دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات

جبرخطی کاربردی

نیمسال دوم ۹۶-۹۷

مدرس :دکتر ناظر فرد

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

پاسخ سوالات سری اول

توجه!!! :

- انشجویان گرامی پاسخ های سوالات را به دقت بخوانید و با پاسخ های خود مقایسه کنید تا در صورتی که سوالی را نتوانسته اید حل کنید یا غلط حل کرده اید متوجه آن شوید.
- روز یکشنبه ۹۷/۱/۲۶کلاس حل تمرین با موضوع بررسی مسائل تمرین اول و رفع اشکال ساعت ۱۲:۱۵ تا ۱۳:۱۵ تشکیل خواهد شد.

تمارین و پاسخ ها:

۱. در زیر دو دستگاه معادلات مشاهده می کنید،برای این دستگاه ها ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل دهید سپس ماتریس افزوده آن ها را به شکل کاهش یافته سطری پلکانی در بیاورید و در مورد تعداد جواب های این دستگاه ها بحث کنید و آن ها را به شکل پارامتریک برداری بیان کنید،در نهایت یک توصیف هندسی از این جواب ها ارائه دهید.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 + -8x_3 &= 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 &= -6 \end{cases}$$

حل. ابتدا ماتریس افزوده را برای هر دو دستگاه معادلات تشکیل می دهیم سپس با اعمال سطری آن ها را به شکل کاهش یافته سطری پلکانی در می آوریم و درنهایت جواب دستگاه به شکل پارامتری تعیین می کنیم و تعداد جواب ها را ذکر می کنیم:

-

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -4 & -9 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+4R_1\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3+R_2\to R_3]{R_1-R_2\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & -2 \\ 0 & 3 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1+\frac{9}{4}R_3\to R_1]{R_2-\frac{10}{4}R_3\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}R_2\to R_2]{\frac{1}{4}R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

این دستگاه یک جواب دارد جواب آن به شکل پارامتری به صورت زیر است:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{p}}$$

-

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 9 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2-R_1\to R_2]{R_3+3R_1\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1-3R_2\to R_1]{R_3-2R_2\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_۱ + ۴x_۳ &= -۵ \\ ۴x_۲ - ۳x_۳ &= ۳ \\ x_۳ \ \ is \ \ free \end{cases}$$

جواب دستگاه به صورت پارامتریک به شکل زیر است:

$$x = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴x_۳ - ۵ \\ ۳x_۳ + ۳ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -۵ \\ ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}}_{\text{p}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -۴ \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}}_{\text{v}} x_۳$$

◀

۲. در دستگاه معادلات زیر h و k را به گونه ای انتخاب کنید که :

۱. معادلات جواب نداشته باشند.

۲. معادلات جواب یکتا داشته باشند.

۳. بیش از یک جواب داشته باشند.

به هر قسمت به طور جداگانه پاسخ دهید.

$$\begin{cases} x_۱ + hx_۲ &= ۲ \\ ۴x_۱ + ۸x_۲ &= k \end{cases} \qquad \begin{cases} x_۱ + ۳x_۲ &= ۲ \\ ۳x_۱ + hx_۲ &= k \end{cases}$$

حل.

•

$$\begin{bmatrix} ۱ & h & ۲ \\ ۴ & ۸ & k \end{bmatrix} \xrightarrow[R_۲ - ۴R_۱ \to R_۲]{R_۱ - \frac{h}{۸-۴h} R_۲ \to R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ - \frac{(k-۸)h}{۸-۴h} \\ ۰ & ۸ - ۴h & k - ۸ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} h = ۲, k = ۸ & \text{بی نهایت جواب} \\ h \neq ۲ & \text{یک جواب} \\ h = ۲, k \neq ۸ & \text{بدون جواب} \end{cases}$$

•

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & h & k \end{bmatrix} \xrightarrow[R_۲ - ۳R_۱ \to R_۲]{R_۱ - \frac{۳}{h-۹} R_۲ \to R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ - ۳\frac{k-۶}{h-۹} \\ ۰ & ۱ & \frac{k-۶}{h-۹} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} h = ۹, k = ۶ & \text{بی نهایت جواب} \\ h \neq ۹ & \text{یک جواب} \\ h = ۹, k \neq ۶ & \text{بدون جواب} \end{cases}$$

