به نام پروردگار
دانشگاه صنعتي اميرکبير (پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

درس جبر خطی کاربردی

تمرین سری سوم (بخش تئوری)

توضیحات:

- پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره صفر برای کل تمرین منظور خواهد شد.
- خوانایی و مرتب بودن پاسخ ها از اهمیت زیادی برخوردار است.
- **مهلت ارسال پاسخ سوالات تئوری ساعت 23:59 روز چهارشنبه 29 اردیبهشت می باشد.**
- با توجه به آن که بعد از پایان مهلت ارسال، پاسخ نامه در اختیار دانشجویان قرار داده خواهد شد (به دلیل نزدیکی به امتحان) **امکان ارسال با تاخیر وجود نخواهد داشت.**
- پاسخ هر سوال بخش تئوری را (چه به صورت دستی و اسکن شده یا چه به صورت تایپ شده) در زیر سوال مربوطه در فایل docx موجود قرار دهید.
- در صورت وجود هر گونه ابهام در ارتباط با سوالات از طریق **linearalgebral.spring2021@gmail.com** سوال خود را بپرسید.
- فایل doc پاسخ های خود را PDF کرده و به صورت الگوی زیر آپلود کنید:

HW3_1_StudentNumber_StudentName_StudentLastName.pdf

(به عنوان مثال: HW3_1_9731505_Arash_Harirpoosh.pdf)

❖ بخش اول – مباحث تئوری و مسائل تشریحی

1. A را به گونه ای بیابید که مجموعه داده شده زیر همان Col(A) باشد

$$\left\{\begin{bmatrix} 2s+3t \\ r+s-2t \\ r+s-2t \\ 4r+s \\ 3r-s-t \end{bmatrix} : r,s,t \in R\right\}$$

2. ماتریس A را داریم. یک پایه برای Nul A، یک پایه برای Row A و یک پایه برای Col A بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

3. فرض کنید T یک تبدیل خطی یک به یک است نشان دهید اگر مجموعه $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی باشد آنگاه مجموعه $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ نیز مستقل خطی است.

4. فرض کنید V فضای برداری تمام ماتریس‌های k در k باشد. دو ثابت R و S در V را داریم. اثبات کنید. $W = \{RAS \mid A \in V\}$ زیرفضایی از V است.

5. فرض کنید V فضای برداری تمام ماتریس‌های 2 در 2 و W فضای برداری تمام ماتریس‌های 3 در 2 باشد. تبدیل خطی $T: V \to W$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. یک پایه برای فضای برداری مربوط به Range تبدیل T بدست آورید. (توجه: تبدیل خطی T روی ماتریس ها عمل می‌کند بنابراین نمیتوان آنرا به صورت یک ماتریس نوشت)

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & 2d \\ 2b-d & -3c \\ 2b-c & -3a \end{bmatrix}$$

6. فضای چند جمله‌ای های حداکثر از درجه دو را در نظر بگیرید. تغییر مختصات (change-of-coordinates) ماتریس از پایه B به پایه استاندارد C را بیابید و سپس بردار مختصات مربوط به B (B-coordinate vector) را برای $-1 + 2t$ محاسبه کنید.

$B = \{1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2\} \qquad C = \{1, t, t^2\}$

7. درستی یا نادرستی هر مورد را با اثبات یا مثال نقض نشان دهید.

الف) اگر ماتریس A یک ماتریس $m \times n$ باشد و تبدیل خطی $x \to Ax$ پوشا باشد، آنگاه $rank\ A = m$

ب) اگر r نشان رتبه باشد آنگاه از $r(AB) = 0$ می توان نتیجه گرفت که $r(A) = 0$ یا $r(B) = 0$

ج) ماتریس $A_{n\times m}$ دارای رتبه یک است اگر و فقط اگر بتوان آن را به صورت $A = XY^T$ نوشت به طوری که X و Y بردارهای $n \times 1$ و $m \times 1$ هستند.

8. موارد زیر را اثبات کنید:

الف) نشان دهید رتبه AB نمی تواند از رتبه A یا B بیشتر شود.(راهنما: با اثبات آنکه هر عضو فضای ستونی AB عضو فضای ستونی A است اثبات کنید $rank(AB) \leq rank(A)$)

ب) با توجه به مورد الف نشان دهید اگر P ماتریس معکوس پذیر باشد انگاه:

$rank(PA) = rank(A)$

شاد و پیروز باشید

تیم تدریس یاری جبر خطی

بهار 1400