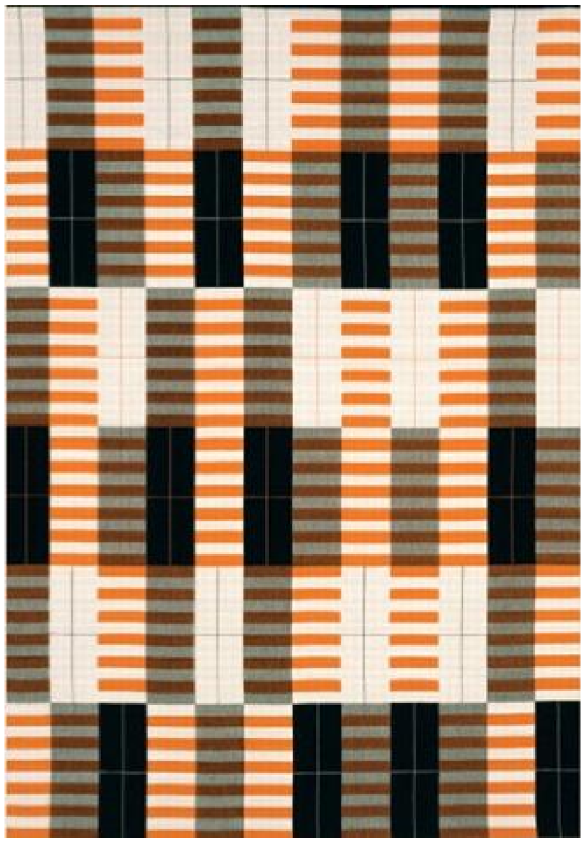
جبر خطی



استفن اچ. فریدبرگ - آرنولد جی. اینسل - لاورنس ای. اسپنس

ویرایش چهارم

مترجم: دکتر علی شاکر

بسم الله الرّحمن الرّحيم

فهرست مطالب

دیباچه

زبان و مفاهیم نظریهٔ ماتریس‌ها و در سطح کلی‌تر، زبان جبر خطی در علوم اجتماعی و طبیعی، علوم کامپیوتر و آمار کاربرد بسیار گسترده‌ای یافته‌اند. علاوه بر این، جبر خطی همچنان در بررسی‌های امروزی هندسه و آنالیز اهمیت بسیار زیادی دارد.

هدف اصلی از چاپ سوم این کتاب «جبر خطی» ارائهٔ یک بررسی دقیق از عناوین اصلی جبر خطی و نشان دادن قدرت این شاخه از ریاضیات، از طریق کاربردهای متنوع است. تأکید اصلی ما، بر ارتباط نزدیک بین تبدیلات خطی و ماتریس‌هاست. با این حال، هر جا که مناسب باشد، قضایا در حالت کلی‌تر با بعد نامتناهی بیان شده‌اند. بعنوان مثال، نظریهٔ خود را برای یافتن جواب‌های یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن و همچنین بهترین تقریب برای یک تابع پیوسته بر حسب چند جمله‌ای‌های مثلثاتی، به کار گرفته‌ایم.

اگر چه تنها پیشنیاز رسمی برای این کتاب، یک دورهٔ یک سالهٔ حسابان است، اما مطالعهٔ آن نیازمند تجربه و معلومات ریاضی یک دانشجوی سال سوم یا آخر لیسانس است که رشتهٔ اصلی او ریاضی است. [۱] این کتاب بخصوص برای درس دومی در جبر خطی مناسب است که بر فضاهای برداری مجرد تأکید داشته باشد. گرچه می‌توان آن را برای یک درس اول جدی با پایهٔ نظری قوی نیز به کار برد.

این کتاب به گونه‌ای تنظیم شده است که تدریس به چندین طریق متفاوت (به مدت سه تا شش ساعت در هفته) از روی آن ممکن باشد. مطالب اصلی (فضاهای برداری، تبدیلات خطی و ماتریس‌ها، دستگاه‌های معادلات خطی، دترمینان‌ها و قطری‌سازی) در فصل‌های ۱ تا ۵ گنجانده شده‌اند. دو فصل باقی‌مانده در مورد فضاهای ضرب داخلی و فرم‌های متعارف، کاملاً از یکدیگر مستقل هستند و می‌توان آنها را به ترتیب دلخواه مطالعه کرد. علاوه بر این، در طول کتاب کاربردهایی در زمینه‌هایی مانند معادلات دیفرانسیل، اقتصاد، هندسه و فیزیک موجود است. با این حال این کاربردها در روند ارائهٔ مطالب ریاضی کتاب نقش چندانی ندارند و می‌توان آنها را به تشخیص استاد حذف کرد.

سعی کرده‌ایم که امکان پوشش مطالب مهم جبر خطی را در دورهٔ یک ترمی فراهم کنیم. این هدف، ما را بر آن داشته است که مباحث اصلی را با مقدمات کمتری نسبت به شیوهٔ رایج ارائه کنیم. (به عنوان مثال، بررسی ما از فرم متعارف «جردن»

[۱] mathematics major

[2]، نیازی به نظریهٔ چند جمله‌ای‌ها ندارد.) این صرفه‌جویی به ما امکان آن را می‌دهد که اکثر مطالب کتاب را (البته با حذف بسیاری از بخشهای اختیاری و بررسی دقیق دترمینان) در یک درس چهار ساعت در هفتهٔ یک ترمی برای دانشجویانی که قبلاً تا حدودی با جبر خطی آشنا شده‌اند. بگنجانیم.

فصل اول این کتاب به نظریهٔ مقدماتی فضاهای برداری یعنی زیر فضاها، ترکیبات خطی، وابستگی و استقلال خطی و بعد می‌پردازد. این فصل با بخشی اختیاری به پایان می‌رسد که در آن ثابت می‌کنیم که هر فضای برداری با بعد نامتناهی یک پایه دارد.

تبدیلات خطی و ارتباط آنها با ماتریس‌ها، موضوع فصل ۲ را تشکیل می‌دهد. در این فصل در مورد فضای پوچ و برد یک تبدیل خطی، نمایش‌های ماتریسی یک تبدیل خطی، ایزومورفیسم و تغییر مختصات بحث می‌کنیم. بخشهای اختیاری در مورد فضاهای دوگان و معادلات دیفرانسیل خطی همگن پایان‌بخش این فصل هستند.

کاربرد نظریهٔ فضاهای برداری و تبدیلات خطی در مورد دستگاه‌های معادلات خطی در فصل ۳ آورده شده است. این موضوع مهم را به این دلیل با تأخیر بیان کرده‌ایم که بتوان آن را به صورت نتیجهٔ مطالب قبلی ارائه کرد. این طرز برخورد، امکان آن را می‌دهد که موضوع آشنای دستگاه‌های خطی، نظریهٔ مجردمان را روشن تر سازد و به ما اجازه داده است که از محاسبات ماتریسی پر دردسر و نامرتب در فصول ۱ و ۲ احتراز کنیم. با وجود این، گاهی در این دو فصل هم مثال‌هایی ارائه می‌شود که در آنها دستگاه‌هایی از معادلات خطی را حل کرده‌ایم. (البته این مثال‌ها در متن روند نظری مطالب قرار نمی‌گیرند.) زمینهٔ لازم برای این بخش، در بخش ۱-۴ گنجانده شده است.

دترمینان‌ها که موضوع فصل چهار هستند، نسبت به گذشته اهمیت بسیار کمتری دارند. در یک دورهٔ درسی کوتاه مدت (به مدت کمتر از یک سال) ترجیح می‌دهیم که دترمینان‌ها را به اختصار بررسی کنیم تا زمان بیشتری به مطالب فصل‌های ۵ تا ۷ تعلق بگیرد. در نتیجه، دو راه مختلف در فصل ۴ ارائه کرده‌ایم: بنا کردن کامل نظریهٔ دترمینان‌ها (بخش‌های ۴-۱ تا ۴-۳) و خلاصه‌ای از حقایق مهمی که در فصل‌های باقیمانده مورد نیاز هستند (بخش ۴-۴). بخش اختیاری ۴-۵ به ساختن اصل موضوعی دترمینان می‌پردازد.

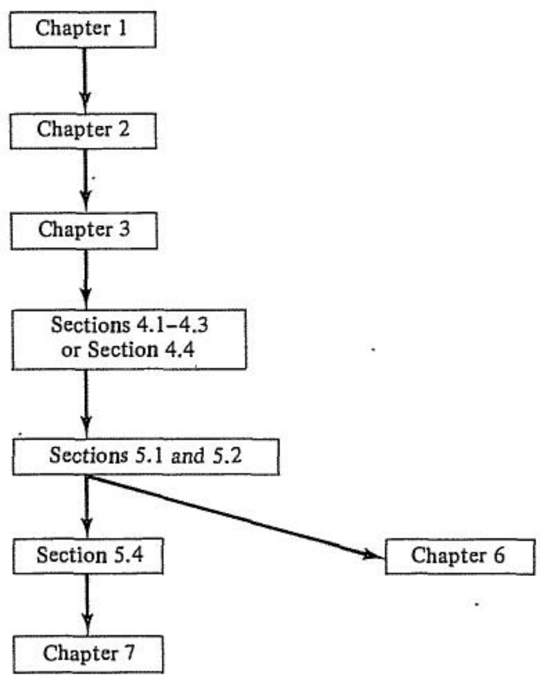
فصل ۵، مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و قطری‌سازی را مورد بحث قرار می‌دهد. یکی از مهمترین کاربردهای این مطلب، در محاسبهٔ حدود ماتریسی است. بنابراین در این فصل، بخشی اختیاری در مورد حدود ماتریسی و زنجیرهای مارکف[3] گنجانده‌ایم، گرچه کلی‌ترین بیان برخی از نتایج آن نیازمند آشنایی با فرم متعارف «جردن» است. بخش ۵-۴ شامل مطالبی در مورد زیرفضاهای پایا و قضیهٔ «کیلی - همیلتون»[4] است. فضاهای ضرب داخلی موضوع فصل ۶ را تشکیل می‌دهند. مطالب ریاضی اصلی این فصل (ضرب‌های داخلی؛ فرایند «گرام - اشمیت»[5]؛ مکمل‌های متعامد؛ الحاقی یک عملگر؛ عملگرهای نرمال، خود الحاقی، متعامد و یکانی؛ تصویرهای متعامد و قضیه طیفی) در بخش‌های ۶ - ۱ الی ۶ - ۶ آمده

[2] jordan
[3] Markov
[4] Cayley – Hamilton
[5] Gram – Schmidt

است. بخش‌های ۶-۷ الی ۶-۱۰ شامل کاربردهای مختلفی از ساختار غنی فضای ضرب داخلی هستند.

فرم‌های متعارف در فصل ۷ بررسی شده‌اند. بخش‌های ۷-۱ و ۷-۲ به فرم متعارف جردن می‌پردازند؛ بخش ۷-۳ چند جمله‌ای مینیمال را معرفی می‌کند و بخش ۷-۴ فرم گویا را مورد بحث قرار می‌دهد.

در پایان کتاب پنج ضمیمه وجود دارد. چهار ضمیمهٔ اول که به ترتیب مجموعه‌ها، توابع، میدان‌ها و اعداد مختلط را مورد بحث قرار می‌دهند، به منظور مرور ایده‌های اساسی مورد استفاده در کتاب آمده‌اند. ضمیمهٔ ه که در مورد چند جمله‌ای هاست بیشتر در فصول ۵ و ۷ به کار می‌رود (بخصوص در بخش ۷-۴). ترجیح می‌دهیم که به جای بررسی جداگانهٔ هر یک از ضمایم، در هر مورد که لازم است، به نتیجهٔ خاصی که در ضمایم آمده است اشاره کنیم. نمودار زیر، وابستگی‌های فصل‌های مختلف کتاب را به یکدیگر نشان می‌دهد.



در مورد نمادگذاری مان باید نکته‌ای را متذکر شویم. بخش‌ها و زیربخش‌هایی که با نماد ستاره مشخص شده‌اند، اختیاری هستند و می‌توان در جایی که استاد تشخیص بدهد، آنها را حذف کرد. ولی تمرینی که با نماد چلیپا (†) مشخص شده باشد اختیاری نیست. از این نماد برای مشخص کردن این نکته استفاده می‌کنیم که تمرین مورد نظر در قسمت‌های بعدی کتاب، مورد ارجاع قرار خواهد گرفت.

تفاوت‌های میان چاپ دوم و سوم

در چاپ سوم، دو تغییر عمده از لحاظ محتوی وجود دارد. بارزترین این دو، بازنویسی کامل فصل ۴ است تا دترمینان‌ها به صورت غیر مجردتری مورد بررسی قرار گیرند. نسخهٔ حاضر فصل ۴، بر محاسبهٔ دترمینان از طریق بسط همسازه‌ای پایه‌ریزی شده است، فرایندی که برای دانشجویانی که دترمینان‌ها را قبلاً مطالعه کرده‌اند آشناست. خوانندگانی که بررسی اصل موضوعی چاپ دوم را ترجیح می‌دهند، شکل مختصرتری از آن را در بخش ۴-۵ خواهند یافت، که اختیاری است. تغییر محتوایی دوم، اضافه شدن مطالبی مربوط به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی یک ماتریس، در بخش ۳-۴ است. نحوهٔ تنظیم کتاب، اساساً با چاپ دوم یکی است. با این حال، چاپ حاضر دارای تغییرات بسیار مهم جزئی است که کیفیت کتاب را بهتر کرده است. از جمله این تغییرات، برهان‌های بازنویسی شدهٔ برخی از قضایا، مثال‌های بیشتر، تمرین‌های جدید و در واقع صدها بهبود ویرایشی و نمادی است که بسیاری از آنها را استفاده‌کنندگان چاپ دوم پیشنهاد کرده‌اند.

ما مخصوصاً از «جورج برگمن»[۶] (دانشگاه کالیفرنیا در برکلی) و «جین ام. دی»[۷] (دانشگاه ایالتی سان خوزه[۸]) بخاطر نظرات زیادی که در مورد چاپ دوم ابراز داشته‌اند و در آماده کردن چاپ جدید، ما را بسیار راهنمایی کردند، سپاسگزاریم. نظرات دیگری را نیز مرورکنندگان نسخهٔ پیش از چاپ این ویرایش ابراز داشته‌اند که اسامی آنها به شرح زیر است:

«جین ام. دی» (دانشگاه ایالتی سان خوزه)، دیوید ای. ادوارد (دانشگاه مریلند، در کالج پارک)، کاترین هار (دانشگاه واترلو)، کاپیتان میخائیل جی . استوکر (مؤسسهٔ تکنولوژی نیروی هوایی) و فرانسیس سی. کی. تانی (دانشگاه اترلو). همچنین از توماس اینسل، بخاط کمک فنی ایشان در تهیه این کتاب با استفاده از نرم‌افزار LaTeX تشکر می‌کنیم.

برای پی بردن به آخرین اطلاعات در مورد این کتاب، به صفحهٔ وبمان بر روی وب جهانی مراجعه کنید. ضمناً پیشاپیش از نظرات شما که می‌توانید از طریق پست الکترونیکی یا عادی به نشانی‌های ذیل برای ما بفرستید، سپاسگزاریم.

استفن اچ. فریدبرگ
آرنولد جی. اینسل
لاورنس ای. اسپنس

home page: http://www.math.ilstu.edu/∼linalg
e-mail: linalg@math.ilstu.edu

[۶] George - Bergman
[۷] Day M. Jane
[۸] San Jose

فصل ۱

فضاهای برداری

۱-۱ مقدمه

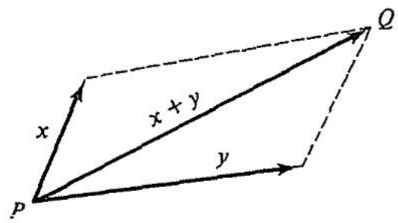
بسیاری از مفاهیم آشنای فیزیکی، نظیر نیرو، سرعت[۱] و شتاب، هم دارای اندازه (یعنی مقدار نیرو، سرعت یا شتاب) و هم جهت هستند. چنین ماهیتی که هم دارای اندازه و هم دارای جهت باشد، یک بردار نامیده می‌شود. بردارها از طریق فلش‌هایی نشان داده می‌شوند که طولشان اندازهٔ بردار و جهتشان جهت بردار را نشان می‌دهد. در اکثر مسائل فیزیکی که شامل بردار هستند، تنها اندازه و جهت بردار مهم است؛ در نتیجه، بردارهای دارای اندازه و جهت یکسان را بدون توجه به مکانشان، مساوی در نظر می‌گیریم. در این بخش، رفتار هندسی بردارها مورد بحث قرار می‌گیرد. این رفتار هندسی، نتیجهٔ آزمایش‌های فیزیکی‌ای است که نحوهٔ تعامل دو بردار را آزمایش می‌کنند.

موارد آشنایی وجود دارند که ما را به درک این نکته راهنمایی می‌کنند که وقتی دو بردار همزمان بر یک نقطه اثر کنند، اندازهٔ بردار حاصل (برداری که از جمع دو بردار اصلی به دست می‌آید)، لزوماً جمع اندازه‌های دو بردار اصلی نیست. به عنوان مثال، شناگری که در خلاف جهت جریان رودخانه با سرعت دو مایل در ساعت در برابر جریانی به سرعت یک مایل در ساعت شنا می‌کند، با سرعت سه مایل در ساعت پیش نخواهد رفت؛ چرا که در این مثال، شناگر و جریان آب در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند. با این حال، اگر شناگر هم‌جهت با جریان رودخانه حرکت کند، میزان پیشروی او، ۳ مایل در ساعت در جهت جریان آب خواهد بود.

آزمایش نشان می‌دهد که بردارها طبق قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع جمع می‌شوند (شکل ۱-۱).

---

[۱] کلمهٔ سرعت در اینجا به معنای علمی اش به عنوان کمیتی که هم مقدار و هم جهت دارد به کار رفته است. مقدار سرعت (بدون توجه به جهت)، **تندی** آن نام دارد.



شکل ۱-۱:

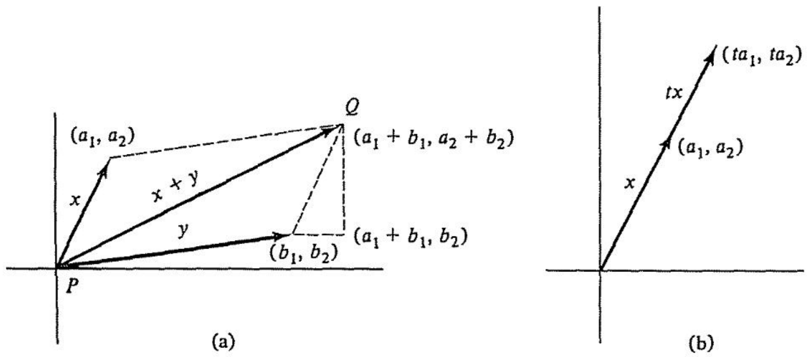
قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع برای جمع برداری: مجموع دو بردار x و y که بر نقطهٔ مشترک P اثر می‌کنند، برداری است که در متوازی‌الاضلاعی که x و y دو ضلع مجاور آنند، با قطری که از P آغاز می‌شود مشخص می‌گردد.

چون اضلاع روبه‌روی یک متوازی‌الاضلاع، موازیند و طولشان یکی است، نقطهٔ انتهایی برداری که $x+y$ را نشان می‌دهد، یعنی Q را می‌توان با اثر دادن x بر P و سپس با اثر دادن y بر نقطهٔ انتهایی x به دست آورد. به طور مشابه نقطهٔ انتهایی بردار $x+y$ را می‌توان ابتدا با اثر دادن y بر P و سپس اثر دادن x بر نقطهٔ انتهایی y نیز به دست آورد. بنابراین دو بردار x و y را که بر نقطهٔ P اثر می‌کنند می‌توان «ابتدا به انتها» با هم جمع کرد؛ یعنی یکی از بردارهای x و y را می‌توان بر P اثر داد و سپس برداری با همان جهت و اندازهٔ بردار دیگر را بر انتهای اولی اثر داد. اگر این کار صورت بگیرد نقطهٔ انتهایی بردار دوم، نقطهٔ انتهایی $x+y$ است.

با استفاده از هندسهٔ تحلیلی، می‌توان توصیفی جبری از جمع بردارها ارائه کرد. در صفحه‌ای شامل x و y، دستگاه مختصاتی را در نظر می‌گیریم که مبدأ آن در P است. فرض کنید $(a_۱, a_۲)$، نشان‌دهندهٔ نقطهٔ انتهایی x و $(b_۱, b_۲)$ نشان‌دهندهٔ نقطهٔ انتهایی y باشد. همان طور که شکل ۱-۲ (الف) نشان می‌دهد، نقطهٔ انتهایی $x+y$ یعنی Q، برابر با $(a_۱ + b_۱, a_۲ + b_۲)$ است. از این به بعد، وقتی که در مورد مختصات نقطهٔ انتهایی یک بردار صحبت می‌شود، فرض کنید که آن بردار از مبدأ آغاز می‌شود. به علاوه، چون برداری که از مبدأ آغاز می‌شود، کاملاً از روی نقطهٔ انتهایش مشخص می‌گردد، گاه در صورتی که x برداری باشد که از مبدأ آغاز می‌شود، به جای نقطهٔ انتهایی بردار x، از لفظ نقطهٔ x استفاده می‌کنیم.

بجز عمل جمع برداری، عمل طبیعی دیگری هم هست که می‌تواند روی بردارها صورت بگیرد. طول یک بردار را می‌توان بدون تغییر راستای آن بزرگ یا کوچک کرد. این عمل، که **ضرب اسکالر** نام دارد، شامل ضرب یک بردار در یک عدد حقیقی است. هرگاه بردار x را با یک فلش نشان دهیم، به ازای هر عدد حقیقی t، بردار tx با فلشی نشان داده می‌شود که در صورتی که $t \geqslant ۰$ جهتش با جهت x یکی است و در صورتی که $t < ۰$، در جهت مخالف x می‌باشد. طول فلش tx، $|t|$ برابر طول فلش x است. دو بردار ناصفر x و y، موازی هستند اگر و تنها اگر به ازای عدد حقیقی ناصفری چون t، $y = tx$ (در نتیجه، بردارهای ناصفر و دارای جهت یکسان و یا برعکس هم، موازیند).

برای توصیف جبری ضرب اسکالر، بار دیگر دستگاه مختصات را در یک صفحه که بردار x را در بردارد به گونه‌ای در



شکل ۱-۲:

نظر بگیرید که x از مبدأ آغاز شود. در صورتی که مختصات نقطهٔ انتهایی x، $(a_۱, a_۲)$ باشد، به راحتی می‌توان دید که مختصات نقطهٔ انتهایی tx، $(ta_۱, ta_۲)$ است (شکل ۱-۲ ب).

توصیف‌های جبری جمع برداری و ضرب اسکالر برای بردارهای واقع در یک صفحه، خواص زیر را نتیجه می‌دهند:

۱. برای هر دو بردار x و y، $x + y = y + x$.

۲. برای هر سه بردار x، y و z، $(x + y) + z = x + (y + z)$.

۳. برداری وجود دارد که با ۰ نشان داده می‌شود و برای هر بردار x، $x + ۰ = x$.

۴. برای هر بردار x، برداری چون y موجود است به گونه‌ای که $x + y = ۰$.

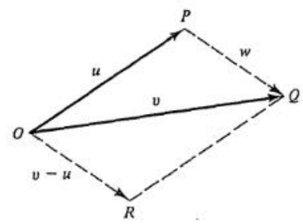
۵. برای هر بردار x، $۱x = x$.

۶. برای هر جفت عدد حقیقی a و b و هر بردار x، $(ab)x = a(bx)$.

۷. برای هر عدد حقیقی a و هر جفت بردار x و y، $a(x + y) = ax + ay$.

۸. برای هر جفت عدد حقیقی a و b و هر بردار x، $(a + b)x = ax + bx$.

استدلال‌هایی نظیر آنچه در بالا ارائه شد، نشان می‌دهد که این هشت خاصیت و همچنین تعبیرهای هندسی جمع و ضرب اسکالر، برای بردارهایی که به جای صفحه در فضا قرار می‌گیرند نیز صادق است. می‌توان با استفاده از این نتایج، معادلات خطوط و صفحه‌ها را در فضا نوشت.



شکل ۱-۳:

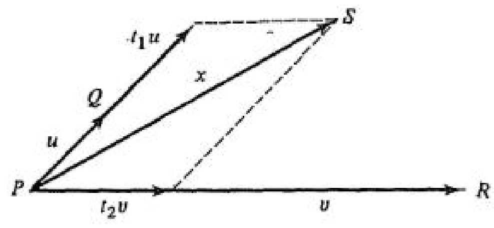
ابتدا معادلهٔ خطی را در فضا در نظر بگیرید که از دو نقطهٔ متمایز A و B می‌گذرد. فرض کنید O نشان‌دهندهٔ مبدأ دستگاه در فضا باشد و u و v بردارهایی را نشان دهند که از O شروع می‌شوند و به ترتیب به A و B ختم می‌گردند. اگر w برداری را نشان دهد که از A آغاز می‌شود و به B ختم می‌گردد، در این صورت جمع «ابتدا به انتها» نشان می‌دهد که $u+w=v$ و در نتیجه $w=v-u$، که $-u$ در اینجا نشان‌دهندهٔ بردار $(-۱)u$ است (رجوع کنید به شکل ۱-۳، که در آن $OABC$ یک متوازی‌الاضلاع است). چون هر حاصلضرب اسکالری از w موازی w است، ولی احتمالاً طولش با طول w مخالف است، هر نقطه واقع بر خط واصل بین A و B را می‌توان به شکل انتهای برداری که از A آغاز می‌شود و به ازای هر عدد حقیقی مانند t به شکل tw است، به دست آورد. برعکس، نقطهٔ انتهایی هر بردار به شکل tw که از A آغاز می‌شود بر خط واصل A و B قرار دارد. پس معادلهٔ خط گذرنده از A و B، عبارت است از $x=u+tw=u+t(v-u)$، که در آن t عددی حقیقی است و x نشان‌دهندهٔ نقطهٔ دلخواهی روی خط است. همچنین توجه کنید که نقطه انتهایی بردار $v-u$ در شکل ۱-۳ ، یعنی C مختصاتش برابر با تفاضل مختصات A و B است.

مثال ۱. فرض کنید A و B نقاطی به ترتیب با مختصات $(-۲,۰,۱)$ و $(۴,۵,۳)$ باشند. C، یعنی نقطهٔ انتهایی برداری که از مبدأ آغاز می‌شود و دارای جهت یکسان با برداری است که از A شروع می‌شود و به B ختم می‌شود، مختصاتش $(۴,۵,۳)-(-۲,۰,۱)=(۶,۵,۲)$ است. در نتیجه، معادلهٔ خط گذرنده از A و B، عبارت است از:

$$x=(-۲,۰,۱)+t(۶,۵,۲)$$

□

حال فرض کنید که A، B و C سه نقطه را در فضا نشان دهند که بر یک خط قرار ندارند. این نقاط، صفحهٔ منحصر به فردی را مشخص می‌کنند که معادلهٔ آن را می‌توان با توجه به ملاحظات قبلی‌مان در مورد بردارها یافت. فرض کنید u و v نشان‌دهندهٔ بردارهایی باشند که از A شروع می‌شوند و به ترتیب به B و C ختم می‌شوند. ملاحظه کنید که هر نقطهٔ S در صفحه‌ای که A، B و C را در بر دارد، نقطهٔ انتهایی برداری چون x است که از A آغاز می‌شود و به ازای اعدادی حقیقی چون $t_۱$ و $t_۲$، به شکل $t_۱u+t_۲v$ است. نقطهٔ انتهایی $t_۱u$ تقاطع خط گذرنده از A و B با خط گذرنده از S و موازی با خط واصل A و C است (رجوع کنید به شکل ۱-۴). با روش مشابهی موقعیت $t_۲v$ مشخص می‌گردد. علاوه بر این،



شکل ۱-۴:

به ازای هر دو عدد حقیقی $t_۱$ و $t_۲$، $t_۱u + t_۲v$ برداری واقع در صفحه شامل A، B و C است. نتیجه می‌شود که معادلهٔ صفحه به شکل زیر است:

$$x = A + t_۱u + t_۲u,$$

که $t_۱$ و $t_۲$ اعداد حقیقی دلخواهی هستند و x نقطهٔ دلخواهی را در صفحهٔ مورد نظر نشان می‌دهد.

مثال ۲. فرض کنید که A، B و C به ترتیب نقاطی با مختصات $(۱, ۰, ۲)$، $(−۳, −۲, ۴)$ و $(۱, ۸, −۵)$ باشند. نقطهٔ انتهایی برداری که از مبدأ آغاز می‌شود و دارای همان طول و جهت برداری است که از A آغاز می‌گردد و به B ختم می‌شود، عبارت است از:

$$(−۳, −۲, ۴) − (۱, ۰, ۲) = (−۴, −۲, ۲).$$

به طور مشابه، نقطهٔ انتهایی برداری که از مبدأ آغاز می‌شود و دارای اندازه و جهت یکسان با برداری است که از A شروع می‌شود و به C ختم می‌گردد، برابر است با: $(۱, ۸, −۵) − (۱, ۰, ۲) = (۰, ۸, −۷)$. در نتیجه معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از این سه نقطه عبارت است از:

$$x = (۱, ۰, ۲) + t_۱(−۴, −۲, ۲) + t_۲(۰, ۸, −۷)$$

□

هر ساختار ریاضی که هشت خاصیت صفحهٔ ۹ را داشته باشد، یک **فضای برداری** نام دارد. در بخش بعدی، فضای برداری را به طور رسمی تعریف خواهیم کرد و مثال‌های بسیاری از فضاهای برداری را، به غیر از آنهایی که در بالا ذکر شد، بررسی خواهیم کرد.

تمرینات

۱. مشخص کنید که آیا بردارهایی که از مبدأ شروع می‌شوند و به جفت‌های زیر از نقاط ختم می‌شوند، موازیند یا نه؟
الف) $(۲, ۱, ۳)$ و $(۲, ۴, ۶)$
ب) $(۷, ۱, -۳)$ و $(-۲۱, -۳, ۹)$
ج) $(۷, -۶, ۵)$ و $(-۷, ۶, -۵)$
د) $(-۵, ۰, ۲)$ و $(-۲, ۰, ۵)$

۲. معادلات خطوط گذرنده از هر جفت نقطهٔ زیر از فضا را بیابید.
الف) $(۴, -۲, ۳)$ و $(۱, ۷, -۵)$
ب) $(۰, ۴, ۲)$ و $(۰, -۶, -۳)$
ج) $(۲, ۷, ۳)$ و $(-۸, ۷, ۳)$
د) $(۵, -۱, -۲)$ و $(۷, ۹, ۳)$

۳. معادله‌های صفحات گذرنده از نقاط زیر از فضا را بیابید.
الف) $(-۱, -۵, ۲)$ $(۶, ۴, ۰)$ و $(۱, ۷, -۳)$
ب) $(۷, -۶, ۳)$، $(-۴, ۰, -۲)$ و $(-۲, -۹, ۵)$
ج) $(۰, ۲, -۸)$، $(۰, ۳, ۱)$ و $(۰, -۵, ۶)$
د) $(۱, ۱, ۱)$، $(۵, ۵, ۵)$ و $(۲, ۴, -۶)$

۴. مختصات بردار ۰ای در صفحهٔ اقلیدسی که در شرط ۳ صفحهٔ ۹ صدق می‌کند چیست؟ برای پاسختان دلیل بیاورید.

۵. ثابت کنید که اگر بردار x، از مبدأ صفحهٔ اقلیدسی آغاز شود و به نقطه دارای مختصات (a_1, a_2) ختم شود، آنگاه بردار tx ای که از مبدأ آغاز می‌شود، در نقطه‌ای به مختصات (ta_1, ta_2) ختم می‌شود.

۶. نشان دهید که نقطهٔ میانی پاره‌خطی که نقاط (a, b) و (c, d) را به هم وصل می‌کند، $((a+c)/2, (b+d)/2)$ است.

۷. ثابت کنید که قطرهای یک متوازی‌الاضلاع همدیگر را قطع می‌کنند.

۱-۲ فضاهای برداری

در بخش ۱-۱ دیدیم که با تعاریف طبیعی برای جمع برداری و ضرب اسکالر، بردارهای صفحه در هشت شرطی که در صفحهٔ ۹ ذکر شد صدق می‌کنند. بسیاری از دستگاه‌های جبری آشنای دیگر هم امکان تعریف‌هایی برای جمع و ضرب اسکالر می‌دهند که در همان هشت شرط صدق کنند. در این بخش، برخی از این دستگاه‌ها را معرفی می‌کنیم، اما ابتدا این نوع ساختار جبری را رسماً تعریف می‌کنیم.

چند تعریف: یک فضای برداری و یا فضای خطی V روی میدان F[۲]، عبارت است از مجموعه‌ای که روی آن دو عمل (که به ترتیب جمع و ضرب اسکالر خوانده می‌شوند)، به گونه‌ای تعریف شده باشند که به ازای هر دو عضو x و y از V، عضو یکتایی چون $x+y$ در V و به ازای هر عضو F چون a و هر عضو V چون x، عضو یکتای ax در V موجود باشد، به گونه‌ای که شرایط زیر برآورده شوند:

(VS۱) برای هر x و y در V، $x+y=y+x$ (جابجایی جمع).

(VS۲) برای هر x، y و z در V، $(x+y)+z=x+(y+z)$ (شرکت‌پذیری جمع).

(VS۳) عضوی از V که با 0 نشان داده می‌شود به گونه‌ای موجود باشد که برای هر x در V، $x+0=x$.

(VS۴) برای هر عضو V چون x، عضو یکتای y از V چنان موجود باشد که $x+y=0$.

(VS۵) برای هر x در V، $1x=x$.

(VS۶) برای هر دو عضو a و b از F و هر عضو V مثل x، $(ab)x=a(bx)$.

(VS۷) برای هر a در F، و هر دو عضو x و y در V، $a(x+y)=ax+ay$.

(VS۸) به ازای هر دو عضو a و b از F و هر عضو x از V، $(a+b)x=ax+bx$.

عناصر $x+y$ و ax، به ترتیب **جمع** x و y، و **حاصلضرب** a در x نامیده می‌شوند. اعضای میدان F، **اسکالر** نامیده می‌شوند و اعضای فضای برداری V، **بردار** نامیده می‌شوند. خواننده نباید کلمهٔ «بردار» را با کمیت فیزیکی‌ای که در بخش ۱-۱ بررسی شد، اشتباه بگیرد. در اینجا، کلمهٔ «بردار» را به معنای عضوی از فضای برداری به کار می‌بریم. در طول متن، معمولاً یک فضای برداری را بدون ذکر صریح میدان اسکالرهای آن بررسی خواهیم کرد. با این حال، به خواننده تذکر می‌دهیم که هر فضای برداری، روی یک میدان مفروض در نظر گرفته خواهد شد، که آن را با $\mathbb{F}$ نشان خواهیم داد. گهگاه توجهمان را به میدان‌های اعداد حقیقی و مختلط که به ترتیب با $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ نشان داده می‌شوند، محدود می‌کنیم.

[۲] میدان‌ها در ضمیمهٔ ج بررسی شده‌اند

در ادامهٔ این بخش، چند مثال مهم از فضای‌های برداری را که در طول متن، مورد مطالعه قرار خواهند گرفت، معرفی می‌کنیم. توجه کنید که در مشخص ساختن یک فضای برداری، نه تنها باید خود بردارها را معرفی کرد، بلکه باید اعمال جمع و ضرب اسکالر را نیز مشخص نمود.

هر شیئی به شکل $(a_۱, a_۲, \dots, a_n)$ که مؤلفه‌های a_i در آن، متعلق به میدان $\mathbb{F}$ باشد، **یک n تایی مرتب، با مؤلفه‌های در** $\mathbb{F}$ نامیده می‌شود. دو n-تایی $(a_۱, a_۲, \dots, a_n)$ و $(b_۱, b_۲, \dots, b_n)$ با مؤلفه‌های در F، **مساوی** نامیده می‌شوند، هرگاه به ازای هر $i = ۱, ۲, \dots, n$، $a_i = b_i$.

مثال ۱. مجموعهٔ همهٔ n تایی‌ها، با مؤلفه‌های در F، که آن را با F^n نشان می‌دهیم، تحت اعمال جمع و ضرب مؤلفه به مؤلفه، یک فضای برداری است؛ یعنی اگر $u = (a_۱, a_۲, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^n$، $v = (b_۱, b_۲, \dots, b_n) \in \mathbb{F}^n$ و $c \in \mho F$ آنگاه:

$$cu = (ca_۱, ca_۲, \dots, ca_n) \quad \text{و} \quad u + v = (a_۱ + b_۱, a_۲ + b_۲, \dots, a_n + b_n)$$

به عنوان مثال در $\mathbb{R}^۴$،

$$(۳, -۲, ۰, ۵) + (-۱, ۱, ۴, ۲) = (۲, -۱, ۴, ۷)$$

و

$$-۵(۱, -۲, ۰, ۳) = (-۵, ۱۰, ۰, -۱۵).$$

هر عضو F^n را می‌توان به جای نشان دادن با بردارهای سطری به شکل $(a_۱, a_۲, \dots, a_n)$، با برداری ستونی به شکل

$$\begin{bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

نوشت. چون هر ۱-تایی مرتب با درایهٔ در $\mathbb{F}$ را می‌توان عضوی از $\mathbb{F}$ در نظر گرفت، فضای برداری یکتایی‌های مرتب با درایهٔ در F را معمولاً بجای $\mathbb{F}^۱$، با $\mathbb{F}$ نشان می‌دهیم. □

منظور از یک ماتریس $m \times n$ با درایه‌هایی در F، آرایه‌ای مستطیلی شکل به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

که در آن هر یک از درایه‌های $a_{ij}(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$، عضوی از F است. درایه‌های a_{ij} ای را که برای آنها $i = j$، **درایه‌های قطری** این ماتریس می‌نامیم. درایه‌های $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$، **سطر** i **ام** ماتریس را تشکیل می‌دهند و درایه‌های $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ **ستون** j **ام** ماتریس را تشکیل می‌دهند. سطرهای ماتریس بالا، بردارهایی در F^n و ستون‌ها بردارهایی در F^m در نظر گرفته می‌شوند. ماتریس $m \times n$ ای که هر یک از درایه‌هایش صفر است، ماتریس **صفر** نامیده می‌شود و آن را با 0 نشان می‌دهند.

درایه‌ای از ماتریس A را که در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد، با A_{ij} نشان می‌دهیم. به علاوه، اگر تعداد سطرها و ستون‌های یک ماتریس برابر باشند، آن ماتریس را **مربعی** می‌نامند.

دو ماتریس $A_{m\times n}$ و $B_{m\times n}$ مساویند هرگاه درایه‌های متناظرشان با هم برابر باشند، یعنی برای هر $1 \leqslant i \leqslant m$ و $1 \leqslant j \leqslant n$، $a_{ij} = b_{ij}$.

مثال ۲. مجموعهٔ ماتریس‌های $m \times n$ ای که درایه‌هایشان در میدان F قرار دارد، تحت اعمال جمع و ضرب اسکالر زیر، فضای برداری تشکیل می‌دهند که با $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ نشان می‌دهیم؛ برای هر $A, B \in M_{m\times n}(F)$ و $c \in F$، به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant m$ و $1 \leqslant j \leqslant n$،

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \text{و} \qquad (cA)_{ij} = ca_{ij}$$

به عنوان مثال، در $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$،

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -2 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

و

$$-3\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 9 & -6 & -9 \end{bmatrix}.$$

□

مثال ۳. فرض کنید S مجموعه‌ای ناتهی و F میدانی دلخواه باشد و فرض کنید که $\mathcal{F}(S, \mathbb{F})$، **مجموعهٔ توابع از** S **به** F را نشان دهد. دو عضو f و g از $\mathcal{F}(S, F)$ را **برابر** گوییم هرگاه برای هر $s \in S$، $f(s) = g(s)$. مجموعهٔ $\mathcal{F}(S, F)$، تحت اعمال جمع و ضرب اسکالری که برای هر $f, g \in \mathcal{F}(S, F)$ و $c \in F$، به صورت زیر تعریف می‌شوند، فضایی برداری است.

$$\text{برای هر } s \in S, \quad (f+g)(s) = f(s) + g(s) \qquad \text{و} \qquad (cf)(s) = c[f(s)]$$

توجه کنید که این‌ها همان اعمال جمع و ضرب اسکالری برای توابع هستند که در جبر و حساب مورد استفاده قرار می‌گیرند.
□

منظور از یک چند جمله‌ای با درایه‌های واقع در میدان F، عبارتی است به شکل:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

که n یک عدد صحیح نامنفی و هر a_k، عضوی از F است که ضریب x^k نامیده می‌شوند. هرگاه $f(x) = 0$، یعنی اگر که $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_0 = 0$، آنگاه $f(x)$ را **چند جمله‌ای** صفر می‌نامند و به دلایل فنی، درجهٔ آن را -1 تعریف می‌کنند؛ در غیر این صورت، درجهٔ f بزرگترین توانی از x تعریف می‌شود که در نمایش

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

برای $f(x)$، ضریبش ناصفر است. توجه کنید که چند جمله‌ای‌های با درجهٔ صفر را می‌توان به ازای اسکالر ناصفر c ای، به شکل $f(x) = c$ نوشت. دو چند جمله‌ای

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

و

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

را **مساوی** نامند؛ هرگاه که $m = n$ و به ازای $i = 0, 1, \ldots, n$، $a_i = b_i$.

