۱. تابعک‌های خطی و فضای دوگان

می‌دانیم که یک میدان، یک فضای برداری یک بعدی روی خودش نیز است. نگاشت های خطی از یک فضای برداری روی میدان F به خود میدان F را *تابعک خطی* می نامیم. بنابر این اگر V یک فضای برداری روی میدان F باشد آنگاه تابعک‌های خطی روی V همان نگاشت‌های خطی به شکل $f : V \to F$ اند.

در این فصل به بررسی تابعک‌های خطی روی فضاهای با بعد متناهی می‌پردازیم. بنابراین در تمام طول این فصل فضاها با بعد متناهی هستند.

فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی میدان F است. تصویر هر تابعک خطی ناصفر برابر کل F و هسته آن یک زیر فضای $n-۱$ بعدی از V خواهد بود.

هر زیر فضای $n-۱$ بعدی V نیز هسته یک تابعک خطی است. فرض کنید $\{v_۱, \ldots, v_{n-۱}\}$ پایه‌ای برای آن زیر فضا و $\{v_۱, \ldots, v_{n-۱}, v_n\}$ گسترشی از آن به پایه‌ای برای V باشد.

تابعک خطی یکتایی که مقدار آن روی $v_۱, \ldots, v_{n-۱}$ برابر صفر و روی v_n برابر ۱ است، تابعکی ناصفر است که هسته آن فضای $n-۱$ بعدی تولید شده با $v_۱, \ldots, v_{n-۱}$ است.

نکته. تنها برداری که توسط همه تابعک‌های خطی به صفر نگاشته می‌شود بردار صفر است.

اثبات. برای اثبات گزاره بالا نشان می دهیم برای هر بردار ناصفری تابعکی وجود دارد که آن بردار را به صفر تصویر نمی کند. فرض کنید $v \in V$ بردار ناصفر دلخواهی باشد. مجموعه $\{v\}$ مستقل خطی است و می توان آن را به پایه $\{v, u_۱, \ldots, u_{n-۱}\}$ برای V گسترش داد. تابعک یکتای $f : V \to F$ وجود دارد که

$$f(v) = ۱, \quad f(u_۱) = \cdots = f(u_{n-۱}) = ۰.$$

بنابراین تابعکی وجود دارد که v را به صفر تصویر نمی‌کند.

مجموعه همه تابعک‌های خطی روی V یک فضای برداری هم بعد با V است که به آن، *فضای دوگان* V می‌گویند و آن را با V^* نمایش می‌دهند. بنابراین $V^* = L(V, F)$. توجه کنید که بعد V^* برابر بعد V است و بنابراین این دو فضا تکریخت اند. با انتخاب یک پایه برای V و یک پایه برای V^* می‌توان یک تکریختی بین این دو فضا ارائه داد. این تکریختی کاملاً به انتخاب پایه ها وابسته است و با تغییر پایه ها این تکریختی نیز عوض می‌شود. در ادامه روشی ارائه می‌شود که با انتخاب پایه‌ای برای V یک پایه برای V^* بدست می‌آید.

فرض کنید $\alpha = \{e_۱, \ldots, e_n\}$ پایه‌ای مرتب برای V باشد. در این صورت تابعک‌های خطی $\{e_۱^*, \ldots, e_n^*\}$ که به صورت زیر معرفی می‌شوند پایه‌ای مرتب برای V^* تشکیل می‌دهند.

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

e_i^* تابعکی است که مقدارش روی بردار e_i برابر ۱ و مقدارش روی بقیه e_jها برابر صفر است. به این پایه، *دوگان پایه* α می‌گویند و آن را با α^* نمایش می‌دهند.

نکته: برای هر $v \in V$ و $f \in V^*$ داریم

$$v = e_۱^*(v)e_۱ + \cdots + e_n^*(v)e_n$$
$$f = f(e_۱)e_۱^* + \cdots + f(e_n)e_n^*$$

اثبات. فرض کنید $v = t_۱e_۱ + \cdots + t_ne_n$. در این صورت داریم

$$e_i^*(v) = t_۱e_i^*(e_۱) + \cdots + t_ne_i^*(e_n) = t_i$$

همچنین اگر $f = s_۱e_۱^* + \cdots + s_ne_n^*$، آنگاه

$$f(e_i) = s_1 e_1^*(e_i) + \cdots + s_n e_n^*(e_i) = s_i$$

مثال. تابعک‌های خطی روی فضای چند جمله‌ای‌ها

....

