جبرخطی کاربردی

نیمسال اول ۹۸-۹۷

مدرس :دکتر ناظر فرد

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات

تمرین شماره۴

توجه!!! :

- پاسخ سوالات را به دقت مطالعه کنید و در صورت داشتن ابهام از تدریسیار ها سوال بفرمایید

تمارین:

در این سری سوالات مظور از $\mathbb{P}[x]$ تمامی چند جمله ای ها با متغیر x هستند و $\mathbb{P}_n[x]$ تمامی چند جمله ای از درجه حداکثر n هستند،همچنین $M_n(\mathbb{R})$ تمامی ماتریس های مربعی $n \times n$ با درایه های از اعداد حقیقی هستند.

۱. در هر مورد مشخص کنید آیا زیر مجموعه ی داده شده یک زیر فضا از فضای برداری مشخص شده می باشد یا خیر.

۱. $\{(x,y)|\frac{x}{y} = ۱, x, y \in \mathbb{R}\}$ در فضای برداری $\mathbb{R}^۲$.

حل. (آ) بردار صفر باید عضو H می باشد.

(ب) H باید نسبت به جمع بردار ها بسته باشد. یعنی برای هر Vو عضو H، u $v+u$ هم باید عضو H باشد.

(ج) H باید تحت ضرب عددی ($scalar$) بسته باشد.یعنی برای هر u عضو H و هر اسکالرc بردار cu عضو H باشد.

با توجه به این مطلب داریم $\frac{x}{y}$ و $\frac{x'}{y'}$ نیز عضو این زیر فضا باشند انگاه داریم :

$$\frac{x}{y} + \frac{x'}{y'} = ۲$$

پس عضو این زیر فضا نیست و تناقض است.

▶

۲. $\{p(x)|p(-x) = -p(x), p(x) \in \mathbb{P}[x]\}$ در فضای برداری $\mathbb{P}[x]$.

حل. فرض کنیم $p(x), g(x)$ عضو این زیر فضا باشند بنابر این داریم

$$p(-x) = -p(x), g(-x) = -g(x) \to c(x) = p(x) + g(x) \to$$

$$c(-x) = p(-x) + g(-x) = -p(x) + -g(x) = -(p(x) + g(x)) = -c(x)$$

$$p(-x) = -p(x) \to kp(-x) = k(-p(x)) = -kp(x)$$

پس این مجموعه نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است پس زیر فضای برداری است. ▶

۲. فرض کنید $W_۱, W_۲$ زیر فضا های فضای برداری V باشند، تعریف می کنیم :

$$W_۱ + W_۲ = \{w_۱ + w_۲ | w_۱ \in W_۱, w_۲ \in W_۲\}$$

.

۱. نشان دهید $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$ زیر فضای V هستند و همچنین نشان دهید:

$$W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$$

.

حل. می دانیم $0 \in W_1, 0 \in W_2$ پس 0 عضو $W_1 + W_2$ هست از سوی دیگر
اگر $v_1 \in W_1 + W_2, v_2 \in W_1 + W_2$ باشد،آنگاه طبق تعریف داریم :

$$\exists w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \;\; v_1 = w_1 + w_2 \quad , \quad \exists w'_1 \in W_1, w'_2 \in W_2 \;\; v_2 = w'_1 + w'_2$$

در نتجه:

$$v_1 + v_2 = w_1 + w_2 + w'_1 + w'_2 = \underbrace{w_1 + w'_1}_{\in W_1} + \underbrace{w_2 + w'_2}_{\in W_2} \longrightarrow v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$$

همچنین باید ثابت کنیم اگر $v \in W_1 + W_2$ باشد آنگاه kv هم چنین است که k یک اسکالر است.

$$\exists w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \;\; v = w_1 + w_2 \longrightarrow kv = \underbrace{kw_1}_{\in W_1} + \underbrace{kw_2}_{\in W_2} \longrightarrow kv \in W_1 + W_2$$

پس $W_1 + W_2$ یک زیر فضای V است.

حال باید ثابت کنیم $W_1 \cap W_2$ زیر فضای V است. می دانیم صفر عضو هر دو زیر فضا است پس صفر در اشتراک آن ها نیز وجود دارد،حال باید ثابت می کنیم که :

$$v_1 \in W_1 \cap W_2, v_2 \in W_1 \cap W_2 \longrightarrow v_1 \in W_1 \wedge v_1 \in W_2, v_2 \in W_1, v_2 \in W_2$$

$$\longrightarrow v_1 + v_2 \in W_1 \wedge v_1 + v_2 \in W_2 \longrightarrow v_1 + v_2 \in W_1 \cap W_2$$

به همین شکل ثابت می شود ضرب یک اسکالر در اعضای $W_1 \cap W_2$ عضو $W_1 \cap W_2$ است پس زیر فضا بودن اشتراک دو زیر فضا نیز ثابت می شود.