هرگاه F میدانی باشد که تعدادی نامتناهی عضو دارد، معمولاً چند جمله‌ای‌های با درایه‌های واقع در F را توابعی از F به F در نظر می‌گیریم. در این صورت مقدار تابع:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

در $c \in F$، برابر با اسکالر

$$f(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_0$$

تعریف می‌شود. همچنین در این حالت هر یک از نمادهای f و $f(x)$، برای تابع چند جمله‌ای

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

به کار می‌رود.

مثال ۴. فرض کنید

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

و

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

چند جمله‌ای‌هایی باشند که ضرایبشان در میدان F واقع است. فرض کنید $m \leqslant n$ و $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_n$ را برابر با

صفر تعریف کنید. در این صورت، $g(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

$f(x) + g(x)$ را چنین تعریف کنید:

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^n + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

و برای هر $c \in F$، $cf(x)$ را این گونه تعریف کنید:

$$cf(x) = ca_n x^n + ca_{n-1} x^{n-1} + \ldots + ca_1 x + ca_0$$

تحت این اعمال جمع و ضرب اسکالر، مجموعهٔ تمام چند جمله‌ای‌های با درایه‌های واقع در F، فضایی برداری است که آن را با $P(F)$ نشان می‌دهیم. $\square$

در تمرین ۲۱ از بخش ۲-۴، خواهیم دید که فضای برداری‌ای که در مثال زیر تعریف شده است، در واقع همان $P(F)$ است.

مثال ۵. فرض کنید F میدانی دلخواه باشد. منظور از یک دنباله در F، تابعی چون σ است، از مجموعه اعداد صحیح مثبت به F. در این کتاب دنبالهٔ σ را که به ازای هر $n = 1, 2, \ldots$، $\sigma(n) = a_n$، با $\{a_n\}$ نشان می‌دهیم. فرض کنید V از تمام دنباله‌های $\{a_n\}$ ای در F تشکیل شده باشد که فقط تعدادی متناهی جملهٔ a_n ناصفر داشته باشند. هرگاه $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ در V واقع باشند و $t \in F$، تعریف می‌کنیم:

$$t\{a_n\} = \{ta_n\} \qquad , \qquad \{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

تحت این دو عمل، V فضایی برداری است. $\square$

دو مثال بعدی، مربوط به مجموعه‌هایی می‌شوند که جمع و ضرب اسکالر روی آنها تعریف شده است، ولی فضای برداری نیستند.

مثال ۶. فرض کنید $S = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. برای هر (b_1, b_2) و $(a_1, a_2) \in S$ ، $c \in \mathbb{R}$ تعریف کنید:

$$c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2) \qquad , \qquad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 - b_2)$$

چون $(VS1)$، $(VS2)$ و $(VS8)$ برقرار نیستند، S تحت این دو عمل یک فضای برداری نیست. $\square$

مثال ۷. فرض کنید S مانند مثال ۶ باشد. برای هر $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in S$ و $c \in \mathbb{R}$، تعریف کنید:

$$c(a_1, a_2) = (ca_1, 0) \qquad , \qquad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, 0)$$

در این صورت S تحت این اعمال، فضای برداری نیست؛ زیرا $(VS3)$ و در نتیجه $(VS4)$ و $(VS5)$ برقرار نیستند. $\square$

این بخش را با چند نتیجهٔ ابتدایی از تعریف فضای برداری به پایان می‌بریم.

حکم ۱.۱. (قاعدهٔ حذف برای جمع برداری): هرگاه x، y و z اعضایی از فضای برداری باشند که $x+z=y+z$، آنگاه $x=y$.

برهان. عضوی چون v از V وجود دارد که $z+v=0$ $(VS4)$. بنابراین طبق $(VS2)$ و $(VS3)$ داریم:

$$\begin{aligned} x &= x+0 = x+(z+v) = (x+z)+v \\ &= (y+z)+v = y+(z+v) = y+0 = y. \end{aligned}$$

□

نتیجه ۱. بردار 0 که در $(VS3)$ توصیف شده یکتاست.

برهان. اثبات به عهدهٔ خواننده می‌باشد. □

نتیجه ۲. بردار y ای که در $(VS4)$ توصیف شد، یکتاست.

برهان. اثبات به عهدهٔ خواننده می‌باشد. □

بردار 0 در $(VS3)$، **بردار صفر** نامیده می‌شود و بردار y در $(VS4)$ (که همان بردار یکتایی است که $x+y=0$) **معکوس جمعی** x نامیده می‌شود و با $-x$ نشان داده می‌شود.

نتیجهٔ زیر، برخی از خواص ضرب اسکالر را در بر دارد.

حکم ۲.۱. در هر فضای برداری V، موارد زیر برقرارند:

الف) برای هر $x\in V$، $0x=0$.

ب) برای هر $a\in F$ و هر $x\in V$، $(-a)x=-(ax)=a(-x)$.

ج) برای هر $a\in F$، $a0=0$.

برهان. الف) از $(VS8)$، $(VS1)$ و $(VS3)$، نتیجه می‌شود که:

$$0x+0x=(0+0)x=0x=0x+0=0+0x$$

بنابراین طبق حکم ۱.۱، $0x=0$.

ب) عضو $-(ax)$، یکتا عضوی از V است که $ax+[-(ax)]=0$. بنابراین هرگاه $ax+(-a)x=0$، نتیجهٔ ۲ی حکم ۱.۱ نتیجه می‌دهد که $(-a)x=-(ax)$. امّا طبق $(VS8)$ و الف:

$$ax+(-a)x=[a+(-a)]x=0x=0$$

بنابراین $(-a)x = -(ax)$، بخصوص $-x = (-۱)x$. پس طبق $(VS۶)$،
$$a(-x) = a[(-۱)x] = [a(-۱)]x = (-a)x$$

اثبات ج مشابه برهان الف است. □

تمرینات

۱. تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است.
الف) هر فضای برداری، شامل یک بردار صفر است.
ب) یک فضای برداری ممکن است بیش از یک بردار صفر داشته باشد.
ج) در هر فضای برداری، $ax = bx$ نتیجه می‌دهد که $a = b$.
د) در هر فضای برداری، $ax = ay$ نتیجه می‌دهد که $x = y$.
ه) هر عضو $\mathbb{F}^n$ را می‌توان عضوی از $M_{n\times ۱}(\mathbb{F})$ در نظر گرفت.
و) هر ماتریس $m \times n$، m ستون و n سطر دارد.
ز) در $P(\mathbb{F})$، تنها چند جمله‌ای‌های با درجهٔ یکسان را می‌توان جمع کرد.
ح) هرگاه f و g، چند جمله‌ای‌هایی با درجهٔ n باشند، آنگاه $f + g$ چند جمله‌ایی با درجهٔ n است.
ط) اگر f درجه‌اش n و c اسکالری ناصفر باشد، آنگاه cf چند جمله‌ایی با درجهٔ n است.
ی) هر عضو ناصفری از $\mathbb{F}$ را می‌توان عضوی از $P(F)$ با درجهٔ صفر در نظر گرفت.
ک) دو تابع در $\mathcal{F}(S, F)$ مساویند اگر و تنها اگر در هر نقطهٔ S، مقدار مساوی داشته باشند.

۲. بردار صفر $M_{۳\times ۴}(F)$ را بنویسید.

۳. اگر
$$M = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$$
در این صورت مقادیر $m_{۱۳}$، $m_{۲۱}$ و $m_{۲۲}$ را مشخص کنید.

۴. اعمال مشخص شده را انجام دهید.

الف)
$$\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۳ \\ ۱ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۵ \\ -۵ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

ب)

$$\begin{bmatrix} -۶ & ۴ \\ ۳ & -۲ \\ ۱ & ۸ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۷ & -۵ \\ ۰ & -۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

ج)

$$۴\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۳ \\ ۱ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}$$

د)

$$-۵\begin{bmatrix} -۶ & ۴ \\ ۳ & -۲ \\ ۱ & ۸ \end{bmatrix}$$

ه) $(۲x^۴ - ۷x^۳ + ۴x + ۳) + (۸x^۳ + ۲x^۲ - ۶x + ۷)$

و) $(-۳x^۳ + ۷x^۲ + ۸x - ۶) + (۲x^۳ - ۸x + ۱۰)$

ز) $۵(۲x^۷ - ۶x^۴ + ۸x^۲ - ۳x)$

ح) $۳(x^۵ - ۲x^۳ + ۴x + ۲)$

تمرین‌های ۵ و ۶ نشان می‌دهند که چرا تعاریف جمع ماتریسی و ضرب اسکالر به گونه‌ای که در مثال ۲ تعریف شدند تعاریف مناسبی هستند.

۵. «ریچارد گارد»[۳] در مقاله‌ای تحت عنوان «تأثیرات سگ‌های آبی بر ماهی‌های رودخانهٔ ساگن» گزارش می‌کند که در این رودخانه تعداد ماهی‌هایی که از سدهای آبی عبور کرده‌اند، به شرح زیر است:

عبور در جهت جریان آب

	پاییز	بهار	تابستان
ماهی آزاد برکه‌ای	۸	۳	۱
قزل‌آلای رنگین کمان	۳	۰	۰
قزل‌آلای خال قرمز	۳	۰	۰

[۳] Richard Gard "Effects of Beaver on Trout in Sagehen Creek", California, J. Wildlife Management, 25. p. 221 – 242.

عبور در خلاف جهت جریان آب			
	پاییز	بهار	تابستان
ماهی آزاد برکه‌ای	۹	۱	۴
قزل‌آلای رنگین کمان	۳	۰	۰
قزل‌آلای خال قرمز	۱	۱	۰

عبورهای در جهت جریان و خلاف جهت جریان آب را در دو ماتریس 3×3 ثبت کنید و کنترل کنید که این دو ماتریس تعداد کل عبورها را (چه در جهت جریان آب و چه در خلاف جهت جریان آب) بر حسب گونهٔ ماهی و فصل نشان می‌دهند.

۶. در انتهای ماه مِی، یک مغازهٔ مبل فروشی، موارد زیر را در لیست اجناس خود دارد:

	آمریکایی	اسپانیلی	مدیترانه‌ای	هلندی
مبلمان اتاق پذیرایی	۴	۲	۱	۳
مبلمان اتاق خواب	۵	۱	۱	۴
مبلمان اتاق غذاخوری	۳	۱	۲	۶

این اطلاعات را در یک ماتریس 4×3 ثبت کنید. برای فروش ماه ژوئن مغازه‌دار تصمیم می‌گیرد که هر کدام از اجناس لیست خود را دو برابر کند. با فرض این که هیچ یک از اجناس کنونی موجود در انبار، تا زمانی که مبل‌های جدید برسند، به فروش نرسد، تحقیق کنید که لیست اجناس مغازه پس از برآورده شدن سفارش جدید، با ماتریس $2M$ نشان داده می‌شود. اگر اجناس مغازه در انتهای ماه ژوئن از ماتریس زیر به دست آید:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$2M - A$ را به دست آورید. در طول ماه ژوئن چند دست مبل به فروش رسیده است؟

۷. فرض کنید $S = \{0, 1\}$ و $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. در $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$، نشان دهید که $f = g$ و $f + g = h$، که $f(x) = 2x + 1$، $g(x) = 1 + 4x - 2x^2$ و $h(x) = 5^x + 1$.

۸. در هر فضای برداری V، نشان دهید که به ازای هر $x, y \in V$ و هر $a, b \in F$،
$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by$

.

۹. نتایج ۱ و ۲ مربوط به حکم ۱.۱ و نیز حکم ۲.۱ قسمت ج را ثابت کنید.

۱۰. فرض کنید V نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ تمام توابع حقیقی مشتق‌پذیر تعریف شده بر خط حقیقی باشد. ثابت کنید که V تحت اعمال جمع و ضرب اسکالری که در مثال ۳ تعریف شدند، یک فضای برداری است.

۱۱. فرض کنید $V = \{0\}$، فقط از یک بردار یعنی 0 تشکیل شده باشد و $0 + 0$ را برابر با 0، و $c0$ را نیز به ازای هر اسکالر c، برابر با 0 تعریف کنید. ثابت کنید که V فضایی برداری بر روی F است (V **فضای برداری صفر** نام دارد).

۱۲. تابع حقیقی f بر خط حقیقی را یک **تابع زوج** گویند، هرگاه برای هر عدد حقیقی x، $f(-x) = f(x)$، ثابت کنید که مجموعهٔ توابع زوج تعریف شده بر خط حقیقی همراه با اعمال جمع و ضرب اسکالری که در مثال ۳ تعریف شدند، فضایی برداری است.

۱۳. فرض کنید V نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ زوج‌های مرتب از اعداد حقیقی باشد. هرگاه (a_1, a_2) و (b_1, b_2) اعضایی از V و c عضوی از $\mathbb{R}$ باشد. قرار دهید:

$$c(a_1, a_2) = (ca_1, a_2) \qquad , \qquad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$$

آیا V تحت این اعمال، فضایی برداری است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱۴. فرض کنید $V = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, n$ به ازای هر $\}$. آیا تحت اعمال جمع و ضرب اسکالر مؤلفه به مؤلفه فضایی برداری روی میدان اعداد حقیقی است؟

۱۵. فرض کنید $V = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ به ازای هر $\}$. آیا V تحت اعمال جمع و ضرب اسکالر مؤلفه به مؤلفه فضایی برداری روی میدان اعداد مختلط است؟

۱۶. فرض کنید V نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ تمام ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌های حقیقی و F میدان اعداد گویا باشد. آیا V تحت تعاریف عادی جمع و ضرب اسکالر ماتریسی، فضایی برداری روی F است؟

۱۷. فرض کنید $V = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in F\}$، که F میدانی دلخواه است. جمع اعضای V را به صورت مؤلفه به مؤلفه تعریف کنید و برای هر $c \in F$ و $(a_1, a_2) \in V$ قرار دهید:

$$c(a_1, a_2) = (a_1, 0)$$

آیا V تحت این دو عمل یک فضای برداری است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱۸. فرض کنید $V = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{C}\}$. برای هر $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V$ و $c \in \mathbb{C}$، قرار دهید:

$$c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2) \qquad , \qquad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + 2b_1, a_2 + 3b_2)$$

آیا V تحت این اعمال، یک فضای برداری است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱۹. فرض کنید $V = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$، جمع اعضای V را به صورت مؤلفه به مؤلفه تعریف کنید و برای هر $(a_1, a_2) \in V$ و $c \in \mathbb{R}$ قرار دهید:

$$c(a_1, a_2) = \begin{cases} (0, 0) & \text{هرگاه } c = 0 \\ (ca_1, \frac{a_2}{c}) & \text{هرگاه } c \neq 0 \end{cases}$$

آیا V تحت این دو عمل، یک فضای برداری است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲۰. فرض کنید V مجموعهٔ دنباله‌های $\{a_n\}$ از اعداد حقیقی باشد (برای دیدن تعریف یک دنباله به مثال ۵ مراجعه کنید).برای هر $\{a_n\}, \{b_n\} \in V$ و هر عدد حقیقی t، تعریف کنید:

$$t\{a_n\} = \{ta_n\} \qquad , \qquad \{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

ثابت کنید که V تحت این دو عمل یک فضای برداری است.

۲۱. فرض کنید V و W، فضاهایی برداری بر میدان F باشند. با فرض اینکه:

$$Z = \{(v, w) : wv \in V, \in W\}$$

ثابت کنید که Z تحت دو عمل زیر، یک فضای برداری روی F است.

$$c(v_1, w_1) = (cv_1, cw_1) \qquad \text{و} \qquad (v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

۲۲. در فضای برداری $M_{m\times n}(\mathbb{Z}_2)$، چند عضو وجود دارد؟ (به ضمیمه ج مراجعه کنید).

۱-۳ زیرفضاها

در مطالعهٔ هر ساختار ریاضی، از جمله مواردی که مورد توجه است، بررسی زیر مجموعه‌هایی است که همان ساختار مجموعهٔ مورد نظر را دارا هستند. مفهومی از زیر ساختار که برای فضای برداری مناسب است، در این فصل معرفی می‌شود.

تعریف:. زیر مجموعهٔ W از فضای برداری V روی میدان F را یک **زیر فضای** V گویند، هرگاه W تحت اعمال جمع و ضرب اسکالری که بر V تعریف شده‌اند، خود فضایی برداری روی F باشد.

توجه کنید که در هر فضای برداری V، V و $\{0\}$ زیر فضا هستند. زیر فضای دوم را **زیر فضای صفر** V می‌نامند.
خوشبختانه برای اثبات اینکه یک زیر مجموعه، زیر فضا هم هست، لازم نیست که تمام شرط‌های فضای برداری کنترل شوند. چون $(VS1)$، $(VS2)$، $(VS5)$، $(VS6)$، $(VS7)$ و $(VS8)$ که برای تمام اعضای فضای برداری برقرارند،

خود به خود در مورد همهٔ اعضای هر زیر مجموعه‌ای هم صادقند. بنابراین هر زیر مجموعهٔ W از فضای برداری V، زیر فضایی از V است، اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند:

۱. هرگاه $x \in W$ و $y \in W$، $x + y \in W$ (W تحت جمع بسته باشد).

۲. هرگاه $c \in F$، $x \in W$ ، $cx \in W$ (W تحت ضرب اسکالر بسته باشد).

۳. W یک بردار صفر داشته باشد.

۴. هر عضو W، در W یک وارون جمعی داشته باشد.

قضیه زیر نشان می‌دهد که بردار صفر W با بردار صفر V یکی است و نیازی به بررسی شرط ۴ نیست.

قضیه ۳.۱. فرض کنید V فضایی برداری و W زیر مجموعه‌ای از V باشد. در این صورت، W زیر فضایی از V است، اگر و تنها اگر شرایط زیر در مورد اعمال تعریف شده بر V، برقرار باشند:

الف) $0 \in W$.

ب) هرگاه $x \in W$ و $y \in W$، $x + y \in W$.

ج) هرگاه $c \in F$ و $x \in W$، $cx \in W$.

برهان. اگر W زیر فضایی از V باشد، در این صورت W تحت اعمال جمع و ضرب اسکالری که بر V تعریف شده‌اند، فضایی برداری است. در نتیجه شرایط ب و ج برقرار خواهند بود و عضو $0' \in W$ ای وجود خواهد داشت به گونه‌ای که برای هر $x \in W$، $x + 0' = x$. اما در عین حال، $x + 0 = x$ و بنابراین طبق حکم ۱.۱، $0 = 0'$. پس شرط الف برقرار است.

برعکس، اگر شرطهای الف، ب و ج برقرار باشند، بحثی که پیش از قضیه آمد، نشان می‌دهد که W در صورتی که وارون جمعی هر یک از اعضای W، به W تعلق داشته باشد، زیرفضایی از V است؛ امّا اگر $x \in W$، آنگاه طبق شرط ج، $(-1)x$ متعلق به W خواهد بود و طبق حکم ۲.۱، $-x = (-1)x$، بنابراین W زیر فضایی از V است. $\square$

قضیه بالا روش ساده‌ای برای تعیین اینکه آیا زیر مجموعهٔ مفروضی از یک فضای برداری، زیر فضا هست یا نه، در اختیار ما قرار می‌دهد. معمولاً، همین نتیجه است که برای اثبات اینکه یک زیر مجموعه در واقع یک زیر فضا هم است، بکار برده می‌شود.

ترانهادهٔ ماتریس $A_{m\times n}$، A^t، ماتریس $m \times n$ ای است که از تعویض سطرها و ستون‌های A به دست می‌آید؛ یعنی $(A^t)_{ij} = A_{ji}$. به عنوان مثال:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ & -۱ \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۵ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$$

منظور از یک «**ماتریس متقارن**»، ماتریسی چون A است که $A^t = A$. واضح است که یک ماتریس متقارن باید مربعی باشد. مجموعهٔ W متشکل از تمام ماتریس‌های متقارن $M_{n\times n}(F)$، زیر فضایی از $M_{n\times n}(F)$ است، چرا که شرایط قضیهٔ ۳.۱ در اینجا برقرار هستند:

۱. ماتریس صفر، برابر با ترانهاده‌اش است و لذا به W تعلق دارد.

به راحتی می‌توان ثابت کرد که برای هر دو ماتریس A و B و هر دو اسکالر a و b، $(aA+bB)^t = aA^t+bB^t$ (به مثال ۳ مراجعه کنید). با توجه به این واقعیت، می‌توانیم همانطور که در زیر آمده است، نشان دهیم که مجموعهٔ ماتریس‌های متقارن، تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است.

۲. هرگاه $A \in W$ و $B \in W$ آنگاه $A^t = A$ و $B^t = B$. در نتیجه، $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$، بنابراین $A + B \in W$.

۳. هرگاه $A \in W$، آنگاه $A^t = A$. پس برای هر $a \in F$، داریم $(aA)^t = aA^t$. پس $aA \in W$.

مثال‌های زیر توضیحات بیشتری در مورد مفهوم زیر فضا می‌دهند. سه مثال اول از اهمیت خاصی برخوردارند.

مثال ۱. فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی باشد و فرض کنید $P_n(F)$ از تمام چند جمله‌ای‌های در $P(F)$ تشکیل شده باشد که درجهٔ آنها کوچکتر یا مساوی n است. چون درجهٔ چند جمله‌ای صفر -۱ است، پس به $P_n(F)$ تعلق دارد. به علاوه، مجموع دو چند جمله‌ای با درجهٔ کوچکتر یا مساوی با n و حاصلضرب یک اسکالر در یک چند جمله‌ای با درجهٔ کمتر یا مساوی n، خود یک چند جمله‌ای با درجهٔ کوچکتر یا مساوی n است. پس $P_n(F)$ تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است. بنابراین از قضیهٔ ۳.۱ نتیجه می‌شود که $P_n(F)$، زیرفضایی از $P(F)$ است. □

مثال ۲. فرض کنید $C(\mathbb{R})$، مجموعهٔ توابع پیوسته با مقدار حقیقی باشد که بر روی $\mathbb{R}$ تعریف شده‌اند. واضح است که $C(\mathbb{R})$ زیرمجموعه‌ای از فضای برداری $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ است که در مثال‌های بخش ۱-۲ معرفی شد. ادعا می‌کنیم که $C(\mathbb{R})$، زیرفضایی از $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ است. ابتدا توجه کنید که عضو صفر $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$، تابع ثابتی است که به صورت $f(t) = ۰$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ تعریف می‌شود. چون توابع ثابت پیوسته‌اند، داریم $f \in C(\mathbb{R})$. به علاوه مجموع دو تابع پیوسته تابعی پیوسته است و حاصلضرب یک عدد حقیقی در یک تابع پیوسته نیز تابعی پیوسته است. پس $C(\mathbb{R})$ تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است و بنابراین طبق قضیهٔ ۳.۱ زیرفضایی از $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ است. □

مثال ۳. ماتریس $n\times n$ M را ماتریس **قطری** گویند هرگاه برای هر $i\neq j$، $M_{ij}=\circ$، یعنی هرگاه تنها درایه‌های ناصفر M، درایه‌های قطری باشند. واضح است که ماتریس صفر قطری است، چرا که تمام درایه‌هایش صفر است. به علاوه، اگر A و B، ماتریس‌های قطری $n\times n$ باشند، در آن صورت به ازای هر اسکالر c، وقتی $i\neq j$، داریم:

$$(cA)_{ij}=cA_{ij}=c\circ=\circ \quad , \quad (A+B)_{ij}=A_{ij}+B_{ij}=\circ+\circ=\circ$$

در نتیجه مجموعهٔ ماتریس‌های قطری، طبق قضیهٔ ۳.۱ زیرفضایی از $M_{n\times n}(F)$ است. □

مثال ۴. رد ماتریس $n\times n$ M، که با $tr(M)$ نشان داده می‌شود، مجموع درایه‌های قطری M است؛ یعنی:

$$tr(M)=M_{۱۱}+M_{۲۲}+\ldots+M_{nn}$$

از تمرین ۶ نتیجه می‌شود که مجموعهٔ ماتریس‌های $n\times n$ که ردّشان صفر است، زیرفضایی از $M_{n\times n}(F)$ است. □

مثال ۵. مجموعهٔ ماتریس‌هایی در $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ که درایه‌هایشان نامنفی است، زیرفضایی از $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ نیست، زیرا تحت ضرب اسکالر بسته نیست. □

قضیهٔ بعدی، راهی برای ساختن یک زیرفضای جدید از روی زیرفضاهای دیگر نشان می‌دهد.

قضیه ۴.۱. اشتراک مجموعه‌ای از زیرفضاهای فضای برداری V، زیرفضایی از V است.

برهان. فرض کنید C، مجموعه‌ای از زیرفضاهای V باشد و W اشتراک زیرفضاهای واقع در C باشد. چون هر زیرفضا، بردار صفر را در بر دارد $\circ\in W$. فرض کنید $a\in F$ و $x,y\in W$. در این صورت، x و y عضو هر یک از زیرفضاهای واقع در C می‌باشند. چون هر یک از زیرفضاهای C تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است، نتیجه می‌شود که $x+y$ و ax، عضو هر یک از زیرفضاهای واقع در C می‌باشند. در نتیجه $x+y$ و ax نیز عضو W هستند، پس W طبق قضیهٔ ۳.۱، زیرفضایی از V است. □

پس از اینکه نشان داده شد که اشتراک زیرفضاهای یک فضای برداری چون V زیرفضایی از V است، طبیعی است که این سؤال را مطرح کنیم که آیا اجتماع دو زیر فضای V، زیرفضایی از V است یا خیر؟ به راحتی می‌توان دید که اجتماع چند زیرفضا، باید بردار صفر را داشته باشد و تحت ضرب اسکالر بسته باشد، امّا در حالت کلی، اجتماع مجموعه‌ای از زیرفضاهای V، لزوماً تحت جمع بسته نیست. در واقع به راحتی می‌توان نشان داد که اجتماع دو زیرفضای V، خود زیرفضایی از V است، اگر و تنها اگر یکی از دو فضا دیگری را شامل باشد (رجوع کنید به تمرین ۱۹). با این حال، روشی طبیعی برای ترکیب دو زیرفضای $W_۱$ و $W_۲$ برای به دست آوردن زیرفضایی که هر دوی $W_۱$ و $W_۲$ را در بر داشته باشد وجود دارد. همان طور که در بالا به طور ضمنی اشاره کردیم، کلید یافتن چنین زیرفضایی تضمین بسته بودن آن زیرفضا نسبت به عمل جمع است. این ایده در تمرین ۲۳ مورد بررسی قرار گرفته است.

تمرینات

۱. تعیین کنید که کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است.

(آ) هرگاه V فضایی برداری و W زیرمجموعه‌ای از V باشد که فضای برداری است، آنگاه W زیرفضایی از V است.

(ب) مجموعهٔ تهی، زیر فضای هر فضای برداری است.

(ج) اگر V فضای برداری به غیر از فضای برداری صفر باشد، آنگاه V شامل زیرفضایی مانند W است، که $W \neq V$.

(د) اشتراک هر دو زیر مجموعهٔ V، زیرفضایی از V است.

(ه) یک ماتریس قطری $n \times n$ هیچگاه نمی‌تواند بیش از n درایهٔ ناصفر داشته باشد.

۲. ترانهادهٔ هر یک از ماتریس‌های زیر را تعیین کنید. به علاوه اگر آن ماتریس مربعی باشد، رد آن را محاسبه کنید.

الف) $\begin{bmatrix} -۴ & ۲ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۰ & ۸ & -۶ \\ ۳ & ۴ & ۷ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} -۳ & ۹ \\ ۰ & -۲ \\ ۶ & ۱ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ۱۰ & ۰ & -۸ \\ ۲ & -۴ & ۳ \\ -۵ & ۷ & ۶ \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} -۲ & ۵ & ۱ & ۴ \\ ۷ & ۰ & ۱ & -۶ \end{bmatrix}$

ز) $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \\ ۷ \end{bmatrix}$ ح) $\begin{bmatrix} -۴ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۱ & -۳ \\ ۶ & -۳ & ۵ \end{bmatrix}$

۳. ثابت کنید که به ازای هر $A, B \in M_{m\times n}(F)$ و هر $a, b \in F$، $(aA+bB)^t = aA^t + bB^t$.

۴. ثابت کنید که برای هر $A \in M_{m\times n}(F)$، $(A^t)^t = A$.

۵. ثابت کنید $A + A^t$ به ازای هر ماتریس مربعی A متقارن است.

۶. ثابت کنید که برای هر $A, B \in M_{n\times n}(F)$، $tr(aA+bB) = atr(A)+btr(B)$.

۷. ثابت کنید که ماتریس‌های قطری، ماتریس‌هایی متقارنند.

۸. تعیین کنید که هر یک از موارد زیر، تحت اعمال جمع و ضرب اسکالر تعریف شده بر $\mathbb{R}^3$، زیرفضای $\mathbb{R}^3$ هست یا خیر. برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

الف) $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_3 = -a_2, a_1 = 3a_2\}$

ب) $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 = a_3 + 2\}$

ج) $W_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : 2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0\}$

د) $W_4 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\}$

ه) $W_5 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 1\}$

و) $W_6 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : 5a_1^2 - 3a_2^2 + 6a_3^2 = 0\}$

۹. فرض کنید W_1، W_3 و W_4 مانند تمرین ۸ باشند. $W_1 \cap W_3$، $W_1 \cap W_4$ و $W_3 \cap W_4$ را توصیف کنید. همانطور که ملاحظه می‌شود هر یک زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ است.

۱۰. ثابت کنید که $W_1 = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in F^n : a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0\}$ زیرفضایی از F^n است، اما $W_2 = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in F^n ; a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1\}$ نیست.

۱۱. آیا مجموعهٔ $W = \{f(x) \in P(F) :$ است n ،$f(x)$ یا درجهٔ $f(x) = 0\}$، به ازای $n \geqslant 1$ زیرفضایی از $P(F)$ است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱۲. ماتریس $A_{m\times n}$ را **بالا مثلثی** گویند، هرگاه تمام درایه‌هایش که زیر سطر قطری واقعند صفر باشند، یعنی هرگاه به ازای $i > j$، $A_{ij} = 0$. ثابت کنید که ماتریس‌های بالا مثلثی زیرفضایی از $M_{m\times n}(F)$ تشکیل می‌دهند.

۱۳. فرض کنید S مجموعه‌ای ناتهی و F یک میدان باشد.

ثابت کنید که برای هر $s_0 \in S$، $\{f \in \mathcal{F}(S,F) : f(s_0) = 0\}$ زیرفضایی از $\mathcal{F}(S,F)$ است.

۱۴. فرض کنید S مجموعه‌ای ناتهی و F یک میدان باشد. فرض کنید $\mathcal{C}(S,F)$، مجموعهٔ همهٔ تابع‌های $f \in \mathcal{F}(S,F)$ را که به ازای همهٔ اعضای S به جز تعدادی متناهی، $f(s) = 0$، نشان دهد؛ ثابت کنید $\mathcal{C}(S,F)$، زیرفضایی از $\mathcal{F}(S,F)$ است.

۱۵. آیا مجموعهٔ تمام توابع مشتق‌پذیر با مقادیر حقیقی که بر $\mathcal{R}$ تعریف شده‌اند زیرفضایی از $C(\mathbb{R})$ است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱۶. فرض کنید $C^n(\mathbb{R})$، مجموعهٔ تمام توابع حقیقی را بر خط حقیقی نشان دهد که مشتق n ام پیوسته دارند. ثابت کنید $C^n(\mathbb{R})$، زیرفضایی از $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ است.

۱۷. ثابت کنید زیر مجموعهٔ W از فضای برداری V، زیرفضایی از V است اگر و تنها اگر $W \neq \emptyset$ و هرگاه $a \in F$ و $x, y \in W$، آنگاه $ax \in W$ و $x + y \in W$.

۱۸. ثابت کنید که زیر مجموعهٔ W از فضای برداری V، زیرفضایی از V است، اگر و تنها اگر $\circ \in W$ و هرگاه که $a \in F$ و $x, y \in W$، $ax + y \in W$.

۱۹. فرض کنید $W_۱$ و $W_۲$ زیرفضاهایی از فضای برداری V باشند. ثابت کنید $W_۱ \cup W_۲$ زیرفضایی از V است اگر و تنها اگر $W_۱ \subseteq W_۲$ یا $W_۲ \subseteq W_۱$.

۲۰. ثابت کنید که اگر W زیرفضایی از فضای برداری V باشد و $w_۱$،$w_۲$،$\ldots, w_n$ اعضایی از W باشند، آنگاه برای هر دنباله‌ای از اسکالرها مانند $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$، $a_۱w_۱ + a_۲w_۲ + \ldots + a_nw_n \in W$.

۲۱. نشان دهید که مجموعهٔ دنباله‌های همگرای $\{a_n\}$ (یعنی دنباله‌هایی که برای آنها $\lim_{n\to\infty} a_n$ وجود دارد) زیرفضایی از فضای برداری V در تمرین ۲۰ از بخش ۱-۲ است.

۲۲. فرض کنید که $F_۱$ و $F_۲$ میدان باشند. تابع $g \in \mathcal{F}(F_۱, F_۲)$ **زوج** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x \in F_۱$، $g(-x) = g(x)$ و **فرد** نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in F_۱$، $g(-x) = -g(x)$. ثابت کنید که مجموعهٔ تمام توابع زوج واقع در $\mathcal{F}(F_۱, F_۲)$ و مجموعهٔ تمام توابع فرد واقع در $\mathcal{F}(F_۱, F_۲)$ زیرفضاهایی از $\mathcal{F}(F_۱, F_۲)$ هستند.

تعریف:. اگر $S_۱$ و $S_۲$ زیرمجموعه‌هایی ناتهی از فضای برداری V باشند، آنگاه مجموع $S_۱$ و $S_۲$ که با $S_۱ + S_۲$ نشان داده می‌شود، مجموعهٔ $\{x + y : x \in S_۱ \text{ و } y \in S_۲\}$ خواهد بود.

۲۳. فرض کنید $W_۱$ و $W_۲$ زیرفضاهایی از فضای برداری V باشند.

الف) ثابت کنید که $W_۱ + W_۲$ زیرفضایی از V است که هم شامل $W_۱$ است و هم $W_۲$.

ب) ثابت کنید که هر زیرفضایی از V که هم شامل $W_۱$ باشد و هم شامل $W_۲$، حتماً شامل $W_۱ + W_۲$ نیز هستند.

تعریف: فضای برداری V، **مجموع مستقیم** W_1 و W_2 نامیده می‌شود، هرگاه W_1 و W_2 زیرفضاهایی از V باشند به طوری که $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ و $W_1 + W_2 = V$. جملهٔ «V مجموع مستقیم W_1 و W_2 است» را با نماد $V = W_1 \oplus W_2$ نمایش می‌دهیم.

۲۴. نشان دهید که F^n مجموع مستقیم زیرفضاهای زیر است.

$$W_1 = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in F^n : a_n = 0\}$$
$$W_2 = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in F^n : a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0\}$$

۲۵. فرض کنید W_1 نشان دهندهٔ مجموعهٔ تمام چندجمله‌ای‌های $f(x)$ واقع در $P(F)$ باشد که اگر به صورت زیر نوشته شوند،

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_0$$

به ازای هر i زوج داشته باشیم، $a_i = 0$. به همین ترتیب، فرض کنید W_2 مجموعهٔ تمام چندجمله‌ای‌های $g(x)$ واقع در $P(F)$ را نشان دهد که اگر به صورت زیر نوشته شوند،

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

به ازای هر i فرد داشته باشیم $b_i = 0$. ثابت کنید $P(F) = W_1 \oplus W_2$.

۲۶. در $M_{m\times n}(F)$، W_1 را برابر $\{A \in M_{m\times n}(F) : A_{ij} = 0، i > j \text{ هرگاه }\}$ و W_2 را برابر $\{A \in M_{m\times n}(F) : A_{ij} = 0، i \leqslant j \text{ هرگاه }\}$ تعریف کنید (W_1 مجموعهٔ تمام ماتریس‌های بالا مثلثی تعریف شده در تمرین ۱۲ می‌باشد).نشان دهید که $M_{m\times n}(F) = W_1 \oplus W_2$.

۲۷. فرض کنید V نشان‌دهندهٔ فضایی برداری باشد که متشکل از تمام ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ است (آن گونه که در تمرین ۱۲ تعریف شد) و فرض کنید W_1 نشان‌دهندهٔ زیرفضایی از V باشد که متشکل از تمام ماتریس‌های قطری است. نشان دهید که $V = W_1 \oplus W_2$، که در اینجا $W_2 = \{A \in V : A_{ij} = 0، i \geqslant j \text{ هرگاه }\}$.

۲۸. ماتریس **متقارن اریب** نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم $M^t = -M$. واضح است که یک ماتریس متقارن اریب، مربعی نیز هست. ثابت کنید که مجموعهٔ W_1 متشکل از تمام ماتریس‌های $n \times n$ متقارن اریب زیرفضایی از $M_{n\times n}(F)$ است. فرض کنید که W_2 زیرفضایی از $M_{n\times n}(F)$ باشد که متشکل از تمام ماتریس‌های متقارن $n \times n$ است. ثابت کنید $M_{n\times n}(F) = W_1 \oplus W_2$.

۲۹. فرض کنید $W_1 = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A_{ij} = 0، i \leqslant j \text{ هرگاه }\}$ و فرض کنید که W_2 نشان‌دهندهٔ

مجموعهٔ ماتریس‌های متقارن $n \times n$ باشد. هم W_1 و هم W_2 زیرفضایی از $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ هستند. ثابت کنید $M_{n\times n}(R) = W_1 \oplus W_2$. تمرین‌های ۲۸ و ۲۹ را با هم مقایسه کنید.

۳۰. فرض کنید W_1 و W_2 زیرفضاهایی از فضای برداری V باشند. ثابت کنید V مجموع مستقیم W_1 و W_2 است اگر و تنها اگر هر عضو از V را بتوان به صورت منحصر به فردی به شکل $x_1 + x_2$ نوشت که $x_1 \in W_1$ و $x_2 \in W_2$.

۳۱. فرض کنید W زیرفضایی از فضای برداری V روی میدان F باشد. برای هر $v \in V$ مجموعهٔ $\{v\} + W = \{v + w : w \in W\}$ **هم مجموعه‌ای** از W که شامل V است نامیده می‌شود. معمولاً به جای $\{v\} + w$، این هم مجموعه را با $v + w$ نشان می‌دهند.
موارد زیر را ثابت کنید:

الف) $v + W$ زیرفضایی از V است اگر و تنها اگر $v \in W$.

ب) $v_1 + W = v_2 + W$ اگر و تنها اگر $v_1 - v_2 \in W$.
جمع و ضرب اسکالر در اعضای F را می‌توان در گردایهٔ $S = \{v + W : v \in V\}$ که متشکل از تمام هم مجموعه‌های W است، به صورت زیر تعریف کرد:
برای هر $v_1, v_2 \in V$

$$(v_1 + W) + (v_2 + W) = (v_1 + v_2) + W$$

و برای هر $v \in V$ و $a \in F$

$$a(v + W) = av + W$$

ج) ثابت کنید که عملیات فوق خوش تعریف هستند؛ یعنی نشان دهید که اگر

$$v_1 + W = v_1' + W \qquad \text{و} \qquad v_2 + W = v_2' + W$$

آنگاه

$$(v_1 + W) + (v_2 + W) = (v_1' + W) + (v_2' + W)$$

و برای هر $a \in F$

$$a(v_1 + W) = a(v_1' + W)$$

د) ثابت کنید مجموعهٔ S تحت عملیاتی که در بالا تعریف شدند یک فضای برداری است. این فضای برداری، **فضای خارج قسمتی** V بر W نامیده می‌شود که با V/W نشان داده می‌شود.

