دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات

جبرخطی کاربردی

نیمسال دوم ۹۸ـ۹۷

مدرس :دکتر امیر مزلقانی

تمرین پنجم (مقادیر و بردار ویژه، تعامد و کمترین مربعات)

توجه !!!

- پاسخ سوالات فصل ۵و۶ را به دقت بخوانید و در صورت داشتن مشکل با تدریسیاران در میان بگذارید

تمارین:

۱. ماتریس مربعی A را درنظر بگیرید که مجموع هر سطر آن برابر s است، نشان دهید s یک مقدار ویژه برای A است. اگر به جای سطر مجموع درایه های ستون های یک ماتریس s باشد گزاره همچنان درست؟ با توجه به گزاره های بالا فرض کنید جمع درایه های ستون یک ماتریس ۱ باشد. فرض کنید که $\lambda \neq ۱$ یک مقدار ویژه آن ماتریس باشد و w بردار ویژه متناظر با λ باشد،ثابت کنید که جمع درایه های w برابر صفر است.

حل. بردار ویژه مورد نطر را به شکل $v = (۱\,۱ \cdots ۱)$ در نظر می گیریم در این صورت به وضوح داریم:

$$Av = sv$$

برای قسمت دوم نیز جواب بله است چون یک ماتریس و ترانهاده اش مقادیر ویژه یکسان دارند پس اگر A مجموع ستون هایش s باشد در این صورت A^T مجموع سطر هایش s است و از قسمت یک نتیجه حاصل می شود. برای قسمت اخر داریم

$$Av = \lambda v$$

درایه های دو طرف را باهم جمع می کنیم داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}v_i = \lambda(v_۱ + v_۲ + \cdots + v_n)$$

حال با یک تغییر ارایش داریم:

$$\sum_{j=۱}^{n} v_j \sum_{i=۱}^{n} a_{ij} = \sum_{j=۱}^{n} v_j = \lambda \sum_{j=۱}^{n} v_j$$

چون $\lambda \neq ۰$ در این صورت باید $\sum_{j=۱}^{n} v_j = ۰$ که حکم ثابت می شود.

◀

۲. برای ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ با مقادیر ویژه $\lambda_۱, \cdots, \lambda_n$ (نه لزوما متمایز) ثابت کنید:

$$detA = \lambda_۱ \cdots \lambda_n \qquad trA = \lambda_۱ + \cdots + \lambda_n$$

حل. داریم:

$$det(xI - A) = (x - \lambda_۱)\cdots(x - \lambda_n)$$

حال به جای x مقدار ۰ را جایگذاری می کنیم. در این صورت داریم:

$$|-A| = (-\lambda_1)\cdots(-\lambda_n) \rightarrow (-1)^n|A| = (-1)^n\lambda_1\cdots\lambda_n$$

پس حکم اول ثابت می شود. برای اثبات قسمت دیگر فرض کنید داشته باشیم

$$p(\lambda) = det(xI - A) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$$

در عبارت بالا ضریب x^{n-1} اینگونه تعیین می شود در هر مرحله از ۱ $- n$ تا از پرانتز ها x را انتخاب کنیم و از بقیه پرانتز ها λ_i را،در این صورت داریم ضریب x^{n-1} برابر است با:

$$-\lambda_1 x^{n-1} - \cdots - \lambda_n x^{n-1} = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x^{n-1}$$

حال از طریق دیگری این ضریب را پیدا می کنیم و آن با استفاده از بسط دترمینان است:
برای این کار روشی را برای به دست اوردن دترمینان معرفی می کنیم،فرض کنیم می خواهیم دترمینان ماتریس دلخواه B را بیابیم برای این کار داریم :

$$|B| = \sum_{i=1}^{n!} \sigma a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

که در این فرمول a_ij یک درایه از ماتریس و $j_1,\cdots,j_n$ جایگشتی از $1,2,\cdots,n$ است و σ علامت این جایگشت است(مفهوم علامت جایگشت تاثیری در فهم مسئله ما ندارد). حال داریم :

$$|xI - A| = \sum_{i=1}^{n!} \sigma a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

