جبرخطی کاربردی

نیمسال دوم ۹۶_۹۷

مدرس :دکتر ناظر فرد

مجموعه سوالات فصل ۴ (فضای برداری)

توجه!!! :

- سری سوم تمرینات با موضوع فضای برداری را در زیر مشاهده می کنید.
- این سری تمرین شامل ۹ سوال اجباری و ۲ سوال امتیازی است که نمره سوالات امتیازی به نمره تمارین شما اضافه خواهد شد.
- پس از حل مسائل آن ها را به صورت یک فایل pdf در قسمت مورد نظر با فرمت زیر

  9531000_T_Claude Makelele_HW3.pdf

  آپلود کنید.
- مهلت ارسال پاسخ تمارین ساعت ۲۳:۵۵ روز دوشنبه ۹۷/۳/۲۱ خواهد بود.

تمارین:

۱. در هر مورد مشخص کنید آیا زیر مجموعه ی داده شده یک زیر فضا از فضای برداری مشخص شده می باشد یا خیر.

۱. تمامی زوج مرتب هایی مثل (x, y) از $\mathbb{R}^2$ با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر زیر:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',0), c(x,y)=(cx,0)$$

۲. $\{(a,b,a+b)|a,b\in\mathbb{R}\}$ در فضای برداری $\mathbb{R}^3$.

۳. $\{A\in M_n(\mathbb{R})|\det(A)=0\}$ در $M_n(\mathbb{R})$. (منظور از $M_n(\mathbb{R})$ مجموعه تمام ماتریس های $n\times n$ با درایه هایی از مجموعه اعداد حقیقی است.)

۴. $\{p(x)|p(x)=p(-x), p(x)\in\mathbb{P}[x]\}$ در فضای برداری $\mathbb{P}[x]$ (تمامی چند جمله های حداکثر از درجه n با ضرایب حقیقی را با نماد $\mathbb{P}_n[x]$ نشان می دهیم و همچنین مجموعه تمام چند جمله ها با ضرایب حقیقی را با $\mathbb{P}[x]$ نشان می دهیم)

۵. $\{p(x)|p(x)=ax^2, a\in\mathbb{R}\}$ در فضای برداری $\mathbb{P}_3[x]$.

۲. اگر V, W فضا ها برداری باشند، $V\times W$ تمام زوج مرتب هایی به شکل (v,w) است که $v\in V, w\in W$ و تعریف می کنیم:

$$(v_1,w_1)+(v_2,w_2)=(v_1+v_2,w_1+w_2)$$

و

$$k(v,w)=(kv,kw),\qquad k\in\mathbb{R}$$

۱. نشان دهید $V\times W$ یک فضای برداری است.

۲. نشان دهید اگر بعد V و W متناهی باشد آنگاه بعد $V \times W$ نیز متناهی است.

۳. بعد $V \times W$ را در صورتی که $dimV = m, dimW = n$ بیابید.

۴. توضیح دهید چرا $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^۲$ با $\mathbb{R}^۳$ یکسان است.

۵. پایه ای برای $\mathbb{R}^۲ \times M_۲(\mathbb{R})$ بیابید.

۶. بعد $M_۲(\mathbb{R}) \times M_۲(\mathbb{R})$ را بیابید.

۳. فرض کنید $W_۱, W_۲$ زیر فضا های فضای برداری V باشند، تعریف می کنیم :

$$W_۱ + W_۲ = \{w_۱ + w_۲ | w_۱ \in W_۱, w_۲ \in W_۲\}$$

.

۱. نشان دهید :

$$W_۱ + W_۲ + \cdots + W_n = span(\bigcup_{i=۱}^{n} W_i)$$

۲. نشان دهید $W_۱ \cap W_۲, W_۱ + W_۲$ زیر فضای V هستند و همچنین نشان دهید:

$$W_۱ \cap W_۲ \subseteq W_۱ \cup W_۲ \subseteq W_۱ + W_۲$$

.

۳. نشان دهید :

$$dim(W_۱ + W_۲) = dim(W_۱) + dim(W_۲) - dim(W_۱ \cap W_۲)$$

.

۴. نتیجه گیری قسمت ۲ را با استفاده از دو خط که از مبدا مختصات xy می گذرند توجیه کنید.