۱-۴ ترکیبات خطی و دستگاه‌های معادلات خطی

در بخش ۱-۱ نشان داده شد که معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از سه نقطهٔ A، B و C در فضا که بر یک خط راست واقع نیستند به صورت $x = A + t_1u + t_2v$ است، که u و v نشان‌دهندهٔ بردارهایی هستند که از A آغاز می‌شوند و به ترتیب به B و C ختم می‌گردند و t_1 و t_2، دو عدد حقیقی دلخواه را نشان می‌دهند. یک حالت خاص مهم، وقتی رخ می‌دهد که A بر مبدأ واقع باشد. در این صورت معادلهٔ صفحه به شکل ساده‌تر $x = t_1u + t_2v$ درمی‌آید و مجموعهٔ همهٔ نقاط واقع بر این صفحه، زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ است (این مطلب در قضیهٔ ۱.۵ ثابت خواهد شد). عباراتی به شکل $t_1u + t_2v$ که t_1 و t_2 اسکالر و u و v بردار هستند، نقشی اساسی در نظریهٔ فضاهای برداری دارند. تعمیم صحیح چنین عباراتی، در تعاریف زیر ارائه شده است.

چند تعریف: فرض کنید V فضایی برداری و S زیرمجموعه‌ای ناتهی از V باشد. بردار $v \in V$ را **ترکیبی خطی** از اعضای S نامند، هرگاه تعدادی متناهی عضو از S مانند $u_1, u_2, \ldots, u_n$ و تعداد متناهی اسکالر در F، مانند $a_1, a_2, \ldots, a_n$ به گونه‌ای موجود باشد که $v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$. همچنین، در این حالت می‌گوییم که v ترکیبی خطی از $u_1, u_2, \ldots, u_n$ است و $a_1, a_2, \ldots, a_n$ را **ضرایب ترکیب خطی** می‌نامیم.

مشاهده کنید که در هر فضای برداری V برای هر $v \in V$ داریم $0v = 0$. بنابراین بردار صفر، ترکیبی خطی از هر مجموعهٔ ناتهی V است.

مثال ۱. جدول ۱-۱ میزان ویتامین موجود در ۱۰۰ گرم از ۱۲ نوع مادهٔ غذایی را به ازای ویتامین‌های A، B_1 (نیاسین)، B_2 (ریبو فلاوین)، پتاسین و C (اسید اسکوربیک) نشان می‌دهد.

میزان ویتامین موجود در ۱۰۰ گرم از هر یک از این مواد غذایی را می‌توان در یک بردار ستونی در $\mathbb{R}^5$ ثبت کرد. به عنوان مثال، بردار ویتامین سس سیب عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} ۰/۰۰ \\ ۰/۰۱ \\ ۰/۰۲ \\ ۰/۲۰ \\ ۲/۰۰ \end{bmatrix}$$

جدول ۱-۱: میزان ویتامین موجود در ۱۰۰ گرم از چند مادهٔ غذایی

	A (واحد)	B_1 (mg)	B_2 (mg)	نیاسین (mg)	C (mg)
سس سیب	۰	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۲	۲
سیب خام پوست نکنده و تازه	۹۰	۰/۰۳	۰/۰۲	۰/۱	۴
شکلات کاکائویی با هستهٔ نارگیلی	۰	۰/۰۲	۰/۰۷	۰/۲	۰
صدف (فقط گوشت آن)	۱۰۰	۰/۱۰	۰/۱۸	۱/۳	۱۰
کیک یزدی تهیه شده از پودر (خشک)	۰	۰/۰۵	۰/۰۶	۰/۳	۰
فرنی پخته (غنی نشده)	(۰)*	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۱	(۰)
مربا و کنسرو	۱۰	۰/۰۱	۰/۰۳	۰/۲	۲
کیک نارگیلی رویه‌دار (تهیه شده از پودر)	۰	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۴	۰
برنج قهوه‌ای (نپخته)	(۰)	۰/۳۴	۰/۰۵	۴/۷	(۰)
سس سویا	۰	۰/۰۲	۰/۲۵	۰/۴	۰
اسپاگتی پخته (غنی نشده)	۰	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۳	۰
برنج وحشی (نپخته)	(۰)	۰/۴۵	۰/۶۳	۶/۲	(۰)

[4] با در نظر گرفتن بردارهای ویتامین کیک یزدی، کیک نارگیلی رویه‌دار، برنج قهوه‌ای، سس سویا و برنج وحشی، ملاحظه می‌کنیم که:

$$\begin{bmatrix} ۰/۰۰ \\ ۰/۰۵ \\ ۰/۰۶ \\ ۰/۳۰ \\ ۰/۰۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰/۰۰ \\ ۰/۰۲ \\ ۰/۰۲ \\ ۰/۴۰ \\ ۰/۰۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰/۰۰ \\ ۰/۳۴ \\ ۰/۰۵ \\ ۴/۷۰ \\ ۰/۰۰ \end{bmatrix} + ۲ \begin{bmatrix} ۰/۰۰ \\ ۰/۰۲ \\ ۰/۲۵ \\ ۰/۴۰ \\ ۰/۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰ \\ ۰/۴۵ \\ ۰/۶۳ \\ ۶/۲۰ \\ ۰/۰۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین، بردار ویتامین برنج وحشی، ترکیبی خطی از بردارهای ویتامین کیک یزدی، کیک نارگیلی رویه‌دار، برنج قهوه‌ای و سس سویاست. پس ۱۰۰ گرم کیک یزدی، ۱۰۰ گرم کیک نارگیلی رویه‌دار، ۱۰۰ گرم برنج قهوه‌ای و ۲۰۰ گرم سس سویا،

[4] منبع: Bernic K. Watt و Annabel L. Merrill، در Composition of Foods (ترکیب مواد غذایی) (Agriculture Handbook، کتابچهٔ کشاورزی شمارهٔ ۸)، بخش تحقیقات مصرف کننده و اقتصاد مواد غذایی، وزارت کشاورزی آمریکا، واشنگتن D.C، ۱۹۶۳.

* وجود صفر در پرانتز نشان می‌دهد که میزان ویتامین موجود، یا هیچ است و یا آنقدر کم است که قابل اندازه‌گیری نیست.

دقیقاً همان مقدار از پنج ویتامین را دارند که ۱۰۰ گرم برنج وحشی دارد. به همین ترتیب، از آنجا که:

$$\begin{bmatrix} ۰/۰۰ \\ ۰/۰۱ \\ ۰/۰۲ \\ ۰/۲۰ \\ ۲/۰۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۹۰/۰۰ \\ ۰/۰۳ \\ ۰/۰۲ \\ ۰/۱۰ \\ ۴/۰۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰/۰۰ \\ ۰/۰۲ \\ ۰/۰۷ \\ ۰/۲۰ \\ ۰/۰۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰/۰۰ \\ ۰/۰۱ \\ ۰/۰۱ \\ ۰/۱۰ \\ ۰/۰۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱۰/۰۰ \\ ۰/۰۱ \\ ۰/۰۳ \\ ۰/۲۰ \\ ۲/۰۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰/۰۰ \\ ۰/۰۱ \\ ۰/۰۱ \\ ۰/۳۰ \\ ۰/۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰۰/۰۰ \\ ۰/۱۰ \\ ۰/۱۸ \\ ۱/۳۰ \\ ۱۰/۰۰ \end{bmatrix}$$

۲۰۰ گرم سس سیب، ۱۰۰ گرم سیب، ۱۰۰ گرم شکلات کاکائویی، ۱۰۰ گرم فرنی، ۱۰۰ گرم مربا و ۱۰۰ گرم اسپاگتی، دقیقاً همان قدر ویتامین دارند که ۱۰۰ گرم صدف دارد. $\square$

در طول فصل‌های ۱ و ۲ به موارد بسیاری برمی‌خوریم که در آنها باید تعیین کنیم که آیا یک بردار را می‌توان به صورت ترکیب خطی بردارهای دیگر بیان کرد یا خیر، و در صورت امکان، چگونه. این سؤال به مسألهٔ مهم حل دستگاه‌های معادلات خطی می‌انجامد. برای تشریح این روش مهم، نحوهٔ تعیین این را که آیا بردار $(۲,۶,۸)$ را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از بردارهای زیر بیان کرد یا نه، شرح می‌دهیم.

$$\begin{aligned} &u_۱ = (۱,۲,۱) \quad , \quad u_۲ = (-۲,-۴,-۲) \quad , u_۳ = (۰,۲,۳) \\ &u_۴ = (۲,۰,-۳) \quad \text{و} \quad u_۵ = (-۳,۸,۱۶) \end{aligned}$$

بنابراین باید مشخص کنیم که آیا اسکالرهایی چون $a_۱, a_۲, a_۳, a_۴$ و $a_۵$ را می‌توان طوری یافت که رابطهٔ زیر برقرار باشد یا خیر:

$$\begin{aligned} (۲,۶,۸) &= a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + a_۳u_۳ + a_۴u_۴ + a_۵u_۵ \\ &= a_۱(۱,۲,۱) + a_۲(-۲,-۴,۲) + a_۳(۰,۲,۳) + a_۴(۲,۰,-۳) + a_۵(-۳,۸,۱۶) \\ &= (a_۱ - ۲a_۲ + ۲a_۴ - ۳a_۵, ۲a_۱ - ۴a_۲ + ۲a_۳ + ۸a_۵, a_۱ - ۲a_۲ + ۳a_۳ - ۳a_۴ + ۱۶a_۵) \end{aligned}$$

بنابراین $(۲,۶,۸)$ را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از $u_۱$، $u_۲$، $u_۳, u_۴$ و $u_۵$ بیان کرد اگر و تنها اگر پنج‌تایی مرتبی از اسکالرها مانند $(a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵)$ موجود باشد که در دستگاه معادلات خطی زیر که از مساوی قرار دادن مختصات متناظر در معادلهٔ بالا به دست می‌آید، صدق کند.

$$\begin{array}{rrrrrl} a_۱ & -۲a_۲ & & +۲a_۴ & -۳a_۵ & = ۲ \\ ۲a_۱ & -۴a_۲ & +۲a_۳ & & +۸a_۵ & = ۶ \\ a_۱ & -۲a_۲ & +۳a_۳ & -۳a_۴ & +۱۶a_۵ & = ۸ \end{array} \tag{۱-۱}$$

برای حل دستگاه (۱-۱) ، آن را با دستگاه دیگری که همان جواب‌ها را دارد ولی حل آن ساده‌تر است، جایگزین می‌کنیم. روشی که به کار خواهد رفت از طریق حذف چند مجهول خاص از تمام معادلات به جز یک معادله، آنها را بر حسب بقیه مجهول‌ها بیان خواهد کرد. در قدم اول، a_1 را از تمام معادلات به جز معادلهٔ اوّل حذف می‌کنیم به این ترتیب که ۲− برابر معادلهٔ اول را به معادلهٔ دوم و ۱− برابر معادلهٔ اول را به معادلهٔ سوم اضافه می‌کنیم. حاصل این کار، دستگاه جدید زیر است:

$$\begin{array}{rrrrrl} a_1 & -2a_2 & & +2a_4 & -3a_5 & =2 \\ & & 2a_3 & -4a_4 & +14a_5 & =2 \\ & & 3a_3 & -5a_4 & +19a_5 & =6 \end{array} \tag{۱-۲}$$

در این مثال خاص، اتفاقاً در هنگام حذف a_1 از همهٔ معادلات به جز معادلهٔ اوّل، a_2 را هم از تمام معادلات به جز معادلهٔ اوّل حذف کردیم. این مسأله در حالت کلی لزوماً اتفاق نمی‌افتد. حال می‌خواهیم معادلهٔ دوم دستگاه (۱-۲) را نسبت به a_3 حل کنیم، و سپس a_3 را از معادلهٔ سوم حذف کنیم. برای انجام این کار، ابتدا معادلهٔ دوم را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم که حاصل آن عبارت است از:

$$\begin{array}{rrrrrl} a_1 & -2a_2 & & +2a_4 & -3a_5 & =2 \\ & & a_3 & -2a_4 & +7a_5 & =1 \\ & & 3a_3 & -5a_4 & +19a_5 & =6 \end{array}$$

حال ۳− برابر معادلهٔ دوم را به معادلهٔ سوم اضافه می‌کنیم. حاصل کار چنین است:

$$\begin{array}{rrrrrl} a_1 & -2a_2 & & +2a_4 & -3a_5 & =2 \\ & & a_3 & -2a_4 & +7a_5 & =1 \\ & & & a_4 & -2a_5 & =3 \end{array} \tag{۱-۳}$$

کار را با حذف a_4 از همهٔ معادلات دستگاه (۱-۳) به جز معادلهٔ سوم ادامه می‌دهیم. دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{array}{rrrrrl} a_1 & -2a_2 & & & +a_5 & =-4 \\ & & a_3 & & +3a_5 & =7 \\ & & & a_4 & -2a_5 & =3 \end{array} \tag{۱-۴}$$

دستگاه (۱-۴)، شکل مورد نظر ما را دارد. حل این دستگاه، نسبت به اوّلین مجهولی که در هر یک از معادلات ظاهر می‌شود (a_1, a_3, a_5) بر حسب دو مجهول دیگر (a_2, a_5)، ساده است. اگر دستگاه (۱-۴) را به این شکل بازنویسی کنیم، در

می‌یابیم که:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2a_2 - a_5 - 4 \\ a_3 &= -3a_5 + 7 \\ a_4 &= +2a_5 + 3 \end{aligned}$$

بنابراین، اسکالرهای a_2 و a_5 را هر چه انتخاب کنیم، بردار

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (2a_2 - a_5 - 4, a_2 - 3a_5 + 7, 2a_5 + 3, a_5)$$

جوابی برای دستگاه (۱-۱) است. به ویژه بردار $(-4, 0, 7, 3, 0)$، که با قرار دادن $a_2 = 0$ و $a_5 = 0$ به دست می‌آید، جوابی برای (۱-۱) است. بنابراین:

$$(2, 6, 8) = -4u_1 + 0u_2 + 7u_3 + 3u_4 + 0u_5$$

و در نتیجه $(2, 6, 8)$، ترکیبی خطی از u_1، u_2، u_3، u_4 و u_5 می‌باشد.
روشی که در بالا تشریح شد، برای ساده کردن دستگاه اصلی، سه نوع عمل را به کار می‌گیرد:

۱. تعویض جای دو معادلهٔ دلخواه دستگاه.

۲. ضرب یکی از معادلات دستگاه در یک ثابت غیر صفر.

۳. افزودن مضرب ثابتی از یکی از معادلات دستگاه به دیگری.

در بخش ۳-۴ ثابت خواهیم کرد که این اعمال، جواب‌های دستگاه اصلی را تغییر نمی‌دهند. توجه کنید که این اعمال را برای به دست آوردن دستگاهی به کار می‌بریم که دارای خواص زیر باشد:

۱. اولین ضریب ناصفر هر معادله یک باشد.

۲. اگر مجهولی، اولین مجهول دارای ضریب ناصفر یکی از معادلات باشد، در این صورت آن مجهول در تمام معادلات دیگر ضریبش صفر باشد.

۳. اولین مجهول دارای ضریب ناصفر در هر یک از معادلات، اندیسش بزرگتر از اولین مجهول با ضریب ناصفر در هر یک از معادلات قبلی باشد.

برای تفهیم بهتر این خواص توجه کنید که هیچ یک از دستگاه‌های زیر از تمام این خواص برخوردار نیستند.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad + x_4 \quad &= 7 \\ x_3 \quad - 5x_4 &= -1 \end{aligned} \qquad (1\text{-}5)$$

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & & +x_5 & = -5 \\ & & x_3 & & -2x_5 & = 9 \\ & & & x_4 & +3x_5 & = 6 \end{array} \quad (۱-۶)$$

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & = 1 \\ & & & x_4 & -6x_5 & = 0 \\ & x_2 & +5x_3 & & -3x_5 & = 2 \end{array} \quad (۱-۷)$$

در واقع دستگاه (۱-۵) چون اولین ضریب ناصفر معادلهٔ دومش ۲ است، در شرط ۱ صدق نمی‌کند؛ دستگاه (۱-۶) در شرط ۲ صدق نمی‌کند، چرا که اولین مجهول دارای ضریب ناصفر در معادلهٔ دوم آن یعنی x_3، در معادلهٔ اول هم ضریب ناصفر دارد؛ و دستگاه (۱-۷) در شرط ۳ صدق نمی‌کند، چرا که اولین مجهول دارای ضریب ناصفر در معادلهٔ سوم آن یعنی x_2، زیرنویسش بیشتر از زیرنویس x_4، که اولین مجهول با ضریب ناصفر معادلهٔ دوم است، نیست.

وقتی دستگاهی که از خواص ۱، ۲ و ۳ برخوردار است به دست آید، به راحتی می‌توان آن را نسبت به بعضی از مجهول‌ها، بر حسب مجهول‌های دیگر حل کرد (همان گونه که در مثال بالا انجام شد). با این حال اگر در حین انجام اعمال ۱، ۲ و ۳ دستگاهی حاصل شد که شامل معادله‌ای به شکل $0 = c$ باشد، که c هم ناصفر باشد، در این صورت دستگاه اصلی جواب نخواهد داشت (به مثال ۲ رجوع کنید).

در فصل ۳ به مطالعهٔ معادلات خطی باز خواهیم گشت. در آنجا زیربنای نظری این روش حل دستگاه‌های معادلات خطی را بررسی و آن را با استفاده از ماتریس‌ها ساده‌تر خواهیم کرد.

مثال ۲. ادعا می‌کنیم که:

$$2x^3 - 2x^2 + 12x - 6$$

در $P_3(\mathbb{R})$، ترکیبی خطی از

$$x^3 - 2x^2 - 5x - 3 \qquad \text{و} \qquad 3x^3 - 5x^2 - 4x - 9$$

است؛ ولی

$$3x^3 - 2x^2 + 7x + 8$$

نیست. در حالت اول، می‌خواهیم اسکالرهای a و b را طوری بیابیم که:

$$\begin{aligned} ۲x^۳ - ۲x^۲ + ۱۲x - ۶ &= a(x^۳ - ۲x^۲ - ۵x - ۳) + b(۳x^۳ - ۵x^۲ - ۴x - ۹) \\ &= (a + ۳b)x^۳ + (-۲a - ۵b)x^۲ + (-۵a - ۴b)x + (-۳a - ۹b) \end{aligned} \tag{۱-۸}$$

بنابراین به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} a \quad +۳b &= ۲ \\ -۲a \quad -۵b &= -۲ \\ -۵a \quad -۴b &= ۱۲ \\ -۳a \quad -۹b &= -۶ \end{aligned} \tag{۱-۹}$$

برای حذف a، با افزودن ضرایب مناسبی از معادلهٔ اول به بقیه، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} a \quad +۳b \quad &= ۲ \\ b \quad &= ۲ \\ ۱۱b \quad &= ۲۲ \\ ۰b \quad &= ۰ \end{aligned} \tag{۱-۱۰}$$

حال، افزودن ضرایبی از معادلهٔ دوم به بقیه منجر به نتیجهٔ زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} a \quad &= -۴ \\ b \quad &= ۲ \\ ۰ \quad &= ۰ \end{aligned} \tag{۱-۱۱}$$

در نتیجه:

$$۲x^۳ - ۲x^۲ + ۱۲x - ۶ = -۴(x^۳ - ۲x^۲ - ۵x - ۳) + ۲(۳x^۳ - ۵x^۲ - ۴x - ۹)$$

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که اسکالرهای a و b ای که در معادلهٔ زیر صدق کنند وجود ندارند.

$$۳x^۳ - ۲x^۲ + ۷x + ۸ = a(x^۳ - ۲x^۲ - ۵x - ۳) + b(۳x^۳ - ۵x^۲ - ۴x - ۹)$$

مانند مورد قبلی، دستگاهی از معادلات خطی به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} a \quad +۳b \quad &= ۳ \\ -۲a \quad -۵b \quad &= -۲ \\ -۵a \quad -۴b \quad &= ۷ \\ -۳a \quad -۹b \quad &= ۸ \end{aligned} \tag{۱-۱۲}$$

به مانند قبل، با حذف کردن a دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a \quad +۳b &= ۳\\ b &= ۴\\ ۱۱b &= ۲۲\\ ۰ &= ۱۷ \end{aligned}$$

ولی حضور معادلهٔ ناسازگار $۱۷ = ۰$، این مسأله را روشن می‌کند که (۱-۱۲) جواب ندارد. در نتیجه، $۳x^۳ - ۲x^۲ + ۷x + ۸$، ترکیبی خطی از $x^۳ - ۲x^۲ - ۵x - ۳$ و $۳x^۳ - ۵x^۲ - ۴x - ۹$ نیست. □

در ادامهٔ این مبحث، مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی یک مجموعه را تشکیل خواهیم داد. حال برای چنین مجموعه‌ای از ترکیب‌های خطی نامی انتخاب می‌کنیم.

تعریف:. فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ ناتهی از فضای برداری V باشد. منظور از **فضای پدیدآمده** از S که با $span(S)$ نشان داده می‌شود، مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی اعضای S است. برای راحتی فنی، $span(\emptyset)$ را $\{۰\}$ تعریف می‌کنیم.

به عنوان مثال، در $\mathbb{R}^۳$ فضای پدید آمده از مجموعهٔ $\{(۱,۰,۰),(۰,۱,۰)\}$، از بردارهایی در $\mathbb{R}^۳$ که به ازای اسکالرهای a و b ای به شکل $a(۱,۰,۰) + b(۰,۱,۰) = (a,b,۰)$ هستند تشکیل شده است. بنابراین فضای پدید آمده از $\{(۱,۰,۰),(۰,۱,۰)\}$، متشکل از تمام نقاط واقع در صفحهٔ xy است. در این مثال، فضای پدید آمده از مجموعهٔ مورد نظر زیرفضایی از $\mathbb{R}^۳$ است. این مطلب در حالت کلی هم برقرار است.

قضیه ۱.۵. فضای پدید آمده از هر زیرمجموعهٔ فضای برداری V مانند S، زیرفضایی از V است. به علاوه هر زیرفضای V که S را شامل باشد، باید شامل زیرفضای پدید آمده از S هم باشد.

برهان. قضیه در صورتی که $S = \emptyset$ بلافاصله نتیجه می‌شود، چرا که $span(\emptyset) = \{۰\}$، که زیرفضایی است که مشمول هر زیرفضایی از V است.

هرگاه $S \neq \emptyset$، آنگاه S عضوی مانند z خواهد داشت. پس $۰z = ۰$ عضوی از $span(S)$ است. فرض کنید $x, y \in span(S)$؛ در این صورت، اعضای $u_۱, u_۲, \ldots, u_m$ و $v_۱, v_۲, \ldots, v_n$ در S و اسکالرهای $a_۱, a_۲, \ldots a_m$ و $b_۱, b_۲, \ldots, b_n$ وجود دارند به گونه‌ای که:

$$x = a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + \ldots + a_m u_m \qquad \text{و} \qquad y = b_۱v_۱ + b_۲v_۲ + \ldots + b_n v_n$$

بنابراین:

$$x + y = a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + \ldots + a_m u_m + b_۱v_۱ + b_۲v_۲ + \ldots + b_n v_n$$

و همچنین

$$cx = (ca_۱)u_۱ + (ca_۲)u_۲ + \ldots + (ca_m)u_m$$

به ازای هر اسکالری چون c به وضوح ترکیباتی خطی از اعضای S اند. پس $x+y$ و cx به $span(S)$ تعلق دارند. در نتیجه $span(S)$ زیرفضایی از V است. حال فرض کنید W زیرفضای دلخواهی از V را نشان دهد که S را در بر دارد. هرگاه $w \in span(S)$، آنگاه w به ازای اعضایی از S مانند $w_1, w_2, \ldots, w_k$، و اسکالرهایی چون $c_1, c_2, \ldots, c_k$، به شکل $w = c_1w_1 + c_2w_2 + \ldots + c_kw_k$ خواهد بود. چون $S \subseteq W$، داریم $w_1, w_2, \ldots, w_k \in W$. بنابراین طبق تمرین ۲۰ بخش ۱-۳، $w = c_1w_1 + c_2w_2 + \ldots + c_kw_k$ عضوی از W است. چون w عضو دلخواهی از $span(S)$ است و به W تعلق دارد، نتیجه می‌شود که $span(S) \subseteq W$ و به این ترتیب برهان کامل می‌شود. □

تعریف: گوییم زیرفضای S از فضای برداری V، V را **تولید می‌کند** و یا **می‌پیماید**، هرگاه که $span(S) = V$؛ همچنین در این حالت می‌گوییم که **اعضای** S، V **را تولید می‌کنند** و یا **می‌پیمایند**.

مثال ۳. بردارهای $(1,1,0)$، $(1,0,1)$ و $(0,1,1)$، $\mathbb{R}^3$ را تولید می‌کنند، چرا که هر عضو دلخواه (a_1, a_2, a_3) ای از $\mathbb{R}^3$، ترکیبی خطی از این سه بردار است. در واقع اسکالرهای r، s و t ای که به ازای آنها:

$$r(1,1,0) + s(1,0,1) + t(0,1,1) = (a_1, a_2, a_3)$$

عبارتند از:

$$t = \frac{1}{2}(-a_1 + a_2 + a_3) \quad \text{و} \quad s = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + a_3) \quad , \quad r = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3)$$

□

مثال ۴. چندجمله‌ای‌های $x^2 + 3x - 2$، $2x^2 + 5x - 3$ و $-x^2 - 4x + 4$، $P_2(\mathbb{R})$ را تولید می‌کنند، چرا که هر یک از این چند جمله‌ای‌ها به $P_2(\mathbb{R})$ تعلق دارند و هر یک از چندجمله‌ای‌های $ax^2 + bx + c$ ی واقع در $P_2(\mathbb{R})$، ترکیبی خطی از این چندجمله‌ای‌ها است؛ در واقع:

$$\begin{aligned}(-8a + 5b + 3c)(x^2 + 3x - 2) + (4a - 2b - c)(2x^2 + 5x - 3)\\ + (-a + b + c)(-x^2 - 4x + 4) = ax^2 + bx + c\end{aligned}$$

□

مثال ۵. ماتریس‌های

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ را تولید می‌کنند، زیرا هر ماتریس دلخواهی از $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ مثل

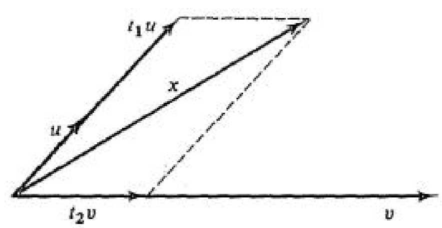
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

را می‌توان به صورت زیر، به شکل ترکیبی خطی از این چهار ماتریس نوشت:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{3}a_{11}+\frac{1}{3}a_{12}-\frac{1}{3}a_{21}-\frac{2}{3}a_{22}\right)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &+\left(\frac{1}{3}a_{11}+\frac{1}{3}a_{12}+\frac{2}{3}a_{21}-\frac{1}{3}a_{22}\right)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &+\left(\frac{1}{3}a_{11}-\frac{2}{3}a_{12}+\frac{1}{3}a_{21}-\frac{1}{3}a_{22}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad +\left(-\frac{2}{3}a_{11}+\frac{1}{3}a_{12}+\frac{1}{3}a_{21}+\frac{1}{3}a_{22}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

در ابتدای این بخش متذکر شدیم که معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از سه نقطهٔ غیر واقع بر یک خط راست، که یکی از آن سه نقطه مبدأ باشد، به شکل $x = t_1u + t_2v$ است، که $u, v \in \mathbb{R}^3$ و t_1 و t_2 اسکالرند. بنابراین بردار x در $\mathbb{R}^3$، ترکیبی خطی از $u, v \in \mathbb{R}^3$ است اگر و تنها اگر در صفحهٔ شامل u و v واقع باشد (به شکل ۱-۵ مراجعه کنید.) معمولاً زیر مجموعه‌های



شکل ۱-۵:

متفاوت بسیاری وجود دارند که زیرفضایی چون W را تولید می‌کنند (به تمرین ۱۱ رجوع کنید). طبیعی است که به دنبال زیرمجموعه‌ای از W بگردیم که W را تولید کند و به اندازهٔ ممکن کوچک باشد. در بخش بعد، شرایطی را که تحت آنها بتوان عضوی را از یک مجموعهٔ مولد برداشت تا مجموعهٔ مولد کوچکتری به دست آید بررسی خواهیم کرد.

تمرینات

۱. مشخص کنید که کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) بردار صفر، ترکیبی خطی از هر مجموعهٔ ناتهی از بردارهاست.

ب) فضای پدید آمده از $\emptyset$، $\emptyset$ است.

ج) اگر S زیرمجموعه‌ای از فضای برداری V باشد، آنگاه $span(S)$ برابر با اشتراک تمام زیرفضاهایی از V است که S را در بردارند.

د) در حل یک دستگاه از معادلات خطی، می‌توان یک معادله را در هر ثابتی ضرب کرد.

ه) در حل یک دستگاه معادلات خطی، می‌توان مضربی از یکی از معادلات را به دیگری افزود.

و) هر دستگاه از معادلات خطی جواب دارد.

۲. هر یک از دستگاه‌های معادلات خطی زیر را با روشی که در این فصل معرفی شد، حل کنید.

الف)
$$\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & -2x_2 & -3x_3 & & =-2 \\ 3x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +5x_4 & =7 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & -x_4 & =-3 \end{array}$$

ب)
$$\begin{array}{rrrl} 3x_1 & -7x_2 & +4x_3 & =10 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & =3 \\ 2x_1 & -x_2 & -2x_3 & =6 \end{array}$$

ج)
$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & =5 \\ x_1 & +4x_2 & -3x_3 & -3x_4 & =6 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +4x_4 & =8 \end{array}$$

د)
$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & =2 \\ x_1 & & +8x_3 & +5x_4 & =-6 \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & +5x_4 & =3 \end{array}$$

ه)
$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +2x_2 & -4x_3 & -x_4 & +x_5 & =7 \\ -x_1 & & +10x_3 & -3x_4 & -4x_5 & =-16 \\ 2x_1 & +5x_2 & -5x_3 & -4x_4 & -x_5 & =2 \\ 4x_1 & +11x_2 & -7x_3 & -10x_4 & -2x_5 & =7 \end{array}$$

و)
$$\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & +6x_3 & =-1 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & =8 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & =15 \\ x_1 & +3x_2 & +10x_3 & =-5 \end{array}$$

۳. برای هر دسته از بردارهای زیر در $\mathbb{R}^3$ تعیین کنید که آیا اولین بردار را می‌توان به صورت ترکیب خطی از دو بردار دیگر بیان کرد یا نه.

الف) $(-2, 0, 3)$، $(1, 3, 0)$ و $(2, 4, -1)$.

ب) $(1, 2, -3)$، $(-3, 2, 1)$ و $(2, -1, -1)$.

ج) $(3, 4, 1)$، $(1, -2, 1)$ و $(-2, -1, 1)$.

د) $(2, -1, 0)$، $(1, 2, -3)$ و $(1, -3, 2)$.

ه) $(5, 1, -5)$، $(1, -2, -3)$ و $(-2, 3, -4)$.

و) $(-2, 2, 2)$، $(1, 2, -1)$ و $(-3, -3, 3)$.

۴. برای هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر در $P_3(\mathbb{R})$، تعیین کنید که آیا اولین چندجمله‌ای را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از دو چندجمله‌ای دیگر بیان کرد یا خیر.

الف) $x^3 - 3x + 5$، $x^3 + 2x^2 - x + 1$ و $x^3 + 3x^2 - 1$.

ب) $4x^3 + 2x^2 - 6$، $x^3 - 2x^2 + 4x + 1$ و $3x^3 - 6x^2 + x + 4$.

ج) $-2x^3 - 11x^2 + 3x + 2$، $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ و $2x^3 + x^2 + 3x - 2$.

د) $x^3 + x^2 + 2x + 13$، $2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ و $x^3 - x^2 + 2x + 3$.

ه) $x^3 - 8x^2 + 4x$، $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ و $x^3 - 2x + 3$.

و) $6x^3 - 3x^2 + x + 2$، $x^3 - x^2 + 2x + 3$ و $2x^3 - 3x + 1$.

۵. در F^n فرض کنید e_j نشان‌دهندهٔ برداری باشد که j امین مختصش یک است و سایر مختص‌هایش صفرند. ثابت کنید $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$، F^n را تولید می‌کند.

۶. نشان دهید که $P_n(F)$ توسط $\{1, x, \ldots, x^n\}$ تولید می‌شود.

۷. نشان دهید که ماتریس‌های زیر $M_{2\times 2}(F)$ را تولید می‌کنند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ، } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ، } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۸. نشان دهید که اگر

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ، } M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

آنگاه فضای پدید آمده از $\{M_1, M_2, M_3\}$ مجموعهٔ تمام ماتریس‌های متقارن 2×2 است.

† ۹. ثابت کنید که به ازای هر عضو x از یک فضای برداری، $span(\{x\}) = \{ax : a \in F\}$. این نتیجه را در $\mathbb{R}^3$ تعبیر هندسی کنید.

۱۰. نشان دهید که زیرمجموعهٔ W از فضای برداری V، زیرفضایی از V است اگر و تنها اگر $span(W) = W$.

† ۱۱. نشان دهید که اگر S_1 و S_2 چنان زیرمجموعه‌هایی از فضای برداری V باشند که $S_1 \subseteq S_2$ آنگاه $span(S_1) \subseteq span(S_2)$. به ویژه اگر $S_1 \subseteq S_2$ و $span(S_1) = V$، نتیجه بگیرید که $span(S_2) = V$.

۱۲. نشان دهید که اگر S_1 و S_2 زیرفضاهای دلخواهی از فضای برداری V باشند، آنگاه $span(S_1 \cup S_2) = span(S_1) + span(S_2)$ (مجموع دو زیرمجموعه در تمرینات بخش ۱-۳ تعریف شده است.)

۱۳. فرض کنید S_1 و S_2 زیرفضاهایی از فضای برداری V باشند. ثابت کنید که $span(S_1 \cap S_2) \subseteq span(S_1) \cap span(S_2)$. مثالی ارائه دهید که در آن $span(S_1 \cap S_2)$ و $span(S_1) \cap span(S_2)$ برابرند و مثال دیگری که در آن این دو مساوی نیستند.

۱۴. فرض کنید V فضایی برداری و S زیرمجموعه‌ای از V باشد با این خاصیت که هرگاه $v_1, v_2, \ldots, v_n \in S$ و $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$، آنگاه $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. ثابت کنید که هر بردار واقع در فضای پدید آمده از S را می‌توان به طرز یکتایی به صورت ترکیبی خطی از اعضای S نوشت.

۱۵. فرض کنید W زیرفضایی از فضای برداری V باشد. تحت چه شرایطی فقط تعدادی متناهی زیرمجموعه متمایز S از W با این خاصیت وجود خواهد داشت که S، W را تولید کند؟

۱-۵ استقلال خطی و وابستگی خطی

فرض کنید V فضای برداری بر یک میدان نامتناهی و W زیرفضایی از V باشد. به جز هنگامی که W زیرفضای صفر است، W مجموعه‌ای نامتناهی است. مناسب است اگر بتوانیم زیرمجموعهٔ متناهی «کوچکی» چون S بیابیم که W را تولید کند، چون در این صورت می‌توانیم هر عضو W را به صورت ترکیبی خطی از بردارهای واقع در S، که تعدادشان متناهی است بنویسیم. در واقع هر چه S کوچکتر باشد، محاسبات کمتری برای نمایش بردارهای W لازم خواهد بود. به عنوان مثال، زیرفضای W از $\mathbb{R}^۳$ را در نظر بگیرید که با $S = \{u_۱, u_۲, u_۳, u_۴\}$ تولید می‌شود، که $u_۱ = (۲, -۱, ۴)$، $u_۲ = (۱, -۱, ۳)$، $u_۳ = (۱, ۱, -۱)$ و $u_۴ = (۱, -۲, -۱)$. حال سعی می‌کنیم زیرمجموعهٔ سره‌ای از S بیابیم که آن هم W را تولید کند. جستجوی این زیرمجموعه، با این سؤال ارتباط می‌یابد که آیا برخی از بردارهای S، ترکیبی خطی از دیگر بردارهای S هستند یا خیر. بردار $u_۴$ ترکیبی خطی از سایر بردارهای S است اگر و تنها اگر اسکالرهای $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ به گونه‌ای موجود باشند که:

$$u_۴ = a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + a_۳u_۳$$

یعنی اگر و تنها اگر اسکالرهایی چون $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ یافت شوند که در معادلهٔ زیر صدق کنند

$$(۱, -۲, -۱) = (۲a_۱ + a_۲ + a_۳, -a_۱ - a_۲ + a_۳, ۴a_۱ + ۳a_۲ - a_۳)$$

پس $u_۴$ ترکیبی خطی از $u_۱$، $u_۲$ و $u_۳$ است اگر و تنها اگر دستگاه معادلات خطی زیر دارای جواب باشد:

$$\begin{aligned} ۲a_۱ + a_۲ + a_۳ &= ۱ \\ -a_۱ - a_۲ + a_۳ &= -۲ \\ ۴a_۱ + ۳a_۲ - a_۳ &= -۱ \end{aligned}$$

خواننده باید بررسی کند که چنین جوابی وجود ندارد. با این حال، این سؤال که آیا برداری در S وجود دارد که ترکیبی خطی از سایر بردارهای S باشد یا خیر، هنوز پاسخ داده نشده است. در واقع می‌توان نشان داد که $u_۳$ ترکیبی خطی از $u_۱$، $u_۲$ و $u_۴$ است: $u_۳ = ۲u_۱ - ۳u_۲ + ۰u_۴$.

در مثال فوق، پی بردن به اینکه آیا برداری در S وجود دارد که ترکیب خطی سایر بردارهای S باشد، مستلزم حل چندین دستگاه از معادلات خطی است تا بتوانیم تعیین کنیم که کدامیک از بردارهای $u_۱, u_۲, u_۳$ و $u_۴$، اگر اصلاً چنین برداری وجود داشته باشد، ترکیبی خطی از بقیه بردارهاست. می‌توانیم این سؤال را به گونه‌ای مطرح کنیم که به میزان زیادی از کارمان کاسته شود. توجه کنید که چون $u_۳ = ۲u_۱ - ۳u_۲ + ۰u_۴$، داریم:

$$-۲u_۱ + ۳u_۲ + u_۳ - ۰u_۴ = ۰$$

یعنی چون یکی از بردارهای S ترکیبی خطی از بقیه است، می‌توان بردار صفر را با استفاده از ضرایبی که همگی صفر نیستند به صورت ترکیبی خطی از بردارهای S نوشت. عکس عبارت بالا هم صحیح است، اگر بردار صفر را بتوان به صورت ترکیبی خطی از اعضای S نوشت که همهٔ ضرایب در آن صفر نباشد، آنگاه می‌توان یکی از بردارهای S را به صورت ترکیبی خطی از بقیه نوشت. به عنوان نمونه، در مثال فوق ترکیب خطی زیر

$$-2u_1 + 3u_2 + u_3 - 0u_4 = 0$$

امکان این را فراهم می‌آورد که u_1, u_2 و u_3 ولی نه u_4 را به صورت ترکیبی خطی از سه بردار دیگر بنویسیم. بنابراین به جای این پرسش که آیا برداری از S وجود دارد که ترکیبی خطی از سایر بردارهای S باشد، این سؤال را مطرح می‌کنیم که آیا بردار صفر را می‌توان با استفاده از ضرایبی که همگی صفر نیستند به صورت ترکیبی خطی از بردارهای S نوشت یا نه. ملاحظه می‌شود که این مطلب ما را به تعریف زیر رهنمون می‌سازد:

تعریف:. زیرمجموعهٔ S از فضای برداری V، **وابستهٔ خطی** نامیده می‌شود، هرگاه تعدادی متناهی بردار متمایز $u_1, u_2, \ldots, u_n$ در S و اسکالرهای $a_1, a_2, \ldots, a_n$، که همگی صفر نیستند، به گونه‌ای وجود باشند که:

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n = 0$$

همچنین در چنین حالتی می‌گوییم که اعضای S، وابستهٔ خطی هستند.

به ازای هر دنباله‌ای از بردارها مثل $u_1, u_2, \ldots, u_n$، در صورتی که $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$، داریم $a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n = 0$. این نمایش را نمایش **بدیهی ۰ به عنوان ترکیبی خطی از** $u_1, u_2, \ldots, u_n$ می‌نامیم. بنابراین اینکه یک مجموعهٔ وابستهٔ خطی باشد، به این معناست که نمایشی غیر بدیهی برای ۰، به عنوان ترکیبی خطی از اعضای این مجموعه وجود دارد. در نتیجه هر زیرمجموعه از یک فضای برداری که بردار صفر را در بر داشته باشد، وابستهٔ خطی است چرا که $1 \cdot 0 = 0$، نمایشی نابدیهی از ۰ به عنوان ترکیبی خطی از بردارهای آن مجموعه است.

