به نام خدا

پاسخ تمرین دوم

جبر خطی کاربردی – بهار 1401

دانشکده مهندسی کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

1- **پاسخ**:

الف) غلط.

(راه اول): آوردن مثال نقض

(راه دوم): زیرا برای اینکه منطبق باشند باید تقسیم بندی ستونی A و تقسیم بندی سطری B باید هماهنگ باشد. (پاراگراف قبل از EXAMPLE 3 صفحه 120 کتاب درسی)

پ) درست. طبق تئوری 8 کتاب درسی می دانیم برای اینکه یک ماتریس $n\times n$ وارون پذیر باشد، باید دقیقا n عنصر $pivot$ داشته باشد.

ت) درست. در اینصورت طبق تئوری 8 کتاب درسی این ماتریس، یک ماتریس معکوس پذیر است و دوباره طبق همین تئوری می دانیم که ستون های هر ماتریس معکوس پذیر R^n را اسپن می کنند. پس طبق تعریف پایه، این مجموعه یک پایه برای R^n خواهد بود.

ج) غلط. مثال نقض $A = I,\ B =- I$ در اینصورت $A + B = O$، که وارون پذیر نیست.

چ) غلط. مثال نقض:

$$A = [1\ 1\ 1\ 0],\ B = [0\ 1\ 1\ 1] \rightarrow \{AB = [1\ 2\ 0\ 1]\ BA = [1\ 0\ 2\ 1] \rightarrow AB \neq BA$$

ه) غلط. طبق تئوری 12 کتاب درسی میدانیم که اگر یک ماتریس $m\times n$ باشد آنگاه فضای پوچ آن زیرفضایی از R^n خواهد بود.

2- **پاسخ:**

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&4&4\\3&7&10\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&4&7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}=U$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix},[3]\quad\rightarrow\quad L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}$$

$$A=LU=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&4&4\\3&7&10\end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix}3\\10\\20\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad LUx=b\quad,\quad Ux=y\quad\rightarrow\quad Ly=b$$

$$Ly=b\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}3\\10\\20\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad y=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$$

$$Ux=y\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad x=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

*3- **پاسخ:***

راه اول:

$$B(I - AB) = (I - BA)B$$

$$B = (I - BA)B(I - AB)^{-1}$$

$$BA = (I - BA)B(I - AB)^{-1}A$$

$$I - BA = I - (I - BA)B(I - AB)^{-1}A$$

$$(I - BA) + (I - BA)B(I - AB)^{-1}A = I$$

$$(I - BA)(I + B(I - AB)^{-1}A) = I \quad \rightarrow \quad (I - BA)^{-1} = (I + B(I - AB)^{-1}A)$$

راه دوم: برهان خلف.

فرض خلف : $I - BA$ وارون پذیر نیست.

پس معادله $BAx = x$ ($BAx = x \rightarrow (I - BA)x = 0$) جواب غیر بدیهی (غیر صفر) دارد. حال A را از سمت چپ در این معادله ضرب می‌کنیم و به عبارت $ABAx = Ax$ می‌رسیم و از عبارت قبل می‌دانیم که Ax مخالف صفر است. حال می‌توانیم $Ax = y$ را در نظر بگیریم و معادله خود را به صورت $ABy = y$ بازنویسی کنیم که شکل دیگری از معادله‌ی $(I - AB)y = 0$ می‌باشد. و از آنجایی که y غیر صفر است، پس $I - AB$ وارون پذیر نیست و این خلاف فرض سوال است و فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

4- پاسخ:

- با اجرای مراحل حذف گاوس- جوردن خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -12 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -12 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & c-6 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -12 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & c-6 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & -7 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & c-6 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & -7 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & c-2 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & -7 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & c-2 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3c+6}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3c+6}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9c-8}{2} & -2 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

در این مرحله توقف میکنیم. برای اینکه ماتریس A وارون پذیر باشد باید:

$$\frac{9c-8}{2} \neq 0 \rightarrow 9c \neq 8 \rightarrow c \neq \frac{8}{9}$$

- حال جواب قسمت اول بدست آمده است. با فرض $c = 1$ به حل ادامه میدهیم تا وارون بدست آید.

