سوال:

فرض کنید که A, X و B ماتریس هایی $n \times n$ بوده و ماتریس های A, X و $(A - AX)$ وارون پذیرند(*Invertible*). همچنین فرض کنید تساوی رو به رو نیز برقرار است. $(A - AX)^{-1} = X^{-1}B$

الف) توضیح دهید چرا ماتریس B وارون پذیر خواهد بود.

ب) حاصل ماتریس X را بر اساس ماتریس های A, B محاسبه کنید. در صورت نیاز برای وارون کردن یک ماتریس، توضیح دهید چرا این ماتریس، وارون پذیر خواهد بود.

پاسخ:

الف) از آن جایی که ماتریس B را می توان به صورت ضرب دو ماتریس وارون پذیر نوشت، بنابراین ماتریس B نیز وارون پذیر خواهد بود.

$$(A - AX)^{-1} = X^{-1}B \rightarrow X(A - AX)^{-1} = XX^{-1}B \rightarrow X(A - AX)^{-1} = IB$$
$$\rightarrow B = X(A - AX)^{-1}$$

ب) در ابتدا دو طرف معادله را وارون می کنیم. همانطور که در قسمت «الف» اثبات کردیم، ماتریس B وارون پذیر است. ماتریس X^{-1} نیز همانطور که مشاهده می شود و در فرض سوال نیز ذکر شده بود، وارون پذیر است. بنابراین حاصل ضرب این دو ماتریس نیز وارون پذیر خواهد بود.

$$((A - AX)^{-1})^{-1} = (X^{-1}B)^{-1} \rightarrow A - AX = B^{-1}(X^{-1})^{-1} \rightarrow A - AX = B^{-1}X$$
$$\rightarrow A = AX + B^{-1}X \rightarrow A = (A + B^{-1})X$$

حاصل $(A + B^{-1})X$ وارون پذیر است چرا که ماتریس A وارون پذیر است. از آن جایی که ماتریس X هم وارون پذیر است، بنا قسمت «الف» ماتریس $A + B^{-1}$ هم وارون پذیر است.($(A + B^{-1}) = AX^{-1}$ که هردو ماتریس A, X^{-1} وارون پذیرند) پس

$$(A + B^{-1})^{-1}A = (A + B^{-1})^{-1}(A + B^{-1})X \rightarrow X = (A + B^{-1})^{-1}A$$