۱. فرض کنید $q_1, q_2, \dots, q_n$ بردارهایی $orthonormal$ در R^m هستند.

الف) اگر $c_1, c_2, \dots, c_n$ اعدادی حقیقی باشند، مقدار $\|c_1q_1 + c_2q_2 + \cdots + c_nq_n\|^2$ را بدست آورید.

ب) نشان دهید $q_1, q_2, \dots, q_n$ بردارهایی مستقل خطی هستند.

پاسخ:

الف) چون $q_1, q_2, \dots, q_n$ بردارهایی $orthonormal$ هستند پس می‌دانیم $q_i \cdot q_i = 1$ برای هر i و $q_i \cdot q_j = 0$ برای هر $i \neq j$. بنابراین داریم:

$$\|c_1q_1 + c_2q_2 + \cdots + c_nq_n\|^2 = (c_1q_1 + c_2q_2 + \cdots + c_nq_n) \cdot (c_1q_1 + c_2q_2 + \cdots + c_nq_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \,(q_i \cdot q_i) + \sum_{i<j} 2c_ic_j(q_i \cdot q_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

ب) فرض کنید اعداد حقیقی $c_1, c_2, \dots, c_n$ وجود دارند به طوری که $c_1q_1 + c_2q_2 + \cdots + c_nq_n = 0$. در اینصورت $0 = \|c_1q_1 + c_2q_2 + \cdots + c_nq_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$، که ایجاب می کند تمامی c_iها صفر باشند. از این جهت $c_1q_1 + c_2q_2 + \cdots + c_nq_n = 0$ نتیجه می‌دهد که $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. بنابراین طبق تعریف $q_1, q_2, \dots, q_n$ مستقل خطی‌اند.

---

۲. نشان دهید اگر P یک ماتریس $orthogonal$ باشد، آنگاه $|P| = \pm 1$ خواهد بود.

پاسخ:

می‌دانیم اگر P یک ماتریس $orthogonal$ باشد، بنابراین $P^TP = I$. پس می‌توان گفت:

$$\det(P^{\mathrm{T}})\det(P) = \det(P^{\mathrm{T}}P) = \det(I) = 1$$

اما $\det(P^T) = \det(P)$. بنابراین $(\det(P))^2 = 1$، که نتیجه می‌دهد $det(P) = \pm 1$.

---

۳. فرض کنید y و u_1 و u_2 به صورت زیر باشند. فاصله میان y و صفحه ای در R^3 که u_1 و u_2 آن را $span$ می‌کنند را بیابید.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

فاصله y در R^3 تا زیرفضایی مانند W به صورت فاصله میان y و نزدیک ترین نقطه در W تعریف می‌شود. از آنجاییکه نزدیکترین نقطه در W به y در واقع $\hat{y} = proj_W^y$ است، فاصله مورد نظر ما $|| y - \hat{y} ||$ است.

$$\hat{y} = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{y \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 \quad \rightarrow \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ و } y - \hat{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \|y - \hat{y}\| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

---

۴. باتوجه به اینکه a, b, c اسکالر هستند، سیستم معادلات زیر $inconsistent$ است؛ زیرا نمودار معادلات صفحات با یکدیگر موازی هستند.

نشان دهید که مجموعه تمام راه‌حل‌های $Least\ Squares$ سیستم دقیقاً صفحه‌ای است که معادله آن به شکل $x - 2y + 5z = (a + b + c)/3$ است.

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = a \\ x - 2y + 5z = b \\ x - 2y + 5z = c \end{cases}$$

پاسخ:

ابتدا بردارها و ماتریس زیر را درنظر می‌گیریم.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \text{ and } A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^T \\ \mathbf{v}^T \\ \mathbf{v}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

حال برای $Least\ squares$ باید معادله $A^T A\, x = A^T b$ را حل کنیم:

$$A^T b = av + bv + cv = (a + b + c)v$$
$$A^T A = vv^T + vv^T + vv^T = 3vv^T \quad \Rightarrow \quad A^T A\, x = 3(vv^T)x = 3v(v^T x)$$

از آنجایی که $v^T x$ یک اسکالر(ضرب داخلی دوبردار) است معادله را می‌توانیم به فرم زیر بازنویسی کنیم:

$$3(v^T x)v = (a + b + c)v \quad \Rightarrow \quad 3(v^T x) = (a + b + c) \quad \Rightarrow \quad (v^T x) = (a + b + c)/3$$
$$v^T x = 1x - 2y + 5z$$

پس داریم: $1x - 2y + 5z = (a + b + c)/3$