حال با توجه به تعریف بالا یکی از مولفه های این سیگما از حاصلضرب

$$(x-a_{11})\cdots(x-a_{nn})$$

به دست می اید بقیه مولفه های حداکثر ۲ $- n$ تا x دارند بنابراین حاصلجمع این مولفه ها چند جمله ای از درجه ۲ $- n$ از x است.که ان را با $q(x)$ نشان می دهیم. پس چند جمله ای مشخصه این ماتریس به شکل $p(x) = (x - a_{11})\cdots(x-a_{nn}) + q(x)$ است و چون درجه $q(x)$ حداکثر از درجه ۲ $- n$ است در نتیجه x^{n-1} ندارد و x^{n-1} از قسمت $(x-a_{11})\cdots(x-a_{nn})$ به دست می اید که برابر است با

$$-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x^{n-1}$$

و در نتیجه حکم ثابت می شود.

◀

۳. گزاره های زیر را ثابت کنید :

(آ) نشان دهید اگر a یک مقدار ویژه ماتریس وارون پذیر A باشد آنگاه $\frac{1}{a}$ مقدار ویژه برای معکوس ماتریس A است.

(ب) نشان دهید اگر $A^2 = 0$ باشد آنگاه تنها مقدار ویژه A صفر است.

(ج) S مقدار ویژه ای از A است اگر و تنها اگر مقدار ویژه ای از A^T باشد.

(د) نشان دهید A و A^T چندجمله ای سرشت نمای یکسان دارند.

حل. الف) دو طرف عبارت را از چپ در A^{-1} ضرب میکنیم:

$$AV = aV$$
$$A^{-1}AV = aA^-1V$$

$$V = aA{-}۱V$$
$$\frac{۱}{a}V = -۱V$$

ب) فرض کنید m مقدار ویژه A و x بردار ویژه متناظر با آن باشد، آنگاه داریم:

$$۰x = A^۲x$$
$$Amx = m^۲x$$
$$۰ = m^۲x$$

از آنجا که میدانیم x بردار ویژه غیر صفر A است، پس $m^۲ = ۰$ بوده و $m = ۰$ است.
ج) طبق روند زیر پیش می رویم: S مقدار ویژه ای از A است

$$\longleftrightarrow (A - SI)not - invertible$$
$$\longleftrightarrow (A - SI)^T not - invertible$$
$$\longleftrightarrow (A^T - SI)not - invertible$$

د) چون ترانهاده ماتریس I با خودش برابر است:

$$det(A^T - SI) = det(A^T - SI^T) = det(AT - (SI)^T) = det(A - SI)^T$$

▶

۴. گزاره های زیر را ثابت کنید (همه ماتریس های گفته شده مربعی هستند)

(آ) اگر A معکوس پذیر باشد و با B مشابه باشد آنگاه B معکوس پذیر است و معکوس A با معکوس B مشابه است.

(ب) اگر A با B مشابه باشد آنگاه $A^۲$ با $B^۲$ مشابه است.

(ج) اگر B با A و C با A مشابه باشد آنگاه B با C مشابه است.

(د) اگر A یک ماتریس قطری شدنی باشد و B با A مشابه باشد آنگاه B نیز قطری شدنی است.

(ه) اگر A و B مشابه باشند آنگاه رتبه یکسانی دارند.

