$\mathbb{R}^2$ یا همان صفحه $x - y$ که یک فضای برداری است را در نظر بگیرید. یک خط $\ell \subset \mathbb{R}^2$ با شیب m و عرض از مبدا b در این فضا به صورت زیر تعریف می شود:

$$\ell = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b\}$$

نشان دهید که ℓ یک زیرفضا از $\mathbb{R}^2$ است اگر و تنها اگر $b = 0$.

پاسخ:

در ابتدا باید نشان دهیم که اگر $b \neq 0$، آنگاه ℓ یک زیرفضا نخواهد بود و به طور مشابه باید اثبات کنیم که اگر $b = 0$، آنگاه ℓ یک زیرفضا است.

- می‌دانیم برای اینکه ℓ یک زیرفضا باشد باید وکتور $(0,0)$ در آن باشد، که اگر این نقطه را در معادله این خط قرار دهیم در میابیم که $b = 0$. بنابراین اگر $b \neq 0$ ، آنگاه ℓ یک زیرفضا نخواهد بود.

حال شروط زیر فضا بودن را برای خط ℓ بررسی میکنیم:

1- همانطور که در بالا نشان دادیم $(0,0) \in \ell$ اگر *b=0*.

2- حال باید نشان دهیم که نقاط روی این خط تحت عملگر جمع بسته اند، برای این کار دو نقطه $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \ell$ را در نظر بگیرید، آنگاه داریم:

$$y_1 + y_2 = mx_1 + mx_2 = m(x_1 + x_2)$$

بنابراین $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ نیز روی این خط قرار دارد.

پس نقاط روی این خط تحت جمع بسته اند و شرط دوم نیز برقرار است.

3- و در آخر باید نشان دهیم که نقاط روی این خط تحت عملگر ضرب نیز بسته اند یعنی نشان دهیم $c(x_1, y_1) = (cx_1, cy_1)$ برای نقاط روی خط ℓ برقرار است:

$$cy_1 = c(mx_1) = m(cx_1)$$

پس بنابراین $(cx_1, cy_1) \in \ell$.

از آنجا که 3 شرط بالا تنها در صورتی برقرار است که $b \neq 0$، پس خط ℓ تنها در صورتی یک زیرفضا خواهد بود اگر و تنها اگر $b \neq 0$.