سوال:

در هر یک از عبارات زیر، مجموعه U و زیرفضای S داده شده است، مشخص کنید که آیا U زیرفضایی از S است یا خیر؟

الف) $U = \begin{bmatrix} 2r - s \\ 3r \\ r + s \end{bmatrix}$ و $S = \mathbb{R}^3$.

ب) $U = \begin{bmatrix} 2r - s \\ 2 \\ r + s \end{bmatrix}$ و $S = \mathbb{R}^3$.

پ) $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = 2\vec{x}\}$ و $S = \mathbb{R}^n$ که A یک ماتریس $n * n$ است.

د) $U = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ که در آن $ab = 0$ و $S = \mathbb{R}^3$.

پاسخ:

الف)

$$\begin{bmatrix} zr - s \\ 3r \\ r + s \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

از آنجا که $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ پس فضای $span$ شده توسط آن ها زیر فضای از R^3 خواهد بود.

ب) اگر $r = 0, s = 0$ آنگاه $U = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و از آنجا که وکتور 0 در مجموعه U وجود ندارد، پس این مجموعه یک زیر فضا برای R^3 نخواهد بود.

پ) بله، برای اثبات آن سه شرط زیرفضا را بررسی میکنیم:

1- واضح است که وکتور 0 عضو این مجموعه است.

2- دو وکتور x_1, x_2 را در نظر میگیریم، به گونه ای که $Ax_1 = 2x_1, Ax_2 = 2x_2$ باشد. در اینصورت خواهیم داشت:

$$A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = 2\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 = 2(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$$

که نشان دهنده این است که $(x_1 + x_2)$ نیز در این مجموعه است.

3- وکتور های x_1, x_2 را مشابه بالا و عدد حقیقی c را در نظر میگیریم، خواهیم داشت:

$$A(c\vec{x}_1) = c(A\vec{x}_1) = c(2\vec{x}_1) = 2(c\vec{x}_1)$$

پس cx_1 نیز در این مجموعه خواهد بود.

پس از آنجا که هر سه شرط برقرار است این مجموعه یک زیرفضا برای R^n خواهد بود.

د) زیر فضا نیست، مثال نقض:

$$u_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \{u_1, u_2\} \in U$$

$$u_1 + u_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \notin U$$

پس این مجموعه تحت عمل جمع بسته نیست و یک زیرفضا نیست.