حل. الف) اگر A مشابه B باشد آنگاه یک ماتریس معکس پذیر P وجود دارد که $B = P^{-۱}AP$ در اینصورت B معکوس پذیر است زیرا آن را به صورت ضرب چند ماتریس معکوس پذیر نوشتیم. با توجه به قضیه معکوس ضرب ماتریس ها داریم: $B^{-۱} = P^{-۱}A^{-۱}(P^{-۱})^{-۱}$ که نشان می دهد $A^{-۱}$ مشابه است با $B^{-۱}$.
ب) اگر $A = PBP^{-۱}$ پس داریم:
$$A^۲ = (PBP^{-۱})(PBP^{-۱}) = PB(P^{-۱}P)BP^{-۱} = PB^۲P^{-۱}$$
بنابر این $A^۲$ مشابه است با $B^۲$
ج) با توجه به فرض مشابهت مطرح شده در سوال داریم:
$P^{-۱}BP = A$ و $Q^{-۱}CQ = A$. بنابراین $Q^{-۱}CQ = P^{-۱}BP$. درصورتی که Q را از سمت چپ و $Q^{-۱}$ را از سمت راست ضرب کنیم به تساوی $QP^{-۱}BPQ^{-۱} = QQ^{-۱}CQQ^{-۱}$ می رسیم. بنابر این $C = QP^{-۱}BPQ^{-۱} = (PQ^{-۱})^{-۱}B(PQ^{-۱})$ که نشان می دهد B و C مشابه هستند.
د) اگر A قطری شدنی باشد پس می توان آن را به صورت $A = PDP^{-۱}$ نوشت و چون باB A مشابه است داریم : $B = QAQ^{-۱}$ آنگاه : $B = Q(PDP^{-۱})Q^{-۱} = (QP)D(QP)^{-۱}$ بنابراین B هم قطری شدنی است.
ه) اگر $A = PBP^{-۱}$ در نتیجه $rank(A) = rank(P(BP^{-۱})) = rank(BP^{-۱})$
می دانیم $rank(BP^{-۱}) = rank(B)$ (این نکته در مثال ۱۴ فصل ۴ کتاب اورده شده است) پس:
$rank(A) = rank(B)$.

▶

۵. فرض کنید A یک ماتریس ۲*۲ و حقیقی با یک مقدار ویژه مختلط $a-bi=e$ باشد و بردار متناظر آن به نام v در فضای $C^۲$ تعریف شده باشد

(آ) نشان دهید

$$aRe(v)+bIm(v)=A(Re(v)) \qquad -bRe(v)+aIm(v)=A(Im(v))$$

(ب) اگر P و C به صورت زیر تعریف شوند

$$A=PCP^{-۱} \qquad P=\begin{pmatrix} Re_v & Im_v \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ثابت کنید$AP=PC$

حل. الف)

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ &= (a-bi)(Re(v)+iIm(v)) \\ &= (aRe(v)+bIm(v))+i(aIm(v)-bRe(v)) \\ A(Re(v)) &= Re(Av)=aRe(v)+bIm(v) \\ A(Im(v)) &= Im(Av)=-bRe(v)+aIm(v) \end{aligned}$$

ب)

$$P=[Re(v)Im(v)]$$

با توجه به قسمت قبل داریم :

$$A(Re(v))=P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$A(Im(v))=P\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$AP=\begin{pmatrix} A(Re(v)) & A(Im(v)) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & P\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=PC$$

▶

۶. فرض کنید A ماتریس مربعی باشد و $A^۲=A$ چنین ماتریسی را ماتریس تصویر می نامند نشان دهید مقادیر ویژه یک ماتریس تصویر ۰ یا ۱ است.

حل. فرض کنیم x یک بردار ویژه غیر صفر از A باشد در این صورت داریم

$$Ax=\lambda x$$

$$A^۲x=\lambda^۲x \rightarrow Ax=\lambda^۲x \rightarrow \lambda x=\lambda^۲x \rightarrow (\lambda^۲-\lambda)x=۰ \rightarrow \lambda=۰ \quad or \quad \lambda=۱$$

▶

۷. می دانیم اگر a,b,c اعداد متمایزی باشند دستگاه زیر جواب ندارد. نشان دهید پاسخ کمترین مربعات دستگاه، صفحه ای است با معادله ی $\chi-۲y+۵z=\frac{a+b+c}{۳}$

$$\begin{aligned} x-۲y+۵z &= a \\ x-۲y+۵z &= b \\ x-۲y+۵z &= c \end{aligned}$$

حل. اگر $x=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ و $b=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ و $v=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$ و $A=\begin{pmatrix}1&-2&5\\1&-2&5\\1&-2&5\end{pmatrix}$ باشند، آنگاه دستگاه داده شده را می توان به صورت $Ax=b$ نوشت و پاسخ کمترین مربعات را از معادله ی $A^TAx=A^Tb$ به دست آورد. حال می دانیم $A^TA=vv^T+vv^T+vv^T$ و همچنین $A^Tb=av+bv+cv=(a+b+c)v$. پس $A^TAx=3(vv^T)x=3v(v^Tx)=3(v^Tx)v$ در ادامه از این تساوی برای یافتن جواب استفاده می کنیم.

