۱۴. اگر V با تولید متناهی باشد و $W \subseteq V$ زیرفضایی از آن باشد آنگاه W نیز با تولید متناهی است و $\dim W_1 \leq \dim W_2$. تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که $W = V$.

۱۵. هر مجموعه مستقل خطی n عضوی در یک فضای برداری n بعدی پایه‌ای برای آن است.

۱۶. هر مجموعه n عضوی که یک فضای برداری n بعدی را تولید کند پایه‌ای برای آن است.

۱۷. اگر W_1 و W_2 دو زیرفضای با تولید متناهی در فضای برداری V باشند آنگاه

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

اگر $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ آنگاه $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$. در این حالت هر عضو $w \in W = W_1 + W_2$ نمایش یکتایی به صورت $w = w_1 + w_2$ دارد که در آن $w_1 \in W_1$ و $w_2 \in W_2$. به w_1 و w_2 مولفه‌های w در تجزیه $W = W_1 + W_2$ می‌گویند. اجتماع پایه‌های W_1 و W_2 یک پایه برای W خواهد بود. این ویژگی‌های مهم در چنین تجزیه‌ای برای k زیرفضا نیز برقرار است. در قسمت بعد این موضوع به صورت مبسوط شرح داده خواهد شد.

جمع مستقیم زیرفضاها

فرض کنید $V_1,\dots,V_k$ زیرفضاهایی از V باشند. اگر تساوی

$$v_1+\dots+v_k=0$$

که در آن $v_1\in V_1,\dots,v_k\in V_k$، تنها زمانی اتفاق بیفتد که $v_1=\dots=v_k=0$، $V_1,\dots,V_k$ را *مستقل خطی* می‌نامیم.

قضیه. فرض کنید $V_1,\dots,V_k$ زیرفضاهایی با بعد متناهی از V اند. گزاره‌های زیر معادل‌اند.

$V_1,\dots,V_k$ مستقل خطی اند.

اگر $\beta_1,\dots,\beta_k$ به‌ترتیب پایه‌هایی برای $V_1,\dots,V_k$ باشند، آنگاه دنباله $(\beta_1,\dots,\beta_k)$ پایه‌ای برای $V_1+\dots+V_k$ است.

پایه‌های $\beta_1,\dots,\beta_k$ به‌ترتیب برای $V_1,\dots,V_k$ وجود دارند که دنباله $(\beta_1,\dots,\beta_k)$ پایه‌ای برای $V_1+\dots+V_k$ باشد.

$\dim(V_1+\dots+V_k)=\dim V_1+\dots+\dim V_k$

برای هر $1\le i\le k$، اشتراک V_i با مجموع زیرفضاهای دیگر، زیرفضای بدیهی صفر است.

برای هر $1\le i\le k$، $V_i\cap(V_1+\dots+V_{i-1})=\{0\}$

هر عضو $V_1+\dots+V_k$ نمایش یکتا به صورت $v_1+\dots+v_k$ دارد که در آن $v_i\in V_i$.

نکته. این قضیه برای زیرفضاهای دلخواه $V_1,\dots,V_k$ اگرچه با بعد متناهی نیز نباشند، برقرار است.

تعریف. در صورتی که $V_1,\dots,V_k$ مستقل خطی باشند مجموع $V_1+\dots+V_k$ را مجموع مستقیم V_iها می‌نامند و برای تاکید، این مجموع را به صورت $V_1\oplus\dots\oplus V_k$ نمایش می‌دهند.

اثبات.

(۱) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنید $\beta_i=\{v_1^i,\dots,v_{k_i}^i\}$ و

$$(a_1^1v_1^1+\dots+a_{k_1}^1v_{k_1}^1)+(a_1^2v_1^2+\dots+a_{k_2}^2v_{k_2}^2)+\dots+(a_1^kv_1^k+\dots+a_{k_k}^kv_{k_k}^k)=0$$

اگر برای هر i قرار دهیم $v_i=a_1^iv_1^i+\dots+a_{k_i}^iv_{k_i}^i$ آنگاه $v_i\in V_i$ و $v_1+\dots+v_k=0$. بنابراین برای هر i، $v_i=0$ و چون β_i پایه‌ای برای V_i است، $a_1^i=\dots=a_{k_i}^i=0$. در نتیجه همه ضرایب ترکیب خطی بالا صفر اند. این نشان می‌دهد $(\beta_1,\dots,\beta_k)$ مستقل خطی است. اما واضح است که این مجموعه $V_1+\dots+V_k$ را هم تولید می‌کند. بنابراین پایه‌ای برای آن است.

(۲) $\Leftarrow$ (۳) $\Leftarrow$ (۴) بدیهی است.

