۱. حجم و دترمینان

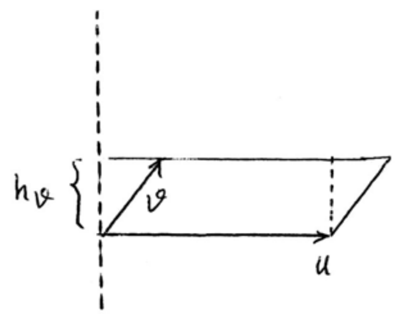
همه مطالب این فصل برای فضاهای برداری با بعد متناهی بیان می‌شود.

حجم در فضای برداری

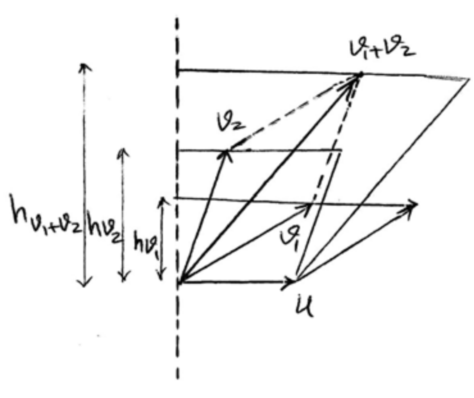
در این قسمت سعی داریم مفهوم حجم را برای فضاهای برداری با بعد متناهی معرفی کنیم. برای این منظور مفهوم مساحت در صفحه و حجم معمولی در فضای سه بعدی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و ارتباط آنها را با ساختار جبری روی این فضاها بدست می‌آوریم. خواهیم دید که به کمک این ارتباط می‌توانیم مفهوم حجم را برای همه فضاهای برداری با بعد متناهی گسترش دهیم.

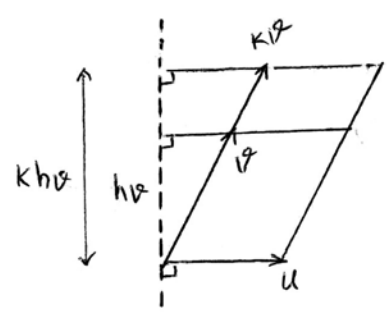
مساحت در صفحه دو بعدی

دو بردار u و v در $\mathbb{R}^2$ یک متوازی الاضلاع مشخص می‌کنند. از هندسه مقدماتی می‌دانیم مساحت متوازی الاضلاع برابر است با حاصل ضرب طول یک ضلع در ارتفاع وارد بر آن.



مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط دو بردار u و v را با $S(u,v)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین $S(u,v)$ برابر است با حاصل ضرب طول بردار u در طول تصویر بردار v روی خط عمود بر u. با توجه به دو شکل زیر به نظر می‌آید که تابع $S(u,v)$ نسبت به v (و به صورت مشابه نسبت به u) نگاشتی خطی است.

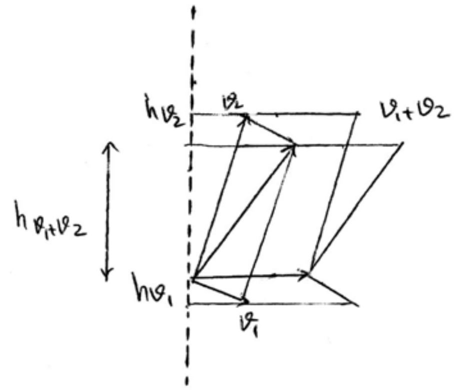




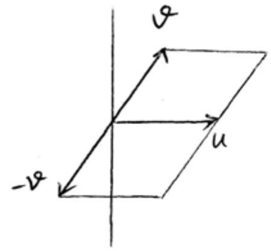
$$S(u,kv) = kS(u,v)$$

$$h_{v_1+v_2} = h_{v_1} + h_{v_2} \Rightarrow$$
$$S(u,v_1+v_2) = S(u,v_1) + S(u,v_2)$$

البته این گزاره درست نیست. زیرا اثبات‌های بالا که مبتنی بر شکل اند، در حالت های زیر دچار مشکل می‌شود.

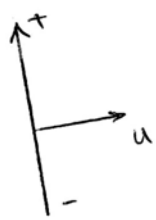


$S(u,v_1+v_2)=S(u,v_2)-S(u,v_1)$



$S(u,-v)=S(u,v)$

ولی اگر اجازه دهیم طول تصویر یک بردار روی خط عمود بر u منفی نیز باشد این مشکل حل می‌شود. با انتخاب یک جهت روی خط عمود بر u، تصویر هر برداری روی آن با یک عدد حقیقی متناظر می‌شود و $S(u,v)$ را می‌توان برابر حاصل ضرب آن عدد در طول بردار u تعریف کنیم. در اینجا قرارداد می‌کنیم که نیم خط سمت چپ بردار u قسمت مثبت باشد.



به‌این ترتیب اگر v سمت چپ بردار u باشد $S(u,v)$ برابر مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط دو بردار u و v است و در غیر این صورت $S(u,v)$ برابر منفی مساحت آن متوازی الاضلاع است. دقت کنید که به صورت کاملاً مشابه $S(u,v)$ نسبت به متغیر اول نیز یک نگاشت خطی است. بنابراین

۱. تابع $S:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ نسبت به هر یک از مولفه‌های خود خطی است.

۲. برای هر بردار u، $S(u,v)=0$

قضیه. تابع $S:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با دو ویژگی بالا، صرف نظر از یک ضریب یکتا است.

اثبات. ابتدا دقت کنید که برای هر دو بردار u و v داریم $S(u,v)=-S(v,u)$. زیرا

$$\begin{aligned}0&=S(u+v,u+v)=S(u,u+v)+S(v,u+v)\\&=S(u,u)+S(u,v)+S(v,u)+S(v,v)=\\&=S(u,v)+S(v,u)\end{aligned}$$

حال فرض کنید $\{e_1,e_2\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ باشد و

$$u=a_1e_1+a_2e_2 \qquad\qquad v=b_1e_1+b_2e_2$$

بنابراین

$$\begin{aligned} S(u,v) &= S\big(a_1e_1 + a_2e_2, b_1e_1 + b_2e_2\big) \\ &= a_1b_1S(e_1,e_1) + a_1b_2S(e_1,e_2) + a_2b_1S(e_2,e_1) + a_2b_2S(e_2,e_2) \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)S(e_1,e_2) \end{aligned}$$

در نتیجه $S(u,v) = C.(a_1b_2 - a_2b_1)$. توجه کنید که این توابع دارای دو ویژگی مورد نظر نیز هستند.
بنابراین مساحت جهت داری که در بالا معرفی کردیم باید به همین صورت باشد. اگر $\{e_1,e_2\}$ پایه استاندارد باشد برای آن داریم $S(e_1,e_2) = 1$. قضیه بالا اثبات دیگری برای این نکته ارائه می‌دهد که مساحت جهت دار مثلثی با رأس‌های مبدأ، (a_1,a_2) و (b_1,b_2) برابر است با $\frac{1}{2}(a_1b_2 - a_2b_1)$.

حجم در فضای سه بعدی

سه بردار u و v و w در $\mathbb{R}^3$ یک متوازی السطوح مشخص می‌کنند که حجم آن را با $S(u,v,w)$ نمایش می‌دهیم. از هندسه می‌دانیم که $S(u,v,w)$ برابر است با حاصل ضرب مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط دو بردار u و v در ارتفاع وارد بر آن (که همان طول تصویر بردار w روی خط عمود بر صفحه تولید شده توسط u و v است).
همانند مساحت در صفحه دو بعدی برای اینکه $S(u,v,w)$ نسبت به w خطی باشد باید حجم جهت دار را با انتخاب جهت مناسب روی خط عمود بر صفحه تولید شده توسط u و v معرفی کنیم. این کار را به کمک قاده دست راست در $\mathbb{R}^3$ انجام می‌دهیم. به‌این ترتیب $S(u,v,w)$ را برابر حجم متوازی السطوح تولید شده با بردارهای u و v و w تعریف می‌کنیم به شرط اینکه با حرکت پیوسته انگشتان دست راست از u به v، بردار w در نیم فضایی قرار بگیرد که با شصت دست راست مشخص می‌شود. در غیر این صورت $S(u,v,w)$ منفی حجم آن متوازی السطوح است. با این قرارداد واضح است که $S(u,v,w)$ نسبت به هر یک از مولفه های خود خطی است. بنابراین

۱. تابع $S : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ نسبت به هر یک از مولفه‌های خود خطی است.

۲. اگر دو تا از بردارهای u و v و w برابر باشند آنگاه $S(u,v,w) = 0$. (زیرا متوازی السطوح تولید شده در یک صفحه قرار خواهد گرفت و دیگر حجمی نخواهد داشت.)

قضیه. تابع $S : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ با دو ویژگی بالا، صرف نظر از یک ضریب یکتا است.