مثال ۱. مجموعهٔ زیر را در $\mathbb{R}^4$ در نظر بگیرید.

$$S = \{(1, 3, -4, 2), (2, 2, -4, 0), (1, -3, 2, -4), (-1, 0, 1, 0)\}$$

برای تعیین اینکه آیا Sوابستهٔ خطی است یا نه، باید سعی کنیم که اسکالرهای a_1, a_2, a_3 و a_4 را که همگی صفر نیستند به گونه‌ای بیابیم که

$$a_1(1, 3, -4, 2) + a_2(2, 2, -4, 0) + a_3(1, -3, 2, -4) + a_4(-1, 0, 1, 0) = 0$$

یافتن چنین اسکالرهایی به یافتن جوابی ناصفر برای دستگاه معادلات زیر خلاصه می‌شود

$$\begin{array}{rrrrl} a_1 & +2a_2 & +a_3 & -a_4 & = 0 \\ 3a_1 & +2a_2 & -3a_3 & & = 0 \\ -4a_1 & -4a_2 & +2a_3 & +a_4 & = 0 \\ 2a_1 & & -4a_3 & & = 0 \end{array}$$

این معادله دارای جواب‌های $a_1 = 4$، $a_2 = -3$، $a_3 = 2$ و $a_4 = 0$ می‌باشد. پس S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^4$ است که وابستهٔ خطی است. $\square$

مثال ۲. در $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$، مجموعهٔ

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 6 & -2 & -7 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -2 & 3 & 11 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

وابستهٔ خطی است چرا که

$$5\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 6 & -2 & 7 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -2 & 3 & 11 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\square$

تعریف: زیرمجموعه‌ای چون S از یک فضای برداری را که وابستهٔ خطی نیست، **مستقل خطی** می‌نامند و مانند قبل، اعضای S را هم **مستقل خطی** می‌گوییم.

مطالب زیر در مورد مجموعه‌های مستقل خطی، در هر فضای برداری صادق هستند را بیان می‌کنیم.

۱. مجموعهٔ تهی مستقل خطی است، چرا که مجموعه‌های وابستهٔ خطی باید ناتهی باشند.

۲. مجموعه‌ای که تنها از یک بردار ناصفر تشکیل شده باشد مستقل خطی است چرا که اگر $\{u\}$ وابستهٔ خطی باشد، آنگاه به ازای اسکالر ناصفری چون a، $au = 0$. پس:
$$u = a^{-1}(au) = a_{0}^{-1} = 0$$

۳. هر مجموعه‌ای مستقل خطی است، اگر و تنها اگر تنها نمایش 0 به عنوان ترکیبی خطی از اعضای آن، نمایش بدیهی باشد.

شرطی که در عبارت ۳ آورده شد، روش مفیدی برای تعیین اینکه آیا یک مجموعهٔ متناهی مستقل خطی است یا نه در اختیارمان می‌گذارد. این روش در مثال‌های زیر توضیح داده شده است.

مثال ۳. برای اثبات اینکه مجموعهٔ زیر مستقل خطی است،

$$S = \{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1),(0,0,0,1)\}$$

باید نشان دهیم که تنها ترکیب خطی از بردارهای S که مساوی بردار صفر است، ترکیبی است که همهٔ ضرایبش صفر است. فرض کنید a_1, a_2, a_3 و a_4 اسکالرهایی باشند که:

$$a_1(1,0,0,-1)+a_2(0,1,0,-1)+a_3(0,0,1,-1)+a_4(0,0,0,1)=(0,0,0,0)$$

با مساوی قرار دادن مختصات بردارهای سمت راست و چپ این تساوی، دستگاه معادلات خطی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{lllll} a_1 & & & & =0 \\ & a_2 & & & =0 \\ & & a_3 & & =0 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & +a_4 & =0 \end{array}$$

واضح است که تنها جواب این دستگاه $a_1=a_2=a_3=a_4=0$ می‌باشد، بنابراین S مستقل خطی است. □

مثال ۴. برای هر $k=0,1,\ldots,n$، فرض کنید که $p_k(x)=x^k+x^{k+1}+\ldots+x^n$. مجموعهٔ

$$\{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)\}$$

در $P_n(F)$ مستقل خطی است چرا که اگر به ازای اسکالرهای $a-0, a_1, \ldots, a_n$ ای

$$a_0p_0(x)+a_1p_1(x)+\ldots+a_np_n(x)=0$$

آنگاه:

$$a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2+\ldots+(a_0+a_1+\ldots+a_n)x^n=0$$

با مساوی قرار دادن ضرایب x^k به ازای $k=0,1,2,\ldots,n$ در دو طرف این معادله داریم:

$$\begin{array}{llllll} a_0 & & & & & =0 \\ a_0 & +a_1 & & & & =0 \\ a_0 & +a_1 & +a_2 & & & =0 \\ \vdots & & & & & \\ a_0 & +a_1 & +a_2 & +\ldots & +a_n & =0 \end{array}$$

واضح است که تنها جواب این دستگاه از معادلات خطی، $a_0=a_1=\ldots=a_n=0$ است. □

نتایج مهم زیر، مستقیماً از تعاریف وابستگی و استقلال خطی به دست می‌آیند.

قضیه ۱.۶. فرض کنید V فضایی برداری باشد و همچنین $S_۱ \subseteq S_۲ \subseteq V$. هرگاه $S_۱$ وابسته خطی باشد، آنگاه $S_۲$ نیز وابسته خطی است.

برهان. به عهدهٔ خواننده. □

نتیجه ۱. فرض کنید V فضایی برداری باشد و $S_۱ \subseteq S_۲ \subseteq V$. هرگاه $S_۲$ مستقل خطی باشد، آنگاه $S_۱$ نیز مستقل خطی است.

برهان. به عهدهٔ خواننده. □

قبلاً در این بخش متذکر شدیم اینکه S کوچکترین مجموعهٔ مولد فضای پدید آمده از S هست یا نه، با این سؤال مرتبط است که آیا برداری از S وجود دارد که ترکیبی خطی از سایر بردارهای S باشد یا خیر. بنابراین اینکه آیا S کوچکترین مجموعهٔ مولد فضای پدید آمده از S هست یا نه، به این سؤال مرتبط است که آیا S وابستهٔ خطی است یا خیر. برای پی بردن به دلیل این مطلب، زیرمجموعهٔ $S = \{u_۱, u_۲, u_۳, u_۴\}$ از $\mathbb{R}^۳$ را در نظر بگیرید که در اینجا $u_۱ = (۲, -۱, ۴)$، $u_۲ = (۱, -۱, ۳)$، $u_۳ = (۱, ۱, -۱)$ و $u_۴ = (۱, -۲, -۱)$. قبلاً متذکر شدیم که S وابستهٔ خطی است. در واقع:

$$-۲u_۱ + ۳u_۲ + u_۳ - ۰u_۴ = ۰$$

از این معادله نتیجه می‌شود که $u_۳$ (و یا $u_۱$ یا $u_۲$)، ترکیبی خطی از سایر بردارهای S است. به عنوان مثال، $u_۳ = ۲u_۱ - ۳u_۲ + ۰u_۴$. بنابراین هر ترکیب خطی $a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + a_۳u_۳ + a_۴u_۴$ از بردارهای S را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از $u_۱$، $u_۲$ و $u_۴$ نوشت:

$$\begin{aligned} a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + a_۳u_۳ + a_۴u_۴ &= a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + a_۳(۲u_۱ - ۳u_۲ + ۰u_۴) + a_۴u_۴ \\ &= (a_۱ + ۲a_۳)u_۱ + (a_۲ - ۳a_۳)u_۲ + a_۴u_۴ \end{aligned}$$

در نتیجه، زیرمجموعهٔ $S' = \{u_۱, u_۲, u_۴\}$، همان فضایی را پدید می‌آورد که S پدید می‌آورد! به طور کلی، فرض کنید S مجموعه‌ای وابستهٔ خطی باشد که دو عضو یا بیشتر دارد. در این صورت برداری چون v از S را می‌توان به صورت ترکیب خطی سایر بردارهای S نوشت و زیرمجموعه‌ای که از برداشتن v از S حاصل می‌شود، همان فضایی را پدید می‌آورد که S پدید می‌آورد. نتیجه می‌شود که اگر هیچ زیرمجموعهٔ سره‌ای از S، فضای پدید آمده از S را تولید نکند، آنگاه S باید مستقل خطی باشد. مجموعه‌های مولد مستقل خطی به تفصیل در بخش ۱-۶ مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

تمرینات

۱. مشخص کنید که کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) اگر S مجموعه‌ای وابستهٔ خطی باشد، آنگاه هر عضو S ترکیبی خطی از سایر اعضای S است.

ب) هر مجموعهٔ شامل بردار صفر، وابستهٔ خطی است.

ج) مجموعهٔ تهی وابستهٔ خطی است.

د) زیرمجموعه‌هایِ مجموعه‌های وابستهٔ خطی، وابستهٔ خطی هستند.

ه) زیرمجموعه‌هایِ مجموعه‌های مستقل خطی، مستقل خطی هستند.

و) هرگاه $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=0$ و $x_1,x_2,\ldots,x_n$ مستقل خطی باشند، آنگاه تمام اسکالرهای a_i، صفرند.

۲. در F^n، فرض کنید e_j برداری را نشان دهد که مؤلفهٔ j اُم آن ۱ است، و سایر مؤلفه‌های آن صفرند. ثابت کنید $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ مستقل خطی است.

۳. نشان دهید که مجموعهٔ $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ در $P_n(F)$ مستقل خطی است.

۴. ثابت کنید که ماتریس‌های زیر در $M_{2\times2}(F)$ مستقل خطی هستند.

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\ ,\ \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\ ,\ \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\ \text{و}\ \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

۵. از مثال ۳ بخش ۱-۳ به یاد بیاورید که مجموعهٔ ماتریس‌های قطری واقع در $M_{2\times2}(F)$، یک زیرفضاست. مجموعه‌ای مستقل خطی پیدا کنید که این زیرفضا را تولید کند.

† ۶نشان دهید که $\{u,v\}$ وابستهٔ خطی است اگر و تنها اگر یکی از u و v مضربی از دیگری باشد.

۷. مثالی از سه بردار وابستهٔ خطی در $\mathbb{R}^3$ ارائه دهید که هیچ یک مضربی از دیگری نباشد.

۸. فرض کنید $S=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$، زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از فضایی برداری مانند V روی میدان $\mathbb{Z}_2$ باشد. در $span(S)$ چند عضو وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۹. قضیهٔ ۶.۱ و نتیجهٔ آن را ثابت کنید.

۱۰. فرض کنید V فضای برداری بر یک میدان باشد که مشخصهٔ آن برابر دو نیست.

الف) فرض کنید u و v دو بردار متمایز V باشند. ثابت کنید که $\{u,v\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر $\{u+v,u-v\}$ مستقل خطی باشد.

ب) فرض کنید u, v, w بردارهای متمایزی از V باشند. ثابت کنید $\{u, v, w\}$ مستقل خطی است، اگر و تنها اگر $\{u+v, u+w, v+w\}$ مستقل خطی باشد.

۱۱. ثابت کنید که مجموعهٔ S وابستهٔ خطی است اگر و تنها اگر $S = \{\circ\}$ یا اینکه بردارهای متمایز v و $u_۱, u_۲, \ldots, u_n$ در S چنان یافت شوند که v ترکیبی خطی از $u_۱, u_۲, \ldots, u_n$ باشد.

۱۲. فرض کنید $S + \{u_۱, u_۲, \ldots, u_n\}$ مجموعه‌ای متناهی از بردارها باشد. ثابت کنید که S وابستهٔ خطی است اگر و تنها اگر $u_۱ = \circ$ یا به ازای k ای $(۱ \leqslant k < n)$، $u_{k+۱} \in span(\{u_۱, u_۲, \ldots, u_k\})$.

۱۳. ثابت کنید که مجموعهٔ بردارهای S، مستقل خطی است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی از S مستقل خطی باشد.

۱۴. فرض کنید M یک ماتریس مربعی بالا مثلثی (به گونه‌ای که در تمرین ۱۲ بخش ۱-۳ تعریف شد) باشد، که درایه‌های قطری آن ناصفرند. ثابت کنید که ستون‌های M مستقل خطی هستند.

۱۵. فرض کنید S مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های ناصفر $P(F)$ باشد که هیچ دو عضوش درجهٔ یکسان نداشته باشند. ثابت کنید S مستقل خطی است.

۱۶. ثابت کنید که اگر $\{A_۱, A_۲, \ldots, A_k\}$ زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از $M_{n\times n}(F)$ باشد، آنگاه $\{A_۱^t, A_۲^t, \ldots, A_k^t\}$ نیز مستقل خطی است.

۱۷. فرض کنید $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ دو تابع پیوسته‌ای باشند که به صورت $f(t) = e^{rt}$ و $g(t) = e^{st}$ تعریف می‌شوند، که در اینجا $r \neq s$. ثابت کنید که f و g در $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ مستقل خطی است.

۱-۶ پایه و بعد

در بخش ۱-۵ دیدیم که اگر S مجموعهٔ مولد زیرفضای W باشد و هیچ زیرمجموعهٔ سره‌ای از S، W را تولید نکند، آنگاه S باید مستقل خطی باشد. هر زیرمجموعهٔ مولد مستقل خطی W، خاصیت مهمی دارد. هر عضو W را می‌توان به یک و فقط یک طریق به شکل ترکیب خطی از اعضای چنین مجموعه‌ای نوشت (این خاصیت در قضیهٔ ۷.۱ که در زیر آمده، اثبات می‌شود).همین خاصیت است که باعث می‌شود مجموعه‌های مولد مستقل خطی، عناصر ساختمانی فضاهای برداری را تشکیل دهند.

تعریف: β را **پایه‌ای برای فضای برداری** V گویند، هرگاه β زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از V باشد که V را تولید می‌کند (همچنین در صورتی که β پایه‌ای برای V باشد، می‌گوییم که اعضای β پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند.)

مثال ۱. با به یاد آوردن اینکه $span(\emptyset) = \{0\}$ و $\emptyset$ مستقل خطی است، می‌بینیم که $\emptyset$ پایه‌ای برای فضای برداری $\{0\}$ است. □

مثال ۲. در F^n، با فرض اینکه $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$، به راحتی می‌توان دید که $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ پایه‌ای برای F^n است. این پایه را **پایهٔ استاندارد** F^n می‌نامند. □

مثال ۳. در $M_{m\times n}(F)$، فرض کنید M^{ij} ماتریسی را نشان دهد که تنها درایهٔ ناصفر آن ۱ است که در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد. در این صورت $\{M^{ij} : 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$، پایه‌ای برای $M_{m\times n}(F)$ است. □

مثال ۴. در $P_n(F)$ مجموعهٔ $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ پایه است. این پایه را **پایهٔ استاندارد** $P_n(F)$ می‌نامیم. □

مثال ۵. در $P(F)$ مجموعهٔ $\{1, x, x^2, \ldots\}$ پایه است. □

توجه کنید که مثال ۵ نشان می‌دهد که یک پایه لزوماً متناهی نیست. در واقع در ادامهٔ این بخش نشان داده می‌شود که هیچ پایه‌ای برای $P(F)$ نمی‌تواند متناهی باشد. در نتیجه هر فضای برداری‌ای پایهٔ متناهی ندارد.

قضیهٔ زیر که در فصل ۲ زیاد به کار خواهد رفت مهمترین خاصیت یک پایه را ثابت می‌کند.

قضیه ۷.۱. فرض کنید V فضایی برداری و $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ زیرمجموعه‌ای از V باشد؛ در این صورت β پایه‌ای برای V است اگر و تنها اگر هر بردار v در V را بتوان به طرز منحصر به فردی به صورت ترکیبی خطی از بردارهای β نوشت، یعنی به ازای اسکالرهای منحصر به فرد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ بتوان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$$

برهان. فرض کنید β پایه‌ای برای V باشد. هرگاه $v \in V$، آنگاه $v \in span(\beta)$ چرا که $span(\beta) = V$. در نتیجه v ترکیبی خطی از اعضای β است. فرض کنید:

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n \quad \text{و} \quad v = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_nu_n$$

دو نمایش از v به عنوان ترکیبی خطی از اعضای β باشد. با کم کردن تساوی دوم از تساوی اول داریم:

$$0 = (a_1 - b_1)u_1 + (a_2 - b_2)u_2 + \ldots + (a_n - b_n)u_n$$

چون β مستقل خطی است، نتیجه می‌شود که $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \ldots = a_n - b_n = 0$. بنابراین $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$ و در نتیجه v را می‌توان به طور منحصر به فردی به صورت ترکیبی خطی از اعضای β نوشت.

اثبات طرف دیگر به عهدهٔ خواننده است. □

قضیه ۷.۱ نشان می‌دهد که اگر بردارهای $u_1, u_2, \ldots, u_n$ پایه‌ای برای فضای برداری V تشکیل دهند در این صورت هر بردار V را می‌توان با انتخاب مناسب اسکالرهای $a_1, a_2, \ldots, a_n$ به طریقهٔ یکتایی به شکل زیر نوشت:

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$$

پس v، n تایی مرتب یکتای $(a_۱, a_۲, \dots, a_n)$ از اسکالرها را مشخص می‌کند و برعکس هر n تایی مرتب از اسکالرها، بردار منحصر به فرد $v \in V$ ای را مشخص می‌کند که از به کار بردن مؤلفه‌های آن n تایی به عنوان ضرایب یک ترکیب خطی از $u_۱, u_۲, \dots, u_n$ به دست می‌آید. از اینجا چنین به نظر می‌رسد که V فضایی برداری شبیه به F^n است، که n تعداد بردارهای واقع در پایهٔ مفروض برای V است. در بخش ۲-۴ خواهیم دید که واقعاً هم چنین است.

در این کتاب، بیش از همه به فضاهای برداریی توجه داریم که پایهٔ متناهی دارند. قضیهٔ ۹.۱ دستهٔ وسیعی از چنین فضاهای برداری را مشخص می‌کند. اثبات این قضیه نیازمند نتیجهٔ زیر است.

قضیه ۸.۱. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از فضای برداری V باشد و v عضوی از V باشد که در S قرار ندارد، در این صورت $S \cup \{v\}$ وابستهٔ خطی است اگر و تنها اگر $v \in span(S)$.

برهان. هرگاه $S \cup \{v\}$ وابسته خطی باشد بردارهای $u_۱, u_۲, \dots, u_n$ در $S \cup \{v\}$ همراه با اسکالرهای ناصفری چون $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ وجود خواهند داشت به گونه‌ای که $a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + \dots + a_nu_n = ۰$، و چون S مستقل خطی است، یکی از u_i ها مثلاً $u_۱$ برابر با v است. پس $a_۱v + a_۲u_۲ + \dots + a_nu_n = ۰$، بنابراین:

$$v = a_۱^{-۱}(-a_۲u_۲ - \dots - a_nu_n) = -(a_۱^{-۱}a_۲)u_۲ - \dots - (a_۱^{-۱}a_n)u_n$$

چون v ترکیبی خطی از $u_۲, \dots, u_n$ است که همگی عضو S هستند داریم: $v \in span(S)$.

برعکس فرض کنید $v \in span(S)$. در این صورت بردارهایی چون $v_۱, v_۲, \dots, v_m$ در S و اسکالرهای $b_۱, b_۲, \dots, b_m$ وجود خواهند داشت به گونه‌ای که $v = b_۱v_۱ + b_۲v_۲ + \dots + b_mv_m$. در نتیجه:

$$۰ = b_۱v_۱ + b_۲v_۲ + \dots + b_mv_m + (-۱)v$$

چون به ازای هر $i = ۱, ۲, \dots, m$، $v \neq v_i$، ضریب v در این ترکیب خطی ناصفر است، بنابراین مجموعهٔ $\{v_۱, v_۲, \dots, v_m, v\}$ وابستهٔ خطی است؛ در نتیجه طبق قضیهٔ ۶.۱ $S \cup \{v\}$ وابستهٔ خطی است. □

قضیه ۹.۱. هرگاه فضای برداری V را مجموعهٔ متناهی S تولید کند، آنگاه زیرمجموعه‌ای از S وجود خواهد داشت که پایه‌ای برای V است. در نتیجه V پایه‌ای متناهی خواهد داشت.

برهان. اگر $S = \emptyset$ یا $S = \{۰\}$، آنگاه $V = \{۰\}$ و $\emptyset$ زیرمجموعه‌ای از S است که پایه‌ای برای V است؛ در غیر این صورت، S دارای عضو ناصفری مانند $u_۱$ است. با توجه به نکتهٔ دوم صفحهٔ ۴۰ می‌توان نتیجه گرفت که $\{u_۱\}$ مستقل خطی است. در صورت امکان، کار را با انتخاب اعضایی مانند $u_۱$، $u_۲$، ...، u_k در S که $\{u_۱, u_۲, \dots, u_k\}$ مستقل خطی باشد ادامه دهید. چون S متناهی است، در نهایت باید به مرحله‌ای برسیم که $\beta = \{u_۱, u_۲, \dots, u_k\}$ زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از S است امّا افزودن هر عضوی از S به β یک مجموعهٔ وابستهٔ خطی ایجاد می‌کند. ادّعا می‌کنیم که β پایه‌ای برای V است. چون β طبق طرز ساخت آن مستقل خطی است، طبق قضیهٔ ۵.۱ کافی است نشان دهیم که $S \subseteq span(\beta)$. فرض کنیم $v \in S$. اگر $v \in \beta$، واضح است که $v \in span(\beta)$. در غیر این صورت اگر $v \notin \beta$، طبق نحوهٔ ساخت β نتیجه می‌شود که $\beta \cup \{v\}$ وابستهٔ خطی است؛ بنابراین طبق قضیهٔ ۸.۱ $v \in span(\beta)$، پس $S \subseteq span(\beta)$. □

روشی که با استفاده از آن، پایهٔ β در قضیهٔ ۹.۱ به دست آمده، در مثال بعدی توضیح داده می‌شود.

مثال ۶. فرض کنید:

$$S = \{(۲,-۳,۵),(۸,-۱۲,۲۰),(۱,۰,-۲),(۰,۲,-۱),(۷,۲,۰)\}$$

می‌توان نشان داد که S $\mathbb{R}^۳$ را تولید می‌کند. می‌توانیم با استفاده از روشی که در اثبات قضیهٔ ۹.۱ به کار رفت، پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۳$ بیابیم که زیرمجموعهٔ S است. برای آغاز کار، عضو ناصفر دلخواهی از S مثلاً $(۲,-۳,۵)$ را به عنوان عضوی از پایه انتخاب کنید. چون $(۸,-۱۲,۲۰) = ۴(۲,-۳,۵)$، مجموعهٔ $\{(۲,-۳,۵),(۸,-۱۲,۲۰)\}$ طبق تمرین ۶ بخش ۱-۵ وابستهٔ خطی است؛ بنابراین $(۸,-۱۲,۲۰)$ را در پایه قرار نمی‌دهیم. از طرف دیگر $(۱,۰,-۲)$ مضربی از $(۲,-۳,۵)$ نیست و برعکس. بنابراین مجموعهٔ $\{(۲,-۳,۵),(۱,۰,-۲)\}$ مستقل خطی است. پس $(۱,۰,-۲)$ را در پایه قرار می‌دهیم.

حال مجموعهٔ $\{(۲,-۳,۵),(۱,۰,-۲),(۰,۲,-۱)\}$ را که از افزودن عضو دیگری از S به دو عضوی که از قبل در پایه قرار داشت به دست می‌آید، در نظر بگیرید. مانند قبل $(۰,۲,-۱)$ را بسته به اینکه $\{(۲,-۳,۵),(۱,۰,-۲),(۰,۲,-۱)\}$ مستقل خطی است یا وابستهٔ خطی به پایه اضافه یا از اضافه کردن آن صرف‌نظر خواهیم کرد. محاسبهٔ ساده‌ای نشان می‌دهد که این مجموعه، مستقل خطی است و بنابراین $(۰,۲,-۱)$ را در پایه قرار می‌دهیم. به روشی مشابه، عضو آخر S را بسته به اینکه مجموعهٔ زیر:

$$\{(۲,-۳,۵),(۱,۰,-۲),(۰,۲,-۱),(۷,۲,۰)\}$$

مستقل یا وابستهٔ خطی است، به پایه اضافه یا از آن صرف‌نظر می‌کنیم. چون:

$$۲(۲,-۳,۵)+۳(۱,۰,-۲)+۴(۰,۲,-۱)-(۷,۲,۰)=(۰,۰,۰)$$

$(۷,۲,۰)$ را از پایه حذف می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم که:

$$\{(۲,-۳,۵),(۱,۰,-۲),(۰,۲,-۱)\}$$

زیرمجموعه‌ای از S می‌باشد که پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۳$ است. □

قضیهٔ بعدی و نتایج آن، شاید یکی از مهمترین نتایج فصل ۱ باشند.

قضیه ۱۰.۱. (قضیهٔ جایگزینی): فرض کنید V فضایی برداری باشد که مجموعهٔ G که دقیقاً n عضو دارد، آن را تولید می‌کند و نیز فرض کنید که L زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از V باشد که دقیقاً m عضو دارد. در این صورت، $m \leqslant n$ و زیرمجموعه‌ای مانند H از G که دقیقاً $n-m$ عضو دارد موجود است به گونه‌ای که $L \cup H$، V را تولید می‌کند.

برهان. اثبات با استفاده از استقرا روی m صورت می‌گیرد. فرض استقرا با $m=۰$ شروع می‌شود؛ چرا که در این حالت، $L=\emptyset$ و اختیار کردن $H=G$ نتیجهٔ مطلوب را حاصل می‌کند.

حال فرض کنید که قضیه به ازای عدد صحیح $m \geqslant 0$ درست باشد. ثابت می‌کنیم که قضیه برای $m+1$ نیز درست است. فرض کنید $L = \{v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}\}$ یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی از V باشد که شامل $m+1$ عضو است. طبق نتیجهٔ قضیهٔ ۶.۱، $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ مستقل خطی است و بنابراین می‌توانیم از فرض استقرا نتیجه بگیریم که $m \leqslant n$ و زیرمجموعه‌ای مانند $\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}\}$ از G بگونه‌ای موجود است که $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}\}$، V را تولید می‌کند. پس اسکالرهایی چون $a_1, a_2, \ldots, a_m$ و $b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}$ بگونه‌ای موجودند که:

$$a_1v_1 + \ldots + a_mv_m + b_1u_1 + \ldots + b_{n-m}u_{n-m} = v_{m+1} \qquad (۱۳-۱)$$

توجه کنید که $n - m > 0$، زیرا در غیر این صورت v_{m+1} ترکیبی خطی از $v_1, v_2, \ldots, v_m$ خواهد بود که طبق قضیهٔ ۸.۱ فرض مستقل خطی بودن L را نقض می‌کند. در نتیجه $n > m$؛ یعنی $n \geqslant m+1$. به علاوه یکی از b_i ها، مثلاً b_1 ناصفر است؛ چرا که در غیر این صورت به همان تناقض می‌رسیم. حل ۹.۱ نسبت به u_1 نتیجه می‌دهد که:

$$u_1 = (-b_1^{-1}a_1)v_1 + \ldots + (-b_1^{-1}a_m)v_m + (b_1^{-1})v_{m+1} + (-b_1^{-1}b_2)u_2 + \ldots + (-b_1^{-1}b_{n-m})u_{n-m}$$

فرض کنید $H = \{u_2, \ldots, u_{n-m}\}$. در این صورت $u_1 \in span(L \cup H)$ و چون $v_1, \ldots, v_m$ و $u_2, \ldots, u_{n-m}$ به وضوح اعضایی از $span(L \cup H)$ هستند، نتیجه می‌شود که:

$$\{v_1, \ldots, v_m, u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}\} \subseteq span(L \cup H)$$

چون $v_1, \ldots, v_m, u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}$، V را تولید می‌کنند، از قضیهٔ ۵.۱ نتیجه می‌شود که $span(L \cup H) = V$. چون H زیرمجموعه‌ای از G است که $(n-m) - 1 = n - (m+1)$ عضو دارد، قضیه برای $m+1$ درست است و به این ترتیب اثبات آن کامل می‌شود. □

نتیجه ۱. فرض کنید V فضایی برداری باشد که پایه‌ای متناهی دارد. در این صورت، همهٔ پایه‌های V به یک تعداد عضو دارند.

برهان. فرض کنید β پایه‌ای متناهی برای V باشد که n عضو دارد و γ پایهٔ دیگری برای V باشد. اگر γ بیش از n عضو داشته باشد، می‌توانیم زیر مجموعه‌ای مانند S از γ انتخاب کنیم که دقیقاً $n+1$ عضو داشته باشد. چون S مستقل خطی است و β، V را تولید می‌کند، از قضیهٔ ۱۰.۱ نتیجه می‌شود که $n+1 \leqslant n$ که تناقض است. پس γ متناهی است و تعداد اعضای γ یعنی m در $m \leqslant n$ صدق می‌کند. با تعویض نقش‌های β و γ و استدلالی مانند فوق، نتیجه می‌گیریم که $n \leqslant m$؛ در نتیجه $m = n$. □

اگر فضای برداری V پایهٔ متناهی داشته باشد، نتیجهٔ ۱ تصریح می‌کند که تعداد بردارهای هر پایه‌ای از V خاصیتی ذاتی از V است. این واقعیت تعاریف مهم زیر را ممکن می‌سازد.

چند تعریف: یک فضای برداری را **متناهی البُعد** گویند، هرگاه پایه‌ای داشته باشد که تعدادی متناهی عضو دارد. تعداد منحصر به فرد اعضای هر یک از پایه‌های V را **بُعد** V می‌نامند و با $\dim(V)$ نشان می‌دهند. فضای برداری که متناهی البُعد نباشد، **با بُعد نامتناهی** خوانده می‌شود.

مثال‌های زیر، از مثال‌های ۱ تا ۴ نتیجه می‌شوند.

مثال ۷. فضای برداری $\{0\}$ بعدش صفر است. □

مثال ۸. بُعد فضای برداری F^n، n است. □

مثال ۹. بُعد فضای برداری $M_{m\times n}(F)$، mn است. □

مثال ۱۰. بُعد فضای برداری $P_n(F)$، $n+1$ است. □

مثال‌های زیر نشان می‌دهند که بعد یک فضای برداری به میدان اسکالرهای آن بستگی دارد.

مثال ۱۱. روی میدان اعداد مختلط، فضای برداری اعداد مختلط دارای بعد ۱ است ($\{1\}$ پایه‌ای برای آن می‌باشد.) □

مثال ۱۲. روی میدان اعداد حقیقی بعد فضای برداری اعداد مختلط ۲ می‌باشد. ($\{1, i\}$ پایه‌ای برای آن است.) □

با استفاده از اصطلاح بُعد، نتیجهٔ اول قضیهٔ ۱-۱۰ می‌گوید که اگر V یک فضای برداری متناهی‌البُعد باشد، هیچ زیرمجموعهٔ مستقل خطی‌ای از V وجود نخواهد داشت که بیش از $\dim(V)$ عضو داشته باشد. از این واقعیت نتیجه می‌شود که فضای برداری $P(F)$ $P(F)$ دارای بعد نامتناهی است چرا که دارای یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی نامتناهی، یعنی $\{1, x \ldots x^2, \ldots\}$ است. در واقع این مجموعه پایه‌ای برای $P(F)$ است. با این وجود، هیچ یک از نتایجی که در این بخش ثابت کردیم، تضمین نمی‌کند که یک فضای برداری با بُعد نامتناهی دارای پایه باشد. با این حال، در بخش ۱-۷ نشان داده خواهد شد که هر فضای برداری پایه دارد.

همانطور که هیچ زیرمجموعهٔ مستقل خطی از فضایی برداری مانند V نمی‌تواند بیش از $\dim(V)$ عضو داشته باشد، عبارت مشابهی را در مورد اندازهٔ یک مجموعهٔ مولد می‌توان بیان داشت.

نتیجه ۲. فرض کنید V فضایی برداری با بُعد n باشد.

الف) هر مجموعهٔ مولد برای V، حداقل n عضو دارد و هر مجموعهٔ مولد V که دقیقاً n عضو داشته باشد، پایه‌ای برای V است.

ب) هر زیرمجموعهٔ مستقل خطی V که دقیقاً n عضو داشته باشد پایه‌ای برای V است.

ج) هر زیرمجموعهٔ مستقل خطی از V را می‌توان به پایه‌ای برای V تعمیم داد.

برهان. فرض کنید β پایه‌ای برای V باشد.

الف) فرض کنید G مجموعهٔ مولدی برای V باشد. طبق قضیهٔ ۹.۱ زیرمجموعه‌ای از G مانند H پایه‌ای برای V است. نتیجهٔ ۱ ایجاب می‌کند که H دقیقاً n عضو داشته باشد؛ چون زیرمجموعه‌ای از G، n عضو دارد، G هم باید حداقل n عضو داشته باشد. به علاوه اگر G دقیقاً n عضو داشته باشد، باید داشته باشیم $H = G$. بنابراین G پایه‌ای برای V است.

ب) فرض کنید L زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از V باشد که دقیقاً n عضو دارد. از قضیهٔ ۱۰.۱ نتیجه می‌شود که زیرمجموعهٔ H ای از β وجود دارد که $n - n = \circ$ عضو دارد و $L \cup H$، V را تولید می کند. پس $H = \emptyset$ و L، V را تولید می‌کند. چون L مستقل خطی هم هست، L پایه‌ای برای V است.

ج) هرگاه L زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از V با m عضو باشد، قضیهٔ ۱۰.۱ تصریح می‌کند که زیرمجموعهٔ H ای از β که دقیقاً $n - m$ عضو داشته باشد، وجود دارد به گونه‌ای که $L \cup H$، V را تولید کند. حال $L \cup H$ حداکثر n عضو دارد و بنابراین الف نتیجه می‌دهد که $L \cup H$ دقیقاً n عضو دارد و $L \cup H$ پایه‌ای برای V است. $\square$

مثال ۱۳. از مثال ۴ بخش ۱-۴ و قسمت الف نتیجهٔ ۲، معلوم می‌شود که:

$$\{x^۲ + ۳x - ۲, ۲x^۲ + ۵x - ۳, -x^۲ - ۴x + ۴\}$$

پایه‌ای برای $P_۲(\mathbb{R})$ است. $\square$

مثال ۱۴. از مثال ۵ بخش ۱-۴ و قسمت الف نتیجهٔ ۲ معلوم می‌شود که:

$$\left\{ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & \circ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & \circ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, \right\}$$

پایه‌ای است برای $M_{۲\times۲}(\mathbb{R})$. $\square$

مثال ۱۵. از مثال ۳ بخش ۱-۵ و قسمت ب نتیجهٔ ۲، معلوم می‌شود که:

$$\{(۱, \circ, \circ, -۱), (\circ, ۱, \circ, -۱), (\circ, \circ, ۱, -۱), (\circ, \circ, \circ, ۱)\}$$

پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۴$ است. $\square$

مثال ۱۶. به ازای هر $k = \circ, ۱, \ldots, n$ فرض کنید که $p_k(x) = x^k + x^{k+۱} + \ldots + x^n$. از مثال ۴ بخش ۱-۵ و قسمت ب نتیجه می‌شود که:

$$\{p_\circ(x), p_۱(x), \ldots, p_n(x)\}$$

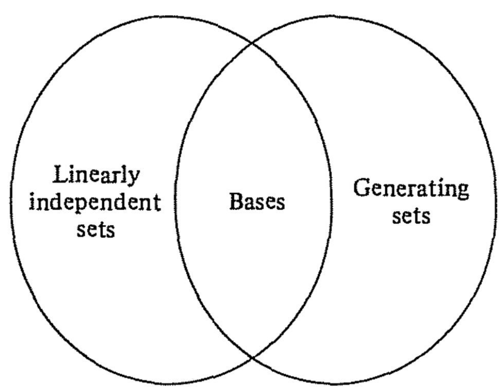
پایه‌ای برای $P_n(F)$ است. $\square$

در مثال ۶، روشی را برای کاهش دادن یک مجموعهٔ مولد به یک پایه شرح دادیم. در بخش ۳-۴، که در آن موقع بیشتر در مورد حل دستگاه‌های معادلات خطی خواهیم دانست، روش بسیار ساده‌تری را برای کاهش دادن یک مجموعهٔ مولد به یک پایه کشف خواهیم کرد. این روش را می‌توان برای توسیع یک مجموعهٔ مستقل خطی به یک پایه، که قسمت ج نتیجهٔ ۲ امکان این کار را تضمین می‌کند نیز به کار برد.

مروری بر مفهوم بُعد و نتایج آن

قضیهٔ ۹.۱ به همراه قضیهٔ جایگزینی و نتایج آن، اطلاعات بسیار زیادی در مورد رابطهٔ میان مجموعه‌های مستقل خطی، پایه‌ها و مجموعه‌های مولد در بردارند. به همین دلیل، در اینجا نتایج اصلی این بخش را خلاصه می‌کنیم تا بتوانیم از زاویهٔ بهتری به آنها نگاه کنیم.

منظور از یک پایه برای فضایی برداری مانند V، یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی از V است که V را تولید می‌کند. اگر V پایه‌ای متناهی داشته باشد، تمام پایه‌های V به یک تعداد عضو دارند. این تعداد، بُعد V نامیده می‌شود و V را در این حالت متناهی‌البُعد می‌نامند. پس اگر بُعد V، n باشد، هر پایه برای V دقیقاً n بردار خواهد داشت. به علاوه هیچ مجموعهٔ مستقل خطی از V بیش از n عضو ندارد و چنین مجموعه‌ای را می‌توان با افزودن بردارهای مناسبی به آن، به پایه‌ای برای V تعمیم داد. به علاوه هر مجموعهٔ مولّد برای V، حداقل n بردار دارد و می‌توان با حذف کردن بردارهای مناسبی از آن، آن را به پایه‌ای برای V تقلیل داد. نمودار وِن شکل ۱-۶ این ارتباط را به تصویر می‌کشد.



شکل ۱-۶:

فرمول درون‌یابی لاگرانژ

نتایج قبلی را می‌توان برای به دست آوردن یک فرمول مفید به کار برد. فرض کنید $c_0, c_1, \dots, c_n$ اعضای متمایزی در میدان نامتناهی F باشند. چند جمله‌ای‌های $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \frac{(x-c_0)\dots(x-c_{i-1})(x-c_{i+1})\dots(x-c_n)}{(c_i-c_0)\dots(c_i-c_{i-1})(c_i-c_{i+1})\dots(c_i-c_n)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-c_j}{c_i-c_j} \end{aligned}$$

چند جمله‌ای‌های لاگرانژ (مربوط به $c_0, c_1, \dots, c_n$) نام دارند. توجه کنید که هر یک از $f_i(x)$ ها، چندجمله‌ایی از درجهٔ n و در نتیجه عضوی از $P_n(F)$ است. اگر $f_i(x)$ را به عنوان چندجمله‌ای $f_i : F \to F$ در نظر بگیریم می‌بینیم که:

$$f_i(c_j) = \begin{cases} 0 \quad ; \quad i \neq j \quad \text{هرگاه} \\ 1 \quad ; \quad i = j \quad \text{هرگاه} \end{cases} \tag{۱۴-۱}$$

این خاصیت چندجمله‌ای‌های لاگرانژ را می‌توان برای نشان دادن اینکه $\beta = \{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از $P_n(F)$ است، به کار برد. فرض کنید که:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f_i = 0 \qquad \text{،}a_0, a_1, \dots, a_n\text{به ازای اسکالرهایی چون}$$

که 0 تابع صفر را نشان می‌دهد. در این صورت:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f_i(c_j) = 0 \qquad \text{،}j = 0, 1, \dots, n \text{ برای هر}$$

ولی از طرف دیگر، طبق (۱-۱۰)،

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f_i(c_j) = 0 = a_j$$

بنابراین به ازای هر $j = 0, 1, \dots, n$، $a_j = 0$. بنابراین β مستقل خطی است. چون بعد $P_n(F)$، $n+1$ است، از نتیجهٔ ۲ قضیهٔ ۱۰.۱ نتیجه می‌شود که β پایه‌ای برای $P_n(F)$ است.