(۴) $\Leftarrow$ (۵). فرض کنید $W_i=V_1+\dots+V_{i-1}+V_{i+1}+\dots+V_k$. در این صورت

$$V_1+\dots+V_k=V_i+W_i.$$

بنابراین

$$\dim(V_1+\dots+V_k)=\dim(V_i)+\dim(W_i)-\dim(V_i\cap W_i)$$

از آنجا که دنباله متشکل از پایه‌های V_jها $(j\neq i)$ مولدی برای W_i تشکیل می‌دهد (که فعلاً نمی‌دانیم آیا پایه است یا نه) خواهیم داشت

$$\dim(W_i)\le\dim V_1+\dots+\dim V_{i-1}+\dim V_{i+1}+\dots+\dim V_k$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned}\dim V_1 + \cdots + \dim V_k &= \dim\left(V_1 + \cdots + V_k\right)\\ &= \dim V_i + \dim W_i - \dim(V_i \cap W_i)\\ &\le \left(\dim V_1 + \cdots + \dim V_k\right) - \dim\left(V_i \cap W_i\right)\end{aligned}$$

بنابراین $\dim\left(V_i \cap W_i\right) \le 0$ و در نتیجه $V_i \cap W_i = \{0\}$.

(۵) ⇐ (۶). با نماد گزاری بالا،

$$V_i \cap \left(V_1 + \cdots + V_{i-1}\right) \subseteq V_i \cap W_i = \{0\}$$

(۶) ⇐ (۱). با استقرا روی i نشان می‌دهیم $V_1,\ldots,V_i$ مستقل خطی اند. در حالت $i = 1$، چیزی برای اثبات وجود ندارد! فرض کنید حکم برای iای درست باشد و $v_1 + \cdots + v_{i+1} = 0$ که در آن برای هر j، $v_j \in V_j$. در این صورت $v_1 + \cdots + v_i = -v_{i+1}$، بنابراین

$$v_1 + \cdots + v_i = -v_{i+1} \in \left(V_1 + \cdots + V_i\right) \cap V_{i+1} = \{0\}$$

در نتیجه $v_{i+1} = 0$ و $v_1 + \cdots + v_i = 0$. از آنجایی که $V_1,\ldots,V_i$ مستقل خطی است، داریم $v_1 = \cdots = v_i = 0$. این نتیجه می‌دهد که $V_1,\ldots,V_{i+1}$ نیز مستقل خطی است.

(۱) ⇐ (۷). فرض کنید $v_i, v_i' \in V_i$ و $v_1 + \cdots + v_k = v_1' + \cdots + v_k'$. در این صورت

$$(v_1 - v_1') + \cdots + (v_k - v_k') = 0$$

چون $v_i - v_i' \in V_i$ و $V_1,\ldots,V_k$ مستقل خطی اند، از تساوی بالا نتیجه می‌شود که $v_1 - v_1' = \ldots = v_k - v_k' = 0$. به عبارت دیگر برای هر i، $v_i = v_i'$.

(۷) ⇐ (۱). مستقل خطی بودن یعنی ۰ نمایش یکتا به صورت $v_1 + \cdots + v_k = 0$ دارد که برای هر i، $v_i \in V_i$.

مثال‌ها

قضیه‌ای به عنوان کاربرد.

اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ و $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ آنگاه یک چند جمله‌ای یکتا با درجه کمتر از n وجود دارد که $p(x_i) = a_i$

حل. قرار دهید

$$f_i(x) = \prod_{j \ne i} (x - x_j) \,/\, (x_i - x_j)$$

به این ترتیب $f_i(x_j)$ اگر i مساوی با j باشد برابر ۱ و در غیر این صورت برابر صفر خواهد بود. بنابراین $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$ یک چند جمله‌ای با درجه کمتر از n است (این فضا را با P^n نمایش می‌دهیم) که برای آن داریم

$$(a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n)(x_i) = a_1 f_1(x_i) + \cdots + a_n f_n(x_i) = a_i$$

با توجه به رابطه بالا تنها چندجمله‌ای به شکل $t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n$ با خاصیت مورد نظر همان $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$ است. پس برای اثبات یکتایی کافی است نشان دهیم هر چند جمله‌ای در P^n به صورت بالا است، یعنی $P^n = \left\langle f_1, \ldots, f_n \right\rangle$. $\{f_1, \ldots, f_n\}$ مستقل خطی است زیرا اگر $t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n = 0$ در این صورت

$$0 = (t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n)(x_i) = t_1 f_1(x_i) + \cdots + t_n f_n(x_i) = t_i$$

پس بعد P^n حداقل n است. از طرفی $P^n = \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle$. در نتیجه بعد آن باید برابر n باشد و $\{f_1, \dots, f_n\}$ و $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ دو پایه برای آن خواهند بود.