مثال. فرض کنید $V = \mathbb{R}^2$ بنابراین $V^* = L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. برای تابعک خطی دلخواه $f \in V^*$ داریم

$$f(x,y) = f(x(1,0) + y(0,1)) = xf(1,0) + yf(0,1)$$

اگر قرار دهیم $a = f(1,0)$ و $b = f(0,1)$، تابعک خطی f به شکل $f(x,y) = ax + by$ خواهد بود. بنابراین

$$V^* = \{f : f(x,y) = ax + by, a, b \in \mathbb{R}\}$$

مثال. دوگان پایه $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ برابر است با $\{e_1^*, e_2^*\}$ که e_1^* و e_2^* به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$\begin{array}{lll} e_1^*(1,0) = 1 \quad e_1^*(0,1) = 0 & \Rightarrow & e_1^*(x,y) = x \\ e_2^*(1,0) = 0 \quad e_2^*(0,1) = 1 & \Rightarrow & e_2^*(x,y) = y \end{array}$$

مثال. دوگان پایه $\{v_1 = (1,0), v_2 = (1,1)\}$ برابر است با $\{v_1^*, v_2^*\}$ که v_1^* و v_2^* به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$\begin{array}{lll} v_1^*(1,0) = 1 \quad v_1^*(1,1) = 0 & \Rightarrow & v_1^*(x,y) = x - y \\ v_2^*(1,0) = 0 \quad v_2^*(1,1) = 1 & \Rightarrow & v_2^*(x,y) = y \end{array}$$

فرض کنید $\alpha = \{e_1, \ldots, e_n\}$ پایه‌ای برای V و $\alpha^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ دوگان آن باشد.
این پایه‌ها تناظر زیر را بین فضاهای V و V^* ایجاد می‌کنند.

$$L : V \leftrightarrow V^* \qquad t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n \leftrightarrow t_1 e_1^* + \cdots + t_n e_n^*$$

این تناظر همان تکریختی بین V و V^* است که پایه مرتب α را به پایه مرتب α^* می‌نگارد. این تکریختی از این جهت اهمیت دارد که پایه V^* به صورت مناسبی از روی پایه‌ای که در V انتخاب می‌کنیم معرفی می‌شود. با این حال این تکریختی طبیعی نیست، یعنی با عوض شدن پایه α تکریختی بالا نیز عوض می‌شود. این موضوع در مثال گذشته به روشنی دیده می‌شود. به عبارت دیگر به هر عضو V نمی‌توان به صورت طبیعی و بدون مشخص کردن پایه‌ای عضوی از V^* را نسبت داد.
اما بین V و $(V^*)^*$ یک تکریختی طبیعی وجود دارد. معمولاً فضای $(V^*)^*$ را با V^{**} نمایش می‌دهیم. در نگاه اول V^{**} فضایی پیچیده‌تر از V^* به نظر می‌رسد. اما در واقع چنین نیست.
مثال: فرض کنید $v \in V$ بردار دلخواهی باشد. تابعک زیر را روی V^* در نظر بگیرید.

$$\psi_v : V^* \to F; \quad \psi_v(f) = f(v)$$

ψ_v به هر تابعک $f \in V^*$ مقدار آن را روی بردار v نسبت می‌دهد. این تابع یک تابعک خطی روی V^* است زیرا

$$\psi_v(f_1 + rf_2) = (f_1 + rf_2)(v) = f_1(v) + rf_2(v) = \psi_v(f_1) + r\psi_v(f_2)$$

قضیه: نگاشت $\ell : V \to V^{**}$ که به هر بردار $v \in V$ تابع ψ_v را نسبت می‌دهد یک نگاشت خطی یک به یک و پوشا بین V و V^{**} است.

اثبات: برای اینکه نشان دهیم ℓ خطی است باید نشان دهیم برای هر $v_1, v_2 \in V$ و $r \in F$

$$\ell(v_1 + rv_2) = \ell(v_1) + r\ell(v_2).$$

اما $\ell(v_1 + rv_2)$ همان $\psi_{v_1+rv_2}$ است و $\ell(v_1)$ و $\ell(v_2)$ نیز به ترتیب ψ_{v_1} و ψ_{v_2} اند. برای هر $f \in V^*$ دلخواه داریم

$$\psi_{v_1+rv_2}(f) = f(v_1 + rv_2) = f(v_1) + rf(v_2) = \psi_{v_1}(f) + r\psi_{v_2}(f).$$

در نتیجه $\psi_{v_1+rv_2} = \psi_{v_1} + r\psi_{v_2}$.

