گزیده
مسائل جبر خطی
همراه با نکات تستی

شامل:

- حل تشریحی مسائل منتخب کارشناسی ارشد
- حل تشریحی مسائل مسابقات دانشجویی

دکتر مسعود نیکوکار (دانشگاه صنعتی امیرکبیر)
عباس مؤمنی

نشر فرناز

به نام خدا

گزیده مسائل جبر خطی

همراه با نکات تستی

مؤلفین: دکتر مسعود نیکوکار

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)

عباس مؤمنی

۱۳۷۹

نیکوکار، مسعود، ۱۳۳۲ -
گزیده مسائل جبر خطی همراه با نکات تستی/ مولفین مسعود نیکوکار، عباس مومنی.— تهران: نشر فرناز، ۱۳۷۹.
۲۴۸ ص.
ISBN 64-6811-37-x: ۱۶۰۰۰ ریال
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا.
۱.جبر خطی -- کتابهای درسی -- راهنمای آموزشی (متوسطه). ۲.جبر خطی -- مسائل، تمرینها و غیره (متوسطه). الف.مومنی، عباس، ۱۳۵۶ - .
ب.عنوان.

QA۱۸۴/۵/ن۹ک۴ ۵۱۲/۵

کتابخانه‌ملی‌ایران ۷۹-۱۵۷۱۲م

نام کتاب .... گزیده مسائل جبر خطی همراه با نکات تستی
مؤلفین .... دکتر مسعود نیکوکار - عباس مؤمنی
ناشر .... نشر فرناز
حروفچینی .... یاسمی
طرح جلد .... نشر پژوهان (معبودیان)
لیتوگرافی و چاپ .... مهر
سال نشر ۱۳۷۹
نوبت چاپ .... اول
تیراژ .... ۲۰۰۰ جلد
قیمت ....۲۰۰۰۰.... [redacted] ریال

شابک: ۹۶۴ - ۶۸۱۱ - ۳۷ - X ISBN: 964 - 6811 - 37- X

تلفن مرکز پخش: ۴۶۵۳۹۸۱ - ۶۴۰۵۵۴۸ تلفن همراه: ۰۹۱۱۲۳۰۱۹۰۵
تلفکس: ۶۴۰۵۵۴۸

بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه

کتاب حاضر مشتمل بر دویست و ده مسأله در زمینه جبرخطی است. این مسائل از کتابهای ترجمه شده هافمن، هراشتاین، بلوم و گودمان و کتابهای ترجمه نشده John Sergelange، Marcus، Marvin، Allen Ross، Trving Kaplangsky انتخاب شده‌اند. هدف از انتخاب چنین مسائلی این است که دانشجویان را در حل مسائل جبر خطی هرچه بیشتر توانا کند و تکنیکهای مختلف و مشکل حل مسائل جبر خطی را به آنها بیاموزد.

در هر فصل بخشی به عنوان نکات تستی آمده است که دانشجویان را برای پاسخگوئی به آزمونهای تستی جبر خطی آماده می‌کند. لازم به توضیح است که نکات تستی به صورت درست یا نادرست مطرح شده‌اند. در فصل آخر نیز تعدادی مسأله بدون پاسخ آمده است که اگر مسائل فصل‌های قبل را خوب مطالعه کرده باشید قادر به حل آنها خواهید بود.

در اینجا لازم می‌دانیم از سرکار خانم بتول ضیائی که در حل برخی مسائل ما را یاری کردند قدردانی کنیم. همچنین از خانم مینا بیگی و مجتبی مؤمنی که در زمینه پیش‌نویس متن و ویراستاری کتاب با ما همکاری کردند سپاسگزاریم.

امید است این کتاب بتواند جای خالی کتابهای حل مسأله در این سطح را در زمینه جبر خطی پر نماید و مورد استفاده کامل دانشجویان عزیز قرار گیرد.

از کلیه اساتید و دانشجویان عزیز تقاضا داریم که مؤلفین را از نظرات اصلاحی خود آگاه سازند.

دکتر مسعود نیکوکار
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

عباس مؤمنی

فهرست مطالب

فصل اول

فضای برداری

۱.۱ تعاریف و قضایا

تعریف: اگر F یک میدان و V یک گروه آبلی جمعی باشد.و یک ضرب عددی برای ضرب هر عضو x از F، در هر عضو v از V تعریف شده باشد، به طوری که عضو منحصر بفرد xv از V را نتیجه دهد و به ازای هر x و y از F و هر u و v از V داشته باشیم:

الف: $x(u+v) = xu + xv$.

ب: $(x+y)u = xu + yu$.

ج: $(xy)v = x(yv)$.

د: $1v = v$.

در این صورت V یک فضای برداری روی میدان F نامیده می‌شود.

تعریف: اگر V یک فضای برداری روی میدان F و W زیر مجموعه‌ای از V باشد.آنگاه W یک

زیر فضای V نامیده می‌شود.هرگاه بااعمال تعریف شده روی V یک فضای برداری روی میدان F باشد.

قضیه ۱ـ۱: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و W زیر مجموعه‌ای از V باشد.آنگاه W یک زیر فضای V است اگر و تنها اگر دارای خواص زیر باشد:

الف: اگر $a, b \in W$ آنگاه $a + b \in W$.

ب: اگر $a \in W, \lambda \in F$ آنگاه $\lambda a \in W$.

تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و A و B زیر فضاهایی از V باشند آنگاه حاصلجمع دو زیر فضا بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

قضیه ۱ـ۲: اگر A و B زیر فضاهای، فضای برداری V باشند، آنگاه $A + B$ و $A \cap B$ نیز زیر فضاهای V می‌باشند.

تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و A زیر مجموعه‌ای ناتهی از V باشد.در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$[A] = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n | n \in N, \lambda_i \in F, v_i \in A, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

قضیه ۱ـ۳: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و A زیر مجموعه ناتهی از V باشد.آنگاه $[A]$ زیر فضای V است.

تعریف: زیر مجموعه ناتهی A از فضای برداری V را مولد V گوییم، هرگاه $[A] = V$.

تعریف: فرض کنید V فضای برداری روی میدان F باشد، بردارهای $v_1, v_2, \cdots v_n$ عضو V را وابسته خطی گوییم هرگاه اسکالرهای $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ که همگی صفر نیستند، موجود باشند به

طوری که:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$$

بردارهای $u_1, u_2, \cdots, u_n$ از اعضای مجموعه V را مستقل خطی گویند، هرگاه وابسته خطی نباشند.

تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد.زیر مجموعه B از V را یک پایه V گوییم.هرگاه B مستقل خطی باشد و زیر مجموعه B مولد فضای V باشد (فضای V را تولید کند.)

قضیه ۱ـ۴: تعداد بردارهای تمام پایه‌های یک فضای برداری مساوی است.

تعریف: بعد فضای برداری با بعد متناهی V که به صورت $\dim(V)$ نوشته می‌شود عبارت است از تعداد بردارهای یک مبنای V.

قضیه ۱ـ۵: هر مجموعه از بردارهای مستقل خطی یک فضای برداری با بعد متناهی را می‌توان به یک مبنا برای آن فضا توسعه داد.

نتیجه ۱ـ۵ـ۱: در هر فضای برداری n بعدی هر $n+1$ بردار وابستگی خطی دارند.

نتیجه ۱ـ۵ـ۲: اگر W یک زیر فضای V باشد، آنگاه $\dim(W) \leq \dim(V)$ همچنین اگر $\dim(W) = \dim(V)$ آنگاه $W = V$.

قضیه ۱ـ۶: اگر A و B دو زیر فضا از فضای برداری با بعد متناهی V روی میدان F باشد، آنگاه $\dim(A) + \dim(B) = \dim(A \cap B) + \dim(A + B)$.

تعریف: اگر $W_1, \cdots, W_r$ زیر فضاهایی از V باشند مجموع $W_1 + \cdots + W_r$ را حاصلجمع مستقیم زیر فضاها می‌نامیم و به صورت $W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ نمایش می‌دهیم هرگاه هر بردار v در $W_1 + \cdots + W_r$ به صورت یک عبارت منحصر بفرد مانند $v = w_1 + \cdots + w_r$ که در آن $w_1 \in W_1, \cdots, w_r \in W_r$ نوشته شود.

قضیه ۱ـ۷: اگر $W_1, \cdots, W_r$ زیر فضاهایی با بعد متناهی از فضای برداری V باشند آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:

الف: حاصلجمع $W_1 + \cdots + W_r$ مستقیم است.

ب: به ازای هر $i(1 \leq i \leq r)$، $W_i \cap W_i^* = \{0\}$ که در آن:

$$W_i^* = W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_r$$

ج: $\dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_r) = \dim(W_1) + \dim(W_2) + \cdots + \dim(W_r)$

د: به ازای هر پایه انتخابی B_i برای $W_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ مجموعه‌های $B_1, \cdots, B_r$ دو به دو جدا از هم هستند و اجتماع آنها پایه‌ای برای $W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ می‌باشد.

۲.۱ مسائل برگزیده

★ ۱ـ فرض کنید V با بعد متناهی و W, X زیر فضاهای V باشند به قسمی که $V = W + X$ ثابت کنید زیر فضای X^* از X وجود دارد که $V = W \oplus X^*$

۲ـ فرض کنید A, B, C سه زیر فضای V باشند به طوری که

$$A \cap B = A \cap C, \qquad A + B = A + C, \qquad B \subseteq C$$

نشان دهید $B = C$.

۳ـ اگر مجموعه $\{x_1, \cdots, x_n\}$ فضای V را تولید کند ولی هیچ زیر مجموعه کوچکتر از آن V را تولید نکند نشان دهید که $\{x_1, \cdots, x_n\}$ پایه‌ای برای V است.

۴ـ فرض کنید S مجموعه بردارهایی در R^n باشند که دارای دقیقاً دو مولفه غیرصفرند و این مولفه‌های غیر صفر هر دو یک باشند.نشان دهید که S یک مجموعه مستقل خطی از بردارها است

اگر و تنها اگر $n \leq ۳$.

۵ـ فرض کنید $\{x_۱, \cdots, x_p\}$ در فضای V باشند ثابت کنید اگر $\{y_۱, y_۲, \cdots, y_p, y_{p+۱}\}$ ترکیب خطی از x_iها باشند آنگاه $\{y_۱, y_۲, \cdots, y_p, y_{p+۱}\}$ بستگی خطی دارند.

۶ـ فرض کنید x, y دو بردار از فضای برداری V روی میدان F باشند و U یک زیر فضای آن باشد.بعلاوه فرض کنید W زیر فضای تولید شده توسط x, U باشد و Y زیر فضای تولید شده توسط y, U باشند.ثابت کنید اگر $y \in W - U$ آنگاه $x \in Y$.

۷ـ فرض کنید V فضای سه تایی‌ها روی میدان F باشد زیر مجموعه‌های U, W را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W = \{(a, a, a) | a \in F\} \qquad U = \{(a, b, a+b) | a, b \in F\}$$

تحقیق کنید که U, W زیر فضای V هستند و $V = U \oplus W$.

۸ـ فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد و $char(F) \neq ۲$ اگر α, β, γ اعضایی از V باشند به طوری که $\alpha+\beta, \alpha+\gamma, \beta+\gamma$ مستقل خطی باشند.ثابت کنید α, β, γ مستقل خطی هستند.

۹ـ فرض کنید R میدان اعداد حقیقی و V مجموعه تمام دنباله‌های نامتناهی $< a_n >$:$a_n \in R$ باشد.ثابت کنید V یک فضای برداری روی R بوده و $W = \{< x_n > | \sum x_n^۲$ متقارب است $\}$ یک زیر فضای V است.

۱۰ـ اگر V فضای برداری با بعد متناهی n روی میدان F باشد و $V_۱, V_۲$ زیر فضاهای V باشند به طوری که $\dim(V_۱) > \frac{n}{۲}, \dim(V_۲) > \frac{n}{۲}$ در این صورت $V_۱ \cap V_۲ \neq \{۰\}$.

۱۱ـ اگر V, W زیر فضاهای یک فضای برداری باشند و $\dim(V) \leq L \leq \dim(W), V \subset W$ نشان دهید که زیر فضایی مثل U هست که $\dim(U) = L, V \subseteq U \subseteq W$.

۱۲ـ فرض کنید F یک میدان متناهی و V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F

باشد.تعداد اعضای V را بیابید.

۱۳ـ اگر V_1, V_2, V_3 زیر فضاهای با بعد متناهی از فضای برداری V باشند.ثابت یا رد کنید.

$$\dim(V_1+V_2+V_3)=\sum_{i=1}^{3}\dim V_i-\sum_{i\neq j}dim(V_i\cap V_j)+\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)$$

۱۴ـ فرض کنید $p_1, p_2, \cdots, p_n$ اعداد اول متمایز باشند ثابت کنید $\{\log(p_i) | 1 \leq i \leq n\}$ روی میدان اعداد گویا مستقل خطی است.نتیجه بگیرید که میدان اعداد حقیقی روی میدان اعداد گویا از بعد متناهی نیست.

۱۵ـ اگر V یک فضای با بعد متناهی روی میدان اعداد مختلط باشد ثابت کنید:

$.\dim(V)_R = 2\dim(V)_C$

۱۶ـ فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد:

الف: اگر $<H_i>_{i=1}^{\infty}$ یک زنجیر صعودی از زیر فضاهای V باشد یعنی $H_1 \leq H_2 \leq \cdots$ نشان دهید این زنجیر سرانجام متوقف می‌شود.

ب: اگر $<H_i>_{i=1}^{\infty}$ یک زنجیر نزولی از زیر فضای V باشد سرانجام این زنجیر متوقف می‌شود.

۱۷ـ اگر F یک میدان نامتناهی و V یک فضای برداری روی F باشد.در این صورت V بصورت اجتماع تعداد متناهی زیر فضای واقعی خود نیست.

*۱۸ـ اگر V یک فضای برداری روی میدان R باشد و $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیر فضاهای سره V باشند به طوری که برای هر n $\quad V_n \not\subseteq \cup_{j=1, j\neq n}^{\infty} V_j$ نشان دهید $\cup_{j=1}^{\infty} V_j$ زیر فضا نیست.

۱۹ـ فرض کنید L مجموعه تمام nتایی‌های مرتب از R^n مانند $(x_1, \cdots, x_n)$ باشد به طوری که مولفه‌های مرتبه فرد آن با هم برابرند.$(x_1 = x_3 = x_5 = \cdots)$

الف: ثابت کنید L زیر فضای R^n است.

ب: یک پایه برای L ارائه دهید و بعد L را مشخص کنید(کارشناسی ارشد ۶۵)

۲۰ـ مجموعه برداری $(a_{i_1}, \cdots, a_{i_n})$ $= a_i$ ، $(1 \leq i \leq n)$ از فضای حقیقی را در

نظر بگیرید.ثابت کنید اگر $|a_{ij}| > \sum_{i=1 i\neq j}^{n} |a_{ji}|$ آنگاه مجموعه بردارهای فوق مستقل خطی است.(کارشناسی ارشد ۶۶)

۲۱ـ فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F و V_1, V_2 زیر فضاهایی از V باشند که $\dim V_1 = \dim V_2$ ثابت کنید زیر فضایی از V مانند U وجود دارد به طوری که: $U \oplus V_1 = U \oplus V_2$. (مسابقات ریاضی ۶۸)

۲۲ـ فرض کنید $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط باشد و $\{(x,y),(z,t),(x',y'),(z',t')\} \subseteq \mathbb{C}^2$ ثابت کنید اسکالرهای α, β که هر دو با هم صفر نیستند در $\mathbb{C}$ وجود دارد به طوری که دو بردار $\theta = \alpha(x,y) + \beta(z,t)$ و $\theta' = \alpha(x',y') + \beta(z',t')$ وابستگی خطی دارند.(مسابقات ریاضی ۷۴)

۳.۱ نکات تستی

درست یا نادرست

۱ـ مجموعه $A = \{(x,y) \in R^2 | x^2 = y^2\}$ یک زیر فضای R^2 است.

۲ـ اگر F میدانی متناهی با q عضو و V فضای برداری n بعدی روی F باشد آنگاه $|V| = q^n$.

۳ـ اگر W_1, W_2 دو زیر فضای متمایز V باشند آنگاه $\dim(W_2) < \dim(W_1 + W_2)$ یا $\dim(W_1) < \dim(W_1 + W_2)$.

۴ـ اگر مجموعه ای یک عضو صفر داشته باشد وابسته خطی است.

۵ـ فرض کنید $\{v_1, v_2, v_3\}$ در R^4 وابسته خطی باشند آنگاه i, jای هست که $i \neq j$ و $v_i = \lambda v_j$.

۶ـ اگر W یک زیر مجموعه مستقل ماکسیمال V باشد آنگاه W پایه‌ای برای V است.

۷ـ اگر W_1 و W_2 دو زیر فضا از فضای با بعد متناهی V باشند آنگاه

$.\dim(W_1)\dim(W_2) \leq \frac{(\dim(V))^2}{4}$

۸ـ اگر V_1, V_2 دو زیر فضای یک فضای n بعدی باشند و $\dim(W_1) > \frac{n}{2}$ و $\dim(W_2) > \frac{n}{2}$ آنگاه $.W_1 \cap W_2 = \{0\}$

۹ـ زیر فضاهای R^2 عبارتند از $\{0\}$ و خود R^2 و خطوطی که از مبدا می‌گذرند.

۱۰ـ زیر فضاهای R^3 عبارتند از $\{0\}$ و خود R^3 و خطوط و صفحاتی که از مبدا می‌گذرند.

۴.۱ پاسخ تشریحی مسائل برگزیده

۱ـ اگر $W \cap X = \{0\}$ با توجه به اینکه $V = W + X$ لذا $V = W \oplus X$. پس فرض کنید $W \cap X \neq \{0\}$ و $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ مبنایی برای $W \cap X$ باشد. این مبنا را به مبنای $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s\}$ برای W و مبنای $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha'_{r+1}, \alpha'_m\}$ برای X توسعه می‌دهیم.

X^* را فضای تولید شده توسط بردارهای $\{\alpha'_{r+1}, \alpha'_{r+2}, \cdots, \alpha'_m\}$ درنظر بگیرید. واضح است که $W \cap X^* = \{0\}$ حال نشان می‌دهیم $V = W + X^*$ اولاً W و X^* زیر فضاهای V هستند پس $.W + X^* \subseteq V$

حال فرض کنید $v \in V$ با توجه به اینکه $V = W + X$، پس $w \in W$ و $x \in X$ وجود دارند که $.v = x + w$

چون $x \in X$ پس اسکالرهای $\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots, \lambda'_m$ موجودند که:

$$x = \lambda'_1\alpha_1 + \lambda'_2\alpha_2 + \cdots + \lambda'_r\alpha_r + \lambda'_{r+1}\alpha'_{r+1} + \cdots + \lambda'_m\alpha'_m$$

و چون $w \in W$ پس اسکالرهای $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ موجودند که:

$$w = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_r\alpha_r + \cdots + \lambda_s\alpha_s$$

در نتیجه:

$$v = x + w = (\lambda_1 + \lambda'_1)\alpha_1 + \cdots + (\lambda_r + \lambda'_r)\alpha_r + \lambda_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + \lambda_s\alpha_s + \lambda'_{r+1}\alpha'_{r+1} + \cdots + \lambda'_m\alpha'_m$$

از طرفی $\lambda'_{r+1}\alpha'_{r+1} + \cdots + \lambda'_m\alpha'_m$ عضو X^* و

$$(\lambda + \lambda'_1)\alpha_1 + \cdots + (\lambda r + \lambda'_r)\alpha_1 + \lambda_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + \lambda_s\alpha_s$$

عضو W است.پس $v \in W + X^*$.بنابراین $V \subseteq W + X^*$ و چون $W + X^* \subseteq V$ لذا $V = W + X^*$ از طرفی $W \cap X^* = \{0\}$ در نتیجه $V = W \oplus X^*$.

۲ـ با توجه به اینکه $B \subseteq C$، کافی است نشان دهیم $C \subseteq B$.

فرض‌کنید $x \in C$ پس $x+0 \in A+C$ ولی $A+C = A+B$، بنابراین $x = x+0 \in A+B$ درنتیجه:

$$\exists a \in A, b \in B, \quad x = a + b$$

$$\Longrightarrow x - b = a$$

و داریم که $B \subseteq C$ لذا $b \in C$ و چون x نیز عضوی از C است پس $x - b \in C$. از طرفی $x - b = a \in A$ در نتیجه $x - b \in A \cap C$. ولی $A \cap C = A \cap B$ پس $x - b \in A \cap B$ در نتیجه $x - b \in B$ پس داریم:

$$x = x - b + b \in B$$

لذا $C \subseteq B$ بنابراین $B = C$.

۳ـ چون مجموعه $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ فضای V را تولید می‌کند برای پایه بودن کافی است ثابت

کنیم این مجموعه مستقل خطی است.

اگر مجموعهٔ $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ مستقل خطی نباشد پس $1 \leq i \leq n$ وجود دارد که x_i بصورت ترکیب خطی از x_1 و x_2 و $\cdots$ و x_{i-1} و x_{i+1} و $\cdots$ و x_n است.بنابراین مجموعه $\{x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n\}$ فضای V را تولید می‌کند که این یک تناقض است.پس مجموعه فوق مستقل خطی است در نتیجه یک پایه V است.

۴ـ ابتدا فرض می‌کنیم S یک مجموعه مستقل خطی است.چون بعد R^n برابر n است لذا $|S| \leq n$.از طرفی تعداد بردارهایی از R^n که دقیقاً دارای دو مولفه یک می‌باشند و بقیه مولفه‌های آنها صفر است برابر است با $\binom{n}{2}$ بنابراین $|S| = \binom{n}{2}$.پس $n \leq \binom{n}{2}$ که این نتیجه می‌دهد $n \leq 3$.

برعکس، فرض کنید $n \leq 3$، اگر $n = 2$ پس تنها بردار با شرایط مذکور بردار $(1, 1)$ می‌باشد که مستقل خطی است و اگر $n = 3$ آنگاه

$$S = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

در این حالت نیز S مستقل خطی است.

توجه شود در شرایط مسأله $n = 1$ نمی‌تواند باشد.

۵ـ فرض کنید W فضای تولید شده توسط $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ باشد پس $\dim W \leq p$. واضح است $y_1, y_2, \cdots, y_p, y_{p+1}$ اعضایی از زیر فضای W هستند.حال اگر $\{y_1, y_2, \cdots, y_p, y_{p+1}\}$ مستقل خطی باشند، لذا $\dim W \geq p + 1$ که تناقض است.بنابراین $\{y_1, y_2, \cdots, y_p, y_{p+1}\}$ بستگی خطی دارند.

۶ـ طبق فرض $y \in W - U$ پس $W - U \neq \phi$ اگر $x \in U$، با توجه به اینکه W فضای تولید شده توسط U, x است لذا $W = U$، پس $W - U = \phi$ که تناقض است.در نتیجه $x \notin U$.چون

$y \in W$ پس $u \in U$ وجود دارد که:

$$y = \alpha x + u \qquad (\alpha \in F) \tag{۱}$$

حال اگر $\alpha = ۰$ پس $y = u \in U$.ولی طبق فرض $y \in W - U$ یعنی $y \notin U$ در نتیجه $\alpha \neq ۰$ و با توجه به رابطه (۱)، $\alpha x = y - u$ بنابراین

$$x = \alpha^{-۱} y - \alpha^{-۱} u \in Y$$

۷ـ زیر فضا بودن U, W واضح است.(بررسی کنید)

ابتدا نشان می‌دهیم $U \cap W = \{۰\}$ فرض کنید $(x, y, z) \in U \cap W$.چون $(x, y, z) \in W$ پس باید $x = y = z$ باشد و چون $(x, y, z) \in U$ لذا باشد $z = x + y$ باشد پس داریم که $z = x + y$ و $x = y = z$ که نتیجه می‌دهند $x = y = z = ۰$ بنابراین $U \cap W = \{۰\}$.
واضح است که $\{(۱, ۰, ۱), (۰, ۱, ۱)\}$ یک زیر مجموعه مستقل از U و $\{(۱, ۱, ۱)\}$ یک زیر مجموعه مستقل از W است و چون $U \cap W = \{۰\}$ پس $\{(۱, ۰, ۱), (۰, ۱, ۱), (۱, ۱, ۱)\}$ یک زیر مجموعه مستقل از $U + W$ است پس $\dim(U + W) \geq ۳$ از طرفی $U + W \leq V$ پس $\dim(U + W) \leq \dim(V)$ در نتیجه $\dim(U + W) = ۳$ لذا $V = U + W$.ولی $U \cap W = \{۰\}$ بنابراین $V = U \oplus W$.

۸ـ فرض کنید $\lambda_۱ \alpha + \lambda_۲ \beta + \lambda_۳ \gamma = ۰$ که در آن $\lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳$ عضو میدان F می‌باشند داریم:

$$\alpha = \frac{۱}{۲}(\alpha + \beta) + \frac{۱}{۲}(\alpha + \gamma) - \frac{۱}{۲}(\beta + \gamma)$$
$$\beta = \frac{۱}{۲}(\alpha + \beta) + \frac{۱}{۲}(\beta + \gamma) - \frac{۱}{۲}(\alpha + \gamma)$$
$$\gamma = \frac{۱}{۲}(\alpha + \beta) + \frac{۱}{۲}(\alpha + \gamma) - \frac{۱}{۲}(\beta + \alpha)$$

با قرار دادن α,β,γ به صورت روابط فوق در $\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta+\lambda_3\gamma=0$ و دسته بندی، داریم:

$$\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)(\alpha+\gamma)+\frac{1}{2}(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(\beta+\gamma)=0$$

و چون $\alpha+\gamma,\beta+\gamma,\alpha+\beta$ مستقل خطی هستند پس

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\ -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

لذا γ,β,α مستقل خطی هستند.

۹ـ فرض کنید $<x_n>\in W$ و $\lambda\in F$ نشان می‌دهیم $<\lambda x_n>\in W$.

داریم که $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda x_n)^2=\lambda^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$. و چون $\sum x_n^2$ همگراست پس $\sum(\lambda x_n)^2$ همگراست.

حال فرض کنید $<z_n>,<y_n>\in W$ پس $\sum y_n^2$ و $\sum z_n^2$ همگرا می‌باشند قرار دهید $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n^2=a$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n^2=b$. داریم:

$$\begin{aligned}|\sum_{n=1}^{\infty}(y_n+z_n)^2|&=|\sum_{n=1}^{\infty}(y_n^2+z_n^2+2y_nz_n)|\le\sum_{n=1}^{\infty}|y_n^2|+\sum_{n=1}^{\infty}|z_n^2|+2\sum_{n=1}^{\infty}|y_nz_n|\\&\le\sum_{n=1}^{\infty}y_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}z_n^2+2\{\sum_{n=1}^{\infty}y_n^2\}^{1/2}\{\sum_{n=1}^{\infty}z_n^2\}^{1/2}\\&\le a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\end{aligned}$$

حال قرار دهید $T_k=\sum\limits_{n=1}^{k}(y_n+z_n)^2$ واضح است که T_k صعودی است و برای هر k طبیعی داریم:

$$T_k=\sum_{n=1}^{k}(y_n+z_n)^2\le\sum_{n=1}^{\infty}(y_n+z_n)^2\le(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

بنابراین $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله صعودی و از بالا کراندار است لذا همگراست.پس دنباله $\sum_{n=1}^{\infty}(y_n+z_n)^2$ همگراست در نتیجه $< y_n + z_n >\in W$ لذا W زیر فضای V است.

۱۰ـ فرض کنید $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ پس $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$ از طرفی

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) > \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - 0 = n$$

ولی $V_1 + V_2 \leq V$ پس $\dim(V_1 + V_2) \leq n$ لذا $\dim(V_1 \cap V_2) > n$ در نتیجه فرض خلف باطل است لذا $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$.

۱۱ـ فرض کنید $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ مبنایی برای V باشد آن را به مبنای $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n\}$ برای W توسعه می‌دهیم، طبق فرض داریم:

$$r = \dim(V) \leq L \leq \dim(W) = n$$

حال فرض کنید U فضای تولید شده توسط بردارهای $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_L\}$ باشد واضح است که $V \leq U \leq W$ و $\dim(U) = L$.

۱۲ـ فرض کنید $|F| = q$ و $\dim V = n$ و $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ یک پایه برای V باشد.تابع $\varphi : \underbrace{F \times F \times \cdots \times F}_{n \text{ بار}} \to V$ با ضابطه زیر را درنظر بگیرید:

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

این تابع پوشاست: زیرا اگر $v \in V$ آنگاه اسکالرهای $b_1, b_2, \cdots, b_n$ وجود دارند که $v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n$ بنابراین $\varphi(b_1, b_2, \cdots, b_n) = v$.این تابع یک به یک است:

زیرا اگر

$$\varphi(\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n) = \varphi(\lambda'_۱, \lambda'_۲, \cdots, \lambda'_n)$$

$$\Longrightarrow \lambda_۱ v_۱ + \lambda_۲ v_۲ + \cdots + \lambda_n v_n = \lambda'_۱ v_۱ + \lambda'_۲ v_۲ + \cdots + \lambda'_n v_n$$

$$\Longrightarrow (\lambda_۱ - \lambda'_۱)v_۱ + (\lambda_۲ - \lambda'_۲)v_۲ + \cdots + (\lambda_n - \lambda'_n)v_n = ۰$$

و چون $\{v_۱, v_۲, \cdots, v_n\}$ مستقل خطی می‌باشند، پس:

$$\lambda_۱ = \lambda'_۱,\ \lambda_۲ = \lambda'_۲,\ \lambda_n = \lambda'_n \Longrightarrow (\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n) = (\lambda'_۱, \lambda'_۲, \cdots, \lambda'_n)$$

بنابراین تعداد اعضای V و $\underbrace{F \times \cdots \times F \times F}_{n \text{ بار}}$ با هم برابر است لذا

$$|V| = \underbrace{|F|.|F| \cdots |F|}_{n \text{ بار}} = q^n$$

۱۳ـ فرض کنید $\{\alpha_۱, \alpha_۲\}$ دو بردار مستقل از V باشند قرار می‌دهیم

$$V_۱ = [\alpha_۱], \qquad V_۲ = [\alpha_۲], \qquad V_۳ = [\alpha_۱ + \alpha_۲]$$

چون $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ مستقل خطی هستند پس $V_۱ \cap V_۲ = \{۰\}$.حال نشان می‌دهیم $V_۱ \cap V_۳ = \{۰\}$.فرض کنید $x \in V_۱ \cap V_۳$.چون $x \in V_۱$ پس $\lambda_۱$ عضو F هست که $x = \lambda_۱ \alpha_۱$ و چون $x \in V_۳$ پس اسکالر $\lambda_۲$ هست که $x = \lambda_۲(\alpha_۱ + \alpha_۲)$ در نتیجه $\lambda_۱ \alpha_۱ = \lambda_۲ \alpha_۱ + \lambda_۲ \alpha_۲$.لذا:

$$(\lambda_۱ - \lambda_۲)\alpha_۱ - \lambda_۲ \alpha_۲ = ۰ \Longrightarrow \lambda_۱ - \lambda_۲ = ۰,\ \lambda_۲ = ۰ \Longrightarrow \lambda_۱ = \lambda_۲ = ۰$$

پس $x = ۰$ بنابراین $V_۱ \cap V_۳ = \{۰\}$ و به همین ترتیب ثابت می‌شود $V_۱ \cap V_۳ = \{۰\}$. در نتیجه:

$$\sum_{i=۱}^{۳} \dim V_i - \sum_{i \neq j} \dim(V_i \cap V_j) + \dim(V_۱ \cap V_۲ \cap V_۳) = ۳ - ۰ + ۰ = ۳$$

از طرفی $V_1 + V_2 + V_3$ توسط دو بردار α_1 و α_2 تولید می‌شود.زیرا اگر $v \in V_1 + V_2 + V_3$ آنگاه $v_1 \in V_1$، $v_2 \in V_2$ و $v_3 \in V_3$ هست که $v = v_1 + v_2 + v_3$.حال چون $v_1 \in V_1$ پس $v_1 = \lambda_1\alpha_1$.و چون $v_2 \in V_2$ پس $v_2 = \lambda_2\alpha_2$ و چون $v_3 \in V_3$ پس $v_3 = \lambda_3(\alpha_1 + \alpha_2)$.که در آن λ_1 و λ_2 و λ_3 اسکالر می‌باشند لذا:

$$v = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3(\alpha_1 + \alpha_2) = (\lambda_1 + \lambda_3)\alpha_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)\alpha_2$$

و چون $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ مستقل خطی هستند پس، $\dim(V_1 + V_2 + V_3) = 2$ لذا رابطه مذکور همیشه برقرار نیست.

۱۴ـ فرض کنید $\lambda_1 \log(p_1) + \lambda_2 \log(p_2) + \cdots \lambda_n \log(p_n) = 0$ که در آن $\lambda_i \in Q$ برای $1 \leq i \leq n$.

$$\Longrightarrow \log(p_1^{\lambda_1}) + \log(p_2^{\lambda_2}) + \cdots + \log(p_n^{\lambda_n}) = 0$$

$$\Longrightarrow \log(p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \cdots p_n^{\lambda_n}) = 0 = \log(1)$$

$$\Longrightarrow p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \cdots p_n^{\lambda_n} = 1$$

واضح است که $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

پس $\{\log(p_1), \log(p_2), \cdots, \log(p_n)\}$ مستقل خطی است.حال چون تعداد اعداد اول نامتناهی است پس مجموعه $\{\log(p) | p$ عددی اول است$\}$ نامتناهی و مستقل خطی است.در نتیجه میدان اعداد حقیقی روی میدان اعداد گویا از بعد نامتناهی است.

۱۵ـ فرض کنید بعد V روی میدان اعداد مختلط برابر n باشد و $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ مبنایی برای V روی میدان اعداد مختلط باشد و $\{\beta_1, \beta_2\}$ مبنایی برای میدان اعداد مختلط روی میدان اعداد حقیقی باشد.نشان می‌دهیم: $\{\beta_1\alpha_1, \cdots, \beta_1\alpha_n, \beta_2\alpha_1, \cdots, \beta_2\alpha_n\}$ مبنایی برای V روی R است:

ابتدا ثابت می‌کنیم مجموعه فوق V را تولید می‌کند.فرض کنید $v \in V$ پس

$$v = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_n\alpha_n \qquad (\lambda_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq n)$$

و چون $\lambda_i \in \mathbb{C}$، $(1 \leq i \leq n)$ پس داریم:

$$\lambda_i = L_i\beta_1 + L'_i\beta_2 \qquad (L_i, L'_i \in R, \quad 1 \leq i \leq n)$$

در نتیجه:

$$v = (L_1\beta_1 + L'_1\beta_2)\alpha_1 + (L_2\beta_1 + L'_2\beta_2)\alpha_2 + \cdots + (L_n\beta_1 + L'_n\beta_2)\alpha_n$$

$$\Longrightarrow v = L_1\beta_1\alpha_1 + L'_1\beta_2\alpha_1 + L_2\beta_1\alpha_2 + L'_2\beta_2\alpha_2 + \cdots + L_n\beta_1\alpha_n + L'_n\beta_n\alpha_n$$

حال ثابت می‌کنیم مجموعه $\{\beta_1\alpha_1, \cdots, \beta_1\alpha_n, \beta_2\alpha_1, \cdots, \beta_2\alpha_n\}$ روی میدان اعداد حقیقی مستقل خطی است.فرض کنید

$$\lambda_1\beta_1\alpha_1 + \lambda_2\beta_1\alpha_2 + \cdots + \lambda_n\beta_1\alpha_n + \lambda'_1\beta_2\alpha_1 + \lambda'_2\beta_2\alpha_2 + \cdots + \lambda'_n\beta_2\alpha_n = 0$$

که در آن $(\lambda_i, \lambda'_i \in R, 1 \leq i \leq n)$.در نتیجه:

$$(\lambda_1\beta_1 + \lambda'_1\beta_2)\alpha_1 + (\lambda_2\beta_1 + \lambda'_2\beta_2)\alpha_2 + \cdots + (\lambda_n\beta_1 + \lambda'_n\beta_2)\alpha_n = 0$$

حال چون $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ روی میدان اعداد مختلط مستقل خطی است پس

$$\lambda_1\beta_1 + \lambda'_1\beta_2 = \lambda_2\beta_1 + \lambda'_2\beta_2 = \cdots = \lambda_n\beta_1 + \lambda'_n\beta_2 = 0$$

و چون $\{\beta_1, \beta_2\}$ روی R مستقل خطی می‌باشند و برای $1 \leq i \leq n$ داریم: $\lambda_i\beta_1 + \lambda'_i\beta_2 = 0$ در نتیجه:

$$\lambda_i = \lambda'_i = 0 \qquad i = 1, 2 \cdots, n$$

پس مجموعهٔ $\{\beta_1\alpha_1, \cdots, \beta_1\alpha_n, \beta_2\alpha_1, \cdots, \beta_2\alpha_n\}$ یک مبنای V روی R است.بنابراین $\dim_R(V) = 2n = 2\dim_{\mathbb{C}}(V)$.

۱۶ـ الف: فرض کنید این زنجیر متوقف نشود و $\dim V = n$ باشد.زیر فضای $H_k \neq 0$ را در نظر می‌گیریم.چون زنجیر مذکور متوقف نمی‌شود پس زیر فضایی مثل H_{m_1} هست که $H_k \subsetneqq H_{m_1}$. حال زیر فضای H_{m_1} را در نظر می‌گیریم.مجدداً زنجیر مذکور متوقف نمی‌شود پس زیر فضایی مثل H_{m_2} هست که $H_{m_1} \subsetneqq H_{m_2}$ حال با n بار تکرار این عمل داریم:

$$H_k \subsetneqq H_{m_1} \subsetneqq H_{m_2} \subsetneqq \cdots \subsetneqq H_{m_n}$$

در نتیجه:

$$1 \leq \dim(H_k) < \dim(H_{m_1}) < \dim(H_{m_2}) < \cdots < \dim(H_{m_n})$$

حال واضح است که $\dim(H_{m_n}) > n$ که این تناقض است زیرا $H_{m_n} \leq V$ پس $\dim(H_{m_n}) \leq \dim V = n$.

ب: مانند قسمت الف اثبات می‌شود.(بررسی کنید)

۱۷ـ با استقراء روی n (تعداد زیر فضاها) نشان می‌دهیم V را نمی‌توان به صورت اجتماع n زیر فضا نوشت.$n = 1$ واضح است زیرا V برابر یک زیر فضای واقعی خود نیست.

حال فرض کنید $n > 1$ و حکم برای $n - 1$ برقرار باشد یعنی V را نتوان به صورت اجتماع $n - 1$ زیر فضای واقعی خود نوشت.نشان می‌دهیم V را نمی‌توان به صورت اجتماع n زیر فضای واقعی خود نوشت.فرض خلف، فرض کنیم زیر فضاهای V_1، V_2، $\cdots$ و V_n موجود باشند که $V = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$.

طبق فرض استقراء $\bigcup_{k=1}^{n-1} V_k \neq V$ پس y عضو V هست که $y \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} V_k$ ولی چون

$V = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$ پس الزاماً $y \in V_n$ از طرفی $\bigcup_{k=1}^{n-1} V_k \not\subseteq V_n$ چون اگر $\bigcup_{k=1}^{n-1} V_k \subseteq V_n$ پس

$$V = \bigcup_{k=1}^{n-1} V_k \bigcup V_n \subseteq V_n \subsetneqq V$$

که تناقض است.لذا $x \in \bigcup_{k=1}^{n-1} V_k$ وجود دارد که $x \notin V_n$.

مجموعه $A = \{x + \lambda y | \lambda \in K\}$ یک مجموعه نامتناهی است زیرا اولاً F یک میدان نامتناهی است و ثانیاً اگر λ_1 و λ_2 دو عضو F باشند که $x + \lambda_1 y = x + \lambda_2 y$ در نتیجه $\lambda_1 y = \lambda_2 y$ پس $(\lambda_1 - \lambda_2)y = 0$.و چون y ناصفر است لذا $\lambda_1 = \lambda_2$.

حال داریم: $V = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$ چون تعداد زیر فضاهای V_k که V را تشکیل داده‌اند متناهی است و تعداد اعضای مجموعه A نامتناهی است.پس حداقل یک زیر فضا مثل V_t، $(1 \leq t \leq n)$ وجود دارد که شامل حداقل دو عضو از اعضای مجموعه A است فرض کنید این دو عضو $x + \lambda_1 y$ و $x + \lambda_2 y$ باشند.اگر $t = n$ آنگاه

$$x = x + \lambda_1 y - \lambda_1 y \in V_n$$

که تناقض است.حال اگر $1 \leq t \leq n - 1$ باشد آنگاه:

$$(x + \lambda_1 y) - (x + \lambda_2 y) \in V_t \Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)y \in V_t$$

و چون $\lambda_2 \neq \lambda_1$ پس $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ در نتیجه:

$$y = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(\lambda_1 - \lambda_2)y \in V_t$$

که تناقض است.بنابراین فرض خلف باطل است و V را نمی‌توان به صورت اجتماع n زیر فضای واقعی خود نوشت.

۱۸ـ با توجه به اینکه $V_1 \not\subseteq \bigcup_{j=2}^{\infty} V_j$ پس $y \in V_1$ وجود دارد که $y \notin \bigcup_{j=2}^{\infty} V_j$ از طرفی

$V_1 \subsetneq \cup_{j=2}^{\infty} V_j$ زیرا در غیر این صورت داریم:

$$V_2 \subseteq \cup_{j=2}^{\infty} V_j \subseteq V_1 \Longrightarrow V_2 \subseteq V_1 \Longrightarrow V_2 \subseteq \cup_{j=1, j\neq 2}^{\infty} V_j$$

که تناقض است.پس $x \in \cup_{j=2}^{\infty} V_j$ وجود دارد که $x \notin V_1$ حال مجموعه $A = \{x+\lambda y | \lambda \in R\}$ را در نظر بگیرید.این مجموعه ناشماراست.زیر ا اولاً R ناشماراست و ثانیاً اگر λ_1 و λ_2 دو عضو R باشند که $x + \lambda_1 y = x + \lambda_2 y$ پس $\lambda_1 y = \lambda_2 y$ لذا $(\lambda_1 - \lambda_2)y = 0$.و چون y ناصفر است در نتیجه $\lambda_1 = \lambda_2$.حال فرض کنید $\cup_{j=1}^{\infty} V_j$ زیر فضا باشد درنتیجه $A \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} V_j$.حال چون V_1 و V_2 و $\cdots$ تعداد شمارا زیر فضا هستند پس عدد طبیعی k وجود دارد که V_k حداقل شامل دو عضو از مجموعه A است زیرا در غیراین صورت برای هر k طبیعی V_k شامل حداکثر یک عضو از اعضای A می‌باشد و چون تعداد این زیر فضاها شماراست پس A نیز مجموعه‌ای شماراست که این یک تناقض است.پس فرض کنید $x + \lambda_1 y, x + \lambda_2 \in V_k$ اگر $k = 1$ پس $x = x + \lambda_1 y - \lambda_1 y \in V_1$ که تناقض است و اگر $k > 2$ داریم:

$$x + \lambda_1 y - (x + \lambda_2 y) \in V_k \Longrightarrow \lambda_1 y - \lambda_2 y \in V_k$$
$$\Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) y \in V_k$$

و چون $\lambda_2 \neq \lambda_1$ پس $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ درنتیجه:

$$y = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} (\lambda_1 - \lambda_2) y \in V_k$$

که این حالت نیز تناقض است.پس $\cup_{j=1}^{\infty} V_j$ زیر فضا نیست.

۱۹ـ الف: فرض کنید $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ عناصر L باشند پس مولفه‌های فرد x با هم برابرند و مولفه‌های فرد y نیز با هم برابرند حال اگر $\lambda \in R$،

$$x + \lambda y = (x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + \lambda y_1, \cdots, x_n + \lambda y_n)$$

حال اگر $x_j + \lambda y_j$ و $x_i + \lambda y_i$ دو مولفه فرد $x + \lambda y$ باشند با توجه به اینکه $x_i = x_j$ و $y_i = y_j$ پس $x_i + \lambda y_i = x_j + \lambda y_j$ در نتیجه $x + \lambda y \in L$ لذا L زیر فضا است.

ب) اگر n فرد باشد مجموعه زیر یک پایه برای L است.

$$\{(۱, ۰, ۱, ۰, \cdots, ۱), e_۲, e_۴, \cdots, e_{n-۱}\}$$

که در آن e_k برداری است که مولفه kام آن یک و بقیه صفر است.در نتیجه $\dim(L) = \frac{n+۱}{۲}$

اگر n زوج باشد مجموعه زیر یک پایه برای L است:

$$\{(۱, ۰, ۱, ۰, \cdots, ۱), e_۲, e_۴, \cdots, e_n\}$$

در نتیجه: $\dim(L) = \frac{n}{۲} + ۱$.

۲۰ـ فرض کنید مجموعه $\{a_۱, a_۲, \cdots, a_n\}$ وابسته خطی باشد لذا اسکالرهای $\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n$ که همگی صفر نیستند موجود است که:

$$\lambda_۱ a_۱ + \lambda_۲ a_۲ + \cdots + \lambda_n a_n = ۰$$

از طرفی $a_i = (a_{i۱}, a_{i۲}, \cdots, a_{in})$ برای $۱ \leq i \leq n$ پس داریم:

$$\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j a_{ji} = ۰ \qquad i = ۱, ۲, \cdots, n \qquad (۱)$$

حال فرض کنید $|\lambda_k| = \max\{|\lambda_i| \mid ۱ \leq i \leq n\}$ چون λ_iها$(۱ \leq i \leq n)$ همگی صفر نیستند پس $|\lambda_k| > ۰$.

طبق (۱) داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j a_{jk}=0 &\Longrightarrow \lambda_k a_{kk}=-\sum_{j=1,j\neq k}^{n}\lambda_j a_{jk}\\ &\Longrightarrow |\lambda_k a_{kk}|=|\sum_{j=1,j\neq k}^{n}\lambda_j a_{jk}|\leq\sum_{j=1,j\neq k}^{n}|\lambda_j a_{jk}|\\ &\Longrightarrow |\lambda_k||a_{kk}|\leq\sum_{j=1,j\neq k}^{n}|\lambda_j||a_{jk}|\\ &\Longrightarrow |a_{kk}|\leq\sum_{j=1,j\neq k}^{n}\frac{|\lambda_j|}{|\lambda_k|}|a_{jk}|\leq\sum_{j=1,j\neq k}|a_{jk}|\end{aligned}$$

که متناقض با فرض مسئله است.لذا بردارهای فوق مستقل خطی می‌باشند.

۲۱ـ ابتدا فرض کنید $V_1\cap V_2\neq\{0\}$ و $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ مبنایی برای $V_1\cap V_2$ باشد آن را به مبنای $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ برای V_1 و به مبنای $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ برای V_2 توسعه می‌دهیم.

فرض کنید U فضای تولید شده توسط مجموعه $\{u_1+v_1,u_2+v_2,\cdots,u_m+v_m\}$ باشد.ابتدا نشان می‌دهیم $U\cap V_1=\{0\}$.

فرض کنید $x\in U\cap V_1$ چون $x\in U$ پس اسکالرهای $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ موجودند که $x=\lambda_1(u_1+v_1)+\lambda_2(u_2+v_2)+\cdots+\lambda_m(u_m+v_m)$ و چون $x\in V_1$ پس اسکالرهای $\lambda'_1,\lambda'_2,\cdots,\lambda'_m,\lambda'_{m+1},\cdots,\lambda'_{m+r}$ موجودند که:

$$x=\lambda'_1 v_1+\lambda'_2 v_2+\cdots+\lambda'_m v_m+\lambda'_{m+1}\alpha_1+\cdots+\lambda'_{m+r}\alpha_r$$

در نتیجه:

$$\lambda_1(u_1+v_1)+\lambda_2(u_2+v_2)+\cdots+\lambda_m(u_m+v_m)$$
$$=\lambda'_1 v_1+\lambda'_2 v_2+\cdots+\lambda'_m v_m+\lambda'_{m+1}\alpha_1+\cdots+\lambda'_{m+r}\alpha_r$$
$$\Longrightarrow \lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_m u_m$$
$$=(\lambda'_1-\lambda_1)v_1+\cdots+(\lambda'_m-\lambda_m)v_m+\lambda'_{m+1}\alpha_1+\cdots+\lambda'_{m+r}\alpha_r$$

با توجه به اینکه طرف راست تساوی فوق عضو V_1 است پس $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_m u_m\in V_1$
از طرفی واضح است که $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_m u_m\in V_2$ پس

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_m u_m\in V_1\cap V_2$$

لذا اسکالرهای $b_1,\cdots,b_r$ موجودند که

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_m u_m=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_r\alpha_r$$
$$\Longrightarrow \lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_m u_m-b_1\alpha_1-b_2\alpha_2-\cdots-b_r\alpha_r=0$$

بردارهای $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ مستقل خطی هستند پس

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=b_2=\cdots=b_r=0$$

در نتیجه $x=0$ پس $U\cap V_1=\{0\}$ به همین ترتیب ثابت می‌شود که $U\cap V_2=\{0\}$ حال نشان می‌دهیم $U\oplus V_1=U\oplus V_2$.

فرض کنید $y\in U\oplus V_1$ پس $y=a+b$ که $b\in V_1, a\in U$ چون $a\in U$ پس اسکالرهای $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ موجودند که:

$$a=\lambda_1(u_1+v_1)+\lambda_2(u_2+v_2)+\cdots+\lambda_m(u_m+v_m)$$

و چون $b \in V_1$ پس اسکالرهای $\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots, \lambda'_m, \lambda'_{m+1}, \cdots, \lambda'_{m+r}$ موجودند که:

$$b = \lambda'_1 v_1 + \lambda'_2 v_2 + \cdots + \lambda'_m v_m + \lambda'_{m+1}\alpha_1 + \cdots + \lambda'_{m+r}\alpha_r$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} x = a + b &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(u_i + v_i) + \sum_{i=1}^{m} \lambda'_i v_i + \sum_{i=1}^{r} \lambda'_{m+i}\alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i + \lambda'_i)(u_i + v_i) + \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - \lambda'_i)u_i + \sum_{i=1}^{r} \lambda'_{m+i}\alpha_i \end{aligned}$$

و چون $\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i + \lambda'_i)(u_i + v_i) \in U$ و $\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - \lambda'_i)u_i + \sum_{i=1}^{r} \lambda'_{m+i}\alpha_i \in V_2$ بنابراین $x \in U \oplus V_2$ درنتیجه $U \oplus V_1 \subseteq U \oplus V_2$ و به همین ترتیب ثابت می‌شود $U \oplus V_2 \subseteq U \oplus V_1$ پس $U \oplus V_1 = U \oplus V_2$ لذا در حالت $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$ مسئله حل شد.حال فرض کنید $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ و $\{b_1, \cdots, b_s\}$ مبنایی برای V_1 و $\{b'_1, \cdots, b'_s\}$ مبنایی برای V_2 باشد.دراین حالت U را فضای تولید شده توسط بردارهای $\{b_1 + b'_1, \cdots, b_s + b'_s\}$ در نظر می‌گیریم و بقیه اثبات شبیه قسمت قبل است.

۲۲ـ ترکیب خطی $\lambda\theta + \lambda'\theta' = 0$ از θ و θ' را در نظر می‌گیریم بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد شود، فرض می‌کنیم $\lambda' = 1$.

$$\lambda\theta + \theta' = 0 \Longrightarrow \lambda(\alpha(x,y) + \beta(z,t)) + (\alpha(x',y') + \beta(z',t')) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda x + x' & \lambda z + z' \\ \lambda y + y' & \lambda t + t' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

قرار می‌دهیم $A = \begin{pmatrix} \lambda x + x' & \lambda z + z' \\ \lambda y + y' & \lambda t + t' \end{pmatrix}$ در این صورت:

$$\det(A) = \lambda^2(xt - yz) + \lambda(xt' + x't - yz' - y'z) + x't' - y'z' = 0$$

حال نشان می‌دهیم معادله فوق برحسب λ روی میدان اعداد مختلط، دارای جواب است.اگر $x't' - y'z' = 0$ آنگاه معادله همیشه دارای جواب است و مسأله حل است.حال فرض کنید $x't' - y'z' \neq 0$ پس کافیست نشان دهیم ضریب λ یا λ^2 در معادله فوق نا صفر است. فرض کنید ضریب λ^2 صفر باشد یعنی $xt - yz = 0$ در این صورت (x,y) و(z,t) وابستگی خطی دارند یعنی γ وجود دارد که $(z,t) = \gamma(x,y)$.در این صورت:

$$\theta = \alpha(x,y) + \beta(z,t) = \alpha(x,y) + \beta\gamma(x,y) = (\alpha + \beta\gamma)(x,y)$$

و چون $x't' - y'z' \neq 0$ لذا $(x'y')$ و(z',t') مستقل خطی اند.بنابراین α_1 وβ_1 موجود است که:

$$(x,y) = \alpha_1(x',y') + \beta(z',y')$$

در نتیجه:

$$\theta = (\alpha + \beta\gamma)(x,y) = (\alpha + \beta\gamma)(\alpha_1(x',y') + \beta_1(z',t')) = (\alpha + \beta\gamma)\theta'$$

بنابراین اگر ضریب λ^2 صفر باشد به ازای α وβای θ وθ' وابسته خطی هستند و اگر ضریب λ^2 نا صفر باشد معادله دارای جواب است لذا در این حالت نیز مسأله حل می‌گردد.

۵.۱ پاسخ تشریحی نکات تستی

۱. نادرست، زیرا $(1,1)$ و $(-1,1)$ اعضای A می‌باشند ولی $(1,1) + (-1,1)$ عضوی از A نیست (در واقع نسبت به جمع بسته نیست).

۲. درست، مسأله ۱۲ را ببینید.

۳. درست، زیرا W_1 و W_2 دو زیر فضای متمایز می‌باشند پس یکی از آنها عضوی دارد که در

دیگری وجود ندارد.فرض کنید $x \in W_1$ و $x \notin W_2$.در نتیجه $x \in W_1 + W_2$ و $x \notin W_2$ لذا $W_2 \subsetneqq W_1 + W_2$.پس $\dim(W_2) < \dim(W_1 + W_2)$.

۴. درست، کافیست در ترکیب خطی از اعضای مجموعه، ضریب عضو صفر، یک باشد و بقیه ضرائب صفر باشند.

۵. نادرست، فرض کنید $u_1 = (1, 0, 0, 0)$ و $u_2 = (0, 1, 0, 0)$ و $u_3 = (-1, -1, 0, 0)$ واضح است که $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ ولی u_i و u_j برای $i \neq j$ وابسته خطی نیستند.

۶. درست، قضیه‌ای در کتاب دیوید بلوم است.

۷. نادرست، فرض کنید $V = R^3$ و $\{e_1, e_2, e_3\}$ مبنای استاندارد V باشد.قرار دهید $W_1 = [e_1, e_2]$ و $W_2 = [e_2, e_3]$ بنابراین $\dim(W_1)\dim(W_2) = 4$.

۸. نادرست، مساءله ۱۰ را ببینید.

۹. درست، این زیر فضاها را اصطلاحاً زیر فضاهای بدیهی R^2 می‌نامند.

۱۰. درست.

فصل دوم

ماتریس‌ها

۱.۲ تعاریف و قضایا

تعریف: فرض کنید F میدان دلخواهی باشد.هر آرایه مستطیلی به شکل

$$\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

که در آن a_{ij}ها اسکالرهایی در میدان F هستند، یک ماتریس نامیده می‌شود و تلویحاً با $A = (a_{ij})$ نمایش داده می‌شود.

تعریف: ماتریسی را که همه درایه‌های آن صفر باشد ماتریس صفر گویند.

تعریف: اگر $m = n$ ماتریس را مربعی گویند.ماتریسی که همه درایه‌های قطر اصلی آن یک و

بقیه درایه‌های آن صفر باشد را ماتریس همانی گویند و با I_n نمایش می‌دهند.