اکنون باید ثابت کنیم رابطه بالا برقرار است بدیهی است که اشتراک دو زیر فضا زیر مجموعه اجتماع آن است (این رابطه برای هر دو مجموعه ای فارغ از زیر فضا بودن یا نبودن صادق است) کافی است ثابت کنیم:

$$W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$$

به وضوح رابطه زیر برقرار است :

$$W_1 + W_2 = span(W_1 \cup W_2)$$

واضح است که اگر مجموعه ای به شکل A داشته باشیم آنگاه:

$$A \subseteq span(A)$$

زیرا :

$$span(A) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}, a_i \in A$$

و فرض کنید در هر مرحله $(\lambda_i = 1)$ و $(\lambda_j = 0, j \neq i)$ در این صورت $A \subseteq span(A)$. ◀

۲. نشان دهید :

$$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$$

.

حل. فرض کنیم :

$$diamW_1 = n, dimW_2 = m, dim(W_1 \cap W_2) = t$$

همچنین فرض کنید: $\{u_1, u_2, \cdots, u_t\}$ یک پایه برای $W_1 \cap W_2$ باشد،پس می توان آنرا به یک پایه $B_1 = \{u_1, u_2, \cdots, u_t, v_1, v_2, \cdots, v_{n-t}\}$ از W_1 و همچنین $B_2 = \{u_1, u_2, \cdots, u_t, w_1, w_2, \cdots, w_{m-t}\}$ از W_2 توسعه داد.ثابت می کنیم:

$$B = \{u_1, u_2, \cdots, u_t, v_1, v_2, \cdots, v_{n-t}, w_1, w_2, \cdots, w_{m-t}\}$$

یک پایه برای $W_1 + W_2$ است.که رد این صورت حکم مسئله نیز ثابت می شود ،برای اثبات پایه بودن باید استقلال خطی و مولد بودن را ثابت می کنیم(مولد بودن یعنی ترکیب های خطی یک مجموعه تمامی اعضای آن مجموعه را تولید می کنند که در واقع بیانگر این است که اگر $if \quad A \subseteq B \rightarrow span(A) = B$ در بحث ما می گوییم بردار هایی مولد یک فضا یا زیر فضا هستند که تمامی اعضای آن ها را بتوان با ترکیب خطی این بردار ها تولید کرد.)

استقلال خطی :

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n-t} \beta_i v_i + \sum_{i=1}^{m-t} \gamma_i w_i = 0 (\star) \longrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{t} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n-t} \beta_i v_i}_{\in W_1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m-t} -\gamma_i w_i}_{\in W_2}$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{m-t} -\gamma_i w_i \in W_1 \cap W_2$$

پس وجود دارد $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_t$ به طوری که:

$$\sum_{i=1}^{m-t} -\gamma_i w_i = \sum_{i=1}^{t} \mu_i u_i$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{m-t} \gamma_i w_i + \sum_{i=1}^{t} \mu_i u_i = 0$$

چون ترکیب خطی فوق صفر ، μ_i ها ، w_i ها یک پایه برای w_2 و ذا مستقل خطی هستند
پس : $\forall i \quad \gamma_i = 0, \forall i \quad \mu_i = 0$ با جایگذاری در $\star$ داریم :

$$\sum_{i=1}^{t} u_i + \sum_{i=1}^{n-t} = 0$$

یعنی ترکیب خطی از اعضای پایه W_1 صفر شده است ،پس :

$$\forall i \alpha_i = 0, \forall i \beta_i = 0$$

پس B مستقل خطی است.

مولد بودن: باید ثابت کنیم هر $w \in W_1 + W_2$ را می توان به صورت ترکیب خطی B نوشت.

می دانیم طبق تعریف :

$$\exists w'_1 \in W_1, w'_2 \in W_2 \quad w = w'_1 + w'_2$$

$$\longrightarrow w'_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_t u_t + \alpha_{t+1} v_1 + \alpha_{t+2} v_2 + \cdots + \alpha_n v_{n-t}$$

$$\longrightarrow w'_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_t u_t + \beta_{t+1} w_1 + \beta_{t+2} w_2 + \cdots + \beta_m w_{m-t}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow w = w'_1 + w'_2 = &(\alpha_1 + \beta_1) u_1 + (\alpha_2 + \beta_2) u_2 + \cdots + (\alpha_t + \beta_t) u_t + \\ &\alpha_{t+1} v_1 + \alpha_{t+2} v_2 + \cdots + \alpha_n v_{n-t} + \beta_{t+1} w_1 + \beta_{t+2} w_2 + \cdots + \beta_m w_{m-t} \end{aligned}$$

پس توانستیم w را برحسب B بنویسیم و در نتیجه B مولد و مستقل خطی است و پایه است و حکم ثابت می شود. ◀

۳. نتیجه گیری قسمت ۱ را با استفاده از دو خط که از مبدا مختصات xy می گذرند توجیه کنید.