فرض کنید بردار $v \in V$ در هسته ℓ قرار داشته باشد، یعنی ψ_v تابعک صفر روی V^* باشد. در نتیجه برای هر $f \in V^*$ باید داشته باشیم $f(v) = \psi_v(f) = 0$. بنابراین بردار v توسط همه تابعک‌های خطی به صفر نگاشته می‌شود. این نشان می‌دهد که بردار v باید صفر باشد. درنتیجه $\ker(\ell) = \{0\}$. چون بعد V^{**} برابر بعد V^* است و بعد V^* نیز برابر بعد V است، نگاشت خطی ℓ یک یکریختی بین V و V^{**} خواهد بود.

دقت کنید نگاشت ℓ بدون نیاز به مشخص کردن پایه‌ای برای V یا V^{**} به هر عضو V به صورت طبیعی عضوی از V^{**} را نسبت می‌دهد. بنابراین معمولاً V^{**} را برابر با V می‌گیریم! به عبارتی دیگر بدون هیچ پیش فرضی هر عضو V^{**} یک متناظر مشخص در V دارد.

به کمک این یکسانی طبیعی که بین V و V^{**} وجود دارد احکام زیر به سادگی نتیجه می‌شوند.

قضیه: اگر $\alpha^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ پایه‌ای برای V^* باشد، پایه‌ای مانند $\alpha = \{e_1, \dots, e_n\}$ برای V وجود دارد که دوگانش همان پایه α^* باشد. به عبارت دیگر پایه α وجود دارد که

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

اثبات: فرض کنید $\alpha^{**} = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ پایه دوگان $\alpha^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ باشد. بردارهای $e_1, \dots, e_n$ وجود دارند که $\psi_i = \psi_{e_i}$ یا به عبارت دیگر

$$\psi_i(e_j^*) = e_j^*(e_i)$$

چون $\psi_1, \dots, \psi_n$ دوگان پایه $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ است داریم

$$e_i^*(e_j) = \psi_j(e_i^*) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

بنابراین $\{e_1, \dots, e_n\}$ پایه‌ای برای V است که دوگان آن برابر است با $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$.

به‌این جهت پایه $\{e_1, \dots, e_n\}$ را نیز *دوگان پایه* $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ می‌گوییم.

قضیه: فرض کنید $W \subsetneq V^*$ زیر فضایی اکید از V^* باشد. در این صورت بردار ناصفر $v \in V$ وجود دارد که برای هر تابعک خطی $f \in W$ داشته باشیم $f(v) = 0$.

اثبات: فرض کنید $\{f_1, \dots, f_k\}$ پایه‌ای برای W و $\{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\}$ گسترش آن به پایه‌ای برای V^* باشد. همچنین فرض کنید $\{e_1, \dots, e_n\}$ دوگان پایه بالا در V باشد. بنابراین داریم

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

به‌این ترتیب هر یک از بردارهای $e_{k+1}, \dots, e_n$ دارای ویژگی مورد نظر مسئله است.

در اثبات بالا درواقع این حکم ثابت شد که بردار $v = t_1e_1 + \cdots + t_ne_n$ توسط هر تابعک $f \in W$ به صفر تبدیل می‌شود اگر و تنها اگر $t_1 = \cdots = t_k = 0$. به عبارت دیگر مجموعه همه بردارهایی که توسط همه اعضای W به صفر نگاشته می‌شوند همان فضای تولید شده توسط $e_{k+1},\ldots,e_n$ است. به این مجموعه که یک زیر فضای V نیز است مجموعه صفرهای W می‌گوییم. این تعریف را برای هر مجموعه $D \subseteq V^*$ نیز، اگر چه زیر فضا نباشد، می‌توان ارائه کرد.

تعریف. فرض کنید $D \subset V^*$ زیر مجموعه دلخواه از تابعک‌های خطی روی فضای برداری V باشد. به مجموعه

$$\{v \in V \;:\; \forall f \in D,\; f(v) = 0\} = \bigcap_{f \in D} \ker f$$

مجموعه صفرهای **D می‌گوییم.**

به صورت مشابه می‌توانیم به هر مجموعه‌ای از بردارها مانند $S \subseteq V$ مجموعه تابعک‌هایی را نسبت دهیم که تصویر S توسط آنها صفر است.

