# جبرخطی کاربردی

**نیمسال دوم ۹۸ـ۹۷**

مدرس :دکتر امیر مزلقانی

---

پاسخ تمرین اول (معادلات خطی در جبر خطی)

---

**توجه !!!**

- سوالات زیر مربوط به فصل اول درس جبر خطی کاربردی با موضوع ((معادلات خطی در جبر خطی)) می باشد که شامل ۱۰ سوال تئوری و ۲ سوال عملی است
- سوالات را به دقت و مطالعه و به صورت خوانا و مرتب بنویسید
- برای قسمت پیاده سازی گزارشی دقیق از عملکرد خود بنویسید.
- در صورت وجود هرگونه مشکل یا ابهام در ارتباط با سوالات از طریق

  $ala.spring2019@gmail.com$

  با رعایت مواردی که در قوانین ارسال تمارین آماده است سوال خود را بپرسید.
- پاسخ های خود را در قالب یک فایل zip به صورت الگوی زیر آپلود کنید:
9531000__Gabriel__Batistuta__HW1.zip
- مهلت ارسال این تمرین ساعت ۲۳:۵۵ روز یکشنبه ۹۷/۱۲/۱۹ می باشد.

**تمارین:**

**۱.** برای دستگاه معادلات زیر پس تشکیل ماتریس افزوده و اعمال عملیات سطری پلکانی کاهش یافته و مشخص کردن درایه های محوری تعداد جواب های آن ها بررسی کرده و مشخص کنید و در صورت امکان آن ها را به صورت پارامتریک برداری نشان دهید.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} ۲u & - & v & & & & & = & ۰ \\ -u & + & ۲v & - & w & & & = & ۰ \\ & - & v & + & ۲w & - & z & = & ۰ \\ & & & - & w & + & ۲z & = & ۵ \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} u & + & v & + & w & = & ۶ \\ u & + & ۲v & + & ۲w & = & ۱۱ \\ ۲u & + & ۳v & - & ۴w & = & ۱۱ \end{array}$$

**حل.** با تشکیل ماتریس افزوده،قسمت اول را به شکل زیر حل می کنیم.

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۲ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۲ & ۵ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۲ + \frac{۱}{۲}R_۱ \to R_۲} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۲} & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۲ & ۵ \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{۲}{۳}R_۲ + R_۳ \to R_۳]{\frac{۲}{۳}R_۲ + R_۱ \to R_۱} \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -\frac{۲}{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۲} & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۴}{۳} & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4+\frac{3}{4}R_3\to R_4]{R_1+\frac{1}{2}r_3\to R_1,R_2+\frac{3}{4}R_3\to R_2}\begin{bmatrix}2&0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{3}{2}&0&-\frac{3}{4}&0\\0&0&\frac{4}{3}&-1&0\\0&0&0&\frac{5}{4}&5\end{bmatrix}\xrightarrow[R_1+\frac{2}{5}R_4\to R_1,R_2+\frac{3}{5}R_4\to R_2]{R_3+\frac{4}{5}R_4\to R_3}\begin{bmatrix}2&0&0&0&2\\0&\frac{3}{2}&0&0&3\\0&0&\frac{4}{3}&0&4\\0&0&0&\frac{5}{4}&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}R_1\to R_1,\frac{2}{3}R_2\to R_2]{\frac{3}{4}R_3\to R_3,\frac{4}{5}R_4\to R_4}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&2&0&0&2\\0&0&3&0&3\\0&0&0&4&4\end{bmatrix}$$

پس جواب های این دستگاه برابر است با $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix}$.

