سوال:

هر یک از بخش های سوال را با ذکر دلیل و توضیح کامل، شرح دهید. (در تمامی قسمت های سوال فرض کنید $AB$ تعریف شده است)

الف) فرض کنید که دو ستون اول $b_1, b_2$ ماتریس $B$ با هم برابر باشند. در رابطه با ماتریس $AB$ چه چیزی می توان گفت؟

ب) فرض کنید که ستون سوم از ماتریس $B$ برابر با مجموع دو ستون اول از این ماتریس باشد. در رابطه با ستون سوم ماتریس $AB$ چه چیزی می توان گفت؟

ج) فرض کنید که ستون دوم از ماتریس $A^T$ تماما صفر باشد. در اینصورت در رابطه با ماتریس $AB$ چه چیزی می توان گفت؟

د) فرض کنید که آخرین ستون از ماتریس $AB$ تماما صفر است در صورتی که ماتریس $B$ دارای هیچ ستون صفری نمی باشد. در رابطه با ستون های ماتریس $A$ چه چیزی می توان گفت؟

پاسخ:

**THEOREM 5**

If $A$ is an $m \times n$ matrix, $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ are vectors in $\mathbb{R}^n$, and $c$ is a scalar, then:

a. $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$;

b. $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$.

الف) از آنجایی که بردار های $b_1, b_2$ با هم برابر هستند و همچنین همانطور که از تعریف ضرب ماتریسی داریم ($AB = A[b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_p] = [Ab_1 \quad Ab_2 \quad \cdots \quad Ab_p]$)، پس $Ab_1 = Ab_2$ خواهد بود. بنابراین می توان گفت که دو ستون اول ماتریس $AB$ با هم برابر خواهند بود.

ب) ماتریس $B$ را به صورت $B = [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \cdots \quad b_p]$ در نظر بگیرید. بنابر تعریف ضرب ماتریسی، ستون سوم ماتریس $AB$ برابر با $Ab_3$ خواهد بود. بنا به فرض مساله داریم، $b_3 = b_1 + b_2$ . بر اساس قواعد ضرب ماتریس در بردار می توان نوشت $Ab_3 = A(b_1 + b_2) = Ab_1 + Ab_2$ . بنابراین ستون سوم ماتریس $AB$ برابر با مجموع ستون های اول و دوم این ماتریس خواهد بود.

ج) همانطور که از تعریف ترانهاده(*Transpose*) یک ماتریس می دانیم، در فرایند تبدیل، جای ردیف ها و ستون های ماتریس اولیه عوض می شود. بنابراین ستون دوم در ماتریس $A^T$ معادل با دومین ردیف در ماتریس $A$ می شود. بنابراین می توان بیان کرد که ردیف دوم از ماتریس $A$ برابر با صفر است.

**ROW–COLUMN RULE FOR COMPUTING $AB$**

If the product $AB$ is defined, then the entry in row $i$ and column $j$ of $AB$ is the sum of the products of corresponding entries from row $i$ of $A$ and column $j$ of $B$. If $(AB)_{ij}$ denotes the $(i, j)$-entry in $AB$, and if $A$ is an $m \times n$ matrix, then

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

بنابر روش ردیفی-ستونی برای محاسبه $AB$ حاصل ضرب ردیف $i$ ام از ماتریس $A$ در ستون $j$ ام از ماتریس $B$، عنصر $(AB)_{ij}$ را حاصل می شود. (عنصری از $AB$ که در ردیف $i$ ام و ستون $j$ ام قرار دارد.) بنابراین تمام عناصری که در دومین ردیف از $AB$ قرار دارند، از حاصل ضرب دومین ردیف ماتریس $A$ در ستون های ماتریس $B$ به دست می آید. بنابراین می توان نتیجه گرفت که ردیف دوم ماتریس $AB$ برابر صفر خواهد بود.

د) $b_p$ را به عنوان آخرین ستون ماتریس $B$ در نظر بگیرید. بنابر فرض سوال، آخرین ستون ماتریس $AB$ برابر صفر است، بنابراین $Ab_p = 0$ خواهد بود. همانطور که از فرض سوال برداشت می شود، $b_p$ هم برابر صفر نخواهد بود چرا که طبق فرض سوال، تمامی ستون های ماتریس $B$ غیرصفر است. بنابر این $Ab_p = 0$ یک رابطه وابستگی خطی(*Linear Dependence Relation*) برای ستون های ماتریس $A$ خواهد بود، در نتیجه ستون های ماتریس $A$ وابسته خطی خواهد بود.