$$A^TAx=A^Tb\to 3(v^Tx)v=(a+b+c)v\to v^Tx=\frac{a+b+c}{3}$$

با جایگذاری v^Tx به معادله ی $x-2y+5z=\frac{a+b+c}{3}$ می رسیم. ►

.۸

(آ) پاسخ کمترین مربعات دو معادله ی $ax=b$ و $cx=d$ را که در آن $(a,c)\neq(0,0)$ بدست آورید.

(ب) n معادله ی $a_jx=b_j$ داده شده اند به طوری که هیچ یک از a_j ها صفر نیست و همچنین $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n\in\mathbb{C}$. پاسخ مربعات این دستگاه را به دست آورید.

حل. در حل این سوال اگر x را ماتریس یک تبدیل خطی در نظر بگیریم آنگاه می توانیم با استفاده از روش ارائه شده در سوال ۸ آن را حل کنیم. در این صورت ما به دنبال ماتریسی می گردیم که تبدیل a_iها با آن ماتریس نسبت به b_iها کمترین مربعات خطا را داشته باشد. ►

.۹ فرض کنید n نقطه با مختصات $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ داریم و می خواهیم m و b را طوری به دست بیاوریم که خط $y=mx+b$ نزدیک ترین خط به این نقاط باشد. این مسئله را به صورت یک مسئله ی کمترین مربعات بیان کرده و آن را حل کنید.

حل. اگر خط مورد انتظار ما $f(x)$ باشد، هدف ما محاسبه کمترین مقدار $\sum_{i=1}^{m}\mid f(x_i)-y_i\mid^2$است. اگر $f(x)=a_1x+a_0$ آنگاه هدف ما یافتن دو ثابت a_0 و a_1 است به گونه ای که مقدار $E(a_0,a_1)=\sum_{i=1}^{m}\mid a_1x+a_0-y_i\mid^2$ کمینه شود. برای این کار لازم است مشتق این تابع نسبت به هر دو ثابت صفر شود یعنی: $\frac{\partial E}{\partial a_0}=\sum_{i=1}^{m}2(a_1x_i+a_0-y_i)=0$ و $\frac{\partial E}{\partial a_1}=\sum_{i=1}^{m}2(a_1x_i+a_0-y_i)x_i=0$ که از این دو حاصل می شود $ma_0+(\sum_{i=1}^{m}x_i)a_1=\sum_{i=1}^{m}y_i$ و $(\sum_{i=1}^{m}x_i)a_0+(\sum_{i=1}^{m}x_i^2)a_1=\sum_{i=1}^{m}x_iy_i$ که از حل این دو مقادیر ثابت به دست می آیند

$$a_0=\frac{(\sum_{i=1}^{m}x_i^2)(\sum_{i=1}^{m}y_i)-(\sum_{i=1}^{m}x_i)(\sum_{i=1}^{m}x_iy_i)}{m(\sum_{i=1}^{m}x_i^2)-(\sum_{i=1}^{m}x_i)^2} \text{ و } a_1=\frac{m\sum_{i=1}^{m}x_iy_i-(\sum_{i=1}^{m}x_i)(\sum_{i=1}^{m}y_i)}{m(\sum_{i=1}^{m}x_i^2)-(\sum_{i=1}^{m}x_i)^2}$$ ►

.۱۰

(آ) اگر بردار z بر بردارهای u_1 و u_2 عمود باشد و $W=span(u_2,u_1)$ آنگاه z بر W عمود است.

(ب) برای هر بردار y در زیرفضای W بردار $y-proj_wy$ بر زیرفضای W عمود است.

(ج) اگر بردار y در زیرفضای W باشد آنگاه تصویر متغامد y بر W خود y است.