چون β پایه‌ای برای $P_n(F)$ است، هر چند جمله‌ای در $P_n(F)$ مثل g، ترکیبی خطی از اعضای β است، مثلاً:

$$g = \sum_{i=0}^{n} b_i f_i$$

در این صورت،

$$g(c_j) = \sum_{i=0}^{n} b_i f_i(c_j) = b_j$$

و در نتیجه

$$g = \sum_{i=0}^{n} g(c_i) f_i$$

نمایش منحصر به فرد g به عنوان ترکیبی خطی از اعضای β است، این نمایش فرمول **درون‌یابی لاگرانژ** نام دارد. استدلال فوق نشان می‌دهد که اگر $b_0, b_1, \ldots, b_n$ اعضای دلخواهی از F باشند (که لزوماً متمایز نیستند)، آنگاه تابع چندجمله‌ای

$$g = \sum_{i=0}^{n} b_i f_i$$

آن عضو منحصر به فردی از $P_n(F)$ است که $g(c_j) = b_j$. بنابراین آن چندجمله‌ای منحصر به فردی را که درجه‌اش بیشتر از n نیست و در نقاط مفروض c_j در دامنه‌اش $(j = 0, 1, \ldots, n)$ مقادیر خاص b_j را اختیار می‌کند، پیدا کرده‌ایم. به عنوان مثال فرض کنید که می‌خواهیم چند جمله‌ای حقیقی g، با درجه حداکثر ۲ ای را بیابیم که نمودارش نقاط $(1, 8)$ ، $(2, 5)$، $(3, -4)$ را در بر دارد. پس با نمادگذاری بالا $c_0 = 1$، $c_1 = 2$، $c_2 = 3$، $b_0 = 8$، $b_1 = 5$ و $b_2 = -4$. چندجمله‌ای لاگرانژ مربوط به c_0, c_1 و c_2 عبارتند از:

$$f_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 6)$$
$$f_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -1(x^2 - 4x + 3)$$

و

$$f_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)$$

بنابراین چندجمله‌ای موردنظر عبارت است از:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{2} b_i f_i(x) = 8f_0(x) + 5f_1(x) - 4f_2(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= ۴(x^۲ - ۵x + ۶) - ۵(x^۲ - ۴x + ۳) - ۲(x^۲ - ۳x + ۲) \\
&= -۳x^۲ + ۶x + ۵
\end{aligned}
$$

یک نتیجهٔ مهم فرمول درون‌یابی لاگرانژ نتیجهٔ زیر است:
هرگاه $f \in P_n(F)$ و به ازای $n + ۱$ عضو متمایز $c_۰, c_۱, \dots, c_n$ در F، $f(c_i) = ۰$، آنگاه f تابع صفر است.

بُعد زیرفضاها

نتیجهٔ بعدی ما بُعد یک زیرفضا را با بُعد فضای برداری‌ای که آن را در بردارد، مرتبط می‌سازد.

قضیه ۱.۱۱. فرض کنید W زیرفضایی از فضای برداری متناهی‌البُعد V باشد. در این صورت، W متناهی‌البُعد است و $\dim(W) \leqslant \dim(V)$. به علاوه اگر $\dim(W) = \dim(V)$ آنگاه $V = W$.

برهان. فرض کنید $\dim(V) = n$. اگر $W = \{۰\}$، W متناهی‌البُعد است و $\dim(W) = ۰$. در غیر این صورت W شامل عضو ناصفری مانند $x_۱$ است؛ پس $\{x_۱\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی است. با ادامهٔ کار به این طریق بردارهای $x_۱, x_۲, \dots, x_k$ را در W بگونه‌ای انتخاب کنید که $\{x_۱, x_۲, \dots, x_k\}$ مستقل خطی باشد. چون هیچ زیرمجموعهٔ مستقل خطی از V بیش از n عضو ندارد، این فرایند باید در یک مرحله پایان بیابد که در آن $k \leqslant n$ و $\{x_۱, x_۲, \dots, x_k\}$ مستقل خطی است، اما افزودن هر عضو دیگر از W، مجموعه‌ای وابستهٔ خطی ایجاد می‌کند. نتیجهٔ قضیهٔ ۱.۸ که $\{x_۱, x_۲, \dots, x_k\}$، W را تولید می‌کند و در نتیجه پایه‌ای برای W است. بنابراین $\dim(W) = k \leqslant n$.
هرگاه $\dim(W) = n$، هر پایه برای W زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از V است که n عضو دارد. امّا نتیجهٔ قضیهٔ ۱.۱۰ ایجاب می‌کند که این پایهٔ W پایه‌ای برای V نیز باشد. بنابراین $W = V$. □

مثال ۱۷. فرض کنید

$$W = (a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵) \in F^۵ : a_۱ + a_۳ + a_۵ = ۰, a_۲ = a_۴\}$$

می‌توان به راحتی نشان داد که W، زیرفضایی از $F^۵$ است که:

$$\{(-۱, ۰, ۱, ۰, ۰), (-۱, ۰, ۰, ۰, ۱), (۰, ۱, ۰, ۱, ۰)\}$$

پایه‌ای برای آن می‌باشد. پس $\dim(W) = ۳$. □

مثال ۱۸. مجموعهٔ ماتریس‌های قطری $n \times n$ زیرفضایی چون W از $M_{n\times n}(F)$ است (به مثال ۳ بخش ۱-۳ رجوع کنید).یک پایه برای W، مجموعهٔ زیر است

$$\{M^{۱۱}, M^{۲۲}, \dots, M^{nn}\}$$

که در اینجا M^{ij} ماتریسی است که تنها درایهٔ ناصفرش ۱ ای است که در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد، بنابراین $\dim(W) = n$. □

مثال ۱۹. در بخش ۱-۳ دیدیم که مجموعهٔ W متشکل از ماتریس‌های متقارن $n \times n$، زیرفضایی از $M_{n\times n}$ است. یک پایه برای W، مجموعهٔ زیر است:

$$\{A^{ij}; 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$$

که A^{ij} ماتریس $n \times n$ ای است که در سطر i ام و ستون j ام آن و نیز در سطر j ام و ستون i ام آن ۱ قرار دارد و در سایر جاها ۰. نتیجه می‌شود که:

$$\dim(W) = n + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

□

نتیجه ۳. اگر W زیرفضایی از فضای برداری متناهی‌البعد V باشد، آنگاه W پایه‌ای متناهی دارد و هر پایه‌ای برای W را می‌توان به پایه‌ای برای V تعمیم داد.

برهان. قضیهٔ ۱۱.۱ نشان می‌دهد که W پایه‌ای متناهی مانند S دارد. هرگاه β پایهٔ دلخواهی برای V باشد، قضیهٔ جایگزینی نشان می‌دهد که زیرمجموعه‌ای از β مانند S_1 وجود دارد که $S \cup S_1$ پایه‌ای برای V است. در نتیجه S زیرمجموعه‌ای از پایهٔ $S \cup S_1$ برای V می‌باشد. □

مثال ۲۰. مجموعهٔ W متشکل از چندجمله‌ای‌های به شکل

$$a_{18}x^{18} + a_{16}x^{16} + \ldots + a_2x^2 + a_0$$

که $a_0, a_2, \ldots, a_{16}, a_{18} \in F$، زیرفضایی از $P_{18}(F)$ است. یک پایه برای W، $\{1, x^2, \ldots, x^{16}, x^{18}\}$ است که زیرمجموعه‌ای از پایهٔ استاندارد $P_{18}(F)$ است. □

این بخش را با به کارگیری قضیهٔ ۱۱.۱ برای تعیین زیرفضاهای $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ به پایان می‌بریم. چون بُعد $\mathbb{R}^2$، ۲ است، بُعد زیرفضاهای $\mathbb{R}^2$ فقط می‌تواند ۰، ۱ یا ۲ باشد؛ تنها زیرفضایی با بُعد ۰ یا ۲، به ترتیب $\{0\}$ و $\mathbb{R}^2$ اند. هر زیرفضای $\mathbb{R}^2$ که بُعدش ۱ باشد، از تمام مضرب‌های اسکالر بردار ناصفری در $\mathbb{R}^2$ تشکیل شده است (تمرین ۹ بخش ۱-۴).

اگر هر نقطهٔ $\mathbb{R}^2$ را به طریقهٔ معمول با نقطه‌ای در صفحهٔ اقلیدسی یکی بگیریم، در این صورت می‌توان زیرفضاهای $\mathbb{R}^2$ را به طور هندسی توصیف کرد. هر زیرفضایی از $\mathbb{R}^2$ که بعد آن ۰ باشد، از مبدأ صفحهٔ اقلیدسی تشکیل شده است. زیرفضایی از $\mathbb{R}^2$ که بُعد آن ۱ باشد، خطی است که از مبدأ می‌گذرد و زیرفضایی از $\mathbb{R}^2$ که بعد آن ۲ باشد، کل صفحهٔ اقلیدسی است. به همین ترتیب، زیرفضاهای $\mathbb{R}^3$، باید بعدشان ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد. با تعبیر کردن هندسی این حالات، در می‌یابیم که هر زیرفضایی با بُعد صفر، باید مبدأ فضای ۳ بُعدی اقلیدسی باشد. هر زیرفضای با بعد ۱، خطی است که از مبدأ می‌گذرد، هر زیرفضای با بُعد ۲ صفحه‌ای است که از مبدأ می‌گذرد و هر زیرفضای با بُعد ۳، خود فضای ۳ بُعدی اقلیدسی است.

تمرینات

۱. مشخص کنید که کدام یک از عبارات زیر درست و کدام نادرست است.

الف) فضای برداری صفر، پایه ندارد.

ب) هر فضای برداری‌ای که یک مجموعهٔ متناهی آن را تولید کند، دارای پایه است.

ج) هر فضای برداری، پایه‌ای متناهی دارد.

د) یک فضای برداری نمی‌تواند بیش از یک پایه داشته باشد.

ه) اگر فضای برداری پایه‌ای متناهی داشته باشد، تعداد بردارهای هر دو پایه یکی است.

و) بُعد $P_n(F)$، n است.

ز) بعد $M_{m\times n}(F)$، $m+n$ می‌باشد.

ح) فرض کنید V یک فضای برداری متناهی‌البُعد، $S_۱$ زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از V و $S_۲$ زیرمجموعه‌ای از V باشد که V را تولید می‌کند. در این صورت، $S_۱$ نمی‌تواند بیش از $S_۲$ عضو داشته باشد.

ط) اگر S فضای برداری V را تولید کند، هر بردار V را می‌توان فقط به یک طریق به صورت ترکیبی خطی از اعضای S نوشت.

ی) هر زیرفضای یک فضای برداری متناهی‌البُعد، متناهی‌البُعد است.

ک) هرگاه V فضایی برداری با بُعد n باشد، V دقیقاً یک زیرفضا با بُعد ۰ و دقیقاً یک زیرفضا با بُعد n خواهد داشت.

۲. تعیین کنید که کدام یک از مجموعه‌های زیر پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۳$ هستند.

الف) $\{(۱,۰,-۱),(۲,۵,۱),(۰,-۴,۳)\}$

ب) $\{(۲,-۴,۱),(۰,۳,-۱),(۶,۰,-۱)\}$

ج) $\{(۱,۲,-۱),(۱,۰,۲),(۲,۱,۱)\}$

د) $\{(-۱,۳,۱),(۲,-۴,-۳),(-۳,۸,۲)\}$

ه) $\{(۱,-۳,-۲),(-۳,۱,۳),(-۲,-۱۰,-۲)\}$

۳. تعیین کنید که کدام یک از مجموعه‌های زیر، پایه‌ای برای $P_۲(\mathbb{R})$ است.

الف) $\{-۱-x+۲x^۲, ۲+x-۲x^۲, ۱-۲x+۴x^۲\}$

ب) $\{1+2x+x^2, 3+x^2, x+x^2\}$

ج) $\{1-2x-2x^2, -2+3x-x^2, 1-x+6x^2\}$

د) $\{-1+2x+4x^2, 3-4x-10x^2, -2-5x-6x^2\}$

ه) $\{1+2x-x^2, 4-2x+x^2, -1+18x-9x^2\}$

۴. آیا چندجمله‌ای‌های x^3-2x^2+1، $4x^2-x+3$ و $3x-2$، $P_3(\mathbb{R})$ را تولید می‌کنند؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۵. آیا $\{(1,4,-6),(1,5,8),(2,1,1),(0,1,0)\}$ زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از $\mathbb{R}^3$ است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۶. سه پایهٔ متفاوت برای F^2 و $M_{2\times 2}(F)$ ارائه کنید.

۷. بردارهای $u_1=(2,-3,1)$، $u_2=(1,4,-2)$، $u_3=(-8,12,-4)$، $u_4=(1,37,-17)$ و $u_5=(-3,-5,8)$، $\mathbb{R}^3$ را تولید می‌کنند. زیرمجموعه‌ای از $\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ بیابید که پایه‌ای برای $\mathbb{R}^3$ باشد.

۸. فرض کنید W زیرفضایی از $\mathbb{R}^5$ را نشان دهد که از بردارهایی که مجموع مختصاتشان صفر است، تشکیل شده است. بردارهای زیر، W را تولید می‌کنند.

$$\begin{array}{lll}
u_1=(2,-3,4,-5,2) & , & u_2=(-6,9,-12,15,-6)\\
u_3=(3,-2,7,-9,1) & , & u_4=(2,-8,2,-2,6)\\
u_5=(-1,1,2,1,-3) & , & u_6=(0,-3,-18,9,12)\\
u_7=(1,0,-2,3,-2) & , & u_8=(2,-1,1,-9,7)
\end{array}$$

زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{u_1,u_2,\dots,u_8\}$ بیابید که W را تولید کند.

۹. بردارهای $u_1=(1,1,1,1)$، $u_2=(0,1,1,1)$، $u_3=(0,0,1,1)$ و $u_4=(0,0,0,1)$ پایه‌ای برای F^4 تشکیل می‌دهند. نمایش منحصر به فرد بردار دلخواه (a_1,a_2,a_3,a_4) واقع در F^4 را به عنوان ترکیبی خطی از u_1,u_2,u_3 و u_4 بیابید.

۱۰. فرض کنید u و v بردارهای متمایزی از فضای برداری V باشند. نشان دهید که اگر $\{u,v\}$ پایه‌ای برای V باشد، و a و b اسکالرهایی ناصفر باشند، هم $\{u+v, au\}$ و هم $\{au, bv\}$ پایه‌ای برای V هستند.

۱۱. فرض کنید u,v,w اعضای متمایزی از فضای برداری V باشند. نشان دهید که اگر $\{u,v,w\}$ پایه‌ای برای V باشد، $\{u+v+w, v+w, w\}$ نیز چنین است.

۱۲. مجموعهٔ جواب‌های دستگاه معادلات خطی زیر

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ است. پایه‌ای برای این زیرفضا بیابید.

۱۳. پایه‌ای برای زیرفضاهای زیر از F^5 بیابید:

$$W_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in F^5 : a_1 - a_3 - a_4 = 0\}$$

و

$$W_2 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in F^5 : a_1 + a_5 = 0, a_2 = a_3 = a_4\}$$

ابعاد W_1 و W_2 را به دست آورید.

۱۴. مجموعهٔ W متشکل از ماتریس‌هایی که ردّشان صفر است، زیرفضایی از $M_{n\times n}(F)$ است (به مثال ۴ بخش ۱-۳ رجوع کنید). پایه‌ای برای W بیابید. بُعد W چند است؟

۱۵. مجموعهٔ W متشکل از ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ زیرفضایی از $M_{n\times n}(F)$ است (به مثال ۱۲ بخش ۱-۳ رجوع کنید). پایه‌ای برای W بیابید. بُعد W چند است؟

۱۶. مجموعهٔ W متشکل از ماتریس‌های متقارن اُریب $n \times n$۷ زیرفضایی است از $M_{n\times n}(F)$ (به تمرین ۲۸ بخش ۱-۳ رجوع کنید.) پایه‌ای برای W بیابید. بُعد W چند است؟

۱۷. برای فضای برداری مثال ۵ بخش ۱-۲ پایه‌ای بیابید. برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱۸. برهان قضیهٔ ۷.۱ را کامل کنید.

† ۱۹. فرض کنید V فضایی برداری با بُعد n و S یک زیرمجموعه از V باشد که آن را تولید می‌کند.

الف) ثابت کنید زیرمجموعه‌ای از S وجود دارد که پایه‌ای برای V است (توجه داشته باشید که به اشتباه S را متناهی فرض نکنید.)

ب) ثابت کنید S حداقل n عضو دارد.

۲۰. ثابت کنید که هر فضای برداری با بُعد نامتناهی است اگر و تنها اگر شامل یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی نامتناهی باشد.

۲۱. فرض کنید W_1 و W_2 زیرفضاهایی از یک فضای برداری متناهی‌البُعد باشند. شرایط لازم و کافی را در مورد W_1 و W_2 برای اینکه $\dim(W_1 \cup W_2) = \dim(W_1)$ بیان کنید.

۲۲. فرض کنید $v_1, v_2, \ldots, v_k$، v اعضایی از فضای برداری V باشند. W_1 را برابر $span(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$ و W_2 را برابر $span(\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v\})$ تعریف کنید.

الف) شرایط لازم و کافی در مورد v را برای اینکه $\dim(W_1) = \dim(W_2)$ بیابید.

ب) در حالتی که $\dim(W_1) \neq \dim(W_2)$، رابطه‌ای بین $\dim(W_1)$ و $\dim(W_2)$ بیان کنید و آن را ثابت نمایید.

۲۳. فرض کنید $f(x)$ چندجمله‌ایی با درجهٔ n در $P_n(\mathbb{R})$ باشد. ثابت کنید به ازای هر $g(x) \in P_n(\mathbb{R})$ اسکالرهایی چون $c_0, c_1, \ldots, c_n$ وجود دارند که

$$g(x) = c_0 f(x) + c_1 f'(x) + c_2 f''(x) + \ldots + c_n f^{(n)}(x)$$

که در اینجا $f^{(n)}(x)$ مشتق n ام $f(x)$ را نشان می‌دهد.

۲۴. فرض کنید V, W, Z مانند تمرین ۲۱ بخش ۱-۲ باشند. اگر V و W فضاهایی برداری روی F، با ابعاد m و n باشند، بُعد Z را تعیین کنید.

۲۵. به ازای عدد ثابت $a \in \mathbb{R}$، بُعد زیرفضایی از $P_n(\mathbb{R})$ را که برابر $\{f \in P_n(\mathbb{R}) : f(a) = 0\}$ است تعیین کنید.

۲۶. فرض کنید W_1 و W_2 زیرفضاهایی از $P(F)$ باشند که در تمرین ۲۵ در بخش ۱-۳ تعریف شدند. ابعاد زیرفضاهای $W_1 \cap P_n(F)$ و $W_2 \cap P_n(F)$ را بیابید.

برای پرداختن به تمرینات ۲۷ الی ۳۱ باید با مجموع و مجموع مستقیم زیرفضاها که در تمرینات بخش ۱-۳ تعری شدند، آشنا باشید.

۲۷. الف) ثابت کنید که اگر W_1 و W_2 زیرفضاهایی متناهی‌البُعد از فضای برداری V باشند، آنگاه زیرفضای $W_1 + W_2$ نیزمتناهی‌البُعد است و

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

راهنمایی: فرض کنید $\{u_1, \ldots, u_k\}$ پایه‌ای برای $W_1 \cap W_2$ باشد. آن را به پایه‌ای مانند $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_m\}$ برای W_1 و پایهٔ $\{u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_p\}$ برای W_2 گسترش دهید.

ب) فرض کنید W_1 و W_2 زیرفضاهایی از فضای برداری متناهی‌البُعد V باشند و $V = W_1 + W_2$. نتیجه بگیرید که V مجموع مستقیم W_1 و W_2 است اگر و تنها اگر $\dim(V) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$.

۲۸. فرض کنید:

$$V = M_{2\times 2}(F) \quad , \quad W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \in V : a, b, c \in F \right\}$$

و

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{bmatrix} \in V : a, b \in F \right\}$$

ثابت کنید W_1 و W_2 زیرفضاهایی از V هستند و ابعاد W_1، W_2، $W_1 + W_2$ و $W_1 \cap W_2$ را بیابید.

۲۹. فرض کنید W_1 و W_2 زیرفضاهایی از فضای برداری V باشند که ابعاد آنها به ترتیب m و n است و $m \geqslant n$.

الف) ثابت کنید که $\dim(W_1 \cap W_2) \leqslant n$.

ب) ثابت کنید که $\dim(W_1 + W_2) \leqslant m + n$.

۳۰. الف) مثالی از دو فضای W_1 و W_2 در $\mathbb{R}^3$ با ابعاد m و n که $m > n > 0$ بیابید به طوری که $\dim(W_1 \cap W_2) = n$.

ب) نمونه‌هایی از دو فضای W_1 و W_2 در $\mathbb{R}^3$ با ابعاد m و n که $m > n > 0$ بیابید به طوری که $\dim(W_1 + W_2) = m + n$.

ج) نمونه‌هایی از زیرفضاهای W_1 و W_2 در $\mathbb{R}^3$ با ابعاد m و n که $m \geqslant n$ بیابید که هم $\dim(W_1 \cap W_2) < n$ و $\dim(W_1 + W_2) < m + n$.

۳۱. الف) فرض کنید W_1 و W_2 چنان زیرفضاهایی از فضای برداری V باشند که $V = W_1 \oplus W_2$. اگر β_1 و β_2 به ترتیب پایه‌هایی برای W_1 و W_2 باشند، نشان دهید که $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$ و $\beta_1 \cup \beta_2$ پایه‌ای برای V است.

ب) برعکس، فرض کنید β_1 و β_2 پایه‌هایی مجزا به ترتیب برای زیرفضاهای W_1 و W_2 از فضای برداری V باشند. ثابت کنید که اگر $\beta_1 \cup \beta_2$ پایه‌ای برای V باشد، آنگاه $V = W_1 \oplus W_2$.

۳۲. ثابت کنید که اگر W_1 زیرفضای دلخواهی از فضای برداری متناهی‌البُعد V باشد، آنگاه زیرفضای W_2 ای از V وجود دارد به گونه‌ای که $V = W_1 \oplus W_2$.

برای حل تمرین زیر، آشنایی با تمرین ۳۱ بخش ۱-۳ لازم است.

۳۳. فرض کنید W زیرفضایی از فضای برداری متناهی‌البُعد V باشد و پایه‌ای مانند $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ برای W در نظر بگیرید. فرض کنید $\{u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ تعمیمی از این پایه به پایه‌ای برای V باشد.

الف) ثابت کنید $\{u_{k+1} + W, u_{k+2} + W, \ldots, u_n + W\}$ پایه‌ای برای V/W است.

ب) فرمولی بیابید که $\dim(V)$، $\dim(W)$ و $\dim(V/W)$ را با هم مرتبط سازد.

۱-۷ * زیرفضاهای مستقل خطی ماکزیمال

در این بخش چندین مورد مهم از نتایجی را که در بخش ۱-۶ ثابت شد به فضاهای برداری با بُعد نامتناهی تعمیم می‌دهیم. هدف اصلی ما اثبات آن است که هر فضای برداری پایه دارد. این نتیجه از آن رو در مطالعهٔ فضاهای برداری با بُعد نامتناهی اهمیت دارد که اغلب، ساختن یک پایهٔ صریح برای چنین فضاهایی دشوار است. به عنوان مثال، فضای برداری اعداد حقیقی روی میدان اعداد گویا را در نظر بگیرید. هیچ راه مشخصی برای ساختن پایه برای این فضا وجود ندارد؛ ولی با این وجود از نتایج این بخش نتیجه می‌شود که چنین پایه‌ای وجود دارد.

مشکل اصلی‌ای که در تعمیم قضایای بخش قبل به فضاهای برداری با بُعد نامتناهی به وجود می‌آید این است که اصل استقراء ریاضی که در بسیاری از برهان‌های بخش ۱-۶ نقشی اساسی داشت، دیگر به کار نمی‌آید و به جای آن، نتیجهٔ کلی‌تری به نام اصل ماکزیمال مورد نیاز است؛ قبل از بیان این اصل به معرفی چند اصطلاح نیاز است.

تعریف:. فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد، عضو M از $\mathcal{F}$ را **ماکزیمال** (نسبت به شمول مجموعه‌ای) گویند، هرگاه M مشمول هیچ عضوی از $\mathcal{F}$ جز خودش نباشد.

مثال ۱. فرض کنید $\mathcal{F}$ خانوادهٔ تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ ناتهی S باشد (خانوادهٔ $\mathcal{F}$، **مجموعهٔ توانی** S نام دارد). به راحتی می‌توان دید که S، یک عضو ماکزیمال F است. □

مثال ۲. فرض کنید S و T دو مجموعهٔ ناتهی مجزا و $\mathcal{F}$ اجتماع مجموعه‌های توانی آنها باشد. در این صورت، S و T هر دو اعضای ماکزیمال $\mathcal{F}$ هستند. □

مثال ۳. فرض کنید $\mathcal{F}$ خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی مجموعهٔ نامتناهی S باشد. در این صورت $\mathcal{F}$ عضو ماکزیمال ندارد، چرا که اگر M عضو دلخواهی از $\mathcal{F}$ و s عضوی از S باشد که در M واقع نیست، $M \cup \{s\}$ عضوی از $\mathcal{F}$ خواهد بود که M را به عنوان زیرمجموعه‌ای سره در بر دارد. □

تعریف:. گردایهٔ C از مجموعه‌ها را یک **زنجیر** یا **لانه** یا **برج** نامند، هرگاه به ازای هر دو مجموعهٔ A و B در C، یا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.

مثال ۴. برای هر عدد صحیح مثبت n فرض کنید $A_n = \{۱, ۲, \ldots, n\}$. در این صورت گردایهٔ $C = \{A_n : n = ۱, ۲, ۳, \ldots\}$ یک زنجیر است. در واقع $A_m \subseteq A_n$ اگر و تنها اگر $m \leqslant n$. □

اصل ماکزیمال[۵]**:** فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. هرگاه به ازای هر زنجیر $C \subseteq \mathcal{F}$ عضوی از $\mathcal{F}$ وجود داشته باشد که همهٔ اعضای C را در بر دارد، در این صورت $\mathcal{F}$ شامل یک عضو ماکزیمال است.

چون اصل ماکزیمال وجود یک عضو ماکزیمال در گردایه‌های خاصی از مجموعه‌ها را تضمین می‌کند، خوب است که تعریف پایه را بر حسب خاصیت ماکزیمال بودن بازنویسی کنیم. در قضیهٔ ۱۲.۱ نشان می‌دهیم مفهومی که در زیر تعریف می‌شود با پایه معادل است.

تعریف:. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از فضای برداری V باشد. منظور از یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکزیمال S، زیرمجموعه‌ای از S مانند B است که در هر دو شرط زیر صدق می‌کند.

الف) B مستقل خطی است.

ب) تنها زیرمجموعهٔ مستقل خطی S که B را در بر داشته باشد، خود B است.

مثال ۵. مثال ۲، بخش ۱-۴ نشان می‌دهد که

$$\{x^۳ - ۲x^۲ - ۵x - ۳, ۳x^۳ - ۵x^۲ - ۴x - ۹\}$$

یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکزیمال

$$S = \{۲x^۳ - ۲x^۲ + ۱۲x - ۶, x^۳ - ۲x^۲ - ۵x - ۳, ۳x^۳ - ۵x^۲ - ۴x - ۹\}$$

در $P_۲(\mathbb{R})$ است. در این مثال، به راحتی می‌توان نشان داد که هر زیرمجموعهٔ دو عضوی S، یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکزیمال S است. پس زیرمجموعه‌های مستقل خطی ماکزیمال، لزوماً یکتا نیستند. □

هر پایهٔ β برای فضای برداری V یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکزیمال از V است؛ چرا که:

۱. β طبق تعریف مستقل خطی است.

۲. هرگاه $v \in V$ و $v \notin \beta$، آنگاه $\beta \cup \{v\}$ طبق قضیهٔ ۸.۱ وابستهٔ خطی است، زیرا $span(\beta) = V$ است.

نتیجهٔ بعدی ما نشان می‌دهد که عکس این مطلب هم صحیح است.

قضیه ۱۲.۱. فرض کنید V فضایی برداری و S زیرمجموعه‌ای باشد که V را تولید کند. اگر β یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکزیمال S باشد، آنگاه β پایه‌ای برای V است.

[۵] اصل ماکزیمال معادل منطقی اصل انتخاب است که در اغلب نحوه‌های ارائهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها به روش اصل موضوعی، فرض قرار می‌گیرد. برای مشاهدهٔ یکی از بررسی‌های نظریهٔ مجموعه‌ها که از اصل ماکزیمال استفاده می‌کند، به کتاب زیر مراجعه کنید:

John L. Kelley. General Topology. D. Van Nostrand Co.. Inc. 1995.

برهان. فرض کنید β یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکزیمال S باشد. چون β مستقل خطی است، کافی است ثابت کنیم که β، V را تولید می‌کند. ادّعا می‌کنیم که $S \subseteq span(\beta)$، چرا که در غیر این صورت $v \in S$ ای وجود دارد که $v \notin span(\beta)$. چون قضیهٔ ۸.۱ نتیجه می‌دهد که $\beta \cup \{v\}$ مستقل خطی است، ماکزیمال بودن β را نقض کرده‌ایم. بنابراین $S \subseteq span(\beta)$. چون $span(S) = V$ از قضیهٔ ۵.۱ نتیجه می‌شود که $span(\beta) = V$. □

بنابراین هر زیرمجموعه از یک فضای برداری، پایه‌ای برای آن است اگر و تنها اگر زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکزیمالی از آن فضای برداری باشد. بنابراین می‌توانیم با نشان دادن اینکه هر فضای برداری دارای یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکزیمال است، به هدف خود یعنی اثبات اینکه هر فضای برداری دارای پایه است، دست یابیم.

قضیه ۱۳.۱. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از فضای برداری V باشد. در این صورت زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکزیمالی از V وجود دارد که S را در بر دارد.

برهان. فرض کنید $\mathcal{F}$ خانوادهٔ تمام زیرمجموعه‌های مستقل خطی‌ای از V را که S را در بر دارند، نشان دهد. برای اثبات اینکه $\mathcal{F}$ شامل یک عضو ماکزیمال است، باید نشان دهیم که اگر C زنجیری در $\mathcal{F}$ باشد، عضوی از $\mathcal{F}$ وجود خواهد داشت که همهٔ اعضای C را در بر دارد. ادّعا می‌کنیم که U، که برابر اجتماع اعضای C تعریف می‌شود، مجموعهٔ مورد نظر می‌باشد. واضح است که U هر یک از اعضای C را در بر دارد و بنابراین کافی است ثابت کنیم که $U \in \mathcal{F}$ (یعنی U زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از V است که S را در بر دارد).چون هر عضو C، زیرمجموعه‌ای از V شامل S است، داریم $S \subseteq U \subseteq V$. در نتیجه کافی است ثابت کنیم که U مستقل خطی است. فرض کنید $u_1, u_2, \ldots, u_n$ بردارهایی در U باشند و $a_1, a_2, \ldots, a_n$ چنان اسکالرهایی باشند که $a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n = 0$. چون برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، $u_i \in U$، مجموعه‌ای مانند A_i در C وجود دارد که $u_i \in A_i$. امّا از آنجا که C زنجیر است، یکی از این مجموعه‌ها، مثلاً A_k بقیه را در بر دارد. در نتیجه برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، $u_i \in A_k$. امّا A_k مجموعه‌ای مستقل خطی است، بنابراین $a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n = 0$ نتیجه می‌دهد که $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. از اینجا نتیجه می‌شود که U مستقل خطی است. اصل ماکزیمال نتیجه می‌دهد که $\mathcal{F}$ عضوی ماکزیمال دارد. به راحتی می‌توان دید که این عضو ماکزیمال، زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکزیمالی از V است که S را هم در بر دارد. □

نتیجه ۱. هر فضای برداری یک پایه دارد.

می‌توان شبیه به نتیجهٔ ۱ از قضیهٔ ۱۰.۱ نشان داد که همهٔ پایه‌های یک زیرفضای برداری با بُعد نامتناهی، عدد اصلی یکسانی دارند.[۶]

تمرینات ۳۷-۶ نتایج دیگری از بخش ۱-۶ را به فضاهای برداری با بُعد نامتناهی تعمیم می‌دهند.

[۶] رجوع کنید به کتاب Lectures in Linear Algebra, N. Jacobson، جلد سوم، D. Van Nostrand Company، ۱۹۶۴، صفحهٔ ۱۵۴.

تمرینات

۱. مشخص کنید که کدام یک از عبارات زیر درست و کدام نادرست است.

الف) هر خانواده از مجموعه‌ها یک عضو ماکزیمال دارد.

ب) هر زنجیر، شامل یک عضو ماکزیمال است.

ج) اگر خانواده‌ای از مجموعه‌ها، یک عضو ماکزیمال داشته باشد، آن عضو ماکزیمال یکتاست.

د) اگر زنجیری از مجموعه‌ها عضو ماکزیمال داشته باشد، آنگاه آن عضو ماکزیمال یکتاست.

ه) هر پایه برای یک فضای برداری، زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکزیمالی از آن فضای برداری است.

و) هر زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکزیمال یک فضای برداری، پایه‌ای برای آن فضای برداری است.

۲. ثابت کنید که مجموعهٔ دنباله‌های همگرا زیرفضایی با بُعد نامتناهی از فضای برداری تمام دنباله‌های حقیقی است (به تمرین ۲۱ بخش ۱-۳ رجوع کنید.)

۳. فرض کنید W زیرفضایی (نه لزوماً متناهی‌البُعد) از فضای برداری V باشد؛ ثابت کنید که هر پایه برای W، زیرمجموعهٔ پایه‌ای برای V است.

۴. شکل با بُعد نامتناهی قضیهٔ ۷.۱ را که در زیر آمده است، ثابت کنید.

فرض کنید β زیرمجموعه‌ای از فضای برداری با بُعد نامتناهی V باشد. در این صورت β پایه‌ای برای V است، اگر و تنها اگر برای هر بردار ناصفر v در V، بردارهای منحصر به فرد $u_۱, u_۲, \ldots, u_n$ در β و اسکالرهای ناصفر یکتای $c_۱, c_۲, \ldots, c_n$ به گونه‌ای موجود باشند که $v = c_۱u_۱ + c_۲u_۲ + \ldots + c_nu_n$.

۵. تعمیم زیر از قضیهٔ ۹.۱ را ثابت کنید.

فرض کنید $S_۱$ و $S_۲$ زیرفضاهایی از فضای برداری V باشند که $S_۱ \subseteq S_۲$. اگر $S_۱$ مستقل خطی باشد و $S_۲$، V را تولید کند، پایه‌ای چون β برای V وجود خواهد داشت که $S_۱ \subseteq \beta \subseteq S_۲$.
راهنمایی: اصل ماکزیمال را در مورد خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های مستقل خطی از $S_۲$ که $S_۱$ را در بر دارند به کار گیرید و مانند برهان قضیهٔ ۱۳.۱ عمل کنید.

۶. تعمیم زیر از قضیهٔ جایگزینی را ثابت کنید.

فرض کنید β پایه‌ای برای فضای برداری V و S زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از V باشد. زیرمجموعهٔ S_1 ای از β وجود دارد به گونه‌ای که $S \cup S_1$ پایه‌ای برای V باشد.

فصل ۲

تبدیلات خطی و ماتریس‌ها

در فصل ۱، نظریه فضاهای برداری مجرد را با جزئیات نسبتاً زیادی ارائه کردیم. حال طبیعی است که آن توابعی را روی فضاهای برداری در نظر بگیریم که به نوعی ساختار فضای برداری را «حفظ می‌کنند». این توابع خاص، تبدیلات خطی نام دارند که هم در ریاضی محض و هم در ریاضی کاربردی به کرّات ظاهر می‌شوند. در حسابان، اعمال مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مهمترین تبدیلات خطی هستند (به مثال‌های ۶ و ۷ بخش ۱-۲ رجوع کنید) این دو نمونه ما را قادر می‌سازند که بسیاری از مسائل در مورد معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرالی را بر حسب تبدیلات خطی و فضاهای برداری خاص بازنویسی کنیم (به بخش‌های ۲-۷ و ۵-۲ رجوع کنید).

در هندسه دوران‌ها، انعکاس‌ها و تصویرها (به مثال‌های ۲، ۳ و ۴ بخش ۲-۱ رجوع کنید)، دسته دیگری از تبدیلات خطی را تشکیل می‌دهند. در فصول بعدی، از این تبدیلات برای مطالعه حرکات صُلب در $\mathbb{R}^n$ استفاده خواهیم کرد (بخش ۶-۱۰).

در فصول باقیمانده نمونه‌های بیشتری از تبدیلات خطی را، هم در علوم فیزیکی و هم در علوم اجتماعی خواهیم دید. در طول این فصل فرض خواهیم کرد که تمام فضاها روی میدان واحد F هستند.

۲-۱ تبدیلات خطی، فضاهای پوچ و بُردها

در این بخش، چندین نمونه از تبدیلات خطی را بررسی خواهیم کرد. بسیاری از این تبدیلات را در بخش‌های بعدی با جزئیات بیشتری بررسی خواهیم نمود. به یاد داشته باشید که تابع T ای را که دامنه‌اش V و هم دامنه‌اش W است، با $T : V \to W$ نشان می‌دهیم (به ضمیمه ب رجوع کنید).

تعریف: فرض کنید V و W دو فضای برداری (روی F) باشند. تابع $T : V \to W$ را تبدیلی خطی از V به W می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in V$ و $c \in F$ داشته باشیم:

الف) $T(x + y) = T(x) + T(y)$

ب) $T(cx) = cT(x)$

معمولاً برای راحتی می‌گوییم که T خطی است. خواننده باید موارد زیر را در مورد تابع $T : V \to W$ بررسی کند.

۱. اگر T خطی باشد، آنگاه $T(0) = 0$.

۲. T خطی است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in V$ و $c \in F$، $T(cx + y) = cT(x) + T(y)$.

۳. T خطی است اگر و تنها اگر برای هر $x_1, \ldots, x_n \in V$ و $a_1, \ldots, a_n \in F$ داشته باشیم:

$$T(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i)$$

معمولاً برای اثبات این که یک تبدیل مفروض خطی است، از خاصیت ۲ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ را چنین تعریف کنید:

$$T(a_1, a_2) = (2a_1 + a_2, a_1)$$

برای اثبات اینکه T خطی است، فرض کنید $c \in F$ و $x, y \in \mathbb{R}^2$ که $x = (b_1, b_2)$ و $y = (d_1, d_2)$. چون

$$cx + y = (cb_1 + d_1, cb_2 + d_2)$$

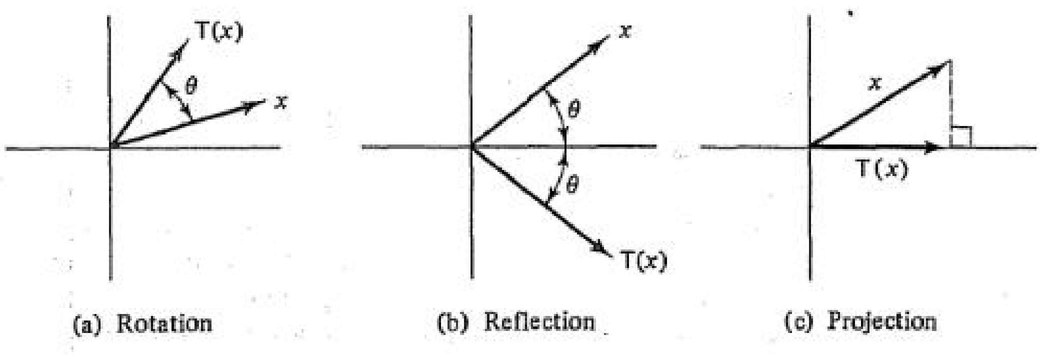
داریم

$$T(cx + y) = (2(cb_1 + d_1) + cb_2 + d_2, cb_1 + d_1)$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} cT(x) + Y(y) &= c(2b_1 + b_2, b_1) + (2d_1 + d_2, d_1) \\ &= (2cb_1 + cb_2 + 2d_1 + d_2, cb_1 + d_1) \\ &= (2(cb_1 + d_1) + cb_2 + d_2, cb_1 + d_1) \end{aligned}$$

پس T خطی است. □



شکل ۲-۱: تصویر - انعکاس - دوران

همانگونه که در فصل ۶ خواهیم دید، کاربردهای جبرخطی در زمینه هندسه، گسترده و متنوع است. دلیل اصلی این مسأله این است که مهم ترین تبدیلات هندسی، خطی هستند. ما در اینجا سه تبدیل خاص را در نظر می‌گیریم که عبارتند از: دوران، انعکاس و تصویر. اثبات خطی بودن را در هر مورد به عهده خواننده می‌گذاریم.