حال ماتریس افزوده ماتریس دوم را تشکیل می دهیم:

$$\begin{bmatrix}1&1&1&6\\1&2&2&11\\2&3&-4&11\end{bmatrix}\xrightarrow[-2R_1+R_3\to R_3]{-R_1+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1&1&1&6\\0&1&1&5\\0&1&-6&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_1-R_2\to R_1]{R_3-R_2\to R_3}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&5\\0&0&-7&-6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}R_3+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&\frac{29}{7}\\0&0&-7&-6\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{7}R_3\to R_3}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&\frac{29}{7}\\0&0&1&\frac{6}{7}\end{bmatrix}$$

پس جواب به صورت $\begin{bmatrix}1\\\frac{29}{7}\\\frac{6}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}$. ◀

**۲.** ثابت کنید دو ماتریس زیر هم ارز سطری نیستند.

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\a&-1&0\\b&c&3\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&1&2\\-2&0&-1\\1&3&5\end{bmatrix}$$

**حل.** برای اینکه ثابت کنیم دو ماتریس هم ارز سطری هستند یا نه ابتدا باید آن ها را به شکل کاهش یافته سطری_ پلکانی درآوریم سپس اگر کاهش یافته سطری_ پلکانی دو ماتریس مساوی هم بودند دو ماتریس هم ارز هستند در غیر اینصورت هم ارز نیستند.

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\-2&0&-1\\1&3&5\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2+2R_1\to R_2}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&3\\0&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&\frac{3}{2}\\0&0&\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\a&-1&0\\b&c&3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2-\frac{a}{2}R_2\to R_2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&c&3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+cR_2\to R_3}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{3}R_3\to R_3]{\frac{1}{2}R_1\to R_1,-R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

همانطور که مشخص است این دو ماتریس با یکدیگر هم ارزی سطری نیستند. ◀

**۳.** با استفاده از روش حذفی سطری به سوالات زیر پاسخ دهید:

۱. برای اینکه هریک از حالت های بدون جواب بودن ،فقط یک جواب داشتن و بی نهایت داشتن برای معادلات زیر رخ دهد $h$و$k$ باید چه مقادیری داشته باشند؟

$$\begin{array}{rcrcr}x_1&+&hx_2&=&2\\4x_1&+&8x_2&=&k\end{array}\qquad\begin{array}{rcrcr}-2x_1&+&hx_2&=&1\\6x_1&+&kx_2&=&-2\end{array}$$

**حل.** ابتدا برای دستگاه اول ماتریس افزوده را تشکیل می دهیم و آن را به صورت به صورت سطری پلکانی در می آوریم.

$$\begin{bmatrix} ۱ & h & ۰ \\ ۴ & ۸ & k \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۲-۴R_۱\to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & h & ۰ \\ ۰ & ۸-۴h & k \end{bmatrix}$$

جواب های دستگاه فوق شرایط زیر را دارد :

- اگر $۸-۴h\neq ۰ \to h\neq ۲$ و $k\neq ۰$ آنگاه دستگاه ۱ جواب دارد.
- اگر $۸-۴h=۰ \to h=۲$ و $k\neq ۰$ آنگاه دستگاه جواب ندارد.
- اگر $۸-۴h=۰ \to h=۲$ و $k=۰$ آنگاه دستگاه بی شمار جواب دارد.

حال جواب دستگاه دوم را می یابیم:

$$\begin{bmatrix} -۲ & h & ۱ \\ ۶ & k & -۲ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۲+۳R_۱\to R_۲} \begin{bmatrix} -۲ & h & ۱ \\ ۰ & k+۳h & ۱ \end{bmatrix}$$

جواب های دستگاه فوق شرایط زیر را دارد:

- اگر $k\neq -۳h$ بشاد آنگاه دستگاه یک جواب دارد
- اگر $k=-۳h$ دستگاه جواب ندارد.

▶

۲. به ازای چه مقادیری از $\lambda$ دستگاه معادلات زیر جواب غیر صفر دارد؟

$$\begin{array}{ccccccc} x_۱ & + & ۲x_۲ & - & ۲x_۳ & = & ۰ \\ ۲x_۱ & - & x_۲ & + & \lambda x_۳ & = & ۰ \\ ۳x_۱ & + & x_۲ & - & x_۳ & = & ۰ \end{array}$$

**حل.** ابتدا ماتریس افزوده دستگاه را تشکیل می دهیم و آن را سطری پلکانی می کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۲ & ۰ \\ ۲ & -۱ & \lambda & ۰ \\ ۳ & ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow[R_۳-۳R_۱\to R_۳]{R_۲-۲R_۱\to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۲ & ۰ \\ ۰ & -۵ & \lambda+۴ & ۰ \\ ۰ & -۵ & ۵ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۳-R_۲\to R_۳} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۲\lambda-۲}{۵} & ۰ \\ ۰ & -۵ & \lambda+۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱-\lambda & ۰ \end{bmatrix}$$

برای اینکه دستگاه جوابی غیر صفر داشته باشد باید $\lambda=۱$ باشد.