تعریف: اگر λ اسکالری از میدان F باشد و A یک ماتریس روی میدان F باشد آنگاه λA ماتریس حاصل از ضرب درایه‌های ماتریس A در λ است.

تعریف: λI را ماتریس اسکالر گویند. $M(m \times n, F)$ فضای ماتریس‌های $m \times n$ روی میدان F است.

تعریف: اگر A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times p$ روی میدان F باشند آنگاه AB ماتریسی $m \times p$ روی میدان F است و اگر $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ و $AB = (c_{ij})$ آنگاه $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

تعریف: ترانهاده ماتریس A را با A^t نمایش می‌دهیم که ماتریس حاصل از تعویض سطرهای A به جای ستونهای A می‌باشد.

قضیه ۱ـ۲: فرض کنید F یک میدان باشد و $B, A \in M(n, F)$ آنگاه:

الف: $(A+B)^t = A^t + B^t$.

ب: $(A^t)^t = A$.

ج: به ازاء اسکالر λ از میدان F، $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

د: $(AB)^t = B^t A^t$.

تعریف: ماتریس $A = (a_{ij})$ ماتریس پلکانی، یا به شکل پلکانی است، اگر تعداد صفرهای پیش از اولین درایه ناصفر یک سطر، سطر به سطر افزایش یابد تا فقط سطرهای صفر باقی بماند.

تعریف: گوییم ماتریس A هم ارز سطری ماتریس B است اگر بتوان B را با رشته‌ای متناهی از اعمال زیر به نام اعمال سطری مقدماتی از A بدست آورد. این اعمال عبارتند از:

$[F_1]$: سطر iام را در اسکالر ناصفر λ ضرب کنیم.

$[F_2]$: سطر iام و jام را با هم عوض کنیم.

$[F_3]$: سطر iام را با k برابر سطر jام بعلاوه سطر iام عوض کنیم.

تعریف: ماتریس‌هایی که اعمال فوق را انجام می‌دهند.ماتریس‌های مقدماتی نامیده می‌شوند.

تعریف: ماتریس $A = (a_{ij})$ را قطری گویند هرگاه درایه‌هایی که روی قطر اصلی نیستند صفر باشند.

تعریف: ماتریس $A \in M(n, F)$ را پوچ توان گویند هرگاه عدد طبیعی مانند m موجود باشد که $A^m = 0$.

تعریف: ماتریس A را خود توان گویند هرگاه $A^2 = A$.

تعریف: ماتریس A را بالا مثلثی گویند(پائین مثلثی) گویند، هرگاه درایه‌های زیر(بالای) قطر اصلی صفر باشند.

قضیه ۲ـ۲: A هم ارز سطری B است اگر و فقط اگر ماتریس‌های مقدماتی مثل $E_1, E_2, \cdots, E_s$ یافت شوند به طوری که $E_s \cdots E_2 E_1 A = B$.

قضیه ۳ـ۲: هر ماتریس هم ارز سطری یک ماتریس پلکانی است.

تعریف: ماتریس مربعی A معکوس پذیر است هرگاه ماتریسی مثل B یافت شود که $AB = BA = I$.ماتریس B را وارون A گویند و با A^{-1} نمایش می‌دهند.

تعریف: دو ماتریس A و B را هم ارز گوییم هرگاه ماتریس‌های نامنفرد P و Q موجود باشند که $A = PBQ$.

قضیه ۴ـ۲: ماتریس‌های مقدماتی معکوس پذیرند و معکوس آنها نیز مقدماتی است.

قضیه ۵ـ۲: $A \in M(n, F)$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر هم ارز سطری ماتریس همانی شود.

تعریف: فرض کنیم $A \in M(n, F)$، هر سطر A یک بردار nـبعدی روی F است.فضایی را که این بردارها تولید می‌کنند، فضای سطری A می‌نامند و فضایی که ستونهای nـبعدی A تولید می‌کنند فضای ستونی نامیده می‌شود.

قضیه ۶ـ۲: فضای سطری ماتریس مربعی A وابسته خطی است اگر و تنها اگر A منفرد(معکوس ناپذیر) باشد.

تعریف: ابعاد فضای سطری و ستونی ماتریس A ، رتبه سطری و رتبه ستونی A نام دارد.

قضیه ۷ـ۲: رتبه سطری و رتبه ستونی ماتریس A با هم برابرند.

قضیه ۸ـ۲: رتبه ماتریس A برابر تعداد سطرهای ناصفر ماتریس پلکانی هم ارز A است.

تعریف: اگر $A \in M(n, F)$ آنگاه $\mathrm{trc}(A)$ مجموع [illegible] روی قطر اصلی است.

تعریف: هرگاه $A \in M(n, R)$ آنگاه A را متقارن گو[illegible]گاه $A^t = A$ و A را متقارن اریب (کج) گوییم هرگاه $A^t = -A$.

تعریف: اگر $A, B \in M(n, F)$ آنگاه A و B را متشابه گویند، هرگاه ماتریس نامنفرد مثل P باشد که $A = PBP^{-1}$.

قضیه ۹ـ۲: فرض کنید $A \in M(n, F)$ نامنفرد باشد آنگاه $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

۲.۲ مسائل برگزیده

۱ـ فرض کنید $A, B \in M(n, F)$.اگر ماتریس A یک سطر صفر داشته باشد آنگاه AB نیز سطر صفر دارد.

۲ـ فرض کنید $A \in M(n, F)$ و $A \neq I$ و $A^2 = A$ ثابت کنید A معکوس‌پذیر نیست.

۳ـ نشان دهید احکام زیر معادلند:

الف: A معوکس‌پذیر است.

ب: A هم ارز سطری ماتریس همانی است.

ج: A حاصل ضربی از ماتریس‌های مقدماتی است.

۴ـ فرض کنید $A, B \in M(n, F)$ و $AB = I$ نشان دهید $B = A^{-1}$ و $BA = I$.

۵ـ فرض کنید $A \in M(n, F)$ و $A^۲ + ۲A - ۲I = ۰$ ثابت کنید A نامنفرد است و وارون آنرا بدست آورید.

۶ـ فرض کنید $A, B \in M(n, F)$ دو ماتریس باشند به قسمی که $I - AB$ معکوس‌پذیر باشد. نشان دهید $I - BA$ نیز معکوس‌پذیر است.معکوس آنرا بدست آورید.

۷ـ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد و $A = (a_{ij})$ به طوری که به ازای هر $۱ \leq i \leq n$ داشته باشیم $\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} = a$، که a مستقل از درایه‌های ماتریس است.اگر $A^۲ = I$ مقدار a را حساب کنید.

۸ـ فرض کنید S شامل تمام ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ باشد که مجموع هر یک از سطرهای آن برابر یک شود:

الف: ثابت کنید S نسبت به ضرب ماتریس‌ها بسته است.

ب: آیا S عضو همانی دارد.

ج: آیا همهٔ عناصر S معکوس‌پذیرند.

۹ـ فرض کنیم $E_{ij} \in M(m \times n, F)$ ماتریسی باشد که درایه ijام آن یک و بقیه صفر است.نشان دهید $\{E_{ij}\}$ پایه‌ای برای M است و نتیجه بگیرید $\dim M = mn$.

۱۰ـ فرض کنیم $E_{ij} \in M(n, F)$ ماتریسی باشد که درایه ijام آن یک و بقیه صفر است.نشان دهید $E_{pq}E_{rs} = \delta_{qr}E_{ps}$.که δ_{qr} دلتای کرونکر است.

۱۱ـ فرض کنید V فضای برداری ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان R باشد.و U و W به ترتیب زیر فضای ماتریس‌های متقارن و پاد متقارن باشند.نشان دهید $V = U \oplus W$.

۱۲ـ فرض کنید $A, B \in M(n, F)$ نشان دهید:

الف: $\operatorname{trc}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{trc}(A) + \operatorname{trc}(B)$. $(\lambda \in F)$

ب: $\operatorname{trc}(AB) = \operatorname{trc}(BA)$.

ج: هرگاه A و B متشابه باشند آنگاه $\mathrm{trc}(A) = \mathrm{trc}(B)$.

۱۳ـ هرگاه $A, B \in M(n, F)$ متشابه باشند آنگاه A^t و B^t متشابهند و به ازاء هر n طبیعی A^n و B^n متشابهند.

۱۴ـ فرض کنید $A, B \in M(n, F)$ و ماتریس A نامنفرد باشد.نشان دهید AB و BA متشابهند.

۱۵ـ فرض کنید $A, B \in M(n, F)$ به طوری که A و B و $A + B$ خود توان باشند.ثابت کنید $AB = -BA$.و نتیجه بگیرید $\mathrm{trc}(AB) = ۰$.

۱۶ـ فرض کنید $A, B \in M(n, F)$ و روابط $AB = A$ و $BA = B$ برقرار باشند.نشان دهید که A و B خود توان هستند و $(A - B)^۲ = ۰$.

۱۷ـ اگر $I + A$ نامنفرد باشد به طوری که $A \in M(n, F)$ و I ماتریس $n \times n$ همانی است.نشان دهید $(I + A)^{-۱}$ و $I - A$ جابجا می‌شوند.

۱۸ـ فرض کنید $A, B \in M(n, F)$ و ماتریس A نامنفرد باشد.نشان دهید:

$$(A + B)A^{-۱}(A - B) = (A - B)A^{-۱}(A + B)$$

۱۹ـ فرض کنید $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ به طوری که $A^۲B + BA^۲ = ۲ABA$.ثابت کنید برای هر m طبیعی، $\mathrm{trc}(AB - BA)^m = ۰$.

۲۰ـ فرض کنید $M(n, R)$ فضای ماتریس‌های $n \times n$ حقیقی باشد و W, V به ترتیب فضای ماتریس‌های متقارن و متقارن اریب باشند با ارائه مبناهایی برای V و W، $\dim V$ و $\dim W$ را محاسبه کنید.

۲۱ـ فرض کنید $A \in M(n, \mathbb{R})$ ثابت کنید:

$$\mathrm{trc}(AA^t) = ۰ \Longleftrightarrow A = ۰$$

(کارشناسی ارشد ۶۳ کرمان)

۲۲- فرض کنید $A, B \in M(n, F)$ و رابطهٔ $BAA^t = ۰$ بین آنها برقرار باشد ثابت کنید $BA = ۰$.نتیجه بگیرید اگر A متقارن باشد و k عدد طبیعی دلخواه که $BA^k = ۰$ آنگاه $BA = ۰$.

۲۳- اگر $A, B, C \in M(n, F)$ و $AA^t + BB^t + CC^t = ۰$، ماتریس‌های A و B و C را مشخص کنید.

۲۴- اگر $A \in M(n, F)$ و ماتریس A با $AA^t - A^tA$ جابه‌جا شود ثابت کنید $AA^t = A^tA$.

۲۵- فرض کنید S نامنفرد و متقارن باشد.و T متقارن اریب باشد و $(S+T)(S-T)$ نامنفرد باشد اگر $P = (S+T)^{-۱}(S-T)$.نشاندهید $P^tSP = S$.

۲۶- فرض کنید $A, B \in M(۲, F)$ دو ماتریس دلخواه باشند نشان دهید $(AB - BA)^۲$ ماتریس اسکالر است.

۲۷- فرض کنید $M(n, F)$ فضای ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان F باشد.به ازاء چه nهایی برای هر سه ماتریس A و B و C عضو $M(n, F)$ رابطهٔ زیر برقرار است.

$(AB - BA)^۲C = C(AB - BA)^۲$. (فرهنگستان علوم)

۲۸- فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times m$ باشد.نشان دهید

$$\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$$

۲۹- فرض کنید A ماتریس $n \times m$ روی میدان F باشد.نشان دهید A دارای ماتریس وارون $m \times n$ چپ مثل B است، یعنی $BA = I_m$ اگر و تنها اگر $\operatorname{rank}(A) = m$.همچنین A دارای ماتریس وارون $m \times n$ راست مثل C هست، یعنی $AC = I_n$، اگر و تنها اگر $\operatorname{rank}(A) = n$.(کارشناسی ارشد خرداد ۶۵ مشهد)

۳۰ـ فرض کنید $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یک ماتریس روی میدان اعداد حقیقی باشد که فقط با خودش متشابه است.ثابت کنید $x \in R$ هست که $A = xI_2$.

۳۱ـ اگر A یک ماتریس $n \times n$ منفرد روی میدان F باشد.آنگاه برداری ناصفر مثل Y هست که $AY = 0$ و نتیجه بگیرید $Y^tAY = 0$.

*۳۲ـ ثابت کنید ماتریس زیر نامنفرد است.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

*۳۳ـ فرض کنید R یک حلقه باشد و $A \in M(n, R)$ و ماتریس $A - A^2$ پوچ‌توان باشد.اگر ماتریس A پوچ‌توان نباشد آنگله ماتریسی ناصفر مثل B عضو $M(n, R)$ وجود دارد که $B^2 = B$.

*۳۴ـ فرض کنید A ماتریس 2×2 معکوس‌پذیر روی میدان Z_p باشد که p عددی اول است.نشان دهید اگر $q = (p^2 - 1)(p^2 - p)$ آنگاه $A^{q+2} = A^2$.

۳.۲ نکات تستی

درست یا نادرست

۱ـ اگر $A, B \in M(n, R)$ آنگاه $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$.

۲ـ اگر $A, B \in M(n, R)$ آنگاه $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n + \text{rank}(AB)$.

۳ـ اگر R میدان اعداد حقیقی باشد و $A \in M(n, R)$ و $\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = 0$، برای

هر $x = (x_1, \cdots, x_n)$ در R^n آنگاه $A = 0$.

۴ـ هرگاه $A, B \in M(n, R)$ آنگاه

$$|\text{rank}(A) - \text{rank}(B)| \leq \text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

۵ـ اگر A ماتریسی $n \times n$ و متقارن روی اعداد حقیقی باشد آنگاه $A^2 = 0$ نتیجه می‌دهد $A = 0$.

۶ـ فرض کنیم $A, B \in M(n, R)$ و متقارن باشند.آنگاه $A^2 + B^2 = 0$ نتیجه می‌دهد $A = B = 0$.

۷ـ اگر R میدان اعداد حقیقی باشد، آنگاه دو ماتریس $\begin{pmatrix} ۲ & ۲ \\ ۴ & ۳ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix}$ روی R متشابهند.

۸ـ اگر $A \in M(n, R)$ یک سطر صفر داشته باشد آنگاه A منفرد است.

۹ـ اگر $A, B \in M(n, R)$ و $AB + BA = 0$ آنگاه حداقل یکی از دو ماتریس A و B منفرد است.

۱۰ـ اگر $AB + BA = 0$ آنگاه $\text{trc}(AB) = 0$.

۱۱ـ اگر $A, B, C \in M(n, R)$ و $C \neq 0$ و $\text{rank}(A) > \text{rank}(B)$ آنگاه $\text{rank}(AC) > \text{rank}(BC)$.

۱۲ـ برای هر $A \in M(n, R)$ داریم $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A^2) + 1$.

۱۳ـ اگر $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = \text{rank}(AB)$ که A و B ماتریس‌های $n \times n$ می‌باشند آنگاه A یا B نامنفرد است.

۱۴ـ اگر A و B ماتریس‌های ۲×۲ دلخواه روی میدان F باشند آنگاه $(AB - BA)^2$ ماتریس اسکالر است.

۱۵ـ فرض کنید $A, B \in M(n, F)$ و ماتریس A نامنفرد باشد.آنگاه

$$\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B)$$

۴.۲ پاسخ تشریحی مسائل برگزیده

۱ـ فرض کنیم $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ و سطر rام ماتریس A صفر باشد یعنی:

$$a_{r1} = a_{r2} = \cdots = a_{rn} = 0$$

فرض کنید $AB = (C_{ij})$.نشان می‌دهیم سطر rام ماتریس AB نیز صفر است.برای این منظور فرض کنیم c_{rs} درایه‌ای دلخواه از سطر rام باشد، لذا:

$$c_{rs} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk} b_{ks} = 0 \qquad (\text{زیرا } a_{rk} \text{ برای } 1 \leq k \leq n \text{ صفر است})$$

۲ـ فرض کنید A معکوس‌پذیر باشد با ضرب A^{-1} در طرفین رابطهٔ $A = A^2$ داریم:

$$A^{-1}(A^2) = A^{-1}A \Longrightarrow A = I$$

که تناقض است.

۳ـ فرض کنید A معکوس‌پذیر بوده و هم ارز سطری ماتریس پلکانی تحویل یافته باشد.در این صورت ماتریس‌های مقدماتی مثل $E_1, E_2, \cdots, E_s$ وجود دارند به طوری که $E_1E_2\cdots E_sA = B$.حال چون A معکوس‌پذیر است و هر ماتریس مقدماتی E_i معکوس‌پذیر است.حاصل ضرب معکوس‌پذیر است.اما هرگاه $B \neq I$ آنگاه B سطر صفر دارد.ولی B وارون پذیر است پس $BB^{-1} = I$ و طبق مسأله یک چون B سطر صفر دارد پس $BB^{-1} = I$ سطر صفر دارد که این تناقض است.لذا $B = I$.پس از حکم الف حکم ب را نتیجه گرفتیم.

حال فرض کنید حکم ب برقرار باشد، آنگاه ماتریس‌های مقدماتی $E_1, E_2, \cdots, E_s$ وجود دارند به طوری که $E_s \cdots E_2 E_1 A = I$.در نتیجه:

$$A = (E_s \cdots E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_s^{-1}$$

حال چون طبق قضیه E_i^{-1} ماتریس‌های مقدماتی هستند.پس حکم ج حاصل می‌شود.

اکنون فرض کنید حکم ج برقرار باشد.یعنی ماتریس‌های مقدماتی $E_1, E_2, \cdots, E_s$ باشند به طوریکه $A = E_1 E_2 \cdots E_s$.چون ماتریس‌های مقدماتی معکوس‌پذیرند.لذا حاصلضربشان معکوس‌پذیر است.پس ماتریس A معکوس‌پذیر است و این حکم الف را نشان می‌دهد.

۴ـ فرض کنید A معکوس‌پذیر نیست.در این صورت، A هم ارز سطری ماتریس همانی I نیست (مسأله ۳).در نتیجه A هم ارز سطری ماتریسی است که سطر صفر دارد.به عبارت دیگر ماتریس‌های مقدماتی مانند $E_1, E_2, \cdots, E_s$ وجود دارند به طوری که $E_s \cdots E_2 E_1 A$ دارای سطر صفر است.حال طبق مسأله یک $E_s \cdots E_2 E_1 AB$ دارای سطر صفر می‌باشد.بنابراین AB هم ارز سطری ماتریسی است که دارای سطر صفر می‌باشد لذا هم ارز سطری I نمی‌باشد.اما این تساوی $AB = I$ را نقض می‌کند. بنابراین A معکوس‌پذیر است و در نتیجه:

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1}$$

۵ـ با توجه به رابطهٔ $A^2 + 2A - 2I = 0$ داریم:

$$A^2 + 2A - 2I = 0 \Longrightarrow A^2 + 2A = 2I \Longrightarrow \frac{1}{2}(A^2 + 2A) = I$$
$$\Longrightarrow A(\frac{1}{2}A + I) = I, \quad (\frac{1}{2}A + I)A = I$$

حال با انتخاب $B = (\frac{1}{2}A + I)$ داریم: $AB = I$ و $BA = I$ لذا ماتریس A معکوس‌پذیر است و $B = \frac{1}{2}A + I$ وارون آن می‌باشد.

۶ـ ماتریس $C = I + B(I - AB)^{-۱}A$ را در نظر می‌گیریم:

$$(I - AB)C = (I - AB)(I + B(I - AB)^{-۱}A)$$

$$= I - BA + (I - BA)(B(I - AB)^{-۱}A)$$

$$= I - BA + B(I - AB)^{-۱}A - BAB(I - AB)^{-۱}A$$

$$= I - BA + B(I - AB)^{-۱}A + B(-I + I - AB)(I - AB)^{-۱}A$$

$$= I - AB + B(I - AB)^{-۱}A + B(-(I - AB)^{-۱}A + (I - AB)(I - AB)^{-۱}A)$$

$$= I - BA + B(I - AB)^{-۱}A - B(I - AB)^{-۱}A + BIA$$

$$= I - BA + BA = I$$

پس $I - BA$ وارون‌پذیر است و $C = I + B(I - AB)^{-۱}A$ وارون آن می‌باشد.توجه شود برای اینکه C وارون $I - BA$ باشد.باید بررسی شود که ماتریس $C(I - BA)$ نیز برابر ماتریس همانی می‌شود.که این کار به خواننده واگذار می‌شود.

۷ـ فرض کنید $A^۲ = (c_{ij})$ چون $A^۲ = I$ پس مجموع درآیه‌های هر سطر ماتریس $A^۲$ برابر یک است.لذا: $i = ۱, ۲, \cdots, n \quad \sum_{j=۱}^{n} c_{ij} = ۱$

حال با توجه به اینکه $c_{ij} = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}a_{kj}$، داریم:

$$۱ = \sum_{j=۱}^{n} c_{ij} = \sum_{j=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} a_{ik}a_{kj}$$

$$= \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}\sum_{j=۱}^{n} a_{kj} = a.a = a^۲$$

لذا $a^2 = 1$ پس $a = \pm 1$.

۸ـ الف.فرض کنید $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ اعضای S باشند.پس

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

حال فرض کنید $C = AB$ و $C = (c_{ij})$.پس:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

حال $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}$ را به ازاء $1 \leq i \leq n$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ik} a_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} = 1 \times 1 = 1\end{aligned}$$

پس مجموع درایه‌های هر سطر ماتریس AB برابر یک است لذا S نسبت به ضرب ماتریس‌ها بسته است.

ب. بلی. زیرا ماتریس همانی I_n مجموع هر یک از سطرهایش برابر یک است.

ج. خیر. ماتریس A را در نظر بگیرید که درایه‌های ستون اول همگی برابر یک و بقیه درایه‌های صفر است چون A ستون صفر دارد پس معکوس‌پذیر نیست.

۹ـ باید نشان دهیم $\{E_{ij}\}$ که $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ فضای $M(m \times n, F)$ را تولید می‌کند و مستقل خطی است.فرض کنیم $A = (a_{ij})$ عضوی از فضا باشد.واضح است که $A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$.لذا $\{E_{ij}\}$ فضا را تولید می‌کند.حال نشان می‌دهیم این ماتریس‌ها مستقل خطی‌اند.فرض کنیم $\sum_{i,j} x_{ij} E_{ij} = 0$ $(x_{ij} \in F)$.حال در طرف چپ درایه ijام برابر x_{ij} و در طرف راست برابر صفر است پس $x_{ij} = 0$.لذا $\{E_{ij}\}$ پایه‌ای برای $M(m \times n, F)$ می‌باشد.در

نتیجه $\dim M = mn$.

۱۰ـ فرض کنید $E_{pq} = (a_{ij})$ و $E_{rs} = (b_{ij})$ و $E_{pq}E_{rs} = (c_{ij})$ داریم که

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad 1 \leq i,j \leq n$$

اگر $i \neq p$ داریم $a_{ik} = 0$ برای $1 \leq k \leq n$.لذا برای هر $1 \leq j \leq n$ داریم $c_{ij} = 0$.

همچنین اگر $j \neq s$ داریم $b_{kj} = 0$ برای $1 \leq k \leq n$.لذا برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $c_{ij} = 0$.

پس در حالتی که $j \neq s$ یا $i \neq p$ داریم که $c_{ij} = 0$ حال فرض کنیم $i = p$ و $j = s$ لذا

$$c_{ps} = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}b_{ks}$$

اگر $q = r$، در حالتی که $k = q = r$ داریم که $a_{pk} = 1$ و $b_{ks} = 1$ پس $a_{pk}b_{ks} = 1$ و در حالتی که $k \neq q = r$ داریم که $a_{pk} = b_{ks} = 0$.لذا $c_{ps} = 1$.

اگر $q \neq r$ پس همواره $k \neq r$ یا $k \neq q$ لذا $brs = 0$ یا $a_{pq} = 0$. بنابراین $c_{ps} = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}b_{ks} = 0$.لذا در ماتریس $E_{pq}E_{rs}$ همهٔ درایه‌ها جزء درایه psام صفر است و درایه psام در حالت $q = r$ برابر یک و در حالت $q \neq r$ برابر صفر است.بنابراین:

$$E_{pq}E_{rs} = \delta_{qr}E_{ps}$$

۱۱ـ ابتدا نشان می‌دهیم $V = U + W$.فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ دلخواه باشد. توجه کنید که:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$$

نشان می‌دهیم $\frac{1}{2}(A + A^t) \in U$ و $\frac{1}{2}(A - A^t) \in W$.داریم:

$$(\frac{1}{2}(A + A^t))^t = \frac{1}{2}(A^t + (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$$

یعنی $\frac{1}{2}(A+A^t)$ متقارن است.پس $\frac{1}{2}(A+A^t) \in U$.همچنین:

$$(\frac{1}{2}(A-A^t))^t = \frac{1}{2}(A^t-(A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t-A) = -\frac{1}{2}(A-A^t)$$

یعنی $\frac{1}{2}(A-A^t)$ پادمتقارن است.پس $\frac{1}{2}(A-A^t) \in W$.

بنابراین $V \subseteq U+W$ از طرفی U و W زیر فضاهای V هستند پس، $U+W \subseteq V$ در نتیجه $V = U+W$.

حال نشان می‌دهیم $U \cap W = 0$.فرض کنیم $B \in U \cap W$ بنابراین $B^t = B$ و $B^t = -B$ لذا $B = -B$ پس $2B = 0$ و چون میدان حقیقی است لذا $B = 0$.بنابراین $V = U \oplus W$.

۱۲ـ فرض کنید $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$:

الف:

$$\begin{aligned}\operatorname{trc}(A+B) &= \sum_{k=1}^{n}(a_{kk}+b_{kk}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \sum_{k=1}^{n} b_{kk}\\ &= \operatorname{trc}(A)+\operatorname{trc}(B)\end{aligned}$$

ب. فرض کنید $AB = (C_{ij})$ و $BA = (C'_{ij})$.داریم:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \qquad c'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}, \qquad 1 \le i,j \le n$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\operatorname{trc}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} C_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} C'_{kk} = \operatorname{trc}(BA)\end{aligned}$$

ج. چون A و B متشابهند لذا ماتریس نامنفرد P هست که، $A = PBP^{-1}$.

پس:

$$\operatorname{trc}(A) = \operatorname{trc}(PBP^{-1}) = \operatorname{trc}(P^{-1}PB) = \operatorname{trc}(IB) = \operatorname{trc}(B)$$

۱۳ـ چون A و B متشابهند پس ماتریس نامنفرد P هست که، $A = PBP^{-1}$.

بنابراین:

$$A^t = (PBP^{-1})^t = (P^{-1})^t B^t P^t = (P^t)^{-1} B^t P^t$$

حال چون P نامنفرد است پس P^t نامنفرد است و با توجه به رابطه فوق A^t و B^t متشابهند.

حال نشان می‌دهیم A^n و B^n به ازای هر n طبیعی متشابهند.

ابتدا با استقراء روی n نشان می‌دهیم $A^n = PB^nP^{-1}$.

حالت $n = 1$ واضح است.حال فرض کنید $n > 1$ و $A^{n-1} = PB^{n-1}P^{-1}$.طرفین را از راست در $A = PBP^{-1}$ ضرب می‌کنیم. لذا

$$A^{n-1}A = (PB^{n-1}P^{-1})A = PB^{n-1}P^{-1}(PBP^{-1}) = PB^{n-1}(P^{-1}P)BP^{-1}$$

$$= PB^{n-1}IBP^{-1} = PB^nP^{-1}$$

بنابراین A^n و B^n متشابهند.

۱۴ـ فرض کنید $ABA^{-1} = D$ بنابراین $AB = DA$.لذا

$$DA = AB = (AB)AA^{-1} = A(BA)A^{-1}$$

بنابراین BA با DA مشابه است ولی $DA = AB$ لذا BA با AB متشابه است.

۱۵ـ با توجه به فرض مسأله $A^2 = A$ و $B^2 = B$ و $(A+B)^2 = A+B$، بنابراین:

$$A + B = (A+B)^2 = (A+B)(A+B)$$

$$= A^2 + AB + BA + B^2$$

$$= A + AB + BA + B$$

$$= A + B + AB + BA \Longrightarrow AB + BA = 0$$

پس $AB = -BA$ در نتیجه $\mathrm{trc}(AB) = -\mathrm{trc}(BA)$.ولی $\mathrm{trc}(AB) = \mathrm{trc}(BA)$، پس $\mathrm{trc}(AB) = -\mathrm{trc}(AB)$ لذا $۲\mathrm{trc}(AB) = ۰$ در نتیجه $\mathrm{trc}(AB) = ۰$.

۱۶ـ طبق فرض مسأله $AB = A$ با ضرب طرفین رابطه از راست در A داریم:

$$ABA = AA \Longrightarrow A(BA) = A^{۲} \Longrightarrow AB = A^{۲} \Longrightarrow A = A^{۲}$$

مجدداً با توجه به اینکه $BA = B$ با ضرب طرفین رابطه از راست در B داریم:

$$BAB = BB \Longrightarrow B(AB) = B^{۲} \Longrightarrow BA = B^{۲} \Longrightarrow B = B^{۲}$$

لذا A و B خود توان هستند.حال نشان می‌دهیم $(A-B)^{۲} = ۰$.

$$(A-B)^{۲} = (A-B)(A-B) = A^{۲} - AB - BA + B^{۲} = A - A - B + B = ۰$$

۱۷ـ چون $I + A$ وارون دارد لذا $(I+A)^{-۱}(I+A) = I$ بنابراین:

$$I = (I+A)^{-۱}(I+A) = (I+A)^{-۱} + (I+A)^{-۱}A \Longrightarrow (I+A)^{-۱}A = I - (I+A)^{-۱}$$

همچنین داریم: $I = (I+A)(I+A)^{-۱}$ بنابراین:

$$I = (I+A)(I+A)^{-۱} = (I+A)^{-۱} + A(I+A)^{-۱} \Longrightarrow A(I+A)^{-۱} = I - (I-A)^{-۱}$$

با توجه به روابط فوق داریم:

$$A(I+A)^{-۱} = (I+A)^{-۱}A \qquad (*)$$

حال حکم را بررسی می‌کنیم:

$$(I-A)(I+A)^{-۱} = (I+A)^{-۱} - A(I+A)^{-۱}$$

$$= (I+A)^{-۱} - (I+A)^{-۱}A \qquad \text{طبق رابطهٔ } (*)$$

$$= (I+A)^{-۱}(I-A)$$

۱۸ـ طرفین رابطه را محاسبه کرده نشان می‌دهیم برابرند.

$$\begin{aligned}(A+B)A^{-1}(A-B) &= (AA^{-1}+BA^{-1})(A-B)\\ &= (I+BA^{-1})(A-B)\\ &= (A-B)+BA^{-1}(A-B)\\ &= A-B+B(A^{-1}A)-BA^{-1}B\\ &= A-B+B-BA^{-1}B = A-BA^{-1}B\end{aligned}$$

همچنین برای طرف دوم داریم:

$$\begin{aligned}(A-B)A^{-1}(A+B) &= (A-B)(A^{-1}A+A^{-1}B)\\ &= (A-B)(I+A^{-1}B)\\ &= (A-B)+(A-B)(A^{-1}B)\\ &= A-B+AA^{-1}B-BA^{-1}B\\ &= A-B+B-BA^{-1}B = A-BA^{-1}B\end{aligned}$$

با توجه به روابط فوق حکم ثابت است.

۱۹ـ با توجه به رابطه $A^{2}B+BA^{2}=2ABA$ داریم:

$$A^{2}B-ABA=ABA-BA^{2}\Longrightarrow A(AB-BA)=(AB-BA)A$$

لذا A با $(AB-BA)$ جابجا می‌شود پس A با هر توان $AB-BA$ جابجا می‌شود.بنابراین اگر

m عدد طبیعی دلخواهی باشد آنگاه:

$$
\begin{aligned}
(AB-BA)^m &= (AB-BA)(AB-BA)^{m-1} \\
&= AB(AB-BA)^{m-1} - BA(AB-BA)^{m-1} \\
&= AB(AB-BA)^{m-1} - B(AB-BA)^{m-1}A
\end{aligned}
$$

حال با فرض $C = B(AB-BA)^{m-1}$ پس $(AB-BA)^m = AC - CA$ لذا:

$$\operatorname{trc}(AB-BA)^m = \operatorname{trc}(AC-CA) = \operatorname{trc}(AC) - \operatorname{trc}(CA) = 0$$

۲۰ـ در ماتریسهای متقارن درایه‌های زیر قطر اصلی با درایه‌های نظیرشان بالای قطر اصلی برابرند. لذا کافیست ماتریسهایی برای مبنا انتخاب شوند که اولاً قطر اصلی را تولید کنند« ثانیاً ماتریسهایی که به یک درایه زیر قطر اصلی و درایه معادلش ~~روی~~ بالای قطر اصلی یک عدد نسبت دهد.

ماتریسهای $\{F_{ij}\}$ که $i \geq j$ و درایه ijام و درایه jiام آن یک و بقیه صفر هستند را درنظر بگیرید. ابتدا نشان می‌دهیم $\{F_{ij}\}$ فضای V را تولید می‌کند. فرض کنید $A \in V$ و $A = (a_{ij})$ پس برای $1 \leq i,j \leq n$ داریم: $a_{ij} = a_{ji}$.

واضح است که $A = \sum\limits_{i \geq j} a_{ij}F_{ij}$. حال نشان می‌دهیم $\{F_{ij}\}_{i,j}$ مستقل خطی است. فرض کنیم $\{\alpha_{ij}\}$ اسکالرهایی در F باشند و

$$\alpha_{11}F_{11} + \cdots + \alpha_{nn}F_{nn} + \alpha_{21}F_{21} + \cdots + \alpha_{n1}F_{n1} + \cdots + \alpha_{nn-1}F_{nn-1} = 0$$

بنابراین:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = O_{n\times n}$$

پس برای $1 \leq j \leq i \leq n$ داریم: $\alpha_{ij} = 0$.لذا $\{F_{ij}\}$ مستقل خطی است پس پایه‌ای برای فضای V است.

در نتیجه اعضای $\{F_{ij}\}$ برابر تعداد عناصر روی قطر اصلی و زیر قطر اصلی است. پس $\dim V = \dfrac{n^2+n}{2}$.

حال چون ماتریسهای متقارن چپ حقیقی عناصر روی قطرشان صفر است و عناصر زیر قطر اصلی و معادلشان در بالای قطر قرینه اند، پس مبنای زیر را در نظر می‌گیریم: $\{F'_{ij}\}$ که $1 \leq j < i \leq n$ و درایه ijام آن یک و درایه jiام آن منفی یک است.

اثبات اینکه $\{F'_{ij}\}$ پایه‌ای برای W است به خواننده واگذار می‌شود.پس تعداد اعضای $\{F'_{ij}\}$ برابر تعداد عناصر زیر قطر اصلی است.لذا $\dim W = \dfrac{n^2-n}{2}$.

۲۱ـ اگر $A = 0$ لذا $AA^t = 0$ بنابراین $\operatorname{trc}(AA^t) = 0$.

حال فرض کنید $\operatorname{trc}(AA^t) = 0$ و $A = (a_{ij})$ و $A^t = (b_{ij})$ بنابراین:

$$b_{ij} = a_{ji} \qquad i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

حال با فرض $AA^t = (C_{ij})$ لذا $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ و چون $\operatorname{trc}(AA^t) = 0$ بنابراین $\sum_{i=1}^{n} C_{ii} = 0$ ولی داریم:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} C_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

ولی چون $b_{ki} = a_{ik}$ بنابراین: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 0$ لذا مجموع مربعات تمام درایه‌های ماتریس A برابر صفر است و چون میدان اعداد حقیقی است لذا تمامی درایه‌ها صفر می‌باشند پس $A = 0$.

۲۲ـ طبق فرض مسأله $BAA^t = 0$ حال طرفین رابطه را از راست در B^t ضرب می‌کنیم.لذا داریم:

$$BAA^tB^t = 0 \Longrightarrow BA(BA)^t = 0 \Longrightarrow \operatorname{trc}(BA(BA)^t) = 0$$

و طبق مسأله ۲۱، $BA = 0$.

برای اثبات قسمت دوم مسأله فرض کنید n عددی طبیعی باشد که $k \leq 2^n$.(توجه شود که چنین nای موجود است) قرار می‌دهیم $m = 2^n - k$ و طرفین رابطه $BA^k = 0$ را از راست در A^m ضرب می‌کنیم لذا: $BA^{2^n} = BA^{m+k} = BA^k A^m = 0$ حال به استقراء روی n نشان می‌دهیم اگر BA^{2^n} آنگاه $BA = 0$.اگر $n = 1$ لذا $BA^2 = 0$ و چون $A = A^t$ پس $BAA^t = 0$ و طبق قسمت قبل $BA = 0$.

حال فرض کنید $n > 1$ و حکم برای $n - 1$ برقرار باشد یعنی اگر $BA^{2^{n-1}} = 0$ آنگاه $BA = 0$.حکم را برای n بررسی می‌کنیم.پس فرض کنیم $BA^{2^n} = 0$.

با ضرب طرفین رابطه در B^t از راست داریم:

$$0 = BA^{2^n} B^t = BA^{2^{n-1}} A^{2^{n-1}} B^t$$

به راحتی بررسی می‌شود که برای هر r طبیعی، $(A^t)^r = (A^r)^t$.(بررسی کنید) و چون A متقارن است پس $A^t = A$ لذا:

$$A^{2^{n-1}} = (A^t)^{2^{n-1}} = (A^{2^{n-1}})^t$$

حال با توجه به رابطه (۱) داریم:

$$BA^{2^{n-1}}(A^{2^{n-1}})^t B^t = 0 \Longrightarrow BA^{2^{n-1}}(BA^{2^{n-1}})^t = 0$$

$$\Longrightarrow \operatorname{trc}(BA^{2^{n-1}}(BA^{2^{n-1}})^t) = 0$$

لذا طبق مسأله ۲۱، $BA^{2^{n-1}} = 0$ و طبق فرض استقراء $BA = 0$.

۲۳ـ فرض کنید $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}), A^t = (a'_{ij})$ و $AA^t = (d_{ij})$ داریم.

$a'_{ij} = a_{ji}$ و $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a'_{kj}$. بنابراین:

$$\mathrm{trc}(AA^t) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a'_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$$

به همین ترتیب اثبات می‌شود:

$$\mathrm{trc}(BB^t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}^2, \qquad \mathrm{trc}(CC^t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ik}^2$$

ولی $AA^t + BB^t + CC^t = 0$ لذا $\mathrm{trc}(AA^t + BB^t + CC^t) = 0$ پس

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{trc}(AA^t + BB^t + CC^t) &= \mathrm{trc}(AA^t) + \mathrm{trc}(BB^t) + \mathrm{trc}(CC^t) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ik}^2 \end{aligned}$$

و چون میدان اعداد حقیقی است لذا $a_{ik} = b_{ik} = c_{ik} = 0$ برای $i = 1, 2, \cdots, n$ و $k = 1, 2, \cdots, n$ بنابراین $A = B = C = 0$.

۲۴ـ فرض کنید $C = AA^t - A^tA$ نشان می‌دهیم $\mathrm{trc}(CC^t) = 0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{trc}(CC^t) &= \mathrm{trc}[(AA^t - A^tA)(AA^t - A^tA)^t] \\ &= \mathrm{trc}[(AA^t - A^tA)(AA^t - A^tA)] \\ &= \mathrm{trc}[(AA^t - A^tA)AA^t - (AA^t - A^tA)A^tA] \end{aligned}$$

و چون A با $AA^t - A^tA$ جابجا می‌شود لذا:

$$(AA^t - A^tA)AA^t = A(AA^t - A^tA)A^t$$

بنابراین:

$$\mathrm{trc}(CC^t) = \mathrm{trc}[A(AA^t - A^tA)A^t - (AA^t - A^tA)A^tA]$$

قرار می‌دهیم $B = (AA^t - A^tA)A^t$ لذا داریم:

$$\mathrm{trc}(CC^t) = \mathrm{trc}(AB - BA) = \mathrm{trc}(AB) - \mathrm{trc}(BA) = 0$$

و طبق مسأله ۲۱ چون $\mathrm{trc}(CC^t) = 0$ لذا $C = 0$.بنابراین $AA^t - A^tA = 0$ و درنتیجه $AA^t = A^tA$.

۲۵ـ چون S متقارن و T متقارن چپ است لذا $S^t = S$ و $T^t = -T$.

P^tSP را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
P^tSP &= [(S+T)^{-1}(S-T)]^tS(S+T)^{-1}(S-T) \\
&= (S-T)^t[(S+T)^{-1}]^tS(S+T)^{-1}(S-T) \\
&= (S^t-T^t)[(S+T)^t]^{-1}S(S+T)^{-1}(S-T) \\
&= (S+T)(S^t+T^t)^{-1}S(S+T)^{-1}(S-T) \\
&= (S+T)(S-T)^{-1}S(S+T)^{-1}(S-T) \\
&= \{[(S+T)(S-T)^{-1}S(S+T)^{-1}(S-T)]^{-1}\}^{-1} \\
&= [(S-T)^{-1}(S+T)S^{-1}(S-T)(S+T)^{-1}]^{-1}
\end{aligned}$$

و طبق مسأله ۱۸ داریم:

$$(S+T)S^{-1}(S-T) = (S-T)S^{-1}(S+T)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
P^tSP &= [((S-T)^{-1}(S-T)S^{-1}(S+T)(S+T)^{-1}]^{-1} \\
&= [IS^{-1}I]^{-1} = (S^{-1})^{-1} = S
\end{aligned}$$

۲۶ـ ماتریس $AB - BA$ را در نظر می‌گیریم.داریم:

$$\operatorname{trc}(AB - BA) = \operatorname{trc}(AB) - \operatorname{trc}(BA) = 0$$

پس اگر $AB - BA$ دارای نمایشی به صورت $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ باشد چون $\operatorname{trc}(AB - BA) = 0$ لذا $a + d = 0$ بنابراین $d = -a$ لذا نمایش ماتریس به صورت $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ است.بنابراین:

$$(AB - BA)^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab - ba \\ ac - ac & bc + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix}$$
$$= (a^2 + bc)I_2$$

۲۷ـ اگر $n = 1$ پس A, B, C ماتریسهای 1×1 هستند لذا با هم جابجا می‌شوند.پس رابطه مذکور برقرار است.

در حالت $n = 2$ ماتریس $(AB - BA)^2$ طبق مسأله ۲۶ ماتریس اسکالر است لذا با هر ماتریسی جابجا می‌شود.بنابراین رابطه مذکور برقراراست.

با یک مثال نشان می‌دهیم در حالت $n \geq 3$ رابطه مذکور برقرار نیست.

فرض کنید $C = E_{12}$ و $B = E_{32}$ و A ماتریسی باشد که $A = (a_{ij})$ و $a_{21} = a_{23} = 1$ و بقیه درایه‌ها صفرند، بررسی کنید.

$$(AB - BA)^2 C \neq C(AB - BA)^2$$

۲۸ـ ماتریس A هم ارز سطری یک ماتریس تحویل یافته پلکانی است لذا ماتریسهای مقدماتی $E_1, E_2, \cdots, E_s$ هست که $E_s \cdots E_2 E_1 A = D$ و D سطری پلکانی و تعداد سطرهای ناصفر

D برابر رتبه A است.فرض کنید D، r سطر ($r \geq 0$) صفر داشته باشد لذا DB نیز حداقل r سطر صفر دارد و چون $E_s \cdots E_2 E_1 AB = DB$ پس $E_s \cdots E_2 E_1 AB$ دارای حداقل r سطر صفر است.لذا تعدا سطرهای ناصفر ماتریس تحویل شده پلکانی AB از تعداد سطرهای ناصفر ماتریس تحویل شده پلکانی A نابیشتر است.پس $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$.

از طرفی $\text{rank}(AB)^t = \text{rank}(AB)$ و $\text{rank}(B^t) = \text{rank}(B)$ و طبق قسمت اول حکم $\text{rank}(B^t A^t) \leq \text{rank}(B^t)$ در نتیجه:

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(AB)^t = \text{rank}(B^t A^t) \leq \text{rank}(B^t) = \text{rank}(B)$$

لذا: $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$.

۲۹ـ ابتدا فرض کنیم $BA = I_m$ لذا $\text{rank}(BA) = \text{rank}(I_m) = m$ ولی طبق مسأله ۲۸ داریم که $\text{rank}(BA) \leq \text{rank}(A)$ بنابراین

$$\text{rank}(A) \geq m \qquad (1)$$

از طرفی رتبه سطری و ستونی A با هم برابرند و چون A دارای m ستون است لذا رتبه A حداکثر m است، بنابراین

$$\text{rank}(A) \leq m \qquad (2)$$

حال با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم: $\text{rank}(A) = m$.

برعکس: فرض کنید $\text{rank}(A) = m$.لذا ماتریس‌های مقدماتی $E_1, E_2, \cdots, E_s$ وجود دارند که $E_s \cdots E_2 E_1 A = D$ و D دارای m سطر ناصفر و $n - m$ سطر صفر است.حال چون D دارای m ستون نیز می‌باشد لذا D نمایشی به صورت زیر دارد.

$$D = \begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}$$

حال اگر ماتریس P با نمایش زیر را درنظر بگیریم:

$$P = \begin{pmatrix} I_m & O \end{pmatrix}$$

واضح است که $PD = I_m$.بنابراین $PE_s \cdots E_2 E_1 A = PD = I_m$. حال با انتخاب $B = PE_s \cdots E_2 E_1$ داریم که $BA = I_m$ و حکم ثابت است.

قسمت دوم مسأله نیز به همین طریق ثابت می‌شود و اثبات آن به خواننده واگذار می‌شود.

۳۰ـ ماتریس $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم.واضح است که $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ چون A فقط با خودش متشابه است لذا $A = PAP^{-1}$ و اگر $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ داریم $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ 2c & d \end{pmatrix}$.

حال با برابر قرار دادن A و PAP^{-1} داریم:

$$2c = c \Longrightarrow c = 0 \qquad \text{و} \qquad \frac{b}{2} = b \Longrightarrow b = 0$$

لذا $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

حال ماتریس $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم واضح است که $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و چون A فقط با خودش متشابه است لذا $A = QAQ^{-1}$.از طرفی: $QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} a & -2a+2d \\ 0 & d \end{pmatrix}$

با برابر قرار دادن درایه‌های A و QAQ^{-1} داریم:

$$-2a + 2d = 0 \Longrightarrow a = d$$

لذا A به صورت $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ می‌باشد.

۳۱ـ چون A نامنفرد است پس ستونهای A وابسته خطی هستند.حال اگر $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ستونهای ماتریس A باشند پس اسکالرهای $a_1, a_2, \cdots, a_n$ که همگی صفر نیستند موجود است که

$$a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_nA_n = 0 \qquad (1)$$

قرار می‌دهیم $Y = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.چون حداقل یکی از درایه‌های ناصفر است لذا $Y \neq 0$ و رابطه (۱) نتیجه می‌دهد که $AY = 0$.حال واضح است که $Y^tAY = 0$.

۳۲ـ فرض کنید $1 \leq i, j \leq n$ باشد.واضح است که:

$$\int_0^1 x^{i+j-2}dx = \frac{1}{i+j-1}$$

فرض کنید $A = (a_{ij})$، لذا داریم:

$$(a_{ij}) = (\int_0^1 x^{i+j-2}dx)$$

حال بردار ناصفر $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ و چند جمله‌ای $f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_ix^{i-1}$ را در نظر می‌گیریم.چون حداقل یک $y_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$ لذا چندجمله‌ای در $[0, 1]$ همواره صفر نیست.پس tای در

$[0,1]$ وجود دارد که $f^2(t) > 0$. بنابراین $\int_0^1 f^2(x)dx > 0$. از طرفی $f^2(x)$ برابر است با:

$$f^2(x) = f(x)f(x) = (\sum_{i=1}^{n} y_i x^{i-1})(\sum_{j=1}^{n} y_j x^{j-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j x^{i+j-2}$$

بنابراین:

$$\int_0^1 (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j x^{i+j-2})dx = \int_0^1 f^2(x)dx > 0$$

درنتیجه:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j (\int_0^1 x^{i+j-2}dx) > 0 \qquad (1)$$

حال اگر فرض کنیم $AY = B$ به طوری که $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$، بنابراین:

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{n} (\int_0^1 x^{i+j-2}dx) y_j$$

حال چون $Y^t AY = Y^t B$ لذا:

$$Y^t AY = Y^t B = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{j=1}^{n} (\int_0^1 x^{i+j-2}dx) y_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j (\int_0^1 x^{i+j-2}dx)$$

حال با توجه به رابطه فوق و نامساوی (۱) داریم:

$$Y^tAY > 0$$

پس به ازای هر بردار ستونی ناصفر Y داریم $Y^tAY > 0$.ولی طبق مسأله قبل اگر A منفرد باشد آنگاه برداری ناصفر مثل Y هست که $Y^tAY = 0$، بنابراین A نامنفرد است.(ماتریس A را یک ماتریس هیلبرت نامند)

۳۳ـ چون $A - A^2$ پوچ توان است لذا kای طبیعی وجود دارد که:

$$(A - A^2)^k = 0 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i(-1)^{k-i}(A^2)^{k-i} = 0$$
$$\Longrightarrow A^k + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} A^{2k-i}(-1)^{k-i} = 0$$

حال چون $0 \leq i \leq k - 1$، لذا $2k - i \geq k + 1$، پس به ازاء هر i که $0 \leq i \leq k - 1$، A^{2k-i} عاملی از A^{k+1} دارد.حال از تمام جملات سیکما $(-A^{k+1})$ را فاکتورگرفته، پس داریم:

$$A^k - A^{k+1}g(A) = 0 \qquad g(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

لذا $A^k = A^{k+1}g(A)$.قرار می‌دهیم $f(A) = A^kg(A)^k$.از طرفی:

$$A^k = AA^kg(A) = Ag(A)A^{k+1}g(A) = A^2g(A)^2A^k$$
$$= A^2g(A)^2A^{k+1}g(A) = A^3g(A)^3A^k = \cdots$$
$$= A^kg(A)^kA^k = A^{2k}g(A)^k$$

بنابراین $A^k = A^{2k}g(A)^k$.حال با ضرب طرفین از راست در $g(A)^k$ داریم:

$$A^kg(A)^k = A^{2k}g(A)^{2k} = (A^kg(A)^k)^2$$

لذا $f(A)^{2} = f(A)$.حال نشان می‌دهیم $f(A)$ ناصفر است.با توجه به رابطه $A^{k} = A^{2k}g(A)^{k}$ داریم:

$$A^{k} = A^{2k}g(A)^{k} = A^{k}A^{k}g(A)^{k} = A^{k}f(A)$$

لذا $A^{k} = A^{k}f(A)$.حال اگر $f(A) = 0$، بنابراین $A^{k} = 0$، لذا A پوچ توان است که تناقض می‌باشد.پس $f(A) \neq 0$.

۳۴ـ ابتدا نشان می‌دهیم تعداد ماتریسهای 2×2 معکوس‌پذیر روی Z_p دقیقاً برابر q است.طبق قضیه ماتریسی معکوس‌پذیر است که بردارهای سطری و ستونی آن مستقل باشند(ماتریسهای مربعی).لذا تعداد مجموعه‌های مستقل به شکل $\{(a,b),(c,d)\}$ را می‌شماریم که $a,b,c,d \in Z_p$.برای راحتی ابتدا مجموعه‌های دو عضوی وابسته را می‌شماریم و سپس از تعداد کل مجموعه‌های دو عضوی روی $Z_p \times Z_p$ کم می‌کنیم.

ابتدا تعداد کل مجموعه‌های دو عضوی $\{(a,b),(c,d)\}$ به طوری که $(a,b),(c,d) \in Z_p \times Z_p$ را محاسبه می‌کنیم.تعداد عناصر $Z_p \times Z_p$ برابر است با p^{2} عضو، فرض کنیم این اعضاء $x_1, x_2, \cdots, x_{p^2}$ باشند.

تعداد مجموعه‌های دو عضوی رادر نظر می‌گیریم که شامل x_1 است:

$$\{x_1,x_1\},\{x_1,x_2\},\{x_1,x_3\},\cdots,\{x_1,x_{p^2}\}$$

تعداد این مجموعه‌ها برابر p^{2} است حال مجموعه‌های دو عضوی را محاسبه می‌کنیم که شامل x_2 باشند و شامل x_1 نباشند که عبارتند از:

$$\{x_2,x_2\},\{x_2,x_3\},\cdots,\{x_2,x_{p^2}\}$$

تعداد این مجموعه‌ها برابر $p^{2} - 1$ است، حال مجموعه‌های دو عضوی را در نظر می‌گیریم شامل x_3 باشند و شامل x_1, x_2 نباشند که تعداد آنها برابر $p^{2} - 2$ است.به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.لذا

در مرحله آخر(مرحله $p^۲$) مجموعه‌هایی را در نظر می‌گیریم که شامل $x_{p^۲}$ باشند و شامل x_i، $(۱ \leq i \leq p^۲ - ۱)$ نباشند. این مجموعه عبارت است از $\{x_{p^۲}, x_{p^۲}\}$. لذا تعداد کل مجموعه‌های دو عضوی روی $Z_p \times Z_p$ برابر است با:

$$۱ + ۲ + \cdots + p^۲ = \frac{۱}{۲}p^۲(p^۲ + ۱)$$

حال تعداد مجموعه‌های وابسته را محاسبه می‌کنیم:

حالت اول: مجموعه‌هایی که $(۰, ۰)$ یکی از اعضای آن است که عبارتند از: $\{(۰, ۰), x_i\}$ که $۱ \leq i \leq p^۲$. لذا تعداد این مجموعه‌ها $p^۲$ عضو است.

حالت دوم: مجموعه‌های دو عضوی را بررسی می‌کنیم که اعضای آنها به شکل $(۰, a)$ که $a \neq ۰$ هستند، که عبارتند از:

$$\{(۰, ۱), (۰, ۱)\}, \{(۰, ۱), (۰, ۲)\}, \cdots, \{(۰, ۱), (۰, p - ۱)\}$$

$$\{(۰, ۲), (۰, ۲)\}, \{(۰, ۲), (۰, ۳)\}, \cdots, \{(۰, ۲), (۰, p - ۱)\}$$

$$\vdots$$

$$\{(۰, p - ۲), (۰, p - ۲)\}, \{(۰, p - ۲), (۰, p - ۱)\}$$

$$\{(۰, p - ۱), (۰, p - ۱)\}$$

لذا تعداد این مجموعه‌ها برابر است با: $۱ + ۲ + \cdots + (p - ۱) = \frac{p(p - ۱)}{۲}$.

حالت سوم: مجموعه‌هایی که اعضای آنها به شکل $(b, ۰)$ که $b \neq ۰$ هستند که طبق قسمت قبل تعداد این مجموعه‌ها نیز برابر $\frac{p(p - ۱)}{۲}$ است.

حالت چهارم: مجموعه‌های دو عضوی را بررسی می‌کنیم که اعضای آن به شکل (a, a) هستند

که $a \neq ۰$ که عبارتند از:

$$\{(۱,۱),(۱,۱)\},\{(۱,۱),(۲,۲)\},\cdots,\{(۱,۱),(p-۱,p-۱)\}$$

$$\{(۲,۲),(۲,۲)\},\{(۲,۲),(۳,۳)\},\cdots,\{(۲,۲),(p-۱,p-۱)\}$$

$$\vdots$$

$$\{(p-۱,p-۱),(p-۱,p-۱)\}\}$$

لذا تعداد این مجموعه‌ها برابر است با $\frac{p(p-۱)}{۲} = ۱+۲+\cdots+p-۱$.

حالت پنجم: مجموعه‌های دو عضوی را بررسی می‌کنیم که اعضای آن به شکل $(a,۲a)$ که $a \neq ۰$ می‌باشد(توجه شود برای اعضایی از Z_p مثل a بقسمی که $۲a$ بزرگتر یا مساوی p می‌شود باقیمانده آنها بر p را در نظر می‌گیریم.)