حل. الف) هر بردار در زیرفضای W را میتوان به فرم $x=cu_1+du_2$ نوشت که در آن c و d اعداد ثابت هستند. حال اگر بردار z را در بردار x ضرب داخلی کنیم طبق خاصیت توزیع پذیری حاصل صقر خواهد شد.

$$z.x=cu_1.z+du_2.z=0$$

ب) بردار تصویر y بر زیرفضای W به صورت زیر مینویسیم:

$$y^p=\frac{y.u_1}{u_1.u_1}u_1+...+\frac{y.u_p}{u_p.u_p}u_p$$

حال اگر دو طرف معادله را از y کم کنیم و تک تک در بردار های پایه زیرفضای W ضرب داخلی کنیم خواهیم دید حاصل صفر خواهد شد یعنی بر زیرفضای W عمود است.
ج) اگر بردار مجموعه بردار های $U=u_1,u_2,...,u_p$ یک پایه ارتوگونال برای زیرفضای W باشد بردار y را می توان به فرم $y=au_1+bu_2+...+zu_p$ نوشت. حال اگر مقدار y را در رابطه $y^p=\frac{y.u_1}{u_1.u_1}u_1+...+\frac{y.u_p}{u_p.u_p}u_p$ قرار دهیم خواهیم دید حاصل برابر خود y خواهد شد. ►

۱۱. بردار $\begin{pmatrix} ۴ \\ ۸ \\ ۱ \end{pmatrix} = y$ و بردار $\begin{pmatrix} ۲/۳ \\ ۱/۳ \\ ۲/۳ \end{pmatrix} = u_۱$ و بردار $\begin{pmatrix} -۲/۳ \\ ۲/۳ \\ ۱/۳ \end{pmatrix} = u_۲$ و داریم $W = span(u_۲, u_۱)$:

(آ) اگر $U = (u۱ \quad u۲)$ مقدار U^TU و UU^T را بدست آورید.

(ب) مقدار $proj_w y$ و $y(UU^T)$ را بدست آورید.

حل. الف) دو ماتریس خواسته شده در سوال را بدست می آوریم.

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = U^TU$$

$$\begin{pmatrix} ۸/۹ & -۲/۹ & ۲/۹ \\ -۲/۹ & ۵/۹ & ۴/۹ \\ ۲/۹ & ۴/۹ & ۵/۹ \end{pmatrix} = UU^T$$

ب)

$$\begin{pmatrix} ۲ \\ ۴ \\ ۵ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴ \\ ۸ \\ ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۸/۹ & -۲/۹ & ۲/۹ \\ -۲/۹ & ۵/۹ & ۴/۹ \\ ۲/۹ & ۴/۹ & ۵/۹ \end{pmatrix} = UU^Ty = proj_w y$$

◀

۱۲. فرض کنید بردار u ناصفر در فضای R^n است و داریم $L = span(u)$ نشان دهید نگاشت $x \longrightarrow proj_L x$ یک تبدیل خطی است.

حل. اگر تبدیل گفته شده را به شکل $T(x) = \frac{x.u}{u.u}u$ ببینیم و برای هر x ، y عضو R^n و دو عدد ثابت c ، d خواهیم داشت:

$$T(cx+dy) = \frac{(cx+dy)u}{u.u}u$$

$$= \frac{cx.u + dy.u}{u.u}u$$

$$= \frac{cx.u}{u.u}u + \frac{dy.u}{u.u}u$$

$$= cT(x) + dT(y)$$

◀

۱۳. (امتیازی)فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با مقادیر ویژه متمایز $\lambda_۱, \cdots, \lambda_k$ باشد موارد زیر را ثابت کنید:

۱. بعد فضای ویژه مربوط به λ_k کمتر از تکرر آن است.