◀

۳. تمام جواب های ممکن برای $x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵$ از دستگاه معادلات زیر بیابید.

$$\begin{array}{ccccc} x_۵ & + & x_۲ & = & yx_۱ \\ x_۱ & + & x_۳ & = & yx_۲ \\ x_۲ & + & x_۴ & = & yx_۳ \\ x_۳ & + & x_۵ & = & yx_۴ \\ x_۴ & + & x_۱ & = & yx_۵ \end{array}$$

y یک پارامتر است.

حل. دو طرف تساوی ها را با هم جمع می کنیم جواب به شکل زیر در می آید:

$$۲(x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵) = y(x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵)$$

اگر $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ \neq ۰$ باشد آنگاه به ازای $y = ۲$ دستگاه یک جواب دارد و اگر $y \neq ۲$ آنگاه دستگاه جواب ندارد،اگر $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۰$ باشد به ازای هر y دستگاه جواب دارد و جواب های آن نقاط روی ابرصفحه(hyperplane) $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۰$ که تعداد آن ها بی نهایت است.

◀

۴. در مورد تعداد جواب های دستگاه معادلات زیر را برای مقادیر مختلف a, b مشخص کنید.

$$\begin{array}{ccccccc} ax_1 & + & bx_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & (2b-1)x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & bx_2 & + & (b+3)x_3 & = & 2b-1 \end{array}$$

حل. ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل می دهیم سپس ماتریس را به شکل کاهش یافته سطری پلکانی در می آوریم و جواب های معادله را می یابیم.

$$\begin{bmatrix} a & b & 2 & 1 \\ a & 2b-1 & 3 & 1 \\ a & b & b+3 & 2b-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2-R_1\to R_2]{R_3-R_1\to R_3} \begin{bmatrix} a & b & 2 & 1 \\ 0 & b-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-\frac{b}{b-1}R_2\to R_2} \begin{bmatrix} a & 0 & \frac{-2}{b-1} & 1 \\ 0 & b-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2-\frac{R_3}{b+1}\to R_2]{R_1+\frac{2}{b^2-1}R_3\to R_1} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \frac{(b-5)(b+1)}{b^2-1} \\ 0 & b-1 & 0 & \frac{2(1-b)}{b+1} \\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1/a\to R_1]{R_2/b-1\to R_2, R_3/b+1\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{(b-5)(b+1)}{(b^2-1)a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\frac{2(1-b)}{b^2-1}}{} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2(b-1)}{b+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} b=5, a=0 & \text{بی شمار جواب} \\ b\neq 5, a=0 & \text{بدون جواب} \\ b=1 & \text{بدون جواب} \\ b=-1 & \text{بدون جواب} \end{cases}$$

►

۵. خطوط راست در صفحه xy را در نظر بگیرید نشان دهید سه خط

$$\begin{array}{ccccccc} l_1 & : & ax & + & by & + & c=0 \\ l_2 & : & bx & + & cy & + & a=0 \\ l_3 & : & cx & + & ay & + & b=0 \end{array}$$

در یک نقطه متقاطعند اگر و فقط اگر $a+b+c=0$ باشند.

حل. خطوط را به شکل یک سر معادله در نظر می گیریم و دستگاه معادلات را برای آن ها تشکیل می دهیم :

$$\begin{bmatrix} a & b & -c \\ b & c & -a \\ c & a & -b \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-cR_1]{\frac{1}{a}R_1, R_2-bR_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & -\frac{c}{a} \\ 0 & c-\frac{b^2}{a} & \frac{bc}{a}-a \\ 0 & a-\frac{bc}{a} & \frac{c^2}{a}-b \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{c-\frac{b^2}{a}}R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{\frac{bc}{a}-a}{c-\frac{b^2}{a}} \\ 0 & a-\frac{bc}{a} & \frac{c^2}{a}-b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R1-\frac{b}{a}\to R_1]{R_3-a-\frac{bc}{a}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a}-\frac{\frac{bc}{a}-a}{c-\frac{b^2}{a}}\cdot\frac{b}{a} \\ 0 & 1 & \frac{\frac{bc}{a}-a}{c-\frac{b^2}{a}} \\ 0 & 0 & \frac{c^2}{a}-b-\frac{\frac{bc}{a}-a}{c-\frac{b^2}{a}}\cdot a-\frac{bc}{a} \end{bmatrix}$$