این مجموعه‌ها عبارتند از:

$$\{(۱,۲),(۱,۲)\},\{(۱,۲),(۲,۴)\},\cdots,\{(۱,۲),(p-۱,۲(p-۱))\}$$

$$\{(۲,۴),(۲,۴)\},\{(۲,۴),(۴,۸)\},\cdots,\{(۲,۴),(۲(p-۱),۴(p-۱))\}$$

$$\vdots$$

$$\{(p-۱,۲(p-۱)),(p-۱,۲(p-۱))\}$$

تعداد این مجموعه‌ها نیز برابر $\frac{p(p-۱)}{۲}$ است.

حالت ششم: مجموعه‌هایی که اعضای آن به شکل $(a,۳a)$ می‌باشند که $a \neq ۰$ و طبق حالت قبل تعداد این مجموعه‌ها نیز برابر $\frac{p(p-۱)}{۲}$ است.

به همین ترتیب مجموعه‌هایی که اعضای آن به شکل $(a,۴a),\cdots,(a,(p-۱)a)$ که $a \neq ۰$ می‌باشد که تعداد هر یک برابر $\frac{p(p-۱)}{۲}$ می‌باشد.سپس تعداد اعضای مرحله چهارم، پنجم و ششم

برابر $(\frac{p(p-1)}{2})(p-1)$ است.تعداد اعضای مرحله اول برابر p^2 و مجموع تعداد حالات دوم و سوم برابر $2\frac{p(p-1)}{2}$ است لذا تعداد مجموعه‌های وابسته برابر است با:

$$p^2+2\frac{p(p-1)}{2}+(p-1)\frac{p(p-1)}{2}=\frac{p^3+2p^2-p}{2}$$

لذا تعداد کل مجموعه‌های مستقل برابر است با:

$$\frac{p^2(p^2+1)}{2}-\frac{p^3+2p^2-p}{2}=\frac{p^4-p^3-p^2+p}{2}$$

توجه شود در حالتهای گرفته شده کل مجموعه‌های وابسته محاسبه شده است.(بررسی کنید).

حال هر دو بردار مستقل را می‌توان در یک ستون قرار داد که در هر حالت یک ماتریس نامنفرد بدست می‌آید و با عوض کردن ستونهای این ماتریسها باز به همین تعداد ماتریس نامنفرد بدست می‌آید که با ماتریس‌های اول متمایزند لذا تعداد کل ماتریس‌های نامنفرد روی Z_p برابر است با:

$$2\frac{(p^4-p^3-p^2+p)}{2}=p^4-p^3-p^2+p=(p^2-1)(p^2-p)$$

حال چون ماتریسهای معکوس‌پذیر روی Z_p با عمل ضرب ماتریسها تشکیل گروه می‌دهند و تعداد اعضای این گروه برابر $q=(p^2-1)(p^2-p)$ است.هر عضو که بتوان مرتبه گروه برسد برابر عضو همانی گروه است.حال اگر A ماتریسی 2×2 و معکوس‌پذیر روی Z_p باشد لذا $A^q=I$ در نتیجه $A^{q+2}=A^2$.

۵.۲ پاسخ تشریحی نکات تستی

۱ـ درست، مسأله (۲۸) را بینید.

۲ـ درست، مسأله (۱۴) فصل چهارم را ببینید.

۳ـ نادرست، فرض کنید $n = ۲$، $a_{۱۱} = a_{۲۲} = ۰$ و $a_{۱۲} = ۱, a_{۲۱} = -۱$ پس:

$$\varphi(x) = x_۱x_۲ - x_۲x_۱ = ۰ \qquad ((x_۱, x_۲) \in R^۲)$$

ولی A ناصفر است.

۴ـ درست، مسأله (۱۴) فصل چهارم را ببینید.

۵ـ درست، چون A متقارن است لذا $A^t = A$ پس $AA^t = A^۲ = ۰$.در نتیجه $\operatorname{trc}(AA^t) = ۰$ و طبق مسأله (۲۱)، $A = ۰$.

۶ـ درست، چون A و B متقارن هستند پس $A^t = A$ و $B^t = B$.لذا

$$BB^t + AA^t = A^۲ + B^۲ = ۰ \Longrightarrow \operatorname{trc}(BB^t) + \operatorname{trc}(AA^t) = ۰$$

و چون به ازای هر ماتریس مثل P داریم که $\operatorname{trc}(PP^t) \geq ۰$.بنابراین:

$$\operatorname{trc}(BB^t) = \operatorname{trc}(AA^t) = ۰$$

و طبق مسأله (۲۱)، $A = B = ۰$.

۷ـ نادرست، توجه شود که ماتریسهای متشابه، trc و det یکسان دارند.ولی در ماتریسهای داده شده trc دو ماتریس برابر نیست پس متشابه نیستند.

۸ـ درست، با توجه به مسأله (۱)، A در هر ماتریسی از چپ ضرب شود ماتریس حاصلضرب یک سطر صفر دارد.پس هیچگاه ماتریس همانی ظاهر نمی‌شود.

۹ـ نادرست، فرض کنید $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}$ پس $AB + BA = ۰$ ولی هیچ یک از دو ماتریس A و B منفرد نیستند.

۱۰ـ درست، داریم $AB + BA = ۰$ پس $\operatorname{trc}(AB + BA) = ۰$ لذا

$\operatorname{trc}(AB) + \operatorname{trc}(BA) = 0$ و طبق مسأله (۱۲)، $\operatorname{trc}(BA) = \operatorname{trc}(AB)$. بنابراین:

$$\operatorname{trc}(AB) + \operatorname{trc}(AB) = 0 \Longrightarrow 2\operatorname{trc}(AB) = 0 \Longrightarrow \operatorname{trc}(AB) = 0$$

۱۱ـ نادرست، فرض کنید $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $C = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ واضح است که $\operatorname{rank}(A) = 2$ و $\operatorname{rank}(B) = 1$ پس $\operatorname{rank}(A) > \operatorname{rank}(B)$. ولی $\operatorname{rank}(AC) = 0$ و $\operatorname{rank}(BC) = 1$.

۱۲ـ نادرست، فرض کنید $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ واضح است که $A^2 = 0$ پس $\operatorname{rank}(A^2) + 1 = 1$ ولی $\operatorname{rank}(A) = 2$.

۱۳ـ نادرست، فرض کنید $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ پس $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. لذا

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(AB) = 1$$

ولی هیچیک از A یا B معکوس‌پذیر نیست.

۱۴ـ درست، مسأله (۲۶) را ببینید.

۱۵ـ درست، مسأله (۱۴) فصل چهارم را ببینید.

فصل سوم

دترمینان و دستگاه معادلات خطی

۱.۳ تعاریف و قضایا

تعریف: فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریسی در $M(n, F)$ است.دترمینان A که با علامت $\det A$ ($|A|$) نشان داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\det A = \sum_{j \in S_n} (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

علامت هر جمله بر حسب اینکه جایگشت j زوج یا فرد باشد مثبت یا منفی منظور می‌گردد.

قضیه ۱ـ۳: فرض کنید $A \in M(n, F)$ ماتریس دلخواه باشد:

الف. اگر ماتریس B حاصل تعویض دو سطر ماتریس A باشد آنگاه $|B| = -|A|$.

ب. هرگاه ماتریس B از ضرب اسکالر λ در یک سطر A حاصل شده باشد $|B| = \lambda|A|$.

ج. اگر ماتریس B حاصل افزودن λ برابر هر عضو یک سطر A به سطر دیگر باشد $|B| = |A|$.

د. $|A| = |A^t|$.

قضیه ۲ـ۳: هرگاه ماتریس $A = (a_{ij})$ بالا (پائین) مثلثی باشد آنگاه:

$$|A| = a_{۱۱}a_{۲۲}\cdots a_{nn}$$

قضیه ۳ـ۳: اگر $A \in M(n,F)$، A نامنفرد است اگر و تنها اگر $|A| = ۰$.

قضیه ۴ـ۳: فرض کنید A و B عضو $M(n,F)$ باشند آنگاه $|AB| = |A||B|$.

تعریف: فرض کنید $A = (a_{ij})$، زیرماتریسی از A را که با حذف سطر iام و ستون jام حاصل می‌شود با $A(i,j)$ نمایش داده و در این صورت $|A(i,j)|$ را کهاد (minor)، a_{ij} و $(-۱)^{i+j}|A(i,j)|$ را همعامل (همسازه cofactor) a_{ij} می‌نامیم.

تعریف: فرض کنید $A = (a_{ij})$ و $c_{ij} = (-۱)^{i+j}|A(i,j)|$ همعامل a_{ij} است.در این صورت ماتریس $(c_{ij})^t$ را ماتریس الحاقی کلاسیک می‌نامیم و با علامت $\mathrm{adj}(A)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵ـ۳: فرض کنید $A \in M(n,F)$ داریم:

$$\mathrm{adj}(A).A = A.\mathrm{adj}(A) = |A|I_n$$

نتیجه ۱ـ۵ـ۳: اگر A نامنفرد باشد آنگاه $A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\mathrm{adj}(A)$.

قضیه ۶ـ۳: اگر $A \in M(m\times n,F)$ و A دارای زیرماتریسی مثل B باشد که $B \in M(d,F)$ که در آن $d \leq \min\{m,n\}$ و $|B| \neq ۰$ آنگاه $\mathrm{rank}(A) \geq d$.

تعریف: فرض کنید F یک میدان باشد.هر دستگاه از m معادله n مجهولی به صورت

$$\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad , \qquad i = ۱, ۲, \cdots, m$$

که در آن b_iها و a_{ij}ها متعلق به F هستند را یک دستگاه معادلات خطی از مجهولات $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ و ماتریس $A = (a_{ij})$ متعلق به $M(m\times n,F)$ را ماتریس ضرائب مجهولات این دستگاه نامیم. دستگاه فوق را می‌توان به صورت $AX = B$ نوشت که X برداری ستونی از مجهولها و B برداری

ستونی از b_iهاست.

تعریف: گوییم $T = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ جوابی از دستگاه فوق است هرگاه $AT^t = B$.اگر دستگاه دارای جواب باشد آن را سازگار و در غیر این صورت ناسازگار گوییم.

قضیه ۳ـ۷: دستگاه ذکر شده در بالا دارای جواب است اگر و تنها اگر $\text{rank}A = \text{rank}C$ که C ماتریس زیر می‌باشد:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

C را ماتریس افزوده دستگاه می‌نامیم.

قضیه ۳ـ۸: با توجه به شرایط قضیه قبل داریم:

الف. اگر $m = n$ و $|A| \neq 0$ دستگاه فوق سازگار است.

ب. اگر $\text{rank}(A) = m$ دستگاه دارای جواب است.

تعریف: اگر در دستگاه مذکور $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$، دستگاه را همگن گویند.

قضیه ۳ـ۹: مجموعه جواب دستگاه همگن $AX = C$ که $A \in M(m \times n, F)$ یک فضای برداری با بعد $n - \text{rank}(A)$ می‌باشد.

نتیجه ۳ـ۹ـ۱: جواب دستگاه همگن مذکور منحصر به فرد است اگر و تنها اگر $\text{rank}(A) = n$.

نتیجه ۳ـ۹ـ۲: اگر $m < n$ دستگاه جواب غیربدیهی دارد.

نتیجه ۳ـ۹ـ۳: فرض کنید $m = n$ دستگاه همگن جواب غیربدیهی دارد اگر و تنها اگر A منفرد باشد.

۲.۳ مسائل برگزیده

۱ـ نشان دهید اگر $A \in M(n,F)$ آنگاه $f(x) = |xI_n - A|$ یک چند جمله‌ای از درجه n است.ضریب x^n و x^{n-1} و جمله ثابت این چند جمله‌ای را تعیین کنید.

۲ـ فرض کنید $A \in M(2,R)$ و ماتریس A با یک ماتریس قطری متشابه باشد.نشان دهید $\mathrm{trc}(A)^2 - 4\det(A) \geq 0$.

۳ـ فرض کنید $A \in M(n,F)$.نشان دهید $(\mathrm{adj}(A))^t = \mathrm{adj}(A^t)$.

۴ـ ثابت کنید اگر A منفرد باشد آنگاه $\mathrm{adj}(A)$ نیز منفرد است.

۵ـ نشان دهید $|\mathrm{adj}(A)| = |A|^{n-1}$.

۶ـ فرض کنید $A, B \in M(n,F)$.نشان دهید $\mathrm{adj}(BA) = \mathrm{adj}(A).\mathrm{adj}(B)$.

۷ـ فرض کنید $A \in M(n,F)$.نشان دهید $|\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A))| = |A|^{(n-1)^2}$.

۸ـ فرض کنید $A \in M(n,F)$ به صورت ذیل افراز شود که $B \in M(r,F)$ و $D \in M(n-r,F)$

$$A = \begin{pmatrix} B & \vdots & \bigcirc \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C & \vdots & D \end{pmatrix}$$

ثابت کنید $|A| = |B|.|D|$.

۹ـ اگر A متقارن اریب باشد درباره $|A|$ چه می‌توان گفت.

۱۰ـ نشان دهید اگر ماتریس A مثلثی و نامنفرد باشد آنگاه A^{-1} نیز مثلثی است.

۱۱ـ مطلوبست $\det(xI_n - A)$ که در آن $A \in M(n,R)$ نمایشی به صورت ذیل دارد.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

۱۲ـ فرض کنید V زیر فضایی از فضای برداری $M(n,F)$ باشد به قسمی که تمام عناصر غیرصفر V معکوس‌پذیر باشند نشان دهید $\dim V \le n$.(کارشناسی ارشد ۷۰).

۱۳ـ دترمینان ماتریس زیر موسوم به واندرموند را محاسبه کنید.(کارشناسی ارشد ۶۵ تهران).

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{pmatrix}$$

۱۴ـ دترمینان ماتریس $n \times n$ که اعضای قطر اصلی آن همه مساوی r و اعضای غیر قطر آن برابر λ است محاسبه کنید.(مسابقات ریاضی فروردین ۶۴).

۱۵ـ فرض کنید $c_1, c_2, \cdots, c_n$، n عدد حقیقی باشند.ماتریس (c_ic_j) را در نظر بگیرید مطلوبست محاسبه $\det(I_n + (c_ic_j))$.(مسابقات ریاضی فروردین ۶۴)

۱۶ـ فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ روی میدان اعداد گویا باشد به طوری که $a_{ij} = gcd(i,j)$ که در آن $gcd(i,j)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک i و j است آیا A دارای وارون است.چرا؟(مسابقات ریاضی فروردین ۷۱)

۱۷ـ نشان دهید دستگاه معادلات خطی زیر به ازای هیچ مقدار حقیقی λ دارای جواب نیست.

$$x + y - z = 1$$

$$2x + y + z = 5\lambda + 1$$

$$x - y + 3z = 4\lambda + 2$$

$$x - 2\lambda y + 7z = 27\lambda$$

۱۸ـ دستگاه زیر را در میدان اعداد گویا حل کنید و مبنایی برای جواب آن بدست آورید.

$$x + 2y + 2z = 5$$

$$x - 3y + 2z = -5$$

$$2x - y + z = -3$$

۱۹ـ بعد فضای جواب دستگاه زیر را بیابید و یک مبنا برای آن ارائه دهید.(کارشناسی ارشد ۶۹).

$$x + 2y + 2z - s + 3t = 0$$

$$x + 2y + 3z + s + t = 0$$

$$3x + 6y + 8z + s + 5t = 0$$

۲۰ـ فرض کنید W زیرفضای $\mathbb{R}^4$، فضای تولید شده توسط جوابهای دستگاه همگن زیر باشد.

الف: پایه‌ای برای W بیابید.

ب: مکمل W را نسبت به $\mathbb{R}^4$ بیابید.(کارشناسی ارشد خرداد ۶۷).

$$2x - y + z + t = 0$$

$$3x - 5y + 2z - t = 0$$

$$x + 3y + 4t = 0$$

۳.۳ نکات تستی

درست یا نادرست

۱ـ اگر دستگاه $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$ $(1 \le j \le m)$ جواب نا صفر داشته باشد آنگاه $n > m$.

۲ـ اگر A نامنفرد باشد آنگاه $AX = B$ دارای تنها جواب $A^{-1}B$ می‌باشد.

۳ـ دستگاه $AX = B$ که A ماتریسی $m \times n$ است و $\operatorname{rank}(A) = m$ همیشه جواب دارد.

۴ـ هر دو ماتریس نامنفرد هم‌ارزند.

۵ـ اگر V یک فضای برداری n بعدی روی F باشد و $A \in M(n, F)$ آنگاه جوابهای $AX = B$ یک زیر فضای V است.

۶ـ اگر سطرهای ماتریس مربعی A وابسته خطی باشند آنگاه $\det(A) = 0$.

۷ـ رتبه ماتریس زیر برابر سه است.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

۴.۳ پاسخ تشریحی مسائل برگزیده

۱ـ واضح است که جملهٔ ثابت $f(x)$ برابر است با $f(0)$ و داریم:

$$f(0) = |0 I_n - A| = |-A| = (-1)^n |A|$$

حال فرض کنید $A = (a_{ij})$ واضح است که $I_n = (\delta_{ij})$ که δ_{ij} دلتای کرونکر است ($\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$) لذا $xI_n - A = (x\delta_{ij} - a_{ij})$.از طرفی طبق تعریف دترمینان داریم:

$$|xI_n - A| = \sum_{j \in S_n} \pm(\delta_{1j_1}x - a_{1j_1})(\delta_{2j_2}x - a_{2j_2}) \cdots (\delta_{nj_n}x - a_{nj_n})$$

حال بیشترین توان x وقتی ظاهر می‌شود که همهٔ پرانتزها x داشته باشند.ضریب x یا صفر است یا یک، جمله‌ای از $\sum$ که تمامی ضرائب x در پرانتزهایش یک است را در نظر می‌گیریم یعنی برای هر $1 \leq k \leq n$ باید $\delta_{kj_k} = 1$.بنابراین باید $j_k = k$.لذا این حالت جایگشت همانی است و چون جایگشت همانی زوج است پس ضریب $(x - a_{11})(x - a_{22})\cdots(x - a_{nn})$ برابر مثبت یک است.واضح است که در این حالت ضریب x^n برابر یک و ضریب x^{n-1} برابر $-a_{11} - a_{22} - \cdots - a_{nn}$ است.حال نشان می‌دهیم در جملات دیگر $\sum$ حداکثر، توان x^{n-2} ظاهر می‌شود.

جمله‌ای دلخواه از $\sum$ را در نظر می‌گیریم به غیر از جمله‌ای که توسط جایگشت همانی تولید شده است.لذا حداقل یک $1 \leq r \leq n$ وجود دارد به طوری که $j_r = s$ و $r \neq s$.چون j یک جایگشت است لذا پوشاست پس $1 \leq r' \leq n$ وجود دارد که $j_{r'} = r$ و با توجه به یک به یک بودن جایگشت j، داریم $r' \neq r$. بنابراین در این حالت $\delta_{r'j_{r'}} = \delta_{rj_r} = 0$ لذا حداکثر $n-2$ پرانتز موجود است که x دارند پس حداکثر توان موجود برای x توان $n-2$ می‌باشد.بنابراین ضریب x^n برابر یک و ضریب x^{n-1} برابر $-\operatorname{trc}(A)$ می‌باشد.

۲ـ چون A با یک ماتریس قطری متشابه است لذا ماتریس نامنفردی مثل P وجود دارد که $PAP^{-1} = D$ و D ماتریس قطری است فرض کنید:

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

داریم:

$$\begin{aligned}\det(D) = \det(PAP^{-1}) &= \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(P)^{-1}\det(A) = \det(A)\end{aligned}$$

از طرفی

$$\operatorname{trc}(D) = \operatorname{trc}(PAP^{-1}) = \operatorname{trc}(P^{-1}PA) = \operatorname{trc}(A)$$

بنابراین

$$\operatorname{trc}(A)^2 - 4\det(A) = \operatorname{trc}(D)^2 - 4\det(D)$$
$$= (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$$

۳ـ فرض کنید $A = (a_{ij})$ و $A^t = (b_{ij})$ لذا برای $1 \leq i,j \leq n$ داریم $b_{ij} = a_{ji}$.فرض کنید برای $1 \leq i,j \leq n$، $c'_{ij} = (-1)^{i+j}|A^t(i,j)|$ و $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i,j)|$.طبق تعریف adj داریم:

$$\operatorname{adj}(A) = (c_{ij})^t, \qquad \operatorname{adj}(A^t) = (c'_{ij})^t$$

بنابراین $(\operatorname{adj}(A))^t = (c_{ij})$.

$A(i,j)$ ماتریس حاصل از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A است ولی سطر iام و ستون jام ماتریس A همان سطرjام و ستون iام ماتریس A^t است لذا $A(i,j) = A^t(j,i)$.

بنابراین:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i,j)| = (-1)^{i+j}|A^t(j,i)| = c'_{ji}$$

لذا داریم:

$$(c_{ij}) = (c'_{ij})^t \Longrightarrow (\operatorname{adj}(A))^t = \operatorname{adj}(A^t)$$

۴ـ با توجه به رابطه $A.\operatorname{adj}(A) = |A|I_n$، چون A منفرد است لذا $|A| = 0$.
بنابراین $A.\operatorname{adj}(A) = 0$. حال اگر $\operatorname{adj}(A)$ نامنفرد باشد طرفین رابطه را از راست در $\operatorname{adj}(A)^{-1}$ ضرب می‌کنیم لذا:

$$A.\operatorname{adj}(A).\operatorname{adj}(A)^{-1} = 0 \Longrightarrow A = 0 \Longrightarrow \operatorname{adj}(A) = 0$$

که تناقض است.

۵ـ اگر A نامنفرد باشد لذا $|A| \neq 0$ و با توجه به رابطهٔ $A.\mathrm{adj}(A) = |A|I_n$ از طرفین دترمینان می‌گیریم:

$$|A.\mathrm{adj}(A)| = ||A|I_n| \Longrightarrow |A|.|\mathrm{adj}(A)| = |A|^n$$
$$\Longrightarrow |\mathrm{adj}(A)| = |A|^{n-1}$$

حال اگر A منفرد باشد پس $\mathrm{adj}(A)$ نیز طبق مسأله (۴) منفرد است.بنابراین

$$|\mathrm{adj}(A)| = |A|^{n-1} = 0$$

۶ـ با توجه به رابطه adj داریم:

$$\mathrm{adj}(BA).BA = BA.\mathrm{adj}(BA) = |BA|.I_n$$
$$A.\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A).A = |A|I_n, \qquad B.\mathrm{adj}(B) = \mathrm{adj}(B).B = |B|I_n$$

بنابراین

$$B.A.\mathrm{adj}(A)\mathrm{adj}(B) = B.(|A|I_n).\mathrm{adj}(B) = |A|(B.\mathrm{adj}(B))$$
$$= |A||B|I_n = |AB|I_n \qquad (۱)$$
$$\mathrm{adj}(A).\mathrm{adj}(B).BA = \mathrm{adj}(A).(|B|I_n).A = |B|(\mathrm{adj}(A).A)$$
$$= |B||A|I_n = |BA|I_n \qquad (۲)$$

با توجه به برابر بودن طرف راست روابط (۱) و (۲) حکم ثابت است.

۷ـ اگر A منفرد باشد طبق مسأله (۴)، $\mathrm{adj}(A)$ نیز منفرد است.لذا مجددا با استفاده از این مسأله

$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A))$ نیز منفرد است.بنابراین:

$$|\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A))| = 0 = |A|^{(n-1)^2}$$

حال فرض کنید A نامنفرد باشد.لذا $|A| \neq 0$، از طرفی:

$$\mathrm{adj}(A).\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = |\mathrm{adj}(A)|I_n$$

با ضرب طرفین از چپ در A داریم:

$$A.\mathrm{adj}(A).\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = |\mathrm{adj}(A)|A$$

$$\Longrightarrow |A|\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = |\mathrm{adj}(A)|A$$

حال طبق مسأله (۵)، $|\mathrm{adj}(A)| = |A|^{n-1}$.بنابراین:

$$|A|\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = |A|^{n-1}A$$

$$\Longrightarrow \mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = |A|^{n-2}A$$

$$\Longrightarrow |\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A))| = ||A|^{n-2}A| = (|A|^{n-2})^n|A|$$

$$= |A|^{n^2-2n+1} = |A|^{(n-1)^2}$$

۸ـ فرض کنید I_r ماتریس همانی $r \times r$ و I_{n-r} ماتریس همانی $(n-r) \times (n-r)$ است.ماتریس A را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$A = \begin{pmatrix} B & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C & \vdots & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C & \vdots & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & D \end{pmatrix}$$

بنابراین

$$|A| = \begin{vmatrix} B & \vdots & \circ \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \circ & \vdots & I_{n-r} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_r & \vdots & \circ \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C & \vdots & I_{n-r} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_r & \vdots & \circ \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \circ & \vdots & D \end{vmatrix}$$

$$= |B| \times ۱ \times |D| = |B|.|D|$$

۹ـ چون A متقارن اریب است لذا $A^t = -A$.بنابراین:

$$|A^t| = |-A| = (-۱)^n|A|$$

از طرفی $|A| = |A^t|$ لذا $|A| = (-۱)^n|A|$.اگر n فرد باشد:

$$|A| = -|A| \Longrightarrow |A| = \circ$$

اگر n زوج باشد، منفرد یا نامنفرد بودن A مشخص نیست.به طور مثال ماتریس‌های ۲×۲ زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \circ & -۱ \\ ۱ & \circ \end{pmatrix}$$

دو ماتریس A و B متقارن اریب می‌باشند ولی A منفرد و B نامنفرد است.

۱۰ـ فرض کنید $A = (a_{ij})$ بالا مثلثی باشد.بنابراین برای $۱ \leq j < i \leq n$، $a_{ij} = \circ$.

داریم $A.\text{adj}(A) = |A|I_n$.بنابراین

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\text{adj}(A) \qquad (۱)$$

حال اگر $b_{ij} = (-۱)^{i+j}|A(i,j)|$ طبق تعریف adj داریم $\text{adj}(A) = (b_{ij})^t$.

پس برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم (b_{ij}) پائین مثلثی است.زیرا اگر $i < j$ و $b_{ij} = \circ$

با توجه به اینکه $\text{adj}(A) = (b_{ij})^t$ لذا درایه (ji)ام $\text{adj}(A)$ برابر صفر است و با توجه به رابطهٔ (۱)، درایه (ji)ام A^{-1} برابر درایه (ji)ام $X\dfrac{\text{adj}(A)}{|A|}$ است لذا درایه jiام A^{-1} صفر است.پس اگر $j > i$ آنگاه درایه jiام A^{-1} صفر است.بنابراین A^{-1} مثلثی است.فرض کنید $j > i$ نشان می‌دهیم $b_{ij} = 0$.قرار می‌دهیم:

$$A(i,j) = (e_{kl}) \qquad k = 1, 2, \cdots, n-1, \quad l = 1, 2, \cdots, n-1$$

در حالت $j > i$ نشان می‌دهیم (e_{kl}) بالا مثلثی و حداقل یک صفر روی قطر اصلی دارد.نمایش درایه‌های (e_{kl}) برحسب درایه‌های ماتریس A به صورت زیر است.(بررسی کنید)

$$e_{kl} = \begin{cases} a_{kl} & l < j, k < i \ \text{:حالت اول} \\ a_{kl+1} & j \leq l, k < i \ \text{:حالت دوم} \\ a_{k+1l} & l < j, i \leq k \ \text{:حالت سوم} \\ a_{k+1l+1} & j \leq l, i \leq k \ \text{:حالت چهارم} \end{cases}$$

فرض کنید $l < k$ اگر l و k در حالت اول، سوم و چهارم باشند واضح است که $e_{kl} = 0$ و حالت دوم با فرض $l < k$ اتفاق نمی‌افتد.زیرا اگر این حالت پیش آید، داریم $j \leq l < k < i$، بنابراین $j < i$، که تناقض است.حال نشان می‌دهیم برای ماتریس $A(i,j) = (e_{kl})$ درایه e_{ii} برابر صفر است.درایه e_{ii} یعنی $k = i$ و $l = i$ و چون $k = i$ درایه e_{ii} در حالت اول و دوم نیست زیرا در این حالتها $k < i$ و درایه e_{ii} در حالت چهارم نیز نیست زیرا در حالت چهارم $j \leq l$ از طرفی $l = i$ پس $j \leq i$ که با فرض $j > i$ در تناقض است.پس درایه e_{ii} فقط در حالت سوم می‌تواند باشد بنابراین:

$$e_{ii} = a_{i+1i} = 0 \qquad (i+1 > i)$$

لذا ماتریس $A(i,j) = (e_{kl})$ در حالت $i < j$ بالا مثلثی و یک صفر روی قطر اصلی دارد بنابراین $|A(i,j)| = 0$.لذا:

$$b_{ij} = 0 (i < j)$$

پس (b_{ij}) پائین مثلثی است.

۱۱ـ

$$|xI_n - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & x-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & x-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & & \\ -1 & -1 & \cdots & & x-1 \end{vmatrix}$$

ابتدا ستون اول را از تک تک ستونها کم می‌کنیم، که حاصل نمایشی به صورت زیر است.

$$\begin{vmatrix} x-1 & -x & -x & \cdots & -x \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

حال سطرهای دوم و سوم و ... و nام را به سطر اول می‌افزائیم، که حاصل نمایشی به صورت زیر است

$$\begin{vmatrix} x-n & \circ & \circ & \cdots & \circ \\ -\text{١} & x & \circ & \cdots & \circ \\ -\text{١} & \circ & x & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & & & \\ -\text{١} & \circ & \circ & \cdots & x \end{vmatrix} = x^{n-\text{١}}(x-n)$$

۱۲ـ فرض کنید W زیر فضای تولید شده توسط ماتریس‌های زیر باشد:

$$\{E_{ij} | \ \text{١} \leq i \leq n-\text{١}, \text{١} \leq j \leq n\}$$

که در آن E_{ij} ماتریسی است که درایه ijام آن یک و بقیه درایه‌ها صفر است. چون ماتریس‌های E_{ij}، $(\text{١} \leq i \leq n-\text{١}, \text{١} \leq j \leq n)$ دارای سطر nام صفر هستند لذا هر ترکیب خطی از این ماتریس‌ها نیز دارای سطر nام صفر است.پس تمامی اعضای W یک سطر صفر دارند لذا همهٔ این عناصر منفرد هستند و چون V از مجموعه عناصر معکوس‌پذیر (جزء ماتریس صفر) تشکیل شده است.لذا $V \cap W = \{\circ\}$.از طرفی $V+W$ زیر فضای $M(n,F)$ است لذا:

$$\dim(V+W) \leq \dim M(n,F) = n^\text{٢} \Longrightarrow \dim V + \dim W \leq n^\text{٢}$$

حال چون فضای W را $n(n-\text{١})$ ماتریس مستقل تشکیل داده‌اند لذا $\dim W = n(n-\text{١})$. بنابراین:

$$\dim V \leq n^\text{٢} - \dim W = n^\text{٢} - n(n-\text{١}) = n \Longrightarrow \dim V \leq n$$

۱۳ـ نشان می‌دهیم $|V_n| = \Pi_{j>i}(t_j - t_i)$.

ابتدا ستون $n+\text{١}$ام را از t. برابر ستون nام کم می‌کنیم.سپس ستون nام را از t. برابر ستون $n-\text{١}$ام

کم می‌کنیم و ... و ستون دوم را از t_0 برابر ستون اول کم می‌کنیم.در نتیجه دترمینان زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & t_1 - t_0 & t_1(t_1 - t_0) & \cdots & t_1^{n-1}(t_1 - t_0) \\ 1 & t_2 - t_0 & t_2(t_2 - t_0) & \cdots & t_2^{n-1}(t_2 - t_0) \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & t_n - t_0 & t_n(t_n - t_0) & \cdots & t_n^{n-1}(t_n - t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_1 - t_0 & t_1(t_1 - t_0) & \cdots & t_1^{n-1}(t_1 - t_0) \\ t_2 - t_0 & t_2(t_2 - t_0) & \cdots & t_2^{n-1}(t_2 - t_0) \\ \vdots & \vdots & & \\ t_n - t_0 & t_n(t_n - t_0) & \cdots & t_n^{n-1}(t_n - t_0) \end{vmatrix}$$

توجه کنید جمله سمت راست تساوی حاصل از بسط دترمینان طرف اول بر حسب سطر اول می‌باشد.

حال از $t_1 - t_0$ از سطر اول $t_2 - t_0$ از سطر دوم و ... و $t_n - t_0$ از سطر nام فاکتور می‌گیریم پس داریم

$$|V_n| = (t_1 - t_0)(t_2 - t_0)\cdots(t_n - t_0) \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & t_n & \cdots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad (*)$$

حال با استقراء روی n حکم را ثابت می‌کنیم.اگر $n = 1$ واضح است که $|V_1| = t_1 - t_0$ و حکم برقرار است حال فرض کنیم حکم برای $n - 1$ برقرار باشد، حکم را برای n ثابت می‌کنیم و طبق رابطهٔ $(*)$ داریم $|V_n| = (t_1 - t_0)(t_2 - t_0)\cdots(t_n - t_0)|V_{n-1}|$ و با جایگذاری مقدار $|V_{n-1}|$ از فرض استقراء داریم $|V_n| = \Pi_{j>i}(t_j - t_i)$.

۱۴ـ ماتریس مذکور نمایشی به صورت زیر دارد:

$$A=\begin{pmatrix} r & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & & & \\ \lambda & \lambda & \cdots & \lambda & r \end{pmatrix}$$

برای محاسبه دترمینان A، ستون اول را از یک یک ستون‌های دیگر کم می‌کنیم.سپس سطرهای دوم و سوم و ... و nام را به سطر اول اضافه می‌کنیم در ماتریس حاصل تمام اعضای بالای قطر اصلی صفر خواهند بود پس $\det(A)=[r+(n-1)\lambda](r-\lambda)^{n-1}$.

۱۵ـ برای محاسبه دترمینان مورد نظر ابتدا در سطر اول از c_1 و سطر دوم از c_2 و ... و سطر nام از c_n فاکتور می‌گیریم سپس در ستون اول از c_1 و ستون دوم از c_2 و ... و ستون nام از c_n فاکتور می‌گیریم.لذا:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1+c_1^2 & c_1c_2 & \cdots & c_1c_n \\ c_2c_1 & 1+c_2^2 & \cdots & c_2c_n \\ \vdots & \vdots & & \\ c_nc_1 & c_nc_2 & \cdots & 1+c_n^2 \end{vmatrix}$$

$$=(c_1c_2\cdots c_n)^2\begin{vmatrix} \frac{1}{c_1^2}+1 & & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{1}{c_2^2}+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & & \cdots & \frac{1}{c_n^2}+1 \end{vmatrix}$$

حال سطر آخر را از تک تک سطرها کم می‌کنیم سپس سطر اول را در c_1^2 ضرب و از سطر آخر کم می‌کنیم و سطر دوم را در c_2^2 ضرب و از سطر آخر کم می‌کنیم و ... و سطر $n-1$ام را در c_{n-1}^2

ضرب و از سطر آخر کم می‌کنیم.دترمینان حاصل دترمینان یک ماتریس مثلثی است.

که عبارتی به این شکل است:

$$|A| = (c_1c_2\cdots c_n)^2\begin{vmatrix} \frac{1}{c_1^2} & 0 & \cdots & \frac{-1}{c_n^2} \\ 0 & \frac{1}{c_2^2} & \cdots & \frac{-1}{c_n^2} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{c_n^2}+1 \end{vmatrix}$$

در مرحله بعد داریم:

$$|A| = (c_1c_2\cdots c_n)^2\begin{vmatrix} \frac{1}{c_1^2} & 0 & \cdots & \frac{-1}{c_n^2} \\ 0 & \frac{1}{c_2^2} & \cdots & \frac{-1}{c_n^2} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{c_1^2+c_2^2+\cdots+c_{n-1}^2}{c_n^2}+1+\frac{1}{c_n^2} \end{vmatrix}$$

در نتیجه:

$$|A| = (c_1c_2\cdots c_n)^2\left[\frac{c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2}{c_1^2c_2^2\cdots c_n^2}+\frac{1}{c_1^2c_2^2\cdots c_n^2}\right] = 1+c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2$$

۱۶ـ A وارون‌پذیر است.ماتریس‌های $B=(b_{ij})$ و $C=(c_{ij})$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & j|i \\ 0 & j\nmid i \end{cases} \qquad \text{و} \qquad b_{ij} = \begin{cases} \phi(i) & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

که در آن ϕ تابع اویلر است.با محاسبه درایه‌ها می‌توان نشان داد که $A = CBC^t$. بنابراین

$\det(A) = \phi(1)\phi(2)\cdots\phi(n)$.

۱۷ـ ماتریس زیر ماتریس ضرائب دستگاه است:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۳ \\ ۱ & -۲\lambda & ۷ \end{pmatrix}$$

و چون A یک ماتریس ۳×۴ است لذا، $\text{rank}(A) \leq ۳$.(لازم به ذکر است اگر $A = (a_{ij})_{m \times n}$ آنگاه $\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$).

ماتریس زیر ماتریس افزوده یا زائد دستگاه است.

$$C = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & -۱ & \vdots & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & \vdots & ۵\lambda + ۱ \\ ۱ & -۱ & ۳ & \vdots & ۴\lambda + ۲ \\ ۱ & -۲\lambda & ۷ & \vdots & ۲۷\lambda \end{pmatrix}$$

حال چون $|C| = ۱۶\lambda^۲ + ۴$ لذا $\text{rank}(C) = ۴$.بنابراین $\text{rank}(A) \neq \text{rank}(C)$، پس دستگاه مذکور به ازاء هیچ مقدار حقیقی λ دارای جواب نیست.

۱۸ـ ماتریس زیر ماتریس افزوده یا زائد دستگاه است:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & \vdots & ۵ \\ ۱ & -۳ & ۲ & \vdots & -۵ \\ ۲ & -۱ & ۱ & \vdots & -۳ \end{pmatrix}$$

حال ماتریس A را سطری پلکانی می‌کنیم به شکل زیر درمی‌آید:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} ۱ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{array}\right)$$

لذا دستگاه مفروض با دستگاه زیر معادل است:

$$\begin{cases} x+۰y+۰z=-۱ \\ ۰x+y+۰z=۲ \\ ۰x+۰y+z=۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ y=۲ \\ z=۱ \end{cases}$$

لذا دستگاه جواب منحصر بفرد $(۱,۲,۱-)$ را داراست.

۱۹ـ ماتریس زیر، ماتریس ضرائب دستگاه است:

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & -۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۶ & ۸ & ۱ & ۵ \end{pmatrix}$$

حال ماتریس را سطری پلکانی می‌کنیم به شکل زیر درمی‌آید:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & -۵ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

بنابراین $\operatorname{rank}(A)=۲$ (رتبه ماتریس A برابر است با تعداد سطرهای غیر صفر ماتریس تحویل شده سطری پلکانی نظیر A).لذا بعد فضای جواب برابر $n-\operatorname{rank}(A)=۵-۲=۳$ که n

تعداد ستونهای ماتریس A است.حال پایه‌ای برای فضای جواب بدست می‌آوریم. دستگاه مذکور معادل دستگاه زیر است:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & -۵ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} x + ۲y - ۵s + ۷t = ۰ \\ z + ۲s - ۲t = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -۲y + ۵s - ۷t \\ z = -۲s + ۲t \end{cases}$$

لذا فضای جواب برابر $\{(-۲y + ۵s - ۷t, y, -۲s + ۲t, s, t)\}$ است.در نتیجه یک پایهٔ فضای جواب عبارت است از:

$$\{(-۲, ۰, ۰, ۱, ۱), (-۲, ۱, ۰, ۰, ۰), (۳, ۱, -۲, ۱, ۰)\}$$

۲۰ـ ماتریس زیر، ماتریس ضرائب دستگاه است:

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & -۵ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۰ & ۴ \end{pmatrix}$$

حال ماتریس را سطری پلکانی می‌کنیم به شکل زیر درمی‌آید:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۳}{۷} & ۰ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۷} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

بنابراین $\operatorname{rank}(A) = ۳$.در نتیجه بعد فضای جواب دستگاه عبارت است از:

$$\dim W = n - \operatorname{rank}(A) = ۴ - ۳ = ۱$$

که n تعداد ستونهای ماتریس A است.حال پایه‌ای برای W بدست می‌آوریم.دستگاه مذکور معادل دستگاه زیر است.

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۳}{۷} & ۰ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۷} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} x + \frac{۳}{۷}z = ۰ \\ y - \frac{۱}{۷}z = ۰ \\ t = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\frac{۳}{۷}z \\ y = \frac{۱}{۷}z \\ t = ۰ \end{cases}$$

بنابراین یک پایه W به صورت $\{(-\frac{۳}{۷}, \frac{۱}{۷}, ۱, ۰)\}$ است.

ب. واضح است که چهار بردار زیر مستقل خطی‌اند و $R^۴$ را تولید می‌کنند لذا پایه‌ای برای $R^۴$ می‌باشند.

$$\{(-\frac{۳}{۷}, \frac{۱}{۷}, ۱, ۰), (۰, ۱, ۰, ۰), (۰, ۰, ۱, ۰), (۰, ۰, ۰, ۱)\}$$

بنابراین فضای تولید شده توسط بردارهای مجموعهٔ زیر مکمل W نسبت به فضای $R^۴$ است.

$$\{(۰,۱,۰,۰),(۰,۰,۱,۰),(۰,۰,۰,۱)\}$$

۵.۳ پاسخ تشریحی نکات تستی

۱ـ نادرست، به عنوان مثال دستگاه زیر جواب ناصفر $x_۱ = -x_۲ = ۱$ دارد در حالی که $۳ \not> ۲$

$$۲x_۱ + ۲x_۲ = ۰$$

$$۴x_۱ + ۴x_۲ = ۰$$

$$۸x_۱ + ۸x_۲ = ۰$$

۲ـ درست، چون $A^{-۱}$ موجود است لذا با ضرب $AX = B$ در $A^{-۱}$ داریم $A^{-۱}AX = A^{-۱}B$ یا $X = A^{-۱}B$.

۳ـ درست، با توجه به اینکه $\text{rank}(A) = m$ پس A دارای وارون چپ مثل C است پس $X = CB$ یک جواب دستگاه $AX = B$ است.

۴ـ درست، با فرض $P = A^{-۱}$ و $Q = B$ داریم $PAQ = B$ پس A و B هم ارزند.

۵ـ نادرست، در صورتیکه $B \neq ۰$ مجموعه جوابهای دستگاه شامل صفر نیست.پس فضای برداری تشکیل نمی‌دهند.

۶ـ درست، قضیه است.

۷ـ درست، اولاً A دارای زیر ماتریس نامنفرد $\begin{pmatrix} ۵ & ۱ & ۳ \\ ۵ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$ می‌باشد لذا $\text{rank}(A) \geq ۳$.از طرفی A دارای دو سطر برابر است لذا $\text{rank}(A) \leq ۳$.بنابراین $\text{rank}(A) = ۳$.

فصل چهارم

تبدیلات خطی

۱.۴ تعاریف و قضایا

تعریف. فرض کنید U و V دو فضای برداری روی میدان F باشند.تابع $T : U \to V$ را یک تبدیل خطی گوئیم هرگاه به ازاء هر a و b از U و هر λ از F:

$$T(a+b) = T(a) + T(b)$$

$$T(\lambda a) = \lambda T(a)$$

هر تبدیل خطی از یک فضا به خودش را یک عملگر خطی (linear operator) نامیم.

تعریف.فرض کنید $T : U \to V$ تبدیل خطی باشد و $S \subseteq U$ مجموعهٔ $T(S) = \{T(x) | x \in S\}$ را تصویر S توسط T نامیم.اگر S زیر فضایی از U باشد $T(S)$ زیر فضایی از V است.$T(U)$ را با $\mathrm{Im}(T)$ نمایش می‌دهند.

تعریف. فرض کنیم $T : U \to V$ تبدیل خطی باشد تعریف می‌کنیم:

$$\ker T = \{u \in U | T(u) = ۰\}$$

$\ker T$ زیر فضای U است.

قضیه ۱ـ۴: تبدیل خطی $T : U \to V$ یک به یک است اگر تنها اگر $\ker T = \{۰\}$.

قضیه ۲ـ۴: فرض کنید $T : U \to V$ تبدیل خطی و U با بعد متناهی است.در این صورت $\dim \ker T + \dim T(U) = \dim U$.

قضیه ۳ـ۴: فرض کنید $T : U \to V$ تبدیل خطی، U و V فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F باشند.

الف. شرط لازم و کافی برای آنکه T یک به یک باشد آن است که $\dim T(U) = \dim U$.

ب. شرط لازم و کافی برای آنکه T پوششی باشد آن است که $\dim T(U) = \dim V$.

ج. اگر $\dim U = \dim V$ آنگاه T یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد.

تعریف: تبدیل خطی $T : U \to V$ را نامنفرد (معکوس‌پذیر) گویند هر گاه تبدیل خطی مثل $S : V \to U$ وجود داشته باشد که $TS = I_V$ و $ST = I_U$.

(I_U و I_V عملگرهای همانی روی U و V می‌باشند)

قضیه ۴ـ۴: فرض کنید U و V دو فضای برداری روی میدان F باشند.مجموعهٔ $L(U, V)$ متشکل از همهٔ تبدیلات خطی از U به V، همراه با اعمال جمع و ضرب اسکالر توابع، یک فضای برداری روی میدان F است.

قضیه ۵ـ۴: فرض کنید U و V دو فضای برداری روی میدان F باشند.اگر $\alpha = \{u_۱, \cdots, u_n\}$ مبنای مرتبی برای U و $B = \{v_۱, \cdots, v_n\}$ زیر مجموعهٔ دلخواهی از V باشند یک و تنها یک تبدیل خطی $T : U \to V$ وجود دارد که:

$$T(u_i) = v_i \qquad , \qquad i = ۱, ۲, \cdots, n$$

تعریف: فرض کنید $T \in L(U,V)$ و $\alpha = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ و $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ مبناهای مرتبی برای U و V باشند.به ازای هر $1 \leq j \leq n$، $T(u_j)$ نمایش منحصر بفرد به صورت $T(u_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} v_i$ دارد($a_{ij} \in F$).ماتریس (a_{ij}) را ماتریس وابسته T نسبت به مبناهای مرتب α و B نامیم و آنرا با $M_\alpha^B(T)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۴ـ۶: فرض کنید $T \in L(U,V)$ و $\alpha = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ و $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ مبناهای U و V باشند.به ازای هر u متعلق به U داریم:

$$M_\alpha^B(T)[U]_\alpha = [T(u)]_B$$

نتیجه ۴ـ۶ـ۱: اگر خواستیم اثر تبدیل خطی T را روی یک بردار محاسبه کنیم کافیست ماتریس وابسته T را در بردار مربوطه اثر دهیم.

قضیه ۴ـ۷: فرض کنید $S, T \in L(U,V)$ و $\lambda \in F$ و α و B مبناهای U و V باشند.

الف: $M_\alpha^B(S+T) = M_\alpha^B(S) + M_\alpha^B(T)$.

ب: $M_\alpha^B(\lambda T) = \lambda M_\alpha^B(T)$.

تعریف: فرض کنید U و V دو فضای برداری روی میدان F باشند گوییم U و V ایزومورفند، هرگاه یک تبدیل خطی یک به یک و پوشا از U به V موجود باشد.

قضیه ۴ـ۸: فرض کنید U و V دو فضای برداری n و m بعدی روی میدان F باشند.فضاهای برداری $L(U,V)$ و $M(m \times n, F)$(ماتریس $m \times n$ روی میدان F) با ضابطه زیر ایزومورفند:

$$f : L(U,V) \to M(m \times n, F)$$

$$f(T) = M_\alpha^B(T)$$

قرارداد: فرض کنید $A \in M(m \times n, F)$ منظور از تبدیل خطی وابسته به A، تبدیل خطی $T : F^n \to F^m$ است که ماتریس T نسبت به مبناهای استانده F^n و F^m ماتریس A می‌باشد.لذا

داریم:

$$T(x_1, x_2, \cdots, , x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_m) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

قضیه ۹ـ۴: فرض کنید $T \in L(U, V)$ و $S \in L(V, W)$ و α و β و γ به ترتیب مبناهای U و V و W باشند.در این صورت:

$$M_\alpha^\beta(ST) = M_\beta^\gamma(S) M_\alpha^\beta(T)$$

قضیه ۱۰ـ۴: فرض کنید $T \in L(U, V)$و α و α' دو مبنای مرتب U، B و B' دو مبنای مرتب V باشند.ماتریسهای نامنفرد P و Q وجود دارند به طوری که:

$$M_{\alpha'}^{B'}(T) = Q^{-1} M_\alpha^B(T) P$$

نتیجه ۱ـ۱۰ـ۴: فرض کنید $T \in L(U, U)$ و α و α' دو مبنای مرتب U باشند.ماتریس نامنفرد P وجود دارد به طوری که:

$$M_{\alpha'}^{\alpha'}(T) = P^{-1} M_\alpha^\alpha(T) P$$

قضیه ۱۱ـ۴: فرض کنید $A, B \in M(n, F)$ آنگاه A و B متشابهند اگر و تنها اگر ماتریسهای یک عملگر خطی روی فضای برداری F^n باشند.

تعریف: فرض کنید $T \in L(U, V)$ که U و V با بعد متناهی روی F می‌باشند. $\text{rank}(T)$ را همان رتبه ماتریس وابسته T تعریف می‌کنند.

قضیه ۱۲ـ۴: فرض کنید $T \in L(U, V)$ که U و V با بعد متناهی روی F می‌باشند.اگر

$\text{rank}(T) = r$ آنگاه مبناهای α و B برای U و V وجود دارند به طوری که ماتریس T نسبت به α و B به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{pmatrix} I_r & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$$

تعریف: فرض کنید $T \in L(U,V)$ که $\dim(U) = m$، و $\dim(V) = n$ و $\alpha = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ یک مبنا برای U و $B = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ یک مبنا برای V باشد.آنگاه $\text{trc}(T)$ را $\text{trc}(M_\alpha^B(T))$ تعریف می‌کنند.

۲.۴ مسائل برگزیده

۱ـ فرض کنید W یک زیرفضای واقعی از فضای متناهی البعد V باشد و $x, y \in V$ ولی $x, y \notin W$.ثابت کنید یک نگاشت یک به یک روی V وجود دارد که $T(x) = y$ و این عملگر روی W همانی است.

۲ـ فرض کنید U و V دو فضای برداری روی F باشند و $\dim(U) = \dim(V) = n$ و $T \in L(U,V)$ نامنفرد باشد.

الف: فرض کنید $\alpha = \{u_1, \cdots, u_n\}$ مبنایی برای U است آنگاه $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$ مبنایی برای V است.

ب: ماتریس T را نسبت به این مبناها بدست آورید.

۳ـ فرض کنید $T \in L(V,W)$ و $\dim(V) > \dim(W)$.نشان دهید $x \in V$ وجود دارد که $T(x) = \circ$

۴ـ فرض کنید $T : V \to V$ تبدیل خطی روی فضای متناهی البعد V باشد و $T^2 = \circ$. ثابت کنید $2\text{rank}(T) \leq \dim(V)$.

۵ـ فرض کنید $T \in L(V,W)$ و $\{T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_n)\}$ یک زیرمجموعه مستقل از W است که در آن $x_1, \cdots, x_n$ عضو V می‌باشند.ثابت کنید $\{x_1, \cdots, x_n\}$ نیز مستقل خطی اند و نتیجه بگیرید که $\operatorname{rank}(T) \leq \min\{\dim(V), \dim(W)\}$.

۶ـ فرض کنید W زیرفضای $M(n,F)$، متشکل از ماتریسهای با trc صفر باشد.نشان دهید $\dim W = n^2 - 1$.

۷ـ فرض کنید $B \in M(p \times m, F)$ و $T: M(m \times n, F) \to M(p \times n, F)$ با ضابطه $T(A) = BA$ تعریف شده است.ثابت کنید تبدیل خطی T نامنفرد است اگر و تنها اگر $m = p$ و B ماتریس $m \times m$ و معکوس پذیر باشد.

۸ـ فرض کنید $S \in L(V,V)$ به طوری که $\dim(V) = n$ و به ازای هر $T \in L(V,V)$ عملگر S با T جا به جا شود.نشان دهید $\lambda \in F$ وجود دارد که $S = \lambda I$ به طوری که I عملگر همانی روی V است.

۹ـ فرض کنید S و T دو تبدیل خطی روی فضای متناهی البعد V باشند که اثر ماتریس S در یک پایه برابر ماتریس T در پایه دیگر است.نشان دهید تبدیل خطی مثل f بر V وجود دارد به طوری که $T = fSf^{-1}$.

۱۰ـ فرض کنید T یک عملگر خطی روی فضای با بعد متناهی V باشد.ثابت کنید برای هر زیرفضا W از V رابطه زیر برقرار است:

$$\dim(\ker(T) \cap W) = \dim(W) - \dim(T(W))$$

۱۱ـ فرض کنید $T: M(n,R) \to M(n,R)$ یک تابع با ضابطه $T(A) = A + A^t$ باشد.نشان دهید T یک عملگر خطی است.فضای پوچ و برد آن و بعد آنها را بدست آورید.

۱۲ـ فرض کنید $T: V \to U$ و $S: W \to V$ دو تبدیل خطی باشند که در آن V و U و W

فضاهای برداری با بعد متناهی روی F می‌باشند.ثابت کنید:

$$\text{rank}(T)+\text{rank}(S)-n \leq \text{rank}(TS) \leq \min\{\text{rank}(T),\text{rank}(S)\}$$

که در آن $\dim V = n$.نتیجه بگیرید اگر یکی از S یا T نامنفرد باشد آنگاه:

$$\text{rank}(TS) = \min\{\text{rank}(T),\text{rank}(S)\}$$

با یک مثال نشان دهید نامساویهای فوق اکید نیز می‌تواند باشد.

۱۳ـ فرض کنید S و T دو تبدیل خطی از U به V باشند.ثابت کنید:

$$|\text{rank}(S)-\text{rank}(T)| \leq \text{rank}(T+S) \leq \text{rank}(T)+\text{rank}(S)$$

(کارشناسی‌ارشد ۶۸)

۱۴ـ فرض کنید $A, B \in M(n, F)$.ثابت کنید:

الف: $\text{rank}(A)+\text{rank}(B)-n \leq \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A),\text{rank}(B)\}$

ب: اگر یکی از A یا B نامنفرد باشند آنگاه $\text{rank}(AB) = \min\{\text{rank}(A),\text{rank}(B)\}$.

ج: $|\text{rank}(A)-\text{rank}(B)| \leq \text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A)+\text{rank}(B)$

(مسابقات ریاضی ۷۹)

۱۵ـ فرض کنید $A, B, C, D \in M(۸, F)$ به ترتیب از رتبه‌های ۷و۶و۵و۳ باشند ثابت کنید $\text{rank}(AB+CD) \geq ۲$.

۱۶ـ فرض کنید T یک تبدیل خطی روی فضای متناهی البعد V باشد و $\dim V = n$. ثابت کنید:

الف: $\text{rank}(T^۲) \geq ۲\text{rank}(T) - n$

ب: $\text{rank}(T^۳) \geq ۳\text{rank}(T) - ۲n$

ج: اگر $A \in M(۱۰, F)$ و $\mathrm{rank}(A) = ۸$ آنگاه $A^۴ \neq ۰$.

۱۷ـ فرض کنید $A, B \in M(n, F)$ و A نامنفرد است و $(A + B)^۳ = ۰$.ثابت کنید $\mathrm{rank}(B) \geq \frac{۱}{۳}n$.

۱۸ـ فرض کنید p_n فضای برداری چندجمله‌ایها با درجه حداکثر n باشد و $D : p_n \to p_n$ عملگر مشتق باشد با ارائه مبنایی برای p_n ماتریس عملگر D را نسبت به این مبنا بیابید.

۱۹ـ اگر A و B و C ماتریسهای $n \times n$ روی میدان F باشند به طوری که $CAB = ۰$.ثابت کنید:

$$\mathrm{rank}(B) + \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(C) \leq ۲n$$

۲۰ـ فرض کنید S و T دو عملگر خطی روی یک فضای برداری nبعدی باشند.ثابت کنید:

الف: اگر $ST = ۰$ آنگاه $\mathrm{rank}(S) + \mathrm{rank}(T) \leq n$.