اثبات. مانند حالت دو بعدی دقت می‌کنیم که اگر جای دو تا از بردارهای u و v و w عوض شود مقدار S منفی می‌شود. یعنی

$$s(u,w,v) = S(v,u,w) = S(w,u,v) = -S(u,v,w).$$

زیرا

$$\begin{aligned} 0 &= S\big(u+v, u+v, w\big) = S(u,u,w) + S(u,v,w) + S(v,u,w) + S(v,v,w) \\ &= S(u,v,w) + S(v,u,w) \end{aligned}$$

بقیه حالت ها نیز به صورت مشابه است.
حال اگر $\{e_1,e_2,e_3\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ باشد و

$$u = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \qquad v = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \qquad w = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$$

آنگاه

$$s(u,v,w) = \sum_{i,j,k=1}^{3} a_ib_jc_kS(e_i,e_j,e_k)$$

در مجموع بالا بسیاری از جمله ها که دارای بردار تکراری است صفر خواهند بود، در نتیجه

$$
\begin{aligned}
S(u,v,w) &= a_1b_2c_3S\left(e_1,e_2,e_3\right)+a_1b_3c_2S\left(e_1,e_3,e_2\right)+a_2b_1c_3S\left(e_2,e_1,e_3\right)\\
&\quad+a_2b_3c_1S\left(e_2,e_3,e_1\right)+a_3b_1c_2S\left(e_3,e_1,e_2\right)+a_3b_2c_1S\left(e_3,e_2,e_1\right)\\
&=(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1)S(e_1,e_2,e_3)
\end{aligned}
$$

با توجه به اثبات بالا حجم جهت‌داری که در ابتدای این قسمت معرفی شد نیز باید به صورت بالا باشد. اگر $\{e_1,e_2,e_3\}$ پایه استاندارد باشد برای آن داریم $S(e_1,e_2,e_3)=1$. گزاره بالا اثبات دیگری برای این نکته است که حجم جهت دار هرمی با رأس‌های مبدأ، (a_1,a_2,a_3)، (b_1,b_2,b_3) و (c_1,c_2,c_3) برابر است با

$$
\frac{1}{6}\left(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1\right)
$$

زیرا متوازی السطوح تولید شده با این سه بردار به شش هرم هم حجم با هرم بالا افراز می‌شود.

حجم در یک فضای برداری n بعدی

در قسمت های قبل دیدیم که مساحت جهت‌دار $\mathbb{R}^2$ و حجم جهت‌دار در $\mathbb{R}^3$ تابع‌هایی اند که صرف نظر از یک ضریب با دو ویژگی زیر به صورت یکتا مشخص می‌شوند.

۱. نسبت به هر مولفه خطی اند.

۲. اگر دو بردار برابر باشند مقدارشان صفر می‌شود.

از آنجایی که‌این دو شرط کاملاً جبری هستند به راحتی می‌توانیم مفهوم مساحت و حجم را برای یک فضای برداری دلخواه اما با بعد متناهی گسترش دهیم.

در یک فضای n بعدی *حجم متناظر با بردارهای* $v_1,\dots,v_n$، تابعی است از این n بردار که نسبت به هر مؤلفه خطی باشد و اگر دو تا از این بردارها با هم برابر باشند برابر صفر شود. به عبارت دیگر

تعریف. فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی میدان F باشد. تابع $S:V^n\to F$ یک *حجم* n *بعدی روی* V نامیده می‌شود اگر

۱. نسبت به هر یک از مؤلفه‌های خود خطی باشد. یعنی

$$
S(\dots,v_i+rv_i',\dots)=S(\dots,v_i,\dots)+rS(\dots,v_i',\dots)
$$

۲. اگر دو تا از بردارهای $v_1,\dots,v_n$ برابر باشند آنگا $S(v_1,\dots,v_n)=0$.

توجه کنید که بردارهای $v_1,\dots,v_n$ در یک فضای برداری حقیقی n بعدی یک متواضی السطوح را مشخص می‌کنند و تابع حجم بیان شده در واقع حجم این متوازی السطوح است. در قسمت‌های بعد نشان می‌دهیم که برای فضاهای برداری حقیقی می‌توان این حجم را برای بسیاری از شکل‌ها گسترش داد و بنابراین مفهوم حجم در این فضاها کاملاً با شهود ما از مساحت در صفحه و حجم در فضای سه بعدی مطابقت دارد. این در حالی است که در یک فضای برداری غیر حقیقی چیزی شبیه متوازی السطوح که با n بردار مشخص شود وجود ندارد و بنابراین مفهوم حجم در این فضاها خیلی با شهود ما از حجم سازگار نست و تابع حجم تنها یک تابعی است که به n بردار یک اسکالر در میدان F نسبت می‌دهد که چون میدان F میدان اعداد حقیقی نیست حجم مشخص شده با n بردار حتی یک عدد حقیقی هم نیست. با این حال از ویژگی‌های جبری تابع حجم در این فضاها می‌توان استفاده‌های زیادی کرد که در فصل‌های بعد برخی از آنها را می‌بینیم.

قضیه. فرض کنید $S:V^n\to F$ یک تابع حجم روی V باشد. آنگاه

الف. (پاد متقارن بودن) با جابجا کردن دو بردار مقدار S منفی می‌شود. به عبارت دیگر

$$
S(\dots,u,\dots,v,\dots)=-S(\dots,v,\dots,u,\dots)
$$

ب. با جمع کردن مضربی از یک بردار با بردار دیگر حجم بردارها تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر

$$S(\ldots, v_i, \ldots, v_j + rv_i, \ldots) = S(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots)$$

اثبات. (الف) با توجه به دو ویژگی تابع حجم داریم

$$\begin{aligned} 0 &= S(\ldots, u+v, \ldots, u+v, \ldots) \\ &= S(\ldots, u, \ldots, u, \ldots) + S(\ldots, u, \ldots, v, \ldots) \\ &+ S(\ldots, v, \ldots, u, \ldots) + S(\ldots, v, \ldots, v, \ldots) \\ &= S(\ldots, u, \ldots, v, \ldots) + S(\ldots, v, \ldots, u, \ldots) \end{aligned}$$

(ب) با توجه به دو ویژگی تابع حجم داریم

$$\begin{aligned} S(\ldots, v_i, \ldots, v_j + rv_i, \ldots) &= S(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) + rS(\ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots) \\ &= S(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) \end{aligned}$$

تابع $S : V^n \to F$ که نسبت به هر مولفه خطی است اگر دارای شرط دوم تابع حجم نیز باشد آنگاه دارای ویژگی‌های (الف) و (ب) در قضیه بالا نیز است. برعکس این موضوع نیز تقریباً درست است.

قضیه. فرض کنید تابع $S : V^n \to F$ نسبت به هر یک از مولفه‌های خود خطی است. در این صورت اگر مشخصه میدان F برابر ۲ نباشد (یعنی اگر $1 + 1 \neq 0$) آنگاه گزاره‌های زیر معادل اند.

الف. اگر دو تا از بردارهای $v_1, \ldots, v_n$ برابر باشند آنگاه $S(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

ب. (پاد متقارن بودن). با جابجا کردن دو بردار مقدار S قرینه می‌شود. به عبارت دیگر

$$S(\ldots, u, \ldots, v, \ldots) = -S(\ldots, v, \ldots, u, \ldots)$$

ج. برای هر n بردار $v_1, \ldots, v_n$ و هر اسکالر r،

$$S(\ldots, v_i, \ldots, v_j + rv_i, \ldots) = S(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots)$$

اثبات. (الف $\Leftarrow$ ب و ج) قضیه قبل.

(ب $\Leftarrow$ الف) با توجه به اینکه مشخصه میدان F برابر ۲ نیست، یعنی $1 + 1 = 2 \neq 0$، داریم

$$\begin{aligned} S(\ldots, u, \ldots, u, \ldots) &= -S(\ldots, u, \ldots, u, \ldots) \\ &\Rightarrow 2S(\ldots, u, \ldots, u, \ldots) = 0 \quad \Rightarrow \quad S(\ldots, u, \ldots, u, \ldots) = 0 \end{aligned}$$

(ج $\Leftarrow$ الف) کافی است قرار دهیم $r = 1$ و از خطی بودن S نسبت به هر یک از مولفه‌هایش استفاده کنیم.

قضیه بالا زمانی که مشخصه میدان ۲ است درست نیست. اما مشخصه بسیاری از میدان‌های معروف و متداول مانند میدان اعداد حقیقی و یا مختلط مخالف ۲ است. در این موارد چون شرط پاد متقارن بودن (شرط ب) ساده‌تر بیان می‌شود و به روشنی نیز گزاره (الف) را نتیجه می‌دهد در بسیاری از کتاب‌ها در تعریف حجم n بعدی از شرط (ب) بجای (الف) استفاده می‌کنند. اما باید دقت داشت که این تعریف زمانی که مشخصه میدان برابر ۲ است مفید نیست.

فرض کنید $\{e_1, \ldots, e_n\}$ یک پایه برای V و $v_1, \ldots, v_n$، n بردار دلخواه در V اند. هر یک از این بردارها را به صورت ترکیبی خطی از $\{e_1, \ldots, e_n\}$ می‌نویسیم.

$$v_j = a_j^1 e_1 + a_j^2 e_2 + \cdots + a_j^n e_n \qquad j = 1, \ldots, n$$

در این صورت

$$S(v_۱,...,v_n) = \sum_{\sigma} a_۱^{\sigma(۱)}...a_n^{\sigma(n)} S(e_{\sigma(۱)},...,e_{\sigma(n)})$$

که σ تابعی دلخواه از مجموعه $\{۱,...,n\}$ به خودش است. اما از آنجا که اگر دو تا از بردارها با هم برابر باشند مقدار S صفر می‌شود جملاتی که در آن تابع σ یک به یک و پوشا نیست صفر خواهند بود. تابع یک به یک و پوشا از $\{۱,...,n\}$ به خودش یک جایگشت این مجموعه نامیده می‌شود و مجموعه همه جایگشت‌های $\{۱,...,n\}$ را با S^n نمایش می‌دهند. توجه کنید که یک جایگشت σ کاملاً با مجموعه مرتب $(\sigma(۱),...,\sigma(n))$ مشخص می‌شود و این مجموعه همان مجموعه $\{۱,...,n\}$ است اما با یک ترتیب متفاوت. بنابراین

$$S(v_۱,...,v_n) = \sum_{\sigma\in S^n} a_۱^{\sigma(۱)}...a_n^{\sigma(n)} S(e_{\sigma(۱)},...,e_{\sigma(n)})$$