تعریف. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای از V باشد. به مجموعه زیر *پوچساز* S می‌گوییم.

$$S^0 = \{f \in V^* : f(S) = 0\}$$

اگر D زیرمجموعه‌ای دلخواه در V^* باشد آنگاه با توجه به یکسانی طبیعی بین V^{**} و V پوچساز D بردارهایی در V خواهند بود که توسط همه اعضای D به صفر تبدیل می‌شوند. یعنی مجموعه صفرهای D متناظر پوچساز D است. به همین سبب به مجموعه صفرهای D، پوچساز D نیز می‌گوییم و آن را با D^0 نمایش می‌دهیم.

$$\begin{aligned} D^0 &= \{\psi \in V^{**} : \psi(D) = 0\} \\ &\equiv \{v \in V : \psi_v(D) = 0\} = \{v \in V : \forall f \in D \quad f(v) = 0\} \end{aligned}$$

بنابراین در این نوشته پوچساز یک زیر مجموعه V مجموعه‌ای در V^* است و پوچساز یک زیر مجموعه V^* مجموعه‌ای در V است. ولی با توجه به اینکه هر دو یک ماهیت دارند هر حکمی که راجع به یکی برقرار باشد راجع به دیگری نیز برقرار خواهد بود.

قضیه: فرض کنید $g, f_1, \ldots, f_k \in V^*$ تابعک‌هایی دلخواه اند. در این صورت

$$g \in \langle f_1, \ldots, f_k \rangle \;\Leftrightarrow\; \bigcap_{i=1}^{k} \ker(f_i) \subseteq \ker(g) \;\Leftrightarrow\; \{f_1, \ldots, f_k\}^0 \subseteq \{g\}^0$$

اثبات. توجه کنید که رابطه دوم در واقع چیزی بیشتر از تعریف پوچساز نیست. به این ترتیب تنها باید رابطه اول را نشان دهیم. اگر $g \in \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ آنگاه $g = t_1f_1 + \cdots + t_kf_k$. بنابراین

$$v \in \bigcap_{i=1}^{k} \ker(f_i) \;\Rightarrow\; g(v) = t_1f_1(v) + \cdots + t_kf_k(v) = 0 \;\Rightarrow\; v \in \ker(g)$$

در نتیجه $\bigcap_{i=1}^{k} \ker(f_i) \subseteq \ker(g)$.

برعکس، فرض کنید هسته تابعک g شامل اشتراک هسته‌های f_i ها است. با توجه به قسمت قبل می‌توان فرض کرد که $\{f_1, \ldots, f_k\}$ مستقل خطی است. زیرا هر عضو زائد آن در فضای تولید شده توسط بقیه قرار دارد و طبق قسمت قبل اضافه کردن یا حذف آن تاثیری در اشتراک هسته‌های f_i ها نمی‌گذارد. اگر $g \notin \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ آنگاه $\{g, f_1, \ldots, f_k\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی خواهد بود و می‌توان آن را به پایه‌ای مانند $\{g, f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ برای V^* گسترش داد. فرض کنید دوگان این پایه برابر است با $\{u, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. به این ترتیب داریم

$$\begin{aligned} g(u) &= 1 && \Rightarrow \quad u \notin \ker(g) \\ f_1(u) = \cdots = f_k(u) &= 0 && \Rightarrow \quad u \in \bigcap_{i=1}^{k} \ker(f_i) \end{aligned}$$

این تناقض نشان می‌دهد که فرض $g \notin \langle f_1,\dots,f_k \rangle$ نمی‌تواند درست باشد.

قضیه: فرض کنید S زیر مجموعه‌ای از فضای برداری V باشد. در این صورت S^0 زیر فضایی از V^* است و $S^0 = \langle S \rangle^0$.

اثبات: فرض کنید $f_1, f_2 \in S^0$ در این صورت برای هر v در S داریم.

$$(f_1 + rf_2)(v) = f_1(v) + rf_2(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1 + rf_2 \in S^0$$

برای اثبات قسمت دوم ابتدا دقت کنید که اگر $S_1 \subset S_2$ آنگاه $S_1^0 \supset S_2^0$. بنابراین $S^0 \supset \langle S \rangle^0$. به این ترتیب تنها کافی است نشان دهیم $S^0 \subset \langle S \rangle^0$. فرض کنید $f \in S^0$. برای هر $v \in \langle S \rangle$ بردارهای $v_1,\dots,v_k$ در S وجود دارند به گونه‌ای که $v = t_1v_1 + \cdots + t_kv_k$.

$$f(v) = f(t_1v_1 + \cdots + t_kv_k) = t_1f(v_1) + \cdots + t_kf(v_k) = 0$$

این نشان می‌دهد که $f \in \langle S \rangle^0$ و در نتیجه $S^0 \subset \langle S \rangle^0$.