▶

۳. مقادیر $a,b,c,d,e,f,g,h,i$ را به گونه ای تعریف کنید که به ازای هر $Y$، $AX=Y$ تنها یک جواب داشته باشد.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

**حل.** ابتدا ماتریس را به شکل سطری پلکانی در می آوریم.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \xrightarrow[R_۲-\frac{d}{a}R_۱\to R_۲]{R_۳-\frac{g}{a}R_۱\to R_۳} \begin{bmatrix} a & b & c \\ ۰ & \frac{ae-db}{a} & \frac{af-dc}{a} \\ ۰ & \frac{ah-gb}{a} & \frac{ai-cg}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۳-\frac{ah-gb}{ae-db}R_۲\to R_۳} \begin{bmatrix} a & b & c \\ ۰ & \frac{ae-db}{a} & \frac{af-dc}{a} \\ ۰ & ۰ & \frac{a(ie-hf)-b(di-gf)+c(dh-eg)}{(ae-db)} \end{bmatrix}$$

برای اینکه دستگاه فوق فقط یک جواب داشته باشد باید $a(ie-hf)-b(di-gf)+c(dh-eg)\neq ۰$ باشد. ▶

**۴.** به دستگاه معادلاتی که تعداد معادلات کمتر از مجهول ها باشد فرومعین $underdetermined$ و به دستگاه معادلاتی که تعداد معادلات آن بیش از مجهول ها باشد فرامعین $overdetermined$ گفته می شود.ثابت کنید دستگاه فرومعین در صورت سازگار بودن دارای تعداد جواب بی نهایت است همچنین مشخص کنید آیا یک دستگاه فرا معین می تواند سازگار باشد؟ وجود یا عدم وجود این موضوع را با دستگاهی با ۳ معادله و ۲ مجهول نشان دهید.

**حل.** در یک سیستم $uderdetermines$ همواره تعداد متغیر ها بیشتر از معادلات است و می دانیم نمی توانیم بیشتر از تعداد معدلات متغیر پایه داشته باشیم پس حداقل یک متغیر آزاد داریم اگر سیستم سازگار باشد هر مقداری به این متغیر آزاد دهیم به یک جواب متفاوت از دستگاه می رسیم پس سیستم جواب یکتا ندارد،همچنین دستگاه $overdetermined$ می تواند سازگار باشد در زر مثالی از این نوع دستگاه را می بینیم:

$$\begin{array}{rcrcl} x_۱ & + & x_۲ & = & ۲ \\ x_۱ & - & x_۲ & = & ۰ \\ ۳x_۱ & + & ۲x_۲ & = & ۵ \end{array}$$

►

**۵.** نشان دهید اگر $\{v_۱, v_۲, \cdots, v_n\}$ بردار هایی مستقل خطی باشند آنگاه $\{v_۱, v_۱+v_۲, \cdots, v_۱+v_۲+\cdots+v_n\}$ مستقل خطی و $\{v_۱+v_۲, v_۲+v_۳, \cdots, v_{n-۱}+v_n, v_n+v_۱\}$ نیز برای n های فرد مستقل خطی است.برای n های زوج چطور؟آیا عکس حکم های بالا برقرار است؟در صورت برقراری ثابت کنید در غیر اینصورت مثال نقض بزنید.