ب: عملگر خطی مثل R هست که $TR = ۰$ و $\mathrm{rank}(T) + \mathrm{rank}(R) = n$.

(کارشناسی ارشد ۶۷)

*۲۱ـ فرض کنید $S, T \in L(V, V)$ و $\dim V = n$.ثابت کنید اگر $ST = TS$ آنگاه:

$$\mathrm{rank}(S) + \mathrm{rank}(ST^۲) \geq ۲\mathrm{rank}(ST)$$

۲۲ـ فرض کنید $T : U \to V$ یک تبدیل خطی باشد و $\dim U = \dim V = n$.ثابت کنید T نامنفرد است اگر و تنها اگر تصویر هر مجموعه مستقل، مستقل باشد.

۲۳ـ فرض کنید U و V دو فضای برداری m و nبعدی باشند و $T \in L(U, V)$ و W یک زیرفضای kبعدی U باشد.ثابت کنید $k + \dim(T(U)) - m \leq \dim(T(W))$.

۲۴ـ فرض کنید T یک عملگر خطی روی فضای متناهی البعد V باشد به طوری که $T^۳ = T^۲$ و $\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}(T^۲)$.نشان دهید T خود توان است.

۲۵ـ فرض کنید T و S تبدیلات خطی روی فضای متناهی البعد V باشند نشان دهید اگر

$\operatorname{rank}(S)=\operatorname{rank}(TS)$ آنگاه $\ker(S)=\ker(TS)$ و $\{0\}=S(V)\cap\ker(T)$ و نتیجه بگیرید اگر $\operatorname{rank}(TS)=\operatorname{rank}(S)=\operatorname{rank}(T)$ آنگاه $V=S(V)\oplus\ker(T)$.

۲۶ـ فرض کنید T یک عملگرخطی روی یک فضای برداری nبعدی باشد.به طوریکه $T^n=0$ ولی $T^{n-1}\neq 0$.نشان دهید $\operatorname{rank}(T^k)=n-k$ $(k\leq n)$.

۲۷ـ فرض کنید T و S تبدیلات خطی از V به U باشند و W زیرفضای V باشد.نشان دهید رابطه $(T+S)W=T(W)+S(W)$ همیشه درست نیست.

۲۸ـ فرض کنید T و S تبدیلات خطی روی فضای متناهی البعد V باشند به طوری که $TST=T$.نشان دهید $\operatorname{rank}(TS)=\operatorname{rank}(T)$.بعلاوه فرض کنیم $\operatorname{rank}(T)=\operatorname{rank}(S)$، نشان دهید $T|_{S(V)}$ نامنفرد است و $STS=S$.

۲۹ـ فرض کنید f یک تبدیل خطی از $M(n,F)$ به میدان F است و به ازای هر دو ماتریس $A,B\in M(n,F)$ رابطه $f(AB)=f(BA)$ برقرار باشد.ثابت کنید f مضربی از تابع trc است و اگر $f(I)=n$ آنگاه f خود تابع trc است.

۳۰ـ فرض کنید T یک عملگر خطی روی فضای متناهی البعد V باشد.ثابت کنید:

الف: $2\operatorname{rank}(T^2)\leq\operatorname{rank}(T)+\operatorname{rank}(T^3)$

ب: اگر $\dim(V)=5$ و $T^3=0$ و $T^2\neq 0$ ثابت کنید $\operatorname{rank}(T^2)=1$ و $\operatorname{rank}(T)=2$ یا 3.

۳۱ـ فرض کنید T و S عملگرهای خطی روی فضای n بعدی V باشند.اگر TS خود توان باشد.ثابت کنید $(ST)^3=(ST)^2$ و همچنین نشان دهید $\operatorname{rank}(ST)^2=\operatorname{rank}(TS)$.

۳۲ـ فرض کنید $S,T\in L(V,V)$ و $\dim V=n$. اگر TS خود توان باشد و $\operatorname{rank}(TS)=n-1$ آنگاه $\operatorname{rank}(ST)=n-1$.نتیجه بگیرید ST خود توان است.

۳۳ـ فرض کنید $T\in L(V,V)$ و $\dim(V)=n$.اگر $T^2=T$ ثابت کنید $I-T$ خود توان است و $V=Im(T)\oplus Im(I-T)$.

۳۴ـ فرض کنید $T : V \to V$ یک عملگر خطی باشد و $\{v_1, \cdots, v_n\}$ مبنایی برای V باشد که برای این مبنا، $T(v_1) = 0$، $T(v_2) = a_{21}v_1$، $\cdots$،

$$T(v_n) = a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{n,n-1}v_{n-1}$$

نشان دهید $T^n = 0$.

۳۵ـ فرض کنید T یک عملگر خطی روی فضای n بعدی V باشد و $\ker(T) = \ker(T^2)$. ثابت کنید $V = Im(T) \oplus \ker(T)$.

۳۶ـ فرض کنید $f : A \to B$ و $g : B \to A$ تبدیل خطی باشند که $gf = I_A$. نشان دهید $B = Im(f) \oplus \ker g$.

۳۷ـ فرض کنید T یک عملگر خطی خود توان روی فضای n بعدی V باشد.ثابت کنید زیر فضاهای W_1 و W_2 وجود دارند به طوری که $V = W_1 \oplus W_2$ و T روی W_1 صفر است و روی W_2 همانی است.

۳۸ـ فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F که مشخصه F مخالف دو است و $T \in L(V, V)$ به قسمی که $T^3 = T$.ثابت کنید زیر فضاهای W_1 و W_2 و W_3 وجود دارند به طوری که $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ و T روی W_1 صفر است و روی W_2 همانی است و برای هر $x \in W_3$، $T(x) = -x$.

۳۹ـ فرض کنید V یک فضای برداری nبعدی و T یک عملگر خطی روی V باشد که $T^n = 0$ و $T^{n-1} \neq 0$.نشان دهید $\alpha \in V$ وجود دارد به طوری که عناصر $\alpha_1 = \alpha$، $\alpha_2 = T(\alpha)$ و $\alpha_n = T^{n-1}(\alpha)$ یک پایه برای V تشکیل می‌دهند.ماتریس T را در این پایه بنویسید.
(کارشناسی ارشد ۶۶ دانشگاه تهران)

۴۰ـ فرض کنید T یک عملگر خطی روی فضای n بعدی V باشد.اگر $\text{rank}(T) = 1$ نشان

دهید که نمایش ماتریس T نسبت به هر پایه بصورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 b_1 & \lambda_2 b_2 & \cdots & \lambda_n b_1 \\ \lambda_1 b_2 & \lambda_2 b_2 & \cdots & \lambda_n b_2 \\ & \vdots & & \\ & & & 1 \\ \lambda_1 b_n & \lambda_2 b_n & \cdots & \lambda_n b_n \end{pmatrix}$$

۴۱ـ فرض کنید T و S دو تبدیل خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V باشند به طوری که $T^2 = S^2$ و $T+S$ نامنفرد باشد.ثابت کنید $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(S) \geq \frac{1}{2}\dim(V)$.(کارشناسی ارشد ۷۶)

۴۲ـ فرض کنید V یک فضای برداری با بعد n روی میدان F است و $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ یک مبنا برای V باشد.$T \in L(V,V)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(x_n) = x_1, T(x_{n-1}) = x_n, \cdots, T(x_2) = x_3, T(x_1) = x_2$$

ماتریس T را در این مبنا مشخص کنید و نشان دهید $T^n = I$ ولی $T^{n-1} \neq I$.

۴۳ـ فرض کنید T یک تبدیل خطی روی فضای برداری V باشد.نشان دهید اگر $T^2 = T$ آنگاه $V = Im(T) \oplus \ker(T)$.

۴۴ـ فرض کنید $A \in M(n,F)$ که در آن درایه‌های واقع بر قطر فوقانی یک و بقیه

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

درایه‌ها صفر هستند.ثابت کنید اگر T عملگر وابسته ماتریس A نسبت به مبنای $\{x_1, x_2 \cdots, x_n\}$ روی فضای F^n باشد آنگاه $T^n = 0$ ولی $T^{n-1} \neq 0$.

۴۵ـ فرض کنید S و T دو تبدیل خطی روی فضای برداری V باشند.به طوری که $ST - TS$ با S جابجا شود.ثابت کنید برای هر عدد طبیعی k داریم:

$$S^kT - TS^k = kS^{k-1}(ST - TS)$$

۴۶ـ فرض کنید V یک فضای ۳ـبعدی روی میدان اعداد حقیقی است و $\{v_1, v_2, v_3\}$ یک پایه برای V باشد.رتبه تبدیل خطی $T : V \to V$ که به صورت $T(v_1) = v_1 - v_2$ و $T(v_2) = v_1 + v_2$ و $T(v_3) = v_2 + v_3$ تعریف شده است را بیابید.آیا بردار v در V وجود دارد که $T(v) = 0$.

۴۷ـ فرض کنید $A \in M(n,R)$ به طوری که $A^2 = I$.ثابت کنید:

$$\operatorname{rank}(A+I) + \operatorname{rank}(A-I) = n$$

۴۸ـ فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد.ثابت کنید به ازای هر $T \in L(V,V)$ یک عملگر خطی مثل S روی V وجود دارد که $TST = T$.

۴۹ـ فرض کنید $A \in M(n,F)$ ناصفر باشد.ثابت کنید ماتریس ناصفر $B \in M(n,F)$ وجود

دارد که $AB \neq ۰$ خودتوان است.(مسابقات ریاضی اسفند ۶۹).

۵۰ـ فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F با بعد متناهی باشدو T یک عملگر خطی دلخواه روی V باشد.ثابت کنید:

الف: $\dim V = \operatorname{rank}(T) + \dim \ker(T)$

ب: آیا تساوی $V = Im(T) \oplus \ker(T)$ همواره برقرار است.(کارشناسی ارشد ۷۱)

۵۱ـ فرض کنید F عملگر خطی روی یک فضای برداری nبعدی باشد و n بردار مستقل $\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots \alpha_n$ وجود داشته باشد به طوری‌که $F(\alpha_i) = \alpha_i$.ثابت‌کنید F همانی است.(کارشناسی ارشد کرمان ۶۳).

۵۲ـ فرض کنید $A \in M(n, R)$.اگر $A^۲ = ۰$ و $\operatorname{rank}(A) = ۱$ ثابت کنید A با ماتریس زیر متشابه است.(کارشناسی ارشد ۶۳ کرمان)

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \end{pmatrix}$$

۵۳ـ فرض کنید $S, T : R^n \to R^n$ دو تبدیل خطی باشند به طوری که $TS = ۰$.نشان دهید $\ker(T) = \operatorname{Im}(S)$اگر و تنها اگر $\operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(S) = n$.(کارشناسی ارشد ۶۴ کرمان)

۵۴ـ فرض‌کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی و $T \in L(V, V)$.اگر $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(T^۲)$ ثابت کنید $\ker(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{۰\}$. (کارشناسی ارشد ۶۵ تهران)

۵۵ـ فرض کنید B عضوی دلخواه از $M(n, F)$ باشد.تابع $\phi_B : M(n, F) \to M(n, F)$ با ضابطه $\phi_B(A) = AB - BA$ در نظر بگیرید.ثابت کنید ϕ_B یک تبدیل خطی و دترمینان

ماتریس آن در هر پایه صفر است.(کارشناسی ارشد ۶۵ تهران)

۵۶ـ فرض کنید $\sigma : V \to V$ یک تبدیل خطی در فضای اقلیدسی V است و عدد حقیقی و مثبت m وجود دارد که به ازاء هر بردار α از V، $\|\sigma(\alpha)\| \geq m\|\alpha\|$.ثابت کنید σ نامنفرد است.
(کارشناسی ارشد ۶۶ تربیت معلم)

۵۷ـ تبدیل خطی $\sigma : R^۲ \to R^۲$، نقطه $(۱, -۲)$ را به $(-۱, ۲)$ می‌نگارد و $(۱, ۲)$ را ثابت نگه می‌دارد.

الف. ماتریس این تبدیل خطی را نسبت به مبنای $B_۲ = \{(۲, ۱), (۱, -۲)\}$ به دست آورید.

ب. ماتریس تغییر مختصات از مبنای $B_۱ = \{(۱, ۰), (۰, ۱)\}$ به مبنای $B_۲$ را بنویسید و با استفاده از آن ماتریس معرف σ را نسبت به مبنای $B_۱$ بیابید.

ج. خطهای گذرنده از مبدأ را که امتدادشان توسط σ حفظ می‌شود مشخص کنید و تعبیر هندسی σ را بیان کنید. (کارشناسی ارشد ۶۶ تربیت معلم)

۵۸ـ فرض کنید V یک فضای برداری متناهی البعد و $f : V \to V$ یک عملگر خطی باشد.ثابت کنید اگر $\operatorname{rank}(f) \geq \dim\ker(f)$ آنگاه $\operatorname{rank}(f^۳) \geq ۱$.مثالی ارائه کنید که $\operatorname{rank}(f^۳) = ۱$.
(کارشناسی ارشد ۶۶ صنعتی شریف)

۵۹ـ فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ و حقیقی باشد به طوری که $m \neq n$.نشان دهید که حداقل یکی از دو ماتریس AA^t و A^tA وارون‌پذیر نیست. (کارشناسی ارشد ۷۵)

۶۰ـ اگر $W_۱$ و $W_۲$ زیر فضاهای، فضای برداری n بعدی V باشند ثابت کنید $W_۱ = W_۲$ اگر و تنها اگر $W_۱^\circ = W_۲^\circ$ که در آن $W^\circ = \{f : V \to F | f(\alpha) = ۰, \forall \alpha \in W\}$. (کارشناسی ارشد ۶۳ کرمان)

*۶۱ـ فرض کنید V یک فضای برداری متناهی البعد روی میدان حقیقی باشد.$T : V \to V$ یک

عملگر خطی است.فرض کنید $R = \cap_{k=1}^{\infty} T^k(V)$ و

$$N = \{x \in V | T^m(x) = 0, \text{ برای برخی } m \text{های طبیعی } \}$$

ثابت کنید $V = R \oplus N$. (کارشناسی ارشد ۶۶ صنعتی شریف)

۶۲ـ فرض کنید V فضای برداری چند جمله‌ای‌های روی R از درجه حداکثر یا مساوی ۲ باشد.تابعکهای خطی زیر را روی V در نظر بگیرید:

$$\phi_1(f(x)) = \int_0^1 f(x)dx, \phi_2(f(x)) = f'(1), \phi_3(f(x)) = f(0)$$

پایه دوگان $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ را به دست آورید. (کارشناسی ارشد ۶۶ دانشگاه تهران)

۶۳ـ فرض کنید V یک فضای n بعدی حقیقی و $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ یک پایه آن باشد.تبدیل خطی $T : V \to V$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(\alpha_i) = \alpha_{i+1} \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1, \qquad T(\alpha_n) = 0$$

الف. ثابت کنید $T^n = 0$ و $T^{n-1} \neq 0$ و ماتریس T را نسبت به این پایه بنویسید.

ب. فرض کنید S تبدیل خطی روی V باشد به طوری که $S^n = 0$ و $S^{n-1} \neq 0$.ثابت کنید پایه‌ای مانند B' برای V وجود دارد به طوری که ماتریس S نسبت به B' همان ماتریس T نسبت به B است.

ج. اگر M و N دو ماتریس $n \times n$ حقیقی باشند به طوری که $M^n = 0$ ولی $M^{n-1} \neq 0$ و $N^n = 0$ ولی $N^{n-1} \neq 0$ آنگاه M و N متشابهند. (کارشناسی ارشد ۶۴ تهران)

۶۴ـ فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی میدان F و $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ یک مبنای V باشد و $T : V \to V$ یک عملگر خطی غیر صفر باشد به طوری که $T(\alpha_1) = \alpha_2$ و $T(\alpha_2) = \alpha_3$ و $\cdots$ و $T(\alpha_{n-1}) = \alpha_n$ و $T(\alpha_n) = 0$.آیا عملگر خطی مثل $S : V \to V$

وجود دارد که $T = S^k$.$(k \geq ۲)$ (کارشناسی ارشد ۶۹)

۶۵ـ فرض کنید K یک میدان با مشخصه ۲ و V یک فضای برداری n بعدی روی K باشد. و $T : V \to V$ یک عملگر خطی است به طوری که $T^۲ = I$.قرار دهید

$$W = \{v \in V | T(v) = v\}$$

ثابت کنید $\dim(W) \geq \frac{n}{۲}$. (مسابقات ریاضی ۶۴)

۶۶ـ V یک فضای برداری روی میدان F می‌باشد و $\dim V = n$. $T : V \to V$ یک عملگر خطی است.مطلوب است تعیین بعد زیر فضای $\ker(T) \cap T(V)$ بر حسب رتبه توانهای T.(مسابقات ریاضی ۷۳)

*۶۷ـ فرض کنید V زیر فضای متناهی n بعدی و W یک فضای m بعدی روی میدان F باشند و U زیر فضایی از V است.اولاً نشان دهید

$$A = \{T \in L(V, W) | T(U) = ۰\}$$

زیر فضایی از $L(V, W)$ است.ثانیاً مطلوبست $\dim(A)$.

*۶۸ـ فرض کنید $A \in M(n, F)$ که در آن درایه‌های بالای قطر اصلی یک و بقیه صفر می‌باشند.ثابت کنید $A^n = ۰$ ولی $A^{n-۱} \neq ۰$ وکلیه ماتریس‌هایی که با A جا به جا می‌شوند به شکل $\alpha_۰ + \alpha_۱ A + \cdots + \alpha_{n-۱} A^{n-۱}$ است که $\alpha_۰, \alpha_۱, \cdots, \alpha_{n-۱}$ عضو F می‌باشند.

۶۹ـ فرض کنید V یک فضای برداری که لزوماً با بعد متناهی نیست و هر زنجیر صعودی از زیر فضاهای V سرانجام متوقف می‌شود.نشان دهید اگر $T : V \to V$ یک عملگر خطی پوشا باشد.نشان آنگاه T یک به یک است.

*۷۰ـ فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی F باشد و $T : V \to V$ یک عملگر

خطی باشد نشان دهید عدد طبیعی n وجود دارد که:

$$V = \mathrm{Im}(T^n) \oplus \ker(T^n)$$

*۷۱ـ فرض کنید رشته زیر دقیق (exact) باشد یعنی برای $1 \leq i \leq n-1$، $\mathrm{Im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$ و f_1 یک به یک و f_n پوشا است:

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \cdots \xrightarrow{f_n} V_{n+1} \longrightarrow 0$$

ثابت کنید $\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i \dim V_i = 0$.

۷۲ـ فرض کنید V یک فضای برداری $n > 2$ـبعدی روی میدان F باشد اگر به ازای هر زیر فضای U از V تعداد زیر فضاهای W از V به طوری که $V = U \oplus W$ عددی متناهی باشد. آنگاه F متناهی است.(کارشناسی ارشد ۷۹)

۷۳ـ فرض کنید A و B ماتریس‌های مربعی و V و W به ترتیب زیر فضاهای پدید آمده توسط سطرهای A و B باشند.ثابت کنید اگر $\mathrm{rank}(A+B) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ آنگاه $V \cap W = \{0\}$ (کارشناسی ارشد ۷۸).

۳.۴ نکات تستی

درست یا نادرست

۱ـ اگر $T \in L(U,V)$ و $\ker T \neq \{0\}$.آنگاه بردارهای u_1 و u_2 در U وجود دارند که $u_1 \neq u_2$ ولی $T(u_1) = T(u_2)$.

۲ـ فرض کنیم $T \in L(U,V)$ و $\dim U = n$ آنگاه $\mathrm{rank}(T).\dim\ker(T) \leq \frac{n^2}{4}$.

۳ـ اگر $T \in L(U,V)$ و $T^2 = 0$ آنگاه $T = 0$.

۴ـ اگر S و T در $L(U,U)$ باشند آنگاه $(S+T)^2 = S^2 + 2TS + T^2$.

۵ـ اگر $T \in L(R^3, R^3)$ و $T(e_1) = e_1$، $T(e_2) = e_3$ و $Te_3 = -e_3$ که $\{e_1, e_2, e_3\}$ مبنای استاندارد R^3 است آنگاه $T(e_1 + e_2 + e_3) = 2e_1$.

۶ـ فرض کنیم $S, T \in L(V,V)$ آنگاه $\ker S \subseteq \ker TS$.

۷ـ اگر T_1 و T_2 دو تبدیل خطی باشند آنگاه:

$$|\text{rank}(T_1) - \text{rank}(T_2)| \leq \text{rank}(T_1 + T_2) \leq \text{rank}(T_1) + \text{rank}(T_2)$$

۸ـ فرض کنید T_1 یک تبدیل خطی از V به U و T_2 یک تبدیل خطی از W به V باشد آنگاه

$$\text{rank}(T_1) + \text{rank}(T_2) - n \leq \text{rank}(T_1 T_2) \leq \min\{\text{rank}(T_1), \text{rank}(T_2)\}$$

۹ـ بعد فضای ماتریس‌های متقارن برابر است با $\frac{n^2+n}{2}$.

۱۰ـ بعد فضای ماتریس‌های متقارن اریب برابر است با $\frac{n^2-n}{2}$.

۱۱ـ بعد فضای ماتریس‌هایی که دارای trc صفر هستند برابر است با $n^2 - 1$.

۱۲ـ اگر T عملگر پوچ توان و f یک چند جمله‌ای باشد که جمله ثابت آن ناصفر است آنگاه $f(T)$ یک به یک نیست.

۱۳ـ اگر عملگر خطی T پوچ توان باشد عملگر $I \pm T$ وارون‌پذیر است.

۱۴ـ اگر $T: V \to V$ یک عملگر خطی روی فضای متناهی البعد V باشد و $T^2 = 0$ آنگاه $2\text{rank}(T) > \dim V$.

۴.۴ پاسخ تشریحی مسائل برگزیده

۱ـ فرض کنید $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ مبنایی برای W باشد.بافرض اینکه $\dim V = n$ چون W زیرفضای واقعی V است، لذا $r < n$.از طرفی $x, y \notin W$ لذا مجموعه‌های

$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r, x\}$ و $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, y\}$ مستقل خطی می‌باشند.این مجموعه‌ها را به مبنایی برای V توسعه می‌دهیم.فرض کنید $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, x, B_1, \cdots, B_s\}$ و $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, y, B'_1, \cdots, B'_s\}$ مبناهایی برای V باشند تبدیل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$T(\alpha_i) = \alpha_i \quad (1 \leq i \leq r), \quad T(x) = y, T(B_i) = B'_i \quad (1 \leq i \leq s)$$

واضح است که این تبدیل یک به یک و روی W همانی و $T(x) = y$ می‌باشد.

توجه شود اگر $n = r + 1$ آنگاه مجموعه‌های A و B مبناهایی برای V بودند و نیاز به توسعه نبود.

۲ـ الف: $\dim U = n$ پس کافی است نشان دهیم $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$ مستقل خطی است.برای این منظور فرض کنید $\alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n) = 0$ که در آن $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ عضو میدان F می‌باشند.لذا:

$$T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = 0 = T(0)$$

T، یک به یک است، بنابراین:

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$$

حال با توجه به اینکه $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ مستقل خطی است، پس:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

ب: داریم:

$$T(u_1) = T(u_1) + 0 + \cdots + 0$$

$$T(u_2) = 0 + T(u_1) + \cdots + 0$$

$$\vdots$$

$$T(u_n) = ۰ + ۰ + \cdots + T(u_n)$$

لذا ماتریس نمایش T نسبت به این دو مبنا به شکل زیر است:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ & \vdots & & \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{pmatrix} = I_n$$

۳ـ با توجه به رابطه $\dim\ker(T) + \operatorname{rank}(T) = \dim V$ داریم:

$$\dim\ker(T) = \dim V - \operatorname{rank}(T) \qquad (۱)$$

حال با توجه به اینکه $Im(T)$ زیرفضایی از W است لذا $\operatorname{rank}(T) \leq \dim(W)$. از طرفی $\dim(V) > \dim(W)$ بنابراین $\operatorname{rank}(T) < \dim(V)$ و طبق تساوی (۱)،

$$\dim\ker(T) = \dim(V) - \operatorname{rank}(T) > ۰$$

پس $\ker(T) \neq \{۰\}$ لذا V شامل عضوی ناصفر مانند x می‌باشد به طوری که $T(x) = ۰$.

۴ـ رابطه $T^۲ = ۰$ معادل $T(T(V)) = ۰$ می‌باشد.بنابراین:

$$Im(T) = T(V) \subseteq \ker(T)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{rank}(T) \leq \dim\ker(T)$$

از طرفی:

$$\dim(V) = \operatorname{rank}(T) + \dim\ker(T) \geq \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(T)$$

$$\Longrightarrow \dim(V) \geq ۲\operatorname{rank}(T)$$

۵ـ فرض کنید $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ که $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ اسکالر می‌باشند.لذا $T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) = T(0) = 0$.پس:

$$\alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) + \cdots + \alpha_n T(x_n) = 0$$

مجموعه $\{T(x_1), T(x_2), \cdots, , T(x_n)\}$ مستقل خطی است.لذا:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

پس $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$مستقل خطی‌اند.

حال چون $Im(T) \leq W$ بنابراین $\mathrm{rank}(T) \leq \dim(W)$.از طرفی اگر مجموعه $\{y_1, y_2, \cdots, y_r\}$ مبنایی برای $Im(T)$ باشد، با توجه به اینکه برای هر $1 \leq i \leq r$ داریم $y_i \in Im(T)$.لذا $x_i \in V$ وجود دارد که $y_i = T(x_i)$. بنابراین $\{T(x_1), \cdots, T(x_r)\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی است و طبق قسمت قبل $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ مستقل خطی است.بنابراین $\dim(V) \geq r = \mathrm{rank}(T)$.پس:

$$\mathrm{rank}(T) \leq \min\{\dim(V), \dim(W)\}$$

۶ـ تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f : M(n, F) \to F$$
$$f(A) = \mathrm{trc}(A)$$

این تابع تبدیل خطی است زیرا اگر $A, B \in M(n, F)$ و λ یک اسکالر باشد:

$$f(A + B) = \mathrm{trc}(A + \lambda B) = \mathrm{trc}(A) + \mathrm{trc}(\lambda B) = \mathrm{trc}(A) + \lambda \mathrm{trc}(B)$$
$$= f(A) + \lambda f(B)$$

حال با توجه به رابطه $\dim\ker(f)+\operatorname{rank}(f)=\dim M(n,F)$ داریم:

$$\dim\ker(f)=\dim M(n,F)-\operatorname{rank}(f)=n^{2}-\operatorname{rank}(f)$$

از طرفی $Im(f)\leq F$ بنابراین $\operatorname{rank}(f)\leq 1$ و چون $f(E_{11})=\operatorname{trc}(E_{11})=1$ لذا $f\neq 0$
پس $\operatorname{rank}(f)=1$.در نتیجه $\dim\ker(f)=n^{2}-1$ و داریم:

$$\ker(f)=\{A\in M(n,F)|f(A)=0\}$$
$$=\{A\in M(n,F)|\operatorname{trc}(A)=0\}=W$$

پس $\dim(W)=n^{2}-1$.

۷ـ ابتدا فرض کنید T نامنفرد باشد.لذا T یک به یک و پوشاست.پس T ایزومورفیسم است.بنابراین دو فضای $M(p\times n,F)$ و $M(m\times n,F)$ ایزومورفند.پس

$$\dim M(m\times n,F)=\dim M(p\times n,F)$$

لذا $mn=pn$ در نتیجه $m=p$.

حال نشان می‌دهیم B یک ماتریس نامنفرد است.فرض کنیم چنین نباشد یعنی B منفرد باشد.لذا طبق مسأله ۳۱ فصل دوم بردار ستونی mبعدی Y هست که $y\neq 0$ و $BY=0$. حال ماتریس $A, m\times n$ را در نظر می‌گیریم که ستون اول آن بردار y و بقیه ستونهای آن صفر است واضح است که $BA=0$.ولی چون $y\neq 0$ پس A درایه ناصفر دارد.لذا $A\neq 0$ از طرفی $T(A)=BA=0$ و چون T یک به یک است پس $A=0$ که تناقض است.در نتیجه B نامنفرد است.

برعکس: فرض کنید B ماتریسی $m\times m$ نامنفرد باشد.چون بعد فضای طرفین با هم برابر است یعنی $\dim M(m\times n,F)=\dim M(p\times n,F)$ زیرا $p=m$ لذا کافی است نشان دهیم T یک به یک است.فرض کنید $A\in\ker(T)$ لذا: $T(A)=BA=0$ حال طرفین رابطه

$BA = 0$ را از چپ در B^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$B^{-1}(BA) = 0 \Longrightarrow A = 0 \Longrightarrow \ker(T) = \{0\}$$

بنابراین T یک به یک است.

۸ـ فرض کنید $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ مبنایی برای V باشد و تبدیل S در این مبنا دارای نمایش زیر باشد:

$$S(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\alpha_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

حال $1 \leq i \leq n$ را دلخواه در نظر می‌گیریم و تبدیل خطی T را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(\alpha_i) = \alpha_i \quad T(\alpha_j) = 0 \quad (j \neq i \quad 1 \leq j \leq n)$$

چون S با T جابجا می‌شود بنابراین $ST(\alpha_i) = TS(\alpha_i)$ از طرفی:

$$ST(\alpha_i) = S(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\alpha_j$$

$$TS(\alpha_i) = T(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}T(\alpha_j) = a_{ii}\alpha_i$$

بنابراین:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\alpha_j = a_{ii}\alpha_i \Longrightarrow \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ji}\alpha_j = 0$$

چون $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ مستقل خطی است لذا:

$$a_{ji} = 0 \qquad (j \neq i, 1 \leq j \leq n$$

حال چون i دلخواه بود لذا به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$ که $i \neq j$ داریم $a_{ij} = 0$.بنابراین:

$$S(\alpha_i) = a_{ii}\alpha_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

قرار می‌دهیم $\lambda = a_{11}$ و $2 \leq j \leq n$ را دلخواه فرض کنید و تبدیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$T(\alpha_1) = \alpha_j \qquad T(\alpha_i) = 0 \qquad 2 \leq i \leq n$$

حال چون $TS = ST$ لذا $TS(\alpha_1) = ST(\alpha_1)$ از طرفی:

$$ST(\alpha_1) = S(\alpha_j) = a_{jj}\alpha_j$$

و

$$TS(\alpha_1) = T(\lambda\alpha_1) = \lambda T(\alpha_1) = \lambda\alpha_j$$

بنابراین $a_{jj}\alpha_j = \lambda\alpha_j$ پس $(a_{jj} - \lambda)\alpha_j = 0$ و چون $\alpha_j \neq 0$ لذا $a_{jj} = \lambda$ ولی $2 \leq j \leq n$ دلخواه بود پس:

$$\lambda = a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$$

در نتیجه برای $1 \leq i \leq n$ ، $S(\alpha_i) = \lambda\alpha_i$ بنابراین $S = \lambda I$.

۹ـ فرض کنید $\dim(V) = n$ و $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}, \alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ دو مبنا برای V باشند.به طوری که ماتریس تبدیل T نسبت به مبنای α، برابر ماتریس تبدیل S نسبت به مبنای β باشد.فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریس مذکور باشد.تبدیل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$f(\beta_i) = \alpha_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

واضح است که f معکوس پذیر است و برای $1 \leq i \leq n$, $f^{-1}(\alpha_i) = \beta_i$ از طرفی برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم:

$$\begin{aligned} fSf^{-1}(\alpha_i) &= fS(\beta_i) = f(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\beta_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} f(\beta_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\alpha_j \qquad (1) \end{aligned}$$

حال چون ماتریس $A = (a_{ij})$ ماتریس وابسته تبدیل T نسبت به مبنای $\alpha = \{\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_n\}$ است لذا:

$$T(\alpha_i) = \sum_{j=۱}^{n} a_{ji}\alpha_j \qquad (۲)$$

با مقایسه روابط $(۲),(۱)$ داریم:

$$fSf^{-۱}(\alpha_i) = T(\alpha_i) \qquad i = ۱, ۲, \cdots, n$$

حال اگر v عضوی دلخواه از V باشد اسکالرهای $\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n$ وجود دارند که

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i\alpha_i \\ \Longrightarrow T(v) &= T(\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i\alpha_i) = \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i T(\alpha_i) \\ &= \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i fSf^{-۱}(\alpha_i) \\ &= fSf^{-۱}(\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i\alpha_i) \\ &= fSf^{-۱}(v) \end{aligned}$$

لذا: $fSf^{-۱} = T$.

۱۰ـ فرض کنید $T' = T|_W$ لذا $T' : W \to W$ و داریم:

$$\dim\ker(T') + \dim\operatorname{Im}(T') = \dim(W) \qquad (۱)$$

حال نشان می‌دهیم $\ker(T') = \ker(T) \cap W$. x را عضو دلخواهی از $\ker(T')$ انتخاب می‌کنیم پس $x \in W$ و $T(x) = T'(x) = ۰$ در نتیجه:

$$x \in \ker(T) \cap W \Longrightarrow \ker(T') \subseteq \ker(T) \cap W$$

حال اگر $y \in \ker(T) \cap W$ پس $y \in W$ و $T(y) = 0$ در نتیجه $T'(y) = 0$ لذا $y \in \ker(T')$ پس $\ker(T) \cap W \subseteq \ker(T')$.بنابراین:

$$\ker(T') = \ker(T) \cap W \qquad (۲)$$

از طرفی

$$\operatorname{Im}(T') = T'(W) = T(W) \qquad (۳)$$

حال با جایگذاری روابط (۲) و (۳) در رابطه (۱) داریم:

$$\dim(\ker(T) \cap W) = \dim(W) - \dim T(W)$$

۱۱ـ فرض کنید $A, B \in M(n, F)$ و λ یک اسکالر باشد:

$$\begin{aligned} T(A + \lambda B) &= A + \lambda B + (A + \lambda B)^t = A + A^t + \lambda(B + B^t) \\ &= T(A) + \lambda T(B) \end{aligned}$$

پس T یک تبدیل خطی است و داریم:

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{A \in M(n, F) | T(A) = 0\} = \{A \in M(n, F) | A + A^t = 0\} \\ &= \{A \in M(n, F) | A^t = -A\} \end{aligned}$$

لذا فضای پوچ T، فضای ماتریس‌های متقارن اریب می‌باشد و بعد آن طبق مسأله ۲۰ فصل دوم برابر $\frac{n^2 - n}{2}$ است.

از طرفی:

$$\operatorname{Im}(T) = \{T(A) | A \in M(n, F)\} = \{A + A^t | A \in M(n, F)\}$$

هر عضو $\mathrm{Im}(T)$ متقارن است زیرا:

$$(A+A^t)^t = A^t + A = A + A^t$$

حال نشان می‌دهیم اگر یک ماتریس متقارن باشد آنگاه به $\mathrm{Im}(T)$ تعلق دارد.

فرض کنید B ماتریسی متقارن باشد پس $B^t = B$.لذا:

$$B = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B^t \in \mathrm{Im}(T)$$

بنابراین $\mathrm{Im}(T)$، فضای ماتریس‌های متقارن است و طبق مسأله ۲۰ فصل دوم بعد آن برابر $\frac{n^2+n}{2}$ می‌باشد.

۱۲ـ با توجه به اینکه $S : W \to V$ لذا $S(W) \subseteq V$ پس $TS(W) \subseteq T(V)$ بنابراین $\mathrm{rank}(TS) \leq \mathrm{rank}(T)$.

حال چون S یک تبدیل خطی روی W و TS نیز یک تبدیل خطی روی W است، داریم:

$$\dim\ker(TS) + \mathrm{rank}(TS) = \dim W$$

$$\dim\ker(S) + \mathrm{rank}(S) = \dim W$$

در نتیجه:

$$\dim\ker(TS) + \mathrm{rank}(TS) = \mathrm{rank}(S) + \dim\ker(S)$$

$$\Longrightarrow \dim\ker(TS) - \dim\ker S = \mathrm{rank}(S) - \mathrm{rank}(TS)$$

از طرفی واضح است که $\ker(S) \subseteq \ker(TS)$ لذا $\dim\ker(S) \leq \dim\ker(TS)$ بنابراین:

$$0 \leq \dim\ker(TS) - \dim\ker(S) = \mathrm{rank}(S) - \mathrm{rank}(TS)$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \mathrm{rank}(S) - \mathrm{rank}(TS) \Longrightarrow \mathrm{rank}(TS) \leq \mathrm{rank}(S)$$

حال با توجه به رابطه (۱) و رابطه فوق داریم: $\operatorname{rank}(TS) \leq \min\{\operatorname{rank}(T), \operatorname{rank}(S)\}$.

اکنون برای اثبات طرف دوم نامساوی ابتدا نشان می‌دهیم:

$$\dim\ker(T) + \dim\ker(S) \geq \dim\ker(TS)$$

واضح است $\ker(S) \subseteq \ker(TS)$.فرض کنید $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ مبنایی برای $\ker(S)$ باشد آن را به مبنایی برای $\ker(TS)$ توسعه می‌دهیم.فرض کنید $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s\}$ مبنای مذکور باشد.بنابراین به ازای هر $r + 1 \leq i \leq s$ داریم: $S(\alpha_i) \neq 0$ زیرا در غیر این صورت $S(\alpha_i) = 0$ پس $\alpha_i \in \ker(S)$ لذا α_i ترکیبی از بردارهای $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ است که این با مبنا بودن $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_s\}$ در تناقض است و چون برای $r + 1 \leq i \leq s$ ، $TS(\alpha_i) = 0$ لذا

$$S(\alpha_i) \in \ker(T) \qquad (۴)$$

حال نشان می‌دهیم $\{S(\alpha_{r+1}), \cdots, S(\alpha_s)\}$ مستقل خطی است.فرض کنید:

$$\lambda_{r+1}S(\alpha_{r+1}) + \cdots + \lambda_s S(\alpha_s) = 0 \qquad (\lambda_i \in F, r + 1 \leq i \leq s)$$

(توجه شد که به دلیل سهولت در محاسبات به طریقه فوق اندیس گذاری شده است) در نتیجه:

$$S(\lambda_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + \lambda_s\alpha_s) = 0 \Longrightarrow \lambda_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + \lambda_s\alpha_s \in \ker(S)$$

پس $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ عضو F موجودند که:

$$\lambda_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + \lambda_s\alpha_s = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r$$

$$\Longrightarrow \lambda_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + \lambda_r\alpha_r - \cdots - \lambda_s\alpha_s = 0$$

چون $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ مستقل خطی است.بنابراین:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_s = 0$$

پس مجموعه $\{S(\alpha_{r+1}), \cdots, S(\alpha_s)\}$ مستقل خطی است و این بردارها با توجه به رابطه (۲) به $\ker(T)$ تعلق دارند لذا $\dim\ker(T) \geq s - r$.در نتیجه:

$$\dim\ker(T) + \dim\ker(S) \geq s - r + r = s = \dim\ker(TS) \qquad (5)$$

و در قسمت اول مسأله اثبات کردیم که:

$$\dim\ker(TS) - \dim\ker(S) = \operatorname{rank}(S) - \operatorname{rank}(TS)$$

حال با توجه به رابطه (۳) داریم که $\dim\ker(T) \geq \dim\ker(TS) - \dim\ker(S)$ در نتیجه:

$\operatorname{rank}(S) - \operatorname{rank}(TS) \leq \dim\ker(T) \qquad (*)$.

از طرفی $\dim\ker(T) + \operatorname{rank}(T) = \dim V = n$ پس:

$$\dim\ker(T) = n - \operatorname{rank}(T)$$

از مقایسه رابطه اخیر با رابطه $(*)$ داریم:

$$\operatorname{rank}(S) - \operatorname{rank}(TS) \leq n - \operatorname{rank}(T)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{rank}(S) + \operatorname{rank}(T) \leq n + \operatorname{rank}(TS)$$

حال فرض کنید T نامنفرد باشد پس $\operatorname{rank}(T) = \dim V = n$ و طبق مسأله ۵،

$$\operatorname{rank}(S) \leq \min\{\dim V, \dim W\}$$

پس $\operatorname{rank}(S) \leq n$ لذا $\operatorname{rank}(S) = \min\{\operatorname{rank}(T), \operatorname{rank}(S)\}$ و طبق رابطه قسمت قبل

$$\operatorname{rank}(S) + \operatorname{rank}(T) - n \leq \operatorname{rank}(TS) \leq \min\{\operatorname{rank}(T), \operatorname{rank}(S)\} = \operatorname{rank}(S)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{rank}(S) + n - n \leq \operatorname{rank}(TS) \leq \operatorname{rank}(S)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{rank}(S) \leq \operatorname{rank}(TS) \leq \operatorname{rank}(S) \Longrightarrow \operatorname{rank}(TS) = \operatorname{rank}(S)$$

حال با توجه به اینکه $\operatorname{rank}(S) = \min\{\operatorname{rank}(T), \operatorname{rank}(S)\}$ لذا

$$\operatorname{rank}(TS) = \min\{\operatorname{rank}(T), \operatorname{rank}(S)\}$$

در انتها با یک مثال نشان می‌دهیم این نامساویها اکید نیز می‌توانند باشند:

$$\begin{array}{ll} T : R^۳ \to R^۳ & S : R^۳ \to R^۳ \\ T(e_۱) = e_۱ & S(e_۱) = S(e_۲) = ۰ \\ T(e_۲) = T(e_۳) = ۰ & S(e_۳) = e_۳ \end{array}$$

که $\{e_۱, e_۲, e_۳\}$ مبنای استاندارد $R^۳$ است.واضح است که $TS = ۰$ لذا $\operatorname{rank}(TS) = ۰$ از طرفی $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(S) = ۱$ پس $\min\{\operatorname{rank}(T), \operatorname{rank}(S)\} = ۱$ در نتیجه $\operatorname{rank}(TS) < \min\{\operatorname{rank}(T), \operatorname{rank}(S)\}$ و $\operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(S) - ۳ = -۱$ بنابراین:

$$\operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(S) - ۳ < \operatorname{rank}(TS)$$

۱۳ـ $T + S$ یک تبدیل خطی از U به V است.با ضابطه تعریف:

$$(T + S)(u) = T(u) + S(u) \qquad (u \in U)$$

فرض کنید $y \in \operatorname{Im}(T + S)$ لذا $x \in U$ وجود دارد که:

$$y = (T + S)x = T(x) + S(x) \in \operatorname{Im}(T) + \operatorname{Im}(S)$$

در نتیجه: $\mathrm{Im}(T+S) \subseteq \mathrm{Im}(T) + \mathrm{Im}(S)$ پس:

$$\mathrm{rank}(T+S) \leq \mathrm{rank}(T)+\mathrm{rank}(S)-\dim(\mathrm{Im}(T)\cap\mathrm{Im}(S)) \leq \mathrm{rank}(T)+\mathrm{rank}(S)$$

از طرفی برای هر $x \in U$ داریم:

$$T(x) = T(x) + S(x) - S(x) = (T+S)(x) + S(-x) \in \mathrm{Im}(T+S) + \mathrm{Im}(S)$$

در نتیجه $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathrm{Im}(T+S) + \mathrm{Im}(S)$ پس:

$$\mathrm{rank}(T) \leq \mathrm{rank}(T+S) + \mathrm{rank}(S)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{rank}(T) - \mathrm{rank}(S) \leq \mathrm{rank}(T+S)$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود:

$$\mathrm{rank}(S) - \mathrm{rank}(T) \leq \mathrm{rank}(T+S)$$

در نتیجه:

$$|\mathrm{rank}(T) - \mathrm{rank}(S)| \leq \mathrm{rank}(T+S) \leq \mathrm{rank}(T) + \mathrm{rank}(S)$$

۱۴ـ فرض کنید $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ مبنایی برای F^n باشند و T و S تبدیلهای خطی وابسته به دو ماتریس A و B نسبت به این مبناها باشند.

چون برای دو تبدیل T و S روابط الف، ب، ج مسائل ۱۲ و ۱۳ برقرار است پس برای ماتریس‌های A و B نیز این روابط برقرار است.

۱۵ـ فرض کنید T_1, T_2, T_3, T_4 تبدیلهای خطی وابسته به ماتریس‌های A, B, C, D نسبت به مبنای استاندارد F^8 باشند داریم: (مسأله ۱۳)

$$\mathrm{rank}(T_1T_2 + T_3T_4) \geq \mathrm{rank}T_3T_4 - ranT_1T_2$$

و طبق مسأله ۱۲ $\operatorname{rank}(T_1) \le \operatorname{rank}(T_1T_2)$ و $\operatorname{rank}T_3T_4 \ge \operatorname{rank}T_3 + \operatorname{rank}T_4 - 8$

بنابراین:

$$\operatorname{rank}(T_3T_4) - \operatorname{rank}(T_1T_2) \ge \operatorname{rank}(T_3) + \operatorname{rank}(T_4) - 8 - \operatorname{rank}(T_1)$$
$$= 6 + 7 - 8 - 3$$

در نتیجه: $\operatorname{rank}(T_1T_2 + T_3T_4) \ge 2$ بنابراین:

$$\operatorname{rank}(AB + CD) \ge 2$$

۱۶ـ الف.با توجه به مسأله ۱۲ داریم:

$$\operatorname{rank}(T^2) = \operatorname{rank}(TT) \ge \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(T) - n = 2\operatorname{rank}(T) - n$$

ب.مجدداً با توجه به مسأله ۱۲ داریم:

$$\operatorname{rank}(T^3) = \operatorname{rank}(T^2T) \ge \operatorname{rank}(T^2) + \operatorname{rank}(T) - n$$

و طبق قسمت الف، $\operatorname{rank}(T^2) \ge 2\operatorname{rank}(T) - n$.پس:

$$\operatorname{rank}(T^3) \ge 2\operatorname{rank}(T) - n + \operatorname{rank}(T) - n = 3\operatorname{rank}(T) - 2n$$

ج.با استفاده از قسمت الف داریم:

$$\operatorname{rank}(A^4) = \operatorname{rank}(A^2)^2 \ge 2\operatorname{rank}A^2 - 10$$

مجدداً با استفاده از قسمت (الف) داریم:

$$\operatorname{rank}A^2 \ge 2\operatorname{rank}(A) - 10 = 16 - 10 = 6$$

در نتیجه:

$$\operatorname{rank}(A^{۴}) \geq ۲ \times ۶ - ۱۰ = ۲ \Longrightarrow A^{۴} \neq ۰$$

۱۷ـ با توجه به مسأله ۱۶ داریم:

$$۰ = \operatorname{rank}(A+B)^{۳} \geq ۳\operatorname{rank}(A+B) - ۲n$$
$$\Longrightarrow ۳\operatorname{rank}(A+B) \leq ۲n$$

از طرفی طبق مسأله ۱۴ داریم:

$$\operatorname{rank}(A+B) \geq \operatorname{rank}(A) - \operatorname{rank}(B)$$

در نتیجه:

$$۳(\operatorname{rank}(A) - \operatorname{rank}(B)) \leq ۳\operatorname{rank}(A+B) \leq ۲n$$
$$\Longrightarrow ۳\operatorname{rank}(A) - ۲n \leq ۳\operatorname{rank}(B)$$

و چون A نامنفرد است لذا $\operatorname{rank}(A) = n$، پس:

$$۳n - ۲n \leq ۳\operatorname{rank}(B) \Longrightarrow \operatorname{rank}(B) \geq \frac{۱}{۳}n$$

۱۸ـ واضح است که $\{۱, x, x^{۲}, \cdots, x^n\}$ مبنایی برای P_n می‌باشد و داریم که

$$D(۱) = ۰,\ D(x) = ۱, \cdots, D(x^k) = kx^{k-۱} \qquad (۱ \leq k \leq n)$$

لذا نمایش ماتریسی D به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

۱۹ـ با توجه به مسأله ۱۴ داریم:

$$\text{rank}(CAB) \geq \text{rank}(CA) + \text{rank}(B) - n$$

با استفاده مجدد از مسأله ۱۴ داریم:

$$\text{rank}(CA) \geq \text{rank}(C) + \text{rank}(A) - n$$

حال با توجه به اینکه $\text{rank}(CAB) = 0$، داریم:

$$0 = \text{rank}(CAB) \geq \text{rank}(C) + \text{rank}(A) - n + \text{rank}(B) - n$$
$$\Longrightarrow \text{rank}(A) + \text{rank}(B) + \text{rank}(C) \leq 2n$$

۲۰ـ الف. چون $ST = 0$ بنابراین $T(V) \subseteq \ker(S)$. پس $\text{rank}(T) \leq \dim\ker(S)$.
از طرفی $\text{rank}(S) + \dim\ker(S) = n$ در نتیجه:

$$\text{rank}(T) + \text{rank}(S) \leq \dim\ker(S) + \text{rank}(S) = n$$

ب. اگر T نامنفرد باشد قرار می‌دهیم $R = 0$ واضح است که $TR = 0$ و

$$\operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(R) = n + 0 = n$$

پس حکم ثابت است.فرض کنید T منفرد باشد و $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ مبنایی برای $\ker(T)$ باشد آن را به مبنای $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_n\}$ برای V توسعه می‌دهیم و تبدیل خطی R را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R(\alpha_i) = \alpha_i \quad (1 \leq i \leq r) \text{ و } \quad R(\alpha_j) = 0 \quad (r + 1 \leq j \leq n)$$

واضح است $TR = 0$.از طرفی $\dim\ker(T) + \operatorname{rank}(T) = n$ و چون $\dim\ker(T) = r$ لذا $\operatorname{rank}(T) = n - r$.همچنین $\operatorname{rank}(R) = r$ بنابراین:

$$\operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(R) = n - r + r = n$$

لذا حکم ثابت است.

۲۱ـ فرض کنید $T_1 = T|_{S(V)}$ (تحدید T روی $S(V)$).پس $T_1 : S(V) \to V$، لذا داریم:

$$\dim(\operatorname{Im}(T_1)) + \dim\ker(T_1) = \dim(S(V)) \qquad (1)$$

از طرفی:

$$\operatorname{Im}(T_1) = T_1(S(V)) = T(S(V)) = TS(V) \Longrightarrow \dim(\operatorname{Im}(T_1)) = \operatorname{rank}(TS)$$

واضح است $\ker(T_1) = \ker(T) \cap S(V)$. بنابراین در رابطه (۱) داریم:

$$\operatorname{rank}(TS) + \dim(\ker(T) \cap S(V)) = \operatorname{rank}(S) \qquad (2)$$

مجدداً عملگر تحدیدی $T_2 = T|_{TS(V)}$ را در نظر بگیرید.پس:

$$\dim(\mathrm{Im}(T_2)) + \dim\ker(T_2) = \dim(TS(V))$$

و مجدداً مثل حالت قبل $\mathrm{Im}(T_2) = T^2S(V)$ و $\ker(T_2) = \ker(T) \cap TS(V)$ در نتیجه:

$$\mathrm{rank}(T^2S) + \dim(\ker(T) \cap TS(V)) = \mathrm{rank}(TS) \qquad (3)$$

از روابط (۲) و (۳) داریم:

$$\mathrm{rank}(S) - \mathrm{rank}(TS) = \dim(\ker(T) \cap S(V))$$

$$\mathrm{rank}(TS) - \mathrm{rank}(T^2S) = \dim(\ker(T)) \cap TS(V)$$

حال با توجه‌به اینکه $ST = TS$ پس $T^2S = ST^2$ و با جاگذاری در روابط فوق داریم:

$$\mathrm{rank}(S) - \mathrm{rank}(ST) = \dim(\ker(T) \cap S(V)) \qquad (4)$$

$$\mathrm{rank}(ST) - \mathrm{rank}(ST^2) = \dim(\ker(T)) \cap ST(V) \qquad (5)$$

از طرفی $T(V) \subseteq V$ پس $ST(V) \subseteq S(V)$ بنابراین:

$$\ker(T) \cap ST(V) \subseteq \ker(T) \cap S(V)$$

$$\Longrightarrow \dim(\ker(T) \cap ST(V)) \leq \dim(\ker(T) \cap S(V))$$

حال با توجه به رابطه اخیر و روابط (۴) و (۵) داریم:

$$\mathrm{rank}(S) - \mathrm{rank}(ST) \geq \mathrm{rank}(ST) - \mathrm{rank}(ST^2)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{rank}(S) + \mathrm{rank}(ST^2) \geq 2\mathrm{rank}(ST)$$

۲۲ـ ابتدا فرض کنید T نامنفرد باشد و $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ یک مجموعه مستقل از U باشد. نشان می‌دهیم $\{T(\alpha_1), T(\alpha_2), \cdots, T(\alpha_r)\}$ مستقل خطی است. فرض کنید:

$$\lambda_1 T(\alpha_1) + \lambda_2 T(\alpha_2) + \cdots + \lambda_r T(\alpha_r) = 0 \qquad (\lambda_i \in F, 1 \leq i \leq r)$$

$$\Longrightarrow T(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_r\alpha_r) = 0$$

چون T نامنفرد است پس یک به یک است. لذا:

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_r\alpha_r = 0$$

حال چون $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ مستقل خطی است. لذا $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$.

برعکس، فرض کنید تصویر هر مجموعه مستقل، مستقل باشد. با توجه به اینکه $\dim U = \dim V$، کافیست نشان دهیم T یک به یک است. فرض کنید $x \in \ker(T)$ لذا $T(x) = 0$. حال اگر $x \neq 0$ پس مجموعه $\{x\}$ مستقل خطی است و طبق فرض $\{T(x)\}$ نیز مستقل خطی است لذا $T(x) \neq 0$ که تناقض است. پس $x = 0$ در نتیجه $\ker(T) = \{0\}$. بنابراین T یک به یک است.

۲۳ـ فرض کنید $T' = T|_W$ (عملگر تحدیدی T روی W) باشد. پس $T' : W \to V$ و داریم:

$$\dim(T'(W)) + \dim\ker(T') = \dim(W) = k$$

داریم: $T'(W) = T(W)$ و $\ker(T') = \ker(T) \cap W$ لذا:

$$\dim(T(W) + \dim(\ker(T) \cap W) = k$$

$$\Longrightarrow \dim(\ker(T) \cap W) = k - \dim(T(W)) \qquad (1)$$

از طرفی با توجه به اینکه $T : U \to U$ داریم:

$$\dim(T(U) + \dim(\ker(T) = \dim(U) = m$$

$$\Longrightarrow \dim(\ker(T)) = m - \dim(T(U)) \qquad (2)$$

و چون $\ker(T) \subseteq \ker(T)\cap W$ پس $\ker(T)\cap W \subseteq \ker(T)$ پس $\dim(\ker(T)\cap W) \leq \dim\ker(T)$ حال با مقایسه نامساوی فوق و روابط (۱) و (۲) داریم:

$$m - \dim(T(U)) \geq k - \dim(T(W))$$

$$\Longrightarrow \dim T(W) \geq k + \dim(T(U)) - m$$

۲۴ـ با توجه به اینکه $T : V \to V$ پس $T^2 : V \to V$ و برای این دو عملگر داریم:

$$\operatorname{rank}(T) + \dim\ker(T) = \dim V$$

$$\operatorname{rank}(T^2) + \dim\ker(T^2) = \dim V$$

حال چون طرف راست تساویهای بالا برابر است لذا:

$$\operatorname{rank}(T) + \dim\ker(T) = \operatorname{rank}(T^2) + \dim\ker(T^2)$$

از طرفی $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(T^2)$، بنابراین $\dim\ker(T) = \dim\ker(T^2)$.واضح است که $\ker(T) \subseteq \ker(T^2)$ و چون $\dim\ker(T) = \dim\ker(T^2)$ لذا:

$$\ker(T) = \ker(T^2)$$

حال فرض کنید $x \in V$ دلخواه باشد.نشان می‌دهیم $T^2(x) = T(x)$.
با توجه به رابطه $T^3 = T^2$ لذا $T^3(x) = T^2(x)$ پس:

$$T^2(T(x)) = T^2(x) \Longrightarrow T^2(T(x)) - T^2(x) = 0$$

$$\Longrightarrow T^2(T(x)) - x) = 0$$

$$\Longrightarrow T(x) - x \in \ker(T^2)$$

از طرفی $\ker(T)=\ker(T^{2})$ پس $T(x)-x\in\ker(T)$ در نتیجه:

$$T(T(x)-x)=0 \Longrightarrow T^{2}(x)-T(x)=0 \Longrightarrow T^{2}(x)=T(x)$$

حال چون $x\in V$ دلخواه بود لذا $T^{2}=T$.