برای اینکه این دستگاه یک جواب داشته باشد باید درایه $3,3$ مساوی ۰ شود تا سطر آخر مساوی صفر شود در غیر اینصورت دستگاه جواب ندارد.پس داریم:

$$\frac{c^2}{a}-b-\frac{\frac{bc}{a}-a}{c-\frac{b^2}{a}}\cdot a-\frac{bc}{a}=\frac{c^2-ab}{a}-\frac{\frac{bc-a^2}{a}}{\frac{ac-b^2}{a}}\cdot\frac{a^2-bc}{a}=\frac{(ac-b^2)(c^2-ab)+(a^2-bc)^2}{a(ac-b^2)}=0$$

$$\longrightarrow (ac-b^2)(c^2-ab)+(a^2-bc)^2=ac^3+ab^3+a^4-3a^2bc=0$$

$$\longrightarrow a(a^3+b^3+c^3-3abc)=a((a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac))=0$$

$$\longrightarrow a+b+c=0$$

همانطور که مشاهده کردید برای اینکه این دستگاه یک جواب داشته باشد باید $a+b+c=0$ باشد و از سوی دیگر اگر $a+b+c=0$ باشد آنگاه درایه $3,3$ صفر خواهد شد و در نتیجه دستگاه یک جواب خواهد داشت. ►

۶. درستی و نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید در صورت درست بودن آن را ثابت کنید و در صورت نادرست بودن برای آن ها مثال نقض بزنید.

۱. اگر $v_۱, v_۲, v_۳$ وابسته خطی باشند و $v_۲, v_۳, v_۴$ وابسته خطی باشند آنگاه $v_۱$ ترکیب خطی از $v_۲, v_۳$ است و $v_۴$ ترکیب خطی از $v_۱, v_۲, v_۳$ است.

حل. لازم است در حل تمامی مسائل بعد از این قسمت این نماد گذاری معرفی شود:

$$\begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = (v_۱, v_۲, \cdots, v_n)$$

این گزاره نادرست است زیرا فرض کنید:

$$v_۱ = (۱, ۰, ۰), v_۲ = (۰, ۲, ۰), v_۳ = (۰, ۴, ۰)$$

در این صورت $v_۱$ ترکیب خطی از $v_۲, v_۳$ نیست.و همچینین فرض کنید $v_۴ = (۰, ۰, ۱)$ در این صورت حکم دوم نیز برقرار نیست. ◀

۲. اگر $A = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ یک مجموعه از بردار ها عضو $\mathbb{R}^n$ که مستقل خطی باشند و $span(A) = \mathbb{R}^n$ آنگاه $B = \{v_۱ + v_۲, v_۲ + v_۳, \ldots, v_{n-۱} + v_n, v_n + v_۱\}$ نیز مجموعه مستقل خطی است که $span(B) = \mathbb{R}^n$.

حل. این گزاره درست است ،ابتدا ثابت می کنیم B مستقل خطی است پس باید نشان دهیم اگر:

$$\beta_۱(v_۱ + v_۲) + \beta_۲(v_۲ + v_۳) + \cdots + \beta_n(v_n + v_۱) = ۰$$

آنگاه $\forall i \ \ \beta_i = ۰$ حال می توانیم عبارت بالا را به شکل زیر بنویسیم:

$$(\beta_۱ + \beta_n)v_۱ + (\beta_۱ + \beta_۲)v_۲ + \cdot + (\beta_{n-۱} + \beta_n)v_n = ۰$$

