به نام خدا

تمرین سوم

جبر خطی کاربردی – بهار ۱۴۰۱

توضیحات

- پاسخ به تمرین‌ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و درصورت مشاهده هرگونه **تقلب** نمره **صفر** برای کل تمرین منظور خواهد شد.
- پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.
- در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق ایمیل la.spring1401.aut@gmail.com سوال خود را بپرسید.
- مهلت ارسال پاسخ ها تا ساعت **۲۳:۵۵، ۱۲ اردیبهشت** می‌باشد.
- با توجه به فشردگی برنامه تمرین ها در طول ترم، به هیچ عنوان امکان تمدید تمرین وجود نخواهد داشت.
- پاسخ خود را به صورت یک فایل pdf و با فرمت HW?_Name_StudentNumber آپلود کنید. (مثال: HW3_BardiaArdakanian_9831072).

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱- با توجه به عملیات ساده‌سازی دترمینان A را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \\ 4 & 8 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 2 & 5 & -6 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

۲-

الف) با استفاده از دترمینان استقلال خطی بردارهای v_3, v_2, v_1 را ثابت کنید.

$$\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ -7 \end{bmatrix}, \mathrm{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب) حجمی که سه بردار فوق در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌سازند را به دست آورید.

ج) حال حجمی که تبدیل سه بردار ذکر شده تحت تبدیل با ماتریس B می‌سازند را به دست آورید.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

۳-

الف) با استفاده از روش کرامر، ستون سوم ماتریس A^{-1} را بدون محاسبه‌ی بقیه‌ی ستون‌ها به‌دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ب) با استفاده از روش کرامر، عبارت مقابل را ثابت کنید.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

۴- دترمینان ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 9 & 9 & 9 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۵- در صورت درستی هر مورد، آن را اثبات کنید و در صورت نادرست بودن آن، مثال نقضی ارائه دهید.

الف) برای ماتریس مربعی A داریم: $det(A) = det(A^T)$.

ب) اگر A و B، $n \times n$ باشند، داریم: $det(AB) = det(BA)$.

ج) اگر A و P، $n \times n$ باشند و P نیز معکوس‌پذیر باشد، داریم: $det(PAP^{-1}) = det(A)$.

د) اگر U، $n \times n$ باشد و $U^TU = I$ ، داریم: $det(U) = \pm 1$.

ه) اگر $det(A^4) = 0$ باشد داریم: A معکوس‌پذیر است.

۶- اگر A ماتریس $n \times n$ باشد که فقط از ±۱ تشکیل شده است نشان دهید دترمینان آن بر 2^{n-1} بخش‌پذیر است.

۷- اگر A و B ماتریس‌های مربعی باشند، می‌دانیم:

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = det(A).det(B)$$

اگر C و D ماتریس‌های $n \times n$ باشند دترمینان ماتریس زیر را به‌دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{bmatrix}$$

۸- فرض کنید $B = \{b_1, b_2\}$ یک پایه برای فضای V باشد و $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ یک پایه برای فضای برداری W باشد. اگر $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی با ویژگی‌های زیر باشد. ماتریس M مربوط به تبدیل T را به‌دست آورید.

$$T(b_1) = 3c_1 - 2c_2 + 5c_3$$
$$T(b_2) = 4c_1 + 7c_2 - c_3$$

۹- یک پایه برای همه مقدارهای ممکن بردار زیر به‌دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 2a - 4b + 10c \\ 2a + 5b - 8c \\ -a - 4b + 7c \\ 3a + b + c \end{bmatrix}$$

۱۰- فرض کنید $T: V \rightarrow W$ و $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ مجموعه‌ای از بردارهایی در فضای برداری V است به گونه‌ای که $\{T(\boldsymbol{v}_1), \dots, T(\boldsymbol{v}_m)\}$ یک مجموعه برداری مستقل خطی در فضای برداری W خواهد بود. ثابت کنید $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ مستقل خطی است.

۱۱-

الف) فرض کنید V یک زیرفضا از R^n و $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ یک پایه برای V باشد. ثابت کنید که تمام پایه های V دارای K بردار در V هستند.

ب) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ است و $nullspace$ آن یک صفحه در R^3 است. همچنین $range$ آن توسط بردار غیرصفر v در R^5، $span$ می‌شود. m و n را تعیین کنید و $rank$ و $nullity$ ماتریس A را به‌دست آورید.

۱۲- (امتیازی) فرض کنید n عددی صحیح و مثبت است و T تبدیلی خطی و غیر صفر به طوری که $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. عبارت‌های زیر را اثبات کنید.

الف) فضای پوچ $(nullspace)$ تبدیل T دارای $n-1$ بعد می‌باشد.

ب) فرض کنید $B=\{v_1,\dots,v_{n-1}\}$ یک پایه برای فضای پوچ $(nullspace)$ تبدیل T می‌باشد و w برداری است n بعدی که در $Nul(T)$ قرار ندارد. ثابت کنید $B=\{v_1,\dots,v_{n-1},w\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.

ج) هر بردار $u\in\mathbb{R}^n$ را می‌توان به صورت $u=v+\frac{T(u)}{T(w)}w$ نشان داد که $v\in Nul(T)$.