

سوال (مشخص کنید هر کدام از زیر فضاهای زیر چند بعدی هستند

الف) تمام بردارها به شکل (a, b, c, d) که $d = a + b$

ب) تمام بردارها به شکل (a, b, c, d) که $d = a + b$ و $c = a - b$

ج) تمام بردارها به شکل (a, b, c, d) که $a = b$

د) تمام بردارها به شکل $(a + c, a - b, b + c, b - a)$

جواب (

الف) اگر به جای a, b, c, d را قرار دهیم داریم:

$$\{(a, b, c, a+b)\} = \text{span}\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$$

با توجه به این که بردار آفراین سه تایی (d) یک ترکیب خطی از ۳ بردار دیگر است،
پس بدان آن را حذف کرد.

۳ بردار باقیمانده یک پایه را تشکیل می دهند (اثبات از طریق نشان دادن استقلال خطی)

پس بعد زیر فضا ۳ می باشد.

ب) همانند الف، بردار $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ را می‌توانیم به علت این که ترکیب خطی از ۲ بردار اول می‌تواند حذف کنیم، و دو بردار a و b تشکیل یک پایه می‌دهند بنابراین بعد این زیرفضا $\underline{2}$ می‌باشد.

ج) بردار اول یک ترکیب خطی از ۳ بردار دیگر است $(1a + 0b + 0c = a)$ بنابراین می‌توان آن را حذف کرد.

۳ بردار باقی‌مانده تشکیل یک پایه می‌دهند بنابراین بعد زیرفضا $\underline{3}$ می‌باشد.

د) مجموعه $\{(a+c, a-b, b+c, b-a)\}$ می‌تواند span مجموعه مستقل

خطی $\{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ باشد بنابراین بعد زیرفضا $\underline{4}$ می‌باشد.