۲۵ـ با توجه به اینکه $S:V\to V$ و $TS:V\to V$ داریم:

$$\operatorname{rank}(S)+\dim\ker(S)=\dim V$$

$$\operatorname{rank}(TS)+\dim\ker(TS)=\dim V$$

حال با مقایسه دو رابطه فوق داریم:

$$\operatorname{rank}(S)+\dim\ker(S)=\operatorname{rank}(TS)+\dim\ker(TS)$$

حال چون $\operatorname{rank}(S)=\operatorname{rank}(TS)$ در نتیجه $\dim\ker(S)=\dim\ker(TS)$ و چون $\ker(S)\subseteq\ker(TS)$ لذا $\ker(S)=\ker(TS)$.

حال نشان می‌دهیم $S(V)\cap\ker(T)=\{0\}$. فرض کنید $y\in\ker(T)\cap S(V)$:

$$y\in\ker(T)\Longrightarrow T(y)=0 \quad \text{و}\quad y\in S(V)\Longrightarrow y=S(x)\quad (x\in V)$$

$$\Longrightarrow TS(x)=0\Longrightarrow x\in\ker(TS)$$

از طرفی $\ker S=\ker TS$.پس $x\in\ker(S)$، در نتیجه $y=S(x)=0$ لذا $\ker(T)\cap S(V)=\{0\}$.

در انتها نشان می‌دهیم: $V=S(V)\oplus\ker(T)$.

اولاً $S(V) \cap \ker(T) = \{0\}$ از طرفی:

$$\begin{aligned}\dim(S(V) + \ker(T)) &= \dim S(V) + \dim\ker(T) + \dim(S(V) \cap \ker(T)) \\ &= \dim S(V) + \dim\ker(T) \\ &= \operatorname{rank}(S) + \dim\ker(T) \\ &= \operatorname{rank}(T) + \dim\ker(T) = \dim(V)\end{aligned}$$

در نتیجه: $V = S(V) \oplus \ker(T)$.

۲۶ـ با توجه به اینکه $T : V \to V$ لذا $T(V) \subseteq V$. حال عملگر T را به طرفین رابطه اخیر اثر می‌دهیم پس $T^2(V) \subseteq T(V)$ و با تکرار این عمل داریم:

$$V \supseteq T(V) \supseteq T^2(V) \supseteq \cdots \supseteq T^{n-1}(V) \supseteq T^n(V) = 0$$

ابتدا نشان می‌دهیم برای هر $0 \leq m < n$، $T^{m+1}(V) \subsetneqq T^m(V)$ فرض کنیم چنین نباشد یعنی $0 \leq m < n$ باشد که $T^{m+1}(V) = T^m(V)$ حال طرفین را با $T^{n-(m+1)}$ ترکیب می‌کنیم در نتیجه $T^n(V) = T^{n-1}(V)$ و چون $T^n = 0$ لذا $T^{n-1} = 0$ که تناقض است لذا داریم:

$$V \supsetneqq T(V) \supsetneqq T^2(V) \supsetneqq \cdots \supsetneqq T^{n-1}(V) \supsetneqq T^n(V) = 0$$

در نتیجه:

$$n = \dim(V) > \operatorname{rank}(T) > \operatorname{rank}(T^2) > \cdots > \operatorname{rank}(T^{n-1}) > 0$$

پس $\dim(V)$ و $\operatorname{rank}(T)$ و $\cdots$ و $\operatorname{rank}(T^{n-1})$، n عدد طبیعی می‌باشند که از یک ناکمتر و از n نابیشترند لذا همان اعداد ۱ ,۲ , $\cdots ,n$ می‌باشند و با توجه به رابطه کوچکتری که بین آنها

برقرار است، داریم:

$$\dim(V) = n, \mathrm{rank}(T) = n - ۱, \mathrm{rank}(T^{۲}) = n - ۲, \cdots, \mathrm{rank}(T^{n-۱}) = ۱$$

پس حکم ثابت است.

۲۷ـ فرض کنید $\dim V = n$ و $\{\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_r\}$ مبنایی برای W باشد.آنرا به مبنای $\{\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_n\}$ برای V توسعه می‌دهیم.حال T را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$T(\alpha_i) = ۰ \quad (r < i \leq n) \text{ و } T(\alpha_i) = -\alpha_i \quad (۱ \leq i \leq r)$$

S را تبدیل همانی در نظر می‌گیریم. حال برای $۱ \leq i \leq r$ داریم

$$(S+T)\alpha_i = S(\alpha_i) + T(\alpha_i) = \alpha_i - \alpha_i = ۰$$

لذا $(S+T)(W) = ۰$ از طرفی $T(W) = S(W) = W$.پس:

$$T(W) + S(W) = W + W = W$$

در نتیجه همیشه رابطهٔ $(S+T)W = S(W) + T(W)$ درست نیست.

۲۸ـ فرض کنید $R = TS$ حال با توجه به رابطه $TST = T$ داریم $RT = T$ از طرفی $\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}(TR) \leq \min\{\mathrm{rank}(R), \mathrm{rank}(T)\}$ در نتیجه:

$$\mathrm{rank}(T) \leq \mathrm{rank}(R) = \mathrm{rank}(TS)$$

همچنین $\mathrm{rank}(TS) \leq \min\{\mathrm{rank}(T), \mathrm{rank}(S)\}$ پس:

$$\mathrm{rank}(T) \leq \mathrm{rank}(TS) \leq \mathrm{rank}(T) \Longrightarrow \mathrm{rank}(TS) = \mathrm{rank}(T)$$

حال نشان می‌دهیم $T|_{S(V)}$ دوسوئی است.$S : V \to V$ لذا $S(V) \subseteq V$ پس $TS(V) \subseteq T(V)$ در نتیجه $T|_{S(V)} : S(V) \to T(V)$ و طبق قسمت قبل $\operatorname{rank}(TS) = \operatorname{rank}(T)$ لذا $TS(V) = T(V)$ پس $T|_{S(V)}$ پوشاست.از طرفی $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(S)$ یعنی بعد $T(V)$ و $S(V)$ برابر است لذا این تبدیل یک به یک است و در نتیجه دو سوئی است.در انتها ثابت می‌کنیم که $STS = S$.با توجه به اینکه $TS(V) \subseteq V$ لذا $STS(V) \subseteq S(V)$.
حال فرض کنید x عضوی دلخواه از V باشد.داریم:

$$STS(x) \in STS(V) \subseteq S(V) \Longrightarrow STS(x) \in S(V)$$

پس y عضو V وجود دارد که $STS(x) = S(y)$.حال T را از چپ با طرفین تساوی اخیر ترکیب می‌کنیم لذا $TSTS(x) = TS(y)$ و چون $T = TST$ لذا $T(S(x)) = T(S(y))$.ولی طبق قسمت قبل $T|_{S(V)}$ دو سوئی است لذا $S(x) = S(y)$ در نتیجه $STS(x) = S(x)$ و چون x عضوی دلخواه از V بود پس $STS = S$.

۲۹ـ طبق مسأله ۱۰ فصل دوم داریم $E_{pq}E_{rs} = \delta_{qr}E_{ps}$ حال اگر $i \neq j$ بنابراین $E_{ij}E_{ii} = ۰$ و $E_{ii}E_{ij} = E_{ij}$ و طبق فرض مسأله:

$$f(E_{ii}E_{ij}) = f(E_{ij}E_{ii}) \Longrightarrow f(E_{ij}) = f(۰) = ۰$$

در نتیجه برای $i \neq j$ داریم $f(E_{ij}) = ۰$.
از طرفی $E_{ij}E_{ji} = E_{ii}$ و $E_{ji}E_{ij} = E_{jj}$ و طبق فرض مسأله:

$$f(E_{ji}E_{ij}) = f(E_{ij}E_{ji}) \Longrightarrow f(E_{ii}) = f(E_{jj})$$

چون i و j دلخواه و $i \neq j$، لذا:

$$f(E_{۱۱}) = f(E_{۲۲}) = \cdots = f(E_{nn})$$

حال فرض کنید $A \in M(n,F)$ دلخواه باشد لذا:

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} \qquad (a_{ij} \in F, 1 \le i,j \le n)$$

بنابراین:

$$f(A) = f(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}f(E_{ij})$$

حال چون برای $i \neq j$، $f(E_{ij}) = 0$ بنابراین:

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}f(E_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}f(E_{11}) = f(E_{11})\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$
$$= f(E_{11})\mathrm{trc}(A)$$

قسمت دوم: فرض کنید $f(I) = n$ واضح است $I = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}$، لذا:

$$n = f(I) = f(\sum_{i=1}^{n} E_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} f(E_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} f(E_{11})$$
$$= nf(E_{11})$$

بنابراین $f(E_{11}) = 1$.در نتیجه f خود تابع trcاست.

۳۰ـ در مسأله (۱۰) با قرار دادن $W = T(V)$، داریم:

$$\dim(\ker(T) \cap T(V)) = \dim(T(V) - \dim(T^2(V)) = \mathrm{rank}(T) - \mathrm{rank}(T^2) \quad (1)$$

مجدداً با استفاده از مسالهٔ (۱۰) و با قرار دادن $W = T^2(V)$، داریم:

$$\dim(\ker(T) \cap T^2(V)) = \dim(T^2(V)) - \dim(T^3(V)) = \mathrm{rank}(T^2) - \mathrm{rank}(T^3) \quad (2)$$

از طرفی $T(V) \subseteq V$ پس $T^{2}(V) \subseteq T(V)$.در نتیجه:

$$\ker(T) \cap T^{2}(V) \subseteq \ker(T) \cap T(V)$$

$$\Longrightarrow \dim(\ker(T) \cap T^{2}(V) \leq \dim(\ker(T) \cap T(V))$$

حال با مقایسه روابط (۱) و (۲) نامساوی فوق داریم:

$$\operatorname{rank}(T^{2}) - \operatorname{rank}(T^{3}) \leq \operatorname{rank}(T) - \operatorname{rank}(T^{2})$$

$$\Longrightarrow 2\operatorname{rank}(T^{2}) \leq \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(T^{3})$$

ب. با توجه به رابطه $T^{3} = 0$ داریم که $T^{2}(T(V)) = 0$ در نتیجه $T(V) \subseteq \ker(T^{2})$ پس $\operatorname{rank}(T) \leq \dim\ker(T^{2})$.حال طرفین این نامساوی را با $\operatorname{rank}(T^{2})$ جمع می‌کنیم پس $\operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(T^{2}) \leq \dim\ker(T^{2}) + \operatorname{rank}(T^{2})$.

از طرفی $T^{2} : V \to V$ لذا داریم $\dim\ker(T^{2}) + \operatorname{rank}(T^{2}) = \dim V = 5$ پس:

$$\operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(T^{2}) \leq 5 \qquad (1)$$

طبق قسمت قبل داریم:

$$2\operatorname{rank}(T^{2}) \leq \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(T^{3}) = \operatorname{rank}(T)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{rank}(T) \geq 2\operatorname{rank}(T^{2}) \qquad (2)$$

با مقایسه روابط (۱) و (۲) داریم:

$$3\operatorname{rank}(T^{2}) \leq 5 \Longrightarrow \operatorname{rank}(T^{2}) \leq \frac{5}{3} \Longrightarrow \operatorname{rank}(T^{2}) = 0 \text{ یا } 1$$

حال چون $T^{2} \neq 0$ لذا $\operatorname{rank}(T^{2}) = 1$.و چون $2\operatorname{rank}(T^{2}) \leq \operatorname{rank}(T)$ پس $\operatorname{rank}(T) \geq 2$.از طرفی چون T معکوس ناپذیر است.لذا $\operatorname{rank}(T) < 5$

پس ۴ یا ۳ یا ۲ $= \operatorname{rank}(T)$.حال نشان می‌دهیم ۴ $\operatorname{rank}(T) \neq$.اگر ۴ $\operatorname{rank}(T) =$ آنگاه عملگر تحدیدی $T' = T|_{T(V)}$ را در نظر می‌گیریم داریم:

$$\operatorname{rank}(T') + \dim\ker(T') = \dim(T(V))$$

در نتیجه:

$$\operatorname{rank}(T^{۲}) + \dim(\ker(T) \cap T(V)) = \operatorname{rank}(T)$$

$$\Longrightarrow ۱ + \dim(\ker(T) \cap T(V)) = ۴$$

$$\Longrightarrow \dim(\ker(T) \cap T(V)) = ۳ \qquad (*)$$

از طرفی $\ker(T) \cap T(V) \subseteq \ker(T)$ و چون ۴ $\operatorname{rank}(T) =$ پس ۱ $\dim\ker(T) =$ در نتیجه ۱ $\dim(\ker(T) \cap T(V)) \leq$ که این با $(*)$ در تناقض است لذا ۴ $\operatorname{rank}(T) \neq$.

۳۱ـ TS خود توان است پس $(TS)^{۲} = TS$.حال طرفین این تساوی را از راست در T و از چپ در S ضرب می‌کنیم لذا:

$$S(TS)^{۲}T = STST \Longrightarrow STSTST = STST \Longrightarrow (ST)^{۳} = (ST)^{۲}$$

برای اثبات قسمت دوم از این مطلب استفاده می‌کنیم که اگر A و B دو عملگر خطی باشند آنگاه $\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$، پس:

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(TU)^{۳} = \operatorname{rank}T(ST)^{۲}S &\leq \min\{\operatorname{rank}T(ST)^{۲}, \operatorname{rank}S\}\\ &\leq \operatorname{rank}T(ST)^{۲} \leq \min\{\operatorname{rank}T, \operatorname{rank}(ST)^{۲}\}\\ &\leq \operatorname{rank}(ST)^{۲}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\operatorname{rank}(TS)^{3} \leq \operatorname{rank}(ST)^{2} \qquad (1)$$

از طرفی $(TS)^{2} = TS$، با ترکیب طرفین با TS داریم:

$$(TS)^{3} = (TS)^{2} = TS \Longrightarrow \operatorname{rank}(TS)^{3} = \operatorname{rank}(TS)$$

حال با توجه به رابطه (۱) و تساوی فوق داریم:

$$\operatorname{rank}(TS) \leq \operatorname{rank}(ST)^{2} \qquad (*)$$

از طرفی:

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(ST)^{3} = \operatorname{rank}(S(TS)^{2}T) &\leq \min\{\operatorname{rank}S(TS)^{2}, \operatorname{rank}(T)\}\\ &\leq \operatorname{rank}S(TS)^{2} \leq \min\{\operatorname{rank}(S), \operatorname{rank}(TS)^{2}\}\\ &\leq \operatorname{rank}(TS)^{2} = \operatorname{rank}(TS)\end{aligned}$$

پس $\operatorname{rank}(ST)^{3} \leq \operatorname{rank}(TS)$ و طبق قسمت اول $(ST)^{3} = (ST)^{2}$ لذا $\operatorname{rank}(ST)^{3} = \operatorname{rank}(ST)^{2}$. در نتیجه $\operatorname{rank}(ST)^{2} \leq \operatorname{rank}(TS)$. حال با توجه به رابطه $(*)$ و نتیجه فوق داریم:

$$\operatorname{rank}(ST)^{2} = \operatorname{rank}(TS)$$

۳۲ـ عملگر TS خود توان است لذا $(TS)^{2} = TS$ پس:

$$n - 1 = \operatorname{rank}(TS) = \operatorname{rank}(TS)^{2}$$

از طرفی:

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(TS)^{2} = \operatorname{rank}(T(ST)S) &\leq \min\{\operatorname{rank}(T(ST)), \operatorname{rank}(S)\}\\ &\leq \operatorname{rank}(T(ST))\\ &\leq \min\{\operatorname{rank}(T), \operatorname{rank}(ST)\}\\ &\leq \operatorname{rank}(ST)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\operatorname{rank}(ST) \geq \operatorname{rank}(TS)^{2} = n - 1$$

پس $\operatorname{rank}(ST) = n - 1$ یا $\operatorname{rank}(ST) = n$.اگر $\operatorname{rank}(ST) = n$ آنگاه ST یک عملگر پوشا است پس $ST(V) = V$. حال طرفین تساوی اخیر را با ST ترکیب می‌کنیم.لذا:

$$(ST)^{2}(V) = ST(V) = V \Longrightarrow \operatorname{rank}(ST)^{2} = n$$

طبق مسالهٔ (۳۱) داریم $\operatorname{rank}(TS) = \operatorname{rank}(ST)^{2} = n$ و چون $\operatorname{rank}(TS) = n - 1$، لذا $n = n - 1$.که تناقض است.پس $\operatorname{rank}(ST) = n - 1$ و حکم ثابت است.

۳۳ـ الف.واضح است که $I - T$ خود توان است.

برای قسمت دوم (الف) ابتدا نشان می‌دهیم $\operatorname{Im}(T) = \ker(T - I)$.فرض کنید $y \in \operatorname{Im}(T)$ پس x عضو V وجود دارد که $y = T(x)$ لذا:

$$T(y) = T^{2}(x) = T(x) = y \Longrightarrow T(y) = y \Longrightarrow (T-I)y = 0 \Longrightarrow y \in \ker(T-I)$$

پس $\operatorname{Im}(T) \subseteq \ker(T - I)$.حال فرض کنید $v \in \ker(T - I)$ لذا $T(v) = v$ و چون $v = T(v) \in \operatorname{Im}(T)$ لذا $v \in \operatorname{Im}(T)$ بنابراین $\ker(T - I) \subseteq \operatorname{Im}(T)$.در نتیجه

$\ker(T-I) = \mathrm{Im}(T)$ پس $\dim(\ker(T-I)) = \mathrm{rank}(T)$.از طرفی:

$$n = \mathrm{rank}(T-I) + \dim(\ker(T-I)) = \mathrm{rank}(T-I) + \mathrm{rank}(T)$$

حال ثابت می‌کنیم $\mathrm{Im}(T-I) \cap \mathrm{Im}(T) = \{\circ\}$.فرض کنید $y \in \mathrm{Im}(T-I) \cap \mathrm{Im}(T)$ لذا عضوی مثل v از V وجود دارد که $y = (T-I)v$ و چون $y \in \mathrm{Im}(T)$ و $\ker(T-I) = \mathrm{Im}(T)$ پس $y \in \ker(T-I)$ لذا $(T-I)y = \circ$ پس $T(y) = y$.از طرفی $y = T(v) - v$ پس $T(y) = T^{\text{۲}}(v) - T(v)$ و چون $T^{\text{۲}} = T$ لذا:

$$y = T(y) = T^{\text{۲}}(v) - T(v) = \circ$$

در نتیجه $\mathrm{Im}(T-I) \cap \mathrm{Im}(T) = \{\circ\}$.حال با توجه به رابطه (۱) و نتیجه اخیر داریم:

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Im}(T) + \mathrm{Im}(T-I)) &= \dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T-I)) \\ &= \mathrm{rank}(T) + \mathrm{rank}(T-I) = n\end{aligned}$$

بنابراین $V = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Im}(T-I)$.

۳۴ـ ابتدا با استقراء روی k نشان می‌دهیم $T^k(v_k) = \circ$، برای $\text{۱} \leq k \leq n$.حالت $k = \text{۱}$ برقرار است زیرا $T(v_{\text{۱}}) = \circ$.حال فرض کنیم $\text{۱} < k < n$ و حکم برای k و کوچکتر از k برقرار باشد:

$$\begin{aligned}T^{k+\text{۱}}(v_{k+\text{۱}}) = T^k(T(v_{k+\text{۱}}) &= T^k(a_{k+\text{۱}}v_{\text{۱}} + \cdots + a_{k+\text{۱},k}v_k) \\ &= T^k(a_{k+\text{۱},\text{۱}}v_{\text{۱}}) + \cdots + T^k(a_{k+\text{۱},k}v_k) \\ &= a_{k+\text{۱},\text{۱}}T^{k-\text{۱}}(T(v_{\text{۱}})) + \cdots + a_{k+\text{۱},k}T^k(v_k) = \circ\end{aligned}$$

لذا حکم استقرا برقرار است.حال فرض کنید $\text{۱} \leq j \leq n$ داریم:

$$T^n(\alpha_j) = T^{n-j}(T^j(\alpha_j)) = T^{n-j}(\circ) = \circ$$

MATH75.IR

حال چون T^n همه اعضای مبنا را به صفر می‌برد لذا $T^n = 0$.

۳۵ـ ابتدا نشان می‌دهیم $\mathrm{Im}(T) \cap \ker(T) = \{0\}$.فرض کنید $y \in \mathrm{Im}(T) \cap \ker(T)$، چون $y \in \mathrm{Im}(T)$ لذا x از V وجود دارد که $y = T(x)$ و چون $y \in \ker(T)$ لذا $T(y) = 0$ پس $T(T(x)) = 0$ بنابراین $T^2(x) = 0$ لذا x عضوی از $\ker(T^2)$ است و چون $\ker(T) = \ker(T^2)$ پس x عضو $\ker(T)$ است.در نتیجه $y = T(x) = 0$.و داریم $\mathrm{Im}(T) + \ker(T) \subseteq V$.از طرفی:

$$\dim(\mathrm{Im}(T) + \ker(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T) \cap \ker(T))$$
$$= \mathrm{rank}(T) + \dim(\ker(T)) = \dim V$$

لذا $V = \mathrm{Im}(T) \oplus \ker(T)$.

۳۶ـ ابتدا نشان می‌دهیم $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.

فرض کنید $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)$، چون $y \in \mathrm{Im}(f)$ لذا x عضو A وجود دارد که $y = f(x)$ و چون $y \in \ker(g)$ لذا $g(y) = gf(x) = 0$ از طرفی $gf = I_A$ لذا $x = gf(x) = 0$ پس $y = f(0) = 0$ در نتیجه $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.

حال نشان می‌دهیم $B = \mathrm{Im}(f) + \ker(g)$.واضح است که $\mathrm{Im}(f) + \ker(g) \subseteq B$ لذا کافیست ثابت کنیم $B \subseteq \mathrm{Im}(f) + \ker(g)$.فرض کنید $x \in B$ پس $g(x) \in A$ و چون $gf = I_A$ پس $gf(g(x)) = g(x)$.در نتیجه:

$$gf(g(x)) - g(x) = 0 \Longrightarrow g(fg(x) - x) = 0 \Longrightarrow fg(x) - x \in \ker(g)$$

از طرفی $f(g(x)) \in \mathrm{Im}(f)$.در نتیجه:

$$x = fg(x) - (fg(x) - x) \in \mathrm{Im}(f) + \ker(g)$$

بنابراین $B \subseteq \mathrm{Im}(f) + \ker(g)$.

۳۷ـ قرار می‌دهیم $W_1 = \ker(T)$ و $W_2 = \mathrm{Im}(T)$.واضح است اگر $a \in W_1$ پس $T(a) = 0$.حال فرض کنید $b \in W_2$ پس x عضو V وجود دارد که $b = T(x)$ لذا:

$$T(b) = T(T(x)) = T^2(x) = T(x) = b$$

حال نشان می‌دهیم $V = W_1 \oplus W_2$.فرض کنید $y \in W_1 \cap W_2$، چون $y \in W_2$ پس x عضو V وجود دارد که $y = T(x)$ و چون $y \in W_1$ لذا $T(y) = 0$ بنابراین:

$$0 = T(y) = T(T(x)) = T^2(x) = T(x) = y$$

در نتیجه $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.از طرفی:

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2) &= \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_1 \cap W_2 \\ &= \dim W_1 + \dim W_2 = \dim(\ker(T)) + \mathrm{rank}(T) = \dim V\end{aligned}$$

و چون $W_1 + W_2 \subseteq V$ لذا $V = W_1 \oplus W_2$.

۳۸ـ قرار می‌دهیم:

$$W_1 = \{x \in V | T(x) = 0\}, W_2 = \{x \in V | T(x) = x\}, W_3 = \{x \in V | T(x) = -x\}$$

واضح است $W_1 + W_2 + W_3 \subseteq V$ حال نشان می‌دهیم $V \subseteq W_1 + W_2 + W_3$.فرض کنید $v \in V$، مسالهٔ را حل شده فرض می‌کنیم پس $a \in W_1$ و $b \in W_2$ و $c \in W_3$ وجود دارد که $V = a + b + c$ حال T را به طرفین رابطه اثر می‌دهیم.لذا:

$$T(v) = T(a + b + c) = T(a) + T(b) + T(c) = b - c \qquad (1)$$

T را به رابطه فوق اثر می‌دهیم.لذا:

$$T^{2}(v) = T(b-c) = T(b) - T(c) = b + c \qquad (2)$$

حال از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} T(v) = b - c \\ T^{2}(v) = b + c \end{cases} \Longrightarrow b = \frac{1}{2}(T(v) + T^{2}(v)), c = \frac{1}{2}(T^{2}(v) - T(v))$$

از طرفی $v = a + b + c$، در نتیجه:

$$v = a + \frac{1}{2}(T(v) + T^{2}(v)) + \frac{1}{2}(T^{2}(v) - T(v)) = a + T^{2}(v)$$
$$\Longrightarrow a = v - T^{2}(v)$$

حال واضح است $v = (v - T^{2}(v)) + \frac{1}{2}(T^{2}(v) + T(v)) + \frac{1}{2}(T^{2}(v) - T(v))$ از طرفی:

$$T(v - T^{2}(v)) = T(v) - T^{3}(v) = 0 \Longrightarrow v - T^{2}(v) \in W_1$$

$$T(\frac{1}{2}(T^{2}(v) + T(v)) = \frac{1}{2}(T^{3}(v) + T^{2}(v)) = \frac{1}{2}(T(v) + T^{2}(v))$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}(T(v) + T^{2}(v)) \in W_2$$

$$T(\frac{1}{2}(T^{2}(v) - T(v)) = \frac{1}{2}(T^{3}(v) - T^{2}(v)) = \frac{1}{2}(T(v) - T^{2}(v))$$
$$= -\frac{1}{2}(T^{2}(v) - T(v))$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}(T^{2}(v) - T(v)) \in W_3$$

در نتیجه $v \in W_1 + W_2 + W_3$ پس $V \subseteq W_1 + W_2 + W_3$.بنابراین $V = W_1 + W_2 + W_3$

حال فرض کنید $x \in W_1 \cap (W_2 + W_3)$، چون $x \in W_2 + W_3$ پس $b \in W_2$ و $c \in W_3$.

وجود دارد که $x = b + c$.از طرفی $x \in W_1$ پس $T(x) = 0$ بنابراین $T(b+c) = 0$ لذا $b - c = 0$.در نتیجه $b = c$.و چون $c \in W_3$ لذا $b \in W_3$ پس $T(b) = -b$ از طرفی $b \in W_2$ پس $T(b) = b$ و با مقایسه این دو رابطه داریم $b = -b$ که این نتیجه می‌دهد $b = 0$.لذا $c = b = 0$ بنابراین $x = b + c = 0$.پس $W_1 \cap (W_2 + W_3) = \{0\}$.و به همین ترتیب ثابت می‌شود که:

$$W_2 \cap (W_1 + W_3) = W_3 \cap (W_1 + W_2) = \{0\}$$

در نتیجه حاصل جمع مذکور مستقیم است، بنابراین $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

۳۹ـ با توجه به اینکه $T^{n-1} \neq 0$ پس عضوی از V مانند αوجود دارد که $T^{n-1}(\alpha) \neq 0$.نشان می‌دهیم $\{\alpha, T(\alpha), \cdots, T^{n-1}(\alpha)\}$ مستقل خطی است.فرض کنید:

$$\lambda_1\alpha + \lambda_2 T(\alpha) + \cdots + \lambda_n T^{n-1}(\alpha) = 0 \qquad (\lambda_i \in F, 1 \leq i \leq n) \quad (1)$$

حال T^{n-1} را با طرفین رابطه فوق ترکیب می‌کنیم.لذا:

$$T^{n-1}(\lambda_1\alpha + \lambda_2 T(\alpha) + \cdots + \lambda_n T^{n-1}(\alpha)) = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 T^{n-1}(\alpha) + \lambda_2 T^{n}(\alpha) + \cdots + \lambda_n T^{2(n-1)}(\alpha) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 T^{n-1}(\alpha) = 0$$

و چون $T^{n-1}(\alpha) \neq 0$ پس $\lambda_1 = 0$ پس در رابطه (۱) ضریب α صفر است حال طرفین رابطه (۱) را با T^{n-2} ترکیب می‌کنیم، لذا:

$$T^{n-2}(\lambda_2 T(\alpha) + \cdots + \lambda_n T^{n-1}(\alpha)) = 0 \Longrightarrow \lambda_2 T^{n-1}(\alpha) = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = 0$$

با تکرار این عمل داریم:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

لذا $\{\alpha, T(\alpha), \cdots, T^{n-1}(\alpha)\}$ مستقل خطی است و چون دارای n عضو است پس مبنایی برای V است.

حال نمایش ماتریسی T را نسبت به این مبنا بررسی می‌کنیم:

$$T(\alpha_1) = T(\alpha) = 0\alpha + T(\alpha) + 0T^2(\alpha) + \cdots + 0T^{n-1}(\alpha)$$

$$T(\alpha_2) = T^2(\alpha) = 0\alpha + 0T(\alpha) + T^2(\alpha) + \cdots + 0T^{n-1}(\alpha)$$

$$\vdots$$

$$T(\alpha_{n-1}) = T^{n-1}(\alpha) = 0\alpha + 0T(\alpha) + \cdots + T^{n-1}(\alpha)$$

$$T(\alpha_n) = T^n(\alpha) = 0\alpha + 0T(\alpha) + \cdots + 0T^{n-1}(\alpha)$$

پس نمایش ماتریسی T نسبت به این مبنا به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

۴۰ـ فرض کنید $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ مبنایی برای V باشد.چون $\operatorname{rank}(T) = 1$ پس $\operatorname{Im}(T)$ یک بعدی است فرض کنیم $\operatorname{Im}(T) = [v]$.پس برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم:

$$T(\alpha_i) = \lambda_i v \qquad (\lambda_i \in F)$$

از طرفی چون $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ مبنای V است پس اسکالرهای $b_1, b_2, \cdots, b_n$ موجودند

که، $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n$.در نتیجه:

$$T(\alpha_1) = \lambda_1 v = \lambda_1 b_1 \alpha_1 + \lambda_1 b_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_1 b_n \alpha_n$$

$$T(\alpha_2) = \lambda_2 v = \lambda_2 b_1 \alpha_1 + \lambda_2 b_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_2 b_n \alpha_n$$

$$\vdots$$

$$T(\alpha_n) = \lambda_n v = \lambda_n b_1 \alpha_1 + \lambda_n b_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_n b_n \alpha_n$$

لذا نمایش ماتریسی T به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 b_1 & \lambda_2 b_1 & \cdots & \lambda_n b_1 \\ \lambda_1 b_2 & \lambda_2 b_2 & \cdots & \lambda_n b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 b_n & \lambda_2 b_n & \cdots & \lambda_n b_n \end{pmatrix}$$

۴۱ـ با توجه به مسالهٔ (۱۲) اگر f و g دو عملگر خطی باشند و یکی از f یا g نامنفرد باشد آنگاه $\operatorname{rank}(fg) = \min\{\operatorname{rank}(f), \operatorname{rank}(g)\}$.حال چون $T+S$ نامنفرد است پس $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}T(T+S)$ از طرفی:

$$\operatorname{rank}T(T+S) = \operatorname{rank}(T^2 + TS) = \operatorname{rank}(S^2 + TS) = \operatorname{rank}(T+S)S$$

مجدداً چون $T+S$ نامنفرد است لذا $\operatorname{rank}S = \operatorname{rank}(T+S)S$ بنابراین $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(S)$.

حال با توجه به اینکه:

$$\operatorname{rank}(S) + \dim\ker(S) = \dim V \quad \text{و} \quad \operatorname{rank}(T) + \dim\ker(T) = \dim V$$

داریم:

$$\operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(S) + \dim\ker(T) + \dim\ker(S) = 2\dim V \qquad (*)$$

از طرفی:

$$\dim(\ker(T)+\ker(S)) = \dim\ker(T) + \dim\ker(S) + \dim(\ker(T)\cap\ker(S))$$

حال نشان می‌دهیم $\ker(T)\cap\ker(S) = \{0\}$.فرض کنید $x \in \ker(T)\cap\ker(S)$ پس $T(x) = S(x) = 0$ در نتیجه:

$$(T+S)(x) = T(x) + S(x) = 0 \Longrightarrow x \in \ker(T+S)$$

و چون $T+S$ نامنفرد است پس $\ker(T+S) = \{0\}$ در نتیجه $x = 0$.بنابراین:

$$\dim(\ker(T)+\ker(S)) = \dim(\ker(T)) + \dim\ker(S)$$

ولی $\ker(T)+\ker(S) \leq V$ پس $\dim(\ker(T)+\ker(S)) \leq \dim V$ و چون $\ker(T)\cap\ker(S) = \{0\}$ لذا $\dim(\ker(T)) + \dim\ker(S) \leq \dim V$.حال با توجه به نامساوی اخیر و رابطه $(*)$ داریم:

$$\begin{aligned} 2\dim V &= \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(S) + \dim\ker(T) + \dim\ker(S) \\ &\leq \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(S) + \dim V \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(S) + \dim V \geq 2\dim V \Longrightarrow \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(S) \geq \dim(V)$$

و چون $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(S)$ لذا:

$$\begin{aligned} &2\operatorname{rank}(S) = 2\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(S) \geq \dim V \\ &\Longrightarrow \operatorname{rank}(S) = \operatorname{rank}(T) \geq \frac{1}{2}\dim V \end{aligned}$$

۴۲ـ ابتدا با استقراء نشان می‌دهیم برای $1 \leq k \leq n-1$، $x_{k+1} = T^k(x_1)$.برای $k = 1$ واضح است، زیرا $x_2 = T(x_1)$.فرض کنید برای $1 < k < n-1$ برقرار باشد یعنی $x_{k+1} = T^k(x_1)$.حال T را به طرفین این رابطه اثر می‌دهیم.لذا

$$T(x_{k+1}) = T(T^k(x_1)) = T^{k+1}(x_1) \Longrightarrow x_{k+2} = T^{k+1}(x_1)$$

لذا حکم برای $k+1$ نیز برقرار است.در نتیجه $x_n = T^{n-1}(x_1)$ پس $T(x_n) = T^n(x_1)$ و چون $T(x_n) = x_1$ پس $T^n(x_1) = x_1$.حال فرض کنید $2 \leq k \leq n$ لذا:

$$T^n x_k = T^n(T^{k-1}(x_1)) = T^{k-1}(T^n(x_1)) = T^{k-1}(x_1) = x_k$$

پس برای هر $1 \leq k \leq n$، $T^n(x_k) = x_k$ لذا $T^n = I$.حال طبق آنچه که در ابتدای مسالهٔ اثبات شد $x_n = T^{n-1}(x_1)$ در نتیجه $T^{n-1} \neq I$.

حال نمایش ماتریسی T را نسبت به این مبنا بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
T(x_1) &= 0x_1 + x_2 + \cdots + 0x_n \\
T(x_2) &= 0x_1 + 0x_2 + x_3 + \cdots + 0x_n \\
&\vdots \\
T(x_n) &= x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n
\end{aligned}$$

لذا نمایش ماتریسی T به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

۴۳ـ با توجه به اینکه $T^۲ = T$ پس $\ker(T^۲) = \ker(T)$ و طبق مسالهٔ (۳۵) حکم برقرار است.

۴۴ـ ابتدا با استقراء نشان می‌دهیم برای $۱ \leq k \leq n$، $T^k(x_k) = ۰$. $k = ۱$ واضح است زیرا $T(x_۱) = ۰$. حال فرض کنیم حکم برای $۱ < k < n$ برقرار باشد یعنی $T^k(x_k) = ۰$ پس:

$$T^{k+۱}(x_{k+۱}) = T^k(T(x_{k+۱})) = T^k(x_k) = ۰$$

لذا حکم برای $k + ۱$ نیز برقرار است.

حال فرض کنید $۱ \leq k \leq n$ دلخواه باشد پس

$$T^n(x_k) = T^{n-k}(T^k(x_k)) = T^{n-k}(۰) = ۰$$

در نتیجه $T^n = ۰$. از طرفی:

$$T^{n-۱}(x_n) = T^{n-۲}(T(x_n)) = T^{n-۲}(x_{n-۱}) = \cdots = T(x_۲) = x_۱ \neq ۰$$

لذا $T^{n-۱} \neq ۰$.

۴۵ـ حکم را به استقراء روی k ثابت می‌کنیم. $k = ۱$ واضح است، فرض کنید $k > ۱$ و حکم برای k برقرار باشد.

$$(k + ۱)S^k(ST - TS) = kS^k(ST - TS) + S^k(ST - TS)$$

حال چون S با $ST - TS$ جا به جا می‌شود پس:

$$S^k(ST - TS) = S^{k-۱}(ST - TS)S$$

در نتیجه:

$$(k + ۱)S^k(ST - TS) = kS^{k-۱}(ST - TS)S + S^k(ST - TS)$$

حال با توجه به فرض استقراء، $kS^{k-1}(ST-TS)=S^kT-TS^k$، بنابراین:

$$\begin{aligned}(k+1)S^k(ST-TS) &= (S^kT-TS^k)S+S^k(ST-TS)\\ &= S^kTS-TS^{k+1}+S^{k+1}T-S^kTS\\ &= S^{k+1}T-TS^{k+1}\end{aligned}$$

لذا $(k+1)S^k(ST-TS)=S^{k+1}T-TS^{k+1}$ پس حکم ثابت است.

۴۶ـ نمایش ماتریسی T به صورت زیر است.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حال اگر سطر اول را به سطر دوم اضافه کنیم ماتریس پلکانی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حال چون ماتریس سطر صفر ندارد لذا $\operatorname{rank}(T)=3$.و چون فضا ۳ـبعدی است و $\operatorname{rank}(T)=3$ و با توجه به رابطه $\operatorname{rank}(T)+\dim\ker(T)=3$ داریم $\dim\ker(T)=0$.لذا $\ker(T)=\{0\}$.بنابراین هیچ بردار ناصفری مثل v وجود ندارد که $T(v)=0$.

۴۷ـ فرض کنید T تبدیل وابسته ماتریس A نسبت به مبنای $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ برای R^n باشد چون $A^2=I_n$ پس:

$$T^2=I \qquad \text{(} I \text{ عملگر همانی است)}$$

ابتدا نشان می‌دهیم $\ker(T-I)+\ker(T+I)=R^n$.

واضح است $\ker(T-I)+\ker(T+I)\subseteq R^n$.حال فرض کنید $v\in R^n$ دلخواه باشد.مسالهٔ را حل شده فرض می‌کنیم پس $a\in\ker(T-I)$ و $b\in\ker(T+I)$ وجود دارد که

$$v=a+b \qquad (۱)$$

حال T را به طرفین اثر می‌دهیم، پس:

$$T(v)=T(a+b)=a-b \qquad (۲)$$

حال با توجه به رابطه (۱) و (۲) داریم $a=\frac{1}{2}(v+T(v))$ و $b=\frac{1}{2}(v-T(v))$ واضح است که $v=\frac{1}{2}(v+T(v))+\frac{1}{2}(v-T(v))$.

از طرفی:

$$T(\frac{1}{2}(v+T(v))=\frac{1}{2}(T(v)+T^2(v)=\frac{1}{2}(T(v)+v)$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}(T(v)+v)\in\ker(T-I)$$
$$T(\frac{1}{2}(v-T(v))=\frac{1}{2}(T(v)-T^2(v))=\frac{1}{2}(T(v)-v)=-\frac{1}{2}(v-T(v))$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}(v-T(v))\in\ker(T+I)$$

بنابراین $v\in\ker(T-I)+\ker(T+I)$ پس $R^n\subseteq\ker(T-I)+\ker(T+I)$ در نتیجه:

$$R^n=\ker(T-I)+\ker(T+I) \qquad (۱)$$

حال نشان می‌دهیم $\ker(T-I)+\ker(T+I)=\{0\}$.

فرض کنید $x\in\ker(T-I)\cap\ker(T+I)$، چون $x\in\ker(T-I)$ پس $T(x)=x$

و چون $x \in \ker(T+I)$ لذا $T(x) = -x$ بنابراین $x = -x$ پس $x = ۰$.در نتیجه $\ker(T-I) \cap \ker(T+I) = \{۰\}$.

حال با توجه به رابطه (۱) و نتیجه اخیر داریم:

$$n = \dim R^n = \dim(\ker(T-I)+\ker(T+I)) = \dim\ker(T-I)+\dim\ker(T+I)$$

از طرفی:

$$\operatorname{rank}(T+I) + \dim\ker(T+I) = n$$

$$\operatorname{rank}(T-I) + \dim\ker(T-I) = n$$

با جمع دو رابطه فوق داریم:

$$\operatorname{rank}(T+I) + \operatorname{rank}(T-I) + \dim\ker(T+I) + \dim\ker(T-I) = ۲n$$

حال با توجه به اینکه $\dim\ker(T+I) + \dim\ker(T-I) = n$ در نتیجه:

$$\operatorname{rank}(T+I) + \operatorname{rank}(T-I) = n$$

حال چون A ماتریس وابسته T است لذا:

$$\operatorname{rank}(A+I_n) + \operatorname{rank}(A-I_n) = n$$

۴۸ـ اگر T نامنفرد باشد آنگاه قرار می‌دهیم $S = T^{-۱}$.اگر $T = ۰$ آنگاه S هر عملگری می‌تواند باشد.در غیر این دو صورت مسالهٔ را حل می‌کنیم.

فرض کنید $\{\alpha_۱, \cdots, \alpha_r\}$ مبنایی برای $\ker(T)$ باشد.آنرا به مبنای $\{\alpha_۱, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_n\}$ برای V توسعه می‌دهیم.مجموعه $\{T(\alpha_{r+۱}), \cdots, T(\alpha_n)\}$ مستقل خطی است زیرا اگر

$\lambda_{r+1}T(\alpha_{r+1})+\cdots+\lambda_n T(\alpha_n)=0$ که در آن ($\lambda_i \in F$، $r+1 \leq i \leq n$) [توجه شود که برای سهولت در محاسبات اندیس گذاری به طریقه فوق صورت گرفت] در نتیجه:

$$T(\lambda_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+\lambda_n\alpha_n)=0 \Longrightarrow \lambda_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+\lambda_n\alpha_n \in \ker(T)$$

پس اسکالرهای $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ وجود دارند که:

$$\lambda_{r+1}\alpha_{r+1}+\lambda_n\alpha_n=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r$$

$$\Longrightarrow \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r-\lambda_{r+1}\alpha_{r+1}-\cdots-\lambda_n\alpha_n=0$$

و چون $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ مستقل خطی می‌باشند، پس:

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$$

حال مجموعه مستقل $\{T(\alpha_{r+1}),\cdots,T(\alpha_n)\}$ را به مبنای

$$\{b_1,b_2,\cdots,b_r,T(\alpha_{r+1}),\cdots,T(\alpha_n)\}$$

برای V توسعه می‌دهیم و عملگر خطی S را این چنین تعریف می‌کنیم:

$$S(b_i)=0, \quad (1\leq i\leq r) \text{ و } S(T(\alpha_i))=\alpha_i, \quad (r+1\leq i\leq n)$$

واضح است که دو تبدیل T و TST روی مبنای $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n\}$ با هم برابرند لذا $TST=T$.

۴۹ـ فرض کنید T عملگر وابسته ماتریس A نسبت به مبنای استاندارد F^n باشد طبق مسالهٔ (۴۸) عملگری مثل S وجود دارد که $TST=T$ حال با ترکیب طرفین این رابطه با S از چپ داریم $TSTS=TS$ پس $(TS)^2=TS$.فرض کنید B ماتریس وابسته عملگر خطی S نسبت به مبنای استاندارد F^n باشد پس $(AB)^2=AB$.توجه شود چون S تبدیل ناصفر است پس B نیز

ناصفر است.

۵۰ـ الف. قضیه است.

ب. خیر، فرض کنید $T : R^۲ \to R^۲$ با ضابطه $T(x,y) = (y,۰)$ تعریف شود.داریم:

$$\left.\begin{array}{l} T(۰,۱) = (۱,۰) \Longrightarrow (۱,۰) \in \mathrm{Im}(T) \\ T(۱,۰) = (۰,۰) \Longrightarrow (۱,۰) \in \ker(T) \end{array}\right\} \Longrightarrow (۱,۰) \in \ker(T) \cap \mathrm{Im}(T)$$

۵۱ـ چون $\{\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_n\}$ یک مجموعه مستقل در یک فضای nـبعدی است پس مبنایی برای فضا می‌باشد. فرض کنید v عضو دلخواهی از فضا باشد لذا اسکالرهای $\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n$ موجودند که:

$$\begin{aligned} v &= \lambda_۱\alpha_۱ + \lambda_۲\alpha_۲ + \cdots + \lambda_n\alpha_n \\ \Longrightarrow F(v) &= F(\lambda_۱\alpha_۱ + \lambda_۲\alpha_۲ + \cdots + \lambda_n\alpha_n) \\ &= F(\lambda_۱\alpha_۱) + F(\lambda_۲\alpha_۲) + \cdots + F(\lambda_n\alpha_n) \\ &= \lambda_۱F(\alpha_۱) + \lambda_۲F(\alpha_۲) + \cdots + \lambda_nF(\alpha_n) \\ &= \lambda_۱\alpha_۱ + \lambda_۲\alpha_۲ + \cdots + \lambda_n\alpha_n = v \end{aligned}$$

پس $F(v) = v$ و چون v عضو دلخواهی از فضای برداری بود پس F عملگر همانی است.

۵۲ـ فرض کنید T عملگر وابسته ماتریس A نسبت به مبنای استاندارد F^n باشد چون $\mathrm{rank}(A) = ۱$ پس $\mathrm{rank}(T) = ۱$ از طرفی:

$$\mathrm{rank}(T) + \dim\ker(T) = \dim F^n = n$$

در نتیجه $\dim\ker(T) = n - ۱$.حال چون T ناصفر است پس $v_۱ \in F^n$ وجود دارد که $T(v_۱) \neq ۰$ فرض کنید $v_۲ = T(v_۱)$ پس $T(v_۲) = T^۲(v_۱) = ۰$.لذا $v_۲$ عضوی از

$\ker(T)$ است حال $\{v_۲\}$ را به مبنای $\{v_۲, v_۳, \cdots, v_n\}$ برای $\ker(T)$ توسعه می‌دهیم.و چون $v_۱ \notin \ker(T)$ پس $\{v_۱, v_۲, \cdots, v_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی است لذا مبنایی برای F^n می‌باشد، از طرفی:

$$T(v_۱) = v_۲, T(v_k) = ۰ \qquad k = ۲, ۳, \cdots, n$$

لذا ماتریس نمایش T نسبت به این مبنا به صورت زیر است.

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \end{pmatrix}$$

حال چون A نیز ماتریس نمایش T نسبت به یک مبنای دیگر است لذا A با ماتریس مذکور متشابه است.(قضیه)

۵۳ـ ابتدا فرض کنیم $\ker(T) = \operatorname{Im}(S)$ پس $\dim\ker(T) = \operatorname{rank}(S)$ از طرفی:

$$\dim\ker(T) + \operatorname{rank}(T) = n \Longrightarrow \operatorname{rank}(S) + \operatorname{rank}(T) = n$$

برعکس، فرض کنید $\operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(S) = n$.با توجه به اینکه $TS = ۰$ پس به ازاء هر v عضو V، $TS(v) = ۰$ لذا

$$\operatorname{Im}(S) \subseteq \ker(T) \qquad (۱)$$

از طرفی:

$$\operatorname{rank}(T) + \dim\ker(T) = n$$

و طبق فرض $\operatorname{rank}(T)+\operatorname{rank}(S)=n$.حال با مقایسه این دو رابطه داریم $\operatorname{rank}(S)=\dim\ker(T)$ و ثابت کردیم که $\operatorname{Im}(S)\subseteq\ker(T)$، لذا

$$\operatorname{Im}(S)=\ker(T)$$

۵۴ـ با توجه به اینکه $\operatorname{rank}(T)+\dim\ker(T)=\dim V$ و $\operatorname{rank}(T^{2})+\dim\ker(T^{2})=\dim V$ داریم:

$$\operatorname{rank}(T)+\dim\ker(T)=\operatorname{rank}(T^{2})+\dim\ker(T^{2})$$

طبق فرض $\operatorname{rank}(T)=\operatorname{rank}(T^{2})$، در نتیجه:

$$\dim\ker(T)=\dim\ker(T^{2})$$

از طرفی واضح است که $\ker(T)\subseteq\ker(T^{2})$ پس $\ker(T)=\ker(T^{2})$.حال فرض کنید $y\in\operatorname{Im}(T)\cap\ker(T)$، چون y عضو $\operatorname{Im}(T)$ است پس x عضو V که $y=T(x)$ و چون $y\in\ker(T)$ لذا $T(y)=0$.پس $T^{2}(x)=T(y)=0$ بنابراین $x\in\ker(T^{2})$ از طرفی $\ker(T)=\ker(T^{2})$ پس $x\in\ker(T)$ لذا $y=T(x)=0$.در نتیجه $\ker(T)\cap\operatorname{Im}(T)=\{0\}$.

۵۵ـ ابتدا نشان می‌دهیم ϕ_B خطی است.فرض کنید $A,C\in M(n,F)$ و $\lambda\in F$.

$$\phi_B(A+\lambda C)=(A+\lambda C)B-B(A+lC)$$

$$=AB+\lambda CB-BA-\lambda BC$$

$$AB-BA+\lambda(CB-BC)=\phi_B(A)+\lambda\phi_B(C)$$

لذا ϕ_B خطی است.

داریم که $\phi_B(B)=B^{2}-B=0$.اگر B ناصفر باشد آنگاه$\ker(\phi_B)\neq\{0\}$ لذا ϕ_B معکوس

پذیر نیست پس ماتریس وابسته آن نسبت به هر مبنا نیز منفرد است لذا دترمینان آن صفر است.و اگر B صفر باشد آنگاه $\phi_B = \circ$ پس ماتریس آن در هر مبنا، ماتریس صفر است.

۵۶ـ چون σ یک عملگر خطی است کافی است ثابت کنیم $\ker(\sigma) = \{\circ\}$.

فرض کنید $x \in \ker(\sigma)$ لذا $\sigma(x) = \circ$ از طرفی $||\sigma(x)|| \geq m||x||$ در نتیجه $m||x|| \leq \circ$ و چون m مثبت است پس $||x|| = \circ$.بنابراین $x = \circ$ لذا $\ker(\sigma) = \{\circ\}$.

۵۷ـ الف. σ را بر اعضای مبنای $B_۲$ اثر می‌دهیم:

$$\sigma(۲,۱) = (۲,۱)$$

$$\sigma(۱,-۲) = (-۱,۲) = -(۱,-۲)$$

لذا نمایش ماتریسی σ نسبت به مبنای $B_۲$ به صورت زیر است.

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & -۱ \end{pmatrix}$$

ب. اثر σ بر اعضای $B_۲$ را به صورت ترکیبی از اعضاء $B_۱$ می‌نویسیم:

$$\sigma(۲,۱) = (۲,۱) = ۲(۱,\circ) + (\circ,۱)$$

$$\sigma(۱,-۲) = (-۱,۲) = -(۱,\circ) + ۲(\circ,۱)$$

پس ماتریس تغییر مختصات به صورت زیر است:

$$P = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

حال اگر ماتریس معرف σ نسبت به مبنای $B_۱$ را B بنامیم آنگاه $B = P^{-۱}AP$.

ج. خطوطی از مبدأ که امتدادشان توسط σ حفظ می‌شود خطوطی می‌باشند که بوسیلهٔ بردارهای

ویژه σ تولید می‌شوند.(بررسی کنید)

۵۸ـ مسالهٔ اشتباه است، به مثال زیر توجه کنید:

$$T : R^{3} \to R^{3}$$

$$T(x, y, z) = (0, x, y)$$

واضح است که $\operatorname{rank}(T^{3}) = 0$ و $\operatorname{rank}(T) = 2$ و $\dim\ker(T) = 1$.

۵۹ـ بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد شود فرض کنید $n > m$.

T را تبدیل خطی وابسته ماتریس A نسبت به مبناهای استاندارد R^{n} و R^{m} فرض می‌کنیم.پس $T : R^{n} \to R^{m}$.داریم:

$$n = \dim R^{n} = \operatorname{rank}(T) + \dim\ker(T)$$

حال چون $T(R^{n}) \subseteq R^{m}$ پس $\operatorname{rank}(T) \leq m$ در نتیجه $\dim\ker(T) \geq n - m$.لذا $\ker(T) \neq \{0\}$ پس $0 \neq v \in R^{n}$ وجود دارد که $T(v) = 0$.حال چون A ماتریس وابسته T است لذا $Av = 0$ در نتیجه $A^{t}Av = 0$.حال اگر $A^{t}A$ وارون‌پذیر باشد با ضرب طرفین نتیجه فوق در $(A^{t}A)^{-1}$ از چپ داریم که $v = 0$ که تناقض است.

۶۰ـ ابتدا فرض کنید $W_{1} = W_{2}$ لذا:

$$W_{1}^{\circ} = \{f : V \to F | f(\alpha) = 0 \, \forall\alpha \in W_{1}\}$$

$$= \{f : V \to F | f(\alpha) = 0 \, \forall\alpha \in W_{2}\} = W_{2}^{\circ}$$

بر عکس، فرض کنید $W_{1}^{\circ} = W_{2}^{\circ}$ ولی $W_{1} \neq W_{2}$.پس یکی از این دو زیر فضا عضوی دارد که در دیگری نیست بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد شود فرض می‌کنیم $x \in W_{1}$ و $x \notin W_{2}$.فرض کنید $\{\alpha_{1}, \alpha_{2}, \cdots, \alpha_{r}\}$ مبنایی برای W_{2} باشد چون $x \notin W_{2}$ لذا $\{x, \alpha_{1}, \alpha_{2}, \cdots, \alpha_{r}\}$ یک

مجموعه مستقل خطی است حال آنرا به مبنای $\{x, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, b_1, b_2, \cdots, b_s\}$ برای V توسعه می‌دهیم.[توجه شود اگر $n = r + 1$ دیگر نیازی به توسعه نبود و خود $\{x, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ مبنایی برای V بود.]

حال تبدیل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = 1, f(\alpha_i) = 0 \quad (1 \leq i \leq r), \quad f(b_i) = 0 \quad (1 \leq j \leq s)$$

چون f روی W_2 صفر است پس $f \in W_2^\circ$.از طرفی $W_1^\circ = W_2^\circ$ لذا $f \in W_1^\circ$ یعنی f روی اعضای W_1 صفر است که این تناقض است زیرا $x \in W_1$ و $f(x) = 1$.در نتیجه $W_1 = W_2$ و حکم ثابت است.

۶۱ـ واضح است:

$$\ker(T) \subseteq \ker(T^2) \subseteq \ker(T^3) \subseteq \cdots$$

نشان می‌دهیم این زنجیر سرانجام متوقف می‌شود.اگر این زنجیر متوقف نشود پس عضوی مثل $\ker(T^{m_1})$ دارد که $\ker(T) \subsetneqq \ker(T^{m_1})$ حال مجدداً به دلیل فوق عضوی مثل $\ker(T^{m_2})$ وجود دارد که $\ker(T^{m_1}) \subsetneqq \ker(T^{m_2})$.

