

### بخش صحیح غلط :

سوال : اگر  $H$  ، اسپن  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  باشد آنگاه  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  یک پایه برای  $H$  است .

جواب : غلط . لزوماً همیشه درست نیست و  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  باید مستقل خطی باشد .

سوال : هر مجموعه ی مستقل خطی از زیرفضای  $H$  ، یک پایه برای  $H$  است .

جواب : غلط . باید همچنین زیرفضای  $H$  را اسپن کند .

سوال : اگر ماتریس  $B$  ، فرم کاهش یافته نردبانی ماتریس  $A$  باشد آنگاه ستون های پیووت  $B$  ، یک پایه برای فضای ستونی  $A$  را تشکیل می دهند .

جواب : غلط . زیرا در اصل ستون های پیووت در خود ماتریس  $A$  ، یک پایه برای فضای ستونی  $A$  تشکیل می دهند .

### بخش تشریحی :

سوال : فرض کنید  $H = \text{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$  و  $K = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$  باشد به طوری که :

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

الف ) پایه ای برای  $H$  بیابید .

ب ) پایه ای برای  $K$  بیابید .

پ ) پایه ای برای  $H + K$  بیابید . (  $H + K = \{w : w = u + v \mid u \in H, v \in K\}$  )

جواب :

الف ) ماتریس  $[u_1 \ u_2 \ u_3]$  را به فرم کاهش یافته نردبانی در می آوریم تا ستون های پیووت را پیدا کنیم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین  $\{u_1, u_2\}$  پایه ای برای  $H$  می باشد .

ب ( ماتریس  $[v1 \ v2 \ v3]$  را به فرم کاهش یافته نردبانی در می آوریم تا ستون های پیووت را پیدا کنیم :

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین  $\{v1, v2\}$  پایه ای برای  $K$  می باشد .

پ ( ماتریس  $[u1 \ u2 \ u3 \ v1 \ v2 \ v3]$  را به فرم کاهش یافته نردبانی در می آوریم تا ستون های پیووت را پیدا کنیم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین  $\{u1, u2, v2\}$  پایه ای برای  $H + K$  می باشد .

سوال : مجموعه ی  $B = \{1 + t^2, t-t^2, 2-2t + 2t^2\}$  یک پایه برای  $P_2$  می باشد . مختصات متناسب با پایه ی  $B$  را برای  $p(t) = 3 + t - 6t^2$  بیابید .

جواب :

باید  $c1, c2, c3$  را به گونه ای پیدا کنیم که :

$$c1(1 + t^2) + c2(t-t^2) + c3(2-2t + 2t^2) = p(t) = 3 + t - 6t^2$$

اکنون اگر ضرایب سمت چپ را با ضرایب سمت راست یکسان قرار دهیم خواهیم داشت :

$$c1 + 2c3 = 3 \quad (\text{ضریب } 1)$$

$$c2 - 2c3 = 1 \quad (\text{ضریب } t)$$

$$c1 - c2 + 2c3 = -6 \quad (\text{ضریب } t^2)$$

اکنون معادله ی  $P_B[x]_B = x$  را حل می کنیم تا مختصات متناسب با پایه ی  $B$  را به دست آوریم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین مختصات  $p(t)$  متناسب با پایه ی  $B$  برابر است با :  $\begin{bmatrix} -5 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$