به نام خدا

تمرین اول

جبر خطی کاربردی – بهار ۱۴۰۱

توضیحات

- پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و درصورت مشاهده هرگونه **تقلب** نمره **صفر** برای کل تمرین منظور خواهد شد.
- پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.
- در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق ایمیل la.spring1401.aut@gmail.com سوال خود را بپرسید.
- مهلت ارسال پاسخ ها تا ساعت **23:55 تاریخ ۱۵ اسفند ۱۴۰۰** می‌باشد.
- پاسخ خود را به صورت یک فایل pdf و با فرمت **HW?_Name_StudentNumber** آپلود کنید. (مثال: HW1_BardiaArdakanian_9831072).

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و در صورت درست بودن آن را اثبات کنید و در صورت نادرست بودن برای آن‌ها مثال نقض بیاورید.

الف) فرم نردبانی هر ماتریس یکتا است.

نادرست است. هر ماتریس دارای یک فرم نردبانی کاهش یافته منحصر به فرد می باشد اما بی شمار ماتریس نردبانی برای یک ماتریس وجود دارد. به شهود بهتر، زمانی است که شما یک ماتریس را به فرم نردبانی تبدیل میکنید. در صورتی که این ماتریس به فرم نردبانی را به ازای هر ردیف تحت عمل ردیفی *row scale* قرار دهیم، ماتریس حاصل هم ماتریسی متفاوت و به فرم نردبانی خواهد بود.

ب) دستگاه معادلات متناظر با ماتریس افزوده $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 6\\ 2 & -3 & 2 & 14\\ 3 & 1 & -1 & -2\end{bmatrix}$ ناسازگار است.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 6\\ 2 & -3 & 2 & 14\\ 3 & 1 & -1 & -2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

در هر ردیف خود یک *pivot* دارد که فرض را نقض می‌کند.

پ) تساوی $Ax = b$ سازگار است اگر ماتریس افزوده $[A \;\; b]$ در هر سطر یک درایه $pivot$ داشته باشد.

نادرست است. در واقع طبق تئوری 4 فصل 1تاب درسی معادله Ax=b سازگار است اگر ماتریس A در هر سطر یک درایه pivot داشته باشد. (به warning زیر تئوری 4 فصل 1 دقت کنید.)

ت) هر مجموعه شامل وکتور ۰، وابسته خطی است.

طبق تئوری 9 کتاب درسی درست است.

ث) بردارهای $\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\13\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ در فضای $\mathbb{R}^4$ مستقل خطی هستند.

درست است. می دانیم ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر $Ax = 0$ تنها دارای جواب بدیهی باشد. حال اگر بردارهای داده شده را ستون های یک ماتریس در نظر بگیریم و ماتریس افزوده متناظر با آن را به فرم کاهش یافته سطری در آوریم، داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ج) بردارهای $\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ در فضای $\mathbb{R}^4$ مستقل خطی نیستند.

طبق تئوری 4 فصل یک کتاب درسی می دانیم اگر یک ماتریس $m \times n$ بخواهد فضای R^m را span کند، باید در هر سطر خود pivot داشته باشد. اگر این سه بردار را ستونهای یک ماتریس درنظر بگیریم، چون این ماتریس 4×3 خواهد شد، نهایت 3 تا محور می تواند به ما بدهد و این درحالی است که ماتریس ما 4 سطر خواهد داشت؛ در نتیجه در هر سطر خود محور نخواهد داشت. بنابراین این سه بردار فضای R^4 را span نخواهند کرد. به عبارتی دیگر برای Span کردن فضای R^m، حداقل به m بردار در این فضا نیاز داریم.