داریم:

$$\begin{bmatrix}1&2&2&3&1&0&0&0\\0&1&\frac{7}{6}&2&\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&0&0\\0&0&1&\frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&-2&-\frac{5}{2}&\frac{9}{2}&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&3&1&0&0&0\\0&1&\frac{7}{6}&2&\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&0&0\\0&0&1&\frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&0\\0&0&0&1&-4&-5&9&2\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&3&1&0&0&0\\0&1&\frac{7}{6}&2&\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&0&0\\0&0&1&0&7&8&-15&-3\\0&0&0&1&-4&-5&9&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&3&1&0&0&0\\0&1&\frac{7}{6}&0&\frac{26}{3}&\frac{59}{6}&-18&4\\0&0&1&0&7&8&-15&-3\\0&0&0&1&-4&-5&9&2\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&0&13&15&-27&-6\\0&1&\frac{7}{6}&0&\frac{26}{3}&\frac{59}{6}&-18&4\\0&0&1&0&7&8&-15&-3\\0&0&0&1&-4&-5&9&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&0&13&15&-27&-6\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0&7&8&-15&-3\\0&0&0&1&-4&-5&9&2\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&0&-1&-1&3&0\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0&7&8&-15&-3\\0&0&0&1&-4&-5&9&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&-2&-2&4&1\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0&7&8&-15&-3\\0&0&0&1&-4&-5&9&2\end{bmatrix}$$

بنابراین معکوس A بدست آمد:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-2&-2&4&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\7&8&-15&-3\\-4&-5&9&2\end{bmatrix}$$

5- **پاسخ:**

ب) برای ماتریس $m \times n$ به نام A می‌توان گفت $null\ space$ آن دارای بردارهای xای می‌باشد که $Ax = 0$. پس x باید *n-dimensional* باشد. از آنجاییکه $null\ space$ یک زیرفضا از R^3 است، می‌توان نتیجه گرفت $n = 3$.

$Range$ ماتریس A شامل بردارهای yای است که $y = Ax$ به طوری که $x \in R^n$. بنابراین y باید *m-dimensional* باشد. پس $range$ یک زیرفضا از R^5 است و $m = 5$.

از آنجایی‌که یک صفحه یک زیرفضای ۲بعدی است، پس $nullity = 2$ و $range$ توسط یک بردار v، $span$ می‌شود. بنابر این v یک پایه برای $range$ است و $\text{rank} = 1$.

همچنین می‌توان نوشت :

$$\text{rank of } A + \text{nullity of } A = n.$$

پس $n = 3$ و $nullity = 2$ و $rank = 1$.

6- **پاسخ:**

الف) زیر فضا نیست چون ۰ جز جواب تساوی $2x + y - 3z = 7$ نیست.

ب)

فرض کنید S شامل تمام بردارهایی است که در عبارت ریاضی زیر صدق می‌کنند:

$$v \in R \quad , \quad v = (b_1, b_2, b_3) \quad , \quad b_2 b_3 = 0$$

اگر $v_1 = (a_1, a_2, a_3)$ و $v_2 = (b_1, b_2, b_3)$ باشد آنگاه $v_1 + v_2 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ است. برای آنکه $v_1 + v_2$ عضو S باشد باید :

$$(a_2 + b_2).(a_3 + b_3) = 0 \rightarrow a_2 a_3 + a_2 b_3 + b_2 a_3 + b_2 b_3 = 0 \rightarrow a_2 b_3 + b_2 a_3 = 0$$

داریم:

$$v_1 = (1, 0, 1) \quad , \quad v_2 = (1, 1, 0) \in S \quad \rightarrow \quad v_1 + v_2 = (2, 1, 1) \notin S$$

از آنجاییکه S تحت جمع بسته نیست، می‌توان نتیجه گرفت که زیرفضا نمی‌باشد.