در بالا $(e_{\sigma(۱)},...,e_{\sigma(n)})$ همان $(e_۱,...,e_n)$ اما با ترتیبی متفاوت است. بنابراین با جابجایی اعضای آن می‌توان به مجموعه مرتب $(e_۱,...,e_n)$ رسید و در نتیجه $S(e_{\sigma(۱)},...,e_{\sigma(n)}) = \pm S(e_۱,...,e_n)$. در واقع اگر بتوان با زوج تا جابجایی از $(e_{\sigma(۱)},...,e_{\sigma(n)})$ به $(e_۱,...,e_n)$ رسید خواهیم داشت $S(e_{\sigma(۱)},...,e_{\sigma(n)}) = S(e_۱,...,e_n)$ و در غیر این صورت $S(e_{\sigma(۱)},...,e_{\sigma(n)}) = -S(e_۱,...,e_n)$. توجه کنید که روش‌های زیادی از جابجایی‌ها مجموعه مرتب $(e_{\sigma(۱)},...,e_{\sigma(n)})$ را به $(e_۱,...,e_n)$ تبدیل می‌کند و ما در اینجا لازم داریم که در همه این روش‌ها زوجیت تعداد جابجایی‌ها یکسان باشد. زیرا اگر هم بتوان با زوج جابجایی مجموعه مرتب $(e_{\sigma(۱)},...,e_{\sigma(n)})$ را به $(e_۱,...,e_n)$ تبدیل کرد و هم بتوان با فرد جابجایی این کار را انجام داد آنگاه هم داریم $(e_{\sigma(۱)},...,e_{\sigma(n)}) = S(e_۱,...,e_n)$ و هم $(e_{\sigma(۱)},...,e_{\sigma(n)}) = -S(e_۱,...,e_n)$. در نتیجه در صورتی که مشخصه میدان ۲ نباشد باید داشته باشیم $S(e_۱,...,e_n) = ۰$. این استدلال برای هر مجموعه n تایی از بردارها نیز برقرار است و نشان می‌دهد که هیچ تابع حجم ناصفری روی فضای V وجود ندارد. به عبارت دیگر مفهوم حجم روی یک فضای n بعدی با مشکل مواجه می‌شود. واقعیت این است که هیچ‌گاه چنین اتفاقی نمی‌افتد. یعنی برای هر جایگشت σ، زوجیت تعداد جابجایی‌هایی که $(e_{\sigma(۱)},...,e_{\sigma(n)})$ را به $(e_۱,...,e_n)$ تبدیل می‌کند در همه روش‌ها یکسان است. اثبات این موضوع را در بخش بعد ذکر می‌کنیم. با توجه به این واقعیت می‌توانیم *علامت جایگشت* σ را به صورت زیر تعریف کنیم. علامت جایگشت σ را برابر ۱ قرار می‌دهیم هرگاه بتوان با زوج جابجایی از $(\sigma(۱),...,\sigma(n))$ به $(۱,...,n)$ رسید. در غیر این صورت علامت σ را برابر ۱- قرار می‌دهیم. معمولاً علامت جایگشت σ را با ε_σ یا $\operatorname{sgn}\sigma$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب

$$(e_{\sigma(۱)},...,e_{\sigma(n)}) = \varepsilon_\sigma S(e_۱,...,e_n)$$

و در نتیجه

$$S(v_۱,...,v_n) = \left(\sum\nolimits_{\alpha\in S^n} \varepsilon_\sigma a_۱^{\sigma(۱)}...a_n^{\sigma(n)}\right) S(e_۱,...,e_n) \qquad (۱.۰)$$

سه گزاره زیر نتیجه مستقیم این رابطه اند.

قضیه. تابع حجم ناصفر روی یک فضای برداری n بعدی وجود دارد.

اثبات. فرض کنید $\{e_۱,...,e_n\}$ یک پایه برای V و $v_۱,...,v_n$، n بردار دلخواه در V اند. هر یک از این بردارها را به صورت ترکیبی خطی از $\{e_۱,...,e_n\}$ می‌نویسیم.

$$v_j = a_j^۱ e_۱ + a_j^۲ e_۲ + \cdots + a_j^n e_n \qquad j = ۱,...,n$$

با توجه به رابطه (۱.۰) کافی است تابع $S : V^n \to F$ را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$S(v_۱,...,v_n) = \left(\sum\nolimits_{\alpha\in S^n} \varepsilon_\alpha a_۱^{\alpha(۱)}...a_n^{\alpha(n)}\right)$$

توجه کنید که $S(e_1,...,e_n)$ برابر یک است، زیرا برای این بردارها a_j^iها همه صفر اند جز برای $i=j$ که در این حالت داریم $a_i^i = 1$. بنابراین همه جملات در تعریف S صفر است جز جمله‌ای که متناظر جایگشت همانی است. علامت این جایگشت نیز برابر ۱ است.

تابع S نسبت به هر مولفه خطی است، زیرا اگر $v'_j = b_j^1 e_1 + b_j^2 e_2 + \cdots + b_j^n e_n$ آنگاه

$$\begin{aligned} S(...,v_j + rv'_j,...) &= \sum_{\alpha\in S^n} \varepsilon_\alpha a_1^{\alpha(1)}...(a_j^i + rb_j^i)...a_n^{\alpha(n)} \\ &= \sum_{\alpha\in S^n} \varepsilon_\alpha a_1^{\alpha(1)}...a_j^{\alpha(j)}...a_n^{\alpha(n)} + r\sum_{\alpha\in S^n} \varepsilon_\alpha a_1^{\alpha(1)}...b_j^{\alpha(j)}...a_n^{\alpha(n)} \\ &= S(...,v_j,...) + rS(...,v'_j,...) \end{aligned}$$

همچنین اگر دو بردار v_i و v_j با هم برابر باشند آنگاه $S(...,v_i,...,v_j,...) = 0$، زیرا طبق تعریف S داریم

$$S(...,v_i,...,v_j,...) = \sum_{\alpha\in S^n} \varepsilon_\alpha ...a_i^{\alpha(i)}...a_j^{\alpha(j)}...$$

در مجموع بالا هم حاصل‌ضرب $...a_i^{\alpha(i)}...a_j^{\alpha(j)}...$ ظاهر می‌شود و هم حاصل‌ضرب $...a_i^{\alpha(j)}...a_j^{\alpha(i)}...$ با توجه به اینکه برای هر k، $a_i^k = a_j^k$، این دو عبارت با هم مساویند ولی علامت‌های آنها در مجموع بالا متفاوت است. زیرا یک جابجایی لازم است که مجموعه مرتب $...,\alpha(i),...,\alpha(j),....$ را به مجموعه مرتب $...,\alpha(j),...,\alpha(i),....$ تبدیل کند. از آنجا که این موضوع برای همه عبارت‌های در مجموع بالا برقرار است مجموع بالا صفر است.

قضیه. فرض کنید S یک حجم n بعدی ناصفر روی فضای n بعدی V باشد. در این صورت $\{v_1,...,v_n\}$ یک پایه برای V است اگر و تنها اگر $S(v_1,...,v_n) \neq 0$.

اثبات. اگر $\{v_1,...,v_n\}$ پایه برای V نباشد آنگاه مستقل خطی نیست و در نتیجه یکی از اعضای آن را می‌توان به صورت ترکیب خطی اعضای دیگر نوشت. فرض کیند $v_1 = a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ در این صورت با توجه به خطی بودن S نسبت به مولفه اول داریم

$$S(v_1,...,v_n) = a_2S(v_2,v_2,...,v_n) + \cdots + a_nS(v_n,v_2,...,v_n) = 0$$

از آنجا که در هر یک از جمله‌های بالا دو بردار تکراری وجود دارد همه جمله‌ها برابر صفر اند و در نتیجه

$$S(v_1,...,v_n) = 0$$

حال فرض کنید $\{v_1,...,v_n\}$ یک پایه برای V است. n بردار دلخواه $\tilde{v}_1,...,\tilde{v}_n$ را در نظر می‌گیریم و آنها را به صورت ترکیب خطی $\{v_1,...,v_n\}$ می‌نویسیم.

$$\tilde{v}_j = a_j^1v_1 + a_j^2v_2 + \cdots + a_j^nv_n \qquad j = 1,...,n$$

با توجه به رابطه (۱.۰) داریم

$$S(\tilde{v}_1,...,\tilde{v}_n) = \left(\sum_{\alpha\in S^n} \varepsilon_\alpha a_1^{\alpha(1)}...a_n^{\alpha(n)}\right) S(v_1,...,v_n)$$

حال اگر $S(v_1,...,v_n) = 0$ آنگاه مقدار S روی هر n بردار $\tilde{v}_1,...,\tilde{v}_n$ نیز صفر خواهد شد. یعنی S باید تابع صفر باشد. این نشان می‌دهد اگر S یک حجم ناصفر باشد آنگاه باید $S(v_1,...,v_n) \neq 0$.

قضیه. هر دو حجم n بعدی ناصفر روی یک فضای برداری n بعدی مضربی از یکدیگر اند. یعنی اگر $S,S' : V^n \to F$ دارای دو ویژگی (۱) و (۲) باشند آنگاه عدد ثابت C وجود دارد که برای هر n بردار $v_1,...,v_n$.

$$S'(v_1,...,v_n) = C\,S(v_1,...,v_n)$$

اثبات. فرض کنید $\{e_1,\dots,e_n\}$ یک پایه برای V و $v_1,\dots,v_n$، n بردار دلخواه در V اند. هر یک از این بردارها را به صورت ترکیبی خطی از $\{e_1,\dots,e_n\}$ می‌نویسیم.

$$v_j = a_j^1 e_1 + a_j^2 e_2 + \cdots + a_j^n e_n \qquad j = 1,\dots,n$$

در این صورت

$$S(v_1,\dots,v_n) = \left(\sum_{\alpha\in S^n} \varepsilon_\alpha a_1^{\alpha(1)}\dots a_n^{\alpha(n)}\right) S(e_1,\dots,e_n)$$
$$S'(v_1,\dots,v_n) = \left(\sum_{\alpha\in S^n} \varepsilon_\alpha a_1^{\alpha(1)}\dots a_n^{\alpha(n)}\right) S'(e_1,\dots,e_n)$$

با توجه به قضیه قبل $S(e_1,\dots e_n)$ و $S'(e_1,\dots e_n)$ اسکالرهایی ناصفر اند. بنابراین عدد C وجود دارد که $S'(e_1,\dots e_n) = CS(e_1,\dots e_n)$. به این ترتیب

$$\begin{aligned} S'(v_1,\dots,v_n) &= \left(\sum_{\alpha\in S^n} \varepsilon_\alpha a_1^{\alpha(1)}\dots a_n^{\alpha(n)}\right) S'(e_1,\dots,e_n) \\ &= \left(\sum_{\alpha\in S^n} \varepsilon_\alpha a_1^{\alpha(1)}\dots a_n^{\alpha(n)}\right) CS(e_1,\dots,e_n) = CS(v_1,\dots,v_n) \end{aligned}$$

با توجه به مطالب بیان شده یک تابع حجم یکتایی روی F^n وجود دارد که مقدار آن روی پایه استاندارد F^n برابر یک است. به این تابع حجم روی F^n حجم استاندارد F^n می‌گوییم.