چون v_i ها مستقل خطی هستند پس باید:

$$\forall \ \ i < n \ \ \beta_i + \beta_{i+۱} = ۰, \beta_۱ + \beta_n = ۰$$

از گزاره بالا نتیجه می شود $\beta_i = -\beta_i$ که در نتیجه $\beta_i = ۰$
برای اثبات اینکه $span(B) = \mathbb{R}^n$ می دانیم $span(A) = \mathbb{R}^n$ پس :

$$\forall \ \ v \in \mathbb{R}^n \ \ \exists \alpha_۱ + \cdots + \alpha_n \ \ v = \alpha_۱ v_۱, \cdots \alpha_n v_n$$

حال v را بر حسب بردار های B اینگونه می نویسیم ،ابتدا فرض می کنیم $u_i = v_i + v_{i+۱}, u_n = v_n + v_۱$ همچنین در نظر می گیریم:

$$r = v_۱ = \frac{(u_۱ - (u_۲ - (\cdots - (u_n))))}{۲}$$

پس می توانیم بنویسیم :

$$v = \alpha_۱(r) + \alpha_۲(u_۲ - r) + \alpha_۳(u_۳ - (u_۲ - r)) + \cdots + \alpha_n(u_n - (u_{n-۱}(\cdots - (u_۲ - r))))$$

که این نمایش در واقع نمایشی از v برحسب B است. ◀

۳. $v_۱, v_۲, \ldots, v_n$ بردار هایی مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر هیچکدام از v_i ها را نتوان به شکل ترکیب خطی بقیه بردار ها نوشت.

حل. این گزاره نادرست است ،سه بردار

$$v_۱ = (۱, ۲, ۳), v_۲ = (۱, ۲, ۴), v_۳ = (۳, ۴, ۷)$$

هر دو بردار از این بردار ها مستقل خطی هستند اما هرسه بردار وابسته خطی هستند. ◀

۴. اگر هر $r-1$ بردار از مجموعه بردار های $v_1, v_2, \ldots, v_r$ مستقل خطی باشند آنگاه $v_1, v_2, \ldots, v_r$ مستقل خطی است.

حل. این گزاره نیز درست است ،برای اثبات به برهان خلف فرض می کنیم v_i ها مستقل خطی نباشند آنگاه :

$$\exists \;\; \alpha_i \neq 0 \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = 0$$

$$\rightarrow v_i = \frac{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_r v_r}{\alpha_i} = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \beta_r v_r$$

از فرض مسئله می دانیم به ازای هر r_1 تا از بردار ها مستقل خطی هستند پس:

$$if \;\; \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \alpha_r v_r = 0 \longrightarrow \forall \;\; j v_j = 0 \;\;\; j \neq i$$

حال v_i را براساس تساوی بالا جایگذاری می کنیم :

$$(\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \cdots + (\alpha_{j-1} + \beta_{j-1}) v_{j-1} + \beta_j v_j + (\alpha_{j+1} + \beta_{j+1}) v_{j+1} + \cdots +$$

$$(\alpha_{i-1} + \beta_{i-1}) v_{i-1} + \alpha_i v_i + (\alpha_{i+1} + \beta_{i+1}) v_{i+1} + \cdots + \alpha_r v_r = 0$$

حال $r-1$ تا از بردار ها را به شکل ترکیب خطی نوشتیم که حاصل آن ۰ است اما ضرایب آن ها صفر نیست(چرا؟)،و خلاف فرض مستقل خطی بودن هر $r-1$ بردار است ،پس فرض خلف باطل و حکم درست است. ◀

۵. یک سیستم معادلات خطی کاهش یافته(دستگاه معادلاتی که تعداد معادلات کمتر از متغیر ها باشد) با توجه به نوع ضرایب می تواند فقط یک جواب داشته باشد یا جواب نداشته باشد.

حل. این گزاره نادرست است و دستگاه زیر را به عنوان نمونه در نظر بگیرید که تعداد جواب های بی شمار است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه و نتیجه گیری برعهده خودتان!!! ◀

۶. شکل اکولون (echelon) یک ماتریس یکتاست.

حل. این گزاره نادرست است زیرا فقط شکل اکولون کاهش یافته یکتاست،مثال نقض:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

◀

۷. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $ad - bc \neq 0$ آنگاه $Ax = 0$ فقط جواب بدیهی دارد.

حل.

