

بنام او

تمرین مبتدیان و جبر خطی - سری پنجم - ۹۶، ۹، ۲۲  
بخش اول: تمرینات فضای (وکتور)

۱- فرض کنید  $V$  یک فضای بردار باشد،  $B \subseteq V$ ،  $C \subseteq V^*$ ، ثابت کنید

$$B^\perp = \langle B \rangle^\perp \quad , \quad C^\perp = \langle C \rangle^\perp$$

(سعی ۱)

۲- فرض کنید  $V$  یک فضای بردار باشد و  $H$  زیرفضای  $V^*$  باشد. ثابت کنید

$$\dim H + \dim H^\perp = \dim V$$

$$H^{\perp\perp} = H$$

(سعی ۱)

۳- فرض کنید  $W$  زیرفضای  $V$  باشد و  $\{v_1, \dots, v_k\}$  پایه از  $W$  و

$B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  ترسیمی از  $V$  باشد. اگر  $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$  پایه دوگان  $B$  باشد که

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ثابت کنید  $W^\perp = \{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ . نتیجه بگیرید که  $W$  از آن به صورت اشتراک  $n-k$

زیرفضای از  $n-1$  نوبت. (این نتیجه را در  $\mathbb{R}^2$  و  $\mathbb{R}^3$  تحقیق کنید) (سعی ۱)

۴- فرض کنید  $W_1$  و  $W_2$  زیرفضای  $V$  باشند و  $\dim V < \infty$ . ثابت کنید

$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp \quad \text{الف)}$$

$$(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp \quad \text{ب)}$$

(سعی ۲)

بخش دوم: تمرینات ماتریس نگاشت و ماتریس گذار

۵- ماتریس گذار از پایه

$$\{(1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, -1, 1)\}$$

به پایه استاندارد  $\mathbb{R}^3$  را بنویسید.

(سج ۱)

۶- فرض کنیم  $V$  یک فضای بردار روی  $\mathbb{R}$  از بعد ۳ باشد و  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  یک پایه آن باشد. اگر  $T: V \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد که ماتریس آن نسبت به  $B$  به صورت زیر باشد:

$$M(T, B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

پایه برای  $\text{Ker } T$  و  $\text{Im } T$  را به اعضا  $B$  بنویسید.

(سج ۲)

۷- فرض کنیم  $T, S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  و  $B = \{(1, 1), (-1, 0)\}$  و  $C = \{(1, 2), (0, 1)\}$  و  $T, S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  نگاشتهای خطی هستند که

$$M(T, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad M(S, C) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

الف) آیا  $T$  و  $S$  نگاشتهای وارون پذیر هستند؟

ب) ماتریس  $M(T+S, C, C)$  و  $M(T \circ S, B, B)$  و  $M(T^t, B^*, B^*)$  را بنویسید.

ج) اگر  $v = (3, 0) \in \mathbb{R}^2$ ، مختصات  $T(v)$  نسبت به پایه  $B$  را بنویسید.

۸- فرض کنید  $T, S: V \rightarrow V$  نگاشتهای خطی باشند و  $\dim V < \infty$ . نشان دهید

اگر  $T \circ S = \text{id}_V$ ، آنگاه  $S \circ T = \text{id}_V$ .

(سج ۲)