اگر V یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی باشد آنگاه حجم n بعدی ناصفر S روی یک پایه آن یک عدد حقیقی ناصفر است. اگر مقدار S روی آن پایه مثبت باشد آن را پایه مثبت و در غیر این صورت آن را پایه منفی می‌نامیم. به این ترتیب S روی V یک جهت معرفی می‌کند.

قضیه. همه روش‌هایی که با جابجایی اعضای مجموعه مرتب $(\alpha(1),\dots,\alpha(n))$ آن را به مجموعه مرتب $(1,\dots,n)$ تبدیل می‌کند یا همگی زوج جابجایی دارند و یا همگی فرد جابجایی دارند.

اثبات. فرض کنید α نگاشتی یک به یک و پوشا از $\{1,\dots,n\}$ به خودش و $(e_1,\dots,e_n)$ مجموعه‌ای مرتب از n عضو باشد. α تغییر آرایشی به صورت $(e_{\alpha(1)},\dots,e_{\alpha(n)})$ برای این مجموعه معرفی می‌کند که عضو iام در آرایش جدید همان عضو $\alpha(\iota)$ام در آرایش اولی است. حال فرض کنید β نیز یک جایگشت باشد. در این صورت β نیز می‌تواند روی مجموعه مرتب جدید $(e_{\alpha(1)},\dots,e_{\alpha(n)})$ اثر کند و آرایش جدیدتری ارائه دهد که در آن عضو iام همان عضو $\beta(i)$ام آرایش میانی است و میدانیم که عضو $\beta(i)$ام آرایش میانی همان عضو $\alpha(\beta(i))$ام آرایش اولی است. پس آرایش بدست آمده بعد از اعمال جایگشت β روی $(e_{\alpha(1)},\dots,e_{\alpha(n)})$ برابر است با $(e_{\alpha\circ\beta(1)},\dots,e_{\alpha\circ\beta(n)})$.

حال چند جمله‌ای $p(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ را در نظر بگیرید. برای هر جایشگت α داریم

$$p(x_{\alpha(1)},\dots,x_{\alpha(n)}) = \pm p(x_1,\dots,x_n)$$

زیرا هر جمله $(x_i - x_j)$ خودش یا قرینه‌اش دقیقاً یک بار در $p(x_{\alpha(1)},\dots,x_{\alpha(n)})$ ظاهر می‌شود. این ضریب را با $\operatorname{sgn}\alpha$ نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$p(x_{\alpha(1)},\dots,x_{\alpha(n)}) = \operatorname{sgn}\alpha\ p(x_1,\dots,x_n)$$

با توجه به مطالب بالا داریم

$$p(x_{\alpha\circ\beta(1)},\dots,x_{\alpha\circ\beta(n)}) = \operatorname{sgn}\alpha\circ\beta\ p(x_1,\dots,x_n)$$
$$p(x_{\alpha\circ\beta(1)},\dots,x_{\alpha\circ\beta(n)}) = \operatorname{sgn}\beta\ p(x_{\alpha(1)},\dots,x_{\alpha(n)}) = \operatorname{sgn}\beta\operatorname{sgn}\alpha\ p(x_1,\dots,x_n)$$

بنابراین

$$\operatorname{sgn}\alpha\circ\beta=\operatorname{sgn}\alpha.\operatorname{sgn}\beta$$

بنابراین تنها کافی است نشان دهیم اگر α جایگشت جابجا کردن دو عضو $i_\circ < j_\circ$ با هم باشد آنگاه $\operatorname{sgn}\alpha=-۱$.

$$p(x_{\alpha(۱)},\ldots x_{\alpha(n)})=p(x_۱,\ldots,x_{j_\circ},\ldots,x_{i_\circ},\ldots,x_n)$$

تنها تفاوت چند جمله‌ای بالا با چند جمله‌ای $p(x_۱,\ldots,x_{i_\circ},\ldots,x_{j_\circ},\ldots,x_n)=$ در جملات زیر است.

اگر $i_\circ < k < j_\circ$، قرینه جمله $x_{i_\circ}-x_k$ در چند جمله‌ای بالا ظاهر می‌شود.

اگر $i_\circ < k < j_\circ$، قرینه جمله $x_k-x_{j_\circ}$ در چند جمله‌ای بالا ظاهر می‌شود.

قرینه جمله $(x_{i_\circ}-x_{j_\circ})$ نیز در چند جمله‌ای بالا ظاهر می‌شود.

بنابراین

$$\begin{aligned}p(x_{\alpha(۱)},\ldots,x_{\alpha(n)})&=(-۱)^{۲(j_\circ-i_\circ-۱)+۱}p(x_۱,\ldots,x_n)\\&=-p(x_۱,\ldots,x_n)\end{aligned}$$

تغییر حجم توسط عملگرهای خطی و دترمینان

حجم اشکال در یک فضای برداری حقیقی

فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی $\mathbb{R}$ و $A\subset V$ زیر مجموعه‌ای از آن باشد. متوازی السطوح تولید شده توسط پایه $\{v_۱,\ldots,v_n\}$ را با $K_{\{v_۱,\ldots,v_n\}}$ و یا به اختصا با K نمایش می‌دهیم.

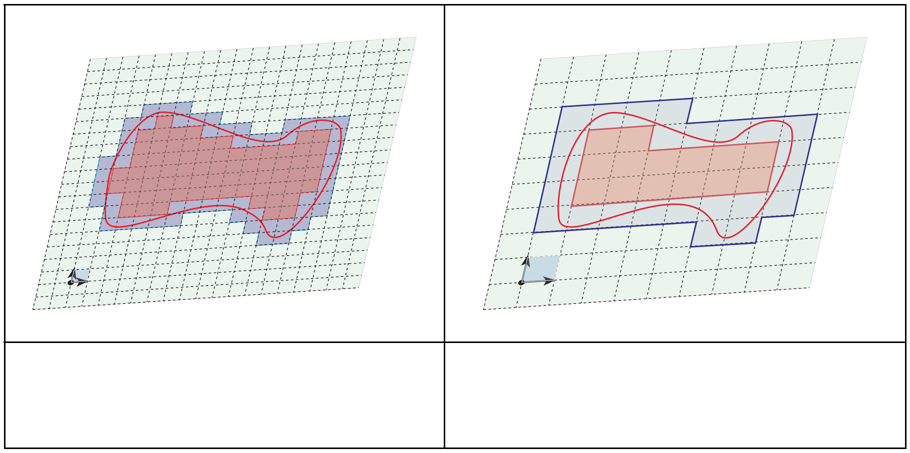
$$K=K_{\{v_۱,\ldots,v_n\}}=\{t_۱v_۱+\cdots+t_nv_n\ :\ \circ\le t_i<۱\}$$

فضای V توسط انتقال‌های K فرش می‌شود. یعنی مجموعه‌های

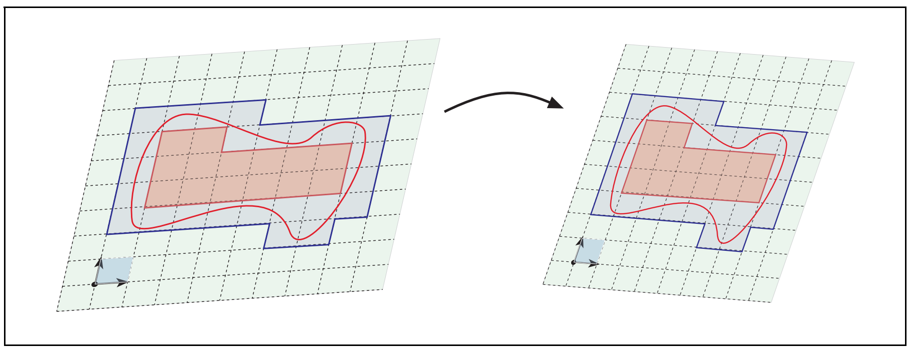
$$a_۱v_۱+\cdots+a_nv_n+K \qquad a_i\in\mathbb{Z}$$

V را افراز می‌کنند و یک شبکه‌بندی برای V تشکیل می‌دهند. حجم هر یک از این خانه‌ها برابر حجم K است. اجتماع خانه‌هایی از این شبکه‌بندی که شکل A را می‌پوشانند، تقریب بیرونی و اجتماع خانه‌هایی که کاملاً داخل A قرار دارند تقریب درونی A نامیده می‌شوند و آنها را به ترتیب با $\overline{A}$ و $\underline{A}$ نمایش می‌دهیم.

با نصف کردن ابعاد شبکه بندی (یعنی در نظر گرفتن شبکه بندی‌ای که با $\frac{۱}{۲}K$ تولید می‌شود) تقریب‌های درونی و بیرونی به شکل A نزدیک‌تر می‌شوند. اگر در این فرایند کوچک کردن خانه‌های شبکه بندی حجم تقریب‌های بیرونی و حجم تقریب‌های درونی به یک عدد نزدیک شود می‌گوییم A دارای حجم است و آن عدد را برابر حجم A تعریف می‌کنیم. ممکن است بعضی از اشکال دارای حجم نباشند.