ج) بردار صفر را شامل نمیشود در نتیجه زیرفضا نیست.

د)

فرض کنید S شامل تمام بردار هایی است که در عبارت ریاضی زیر صدق می کنند:

$$v = (b_1, b_2, b_3) \quad , \quad b_3 - b_2 + 3b_1 = 0 \quad \rightarrow \quad b_3 = b_2 - 3b_1$$

داریم:

$$v_1 = (a_1, a_2, a_3)\ , v_2 = (b_1, b_2, b_3)\ \in S$$
$$v_1 + v_2 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$a_3 = a_2 - 3b_1 \quad , \quad b_3 = b_2 - 3b_1$$
$$\rightarrow \ a_3 + b_3 = (a_2 + b_2 - 3b_1 - 3a_1) \quad \rightarrow \quad v_1 + v_2 \in S$$

و بدیهی است که تحت عملیات ضرب اسکالر نیز بسته است پس می‌توان گفت یک زیرفضا می‌باشد.

7- **پاسخ:**

الف) فرم کاهش یافته A را بدست میاوریم:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ با توجه به اینکه در ستون های یک و دو pivot position داریم.

ستون های یک و دو ماتریس اولیه پایه های فضای ستونی را تشکیل میدهند.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ب) $Ax = 0$ با حل این تساوی داریم:

فرم کاهش یافته:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 = 0 \\ x_2 + \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 \\ -\frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4$$

در نتیجه:

$$Null\ A = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ج)

$$[\mathrm{A} \quad \mathrm{p}] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 8/3 & 4 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- معادله ی $\mathrm{Ax} = \mathrm{p}$ جواب دارد در نتیجه p در فضای ستونی ماتریس A قرار دارد.

د) خیر چون $q \in \mathbb{R}^4$ نیست.

8- پاسخ:

(آ) اگر ستون های B وابسته خطی باشند ستون های AB نیز وابسته خطی هستند.

حل. اگر ستون های ماتریس hB وابسته خطی باشند آنگاه بردار غیر صفری مانند x وجود دارد که $Bx = ۰$. در نتیجه A را از دو طرف در عبارت ضرب می کنیم داریم : $A(Bx) = ۰$ و در نتیجه داریم $(AB)x = ۰$ از انجاییکه x یک بردار غیر صفر است پس ستون های AB نیز وابسته خطی هستند. ◄

(ب) اگر A, B و C ماتریس های وارون پذیر $n \times n$ باشند آنگاه جواب معادله $C^{-۱}(A+X)B^{-۱} = I_n$ بیابید.(Xیک ماتریس مجهول است).

حل. یافتن جواب این معادله شامل بررسی وجود جواب و یافتن آن است،حال برای اینکه ببینیم جواب اگر وجود داشته باشد چه چیزی باید باشد،فرض کنیم X جوابی باشد که در معادله مورد نظر ما صدق کند آنگاه هر دو طرف معادله را در C ضرب می کنیم. داریم:

$$CC^{-۱}(A+X)B^{-۱} = CI, \quad I(A+X)B^{-۱} = C, \quad (A+X)B^{-۱}B = CB, \quad (A+X)I = CB$$

داخل پرانتز را در I ضرب می کنیم و از دو طرف A را کم می کنیم آنگاه داریم:

$$AI + XI = CB, \quad A + X = CB, \quad X = CB - A$$

پس اگر جوابی وجود داشته باشد همان $CB-A$ حال برای اینکه نشان دهیم واقعا $CB-A$ جواب است آن را به جای X جایگذاری می کنیم و داریم:

$$C^{-۱}[A+(CB-A)]B^{-۱}=C^{-۱}[CB]B^{-۱}=C^{-۱}CBB^{-۱}=II=I$$

►

(ج) اگر مجموع داریه های روی قطر اصلی یک ماتریس مربعی را با $trc(A)$ نشان دهیم ثابت کنید: $trc(AB)=trc(BA)$