با ادامه این عمل تا مرحله nام زنجیر زیر حاصل می‌شود:

$$\ker(T) \subsetneqq \ker(T^{m_1}) \subsetneqq \ker(T^{m_2}) \subsetneqq \cdots \subsetneqq \ker(T^{m_n})$$

بنابراین:

$$\dim \ker(T) < \dim \ker(T^{m_1}) < \dim \ker(T^{m_2}) < \cdots < \dim \ker(T^{m_n})$$

و با توجه به اینکه همه نامساویهای فوق اکید هستند لذا $\dim \ker(T^{m_n}) > n$.این تناقض است زیرا $\ker(T^{m_n}) \subseteq V$ و $\dim V = n$.در نتیجه زنجیر مذکور متوقف می‌شود پس عدد طبیعی

r وجود دارد که:

$$\ker(T^m) = \ker(T^{m+1}) \qquad (m \geq r) \qquad (1)$$

از طرفی واضح است:

$$\operatorname{Im}(T) \supseteq \operatorname{Im}(T^2) \supseteq \operatorname{Im}(T^3) \supseteq \cdots$$

این زنجیر نیز سرانجام متوقف می‌شود.(استدلال مانند حالت قبل است) پس عدد طبیعی مثل s وجود دارد که:

$$\ker(T^m) = \ker(T^{m+1}) \qquad (m \geq s) \qquad (2)$$

حال قرار می‌دهیم $k = \max\{r, s\}$ و با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\ker(T^m) = \ker(T^{m+1}), \operatorname{Im}(T^m) = \operatorname{Im}(T^{m+1}), \qquad (m \geq k)$$

حال با توجه به اینکه $N = \cup_{m=1}^{\infty} \ker(T^m)$ و $R = \cap_{m=1}^{\infty} T^m(V)$ واضح است که $N = \ker(T^k)$ و $R = T^k(V)$.و داریم:

$$\dim \ker(T^k) + \operatorname{rank}(T^k) = n$$

پس کافی است نشان دهیم $R \cap N = \{0\}$.فرض کنید $y \in R \cap N$، چون $y \in R$ پس x عضو V وجود دارد که $y = T^k(x)$ و چون $y \in N$ لذا $T^k(y) = 0$.بنابراین:

$$0 = T^k(y) = T^k(T^k(x)) = T^{2k}(x) \Longrightarrow x \in \ker(T^{2k})$$

ازطرفی $\ker(T^k) = \ker(T^{2k})$ (باتوجه به رابطه(۱)).پس $x \in \ker(T^k)$ لذا $y = T^k(x) = 0$

در نتیجه $V = R \oplus N$.

۶۲ـ فرض کنید $\{v_1, v_2, v_3\}$ پایه‌ای برای V باشد اگر این پایه بخواهد پایه دوگان $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ باشد باید:

$$\phi_1(v_1) = 1, \phi_1(v_2) = \phi_1(v_3) = 0$$

$$\phi_2(v_2) = 1, \phi_2(v_1) = \phi_2(v_3) = 0$$

$$\phi_3(v_3) = 1, \phi_3(v_1) = \phi_3(v_2) = 0$$

قرار می‌دهیم $v_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ، $v_2 = b_0 + b_1x + b_2x^2$ و $v_3 = c_0 + c_1x + c_2x^2$ و ضرائب را طوری به دست می‌آوریم که روابط مذکور برقرار باشد.

$$\begin{cases} \phi_1(v_1) = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = 1 \\ \phi_2(v_1) = a_1 + 2a_2 = 0 \\ \phi_3(v_1) = a_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = -\frac{3}{2} \\ a_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow v_1 = 3x - \frac{3}{2}x^2$$

$$\begin{cases} \phi_1(v_2) = b_0 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{3}b_2 = 0 \\ \phi_2(v_2) = b_1 + 2b_2 = 1 \\ \phi_3(v_2) = b_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_1 = -\frac{1}{2} \\ b_2 = -\frac{3}{4} \\ b_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow v_2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2$$

$$\begin{cases} \phi_1(v_3) = c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = 0 \\ \phi_2(v_3) = c_1 + 2c_2 = 0 \\ \phi_3(v_3) = c_0 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = -3 \\ c_2 = \frac{3}{2} \\ c_0 = 1 \end{cases} \Longrightarrow v_3 = 1 - 3x - \frac{3}{2}x^2$$

در نتیجه $\{3x - \frac{3}{2}x^2, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2, 1 - 3x - \frac{3}{2}x^2\}$ پایه دوگان $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ است.

۶۳ـ الف. با استقراء به راحتی می‌توان نشان داد که $T^k(\alpha_1) = \alpha_{k+1} (1 \leq k \leq n-1)$ پس $T^{n-1}(\alpha_1) = \alpha_n$ در نتیجه $T^n(\alpha_1) = T(\alpha_n) = 0$ حال فرض کنید $2 \leq i \leq n$:

$$T^n(\alpha_i) = T^n(T^{i-1}(\alpha_1)) = T^{i-1}(T^n(\alpha_1)) = T^{i-1}(0) = 0$$

در نتیجه $T^n = 0$ و با توجه به اینکه $T^{n-1}(\alpha_1) = \alpha_n$ پس $T^{n-1} \neq 0$. برای به دست آوردن ماتریس نمایش T نسبت به این مبنا داریم:

$$T(\alpha_1) = \alpha_2 = 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + \cdots + 0\alpha_n$$

$$T(\alpha_2) = \alpha_3 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + \cdots + 0\alpha_n$$

$$\vdots$$

$$T(\alpha_{n-1}) = \alpha_n = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + \cdots + 1\alpha_n$$

$$T(\alpha_n) = 0 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + \cdots + 0\alpha_n$$

لذا نمایش ماتریسی T به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ب. چون $S^{n-1} \neq 0$ پس b عضو V وجود دارد که $S^{n-1}(b) \neq 0$، تعریف می‌کنیم:

$$b_1 = b, b_2 = S(b_1), b_3 = S(b_2), \cdots, b_n = S(b_{n-1})$$

مجموعه $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ یک پایه‌ای برای V است.(مسالهٔ (۳۹) را ببینید)

برای به دست آوردن نمایش ماتریسی T نسبت به این مبنا داریم:

$$S(b_1) = b_2 = 0b_1 + 1b_2 + 0b_3 + \cdots + 0b_n$$

$$S(b_2) = b_3 = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3 + \cdots + 0b_n$$

$$\vdots$$

$$S(b_n) = S^n(b) = 0 = 0b_1 + 0b_2 + 0b_3 + \cdots + 0b_n$$

لذا نمایش ماتریسی S به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

که همان ماتریس نمایش T نسبت به پایه B است.

ج. فرض کنید T تبدیل وابسته M به مبنای استاندارد R^n باشد و S تبدیل وابسته N نسبت به مبنای استاندارد R^n باشد پس ($T^n = 0$ و $T^{n-1} \neq 0$) و ($S^n = 0$ و $S^{n-1} \neq 0$).طبق قسمت (ب) مبنایی برای R^n وجود دارد که نمایش ماتریس T نسبت به این مبنا به صورت A می‌باشد و چون A و M ماتریس‌های نمایش یک عملگر خطی می‌باشند لذا متشابهند پس ماتریس نامنفرد P وجود دارد که $A = PMP^{-1}$ مجدداً با دلیلی که ذکر شد ماتریس نامنفرد Q وجود دارد که $A = QNQ^{-1}$.در نتیجه:

$$PMP^{-1} = QNQ^{-1} \Longrightarrow M = P^{-1}QNQ^{-1}P = (Q^{-1}P)^{-1}NQ^{-1}P$$

پس M و N متشابهند.

۶۴ـ چون T یک عملگر خطی غیر صفر است پس لازم است که $n \geq 2$.به آسانی با استقراء روی m نشان داده می‌شود که برای $1 \leq m \leq n-1$، $T^m(\alpha_1) = \alpha_{m+1}$.حال نشان می‌دهیم که $T^n = 0$ و $T^{n-1} \neq 0$.با توجه به رابطهٔ استقرائی $T^{n-1}(\alpha_1) = \alpha_n$ و با اثر T بر طرفین داریم:

$$T(T^{n-1}(\alpha_1)) = T(\alpha_n) = 0 \Longrightarrow T^n(\alpha_1) = 0$$

حال اگر $2 \leq m \leq n$ باشد:

$$T^n(\alpha_m) = T^n(T^{m-1}(\alpha_1)) = T^{m-1}(T^n(\alpha_1)) = T^{m-1}(0) = 0$$

در نتیجه $T^n = 0$.و چون $T^{n-1}(\alpha_1) = \alpha_n$ پس $T^{n-1} \neq 0$.

حال فرض کنید عملگر خطی $S : V \to V$ وجود داشته باشد به طوری که $T = S^k$.چون $T^n = 0$ پس $S^{kn} = 0$ لذا S در چندجمله‌ای x^{kn} صدق می‌کند حال اگر $m(x)$ چند جمله‌ای مینیمال S باشد پس $m(x)|x^{kn}$ و چون درجهٔ $m(x)$ از n نابیشتر است پس $m(x) = x^L$ که $(L \leq n)$.حال چون $m(S) = 0$ پس $S^L = 0$ در نتیجه $S^n = 0$.از طرفی $T^{n-1} = S^{k(n-1)}$.و چون $n \geq 2$ پس $k(n-1) \geq 2(n-1) \geq n$ لذا $S^{k(n-1)} = 0$، در نتیجه $T^{n-1} = 0$ که تناقض است.

۶۵ـ واضح است که $W = \ker(T-I)$.نشان می‌دهیم $\operatorname{Im}(T-I) \subseteq W$ فرض کنید $y \in \operatorname{Im}(T-I)$ پس x عضو V وجود دارد که $y = T(x) - x$ در نتیجه:

$$T(y) = T(T(x) - x) = T^2(x) - T(x) = x - T(x) = -y$$

از طرفی مشخصه F برابر ۲ است پس $2y = 0$ لذا $y + y = 0$ یعنی $-y = y$.بنابراین $T(y) = y$ در نتیجه $y \in W$ پس $\operatorname{Im}(T-I) \subseteq W$.لذا:

$$\operatorname{rank}(T-I) \leq \dim W \qquad (1)$$

داریم: $\operatorname{rank}(T-I)+\dim\ker(T-I)=n$ و چون $\ker(T-I)=W$ پس $\dim\ker(T-I)=\dim W$ لذا:

$$\operatorname{rank}(T-I)+\dim(W)=n$$

حال با توجه به رابطه (۱) و رابطه اخیر داریم:

$$\dim W+\dim W\geq n\Longrightarrow \dim W\geq \frac{n}{۲}$$

۶۶ـ کافیست در مسالهٔ (۱۰) قرار دهید $W=T(V)$ لذا:

$$\dim(\ker(T)\cap T(V))=\dim(T(V))-\dim T^{۲}(V))=\operatorname{rank}(T)-\operatorname{rank}(T^{۲})$$

۶۷ـ فرض کنید $S,T\in M$ و λ یک اسکالر باشد اگر u عضو دلخواه از U باشد

$$(S+\lambda T)u=S(u)+\lambda T(u)=\circ\Longrightarrow (S+\lambda T)U=\circ$$

$S+\lambda T$ عضوی از A است.لذا A زیر فضای $L(V,W)$ است.فرض کنید $\{\alpha_۱,\alpha_۲,\cdots,\alpha_r\}$ مبنایی برای U باشد آنرا به مبنای $\alpha=\{\alpha_۱,\alpha_۲,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_n\}$ برای V توسعه می‌دهیم و γ را یک مبنای W در نظر بگیرید.تابع $f:L(V,W)\to M(m\times n,F)$ با ضابطهٔ $f(T)=M_\alpha^\gamma(T)$ که در آن $M_\alpha^\gamma(T)$ ماتریس وابسته T نسبت به دو مبنای مذکور است.f یک تبدیل خطی، یک به یک و پوشاست.(این مطلب به عنوان قضیه در اکثر کتب جبر خطی اثبات شده است) فرض کنید B زیر فضای $M(m\times n,F)$ متشکل از ماتریس‌هایی است که r ستون اول آنها صفر است نشان می‌دهیم $f|_A:A\to B$ یک به یک و پوشاست.

ابتدا فرض کنید $S,T\in A$ و $f(T)=f(S)$.چون f روی $L(V,W)$ یک به یک است پس $S=T$.حال فرض کنید C ماتریسی $m\times n$ باشد که r ستون اول آن صفر است چون

$C \in M(m \times n, F)$ پس $T \in L(V,W)$ وجود دارد که $f(T) = C$ حال نشان می‌دهیم $T \in A$ یعنی $T(U) = \circ$.فرض کنید $1 \leq i \leq r$ دلخواه باشد، لذا:

$$T(\alpha_i) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_r e_r + \cdots + \lambda_m e_m$$

که در آن $\gamma = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ مبنای W است و λ_iها اسکالر می‌باشند.واضح است بردار ستونی $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ همان ستون iام ماتریس C است و چون r ستون اول ماتریس C صفر است، بنابراین:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = \circ \Longrightarrow T(\alpha_i) = \circ$$

ولی $1 \leq i \leq r$ دلخواه بود پس $T(\alpha_1) = T(\alpha_2) = \cdots = T(\alpha_r) = \circ$.لذا $T(U) = \circ$ در نتیجه $T \in A$.پس $f|_A$ پوشا نیز هست، لذا A و B ایزومورفند بنابراین $\dim(B) = \dim(A)$.از طرفی B فضای ماتریس‌هایی است که r ستون اول آنها صفر است واضح است که $\dim(B) = m \times (n - r)$.در نتیجه $\dim(A) = m \times (n - r)$.

۶۸ـ فرض کنید $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ مبنای استاندارد F^n باشد و T عملگر وابسته ماتریس A نسبت به مبنای استاندارد باشد، لذا:

$$T(\alpha_1) = \circ, T(\alpha_2) = \alpha_1, T(\alpha_3) = \alpha_2, \cdots, T(\alpha_n) = \alpha_{n-1}$$

حال اگر B ماتریسی باشد که $AB = BA$ و $B = (a_{ij})$ و S عملگر وابسته ماتریس B نسبت به مبنای استاندارد F^n باشد، پس $ST = TS$ و در ضمن:

$$S(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\alpha_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

داریم: $ST(\alpha_1) = TS(\alpha_1)$، از طرفی:

$$ST(\alpha_1) = S(0) = 0$$
$$TS(\alpha_1) = T(\sum_{j=1}^{n} a_{j1}\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{j1}T(\alpha_j) = \sum_{j=2}^{n} a_{j1}\alpha_{j-1}$$

پس $\sum_{j=2}^{n} a_{j1}\alpha_{j-1} = 0$ و چون $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$مستقل خطی است لذا:

$$a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1} = 0 \qquad (*)$$

حال فرض کنید $2 \leq i \leq n$ داریم: $ST(\alpha_i) = TS(\alpha_i)$.از طرفی

$$ST(\alpha_i) = S(\alpha_{i-1}) = \sum_{j=1}^{n} a_{j(i-1)}\alpha_j$$
$$TS(\alpha_i) = T(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}T(\alpha_j) = \sum_{j=2}^{n} a_{ji}\alpha_{j-1}$$

در نتیجه:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j(i-1)}\alpha_j = \sum_{j=2}^{n} a_{ji}\alpha_{j-1} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{(j+1)i}\alpha_j$$

و چون $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ مستقل خطی است، لذا:

$$a_{j(i-1)} = a_{(j+1)i} \qquad i = 2, 3, \cdots, n, j = 1, 2, \cdot, n-1$$

حال فرض کنید $2 \leq i, j \leq n$ داریم:

$$a_{ji} = a_{((j-1)+1)i} = a_{(j-1)(i-1)}$$

پس اگر $i > j$ آنگاه

$$a_{ji} = a_{(j-1)(i-1)} = \cdots = a_{j-(i-1),1}$$

حال چون $j-i>0$ پس $j-i\geq 1$ لذا $j-(i-1)\geq 2$ و طبق رابطه $(*)$، $a_{j-(i-1),1}=0$
در نتیجه $a_{ji}=0$، بنابراین:

$$S(\alpha_i)=a_{1i}\alpha_1+a_{2i}\alpha_2+\cdots+a_{ii}\alpha_i \qquad (1\leq i\leq n)$$

و مجدداً با استفاده از رابطه $a_{ji}=a_{(j-1)(i-1)}$ داریم:

$$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$$

حال نشان می‌دهیم $S=a_{11}I+a_{12}T+\cdots+a_{1n}T^{n-1}$.
فرض کنید $\alpha_j(1\leq j\leq n)$ عضوی دلخواه از مبنا باشد و $1\leq k\leq n-1$ اگر $k<j$

$$T(\alpha_j)=\alpha_{j-1}\Longrightarrow T^2(\alpha_j)=\alpha_{j-2}\Longrightarrow\cdots\Longrightarrow T^k(\alpha_j)=\alpha_{j-k}$$

و واضح است برای $k\geq j$ داریم $T^k(\alpha_j)=0$، پس:

$$(a_{11}I+a_{12}T+\cdots+a_{1n}T^{n-1})(\alpha_j)=a_{11}\alpha_j+a_{12}\alpha_{j-1}+\cdots+a_{1j}\alpha_1$$

از طرفی:

$$a_{11}=a_{ii}$$

$$a_{12}=a_{23}=\cdots=a_{(j-1)j}$$

$$a_{13}=a_{24}=\cdots=a_{(j-2)j}$$

$$\vdots$$

$$a_{1(j-1)}=a_{2j}$$

بنابراین:

$$a_{11}\alpha_j + a_{12}\alpha_{j-1} + \cdots + a_{1j}\alpha_1 = a_{jj}\alpha_j + a_{(j-1)j}\alpha_{j-1} + \cdots + a_{1j}\alpha_1 = S(\alpha_j)$$

در نتیجه:

$$(a_{11}I + a_{12}T + \cdots + a_{1n}T^{n-1})(\alpha_j) = S(\alpha_j)$$

و چون $\alpha_j(1 \leq j \leq n)$ عضوی دلخواه از پایه بود.پس:

$$a_{11}I + a_{12}T + \cdots + a_{1n}T^{n-1} = S$$

حال چون A ماتریس وابسته T و B ماتریس وابسته S است لذا:

$$a_{11}I_n + a_{12}A + \cdots + a_{1n}A^{n-1} = B \qquad (2)$$

پس هر ماتریسی که با A جا به جا شود نمایشی به صورت فوق دارد.از طرفی واضح است که هر ماتریسی با نمایشی به صورت $\alpha_1 I_n + \alpha_2 A + \cdots + \alpha_n A^{n-1}$، با ماتریس A جا به جا می‌شود.

۶۹ـ واضح است: $\ker(T) \subseteq \ker(T^2) \subseteq \ker(T^3) \subseteq \cdots$ حال چون هر زنجیر صعودی از زیر فضاهای V سرانجام متوقف می‌شود پس عدد طبیعی m وجود دارد که:

$$\ker(T^n) = \ker(T^{n+1}) \qquad (n \geq m)$$

حال فرض کنید $y \in \ker(T^m)$.چون T پوشاست لذا T^m پوشاست زیرا $T(V) = V$ پس $T^2(V) = T(V) = V$ و ... و $T^m(V) = \cdots = T(V) = V$.پس $x \in V$ وجود دارد که $y = T^m(x)$.از طرفی $T^m(y) = 0$ لذا $T^{2m}(x) = T^m(y) = 0$ پس $x \in \ker(T^{2m})$ و چون $\ker(T^m) = \ker(T^{2m})$ لذا $x \in \ker(T^m)$.در نتیجه $y =$

$T^m(x) = 0$.بنابراین $\ker(T^m) = \{0\}$ از طرفی $\ker(T) \subseteq \ker(T^m) = \{0\}$ پس $\ker(T) = \{0\}$ لذا T یک به یک است.

۷۰ـ مسالهٔ (۶۱) را ببینید.

۷۱ـ حکم را به استقراء روی n ثابت می‌کنیم.

اگر $n = 1$ لذا $0 \to V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \to 0$ و چون f_1 یک به یک و پوشاست.پس V_1 با V_2 ایزومورف است لذا $\dim V_1 = \dim V_2$ در نتیجه $\dim V_2 - \dim V_1 = 0$.

حال فرض کنید $n > 1$ و حکم برای $n - 1$ برقرار باشد و رشته زیر دقیق باشد.

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} V_{n+1} \to 0 \qquad (1)$$

فرض کنید $W = \operatorname{Im}(f_{n-1})$.حال رشته زیر را در نظر بگیرید.

$$0 \to V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \to \cdots \to V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} W \qquad (*)$$

در رشته فوق f_1 یک به یک و f_{n-1} پوشا است و $\operatorname{Im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$ لذا رشته $(*)$ دقیق است و طبق فرض استقراء داریم:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \dim V_i + (-1)^n \dim W = 0 \qquad (2)$$

ولی طبق فرض $W = \operatorname{Im}(f_{n-1})$ و چون رشته (۱) دقیق است پس $\operatorname{Im}(f_{n-1}) = \ker f_n$ لذا $W = \ker(f_n)$ پس $\dim W = \dim\ker(f_n)$.از طرفی $f_n : V_n \to V_{n+1}$ یک تبدیل خطی پوشاست و داریم

$$\dim\ker(f_n) + \operatorname{rank}(f_n) = \dim V_n$$

حال چون f_n پوشاست لذا $\operatorname{rank}(f_n) = \dim V_{n+1}$ پس:

$$\dim\ker(f_n) + \dim V_{n+1} = \dim V_n$$

و داریم که $\dim W = \dim \ker(f_n)$، در نتیجه:

$$\dim W = \dim V_n - \dim V_{n+1}$$

حال با جایگذاری رابطه اخیر در رابطه (۲) داریم:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \dim V_i + (-1)^n(\dim V_n - \dim V_{n+1}) = 0 \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \dim V_i + (-1)^n \dim V_n + (-1)^{n+1} \dim V_{n+1} = 0 \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i \dim V_i = 0
\end{aligned}$$

لذا حکم برقرار است.

۷۲ـ فرض کنید $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ مبنایی برای فضای V روی میدان F باشد.قرار می‌دهیم $U = [v_2, \cdots, v_n]$.برای هر λ عضو میدان F تعریف می‌کنیم

$$\alpha_\lambda = v_1 + \lambda v_2$$

نشان می‌دهیم برای هر λ، $[\alpha_\lambda] \cap U = \{0\}$. فرض کنید $x \in [\alpha_\lambda] \cap U$ پس اسکالرهای β_1، β_2 و $\cdots$ و β_n وجود دارند به طوری که

$$x = \beta_1\alpha_\lambda = \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$$

$$\Longrightarrow \beta_1\alpha_\lambda - \beta_2 v_2 - \cdots - \beta_n v_n = 0$$

$$\Longrightarrow \beta_1 v_1 + (\beta_1\lambda - \beta_2)v_2 - \beta_3 v_3 - \cdots - \beta_n v_n = 0$$

حال چون $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ مستقل خطی‌اند لذا

$$\beta_1 = \beta_1\lambda - \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_n = 0$$

در نتیجه $x=0$.از طرفی

$$\dim([\alpha_\lambda]+U)=\dim([\alpha_\lambda])+\dim(U)=1+n-1=n$$

در نتیجه $V=U+[\alpha_\lambda]$.همچنین ثابت شد $[U]\cap[\alpha_\lambda]=0$ پس

$$V=U\oplus[\alpha_\lambda]$$

حال فرض کنید F میدان نامتناهی باشد.نشان می‌دهیم اگر $\lambda\neq\lambda'$; آنگاه $[\alpha_\lambda]\neq[\alpha_{\lambda'}]$ فرض کنید چنین نباشد پس اسکالرهای λ و λ' موجود است که $\lambda\neq\lambda'$ و $[\alpha_\lambda]=[\alpha_{\lambda'}]$.پس $\alpha_\lambda\in[\alpha_{\lambda'}]$، لذا $\beta\in F$ موجود است که $\alpha_\lambda=\beta\alpha_{\lambda'}$.در نتیجه

$$v_1+\lambda v_2=\beta v_1+\beta\lambda' v_2$$

از طرفی v_1 و v_2 مستقل خطی‌اند پس

$$\beta=1,\lambda'=\lambda$$

که تناقض می‌باشد.پس برای $\lambda\neq\lambda'$ داریم $[\alpha_\lambda]\neq[\alpha_{\lambda'}]$.حال چون F نامتناهی فرض شده است پس زیر فضاهای به شکل $[\alpha_\lambda]$ نیز نامتناهی است و طبق آنچه اثبات شد برای هر $\lambda\in F$، $V=U\oplus[\alpha_\lambda]$.که این با فرض مسأله متناقض است لذا F باید میدان متناهی باشد.

۷۳ـ فرض کنید S و T تبدیلهای خطی وابسته به ماتریس‌های A و B روی فضای F^n نسبت به مبنای استاندارد F^n باشند با توجه به اینکه V و W زیر فضاهای پدید آمده توسط ستونهای A و B می‌باشند لذا

$$\mathrm{Im}(S)=V,\quad \mathrm{Im}(T)=W$$

طبق فرض $\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.با توجه به اینکه S و T عملگرهای وابسته A و B هستند لذا $\operatorname{rank}(T+S) = \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(S)$.

از طرفی $(S+T)(F^n) \subseteq T(F^n) + S(F^n)$ در نتیجه

$$\dim((T+S)(F^n)) \leq \dim(T(F^n) + S(F^n))$$

$$\Longrightarrow \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(S) = \operatorname{rank}(S+T)$$

$$\leq \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(S) - \dim(T(F^n) \cap S(F^n))$$

واضح است که رابطه فوق وقتی برقرار است که $\dim(T(F^n) \cap S(F^n)) = 0$ لذا

$$T(F^n) \cap S(F^n) = \{0\} \Longrightarrow V \cap W = \{0\}$$

۵.۴ پاسخ تشریحی نکات تستی

۱ـ درست، چون $\ker(T) \neq \{0\}$ پس T یک به یک نیست لذا بردارهای u_1 و u_2 در U وجود دارند که $u_1 \neq u_2$ ولی $T(u_1) = T(u_2)$.

۲ـ درست، داریم $\operatorname{rank}(T) + \dim\ker(T) = n$.

(اگر x و y دو عدد نامنفی حقیقی باشدن و $x+y=n$ آنگاه تابع $g(x,y) = xy$ وقتی ماکزیمم است که $x = y = \frac{n}{2}$) پس:

$$\operatorname{rank}T.\dim\ker(T) \leq \frac{n}{2}\frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}$$

۳ـ نادرست، فرض کنید $U = R^2$ و $\{e_1, e_2\}$ مبنای استاندارد U باشد.تعریف می‌کنیم $T(e_1) = 0$ و $T(e_2) = e_1$ واضح است $T^2 = 0$ ولی $T \neq 0$.

۴ـ نادرست، فرض کنید $U = R^{2}$ و $\{e_1, e_2\}$ مبنای استاندارد U باشندو S و T دو عملگر خطی باشند که ($T(e_1) = e_2$ و $T(e_2) = e_1$) و ($S(e_2) = e_1 + e_2$ و $S(e_1) = e_1$) واضح است $(S+T)^{2}(e_1) = 3e_1 + 2e_2$ ولی $(S^{2} + 2ST + T^{2})(e_1) = 4e_1 + 2e_2$ توجه شود رابطه فوق در حالتی که $TS = ST$ درست است.

۵ـ نادرست، زیرا

$$T(e_1 + e_2 + e_3) = T(e_1) + T(e_2) + T(e_3) = e_1 + e_2 - e_3 = e_3$$

۶ـ درست، زیرا اگر $x \in \ker(S)$ پس $S(x) = 0$ لذا $TS(x) = 0$ در نتیجه $x \in \ker(TS)$ پس $\ker(S) \subseteq \ker(TS)$.

۷ـ درست، مسالهٔ (۱۳) را ببینید.

۸ـ درست، مسالهٔ (۱۲) را ببینید.

۹ـ درست.

۱۰ـ درست.

۱۱ـ درست، مسالهٔ (۶) را ببینید.

۱۲ـ نادرست، مسالهٔ (۱۲) فصل پنجم را ببینید.

۱۳ـ درست، مسالهٔ (۱۲) فصل پنجم را ببینید.

۱۴ـ نادرست، مسالهٔ (۴) را ببینید.

فصل پنجم

فرمهای متعارف مقدماتی

۱.۵ تعاریف و قضایا

تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی و $T : V \to V$ یک عملگر خطی باشد.اگر بردار غیر صفر x و اسکالر λ وجود داشته باشند به طوری که $T(x) = \lambda x$، λ را یک مقدار ویژه T و x را بردار ویژه T نظیر λ گوییم.

تعریف: به ازای اسکالر λ، زیر فضای $\{x \in V | T(x) = \lambda x\}$ را زیر فضای ویژه نظیر λ می‌نامیم و آن را با V_λ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱ـ۵:فرض کنید $c_1, \cdots, c_r$ اسکالرهای دو به دو متمایزی باشند و

$$W = Vc_1 + Vc_2 + \cdots + Vc_r$$

در این صورت W مجموع مستقیم زیر فضاهای ویژه Vc_1 است.

تعریف: فرض کنید $A \in M(n, F)$.چند جمله‌ای $P(x) = |xI_n - A|$ را چند جمله‌ای

مشخصه A می‌نامیم.

قضیه ۲ـ۵: λ یک مقدار ویژه A است اگر و تنها اگر λ یک ریشه معادله مشخصه A باشد.

تعریف: چند جمله‌ای مشخصه عملگر خطی T عبارتست از چند جمله‌ای مشخصه ماتریس T نسبت به یک مبنای دلخواه.

قضیه ۳ـ۵: λ یک مقدار ویژه عملگر خطی T است اگر و تنها اگر λ یک ریشه معادله مشخصه T باشد.

تعریف: فرض کنید $T \in L(V,V)$.اگر مبنای α برای V وجود داشته باشد به طوری که ماتریس T نسبت به α قطری باشد، T را قطری پذیرگوییم.

قضیه ۴ـ۵: فرض کنید $T \in L(V,V)$.شرط لازم و کافی برای آنکه T قطری پذیر باشد آن است که V دارای مبنایی متشکل از بردارهای ویژه T باشد.

تعریف: فرض کنید λ یک مقدار ویژه عملگر خطی T باشد.بستایی جبری λ برابر درجه تکرار λ به عنوان ریشه‌ای از چند جمله‌ای مشخصه T و بستایی هندسی λ برابر بعد زیر فضای ویژه V_λ تعریف می‌شود.

قضیه ۵ـ۵: فرض کنید $T \in L(V,V)$ و $\dim V = n$ و $c_1, \cdots, c_r$ مقادیر ویژه متمایز T و Vc_1، Vc_2، $\cdots$ و Vc_r زیر فضاهای ویژه نظیر آنها باشند.احکام زیر معادلند:

الف. T قطری پذیر است.

ب. چند جمله‌ای مشخصه T به صورت زیر است.

$$P(x) = (x-c_1)^{d_1}(x-c_2)^{d_2}\cdots(x-c_r)^{d_r}$$

همچنین بستایی هندسی و بستایی جبری هر یک از c_iها با هم برابر است.

ج. $V = Vc_1 \oplus Vc_2 \oplus \cdots \oplus Vc_r$.

قضیه ۶ـ۵: فرض کنید $A \in M(n,F)$ دارای چند جمله‌ای مشخصه به صورت زیر است:

$$P(x) = (x-c_1)^{d_1}(x-c_2)^{d_2}\cdots(x-c_k)^{d_k}$$

A با یک ماتریس بالا مثلثی متشابه است که هر c_i به تعداد d_i مرتبه روی قطر اصلی آن تکرار شده است.

نتیجه ۱ـ۶ـ۵: فرض کنید T عملگر خطی روی فضای برداری متناهی البعد V روی میدان F باشد و چند جمله‌ای مشخصه T به عوامل خطی تجزیه شود.مبنایی برای V مثل B وجود دارد به طوری که $M_B^B(T)$ بالا مثلثی (پائین مثلثی) است.

قضیه ۷ـ۵: (کیلی هامیلتون) فرض کنید $A \in M(n,F)$ و $P(x) = x^n + \cdots + a_1x + a_0$ چند جمله‌ای مشخصه A باشد.A در معادله $P(x) = 0$ صدق می‌کند یعنی $P(A) = 0$.

نتیجه ۱ـ۷ـ۵: هر عملگر خطی در چند جمله‌ای مشخصه‌اش صدق می‌کند.

تعریف: یک چند جمله‌ای تکین به طوری که $A \in M(n,F)$ (عملگر خطی T) در آن صدق کند، چند جمله‌ای مینیمال ماتریس A(عملگر خطی T) می‌نامیم، در صورتی که ازکمترین درجه باشد.

قضیه ۸ـ۵: فرض کنید $g(x)$ چند جمله‌ای مینیمال $A \in M(n,F)$(عملگر خطی T) باشد.آنگاه:

الف. $g(x)$ منحصر بفرد است.

ب. اگر $f(x)$ چند جمله‌ای باشد که $f(A) = 0$ ($f(T) = 0$) آنگاه $g(x)|f(x)$.

قضیه ۹ـ۵: اگر T عملگر خطی قطری پذیر باشد و $c_1, c_2, \cdots, c_k$ مقادیر ویژه متمایز T باشند.چند جمله‌ای مینیمال T به صورت زیر است:

$$f(x) = (x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_k)$$

تعریف: فرض کنید $T \in L(V,V)$، زیر فضای W را تحت T پایا گوییم، هرگاه به ازای هر u از W داشته باشیم $T(u) \in W$، به عبارت دیگر $T(W) \subseteq W$.

قضیه ۱۰ـ۵: فرض کنید W زیر فضایی پایا تحت T باشد که $T \in L(V,V)$ و $W \leq V$.آنگاه چند جمله‌ای مشخصه $T|_W$ چند جمله‌ای مشخصه T را عاد می‌کند.هم چنین چند جمله‌ای مینیمال $T|_W$ چند جمله‌ای مینیمال T را عاد می‌کند.

قضیه ۱۱ـ۵: اگر $f(x)$ و $g(x)$ به ترتیب چند جمله‌ایهای می‌نیمال و مشخصه ماتریس nـمربعی A روی میدان F باشند، $f(x)$ و $g(x)$ عوامل تحویل ناپذیر یکسان دارند.

۲.۵ مسائل برگزیده

۱ـ فرض کنید $A \in M(n,F)$.بدون استفاده از قضیه کیلی هامیلتون نشان دهید A صفری از یک چند جمله‌ای ناصفر با ضرایب در F است.

۲ـ فرض کنید V فضای برداری با بعد n روی میدان F است.چند جمله‌ای مینیمال عملگر همانی و عملگر صفر را مشخص کنید.

۳ـ فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریس $n \times n$ حقیقی باشد که به ازای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a$،

الف. نشان دهید a یک مقدار ویژه A است.

ب. یک بردار ویژه متناظر این مقدار ویژه را بیابید.

۴ـ فرض کنید $A \in M(n,F)$ و $f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$ چند جمله‌ای مینیمال A باشد.ثابت کنید A نامنفرد است اگر و تنها اگر $a_0 \neq 0$.

۵ـ فرض کنید $A \in M(n,F)$.نشان دهید A منفرد است اگر و تنها اگر ماتریس $C \in M(n,F)$ یافت شود که $AC = CA = 0$.

۶ـ فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی و $T \in L(V,V)$ پوچ توان باشد.نشان دهید $T^n = ۰$.

۷ـ فرض کنید $A \in M(n,F)$ پوچ توان باشد نشان دهید $\operatorname{trc}(A) = ۰$.

۸ـ فرض کنید $A,B \in M(n,F)$ و $C = AB - BA$ نشان دهید $I - C$ پوچ توان نیست.

۹ـ فرض کنید $A,B \in M(n,F)$ ثابت کنید AB و BA مقدار ویژه یکسان دارند.

۱۰ـ فرض کنید λ یک مقدار ویژه ماتریس مربعی A روی میدان F باشد و $f(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب در F باشد.نشان دهید $f(\lambda)$ مقدار ویژه $f(A)$ است.

۱۱ـ فرض کنید $T \in L(R^۳,R^۳)$ یک اپراتور خطی با نمایش ماتریس زیر در مبنای استاندارد باشد.آیا T قطری شدنی است؟ اگر چنین است مبنایی برای $R^۳$ بیابید به طوری که هر بردار آن یک بردار ویژه T باشد.همچنین ماتریس معکوس پذیر P را چنان بیابید که $P^{-۱}AP$ قطری باشد.

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & -۶ & -۶ \\ -۱ & ۴ & ۲ \\ ۳ & -۶ & -۴ \end{bmatrix}$$

۱۲ـ فرض کنید $T \in L(V,V)$ پوچ توان باشد نشان دهید $a_۰ + a_۱T + \cdots + a_mT^m$ به ازای $a_۰ \neq ۰$ یک به یک است.

۱۳ـ فرض کنید $\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n$ ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه ماتریس $n \times n$، A باشد و c یک اسکالر باشد.آنگاه ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه $cI + A$ برابر است با $c + \lambda_۱$ و $c + \lambda_۲$ و $\cdots$ و $c + \lambda_n$.

۱۴ـ فرض کنید V فضای برداری چند جمله‌ای‌های حقیقی حداکثر از درجه n باشد.فرض کنید D عملگر مشتق‌گیری روی V باشد.چند جمله‌ای مینیمال D را بیابید.

۱۵ـ فرض کنید $A \in M(n,F)$ و T یک عملگر خطی روی $M(n,F)$ با ضابطه $T(B) = AB$

باشد، ثابت کنید چند جمله‌ای مینیمال T و A برابرند.

۱۶ـ نشان دهید که $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ چند جمله‌ای مشخصه و مینیمال ماتریس حقیقی زیر است.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

۱۷ـ تبدیل خطی بیابید که چند جمله‌ای مشخصه و مینیمال آن روی میدان اعداد حقیقی به صورت $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ باشد و ماتریس نمایش این تبدیل را نسبت به یک مبنا بنویسید.

۱۸ـ آیا ماتریس حقیقی وجود دارد که چند جمله‌ای مینیمال و مشخصه آن به صورت $f(x) = x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 2x + 1$ باشد.در صورت وجود ماتریس را نمایش دهید.

۱۹ـ فرض کنید $T \in L(V,V)$ به طوری که $\dim V = n$ و $V = U \oplus W$ که U و W تحت T پایا هستند.اگر T_1 و T_2 به ترتیب تحدید T به U و W باشند آنگاه چند جمله‌ای مینیمال T کوچکترین مضرب مشترک چند جمله‌ای مینیمال T_1 و T_2 است.

۲۰ـ فرض کنید $T \in L(V,V)$ و $\dim V = n$.همچنین فرض کنید $f(x) = g(x).h(x)$ به قسمی باشند که $f(T) = 0$ و چند جمله‌ای‌های $g(x)$ و $h(x)$ نسبت به هم اول باشند.در این صورت V مجموع مستقیم زیر فضاهای T پایای U و W می‌باشد که در آن $U = \ker g(T)$ و $W = \ker h(T)$.

۲۱ـ فرض کنید $A,B \in M(n,\mathbb{C})$ و $R = \begin{bmatrix} A & B \\ B & -A \end{bmatrix}$. نشان دهید λ مقدار ویژه R است اگر و تنها اگر $-\lambda$ مقدار ویژه R باشد.

۲۲ـ فرض کنید $A \in M(n,F)$ و $\operatorname{rank} A = 1$ و $\operatorname{trc}(A) = 0$. نشان دهید A پوچ توان است.

۲۳ـ فرض کنید $A \in M(n,\mathbb{C})$ به طوری که $A = A^{-t}$ ثابت کنید تمام مقادیر ویژه A حقیقی‌اند.

۲۴ـ فرض کنید A یک ماتریس 2×2 روی میدان اعداد گویا باشد به طوری که $A \neq I$ و $A^3 = I$. مطلوبست $\operatorname{trc}(A)$.

۲۵ـ ماتریسی 2×2 با درایه‌های گویا بیابید که در معادله $x^3 - 1$ صدق کند ولی در $x - 1$ صدق نکند.

۲۶ـ فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ روی میدان اعدا گویا باشد. ثابت کنید اگر به ازای عدد اولی مثل p به طوری که $p > n + 1$ داشته باشیم $A^p = I$ آنگاه $A = I$.

۲۷ـ عملگر خطی $T = cI$ را روی فضای $n > 1$ـبعدی V درنظر بگیرید. که در آن c یک اسکالر است. ثابت کنید هر بردار غیر صفر V یک بردار ویژه T وابسته به اسکالر c است ولی هیچ مقدار ویژه‌ای غیر از c برای T وجود ندارد.

۲۸ـ فرض کنید $A \in M(n,\mathbb{C})$ و $A^r = I$. نشان دهید $\operatorname{trc}(A)$ مجموع برخی از ریشه‌های rام واحد است.

۲۹ـ فرض کنید $T \in L(V,V)$ که $\dim V = n$. همچنین $m \in N$ و $\lambda \in F$ موجود باشد که $(T - \lambda I)^m = 0$. ثابت کنید λ مقدار ویژه T است و T مقدار ویژه دیگری غیر از λ ندارد.

۳۰ـ فرض کنید $T \in L(V,V)$ و $\dim V = n$.

الف. اگر u یک بردار ویژه T باشد آنگاه برای هر m طبیعی، u بردار ویژه T^m است.

ب. اگر T معکوس‌پذیر باشد آنگاه λ مقدار ویژه T است اگر و تنها اگر λ^{-1} مقدار ویژه T^{-1}

باشد.

ج. شرط لازم و کافی برای آنکه T معکوس پذیر باشد آن است که صفر مقدار ویژه آن نباشد.

۳۱ـ فرض کنید $T \in L(V,V)$ و $\dim V = m$ و هر بردار ناصفر V بردار ویژه T باشد.آنگاه T نگاشت خطی اسکالر است.یعنی اسکالر c وجود دارد که $T = cI$.

۳۲ـ فرض کنید $A \in M(n,F)$ و $\text{rank}(A) = ۱$ در این صورت اسکالر منحصر بفردی مثل β وجود دارد که $A^۲ = \beta A$ و اگر $\beta \neq ۱$ آنگاه $I - A$ وارون پذیر است.

۳۳ـ فرض کنید $\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n$ مقادیر ویژه دو به دو متمایز یک تبدیل خطی روی یک فضای برداری باشند و V_i بردار ویژه نظیر λ_i باشد.ثابت کنید $V_۱, V_۲, \cdots, V_n$ مستقل خطی اند.(آزمون کارشناسی ارشد ۶۵ دانشگاه تهران)

۳۴ـ فرض کنید $A, B \in M(n,F)$ هر کدام دارای n مقدار ویژه متمایز باشند.ثابت کنید $AB = BA$ اگر و تنها اگر A و B بردارهای ویژه یکسانی داشته باشند.

۳۵ـ فرض کنید $S,T \in L(V,V)$ و $\dim V = n$ و $ST = TS$.اگر λ مقدار ویژه T و W زیر فضای ویژه آن باشد $(W = V_\lambda)$، آنگاه W تحت S پایا است.

*۳۶ـ فرض کنید T عملگر خطی قطری‌پذیر روی فضای برداری متناهی البعد V باشد و W زیر فضایی از V باشد که تحت T پایا است.ثابت کنید عملگر تحدیدی $T|_W$ قطری شدنی است.

۳۷ـ فرض کنید $A, B \in M(n,F)$ به طوری که $AB = BA$ و A و B هر دو قطری پذیر باشند.نشان دهید ماتریس نامنفرد P وجود دارد که همزمان $PAP^{-۱}$ و $PBP^{-۱}$ قطری‌اند.

۳۸ـ فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان اعداد مختلط باشد و S و T عملگرهای خطی روی V باشند به طوری که $ST = TS$.نشان دهید S و T یک بردار ویژه مشترک دارند.(کارشناسی ارشد ۶۸)

۳۹ـ فرض کنید P_n فضای برداری چند جمله‌ایها با درجه حداکثر n روی R باشد.اگر $D : P_n \to P_n$

عملگر مشتق و I عملگر همانی باشد آنگاه برای هر دو عدد طبیعی m عملگر $D^m - I$ وارون پذیر است.(کارشناسی ارشد ۷۷)

۴۰ـ فرض کنید $S, T : V \to V$ به طوری که $\dim V = n$ و $ST = TS$.ثابت کنید:

الف. $K = \ker(S)$ و $\operatorname{Im}(S) = T$، تحت T پایا هستند.هم چنین ثابت کنید هر فضای خاص از S تحت T پایا است.

ب. اگر V یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط باشد آنگاه S و T یک بردار ویژه مشترک دارند.(کارشناسی ارشد تربیت معلم ۶۶)

۴۱ـ ثابت کنید هیچ مجموعه‌ای از ماتریس‌های پوچ توان نمی‌تواند مولد فضای $M(n, F)$ باشد. (مسابقات ریاضی ۶۵)

۴۲ـ فرض کنید $A \in M(n, F)$ خود توان باشد یعنی $A^2 = A$.ثابت کنید A با یک ماتریس قطری متشابه است.

۴۳ـ فرض کنید $A \in M(n, \mathbb{C})$.ثابت کنید ماتریس‌های P و D وجود دارند که D قطری است و $AP = PD$.

۴۴ـ فرض کنید $A \in M(n, R)$ مثلثی شدنی باشد.آنگاه:

الف. به ازای هر k طبیعی، A^k مثلثی شدنی است.

ب. اگر $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ریشه‌های مشخصه نه لزوماً متمایز A باشند ثابت کنید:

$$\operatorname{trc}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

۴۵ـ فرض کنید $c_1, c_2, \cdots, c_n$ اعداد حقیقی باشند و $C = (c_{ij})$ ماتریس $n \times n$ باشد که $C_{ij} = C_i C_j$ رتبه ماتریس C و مقادیر ویژه آنرا محاسبه کنید.(کارشناسی ارشد ۶۹).

۴۶ـ فرض کنید A یک ماتریس حقیقی مربعی پاد متقارن باشد.ثابت کنید $I + A$ وارون دارد و اگر $P = (I - A)(I + A)^{-1}$ آنگاه $P^t P = I$.(کارشناسی ارشد ۷۶)

۴۷ـ فرض کنید V فضای برداری روی میدان F با بعد متناهی و T یک عملگر خطی روی V باشد ثابت کنید شرایط زیر معادلند:

الف. هر بردار ناصفر V یک بردار ویژه T است.

ب. T با هر عملگر خطی خود توان روی V جابجا می‌شود.(کارشناسی ارشد ۷۱)

۴۸ـ فرض کنید P_n فضای برداری چند جمله‌ایها از درجه حداکثر n روی میدان اعداد حقیقی باشد.تبدیل خطی $T : P_n \to P_n$ با ضابطه $T(f(x)) = x^n f(\frac{1}{x})$ تعریف می‌کنیم.مطلوبست تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه عملگر خطی T.(کارشناسی ارشد ۷۵)

۴۹ـ فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ و معکوس پذیر با درایه‌های حقیقی باشند.نشان دهید مجموعه $\{r \in R | \det(A + rB) = 0\}$ متناهی است.(کارشناسی ارشد ۷۷)

۵۰ـ فرض کنید $A, B \in M(n, F)$ و ماتریس B معکوس‌پذیر باشند.نشان دهید $A + xB$ همواره معکوس پذیر است مگر برای تعداد متناهی عضو از میدان F.(کارشناسی ارشد ۷۰)

۵۱ـ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با چند جمله‌ای مشخصه

$$f(x) = (x - c_1)^{d_1}(x - c_2)^{d_2} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

باشد.ثابت کنید $\operatorname{trc}(A) = d_1c_1 + d_2c_2 + \cdots + d_kc_k$.(کارشناسی ارشد ۶۳ کرمان)

۵۲ـ فرض کنید A و B به ترتیب ماتریس‌های $m \times n$ و $n \times m$ باشند.ثابت کنید چند جمله‌ای مشخصه ماتریس‌های AB و BA در تساوی $\lambda^n|\lambda I_m - AB| = \lambda^m|\lambda I_n - BA|$ صدق می‌کنند.به خصوص اگر $m = n$ آنگاه ماتریس‌های AB و BA چند جمله‌ای مشخصه یکسانی دارند.(کارشناسی ارشد ۶۶ تربیت معلم)

۵۳ـ فرض کنید $A, B \in M(n, F)$ به طوری که $A^2 = A$ و $B^2 = B$.نشان دهید که A و B متشابهند اگر و فقط اگر هم ارز باشند.(یعنی ماتریس‌های معکوس پذیر P و Q موجود باشد که $A = PBQ$)(کارشناسی ارشد ۶۶ مشهد)

۵۴ـ فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریسی $n \times n$ است که در آن
$$a_{ij} = \begin{cases} \delta_{in} & j = ۱ \\ \delta_{ij-۱} & j > ۱ \end{cases}$$
فرض کنید α ریشه nام واحد در میدان اعداد مختلط باشد.قرار می‌دهیم:

$$V(\alpha) = \begin{bmatrix} ۱ \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha^{n-۱} \end{bmatrix}$$

ثابت کنید $V(\alpha)$ یک بردار ویژه A است و مقدار ویژه نظیر آن را بدست آورید.(مسابقات ریاضی فروردین ۶۸)

۵۵ـ فرض کنید $A \in M(۳, F)$ به طوری که $\operatorname{trc}(A) = \operatorname{trc}(A^{-۱}) = ۰$ و $\det(A) = ۱$.ثابت کنید $A^۳ = I$.(مسابقات ریاضی ۶۷)

۵۶ـ فرض کنید A ماتریس $n \times n$ باشد، که برای هر ماتریس B با اثر صفر داشته باشیم $\operatorname{trc}(BA) = ۰$ نشان دهید به ازای یک λ، $A = \lambda I$.(مسابقات ریاضی ۷۸)

۵۷ـ فرض کنید $A \in M(,n,R)$ مخالف صفر باشد به قسمی که:

$$A = (a_{ij}) \qquad , a_{ik}a_{jk} = a_{kk}a_{ij} \qquad (۱ \leq i,j,k \leq n)$$

ثابت کنید: (مسابقات ریاضی ۷۵)

الف. $\operatorname{trc}(A) \neq ۰$.

ب. A ماتریس متقارن است.

ج. چند جمله‌ای مشخصه A بصورت $x^{n-۱}(x - \operatorname{trc}(A))$ است.

*۵۸ـ فرض کنید A یک ماتریس مربعی حقیقی $n \times n$ باشد، ثابت کنید:

الف. اگر A پوچ توان باشد آنگاه برای هر عدد صحیح $r \geq ۱$، $\text{trc}(A^r) = ۰$.

ب. اگر برای هر عدد صحیح $r \geq ۱$، $\text{trc}(A^r) = ۰$ آنگاه A پوچ توان است.(کارشناسی ارشد ۶۵ تهران)

*۵۹ـ فرض کنید S و T دو عملگر خطی روی فضای متناهی البعد V باشند.به طوری که S با $ST - TS$ جابجا می‌شود.نشان دهید $ST - TS$ پوچ توان است.

*۶۰ـ ماتریس قطری $B \in M(n, F)$ با چند جمله‌ای مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$P(x) = (x - c_۱)^{d_۱}(x - c_۲)^{d_۲} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

فرض کنید W فضای ماتریس‌های $A \in M(n, F)$ باشد که $AB = BA$ ثابت کنید:

$$\dim W = d_۱^۲ + d_۲^۲ + \cdots + d_k^۲$$

*۶۱ـ فرض کنید $B \in M(n, F)$ ماتریس قطری با چند جمله‌ای مشخصه $P(x) = (x - c_۱)^{d_۱}(x - c_۲)^{d_۲} \cdots (x - c_k)^{d_k}$ و $\varphi_B : M(n, F) \to M(n, F)$ با ضابطه $\varphi_B(A) = AB - BA$ باشد.نشان دهید:

$$\dim(\varphi_A(M(n, F)) = n^۲ - (d_۱^۲ + d_۲^۲ + \cdots + d_k^۲)$$

*۶۲ـ فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی n روی میدان F باشد و $S, T : V \to V$ دو عملگر خطی باشند، به طوری که چند جمله‌ای ویژه یکی از آن دو تحویل ناپذیر است.اگر $L = ST - TS \neq ۰$ ثابت کنید $\text{rank}(L) > ۱$.(مسابقات ریاضی ۷۶)

۶۳ـ اگر A یک ماتریس مربعی بر روی میدان F باشد و $A^۲ = A$ آنگاه $\text{trc}(A) = \text{rank}(A)$.(مسابقات ریاضی ۷۹)

۶۴ـ فرض کنید λ یک مقدار ویژه ماتریس $n \times n$ حقیقی نامنفرد A باشد.ثابت کنید $\dfrac{\det(A)}{\lambda}$

یک مقدار ویژه $\operatorname{adj}(A)$ است.بعلاوه اگر A قطری پذیر باشد آنگاه $\operatorname{adj}(A)$ نیز قطری پذیر است.
(کارشناسی ارشد ۷۸)

۳.۵ نکات تستی

درست یا نادرست

۱ـ دو ماتریس متشابهند اگر و تنها اگر ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه یکسان داشته باشند.

۲ـ دو ماتریس زیر متشابهند.

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۱ & -۲ \\ ۳ & -۳ & -۱ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۴ \\ -۱ & -۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

۳ـ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ روی میدان F باشد.آنگاه در چند جمله‌ای مشخصه A ضریب x^n برابر یک، ضریب $x^{n-۱}$ برابر $-\operatorname{trc}(A)$ و جمله ثابت $(-۱)^n \det(A)$ است.

۴ـ اگر x یک بردار ویژه ماتریس A باشد.آنگاه برای هر $\lambda \in F$، λx نیز یک بردار ویژه A است.

۵ـ دترمینان ماتریس $n \times n$، A برابر صفر است اگر و تنها اگر صفر یک ریشه چند جمله‌ای مشخصه باشد.

۶ـ اگر $\lambda_۱, \cdots, \lambda_n$ و $\xi_۱, \cdots, \xi_n$ به ترتیب ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه ماتریس‌های $A, B \in M(n, F)$ باشند آنگاه $\lambda_۱ + \xi_۱, \cdots, \lambda_n + \xi_n$ ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه $A + B$ است.

۷ـ ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ با یک ماتریس قطری متشابه است.

۸ـ اگر $A = A^۲$ آنگاه ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A برابر صفر یا یک است.

۹ـ اگر $A = A^۲$ آنگاه A با یک ماتریس قطری متشابه است.

۱۰ـ اگر A پوچ توان باشد آنگاه $\operatorname{trc}(A) = ۰$.

۱۱ـ اگر در ماتریس $A = (a_{ij})$ درایه‌ها دارای این خاصیت باشند که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\sum\limits_{j=۱}^{n} a_{ij} = a$. $(A \in M(n, F))$ آنگاه a یک ریشه مشخصه A است.

۱۲ـ اگر A یک ماتریس $n \times n$ با چند جمله‌ای مشخصه $f(x) = (x - c_۱)^{d_۱} \cdots (x - c_k)^{d_k}$ باشد آنگاه: $\operatorname{trc}(A) = d_۱c_۱ + \cdots + d_kc_k$

۱۳ـ اگر p_n فضای چند جمله‌ای‌های با درجه حداکثر n روی R و $D : p_n \to p_n$ عملگر مشتق باشد.آنگاه $\operatorname{trc}(D) \neq ۰$.

۱۴ـ اگر λ یک مقدار ویژه عملگر خطی T و $f(x)$ یک چند جمله‌ای باشد آنگاه $f(\lambda)$ مقدار ویژه عملگر خطی $f(T)$ است.

۱۵ـ اگر A یک ماتریس $n \times n$ و چند جمله‌ای مشخصه آن به عوامل خطی تجزیه شود آنگاه A مثلثی شدنی است.

۱۶ـ هر ماتریس مربعی روی میدان $\mathbb{C}$ مثلثی شدنی است.

۴.۵ پاسخ تشریحی مسائل برگزیده

۱ـ بعد فضای برداری $M(n,F)$ روی میدان F برابر $n^{۲}$ است لذا هر مجموعه از ماتریسهای $n\times n$ با بیش از $n^{۲}$ عضو وابسته خطی است حال مجموعه $\{۱, A, A^{۲}, \cdots, A^{n^{۲}}\}$ را در نظر می‌گیریم این مجموعه $n^{۲}+۱$ عضو دارد لذا وابسته خطی است.بنابراین اسکالرهای $\alpha_{۰}, \alpha_{۱}, \cdots, \alpha_{n^{۲}}$ که همگی صفر نیستند موجود است به قسمی که:

$$\alpha_{۰}I + \alpha_{۱}A + \alpha_{۲}A^{۲} + \cdots + \alpha_{n^{۲}}A^{n^{۲}} = ۰$$

لذا A صفری از چند جمله‌ای $f(x) = \alpha_{۰} + \alpha_{۱}x + \cdots + \alpha_{n^{۲}}x^{n^{۲}}$ می‌باشد.

