دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

کاربرد های جبر خطی

نیم‌سال دوم ۹۶ــ۹۷

مدرس: دکتر امیرمزلقانی

پاسخ تمرین های فصل۳و۴

توجه:

- دانشجویان گرامی پاسخ های سوالات را به دقت بخوانید و پاسخ های خود مقایسه کنید تا در صورتی که سوالی را نتوانسته اید حل کنید یا غلط حل کرده اید متوجه آن شوید.
- روز شنبه ۵ اردیبهست ماه در کلاس درس کوییزی از این سوالات خواهید داشت.

مسئله‌ی ۱ . درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید و دلیل آن را بیان کنید.

(از بین ۲۱ مورد ۱۵ مورد را به اختیار انتخاب کرده و مشخص کنید.)

آ)

$$det(S^{-۱}AS) = det(S^{-۱})det(A)det(S) = \frac{۱}{det(S)}det(A)det(S) = det(A)$$

ب) مثال نقض:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = ۱$$

$$۴ \times A = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} \rightarrow det(۴A) = ۱۶ \neq ۴$$

ج)

$$A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, B = A^T$$

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \rightarrow det(AB) = ۰$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۱ \end{bmatrix} \rightarrow det(BA) = ۱$$

توجه: تنها در صورتی که A،B مربعی باشند، داریم:

$$det(AB) = det(A)det(B) = det(B)det(A) = det(BA)$$

د) مثال نقض:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix} \rightarrow det(AB - BA) = det(\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}) = -۴$$

ه) باتوجه به اینکه معکوس پذیری برای ماتریس های مربعی تعریف می شود: ماتریس A معکوس ناپذیر است اگر و تنها اگر دترمینان آن صفر باشد پس:

$$det(A) = ۰, det(AB) = det(A)det(B) \rightarrow det(AB) = ۰ \times det(B) = ۰$$

پس ماتریس AB نیز معکوس پذیر نمی باشد.

و) باتوجه به اینکه دترمینان برای ماتریس های مربعی تعریف می شود:

$$det(AA^T) = ۱ \rightarrow = det(A)det(A^T) = det(A)^۲ = ۱ \rightarrow det(A) = \pm ۱$$

ز)

$$det(A) = det(A^T) = det(-A) = (-۱)^n det(A)$$

اگر n فرد باشد:

$$(-۱)^n det(A) = -det(A)$$
$$\rightarrow det(A) = -det(A) \rightarrow det(A) = ۰$$

اگر n زوج باشد:

$$(-۱)^n det(A) = det(A)$$
$$\rightarrow det(A) = det(A)$$

و الزامی به صفر بودن دترمینان A وجود ندارد.

ح)

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A), det(A) = 1 \to A^{-1} = Adj(A)$$

با توجه به اینکه داریه های ماتریس A اعداد صحیح هستند، پس دترمینان آن و دترمینان هر زیر ماتریس از آن نیز عددی صحیح خواهد بود پس ماتریس cofactor ماتریس A نیز از درایه های صحیح تشکیل شده است و در نتیجه عناصر adjugate ماتریس A نیز اعدادی صحیح هستند.

$$(Adj_{ij} = C_{ji} = (-1)^{i+j} M_{ji})$$

ط)

$$det A^{-1} = det \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{ad-bc}{(ad-bc)^2} = \frac{1}{(ad-bc)}$$

ی) اگر ماتریس A مربعی نباشد $det(A^T A) \neq det(A^T) det(A)$ پس رابطه فوق برای هر ماتریس P صدق نمی کند.

ک) مثال نقض:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = 1 \times (-3) + 2 \times 6 + 3 \times (-3) = 0$$

ل) مثال نقض:

$$det(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}) = 2$$

م) (I)

$$(A^T)^{-1} = \frac{adj(A^T)}{det(A^T)} \to adj(A^T) = (A^T)^{-1} det(A^T) = (A^{-1})^T det(A)$$

(II)

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)} \to adj(A) = A^{-1} det(A) \to (adj(A))^T = (A^{-1} det(A))^T = det(A)(A^{-1})^T$$

$$(I, II) \to adj(A^T) = (adj(A))^T$$

ن) اگر A معکوس پذیر باشد: $A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)}$

$$\to (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A^{-1})$$

مسئله‌ی ۲. در هر مورد مشخص کنید آیا زیر مجموعه ی داده شده یک زیر فضا از فضای برداری مشخص شده می باشد یا خیر.

حل. برای حل این سوال با فرض اینکه H زیر فضایی از V باشد آنگاه باید در هر مورد ثابت کنیم:

۱) بردار صفر باید عضو H می باشد.

۲) H باید نسبت به جمع بردار ها بسته باشد. یعنی برای هر Vو عضو H، $v+u$ هم باید عضو H باشد.