حل. فرض کنید دو خط متقاطع داریم که در یک نقطه مشترکند،خط اول را با W_1 و خط دوم را با W_2 نشان می دهیم. آنگاه : $W_1 \cap W_2$ یک نقطه خواهد بود،و $W_1 \cup W_2$ از خود این دو خط متقاطع تشکیل خواهد شد.در این صورت $W_1 + W_2$ صفحه گذرنده از این دو خط خواهد بود.که رابطه ۲ به وضوح با این فرضیات مشخص است. ◀

۴. درستی یا نادرستی تساوی زیر را بررسی کنید در صورت درست بودن اثبات و در صورت نادرست بودن مثال نقض بزنید:

$$W_3 \cap (W_1 + W_2) = (W_3 \cap W_1) + (W_3 \cap W_2)$$

.

حل. برای اینکه نشان دهیم این تساوی برقرار نیست،فرض می کنیم W_1, W_2, W_3 سه خط هستند که در مبدا مختصات مشترکند.مثلا فرض کنید W_1 محور x ها ، W_2 محور y ها و W_3 نیمساز ناحیه اول و سوم است، در این صورت $W_3 \cap (W_1 + W_2)$ یک خط خواهد بود ولی $(W_3 \cap W_1) + (W_3 \cap W_2)$ همان نقطه صفر خواهد بود پس مشاهده می کنید که تساوی برقرار نیست.

◀

۵. نشان دهید $W_1 + W_2$ کوچکترین زیر فضایی از V است که شامل $W_1 \cup W_2$ است.

حل. در حالت کلی $W_1 \cup W_2$ یک زیر فضا نیست در حالتی زیر فضاس $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$ به عبارت دیگر $W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2$ حال اگر S یک زیر فضا باشد که شامل W_1 و W_2 است آنگاه هر بردار به شکل $W_1 + W_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ عضو Sهستند پس $W_1 + W_2 \subseteq S$ ◀

۳. اگر $T : V \longrightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد ثابت کنید $kernel$ این تبدیل خطی زیر فضایی V و $Range$آن زیر فضایی از W است.

حل. فرض کنیم $v, w \in kernelT, V$ در این صورت داریم:

$$T(v) = T(W) = 0 \to T(v + w) = T(v) + T(W) = 0 \to v + w \in kernelT, V$$

$$T(v) = 0, T(kv) = kT(v) = k0 = 0 \to kv \in kernelT, V$$

$Range$ نیز به همین ترتیب اثبات می شود.

◀

۴. ثابت کنید هر تبدیل خطی یک به یک و پوشا به شکل $T : V \longrightarrow W$ هر پایه در V را به پایه ای در W می نگارد.

حل. فرض کنیم $\{v_1, v_2, \cdots, V_n\}$ یک پایه برای V باشد در این صورت این بردار ها مستقل خطی هستند و هر بردار دیگر V نیز ترکیب خطی از بقیه بردار ها است. چون تابع یک به یک است می دانیم $T(m) = 0$ باشد از انجاییکه تابع یک به یک است پس $m = 0$. فرض کنید مجموعه مستقل خطی $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ را تحت T نگاشت کنیم می خواهیم ثابت کنیم بردار های نگاشت شده مستقل خطی هستند پس داریم:

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = 0 \longrightarrow T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0 \longrightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

چون v_i ها مستقل خطی هستند پس:

$$\forall i \quad \alpha_i = 0$$

در نتیجه استقلال خطی نگاشت یک مجموعه مستقل خطی ثابت می شود. حال باید ثابت کنیم هر مجموعه مولد تحت این تبدیل خطی مولد می ماند فرض کنید

$$\{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\}$$

بردار دلخواه w را در W در نظر بگیرید چون تابع پوشاست باید برداری مثل v وجود داشته باشد که $T(v) = w$ و میدانیم

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \to T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n)$$

پس توانستیم w دلخواه به صورت ترکیب خطی بردار ها تصویر شده بنویسیم پس بردار های تصویر شده مولد هستند.

◀

۵. برای ماتریس مربعی A نشان دهید
$$V = \{X|AX = XA\}$$
که همان مجموعه تمام ماتریس های قابل جا به جایی با A هستند یک فضای برداری است و با فرض اینکه

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

یک پایه برای V بیابید.