۲ـ برای عملگر همانی داریم که $T = I$ لذا عملگر همانی در چند جمله‌ای $f(x) = x - ۱$ صدق می‌کند و چون $x - ۱$ از کمترین درجه ممکن می‌باشد لذا $x - ۱$ چند جمله‌ای مینیمال عملگر همانی است.برای عملگر صفر داریم $T = ۰$ لذا این عملگر در چند جمله‌ای $f(x) = x$ صدق می‌کند و چون x از کوچکترین درجه ممکن می‌باشد لذا x چند جمله‌ای مینیمال عملگر صفر است.

۳ـ باید نشان دهیم که $\det(aI - A) = ۰$ برای این منظور $\det(aI - A)$ را تشکیل می‌دهیم.داریم:

$$\det(aI - A) = \begin{vmatrix} a - a_{۱۱} & -a_{۱۲} & \cdots & -a_{۱n} \\ -a_{۲۱} & a - a_{۲۲} & \cdots & -a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n۱} & -a_{n۲} & \cdots & a - a_{nn} \end{vmatrix}$$

حال ستون‌های دوم و سوم و... و nام را به ستون اول می‌افزاییم.لذا:

$$\det(aI-A)=\begin{vmatrix} a-\sum_{j=1}^{n}a_{1j} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a-\sum_{j=1}^{n}a_{2j} & a-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-\sum_{j=1}^{n}a_{nj} & -a_{n2} & \cdots & a-a_{nn} \end{vmatrix}$$

حال با توجه به اینکه به ازای هر $1 \leq i \leq n$ داریم که $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a$ لذا درایه‌های ستون اول همگی صفر است و با توجه به اینکه ماتریس یک ستون صفر دارد لذا $\det(aI-A)=0$.بنابراین a یک مقدار ویژه A است.

ب. بردار زیر را در نظر بگیرید: $X=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ بنابراین :

$$AX=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\\ \sum_{j=1}^{n}a_{2j}\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{nj}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=aX$$

لذا X یک بردار ویژه A می‌باشد.

۴ـ فرض کنید A نامنفرد باشد ولی $a_0=0$. چون هر ماتریس در چند جمله‌ای مینیمال خود صدق می‌کند.لذا $f(A)=0$.بنابراین:

$$A^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A=0 \Longrightarrow A(A^{m-1}+a_{m-1}A^{m-2}+\cdots+a_1I)=0$$

حال با ضرب طرفین در A^{-1} از چپ داریم :

$$A^{-1}A(A^{m-1}+a_{m-1}A^{m-2}+\cdots+a_1I)=0$$

$$\Longrightarrow (A^{m-1}+a_{m-1}A^{m-2}+\cdots+a_1I)=0$$

یعنی A در یک چند جمله‌ای با درجه کمتر از m صدق کرد و این با چند جمله‌ای مینیمال بودن $f(x)$ متناقض است زیرا $f(x)$ از درجه m است.

برعکس : فرض کنید $a_0 \neq 0$ چون A در چند جمله‌ای مینیمال خود صدق می‌کند لذا

$$A^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0I=0$$

$$\Longrightarrow a_0I=-a_1A-\cdots-a_{m-1}A^{m-1}-A^m$$

$$\Longrightarrow I=a_0^{-1}(-aA-\cdots-a_{m-1}A^{m-1}-A^m)$$

$$\Longrightarrow I=A[a_0^{-1}(-a_1I-\cdots-a_{m-1}A^{m-2}-A^{m-1})]$$

$$=[a_0^{-1}(-a_1I-\cdots-A^{m-1})]A$$

لذا با فرض $B=a_0^{-1}(-a_1I-\cdots-a_{m-1}A^{m-2}-A^{m-1})$ داریم که $AB=BA=I$ بنابراین A نامنفرد است.

۵ـ فرض کنید A منفرد است و $f(x)=x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0$ چند جمله‌ای مینیمال A باشد با توجه به مسأله ۴ داریم : $a_0=0$ و چون A در چند جمله‌ای مینیمال خود صدق می‌کند، لذا:

$$A^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A=0$$

$$\Longrightarrow A(A^{m-1}+a_{m-1}A^{m-2}+\cdots+a_1I)$$

$$=(A^{m-1}+a_{m-1}A^{m-2}+\cdots+a_1I)A=0$$

حال قرار می‌دهیم $C = A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} + \cdots + a_1 I$.بنابراین:

$$AC = CA = 0$$

توجه شود $C \neq 0$ زیرا اگر $C = 0$ بنابراین $A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} + \cdots + a_1 I = 0$ لذا A در یک چند جمله‌ای با درجه کمتر از m صدق کرده است که تناقض است.

برعکس، فرض کنید ماتریس ناصفر C وجود دارد که $AC = 0$.حال اگر A نامنفرد باشد با ضرب طرفین در A^{-1} داریم:

$$A^{-1}(AC) = 0 \Longrightarrow (A^{-1}A)C = 0 \Longrightarrow C = 0$$

که تناقض است لذا A نامنفرد است.

۶ـ فرض کنید A ماتریس وابسته T نسبت به یک مبنای دلخواه باشد چون T پوچ توان است لذا A پوچ توان است.پس kای وجود دارد که $A^k = 0$ بنابراین A در چند جمله‌ای $g(x) = x^k$ صدق می‌کند حال اگر $m(x)$ چند جمله‌ای مینیمال A باشد لذا $m(x)|x^k$ بنابراین rای وجود دارد که $r \leq k$ و $m(x) = x^r$.فرض کنید $f(x)$ چند جمله‌ای مشخصه A باشد چون $f(x)$ و $m(x)$ عوامل تحویل ناپذیر یکسان دارند لذا $f(x)$ نیز توانی از x است.حال چون $f(x)$ از درجه n می‌باشد لذا $f(x) = x^n$ و چون A در چند جمله‌ای مشخصه خود صدق می‌کند بنابراین $A^n = 0$ لذا $T^n = 0$.

۷ـ A پوچ توان است لذا k طبیعی وجود دارد که $A^k = 0$.پس A در چند جمله‌ای $g(x) = x^k$ صدق می‌کند.حال اگر $m(x)$ چند جمله‌ای می‌نیمال A باشد لذا $m(x)|x^k$ پس rای وجود دارد که $r \leq k$ و $m(x) = x^r$.فرض کنید $f(x)$ چند جمله‌ای مشخصه A باشد.چون $f(x)$ و $m(x)$ عوامل تحویل ناپذیر یکسان دارند لذا $f(x)$ نیز توانی از x است و چون $f(x)$ از درجه n است.بنابراین $f(x) = x^n$.حال چون ضریب x^{n-1} در چند جمله‌ای مشخصه برابر $-\mathrm{trc}(A)$

می‌باشد و $f(x)$ جمله x^{n-1} ندارد، لذا $\text{trc}(A) = 0$.

۸ـ ابتدا $\text{trc}(I - C)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{trc}(I - C) = \text{trc}(I) - \text{trc}(C) = \text{trc}(I) - \text{trc}(AB - BA)$$
$$= \text{trc}(I) = n \neq 0$$

(لازم به ذکر است مجموعه مقادیر ویژه یک ماتریس همان اثر ماتریس است از طرفی چون A پوچ توان است تمامی مقادیر ویژه A صفرند.لذا $\text{trc}(A) = 0$) چون $\text{trc}(I - C) \neq 0$ طبق مسأله (۷) ماتریس A نمی‌تواند پوچ توان باشد.

۹ـ فرض کنید λ یک مقدار ویژه AB باشد لذا بردار ناصفر u وجود دارد که:

$$ABu = \lambda u$$

حال چون طرف راست تساوی ناصفر است بنابراین $Bu \neq 0$.با ضرب طرفین تساوی فوق از چپ در B داریم: $BA(Bu) = \lambda(Bu)$.چون Bu ناصفر است لذا λ یک مقدار ویژه BA نیز می‌باشد.حال فرض کنید μ یک مقدار ویژه BA باشد لذا بردار ناصفر v وجود دارد که $BAv = \mu v$ و چون طرف راست تساوی ناصفر است بنابراین $Av \neq 0$.با ضرب طرفین تساوی فوق در A از راست داریم: $AB(Av) = \mu(Av)$ لذا μ مقدار ویژه AB است و Av بردار ویژه نظیر μ است.بنابراین هر مقدار ویژه AB یک مقدار ویژه BA است و برعکس.لذا AB و BA مقادیر ویژه یکسان دارند.

۱۰ـ فرض کنید $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ بنابراین:

$$|f(\lambda)I - f(A)| = |(a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n)I - (a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n)|$$
$$= |a_1(\lambda I - A) + a_2(\lambda^2 I - A^2) + \cdots + a_n(\lambda^n I - A^n)|$$

حال چون با ازای هر $1 \leq m \leq n$ جمله $\lambda^m I - A^m$ بر $\lambda I - A$ بخش پذیر است از تمامی جملات $\lambda I - A$ را فاکتور می‌گیریم، لذا داریم:

$$|f(\lambda)I - f(A)| = |(\lambda I - A)g(A)|, \qquad (g(x) \in \mathbb{Z}[x])$$
$$= |(\lambda I - A)|.|g(A)|$$

و چون λ مقدار ویژه ماتریس A است لذا $|\lambda I - A| = 0$ بنابراین:

$$|f(\lambda)I - f(A)| = 0$$

در نتیجه $f(\lambda)$ یک مقدار ویژه $f(A)$ است.

۱۱ـ چند جمله‌ای مشخصه A را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \det(xI - A) = (x-2)^2(x-1)$$

پس مقادیر ویژه عبارتند از: $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 1$.

ابتدا نشان می‌دهیم اگر λ یک مقدار ویژه باشد آنگاه $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$.

$$x \in V_\lambda \iff Ax = \lambda x \iff (A - \lambda I)x = 0 \iff x \in \ker(A - \lambda I)$$

در نتیجه $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ بنابراین: $\dim(V_\lambda) = \dim(\ker(A - \lambda I))$. داریم $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$ زیرا اگر $v \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$، آنگاه:

$$Av = \lambda_1 v = 2v, \qquad Av = \lambda_2 v = v$$

بنابراین: $v = ۲v$ لذا $v = ۰$.

برای قطری پذیر بودن ماتریس A یا عملگر T باید $R^۳ = V_{\lambda_۱} \oplus V_{\lambda_۲}$ باشد.داریم:

$$A - ۲I = \begin{bmatrix} ۳ & -۶ & -۶ \\ -۱ & ۲ & ۲ \\ ۳ & -۶ & -۶ \end{bmatrix}$$

سطری پلکانی $A - ۲I$ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

لذا $\operatorname{rank}(A - ۲I) = ۱$ و با توجه به رابطه

$$\operatorname{rank}(A - ۲I) + \dim\ker(A - ۲I) = \dim(R^۳) = ۳$$

و چون $\operatorname{rank}(A - ۲I) = ۱$ لذا $\dim V_{\lambda_۱} = \dim\ker(A - ۲I) = ۲$.مجدداً داریم:

$$A - I = \begin{bmatrix} ۴ & -۶ & -۶ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & -۶ & -۵ \end{bmatrix}$$

سطری پلکانی $A - I$ به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} -۱ & -۳ & -۲ \\ ۰ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

پس $\operatorname{rank}(A-I)=2$ و طبق دلیل حالت قبل $\dim V_{\lambda_2}=\dim\ker(A-I)=1$.

بنابراین:

$$\dim(V_{\lambda_1}+V_{\lambda_2})=\dim V_{\lambda_1}+\dim V_{\lambda_2}-\dim(V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2})=1+2+0=3$$

و چون $V_{\lambda_1}+V_{\lambda_2}$ زیرفضای R^3 است بنابراین :

$$R^3=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2} \qquad \text{(جمع مستقیم به علت } V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}=\{0\} \text{ است)}$$

لذا ماتریس A یا عملگر T قطری شدنی است.حال بردارهای ویژه را بدست می‌آوریم:

$$AX=2X\Longrightarrow(A-2I)X=0$$

بجای ماتریس $A-2I$ از ماتریس سطری پلکانی آن استفاده می‌کنیم لذا با فرض $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

داریم:

$$\begin{bmatrix}-1&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Longrightarrow x=2y+2z$$

در نتیجه V_{λ_1} توسط مجموعه $\{(2y+2z,y,z)\}$ تولید می‌شود لذا یک مبنای آن به صورت $\{(2,1,0),(2,0,1)\}$ می‌باشد.همچنین :

$$AX=X\Longrightarrow(A-I)X=0\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&-3&-2\\0&3&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} x = ۳y + ۲z \\ ۳y = -z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = ۳y - ۶y = -۳y \\ z = -۳y \end{cases}$$

لذا مجموعه $\{(-۳y, y, -۳y)\}$ فضای $V_{\lambda_۱}$ را تولید می‌کند.لذا یک مبنای آن به صورت $\{(-۳, ۱, -۳)\}$ می‌باشد. بنابراین $B = \{(-۳, ۱, -۳), (۲, ۱, ۰), (۲, ۰, ۱)\}$ مبنایی برای $R^۳$ است که هر بردار آن یک بردار ویژه است لذا صورت قطری ماتریس به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

و ماتریس P دارای نمایش زیر است:

$$P = \begin{bmatrix} -۳ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۱۲ـ ابتدا نشان می‌دهیم اگر S و R دو عملگر خطی روی فضای متناهی البعد V باشند به طوری که $RS = SR$ و v برداری باشد که $R(v) = S(v)$.آنگاه به ازای هر m طبیعی $R^m(v) = S^m(v)$ (توان m منظور m بار ترکیب تابع است).$m = ۱$ با توجه به $R(v) = S(v)$ واضح است.حال فرض کنید $m > ۱$ و برای $m - ۱$ برقرار باشد لذا $R^{m-۱}(v) = S^{m-۱}(v)$ حال R را با طرفین ترکیب می‌کنیم.پس :

$$R(R^{m-۱}(v)) = R(S^{m-۱}(v)) \Longrightarrow R^m(v) = R(S^{m-۱}(v))$$

چون R با S جابجا می‌شود بنابراین با هر توان S جابجا می‌شود.لذا:

$$R(S^{m-1}(v)) = S^{m-1}(R(v)) = S^{m-1}(S(v)) = S^m(v)$$

حال به اثبات مسأله می‌پردازیم فرض کنید $x \in \ker(a_0 I + a_1 T + \cdots + a_m T^m)$ بنابراین :

$$(a_0 I + a_1 T + \cdots + a_m T^m)(x) = 0 \Longrightarrow -a_0 I(x) = (a_1 T + \cdots + a_m T^m)x$$

چون T پوچ توان است لذا kای وجود دارد که $T^k = 0$ بنابراین

$$(a_1 T + \cdots + a_m T^m)^k = T^k(a_1 T + \cdots + a_m T^m) = 0$$

قرار می‌دهیم $S = (a_1 T + \cdots + a_m T^m)$ و $R = -a_0 I$ چون R عملگر اسکالر است لذا $RS = SR$ و داریم که $R(x) = S(x)$.بنابرآنچه اثبات شد $R^k(x) = S^k(x)$، ولی $S^k = 0$ بنابراین $R^k(x) = 0$ و چون R عملگر اسکالر است و $R(x) = -a_0 x$ بنابراین :

$$0 = S^k(x) = R^k(x) = (-a_0)^k x$$

حال چون $a_0 \neq 0$ بنابراین $(-a_0)^k \neq 0$ درنتیجه $x = 0$ لذا عملگر $a_0 I + a_1 T + \cdots + a_m T^m$ یک به یک است.

۱۳ـ کافیست نشان دهیم برای هر $1 \leq i \leq n$، $\det((C + \lambda_i)I - (CI + A)) = 0$.

$$\det((C + \lambda_i)I - (CI + A)) = \det(CI + \lambda_i I - CI - A) = \det(\lambda_i I - A)$$

حال چون λ_i مقدار ویژه A است.پس $\det(\lambda_i I - A) = 0$.لذا حکم ثابت است.

۱۴ـ واضح است که مجموعه $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$ یک مبنا برای V است.اولاً به فرض کنید $f(x) = x^{n+1}$ نشان می‌دهیم $f(x)$ چند جمله‌ای مینیمال D است.اولاً به ازای هر $1 \leq i \leq n-1$

واضح است $D^n(x^i) = 0$ (مشتق مرتبه nام) حال چون D^n تمام اعضای مبنا را صفر می‌کند لذا D^n روی V صفر است. حال فرض کنید $g(x) = x^m + a_m x^{m-1} + \cdots + a_0$ چند جمله‌ای مینیمال D باشد چون $f(D) = D^{n+1} = 0$ بنابراین $g(x)|f(x) = x^n$ پس $m \leq n$ و $a_{m-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$ لذا $g(x) = x^m$ حال اگر $m < n$ باشد، چون x^m عضوی از پایه است و $D^m(x^m) = m! \neq 0$ پس $g(D)$ روی عضوی از پایه صفر نیست لذا $g(D) \neq 0$ که این با چند جمله‌ای مینیمال بودن $g(x)$ متناقض است.لذا $m = n$ بنابراین $g(x) = x^{n+1}$ چند جمله‌ای مینیمال D می‌باشد.

۱۵ـ فرض کنید $g(x) = x^r + \cdots + a_1 x + a_0$ چند جمله‌ای مینیمال T و $f(x) = x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ چند جمله‌ای مینیمال A باشد.ابتدا با استقراء نشان می‌دهیم به ازای هر $B \in M(n, F)$ و هر k طبیعی $T^k(B) = A^k B$. $k = 1$ واضح است.حال فرض کنید $k > 1$ و حکم برای $k - 1$ برقرار باشد لذا $T^{k-1}(B) = A^{k-1}B$ عملگر T را در طرفین اثر می‌دهیم.پس:

$$T(T^{k-1}(B)) = T(A^{k-1}B) \Longrightarrow T^k(B) = A(A^{k-1}B) \Longrightarrow T^k(B) = A^k B$$

چون هر عملگر در چند جمله‌ای مینیمال خود صدق می‌کند لذا $g(T) = 0$ حال اگر I_n ماتریس همانی $M(n, F)$ باشد لذا $g(T)I_n = 0$.بنابراین :

$$(T^r + a_{r-1}T^{r-1} + \cdots + a_1 T + a_0 T)I_n = 0 \qquad , \text{(} I_n \text{ عملگر همانی است)}$$

$$\Longrightarrow T^r(I_n) + a_{r-1}T^{r-1}(I_n) + \cdots + a_1 T(I_n) + a_0 I_n = 0$$

حال با توجه به اینکه به ازای هر k طبیعی، $T^k(I_n) = A^k I_n = A^k$.لذا:

$$A^r + a_{r-1}A^{r-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

بنابراین A در چند جمله‌ای $g(x)$ صدق می‌کند و چون $f(x)$ چند جمله‌ای مینیمال A است لذا

$$f(x)|g(x) \qquad (1)$$

از طرفی A در چند جمله‌ای مینیمال خود صدق می‌کند بنابراین :

$$A^m + b_{m-1}A^{m-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I_n = 0$$

حال اگر $B \in M(n, F)$ دلخواه باشد، بنابراین:

$$(A^m + b_{m-1}A^{m-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I_n)B = 0$$

$$\Longrightarrow A^m B + b_{m-1}A^{m-1}B + \cdots + b_1 AB + b_0 B = 0$$

حال چون به ازای هر k طبیعی $T^k(B) = A^k B$ لذا

$$(T^m + b_{m-1}T^{m-1}(B) + \cdots + b_1 T(B) + b_0 B) = 0$$

$$\Longrightarrow (T^m + b_{m-1}T^{m-1} + \cdots + b_1 T + b_0 I)B = 0 \qquad (\text{عملگر همانی است } I)$$

$B \in M(n, F)$ دلخواه بود و عملگر $T^m + b_{m-1}T^{m-1} + \cdots + b_1 T + b_0 I$ ماتریس B را صفر کرد لذا این عملگر روی $M(n, F)$ صفر است.بنابراین :

$$T^m + b_{m-1}T^{m-1} + \cdots + b_1 T + b_0 I = 0$$

پس T در چند جمله‌ای $f(x)$ صدق می‌کند.حال چون $g(x)$ چند جمله‌ای مینیمال عملگر T است.لذا

$$g(x)|f(x) \qquad (2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $f(x) = g(x)$ و حکم ثابت است.

۱۶ـ فرض کنید $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ یک مبنای F^n (F میدانی است که ضرایب $f(x)$ در آن است) باشد و T عملگر خطی روی F^n باشد به طوری که ماتریس A نسبت به مبنای مذکور ماتریس A باشد، بنابراین:

$$T(\alpha_1) = \alpha_2, T(\alpha_2) = \alpha_3, \cdots, T(\alpha_{n-1})$$
$$= \alpha_n, T(\alpha_n) = -a_0\alpha_1 - a_1\alpha_2 - \cdots - a_{n-1}\alpha_n$$

واضح است به ازای هر $1 \leq k \leq n-1$ داریم: $T^k(\alpha_1) = \alpha_{k+1}$ (با استقراء بررسی کنید) بنابراین $T^{n-1}(\alpha_1) = \alpha_n$، لذا:

$$T^n(\alpha_1) = T(T^{n-1}(\alpha_1)) = T(\alpha_n) = -a_0\alpha_1 - a_1\alpha_2 - \cdots - a_{n-1}\alpha_n$$

نشان می‌دهیم $f(T)(\alpha_1) = 0$:

$$f(T)(\alpha_1) = (T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1T + a_0I)\alpha_1$$
$$= T^n(\alpha_1) + a_{n-1}T^{n-1}(\alpha_1) + \cdots + a_1T(\alpha_1) + a_0\alpha_1$$
$$= -a_0\alpha_1 - a_1\alpha_2 - \cdots - a_{n-1}\alpha_n + a_{n-1}\alpha_n + \cdots + a_0\alpha_1 = 0$$

حال فرض کنید $i > 1$ چون $f(T)$ تابعی از T است لذا $f(T)$ با عملگر T^{i-1} جابجا می‌شود یعنی $T^{i-1}f(T) = f(T)T^{i-1}$.نشان می‌دهیم $f(T)(\alpha_i) = 0$،

$$f(T)(\alpha_i) = f(T)(T^{i-1}(\alpha_1)) = T^{i-1}(f(T)(\alpha_1)) = T^{i-1}(0) = 0$$

حال چون عملگر $f(T)$ تمام اعضای مبنا را صفر می‌کند لذا $f(T) = 0$ حال فرض کنید $g(x)$ یک چند جمله‌ای باشد و $\deg(g(x)) < n$ و $g(T) = 0$ و

$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_1 x + b_0$. بنابراین $g(T)(\alpha_1) = 0$، لذا:

$$(b_m T^m + b_{m-1}T^{m-1} + \cdots + b_1 T + b_0 I)(\alpha_1) = 0$$

$$\Longrightarrow b_m T^m(\alpha_1) + b_{m-1}T^{m-1}(\alpha_1) + \cdots + b_1 T(\alpha_1) + b_0 \alpha_1 = 0$$

$$\Longrightarrow b_m \alpha_{m+1} + b_{m-1}\alpha_m + \cdots + b_1 \alpha_2 + b_0 \alpha_1 = 0$$

توجه شود که $m < n$ لذا $m + 1 \leq n$. حال چون $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ پایه است لذا:

$$b_0 = b_1 = \cdots = b_m = 0$$

بنابراین T در هیچ چند جمله‌ای ناصفر با درجه کمتر از n صدق نمی‌کند لذا $f(x)$ چند جمله‌ای مینیمال T می‌باشد و چون از درجه n است لذا چند جمله‌ای مشخصه T نیز می‌باشد. حال چون A ماتریس وابسته T نسبت به مبنای مذکور می‌باشد لذا $f(x)$ چند جمله‌ای مشخصه و مینیمال A می‌باشد.

۱۷ـ فرض کنید $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ مبنایی برای R^n باشد تبدیل خطی زیر را در نظر می‌گیریم

$$T(\alpha_1) = \alpha_2, T(\alpha_2) = \alpha_3, \cdots, T(\alpha_{n-1}) = \alpha_n,$$

$$T(\alpha_n) = -a_0\alpha_1 - a_1\alpha_2 - \cdots - a_{n-1}\alpha_n$$

لذا ماتریس نمایش T نسبت به مبنای مذکور به شکل زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

حال طبق مسأله ۱۶، $f(x)$ چندجمله‌ای مشخصه و مینیمال ماتریس A و عملگر خطی T است.

۱۸ـ با توجه به مسأله ۱۷ ماتریس زیر جواب مسأله است.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

۱۹ـ فرض کنید $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ به ترتیب چند جمله‌ایهای مینیمال T و T_1 و T_2 باشند.بنابراین $f_1(x)|f(x)$ و $f_2(x)|f(x)$.

فرض کنید $g(x)$ کوچکترین مضرب مشترک $f_1(x)$ و $f_2(x)$ باشد.اگر $u \in U$ و $w \in W$ چنان باشند که $f_1(T_1)(u) = 0$ و $f_2(T_2)(w) = 0$ در نتیجه:

$$g(T)(u) = g(T)(w) = 0$$

فرض کنید $v \in V$ لذا $u \in U$ و $w \in W$ وجود دارد که $v = u + w$ در نتیجه:

$$g(T)(v) = g(T)(u) + g(T)(w) = 0 + 0 = 0$$

بنابراین $g(T)$ روی فضای برداری V صفر است حال چون $f(x)$ چند جمله‌ای مینیمال T می‌باشد لذا $f(x)|g(x)$.حال با توجه به (۱) چون $f_1(x)|f(x)$ و $f_2(x)|f(x)$ لذا $g(x)|f(x)$ بنابراین

$$f(x) = g(x)$$

۲۰ـ ابتدا نشان می‌دهیم W یک زیرفضای T پایا است.فرض کنید $v \in W$ بنابراین $h(T)(v) = \circ$.حال عملگر T را بر طرفین $h(T)(v) = \circ$ اثر می‌دهیم، لذا:

$$T(h(T))(v) = T(\circ) = \circ$$

چون $h(T)$ تابعی از T است لذا با T جابجا می‌شود، در نتیجه:

$$h(T)(T(v)) = T(h(T))(v) = \circ \Longrightarrow T(v) \in W$$

بنابراین W یک زیرفضای پایای T است به همین ترتیب ثابت می‌شود U نیز یک زیرفضای T پایا است.

ابتدا نشان می‌دهیم $V = U + W$.چون $g(x)$ و $h(x)$ نسبت به هم اولند لذا چند جمله‌ایهای $Q(x)$ و $P(x)$ وجود دارند که:

$$Q(x)h(x) + P(x)g(x) = ۱$$

بنابراین به ازای هر $v \in V$ داریم:

$$Q(T)h(T)(v) + P(T)g(T)(v) = v \qquad (۱)$$

از طرفی:

$$g(T)Q(T)h(T)(v) = Q(T)f(T)(v) = \circ$$

$$h(T)P(T)g(T)(v) = P(T)f(T)(v) = \circ$$

بنابراین $Q(T)h(T)(v) \in U$ و $P(T)g(T)(v) \in W$.فرض کنید $u = Q(T)h(T)(v)$ و $w = P(T)g(T)(v)$ داریم: $v = u + w$.لذا $V \subseteq U + W$.حال چون U و W زیرفضاهای

V می‌باشند بنابراین $U+W \subseteq V$ در نتیجه $V = U+W$.حال نشان می‌دهیم $U \cap W = \{0\}$.
فرض کنید $v \in U \cap W$ بنابراین:

$$h(T)(v) = g(T)(v) = 0$$

و طبق (۱) داریم: $Q(T)h(T)(v) + P(T)g(T)(v) = v$ بنابراین $v = 0$ لذا $V = U \oplus W$.

۲۱ـ نشان می‌دهیم $\det(\lambda I_{2n} - R) = \det(-\lambda I_{2n} - R)$.

$$\det(\lambda I - R) = \begin{vmatrix} \lambda I_n - A & -B \\ -B & \lambda I_n + A \end{vmatrix}$$

n سطر اول را در (-1) ضرب می‌کنیم، لذا:

$$\det(\lambda I - R) = (-1)^n \begin{vmatrix} -\lambda I_n + A & B \\ -B & \lambda I_n + A \end{vmatrix}$$

حال جای n سطر اول را با n سطر دوم عوض به طریقه زیر می‌کنیم، بنابراین:

$$\det(\lambda I - R) = (-1)^n(-1)^n \begin{vmatrix} -B & \lambda I_n + A \\ -\lambda I_n + A & B \end{vmatrix}$$

حال n ستون اول را با n ستون دوم به طریقه زیر عوض می‌کنیم، بنابراین:

$$\det(\lambda I - R) = (-1)^n(-1)^n(-1)^n \begin{vmatrix} \lambda I_n + A & -B \\ B & -\lambda I_n + A \end{vmatrix}$$

حال n ستون اول را در (-1) ضرب می‌کنیم.در نتیجه:

$$\det(\lambda I - R) = (-1)^n(-1)^n(-1)^n(-1)^n \begin{vmatrix} -\lambda I_n - A & -B \\ -B & -\lambda I_n + A \end{vmatrix} = \det(-\lambda I - R)$$

بنابراین λ مقدار ویژه R است اگر و تنها اگر $-\lambda$ مقدار ویژه R باشد.

۲۲ـ فرض کنید T عملگر خطی روی F^n باشد که ماتریس وابسته آن نسبت به مبنای استاندارد F^n برابر ماتریس A است. چون $\operatorname{rank}(A) = ۱$ بنابراین $\operatorname{rank}(T) = ۱$ لذا $\operatorname{Im}(T)$ توسط یک بردار تولید می‌شود. فرض کنیم $\operatorname{Im}(T) = <\alpha_۱>$ حال $\{\alpha_۱\}$ را به مبنای $\{\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_n\}$ برای F^n توسعه می‌دهیم. بنابراین به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، λ_i عضو F وجود دارد که $T(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_۱$. ماتریس نمایش T نسبت به این مبنا به شکل زیر است:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & \lambda_۲ & \cdots & \lambda_n \\ ۰ & ۰ & & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & & ۰ \end{bmatrix}$$

چون A و B ماتریسهای یک عملگر خطی نسبت به دو مبنا می‌باشند بنابراین متشابهند لذا $\operatorname{trc}(A) = \operatorname{trc}(B)$، بنابراین:

$$\lambda_۱ = \operatorname{trc}(B) = ۰$$

در نتیجه: $T(\alpha_۱) = \lambda_۱ \alpha_۱ = ۰$ حال به ازای هر $۲ \leq i \leq n$ داریم:

$$T(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_۱ \Longrightarrow T^۲(\alpha_i) = T(\lambda_i \alpha_۱) = \lambda_i T(\alpha_۱) = ۰$$

بنابراین $T^۲ = ۰$ حال چون A ماتریس وابسته T است بنابراین A نیز پوچ توان است.

۲۳ـ فرض کنید $A^* = A^{-t}$ ابتدا بررسی کنید برای هر دو ماتریس $n \times n$ مختلط

$$(AB)^* = B^* A^* \quad , \quad (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$$

حال فرض کنید λ یک مقدار ویژه A باشد و X بردار ویژه متناظر با آن باشد، بنابراین :

$$AX = \lambda X \Longrightarrow (AX)^* = (\lambda X)^* \Longrightarrow X^*A^* = \bar{\lambda}X^*$$

حال طرفین رابطه اخیر را از چپ در X ضرب می‌کنیم، بنابراین:

$$X^*A^*X = \bar{\lambda}X^*X$$

حال با توجه به اینکه $A^* = A$، بنابراین:

$$X^*AX = \bar{\lambda}X^*X \Longrightarrow X^*\lambda X = \bar{\lambda}X^*X \Longrightarrow (\lambda - \bar{\lambda})X^*X = 0 \qquad (1)$$

فرض کنید $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ بنابراین $X^* = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n \end{bmatrix}$ در نتیجه: $XX^* = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\bar{x}_i$

لذا $XX^* = ||X||$ و چون $X \neq 0$ در نتیجه: $||X|| \neq 0$ و با توجه به رابطه (۱)، $\lambda = \bar{\lambda}$.

۲۴ـ داریم که $A^3 = I$ لذا A در چند جمله‌ای $x^3 - 1$ صدق می‌کند حال اگر $m(x)$ چند جمله‌ای مینیمال A باشد.لذا:

$$m(x)|x^3 - 1 = (x-1)(1 + x + x^2)$$

پس $m(x) = x - 1$ یا $m(x) = 1 + x + x^2$ یا $m(x) = x^3 - 1$ و چون A ماتریس 2×2 است لذا درجه چند جمله‌ای مینیمال آن حداکثر ۲ است پس $m(x) \neq x^3 - 1$ از طرفی اگر $m(x) = x - 1$ چون A در چند جمله‌ای مینیمال خود صدق می‌کند لذا $m(A) = 0$ بنابراین $A = I$ که تناقض است.پس:

$$m(x) = x^2 + x + 1$$

فرض کنید $f(x)$ چند جمله‌ای مشخصه A باشد.چون $f(x)$ از درجه ۲ و تکین است و $m(x)|f(x)$ الزاماً $f(x) = x^۲ + x + ۱$ حال طبق مسأله (۱) فصل سوم ضریب x برابر $-\mathrm{trc}(A)$ می‌باشد لذا $\mathrm{trc}(A) = -۱$.

۲۵ـ چون $A^۳ = I$ لذا A در چند جمله‌ای $x^۳ - ۱$ صدق می‌کند حال اگر $m(x)$ چند جمله‌ای مینیمال A باشد، لذا:

$$m(x)|x^۳ - ۱ = (x - ۱)(۱ + x + x^۲)$$

پس $m(x) = x - ۱$ یا $m(x) = ۱ + x + x^۲$ یا $m(x) = x^۳ - ۱$ و چون A ماتریس ۲×۲ است لذا درجه چند جمله‌ای مینیمال آن حداکثر ۲ است بنابراین $m(x) \neq x^۳ - ۱$ و اگر $m(x) = x - ۱$ چون A در چند جمله‌ای مینیمال خود صدق می‌کند لذا $m(A) = ۰$ پس $A = I$ که تناقض است.در نتیجه

$$m(x) = x^۲ + x + ۱$$

فرض کنید $f(x)$ چند جمله‌ای مشخصه A باشد.چون $f(x)$ از درجه ۲ است و $m(x)|f(x)$ با توجه به تکین بودن $f(x)$ داریم $f(x) = x^۲ + x + ۱$.طبق مسأله (۱) فصل سوم ضریب x برابر $-\mathrm{trc}(A)$ می‌باشد و جمله ثابت برابر $|A|$ می‌باشد.بنابراین $\mathrm{trc}(A) = -۱$ و $|A| = ۱$.

حال ماتریسی ۲×۲ را در نظر می‌گیریم که مجموع عناصر روی قطر آن -۱ و دترمینان آن برابر ۱ است (چنین انتخابی آسان است) فرض کنید:

$$\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین A در چند جمله‌ای $x^۲ + x + ۱$ صدق می‌کند.لذا:

$$A^۲ + A + I = ۰$$

با ضرب طرفین در $A - I$ داریم:

$$0 = (A^2 + A + I)(A - I) = A^3 - I \Longrightarrow A^3 = I$$

بنابراین $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ یک جواب مسأله است.

۲۶ـ با توجه به اینکه $A^p = I$ بنابراین A در چند جمله‌ای $x^p - 1$ صدق می‌کند حال اگر $m(x)$ چند جمله‌ای مینیمال A باشد، لذا:

$$m(x) | x^p - 1 = (x - 1)(1 + x + \cdots + x^{p-1})$$

بنابراین $m(x) = x - 1$ یا $m(x) = (1 + x + \cdots + x^{p-1})$ یا $m(x) = x^p - 1$ و چون A یک ماتریس $n \times n$ است لذا چند جمله‌ای مینیمال حداکثر از درجه n است و با توجه به اینکه $p > n + 1$ لذا چند جمله‌ایهای $m(x) = x^p - 1$ و $m(x) = (1 + x + \cdots + x^{p-1})$ نمی‌توانند چند جمله‌ای مینیمال A باشند.بنابراین $m(x) = x - 1$ چند جمله‌ای مینیمال A است و چون A در چند جمله‌ای مینیمال خود صدق می‌کند لذا $m(A) = 0$ پس $A = I$.

۲۷ـ فرض کنید v عضوی ناصفر از V باشد با توجه به اینکه $T = cI$ لذا $T(v) = cv$ بنابراین v یک بردار ویژه عملگر خطی T است.حال فرض کنید λ یک اسکالر مخالف c و مقدار ویژه عملگر خطی T باشد لذا بردار ناصفر v وجود دارد که $T(v) = \lambda v$ از طرفی $T(v) = cv$، بنابراین:

$$\lambda v = cv \Longrightarrow (\lambda - c)v = 0 \Longrightarrow \lambda = c \quad \text{یا} \quad v = 0$$

که تناقض است لذا T مقدار ویژه‌ای جز c ندارد.

۲۸ـ با توجه به اینکه $A^r = I$ لذا A در چند جمله‌ای $x^r - 1$ صدق می‌کند.فرض کنید $a_1, a_2, \cdots, a_r$ ریشه‌های rام واحد باشند، لذا:

$$x^r - 1 = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_r)$$

اگر $m(x)$ چند جمله‌ای مینیمال A باشد با توجه به اینکه A در $x^r - 1$ صدق می‌کند، بنابراین:

$$m(x) | x^r - 1 = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_r)$$

بنابراین t_1 و t_2 و $\cdots$ و t_s وجود دارند که:

$$m(x) = (x - a_{t_1})(x - a_{t_2}) \cdots (a - x_{t_s})$$

حال چون $m(x)$ و چند جمله‌ای مشخصه A عوامل تحویل ناپذیر یکسان دارند و چند جمله‌ای مشخصه از درجه n است لذا چند جمله‌ای مشخصه دارای نمایش زیر است:

$$(x - a_{t_1})^{p_1}(x - a_{t_2})^{p_2} \cdots (x - a_{t_s})^{p_s} \qquad (*)$$

که در آن برای $1 \leq i \leq s$، p_iها طبیعی‌اند و $p_1 + p_2 + \cdots + p_s = n$ در چند جمله‌ای $(*)$ با توجه به نمایش آن ضریب جمله x^{n-1} برابر $-p_1 a_{t_1} - p_2 a_{t_2} - \cdots - p_s a_{t_s}$ از طرفی ضریب جمله x^{n-1} در چند جمله‌ای مشخصه برابر $-\mathrm{trc}(A)$ می‌باشد، لذا:

$$\mathrm{trc}(A) = p_1 a_{t_1} + p_2 a_{t_2} + \cdots + p_s a_{t_s}$$

پس $\mathrm{trc}(A)$ مجموع برخی از ریشه‌های rام واحد است.

۲۹ـ با توجه به اینکه $(T - \lambda I)^m = 0$ لذا T در چند جمله‌ای $(x - \lambda)^m$ صدق می‌کند فرض کنید $m(x)$ چند جمله‌ای مینیمال T باشد لذا $m(x) | (x - \lambda)^m$.بنابراین r طبیعی وجود دارد که $r \leq m$ و $m(x) = (x - \lambda)^r$.حال چون عوامل تحویل ناپذیر $m(x)$ و چند جمله‌ای مشخصه برابر است بنابراین λ تنها ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه است.

۳۰ـ الف. چون u یک بردار ویژه T است بنابراین $T(u) = \lambda u$ که λ اسکالر است با استقراء نشان می‌دهیم برای هر n طبیعی $T^n(u) = \lambda^n u$.

$n = 1$ واضح است فرض کنید $n > 1$ و $T^{n-1}(u) = \lambda^{n-1}u$ حال T را بر طرفین اثر می‌دهیم:

$$T(T^{n-1}(u)) = T(\lambda^{n-1}u) \Longrightarrow T^n(u) = \lambda^{n-1}T(u) \Longrightarrow T^n(u) = \lambda^n u$$

ب. اسکالر λ مقدار ویژه T است لذا بردار ناصفر v وجود دارد که $T(v) = \lambda v$ حال T^{-1} را در طرفین اثر می‌دهیم، لذا:

$$T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(\lambda v) \Longrightarrow v = \lambda T^{-1}(v) \Longrightarrow \lambda^{-1}v = T^{-1}(v)$$

پس λ^{-1} مقدار ویژه T^{-1} است.بنابراین ثابت شد اگر λ مقدار ویژه T باشد آنگاه λ^{-1} مقدار ویژه T^{-1} است.حال چون λ^{-1} مقدار ویژه T^{-1} است بنابراین $\lambda = (\lambda^{-1})^{-1}$ مقدار ویژه $T = (T^{-1})^{-1}$ است و حکم ثابت است.

ج. فرض کنید A ماتریس وابسته T نسبت به یک مبنای V باشد.اگر T معکوس‌پذیر باشد پس A نامنفرد است، لذا:

$$0 \neq |A| = |A - 0I|$$

بنابراین صفر مقدار ویژه A نیست.حال فرض کنید صفر مقدار ویژه A نباشد، بنابراین :

$$0 \neq |A - 0I| = |A|$$

لذا A نامنفرد است پس T معکوس پذیر است.

۳۱ـ فرض کنید $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ مبنایی برای V باشد.چون هر بردار ناصفر یک بردار ویژه T است، بنابراین برای هر $1 \leq i \leq n$، اسکالر λ وجود دارد که:

$$T(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i$$

حال فرض کنیم $2 \le j \le n$ و بردار $\alpha_1 + \alpha_j$ را در نظر می‌گیریم.چون α_j و α_1 هر دو اعضای پایه هستند بنابراین $\alpha_1 + \alpha_j$ ناصفر است لذا اسکالر λ وجود دارد که:

$$T(\alpha_1 + \alpha_j) = \lambda(\alpha_1 + \alpha_j)$$

$$\Longrightarrow T(\alpha_1) + T(\alpha_j) = \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_j$$

$$\Longrightarrow \lambda_1\alpha_1 + \lambda_j\alpha_j = \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_j$$

$$\Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda)\alpha_1 + (\lambda_j - \lambda)\alpha_j = 0$$

چون $\{\alpha_1, \alpha_j\}$ مستقل خطی اند بنابراین $\lambda_j - \lambda = \lambda_1 - \lambda = 0$، لذا:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_j \qquad\qquad j = 2, \cdots, n$$

حال فرض کنید v بردار دلخواهی از V باشد بنابراین اسکالرهای $b_1, b_2, \cdots, b_n$ وجود دارند که:

$$v = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n \Longrightarrow$$

$$T(v) = T(b_1\alpha_1 + \cdots + b_n\alpha_n) = T(b_1\alpha_1) + T(b_2\alpha_2) + \cdots + T(b_n\alpha_n)$$

$$= b_1\lambda\alpha_1 + b_2\lambda\alpha_2 + \cdots + b_n\lambda\alpha_n$$

$$= \lambda(b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n) = \lambda v$$

بنابراین T نگاشت اسکالر است.

۳۲ـ فرض کنید T عملگر خطی وابسته ماتریس A نسبت به یک مبنای دلخواه F^n باشد.چون $\operatorname{rank}(A) = 1$ بنابراین $\dim \operatorname{Im}(T) = \operatorname{rank}(T) = 1$ لذا $\operatorname{Im}(T)$ توسط یک بردار تولید می‌شود.فرض کنید $\operatorname{Im}(T) = <\alpha>$ چون $T(\alpha) \in \operatorname{Im}(T)$ بنابراین اسکالری مثل β وجود دارد که $T(\alpha) = \beta\alpha$.حال v را عضو دلخواهی از F^n در نظر می‌گیریم لذا اسکالری مثل λ

وجود دارد که:

$$T(v) = \lambda\alpha \Longrightarrow T(T(v)) = T(\lambda\alpha)$$
$$\Longrightarrow T^{2}(v) = \lambda T(\alpha)$$
$$\Longrightarrow T^{2}(v) = \lambda\beta\alpha = \beta(\lambda\alpha)$$

حال با توجه به اینکه $T(v) = \lambda\alpha$، بنابراین $T^{2}(v) = \beta T(v)$ و چون $v \in F^n$ دلخواه بود لذا $T^{2} = \beta T$ از طرفی A ماتریس وابسته T است لذا $A^{2} = \beta A$.پس A در چند جمله‌ای $x^{2} - \beta x$ صدق می‌کند حال اگر $m(x)$ چند جمله‌ای مینیمال ماتریس A باشد لذا $m(x)|x^{2} - \beta x$.پس ریشه‌های $m(x)$ فقط می‌توانند صفر یا β باشند حال چون $m(x)$ و چند جمله‌ای مشخصه عوامل تحویل ناپذیر یکسان دارند لذا ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه نیز صفر یا β است حال با توجه به اینکه $\beta \neq 1$ بنابراین $\det(I - A) \neq 0$ زیرا در غیر این صورت ۱ نیز ریشه چندجمله‌ای مشخصه است که تناقض است لذا $I - A$ وارون پذیر است.

۳۳ـ فرض کنید m کوچکترین اندیسی باشد که $\{V_1, V_2, \cdots, V_m\}$ مستقل خطی است.اگر $m = n$ حکم ثابت است، فرض کنید $n > m$ بنابراین بردار V_{m+1} را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای مجموعه $\{V_1, V_2, \cdots, V_m\}$ نوشت، لذا:

$$V_{m+1} = a_1V_1 + a_2V_2 + \cdots + a_mV_m \qquad (a_i \in F, i = 1, 2, \cdots, m)(1)$$

T را بر طرفین اثر می‌دهیم، لذا:

$$T(V_{m+1}) = T(a_1V_1 + a_2V_2 + \cdots + a_mV_m)$$
$$= T(a_1V_1) + T(a_2V_2) + \cdots + T(a_mV_m)$$
$$\Longrightarrow \lambda_{m+1}V_{m+1} = \lambda_1a_1V_1 + \lambda_2a_2V_2 + \cdots + \lambda_ma_mV_m \qquad (2)$$

حال طرفین رابطه (۱) را در λ_{m+1} ضرب می‌کنیم، لذا:

$$\lambda_{m+1}V_{m+1} = a_1\lambda_{m+1}V_1 + a_2\lambda_{m+1}V_2 + \cdots + a_m\lambda_{m+1}V_m$$

با توجه به تساوی فوق و رابطه (۲) داریم:

$$\lambda_1 a_1 V_1 + \lambda_2 a_2 V_2 + \cdots + \lambda_m a_m V_m = a_1\lambda_{m+1}V_1 + a_2\lambda_{m+1}V_2 + \cdots + a_m\lambda_{m+1}V_m$$

$$\Longrightarrow a_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1})V_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_{m+1})V_2 + \cdots + a_m(\lambda_m - \lambda_{m+1})V_m = 0$$

حال چون $\{V_1, V_2, \cdots, V_m\}$ مستقل خطی‌اند، لذا:

$$a_i(\lambda_i - \lambda_{m+1}) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

ولی به ازای $1 \leq i \leq m$، $\lambda_i \neq \lambda_{m+1}$، بنابراین $a_i = 0$.در نتیجه: $V_{m+1} = 0$ که تناقض است.

۳۴ـ A دارای n مقدار ویژه متمایز است لذا متناظر با این n مقدار ویژه دارای n بردار ویژه است و طبق مسأله ۳۳ چون مقادیر ویژه متمایزند این بردارهای ویژه مستقل خطی‌اند و چون تعداد آنها n تا است لذا مبنایی برای F^n تشکیل می‌دهند.

حال فرض کنید این مقدارهای ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ و بردارهای ویژه متناظر با آنها به ترتیب $u_1, u_2, \cdots, u_n$ باشند.همچنین فرض کنید T عملگر وابسته ماتریس A نسبت به مبنای $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ و S نیز عملگر ماتریس B نسبت به مبنای $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ باشد.چون F^n مبنایی از بردارهای ویژه عملگر خطی T دارد لذا T قطری پذیر است و طبق قضیه $F^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n}$ که V_{λ_i} فضای ویژه مقدار ویژه λ_i است، بنابراین:

$$n = \dim F^n = \dim(V_{\lambda_1}) + \dim(V_{\lambda_2}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_n})$$

پس لزوماً برای $1 \leq i \leq n$، $\dim(V_{\lambda_i}) = 1$.

حال فرض کنید $1 \leq i \leq n$ دلخواه باشد $T(u_i) = \lambda_i u_i$.عملگر S را به طرفین اثر می‌دهیم

$$S(T(u_i)) = S(\lambda_i u_i) \Longrightarrow ST(u_i) = \lambda_i S(u_i)$$

حال چون $AB = BA$ و A و B ماتریس وابسته عملگرهای T و S می‌باشند لذا $ST = TS$ بنابراین:

$$TS(u_i)) = ST(u_i) = \lambda_i S(u_i) \Longrightarrow S(u_i) \in V_{\lambda_i} \qquad (1)$$

با توجه به اینکه u_i عضوی نا صفر از V_{λ_i} می‌باشد و $\dim(V_{\lambda_i}) = 1$ لذا $V_{\lambda_i} =< u_i >$ و بنابر (۱) داریم: $S(u_i) \in< u_i >$ لذا اسکالر α_i وجود دارد که $S(u_i) = \alpha_i u_i$.حال چون $1 \leq i \leq n$ دلخواه بود لذا $u_1, u_2, \cdots, u_n$ بردارهای ویژه عملگر S و در نتیجه بردارهای ویژه ماتریس B نیز می‌باشند.

برعکس: فرض کنید $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ مقادیر ویژه متمایز A و $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ مقادیر ویژه ماتریس B باشند.طبق فرض A و B بردارهای ویژه یکسان دارند فرض کنیم $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ بردارهای ویژه A و B باشد به طوری که برای $1 \leq i \leq n$ بردار v_i متناظر مقادیر ویژه λ_i برای A و α_i برای B باشد.طبق مسأله ۳۳ این بردارها مستقل خطی‌اند لذا مبنایی برای F^n تشکیل می‌دهند حال فرض کنید T و S عملگرهای وابسته ماتریسهای A و B نسبت به مبنای $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ باشند، لذا:

$$S(v_i) = \alpha_i v_i, \quad T(v_i) = \lambda_i v_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

فرض کنید $1 \leq i \leq n$ دلخواه باشد اثر ST و TS را بر v_i در نظر می‌گیریم:

$$ST(v_i) = S(\lambda_1 v_i) = \lambda_i S(v_i) = \lambda_i \alpha_i v_i$$

$$TS(v_i) = T(\alpha_i v_i) = \alpha_i T(v_i) = \alpha_i \lambda_i v_i$$

بنابراین برای $1 \leq i \leq n$، $ST(v_i) = TS(v_i)$.

حال اگر $v \in F^n$ دلخواه باشد لذا $v = B_1 v_1 + B_2 v_2 + \cdots + B_n v_n$ که B_iها اسکالرند.

$$\begin{aligned} ST(v) = ST(\sum_{i=1}^{n} B_i v_i) &= \sum_{i=1}^{n} B_i ST(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} B_i TS(v_i) \\ &= TS(\sum_{i=1}^{n} B_i v_i) = TS(v) \end{aligned}$$

بنابراین $ST = TS$ و چون A و B ماتریسهای وابسته T و S می‌باشند لذا

$$AB = BA$$

۳۵ـ فرض کنید $v \in W$ با توجه به اینکه W فضای ویژه مقدار ویژه λ است لذا $T(v) = \lambda v$.حال S را بر طرفین اثر می‌دهیم، بنابراین :

$$S(T(v)) = S(\lambda v) \Longrightarrow ST(v) = \lambda S(v)$$

چون $ST = TS$ بنابراین $TS(v) = ST(v) = \lambda S(v)$.لذا: $S(v) \in W$ پس W تحت S پایا است.

۳۶ـ فرض کنید α برداری از W باشد چون T عملگری قطری پذیر است.لذا مبنایی برای V از بردارهای ویژه T موجود است.فرض کنید $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ مبنای V از بردارهای ویژه T باشد

لذا اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ وجود دارند که:

$$\alpha = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

حال با نادیده گرفتن جملات با ضرایب صفر و تجدید نامگذاری مجموع جمله‌هایی چون $\alpha_i u_i$ که دارای یک مقدار خاص می‌باشند $(a_i \neq 0)$ به عنوان یک بردار با ضریب یک، α را می‌توان به صورت $\alpha = \sum_{i=1}^{r} v_i$ نوشت که در آن v_i بردارهای خاص T با مقدارهای خاص متمایزند. فرض کنید λ_i مقدار خاص متناظر v_i باشد حال عملگر $S = (T-\lambda_2)(T-\lambda_3)\cdots(T-\lambda_r)$ را در نظر می‌گیریم. (ترکیب توابع) چون به ازای هر i عملگر $T-\lambda_i$ روی W پایا است لذا S روی W پایا است. بنابراین $S(\alpha) \in W$. از طرفی واضح است به ازای $2 \leq i \leq r$، $S(v_i) = 0$، بنابراین:

$$S(\alpha) = S(\sum_{i=1}^{r} v_i) = \sum_{i=1}^{r} S(v_i) = S(v_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\cdots(\lambda_1 - \lambda_r)v_1$$

حال چون $S(\alpha) \in W$ لذا $(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\cdots(\lambda_1 - \lambda_r)v_1 \in W$ و چون به ازای هر $2 \leq i \leq r$، $\lambda_1 - \lambda_i \neq 0$ لذا $(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\cdots(\lambda_1 - \lambda_r) \neq 0$ بنابراین $v_1 \in W$ و به همین ترتیب برای هر $2 \leq i \leq r$ ثابت می‌شود: $v_i \in W$. بنابراین به ازای هر $\alpha \in W$، α توسط بردارهای خاص T تولید می‌شد لذا W دارای مبنایی از بردارهای خاص T است لذا $T|_W$ قطری شدنی است.

۳۷ـ فرض کنید T و S عملگرهای خطی وابسته A و B نسبت به مبنای استاندارد F^n باشند و $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ مقادیر ویژه متمایز عملگر خطی T باشند حال چون T قطری پذیر است لذا $F^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$. با توجه به اینکه $AB = BA$ لذا $ST = TS$ بنابراین طبق مسأله ۳۵ به ازای هر $1 \leq i \leq r$ زیرفضای V_{λ_i} تحت S پایا است و چون S قطری پذیر است و V_{λ_i} تحت S پایا است لذا طبق مسأله ۳۶ مبنایی برای V_{λ_i} متشکل از بردارهای ویژه S وجود دارد و چون هر عضو این مبنا عضوی از V_{λ_i} است لذا هر عضو این مبنا یک بردار ویژه T نیز می‌باشد بنابراین

مبنای موجود برای V_{λ_i} همزمان بردارهای ویژه S و T می‌باشد و چون $F^n = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$ لذا اجتماع این مبناها مبنایی برای F^n است.پس مبنایی برای F^n موجود است که هر عضو آن همزمان بردار ویژه S و T است فرض کنید این مبنا $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ باشد و D ماتریس وابسته S نسبت به این مبنا و D' ماتریس وابسته T نسبت به این مبنا باشد لذا D و D' هر دو قطری‌اند.حال اگر P ماتریس تغییر مبنای استاندارد به $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ باشد، بنابراین :

$$PBP^{-1} = D \quad , \quad PAP^{-1} = D'$$

۳۸ـ چون میدان اعداد مختلط یک میدان بسته جبری است.بنابراین T حداقل یک مقدار ویژه دارد.فرض کنید λ مقدار ویژه آن باشد فضای ویژه λ یعنی V_λ تحت S پایا است زیرا اگر $v \in V_\lambda$ لذا $T(v) = \lambda v$ حال طرفین رابطه اخیر را با S ترکیب می‌کنیم، بنابراین :

$$ST(v) = \lambda S(v)$$

و چون $ST = TS$، پس:

$$T(S(v)) = ST(v) = \lambda S(v) \Longrightarrow S(v) \in V_\lambda$$

حال تحدید S روی V_λ را S' می‌نامیم لذا $S' : V_\lambda \to V_\lambda$.چون V_λ یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط است لذا حداقل یک مقدار ویژه مثل β دارد حال متناظر این مقدار ویژه یک بردار ویژه مثل u عضو V_λ وجود دارد لذا $S'(u) = Bu$ و چون S' تحدید S روی V_λ است لذا $S(u) = Bu$.از طرفی $u \in V_\lambda$ در نتیجه $T(u) = \lambda u$.بنابراین S و T یک بردار ویژه مشترک دارند.