چ) اگر S_1 و S_2 زیر مجموعه‌هایی از بردارهای $\mathbb{R}^n$ باشند که $span(S_1) = span(S_2)$ آنگاه $S_1 = S_2$

نادرست است. برای این قسمت مثال نقضی در R^2 میزنیم فرض کنید:

$S_2=\{ (1,0),(0,1),(3,3) \}$ $S_1=\{ (1,0),(0,1),(2,2) \}$

و واضح است $R^2=span(s_1)=span(s_2) = R^2$ اما $S_1 \neq S_2$

خ) اگر $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک مجموعه از بردارها عضو $\mathbb{R}^n$ که مستقل خطی باشند و $span(A) = \mathbb{R}^n$ آنگاه $B = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1\}$ نیز مجموعه مستقل خطی است که $span(B) = \mathbb{R}^n$.

نادرست. می‌توان اثبات کرد که B جواب غیر بدیهی دارد.

$$c_1(v_1 + v_2) + c_2(v_2 + v_3) + \cdots + c_n(v_n + v_1) = 0$$
$$(c_1 + c_n)v_1 + \cdots + (c_{n-1} + c_n)v_n = 0$$

اگر ضریب‌ها قرینه هم باشند آنگاه مجموعه برداری B می‌تواند جوابی غیربدیهی داشته باشد و نقیض فرض می‌باشد.

ه) اگر هر $r-1$ بردار از مجموعه بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_r$ مستقل خطی باشند آنگاه $v_1, v_2, \dots, v_r$ مستقل خطی است.

می‌توان مثال نقضی فراهم کرد:

۲- در زیر دو دستگاه معادلات مشاهده می‌کنید. برای این دستگاه‌ها ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل دهید، افزوده آن‌ها را به شکل کاهش یافته سطری پلکانی در بیاورید، در مورد تعداد جواب‌های این دستگاه‌ها بحث کنید، آن‌ها را به شکل پارامتریک برداری بیان کنید و در نهایت یک توصیف هندسی از این جواب‌ها ارائه دهید.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = -1 \\ -3x_2 - 6x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -4 & -9 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 \; is \; free, x_1 = 5x_3 - 2, x_2 = -2x_3 + 1$$

$$x: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Only \; trivial \; solution: x_1, x_2, x_3 = 0$$

$$x: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۳- در دستگاه معادلات زیر h و k را به گونه‌ای انتخاب کنید که:

a) معادلات جواب نداشته باشند.

b) معادلات جواب یکتا داشته باشند.

c) بیش از یک جواب داشته باشند.

❖ به هر قسمت به طور جداگانه پاسخ دهید.

$$\begin{cases} x_1 + hx_2 = 2 \\ 4x_1 + 8x_2 = k \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 4 & 8 & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 - \dfrac{(k-8)h}{8-4h} \\ 0 & 8-4h & k-8 \end{bmatrix}$$

$$R1 - \frac{h}{8-4h} R2 \to R2, R2 - 4R1 \to R2$$

$$\begin{cases} h = 2, k = 8 \text{ بی‌نهایت جواب} \\ h \neq 2 \text{ یک جواب} \\ h = 2, k \neq 8 \text{ بدون جواب} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + hx_2 = k \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & h & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 - 3\dfrac{k-6}{h-9} \\ 0 & 1 & \dfrac{k-6}{h-9} \end{bmatrix}$$

$$R1 - \frac{3}{h-9} R2 \to R2 R2 - 3R1 \to R2$$

$$\begin{cases} h = 9, k = 6 \text{ بی‌نهایت جواب} \\ h \neq 9 \text{ یک جواب} \\ h = 9, k \neq 6 \text{ بدون جواب} \end{cases}$$

۴- سه خط راست زیر را در صفحه xy در نظر بگیرید:

$$L_1: ax + by + c = 0$$
$$L_2: bx + cy + a = 0$$
$$L_3: cx + ay + b = 0$$

نشان دهید این سه خط در یک نقطه متقاطع‌اند اگر و تنها اگر $a + b + c = 0$.