۳) H باید تحت ضرب عددی (sacalrs) بسته باشد.یعنی برای هر u عضو H و هر اسکالرc بردار cu عضو H باشد.

۱. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\le 4\}$ در فضای برداری $\mathbb{R}^2$

حل. به وضوح $(0,0)$ عضو این مجموعه است زیرا $4 \le 0^2+0^2$. حال باید شرط دوم را ثابت کنیم، برای این فرض کنید $x^2+y^2\le 4$ و $x'^2+y'^2\le 4$ آنگاه باید ثابت کنیم : $(x+x')^2+(y+y')^2\le 4$
که این موضوع مثلا برای $(1,1)$ ،$(2,2)$ هر دو عضو این زیر فضا هستند اما $(3,3)$ در شرط صدق نمی کند پس زیر فضا نیست.

▶

۲. $\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3|a+b+2c=0\}$ در فضای برداری $\mathbb{R}^3$.

حل. به وضوح $(0,0,0)$ عضو این زیر فضا است زیرا $0+0+2\times 0=0$ حال فرض کنید $(a,b,c),(a',b',c')$ عضو این زیر فضا باشند آنگاه $(a+a',b+b',c+c')$ نیز عضو این زیر فضا است زیرا:

$$a+a'+b+b'+2(c+c')=a+b+2c+a'+b'+2c'=0+0=0$$

حال باید ثابت کنیم اگر k اسکالر باشد و (a,b,c) عضو این زیر فضا آنگاه : $k(a,b,c)$ نیز عضو این زیر فضا هست که این نیز برقرار است زیرا:

$$ka+kb+2kc=k(a+b+2c)=k\times 0=0$$

▶

۳. $\{A\in M_n(\mathbb{R})|A^2=A\}$ در $M_n(\mathbb{R})$. (منظور از $M_n(\mathbb{R})$ مجموعه تمام ماتریس های $n\times n$ با درایه هایی از مجموعه اعداد حقیقی است.)

حل. به وضوح ماتری صفر عضو این زیر فضا است،حال باید ثابت کنیم اگر A و B دو ماتریس باشند که عضو این زیر فضا هستند انوقت برای زیر فضا بودن باید نشان دهیم

$$(A+B)^2=A+B$$

فرض کنید $A=I$ می دانیم $I^2=I$ پس I عضو این زیر فصا است. اما اگر فرض کنیم $A=I,B=I$ آنگاه:

$$(A+B)^2=(2I)^2=4I\neq 2I=I+I=A+B$$

پس این زیر مجموعه یک زیر فضای برداری نیست. ▶

۴. $\{p(x)|2p(0)=p(1),p(x)\in\mathbb{P}[x]\}$ در فضای برداری $\mathbb{P}[x]$ (تمامی چند جمله های حداکثر از درجه n با ضرایب حقیقی را با نماد $\mathbb{P}_n[x]$ نشان می دهیم و همچنین مجموعه تمام چند جمله ها با ضرایب حقیقی را با $\mathbb{P}[x]$ نشان می دهیم)

حل. برای حل این سوال $p(x)=0$ عضو این فضای برداری است زیرا : $2p(0)=p(1)=0$ حال فرض کنید $p_1(x),p_2(x)$ دو عضو این زیر فضا باشند انگاه:

$$2(p_1(0)+p_2(0))=2p_1(0)+2p_2(0)=p_1(1)+p_2(1)$$

پس شرط دوم نیز برقرار است. حال برای اثبات شرط سوم فرض کنید k یک اسکالر باشد آنگاه باید ثابت کنیم $kp_1(x)$ عضو این زیر فضاس که این موضوع نیز قابل اثبات است زیرا:

$$2kp_1(0)=k2p_1(0)=kp_1(1)$$

پس مجموعه فوق یک زیر فضاس. ▶

۵. $\{p(x)|p(x)=a+x^۲, a\in\mathbb{R}\}$ در فضای برداری $\mathbb{P}_۳[x]$.

حل. این مجموعه زیر فضا نمی باشد برای مثال دو بردار $x^۲+۱$ و $x^۲+۲$ را در نظر بگیرید آنگاه مجموع این دو بردار به شکل $۲x^۲+۳$ خواهد بود که به شکل $a+x^۲$ نمی باشد. ▶

▶

مسئله‌ی ۳. اگر $\mathbb{P}[x], \mathbb{P}_n[x]$ طبق تعریف بالا فضا های برداری با ضرایب حقیقی باشند آنگاه :

۱. نشان دهید اگر $\{۱, x, x^۲, \cdots, x^{n-۱}\}$ پایه ای برای $\mathbb{P}_n[x]$ باشد آنگاه:

$$\{۱, (x-a), (x-a)^۲, \cdots, (x-a)^{n-۱}\}, \qquad a\in\mathbb{R}$$

نیز پایه ای برای $\mathbb{P}_n[x]$ است.

