

به نام او
تمرینات مابین ها و هر فصلی - سری دوم . ۴، ۱۲، ۹۵

۱- درباره تعداد جواب هر دستگاه زیر بحث کنید :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(سطح ۱)

۲- برابر هر یک از موارد زیر یک ماتریس 2×2 مثال بزنید (با توجه به تمرینی که در جزوه

داشتیم دانیم $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ واحد پذیر است اگر $ad - bc \neq 0$)

الف) ماتریسی که مقدار ویژه ی آن ۲ و ۴ باشد.

ب) ماتریسی که مقدار ویژه حقیقی داشته باشد. (سطح ۱)

۳- فرض کنید A یک ماتریس بالامثلی باشد. نشان دهید برای هر قطر آن یک

مقدار ویژه ی A است و A مقدار ویژه ی دیگری ندارد. (سطح ۲)

۴- درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را تعیین کنید :

الف) اگر $A^2 = 0$ و λ مقدار ویژه ی A باشد، آنگاه $\lambda = 0$.

ب) اگر λ مقدار ویژه ی A باشد، آنگاه λ^k مقدار ویژه ی A^k است.

ج) اگر λ^2 مقدار ویژه ی A^2 باشد، λ مقدار ویژه ی A است.

(سطح ۲)

۵- فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد و عدد ۴ تنها مقدار ویژه ی

$A^2 + 4A + 4I_n$ باشد. مقدار (یا مقادیر) ویژه ی A را بیابید.

(سطح ۲)

۶- مقدار λ را طوری تعیین کنید که دستگاه معادلات زیر جواب ناهمگرا باشد :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

(سبب از آنکه جواب ناهمگرا در این دستگاه هم باشد، روش حل و نوع جواب
شما به آن مهم است. روش باید که قابل تقسیم به مثل دیگر باشد)
(سطح ۲)

۷- فرض کنید $A, P \in M_n(F)$ و P وارون پذیر باشد. نشان دهید که PAP^{-1} و A یک همبندی هستند. (سطح ۲)

۸- نشان دهید که در هر یک از موارد زیر، اعداد حقیقی هستند.
(سطح ۳)

۹- فرض کنید $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ و $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ و $m < n$.

الف) ثابت کنید AB معکوس پذیر نیست.

ب) ثابت کنید در صورتی که BA معکوس پذیر باشد و A' تحول یکنوا
مطریک A باشد، آنگاه A' دقیقاً m سطر ناهمگرا دارد.

(سطح ۳)