سوال

دو تبدیل $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ و $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ را به صورت زیر تعریف کرده ایم:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 0 \end{bmatrix}, S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ xy \end{bmatrix}$$

مشخص کنید که آیا T و S و همچنین ترکیب آن ها $S \circ T$ تبدیل خطی است یا خیر؟

پاسخ:

ابتدا برای آنکه نشان دهیم T یک تبدیل خطی است طبق تعریف کتاب درسی داریم:

A transformation (or mapping) T is **linear** if:

(i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for all $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ in the domain of T;

(ii) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ for all scalars c and all $\mathbf{u}$ in the domain of T.

پس برای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \quad &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y_1 + y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

- پس شرط اول برقرار است.

حال درستی شرط دوم را بررسی می‌کنیم:

$$T(c\mathbf{x}) = T\left(c\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2cx_1 + cx_2 \\ 0 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = cT(\mathbf{x})$$

- شرط دوم نیز برقرار است. بنابراین تبدیل T یک تبدیل خطی است.

S تبدیل خطی نیست، برای نشان دادن آن کافی است که یک مثال نقض بیاوریم:

$$S\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, S\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, S\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

و

$$\begin{aligned}S\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) &= S\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\ &= S\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)+S\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

- بنابراین از آنجا که شرط اول تبدیل خطی بودن نقض شد، S یک تبدیل خطی نیست.

همچنین ترکیب آن ها یعنی همان $S \circ T$ یک تبدیل خطی است، برای اثبات آن کافی است نشان دهیم که:

$$S\circ T(\mathbf{x})=S\left(T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)\right)=S\left(\begin{bmatrix}2x+y\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x+y\\0\end{bmatrix}=T(\mathbf{x})$$

- از آنجا که $S\circ T=T$ شد و T یک تبدیل خطی است، پس $S\circ T$ نیز یک تبدیل خطی خواهد بود.

بنابرین T و $S\circ T$ خطی و S غیرخطی بودند.