وجود پایه برای فضاهای برداری با تولید نامتناهی

قضیه ۱۲ وجود پایه را برای فضاهای برداری با تولید متناهی تضمین می‌کند. در این قسمت روش اثبات وجود پایه برای فضاهایی که با تولید متناهی نیستند توضیح داده خواهد شد. این روش مبتنی بر لم زرن است که صورت آن در ادامه بیان می‌شود. این لم یکی از معادل‌های اصل انتخاب است و توضیحات بیشتر راجع به آن را می‌توانید در کتاب‌های نظریه مجموعه‌ها یا مبانی ریاضی بیابید.

لم زرن

یک *ترتیب جزئی* روی مجموعه $\mathcal{A}$ رابطه‌ای مانند $\subseteq$ بین اعضای $\mathcal{A}$ است که دارای خواص زیر باشد.

- برای هر $a \in \mathcal{A}$، $a \subseteq a$.
- اگر $a \subseteq b$ و $b \subseteq a$ آنگاه $a = b$.
- اگر $a \subseteq b$ و $b \subseteq c$ آنگاه $a \subseteq c$.

تفاوت یک ترتیب جزئی با یک ترتیب کلی در این است که هر دو عضو یک مجموعه مرتب کلی با هم قابل مقایسه اند در حالی که در مجموعه مرتب جزئی می‌تواند اعضایی باشند که با هم قابل مقایسه نیستند.

یک زیر مجموعه از یک مجموعه مرتب جزئی *زنجیر* نامیده می‌شود هرگاه هر دو عضو آن قابل مقایسه باشند. $a \in \mathcal{A}$ را یک کران بالا برای زیر مجموعه $S \subseteq \mathcal{A}$ می‌نامیم هرگاه برای هر $s \in S$ داشته باشیم $s \subseteq a$. دقت کنید که کران بالای S لزومی ندارد داخل S باشد. یک عضو ماکزیمال عضوی از مجموعه مرتب جزئی است که هیچ عضوی بزرگتر از آن در مجموعه وجود نداشته باشد. توجه کنید که ممکن است اعضایی در مجموعه باشند که با عضو ماکزیمال قابل مقایسه نباشند ولی اگر عضوی با آن قابل مقایسه باشد در این صورت نمی‌تواند از آن بزرگتر باشد.

اگر $\mathcal{A}$ دسته‌ای از زیرمجموعه‌های یک مجموعه باشد آنگاه $\mathcal{A}$ با رابطه شمول یک مجموعه مرتب جزئی است. یک زنجیر در آن دسته‌ای تو در تو از اعضای $\mathcal{A}$ است. اگر S_αها اعضایی از $\mathcal{A}$ باشند آنگاه یک کران بالا برای $\{S_\alpha\}$ عضوی از $\mathcal{A}$ است که شامل $\bigcup S_\alpha$ باشد. یک عضو ماکزیمال در $\mathcal{A}$ نیز عضوی در $\mathcal{A}$ است که داخل هیچ عضو دیگری از $\mathcal{A}$ قرار نداشته باشد.

لم زرن. اگر هر زنجیر در یک مجموعه مرتب جزئی دارای کران بالا باشد آنگاه آن مجموعه مرتب جزئی دارای عضو ماکزیمال است.

لم. اجتماع یک دسته تو در تو از مجموعه‌های مستقل خطی در یک فضای برداری خود یک مجموعه مستقل خطی است.

اثبات. فرض کنید $\{S_\alpha\}$ دسته‌ای از مجموعه‌های مستقل خطی در فضای برداری V باشد و $t_1v_1 + \cdots + t_kv_k = 0$، که v_iها اعضایی از $\bigcup S_\alpha$ اند. در این صورت اندیس‌های $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ وجود دارند که $v_i \in S_{\alpha_i}$. چون S_αها تو در تو اند در بین S_{α_i}ها یکی (مثلاً S_{α_1}) شامل بقیه است. به این ترتیب ترکیب خطی بالا یک ترکیب خطی از آعضای S_{α_1} است و چون این مجموعه مستقل خطی است همه ضرایب ترکیب خطی بالا باید صفر باشد. بنابراین $\bigcup S_\alpha$ یک مجموعه مستقل خطی است.

قضیه. هر فضای برداری داری پایه است.

اثبات. فرض کنید V یک فضای برداری و $S \subseteq V$ یک مجموعه مستقل خطی در آن است. اگر $\langle S\rangle = V$ آنگاه S یک پایه برای V خواهد بود. در غیر این صورت با اضافه کردن برداری از V که در $\langle S\rangle$ نیست به S، یک مجموعه مستقل خطی بزرگتری بدست می‌آید. بنابراین یک پایه یک مجموعه مستقل خطی در V است که در بین مجموعه‌های مستقل خطی ماکزیمال است. اما دسته مجموعه‌های مستقل خطی در V با رابطه شمول یک مجموعه مرتب جزئی است که طبق لم قبل هر زنجیر آن دارای کران بالا در این مجموعه است. در نتیجه بنا به لم زرن این مجموعه دارای یک عضو ماکزیمال است. این عضو ماکزیمال همان پایه فضای V است.