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a} R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - cR_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & d - \frac{cb}{a} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - \frac{\frac{b}{a}}{d - \frac{cb}{a}} R_2 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

برای اینکه دستگاه فقط یک جواب داشته باشد که آن جواب جواب بدیهی باشد باید درایه ۲ ,۲ نباید صفر شود پس $ad - bc \neq 0$. ◀

۷. مربع های جادویی (magic squre)یکی از ساختار های جالب ترکیبیاتی در ریاضی هستند که در بخش ها گوناگون ریاضی کاربرد دارند و ارتباطات جالبی بین مربع جادویی و ساختار های گرافی و ... وجود دارد،حتی این ساختار ها در علوم دیگر از جمله مکانیک و کامپیوتر نیز کاربرد دارند و هنوز تعداد زیادی مسئله حل نشده در این زمینه وجود دارد. مربع جادویی یا وفقی جدولی $n \times n$ است که خانه های آن با اعداد مثبت ۱ تا n^2 پر شده است به نحوی که مجموع اعداد هر ستون عمودی و هر سطر افقی و قطر آن عدد ثابتی را نشان می دهد برای مثال شکل زیر یک مربع جادویی 3×3 است:

۶	۷	۲
۱	۵	۹
۸	۳	۴

§ اگر تعداد مربع های جادویی ۶×۶ را بیابید نمره درس جبر خطی کاربردی شما ۲۰ منظور می شود :) §

اگر M_i یک مارتیس $i \times i$ باشد که درایه های آن اعداد متناظر بر روی یک مربع جادویی $i \times i$ باشد آنگاه حاصل ضرب های ماتریسی زیر را بیابید:

$$M_۱ \times \begin{bmatrix} ۱ \end{bmatrix} \qquad M_۲ \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad M_۳ \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad M_n \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ \vdots \\ ۱ \end{bmatrix}_{n \times ۱}$$

همچنین تعیین کنید یک ماتریس M_i با کدامیک از اعمال سطری پلکانی همچنان به شکل جادویی می ماند.

حل. می دانیم $M_۱ = ۱$ پس $M_۱ \times \begin{bmatrix} ۱ \end{bmatrix} = ۱$ همچنین لازم است اشاره شود $M_۲$ وجود ندارد ،اما به طور کلی برای M_n می دانیم که مربع جادویی شامل تمامی اعداد ۱ تا $n^۲$ هست پس مجموع تمام اعداد بر روی آن برابر است با: $\frac{n^۲(n^۲+۱)}{۲}$ از انجاییکه مجموع تمامی اعداد واقع بر سطر ها برابر است با پس مجموع اعداد واقع بر یک سطر برابر است با: $\frac{n^۲(n^۲+۱)}{۲} \cdot \frac{۱}{n} = \frac{n(n^۲+۱)}{۲}$ از این نتیجه می گیریم :

$$M_n \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ \vdots \\ ۱ \end{bmatrix}_{n \times ۱} = \begin{bmatrix} \frac{n(n^۲+۱)}{۲} \\ \frac{n(n^۲+۱)}{۲} \\ \vdots \\ \frac{n(n^۲+۱)}{۲} \end{bmatrix}_{n \times ۱}$$

همچنین نتیحه می شود:

$$M_۳ \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳(۳^۲+۱)}{۲} = ۱۵ \\ \frac{۳(۳^۲+۱)}{۲} = ۱۵ \\ \frac{۳(۳^۲+۱)}{۲} = ۱۵ \end{bmatrix}$$

هیچکدام یک ااز اعمال سطری پلکانی باعث نمی شود ماتریس جادویی بماند. ◀

۸. گزاره های زیر ثابت کنید:

۱. اگر معادله $Ax = b$ به ازای هر $b \in \mathbb{R}^n$ جواب داشته باشد و به ازای $b = ۰$ فقط جواب بدیهی داشته باشد آنگاه ماتریس B را بدین شکل از ماتریس A می سازیم که تمامی ستون های کمتر از n ام ماتریس A را با ستون n ام جمع می کنیم و در ستون n ام ماتریس B قرار می دهیم ثابت کنید معادله $Bx = b$ به ازای هر $b \in \mathbb{R}^n$ جواب دارد و به ازای $b = ۰$ فقط جواب بدیهی دارد.