خطوط را به شکل یک سر معادله در نظر میگیریم و دستگاه معادلات را برای آن ها تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} a & b & -c \\ b & c & -a \\ c & a & -b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{-c}{a} \\ 0 & c - \frac{-b^2}{a} & \frac{bc}{a} - a \\ 0 & a - \frac{bc}{a} & \frac{c^2}{a} - b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{-c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{\frac{bc}{a} - a}{c - \frac{b^2}{a}} \\ 0 & a - \frac{bc}{a} & \frac{c^2}{a} - b \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-c}{a} - \frac{\left(\frac{bc}{a} - a\right)}{\left(c - \frac{b^2}{a}\right)} . \frac{b}{a} \\ 0 & 1 & \frac{\frac{bc}{a} - a}{c - \frac{b^2}{a}} \\ 0 & 0 & \frac{c^2}{a} - b - \frac{\left(\frac{bc}{a} - a\right)}{\left(c - \frac{b^2}{a}\right)} . a - \frac{bc}{a} \end{bmatrix}$$

برای اینکه این دستگاه یک جواب داشته باشد باید درایه 3 3,مساوی 0 شود تا سطر آخر مساوی صفر شود در غیر اینصورت دستگاه جواب ندارد.پس داریم:

$$\frac{c}{a}-b-\frac{\frac{bc}{a}-a}{c-\frac{b^2}{a}}.a-\frac{bc}{a}=\frac{c^2-ab}{a}-\frac{\frac{bc-a^2}{a}}{\frac{ac-b^2}{a}}.\frac{a^2-bc}{a}$$
$$=\frac{(ac-b^2)(c^2-ab)+(a^2-bc)^2}{a(ac-b^2)}=0$$

$$(ac-b^2)(c^2-ab)+(a^2-bc)^2=ac^3+ab^3+a^4-3a^2bc=0$$

$$a(a^3+b^3+c^3-3abc)=a\big((a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)\big)=0$$
$$\rightarrow \boldsymbol{a+b+c=0}$$

همانطور که مشاهده کردید برای اینکه این دستگاه یک جواب داشته باشد باید $a+b+c=0$ باشد و از سوی دیگر اگر $a+b+c=0$ باشد آنگاه درایه 3 3,3صفر خواهد شد و در نتیجه دستگاه یک جواب خواهد داشت.

۵- به دستگاه معادلاتی که تعداد معادلات کمتر از مجهول‌ها باشد فرومعین *underdetermined* و به دستگاه معادلاتی که تعداد معادلات آن بیش از مجهول‌ها باشد فرامعین *overdetermined* گفته می‌شود. ثابت کنید دستگاه معادلات فرومعین در صورت سازگار بودن دارای تعداد جواب بی‌نهایت است همچنین مشخص کنید آیا یک دستگاه فرامعین می‌تواند سازگار باشد؟ وجود یا عدم وجود این موضوع را با دستگاهی با ۳ معادله و ۲ مجهول نشان دهید.

در یک سیستم uderdetermines همواره تعداد متغیر ها بیشتر از معادلات است و می‌دانیم نمی‌توانیم بیشتر از تعداد معدلات متغیر پایه داشته باشیم پس حداقل یک متغیر آزاد داریم اگر سیستم سازگار باشد هر مقداری به این متغیر آزاد دهیم به یک جواب متفاوت از دستگاه می‌رسیم پس سیستم جواب یکتا ندارد، همچنین دستگاه overdetermined می‌تواند سازگار باشد در زیر مثالی از این نوع دستگاه را می‌بینیم:

$$x_1+x_2=2$$
$$x_1-x_2=0$$
$$3x_1+2x_2=5$$

۶- فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ است که:

a) برای هر b در R^m معادله $Ax = b$ حداکثر یک جواب دارد، ثابت کنید ستون‌های ماتریس A باید مستقل خطی باشند.