حل. فرض کنید بعد فضای ویژه مربوط به مقدار ویژه λ را با $dimE_\lambda$ و تکرر آن مقدار ویژه را با $m(\lambda)$ نشان می دهیم در واقع می خواهیم ثابت کنیم $dimE_\lambda \leq m(\lambda)$. فرض کنید $dimE_\lambda = k$ و $C = \{v_۱, \cdots, v_k\}$ پایه ای برای فضای ویژه λ باشد. C را به پایه ای چون $B = \{v_۱, v_۲, \cdots, v_k, w_۱, w_۲, \cdots, w_{n-k}\}$ گسترش می دهیم.اکنون ماتریس S که ستون های آن عناصر B هستند را در نظر می گیریم.به عبارت دیگر

$S = [v_۱|v_۲|\cdots|v_k|w_۱|\cdots|w_{n-k}]$. از انجاییکه B مستقل است ماتریس S معکوس پذیر خواهد بود.اکنون داریم

$$I = S^{-۱}S = [S^{-۱}v_۱|S^{-۱}v_۲|\cdots|S^{-۱}v_k|S^{-۱}w_۱|\cdots|S^{-۱}w_{n-k}]$$

که در آن e_i ستون i ام ماتریس I است($۱ \leq i \leq k$) می دانیم مقادیر ویژه A و $S^{-۱}AS$ یکی هستند.لذا $\chi_A = \chi_{S^{-۱}AS}$. (منظور از χ چند جمله ای مشخصه یک ماتریس است) بنابراین

$$S^{-۱}AS = S^{-۱}A[v_۱|v_۲|\cdots|v_k|w_۱|\cdots|w_{n-k}] = S^{-۱}[Av_۱|Av_۲|\cdots|Av_k|Aw_۱|\cdots|Aw_{n-k}]$$

$$= S^{-1}[\lambda v_1|\lambda v_2|\cdots|\lambda v_k|Aw_1|\cdots|Aw_{n-k}] = [\lambda S^{-1}v_1|\lambda S^{-1}v_2|\cdots|\lambda S^{-1}v_k|S^{-1}Aw_1|\cdots|S^{-1}Aw_{n-k}]$$
$$= [\lambda e_1|\lambda e_2|\cdots|\lambda S^{-1}v_k|\underbrace{S^{-1}Aw_1}_{=y_1}|\cdots|\underbrace{S^{-1}Aw_{n-k}}_{=y_{n-k}}]$$

بنابراین به ازای یک $q(x)$ خواهیم داشت

$$\chi_A = \chi_{S^{-1}AS} = |xI - S^{-1}AS| = (x-\lambda)^k q(x)$$

از طرف دیگر $\chi_A = (x-\lambda)^{m(\lambda)}p(x)$ پس

$$(x-\lambda)^{m(\lambda)}p(x) = (x-\lambda)^k q(x) \to k \le m(\lambda)$$

▶

۲. ماتریس A قطری شدنی است اگر و فقط اکر بعد فضای ویژه مربوط به λ_k برابر با تکرر آن باشد.

حل. فرض کنید $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ مقادیر ویژه متمایز A باشند و $k_i = dimE_{\lambda_i}$ و $S_i = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}\}$ پایه E_{λ_i} باشد. در این صورت به ازای هر $i \neq j$ داریم $S_i \cap S_j = \emptyset$. از این رو $k_i = m(\lambda_i)$ انگاه

$$|S| = \sum_{i=1}^{r} |S_i| = \sum_{i=1}^{r} k_i = \sum_{i=1}^{r} m(\lambda_i) = n$$

پس S مجموعه ای مستقل از n بردار ویژه A است لذا A قطری شدنی است. برعکس فرض کنید A قطری شدنی باشد پس مجموعه ای چون S حاوی n بردار ویژه مستقل خواهیم داشت. از قبل می دانیم که $k_i \le m(\lambda_i)$ پس اگر به ازای یک $1 \le t \le r$ داشته باشیم $k_t \neq m(\lambda_t)$ انگاه $k_t < m(\lambda_t)$. اگر $S_i \subseteq S$ مجموعه های بردار ویژه متناظر با λ_i باشد آنگاه S_i نیز مستقل خواهد بود و لذا S_i یک زیر مجموعه مستقل E_{λ_i} می باشد.پس $|S_i| \le k_i$.
از طرفی $S_i \cap S_j = \emptyset$ زیرا از قل می دانیم که یک بردار نمی تواند بردار ویژه دو مقدار متمایز باشد. لذا داریم

$$n = |S| = \sum_{i=1}^{r} |S_i| \le \underbrace{k_1}_{\le m(\lambda_1)} + \underbrace{k_2}_{\le m(\lambda_2)} + \cdots + \underbrace{k_t}_{< m(\lambda_1)} + \cdots + \underbrace{k_r}_{\le m(\lambda_r)}$$
$$< m(\lambda_1) + m(\lambda_2) + \cdots + m(\lambda_r) = n \to n < n$$