۵. چه زمانی $W_۱ \cup W_۲$ زیر فضایی از V است؟

۶. اگر $W_۱ + W_۲$ کوچکترین زیر فضایی از V باشد که شامل $W_۱ \cup W_۲$ است،و اگر S زیر فضایی از V باشد که شامل $W_۱ \cup W_۲$ است آنگاه: $W_۱ + W_۲ \subseteq S$.

۴. نشان دهید $\{u_۱, u_۲, \cdots, u_p\}$ در V مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر بردار های مختصات آن

$\{[u_۱]_{\mathcal{B}}, [u_۲]_{\mathcal{B}}, \cdots, [u_p]_{\mathcal{B}}\}$ در $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی باشند.

۵. فرض کنید S یک مجموعه متناهی در V باشد به طوری که هر $x \in V$ نمایشی یکتا از ترکیب خطی اعضای S داشته باشد،نشان دهید S پایه V است.

۶. با در نظر گرفتن $T : V \longrightarrow W$ فرض کنید H زیر فضایی غیر صفر از V باشد،و $T(H)$ مجموعه تمام بردار های تصویر شده H باشد که زیر فضای W است،ثابت کنید $dimT(H) \leq dimH$.

۷. ماتریسی را (full rank) گویند هرگاه رنک آن بزرگترین مقدار ممکن را داشته باشد،ثابت کنید ماتریس $m \times n$ که تعداد سطر های آن بیشتر از ستون هایش باشد full rank است اگر و فقط اگر ستون های آن مستقل خطی باشند.

۸. اگر A یک ماتریس $m \times n$ با رنک r باشد آنگاه می گوییم $A = CR$ یک (rank factorization) ماتریس A است هر گاه C یک ماتریس $m \times r$ با رنک r و R یک ماتریس $r \times n$ با رنک r باشد.چنین تقسیم بندی همیشه موجود است،با استفاده از این موضوع ثابت کنید برای هر دو ماتریس $m \times n$، A و B، نشان دهید:

$$rank(A + B) \leq rankA + rankB$$

۹. (سوال امتیازی)فرض کنید V یک فضای برداری متناهی است و $V_۱, V_۲$ زیر فضا هایی از V هستند.اگر

۱ + $dim(V_1 + V_2) = dim(V_1 \cap V_2)$ آنگاه $V_1 + V_2$ یا برابر V_1 است یا V_2 و متقابلا $V_1 \cap V_2$یا برابر V_1 است یا V_2.
هم ارز با جملات قبل اگر V_1, V_2 زیر مجموعه های هم نباشند،آنگاه:

$$dim(V_1 + V_2) \geq dim(V_1 \cap V_2) + 2$$

۱۰. (سوال امتیازی)فرض کنید U و V زیر فضا هایی از R^n باشند به طوری که

$$U = span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\} \qquad V = span\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q\}$$

فرض کنید:

$$W = span\{\alpha_i + \beta_j\} \quad i = 1, 2, \cdots, p \quad j = 1, 2, \cdots, q$$

اگر $dimU = s, dimV = t$ نشان دهید:

$$dimW \leq min\{n, s + t\}$$

۱۱. در هر یک از قسمت های زیر ابتدا مختصات بردار داده شده (v) را در هریک از پایه ها بیابید سپس ماتریس انتقال از یک پایه (B) به پایه (C) دیگر را محاسبه کنید.

.۱

$$V = \mathbb{P}_3[x] \qquad v = p(x) = 8 + x + 6x^2 + 9x^3$$
$$B = \{2 + 3x + 4x^2 - x^3, 3x + 5x^2 + 2x^3, -5x^2 - 5x^3, 4 + 4x + 4x^2\}$$
$$C = \{1 - x^3, 1 + x, x + x^2, x^2 + x^3\}$$

.۲

$$V = M_2(\mathbb{R}) \qquad v = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$B = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}$$
$$C = \{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}$$

.۳

$$V = \mathbb{R}^3 \qquad v = (1, 7, 7)$$
$$B = \{(-7, 4, 4), (4, 2, -1), (-7, 5, 0)\}$$
$$C = (1, 1, 0), (0, 1, 1), (3, -1, -1)$$