جبرخطی کاربردی

نیمسال دوم ۹۶ـ۹۷

مدرس :دکتر ناظر فرد

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات

مجموعه سوالات فصل ۲و۳ (جبر ماتریسی و دترمینان)

توجه!!! :

- سری دوم تمرینات با موضوع جبر ماتریسی و دترمینان را در زیر مشاهده می کنید.
- این سری تمرین شامل ۱۱ سوال نظری است که سوالات شبیه سازی نیز به زودی در اختیار شما قرار خواهد گرفت.
- پس از حل مسائل آن ها را به صورت یک فایل pdf در قسمت مورد نظر آپلود کنید همچنین تمرینات عملی و شبیه سازی را نیز در یک پوشه قرار دهید و در قسمت در نظر گرفته شده با توجه به اصول ارسال تمارین که در کانال و مودل قرار گرفته است ارسال کنید.
- تمرینات نظری را به شکل:

$$9531000\_T\_Giovanni\ \ vanBronckhorst\_HW2.pdf$$

و تمرینات عملی و شبیه سازی را به شکل:

$$9531000\_S\_Giovanni\ \ vanBronckhorst\_HW2.pdf$$

ارسال فرمایید.

- مهلت تحویل تمارین ساعت ۲۳:۵۵ روز جمعه ۹۷/۲/۲۸ خواهد بود.

تمارین:

۱. ابتدا دترمینان ماتریس های زیر را بیابید سپس با استفاده از دو روش استفاده از ماتریس های مقدماتی و ماتریس الحاقی (adjugate) وارون آن هارا در صورت وجود بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ -۲ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -۲ & -۷ & -۹ \\ ۲ & ۵ & ۶ \\ ۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ \\ ۴ & -۷ & ۳ \\ -۲ & ۶ & -۴ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & \cdots & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۰ \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & a_۱ & ۱ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & a_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a_{n-۱} \\ a_n & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \end{bmatrix}_{n\times n}$$

a_i ها پارامتر و غیر صفر هستند.

۲. درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید برای گزاره های نادرست مثال نقض و برای گزاره های درست اثبات ارائخ دهید

۱. اگر A, B ماتریس های $n \times n$ و $AB - BA = A$ آنگاه A معکوس پذیر نیست.

۲. ماتریسی را پاد متقارن گوییم که برابر قرینه ترانهاده اس باشد ،اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد آنگاه اگر n زوج باشد $detA = ۰$.

۳. اگر A یک ماتریس بالا مثلثی باشد اگر هیچ یک از درایه های روی قطر اصلی آن برابر صفر نباشد آنگاه هم ارز سطری I_n است.

۳. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد که درایه های آن ۱ ,۱− تشکیل شده باشد ،ثابت کنید $۲^{n-۱}$ عاد می کند $detA$ را .

۴. اگر یک ماتریس A یک ماتریس $n \times n$ باشد گزاره های زیر را ثابت کنید:

۱. $adj(A^t) = (adjA)^t$

۲. $adjA^{-۱} = (adjA)^{-۱}$

۳. اگر A ماتریس قطری باشد انگاه $adjA$ نیز قطری است.

۴. نشان دهید اگر $I - AB$ معکوس پذیر باشد آنگاه $I - BA$ نیز معکوس پذیر است.

۵. نشان دهید : $|adj(adj(A))| = |A|^{(n-۱)^۲}$

۵. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد و $A = a_{(ij)}$ به طوری که به ازای هر $۱ \leq i \leq n$ داشته باشیم $\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} = a$ که a مستقل از درایه های ماتریس است.اگر $A^۲ = I$ مقدار a را محاسبه کنید.

۶. فرض کنید A, B, C ماتریس هایی $n \times n$ باشند ،به ازای چه n هایی رابطه زیر برقرار است :

$$(AB - BA)^۲ C = C(AB - BA)^۲$$

۷. دترمینان ماتریس های زیر را بیابید:

$$\begin{bmatrix} a+b & ab & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۱ & a+b & ab & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & a+b & \cdots & ۰ & ۰ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a+b & ab \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & a+b \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ & \cdots & a_n \\ a_۱^۲ & a_۲^۲ & a_۳^۲ & \cdots & a_n^۲ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_۱^{n-۱} & a_۲^{n-۱} & a_۳^{n-۱} & \cdots & a_n^{n-۱} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ & \cdots & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ & \cdots & ۳ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۱ & ۲ & ۳ & \cdots & n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

۸. فرض کنید تمامی ماتریس های زیر وارون پذیر باشند نشان دهید :

$$(A - B)^{-۱} = A^{-۱} + A^{-۱}(B^{-۱} - A^{-۱})^{-۱}A^{-۱}$$

همچنین در حالت خاص نشان دهید :

$$(I + A)^{-۱} = I - (A^{-۱} + I)^{-۱}$$

و نشان دهید:

$$|(I + A)^{-۱} + (I + A^{-۱})^{-۱}| = ۱$$

۹. جواب دستگاه معادلات زیر را به روش کرامر بیابید:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 &= 3 \\ -3x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 &= 2 \end{cases}$$

۱۰. دستگاه معادلات زیر را با استفاده از تجزیه LU حل کنید همچنین وارون ماتریس افزوده را با تجزیه LU به دست آورید.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_4 &= 8 \\ 2x_1 + X_2 - 2x_3 + x_4 &= 7 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 14 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -7 \end{cases}$$

۱۱. فرض کنید $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ یک تبدیل خطی با ماتریس $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ باشد که a, b, c مقادیری مثبت باشند، S را کره واحد در نظر بگیرید که سطح آن با معادله $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ محدود شده است،

۱. نشان دهید $T(S)$ با بیضی به معادله $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ محدود شده است.

۲. با این فرض که حجم کره واحد $4\pi/3$ است حجم بیضی مطرح شده در قسمت ۱ را بیابید.