حال فرض کنید $T:V\to V$ یک عملگر خطی باشد. T شکل A را به شکل $\tilde{A}=T(A)$ تبدیل می‌کند. T متوازی السطوح $K_{\{v_1,\dots,v_n\}}$ را به متوازی السطوح $\tilde{K}=T(K)=K_{\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}}$ و تقریب درونی و بیرونی A را به تقریب درونی و بیرونی $\tilde{A}$ تبدیل می‌کند. اگر S یک حجم n بعدی روی V باشند آنگاه برای تقریب های درونی و بیرونی داریم



$$\frac{vol(\overline{\tilde{A}})}{vol(\overline{A})}=\frac{vol(\underline{\tilde{A}})}{vol(\underline{A})}=\frac{vol(\tilde{K})}{vol(K)}=\frac{S(T(v_1),\dots,T(v_n))}{S(v_1,\dots,v_n)}$$

بنابراین با کوچک کردن ابعاد شبکه خواهیم داشت

$$\frac{vol(\tilde{A})}{vol(A)}=\frac{S(T(v_1),\dots,T(v_n))}{S(v_1,\dots,v_n)}$$

به عبارت دیگر T حجم همه شکل‌ها را با ضریبی ثابت تغییر می‌دهد که به آن دترمینان T می‌گوییم. همچنین اگر این ضریب مثبت باشد نگاشت T را حافظ جهت و در غیر این صورت جهت برگردان می‌گوییم.

دترمینان یک عملگر خطی

در قسمت قبل دیدیم که یک عملگر خطی روی یک فضای برداری حقیقی حجم اشکال را با ضریب ثابتی تغییر می‌دهد. با توجه به اینکه مفهوم حجم را برای فضاهای برداری دلخواه تعمیم دادیم می‌توان انتظار داشت که ویژگی بالا برای عملگرهای روی فضاهای برداری دلخواه نیز برقرار باشد. اما حجم یک شکل دلخواه که در قسمت قبل معرفی شد تنها برای فضاهای برداری روی $\mathbb{R}$ قابل تعریف است. برای یک فضای برداری دلخواه تنها می‌توان حجم یک پایه را معرفی کرد که در قسمت قبل این کار انجام شد. در نتیجه حدس می‌زنیم که یک عملگر دلخواه حجم همه پایه‌ها را با نسبتی ثابت تغییر دهد.

قضیه. فرض کنید α و β دو پایه مرتب برای V و S حجمی ناصفر روی آن باشد. برای هر عملگر $T:V\to V$ داریم

$$\frac{S(T(\alpha))}{S(\alpha)} = \frac{S(T(\beta))}{S(\beta)}$$

اثبات: اگر T یک به یک و پوشا نباشد، آنگاه صورت هر دو کسر بالا صفر است و در نتیجه رابطه بالا در این حالت درست است.
بنابراین فرض می‌کنیم T یک به یک و پوشا است. در این حالت $T(\alpha)$ و $T(\beta)$ نیز پایه‌هایی مرتب برای V هستند و در نتیجه هیچ یک از حجم‌های بالا صفر نخواهد بود. بنابراین کافی است نشان دهیم

$$\frac{S(\beta)}{S(\alpha)} = \frac{S(T(\beta))}{S(T(\alpha))}$$

فرض کنید $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ و $\beta = \{w_1, \dots, w_n\}$ و $w_i = a_i^1 v_1 + \dots + a_i^n v_n$. از آنجا که T خطی است داریم

$$T(w_i) = a_i^1 T(v_1) + \dots + a_i^n T(v_n)$$

اما طبق رابطه (۱.۰) داریم

$$S(w_1, \dots, w_n) = \left(\sum\nolimits_\sigma \varepsilon_\sigma a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)}\right) S(v_1, \dots, v_n)$$

و به همین صورت

$$S(T(w_1), \dots, T(w_n)) = \left(\sum\nolimits_\sigma \varepsilon_\sigma a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)}\right) S(T(v_1), \dots, T(v_n))$$

در نتیجه

$$\frac{S(w_1, \dots, w_n)}{S(v_1, \dots, v_n)} = \left(\sum\nolimits_\sigma \varepsilon_\sigma a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)}\right) = \frac{S(T(w_1), \dots, T(w_n))}{S(T(v_1), \dots, T(v_n))}$$

قضیه. فرض کنید S و S' دو حجم ناصفر روی فضای برداری دلخواه V و α یک پایه مرتب برای آن باشد. برای هر عملگر $T: V \to V$ داریم

$$\frac{S(T(\alpha))}{S(\alpha)} = \frac{S'(T(\alpha))}{S'(\alpha)}$$

اثبات. چون هر دو حجم ناصفر مضربی از یکدیگرند.
طبق این دو قضیه هر عملگری حجم همه پایه‌ها را با نسبت یکسانی تغییر می‌دهد که مستقل از پایه و تابع حجم است. مانند حالت حقیقی به این نسبت *دترمینان عملگر* T می‌گوییم و آن را با $\det T$ نمایش می‌دهیم.

تعریف. *دترمینان عملگرخطی* $T: V \to V$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\det T = \frac{S(T(\alpha))}{S(\alpha)}$$

که در آن α یک پایه مرتب برای V و S یک حجم ناصفر روی آن است. توجه کنید که طبق مطالب بالا این مقدار مستقل از پایه مرتب α و حجم ناصفر S است.
از آنجا که عملگرها با ماتریس نمایش خود کاملاً مشخص می‌شوند می‌توان دترمینان آنها را نیز با داشتن ماتریس نمایش بدست آورد. در واقع رابطه (۱.۰) روش این محاسبه را بدست می‌دهد. اگر $A = [T]_\alpha^\alpha$ آنگاه

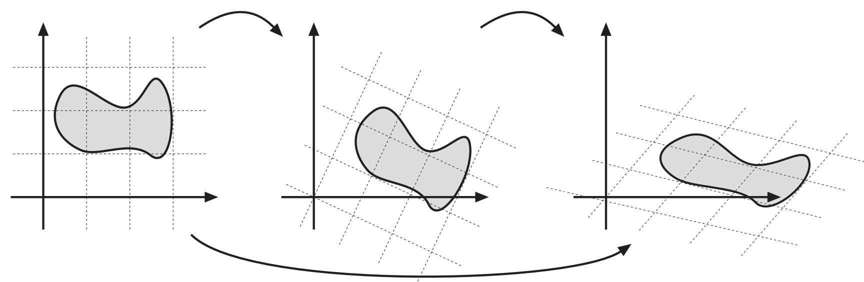
$$\det T = \sum\nolimits_{\sigma \in S^n} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

توجه کنید که در این رابطه پایه α نقشی ندارد. به عبارت دیگر دترمینان همه عملگرهایی که نمایش آنها در یک پایه برابر ماتریس A می‌شود با هم برابرند. به این ترتیب می‌توانیم دترمینان یک ماتریس مربعی را برابر دترمینان عملگر خطی‌ای تعریف کنیم که آن ماتریس نمایش آن عملگر است. به عبارت دیگر دترمینان ماتریس مربعی $A = [a_{ij}]$ برابر است با

$$\det A = \sum_{\sigma\in S^n} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(۱)۱}...a_{\sigma(n)n}$$

تا کنون دیدیم یک عملگر خطی حجم همه پایه‌ها را با نسبت ثابتی تغییر می‌دهد که همان دترمینان آن نگاشت خطی است. اگر فضای برداری حقیقی باشد آنگاه حجم پایه‌ها مفهومی شهودی دارد که قابل گسترش به شکل‌های دیگر نیز است و یک عملگر خطی حجم همه اشکال را با همان ضریب دترمینان تغییر می‌دهد.

حال اگر T و U دو عملگر روی فضای برداری حقیقی باشند آنگاه UT نیز عملگری روی آن فضا است و با توجه به شکل زیر داریم $\det UT = \det T.\det U$.



این گزاره برای عملگرهای خطی روی فضاهای برداری دلخواه نیز درست است.

قضیه. برای هر دو عملگر خطی $T,U : V \to V$ روی یک فضای برداری داریم

$$\det UT = \det T.\det U$$

اثبات. اگر یکی از دو عملگر T یا U یک به یک و پوشا نباشد آنگاه UT نیز یک به یک و پوشا نخواهد بود و در نتیجه دو طرف رابطه بالا صفر است و تساوی برقرار است. فرض کنید S یک حجم ناصفر روی V، α یک پایه مرتب برای آن و T و U دو عملگر یک به یک و پوشا روی V باشند. در این صورت $\beta = T(\alpha)$ نیز یک پایه مرتب برای V است. در نتیجه طبق تعریف دترمینان

$$\begin{aligned}\det UT &= \frac{S(UT(\alpha))}{S(\alpha)} = \frac{S(U(\beta))}{S(\alpha)}\\ &= \frac{S(U(\beta))}{S(\beta)}.\frac{S(\beta)}{S(\alpha)} = \frac{S(U(\beta))}{S(\beta)}.\frac{S(T(\alpha))}{S(\alpha)} = \det U.\det T\end{aligned}$$

بنابراین $\det UT = \det T.\det U$.

قضیه. فرض کنید S و S' به ترتیب دو حجم روی V و V^* باشند. حاصل‌ضرب حجم یک پایه مرتب V در حجم دوگان آن مقداری ثابت مستقل از آن پایه است. یعنی مقدار $S(\alpha)S'(\alpha^*)$ ثابت و مستقل از پایه مرتب α است.

اثبات. نشان می‌دهیم که اگر یکی از اعمال پایه‌ای مقدماتی را روی پایه مرتب α انجام دهیم مقدار $S(\alpha)S'(\alpha^*)$ تغییر نمی‌کند. از آنجا که با اعمال پایه‌ای مقدماتی می‌توانیم از یک پایه مرتب به هر پایه دیگر برسیم حاصل عبارت بالا برای همه پایه‌های مرتب مقداری ثابت خواهد بود.