با برهان خلف فرض کنیم که ستون‌های ماتریس A مستقل خطی نباشند آنگاه میتوان نوشت:

$$\exists\ xi \neq 0\ x1v1 + x2v2 + \cdots + xnvn = 0$$

که viها همان ستون‌های ماتریس A و xiها درایه‌های x هستند، اگر شرایط بالا برقرار باشد ما برای b=0 جوابی غیر از جواب بدیهی صفر یافته‌ایم و این متناقض با فرض اینکه معادله حداکثر یک جواب دارد هست پس فرض خلف باطل و حکم درست است.

b) n تا از ستون‌های آن محوری هستند، ثابت کنید برای هر b در $\mathbb{R}^n$ معادله $Ax = b$ حداکثر یک جواب دارد.

ابتدا فرض کنیم n>m با توجه به اینکه هر نقطه محوری در یک سطر و ستون خاص قرار دارد در نتیجه اگر n ستون محوری داشته باشیم آنگاه در واقع n نقطه محوری داریم پس n سطر محوری هم خواهیم داشت در حالی که m<n و این ممکن نیست پس m>n، حال اگر n ستون محوری داشته باشیم یعنی تمامی ستون‌ها محوری هستند، پس n سطر نیز محوری است و بقیه سطرها صفر هستند در نتیجه اگر این سطرها مقدار ناصفر داشته باشند معادله جواب ندارد و اگر مقدارشان صفر باشد انگاه معادله دقیقا یک جواب دارد.

۷- (۱) و (۲) فرض کنید مجموعه بردارها مستقل خطی باشند در مورد $a, \dots, f$ چه می‌توان گفت؟

.۱

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

برای اینکه ۳ بردار مستقل خطی باشند در صورتی که این بردارها را ستون ماتریسی مثل A در نظر بگیریم معادله Ax=0 باید تنها یک جواب بدیهی داشته باشد.در این صورت باید دقیقا ۳ نقطه محوری داشته باشد که

در اینصورت محل درایه‌های محوری همان a,c,f هستند پس اگر این درایه‌ها غیرصفر باشند این ۳ بردار مستقل خطی می شوند.

.۲

$$\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ 1 \end{bmatrix}$$

طبق قضیه‌ای بردارهای $\{v_1, v_2, \ldots, n\}$ مستقل خطی هستند اگر هرکدام را نتوان به صورت ترکیب خطی بردارهای قبلی آن نوشت. در اینجا داریم.

$$v1 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v2 = \begin{bmatrix} b \\ c \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v3 = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ 1 \end{bmatrix},$$

مشخص است v2 به صورت ضریبی از v1 نیست زیرا مولفه v2 غیرصفر است و این ممکن نیست که ضریبی از v1 باشد، همینطور v3 نیز نمی‌تواند ترکیب خطی v1و v2 باشد زیرا مولفه چهارم این دو بردارد صفر است پس در هر ترکیب خطی این دو بردار این مولفه صفر خواهد بود و برابر ۱ نمی‌شود پس این ۳ برای هر مقادیری از مجهولات مستقل خطی هستند.

-۸

الف) ثابت کنید اگر مجموعه بردارهای $v_1, v_2, \ldots, v_k$ مستقل خطی باشند و

$$v_{k+1} \notin span\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

آنگاه مجموعه‌ی $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$ یک مجموعه‌ی مستقل خطی است.

برهان خلف: اگر $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$ وابسته خطی باشد آنگاه $v_1, v_2, \ldots, v_k$ وابسته خطی است یا

$$v_{k+1} \notin span\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

$$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

$$c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k + c_{k+1} v_{k+1} = 0 \rightarrow non\ trivial\ solution\ of\ SU\{v_{k+1}\}$$

$$\begin{cases} c_{k+1} = 0: c_1v_1 + \cdots + c_kv_k = 0 \rightarrow non\ trivial\ solution\ of\ S \\ thus\ S\ is\ linear\ independent \\ c_{k+1}! = 0: c_1v_1 + \cdots + c_kv_k = -c_kv_k \end{cases}$$

$$thus\ v_{k+1}span(S): \frac{c_1}{-c_{k+1}}v_1 + \cdots + \frac{c_k}{-c_{k+1}} = v_{k+1}$$

