سوال:

فرض کنید که تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تعریف شده باشد. همچنین تساوی $T(u) = T(v)$ به ازای یک جفت بردار متمایز u و v متعلق به فضای برداری $\mathbb{R}^n$ برقرار است. آیا تبدیل خطی T یک تبدیل خطی پوشا از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ خواهد بود؟ دلیل خود را توضیح دهید.

پاسخ:

THEOREM 8

The Invertible Matrix Theorem

Let A be a square $n \times n$ matrix. Then the following statements are equivalent. That is, for a given A, the statements are either all true or all false.

a. A is an invertible matrix.
b. A is row equivalent to the $n \times n$ identity matrix.
c. A has n pivot positions.
d. The equation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has only the trivial solution.
e. The columns of A form a linearly independent set.
f. The linear transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ is one-to-one.
g. The equation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has at least one solution for each $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^n$.
h. The columns of A span $\mathbb{R}^n$.
i. The linear transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ maps $\mathbb{R}^n$ onto $\mathbb{R}^n$.
j. There is an $n \times n$ matrix C such that $CA = I$.
k. There is an $n \times n$ matrix D such that $AD = I$.
l. A^T is an invertible matrix.

تبدیل خطی T، پوشا نخواهد بود. زیرا از آنجایی که این تبدیل، یک تبدیل خطی است پس داریم:

$$T(u) = T(v) \Rightarrow T(u) - T(v) = 0 \xRightarrow{T(u)-T(v)=T(u-v)} T(u-v) = 0$$

از آنجایی که دو بردار u و v طبق فرض سوال متمایز هستند، بنابرین بردار $u - v \neq 0$. بنابراین در صورتی که ماتریس A را ماتریس استاندارد این تبدیل در نظر بگیریم، معادله $Ax = 0$ دارای جواب غیر بدیهی($Nontrivial$) است. که بنا به نقیض بند «d» از قضیه IMT داریم که ماتریس A وارون پذیر نخواهد بود و بنا به نقیض گزاره «i» قضیه IMT، تبدیل خطی مربوط به ماتریس استاندارد A پوشا از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ نخواهند بود.