حل. فرض کنیم X, Y قابل جاه به جایی با A باشند در این صورت داریم $AX = XA, AY = YA$ در این صورت داریم:

$$A(X+Y) = AX + AY = XA + YA = (X+Y)A$$

ضرب اسکالر نیز به طریق مشابه ثابت می شود پس V یک فضای برداری است. برای مثال نیز نشان داده می شود که $dimV = ۵$ و ماتریس هایی که با A جا بهجا می شوند به شکل زیر هستند.

$$\begin{bmatrix} a & b & ۰ \\ c & d & ۰ \\ -۳a - c - e & -۳b - d + e & e \end{bmatrix}$$

►

۶. درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید(A, B ماتریس و $r(A)$ نشان دهنده رنک ماتریس A است):

۱. اگر $r(A) = r(B)$ آنگاه $r(A^۲) = r(B^۲)$.

حل. نادرست است.مثال نقض

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

►

۲. $r(A - B) \leq r(A) - r(B)$.

حل. ماتریس های قسمت قبل مثال نقضی برای این قسمت نیز هستند. ►

۳. اگر $r(AB) = ۰$ باشد آنگاه یا $r(A) = ۰$ یا $r(B) = ۰$.

حل.

$$A = B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

►

۷. فرض کنید $T : W \longrightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد ثابت کنید رابطه زیر برقرار است:

$$dim(ker(T) \cap W) = dim(W) - dim(T(W))$$

حل. ►

۱۰ـ فرض کنید $T' = T|_W$ لذا $T' : W \to W$ و داریم:

$$\dim \ker(T') + \dim \operatorname{Im}(T') = \dim(W) \qquad (۱)$$

حال نشان می‌دهیم $\ker(T') = \ker(T) \cap W$. x را عضو دلخواهی از $\ker(T')$ انتخاب می‌کنیم
پس $x \in W$ و $T(x) = T'(x) = ۰$ در نتیجه:

$$x \in \ker(T) \cap W \Longrightarrow \ker(T') \subseteq \ker(T) \cap W$$

حال اگر $y \in \ker(T) \cap W$ پس $y \in W$ و $T(y) = ۰$ در نتیجه $T'(y) = ۰$ لذا $y \in \ker(T')$
پس $\ker(T) \cap W \subseteq \ker(T')$.بنابراین:

$$\ker(T') = \ker(T) \cap W \qquad (۲)$$

از طرفی

$$\operatorname{Im}(T') = T'(W) = T(W) \qquad (۳)$$

حال با جایگذاری روابط (۲) و (۳) در رابطه (۱) داریم:

$$\dim(\ker(T) \cap W) = \dim(W) - \dim T(W)$$

در هر یک از قسمت های زیر ابتدا مختصات بردار داده شده (v) را در هریک از پایه ها بیابید سپس ماتریس انتقال از یک پایه (B) به پایه (C) دیگر را محاسبه کنید.

۱.

$$V = \mathbb{P}_۳[x] \qquad v = p(x) = ۸ + x + ۶x^۲ + ۹x^۳$$
$$B = \{۲ + ۳x + ۴x^۲ - x^۳, ۳x + ۵x^۲ + ۲x^۳, -۵x^۲ - ۵x^۳, ۴ + ۴x + ۴x^۲\}$$
$$C = \{۱ - x^۳, ۱ + x, x + x^۲, x^۲ + x^۳\}$$

حل. برای حل این سوال قسمت دوم برای نمونه حل می شود حل دو قسمت دیگر نیز مشابه قسمت دوم می باشد که حل آن ها بر عهده خود شما دانشجویان گذاشته می شود. ابتدا مختصات v را نسبت به پایه های B و C می یابیم. پس مختصات v برحسب دو پایه برابراست با:

$$[v]_B = (-۱, -\frac{۲}{۳}, -\frac{۴}{۳}, -۱) \qquad [v]_C = (۲, -۳, -۱, -۱)$$

حال می خواهیم $\underset{C\leftarrow B}{P}$ برای این کار باید ماتریس زیرا را تشکیل می دهیم:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۳ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۵ & -۴ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۲ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right)$$

حال ماتریس سمت چپ به شکل کاهش یافته سطری پلکانی در می اوریم و اعمال سطری پلکانی مشابه را بر روی ماتریس سمت راست نیز اعمال می کنیم در نهایت ماتریس سمت راست همان $\underset{C\leftarrow B}{P}$ خواهد بود.

◀

.۲

$$V = M_{۲}(\mathbb{R}) \qquad v = \begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$B = \{ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \}$$

$$C = \{ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \}$$

.۳

$$V = \mathbb{R}^{۳} \qquad v = (۱, ۷, ۷)$$

$$B = \{(-۷, ۴, ۴), (۴, ۲, -۱), (-۷, ۵, ۰)\}$$

$$C = (۱, ۱, ۰), (۰, ۱, ۱), (۳, -۱, -۱)$$