از تناقض اخیر حکم ثابت می شود. ▶

۱۴. (امتیازی)فرض کنید B پایه ای برای فضای برداری V باشد نشان دهید برای هر پایه مثل B برای این فضای برداری می توان ضرب داخلی روی آن تعریف کرد که اعضای آن پایه بر هم عمود باشند.

حل. فرض کنید $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد می خواهیم ضرب داخلی روی این فضای برداری تعریف کنیم که این پایه طبق آن تعریف متعامد یکه باشد،چون B یک پایه است برای دو بردار دلخواه v, w داریم:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

$$w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

حال ضرب داخلی دو بردار v, w را اینگونه تعریف می کنیم:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \beta_i$$

به راحتی قابل بررسی است که یان ضرب داخلی همه خواص ضرب داخلی را دارد و B تحت آن متعامد یکه است. ▶

سوالات برنامه نویسی:

۱. روش های مختلفی برای یافتن تقریبی مقدار ویژه یک ماتریس وجود دارد که یک از آن ها روش های تکرار شونده هستند،در زیر دو روش تکرار شونده برای یافتن تقریبی مقادیر ویژه یک ماتریس ارائه شده است،این دو روش را پیاده سازی کنید و سپس برای یک ماتریس $n \times n$ ، $n > ۲۰$ که درایه های آن اعداد حقیقی رندوم بین صفر و ۱۰ است ،تست کنید.

(آ) روش توانی برای تخمین زدن مقدار ویژه اکیدا غالب:
۱. یک بردار اولیه $x_۰$ که بزرگترین درایه آن ۱ است را انتخاب کن.
۲. برای $k = ۰, ۱, \cdots$ ، Ax_k را محاسبه کن .
فرض کن s_k درایه با بیشترین اندازه در A_k باشد حاصل $x_{k+۱} = \frac{Ax_k}{s_k}$ را محاسبه کن.
۳. برای تقریبا تمام انتخاب های ممکن $x_۰$ مجموعه s_k به مقدار ویژه غالب نزدیک می شود. همچنین مجموعه x_k به بردار ویژه متناسب نزدیک می شود.

(ب) روش توانی معکوس برای تخمین زدن مقدار ویژه اکیدا غالب:
۱. یک تخمین اولیه a که به اندازه کافی به L نزدیک است را انتخاب کن.
۲. یک بردار اولیه $x_۰$ که بزرگترین درایه آن ۱ است را انتخاب کن.
۳. برای $k = ۰, ۱, \cdots$
- $A - aIy_k = x_k$ را برای y_k حل کن.
- فرض کن s_k یک درایه در y_k باشد که اندازه اش بزرگترین مقدار ممکن است.
- $v_k = a + \frac{۱}{s_k}$ را محاسبه کن.
- $x_{k+۱} = \frac{y_k}{s_k}$ را محاسبه کن.

۴. تقریبا برای تمام انتخاب های $x_۰$ مجموعه v_k به مقدار ویژه L از A نزدیک می شود. همچنین مجموعه x_k به بردار ویژه متناظر نزدیک می شود.

۲. برای تخمین میزان تیک آف یک هواپیما مکان هواپیما در هر لخظه از زمان صفر تا ۱۲ برابر است با: ۰ ، ۸.۸، ۹.۲۹، ۶۳.۰، ۱۰۴.۷، ۱۵۹.۱، ۲۲۲.۰، ۲۹۴.۵، ۳۸۰.۴، ۴۷۱.۱، ۵۷۱.۷، ۶۸۶.۸، ۸۰۹.۲

۱) ضرایب کمترین مربعات برای معادله $y = b_۰ + b_۱t + b_۲t^۲$ را بدست آورید.

۲) از قسمت اول مقدار سرعت هواپیما در زمان $t = ۴/۵s$ را تخمین بزنید.