حل. فرض کنیم A ماتریسی به شکل $\begin{bmatrix} v_۱ & v_۲ & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ ماتریس B بنابر صورت به شکل:

$$\begin{bmatrix} v_۱ & v_۱ + v_۲ & v_۱ + v_۲ + v_۳ & \cdots & v_۱ + v_۲ + \cdots v_n \end{bmatrix}$$

خواهد بود می دانیم اگر یک معادله به شکل $Mx = ۰$ فقط جواب صفر داشته باشد آنگاه ستون های مستقل خطی هستند،پس در واقع $v_۱, v_۲, v_۳, \cdots, v_n$ بردار هایی مستقل خطی هستند و باید ثابت کنیم که:

$$v_۱, v_۱ + v_۲, v_۱ + v_۲ + v_۳, \cdots, v_۱ + v_۲ + \cdots v_n$$

نیز برداری هایی مستقل خطی هستند. پس باید ثابت کنیم اگر:

$$\alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲(v_۱ + v_۲) + \alpha_۳(v_۱ + v_۲ + v_۳) + \cdots + \alpha_n(v_۱ + v_۲ + \cdots v_n) = ۰$$

باشد آنگاه α_i ها همگی صفر هستند.عبارت بالا را می توانیم اینگونه باز نویسی کنیم:

$$(\alpha_۱ + \alpha_۲ + \cdots + \alpha_n)v_۱ + (\alpha_۱ + \alpha_۲ + \cdots + \alpha_{n-۱}) + \cdots + \alpha_n v_n = ۰$$

می دانیم که v_i ها مستقل خطی هستند پس اگر حاصل ترکیب خطی آن ها صفر شود باید ضرایب آن ها نیز صفر شود،پس می توان گفت :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} = 0, \cdots, \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0, \alpha_n = 0$$

از صفر بودن α_n نتیجه می گیریم $\alpha_{n-1} = 0$ نتیجه می شود و همینطور الی آخر،پس استقلال خطی ثابت شد، ثابت کنیم به ازای هر b وجود دارد $y_1, y_2, \cdots, y_n$ که

$$v_1 y_1 + (v_1 + v_2) y_2 + \cdots + (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) y_n = b \qquad \star$$

می دانیم برای هر b وجود دارد $x_1, x_2, \cdots, x_n$ که

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_n x_n = b$$

حال تساوی $\star$ را ساده تر می کنیم:

$$(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) v_1 + (y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) v_2 + \cdots + y_n v_n = b$$

در نتیجه می توانیم ضرایب y_i را به شکل زیر بیابیم:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = x_1, y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} = x_2, \cdots, y_n = x_n$$

پس از عبارت بالا این نتیجه می شود $y_{n-1} = x_{n-1} - x_n$ و همینطور الی آخر پس در واقع توانستیم y_n هایی را بیابیم که به ازای هر b معادله $Bx = b$ جواب داشته باشد.

▶

۲. نشان دهید اگر معادله $Ax = 0$ بیش از یک جواب داشته باشد و A به شکل $[a_1 a_2 \dots a_n]$ باشد که a_i ها ستون های ماتریس A هستند آنگاه وجود دارد عدد صحیح مانند k ای که $1 < k \le n$ و $Bx = a_k$ سازگار باشد ($B = [a_1\ \ a_2\ \ \dots\ \ a_{k-1}]$).

حل. می دانیم اگر $Ax = 0$ باشد آنگاه ستون های A تشکیل بردار هایی می دهند که وابسته خطی هستند فرض کنیم A به شکل:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

از انجاییکه بردار های $v_1, v_2, \cdots, v_n$ وابسته خطی هستند پس:

$$\exists \alpha_i \neq 0 \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

بزرگترین i که $\alpha_i \neq 0$ را در نظر می گیریم و $i = k$ قرار می دهیم آنگاه می توانیم بنویسیم:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1}}{\alpha_k} = v_k$$

پس می توانیم به عبارت بالا را به شکل ماتریسی نیز بنویسیم آنگاه:

$$[v_1\ \ v_2\ \ \dots\ \ v_{k-1}] x = v_k$$

که همان حکم مسئله است.

