فرض کنید که A = QR باشد که Q یک ماتریس m در n با ستون‌های متعامد و R یک ماتریس n در n است.
نشان دهید که اگر ستون‌های ماتریس A مستقل خطی باشند آنگاه R نمیتواند وارون پذیر

Since the columns of $A$ are linearly dependent, there is a nontrivial vector $\mathbf{x}$ such that $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. But then $QR\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Applying Theorem 7 from Section 6.2 results in $\|R\mathbf{x}\| = \|QR\mathbf{x}\| = \|\mathbf{0}\| = 0$. But $\|R\mathbf{x}\| = 0$ implies $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$, by Theorem 1 from Section 6.1. Thus there is a nontrivial vector $\mathbf{x}$ such that $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ and hence, by the Invertible Matrix Theorem, $R$ cannot be invertible.

**فرض کنید برای فضای R^4 زیرفضای W را داریم که:**

**W = span{w1, w2}** $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

الف) یک پایه برای W بیابید که شامل ۲ بردار عمود باشد.

ب) y را به شکل مجموع یک بردار از W و یک بردار از فضای متعامد W نشان دهید.

**Solution** (a) Apply step 1 of Gram-Schmidt:

$$v_1 = w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$v_2 = w_2 - \frac{\langle w_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{\left( \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}{\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

This gives us an orthogonal basis $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ for $W$.

(b) We must find vectors $w \in W$ and $w' \in W^{\perp}$ such that $y = w + w'$. Using our orthogonal basis from (a) and the Second Projection Theorem, we get

$$w = \frac{\left(\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\left(\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}\right)} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Then $w'$ is whatever is left over: $w' = y - w = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.