مثال ۲. به ازای هر زاویه θ، $T_\theta : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ را چنین تعریف کنید:

$$T_\theta(a_۱, a_۲) = (a_۱ \cos\theta - a_۲ \sin\theta, a_۱ \sin\theta + a_۲ \cos\theta)$$

T_θ، دوران به اندازه θ نامیده می‌شود (به شکل ۲-۱ الف رجوع کنید). □

مثال ۳. $T : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ را با رابطه $T(a_۱, a_۲) = (a_۱, -a_۲)$ تعریف کنید. T، انعکاس نسبت به محور x ها نامیده می‌شود (به شکل ۲-۱ ب رجوع کنید). □

مثال ۴. $T : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ را با رابطه $T(a_۱, a_۲) = (a_۱, ۰)$ تعریف کنید. T تصویر روی محور x ها در راستای محور y ها نامیده می‌شود (به شکل ۲-۱ ج رجوع کنید). □

مثال ۵. $T : M_{m\times n}(F) \to M_{n\times m}(F)$ را چنین تعریف کنید: $T(A) = A^t$ که A^t همان است که در بخش ۱-۳ تعریف شد. در این صورت، T طبق تمرین‌های بخش ۱-۳، یک تبدیل خطی است. □

مثال ۶. $T : P_n(\mathbb{R}) \to P_{n-۱}(\mathbb{R})$ را این گونه تعریف کنید: $T(f) = f'$ که f' نشان‌دهنده مشتق f می‌باشد. برای اثبات اینکه T خطی است، فرض کنید که g و h، بردارهایی در $P_n(\mathbb{R})$ باشند و $a \in \mathbb{R}$. داریم:

$$T(ag + h) = (ag + h)' = ag' + h' = aT(g) + T(h)$$

پس طبق خاصیت ۲ بالا، T خطی است. $\square$

مثال ۷. فرض کنید $V = C(\mathbb{R})$، که فضای برداری متشکل از توابع پیوسته با مقدار حقیقی روی $\mathbb{R}$ است. فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < b$. $T : V \to \mathbb{R}$ را اینگونه تعریف کنید: برای هر $f \in V$،

$$T(f) = \int_a^b f(t)dt$$

در این صورت T تبدیل خطی است چرا که طبق مطالب حسابان، انتگرال معین یک ترکیب خطی از توابع، برابر همان ترکیب خطی از انتگرال‌های معین آن توابع است. $\square$

دو نمونه خاص از تبدیلات خطی – که در ادامه این کتاب زیاد به آنها برمی‌خوریم و هرکدام اسامی خاص خود را می‌طلبند – تبدیلات همانی و صفر هستند.

به ازای دو فضای برداری V و W (روی F) تبدیل خطی $I_V : V \to V$ را با رابطه $I_V(x) = x$ برای هر $x \in V$، و تبدیل صفر $T_\circ : V \to W$ را به صورت $T_\circ(x) = \circ$ برای هر $x \in V$ تعریف می‌کنیم. واضح است که هر دوی این تبدیلات، خطی هستند. معمولاً به جای I_V، می‌نویسیم I.

حال به دو مجموعه مهم مربوط به تبدیلات خطی می‌پردازیم: برد و فضای پوچ. معین کردن این مجموعه‌ها به ما امکان بررسی دقیق‌تر ویژگی‌های ذاتی یک تبدیل خطی را می‌دهد.

چند تعریف: فرض کنید V و W دو فضای برداری و $T : V \to W$ خطی باشد. فضای پوچ (یا هستهٔ) T را که با $N(T)$ نشان می‌دهیم برابر با مجموعه بردارهای x ای در V تعریف می‌کنیم که $T(x) = \circ$؛ یعنی $N(T) = \{x \in V : T(x) = \circ\}$.

بُرد (یا تصویر) T را که با $R(T)$ نشان می‌دهیم برابر با زیرمجموعه W متشکل از تمام تصویرهای اعضای V (تحت T) تعریف می‌کنیم؛ یعنی $R(T) = \{T(x) : x \in V\}$.

مثال ۸. فرض کنید V و W دو فضای برداری و $I : V \to V$ و $T_\circ : V \to W$، به ترتیب تبدیلات همانی و صفر باشند که در بالا تعریف شدند. در این صورت، $N(I) = \{\circ\}$، $R(I) = V$، $N(T_\circ) = V$ و $R(T_\circ) = \{\circ\}$. $\square$

مثال ۹. $T : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۲$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$T(a_۱, a_۲, a_۳) = (a_۱ - a_۲, ۲a_۳)$$

بررسی اینکه $N(T) = \{(a, a, \circ) : a \in \mathbb{R}\}$ و $R(T) = \mathbb{R}^۲$، به خواننده واگذار می‌شود. $\square$

در مثال‌های ۸ و ۹ مشاهده می‌شود که بُرد و فضای پوچ هر یک از تبدیلات خطی یک زیرفضاست. نتیجه بعدی نشان می‌دهد که این مطلب در حالت کلی هم درست است.

قضیه ۲.۱. فرض کنید V و W دو فضای برداری و $T : V \to W$ خطی باشد. در این‌صورت، $N(T)$ و $R(T)$ به ترتیب زیرفضاهایی از V و W هستند.

برهان. به منظور روشن شدن معنی نمادها، برای نشان دادن صفرهای V و W به ترتیب از نمادهای $\circ v$ و $\circ w$ استفاده می‌کنیم.

چون $T(\circ_v) = \circ_w$، داریم $\circ_v \in N(T)$. فرض کنید $x, y \in N(T)$ و $c \in F$. در این صورت $T(x+y) = T(x) + T(y) = \circ_w + \circ_w = \circ_w$ و $T(cx) = cT(x) = c\circ_w = \circ_w$. در نتیجه $x+y \in N(T)$ و $cx \in N(T)$ زیرفضایی از V است.

چون $T(\circ_v) = \circ_w$، داریم $\circ w \in R(T)$. حال فرض کنید $x, y \in R(T)$ و $c \in F$. در این صورت v و w در V به گونه‌ای وجود دارند که $T(v) = x$ و $T(w) = y$. پس $T(v+w) = T(v)+T(w)$ و $T(cv) = cT(v) = cx$. در نتیجه $x+y \in R(T)$ و $cx \in R(T)$. پس $R(T)$ زیرفضایی از W است. □

قضیه بعدی، روشی را برای یافتن یک مجموعه مولد برای بُرد یک تبدیل خطی در اختیارمان قرار می‌دهد. وقتی این کار صورت بگیرد با استفاده از روش مذکور در مثال ۶ بخش ۱-۶، به راحتی می‌توان پایه‌ای برای بُرد پیدا کرد.

قضیه ۲.۲. فرض کنید V و W دو فضای برداری و $T : V \to W$ خطی باشد. هرگاه $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد، آنگاه

$$R(T) = span(\{T(v_1), \dots, T(v_n)\})$$

برهان. واضح است که برای هر i، $T(v_i) \in R(T)$. چون $R(T)$ یک زیرفضاست، طبق قضیه ۵.۱

$$span(\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}) = span(T(\beta)) = R(T)$$

را در بر دارد.

حال فرض کنید $w \in R(T)$. در این صورت به ازای یک $v \in V$، $w = T(v)$. چون β پایه‌ای برای V است، داریم:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad \text{به ازای اسکالرهایی چون } a_1, \dots, a_n \in F$$

چون T خطی است، نتیجه می‌شود که:

$$w = T(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) \in span(T(\beta))$$

□

مثال زیر، کارایی این نتیجه را نشان می‌دهد.

مثال ۱۰. تبدیل خطی $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$T(f) = \begin{bmatrix} f(1) - f(2) & 0 \\ 0 & f(0) \end{bmatrix}$$

چون $\beta = \{۱, x, x^۲\}$ پایه‌ای برای $P_۲(\mathbb{R})$ است، داریم:

$$\begin{aligned} R(T) &= span(T(\beta)) = span(\{T(۱), T(x), T(x^۲)\}) \\ &= span\left(\left\{\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\right\}\right) \\ &= span\left(\left\{\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\right\}\right) \end{aligned}$$

به این ترتیب، به پایه‌ای برای $R(T)$ رسیده‌ایم و در نتیجه $\dim(R(T)) = ۲$. □

همانند فصل ۱، «اندازهٔ» یک زیرفضا را با بُعد آن می‌سنجیم. فضای پوچ و بُرد آنچنان مهم هستند که برای بُعدهایشان اسامی خاصی می‌گذاریم.

چند تعریف: فرض کنید V و W دو فضای برداری و $T : V \to W$ خطی باشد. اگر $R(T)$ و $N(T)$ متناهی‌البُعد باشند، آنگاه پوچی T را که با $nullity(T)$ و رتبه T را که با $rank(T)$ نشان می‌دهیم، به ترتیب برابر با بُعدهای $N(T)$ و $R(T)$ تعریف می‌کنیم.

با اندکی دقت در رفتار یک تبدیل خطی، به طور شهودی درمی‌یابیم که هر چه پوچی بیشتر باشد، رتبه کمتر است. به عبارت دیگر، هر چقدر بردارهایی که به ۰ برده می‌شوند، بیشتر باشد بُرد کوچکتر است. همین استدلال تجربی بیانگر آن است که هر چه بُرد بزرگتر باشد، پوچی کوچکتر می‌شود. این توازن میان رتبه و پوچی که در قضیه زیر به صورت دقیق بیان شده است با نام با مسمای قضیه بعد خوانده می‌شود.

قضیه ۳.۲ (قضیه بُعد). فرض کنید V و W دو فضای برداری و $T : V \to W$ خطی باشد. اگر V متناهی‌البُعد باشد، آنگاه:

$$\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = \dim(V)$$

برهان. فرض کنید $\dim(V) = n$، $\dim(N(T)) = k$ و $\{v_۱, \dots, v_k\}$ پایه‌ای برای $N(T)$ باشد. طبق قضیه ۱۱.۱ می‌توانیم $\{v_۱, \dots, v_k\}$ را به پایه‌ای مانند $\beta = \{v_۱, \dots, v_n\}$ برای V تعمیم دهیم. ادعا می‌کنیم که $S = \{T(v_{k+۱}), \dots, T(v_n)\}$ پایه‌ای برای $R(T)$ است.

ابتدا ثابت می‌کنیم که S، $R(T)$ را تولید می‌کند. با استفاده از قضیه ۲.۲ و این واقعیت که برای هر $۱ \leqslant i \leqslant k$، $T(u_i) = ۰$ داریم:

$$R(T) = span(\{T(v_۱), \dots, T(v_n)\}) = span(S)$$

حال ثابت می‌کنیم که S مستقل خطی است. فرض کنید که

به ازای اسکالرهای $b_{k+1}, \dots, b_n \in F$،
$$\sum_{i=k+1}^{n} b_i T(v_i) = 0$$

با استفاده از این واقعیت که T خطی است، داریم:
$$T\left(\sum_{i=k+1}^{n} b_i v_i\right) = 0$$

پس
$$\sum_{i=k+1}^{n} b_i v_i \in N(T)$$

بنابراین اسکالرهای $c_1, \dots, c_k \in F$ چنان موجودند که:
$$\sum_{i=1}^{k} b_i v_i = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i \qquad \text{یا} \qquad \sum_{i=1}^{k}(-c_i)v_i + \sum_{i=k+1}^{n} b_i v_i = 0$$

چون β پایه‌ای برای V است، برای هر i داریم $b_i = 0$. پس S مستقل خطی است. توجه کنید که این استدلال، متمایز بودن $T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)$ را هم نشان می‌دهد و بنابراین $\operatorname{rank}(T) = n - k$. □

اگر قضیه بُعد را در مورد تبدیل خطی T در مثال ۹ به کار گیریم، خواهیم داشت: $\operatorname{nullity}(T) + 2 = 3$ پس $\operatorname{nullity}(T) = 1$.

خواننده بهتر است مفاهیم «یک به یک» و «پوشا» را که در ضمیمه ب معرفی شدند مرور کند. جالب توجه است که برای تبدیل خطی، هر دوی این مفاهیم ارتباط نزدیکی با رتبه و پوچی آن تبدیل دارند. این مسأله در دو قضیه بعدی نشان داده شده است.

قضیه ۴.۲. فرض کنید V و W دو فضای برداری و $T : V \to W$ خطی باشد. در این صورت، T یک به یک است اگر و تنها اگر $N(T) = \{0\}$.

برهان. فرض کنید که T یک به یک باشد و $x \in N(T)$. در این صورت $T(x) = 0 = T(0)$. چون T یک به یک است، داریم $x = 0$. بنابراین $N(T) = \{0\}$.

حال فرض کنید که $N(T) = \{0\}$ و نیز $T(x) = T(y)$. در این صورت $0 = T(x) - T(y) = T(x - y)$. پس $x - y \in N(T) = \{0\}$. بنابراین $x - y = 0$ یا به عبارت دیگر $x = y$ و این به آن معناست که T یک به یک است. □

خواننده باید به این نکته توجه داشته باشد که با استفاده از قضیه ۴.۲ می‌توانیم نتیجه بگیریم که تبدیل خطی‌ای که در مثال ۹ تعریف شده است، یک به یک نیست.

جالب توجه است که شرط‌های یک به یک بودن و پوشا بودن، در یک حالت خاص بسیار مهم با هم معادلند.

قضیه ۵.۲. فرض کنید V و W فضاهای برداری‌ای با بُعد یکسان (متناهی) و $T : V \to W$ خطی باشد. در این صورت T یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد.

برهان. از قضیه بُعد داریم:

$$\mathrm{nullity}(T) + \mathrm{rank}(T) = \dim(V)$$

حال با استفاده از قضیه ۴.۲ می‌دانیم که T یک به یک است اگر و تنها اگر $N(T) = \{0\}$ اگر و تنها اگر $\mathrm{nullity}(T) = 0$ اگر و تنها اگر $\mathrm{rank}(T) = \dim(V)$ اگر و تنها اگر $\mathrm{rank}(T) = \dim(W)$ اگر و تنها اگر $\dim(R(T)) = \dim(W)$. طبق قضیه ۱۱.۱، این تساوی معادل با آن است که $R(T) = W$، که تعریف پوشا بودن T است. □

خطی بودن T در قضیه‌های ۴.۲ و ۵.۲ اساسی است، چرا که ساختن مثال‌هایی از توابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ که یک به یک هستند، ولی پوشا نیستند و بالعکس ساده است.

دو مثال زیر، از قضیه‌های بالا برای تعیین اینکه یک تبدیل خطی مفروض، یک به یک است یا نه، استفاده می‌کنند.

مثال ۱۱. $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ را چنین تعریف کنید:

$$T(f)(x) = 2f'(x) + \int_0^x 3f(t)dt$$

حال

$$R(T) = span(\{T(1), T(x), T(x^2)\}) = span(\{3x, 2 + \frac{3}{2}x^2, 4x + x^3\})$$

در نتیجه $\mathrm{rank}(T) = 3$. چون $\dim(P_3(R)) = 4$، T پوشا نیست. از قضیه ۳.۲ داریم که $\mathrm{nullity}(T) + 3 = 3$. پس $\mathrm{nullity}(T) = 0$ و در نتیجه $N(T) = \{0\}$. از قضیه ۴.۲ نتیجه می‌گیریم که T یک به یک است. □

مثال ۱۲. $T : F^2 \to F^2$ را چنین تعریف کنید:

$$T(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, a_1)$$

به راحتی می‌توان دید که $N(T) = \{0\}$؛ بنابراین T یک به یک است. در نتیجه قضیه ۵.۲ به ما می‌گوید که T باید پوشا باشد. □

در تمرین ۱۴ آمده است که اگر T خطی و یک به یک باشد، آنگاه زیرمجموعه S مستقل خطی است اگر و تنها اگر $T(S)$ مستقل خطی باشد، این نتیجه با مثال ۱۳ توضیح داده می‌شود.

مثال ۱۳. $T: P_۲(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^۳$ را چنین تعریف کنید: $T(a_۰, a_۱x + a_۲x^۲) = (a_۰ + a_۱, a_۲)$. واضح است که T خطی و پوشاست. فرض کنید $S = \{۲ - x + ۳x^۲, x + x^۲, ۱ - ۲x^۲\}$. در این صورت S در $P_۲(\mathbb{R})$ مستقل خطی است چرا که:

$$T(S) = \{(۲, -۱, ۳), (۰, ۱, ۱), (۱, ۰, -۲)\}$$

در $\mathbb{R}^۳$ مستقل خطی است. □

در مثال ۱۳، توانستیم مسأله‌ای در مورد فضای برداری چندجمله‌ای‌ها را به مسأله‌ای در فضای برداری سه‌تایی‌های مرتب تبدیل کنیم. این روش را بعدها به طور کامل‌تری به کار خواهیم برد.

یکی از مهم‌ترین خواص تبدیلات خطی این است که کاملاً از روی رفتارشان بر یک پایه مشخص می‌شوند. این نتیجه که از قضیه و نتیجه بعدی حاصل می‌شود، به کرّات در ادامه کتاب به کار خواهد رفت.

قضیه ۶.۲. فرض کنید V و W دو فضای برداری روی F باشند و فرض کنید که V متناهی‌البُعد و $\{v_۱, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای برای آن باشد. به ازای هر دنباله از بردارهای $w_۱, \ldots, w_n$ در W، دقیقاً یک تبدیل خطی $T: V \to W$ وجود دارد به گونه‌ای که برای هر $i = ۱, \ldots, n$، $T(v_i) = w_i$.

برهان. فرض کنید $x \in V$؛ در این صورت:

$$x = \sum_{i=۱}^{n} a_i v_i$$

که $a_۱, \ldots, a_n$ اسکالرهایی یکتا هستند. $T: V \to W$ را چنین تعریف کنید:

$$T(x) = \sum_{i=۱}^{n} a_i w_i$$

الف) T خطی است؛ چرا که اگر $u, v \in V$ و $d \in F$، در این صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$u = \sum_{i=۱}^{n} b_i v_i \qquad \text{و} \qquad v = \sum_{i=۱}^{n} c_i v_i$$

حال داریم:

$$du + v = \sum_{i=۱}^{n} (db_i + c_i) v_i$$

پس:

$$T(du + v) = \sum_{i=۱}^{n} (db_i + c_i) w_i = d \sum_{i=۱}^{n} b_i w_i + \sum_{i=۱}^{n} c_i w_i = dT(u) + T(v)$$

ب) واضح است که:

$$T(v_i) = w_i \qquad \text{برای هر}\ i = 1, \dots, n$$

ج) T یکتاست؛ چرا که اگر $U : V \to W$ خطی باشد و برای هر $i = 1, \dots, n$، $U(v_i) = w_i$، در این صورت برای هر $x \in V$ اگر

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

داریم:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i U(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = T(x)$$

در نتیجه $U = T$. □

نتیجه ۱. فرض کنید V و W دو فضای برداری باشند و V دارای پایه متناهی $\{v_1, \dots, v_n\}$ باشد. اگر $U, T : V \to W$ خطی باشد و برای هر $i = 1, \dots, n$ $U(v_i) = T(v_i)$، آنگاه $U = T$.

مثال ۱۴. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ را چنین تعریف کنید: $T(a_1, a_2) = (2a_1 - a_2, 3a_1)$ و فرض کنید $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ خطی باشد. اگر بدانیم که $U(1, 2) = (0, 3)$ و $U(1, 1) = (1, 3)$، آنگاه خواهیم داشت $U = T$. این مطلب از نتیجه فوق از اینکه $\{(1, 2), (1, 1)\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^2$ است، نتیجه می‌شود. □

تمرینات

۱. مشخص کنید که کدام یک از عبارات زیر درست و کدام نادرست است. در تمام این موارد V و W دو فضای برداری متناهی‌البُعد (روی F) هستند و T تابعی است از V به W.

الف) اگر T یک تبدیل خطی باشد، آنگاه T دو عمل جمع و ضرب اسکالر را حفظ می‌کند.

ب) اگر $T(x + y) = T(x) + T(y)$، آنگاه T خطی است.

ج) T یک به یک است اگر و تنها اگر $N(T) = \{0\}$.

د) اگر T خطی باشد آنگاه $T(0_v) = 0_w$.

ه) اگر T خطی باشد آنگاه $\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = \dim(W)$.

و) اگر T خطی باشد آنگاه T زیرمجموعه‌های مستقل خطی V را به زیرمجموعه‌های مستقل خطی W می‌برد.

ز) اگر $U : V \to W$ و T، هر دو خطی باشند و بر پایه‌ای برای V با هم مساوی باشند آنگاه $T = U$.

ح) هرگاه $x_۱, x_۲ \in V$ و $y_۱, y_۲ \in W$ مفروض باشند، تبدیلی خطی چون $T : V \to W$ وجود دارد به گونه‌ای که $T(x_۱) = y_۱$ و $T(x_۲) = y_۲$.

در تمرینات ۲ تا ۶، ثابت کنید که T تبدیلی خطی است و برای $N(T)$ و $R(T)$ پایه‌ای بیابید. سپس پوچی و رتبه T را حساب کنید و درستی قضیه بُعد را امتحان نمایید. نهایتاً با استفاده از قضایای مناسبی که در این بخش آمده‌اند، یک به یک بودن و پوشا بودن T را بررسی کنید.

۲. $T : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۲$، که چنین تعریف می‌شود: $T(a_۱, a_۲, a_۳) = (a_۱ - a_۲, ۲a_۳)$.

۳. $T : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۳$، که با رابطه $T(a_۱, a_۲) = (a_۱ + a_۲, ۰, ۲a_۱ - a_۲)$ تعریف می‌شود.

۴. $T : M_{۲\times۳}(F) \to M_{۲\times۲}(F)$، که این‌گونه تعریف می‌شود:
$$T\left(\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۲a_{۱۱} - a_{۱۲} & a_{۱۳} + ۲a_{۱۲} \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۵. $T : P_۲(\mathbb{R}) \to P_۳(\mathbb{R})$ که چنین تعریف می‌شود: $T(f(x)) = xf(x) + f'(x)$.

۶. $T : M_{n\times n}(F) \to F$ که با رابطه $T(A) = \mathrm{tr}(A)$ تعریف می‌شود. به یاد داشته باشید که:
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii}$$

۷. گزاره‌های ۱، ۲ و ۳ را که در ابتدای این بخش آمده‌اند، اثبات کنید.

۸. ثابت کنید که تبدیلات مثال‌های ۲ و ۳ خطی هستند.

۹. برای $T : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ های زیر، دلیل خطی نبودن T را بیان کنید.

الف) $T(a_۱, a_۲) = (۱, a_۲)$.

ب) $T(a_۱, a_۲) = (a_۱, a_۱^۲)$.

ج) $T(a_۱, a_۲) = (\sin a_۱, ۰)$.

د) $T(a_۱, a_۲) = (|a_۱|, a_۲)$.

ه) $T(a_۱, a_۲) = (a_۱ + ۱, a_۲)$.

۱۰. فرض کنید $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ خطی باشد و $T(1,0) = (1,4)$ و $T(1,1) = (2,5)$. در این صورت $T(2,3)$ چیست؟ آیا T یک به یک است؟

۱۱. ثابت کنید که تبدیل خطی‌ای چون $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ وجود دارد به گونه‌ای که $T(1,1) = (1,0,2)$ و $T(2,3) = (1,-1,4)$؛ $T(8,11)$ چیست؟

۱۲. ثابت کنید که تبدیلی خطی مانند $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ وجود ندارد که $T(1,0,3) = (1,1)$ و $T(-2,0,-6) = (2,1)$.

۱۳. فرض کنید V و W دو فضای برداری و $T : V \to W$ یک تبدیل خطی باشد و $\{w_1, \dots, w_k\}$ زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از $R(T)$ باشد؛ ثابت کنید که اگر $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ به گونه‌ای انتخاب شود که برای هر $i = 1, \dots, k$، $T(v_i) = w_i$، آنگاه S مستقل خطی است.

۱۴. فرض کنید V و W دو فضای برداری و $T : V \to W$ خطی باشد.

الف) ثابت کنید که T یک به یک است، اگر و تنها اگر T زیرمجموعه‌های مستقل خطی V را به زیرمجموعه‌های مستقل خطی W ببرد.

ب) فرض کنید T یک به یک و S زیرمجموعه‌ای از V باشد؛ در این صورت ثابت کنید که S مستقل خطی است اگر و تنها اگر $T(S)$ مستقل خطی باشد.

ج)

۱۵. با توجه به تعریف $P(\mathbb{R})$ در بخش ۱-۲، $T : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ را با رابطه $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$ تعریف کنید. ثابت کنید که T یک به یک است ولی پوشا نیست.

۱۶. فرض کنید V و W دو فضای برداری متناهی‌البُعد و $T : V \to W$ خطی باشد.

الف) ثابت کنید که اگر $\dim(V) < \dim(W)$، آنگاه T نمی‌تواند پوشا باشد.

ب) ثابت کنید که اگر $\dim(V) > \dim(W)$، آنگاه T نمی‌تواند یک به یک باشد.

۱۷. نمونه‌ای از یک تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ارائه کنید که $N(T) = R(T)$.

۱۸. نمونه‌ای از دو تبدیل خطی متمایز T و U ارائه کنید که روابط $N(T) = N(U)$ و $R(T) = R(U)$ برای آنها برقرار باشند.

۱۹. فرض کنید V و W دو فضای برداری به ترتیب با زیرفضاهای V_1 و W_1 باشند. هرگاه $T : V \to W$ خطی باشد، ثابت کنید که $T(V_1)$ زیرفضایی از W و $\{x \in V : T(x) \in W_1\}$ زیرفضایی از V است.

۲۰. فرض کنید $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ خطی باشد. نشان دهید که اسکالرهای a، b و c به گونه‌ای موجود هستند که برای هر $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$، $T(x,y,z) = ax+by+cz$. آیا می‌توانید این نتیجه را برای $T : F^n \to F$ تعمیم دهید؟ نتایج مشابهی برای $F^n \to F^m$ بیان و آنها را ثابت کنید.

۲۱. فرض کنید $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ خطی باشد. حالات ممکن برای فضای پوچ T را توصیف هندسی کنید. راهنمایی: از تمرین ۲۰ استفاده کنید.

تعریف:. فرض کنید V یک فضای برداری و W_1 و W_2 چنان زیرفضاهایی از V باشند که $V = W_1 \oplus W_2$ (به تعریف مجموع مستقیم که در تمرینات بخش ۱-۳ ارائه شد رجوع کنید). تابع $T : V \to V$ را تصویر روی W_1 در راستای W_2 می‌نامند، هرگاه برای هر $x = x_1 + x_2$ که $x_1 \in W$ و $x_2 \in W_2$، داشته باشیم $T(x) = x_1$.

۲۲. فرض کنید $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. در هر یک از موارد زیر، تصویری هم رسم کنید.

الف) فرمولی برای $T(a,b)$ بیابید در صورتی که T نشان‌دهنده تصویر روی محور y ها در راستای محور xها باشد.

ب) فرمولی برای $T(a,b)$ بیابید در صورتی که T تصویر روی محور y ها در راستای خط $L = \{(s,s) : s \in \mathbb{R}\}$ را نشان دهد.

۲۳. فرض کنید $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

الف) اگر $T(a,b,c) = (a,b,0)$، نشان دهید که T، تصویر روی صفحه xy در راستای محور z هاست.

ب) فرمولی برای $T(a,b,c)$ بیابید که T تصویر روی محور z ها در راستای صفحه xy را نشان می‌دهد.

ج) هرگاه $T(a,b,c) = (a-c,b,0)$، نشان دهید T تصویر روی صفحه xy در راستای خط $L = \{(a,0,a) : a \in \mathbb{R}\}$ می‌باشد.

۲۴. بادر نظر گرفتن نمادگذاری به کار رفته در تعریف بالا، فرض کنید $T : V \to V$، تصویر روی W_1 در راستای W_2 باشد.

الف) ثابت کنید T خطی است و $W_1 = \{x \in V : T(x) = x\}$.

ب) ثابت کنید $W_1 = R(T)$ و $W_2 = N(T)$.

ج) T را در صورتی که $W_1 = V$، توصیف کنید.

د) T را در صورتی که W_1 زیرفضای صفر باشد توصیف کنید.

۲۵. فرض کنید W زیرفضایی از فضای برداری متناهی‌البُعد V باشد.

الف) ثابت کنید زیرفضایی مانند W' و تابعی مانند $T : V \to V$ موجودند به گونه‌ای که T، تصویر روی W و در راستای W' باشد.

ب) نمونه‌ای از یک زیرفضای W از یک فضای برداری مانند V ارائه دهید که روی W، دو تصویر در راستای دو زیرفضای متمایز وجود داشته باشد.

چند تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری و $T : V \to V$ خطی باشد. زیرفضای W از V را T-پایا گویند، هرگاه برای هر $x \in W$، $T(x) \in W$، یعنی $T(W) \subseteq W$. اگر W، T-پایا باشد، تحدید T به W را برابر تابع $T_W : W \to W$ تعریف می‌کنیم که ضابطه آن چنین است: برای هر $x \in W$، $T_W(x) = T(x)$.

در تمرین‌های ۲۶ تا ۳۰ فرض شده است که W زیرفضایی از فضای برداری V است و $T : V \to V$ خطی است. توجه: به جز در هنگامی که صریحاً ذکر شده باشد، فرض را بر این نگیرید که W، T-پایا است یا اینکه T تصویر است.

۲۶. ثابت کنید که زیرفضاهای $\{0\}$، V، $R(T)$ و $N(T)$ همگی T-پایا هستند.

۲۷. اگر W، T-پایا باشد ثابت کنید که T_W خطی است.

۲۸. فرض کنید T، تصویری روی W در راستای زیرفضایی مانند W' باشد. ثابت کنید که W، T-پایا است و $T_W = I_W$.

۲۹. فرض کنید $V = R(T) \oplus W$ و W، T-پایا باشد.

الف) ثابت کنید $W \subseteq N(T)$.

ب) نشان دهید که اگر V متناهی‌البُعد باشد، آنگاه $W = N(T)$.

ج) با استفاده از یک مثال نشان دهید که قسمت ب در صورتی که V متناهی‌البُعد نباشد، لزوماً درست نیست.

۳۰. ثابت کنید $N(T_W) = N(T) \cap W$ و $R(T_W) = T(W)$.

۳۱. تعمیم زیر از قضیه ۶.۲ را ثابت کنید.

فرض کنید V و W دو فضای برداری روی یک میدان مشترک باشند و β پایه‌ای برای V باشد. در این صورت به ازای هر تابع $f : \beta \to W$ دقیقاً یک تبدیل خطی $T : V \to W$ وجود دارد که برای هر $x \in \beta$، $T(x) = f(x)$.

۳۲. تابع $T : V \to W$ را بین دو فضای برداری V و W جمعی می‌نامند هرگاه برای هر $x, y \in Y$، $T(x+y) = T(x) + T(y)$. ثابت کنید که اگر V و W فضاهایی برداری روی میدان اعداد گویا باشند، آنگاه هر تابع از V به W یک تبدیل خطی است.

۳۳. ثابت کنید که تابعی جمعی (به معنایی که در تمرین ۳۲ ذکر شد) مانند $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود دارد که خطی نیست. راهنمایی: $\mathbb{R}$ را فضایی برداری روی میدان اعداد گویا یعنی $\mathbb{Q}$ فرض کنید. طبق نتیجه قضیه ۱۳.۱، این فضای برداری پایه‌ای مانند β دارد. فرض کنید x و y دو عضو متمایز β باشند و $f : \beta \to \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = y$، $f(y) = x$ و $f(z) = z$ به ازای z های دیگر در β تعریف کنید. طبق تمرین ۳۱، اگر $\mathbb{R}$ را فضایی برداری روی $\mathbb{Q}$ در نظر بگیریم، تبدیل خطی‌ای مانند $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود دارد که برای هر $z \in \beta$، $T(z) = f(z)$ است. در این صورت T جمعی است؛ اما به ازای $c = y/x$، $T(cx) \neq cT(x)$ است.

حل تمرینات زیر، آشنایی با تعریف فضای خارج قسمتی را می‌طلبد که در تمرین ۳۱ بخش ۱-۳ تعریف شد.

۳۴. فرض کنید V فضایی برداری و W یک زیرفضای V باشد. $\eta : V \to V/W$ را به صورت $\eta(v) = v + W$ برای هر $v \in V$ تعریف کنیم.

الف) ثابت کنید که η یک تبدیل خطی از V به V/W است و $N(\eta) = W$.

ب) فرض کنید V متناهی‌البُعد باشد. با توجه به قسمت الف و قضیه بُعد فرمولی بیابید که $\dim(V)$، $\dim(W)$ و $\dim(V/W)$ را به هم مرتبط سازد.

ج) برهان قضیه بُعد را بخوانید. راه حل قسمت ب را با روشی برای استنتاج این نتیجه که در تمرین ۳۳ بخش ۱-۶ ترسیم شده است، مقایسه کنید.

۲-۲　نمایش ماتریسی یک تبدیل خطی

تاکنون تبدیلات خطی را با بررسی بُرد و فضای پوچ آنها مطالعه کرده‌ایم. در این بخش، پرداختن به یکی از مفیدترین شیوه‌های بررسی تبدیلات خطی روی فضاهای برداری متناهی‌البُعد را آغاز خواهیم کرد، که روش نمایش تبدیل خطی با ماتریس است. در حقیقت تناظری یک به یک میان ماتریس‌ها و تبدیلات خطی برقرار خواهیم کرد که ما را قادر خواهد ساخت تا خصوصیات هر یک از آنها را در مطالعه ویژگی‌های دیگری به کار ببریم.

قبل از هر چیز به مفهوم پایه مرتب برای یک فضای برداری نیاز خواهیم داشت.

تعریف: فرض کنید V فضایی برداری با بُعد متناهی است. منظور از یک پایه مرتب برای V، پایه‌ای است برای V که ترتیب خاصی برای آن منظور شده باشد؛ به عبارت دیگر یک پایه مرتب برای V دنباله‌ای متناهی از اعضای مستقل خطی V که V را تولید می‌کنند.

مثال ۱. در $F^۳$، $\beta = \{e_۱, e_۲, e_۳\}$ را می‌توان بعنوان یک پایه مرتب در نظر گرفت. به همین ترتیب $\gamma = \{e_۱, e_۳, e_۲\}$ یک پایه مرتب است، اما β و γ بعنوان پایه‌هایی مرتب برابر نیستند. □

در مورد فضای F^n، $\{e_۱, \dots, e_n\}$ را پایه مرتب استاندارد F^n می‌نامیم. به همین ترتیب دنباله $\{۱, x, \dots, x^n\}$ پایه مرتب استاندارد $P_n(F)$ نامیده می‌شود.

اکنون که مفهوم پایه مرتب را در دست داریم، می‌توانیم بردارهای یک فضای برداری n بُعدی را که حالتی مجرد دارند، با n تایی‌های مرتب مشخص کنیم. این کار با استفاده از بردارهای مختصات که در زیر تعریف شده‌اند، صورت می‌گیرد.

تعریف:. فرض کنید $\beta = \{u_۱, \dots, u_n\}$ پایه‌ای مرتب برای فضای برداری متناهی‌البُعد V باشد. به ازای هر $x \in V$، فرض کنید $a_۱, \dots, a_n$ آن اسکالرهای یگانه‌ای باشند که در رابطه زیر صدق کنند:

$$x = \sum_{i=۱}^{n} a_i u_i$$

بردار مختصات x نسبت به β را که با $[x]_\beta$ نشان خواهیم داد، چنین تعریف می‌کنیم:

$$[x]_\beta = \begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

ملاحظه کنید که در تعریف فوق، $[u_i]_\beta = e_i$. اثبات این مطلب را که تناظر $x \to [x]_\beta$، تبدیلی خطی از V به F^n تعریف می‌کند، به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. در بخش ۲-۴ این تبدیل را با جزئیات بیشتری مورد بررسی قرار خواهیم داد.

مثال ۲. فرض کنید $V = P_۲(\mathbb{R})$ و نیز فرض کنید که $\beta = \{۱, x, x^۲\}$، پایه مرتب استاندارد V باشد. هرگاه $f(x) = ۴ + ۶x - ۷x^۲$ تعریف شده باشد، داریم:

$$[f]_\beta = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \\ -۷ \end{bmatrix}$$

حال بگذارید بحث را با نمایش ماتریسی یک تبدیل خطی که پیشتر هم گفتیم که به آن اشاره خواهیم کرد، ادامه دهیم. فرض کنید V و W دو فضای برداری متناهی‌البُعد به ترتیب با پایه‌های مرتب $\beta = \{v_۱, \dots, v_n\}$ و $\gamma = \{w_۱, \dots, w_m\}$ باشند. همچنین فرض کنید $T : V \to W$ تبدیلی خطی باشد؛ در این صورت اسکالرهای یگانه $a_{ij} \in F$ که ($i = ۱, \dots, m$ و $j = ۱, \dots, n$) یافت می‌شوند، به گونه‌ای که برای هر $۱ \leqslant j \leqslant n$،

$$T(v_j) = \sum_{i=۱}^{m} a_{ij} w_i$$

□

تعریف:. با نمادگذاری‌های فوق، ماتریس $m\times n$ ای را که با $A_{ij}=a_{ij}$ تعریف می‌شود، نمایش ماتریسی T در پایه‌های مرتب β و γ می‌نامیم و آن را با $A=[T]_\beta^\gamma$ نمایش می‌دهیم. در صورتی که $V=W$ و $\beta=\gamma$، می‌نویسیم $A=[T]_\beta$.

ملاحظه کنید که ستون j ام A، چیزی جز $[T(v_j)]_\gamma$ نیست. همچنین ملاحظه می‌کنید که اگر $U:V\to W$ تبدیل دیگری باشد و داشته باشیم $[U]_\beta^\gamma=[T]_\beta^\gamma$، با توجه به نتیجه قضیه ۶.۲ داریم $U=T$.

طرز محاسبه $[T]_\beta^\gamma$ را در چند مثال بعدی نشان می‌دهیم.

مثال ۳. $T:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۳$ را با رابطهٔ

$$T(a_۱,a_۲)=(a_۱+۳a_۲,\circ,۲a_۱-۴a_۲)$$

تعریف کنید.

فرض کنید β و γ به ترتیب پایه‌های مرتب استاندارد $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ باشند. حال

$$T(۱,\circ)=(۱,\circ,۲)=۱e_۱+\circ e_۲+۲e_۳$$

و

$$T(\circ,۱)=(۳,\circ,-۴)=۳e_۱+\circ e_۲-۴e_۳$$

بنابراین

$$[T]_\beta^\gamma=\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ \circ & \circ\\ ۲ & -۴\end{bmatrix}$$

اگر داشته باشیم $\gamma'=\{e_۳,e_۲,e_۱\}$، خواهیم داشت:

$$[T]_\beta^{\gamma'}=\begin{bmatrix}۲ & -۴\\ \circ & \circ\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$$

□

مثال ۴. $T:P_۳(\mathbb{R})\to P_۲(\mathbb{R})$ را با رابطهٔ

$$T(f)=f'$$

تعریف کنید. فرض کنید β و γ به ترتیب پایه‌های مرتب استاندارد $P_۳(\mathbb{R})$ و $P_۲(\mathbb{R})$ باشند؛ در این صورت:

؟؟؟صفحه ۷۹ مثال ۴

بنابراین:

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که ضرایب $T(x_j)$، وقتی که آن را به صورت ترکیب خطی اعضای γ می‌نویسیم، درایه‌های ستون j ام را به ما خواهند داد. □

حال که روشی برای نظیر کردن یک ماتریس به یک تبدیل خطی معرفی کرده‌ایم، در قضیه ۸.۲ نشان خواهیم داد که این تناظر، جمع و ضرب اسکالر را «حفظ می‌کند». برای اینکه بتوانیم این مطلب را واضح‌تر بیان کنیم، باید ابتدا اندکی در مورد جمع و ضرب اسکالر تبدیلات خطی بحث کنیم.

تعریف:. فرض کنید $T, U : V \to W$ توابعی دلخواه باشند و V و W فضاهایی برداری روی F و همچنین فرض کنید که $a \in F$. $T + U : V \to W$ را با رابطه $(T+U)(x) = T(x) + U(x)$ برای هر $x \in V$، و $aT : V \to W$ را با $(aT)(x) = aT(x)$ برای هر $x \in V$ تعریف می‌کنیم.

البته این تعاریف همان تعاریف معمولی جمع و ضرب اسکالر توابع هستند. البته از این لحاظ شانس آورده‌ایم که هم جمع و هم ضرب اسکالر تبدیلات خطی، خودشان خطی هستند.

قضیه ۷.۲. فرض کنید V و W فضاهایی برداری روی میدان F باشند و نیز فرض کنید که $T, U : V \to W$ خطی هستند. در این صورت:

الف) به ازای هر $a \in F$، $aT + U$ خطی است.