**حل.** ابتدا نشان می دهیم اگر $\{v_۱, v_۲, \cdots, v_n\}$ آنگاه $\{v_۱, v_۱+v_۲, \cdots, v_۱+v_۲+\cdots+v_n\}$ سپس عکس قضی را ثابت می کنیم. اگر $\{v_۱, v_۲, \cdots, v_n\}$ مستقل خطی باشند آنگاه داریم :

$$\alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲ + v_۲ + \cdots + \alpha_n v_n = ۰ \longrightarrow \alpha_۱ = \alpha_۲ = \cdots = \alpha_n = ۰$$

حال داریم

$$\begin{aligned} &\alpha'_۱(v_۱) + \alpha'_۲(v_۱+v_۲) + \cdots + \alpha'_n(v_۱+v_۲+\cdots+v_n) \\ &= (\alpha'_۱ + \alpha'_۲ + \cdots + \alpha'_n)v_۱ + (+\alpha'_۲ + \cdots + \alpha'_n)v_{n-۱} + \cdots + \alpha'_n v_n = ۰ \end{aligned}$$

از فرض داریم:

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha'_۱+ & + & \alpha'_۲ & + & \cdots & \alpha'_{n-۱} & + & \alpha'_n & = & ۰ \\ & & \alpha'_۲ & + & \cdots & \alpha'_{n-۱} & + & \alpha'_n & = & ۰ \\ & & & & \vdots & & & & & \\ & & & & & & & \alpha'_n & = & ۰ \end{array}$$

پس می توان نتیجه گرفت

$$\alpha'_۱ = \alpha'_۲ = \cdots = \alpha'_n = ۰$$

پس $\{v_۱, v_۱+v_۲, \cdots, v_۱+v_۲+\cdots+v_n\}$ مستقل خطی است. حال عکس این قضیه را ثابت می کنیم یعنی اگر$\{v_۱, v_۱+v_۲, \cdots, v_۱+v_۲+\cdots+v_n\}$ مستقل خطی باشد آنگاه $\{v_۱, v_۱+v_۲, \cdots, v_۱+v_۲+\cdots+v_n\}$ . از مستقل خطی بودن $\{v_۱, v_۱+v_۲, \cdots, v_۱+v_۲+\cdots+v_n\}$ نتیجه می گیریم:

$$\beta_۱(v_۱) + \beta_۲(v_۱+v_۲) + \cdots + \beta_n(v_۱+v_۲+\cdots+v_n) = ۰ \longrightarrow \beta_۱ = \cdots = \beta_n = ۰$$

به برهان خلف فرض کنید $\{v_۱, v_۲, \cdots, v_n\}$ مستقل خطی نباشند در این صورت داریم :

$$\alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲ + v_۲ + \cdots + \alpha_n v_n = ۰ \longrightarrow \exists i \in \{۱, ۲, \cdots, n\} \quad \alpha_i \neq ۰$$

جال فرض مسئله را بازنویسی می کنیم :

$$(\beta_۱ + \beta_۲ + \cdots + \beta_n)v_۱ + (+\beta_۲ + \cdots + \beta_n)v_{n-۱} + \cdots + \beta_n v_n = ۰$$

از برهان خلف داریم حداقل وجود دارد $u \neq ۰$ به طوری که:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\beta_{۱}+ & + & \beta_{۲} & + & \cdots & \beta_{n-۱} & + & \beta_n & = & ۰ \\
 & & \beta_{۲} & + & \cdots & \beta_{n-۱} & + & \beta_n & = & ۰ \\
 & & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & \beta_i & + & \cdots & \beta_n & = & u \\
 & & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & & & & \beta_n & = & ۰
\end{array}$$

از دستگاه می توان نتیجه گرفت دستگاه جوابی غیر صفر دارد که در نتیجه $\beta_j \neq ۰$ که این با فرض در تناقض است.
پس فرض خلف باطل و حکم درست است

▶

**۶.** درستی یا نادرستی گزاره های زیر ثابت کنید.(در صورت درستی اثبات و در صورت نادرست بودن مثال نقض بزنید)

**حل.** لازم است قبل از پرداختن به حل این سوال دانشجویان با نوع دیگری از نمایش بردار ها نیز آشنا شوند فرض کنید $v = \begin{bmatrix} v_{۱} \\ v_{۲} \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ باشد آنگاه $v$ را اینگونه هم نشان می دهند : $v = (v_{۱}, v_{۲}, \ldots, v_n)$ که ما در حل این سوال از این نوع نمایش استفاده خواهیم کرد.

