



جبر خطی کاربردی

نیمسال اول 97-98

مدرس: دکتر ناظر فرد



تمرین شماره 3

توجه!!! :

پاسخ تمرین را در قالب یک فایل PDF با الگوی نام گذاری زیر آپلود کنید.

9531000\_Karim\_Benzema\_HW3.pdf

مهلت تحویل تا روز جمعه ۹۷/۸/۲۵ ساعت ۲۳:۵۵ خواهد بود.

۱- دترمینان ماتریس های زیر را بیابید

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

۲- نشان دهید که:

$$(\text{الف}) \quad |A^T + B| = |A + B^T| \quad \text{برای هر ماتریس } A \text{ و } B \text{ که } n \times n \text{ هستند.}$$

$$(\text{ب}) \quad |\text{adj}(A)| = |A|^{n-1}$$

$$(\text{ج}) \quad |\text{adj}(\text{adj}(A))| = |A|^{(n-1)^2}$$

۳- فرض کنید ماتریس  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  است که درایه های آن یا ۲ هستند یا ۲- . ثابت کنید دترمینان  $A$  بر  $4^{n-1}$  بخش پذیر است.

۴- اگر ماتریس  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  و ماتریس  $B$  ماتریس  $m \times n$  باشد ثابت کنید:

$$|AB| = \begin{vmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} p_1 & a & a & a & \dots & a & a \\ b & p_2 & a & a & \dots & a & a \\ b & b & p_3 & a & \dots & a & a \\ b & b & b & p_4 & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & b & \dots & p_{n-1} & a \\ b & b & b & b & \dots & b & p_n \end{vmatrix} \quad \text{و فرض کنید } f(x) = (p_1 - x)(p_2 - x) \dots (p_n - x) \quad ۵-$$

$$\Delta_n = \frac{bf(a) - af(b)}{b-a} \quad \text{الف) نشان دهید اگر } a \neq b \text{ آنگاه:}$$

ب) نشان دهید اگر  $a = b$  آنگاه:  $\Delta_n = a \sum_{i=1}^n f_i(a) + p_n f_n(a)$  که در آن  $f_i(a)$  همان  $f(a)$  بدون فاکتور  $(p_i - a)$  است.

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}_{n \times n} \quad \text{ج) با استفاده از قسمت ب محاسبه کنید:}$$

۶- اگر  $A$  ماتریسی  $n \times n$  و حقیقی باشد

الف) نشان دهید در صورتی که  $A^t = -A$  و  $n$  فرد باشد، آنگاه  $|A| = 0$

ب) نشان دهید در صورتی که  $A^2 + I = 0$  آنگاه  $n$  زوج است.

۷- با استفاده از روش کرامر مقادیر زیر را به دست آورید.

الف)  $x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 - 3x_4 + x_5 = 1 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = -1 \\ -2x_2 - 3x_3 + 4x_5 = 6 \end{cases}$$

ب) جوابهای  $Ax = b$  در صورتی که  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$  و  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$  که  $b_1, b_2, b_3 \in R$