یک نتیجه مستقیم قضیه بالا گزاره زیر است.

نتیجه. فرض کنید D زیر مجموعه‌ای از فضای برداری V^* باشد. در این صورت D^0 زیرفضایی از V است و $D^0 = \langle D \rangle^0$.

قضیه: فرض کنید $\alpha = \{e_1,\dots,e_n\}$ پایه‌ای برای V و $\alpha^* = \{e_1^*,\dots,e_n^*\}$ دوگان α باشد. در این صورت

$$\{e_1,\dots,e_k\}^0 = \langle e_{k+1}^*,\dots,e_n^* \rangle \qquad \{e_{k+1}^*,\dots,e_n^*\}^0 = \langle e_1,\dots,e_k \rangle$$

اثبات. فرض کنید $f = t_1e_1^* + \cdots + t_ne_n^*$ تابعک دلخواهی باشد. با توجه به اینکه $t_i = f(e_i)$ داریم

$$\begin{aligned} f \in \{e_1,\dots,e_k\}^0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(e_1) = \cdots = f(e_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t_1 = \cdots = t_k = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad f \in < e_{k+1}^*,\dots,e_n^* > \end{aligned}$$

رابطه دوم نیز نتیجه مستقیم رابطه اول است.

نتیجه. برای هر زیر فضای W از V داریم $(W^0)^0 = W$. برای هر زیر فضای Z از V^* نیز داریم $(Z^0)^0 = Z$.

نتیجه: برای هر زیر فضای W از V داریم $\dim W + \dim W^0 = \dim V$. برای هر زیر فضای Z از V^* نیز داریم $\dim Z + \dim Z^0 = \dim V^* = \dim V$.

نتیجه: اگر S زیرمجموعه دلخواهی در V باشد آنگاه $\langle S \rangle = (S^0)^0$. اگر D زیرمجموعه دلخواهی در V^* باشد آنگاه $\langle D \rangle = (D^0)^0$.

به عبارت دیگر فضای تولید شده توسط S مجموعه بردارهایی است که توسط هر تابعک خطی‌ای که روی S صفر است به صفر تبدیل می‌شوند. همچنین فضای تولید شده توسط T مجموعه همه تابعک‌های خطی‌ای است که هسته آنها شامل صفرهای T اند.

فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی باشد. هر تابعک $f \in W^*$ نگاشتی خطی از W به F است. بنابراین $f \circ T$ نگاشتی خطی از V به F می‌شود. به عبارت دیگر برای هر $f \in W^*$، $f \circ T$ عضوی در V^* است.

فرض کنید $T : V \to W$ یک نگشت خطی باشد. در این صورت نگاشت

$$T^t : W^* \to V^*; \; f \mapsto f \circ T$$

نیز یک نگاشت خطی است زیرا برای هر $v \in V$،

$$\begin{aligned} T^t(f_1 + rf_2)(v) &= (f_1 + rf_2)(T(v)) = f_1(T(v)) + rf_2(T(v)) \\ &= T^t(f_1)(v) + rT^t(f_2)(v) = (T^t(f_1) + rT^t(f_2))(v) \end{aligned}$$

بنابراین $T^t(f_1 + rf_2) = T^t(f_1) + rT^t(f_2)$.