حل. از انجاییکه $\{۱, x, x^۲, \cdots, x^n\}$ یک پایه برای $\mathbb{P}_n[x]$ است کافی است ثابت کنیم :

$$\{۱, (x-a), (x-a)^۲, \cdots, (x-a)^{n-۱}\}$$

این مجموعه مستقل خطی است زیرا در صورت مستقل خطی بودن چون تعداد اعضای دو مجموعه برابر است پس $\{۱, (x-a), (x-a)^۲, \cdots, (x-a)^{n-۱}\}$ یک پایه است.برای اثبات مستقل خطی بودن ضرایب $\{\lambda_۰, \lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_{n-۱}\}$ در نظر می گیریم باید ثابت کنیم اگر:

$$\lambda_۰ + \lambda_۱(x-a) + \lambda_۲(x-a)^۲ + \cdots + \lambda_{n-۱}(x-a)^{n-۱} = ۰$$

آنگاه:

$$\lambda_۰ = \lambda_۱ = \lambda_۲ = \cdots = \lambda_{n-۱} = ۰$$

برای اثبات این موضوع یکبار $x=a$ در نظر می گیریم آنگاه $\lambda_۰ = ۰$ می شود،در مرحله بعد از $x-a$ فاکتور می گیریم و نتیجه می گیریم $\lambda_۱ = ۰$ و همینطور الی آخر،پس استقلال خطی ثابت شد

$$\{۱, (x-a), (x-a)^۲, \cdots, (x-a)^{n-۱}\}$$

پایه است.

▶

۲. مختصات

$$f(x) = a_۰ + a_۱x + \cdots + a_{n-۱}x^{n-۱} \in \mathbb{P}_n[x]$$

را نسبت به پایه

$$\{۱, (x-a), (x-a)^۲, \cdots, (x-a)^{n-۱}\}, \qquad a\in\mathbb{R}$$

بیابید.

حل. برای پیدا کردن ضرایب فرض کنیم $\lambda_۰, \lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_{n-۱}$ ضرایب مورد نظر ما بر اساس پایه $\{۱, (x-a), (x-a)^۲, \cdots, (x-a)^{n-۱}\}$ باشند آنگاه داریم:

$$f(x) = a_۰ + a_۱x + \cdots + a_{n-۱}x^{n-۱} = \lambda_۰ + \lambda_۱(x-a) + \cdots + \lambda_{n-۱}(x-a)^{n-۱}$$

حال $x=a$ قرار می دهیم آنگاه $f(a)=\lambda_۰$ حال از دو طرف تساوی مشتق می گیریم:

$$f'(x) = a_۱ + ۲a_۲x + \cdots + n-۱a_{n-۱}x^{n-۲} = \lambda_۱ + ۲\lambda_۲(x-a) + \cdots + (n-۱)\lambda_{n-۱}(x-a)^{n-۲}$$

پس نتیجه می گیریم $f'(a)=\lambda_۱$ در حالت کلی نتیجه می شود ضرایب λ به صورت $(f(a), \frac{f'(a)}{۱!}, \cdots, \frac{f^{(n-۱)}(a)}{(n-۱)!})$ خواهد بود که $f^{(i)}$ مشتق مرتبه i ام می باشد. ▶

۳. فرض کنید $a_۱, a_۲, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ و متمایز باشند.برای هر $i = ۱, ۲, \cdots, n$

$$f_i(x) = (x - a_۱)\dots(x - a_{i-۱})(x - a_{i+۱})\dots(x - a_n)$$

را در نظر بگیرید،نشان دهید $\{f_۱(x), f_۲(x), \cdots, f_n(x)\}$ نیز پایه ای برای $\mathbb{P}_n[x]$ است.

حل. از انجاییکه تعداد اعضای $\{f_۱(x), f_۲(x), \cdots, f_n(x)\}$ برابر تعداد اعضای پایه است برای اثبات پایه بودن کافی است ثابت کنیم این مجموعه مستقل خطی است یعنی به ازای هر $\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_n$ اگر

$$\alpha_۱ f_۱(x) + \alpha_۲ f_۲(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = ۰$$

باشد انگاه α_i ها مساوی صفر هستند برای اثبات این موضوع a_i را در این عبارت جایگذاری می کنیم آنگاه داریم :

$$\alpha_۱ f_۱(a_i) + \cdots + \alpha_i f(a_i) + \cdots + \alpha_n f_n(a_i) = ۰$$

در این صورت به ازای هر f_j که $i \neq j$ ، $f_j(a_i) = ۰$ پس از اینجا نتیجه می شود تمامی α_i ها مساوی صفر هستند و استقلال خطی ثابت می شوند که پایه بودن را نتیجه می دهد. ◀

مسئله‌ی ۴. فرض کنید $W_۱, W_۲$ زیر فضا های فضای برداری V باشند، تعریف می کنیم :

$$W_۱ + W_۲ = \{w_۱ + w_۲ | w_۱ \in W_۱, w_۲ \in W_۲\}$$

.

