

تربیت دبیران مدرسین، د. جبرجی - سری دوم بهنام اد
۹۶، ۷، ۱۹

۱- درباره تعداد جواب های دستگاه معادلات زیر بحث کنید زمانیکه (الف) $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ و (ب) $B=0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$$

(سج ۱)

۲- حرکت از گزاره های زیر از هر دو درستی اثبات و اگر نه رد کنید. در این گزاره $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(الف) اگر $A^2=0$ و λ مقدار ویژه ی A باشد، آنگاه $\lambda=0$ ؛

(ب) اگر $A^2=I_n$ ، آنگاه صفر مقدار ویژه ی A نیست؛

(ج) اگر A مقدار ویژه ی A باشد، آنگاه λ^2 مقدار ویژه ی A^2 است؛

(د) اگر λ^2 مقدار ویژه ی A^2 باشد، آنگاه λ مقدار ویژه ی A است.

(سج ۱)

۳- گزاره های زیر را ثابت کنید زمانیکه $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(الف) λ مقدار ویژه ی A است اگر و تنها اگر λ مقدار ویژه ی A^t باشد.

(ب) فرض کنید A معکوس پذیر باشد. λ مقدار ویژه ی A است اگر و تنها اگر $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه ی A^{-1} باشد؛

(ج) فرض کنید $P \in M_n(\mathbb{R})$ معکوس پذیر باشد. λ مقدار ویژه ی A است اگر و تنها اگر λ

مقدار ویژه ی $PA P^{-1}$ باشد.

(د) اگر $A^2 - 4A - 3A - 2I_n$ باشد، آنگاه $A^3 - 3A - 2I_n$ معکوس پذیر است. (سج ۲)

۴- فرض کنید $A \in M_{n,m}(F)$ و $B \in M_{m,n}(F)$ و $m < n$. مهم‌ترین فرض
 کنید BA مکتون پذیر باشد. تحول یافته‌تر طری می‌کمان A عینده
 ناصفر دارد. (راهنمای به مقدار جواب در دستگاه معادلات خطی $BAX=0$
 توصیف کنید. (اسطخ ۲)

۵- فرض کنید $A \in M_n(F)$ پرج توان باشد (لنی عدد صحیح مثبت k وجود دارد که
 $A^k=0$). ثابت کنید تنها مقدار ویژه A صفر است. (اسطخ ۲)

۶- فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$ یک ماتریس هرمیتی باشد. ثابت کنید تمام مقادیر
 ویژه A اعداد حقیقی هستند. (اسطخ ۳)

۷- فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ با (مستعار) باشد. ثابت کنید ماتریس $A+I_n$
 مکتون پذیر است. (اسطخ ۳)

(راهنمای به دستگاه معادلات خطی $(A+I_n)X=0$ توصیف کنید.)