۳۹ـ چون همه اعضای P_n چند جمله‌ایهای با درجه حداکثر n هستند لذا مشتق $n+1$ام آنها صفراست.بنابراین $D^{n+1} = 0$ یعنی D پوچ توان است لذا D^m پوچ توان است.حال فرض کنید

$D^m = T$ حال چون T پوچ توان است پس k طبیعی وجود دارد که $T^k = 0$، بنابراین :

$$I = -(T^k-I) = -(T-I)(I+T+T^2+\cdots+T^{k-1}) = -(I+T+\cdots+T^{k+1})(T-I)$$

حال با فرض $S = -(I + T + T^2 + \cdots + T^{k-1})$ داریم:

$$(T - I)S = S(T - I) = I$$

بنابراین $D^m - I = T - I$ وارون پذیر است.

۴۰ـ نشان می‌دهیم $\mathrm{Im}(S)$ تحت T پایا است.فرض کنید $u \in \mathrm{Im}(S)$ لذا $v \in V$ وجود دارد که $u = S(v)$ حال T را به طرفین اثر می‌دهیم و با توجه به اینکه S و T با هم جابجا می‌شوند داریم:

$$T(u) = TS(v) = ST(v) \in \mathrm{Im}(S)$$

حال نشان می‌دهیم K تحت T پایا است.فرض کنید $\alpha \in K$ بنابراین $S(\alpha) = 0$ حال T را به طرفین اثر می‌دهیم و با توجه به اینکه $ST = TS$، لذا:

$$TS(\alpha) = T(0) = 0 \Longrightarrow ST(\alpha) = 0 \Longrightarrow T(\alpha) \in K$$

قسمت دوم سئوال الف در مسأله ۳۵ پاسخ داده شده است.

ب. مسأله (۳۸)

۴۱ـ با توجه به مسأله (۷) اگر A ماتریسی پوچ توان باشد آنگاه $\mathrm{trc}(A) = 0$.حال فرض کنید $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ مولد فضای $M(n, F)$ باشد.چون $E_{11} \in M(n, F)$ (E_{11} ماتریسی است که مولفه $(1,1)$ام آن یک و بقیه مولفه‌های آن صفر است) لذا اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$

موجودند که:

$$E_{11} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k$$

$$\Longrightarrow \mathrm{trc}(E_{11}) = \mathrm{trc}(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{trc}(E_{11}) = \alpha_1 \mathrm{trc}(A_1) + \alpha_2 \mathrm{trc}(A_2) + \cdots + \alpha_k \mathrm{trc}(A_k)$$

$$\Longrightarrow 1 = 0$$

که تناقض است.

۴۲ـ فرض کنید T ماتریس وابسته به A نسبت به مبنای استاندارد F^n باشد لذا $T^2 = T$ ابتدا نشان می‌دهیم $F^n = \mathrm{Im}T \oplus \ker(T)$ برای این منظور فرض کنید $y \in \mathrm{Im}(T) \cap \ker(T)$ با توجه به اینکه $y \in \mathrm{Im}(T)$ لذا $x \in F^n$ وجود دارد که $T(x) = y$ و چون $y \in \ker(T)$ لذا $T^2(x) = T(y) = 0$ ولی $T^2 = T$ لذا $y = T(x) = 0$.از طرفی

$$\dim(\mathrm{Im}(T) \oplus \ker(T)) = \dim \ker(T) + \mathrm{rank}T = \dim F^n$$

و چون $\mathrm{Im}(T) \oplus \ker T$ زیرفضای F^n است لذا $F^n = \mathrm{Im}(T) \oplus \ker(T)$.حال فرض کنید $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ مبنایی برای $\mathrm{Im}(T)$ باشد پس $\mathrm{rank}(T) = r$ در نتیجه $\dim \ker(T) = n - r$.فرض کنید $\{\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n\}$ مبنایی برای $\ker(T)$ باشد.به ازای $1 \le i \le r$ داریم: $\alpha_i \in \mathrm{Im}(T)$ لذا $B_i \in F^n$ وجود دارد که :

$$\alpha_i = T(B_i) \Longrightarrow T(\alpha_i) = T^2(B_i) = T(B_i) = \alpha_i$$

از طرفی برای $r+1 \leq i \leq n$ داریم که : $T(\alpha_i) = 0$ لذا نمایش ماتریسی T نسبت به این مبنا به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حال چون دو ماتریس یک عملگر خطی متشابهند لذا A با ماتریس قطری فوق متشابه است که در آن $r = \operatorname{rank}(A)$.

۴۳ـ چون میدان اعداد مختلط بسته جبری است لذا چند جمله‌ای مشخصه A به عوامل خطی تجزیه می‌شود بنابراین A دارای n مقدار ویژه نه لزوماً متمایز می‌باشد.فرض کنید $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ مقادیر ویژه نه الزاماً متمایز A باشند لذا به ازای هر λ_i بردار ویژه‌ای مثل u_i موجود است به طوریکه:

$$Au_i = \lambda_i u_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

حال فرض کنید P ماتریسی باشد که ستونهای آن به ترتیب بردارهای $u_1, u_2, \cdots, u_n$ می‌باشند و D ماتریس $n \times n$ قطری باشد که درایه‌های روی قطر اصلی آن به ترتیب $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ باشد.در نتیجه $P = [u_1\ u_2\ \cdots\ u_n]$. (توجه شود که u_iها بردارهای ستونی $n \times 1$ می‌باشند لذا P ماتریسی $n \times n$ است) پس داریم:

$$\begin{aligned} AP = A[u_1\ u_2\ \cdots\ u_n] &= [Au_1\ Au_2\ \cdots\ Au_n] \\ &= [\lambda_1 u_1\ \lambda_1 u_2\ \cdots\ \lambda_n u_n] \\ &= [u_1\ u_2\ \cdots\ u_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD \end{aligned}$$

۴۴ـ ابتدا ثابت می‌کنیم اگر $B, C \in M(n, R)$ و بالا مثلثی باشند آنگاه BC نیز بالا مثلثی است و درایه‌های روی قطر BC حاصلضرب درایه‌های متناظر روی قطر B و روی قطر ماتریس C می‌باشد.فرض کنید $B = (b_{ij})$ و $C = (c_{ij})$، لذا:

$$c_{ij} = b_{ij} = 0 \qquad , i > j, 1 \leq i, j \leq n$$

حال اگر $BC = (d_{ij})$ باید نشان دهیم برای $i > j$، $d_{ij} = 0$، داریم:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}$$

حال فرض کنید $i > j$ بنابراین برای $1 \leq k \leq i - 1$ داریم: $b_{ik} = 0$ لذا:

$$d_{ij} = \sum_{k=i}^{n} b_{ik}c_{kj}$$

از طرفی برای $i \leq k \leq n$ با توجه به اینکه $i > j$ لذا $k > j$، بنابراین:

$$c_{kj} = 0 \qquad i \leq k \leq n$$

لذا $d_{ij} = 0$ برای $i > j$ بنابراین ماتریس BC بالا مثلثی است.

حال فرض کنید $1 \leq i \leq n$ با توجه به اینکه $d_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}c_{ki}$. اگر $k \neq i$ بنابراین $k > i$ یا $k < i$. اگر $k > i$ لذا $c_{ki} = 0$ و اگر $i > k$ پس $b_{ik} = 0$ در هر صورت اگر $i \neq k$، $b_{ik}c_{ki} = 0$ لذا $d_{ii} = b_{ii}c_{ii}$ حال به اثبات مسأله می‌پردازیم:

الف. چون A مثلثی شدنی است پس ماتریس نامنفرد P و ماتریس مثلثی D وجود دارند که $PAP^{-1} = D$.

واضح است که به ازای هر k طبیعی داریم: (به آسانی با استقراء نتیجه می‌شود)

$$PA^kP^{-1} = D^k$$

و چون D مثلثی است طبق آنچه در ابتدا ثابت شد $D^2, D^3, \cdots, D^k$ مثلثی هستند لذا A^k مثلثی شدنی است.

ب. با توجه به قسمت اول $PA^kP^{-1} = D^k$، لذا:

$$\operatorname{trc}(D^k) = \operatorname{trc}(PA^kP^{-1}) = \operatorname{trc}(P^{-1}PA^k) = \operatorname{trc}(A^k))$$

و مجدداً با توجه به قسمت اول $PAP^{-1} = D$ بنابراین A و D متشابهند.لذا مقادیر ویژه یکسان دارند حال اگر $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ مقادیر ویژه A باشند، چون ماتریس D مثلثی است لذا مقادیر ویژه آن عناصر روی قطر اصلی D می‌باشند و چون A و D مقادیر ویژه یکسان دارند صرفنظر از ترتیب اعضاء همان $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ می‌باشند.در ابتدای مسأله ثابت شد که عناصر روی قطر حاصلضرب دو ماتریس بالا مثلثی برابر حاصلضرب درایه‌های متناظر روی دو قطر ماتریس می باشند.بنابراین عناصر روی قطر ماتریس D^2 برابر $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^n$ و به همین ترتیب عناصر روی قطر ماتریس D^k برابر $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$ می‌باشند و با توجه به رابطه

$$\operatorname{trc}(A^k) = \operatorname{trc}(D^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

۴۵ـ ماتریس C دارای نمایش زیر است

$$C = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & \cdots & c_1c_n \\ c_1c_2 & c_2^2 & \cdots & c_2c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1c_n & c_2c_n & \cdots & c_n^2 \end{bmatrix}$$

حال اگر به ازای $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $c_i = 0$ لذا ماتریس C صفر است پس $\operatorname{rank}(C) = 0$

حال فرض کنید jای موجود است که $1 \leq j \leq n$ و $c_j \neq 0$ بدون اینکه به کلیت استدلال خللی

وارد شود فرض کنیم $c_1 \neq 0$ و سطر اول را بر c_1 تقسیم می‌کنیم.ماتریس زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1c_2 & c_2^2 & \cdots & c_2c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1c_n & c_2c_n & \cdots & c_n^2 \end{bmatrix}$$

حال به ازای $2 \leq i \leq n$، c_i برابر سطر اول را از سطر iام کم می‌کنیم لذا:

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس فوق یک سطر ناصفر دارد.پس $\operatorname{rank}(C) = 1$.بنابراین یک مقدار ویژه ناصفر داریم.پس اگر $f(x) = x^n + a_n x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ چند جمله‌ای مشخصه C باشد چون فقط یک مقدار ویژه ناصفر با درجه تکرار یک داریم لذا درجه تکرار صفر در $f(x)$ برابر $n-1$ می‌باشد بنابراین $x^{n-1}|f(x)$ لذا $f(x)$ باید به صورت $f(x) = x^n + a_n x^{n-1}$ باشد.و طبق مسأله (۱) فصل سوم ضریب جمله x^{n-1} برابر $-\operatorname{trc}(C)$ می‌باشد لذا $f(x) = x^n - \operatorname{trc}(C)x^{n-1}$.پس تنها مقدار ویژه ناصفر آن برابر $\operatorname{trc}(C) = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2$ می‌باشد.

۴۶ـ فرض کنید $I + A$ وارون نداشته باشد(فرض خلف).لذا $\det(I + A) = 0$ پس -1 یک مقدار ویژه A می‌باشد.بنابراین بردار ناصفر u وجود دارد که $Au = -u$ حال طرفین رابطه را از چپ در u^t ضرب می‌کنیم.لذا

$$u^t A u = -u^t u = -||u|| \qquad (1)$$

حال از طرفین رابطه (۱) ترانهاده می‌گیریم.لذا $u^tA^tu = -||u||$ با توجه به اینکه $A^t = A$ لذا

$$u^tAu = ||u|| \qquad (۱)$$

حال با مقایسه روابط (۱) و (۲) داریم: $||u|| = -||u||$ لذا $||u|| = ۰$ بنابراین $u = ۰$ که تناقض است.

حال قسمت دوم مسأله را بررسی می‌کنیم

$$P^tP = [(I-A)(I+A)^{-۱}]^t(I-A)(I+A)^{-۱}$$

$$= [(I+A)^{-۱}]^t(I-A)^t(I-A)(I+A)^{-۱}$$

$$= [(I+A)^t]^{-۱}(I-A^t)(I-A)(I+A)^{-۱}$$

$$= (I+A)^{-۱}(I-A)(I-A)(I+A)^{-۱}$$

حال طبق مسأله ۱۷ فصل دوم $(I+A)^{-۱}$ با $(I-A)$ جابجا می‌شود لذا

$$P^tP = (I-A)^{-۱}(I+A)(I+A)^{-۱}(I-A) = (I-A)^{-۱}(I-A) = I$$

۴۷ـ الف به ب. فرض کنید هر بردار ناصفر V یک بردار ویژه T است طبق مسأله (۳۱)، T یک نگاشت اسکالر است یعنی اسکالر λ موجود است که $T = \lambda I$ واضح است T با همه عملگرهای روی V من جمله عملگرهای خود توان جابجا می‌شود.

ب به الف. فرض کنید v عضو ناصفری از V باشد مجموعه $\{v\}$ را به پایه $\{v_۱, v_۲, \cdots, v_n\}$ برای V توسعه می‌دهیم که در آن $v = v_۱$.حال عملگر زیر را در نظر بگیرید:

$$E(v) = E(v_۱) = v, \qquad E(v_i) = ۰, \qquad i = ۲, ۳, \cdots, n \qquad (۱)$$

واضح است که E یک عملگر خود توان است.بنابراین $ET = TE$، لذا:

$$E(v) = v \Longrightarrow TE(v) = T(v) \Longrightarrow ET(v) = T(v)$$

حال با توجه به (۱) واضح است که $\mathrm{Im}(E) =< v >$.از طرفی

$$T(v) = ET(v) \in \mathrm{Im}(E) \Longrightarrow T(v) \in < v >$$
$$\Longrightarrow \exists \lambda \in F, T(v) = \lambda v$$

لذا v یک بردار ویژه T است.

۴۸ـ فرض کنید λ یک مقدار ویژه T باشد.لذا چند جمله‌ای ناصفر مثل $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_۱ x + a_۰$ وجود دارد که در آن $(a_m \neq ۰, m \leq n)$ و $T(f(x)) = \lambda f(x)$ بنابراین با توجه به اینکه $T(f(x)) = x^n f(\frac{۱}{x})$ لذا $x^n f(\frac{۱}{x}) = \lambda f(x)$ در نتیجه:

$$x^n(a_m \frac{۱}{x^m} + a_{m-۱}\frac{۱}{x^{m-۱}} + \cdots + a_۱ \frac{۱}{x} + a_۰)$$
$$= \lambda(a_m x^m + a_{m-۱}x^{m-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰)$$
$$\Longrightarrow a_۰ x^n + a_۱ x^{n-۱} + \cdots + a_m x^{n-m}$$
$$= \lambda a_m x^m + \lambda a_{m-۱} x^{m-۱} + \cdots + \lambda a_۱ x + \lambda a_۰$$

اگر $n - m > m$ آنگاه $f(x) = ۰$(چرا)، بنابراین باید $n - m \leq m$ باشد و چون درجه طرفین برابر است لذا

$$a_{n-m}x^m + a_{n-(m-۱)}x^{m-۱} + \cdots + a_m x^{n-m}$$
$$= \lambda a_m x^m + \lambda a_{m-۱}x^{m-۱} + \cdots + \lambda a_{n-m}x^{n-m}$$
$$a_p x^m + a_{p+۱}x^{m-۱} + \cdots + a_m x^p = \lambda a_m x^m + \lambda a_{m-۱}x^{m-۱} + \cdots + \lambda a_p x^p$$

(۱)

و با توجه به رابطه (۱) داریم: $a_p = \lambda a_m$ و $a_m = \lambda a_p$ در نتیجه: $a_m = \lambda^2 a_m$ و چون $a_m \neq 0$ لذا: $\lambda = \pm 1$.

حال اگر $\lambda = 1$ بنابراین با توجه به رابطه (۱)

$$a_p x^m + a_{p+1} x^{m-1} + \cdots + a_m x^p = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_p x^p$$

لذا باید $a_p = a_m$ و $a_{p+1} = a_{m-1}$ و $\cdots$ و $a_m = a_p$.یعنی بردار ویژه آن از چند جمله‌ای‌های به شکل $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ تشکیل شده است که $p = n - m \leq m$ و $a_p = a_m (a_m \neq 0)$ و $a_{p+1} = a_{m-1}$ و $\cdots$ و $a_m = a_p$ همچنین اگر $p \geq 1$ آنگاه

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0.$$

و اگر $\lambda = -1$ با توجه به رابطه (۱)

$$a_p x^m + a_{p+1} x^{m-1} + \cdots + a_m x^p = -a_m x^m - a_{m-1} x^{m-1} - \cdots - a_p x^p$$

لذا باید $a_p = -a_m$ و $a_{p+1} = -a_{m-1}$و $\cdots$ و $a_m = -a_p$ یعنی بردار ویژه آن از چند جمله‌ای‌های به شکل $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ تشکیل شده است که $p = n - m \leq m$ و $(a_m \neq 0)$ و $a_p = -a_{m-1}$ و $\cdots$ و $a_{m-1} = -a_{p+1}$ و $a_m = -a_p$ همچنین اگر $p \geq 1$ آنگاه

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0.$$

۴۹ـ توجه شود که $\det(A + xB)$ یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه n است فرض کنید $f(x) = \det(A + xB)$ لذا $f(0) = \det(A)$ و چون A معکوس پذیر است پس $f(0) \neq 0$ لذا $f(x)$ همواره صفر نیست بنابراین حداکثر n صفر دارد لذا مجموعه اعضایی از R مثل r که

$\det(A+rB)=\circ$ حداکثر n عضو است.

۵۰ـ چون B معکوس پذیر است ماتریس $Ax+B$ را از راست در B^{-1} ضرب می‌کنیم، لذا:

$$B^{-1}(A+xB)=B^{-1}A+xI=xI-(-B^{-1}A)$$

حال با فرض $D=-B^{-1}A$ لذا $B^{-1}(A+xB)=xI-(D)$، بنابراین:

$$\det(B^{-1}(A+xB))=\det(xI-D)$$

طرف راست چند جمله‌ای مشخصه D است لذا حداکثر n صفر دارد بنابراین $\det(B^{-1}(A+xB))$ حداکثر n صفر دارد حال با توجه به اینکه $\det(B)\neq\circ$، لذا $\det(A+xB)$ نیز حداکثر n صفر دارد.

۵۱ـ چون چند جمله‌ای مشخصه A به عوامل اول تجزیه شده است.لذا A مثلثی شدنی است و با ماتریس مثلثی متشابه است که روی قطر آن به ترتیب d_1 تا c_1 و d_2 تا c_2 و $\cdots$ و d_k تا c_k قرار دارند.و چون trc ماتریسهای متشابه برابرند لذا

$$\mathrm{trc}(A)=c_1d_1+c_2d_2+\cdots+c_kd_k.$$

۵۲ـ ماتریسهای زیر را در نظر بگیرید:

$$C=\begin{bmatrix}xI_n & A\\ B & I_m\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}I_n & \circ\\ -B & xI_m\end{bmatrix}$$

توجه شود که C و D ماتریسهای $(m+n)\times(m+n)$ می‌باشند و داریم:

$$CD=\begin{bmatrix}xI_n-AB & xA\\ \circ & xI_m\end{bmatrix}\qquad DC=\begin{bmatrix}xI_n & A\\ \circ & -BA+xI_m\end{bmatrix}$$

در نتیجه :

$$|CD| = x^m|xI_n - AB| \text{ و } |DC| = x^n|xI_m - BA|$$

ولی $|DC| = |CD|$ لذا $x^m|xI_n - AB| = x^n|xI_m - BA|$.اگر $m = n$ آنگاه چند جمله‌ای‌های مشخصه AB و BA یکسان می‌باشند.

۵۳ـ اگر A و B متشابه باشند لذا ماتریس نامنفرد P وجود دارد که $A = PBP^{-1}$ بنابراین A و B هم ارز می‌باشند.حال فرض کنید A و B هم ارز باشند.لذا ماتریسهای نامنفرد Q و P وجود دارد که $A = PBQ$.لذا A و B هم مرتبه می‌باشند.فرض کنید، $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = r$ چون $A^2 = A$ و $B^2 = B$ پس ماتریسهای نامنفرد C و D موجودند که

$$CAC^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad DBD^{1-} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین :

$$CAC^{-1} = DBD^{-1} \Longrightarrow D^{-1}CAC^{-1}D = B \Longrightarrow D^{-1}CA(D^{-1}C)^{-1} = B$$

لذا A و B متشابهند.

۵۴ـ ماتریس A دارای نمایش زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & & & 1 \\ 1 & 0 & \dots & & & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$AV(\alpha)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & & 1\\ 1 & 0 & \cdots & & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\ \alpha\\ \alpha^2\\ \vdots\\ \alpha^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha\\ \alpha^2\\ \vdots\\ \alpha^{n-1}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha\\ \alpha^2\\ \vdots\\ \alpha^{n-1}\\ \alpha^n\end{bmatrix}=\alpha V(\alpha)$$

پس α مقدار ویژه A و $V(\alpha)$ بردار ویژه متناظر با این مقدار ویژه است.

۵۵ـ ابتدا فرض کنید B یک ماتریس $n\times n$ نامنفرد باشد و $f_B(x)$ چند جمله‌ای مشخصه B و $f_{B^{-1}}(x)$ چند جمله‌ای مشخصه B^{-1} باشد، داریم:

$$\begin{aligned} f_{B^{-1}}(x)&=|xI-B^{-1}|=|B^{-1}(xB-I)|=|-xB^{-1}(\frac{1}{x}I-B)|\\ &=|-xB^{-1}||\frac{1}{x}I-B|\\ &=(-x)^n|B^{-1}|f_B(\frac{1}{x})\end{aligned}$$

حال به اثبات مسأله می‌پردازیم.فرض کنید چند جمله‌ای مشخصه A به صورت $f(x)=x^3+bx^2+ax+c$ می‌باشد.طبق مسأله (۱) فصل دوم، $C=|-A|$ و $b=-\mathrm{trc}(A)$ بنابراین $b=0$ و $c=-1$ لذا $f(x)=x^3+ax-1$ و طبق رابطه‌ای که در ابتدای مسأله ثابت شد، چند جمله‌ای مشخصه A^{-1} برابر است با

$$\begin{aligned} f_{A^{-1}}(x)&=(-x)^3|A^{-1}|f(\frac{1}{x})=(-x^3)\times 1\times(\frac{1}{x^3}+\frac{a}{x}-1)\\ &=x^3-ax^2-1\end{aligned}$$

مجدداً با استفاده از مسأله ۱ فصل دوم داریم: $-a = -\mathrm{trc}(A^{-1}) = 0$ لذا: $f(x) = x^3 - 1$ و چون A در چند جمله‌ای مشخصه خود صدق می‌کند پس $f(A) = 0$ بنابراین $A^3 = I$.

۵۶ـ فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریسی $n \times n$ باشد. ماتریس B_{ij} را به شکل زیر تعریف می‌کنیم که در آن: $i \neq j$) B_{ij} ماتریسی است که مولفه سطر iام و ستون jام آن ۱ است)

چون $i \neq j$ لذا B_{ij} ماتریسی با اثر صفر است بنابراین $B_{ij}A$ ماتریسی با اثر صفر است. اما

$$B_{ij}A = \begin{bmatrix} & & 0 & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ & & 0 & \end{bmatrix}$$

و لذا $\mathrm{trc}(B_{ij}A) = a_{ji}$. از طرفی $\mathrm{trc}(B_{ij}A) = 0$، بنابراین $a_{ji} = 0$ که در آن $i \neq j$ یعنی ماتریس A ماتریس قطری است :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

اکنون فرض کنید $i \neq j$ و ماتریس C_{ij} را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & & \\ & & -1 & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

بوضوح $\operatorname{trc}(C_{ij}) = 0$ آنگاه $\operatorname{trc}(C_{ij}A) = 0$ اما $\operatorname{trc}(C_{ij}) = a_{ii} - a_{jj}$ پس $a_{ii} = a_{jj}$ یعنی $A = \lambda I$.

۵۷ـ الف.چون ماتریس A ناصفر است لذا درایه‌های ناصفر دارد فرض کنید $a_{rs} \neq 0$ و با توجه به رابطه داده شده $a_{rs}a_{rs} = a_{ss}a_{rr}$ لذا $(a_{rs})^2 = a_{rr}a_{ss}$ و چون $a_{rs} \neq 0$ لذا $a_{rr}a_{ss} \neq 0$ بنابراین $a_{rr} \neq 0$ حال مجدداً با استفاده از رابطه داده شده به ازای هر $1 \leq k \leq n$ داریم: $(a_{rk})^2 = a_{rr}a_{kk}$.در نتیجه:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{rk})^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{rr}a_{kk} = a_{rr}\sum_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{rr}\operatorname{trc}(A)$$

حال با توجه به اینکه $(a_{rs})^2 \neq 0$ بنابراین $\sum_{k=1}^{n}(a_{rk})^2$ ناصفر است.لذا:

$$a_{rr}\operatorname{trc}(A) \neq 0, \qquad a_{rr} \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{trc}(A) \neq 0$$

ب. فرض کنید $1 \leq i, j \leq n$ بنابراین

$$a_{ir}a_{jr} = a_{rr}a_{ij} \qquad \text{و} \qquad a_{jr}a_{ir} = a_{rr}a_{ji}$$

حال چون طرف چپ تساویهای فوق با هم برابر است لذا $a_{rr}a_{ji} = a_{ji}a_{rr}$ و در سمت الف ثابت شد که $a_{rr} \neq 0$ لذا $a_{ij} = a_{ji}$ پس A متقارن است.

ج. طبق رابطه مفروض در مسأله برای هر $1 \leq i, j, k \leq n$ داریم:

$$a_{ik}a_{jk} = a_{kk}a_{ij}$$

چون A متقارن است (طبق قسمت ب) لذا $a_{jk} = a_{kj}$، بنابراین :

$$\begin{aligned} a_{ik}a_{kj} = a_{kk}a_{ij} &\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}a_{ij} \\ &\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = a_{ij}\sum_{k=1}^{n} a_{kk} \\ &\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = a_{ij}\operatorname{trc}(A) \end{aligned}$$

حال اگر $A^2 = (b_{ij})$ لذا $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$ در نتیجه: $b_{ij} = a_{ij}\operatorname{trc}(A)$ لذا هر درایه ماتریس A^2 برابر درایه متناظر آن در ماتریس A ضربدر $\operatorname{trc}(A)$ می‌باشد لذا $A^2 = \operatorname{trc}(A)A$.
لذا A در چند جمله‌ای $x^2 - \operatorname{trc}(A)x$ صدق می‌کند.حال اگر $m(x)$ چند جمله‌ای مینیمال A باشد لذا $m(x)|x^2 - \operatorname{trc}(A)x$.بنابراین:

$$m(x) = x^2 - \operatorname{trc}(A)x \quad \text{یا} \quad m(x) = x - \operatorname{trc}(A) \quad \text{یا} \quad m(x) = x$$

اگر $m(x) = x$ لذا $A = m(A) = 0$ که تناقض است.و اگر $m(x) = x - \operatorname{trc}(A)$ چون $m(A) = 0$، پس $A = \operatorname{trc}(A)I$ و طبق قسمت الف $\operatorname{trc}(A) \neq 0$ پس عناصر روی قطر A همگی ناصفرند و عناصری که روی قطر واقع نیستند صفر می‌باشند حال فرض کنید $i \neq k$ و با فرض $i = j$ در رابطه داده شده $(a_{ik})^2 = a_{ii}a_{kk}$ و چون $a_{ii} \neq 0$ و $a_{kk} \neq 0$ لذا $a_{ik} \neq 0$ که تناقض است.بنابراین $m(x) = x^2 - \operatorname{trc}(A)x$ حال اگر $f(x)$ چند جمله‌ای مشخصه A باشد پس $m(x)|f(x)$ و از طرفی $m(x)$ و $f(x)$ عوامل تحویل ناپذیر یکسان دارند لذا $1 \le p, q \le n$ وجود دارند که $p + q = n$ و $f(x) = x^q(x - \operatorname{trc}(A))^p$ در نتیجه:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^q\left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k[-\operatorname{trc}(A)]^{p-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{k+q}[-\operatorname{trc}(A)]^{p-k} \end{aligned}$$

حال چون در چند جمله‌ای مشخصه ضریب x^{n-1} برابر $-\mathrm{trc}(A)$ می‌باشد و در چند جمله‌ای بدست آمده ضریب x^{n-1} برابر $-\binom{p}{p-1}\mathrm{trc}(A)$ می‌باشد لذا $p = \binom{p}{1} = \binom{p}{p-1} = 1$ در نتیجه $q = n - 1$ لذا چند جمله‌ای مشخصه A به صورت $f(x) = x^{n-1}(x - \mathrm{trc}(A))$ می‌باشد.

۵۸ـ الف. چون A پوچ توان است لذا برای هر عدد صحیح $r \geq 1$، A^r پوچ توان است و طبق مسأله (۷)، $\mathrm{trc}(A^r) = 0$.

ب. با توجه به اینکه A یک ماتریس حقیقی است لذا می‌توان فرض کرد A یک ماتریس مختلط است چون هر چند جمله‌ای روی میدان اعداد مختلط به عوامل خطی تجزیه می‌شود فرض کنید چند جمله‌ای مشخصه A روی این میدان به صورت زیر باشد:

$$f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_n) \qquad , \lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \cdots, n$$

که λ_iها الزاماً متمایز نیستند.بنابراین A روی میدان اعداد مختلط با یک ماتریس مثلثی متشابه است که اعضای روی قطر آن $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ می‌باشند.فرض کنید D ماترس مثلثی مذکور و P ماتریسی منفرد باشد که $PAP^{-1} = D$.واضح است که برای هر عدد طبیعی k داریم:(مسأله ۴۴ را ببینید)

$$\mathrm{trc}(A^k) = \mathrm{trc}(D^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

و با توجه به فرض مسأله که برای هر عدد طبیعی k، $\mathrm{trc}(A^k) = 0$ لذا:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = 0 \qquad , k = 1, 2, 3, \cdots$$

حال با استقراء نشان می‌دهیم اگر n یک عدد طبیعی و $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ اعضای یک میدان باشند و رابطهٔ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k = 0$ به ازای هر k طبیعی برقرار باشد آنگاه:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

حکم برای $n = ۱$ واضح است حال فرض کنید $n > ۱$ و حکم برای $n - ۱$ برقرار باشد و $\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_n$ اعضای یک میدان باشند که $\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i^k = ۰$ $(k \in \mathrm{N})$ حال ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم که اعضای آن روی قطر آن α_iها هستند.

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & \alpha_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \\ ۰ & ۰ & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

واضح است که

$$\mathrm{trc}(B^k) = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i^k = ۰ \qquad k = ۱, ۲, \cdots$$

فرض کنید $f(x) = x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱x + a_.$ چند جمله‌ای مشخصه B باشد لذا

$$f(B) = B^n + a_{n-۱}B^{n-۱} + \cdots + a_۱B + a_.I = ۰$$

$$\Longrightarrow \mathrm{trc}(B^n + a_{n-۱}B^{n-۱} + \cdots + a_۱B + a_.I) = ۰$$

$$\Longrightarrow \mathrm{trc}(B^n) + a_{n-۱}\mathrm{trc}(B^{n-۱}) + \cdots + a_۱\mathrm{trc}(B) + a_.\mathrm{trc}(I) = ۰$$

$$\Longrightarrow a_.n = ۰ \Longrightarrow a_. = ۰$$ (مشخصه میدان صفر فرض شده است)

ولی طبق مسأله (۱) فصل سوم $a_. = |-B|$ لذا $|B| = |-B| = ۰$ و از طرفی B ماتریس قطری است پس لذا $\alpha_۱\alpha_۲\cdots\alpha_n = |B| = ۰$، لذا iای وجود دارد که $\alpha_i = ۰$ بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد شود، فرض کنید $\alpha_n = ۰$ لذا

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} \alpha_i^k = ۰ \qquad k = ۱, ۲, \cdots$$

پس شرایط فرض استقراء برقرار است لذا $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$ و در نتیجه $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = \alpha = 0$ حال چون $(k \in \mathbb{N})$ و $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = 0$ بنابراین :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

بنابراین چند جمله‌ای مشخصه به صورت $f(x) = x^n$ درمی‌آید حال چون A در چند جمله‌ای مشخصه خود صدق می‌کند لذا $A^n = 0$.پس A پوچ توان است.

۵۹ـ فرض کنید k عدد طبیعی دلخواهی باشد.

$$(ST - TS)^k = (ST - TS)^{k-1}(ST - TS)$$
$$= (ST - TS)^{k-1}ST - (ST - TS)^{k-1}TS$$

حال چون $ST - TS$ با S جابجا می‌شود لذا هر توان $ST - TS$ با S جابجا می‌شود بنابراین $(ST - TS)^{k-1}S = S(ST - TS)^{k-1}$

پس

$$(ST - TS)^k = S(ST - TS)^{k-1}T - (ST - TS)^{k-1}TS$$

حال با فرض $R = S(ST - TS)^{k-1}$، لذا:

$$(ST - TS)^k = RT - TR \Longrightarrow \mathrm{trc}(ST - TS)^k = \mathrm{trc}(RT - TR) = 0$$

لذا چون k دلخواه بود بنابراین برای هر عدد طبیعی k

$$\mathrm{trc}(ST - TS)^k = 0$$

بنابراین طبق مسأله قبل $ST - TS$ پوچ توان است.

تبصره: توجه شود که trc یک تبدیل خطی trc ماتریس وابسته آن نسبت به یک مبنای دلخواه

است.

۶۰ـ فرض کنید S تبدیلی خطی وابسته به ماتریس B نسبت به مبنای استاندارد $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ باشد. B ماتریس قطری است که اعضای روی قطر آن به ترتیب d_1 تا c_1 و d_2 تا c_2 و $\cdots$ و d_k تا c_k است. چون B ماتریس وابسته S نسبت به مبنای مذکور است لذا با فرض $d_0 = 0$ و $d_0 + d_1 + \cdots + d_{r-1} + 1 \leq i \leq d_1 + d_2 + \cdots + d_r$ برای $1 \leq r \leq k$ داریم:

$$S(\alpha_i) = c_r\alpha_i$$

حال فرض کنید T تبدیل خطی باشد که $ST = TS$ و T دارای نمایش زیر باشد

$$T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\alpha_j \qquad (a_{ij} = 0, i = 1, 2, \cdots, n)$$

و $d_0 + d_1 + \cdots + d_{r-1} + 1 \leq i \leq d_1 + d_2 + \cdots + d_r$ که در آن $1 \leq r \leq k$ لذا

$$TS(\alpha_i) = T(c_r\alpha_i) = c_r(a_{1i}\alpha_1 + a_{2i}\alpha_2 + \cdots + a_{ni}\alpha_n)$$

$$\begin{aligned} ST(\alpha_i) &= S(a_{1i}\alpha_1 + a_{2i}\alpha_2 + \cdots + a_{ni}\alpha_i) \\ &= a_{1i}S(\alpha_1) + a_{2i}S(\alpha_2) + \cdots + a_{ni}S(\alpha_n) \\ &= a_{1i}c_1\alpha_1 + \cdots + a_{j_1,i}c_1\alpha_{j_1} + a_{j_1+1,i}c_2\alpha_{j_1+1} + \cdots \\ &\qquad + a_{j_1+j_2,i}c_2\alpha_{j_1+j_2} + \cdots + a_{ni}c_k\alpha_n \end{aligned}$$

و با توجه به اینکه $ST(\alpha_i) = TS(\alpha_i)$ لذا داریم:

$$\begin{aligned} c_r(a_{1i}\alpha_1 + \cdots + a_{ni}\alpha_n) &= a_{1i}c_1\alpha_1 + \cdots + a_{j_1,i}c_1\alpha_{j_1} + \cdots \\ &\qquad + a_{j_0+j_1+\cdots+j_{r-1}+1,i}c_r\alpha_{j_0+j_1+\cdots+j_{r-1}+1} \\ &\qquad \cdots + a_{j_0+j_1+\cdots+j_r,i}c_r\alpha_{j_0+j_1+\cdots+j_r} + \cdots + a_{ni}c_k\alpha_n \end{aligned}$$

حال با توجه به اینکه $c_1, c_2, \cdots, c_r$ متمایزند و $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ مستقل خطی است بنابراین برای $d_0 + d_1 + \cdots + d_{r-1} + 1 \leq i \leq d_1 + d_2 + \cdots + d_r$ که در آن $1 \leq r \leq k$ داریم:

$$T(\alpha_i) = a_{p+1,i}\alpha_{p+1,i} + a_{p+2,i}\alpha_{p+2,i} + \cdots + a_{p+d_r,i}\alpha_{p+d_r,i}$$

که در آن $p = d_0 + d_1 + \cdots + d_{r-1}$.

حال فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریس T نسبت به مبنای مذکور باشد.برای نمایش ماتریس A ابتدا زیر ماتریسهایی که A را تشکیل داده‌اند در نظر می‌گیریم.اگر $1 \leq j \leq k$، زیر ماتریس A_j را به طریقه زیر در نظر می‌گیریم:

قرار می‌دهیم: $r_j = d_0 + d_1 + \cdots + d_{j-1} + 1$ و $s_j = d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_j$ و

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{r_j,r_j} & a_{r_j,r_j+1} & \cdots & a_{r_j,s_j} \\ a_{r_j+1,r_j} & & \cdots & a_{r_j+1,s_j} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{s_j,r_j} & a_{s_j,r_j+1} & \cdots & a_{s_j,s_j} \end{bmatrix}$$

لذا واضح است که A دارای نمایش زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \bigcirc \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & A_k \end{bmatrix} \qquad (1)$$

که در آن A_jها زیر ماتریسهای ارائه شده در بالا و بقیه درایه‌ها صفر می‌باشند.لذا اگر ماتریسی با B جابجا شود دارای نمایش ماتریسی به صورت فوق است.

برعکس: نشان می‌دهیم اگر A ماتریسی باشد که دارای نمایش فوق باشد آنگاه $AB = BA$.واضح

است که برای هر $1 \leq j \leq k$ ، A_j ماتریسهای $d_j \times d_j$ می‌باشند.ماتریس B دارای نمایش زیر است.

$$B = \begin{bmatrix} C_1 I_{d_1} & & \cdots & \\ & C_2 I_{d_2} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ & & \cdots & C_k I_{d_k} \end{bmatrix}$$

بنابراین :

$$AB = \begin{bmatrix} C_1 A_1 I_{d_1} & & \cdots & \\ & C_2 A_2 I_{d_2} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ & & \cdots & C_k A_k I_{d_k} \end{bmatrix} = BA$$

در نتیجه فضای ماتریسهایی که با ماتریس B جابجا می‌شوند متشکل از ماتریسهای با نمایش A که در (۱) آمده است می‌باشند و با توجه به اینکه برای هر $1 \leq j \leq k$ ماتریس A یک ماتریس $d_j \times d_j$ است لذا مجموعه زیر یک مبنای این فضا است.

$$\{E_{ij} | 1 \leq i, j \leq d_1\} \cup \{E_{ij} | d_1 + 1 \leq i, j \leq d_2\} \cup \cdots$$
$$\cup \{E_{ij} | d_1 + d_2 + \cdots + d_{k-1} + 1 \leq i, j \leq d_1 + d_2 + \cdots d_k\}$$

(توجه شود اثبات مبنا بودن مجموعه فوق برای ماتریسهای دارای نمایش به شکل A ساده است و به عهده خواننده می‌باشد.) و تعداد اعضای این مبنا برابر $d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_k^2$ می‌باشد.

۶۱ـ واضح است که φ_A یک تبدیل خطی است و داریم:

$$\dim \ker(\varphi_A) + \dim(\operatorname{Im}(\varphi_A)) = \dim(M(n, F)) = n^2$$

و طبق مسأله ۶۰ فضای ماتریسهایی که با ماتریس A جابجا می‌شوند دارای بعد $d_1^2+d_2^2+\cdots+d_k^2$ است و واضح است فضای ماتریسهایی که به A جابجا می‌شوند برابر $\ker(\varphi_A)$ می‌باشد.لذا: $\dim\ker(\phi_A) = d_1^2+d_2^2+\cdots+d_k^2$ بنابراین

$$\det(\varphi_A(M(n,F)) = \dim(\operatorname{Im}(\phi_A)) = n^2 - (d_1^2+d_2^2+\cdots+d_k^2)$$

۶۲ـ فرض کنید $\operatorname{rank}(L) = 1$ بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید چند جمله‌ای ویژه T تحویل ناپذیر باشد.قرار می‌دهیم $L(V) =< \alpha >$ و ادعا می‌کنیم

$$T^k(\alpha) \in \ker(L) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

و توجه کنیم که:

$$\operatorname{trc}(LT^k) = \operatorname{trc}(TST^k - ST^{k+1}) = 0$$

حال چون $\operatorname{rank}(L) = 1$ پس LT^k حداکثر از رتبه یک است و چون $\operatorname{trc}(LT^k) = 0$ طبق مسأله (۲۲) تبدیل LT^k پوچ توان است.یعنی مقادیر ویژه آن صفر است.

ولی $(LT^k)(\alpha) \in L(V) =< \alpha >$ لذا α یک بردار ویژه LT^k است و با توجه به اینکه مقادیر ویژه LT^k صفرند لذا:

$$LT^k(\alpha) = 0 \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

حال فرض کنید W فضای تولید شده توسط مجموعه $\{T^k(\alpha) | k = 0, 1, 2, \cdots\}$ باشد لذا W تحت T پایا است زیرا اگر $w \in W$ لذا اسکالرهای $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ و اعضای از W مثل $T^{m_1}(\alpha)$ و $T^{m_2}(\alpha)$ و $\cdots$ و $T^{m_r}(\alpha)$ وجود دارند که

$$w = \lambda_1 T^{m_1}(\alpha) + \lambda_2 T^{m_2}(\alpha) + \cdots + \lambda_r T^{m_r}(\alpha)$$

لذا:

$$T(w) = \lambda_1 T^{m_1+1}(\alpha) + \lambda_2 T^{m_2+1}(\alpha) + \cdots + \lambda_r T^{m_r+1}(\alpha) \in W$$

از طرفی $W \subseteq \ker(L)$ پس $V \neq W$ حال اگر T' تحدید T به W باشد یعنی $T' = T|_W$ لذا چند جمله‌ای مشخصه T' چند جمله‌ای مشخصه T را عاد می‌کند که تناقض است، بنابراین $\operatorname{rank}(L) > 1$.

۶۳ـ طبق مساله (۴۲)، هر ماتریس خود توان با یک ماتریس قطری متشابه است. لذا ماتریس قطری D و ماتریس وارون پذیر P موجود است که $PDP^{-1} = D$ با توجه به اینکه $A^2 = A$ لذا

$$D^2 = (PDP^{-1})^2 = PA^2P^{-1} = PAP^{-1} = D$$

چون D قطری است پس D به صورت $D = diag(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ می باشد. حال چون $D^2 = D$ پس برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم : $a_i^2 = a_i$، لذا $a_i = 0$ یا $a_i = 1$ واضح است که تعداد a_iهای ناصفر برابر رتبه D است و چون هر a_i ناصفر برابر یک است، لذا $\operatorname{rank}(D) = \operatorname{trc}(D)$ و چون A با D متشابه است در نتیجه: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{trc}(A)$.

۶۴ـ با توجه به اینکه λ یک مقدار ویژه A می باشد، پس بردار ناصفر v موجود است که $Av = \lambda v$. از طرفی $\operatorname{adj}(A).A = |A|I$. پس با توجه به رابطه اخیر و رابطه فوق داریم:

$$\operatorname{adj}(A).A(v) = \lambda \operatorname{adj}(A)v$$

$$\Longrightarrow |A|v = \lambda \operatorname{adj}(A)v \qquad (2)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{adj}(A)v = \frac{|A|}{\lambda}v \qquad (3)$$

لذا $\frac{|A|}{\lambda}$ یک مقدار ویژه $\operatorname{adj}(A)$ است.

حال اگر A قطری شدنی باشد پس R^n شامل مبنایی از بردارهای ویژه A است و طبق (۱) هر

بردار ویژه A یک بردار ویژه $\mathrm{adj}(A)$ است، لذا R^n شامل مبنایی از بردارهای ویژه $\mathrm{adj}(A)$ است، پس $\mathrm{adj}(A)$ قطری پذیر است.

۵.۵ پاسخ تشریحی نکات تستی

۱ـ نادرست، دو ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه یکسان دارند ولی متشابه نیستند.

۲ـ نادرست، زیرا دو ماتریس متشابه trc و det یکسان دارند ولی trc دو ماتریس داده شده برابر نیست.

۳ـ درست، مسأله یک فصل سوم را ببینید.

۴ـ نادرست ، زیرا در حالتی که $\lambda = ۰$ پس $\lambda x = ۰$.ولی بردار ویژه، یک بردار ناصفر است.

۵ـ درست ،مسأله یک فصل سوم را ببینید.

۶ـ نادرست ، زیرا ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ برابر ۱ و ۲ است و ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه ماتریس $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}$ برابر ۳ و ۴ است.ولی ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه $A + B$ برابر ۲ و ۸ است.

۷ـ درست ، هر ماتریس $n \times n$ که دارای n مقدار ویژه متمایز باشد قطری پذیر است.

۸ـ درست ، با توجه به اینکه $A^۲ = A$ پس A در چند جمله‌ای $x^۲ - x$ صدق می‌کند حال اگر $m(x)$ چند جمله‌ای مینیمال A باشد پس $m(x) | x^۲ - x = x(x - ۱)$ لذا ریشه‌های چند جمله‌ای مینیمال صفر و یک است.

۹ـ درست ، مسأله ۴۲ را ببینید.

۱۰ـ درست ، مسأله ۷ را ببینید.

۱۱ـ درست ، مسأله ۳ را ببینید.

۱۲ـ درست ، مسأله ۵۱ را ببینید.

۱۳ـ نادرست ، چون اعضای P_n حداکثر از درجهٔ n است پس مشتق $n+۱$ام آن صفر است لذا $D^{n+۱} = ۰$ و چون D پوچ توان است پس $\mathrm{trc}(D) = ۰$.

۱۴ـ درست ، مسأله ۱۰ را ببینید.

۱۵ـ درست ، قضیه است.

۱۶ـ درست ، چون چند جمله‌ای مشخصه هر ماتریس روی میدان اعداد مختلط به عوامل خطی تجزیه می‌شود پس هر ماتریس روی میدان اعداد مختلط مثلثی شدنی است.

فصل ششم

مسائل متفرقه

۱ـ فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ روی میدان اعداد مختلط باشد و $A^{2} = 0$.ثابت کنید A را می‌توان بصورت $A = BC$ نوشت که در آن B و C دو ماتریس $n \times n$ می‌باشند و $CB = 0$.

۲ـ فرض کنید $G = \{M_{1}, M_{2}, \cdots, M_{k}\}$ یک مجموعه متناهی از ماتریسهای $n \times n$ حقیقی باشد.که تحت ضرب تشکیل گروه می‌دهند.ثابت کنید اگر $\sum_{i=1}^{k} \operatorname{trc}(M_i) = 0$ آنگاه $\sum_{i=1}^{k} M_i = 0$.

۳ـ فرض کنید A ماتریس $n \times n$ و ناصفر باشد و B ماتریس ناصفری باشد که $AB = 0$.نشان دهید ماتریس مثل $AB = 0$ وجود دارد که $CA = 0$.

۴ـ اگر A، B و C سه ماتریس $n \times n$ روی میدان F باشند.نشان دهید:

$$\operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) \leq \operatorname{rank}(B) + \operatorname{rank}(ABC)$$

۵ـ دستگاه زیر را با ضرایب گویا در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&a_{۱۱}x_{۱} + a_{۱۲}x_{۲} + \cdots + a_{۱n}x_n = b_{۱} \\
&a_{۲۱} + a_{۲۲}x_{۲} + \cdots + a_{۲n}x_n = b_{۲} \\
&\vdots \\
&a_{m۱}x_{۱} + a_{m۲}x_{۲} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

فرض کنید این دستگاه دارای جوابی در میدان اعداد حقیقی مثل $(x_{۱}, x_{۲}, \cdots, x_n)$ است که :

$$x_i > ۰, \qquad i = ۱, ۲, \cdots, n$$

ثابت کنید این دستگاه دارای جوابی در میدان اعداد گویا می‌باشد که تمام مؤلفه‌های جواب مثبت هستند.

۶ـ فرض کنید T یک تبدیل خطی روی فضای برداری V باشد که V یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط است و k یک عدد طبیعی باشد که برای هر $x \in V$ مجموعه $\{x, T(x), \cdots, T^k(x)\}$ وابسته خطی است.ثابت کنید $\{I, T, \cdots, T^k\}$ وابسته خطی است.

۷ـ فرض کنید x_i و $y_i(i = ۱, ۲, \cdots, n)$ اعداد حقیقی دلخواه باشند.ثابت کنید برای $n \geq ۳$ ماتریس $S = (\sin(x_i + y_i))$ منفرد است.

۸ـ فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ روی میدان اعداد مختلط باشند ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{vmatrix} \geq ۰$$

۹ـ فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ روی میدان F باشد.ثابت کنید ماتریسهای $A_{۱}, A_{۲}, \cdots, A_{n-۱}$ وجود دارند که $\operatorname{adj}(A) = A_{۱}A_{۲}\cdots A_{n-۱}$ و $\det(A) = \det(A_i)$ برای $۱ \leq i \leq n-۱$.

۱۰ـ فرض کنید T یک عملگر خطی باشد.ثابت کنید T قطری پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\lambda \in F$ و $v \in V$ رابطه $(T-\lambda I)^m(v) = ۰$ نتیجه دهد $(T-\lambda I)(v) = ۰$.

۱۱ـ فرض کنید A و B به ترتیب ماتریسهایی ۲ × ۳ و ۳ × ۲ باشند و $AB = \begin{bmatrix} ۸ & ۲ & -۲ \\ ۲ & ۵ & ۴ \\ -۲ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$.

ثابت کنید $\begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ ۰ & ۹ \end{bmatrix}$.

۱۲ـ فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F باشد و $\{V_i\}_{i\in I}$ مجموعه‌ای از زیر فضاهای V باشند که برای هر $i, j \in I$ داریم $\dim(V_i) = \dim(V_j)$.اگر $|I| < |F|$ ثابت کنید یک زیر فضای حقیقی مثل W موجود است که:

$$V = V_i \oplus W, \qquad i \in I$$

۱۳ـ برای اعضای $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ از یک حلقه تعریف می‌کنیم

$$[a_۱, a_۲, \cdots, a_n] = \sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{\sigma ۱} a_{\sigma ۲} \cdots a_{\sigma n}$$

فرض کنید k یک عدد طبیعی و $A_۱, A_۲, \cdots, A_{۲k}$ ماتریسهای حقیقی $k \times k$ باشند ثابت کنید:

$$[A_۱, A_۲, \cdots, A_{۲k}] = ۰$$

۱۴ـ فرض کنید $M(n, F)$ فضای ماتریسهای $n \times n$ روی میدان F باشد.به ازأ چه nهایی برای هر سه ماتریس A و B و C عضو $M(n, F)$ رابطه زیر بر قرار است :

$$(AB - BA)^۲ C = C(AB - BA)^۲$$

۱۵ـ فرض کنید $A \in M(n, F)$ ماتریسی متقارن باشد و k عدد طبیعی دلخواهی باشد که $BA^k = ۰$.نشان دهید $BA = ۰$.

۱۶ـ فرض کنید $A \in M(n,F)$ ناصفر باشد.نشان دهید ماتریس ناصفر $B \in M(n,F)$ وجود دارد که $AB \neq 0$ خود توان می‌باشد.

۱۷ـ فرض کنید f یک تبدیل خطی از $M(n,F)$ به میدان F است و به ازای هر دو ماتریس $A,B \in M(n,F)$ رابطه $f(AB)=f(BA)$ بر قرار است ثابت کنید f مضربی از تابع trc است و اگر $f(I)=n$ آنگاه f خود تابع trc است .

۱۸ـ فرض کنید $A \in M(n,F)$ و $\mathrm{rank}(A)=1$ و $\mathrm{trc}(A)=0$ نشان دهید A پوچ توان است.

۱۹ـ فرض کنید $A \in M(n,\mathbb{C})$ بطوریکه $A=\bar{A}^t$ ثابت کنید تمام مقادیر ویژه A حقیقی‌اند.

۲۰ـ فرض کنید A یک ماتریس 2×2 روی میدان اعداد گویا باشد بطوریکه $A \neq I$ و $A^3=I$ مطلوبست $\mathrm{trc}(A)$.

۲۱ـ فرض کنید $A,B \in M(n,F)$ که در آن $B=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ نشان دهید AB و BA چند جمله‌ای مشخصه یکسان دارند.

۲۲ـ فرض کنید $A \in M(n,F)$ متقارن اریب باشد نشان دهید $I+A$ و $I-A$ نامنفرد می‌باشند.

۲۳ـ فرض کنید S و T دو عملگر خطی روی فضای با بعد متناهی V می‌باشند.ثابت کنید

$$\dim(\ker(ST)) \leq \dim(\ker(S)) + \dim(\ker(T))$$

۲۴ـ فرض کنید $A,B \in M(n,F)$ نا منفرد باشند.نشان دهید $A^{-1}B$ و BA^{-1} چند جمله‌ای مشخصه یکسان دارند.

۲۵ـ فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد و بردارهای X_1 و X_2 و $\cdots$ و X_n عضو V وابسته خطی باشند نشان دهید Y_1 و Y_2و $\cdots$ و Y_n که در آن $Y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j$ وابسته

خطی‌اند اگر و تنها اگر $A = (a_{ij})$ نامنفرد باشد.

۲۶ـ فرض کنید $A_1, A_2, \cdots, A_s \in M(n,F)$ ماتریسهایی نا منفرد باشند.نشان دهید $A_1A_2\cdots A_s$ و $A_2A_3\cdots A_sA_1$ و $A_3\cdots A_sA_1A_2$ و $\cdots$ چند جمله‌ایهای مشخصه یکسان دارند.

۲۷ـ فرض کنید W زیر فضای $M(n,F)$ متشکل از ماتریسهای با trc صفر است نشان دهید

$$W = \{AB - BA | A, B \in M(n,F)\}$$

۲۸ـ فرض کنید A یک ماتریس 3×3 حقیقی باشد و $A = (a_{ij})$ و $B = (k - a_{ij})$ که k یک عدد طبیعی است.$S(c)$ را جمع درایه‌های ماتریس C در نظر بگیرید نشان دهید:

$$S(\mathrm{adj}(A)) = S(\mathrm{adj}(B)) \qquad \text{و} \qquad |B| = kS(\mathrm{adj}(A)) - |A|$$

۲۹ـ فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان R باشد و $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیر فضاهای سره V باشند به طوری که برای هر n، $V_n \not\subseteq \cup_{j=i}^{\infty} V_j$ نشان دهید $\cup_{j=1}^{\infty} V_j$ زیر فضا نیست.

۳۰ـ مجموعه برداری $a_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n})$ $(1 \leq i \leq n)$ از فضای حقیقی را در نظر بگیرید.ثابت کنید که اگر:

$$|a_{ij}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|$$

آنگاه a_1 و a_2 و $\cdots$ و a_n مستقل خطی هستند.

۳۱ـ فرض کنید a_1 و a_2 و $\cdots$ و a_n اعداد حقیقی باشند دتر مینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

A Selection of LINEAR ALGEBRA Problems

Dr. M. Nikoukar *Amirkabir Univ.*
Mr. A. Moameni

شابک: ۹۶۴-۶۸۱۱-۳۷-X
ISBN: 964-6811-37-X

نشر فرناز