به نام خدا

تمرین دوم

جبر خطی کاربردی – بهار ۱۴۰۱

توضیحات

- پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و درصورت مشاهده هرگونه **تقلب** نمره **صفر** برای کل تمرین منظور خواهد شد.
- پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.
- در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق ایمیل la.spring1401.aut@gmail.com سوال خود را بپرسید.
- مهلت ارسال پاسخ ها تا ساعت **23:55 تاریخ ۱۹ اسفند** می‌باشد.
- با توجه به فشردگی برنامه تمرین ها در طول ترم، به هیچ عنوان امکان تمدید تمرین وجود نخواهد داشت.
- پاسخ خود را به صورت یک فایل pdf و با فرمت **HW?_Name_StudentNumber** آپلود کنید. (مثال: HW2_BardiaArdakanian_9831072).

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱- درستی یا نادرستی عبارات زیر را با آوردن دلیل مناسب تعیین کنید.

الف) اگر $A = [A_{11}\ A_{12}\ A_{21}\ A_{22}\ ]$ و $B = [B_1\ B_2\ ]$ باشد آنگاه بخش‌های B و A ، می‌توانند ضرب بلوکی شوند.

پ) اگر A^T یک ماتریس $n \times n$ باشد که $k(k < n)$ عنصر $pivot$ داشته باشد، آنگاه ماتریس A وارون پذیر نیست.

ت) اگر بتوان $A_{n\times n}$ را به فرم ماتریس همانی کاهش داد، آنگاه فضای ستونی A یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

ج) اگر A و B وارون پذیر باشند، آنگاه $A + B$ نیز وارون پذیر خواهد بود.

چ) اگر A و B وارون پذیر باشند، آنگاه $AB = BA$.

ه) فضای پوچ ماتریس $A_{m\times n}$ یک زیر فضا از $\mathbb{R}^m$ است.

۲- با توجه به ماتریس A به سوالات زیر پاسخ دهید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

الف) تجزیه LU را به دست آورید. (با نوشتن تمامی مراحل)

ب) با استفاده از نتیجه قسمت الف، معادله‌ی $Ax = (3, 10, 20)^T$ را حل کنید.

۳- اگر A, B ماتریس‌های مربعی باشند و $(I - AB)$ یک ماتریس معکوس پذیر باشد، نشان دهید که $(I - BA)$ نیز معکوس پذیر است. (راهنمایی: از $B(I - AB) = (I - BA)B$ استفاده کنید.)

۴- با توجه به ماتریس A به سوالات زیر پاسخ دهید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & c \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

الف) همه مقادیر c را پیدا کنید به طوری که ماتریس A وارون پذیر باشد.

ب) حال به ازای $c = 1$، وارون ماتریس A را محاسبه کنید.

۵- فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ است و $nullspace$ آن یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ است. همچنین $range$ آن توسط بردار غیر صفر v در $\mathbb{R}^5$، اسپن ($span$) می‌شود.

الف) m و n را بدست آورید.

ب) $rank$ و $nullity$ ماتریس A را بدست آورید.

۶- بررسی کنید کدام یک از زیر مجموعه‌های زیر یک زیر فضا ($subspace$) از $\mathbb{R}^3$ هستند. (به همراه دلیل)

الف) $\{(x, y, z) \mid 2x + y - 3z = 7\}$

ب) صفحه بردارهای (x_1, x_2, x_3) به طوری که $x_3 = 0x_2$.

ج) $\{(x\ , y\ , z) \mid 2x + 9y = 0\ , 8x - 5z = 0\}$

د)صفحه تمام بردارهای (x_1, x_2, x_3) به طوری که $x_3 - x_2 + 3x_1 = 0$.

۷- با توجه به ماتریس A به سوالات زیر پاسخ دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

الف) یک پایه برای $column\ space$ این ماتریس بیابید.

ب) یک پایه برای $nullspace$ این ماتریس بیابید.

ج) اگر $p = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$ نشان دهید p در فضای ستونی ماتریس A قرار دارد.

د) آیا $q = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ در $nullspace$ ماتریس A قرار دارد؟ توضیح دهید.

۸- موارد زیر را اثبات کنید:

الف) اگر ستون‌های B مستقل خطی باشند، ستون‌های AB نیز مستقل خطی هستند.

ب) اگر A, B, C ماتریس‌های وارون پذیر $n \times n$ باشند، آنگاه جواب معادله $C^{-1}(A + X)B^{-1} = I_n$ را بیابید. (X یک ماتریس مجهول است).

ج) اگر مجموع درایه‌های روی قطر اصلی یک ماتریس A را با $trc(A)$ نشان دهیم، آنگاه موارد زیر را اثبات کنید:

1. $trc(AB) = trc(BA)$

2. اگر $trc(AA^T) = 0$ آنگاه $A = 0$ است.

۹- اگر A, B ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشند و ماتریس $(A + B)$ وارون پذیر باشد، آنگاه تساوی زیر را اثبات کنید:

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A$$

۱۰- پایه B و بردار x را مطابق زیر در نظر بگیرید.

مختصات نقطه‌ای x نسبت به پایه B را بدست آورید.

$$B = \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}, x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۱۱- فرض کنید که A یک ماتریس $m \times n$ است و ماتریس‌های C, D ماتریس‌های $n \times m$ می‌باشند به طوری که $CA = I_{n\times n}$ و $AD = I_{n\times n}$. ثابت کنید $C = D$ و $m = n$.