۱. جابجا کردن دو عضو پایه. با جابجا کردن دو عضو iام و jام یک پایه مرتب، دو عضو iام و jام دوگان آن نیز جابجا می‌شوند. طبق ویژگی‌های تابع حجم با این کار هم حجم آن پایه منفی می‌شود و هم حجم دوگان آن. بنابراین مقدار حاصل‌ضرب بالا تغییر نمی‌کند.

۲. ضرب کردن یک عضو پایه در اسکالری ناصفر. با ضرب کردن عضو iام یک پایه در اسکالر ناصفر r، عضو iام پایه دوگان آن در r^{-1} ضرب می‌شود. طبق ویژگی‌های تابع حجم با این کار حجم آن پایه در r ضرب می‌شود و حجم دوگان آن در r^{-1}. بنابراین مقدار حاصل‌ضرب بالا تغییر نمی‌کند.

۳. جمع کردن مضربی از یک عضو با عضو دیگر. با جمع کردن r برابر عضو iام با عضو jام، در پایه دوگان، $-r$ برابر عضو jام با عضو iام جمع می‌شود. طبق ویژگی‌های تابع حجم با این کار نه حجم آن پایه و نه حجم دوگان آن تغییری نمی‌کنند. بنابراین مقدار حاصل‌ضرب بالا تغییر نمی‌کند.

قضیه: فرض کنید $T : V \to V$ یک عملگر خطی و $T^t : V^* \to V^*$ ترانهاده آن است. در این صورت $\det T = \det T^t$.

اثبات: اگر T یک به یک و پوشا نباشد T^t نیز چنین خواهد بود و در نتیجه دو طرف رابطه بالا صفر است. بنابراین فرض می‌کنیم T و در نتیجه T^t یک به یک و پوشا باشد. بنابراین تصویر پایه مرتب α توسط T یک پایه مرتب برای V است که آن را با β نمایش می‌دهیم. فرض کنید دوگان این پایه‌ها به ترتیب α^* و β^* باشند. می‌دانیم $T^t(\beta^*) = \alpha^*$. اگر S و S' به ترتیب دو حجم روی V و V^* باشند طبق قضیه قبل داریم

$$S(\alpha)S'(\alpha^*) = S(\beta)S'(\beta^*)$$

بنابراین

$$\det T = \frac{S(T(\alpha))}{S(\alpha)} = \frac{S(\beta)}{S(\alpha)} = \frac{S(\alpha^*)}{S(\beta^*)} = \frac{S(T^t(\beta^*))}{S(\beta^*)} = \det T^t$$

دترمینان یک ماتریس

فرض کنید $A = [A_1 \mid \cdots \mid A_n]$ یک ماتریس $n \times n$ با ستون‌های $A_1, \ldots, A_n$ باشد. از آنجا که نمایش عملگر $L_A : F^n \to F^n; X \mapsto AX$ در پایه استاندارد F^n برابر ماتریس A است داریم $\det A = \det L_A$. بنابراین. اگر $\{e_1, \ldots, e_n\}$ پایه استاندارد و S حجم استاندارد F^n باشند آنگاه

$$\det A = \det L_A = \frac{S(L_A(e_1), \ldots, L_A(e_n))}{S(e_1, \ldots, e_n)} = S(L_A(e_1), \ldots, L_A(e_n)) = S(A_1, \ldots, A_n)$$

بنابراین دترمینان یک ماتریس $n \times n$ برابر حجم استاندارد ستون‌هایش به عنوان بردارهایی در F^n است. در نتیجه ویژگی‌های تابع حجم برای دترمینان یک ماتریس نیز برقرار است.

۱. دترمینان نسبت به هر ستون ماتریس خطی است.

$$\det[\cdots \mid A_i + rA_i' \mid \cdots] = \det[\cdots \mid A_i \mid \cdots] + r\det[\cdots \mid A_i' \mid \cdots]$$

۲. اگر دو ستون یک ماتریس با هم برابر باشند آنگاه دترمینان آن صفر است.

$$\det[\cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots] = 0$$

۳. با جابجایی دو ستون یک ماتریس دترمینان آن منفی می‌شود.

$$\det[\cdots \mid A_j \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots] = -\det[\cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots]$$

۴. با جمع کردن مضربی از یک ستون با ستون دیگر دترمینان ماتریس تغییر نمی‌کند.

$$\det[\cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_j + rA_i \mid \cdots] = \det[\cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots]$$

به علاوه دترمینان ماتریس‌ها ویژگی‌های دترمینان عملگرهای خطی را نیز دارند.

۵. اگر A و B دو ماتریس $n\times n$ باشند آنگاه $\det(A.B)=\det A.\det B$.

اثبات. فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی F و α یک پایه برای آن باشد. عملگرهای T و U روی V را به گونه‌ای درنظر بگیرید که $[T]_\alpha^\alpha=A$ و $[U]_\alpha^\alpha=B$. در این صورت $[TU]_\alpha^\alpha=[T]_\alpha^\alpha[U]_\alpha^\alpha=AB$. بنابراین

$$\det A.\det B=\det T.\det U=\det(TU)=\det(A.B)$$

۶. برای هر ماتریس مربعی $\det A=\det A^t$.

اثبات. اگر A ماتریس نمایش عملگر $T:V\to V$ در پایه α باشد آنگاه A^t ماتریس نمایش عملگر $T^t:V^*\to V^*$ در پایه α^* است و از آنجا که دترمینان T و T^t برابرند دترمینان A و A^t نیز باهم خواهند بود.

از آنجا که سطرهای ماتریس A همان ستون‌های ماتریس A^t هستند همه ویژگی‌های (۱) تا (۴) که برای ستون‌های ماتریس بیان شد در مورد سطرهای ماتریس نیز برقرار است.

۷. دترمینان نسبت به هر سطر خطی است.

$$\det\begin{bmatrix}\vdots\\ \nu_i+r\nu_i'\\ \vdots\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\vdots\\ \nu_i\\ \vdots\end{bmatrix}+r\det\begin{bmatrix}\vdots\\ \nu_i'\\ \vdots\end{bmatrix}$$

۸. اگر دو سطر یک ماتریس با هم برابر باشند آنگاه دترمینان آن صفر است.

۹. با جابجایی دو سطر یک ماتریس دترمینان آن منفی می‌شود.

۱۰. با جمع کردن مضربی از یک سطر با سطر دیگر دترمینان تغییر نمی‌کند.

$$\det\begin{bmatrix}\vdots\\ \nu_i\\ \vdots\\ \nu_i\\ \vdots\end{bmatrix}=\text{۰},\qquad \det\begin{bmatrix}\vdots\\ \nu_j\\ \vdots\\ \nu_i\\ \vdots\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}\vdots\\ \nu_i\\ \vdots\\ \nu_j\\ \vdots\end{bmatrix},\qquad \det\begin{bmatrix}\vdots\\ \nu_i\\ \vdots\\ \nu_j+r\nu_i\\ \vdots\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\vdots\\ \nu_j\\ \vdots\\ \nu_i\\ \vdots\end{bmatrix}$$

۱۱. دترمینان ماتریس همانی برابر یک است. زیرا ماتریس همانی نمایش ماتریسی نگاشت همانی است که به وضوح حجم را تغییر نمی‌دهد. این موضوع از رابطه‌ای که دترمینان یک ماتریس را بوسیله درایه هایش ارائه می‌کند نیز به سادگی بدست می‌آید. همچنین با توجه به اینکه دترمینان یک ماتریس برابر حجم استاندارد ستون‌هایش به عنوان بردارهایی در F^n است و ستون‌های ماتریس همانی پایه استاندارد F^n را تشکیل می‌دهد روشن است که دترمینان ماتریس همانی برابر یک است.

۱۲. دترمینان تنها تابعی به شکل $D:M_{n\times n}(F)\to F$ است که دارای سه ویژگی زیر است.

الف) D نسبت به هر ستون خطی است. یعنی برای هر i داریم

$$D([\cdots\mid\alpha_i+r\alpha'\mid\cdots])=D([\cdots\mid\alpha_i\mid\cdots])+rD([\cdots\mid\alpha'\mid\cdots])$$

ب) اگر دو ستون ماتریس A برابر باشند آنگاه $D(A)=\text{۰}$.

ج) مقدار این تابع روی ماتریس همانی برابر یک است. یعنی $D(I)=\text{۱}$.

اثبات. هر مجموعه مرتب n تایی از بردارهای در F^n یک ماتریس $n \times n$ را تشکیل می‌دهند که آن بردارها به ترتیب در ستون‌های آن ماتریس قرار می‌گیرند. بنابراین تابع D با ویژگی‌های بالا یک تابع حجم روی F^n است که مقدار آن روی پایه استاندارد برابر یک شده است. یعنی این تابع همان حجم استاندارد روی F^n است و به عبارت دیگر همان تابع دترمینان روی ماتریس‌ها است.

۱۳. دترمینان ماتریس‌های بالا مثلثی یا پایین مثلثی برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی آن.

