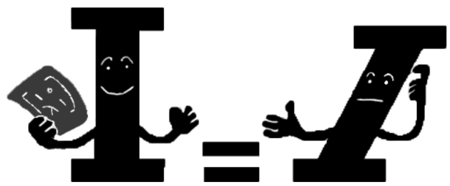
به نام خدا



تمرین دوم

جبر خطی کاربردی – پاییز 1400

توضیحات

- پاسخ خود را به صورت یک فایل pdf و با فرمت **HW?_Name_StudentNumber** آپلود کنید. (مثال: HW5_AliYahyaAbadi_9831070).
- پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.
- در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق ایمیل linearalgebra.fall1400@gmail.com سوال خود را بپرسید.
- مهلت ارسال پاسخ ها تا ساعت **23:59 جمعه 21** آبان می‌باشد.
- پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و درصورت مشاهده هرگونه **تقلب** نمره **صفر** برای کل تمرین منظور خواهد شد
- با توجه به فشردگی برنامه تمرین ها در طول ترم، امکان تمدید تمرین وجود نخواهد داشت.

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

1- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) اگر $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه بخش های B و A ، می توانند ضرب بلوکی شوند.

ب) در تجزیه ی LU یک ماتریس مانند A برای به دست آوردن ماتریس U کافیست ماتریس A را به فرم نردبانی کاهش یافته تبدیل کنیم.

پ) اگر A^T یک ماتریس $n \times n$ باشد که k $(k < n)$ عنصر $pivot$ داشته باشد، آنگاه ماتریس A وارون پذیر نیست.

ت) اگر بتوان $A_{n \times n}$ را به فرم ماتریس همانی کاهش داد، آنگاه فضای ستونی A یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

ج) اگر A و B وارون پذیر باشند، آنگاه $A + B$ نیز وارون پذیر خواهد بود.

چ) اگر A و B وارون پذیر باشند، آنگاه $AB = BA$.

ه) فضای پوچ ماتریس $A_{m \times n}$ یک زیرفضا از $\mathbb{R}^m$ است.

2- همه مقادیر c را طوری بیابید که ماتریس A وارون پذیر باشد. سپس به ازای $c = 1$، A^{-1} را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & c \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3- فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ و درایه های روی قطر اصلی $A^T A$ برابر صفر است.

ثابت کنید $A = 0$.

4- فرض کنید A ماتریس $n \times n$ است و $A^3 = 2I$.

الف) نشان دهید ماتریس $A - \alpha I$ وارون پذیر است اگر و تنها اگر $\alpha \neq \sqrt[3]{2}$.

ب) نشان دهید که ماتریس $B = A^2 - 2A + 2I$ وارون پذیر است.

5- فرض کنید ماتریس A یک ماتریس وارون پذیر باشد و همچنین ماتریس های X و Y، ماتریس هایی مربعی باشند.

$$A = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

الف) ثابت کنید ماتریس های Y و X وارون پذیرند و سپس وارون ماتریس A را برحسب وارون های Y و X نشان دهید. (راهنمایی: AA^{-1} را که برابر I است می توان به صورت $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ نوشت.)

ب) وارون ماتریس B را با استفاده از رابطه ی وارون بدست آمده در روش الف به دست بیاورید.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

6- ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -3 & -6 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ و $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

الف) تجزیه ی LU ماتریس A را به دست آورید.

ب) با استفاده از تجزیه ی LU به دست آمده در بخش الف، دستگاه $Ax = b$ را حل کنید.

7- بررسی کنید کدام یک از زیر مجموعه های زیر یک زیرفضا ($subspace$) از $\mathbb{R}^3$ هستند. (اثبات)

الف) $\{(x, y, z) \mid 2x + y - 3z = 7\}$

ب) $\{(-5x, 3x, 2x) \mid x \in R\}$

ج) $\{(x - 2, x, x - 5) \mid x \in R\}$

د) $\{(x, y, z) \mid 2x + 9y = 0, 8x - 5z = 0\}$

8- با توجه به ماتریس زیر به سوالات زیر پاسخ دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

الف) یک پایه برای $column\ space$ این ماتریس بیابید.

ب) یک پایه برای $nullspace$ این ماتریس بیابید.

ج) اگر $p = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$ نشان دهید p در فضای ستونی ماتریس A قرار دارد.

د) آیا $q = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ در $nullspace$ ماتریس A قرار دارد؟ توضیح دهید.

9- فرض کنید A یک ماتریس 5×7 باشد. اگر داشته باشیم $range(A) \in \mathbb{R}^2$، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) $dim(nul(A))$ را بدست آورید.

ب) $rank(A^T)$ را بدست آورید.

10- پایه B و بردار x را مطابق زیر در نظر بگیرید.

مختصات نقطه ای x نسبت به پایه B را بدست آورید.

$$B = \left\{\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix}\right\}, x = \begin{bmatrix}4\\3\\1\end{bmatrix}$$

11- (امتیازی) فرض کنید n عدد طبیعی است. وارون ماتریس A را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\0 & 1 & 2 & \dots & n-1\\0 & 0 & 1 & \dots & n-2\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}$$

موفق باشید

تیم تدریسیاری جبر خطی پاییز 1400