۱. نشان دهید :

$$W_۱ + W_۲ + \cdots + W_n = span(\bigcup_{i=۱}^{n} W_i)$$

حل.

$$v \in W_۱+W_۲+\cdots+W_n \longleftrightarrow \exists\ w_۱, w_۲, \cdots, w_n \quad w_۱ \in W_۱, w_۲ \in W_۲, \cdots w_n \in W_n \quad v = w_۱+w_۲+\cdots+w_n$$

$$\longleftrightarrow w_۱, w_۲, \cdots, w_n \in \bigcup_{i=۱}^{n} W_i \longrightarrow w_۱ + w_۲ + \cdots + w_n \in span(\bigcup_{i=۱}^{n} W_i) \longleftrightarrow v \in span(\bigcup_{i=۱}^{n} W_i)$$

◀

۲. نشان دهید $W_۱ \cap W_۲, W_۱ + W_۲$ زیر فضای V هستند و همچنین نشان دهید:

$$W_۱ \cap W_۲ \subseteq W_۱ \cup W_۲ \subseteq W_۱ + W_۲$$

.

حل. می دانیم $۰ \in W_۱, ۰ \in W_۲$ پس ۰ عضو $W_۱ + W_۲$ هست از سوی دیگر اگر $v_۱ \in W_۱ + W_۲, v_۲ \in W_۱ + W_۲$ باشد،آنگاه طبق تعریف داریم :

$$\exists w_۱ \in W_۱, w_۲ \in W_۲ \ \ v_۱ = w_۱ + w_۲ \quad , \quad \exists w'_۱ \in W_۱, w'_۲ \in W_۲ \ \ v_۲ = w'_۱ + w'_۲$$

در نتجه:

$$v_۱ + v_۲ = w_۱ + w_۲ + w'_۱ + w'_۲ = \underbrace{w_۱ + w'_۱}_{\in W_۱} + \underbrace{w_۲ + w'_۲}_{\in W_۲} \longrightarrow v_۱ + v_۲ \in W_۱ + W_۲$$

همچنین باید ثابت کنیم اگر $v \in W_۱ + W_۲$ باشد آنگاه kv هم چنین است که k یک اسکالر است.

$$\exists w_۱ \in W_۱, w_۲ \in W_۲ \;\; v = w_۱ + w_۲ \longrightarrow kv = \underbrace{kw_۱}_{\in W_۱} + \underbrace{kw_۲}_{\in W_۲} \longrightarrow kv \in W_۱ + W_۲$$

پس $W_۱ + W_۲$ یک زیر فضای V است.

حال باید ثابت کنیم $W_۱ \cap W_۲$ زیر فضای V است. می دانیم صفر عضو هر دو زیر فضا است پس صفر در اشتراک آن ها نیز وجود دارد،حال باید ثابت می کنیم که :

$$v_۱ \in W_۱ \cap W_۲, v_۲ \in W_۱ \cap W_۲ \longrightarrow v_۱ \in W_۱ \wedge v_۱ \in W_۲, v_۲ \in W_۱, v_۲ \in W_۲$$

$$\longrightarrow v_۱ + v_۲ \in W_۱ \wedge v_۱ + v_۲ \in W_۲ \longrightarrow v_۱ + v_۲ \in W_۱ \cap W_۲$$

به همین شکل ثابت می شود ضرب یک اسکالر در اعضای $W_۱ \cap W_۲$ عضو $W_۱ \cap W_۲$ است پس زیر فضا بودن اشتراک دو زیر فضا نیز ثابت می شود.

اکنون باید ثابت کنیم رابطه بالا برقرار است بدیهی است که اشتراک دو زیر فضا زیر مجموعه اجتماع آن است (این رابطه برای هر دو مجموعه ای فارغ از زیر فضا بودن یا نبودن صادق است) کافی است ثابت کنیم:

$$W_۱ \cup W_۲ \subseteq W_۱ + W_۲$$

برای اثبات این موضوع از رابطه قسمت ۱ استفاده می کنیم، طبق قسمت ۱ می دانیم:

$$W_۱ + W_۲ = span(W_۱ \cup W_۲)$$

واضح است که اگر مجموعه ای به شکل A داشته باشیم آنگاه:

$$A \subseteq span(A)$$

زیرا :

$$span(A) = \lambda_۱ a_۱ + \lambda_۲ a_۲ + \cdots + \lambda_n a_n \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}, a_i \in A$$

و فرض کنید در هر مرحله $(\lambda_i = ۱)$ و $(\lambda_j = ۰, j \neq i)$ در این صورت $A \subseteq span(A)$. ◀

۳. نشان دهید :

$$dim(W_۱ + W_۲) = dim(W_۱) + dim(W_۲) - dim(W_۱ \cap W_۲)$$

.

