۱. ماتریس A را در صورت وجود بیابید و تمامی مراحل را قدم به قدم ذکر کنید و اگر وجود ندارد علت آن را ذکر کنید.

الف) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 12 \\ 3 & 6 & 11 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

پاسخ:

برای حل این سوال باید ببینیم که آیا ماتریسی که از چپ ضرب می‌شود (آن را B می نامیم) معکوس‌پذیر هست یا نه. اگر بود کافیست معکوسش را محاسبه کنیم و از سمت چپ در ماتریسی که آن طرف مساوی می‌باشد ضرب کنیم .

الف) با بررسی ستون‌های ماتریس B متوجه می‌شویم که آن‌ها مستقل خطی هستند. پس ماتریس معکوس B را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

و پس از انجام عملیات‌های سطری (ضرب $elementary\ matrix$ ها) به حاصل :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{3} \\ -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

می‌رسیم و حال کافیست حاصل ضرب زیر را بیابیم:

$$A = B^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-9}{2} \\ \frac{2}{3} & 3 \end{bmatrix}$$

ب) از آنجایی که ماتریس B یک ستون تمام صفر دارد، پس معکوس‌پذیر نیست و جوابی برای A پیدا نمی‌کنیم.

۲. تجزیه LU ماتریس A را بدست آورده و سپس معادله‌ی $Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ را حل کنید.

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, [-1] \quad \rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad LUx = b \quad , \quad Ux = y \quad \rightarrow \quad Ly = b$$

$$Ly = b \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Ux = y \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u = 1 \\ v = -1 \\ w = 1 \end{cases}$$

---

۳. فرض کنید A ماتریس زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الف) یک پایه برای range این ماتریس پیدا کنید که شامل ستون های A باشد.

ب) برای ماتریس A مقادیر Rank و Nullity را حساب کنید.

پاسخ:

الف) می‌دانیم که Range ماتریس همان فضای ستونی آن می‌باشد. بنابراین $\text{Range}(A) = \text{Span}\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ که A_i بردار ستونی iام در ماتریس A است. ماتریس A را با عملیات ردیفی به ماتریس زیر تبدیل می‌کنیم و با استفاده از قاعده ۱ های سرگروه (leading) می‌توان ستون های ۱و ۳ که شامل این ۱ ها هستند پایه های فضای ستونی A می‌باشند. $\{A_1, A_3\}$

$$A \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ب) با توجه به بخش قبل می‌دانیم A_1 و A_3 پایه‌ی Range(A) می‌باشند. بنابر این dimension برای Range این ماتریس ۲ می‌باشد و می‌توان نتیجه گرفت Rank ماتریس که همان dimension برای Range ماتریس است برابر با ۲ است. و طبق قضیه rank-nullity داریم: Rank A + Nullity A = 4 بنابراین Nullity ماتریس A برابر با ۲ است.

---

۴. تعیین کنید که هریک از موارد زیر می‌توانند پایه ای برای R^3 باشند یا خیر.

الف)

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

ب)

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$$

پاسخ:

طبق تعریف می‌دانیم یک زیرمجموعه S از یک فضای برداری V را پایه گویند اگر :

۱. S مستقل خطی باشد

۲. S یک spanning set باشد

الف) ترکیب مقابل را در نظر می‌گیریم:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

می‌توان آن را به صورت یک معادله ماتریسی بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

برای حل کردن آن نیاز است تا ماتریس افزونه را تشکیل داده و عملیات ردیفی را روی آن اعمال نماییم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3-R_2]{R_1-2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2-R_3]{R_1+4R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

می‌توان فهمید که پاسخ به صورت $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ میباشد. پس قابل نتیجه‌گیری است که S مستقل خطی است و از آنجایی که S شامل ۳ بردار مستقل خطی در R^3 است می‌توان گفت که یک پایه برای R^3 می‌باشد.

ب) مشابه بخش قبل معادله ماتریسی را ایجاد کرده و ماتریس افزونه را تشکیل می‌دهیم. با اعمال عملیات ردیفی داریم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-7R_1]{R_2-4R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3+6R_2]{R_1-2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

که بیان می‌کند پاسخ به صورت $x_1 = x_3,\ x_2 = -2x_3$ است که دراینجا x_3 یک متغیر آزاد است. بنابراین هیچ پاسخ غیر صفری وجود نداشته و S وابسته خطی است و نمی‌تواند یک پایه برای R^3 باشد.