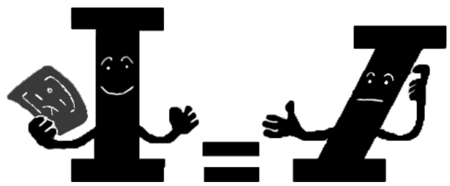
به نام خدا



تمرین سوم

جبر خطی کاربردی – پاییز 1400

توضیحات

- پاسخ خود را به صورت یک فایل pdf و با فرمت **HW?_Name_StudentNumber** آپلود کنید. (مثال: HW3_AmirhosseinRostamlou_9828029).
- پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.
- در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق ایمیل linearalgebra.fall1400@gmail.com سوال خود را بپرسید.
- مهلت ارسال پاسخ ها تا ساعت **23:59 چهارشنبه 10 آذر** می‌باشد.
- پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و درصورت مشاهده هرگونه **تقلب** نمره **صفر** برای کل تمرین منظور خواهد شد
- با توجه به فشردگی برنامه تمرین ها در طول ترم، امکان تمدید تمرین وجود نخواهد داشت.

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

1- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد و $row\ space$آن $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه دترمینان A مخالف صفر است.

ب) اگر A یک ماتریس بالا مثلثی باشد، آنگاه $\det(A)$ برابر حاصل ضرب عناصر روی قطر اصلی خواهد بود.

پ) یک زیرمجموعه همانند H از فضای برداری V یک زیرفضا از این فضای برداری محسوب می شود اگر بردار صفر این فضای برداری در H باشد.

ت) $Row\ A^T_{n\times m} = \mathbb{R}^m$ اگر و تنها اگر تبدیل خطی $x \mapsto Ax$، یک تبدیل پوشا از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ باشد.

ج) اگر H، $span\{b1, b2, \dots, bn\}$ باشد آنگاه مجموعه $\{b1, b2, \dots, bn\}$ یک پایه برای H است.

چ) هر مجموعه ی مستقل خطی از زیرفضای H، یک پایه برای H است.

ه) اگر ماتریسB، فرم کاهش یافته نردبانی ماتریس A باشد آنگاه $pivot\ column$ های ماتریس B، یک پایه برای فضای ستونی A خواهند بود.

2- به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) دترمینان های زیر را با عملیات ردیفی بدست آورید.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

ب) اگر A و B دو ماتریس 4×4 باشند و داشته باشیم $\det(A) = \frac{1}{2}$ و $\det(B) = 3$، مقدار عبارت $\det((A^3)^{-1}B^T)$ را بدست آورید.

3- با استفاده از قانون کرامر به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار y را در سیستم زیر بدست آورید.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + z = 4 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

ب) معکوس ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

4- با استفاده از مفهوم دترمینان به سوالات زیر پاسخ دهید.

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الف) مساحت متوازی الاضلاع متشکل از این دو بردار را بدست آورید.

ب) مساحت متوازی الاضلاع متشکل از $a, b + 2a$ را بدست آورید. از مقایسه مقدار بدست آمده با بخش الف چه نتیجه ای می‌گیرید؟ علت آن را توضیح دهید و نتیجه را به صورت یک قانون بیان کنید.

ب) حجم متوازی الاضلاع متشکل از بردار های زیر را بدست آورید. از آن چه نتیجه ای می گیرید؟

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

5- فرض کنید بردار های u و v ، بردار هایی در فضای برداری V باشد. همچنین فرض کنید که H هر زیرفضایی از فضای برداری V می باشد که این دو بردار u و v را شامل شود. نشان دهید چرا H در این حالت لزوما شامل $Span\{u, v\}$ می شود.

6- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -5 & -6 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ باشد. یک پایه برای $Nul\ A$ و یک پایه برای $Col\ A$ به دست آورید.

7- فرض کنید که W مجموعه تمامی بردار هایی است که می توان به فرم های زیر نمایش داد، که در آن ها $a, b, c \in \mathbb{R}$ می باشند. در هر یک از موارد زیر، در صورتی که W یک فضای برداری می باشد، یک مجموعه برداری S به گونه ای پیدا کنید که W را $span$ کند. در صورتی که W یک فضای برداری نمی باشد، با یک مثال دلیل خود را توضیح دهید.

الف) $\begin{bmatrix} -a+1 \\ a-6b \\ 2b+a \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \\ b \end{bmatrix}$

پ) $\begin{bmatrix} 4a+3b \\ 0 \\ a+b+c \\ c-2a \end{bmatrix}$

8- فرض کنید $H = Span\{u_1, u_2, u_3\}$ و $K = Span\{v_1, v_2, v_3\}$ باشد به طوری که:

$$u1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, u2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, u3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, v2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, v3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

الف) پایه ای برای H بیابید.

ب) پایه ای برای K بیابید.

پ) پایه ای برای $H + K$ بیابید. $(H + K = \{w : w = u + v, u\ in\ H\ , v\ in\ K\})$

9- (امتیازی) فرض کنید n عددی صحیح و مثبت است و T تبدیلی خطی و غیر صفر به طوری که $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. عبارت های زیر را اثبات کنید.

الف) فضای پوچ $(nullspace)$ تبدیل T دارای $n - 1$ بعد می باشد.

ب) فرض کنید $B = \{v_1, \dots, v_n - 1\}$ یک پایه برای فضای پوچ $(nullspace)$ تبدیل T می باشد و w برداری است n بعدی که در $Nul(T)$ قرار ندارد. ثابت کنید $B = \{v_1, \dots, v_n - 1, w\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ می باشد.

ج) هر بردار $u \in \mathbb{R}^n$ را میتوان به صورت $u = v + \frac{t(u)}{t(w)} w$ نشان داد که $v \in Nul(T)$.

موفق باشید

تیم تدریسیاری جبر خطی پاییز 1400