حل. فرض کنیم :

$$diamW_۱ = n, dimW_۲ = m, dim(W_۱ \cap W_۲) = t$$

همچنین فرض کنید: $\{u_۱, u_۲, \cdots, u_t\}$ یک پایه برای $W_۱ \cap W_۲$ باشد،پس می توان آنرا به یک پایه $B_۱ = \{u_۱, u_۲, \cdots, u_t, v_۱, v_۲, \cdots, v_{n-t}\}$ از $W_۱$ و همچنین $B_۲ = \{u_۱, u_۲, \cdots, u_t, w_۱, w_۲, \cdots, w_{m-t}\}$ از $W_۲$ توسعه داد.ثابت می کنیم:

$$B = \{u_۱, u_۲, \cdots, u_t, v_۱, v_۲, \cdots, v_{n-t}, w_۱, w_۲, \cdots, w_{m-t}\}$$

یک پایه برای $W_۱ + W_۲$ است.که رد این صورت حکم مسئله نیز ثابت می شود ،برای اثبات پایه بودن باید استقلال خطی و مولد بودن را ثابت می کنیم(مولد بودن یعنی ترکیب های خطی یک مجموعه تمامی اعضای آن مجموعه را تولید می کنند که در واقع بیانگر این است که اگر $if \;\; A \subseteq B \rightarrow span(A) = B$ در بحث ما می گوییم بردار هایی مولد یک فضا یا زیر فضا هستند که تمامی اعضای آن ها را بتوان با ترکیب خطی این بردار ها تولید کرد.)

استقلال خطی :

$$\sum_{i=۱}^{t} \alpha_i u_i + \sum_{i=۱}^{n-t} \beta_i v_i + \sum_{i=۱}^{m-t} \gamma_i w_i = ۰ (\star) \longrightarrow \underbrace{\sum_{i=۱}^{t} \alpha_i u_i + \sum_{i=۱}^{n-t} \beta_i v_i}_{\in W_۱} = \underbrace{\sum_{i=۱}^{m-t} -\gamma_i w_i}_{\in W_۲}$$

$$\longrightarrow \sum_{i=۱}^{m-t} -\gamma_i w_i \in W_۱ \cap W_۲$$

پس وجود دارد $\mu_۱, \mu_۲, \cdots, \mu_t$ به طوری که:

$$\sum_{i=۱}^{m-t} -\gamma_i w_i = \sum_{i=۱}^{t} \mu_i u_i$$

$$\longrightarrow \sum_{i=۱}^{m-t} \gamma_i w_i + \sum_{i=۱}^{t} \mu_i u_i = ۰$$

چون ترکیب خطی فوق صفر ، μ_i ها ، w_i ها یک پایه برای $w_۲$ و ذا مستقل خطی هستند
پس : $\forall i \;\; \mu_i = ۰, \forall i \;\; \gamma_i = ۰$ با جایگذاری در $\star$ داریم :

$$\sum_{i=۱}^{t} u_i + \sum_{i=۱}^{n-t} = ۰$$

یعنی ترکیب خطی از اعضای پایه $W_۱$ صفر شده است ،پس :

$$\forall i \alpha_i = ۰, \forall i \beta_i = ۰$$

پس B مستقل خطی است.
مولد بودن: باید ثابت کنیم هر $w \in W_۱ + W_۲$ را می توان به صورت ترکیب خطی B نوشت.
می دانیم طبق تعریف :

$$\exists w'_۱ \in W_۱, w'_۲ \in W_۲ \quad w = w'_۱ + w'_۲$$

$$\longrightarrow w'_۱ = \alpha_۱ u_۱ + \alpha_۲ u_۲ + \cdots + \alpha_t u_t + \alpha_{t+۱} v_۱ + \alpha_{t+۲} v_۲ + \cdots + \alpha_n v_{n-t}$$

$$\longrightarrow w'_۲ = \beta_۱ u_۱ + \beta_۲ u_۲ + \cdots + \beta_t u_t + \beta_{t+۱} w_۱ + \beta_{t+۲} w_۲ + \cdots + \beta_m w_{m-t}$$

$$\begin{aligned}\longrightarrow w = w'_۱ + w'_۲ =& (\alpha_۱ + \beta_۱) u_۱ + (\alpha_۲ + \beta_۲) u_۲ + \cdots + (\alpha_t + \beta_t) u_t + \\ & \alpha_{t+۱} v_۱ + \alpha_{t+۲} v_۲ + \cdots + \alpha_n v_{n-t} + \beta_{t+۱} w_۱ + \beta_{t+۲} w_۲ + \cdots + \beta_m w_{m-t}\end{aligned}$$