اثبات. با توجه به اینکه ترانهاده یک ماتریس پایین مثلثی ماتریسی بالا مثلثی است و دترمینان یک ماتریس برابر دترمینان ترانهاده آن است کافی است این موضوع را برای ماتریس‌های بالا مثلثی نشان دهیم. توجه کنید که در ماتریس بالا مثلثی A، درایه ijام زمانی می‌تواند ناصفر باشد که $i \le j$. حال فرض کنید $\sigma \in S^n$ یک جایگشت دلخواه باشد. حاصل‌ضرب $a_{1\sigma(1)}...a_{n\sigma(n)}$ تنها زمانی می‌تواند ناصفر باشد که همه این درایه‌ها ناصفر باشند، یا به عبارت دیگر

$$1 \le \sigma(1),....,n \le \sigma(n)$$

با توجه به اینکه $(\sigma(1),...,\sigma(n))$ همان $(1,...,n)$ است اما باترتیب متفاوت تنها جایگشتی که در رابطه بالا صدق می‌کند جایگشت همانی است؛ زیرا $\sigma(n)$ یکی از اعداد $\{1,...,n\}$ است و با توجه به شرط بالا باید داشته باشیم $\sigma(n)=n$. بنابراین $\sigma(n-1)$ یکی از اعداد $\{1,...,n-1\}$ است که با توجه به شرط بالا باید داشته باشیم $\sigma(n-1)=n-1$. به صورت مشابه باید داشته باشیم $\sigma(n-2)=n-2$ و ... و $\sigma(1)=1$. از آنجا که علامت این جایگشت نیز یک است داریم

$$\det A = \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(1)1}...a_{\sigma(n)n} = a_{11}a_{22}...,a_{nn}$$

روش عملی برای محاسبه دترمینان یک ماتریس

اگرچه ویژگی‌های بسیاری از دترمینان را به کمک رابطه

$$\det A = \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(1)1}...a_{\sigma(n)n}$$

بدست آوردیم اما محاسبه کردن دترمینان یک ماتریس به کمک این رابطه زمانی که ابعاد ماتریس کمی بزرگ باشد کار دشواری است؛ زیرا تعداد جملات مجموع بالا برابر $n!$ است و این مقدار با بزرگ شدن n به سرعت بزرگ می‌شود. اما به کمک ویژگی‌های بدست آمده برای دترمینان می‌توان روشی عملی برای محاسبه آن ارائه کرد. با توجه به مطالب بیان شده تغییرات دترمینان یک ماتریس در طی هر یک از اعمال سطری مقدماتی روشن است.

۱. جابجا کردن دو سطر. با جابجا کردن دو سطر iام و jام ($i \neq j$) ماتریس A، ماتریس $\tilde{A}$ بدست می‌آید که برای آن داریم

$$\det \tilde{A} = -\det A$$

اگر E ماتریس مقدماتی متناظر این عمل سطری مقدماتی باشد آنگاه $\tilde{A}=EA$ و $\det E=-1$. زیرا E ماتریس حاصل از جابجا کردن سطرهای iام و jام ماتریس همانی است.

۲. ضرب کردن یک سطر در اسکالری ناصفر. با ضرب کردن سطر iام ماتریس A در اسکالر ناصفر r، ماتریس $\tilde{A}$ بدست می‌آید که برای آن داریم

$$\det \tilde{A} = r\det A$$

مانند بالا اگر E ماتریس مقدماتی متناظر این عمل سطری مقدماتی باشد آنگاه $\tilde{A}=EA$ و $\det E = r$. زیرا E ماتریس حاصل از ضرب کردن سطر iام ماتریس همانی در عدد ناصفر r است.

۳. جمع کردن ضریبی از یک سطر با سطر دیگر. با جمع کردن r برابر سطر iام ماتریس A با سطر jام آن ماتریس $\tilde{A}$ بدست می‌آید. که برای آن داریم

$$\det \tilde{A} = \det A$$

در این حالت نیز مانند بالا $\tilde{A} = EA$ و $\det E = 1$. زیرا E ماتریس حاصل از جمع کردن r برابر سطر iام ماتریس همانی با سطر jام آن است.

می‌دانیم که هر ماتریسی را می‌توان با این اعمال به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی تبدیل کرد. اگر ماتریس تحویل شده سطری پلکانی بدست آمده دارای سطر صفر باشد واضح است که دترمینان آن صفر است. در نتیجه دترمینان ماتریس اولی نیز باید صفر باشد. اگر ماتریس حاصل هیچ سطر صفری نداشته باشد از آنجا که ماتریس مربعی است و درایه‌های پیشروی سطرها به صورت پلکانی قرار گرفته اند، ماتریس حاصل باید ماتریس همانی باشد. به عبارت دیگر تنها ماتریس تحویل شده سطری پلکانی مربعی که دارای سطر صفر نیست ماتریس همانی است که دترمینان آن برابر یک است. بنابراین یک راه عملی و مناسب برای محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی بدست می‌آید.

به عبارت دیگر فرض کنید $\tilde{A}$ از انجام k عمل سطری مقدماتی روی ماتریس A بدست آمده باشد و $E_1,\ldots,E_k$ ماتریس‌های مقدماتی متناظر با آن اعمال باشند.

$$\tilde{A} = E_k \ldots E_1 A \quad \Rightarrow \quad \det \tilde{A} = \det E_k \ldots \det E_1 . \det A$$

دترمینان هریک از E_i ها که معلوم است. بنابراین اگر $\tilde{A}$ ماتریسی باشد که دترمینان آن به سادگی قابل محاسبه باشد آنگاه دترمینان ماتریس A نیز به سادگی محاسبه می‌شود. می‌توان با انجام اعمال سطری مقدماتی فرض کرد $\tilde{A}$ تحویل شده سطری مقدماتی است. در این صورت اگر $\tilde{A}$ دارای سطر صفر باشد آنگاه $\det \tilde{A} = 0$ و این نتیجه می‌دهد $\det A = 0$. اگر $\tilde{A}$ دارای سطر صفر نباشد آنگاه باید ماتریس همانی باشد. در این حالت داریم

$$I = E_k \ldots E_1 A \Rightarrow 1 = \det E_k \ldots \det E_1 \det A \Rightarrow \det A = (\det E_k \ldots \det E_1)^{-1}$$

قاعده کرامر

در مبحث حل دستگاه‌های خطی دیدیم برای حل دستگاه

$$AX = b$$

با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس افزوده $[A \mid b]$ آن را به ماتریس $[\tilde{A} \mid \tilde{b}]$ تبدیل می‌کنیم که $\tilde{A}$ تحویل شده سطری پلکانی است. در حالتی که A مربعی باشد و ماتریس تحویل شده سطری پلکانی آن همانی باشد داریم

$$\begin{aligned}[I \mid \tilde{b}] &= E_k \ldots E_1 [A \mid b] = E_k \ldots E_1 [A_1 \mid \cdots \mid A_n \mid b] \\ &= [E_k \ldots E_1 A_1 \mid \cdots \mid E_k \ldots E_1 A_n \mid E_k \ldots E_1 b]\end{aligned}$$

که در بالا A_i ستون iام ماتریس A است. بنابراین $E_k \ldots E_1 A_i = e_i$ که ستون e_i بردار iام پایه استاندارد F^n است. اگر $x_1,\ldots,x_k$ درایه‌های ستون X و $\tilde{b}_1,\ldots,\tilde{b}_n$ درایه‌های ستون $\tilde{b}$ باشند آنگاه

$$\begin{aligned}x_i = \tilde{b}_i &= \det[e_1 \mid \cdots \mid \tilde{b} \mid \cdots \mid e_n] \\ &= \det[E_k \ldots E_1 A_1 \mid \cdots \mid \ \ \Big| \ldots \Big| E_k \ldots E_1 b \mid \cdots \mid E_k \ldots E_1 A_n] \\ &= \det E_k \ldots E_1 [A_1 \mid \cdots \mid b \mid \cdots \mid A_n] \\ &= \det E_k \ldots E_1 . \det A^{(i)} = \frac{\det A^{(i)}}{\det A}\end{aligned}$$

که در بالا $A^{(i)}$ ماتریس حاصل از قرار دادن ستون b بجای ستون iام ماتریس A است. به این رابطه قاعده کرامر برای بدست آوردن جواب دستگاه خطی می‌گویند. توجه کنید که این رابطه زمانی می‌تواند استفاده شود که ماتریس A مربعی و وارون پذیر باشد.

بسط دترمینان نسبت به یک ستون یا یک سطر

فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ تایی، A^{ij} ماتریس $(n-1)\times(n-1)$ تایی حاصل از حذف کردن سطر و ستون درایه ijام ماتریس A و a_{ij} درایه ijام ماتریس A باشد (یعنی $(A)_{ij}=a_{ij}$). در این صورت

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A^{ij}\qquad j=1,\dots,n$$

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A^{ij}\qquad i=1,\dots,n$$

اثبات. راه حل اول.
نشان می‌دهیم تابع

$$D(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A^{ij}$$

ویژگی‌های دترمینان را دارا است و از یکتایی دترمینان نتیجه می‌گیریم که $D(A)=\det A$.
خطی بودن نسبت به هر ستون. می‌خواهیم نشان دهیم تابع بالا نسبت به ستون j_0ام خطی است. فرض کنید همه ستون‌های ماتریس‌های A، B و C بجز ستون j_0ام با هم برابرند و ستون j_0ام ماتریس C برابر است با حاصل جمع r برابر ستون j_0ام ماتریس A با ستون j_0ام ماتریس B. به عبارت دیگر

$$\begin{aligned}A&=\left[\alpha_1\middle|\cdots\middle|\alpha_{j_0}\middle|\cdots\middle|\alpha_n\right]\\B&=\left[\alpha_1\middle|\cdots\middle|\alpha'_{j_0}\middle|\cdots\middle|\alpha_n\right]\\C&=\left[\alpha_1\middle|\cdots\middle|r\alpha_{j_0}+\alpha'_{j_0}\middle|\cdots\cdots\middle|\alpha_n\right]\end{aligned}$$

اگر $j\neq j_0$ آنگاه با توجه به خطی بودن دترمینان نسبت به ستون‌ها داریم

$$\det C^{ij}=r\det A^{ij}+\det B^{ij}$$

همچنین با توجه به فرض اولیه در مورد ماتریس‌های A,B,C ، $c_{ij}=a_{ij}=b_{ij}$.
اگر $j=j_0$، آنگاه $A^{ij_0}=B^{ij_0}=C^{ij_0}$ و در نتیجه

$$\det A^{ij_0}=\det B^{ij_0}=\det C^{ij_0}$$

همچنین $c_{ij_0}=ra_{ij_0}+b_{ij_0}$. به این ترتیب

$$\begin{aligned}D(C)&=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}c_{ij}\det C^{ij}\\&=(-1)^{i+j_0}(ra_{ij_0}+b_{ij_0})\det C^{ij_0}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq j_0}}^{n}(-1)^{i+j}c_{ij}(r\det A^{ij}+\det B^{ij})\\&=r\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A^{ij}+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{ij}\det B^{ij}=rD(A)+D(B)\end{aligned}$$