ب) ماتریس M یک ماتریس $n \times n$ می‌باشد. برداری مانند b را در فضای $\mathbb{R}^n$ درنظر بگیرید به طوری که دستگاه معادلات خطی ناشی از ستون های M ناسازگار باشد. آیا برداری مانند a در $\mathbb{R}^n$ وجود خواهد داشت که معادله‌ی $Mx = a$ دارای یک جواب یکتا شود؟ (توضیح دهید)

خیر، اگر Mx=b دارای جواب نباشد، M در هر ستون خود نمی‌تواند محور داشته باشد. بنابراین چون M یک ماتریس nxn است، نهایت می‌تواند n-1 محور داشته باشد.بنابراین معادله ماتریسی Mx=a، به ازای هر a در R^n، حداکثر n-1 متغیر پایه (basic variable) و یک متغیر آزاد (free variable) خواهد داشت. در نتیجه Mx=a یا جوابی نخواهد داشت و یا بی‌نهایت جواب خواهد داشت.

۹- اگر $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ تبدیل خطی باشد به این صورت که :

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \qquad , \qquad L\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$$

الف) بردار $L\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)$ را بدست آورید.

می‌دانیم که بردارهای $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ پایه‌هایی برای R2 هستند. حال باید بردار $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ را به صورت ترکیب خطی از این دو پایه بنویسیم:

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = c1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c1+c2\\c2\end{bmatrix} \rightarrow c1 = -1\,, c2 = 2$$

حال با توجه به مقادیر($\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$)L را محاسبه می‌کنیم:

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = L\left(-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = -L\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + 2L\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = -\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\5\\2\end{bmatrix}$$

ب) فرمول $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ را بدست آورید.

دوباره می‌توانیم $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c1 + c2 \\ c2 \end{bmatrix} \rightarrow c1 = x - y\ ,\quad c2 = y$$

این مقادیر را در معادله بالا جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x - y)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حال با توجه به این فرمول($\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$)L را محاسبه می‌کنیم:

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = L\left((x - y)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = (x - y)L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + yL\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= (x - y)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x + 2y \\ 2x \end{bmatrix}$$

در نتیجه داریم:

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x + 2y \\ 2x \end{bmatrix}$$

۱۰- فرض کنید u و v بردارهایی مستقل خطی در $\mathbb{R}^3$ باشند و فرض کنید P صفحه‌ای باشد که از این دو بردار و مرکز مختصات می‌گذرد. نقاط P را به صورت پارامتری اینگونه نشان می‌دهیم $x = su + tv$. نشان دهید تبدیل خطی $P, T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را یا به یک صفحه گذرنده از مبدا یا یک خط گذرنده از مبدا یا به خود

مبدا مختصات نگاشت می‌کند. برای اینکه تصویر P نیز یک صفحه باشد $T(u),T(v)$ باید چه شرایط داشته باشند؟

چون هر نقطه روی این صفحه را به شکل x = su +tv نوشتیم پس داریم

$$T(x) = T(su+tv) = sT(u) + tT(v)$$

حال اگر تصویر دو خط u و v مستقل خطی باشند جواب یک صفحه است و اگر دو بردار بدست آمده در یک راستا باشند جواب یک خطی است و اگر هردوی این بردارها به یک نقطه نگاشت شوند جواب یک نقطه است.و چون همواره یک تبدیل خطی صفر را به صفر می‌نگارد پس همه این صفحات و یا خطوط از صفر می‌گذرند و اگر جواب یک نقطه باشد همان صفر است.

۱۱- در مورد هر یک از تبدیل‌های زیر خطی بودن یا نبودن را بررسی کنید. در صورت خطی بودن ماتریس استاندارد آن‌ها را بیابید.

در هر کدام تبدیلات زیر ابتدا خطی بودن را بررسی می کنیم،برای این موضوع باید دو شرط:

$$T(0) = 0$$

$$T(cu+dv) = cT(u) + dT(v)$$

برقرار باشند ،و در صورت خطی بودن بایستی ماتریس استاندارد تبدیل خطی را بیابیم. برای یا فتن ماتریس استاندارد تبدیل خطی،

$$A = [T(e1)\dots T(en)]$$

را می یابیم که ej ،Jامین ستون ماتریس همانی است.