پس توانستیم w را برحسب B بنویسیم و در نتیجه B مولد و مستقل خطی است و پایه است و حکم ثابت می شود.
▶

۴. نتیجه گیری قسمت ۲ را با استفاده از دو خط که از مبدا مختصات xy می گذرند توجیه کنید.

حل. فرض کنید دو خط متقاطع داریم که در یک نقطه مشترکند،خط اول را با $W_۱$ و خط دوم را با $W_۲$ نشان می دهیم. آنگاه : $W_۱ \cap W_۲$ یک نقطه خواهد بود،و $W_۱ \cup W_۲$ از خود این دو خط متقاطع تشکیل خواهد شد.در این صورت $W_۱ + W_۲$ صفحه گذرنده از این دو خط خواهد بود.که رابطه ۲ به وضوح با این فرضیات مشخص است.
▶

۵. درستی یا نادرستی تساوی زیر را بررسی کنید در صورت درست بودن اثبات و در صورت نادرست بودن مثال نقض بزنید:

$$W_۳ \cap (W_۱ + W_۲) = (W_۳ \cap W_۱) + (W_۳ \cap W_۲)$$

.

حل. برای اینکه نشان دهیم این تساوی برقرار نیست،فرض می کنیم $W_۱, W_۲, W_۳$ سه خط هستند که در مبدا مختصات مشترکند.مثلا فرض کنید $W_۱$ محور x ها ، $W_۲$ محور y ها و $W_۳$ نیمساز ناحیه اول و سوم است، در این صورت $W_۳ \cap (W_۱ + W_۲)$ یک خط خواهد بود ولی $(W_۳ \cap W_۱) + (W_۳ \cap W_۲)$ همان نقطه صفر خواهد بود پس مشاهده می کنید که تساوی برقرار نیست.

▶

۶. اگر $W_۱ \cap W_۲ = \{۰\}$ باشد آنگاه به $W_۱ + W_۲$ جمع مستقیم نیز می گویند و آن را با $W_۱ \bigoplus W_۲$ نشان می دهند،ثابت کنید اگر $V_۱$ زیر فضایی از فضای برداری V باشد و اگر زیر فضای برداری یکتای $V_۲$ موجود باشد که $V = V_۱ \bigoplus V_۲$ آنگاه $V_۱ = V$.

حل. برای اثبات این سوال به برهان خلف فرض کنید $V_۱ \neq V$ در این صورت $dimV_۱ < dimV$ فرض کنید

$$\{\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+۱}, \cdots, \alpha_n\}$$

یک پایه برای V باشد،که $\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_m \in V_۱$ (این موضوع ممکن است زیرا در واقع می توانیم یک پایه برای $V_۱$ در نظر بگیریم و آن را به پایه ای از V گسترش دهیم.) فرض کینم $V_۲ = span(\alpha_{m+۱}, \cdots, \alpha_n)$ و $V_۳ = span(\alpha_{m+۱} + \alpha_۱, \cdots, \alpha_n)$ در این صورت $V_۲, V_۳$ با $V_۱$ عضو مشتر ک ندارند که در این صورت $V = V_۱ \bigoplus V_۲$ و $V = V_۱ \bigoplus V_۳$ که $V_۲ \neq V_۳$ و این با یکتایی وجود عضوی مانند $V_۲$ در تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم درست است.

►

مسئله‌ی ۵. فرض کنید $T : V \longrightarrow W$ نگاشت خطی باشد، $Nul \ \ T = \{۰\}$ اگر و فقط اگر T هر زیر مجموعه مستقل خطی را به زیر مجموعه مستقل خطی نگاشت کند. علاوه بر ویژگی های بالا اگر A ماتریس استاندارد تبدیل T باشد که به ازای هر b که b مختصات برداری در W است وجود داشته باشد x ای که مختصات برداری در V باشد که $Ax = b$ باشد آنگاه T هر پایه V را به پایه ای در W می نگارد.

