بخش صحیح غلط :

سوال : هر ماتریس متقارن ، n تا مقدار ویژه ی حقیقی متمایز دارد .

جواب : غلط . n تا مقدار ویژه دارد ولی لزومی ندارد متمایز باشند .

سوال : در یک عبارت مثبت معین مانند Q به ازای تمام x ها در $\mathrm{R^n}$ مقدار Q(x) بزرگتر از صفر می باشد.

جواب : غلط . در x=0 مقدار Q(x) برابر است با صفر .

سوال : اگر مقدار ویژه(eigenvalue) های یک ماتریس متقارن مانند A ، همگی منفی باشند ، آنگاه فرم درجه دوم (quadratic form) $\mathrm{x^TAx}$ ، نامعین است .

جواب : غلط . منفی معین است . (تئوری 5 فصل 7 کتاب درسی)

بخش تشریحی :

سوال : ماتریس A را قطری سازی عمودی کنید .

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

جواب :

مقادیر ویژه ی A را به دست می آوریم :

$$\mathrm{det(A\text{-}\boldsymbol{\lambda}I) = 0} \ \rightarrow \ \boldsymbol{\lambda} = 5 \,, \boldsymbol{\lambda} = 2 \,, \boldsymbol{\lambda} = \text{-}2$$

اکنون یک پایه از eigenspace هر مقدار ویژه را به دست می آوریم و آن را نرمال می کنیم :

$$\boldsymbol{\lambda} = 5 : \ v1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \ u1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = 2 : \ v2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \ u2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = -2 : \ v3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \ u3 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

در نهایت داریم :

$$P = [u1u2u3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PDP}^{\mathrm{T}}$$

سوال : عبارت $\mathrm{Q(x1, x2)} = 3\mathrm{x_1}^2 - 4\mathrm{x_1x_2} + 6\mathrm{x_2}^2$ را در نظر بگیرید .

الف) مشخص کنید که آیا Q مثبت معین است یا منفی معین یا نامعین ؟

ب) عبارت را با تغییر متغیر (x=Py) به یک فرم quadratic (چند جمله ای درجه 2) که هیچ عبارت ضرب متقابل (مثل x1x2) یا همان cross-product ای ندارد تبدیل کنید .

جواب :

الف) ابتدا ماتریس quadratic را به دست می آوریم :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

اکنون مقادیر ویژه ی A را به دست می آوریم :

$$det(A - \lambda i) = 0 \rightarrow (3 - \lambda)(6 - \lambda) - (-2)(-2) = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0 \rightarrow \lambda = 7, \lambda = 2$$

از آنجایی که هر دو مقدار ویژه ی A ، مثبت بودند طبق تئوری 5 فصل 7 کتاب درسی ، Q مثبت معین است .

ب) ابتدا بردار ویژه ی هر مقدار ویژه را به دست می آوریم و آن را نرمال می کنیم و ماتریس P را تشکیل می دهیم ($A = PDP^{-1}$) :

$$\boldsymbol{\lambda} = 7 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow u = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{v} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P} = [\mathrm{u} \;\; \mathrm{v}] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \;\; , \;\; \mathrm{D} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

اکنون x=Py در نظر می گیریم و داریم :

$$\mathrm{x}^{\mathrm{T}} A x = (P y)^{\mathrm{T}} A (P y) = \mathrm{y}^{\mathrm{T}} \mathrm{P}^{\mathrm{T}} A P y = \mathrm{y}^{\mathrm{T}} (\mathrm{P}^{-1} A P) y = \mathrm{y}^{\mathrm{T}} D y$$

$$= 7{\mathrm{y}_1}^2 + 2{\mathrm{y}_2}^2$$