مقدار این تابع روی ماتریس‌هایی که دو ستون یکسان دارند صفر است. اگر دو ستون $j_1 < j_2$ در ماتریس A با هم برابر باشند. در این حالت اگر $j \neq j_1, j_2$ آنگاه A^{ij} نیز دارای دو ستون برابر است و در نتیجه $\det A^{ij} = 0$. بنابراین با توجه به‌این که $a_{ij_1} = a_{ij_2}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} D(A) &= (-1)^{i+j_1} a_{ij_1} \det A^{ij_1} + (-1)^{i+j_2} a_{ij_2} \det A^{ij_2} \\ &= (-1)^{i+j_1} a_{ij_1} \left[\det A^{ij_1} + (-1)^{j_2 - j_1} \det A^{ij_2} \right] \end{aligned}$$

اما همه ستون‌های دو ماتریس A^{ij_1} و A^{ij_2} با هم برابرند ولی با ترتیبی کمی متفاوت ظاهر شده اند

ستون $j_2 - 1$ ماتریس A_{ij_1} برابر ستون j_1ام A_{ij_2} است و با جابجایی ستون‌های ماتریس A_{ij_1} ماتریس A_{ij_2} بدست می‌آید. بنابراین $\det A^{ij_1} = (-1)^{j_2 - j_1 - 1} \det A^{ij_2}$. بنابراین

$$D(A) = (-1)^{i+j_1} a_{ij_1} . \det A^{ij_1} \left[1 + (-1)^{j_2 - j_1} (-1)^{j_2 - j_1 - 1} \right] = 0$$

مقدار این تابع روی ماتریس همانی برابر یک است. طبق تعریف تابع D داریم

$$D(I_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (I_n)_{ij} \det (I_n)^{ij} = (-1)^{2i} . 1 . \det (I_n)^{ii} = \det I_{n-1} = 1$$

راه حل دوم.

منظور از یک قطر پراکنده در یک ماتریس $n \times n$ تایی، n درایه آن است به گونه‌ای که در هر سطر و در هر ستون دقیقاً یک درایه ظاهر شده باشد.

برای یک قطر پراکنده فرض کنید از سطر iام درایه $\alpha(i)$ام آن و از ستون jام درایه $\beta(j)$ام آن در قطر پراکنده ظاهر شده باشند. α و β دو جایگشت $\{1, ..., n\}$ هستند. درایه‌های این قطر پراکنده به کمک α و β به صورت زیر مشخص می‌شوند.

$$\{a_{1\alpha(1)}, ..., a_{n\alpha(n)}\} = \{a_{\beta(1)1}, ..., a_{\beta(n)n}\}$$

بنابراین α و β وارون یکدیگر هستند و علامت آنها به عنوان جایگشت با یکدیگر برابر است. علامت این قطر پراکنده را برابر علامت α (یا β!) تعریف می‌کنیم. دقت کنید که با جابجا کردن دو سطر iام و jام ماتریس، این قطر پراکنده به قطر پراکنده $\{a_{1\alpha'(1)}, ..., a_{n\alpha'(n)}\}$ تبدیل می‌شود که برای هر $k \neq i, j$ داریم $\alpha'(k) = \alpha(k)$ و همچنین $\alpha'(i) = \alpha(j)$ و $\alpha'(j) = \alpha(i)$.

بنابراین علامت این قطر پراکنده منفی علامت قطر پراکنده اولی است. به صورت مشابه اگر جای دو ستون ماتریس را عوض کنیم علامت قطر پراکنده جدید منفی علامت قطر پراکنده قبلی خواهد بود. از آنجا که قطر اصلی ماتریس متناظر جایگشت همانی است و علامت آن برابر ۱ است، علامت یک قطر پراکنده برابر ۱ است اگر بتوان آن را با زوج جابجایی سطرها و ستون‌های ماتریس به قطر اصلی تبدیل کرد. در غیر این صورت علامت آن ۱− است. با توجه به این موضوع و رابطه

$$\det A = \sum_{\alpha \in S^n} \varepsilon_\alpha a_{1\alpha(1)} ... a_{n\alpha(n)}$$

برای محاسبه دترمینان ماتریس باید برای هر قطر پراکنده حاصل ضرب درایه‌های آن را بدست آوریم و در علامت آن قطر ضرب کنیم و عددهای بدست آمده را با هم جمع کنیم. از طرفی دیگر

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\alpha\in S^n}\varepsilon_\alpha a_{1\alpha(1)}\ldots a_{n\alpha(n)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{\alpha\in S^n\\ \alpha(i)=j}}\varepsilon_\alpha a_{1\alpha(1)}\ldots a_{n\alpha(n)}\\ &= a_{i1}\sum_{\alpha(i)=1}\varepsilon_\alpha a_{1\alpha(1)}\ldots a_{i-1\alpha(i-1)}a_{i+1\alpha(i+1)}\ldots a_{n\alpha(n)} +\\ &\qquad \cdots + a_{in}\sum_{\alpha(i)=n}\varepsilon_\alpha a_{1\alpha(1)}\ldots a_{i-1\alpha(i-1)}a_{i+1\alpha(i+1)}\ldots a_{n\alpha(n)}\end{aligned}$$

مجموع jام در رابطه بالا جمع روی همه قطرهای پراکنده ماتریس حاصل از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A است. بنابراین به نظر می‌آید که رابطه تنگاتنگی با دترمینان این ماتریس دارد. یک قطر پراکنده ماتریس را که شامل درایه ijام است در نظر بگیرید (یعنی برای آن داریم $\alpha(i) = j$) با جابجا کردن ستون jام به صورت متوالی با ستون‌های سمت چپ خود، ستون jام به ستون اول تبدیل می‌شود ولی ترتیب قرار گرفتن ستون‌های دیگر نسبت به هم عوض نمی‌شود. برای این کار $j-1$ جابجایی ستون‌ها لازم بود. حال با جابجا کردن سطر iام ماتریس حاصل با سطرهای بالایی، سطر iام به سطر اول تبدیل می‌شود و ترتیب قرار گرفتن سطرهای دیگر نیز نسبت به هم تغییری نمی‌کند. تعداد این جابجایی‌ها نیز برابر $i-1$ است. با این کار درایه ijام قطر پراکنده اول به درایه سطر اول و ستون اول ماتریس تبدیل می‌شود و ماتریس حاصل از حذف سطر و ستون این درایه با ماتریس حاصل از حذف سطر و ستون اول ماتریس جدید هیچ تفاوتی نمی‌کند. اگر با k جابجایی سطرها و ستون‌ها در ماتریس کوچکتر، قطر پراکنده به قطر اصلی تبدیل شود، قطر پراکنده اولی با $k+i+j-2$ جابجایی سطرها و ستون‌ها به قطر اصلی ماتریس بزرگ تبدیل می‌شود. بنابراین علامت قطر پراکنده ماتریس حاصل از حذف سطر iام و ستون jام برابر $(-1)^{i+j}$ برابر علامت قطر پراکنده اولی است. به‌این ترتیب

$$\sum_{\alpha(i)=j}\varepsilon_\alpha a_{1\alpha(1)}\ldots a_{i-1\alpha(i-1)}a_{i+1\alpha(i+1)}\ldots a_{n\alpha(n)} = (-1)^{i+j}\det A^{ij}$$

در نتیجه

$$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A^{ij}$$

وارون یک ماتریس وارون‌پذیر به کمک دترمینان

قضیه: فرض کنید A ماتریسی وارون‌پذیر و A^{ij} ماتریس حاصل از حذف کردن سطر و ستون درایه ijام ماتریس A باشد. در این صورت

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A}.(-1)^{i+j}\det A^{ji}$$

اثبات .فرض کنید C ماتریسی با درایه‌های بالا باشد یعنی

$$(C)_{ij} = \frac{1}{\det A}.(-1)^{i+j}\det A^{ji}$$

آنگاه درایه ij ام ماتریس AC برابر است با

$$\begin{aligned}(AC)_{ij} &= (A)_{i1}(C)_{1j} + \cdots + (A)_{in}(C)_{nj}\\ &= \frac{1}{\det A}\Big(a_{i1}(-1)^{1+j}\det A^{j1} + a_{i2}(-1)^{2+j}\det A^{j2} + \cdots + a_{in}(-1)^{n+j}\det A^{jn}\Big)\end{aligned}$$

عبارت داخل پرانتز بسیار شبیه بسط دترمینان ماتریس A نسبت به سطر jام است ولی بجای درایه‌های $a_{j1},\dots,a_{jn}$ درایه‌های $a_{i1},\dots,a_{in}$ ظاهر شده اند. این عبارت در واقع برابر دترمینان $\tilde{A}$ است که همه سطرهای آن بجز سطر jام با سطرهای A برابر است و سطر jام آن نیز برابر سطر iام ماتریس A است. زیرا

$$(\tilde{A})_{j1} = (A)_{i1} = a_{i1},\dots,(\tilde{A})_{jn} = (A)_{jn} = a_{jn} \qquad \tilde{A}^{j1} = A^{j1},\dots,\tilde{A}^{jn} = A^{jn}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\det\tilde{A} &= (-1)^{1+j}(\tilde{A})_{j1}\det\tilde{A}^{j1} + \cdots + (-1)^{n+j}(\tilde{A})_{jn}\det\tilde{A}^{jn}\\ &= (-1)^{1+j}a_{i1}\det A^{j1} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{jn}\det A^{jn}\end{aligned}$$

اگر $i \neq j$ آنگاه ماتریس $\tilde{A}$ دارای دوسطر مساوی است و در نتیجه دترمینان آن صفر است. اگر $i = j$ آنگاه $\tilde{A} = A$ و در نتیجه دترمینان آن برابر دترمینان ماتریس A است. بنابراین $(AC)_{ij}$ در حالت $i \neq j$ برابر صفر است و در حالت $i = j$ برابر یک است. در نتیجه $AC = I$، یعنی ماتریس C وارون ماتریس A است.