حل. فرض کنید مجموعه مستقل خطی $\{v_۱, v_۲, \cdots, v_n\}$ را تحت T نگاشت کنیم می خواهیم ثابت کنیم بردار های نگاشت شده مستقل خطی هستند پس داریم:

$$\alpha_۱ T(v_۱) + \alpha_۲ T(v_۲) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = ۰ \longrightarrow T(\alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲ v_۲ + \cdots + \alpha_n v_n) = ۰ \longrightarrow \alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲ v_۲ + \cdots + \alpha_n v_n = ۰$$

چون v_i ها مستقل خطی هستند پس:

$$\forall i \quad \alpha_i = ۰$$

در نتیجه استقلال خطی نگاشت یک مجموعه مستقل خطی ثابت می شود.برای اثبا عکس قضیه به برهان خلف فرض کنید وجود داشته با شد برداری مثل $v \neq ۰$ که $T(v) = ۰$ در این صورت مجموعه $\{v\}$ مستقل خطی است در حالی که تصویر آن صفر می شود که وابسته خطی است و این با فرض تناقش دارد پس فرض خلف باطل و حکم درست است. برای اثبات قسمت دوم ابتدا ثابت می کنیم اگر $T : V \longrightarrow W$ تبدیلی پوشا است اگر و فقط اگر هر هر مولد V به مولدی از W بنگارد.ابتدا این لم را ثبات می کنیم، فرض کنیم T مولدی از V را به مولدی در W ننگارد و فرض کنید $C = \{v_۱, v_۲, \cdots, v_n\}$ مجموعه مولد مورد نظر ما باشد.از انجاییکه C مولد است پس :

$$\forall v \in V \quad v = \alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲ v_۲ + \cdots + \alpha_n v_n \longrightarrow T(v) = \alpha_۱ T(v_۱) + \alpha_۲ T(v_۲) + \cdots + \alpha_n T(v_n) \qquad \star$$

پس تصویر هر بردار در V را می توان به صورت ترکیب خطی بردار های

$$C' = \{T(v_۱), T(v_۲), T(v_۳), \cdots, T(v_n)\}$$

نوشت اما از انجاییکه C' مولد نیست وجود دارد برداری مثل w که نمی توان آن را به صورت ترکیب خطی بردار های C' نوشت پس هیچکدام از برداری های V به w نگاشت نمی شود و این با پوشا بودن T در تناقض است. برای اثبات عکس لم از $\star$ استفاده می کنیم و ثابت می کنیم که پوشاست. حال برای اثبات قسمت دوم سوال چون تساوی $Ax = b$ به ازای هر b جواب دارد پس پوشاست و از پوشایی نتیجه می شود که تبدیل خطی T هر مولد را به مولد می نگارد و از قسمت قبل دیدیم هر پایه را به پایه می نگارد پس در نتیجه T هر پایه را به پایه می نگارد.

►

مسئله‌ی ۶. فرض کنید $T:V \longrightarrow V$ تبدیل خطی رو فضای متناهی البعد V باشد و $T^{۲}=۰$. ثابت کنید $۲rank(A) \leq dim(V)$ (A ماتریس استاندارد تبدیل T است.)

حل. برای اثبا این موضوع می دانیم برای هر تبدیل خطی مانند $T:V \longrightarrow W$ داریم :

$$dimV = dim(null(T)) + dim(range\ \ T) \qquad \star$$

از سوی دیگر می دانیم :

$$rank\ \ A = diam(range\ \ T)$$

حال در مسئله داریم :

$$T(T(v)) = ۰$$

از این موضوع نتیجه می گیریم:

$$range\ \ T \subseteq null\ \ T \longrightarrow diam(range\ \ T) \leq diam(null\ \ T)$$

حال با توجه به $\star$ داریم

$$dimV - dim(range\ \ T) = dim(null(T))$$

و این را در نامساوی به دست آمده جایگذاری می کنیم:

$$diam(range\ T) \leq dimV - dim(range\ T) \longrightarrow ۲dima(range\ T) \leq dim(V) \longrightarrow ۲rank(A) \leq dim(V)$$

◀

مسئله‌ی ۷. اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد که $rankA = r > ۰$. U شکل سطری پلکانی ماتریس A است.نشان دهید یک ماتریس وارون پیذیر مانند E وجود دارد که $A = EU$. با استفاده از این موضوع A را به صورت حاصل جمع r ماتریس با رنک ۱ بنویسید.

