

سوال:

فرض کنید معادله $Ax = b$ دارای جواب است. حال توضیح دهید چرا تنها زمانی این جواب منحصر به فرد خواهد بود که معادله $Ax = 0$ تنها دارای جواب بدیهی (*Trivial Solution*) باشد.

پاسخ:

(اثبات به روش هندسی با توجه به قضیه ۱.۶)

THEOREM 6

Suppose the equation $Ax = b$ is consistent for some given b , and let p be a solution. Then the solution set of $Ax = b$ is the set of all vectors of the form $w = p + v_h$, where v_h is any solution of the homogeneous equation $Ax = 0$.

در این روش، از آن جایی که معادله $Ax = b$ سازگار (*Consistent*) است، بنابراین با توجه به قضیه ۱.۶ می توان بیان کرد که مجموعه جواب این معادله، به واسطه یک انتقال برداری بر روی مجموعه جواب معادله $Ax = 0$ به دست می آید. (در صورتی که v_h مجموعه جواب معادله همگن در نظر گرفته شود، مجموعه جواب معادله ناهمگن $v_p = p + v_h$ برابر با v_p خواهد بود به صورتی که بردار p برداری است که مجموعه جواب v_h تحت آن انتقال می یابد.) پس می توانیم بیان کنیم مجموعه جواب معادله $Ax = b$ یک تک بردار (یا یک بردار منحصر به فرد) خواهد بود اگر و تنها اگر مجموعه جواب معادله $Ax = 0$ یک تک بردار (یا یک بردار منحصر به فرد) باشد که این اتفاق رخ می دهد اگر و تنها اگر معادله $Ax = 0$ تنها دارای جواب بدیهی (*Trivial Solution*) باشد.

(اثبات با استفاده از متغیرهای آزاد)

اگر معادله $Ax = b$ دارای جواب باشد، آنگاه این جواب منحصر به فرد خواهد بود اگر و تنها اگر دستگاه معادلات متناظر با این معادله دارای متغیر آزاد نباشد. این اتفاق رخ می دهد اگر و تنها اگر هر یک از ستون های ماتریس A یک ستون محوری (*Pivot Column*) باشد. و در نهایت این اتفاق رخ می دهد اگر و تنها اگر معادله $Ax = 0$ تنها دارای جواب بدیهی (*Trivial Solution*) باشد.