سوال:

فرض کنید ماتریس $A_{n\times n}$ یک ماتریس منفرد(وارون ناپذیر) است. توضیح دهید چگونه یک ماتریس $B_{n\times n}$ بسازیم به گونه ای که $AB = 0$.

پاسخ:

THEOREM 8 **The Invertible Matrix Theorem**

Let A be a square $n \times n$ matrix. Then the following statements are equivalent. That is, for a given A, the statements are either all true or all false.

a. A is an invertible matrix.
b. A is row equivalent to the $n \times n$ identity matrix.
c. A has n pivot positions.
d. The equation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has only the trivial solution.
e. The columns of A form a linearly independent set.
f. The linear transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ is one-to-one.
g. The equation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has at least one solution for each $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^n$.
h. The columns of A span $\mathbb{R}^n$.
i. The linear transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ maps $\mathbb{R}^n$ onto $\mathbb{R}^n$.
j. There is an $n \times n$ matrix C such that $CA = I$.
k. There is an $n \times n$ matrix D such that $AD = I$.
l. A^T is an invertible matrix.

از آنجایی که ماتریس A منفرد(وارون ناپذیر) است، بنابراین برداری همانند v متعلق به فضای برداری $\mathbb{R}^n$ وجود دارد به گونه ای که $Av = 0$. (از آنجایی که ماتریس A منفرد است، بنابراین بنا به نقیض بند «d» از قضیه IMT معادله $Ax = 0$ دارای جواب غیربدیهی خواهد بود، بنابراین در این قسمت می توان فرض کرد بردار v در واقع یکی از جواب های غیربدیهی موجود برای این معادله می باشد.) حال اگر این این بردار را n بار در ماتریس B کپی کنیم($B_{n\times n} = [v \quad v \quad \cdots \quad v]$)، خواهیم داشت. $AB = A[v \quad v \quad \cdots \quad v] = [Av \quad Av \quad \cdots \quad Av] = 0$