۱. اگر $\forall i \ \ v_i \in \mathbb{R}^n$ و $\{v_{۱}, v_{۲}, \ldots, v_n\}$ یک مجموعه وابسته خطی باشد ،هریک از $v_i$ ها را می توان به صورت یک ترکیب خطی از بقیه اعضا نوشت.

**حل.** برای این قسمت مثال نقضی در $\mathbb{R}^{۳}$ می زنیم،فرض کنید $A = \{(۱,۰,۰), (۰,۱,۰), (۰,۰,۱), (۰,۲,۲)\}$ که $A$ یک مجموعه وابسته خطی است زیرا : $(۰,۲,۲) = ۲(۰,۱,۰) + ۲(۰,۰,۱)$ اما $(۱,۰,۰)$ را نمی توان به صورت ترکیب خطی بقیه بردار ها نوشت. ▶

۲. تساوی $Ax = b$ سازگار است اگر ماتریس افزوده $[A \ \ b]$ در هر سطرش درایه محوری داشته باشد.

**حل.** ماتریس رویرو مثالی نقضی برای این موضوع است $\begin{bmatrix} ۱ & -۷ & ۰ & ۶ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۲ & -۳ \\ -۱ & ۷ & -۴ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$ ▶

۳. فرض کنید $A$ یک ماتریس $n \times n$ و $b$ یک بردار در $\mathbb{R}^n$ باشد با این شرط که $Ax = b$ جواب یکتا دارد. در این صورت ستون های $A$ فضای $\mathbb{R}^n$ را تولید می کنند.

**حل.** فرض کنیم $b = n$ در این صورت چون دستگاه تنها یک جواب دارد پس ستون های $A$ مستقل خطی هستند و چون تعداد آن ها n تا است پس فضای $\mathbb{R}^n$ را تولید می کنند. ▶

۴. اگر $S \subseteq \mathbb{R}^n$ مسنقل خطی باشد و $v \in (\mathbb{R}^n - span(S))$ آنگاه $S \cup \{v\}$ مستقل خطی است.

**حل.** به برهان خلف فرض کنیم که $S \cup \{v\}$ مستقل خطی نباشد و $\forall i \ \ w_i \in S$ آنگاه:

$$\exists \alpha_i \ \ \alpha_i \neq ۰ \ \ \alpha_{۱} w_{۱} + \alpha_{۲} w_{۲} + \ldots + \alpha_n w_n + \beta v = ۰$$

حالا دو حالت پیش می آید اگر $\beta = ۰$ باشد آنگاه

$$\exists \alpha_i \ \ \alpha_i \neq ۰ \ \ \alpha_{۱} w_{۱} + \alpha_{۲} w_{۲} + \ldots + \alpha_n w_n = ۰$$

که این با مستقل خطی بودن $S$ در تناقض است زیرا توانستیم ترکیب خطی از بردار های $S$ را بیابیم که مساوی صفر باشد اما ضرایب آن ها صفر نباشد.پس در این حالت فرض خلف باطل و حکم درست است.

در حالت دیگر فرض کنیم که $\beta \neq ۰$ آنگاه می نویسیم

$$\alpha_۱ w_۱ + \alpha_۲ w_۲ + \ldots + \alpha_n w_n = -\beta v$$

در نتیجه :

$$v = \frac{\alpha_۱ w_۱ + \alpha_۲ w_۲ + \ldots + \alpha_n w_n}{-\beta}$$

پس از اینجا نتیجه می شود $v \in span(s)$ آنگاه $v \notin (\mathbb{R}^n - span(S))$ خواهد بود که با فرض سوال در تناقض است در نتیجه فرض خلف باطل و حکم درست است. ▶

۵. اگر $x$ یک جواب غیر بدیهی $Ax = ۰$ باشد آنگاه تمامی مولفه های $x$ غیر صفر است.