حل. فرض کنید $AB=(C_{ij})$ و $BA=(C'_{ij})$ داریم:

$$c_{ij}=\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}b_{kj},\qquad c'_{ij}=\sum_{k=۱}^{n}b_{ik}a_{kj},\qquad ۱\le i,j\le n$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}trc(AB)=\sum_{i=۱}^{n}C_{ii}&=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{n}a_{ik}b_{ki}\\&=\sum_{k=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{n}b_{ki}a_{ik}=\sum_{k=۱}^{n}C'_{kk}=trc(BA)\end{aligned}$$

(ه) ثابت کنید اگر $trc(AA^T)=۰$ آنگاه $A=۰$ است.

حل. فرض کنید $A=(a_{ij})$ و $A^T=(B_{ij})$ بنابراین:

$$b_{ij}=a_{ji}\qquad i=۱,۲,\cdots,n\qquad j=۱,۲,\cdots,n$$

حال با فرض $AA^T=(C_{ij})$۰ لذا $C_{ij}=\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}b_{kj}$ و چون $trc(AA^T)=۰$ بنابراین $\sum_{i=۱}^{n}C_{ii}=۰$ داریم:

$$۰=\sum_{i=۱}^{n}C_{ii}=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}b_{ki}$$

ولی چون $b_{ki}=a_{ik}$ بنابراین: $\sum_{i=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}^{۲}=۰$ لذا مجموع مربعات تمام درایه های ماتریس A برابر صفر است لذا تمام درایه ها صفر می باشند پس $A=۰$.

►

9- پاسخ:

فرض می‌کنیم $P = A + B$. پس $B = P - A$.

حال داریم :

$$A(A+B)^{-1}B = AP^{-1}(P-A) = AP^{-1}P - AP^{-1}A = A - AP^{-1}A$$

و از طرف داریم :

$$B(A+B)^{-1}A = (P-A)P^{-1}A = PP^{-1}A - AP^{-1}A = A - AP^{-1}A$$

با توجه به عبارت بالا سمت راست و چپ تساوی پس از ساده سازی به مقدار یکسان رسیدند پس تساوی برقرار است.

10- پاسخ:

$$x = c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 \rightarrow [x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

- برای بدست آوردن این ضرایب کافی است تا دستگاه زیر را حل کنیم. داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

11- پاسخ:

اگر x یک بردار عضو R^n به صورتی که $Ax = 0$ باشد، آنگاه بر اساس عبارت زیر x باید بردار صفر باشد (تمام المان‌های این بردار صفر است)

$$x = I_n x = (CA)x = C(Ax) = C \times 0_m = 0_n$$

حال برای اینکه $Ax = 0$ همواره جواب بدیهی داشته باشد، نباید تعداد ستون‌هایش از تعداد سطرهایش بیشتر باشد؛ زیرا در این صورت متغیر آزاد خواهیم داشت و دیگر تنها جواب ما جواب بدیهی نخواهد بود پس $n \leq m$.

به ازای هر b عضو R^m داریم :

$$b = I_m b = (AD)b = A(Db)$$

و می‌توان نتیجه گرفت $Ax = b$ جواب دارد و باید به ازای هر b دلخواه جواب داشته باشد $(x = Db)$. حال باید سطر و ستون‌های ماتریس A به شکلی باشد که به ازای هر b دلخواه بتوان جوابی برای معادله $Ax = b$ یافت و این یعنی نباید تعداد سطرهای ماتریس A از تعداد ستون‌هایش بیشتر باشد زیرا در این صورت سطرهایی وجود خواهند داشت که در آن ها المان محوری وجود ندارد و این امکان ایجاد ناسازگاری را به همراه دارد. پس $n \geq m$.

حال از رابطه $n \leq m$ و $m \leq n$ نتیجه می‌شود که $n = m$.

حال برای اثبات C =D داریم :

$$(CA)D = I_n D = D$$

$$C(AD) = CI_m = C$$

$$C(AD) = (CA)D$$

پس $C = D$.

موفق باشید

تیم تدریسیاری جبر خطی بهار 1401