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$T(x,y) = (3x-2y, x+3, 8y)$$

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3x - 2y \\ x + 3 \\ 8y \end{bmatrix}$$

$$T(\begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3cx - 2cy \\ cx + 3 \\ 8cy \end{bmatrix} != \begin{bmatrix} 3x - 2y \\ x + 3 \\ 8y \end{bmatrix}$$

$$thus\ is\ not\ linear$$

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$T(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y, -x - y + 2z)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y + 2z \\ 2x + y \\ -x - y + 2z \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xc - cy + 2cz \\ 2cx + cy \\ -cx - cy + c2z \end{bmatrix} = cT\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) \\ 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ -(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) \end{bmatrix}$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$thus\ is\ linear$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y) = (|x|, y)$$

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} |x| \\ y \end{bmatrix}$$

$$T(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} |x_1 + x_2| \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} != \begin{bmatrix} |x_1| + |x_2| \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$thus\ is\ not\ linear$$

۱۲ (امتیازی)- مربع‌های جادویی (*magic square*) یکی از ساختارهای جالب ترکیبیاتی در ریاضی هستند که در بخش‌ها گوناگون ریاضی کاربرد دارند و ارتباط حالبی بین مربع جادویی و ساختارهای گراقیکی و … وجود دارد، حتی این ساختارها در علوم دیگر از جمله مکانیک و کامپیوتر نیز کاربرد دارند و هنوز تعداد زیادی مسئله حل نشده ادر این زمینه وجود دارد. مربع جادویی یا وفقی جدولی است $n \times n$ که خانه‌های آن با اعداد مثبت ۱ تا n^2 پر شده است به نحوی که مجموع اعداد هر ستون عمودی و هر سطر افقی و قطر آن عدد ثابتی را نشان می‌دهد. برای مثال شکل زیر یک مربع جادویی 3×3 است:

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

❖ اگر تعداد مربع‌های جادویی 6×6 را بیابید نمره کل تکالیف شما کامل در نظر گرفته می‌شود :)

اگر M_i یک ماتریس $i \times i$ باشد که درایه‌های آن اعداد متناظر بر روی یک مربع جادویی $i \times i$ باشد آنگاه حاصل ضرب‌های ماتریسی زیر را بیابید:

$$M_1 \times [1], \quad M_2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad M_3 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad M_n \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

همچنین تعیین کنید یک ماتریس M_i با کدامیک از اعمال سطری پلکانی همچنان به شکل جادویی می‌ماند.

می‌دانیم $M_1=1$ پس $M_1 \times [1] = 1$ همچنین لازم است اشاره شود M2 وجود ندارد، اما به طور کلی برای Mn میدانیم که مربع جادویی شامل تمامی اعداد 1 تا n^2 است پس مجموع تمام اعداد بر روی آن برابر است با $\frac{(n^2+1)n^2}{2}$ از انجایی که مجموع تمامی اعداد واقع بر سطرها برابر است با پس مجموع اعداد واقع بر یک سطر برابر است با :

$$\frac{(n^2+1)n^2}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n^2+1)n}{2}$$

از این نتیجه میگیریم که :

$$Mn \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(n^2+1)n}{2} \\ \frac{(n^2+1)n}{2} \\ \vdots \\ \frac{(n^2+1)n}{2} \end{bmatrix}$$

همچنین نتیجه

می‌شود:

$$M3 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(3^2+1)3}{2} = 15 \\ \frac{(3^2+1)3}{2} = 15 \\ \frac{(3^2+1)3}{2} = 15 \end{bmatrix}$$

هیچکدام یک از اعمال سطری پلکانی باعث نمی‌شود ماتریس جادویی بماند.

تعداد مربع جادویی 6 در 6 هم سوال بازه هنوز جوابی براش نیست 😊