

به نام پروردگار
دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر



درس جبر خطی کاربردی

تمرین سری سوم (بخش پیاده سازی)

توضیحات:

- پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره صفر برای کل تمرین منظور خواهد شد.
- مهلت ارسال پیاده سازی 23:59 روز دوشنبه 10 خرداد می باشد.
- برای این تمرین **امکان ارسال با تاخیر وجود نخواهد داشت.**
- سوالات بخش دوم باید با زبان پایتون نوشته شود، و تنها مجاز به استفاده از کتابخانه های NumPy، Matplotlib و Pillow هستید.
- در صورت وجود هرگونه ابهام در ارتباط با سوالات از طریق linearalgebra.spring2021@gmail.com سوال خود را بپرسید.
- فایل کد (فایل .py) به همراه **یک گزارش ساده** (در حد یک صفحه) شامل اسکرین شات های لازم و توضیحات خواسته شده را در قالب یک فایل zip به صورت الگوی زیر آپلود کنید:

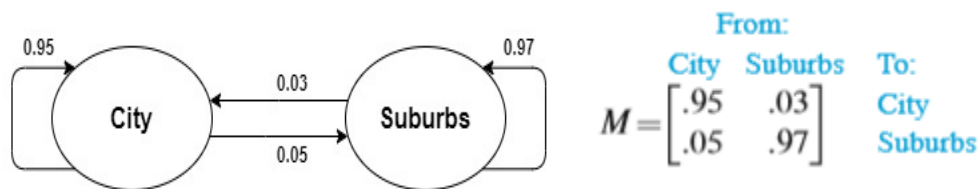
HW3_2_StudentNumber_StudentName_StudentLastName.zip

(به عنوان مثال، HW3_2_9731505_Arash_Harirpoosh.zip)

❖ بخش دوم – مسائل پیاده سازی و شبیه سازی

:Markov Chain

اگر تعدادی حالت در نظر گرفته شود و برای جابه جایی بین این حالات احتمالی در نظر بگیریم می‌توانیم این احتمال ها را در ماتریسی به نام ماتریس stochastic ذخیره کنیم. برای مثال به دیاگرام حالت برای جابه جایی افراد از شهر به روستا و بالعکس در هر سال و ماتریس stochastic مربوط به آن را که در زیر آمده توجه کنید. با توجه به ماتریس می‌گوییم هر سال 0.05 درصد شهری ها به روستا مهاجرت می‌کنند و 0.95 درصد شهری ها در شهر باقی می‌مانند.



حال اگر جمعیت فعلی در شهر و روستا x_0 باشد (درایه اول جمعیت شهر و درایه دوم جمعیت روستا) برای یافتن جمعیت در سال جدید کافی است حاصل ضرب ماتریس stochastic را در x_0 ضرب کنیم (چرا؟):

$$x_0 = \begin{bmatrix} \text{Urban population} \\ \text{Rural population} \end{bmatrix} \quad x_1 = Mx_0 \quad \text{Generally: } x_i = Mx_{i-1}$$

به دنباله x_i ها *Markov chain* می‌گویند.

حالت پایدار (steady state) حالتی است که در آن تغییری در بردار x ایجاد نشود. به عبارت دیگر:

$$Mx = x$$

مثلا در مثال جمعیت حالت پایدار جمعیتی است که به ازای آن، سال آینده هم همان جمعیت ثابت باقی بماند.

برای یافتن حالت پایدار باید معادله زیر را حل کنیم:

$$Mx = x \rightarrow (M - I)x = 0$$

برای حل این معادله باید پایه های فضای پوچ را بیابیم و یک نمونه از ترکیب این پایه ها را محاسبه کنیم و سپس بردار را نرمال کنیم (هر درایه را بر مجموع درایه های بردار تقسیم کنیم). برای توضیح بیشتر می توانید به بخش 9 از فصل چهارم کتاب مراجعه کنید. همچنین یک مثال را در زیر می بینیم. اگر مثال جمعیت شهر و روستا را در نظر بگیریم محاسبات به صورت زیر خواهد بود:

$$Mx = x \rightarrow (M - I)x = 0 \quad M - I = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.03 \\ 0.05 & -0.03 \end{bmatrix}$$

$$[M - I \ 0] = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.03 & 0 \\ 0.05 & -0.03 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -0.05 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$x_1 = 0.6x_2 \text{ and } x_2 \text{ is free} \rightarrow x_2 \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{basis of null space}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.6 \\ 1 \\ 1.6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.625 \end{bmatrix}$$

نتیجه نهایی یعنی وقتی 0.375 درصد جمعیت شهری و بقیه روستایی باشند تغییر جمعیت نخواهیم داشت و به حالت پایدار رسیده ایم.

پیاده سازی های لازم: (برای پیاده سازی هر قسمت در کدها کامنت مناسب برای تشخیص بگذارید)

- ابتدا ماتریس stochastic را از ورودی بخوانید و ماتریس M-I را محاسبه کنید.
- تابع محاسبه پایه های فضای پوچ را پیاده سازی کنید که ماتریسی را می گیرد و پایه های فضای پوچ را برمیگرداند (نیاز به هندل کردن حالات خاص برای ماتریس ورودی نیست و متناسب این مسئله ماتریس ورودی مربعی و دارای درایه های غیر صفر خواهد بود):

○ تبدیل ماتریس افزوده به فرم اشلون

○ تعیین متغیرهای مستقل و وابسته

○ بدست آوردن بردارهای پایه

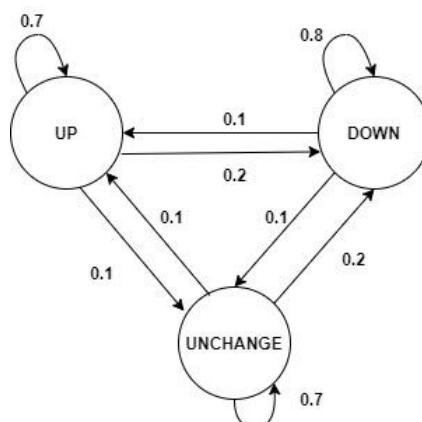
- ترکیب ساده ای از پایه های بدست آمده را محاسبه کنید (مثلا فقط باهم جمع کنید) و بردار نهایی را نرمال کنید.

- بردار نهایی را چاپ کنید و اگر فضای پوچ هیچ پایه ای ندارد پیام مناسب را چاپ کنید.

- فرض کنید دیاگرام زیر تغییرات بازار بورس نسبت به روز گذشته باشد. ماتریس stochastic

را برای آن در نظر بگیرید (در سطر و ستون به ترتیب up، down و unchanged) و برنامه

را با این ماتریس تست کنید و نتیجه را به همراه تحلیل کوتاهی از آن در گزارش بیاورید.



قوانین:

1) پیاده سازی تمرین های عملی به صورت انفرادی می باشد و در صورت مشاهده ی تقلب و شباهت

چشمگیر، نمره ی آن تقسیم خواهد شد.

2) استفاده از توابع آماده برای حل شبیه سازی غیر مجاز می باشد و تنها مجاز به استفاده از توابع ساده

ای چون `numpy.array` برای ساخت ماتریس و `numpy.arange` برای `arange` کردن یک

ماتریس و ... می باشید.

شاد و پیروز باشید

تیم تدریس یاری جبر خطی

بهار 1400