حل. می دانیم برای اینکه A را سطری پلکانی کنیم باید یک سری ماتریس مقدماتی را باید در آن ضرب کنیم به شکل زیر :

$$E_{۱}E_{۲}E_{۳}\cdots E_{n}A = U$$

از تمرین سری قبل می دانیم ماتریس های مقدماتی معکوس پذیرند و معکوس آن ها نیز ماتریس مقدماتی است پس داریم:

$$A = E_{n}^{-۱}E_{n-۱}^{-۱}\cdots E_{۱}^{-۱}U$$

از انجاییکه ضرب چنر ماتریس معکوس پذیر معکوس پذیر است پس

$$E = E_{n}^{-۱}E_{n-۱}^{-۱}\cdots E_{۱}^{-۱}$$

حال برای اثبات قسمت دوم از فصل های قبل می دانیم:

$$AB = \begin{bmatrix} col_{۱}(A) & clo_{۲}(A) & \cdots & col_{n}(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} row_{۱}(A) \\ row_{۲}(A) \\ \vdots \\ row_{n}(A) \end{bmatrix} = col_{۱}(A)row_{۱}(B) + col_{۲}(A)row_{۲}(B) + \cdots + col_{n}(A)row_{n}(B) \qquad \star$$

چون $rank(A) = r$ هست پس شکل سطری پلکانی آن دارای r سطر مستقل خطی است و بقیه سر ها صفر هستند.پس با توجه $\star$، r سطر غیر صفر داریم و همچنین $col_{i}(A)row_{i}(B)$ یک ماتریس با رنک ۱ است زیرا همه سطر های $col_{i}(A)row_{i}(B)$ مضربی از $row_{i}(B)$ هستند که در این صورت فقط یک بردار مستقل خطی داریم و بدین ترتیب حکم ثابت می شود.

◀

مسئله‌ی ۸. در هر یک از قسمت های زیر ابتدا مختصات بردار داده شده (v) را در هریک از پایه ها بیابید سپس ماتریس انتقال از یک پایه (B) به پایه (C) دیگر را محاسبه کنید.

.۱

$$V = \mathbb{P}_۳[x] \qquad v = p(x) = ۸ + x + ۶x^۲ + ۹x^۳$$
$$B = \{۲ + ۳x + ۴x^۲ - x^۳, ۳x + ۵x^۲ + ۲x^۳, -۵x^۲ - ۵x^۳, ۴ + ۴x + ۴x^۲\}$$
$$C = \{۱ - x^۳, ۱ + x, x + x^۲, x^۲ + x^۳\}$$

.۲

$$V = M_۲(\mathbb{R}) \qquad v = \begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$
$$B = \{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\}$$
$$C = \{\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\}$$

.۳

$$V = \mathbb{R}^۳ \qquad v = (۱, ۷, ۷)$$
$$B = \{(-۷, ۴, ۴), (۴, ۲, -۱), (-۷, ۵, ۰)\}$$
$$C = (۱, ۱, ۰), (۰, ۱, ۱), (۳, -۱, -۱)$$

حل. برای حل این سوال قسمت دوم برای نمونه حل می شود حل دو قسمت دیگر نیز مشابه قسمت دوم می باشد که حل آن ها بر عهده خود شما دانشجویان گذاشته می شود. ابتدا مختصات v را نسبت به پایه های B و C می یابیم. پس مختصات v برحسب دو پایه برابراست با:

$$[v]_B = (-۱, -\frac{۲}{۳}, -\frac{۴}{۳}, -۱) \qquad\qquad [v]_C = (۲, -۳, -۱, -۱)$$

حال می خواهیم $\underset{C\leftarrow B}{P}$ برای این کار باید ماتریس زیرا را تشکیل می دهیم:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۳ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۵ & -۴ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۲ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right)$$

حال ماتریس سمت چپ به شکل کاهش یافته سطری پلکانی در می اوریم و اعمال سطری پلکانی مشابه را بر روی ماتریس سمت راست نیز اعمال می کنیم در نهایت ماتریس سمت راست همان $\underset{C\leftarrow B}{P}$ خواهد بود.

◀

مسئله‌ی ۹. سوال امتیازی

بازی دو نفره ی زیر را در نظر بگیرید:

۱. بازی با یک ماتریس ۱۰ در ۱۰ خالی بازی شروع می شود.

۲. بازیکن اول و دوم به ترتیب اعداد حقیقی دلخواهی در درایه های این ماتریس قرار می دهند

۳. بعد از پر شدن ماتریس، بازیکن اول در صورتی برنده است که دترمینان ماتریس نهایی مخالف صفر باشد و بازیکن دوم در صورتی برنده است که دترمینان صفر شود.

کدام یک از بازیکنان یک استراتژی ای برای پیروزی دارد؟ در واقع اگر شما در این بازی حق انتخاب اول یا دوم بودن را داشتید کدام را انتخاب می کردید و استراتژی شما برای پیروزی در این نوبت چیست؟

مسئله‌ی ۱۰. سوال امتیازی برای حل این سوال باید از لم زُرن استفاده کنید که لم زُرن یک لم پر کاربرد در زمینه

نظریه مجموعه ها است.
نشان دهید هر فضای برداری غیر صفر یک پایه دارد؟