ب) اگر تعاریف فوق را به عنوان تعریف جمع و ضرب اسکالر به کار ببریم، مجموعه تبدیلات خطی از V به W، فضایی برداری روی F است.

برهان. الف) فرض کنید $x, y \in V$ و $c \in F$. در این صورت:

$$\begin{aligned}(aT+U)(cx+y) &= aT(cx+y) + U(cx+y) \\ &= a[cT(x) + T(y)] + cU(x) + U(y) \\ &= acT(x) + cU(x) + aT(y) + U(y) \\ &= c(aT+U)(x) + (aT+U)(y)\end{aligned}$$

بنابراین $aT+U$ خطی است.

ب) با توجه به اینکه، $T_\circ$، یعنی تبدیل صفر، نقش عضو خنثی را دارد، به راحتی می‌توان ثابت کرد که مجموعه تبدیلات خطی از V به W فضایی برداری روی F است. □

تعریف:. فرض کنید V و W فضاهایی برداری روی F باشند. فضای برداری همه تبدیلات خطی از V به W را با $\mathcal{L}(V,W)$ نشان می‌دهیم، در صورتی که $V=W$، به جای $\mathcal{L}(V,W)$ می‌نویسیم $\mathcal{L}(V)$.

در بخش ۲-۳ ماهیت $\mathcal{L}(V,W)$ با استفاده از فضای برداری $M_{m\times n}(F)$ کاملاً مشخص خواهد شد، که در اینجا n و m به ترتیب ابعاد V و W هستند. این کار با استفاده از قضیه بعدی به راحتی صورت می‌گیرد.

قضیه ۲.۸. فرض کنید V و W فضاهای برداری متناهی‌البُعدی به ترتیب با پایه‌های β و γ باشند و نیز فرض کنید که $T,U:V\to W$ تبدیلاتی خطی هستند. در این صورت:

الف) $[T+U]_\beta^\gamma=[T]_\beta^\gamma+[U]_\beta^\gamma$.

ب) برای هر اسکالر a، $[aT]_\beta^\gamma=a[T]_\beta^\gamma$.

برهان. فرض کنید $\beta=\{v_1,\dots,v_n\}$ و $\gamma=\{w_1,\dots,w_m\}$. اسکالرهای یگانه a_{ij} و b_{ij} ($1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n$) موجودند به گونه‌ای که برای هر $1\leqslant j\leqslant n$،

$$U(v_j)=\sum_{i=1}^m b_{ij}w_i \qquad \text{و} \qquad T(v_j)=\sum_{i=1}^m a_{ij}w_i$$

بنابراین:

$$(T+U)(v_j)=\sum_{i=1}^m(a_{ij}+b_{ij})w_i$$

در نتیجه $([T+U]_\beta^\gamma)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}=([T]_\beta^\gamma+[U]_\beta^\gamma)ij$

به این ترتیب قسمت الف اثبات می‌شود؛ اثبات قسمت ب نیز به طریق مشابه است. □

مثال ۵. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ را با رابطه $T(a_1,a_2)=(a_1+3a_2,0,2a_1-4a_2)$، و $U:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ را با رابطه $U(a_1,a_2)=(a_1-a_2,2a_1,3a_1+2a_2)$ تعریف کنید.

فرض کنید که β و γ به ترتیب پایه‌های استاندارد $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ باشند، در این صورت (همان‌طور که در مثال ۳ محاسبه شد):

$$[T]_\beta^\gamma=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\\ 2 & -4\end{bmatrix}$$

و

$$[U]_\beta^\gamma = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

اگر $T+U$ را با تعاریف صفحه قبل محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$(T+U)(a_۱, a_۲) = (۲a_۱ + ۲a_۲, ۲a_۱, ۵a_۱ - ۲a_۲)$$

بنابراین:

$$[T+U]_\beta^\gamma = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۰ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}$$

که چیزی جز $[T]_\beta^\gamma + [U]_\beta^\gamma$ نیست و این مثالی از درستی قضیه ۸.۲ است. □

تمرینات

۱. مشخص کنید کدامیک از عبارات زیر درست و کدام نادرست است. در تمام موارد زیر V و W دو فضای برداری متناهی‌البُعد به ترتیب با پایه‌های مرتب β و γ هستند و $T, U : V \to W$ دو تبدیل خطی هستند.

الف) برای هر اسکالر a، $aT+U$ تبدیلی خطی از V به W است.

ب) $[T]_\beta^\gamma = [U]_\beta^\gamma$ نتیجه می‌دهد که $T = U$.

ج) اگر $m = \dim(V)$ و $n = \dim(W)$ آنگاه $[T]_\beta^\gamma$ ماتریسی است $m \times n$.

د) $[T+U]_\beta^\gamma = [T]_\beta^\gamma + [U]_\beta^\gamma$.

ه) $\mathcal{L}(V, W)$ فضایی برداری است.

و) $\mathcal{L}(V, W) = \mathcal{L}(W, V)$.

۲. فرض کنید β و γ به ترتیب پایه‌های مرتب استاندارد $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ باشند. برای هر یک از تبدیلات خطی $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ که در زیر آمده است $[T]_\beta^\gamma$ را محاسبه کنید.

الف) $T : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۳$ با ضابطه $T(a_۱, a_۲) = (۲a_۱ - a_۲, ۳a_۱ + ۴a_۲, a_۱)$.

ب) $T : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطه $T(a_۱, a_۲, a_۳) = (۲a_۱ + ۳a_۲ - a_۳, a_۱ + a_۳)$.

ج) $T:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}$ با ضابطه $T(a_۱,a_۲,a_۳)=۲a_۱+a_۲-۳a_۳$.

د) $T:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}^۵$ با ضابطه $T(a_۱,a_۲,a_۳)=(۲a_۲,a_۳,-a_۱+۴a_۲+۵a_۳,a_۱,a_۲)$.

ه) $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ با ضابطه $T(a_۱,a_۲,\ldots,a_n)=(a_۱,a_۱,\ldots,a_۱)$.

و) $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ با ضابطه $T(a_۱,a_۲,\ldots,a_n)=(a_n,a_{n-۱},\ldots,a_۱)$.

ز) $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ با ضابطه $T(a_۱,a_۲,\ldots,a_n)=a_۱+a_n$.

۳. فرض کنید $T:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۳$ چنین تعریف شده باشد $T(a_۱,a_۲)=(a_۱-a_۲,a_۱,۲a_۱+a_۲)$. همچنین فرض کنید β، پایه مرتب استاندارد $\mathbb{R}^۲$ و $\gamma=\{(۱,۱,۰),(۰,۱,۱),(۲,۲,۳)\}$ پایه مرتب استاندارد $\mathbb{R}^۳$ باشد. $[T]_\beta^\gamma$ را محاسبه کنید. اگر $\alpha=\{(۱,۲),(۲,۳)\}$، $[T]_\alpha^\gamma$ را محاسبه کنید.

۴. $T:M_{۲\times۲}(\mathbb{R})\to P_۲(\mathbb{R})$ را چنین تعریف کنید:

$$T\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)=(a+b)+(۲d)x+bx^۲$$

فرض کنید که

$$\beta=\left\{\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰&۱\\۰&۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰&۰\\۱&۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۱\end{bmatrix}\right\}\quad \text{و}\quad \gamma=\{۱,x,x^۲\}$$

$[T]_\beta^\gamma$ را محاسبه کنید.

۵. در قسمت‌های زیر فرض کنید که

$$\alpha=\left\{\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰&۱\\۰&۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰&۰\\۱&۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۱\end{bmatrix}\right\}$$

$$\beta=\{۱,x,x^۲\}$$

و

$$\gamma=\{۱\}$$

الف) $T:M_{۲\times۲}(F)\to M_{۲\times۲}(F)$ را با ضابطه $T(A)=A^t$ تعریف کنید. $[T]_\alpha$ را حساب کنید.

ب) $T:P_۲(\mathbb{R})\to M_{۲\times۲}(\mathbb{R})$ را چنین تعریف کنید:

$$T(f)=\begin{bmatrix}f'(۰)&۲f(۱)\\۰&f''(۳)\end{bmatrix}$$

که علامت $'$، در اینجا مشتق را نشان می‌دهد. $[T]_\beta^\alpha$ را حساب کنید.

ج) $T: M_{۲\times۲}(F) \to F$ را با ضابطه $T(A) = \operatorname{tr}(A)$ تعریف کنید. $[T]_\alpha^\gamma$ را حساب کنید.

د) $T: P_۲(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ را با ضابطه $T(f) = f(۲)$ تعریف کنید. $[T]_\beta^\gamma$ را حساب کنید.

ه) اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

$[A]_\alpha$ را حساب کنید.

و) اگر $f(x) = ۳ - ۶x + x^۲$، $[f]_\beta$ را حساب کنید.

ز) برای هر $a \in F$، $[a]_\gamma$ را حساب کنید.

۶. قسمت ب از قضیه ۸.۲ را ثابت کنید.

† ۷. فرض کنید V یک فضای برداری n بُعدی، با پایه مرتب β باشد. $T: V \to F^n$ را چنین تعریف کنید: $T(x) = [x]_\beta$. ثابت کنید که T خطی است.

۸. فرض کنید V فضای برداری اعداد مختلط روی میدان $\mathbb{R}$ باشد. $T: V \to V$ را به صورت $T(z) = \bar{z}$ تعریف کنید، که $\bar{z}$ در اینجا مزدوج مختلط z را نشان می‌دهد. ثابت کنید که T خطی است و $[T]_\beta$ را حساب کنید، در صورتی که $\beta = \{۱, i\}$. نشان دهید که T در صورتی که V را فضایی برداری روی میدان $\mathbb{C}$ در نظر بگیریم، خطی نیست.

۹. فرض کنید V فضایی برداری با پایه مرتب $\beta = \{v_۱, \dots, v_n\}$ باشد. $v_۰$ را برابر ۰ تعریف کنید. طبق قضیه ۶.۲، تبدیل خطی مانند $T: V \to V$ وجود دارد که برای هر $j = ۱, \dots, n$، $T(v_j) = v_j + v_{j-۱}$. $[T]_\beta$ را حساب کنید.

۱۰. فرض کنید V، یک فضای برداری n بُعدی باشد و $T: V \to V$ را یک تبدیل خطی فرض کنید. اگر W یک زیرفضای T-پایای V باشد (به تمرینات بخش ۲-۱ رجوع کنید)، که بُعدش k است، نشان دهید که پایه β ای برای V وجود دارد به گونه‌ای که $[T]_\beta$ به این شکل می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$$

که A در اینجا ماتریسی $k \times k$ و O ماتریس صفر $(n-k) \times k$ است.

۱۱. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی‌البُعد و T تصویر روی W در راستای W' باشد، که W و W' در اینجا زیرفضاهایی از V هستند (تعریف این عبارت را در تمرینات بخش ۲-۱ ببینید). پایه مرتبی مانند β برای V بیابید که $[T]_\beta$ یک ماتریس قطری باشد.

۱۲. فرض کنید V و W دو فضای برداری و T و U، تبدیلات خطی ناصفری از V به W باشند. اگر $R(T)\cap R(U) = \{0\}$، ثابت کنید که $\{T, U\}$ زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از $\mathcal{L}(V, W)$ است.

۱۳. فرض کنید $V = P(\mathbb{R})$ باشد و برای هر $j \geqslant 0$، $T_j(f)$ را برابر $f^{(j)}$ تعریف کنید، که $f^{(j)}$ مشتق j ام f است. ثابت کنید که مجموعه $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ به ازای هر عدد صحیح مثبت n، زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از $\mathcal{L}(V)$ است.

۱۴. فرض کنید V و W دو فضای برداری، و S زیرمجموعه‌ای از V باشد و S°را برابر

$$\{T \in \mathcal{L}(V, W) : T(x) = 0; \qquad x \in S \text{ برای هر } \}$$

تعریف کنید. ثابت کنید که:

الف) S° زیرفضایی از $\mathcal{L}(V, W)$ است.

ب) هرگاه S_1 و S_2 زیرمجموعه‌هایی از V باشند و $S_1 \subseteq S_2$، آنگاه $S_2^\circ \subseteq S_1^\circ$.

ج) اگر V_1 و V_2 زیرفضاهایی از V باشند، آنگاه $(V_1 + V_2)^\circ = V_1^\circ \cap V_2^\circ$.

۱۵. فرض کنید V و W دو فضای برداری باشند که $\dim(V) = \dim(W)$، و $T : V \to W$ خطی باشد. ثابت کنید که پایه‌های مرتب β و γ، به ترتیب برای V و W وجود دارند به گونه‌ای که $[T]_\beta^\gamma$ قطری باشد.

۲-۳ ترکیب تبدیلات خطی و ضرب ماتریسی

در بخش ۲-۲ آموختیم که چگونه یک ماتریس را به گونه‌ای با یک تبدیل خطی مرتبط سازیم که هم جمع و هم ضرب اسکالر ماتریس‌ها با جمع و ضرب اسکالر تبدیلات نظیر، در توافق باشد. حال این سؤال مطرح می‌شود که نمایش ماتریسی ترکیب دو تبدیل خطی، با نمایش ماتریسی هر یک از دو تبدیل چه ارتباطی دارد. تلاش برای پاسخ به این سؤال به یک تعریف برای ضرب ماتریسی منجر می‌شود. به جای $U \circ T$ نماد UT را برای ترکیب دو تبدیل خطی U و T به کار خواهیم برد (به ضمیمه ب رجوع کنید).

اولین نتیجه‌ای که به دست می‌آوریم نشان می‌دهد که ترکیب دو تبدیل خطی، خطی است.

قضیه ۹.۲. فرض کنید V، W و Z فضاهایی برداری و $T : V \to W$ و $U : W \to Z$ دو تبدیل خطی باشند. در این صورت $UT : V \to Z$ خطی است.

برهان. فرض کنید $x, y \in V$ و $a \in F$. در این صورت:

$$\begin{aligned} UT(ax+y) &= U(T(ax+y)) = U(aT(x)+T(y)) \\ &= aU(T(x)) + U(T(y)) = a(UT)(x) + (UT)(y) \end{aligned}$$

قضیه زیر برخی از ویژگی‌های ترکیب تبدیلات خطی را بیان می‌کند. □

قضیه ۱۰.۲. فرض کنید V فضایی برداری باشد و همچنین فرض کنید $T, U_1, U_2 \in \mathcal{L}(V)$. در این صورت:

الف) $T(U_1+U_2) = TU_1 + TU_2$ و $(U_1+U_2)T = U_1T + U_2T$.

ب) $T(U_1U_2) = (TU_1)U_2$.

ج) $TI = IT = T$.

د) برای هر اسکالر a داریم $a(U_1U_2) = (aU_1)U_2 = U_1(aU_2)$.

برهان. به عهده خواننده. □

نتیجه کلی‌تری برای تبدیلات خطی که دامنه آنها با بُردشان مساوی نیست وجود دارد (به تمرین ۷ رجوع کنید).

فرض کنید $T : V \to W$ و $U : W \to Z$ تبدیلات خطی باشند و نیز فرض کنید که $A = [U]_\beta^\gamma$ و $B = [T]_\alpha^\beta$، که $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$، $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$ و $\gamma = \{z_1, \ldots, z_p\}$ به ترتیب پایه‌هایی مرتب برای V، W و Z هستند. می‌خواهیم حاصلضرب دو ماتریس A و B، AB، را طوری تعریف کنیم که:

$$AB = [UT]_\alpha^\gamma$$

حال $[UT]_\alpha^\gamma$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای هر $1 \leqslant j \leqslant n$ داریم:

$$\begin{aligned} (UT)(v_j) = U(T(v_j)) &= U\left(\sum_{k=1}^{m} B_{kj} w_k\right) = \sum_{k=1}^{m} B_{kj} U(w_k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} B_{kj} \left(\sum_{i=1}^{p} A_{ik} z_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{m} B_{kj} A_{ik}\right) z_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} C_{ij} z_i \end{aligned}$$

که در آن:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj}$$

محاسبه فوق، انگیزه لازم برای تعریف زیر را برای ضرب ماتریسی فراهم می‌آورد.

تعریف:. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times p$ باشد. حاصلضرب A و B را که با AB نشان می‌دهیم، ماتریس $m \times p$ ای تعریف می‌کنیم که برای هر $1 \leqslant i \leqslant m$ و $1 \leqslant j \leqslant p$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$$

ملاحظه کنید که $(AB)_{ij}$ مجموع حاصلضرب‌های عناصر متناظر در سطر i ام ماتریس A و ستون j ام ماتریس B است. در پایان این بخش خواننده کاربردهای جالبی از این تعریف خواهد دید.

خواننده ملاحظه می‌کند که برای اینکه حاصلضرب AB تعریف شده باشد، محدودیت‌هایی از لحاظ اندازه A و B نسبت به هم وجود دارد. برای به خاطر سپردن این محدودیت، عبارت ذیل وسیله کمکی خوبی است: «$(m \times n) \cdot (n \times p) = (m \times p)$»، یعنی اینکه برای تعریف AB، دو بعد «درونی» باید مساوی باشند و دو بعد «بیرونی» اندازه حاصلضرب را به ما می‌دهند.

مثال ۱.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ 0 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \end{bmatrix}$$

مجدداً به رابطه نمادین $(2 \times 3) \cdot (3 \times 1) = 2 \times 1$ توجه کنید. □

همانند ترکیب خطی توابع، ضرب ماتریسی نیز خاصیت جابجایی ندارد. دو حاصلضرب زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین مشاهده می‌کنیم که حتی اگر هر دو حاصل‌ضرب ماتریسی AB و BA تعریف شده هم باشند، لازم نیست که $AB = BA$.

با به یاد آوردن تعریف ترانهاده یک ماتریس در بخش ۱-۳، نشان می‌دهیم که اگر A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times p$ باشد، آنگاه $(AB)^t = B^t A^t$. از آنجا که:

$$(AB)^t_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_{ki}$$

و

$$(B^tA^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(B^t)_{ik}(A^t)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki}A_{jk}$$

دیگر کاری برای انجام باقی نمی‌ماند. بنابراین ترانهاده یک حاصل‌ضرب برابر است با حاصل‌ضرب ترانهاده‌ها به ترتیب عکس.

قضیه زیر، نتیجه فوری تعریفمان از حاصل‌ضرب ماتریسی است.

قضیه ۱۱.۲. فرض کنید V، W و Z فضاهای برداری متناهی‌البُعدی به ترتیب با پایه‌های مرتب α، β و γ باشند. فرض کنید $T : V \to W$ و $U : W \to Z$ تبدیلاتی خطی باشند. در این صورت:

$$[UT]_\alpha^\gamma = [U]_\beta^\gamma[T]_\alpha^\beta$$

نتیجه ۱. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی‌البُعد با پایه مرتب β باشد. فرض کنید $T, U \in \mathcal{L}(V)$. در این صورت $[UT]_\beta = [U]_\beta[T]_\beta$.

در زیر مثالی برای قضیه ۱۱.۲ می‌آوریم.

مثال ۲. $U : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ را با $U(f) = f'$، و $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ را با $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$ تعریف کنید. فرض کنید $\alpha = \{1, x, x^2, x^3\}$ و $\beta = \{1, x, x^2\}$. به وضوح $UT = I$، که I تبدیل همانی روی $P_2(\mathbb{R})$ است. برای دیدن درستی قضیه ۱۱.۲ ملاحظه کنید که:

$$[UT]_\beta = [U]_\alpha^\beta[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]_\beta$$

□

ماتریس قطری 3×3 بالا، ماتریس همانی نام دارد و در زیر همراه با نمادی بسیار مفید، به نام دلتای کرونکر تعریف شده است.

چند تعریف: دلتای کرونکر، δ_{ij}، را با $\delta_{ij} = 1$ هرگاه $i = j$ و $\delta_{ij} = 0$ هرگاه $i \neq j$ تعریف می‌کنیم. **ماتریس همانی** $n \times n$، I_n، با رابطه $(I_n)_{ij} = \delta_{ij}$ تعریف می‌شود. در نتیجه:

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

قضیه بعدی نظیرهایی برای قسمت‌های الف، ج و د از قضیه ۱۰.۲ ارائه می‌کند. نظیر قضیه ۱۰.۲، قسمت ب را در قضیه ۱۶.۲ می‌توان یافت. همچنین ملاحظه می‌کنید که قسمت ج از قضیه بعدی، نشان می‌دهد که ماتریس همانی نقش عضو همانی ضرب در $M_{n\times n}(F)$ را دارد. هنگامی که منظورمان از قراین معلوم باشد، گاه اندیس n را از I_n حذف می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۲. فرض کنید A ماتریسی $m\times n$، B و C ماتریس‌هایی $n\times p$ و E و D ماتریس‌هایی $q\times m$ باشند. در این صورت:

الف) $A(B+C)=AB+AC$ و $(D+E)A=DA+EA$.

ب) برای هر اسکالر a، $a(AB)=(aA)B=A(aB)$.

ج) $I_mA=A=AI_n$.

د) هرگاه V فضای برداری متناهی‌البُعدی با بُعد n و پایه مرتب β باشد، آنگاه $[I_V]_\beta=I_n$.

برهان. نیمه اول الف و د را ثابت می‌کنیم و بقیه اثبات‌ها را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

الف)

$$\begin{aligned}[A(B+C)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B_{kj}+C_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(A_{ik}B_{kj}+A_{ik}C_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} A_{ik}C_{kj} \\ &= (AB)_{ij}+(AC)_{ij} = [AB+AC]_{ij}\end{aligned}$$

بنابراین $A(B+C)=AB+AC$.

د) داریم

$$(I_mA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m}(I_m)_{ik}A_{kj} = \sum_{k=1}^{m}\delta_{ik}A_{kj} = A_{ij}$$

□

نتیجه ۲. فرض کنید A ماتریسی $m\times n$، $B_1,\dots,B_k$ ماتریس‌هایی $n\times p$، $C_1,\dots,C_k$ ماتریس‌هایی $q\times m$ و $a_1,\dots,a_k$ اسکالر باشند؛ در این صورت:

$$A\left(\sum_{i=1}^{k} a_iB_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_iAB_i$$

و

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i C_i\right) A = \sum_{i=1}^{k} a_i C_i A$$

برهان. به عهده خواننده. □

برای هر ماتریس $A_{n\times n}$ تعریف می‌کنیم: $A^1 = A$، $A^2 = AA$ و $A^3 = A^2 A$، و به طور کلی برای هر $k = 2, 3, \ldots$، $A^k = A^{k-1}A$. همچنین A^0 را برابر I_n تعریف می‌کنیم.

با این نمادگذاری، مشاهده می‌کنیم که اگر

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

با اینکه $A \neq 0$، $A^2 = 0$ که ماتریس صفر است. بنابراین قانون حذف برای ضرب در میدان‌ها، برای ماتریس‌ها برقرار نیست.

قضیه ۱۳.۲. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times p$ باشد. برای هر j ($1 \leqslant j \leqslant p$)، فرض کنید u_j و v_j به ترتیب نشان‌دهنده ستون j ام AB و B باشند؛ در این صورت:

الف) $u_j = Av_j$.

ب) $v_j = Be_j$ که در اینجا e_j نشانگر ستون j ام I_p است.

برهان.

$$u_j = \begin{bmatrix} (AB)_{1j} \\ \vdots \\ (AB)_{mj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} A_{1k}B_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} A_{mk}B_{kj} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{bmatrix} = Av_j$$

بنابراین الف ثابت شد. اثبات ب به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. □

از قضیه ۱۳.۲ الف نتیجه می‌شود که ستون j ام AB ترکیبی است خطی از ستون‌های A که ضرایب این ترکیب خطی، درایه‌های ستون j ام ماتریس B هستند. نتیجه‌ای مشابه برای سطرها وجود دارد؛ یعنی سطر j ام AB ترکیبی خطی از سطرهای B است که ضرایب این ترکیب خطی درایه‌های سطر i ام A هستند (به تمرین ۱۳ رجوع کنید).

نتیجه بعدی بسیاری از کارهای قبلی‌ما را توجیه می‌کند. این نتیجه از نمایش ماتریسی تبدیلات خطی و ضرب ماتریسی برای محاسبه مقدار یک تبدیل در یک بردار دلخواه استفاده می‌کند.

قضیه ۱۴.۲. فرض کنید V و W فضاهایی برداری با بُعد متناهی به ترتیب با پایه‌های مرتب β و γ باشند و نیز فرض کنید که $T : V \to W$ خطی است. در این صورت برای هر $u \in V$ داریم:

$$[T(u)]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [u]_\beta$$

برهان. $u \in V$ را ثابت نگه می‌داریم و تبدیل‌های خطی $f : F \to V$ و $g : F \to W$ را به صورت $f(a) = au$ و $g(a) = aT(u)$ برای هر $a \in F$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\alpha = \{۱\}$، پایه مرتب استاندارد F باشد. توجه کنید که $g = Tf$. هرگاه بردارهای ستونی را به عنوان ماتریس در نظر بگیریم و از قضیه ۱۱.۲ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$[T(u)]_\gamma = [g(۱)]_\gamma = [g]_\alpha^\gamma = [Tf]_\alpha^\gamma = [T]_\beta^\gamma [f]_\alpha^\beta = [T]_\beta^\gamma [f(۱)]_\beta = [T]_\beta^\gamma [u]_\beta$$

□

مثال ۳. فرض کنید $T : P_۳(\mathbb{R}) \to P_۲(\mathbb{R})$، با رابطه $T(f) = f'$ تعریف شده باشد و نیز فرض کنید که β و γ به ترتیب پایه‌های مرتب استاندارد $P_۳(\mathbb{R})$ و $P_۲(\mathbb{R})$ باشند. اگر $A = [T]_\beta^\gamma$، با استفاده از مثال ۴ بخش ۲-۲ داریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

درستی قضیه ۱۴.۲ را با بررسی کردن اینکه $[T(p)]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [p]_\beta$، که در آن $p \in P_۳(\mathbb{R})$ چندجمله‌ای $p(x) = ۲ - ۴x + x^۲ + ۳x^۳$ است، نشان خواهیم داد. فرض کنید $q = T(p)$؛ در این صورت $q(x) = p'(x) = -۴ + ۲x + ۹x^۲$.
بنابراین:

$$[T(p)]_\gamma = [q]_\gamma = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۲ \\ ۹ \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر:

$$[T]_\beta^\gamma [p]_\beta = A[p]_\beta = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ -۴ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۲ \\ ۹ \end{bmatrix}$$

□

این بخش را با معرفی تبدیل ضرب از چپ، L_A، که در آن A ماتریسی $m \times n$ است، به اتمام می‌رسانیم. این تبدیل شاید مهم ترین وسیله انتقال ویژگی‌های تبدیلات به خصوصیات مشابه برای ماتریس‌ها و بر عکس باشد. به عنوان مثال، با

استفاده از آن نشان می‌دهیم که ضرب ماتریسی شرکت‌پذیر است.

تعریف:. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ باشد که درایه‌های آن متعلق به میدان F هستند. منظور ما از L_A، نگاشت $L_A : F^n \to F^m$ است که به صورت $L_A(x) = Ax$ (یعنی حاصل‌ضرب ماتریسی A در x) برای هر $x \in F^n$ تعریف می‌شود. L_A را یک **تبدیل ضرب از چپ** می‌نامیم.

مثال ۴. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

در این صورت $A \in M_{۲\times۳}(\mathbb{R})$ و $L_A : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۲$. هرگاه:

$$x = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

خواهیم داشت:

$$L_A(x) = Ax = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

□

در قضیه بعد خواهیم دید که نه تنها L_A خطی است، بلکه در حقیقت خصوصیات بسیار مفید دیگری هم دارد. این خصوصیات، همگی نسبتاً طبیعی هستند، بنابراین به خاطر سپردن آنها ساده است.

قضیه ۱۵.۲. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ باشد که درایه‌های آن در F قرار دارند. در این صورت تبدیل ضرب از چپ $L_A : F^n \to F^m$ خطی است. به علاوه اگر B ماتریس $m \times n$ دیگری باشد (که درایه‌های آن در F قرار دارند) و β و γ به ترتیب پایه‌های مرتب استاندارد F^n و F^m باشند، موارد زیر برقرار خواهند بود:

الف) $[L_A]_\beta^\gamma = A$.

ب) $L_A = L_B$ اگر و تنها اگر $A = B$.

ج) $L_{A+B} = L_A + L_B$ و برای هر $a \in F$، $L_{aA} = aL_A$.

د) اگر $T : F^n \to F^m$ خطی باشد، ماتریس $m \times n$ یگانه‌ای چون C وجود دارد به طوری که $T = L_C$. در حقیقت $C = [T]_\beta^\gamma$.

ه) اگر E ماتریسی $n \times p$ باشد، آنگاه $L_{AE} = L_A L_E$.

و) اگر $m = n$، آنگاه $L_{I_n} = I_{F^n}$.

برهان. این واقعیت که L_A خطی است، بلافاصله از قضیه ۱۲.۲ قسمت الف نتیجه می‌شود. ستون j ام $[L_A]_\beta^\gamma$ برابر است با $L_A(e_j)$. اما $L_A(e_j) = Ae_j$ که بنا بر قضیه ۱۳.۲ قسمت ب، ستون j ام A نیز هست. بنابراین $[L_A]_\beta^\gamma = A$.

ب) اگر $L_A = L_B$، با استفاده از الف می‌توان نوشت: $A = [L_A]_\beta^\gamma = [L_B]_\beta^\gamma = B$. بنابراین $A = B$. اثبات عکس مطلب کار ساده‌ای است.

ج) اثبات به عهده خواننده است.

د) فرض کنید $C = [T]_\beta^\gamma$. بنا بر قضیه ۱۴.۲ داریم $[T(x)]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [x]_\beta$، و یا برای هر $x \in F^n$، $T(x) = Cx = L_C(x)$. پس $T = L_C$. یگانگی C از ب نتیجه می‌شود.

ه) برای هر j ($1 \leqslant j \leqslant p$)، می‌توانیم با چند بار استفاده از قضیه ۱۳.۲ متوجه شویم که $(AE)e_j$، ستون j ام AE است و از طرفی ستون j ام AE برابر است با $A(Ee_j)$. پس $(AE)e_j = A(Ee_j)$. در نتیجه:

$$L_{AE}(e_j) = (AE)(e_j) = A(Ee_j) = L_A(Ee_j) = L_A(L_E(e_j))$$

بنابراین با توجه به نتیجه قضیه ۶.۲، $L_{AE} = L_A L_E$.

و) اثبات به عهده خواننده است.

□

اکنون تبدیلات ضرب از چپ را برای اثبات یک خصوصیت مهم ماتریس‌ها به کار می‌بریم.

قضیه ۱۶.۲. فرض کنید A، B و C ماتریس‌هایی باشند که برای آنها $A(BC)$ تعریف شده باشد. در این صورت $(AB)C$ هم تعریف شده است و $A(BC) = (AB)C$؛ یعنی اینکه حاصلضرب ماتریسی شرکت‌پذیر است.

برهان. اثبات اینکه $(AB)C$ تعریف شده است، به عهده خواننده است. با استفاده از قسمت ه از قضیه ۱۵.۲ و نیز شرکت‌پذیری توابع داریم (ضمیمه ب را ملاحظه کنید):

$$L_{A(BC)} = L_A L_{BC} = L_A(L_B L_C) = (L_A L_B) L_C = L_{AB} L_C = L_{(AB)C}$$

پس از قسمت ب قضیه ۱۵.۲ نتیجه می‌شود که $A(BC) = (AB)C$. □

نیازی به گفتن نیست که این قضیه را می‌توان مستقیماً با استفاده از تعریف ضرب ماتریسی هم ثابت کرد. با این وجود، برهان فوق شکل کلی استدلال‌های فراوانی را که از ارتباط میان تبدیلات خطی و ماتریس‌ها استفاده می‌کنند، نشان می‌دهد.

یک کاربرد

مجموعه‌ای وسیع و متنوع از کاربردها وجود دارد که به ماتریس‌های خاصی به نام ماتریس‌های وقوع ارتباط می‌یابند. منظور از یک **ماتریس وقوع**، ماتریسی مربعی است که هر درایه آن یا صفر، و یا یک است و به خاطر مزیت فنی همه درایه‌های قطری آن صفر است. هرگاه روی مجموعه‌ای از اشیاء که با ۱، ۲ الی n نشان خواهیم داد، رابطه‌ای در اختیار داشته باشیم، متناظر با آن، ماتریس وقوع A را بدین‌گونه تعریف می‌کنیم: وقتی i با j در ارتباط باشد $A_{ij} = 1$ و در غیر این‌صورت $A_{ij} = 0$.

برای اینکه جنبه واقعی و غیر ذهنی به بحث بدهیم، چهار نفر را در نظر می‌گیریم که هر کدام یک وسیله ارتباطی در اختیار داشته باشند. هرگاه رابطه موردنظر در میان این افراد «می‌تواند با دیگری ارتباط برقرار کند». باشد، آنگاه در صورتی که i بتواند به j پیغام بفرستد $A_{ij} = 1$ و در غیر این صورت $A_{ij} = 0$. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در این صورت چون $A_{34} = 1$ و $A_{14} = 0$، معلوم می‌شود که شخص ۳ می‌تواند به نفر چهارم پیغام بفرستد، اما شماره ۱ قادر به پیغام فرستادن به شماره ۴ نیست.

درایه‌های A^2 را می‌توان به گونه جالبی تفسیر کرد. رابطه زیر را به عنوان مثال در نظر بگیرید:

$$(A^2)_{31} = A_{31}A_{11} + A_{32}A_{21} + A_{33}A_{31} + A_{34}A_{41}$$

ملاحظه می‌کنید که $A_{3k}A_{k1}$ مساوی ۱ است اگر و تنها اگر هر دوی A_{3k} و A_{k1} مساوی ۱ باشند، یعنی اگر و تنها اگر ۳ بتواند به k و k بتواند به ۱ پیغام بفرستد. بنابراین $(A^2)_{31}$ تعداد راه‌هایی را نشان می‌دهد که ۳ می‌تواند در دو مرحله (یا در یک دور $(relay)$) به ۱ پیغام بفرستد. از آنجا که:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

می‌بینیم که شماره ۳ از ۳ طریق می‌تواند به شماره ۱ در دو مرحله پیغام بفرستد. به طور کلی $(A + A^2 + \ldots + A_n)_{ij}$ تعداد راه‌هایی است که i می‌تواند در حداکثر m مرحله به j پیغام ارسال کند.

مجموعه‌ای ماکزیمال از سه نفر یا بیشتر که هر کدام بتواند به دیگری پیغام بفرستد، یک **جمع خصوصی** (clique) نام دارد. مسأله تعیین جمع‌های خصوصی در ابتدا مشکل به نظر می‌رسد؛ با این حال اگر ماتریس جدید را به این صورت تعریف کنیم که هرگاه i و j هر دو بتوانند به هم پیغام بفرستند، $B_{ij} = ۱$ و در غیر این صورت $B_{ij} = ۰$، می‌توان ثابت کرد (به تمرین ۱۸ رجوع کنید) که شخص شماره i به یک جمع خصوصی تعلق دارد اگر و تنها اگر $(B^۳)_{ii} > ۰$. بعنوان مثال فرض کنید که ماتریس وقوع نظیر رابطه قبلی

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

باشد.

برای تعیین اینکه کدامیک از افراد به جمع‌های خصوصی تعلق دارند، ماتریس B را به گونه‌ای که در بالا ذکر شد، تشکیل می‌دهیم و $B^۳$ را محاسبه می‌کنیم. در مورد این مسأله:

$$B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B^۳ = \begin{bmatrix} ۰ & ۴ & ۰ & ۴ \\ ۴ & ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ & ۴ \\ ۴ & ۰ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}$$

از آنجا که همه درایه‌های قطری $B^۳$ صفر هستند، نتیجه می‌گیریم که این رابطه دارای هیچ جمع خصوصی نیست.

آخرین مثال ما در مورد کاربرد ماتریس‌های وقوع، مربوط به مفهوم غلبه است. رابطه موجود در میان مجموعه‌ای از افراد را یک **رابطه غلبه‌ای** گویند هرگاه ماتریس وقوع متناظر با آن، A، این خاصیت را داشته باشد که به ازای هر دو i و j ی متمایز، $A_{ij} = ۱$، یعنی اینکه هر دو نفر را که در نظر بگیریم دقیقاً یکی از آنها بر دیگری «غالب باشد» (یا به زبان مثال قبل، بتواند به دیگری پیغام بفرستد). از آنجا که A یک ماتریس وقوع است، به ازای هر i، $A_{ii} = ۰$. برای هر رابطه غلبه‌ای می‌توان ثابت کرد (به تمرین ۲۰ رجوع کنید) که ماتریس $A + A^۲$، دارای یک سطر [ستون] است که هر درایه آن به جز درایه قطری مثبت است. به بیان دیگر، حداقل یک نفر وجود دارد که در یک یا دو مرحله بقیه را مغلوب می‌کند [بقیه مغلوبش می‌کنند]. در حقیقت می‌توان نشان داد که هر کسی که در مرحله نخست بیشترین تعداد از افراد دیگر را مغلوب کند

[مغلوب بیشترین تعداد از افراد است]، دارای این خاصیت است. به عنوان مثال، ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بهتر است خواننده تحقیق کند که این ماتریس، مربوط به یک رابطه غلبه‌ای است. حال داریم:

$$A + A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه نفرات ۱، ۳، ۴ و ۵ هر یک بقیه را حداکثر در دو مرحله مغلوب می‌کنند (می‌توانند به آنها پیغام بفرستند)، در حالی که نفرات ۱، ۲، ۳ و ۴ هر یک در حداکثر دو مرحله مغلوب بقیه می‌شوند.

تمرینات

۱. مشخص کنید که کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است. در هر یک از این موارد فرض کنید V، W و Z، فضاهایی برداری به ترتیب با پایه‌های مرتب (متناهی) α، β و γ باشند و $T : V \to W$ و $U : W \to Z$ تبدیلاتی خطی باشند.

الف) $[UT]_\alpha^\gamma = [T]_\alpha^\beta [U]_\beta^\gamma$

ب) برای هر $v \in V$، $[T(v)]_\beta = [T]_\alpha^\beta [v]_\alpha$.

ج) برای هر $w \in W$، $[U(w)]_\beta = [U]_\alpha^\beta [w]_\beta$.

د) $[I_V]_\alpha = I$

ه) $[T^2]_\alpha^\beta = ([T]_\alpha^\beta)^2$

و) $A^2 = I$ نتیجه می‌دهد که $A = I$ یا $A = -I$.

ز) به ازای ماتریسی مانند A، $T = L_A$.

ح) $A^{۲} = ۰$ نتیجه می‌دهد که $A = ۰$ که در اینجا ۰ نشان‌دهنده ماتریس صفر است.

ط) $L_{A+B} = L_A - L_B$

ی) اگر A مربعی باشد و برای هر i و j، $A_{ij} = \delta_{ij}$، آنگاه $A = I$.

۲. الف) فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۳ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۴ \\ -۱ & -۲ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$A(۲B + ۳C)$، $(AB)D$ و $A(BD)$ را حساب کنید.

ب) فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} \quad ، \quad B = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۴ \\ ۵ & ۵ & ۳ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

A^t، A^tB، BC^t، CB و CA را محاسبه کنید.

۳. فرض کنید $g(x) = ۳ + x$. $T : P_۲(\mathbb{R}) \to P_۲(\mathbb{R})$ را چنین تعریف کنید:

$$T(f) = f'g + ۲f$$

و $U : P_۲(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^۳$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$U(a + bx + cx^۲) = (a + b, c, a - b)$$

فرض کنید $\beta = \{۱, x, x^۲\}$ و $\gamma = \{e_۱, e_۲, e_۳\}$.

الف) $[U]_\beta^\gamma$، $[T]_\beta$ و $[UT]_\beta^\gamma$ را مستقیماً حساب کنید. سپس از قضیه ۲.۱۱ برای بررسی کردن درستی پاسخ خود استفاده کنید.

ب) فرض کنید $h(x) = ۳ - ۲x + x^۲$. $[h]_\beta$ و $[U(h)]_\gamma$ را حساب کنید؛ سپس با استفاده از $[U]_\beta^\gamma$ که در قسمت الف محاسبه شد، به همراه قضیه ۲.۱۴، نتیجه‌ای را که به دست آورده‌اید، امتحان کنید.

۴. در هر یک از قسمت‌های زیر، فرض کنید که T تبدیل خطی تعریف شده در همان قسمت از تمرین ۵ بخش ۲-۲ باشد. با استفاده از قضیه ۲.۱۴، موارد زیر را حساب کنید.

الف) $[T(A)]_\alpha$، که $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۱ & ۶ \end{bmatrix}$.

ب) $[T(f)]_\alpha$، که $f(x) = ۴ - ۶x + ۳x^۲$.