**حل.** فرض کنید ماتریس ما به شکل مقابل باشد: $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت جواب غیر بدیهی داریم که تمامی مولفه های آن غیر صفر نیست. ▶

۶. فرض کنید ماتریس $A$ یک ماتریس $m \times n$ باشد که $n$ ستون محوری دارد.برای هر $b$ در $\mathbb{R}^n$، $Ax = b$ حداکثر یک جواب دارد.

**حل.** چون این ماتریس در هر ستون خود داریه محوری دارد پس متغیر آزاد ندارد درنتجه اگر این دستگاه جواب داشته باشد حداکثر یک جواب دارد. ▶

۷. اگر $T$ یک تبدیل خطی باشد $\{v_۱, v_۲, \cdots, v_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی است اگر و فقط اگر $\{T(v_۱), T(v_۲), \cdots, T(v_n)\}$ مستقل خطی باشد.

**حل.** فرض کنید $T$ تمام بردار ها را به نقطه صفر نگاشت کند در این صورت مجموعه بردار های نگاشت شده مشتقل خطی نخواهند بود.لازم به ذکر است یک طرف این گزاره برقرار است(چرا؟) ▶

۸. اگر $S_۱$ و $S_۲$ زیر مجموعه هایی از بردار های $\mathbb{R}^n$ باشند که $span(S_۱) = span(S_۲)$ آنگاه $S_۱ = S_۲$ .

**حل.** برای این قسمت مثال نقضی در $\mathbb{R}^۲$ می زنیم فرض کنید:

$$S_۱ = \{(۱, ۰), (۰, ۱), (۲, ۲)\} \qquad S_۲ = \{(۱, ۰), (۰, ۱), (۳, ۳)\}$$

و واضح است $\mathbb{R}^۲ = span(s_۱) = span(s_۲) = \mathbb{R}^۲$ اما $S_۱ \neq S_۲$ . ▶

▶

**۷.** فرض کنید $S$ مجموعه بردار هایی در $\mathbb{R}^n$ باشند که دارای دقیقا دو مولفه غیر صفرند و این مولفه های غیر صفر هر دو یک باشند نشان دهید $S$ یک مجموعه مستقل خطی از بردار ها است اگر و تنها اگر $n \leq ۳$.

**حل.** می دانیم اگر تعدای بردار داشته باشیم که همگی عضو $\mathbb{R}^n$ باشند و تعداد آن ها بیشتر از n باشد آنگاه حتما وابسته خطی هستند.پس می توان تیجه گرفت.

$$\binom{n}{۲} \leq n \longleftrightarrow n \leq ۳$$

پس برای $n = ۰, ۱$ با شرط مسئله چنین برداری هایی نداریم و برای $n = ۲$ بردار مورد نظر ما $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ می باشد که به تنهایی مستقل خطی است و برای $n = ۳$ بردار های ما

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

می باشد. ▶

**۸.** در (۱)و(۲) فرض کنید مجموعه بردار ها مستقل خطی باشند در مورد $a, \cdots, f$ چه می توان گفت؟

.۱

$$\begin{bmatrix} a \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

**حل.** برای اینکه این ۳ بردار مستقل خطی باشند در صورتی که این بردار های را ستون های ماتریسی مثل $A$ در نظر بگیریم معادله $Ax = ۰$ باید تنها یک جواب بدیهی داشته باشد.در این صورت باید دقیقا ۳ نقطه محوری داشته باشد که در اینصورت محل درایه های محوری همان $a, c, f$ هستند پس اگر این درایه ها غیرصفر باشند این سه بردار مستقل خط می شوند. ◀

.۲

$$\begin{bmatrix} a \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ ۱ \end{bmatrix}$$

**حل.** طبق قضیه ای بردار های $\{v_۱, v_۲, \cdots, n\}$ مستقل خطی هستند اگر هر کدام را نتوان به صورت ترکیب خطی بردار های قبلی آن نوشت. در اینجا داریم

$$v_۱ = \begin{bmatrix} a \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, v_۲ = \begin{bmatrix} b \\ c \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} v_۳ = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ ۱ \end{bmatrix}$$