▶

۳. فرض کنید w حوابی از $Ax = b$ باشد و تعریف می کنیم $v_h = w - p$.نشان دهید v_h جوابی از $Ax = 0$ است.این نشان می دهد که هر جوابی از $Ax = b$ به شکل $w = p + v_h$ است که p یک جواب خاص از $Ax = b$ است و v_h جوابی از $Ax = 0$.

حل. می دانیم $v_h = w - p$ ماتریس A را سمت چپ در دو طرف تساوی ضرب می کنیم داریم:

$$Av_h = A(w - p) = Aw_Ap$$

می دانیم w, p جواب های $Ax = b$ هستند پس: $Av_h = b - b = 0$ درنتیجه v_h یک جواب از $Ax = 0$ است. ▶

۹. u, v را دو بردار مستقل خطی عضو $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید و P را صفحه ای در نظر بگیرید که از این دو بردار و نقطه ۰ می گذرد. نمایش پارامتریک P به شکل $x = su + tv (s, t \in \mathbb{R})$ است .نشان دهید که یک تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ صفحه P را به صفحه ای که از ۰ می گذرد یا به خطی که از ۰ می گذرد و یا به مبدا مختصات در $\mathbb{R}^3$ نگاشت می کند و همچنین چه چیزی باید در مورد $T(u), T(v)$ صدق کند که تصویر صفحه P یک صفحه باشد.

حل. اگر تبدیل خطی T رو نقاط صفحه اعمال شود داریم:

$$T(x) = T(su + tv) \xrightarrow{\text{خطی است}T} = T(su) + T(tv) = sT(u) + tT(v)$$

حال با توجه به اینکه $T(0) = 0$ پس این صفحه تحت این نگاشت از نقطه ۰ می گذرد حال اگر $T(u), T(v)$ دو بردار غیر هم راستا باشند از جواب به شکل ترکیب بردار هایی است که از صفر می گذرند و صفحه ای را تشکیل می دهند اگر یکی از $T(u), T(v)$ به صفر نگاشت شود آنگاه خطی داریم که از صفر می گذرد و اگر هر دو به صفر نگاشت شوند صفحه به یک نقطه صفر نگاشته خواهد شد،قسمت دوم سوال نیز در خلال قسمت اول توضیح داده شد.
▶

۱۰. فرض کنید که $span\{v_1, v_2, \dots, v_p\} = \mathbb{R}^n$ و $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی باشد که

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} \;\; T(v_i) = 0$$

آنگاه نشان دهید که T یک تبدیل صفر است.(به تبدیلی تبدیل صفر گویند که $\forall x \in \mathbb{R}^n \;\; T(x) = 0$)

حل. $x \in \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید چون $span\{v_1, v_2, v_2, \cdots, v_n\} = \mathbb{R}^n$ آنگاه:

$$\exists \alpha_i \;\; x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

$$\longrightarrow T(x) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) \xrightarrow{\text{خطی است}T} = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n) \xrightarrow{T(v_i) = 0} T(x) = 0$$

▶

۱۱. فرض کنید $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی باشد نشان دهید اگر T دو بردار مستقل خطی را به یک مجموعه وابسته خطی نگاشت کند آنگاه $T(x) = 0$ جواب غیر بدیهی دارد.

حل. فرض کنیم v_1, v_2 دو بردار مستقل خطی باشند و

$$T(v_1) = u_1 \qquad T(v_2) = u_2$$

u_1, u_2 وابسته خطی هستند پس می توان گفت $k \neq 0 \quad u_1 = ku_2$ پس می توانیم جواب بردار $v_1 - kv_2$ را تحت نگاشت بیابیم از آنجا که $k \neq 0$ و v_1, v_2 مستقل خطی هستند پس : $v_1 - kv_2 \neq 0$ از نکات بالا می توانیم نتیجه بگیریم :

$$T(v_1 - kv_2) = T(v_1) - kT(v_2) = u_1 - ku_2 = 0$$

پس یک جواب غیر بدیهی برای مسئله یافتیم و حکم اینگونه ثابت می شود.

