سوال:

فرض کنید U,V دو زیرفضا($subspace$) هستند که بعد(dim) آن ها متناهی است، ثابت کنید:

$$\dim(U+V) \leq \dim(U) + \dim(V)$$

پاسخ:

با توجه به تعاریف $subspace$ داریم :

$$U + V = \{x + y \mid x \in U \quad , \quad y \in V\}$$

و این مجموع خودش یک $subspace$ می‌باشد.

فرض می‌کنیم $dim(U) = n \;,\; dim(V) = m$ و پایه $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ برای زیرفضای U و $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ برای زیرفضای V در نظر می‌گیریم.

حال یک بردار تصادفی X را از زیر فضای U و بردار Y از زیر فضای V انتخاب می‌کنیم که به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$X = r_1u_1 + \cdots + r_nu_n$$

$$Y = s_1v_1 + \cdots + s_mv_m$$

که s ها و r ها اعداد اسکالر هستند.

$$X + Y = r_1u_1 + \cdots + r_nu_n + s_1v_1 + \cdots + s_mv_m$$

و از انجایی که X , Y بردارهای دلخواهی بودند پس می‌توان نوشت $X + Y$ عضوی از

$$S = Span(u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m)$$

می‌باشد پس $U + W$ زیرمجموعه این فضاست. حال می‌دانیم که اعضای نوشته شده در $span$ ممکن است نسبت به هم مستقل نباشند و بتوان برخی از آن ها را به صورت مجموع چندی دیگر نوشت پس بدون اینکه کلیتی از تعریف $span$ از دست بدهیم می‌توانیم اعضایی از آن حذف کنیم پس ماکسیمم سایز $dim(S)$ برابر با مجموع $dim(U)\, , dim(V)$ است و در حالتی از این کمتر خواهد شد ولی هرگز بیشتر نخواهد بود پس می‌توان نوشت :

$$dim(U+W) \leq dim(S) \leq n+m = dim(U) + dim(V)$$