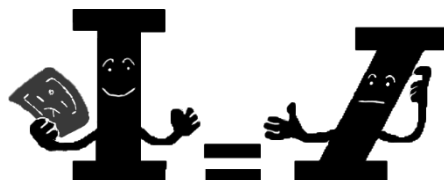




به نام خدا



## تمرین اول

جبر خطی کاربردی – پاییز 1400

### توضیحات

- پاسخ خود را به صورت یک فایل pdf و با فرمت `HW?_Name_StudentNumber` آپلود کنید.  
(مثال: `HW5_SeyyedFarzadRadnia_9831024`).
- پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.
- در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق ایمیل [linearalgebra.fall1400@gmail.com](mailto:linearalgebra.fall1400@gmail.com) سوال خود را بپرسید.
- مهلت ارسال پاسخ ها تا ساعت **23:59** جمعه **23** مهر می باشد.
- پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و در صورت مشاهده هرگونه **تقلب** نمره صفر برای کل تمرین منظور خواهد شد.
- با توجه به فشردگی برنامه تمرین ها در طول ترم، امکان تمدید تمرین وجود نخواهد داشت.

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر



1- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) هر ماتریس، تنها دارای یک فرم نردبانی منحصر به فرد می باشد.

ب) دستگاه معادلات متناظر با ماتریس افزوده  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  ناسازگار است.

ج) معادله  $Ax = b$  سازگار است اگر ماتریس افزوده  $[A \ b]$  در هر سطر یک  $pivot$  داشته باشد.

چ) هر مجموعه شامل وکتور  $0$ ، وابسته خطی است.

د) یک معادله  $y$  همگن همیشه سازگار است.

ذ) اگر مجموعه  $\{V_1, V_2, V_3\}$  وابسته خطی باشد، آنگاه تبدیل یافته آن به فرم  $\{T(V_1), T(V_2), T(V_3)\}$  نیز وابسته خطی است.

ه) معادله  $Ax = b$  همگن است اگر بردار  $y$  ای وجود داشته باشد که  $Ay = 0$ .

و) معادله  $Ax = b$  همگن است اگر بردار صفر یکی از جواب های آن باشد.

2- مقادیر متغیرهای  $a, b, c$  را به گونه ای مشخص کنید که دستگاه معادلات خطی مربوط به این ماتریس افزوده (*Augmented Matrix*):

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & a \\ 3 & 10 & -9 & b \\ 2 & 0 & c & 2 \end{bmatrix}$$

الف) ناسازگار باشد.

ب) سازگار و دارای یک جواب منحصر به فرد باشد.

ج) سازگار و دارای بی نهایت جواب باشد.



3- ماتریس افزوده دستگاه معادلات خطی زیر را بنویسید. در ادامه آن را به فرم نردبانی کاهش یافته تبدیل کرده و سپس فرم پارامتری مجموعه جواب مربوط به این ماتریس افزوده را بنویسید.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 5x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

4- فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $4 \times 4$  است و  $b$  یک بردار در فضای  $\mathbb{R}^4$  باشد به طوری که  $Ax = b$  فقط یک جواب منحصر به فرد دارد. ثابت کنید ستون های ماتریس  $A$  فضای  $\mathbb{R}^4$  را  $\text{span}$  می کنند.

5- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -8 \end{bmatrix}$  و  $b = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  می باشد. نشان دهید معادله  $Ax = b$  لزوماً برای

همه ی  $b$  های ممکن جواب ندارد و مجموعه ی  $b$  هایی که معادله جواب دارد را توصیف کنید.

(امتیازی): نمودار تقریبی مجموعه ی  $b$  های جواب دار را بکشید. (می توانید از این [سایت](#) نیز استفاده کنید)

6- مقادیر خواسته شده در هر قسمت را بدست آورید.

الف) به ازای کدام مقادیر  $a$ ، مجموعه زیر مستقل خطی است؟

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a^2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ a^3 \end{bmatrix} \right\}$$

ب) مقادیری از  $h$  را بیابید که به ازای آن مجموعه زیر مستقل خطی باشد.

$$\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ -h \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2h \\ 3h + 1 \end{bmatrix} \right\}$$



7- مشخص کنید که مجموعه زیر مستقل خطی است یا خیر. اگر وابسته خطی است، یک وکتور را به صورت ترکیب خطی ای از وکتورهای دیگر بدست آورید.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}$$

8- فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  است و  $y$  یک بردار در فضای  $\mathbb{R}^3$  می باشد به طوری که معادله‌ی  $Ax = y$  هیچ جوابی ندارد. در اینصورت آیا برداری مانند بردار  $t$  وجود دارد که معادله‌ی  $Ax = t$  فقط یک جواب داشته باشد؟ توضیح دهید.

9- معادله  $Ax = b$  را با معلومات داده شده حل کنید (ماتریس افزوده را به فرم نردبانی کاهش یافته یا همان  $RREF$  تبدیل کنید) پاسخ بدست آمده را به فرم  $x = p + tv$  معرفی کنید که در آن  $t$  عددی حقیقی است. صحت پاسخ خود را با محاسبه‌ی  $Ap$  و  $Av$  بررسی کنید.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

با توجه به فرم نردبانی کاهش یافته ماتریس  $A$ ، به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) آیا برداری مانند  $d$  در  $R^3$  وجود دارد به طوری که معادله‌ی  $Ax = d$  ناسازگار باشد؟

ب) آیا برداری مانند  $d$  در  $R^3$  وجود دارد به طوری که معادله‌ی  $Ax = d$  جوابی یکتا داشته باشد؟

10-  $T: R^n \rightarrow R^m$  یک تبدیل خطی است که  $T(x) = Bx$  به طوری که  $B$  یک ماتریس  $m \times n$  است.

نشان دهید که اگر  $A$  ماتریس استاندارد تبدیل  $T$  باشد، آنگاه  $A = B$ .



11- دو تبدیل  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  و  $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  را به صورت زیر تعریف کرده ایم:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 0 \end{bmatrix}, S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ xy \end{bmatrix}$$

مشخص کنید که آیا  $T$  و  $S$  و همچنین ترکیب آن ها  $S \circ T$  تبدیل خطی است یا خیر؟

---

12- فرض کنید  $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  و  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  باشد، اثبات کنید که  $T$  پوشا و یک به یک است.

موفق باشید

تیم تدریسیاری جبر خطی پاییز 1400