اگر α و β به ترتیب پایه‌هایی مرتب برای V و W و α^* و β^* دوگان آنها باشند آنگاه برای هر تبدیل خطی $T : V \to W$ داریم

$$([T]^\alpha_\beta)_{ij} = ([T^t]^{\beta^*}_{\alpha^*})_{ji}$$

اگر $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ و $\alpha^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ باشد برای هر $v \in V$ و $f \in V^*$ داریم

$$\begin{aligned} v &= t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n = v_1^*(v) v_1 + \cdots + v_n^*(v) v_n \\ f &= s_1 v_1^* + \cdots + s_n v_n^* = f(v_1) v_1^* + \cdots + f(v_n) v_n^* \end{aligned}$$

به عبارت دیگر درایه iام نمایش v در پایه α برابر است با $v_i^*(v)$ و درایه jام نمایش f در پایه α^* برابر است با $f(v_j)$. از طرفی $([T]^\alpha_\beta)_{ij}$ برابر است با درایه i ام نمایش $T(v_j)$ در پایه β. در نتیجه

$$([T]^\alpha_\beta)_{ij} = w_i^*(T(v_j))$$

به همین صورت $([T^t]^{\beta^*}_{\alpha^*})_{ji}$ برابر است با درایه jام نمایش $T^t(w_i^*)$ در پایه α^*. در نتیجه طبق تعریف T^t داریم

$$([T^t]^{\beta^*}_{\alpha^*})_{ji} = T^t(w_i^*)(v_j) = w_i^*(T(v_j)) = ([T]^\alpha_\beta)_{ij}$$

تعریف: فرض کنید A ماتریس $m \times n$ است. به ماتریس B با ابعاد $n \times m$ ترانهاده A گوییم هرگاه برای هر i, j $(A)_{ij} = (B)_{ji}$. **در این صورت می‌نویسیم** $B = A^t$.

بنابراین طبق تعریف بالا نمایش T^t در پایه‌های β^* و α^* ترانهاده نمایش T در پایه‌های α و β است.

نتیجه. با توجه به یکسانی‌های $V \equiv V^{**}$ و $W \equiv W^{**}$ داریم $(T^t)^t = T$. این موضوع با توجه به رابطه نمایش یک نگاشت خطی و ترانهاده آن نیز به سادگی نتیجه می‌شود.

قضیه. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی است در این صورت $\ker T^t = (\operatorname{Im} T)^\circ$.

اثبات.

$$\begin{aligned} f \in \ker T^t \quad &\Leftrightarrow \quad T^t(f) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall v \in V \quad T^t(f)(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall v \in V \quad f(T(v)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \in (\operatorname{Im} T)^\circ \end{aligned}$$

نتیجه. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی است. در این صورت $\ker T = (\operatorname{Im} T^t)^\circ$ **یا به عبارت دیگر** $\operatorname{Im} T^t = (\ker T)^\circ$

اثبات. کافی است نتیجه قضیه بالا را برای T^t استفاده کنیم و توجه کنیم که $(T^t)^t = T$.

نتیجه. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی است. در این صورت

$$\dim(\operatorname{Im} T) = \dim(\operatorname{Im} T^t)$$

اثبات. طبق قضیه بعد داریم

$$\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim V$$

طبق قضایای قبل داریم

$$\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\ker T)^{\circ} = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T^t)$$

بنابراین

$$\dim(\operatorname{Im} T) = \dim V - \dim(\ker T) = \dim(\operatorname{Im} T^t)$$

تعریف. بعد تصویر نگاشت خطی $T : V \to W$ را *رتبه* T می‌گوییم و آن را با $rank\, T$ نمایش می‌دهیم.

توجه کنید که اگر $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد آنگاه $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ تصویر نگاشت T را تولید می‌کنند. بنابراین $rank\, T = \dim \langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle$. با توجه به اینکه

$$[T]_\beta^\alpha = \left[[T(v_1)]_\beta \mid \cdots \mid [T(v_n)]_\beta \right]$$

رتبه T برابر با بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های ماتریس نمایش T است. به این ترتیب *رتبه یک ماتریس* را برابر بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های آن تعریف می‌کنیم. در نتیجه $rank\, T = rank\, [T]$.

طبق قضیه بالا داریم $rank\, T = rank\, T^t$ و طبق قضایای قبل

$$rank\, [T]_\beta^\alpha = rank\, [T^t]_{\alpha^*}^{\beta^*} = rank \left([T]_\beta^\alpha \right)^t$$

بنابراین برای هر ماتریس A داریم $rank\, A = rank\, A^t$. به عبارت دیگر بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های A برابر است با بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های A^t. اما ستون‌های A^t در واقع سطرهای A اند. بنابراین بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های یک ماتریس با بعد فضای تولید شده توسط سطرهای آن برابر است. این موضوع را در فصل آینده به شیوه‌ای دیگر می‌بینیم.

قضیه. بعد فضای تولید شده توسط سطرهای یک ماتریس برابر بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های آن است.