مشخص است $v_۲$ به صورت ضریبی از $v_۱$ نیست زیرا مولفه سوم $v_۲$ غیر صفر است و این ممکن نیست که ضریبی از $v_۱$ باشد،همینطور $v_۳$ نیز نمی تواند ترکیب خطی $v_۱, v_۲$ باشد زیرا مولفه چهارم این دو بردار صفر است پس در هر ترکیب خطی این دو بردار این مولفه صفر خواهد بود و برابر با ۱ نمی شود پس این ۳ برای هر مقادیری از مجهولات مستقل خطی هستند. ◀

**۹.** فرض کنید $u$ و $v$ بردار هایی مستقل خطی در $\mathbb{R}^۳$ باشند و فرض کنید $P$ صفحه ای باشد که از این دو بردار و مرکز مختصات می گذرد.نقاط $P$ را به صورت پارامتری اینگونه نشان می دهیم $x = su + tv$. نشان دهید تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ ،$P$ را یا به یک صفحه گذرنده از مبدا یا یک خط گذرنده از مبدا یا به خود مبدا مختصات نگاشت می کند.برای اینکه تصویر $P$ نیز یک صفحه باشد $T(u), T(v)$ باید چه شرایط داشته باشند؟

**حل.** چون هر نقطه روی این صفحه را به شکل $x = su + tv$ نوشتیم پس داریم

$$T(x) = T(su + tv) = sT(u) + tT(v)$$

حال اگر تصویر دو خط u،v مستقل خطی باشند جواب یک صفحه است و اگر دو بردار بدست آمده در یک راستا باشند جواب یک خطی است و اگر هر دوی این بردار ها به یک نقطه نگاشت شوند جواب یک نقطه است. و چون همواره یک تبدیل خطی صفر را به صفر می نگارد پس همه این صفحات و یا خطوط از صفر می گذرند و اگر جواب یک نقطه باشد همان صفر است. ◀

**۱۰.** مشخص کنید هریک از تبدیلات زیر خطی هستند یا نه،در صورتی که خطی باشند ماتریس استاندارد آن ها را نیز بیابید.

**حل.** در هر کدام تبدیلات زیر ابتدا خطی بودن را بررسی می کنیم،برای این موضوع باید دو شرط:

.۱ $T(۰) = ۰$

۲. $T(c\mathbf{u}+d\mathbf{v})=cT(\mathbf{u})+dT(\mathbf{v})$

برقرار باشند ،و در صورت خطی بودن بایستی ماتریس استاندارد تبدیل خطی را بیابیم. برای یا فتن ماتریس استاندارد تبدیل خطی، ماتریس

$$A=[T(\mathbf{e_1})\dots T(\mathbf{e_n})]$$

را می یابیم که $e_j$ ، $j$امین ستون ماتریس همانی است.

الف)

$$f:\mathbb{R}^{۲}\longrightarrow\mathbb{R}^{۲}$$
$$(x,y)\longmapsto(\frac{tan(x)}{tan(x)}+۳x,۲y)$$

**حل.** از انجاییکه۰ عضو این تبدیل نیست زیرا عبارت $tanx$ را صفر می کند و در مخرج قرار دارد پس تبدیل خطی نیست. ►

ب)

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^{۲} &\longrightarrow \mathbb{R}^{۲}\\ (x,y) &\longmapsto (۲x+y,-y)\end{aligned}$$

**حل.** ابتدا بایستی خطی بودن رابررسی کنیم :

$$f(۰,۰)=(۲(۰)+۰,-(۰))=(۰,۰)$$

$$\begin{aligned} f(c(x,y)+d(u,v)) &= f(cx+du,cy+dv)=(۲(cx+du)+cy+dv,-(cy+dv))\\ &= (۲cx+۲du+cy+dv,-cy-dv)\\ =cf(x,y)+df(u,v) &= c(۲x+y,-y)+d(۲u+v,-v)\\ &= (۲cx+۲y+۲du+۲dv,-cy-dv)\end{aligned}$$