▶

۱۲. در هر کدام از تبدیل های زیر مشخص کنید تبدیل خطی هست یا نه و در صورت خطی بودن ماتریس استاندارد آن را مشخص کنید.

حل. در هر کدام تبدیلات زیر ابتدا خطی بودن را بررسی می کنیم،برای این موضوع باید دو شرط:

۱. $T(0) = 0$

۲. $T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$

برقرار باشند ،و در صورت خطی بودن بایستی ماتریس استاندارد تبدیل خطی را بیابیم. برای یا فتن ماتریس استاندارد تبدیل خطی، ماتریس

$$A = [T(\mathbf{e_1}) \dots T(\mathbf{e_n})]$$

را می یابیم که e_j ، jامین ستون ماتریس همانی است.

▶

.۱

$$T:\mathbb{R}^{۲}\longrightarrow\mathbb{R}^{۲}$$
$$(x_{۱},x_{۲})\longrightarrow(۴x_{۱}-۲x_{۲},۳|x_{۲}|)$$

حل. ابتدا خطی بودن را بررسی می کنیم

$$T(۰)=T((۰,۰))=(۴(۰)-۲(۰),۳|۰|)=(۰,۰)$$

$$T(c(x,y)+d(u,v))=T(cx+du,cy+dv)=(۴(cx+du)-۲(cy+dv),۳|cy+dv|)$$
$$\neq cT(x,y)+dT(u,v)=c(۴x-۲y,۳|y|)+d(۴u-۲v,۳|v|)=(۴(cx+du)-۲(cy+dv),۳c|y|+۳d|v|)$$

پس این تبدیل یک تبدیل خطی نیست. ◀

.۲

$$T:\mathbb{R}^{۲}\longrightarrow\mathbb{R}^{۲}$$
$$(x_{۱},x_{۲})\longrightarrow(sin(x_{۱}),x_{۲})$$

حل. ابتدا خطی بودن را بررسی می کنیم

$$T(۰)=T((۰,۰))=(sin(۰),۰)=(۰,۰)$$

$$T(c(x,y)+d(u,v))=T(cx+du,cy+dv)=(sin(cx+du),cy+dv)=(sin(cx)cos(du)+cos(cx)+sin(du),cy+dv)$$
$$\neq cT(x,y)+dT(u,v)=c(sin(x),y)+d(sin(u),v)=(csin(x)+dsin(y),cy+dv)$$

پس این تبدیل یک تبدیل خطی نیست. ◀

.۳

$$T:\mathbb{R}^{۳}\longrightarrow\mathbb{R}^{۳}$$
$$(x_{۱},x_{۲},x_{۳})\longrightarrow(۳x_{۱},x_{۱}-x_{۲},۲x_{۱}+x_{۲}+x_{۳})$$

حل.

$$T(۰)=T(۰,۰,۰)=(۰,۰,۰)$$
$$T(c(x_{۱},x_{۲},x_{۳})+d(v_{۱},v_{۲},v_{۳}))=T(cx_{۱}+dv_{۱},cx_{۲}+dv_{۲},cx_{۳}+dv_{۳})$$
$$=(۳cx_{۱}+۳dv_{۱},cx_{۱}+dv_{۱}-cx_{۲}-dv_{۲},۲cx_{۱}+۲dv_{۱}+cx_{۲}+dv_{۲}+cx_{۳}+dv_{۳})$$
$$=(۳cx_{۱},cx_{۱}-cx_{۲},۲cx_{۱}+cx_{۲}++cx_{۳})+(۳dv_{۱},dv_{۱}-dv_{۲},۲dv_{۱}+dv_{۲},+dv_{۳})$$
$$=cT(u)+dT(v)$$

بنابراین این تبدیل خطی است،پس ماتریس استاندارد آن را می یابیم

$$T(e_{۱})=(۳,۱,۲),T(e_{۲})=(۰,-۱,۱),T(e_{۳})=(۰,۰,۱)$$

$$A=[T(e_{۱})\ \ T(e_{۲})\ \ T(e_{۳})]=\begin{bmatrix}۳&۰&۰\\۱&-۱&۰\\۲&۱&۱\end{bmatrix}$$

◀