

سوال:

ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. برای هر یک از وکتورهای زیر مشخص کنید که آیا در فضای پوچ A قرار دارد یا خیر؟ و سپس فضای پوچ A را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$A \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \text{null}(A)$$

$$A \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{null}(A)$$

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{null}(A)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \mathbb{R}^4 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \text{null}(A)$$

- فضای پوچ A :

$$\text{null}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

می‌دانیم برای بدست آوردن فضای پوچ باید دستگاه $Ax = 0$ را حل کنیم، ماتریس افزوده آن را

تشکیل می‌دهیم و داریم:

$$[A | \mathbf{0}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و از آن داریم:

$$x_1 = -3x_3 + 2x_4$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$$

که معادل است با:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_3 + 2x_4 \\ -\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \text{null}(A) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 | \mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ for any } x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$