پس تساوی برقرار است واز آنجاییکه تبدیل خطی است باید ماتریس استاندارد آن را بیابیم. ابتدا $f(e_۱)$ را می یابیم:

$$f(e_۱)=f(۱,۰)=\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$$

و سپس $f(e_۲)$ را :

$$f(e_۲)=f(۰,۱)=\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix}$$

حال ماتریس استاندارد را تشکیل می دهیم:

$$A=[f(e_۱),f(e_۲)]=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$$

►

ج)اگر تبدیل خطی زیر به شکل:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^{۲} &\longrightarrow \mathbb{R}^{۲}\\ (v_۱,v_۲) &\longmapsto (\frac{v_۱+v_۲}{۲},\frac{v_۱+v_۲}{۲})\end{aligned}$$

آنگاه در مورد $f(f(v_۱,v_۲))$ چه می توان گفت؟(مشخص کنید خطی هست یا نه و درصورت خطی بودن ماتریس استاندارد آن را بیابید.)

**حل.** این قسمت ابتدا تبدیلی معرفی شده سپس آن تبدیل با خودش ترکیب شده و تبدیل جدیدی را به وجود آورده است لازم است به این نکته توجه شود که اگر تبدیلی خطی باشد ترکیب آن با تبدیل خطی دیگری نیز همچنان خطی است.
پس برای اثبات خطی بودن $f(f(v_1, v_2))$ کافی است خطی بودن $f$ را اثبات کنیم.که این قسمت نیز به سادگی همانند مثال قبل اثبات می شود اما برای یافتن ماتریس استاندارد تبدیل ،باید ضابطه آن را بیابیم:

$$f(v_1, v_2) = (\frac{v_1 + v_2}{2}, \frac{v_1 + v_2}{2}) \to f(f(v_1, v_2)) = f(\frac{v_1 + v_2}{2}, \frac{v_1 + v_2}{2}) = (\frac{v_1 + v_2}{2}, \frac{v_1 + v_2}{2})$$

در نتیجه:

$$f(e_1) = f(1, 0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$f(e_2) = f(0, 1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

پس ماتریس استاندار این تبدیل خطی برابراست با:

$$A = [f(e_1), f(e_2)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

►

►

## مسائل پیاده سازی و شبیه سازی

۱. برنامه ای بنویسید که ویژگی های زیر را داشته باشد.

(آ) ماتریس $A_{n\times n}$ و بردار $b_{n\times 1}$ را به عنوان ورودی بگیرد.

(ب) برای دستگاه معادلات $Ax=b$ ماتریس افزوده $[A|b]$ را نمایش دهد .

(ج) دستگاه معادلات $Ax=b$ را با روش حذفی سطری حل نماید.

(د) وضعیت ماتریس را در هر مرحله از عملیات سطری نمایش دهد.

(ه) در نهایت جواب دستگاه معادلات $AX=b$ یعنی بردار $x$ و فرم بالا مثلثی ماتریس افزوده را نمایش دهد.

۲. برنامه خود را برای حل دو دستگاه معادلات زیر امتحان نمایید و نتیجه را ارائه دهید.

(آ)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & + & 3x_5 & = & -3 \\
-2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & + & 4x_5 & = & 19 \\
 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & + & x_5 & = & -2 \\
3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & - & 7x_5 & = & -11 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & 8x_3 & + & 6x_4 & + & x_5 & = & 4
\end{array}$$

(ب)

$$\begin{array}{rcl}
3x_1 - 2x_2 & = & 1 \\
-2x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & -1 \\
-2x_2 + \frac{2}{3}x_3 - 2x_4 & = & -\frac{10}{3} \\
-2x_3 + 3x_4 - 2x_5 & = & -1 \\
-2x_4 + 3x_5 - 2x_6 & = & -1 \\
-2x_5 + 3x_6 & = & 1
\end{array}$$