ج) $[T(A)]_\gamma$، که $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$.

د) $[T(f)]_\gamma$، که $f(x) = ۶ - x + x^۲$.

۵. برهان قضیه ۱۲.۲ و همچنین نتیجه این قضیه را کامل کنید.

۶. قسمت ب از قضیه ۱۳.۲ را ثابت کنید.

۷. قضیه ۱۰.۲ را ثابت کنید. حال نتیجه کلی‌تری در مورد تبدیلات خطی که دامنه انها با هم دامنه آنها یکی نیست، بیان کنید و آن را ثابت نمایید.

۸. دو تبدیل خطی $U, T : F^۲ \to F^۲$ را طوری بیابید که $UT = T_۰$ (که $T_۰$ تبدیل صفر است) ولی $TU \neq T_۰$. با استفاده از جوابی که به دست می‌آورید ماتریس‌های A و B را طوری بیابید که $AB = ۰$، ولی $BA \neq ۰$.

۹. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. ثابت کنید که A ماتریسی قطری است اگر و تنها اگر به ازای هر i و j، $A_{ij} = \delta_{ij} A_{ij}$.

۱۰. فرض کنید V یک فضای برداری و $T : V \to V$ خطی باشد. ثابت کنید $T^۲ = T_۰$ اگر و تنها اگر $R(T) \subseteq N(T)$.

۱۱. فرض کنید V، W و Z فضاهایی برداری و $T : V \to W$ و $U : W \to Z$ خطی باشند. ثابت کنید:

الف) اگر UT یک به یک باشد، آنگاه T یک به یک است. آیا لزوماً U هم یک به یک است؟

ب) اگر UT پوشا باشد، آنگاه U نیز پوشاست. آیا T هم لزوماً پوشاست؟

ج) اگر U و T یک به یک و پوشا باشند، آنگاه UT نیز یک به یک و پوشاست.

۱۲. فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند. به یاد بیاورید که رد A که با نماد $\mathrm{tr}(A)$ نشان داده می‌شود، برابر است با:

$$\sum_{i=۱}^{n} A_{ii}$$

ثابت کنید $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ و $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^t)$.

۱۳. نمادگذاری به کار رفته در قضیه ۱۳.۲ را مفروض بگیرید.

الف) فرض کنید که z یک بردار (ستونی) در F^p باشد. با استفاده از قضیه ۱۳.۲ قسمت ب ثابت کنید که Bz ترکیبی خطی از ستون‌های B است. در واقع هرگاه $z = [a_۱, \ldots, a_n]^t$ باشد، نشان دهید که:

$$Bz = \sum_{j=۱}^{p} a_j v_j$$

ب) قسمت الف را به این صورت تعمیم دهید که ستون j ام AB، ترکیبی خطی از ستون‌های A است، که ضرایب این ترکیب خطی، درایه‌های ستون j ام B هستند.

ج) برای هر بردار سطری $w \in F^m$، ثابت کنید wA ترکیبی خطی از سطرهای A است که ضرایب آن مختص‌های w هستند. راهنمایی: خواص ترانهاده را روی قسمت الف به کار گیرید.

د) نتیجه مشابه ب را در مورد سطرها ثابت کنید: سطر i ام AB، ترکیبی خطی از سطرهای B می‌باشد که ضرایب آن درایه‌های سطر i ام A هستند.

۱۴. فرض کنید M و A ماتریس‌هایی باشند که ماتریس حاصلضرب MA برای آنها تعریف شده باشد. اگر ستون j ام A ترکیبی خطی از مجموعه‌ای از ستون‌های A باشد، ثابت کنید که ستون j ام MA، ترکیبی خطی از ستون‌های متناظر در MA با ضرایب متناظر یکسان با ترکیب خطی قبلی است.

۱۵. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی‌البُعد و $T : V \to V$ خطی باشد.

الف) اگر $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(T^۲)$، ثابت کنید که $R(T) \cap N(T) = \{۰\}$ و نتیجه بگیرید که $V = R(T) \oplus N(T)$ (به تمرینات بخش ۱-۳ رجوع کنید).

ب) ثابت که به ازای هر عدد صحیح مثبت k داریم: $V = R(T^k) \oplus N(T^k)$.

۱۶. فرض کنید V یک فضای برداری باشد، تمام تبدیلات خطی $T : V \to V$ ای را بیابید که $T = T^۲$. راهنمایی: توجه کنید که برای هر x در V داریم: $x = T(x) + (x - T(x))$ و نشان دهید که $V = \{y : T(y) = y\} \oplus N(T)$ (به تمرینات بخش ۱-۳ رجوع کنید).

۱۷. فقط با استفاده از تعریف ضرب ماتریسی ثابت کنید که ضرب ماتریس‌ها شرکت‌پذیر است.

۱۸. برای هر ماتریس وقوع A با ماتریس مربوطه B که به این صورت تعریف می‌شود که اگر i و j و نیز j و i با هم ارتباط داشته باشند، $B_{ij} = ۱$ و در غیر این صورت $B_{ij} = ۰$، ثابت کنید که i متعلق به یک جمع خصوصی است اگر و تنها اگر $(B^۳)_{ii} > ۰$.

۱۹. تمرین ۱۸ را برای تعیین جمع‌های خصوصی موجود در رابطه‌های مربوط به ماتریس‌های وقوع زیر به کار ببرید.

الف) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

۲۰. فرض کنید A ماتریس وقوع مربوط به یک رابطه غلبه‌ای باشد. ثابت کنید که ماتریس $A + A^2$ سطری [ستونی] دارد که همه درایه‌های آن به جز درایه قطری مثبت هستند.

۲۱. ثابت کنید که ماتریس A که در زیر آمده است، متناظر با یک ماتریس غلبه‌ای است و با استفاده از تمرین ۲۰، افرادی را که بر هر یک از بقیه در دو مرحله غلبه می‌کنند [مغلوب آنها می‌شوند] تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲۲. فرض کنید A ماتریس وقوع $n \times n$ نظیر یک رابطه غلبه‌ای باشد. تعداد درایه‌های ناصفر A را تعیین کنید.

۲-۴ وارون‌پذیری و ایزومورفیسم‌ها

مفهوم وارون‌پذیری در مبحث توابع در همان اوایل کار معرفی می‌شود. خوشبختانه بسیاری از خصوصیات ذاتی یک تابع، میان تابع و وارونش مشترک هستند. به عنوان مثال، در حسابان آموخته‌ایم که وارون یک تابع پیوستگی و مشتق‌پذیری آن را حفظ می‌کند. در این بخش (قضیه ۲.۱۷) خواهیم دید که وارون تبدیلات خطی نیز خطی هستند. این نتیجه در مطالعه وارون ماتریس‌ها برای ما بسیار مفید است. همان طور که از مطالب بخش ۲-۳ انتظار می‌رود، وارون تبدیل ضرب از چپ L_A را (در صورتی که موجود باشد) می‌توان در تعیین خصوصیات وارون ماتریس A به کار برد.

در ادامه این بخش، بسیاری از نتایج مبحث وارون‌پذیری را در مورد مفهوم ایزومورفیسم به کار خواهیم برد و خواهیم دید که فضاهای برداری‌ای (روی F) را که بُعد متناهی مساوی دارند، می‌توان یکی گرفت. به زودی این ایده‌ها را با دقت بیشتری بررسی خواهیم کرد.

واضح است که مطالبی که در ضمیمه ب در مورد توابع وارون ارائه شده‌اند، در مورد تبدیلات خطی نیز صادق هستند. با این حال، برخی از این تعاریف را دوباره تکرار می‌کنیم.

تعریف:. فرض کنید V و W فضاهایی برداری باشند و فرض کنید $T : V \to W$ خطی باشد. تابع $U : W \to V$ را **وارون** T گویند هرگاه $TU = I_W$ و $UT = I_V$. اگر T وارونی داشته باشد، T را **وارون‌پذیر** می‌گویند. همان طور که در ضمیمه ب ذکر شده است، اگر T وارون‌پذیر باشد، وارون آن یکتاست و با T^{-1} نشان داده می‌شود.

موارد زیر در مورد توابع وارون‌پذیر T و U برقرار است.

۱. $(TU)^{-1} = U^{-1}T^{-1}$

۲. $\left(T^{-1}\right)^{-1} = I$؛ در نتیجه T^{-1} وارون‌پذیر است.

گاه این واقعیت مورد استفاده قرار می‌گیرد که یک تابع وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر یک به یک و پوشا باشد.

مثال ۱. $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ را به صورت $T(a + bx) = (a, a + b)$ تعریف کنید. خواننده به راحتی می‌تواند بررسی کند که تابع $T^{-1}\mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ با رابطه $T^{-1}(c, d) = c + (d - c)x$ مشخص می‌شود. ملاحظه کنید که T^{-1} نیز خطی است. همانگونه که قضیه ۱۷.۲ نشان می‌دهد، این مطلب در حالت کلی نیز درست است. □

قضیه ۱۷.۲. فرض کنید V و W دو فضای برداری باشند و همچنین $T : V \to W$ خطی و وارون پذیر باشد. در این صورت $T^{-1} : W \to V$ نیز خطی است.

برهان. فرض کنید $y_1, y_2 \in W$ و $c \in F$. از آنجایی که T پوشا و یک به یک است، بردارهای یکتای x_1 و x_2 وجود دارند به گونه‌ای که $T(x_1) = y_1$ و $T(x_2) = y_2$. در نتیجه $x_1 = T^{-1}(y_1)$ و $x_2 = T^{-1}(y_2)$؛ پس:

$$\begin{aligned} T^{-1}(cy_1 + y_2) &= T^{-1}[cT(x_1) + T(x_2)] = T^{-1}[T(cx_1 + x_2)] \\ &= cx_1 + x_2 = cT^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

□

حال از قضیه ۵.۲ فوراً نتیجه می‌شود که اگر T تبدیلی خطی میان فضاهای برداری با ابعاد مساوی (و متناهی) باشد، وارون‌پذیری، یک به یک بودن، و پوشا بودن T معادلند.

حال آمادگی آن را داریم که وارون یک ماتریس را تعریف کنیم. خوب است خواننده به شباهتی که در اینجا با وارون تبدیلات خطی وجود دارد توجه کند.

تعریف:. فرض کنید A ماتریسی $n\times n$ باشد. در این صورت A **وارون‌پذیر** خوانده می‌شود، هرگاه ماتریسی $n\times n$ مانند B موجود باشد به طوری که $AB=BA=I$.

اگر A وارون‌پذیر باشد، آنگاه ماتریس B ای که برای آن $AB=BA=I$، یکتاست و آن را **وارون** A می‌نامند و با $A^{-۱}$ نشان می‌دهند (اگر C ماتریس دیگری با این خصوصیت باشد، آنگاه $C=CI=C(AB)=(CA)B=IB=B$)

مثال ۲. خوب است خواننده تحقیق کند که وارون $\begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۳ & -۷ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix}$ می باشد. $\square$

در بخش ۳-۲، روشی برای محاسبه وارون یک ماتریس خواهیم آموخت. در حال حاضر، نتایجی به دست خواهیم آورد که وارون ماتریس‌ها را به وارون تبدیلات ربط می‌دهند.

لم ۱. فرض کنید $T:V\to W$ تبدیلی خطی باشد که در اینجا V و W فضاهای برداری متناهی البُعدی هستند. هرگاه T وارون‌پذیر باشد، آنگاه $\dim(V)=\dim(W)$.

برهان. از آنجا که T یک به یک و پوشاست، داریم:

$$\operatorname{nullity}(T)=۰ \qquad \text{و} \qquad \dim(W)=\dim(R(T))=\operatorname{rank}(T)$$

پس بنا بر قضیه بُعد $\dim(V)=\dim(W)$. $\square$

قضیه ۱۸.۲. فرض کنید V و W فضاهای برداری متناهی‌البُعدی به ترتیب با پایه‌های مرتب β و γ باشند. فرض کنید $T:V\to W$ خطی باشد؛ در این صورت T وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $[T]_\beta^\gamma$ وارون‌پذیر باشد. بعلاوه $[T^{-۱}]_\gamma^\beta=([T]_\beta^\gamma)^{-۱}$.

برهان. فرض کنید T وارون‌پذیر باشد. بنا بر لم قبل، داریم $\dim(V)=\dim(W)$. فرض کنید $n=\dim(V)$. در این صورت $[T]_\beta^\gamma$، ماتریسی $n\times n$ خواهد بود. حال $T^{-۱}:W\to V$، در این دو رابطه صدق می‌کند: $T^{-۱}T=I_V$ و $TT^{-۱}=I_W$. در نتیجه:

$$I_n=[I_V]_\beta=[T^{-۱}T]_\beta=[T^{-۱}]_\gamma^\beta[T]_\beta^\gamma$$

به طور مشابه داریم $[T]_\beta^\gamma[T^{-۱}]_\gamma^\beta=I_n$؛ پس $[T]_\beta^\gamma$ وارون‌پذیر است و $[T^{-۱}]_\gamma^\beta=([T]_\beta^\gamma)^{-۱}$.

حال فرض کنید $A=[T]_\beta^\gamma$ وارون‌پذیر باشد. بنابراین ماتریسی $n\times n$ مانند B موجود است به طوری که $AB=BA=I_n$. بنا بر قضیه ۶.۲ $U\in\mathcal{L}(W,V)$ ای یافت می‌شود به گونه‌ای که برای هر $j=۱,۲,\dots,n$

$$U(w_j)=\sum_{i=۱}^{n}B_{ij}v_i$$

که در اینجا $\gamma = \{w_۱, \dots, w_n\}$ و $\beta = \{v_۱, \dots, v_n\}$. پس $[U]_\gamma^\beta = B$. برای اثبات اینکه $U = T^{-۱}$، مشاهده می‌کنید که بنا بر قضیه ۲.۱۱،

$$[UT]_\beta = [U]_\gamma^\beta [T]_\beta^\gamma = BA = I_n = [I_V]_\beta$$

پس $UT = I_V$ و به طور مشابه $TU = I_W$. □

مثال ۳. برای دو فضای برداری $P_۱(\mathbb{R})$ و $\mathbb{R}^۲$ به ترتیب پایه‌های $\beta = \{۱, x\}$ و $\gamma = \{e_۱, e_۲\}$ را اختیار کنید. همان طور که در مثال ۱ به دست آمد، داریم:

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad [T^{-۱}]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

از طریق ضرب ماتریسی می‌توان تحقیق کرد که هر یک از این دو ماتریس وارون یکدیگر هستند. □

نتیجه ۱. فرض کنید V فضای برداری متناهی‌البُعدی با پایه مرتب β باشد و نیز فرض کنید که $T : V \to V$ خطی است. در این صورت T وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $[T]_\beta$ وارون‌پذیر باشد. بعلاوه، $[T^{-۱}]_\beta = ([T]_\beta)^{-۱}$.

برهان. به عهده خواننده است. □

نتیجه ۲. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد. در این صورت A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر L_A وارون‌پذیر باشد. بعلاوه، $(L_A)^{-۱} = L_{A^{-۱}}$.

برهان. به عهده خواننده است. □

با استفاده از مفهوم وارون‌پذیری، می‌توان یکی از حقایقی را که خواننده ممکن است تاکنون به آن پی برده باشد، رسماً بیان کرد؛ و اینکه بعضی از فضاهای برداری کاملاً یکدیگر را تداعی می‌کنند، به جز اینکه ممکن است شکل عناصر آنها متفاوت باشد. برای مثال، در مورد $M_{۲\times۲}(F)$ و $F^۴$، اگر به هر ماتریس

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}،$$

چهارتایی (a, b, c, d) را نظیر کنیم، می‌بینیم که جمع و ضرب اسکالر به طور یکسان رفتار می‌کنند؛ یعنی اینکه از لحاظ ساختار فضای برداری، این دو فضا را می‌توان یکسان یا ایزومرف (یک شکل) دانست.

چند تعریف: فرض کنید V و W فضاهایی برداری باشند. گوییم V با W **ایزومرف** است، هرگاه تبدیل خطی ای مانند $T : V \to W$ یافت شود که وارون‌پذیر باشد. چنین تبدیل خطی ای را یک **ایزومرفیسم** از V به روی W می‌خوانند.

به عنوان تمرین به عهده خواننده می‌گذاریم که ثابت کند «ایزومرف است» است (به ضمیمه الف رجوع کنید).

مثال ۴. $T: F^{2} \to P_{1}(F)$ را به صورت $T(a_1, a_2) = a_1 + a_2 x$ تعریف کنید. به راحتی می‌توان بررسی کرد که T یک ایزومرفیسم است. پس F^{2} با $P_1(F)$ ایزومرف است. □

مثال ۵. $T: P_3(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ را به صورت $T(f) = \begin{bmatrix} f(1) & f(2) \\ f(3) & f(4) \end{bmatrix}$ تعریف کنید. به راحتی می‌توان بررسی کرد که T خطی است. با استفاده از «فرمول درون‌یابی» در بخش ۱-۶ می‌توان ثابت کرد که $T(F) = 0$ اگر و تنها اگر F چندجمله‌ای صفر باشد (این را با تمرین ۲۰ مقایسه کنید).؛ پس T یک به یک است و بنا بر قضیه ۵.۲ وارون‌پذیر هم هست. نتیجه می‌گیریم که $p_3(\mathbb{R})$ با $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ایزومرف است. □

در هر یک از مثال‌های ۴ و ۵، خواننده ممکن است فهمیده باشد که فضاهای برداری ایزومرف، ابعاد مساوی دارند. همان طور که قضیه بعدی نشان می‌دهد این یک تصادف نیست.

قضیه ۱۹.۲. فرض کنید V و W فضاهای برداری متناهی‌البُعد (هر دو روی یک میدان) باشند. در این صورت V با W ایزومرف است اگر و تنها اگر $\dim(V) = \dim(W)$.

برهان. فرض کنید V و W ایزومرف باشد و $T: V \to W$ ایزمرفیسمی از V به W باشد. بنا بر لم پیش از قضیه ۱۸.۲، داریم $\dim(V) = \dim(W)$. حال فرض کنید $\dim(V) = \dim(W)$، و نیز فرض کنید که $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ و $\gamma = \{w_1, \ldots, w_n\}$ به ترتیب پایه‌هایی برای V و W باشند. بنا بر قضیه ۶.۲، تابعی مانند $T: V \to W$ وجود دارد که خطی است و برای هر $i = 1, \ldots, n$، $T(v_i) = w_i$. با استفاده از قضیه ۲.۲ داریم:

$$R(T) = span(T(\beta)) = span(\gamma) = W$$

پس T پوشاست. از قضیه ۵.۲ چنین نتیجه می‌شود که T یک به یک نیز هست. □

نتیجه ۳. فرض کنید V فضایی برداری روی F باشد. در این صورت V با F^n ایزومرف است اگر و تنها اگر $\dim(V) = n$.

تا اینجا تبدیلات خطی را با نمایش ماتریسی‌شان مرتبط ساخته‌ایم. اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم که مجموعه تمام تبدیلات میان دو فضای برداری مفروض را می‌توان با فضای برداری مناسبی از ماتریس‌های $m \times n$ یکی دانست.

قضیه ۲۰.۲. فرض کنید V و W فضاهای برداری متناهی‌البُعدی روی F باشند که ابعاد آنها به ترتیب n و m است، و نیز فرض کنید که β و γ به ترتیب پایه‌های مرتبی برای V و W باشند. در این صورت تابع $\varphi: \mathcal{L}(V, W) \to M_{m\times n}(F)$ که به صورت $\varphi(T) = [T]_\beta^\gamma$ برای هر $T \in \mathcal{L}(V, W)$ تعریف می‌شود، ایزومرفیسم است.

برهان. بنا بر قضیه ۸.۲، φ خطی است. بنابراین باید نشان دهیم که φ یک به یک و پوشاست. اگر نشان دهیم که برای هر ماتریس $m \times n$ای مانند A، تبدیل خطی منحصر به فردی مانند $T: V \to W$ وجود دارد که $\varphi(T) = A$، به نتیجه

مورد نظر دست یافته‌ایم. فرض کنید $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ و $\gamma = \{w_1, \ldots, w_m\}$. فرض کنید A ماتریس $m \times n$ دلخواهی باشد. بنا بر قضیه ۶.۲ تبدیل خطی منحصر به فردی مانند $T : V \to W$ هست که:

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} w_i \qquad \text{برای هر } 1 \leqslant j \leqslant n،$$

اما این به این معناست که $[T]_\beta^\gamma = A$، یا به عبارت دیگر $\varphi(T) = A$. در نتیجه φ یک ایزومورفیسم است. □

نتیجه ۴. فرض کنید V و W فضاهای برداری متناهی‌البُعدی به ترتیب با ابعاد n و m باشند. در این صورت $\mathcal{L}(V, W)$ فضایی برداری با بُعد mn است.

برهان. اثبات را می‌توان از قضیه ۲۰.۲ و ۱۹.۲ و این واقعیت که $\dim(M_{m\times n}(F)) = mn$، به دست آورد. □

این بخش را با نتیجه‌ای به پایان می‌رسانیم که ما را قادر می‌سازد تا ارتباط خطی ای که بر فضاهای برداری مجرد تعریف شده‌اند با تبدیلات خطی روی F^n را، بهتر درک کنیم.

کار را با دادن نامی به تبدیل $x \to [x]_\beta$ که در بخش ۲-۲ معرفی شد، آغاز می‌کنیم.

تعریف:. فرض کنید β یک پایه مرتب برای فضای برداری n بُعدی V روی F باشد. منظور از **نمایش استاندارد** V نسبت به β، تابع $\varphi_\beta : V \to F^n$ است که به صورت $\varphi_\beta(x) = [x]_\beta$ برای هر $x \in V$ **تعریف** می‌شود.

مثال ۶. فرض کنید $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ و $\gamma = \{(1, 2), (3, 4)\}$. به راحتی دیده می‌شود که β و γ پایه‌هایی مرتب برای $\mathbb{R}^2$ اند. به ازای $x = (1, -2)$، داریم:

$$\varphi_\beta(x) = [x]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad \varphi_\gamma(x) = [x]_\gamma = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

□

قبلاً دیده‌ایم که φ_β تبدیلی خطی است. قضیه زیر مطالب بیشتری به ما می‌گوید.

قضیه ۲۱.۲. به ازای هر فضای برداری V با پایه مرتب β، φ_β یک ایزومرفیسم است.

برهان. به عهده خواننده است. □

این قضیه اثبات دیگری برای این مطلب است که هر فضای برداری n بُعدی با F^n ایزومرف است (به قضیه ۱۹.۲ رجوع کنید). فرض کنید V و W فضاهایی برداری به ترتیب با ابعاد n و m باشد و نیز فرض کنید که $T : V \to W$ تبدیلی خطی است. قرار دهید $A = [T]_\beta^\gamma$، که در اینجا β و γ به ترتیب پایه‌های مرتب دلخواهی برای V و W هستند. حال می‌توانیم φ_β و φ_γ را برای مطالعه ارتباط میان تبدیلات خطی T و $L_A : F^n \to F^m$ به کار گیریم.

ابتدا تصویر ۲-۲ را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که اینجا دو ترکیب از تبدیلات خطی وجود دارد که V را به درون F^m تصویر می‌کنند:

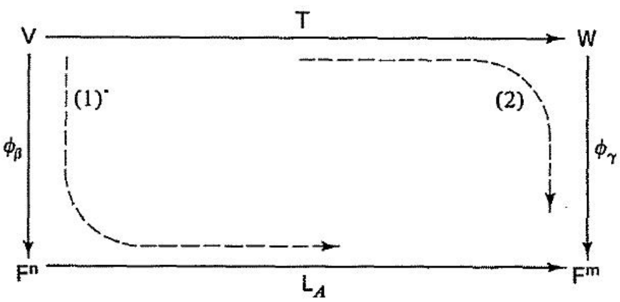
۱. ابتدا V را با φ_β به درون F^n تصویر کنید. بعد L_A را به دنبال آن اثر دهید؛ نتیجه، ترکیب $L_A\varphi_\beta$ خواهد بود.

۲. V را با T به درون W تصویر کنید و φ_γ را به دنبال آن اثر دهید تا ترکیب $\varphi_\gamma T$ به دست آید.

این دو ترکیب با دو فلش خط چین در نمودار نشان داده شده است. با بازنویسی مختصر قضیه ۱۴.۲ می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$L_A\varphi_\beta = \varphi_\gamma T$$

یعنی این نمودار تعویض‌پذیر است.



شکل ۲-۲:

برای اینکه به درک مطلب کمک کرده باشیم، می‌توانیم بگوییم مضمون این رابطه، این است که پس از یکی گرفتن V و W به ترتیب با F^n و F^m با استفاده از φ_β و φ_γ، می‌توان T را با L_A یکی گرفت.

مثال ۷. تبدیل $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ را که در مثال ۴ بخش ۲-۲ تعریف شد به یاد آورید ($T(f) = f'$). فرض کنید β و γ به ترتیب پایه‌های مرتب استاندارد $P_3(\mathbb{R})$ و $P_2(\mathbb{R})$ باشند، و فرض کنید $\varphi_\beta : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ و $\varphi_\gamma : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ به ترتیب نمایش استاندارد $P_3(\mathbb{R})$ و $P_2(\mathbb{R})$ باشند. فرض کنید $A = [T]_\beta^\gamma$. در این صورت:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

چندجمله‌ای $p(x) = ۲ + x - ۳x^۲ + ۵x^۳$ را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم که $L_A\varphi_\beta(p) = \varphi_\gamma T(p)$ داریم:

$$L_A\varphi_\beta(p) = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ -۳ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۶ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$$

اما از آنجا که $T(p)(x) = p'(x) = ۱ - ۶x + ۱۵x^۲$، داریم:

$$\varphi_\gamma T(p) = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۶ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$$

در نتیجه $L_A\varphi_\beta(p) = \varphi_\gamma T(p)$. □

سعی کنید که این مثال را با قرار دادن چندجمله‌ای‌های مختلف به جای $p(x)$ تکرار کنید.

تمرینات

۱. مشخص کنید که کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است. در هر یک از این موارد V و W دو فضای برداری، به ترتیب با پایه‌های مرتب (متناهی) α و β هستند، $T : V \to W$ خطی است و A و B دو ماتریس می‌باشند.

الف) $([T]_\alpha^\beta)^{-۱} = [T^{-۱}]_\alpha^\beta$.

ب) T وارون‌پذیر است، اگر و تنها اگر T یک به یک و پوشا باشد.

ج) $T = L_A$، که در اینجا $A = [T]_\alpha^\beta$.

د) $M_{۲\times۳}(F)$ با $F^۵$ ایزومرف است.

ه) $P_n(F)$ با $P_m(F)$ ایزومرف است، اگر و تنها اگر $n = m$.

و) $AB = I$ نتیجه می‌دهد که هر یک از A و B وارون‌پذیر هستند.

ز) $(A^{-۱})^{-۱} = A$.

ح) A وارون‌پذیر است، اگر وتنها اگر L_A وارون‌پذیر باشد.

ط) A برای اینکه وارون داشته باشد، باید مربعی باشد.

۲. فرض کنید A و B دو ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ باشند. ثابت کنید AB وارون‌پذیر است و $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

۳. فرض کنید A وارون‌پذیر باشد. ثابت کنید A^t نیز وارون‌پذیر است و $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

۴. ثابت کنید که اگر A وارون‌پذیر باشد و $AB = 0$ آنگاه $B = 0$.

۵. ثابت کنید که اگر $A^2 = 0$، آنگاه A وارون‌پذیر نیست.

۶. نتایج ۱ و ۲ قضیه ۱۸.۲ را ثابت کنید.

۷. فرض کنید A و B ماتریس‌های $n \times n$ ای باشند که AB وارون‌پذیر است. ثابت کنید که A و B وارون‌پذیر هستند. مثالی ارائه دهید که نشان دهد که ماتریس‌های دلخواه A و B در صورتی که AB وارون‌پذیر باشد، لزوماً وارون‌پذیر نیستند.

۸. فرض کنید A و B ماتریس‌های $n \times n$ ای باشند که $AB = I_n$. ثابت کنید:

الف) A و B وارون‌پذیر هستند.

ب) $A = B^{-1}$ و در نتیجه $B = A^{-1}$ (در واقع می‌خواهیم این مطلب را بیان کنیم که برای ماتریس‌های مربعی، وارون «یک طرفی» همان وارون «دو طرفی» است).

ج) نتایج مشابهی را برای تبدیلات خطی‌ای که روی فضاهای برداری متناهی‌البُعد تعریف شده‌اند، ثابت کنید.

۹. تحقیق کنید که تبدیل خطی‌ای که در مثال ۵ ارائه شد یک به یک است.

۱۰. قضیه ۲۱.۲ را ثابت کنید.

۱۱. فرض کنید $\sim$ به معنای «ایزومرف است با» باشد. ثابت کنید که $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی رده فضاهای برداری روی F است.

۱۲. فرض کنید:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in F \right\}$$

ایزومرفیسمی از V به F^3 بسازید.

۱۳. فرض کنید V و W دو فضای برداری متناهی‌البُعد و $T : V \to W$ یک تبدیل خطی باشد. فرض کنید β پایه مرتبی برای V باشد. ثابت کنید که T ایزومرفیسم است، اگر و تنها اگر $T(\beta)$ پایه مرتبی برای W باشد.

۱۴. فرض کنید B یک ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ باشد. $\varphi : M_{n\times n}(F) \to M_{n\times n}(F)$ را به صورت $\varphi(A) = B^{-1}AB$ تعریف کنید؛ ثابت کنید که φ یک ایزومرفیسم است.

۱۵. فرض کنید V و W، دو فضای برداری متناهی‌البُعد باشد و $T : V \to W$ یک ایزومرفیسم باشد. همچنین فرض کنید که $V_\circ$ زیرفضایی از V باشد.

الف) ثابت کنید که $T(V_\circ)$ زیرفضایی از W است.

ب) ثابت کنید $\dim(V_\circ) = \dim(T(V_\circ))$.

۱۶. مثال ۷ را با چندجمله‌ای $p(x) = ۱ + x + ۲x^۲ + x^۳$ تکرار کنید.

۱۷. فرض کنید $V = M_{۲\times۲}(\mathbb{R})$ فضای برداری ماتریس‌های ۲ × ۲ با درایه‌های حقیقی باشد. از مثال ۵ بخش ۲-۱ به یاد آورید که نگاشت $T : V \to V$ ای که به صورت $T(A) = A^t$ برای هر $A \in V$ تعریف می‌شود، تبدیلی خطی است. فرض کنید $\beta = \{E^{۱۱}, E^{۱۲}, E^{۲۱}, E^{۲۲}\}$ که E^{ij} ماتریس ۲ × ۲ ای است که درایه ij ام آن برابر با یک، و سایر درایه‌های آن برابر با صفر هستند.

الف) ثابت کنید که β پایه مرتبی برای V است.

ب) $[T]_\beta$ را حساب کنید.

ج) فرض کنید φ نمایش استاندارد V نسبت به β را نشان دهد. تحقیق کنید که برای ماتریس زیر $L_A\varphi(M) = \varphi T(M)$.

$$M = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

۱۸. فرض کنید $T : V \to W$ یک تبدیل خطی از فضای برداری n بُعدی V به فضای برداری m بُعدی W باشند. فرض کنید β و γ به ترتیب پایه‌های مرتبی برای V و W باشد. ثابت کنید $\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}(L_A)$ و $\mathrm{nullity}(T) = \mathrm{nullity}(L_A)$، که $A = [T]_\beta^\gamma$. **راهنمایی:** تمرین ۱۵ را در مورد شکل ۲-۲ به کار گیرید.

۱۹. فرض کنید V و W دو فضای برداری متناهی‌البُعد به ترتیب با پایه‌های مرتب $\beta = \{v_۱, \dots, v_n\}$ و $\gamma = \{w_۱, \dots, w_m\}$ باشند. طبق قضیه ۶.۲ تبدیلات خطی‌ای مانند $T_{ij} : V \to W$ وجود دارند که:

$$T_{ij}(v_k) = \begin{cases} w_i & ;k = j \text{ اگر} \\ \circ & ;k \neq j \text{ اگر} \end{cases}$$

ابتدا ثابت کنید که $\{T_{ij} : ۱ \leqslant i \leqslant m, ۱ \leqslant j \leqslant n\}$ پایه‌ای برای $\mathcal{L}(V, W)$ است. سپس فرض کنید E^{ij}، ماتریس $m \times n$ ای باشد که در درایه سطر i ام و ستون j ام آن ۱ و در سایر درایه‌های آن ∘ قرار داشته باشد، و

ثابت کنید که $[T_{ij}]_\beta^\gamma = E^{ij}$. باز طبق قضیه ۶.۲ تبدیلی خطی‌ای مانند $\varphi : \mathcal{L}(V, W) \to M_{m\times n}(F)$ وجود دارد که $\varphi(T_{ij}) = E^{ij}$. ثابت کنید که φ یک ایزومرفیسم است.

۲۰. فرض کنید $c_\circ, c_۱, \dots, c_n$، اعضای متمایزی از میدان نامتناهی F باشند. $T : P_n(F) \to F^{n+۱}$ را به صورت $T(f) = (f(c_\circ), \dots, f(c_n))$ تعریف کنید. ثابت کنید که T یک ایزومرفیسم است. **راهنمایی:** از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مربوط به $c_\circ, \dots, c_n$ استفاده کنید.

۲۱. فرض کنید V فضایی برداریی را نشان دهد که در مثال ۵ بخش ۱-۲ تعریف شد و نیز فرض کنید $W = P(F)$. $T : V \to W$ را این گونه تعریف کنید:

$$T(\sigma) = \sum_{i=\circ}^{n} \sigma(i) x^i$$

که n بزرگترین عدد صحیحی است که $\sigma(n) \neq \circ$. ثابت کنید که T یک ایزومرفیسم است.

حل تمرینات زیر نیازمند آشنایی با مفهوم فضای خارج قسمت که در تمرین ۳۱ بخش ۱-۳ تعریف شد، و نیز آشنایی با تمرین ۳۴ بخش ۲-۱ است.

۲۲. فرض کنید $T : V \to Z$ یک تبدیل خطی پوشا از فضای برداری V به فضای برداری Z باشد. نگاشت $\bar{T} : V/N(T) \to Z$ را به صورت $\bar{T}(v + N(T)) = T(v)$ به ازای هر هم‌مجموعه $v + N(T)$ در $V/N(T)$ تعریف کنید.

الف) ثابت کنید که $\bar{T}$ خوش‌تعریف است؛ یعنی ثابت کنید که اگر $v + N(T) = v' + N(T)$، آنگاه $T(v) = T(v')$.

ب) ثابت کنید که $\bar{T}$ خطی است.

ج) ثابت کنید که $\bar{T}$ یک ایزومرفیسم است.

د) ثابت کنید که نمودار شکل ۲-۳ تعویض‌پذیر است، یعنی ثابت کنید که $T = \bar{T}\eta$.

۲۳. فرض کنید V یک فضای برداری نابدیهی روی میدان F باشد و فرض کنید که S پایه‌ای برای V باشد (طبق نتیجه قضیه ۱۳.۱ در بخش ۱-۷، هر فضای برداری یک پایه دارد). فرض کنید $C(S, F)$ فضای برداری همه توابع $f \in \mathcal{F}(S, F)$ را نشان دهد که جز برای تعدادی متناهی از اعضای S، $f(s) = \circ$ (به تمرین ۱۴ بخش ۱-۳ رجوع کنید). فرض کنید $\psi : C(S, F) \to V$، تابعی باشد که اینگونه تعریف می‌شود:

$$\psi(f) = \sum_{s \in S, f(s) \neq \circ} f(s) s$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, dashed, "T"] \arrow[dr, dashed, "\eta"'] & & Z \\
& V/N(T) \arrow[ur, dashed, "\overline{T}"'] &
\end{tikzcd}$$

شکل ۲-۳:

ثابت کنید که ψ یک ایزومرفیسم است. بنابراین به هر فضای برداری غیر بدیهی، می‌توان به دید فضایی از توابع نگاه کرد.

۲-۵ ماتریس تبدیل مختصات

در بسیاری از شاخه‌های ریاضی، برای ساده‌تر ساختن یک عبارت از تغییر متغیر استفاده می‌شود. به عنوان مثال، در حسابان، پاد مشتق (انتگرال) $۲xe^{x^۲}$ را می‌توان با تغییر متغیر $u = x^۲$ پیدا کرد. عبارتی که حاصل می‌شود، چنان شکل ساده‌ای دارد که پاد مشتق (انتگرال) آن را به راحتی می‌توان تشخیص داد.

$$\int ۲xe^{x^۲}dx = \int e^u du = e^u + c = e^{x^۲} + c$$

به طور مشابه، در هندسه مسطحه، تغییر متغیر:

$$x = \frac{۲}{\sqrt{۵}}x' - \frac{۱}{\sqrt{۵}}y'$$
$$y = \frac{۱}{\sqrt{۵}}x' + \frac{۲}{\sqrt{۵}}y'$$

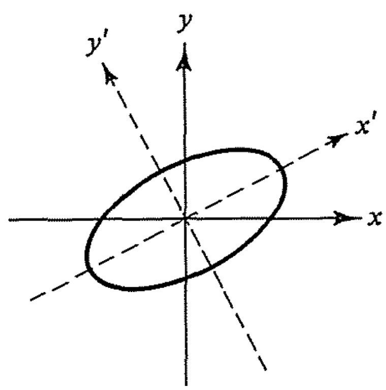
را می‌توان برای تبدیل معادله $۲x^۲ - ۴xy + ۵y^۲ = ۱$ به شکل ساده‌تر $(x')^۲ + ۶(y')^۲ = ۱$ به کار برد و از این طریق به راحتی می‌توان تشخیص داد که معادله اول، معادله یک بیضی است (به شکل ۲-۴ رجوع کنید). در بخش ۶-۵ چگونگی یافتن این تغییر متغیر را مشاهده خواهید کرد. از لحاظ هندسی، تغییر متغیر:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

تغییری است در طرز بیان موقعیت نقطه P در صفحه. این کار، با معرفی یک چارچوب مرجع جدید صورت می‌گیرد، یعنی دستگاه مختصاتی مانند $x'y'$ که محورهای آن نسبت به دستگاه مختصات اصلی xy دوران یافته‌اند. در مثال فوق، محورهای مختصات جدید طوری انتخاب شده‌اند که در جهت محورهای بیضی قرار بگیرند. بردارهای واحد متناظر با محورهای x' و y' تشکیل یک پایه مرتب برای $\mathbb{R}^۲$ می‌دهند.

$$\beta' = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{۲}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix} \quad ، \quad \begin{bmatrix} -\frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix} \right\}$$

و تغییر متغیر صورت گرفته در حقیقت تغییر از $[P]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$، یعنی مختصات بردار P نسبت به پایه مرتب استاندارد



شکل ۲-۴:

$\beta = \{e_۱, e_۲\}$، به $[P]_{\beta'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$، یعنی مختصات P نسبت به دستگاه مختصات دوران‌یافته جدید β' است. اکنون این سؤال مطرح می‌شود که چگونه می‌توان بردار مختصات نسبت به یک پایه را به بردار مختصات در پایه دیگر تبدیل کرد. توجه کنید که در این مثال، دستگاه معادلاتی را که مختصات جدید و قبلی را به هم مربوط می‌کند، می‌توان با تساوی ماتریسی زیر نشان داد:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{\sqrt{۵}} & -\frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

همچنین توجه کنید که ماتریس:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{۲}{\sqrt{۵}} & -\frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix}$$

برابر است با $[I]_{\beta'}^{\beta}$، که در اینجا I نشانگر تبدیل همانی روی $\mathbb{R}^۲$ است. بنابراین برای هر $v \in \mathbb{R}^۲$، $[v]_\beta = Q[v]_{\beta'}$. در حالت کلی نیز نتیجه‌ای مشابه وجود دارد.

قضیه ۲.۲۲. فرض کنید βو β' دو پایه مرتب برای فضای برداری V باشند و فرض کنید $Q = [I_V]_{\beta'}^{\beta}$. در این صورت:

(الف) Q وارون‌پذیر است.

(ب) به ازای هر $v \in V$ داریم: $[v]_\beta = Q[v]_{\beta'}$.

برهان. الف) از آنجا که I_V وارون‌پذیر است، طبق قضیه ۲.۱۸، Q هم وارون‌پذیر است.
ب) برای هر $v \in V$، بنا بر قضیه ۲.۱۴:

$$[v]_\beta = [I_V(v)]_\beta = [I_V]_{\beta'}^{\beta}[v]_{\beta'} = Q[v]_{\beta'}$$

□

ماتریس $Q = [I_V]_{\beta'}^{\beta}$ که در قضیه ۲.۲۲ تعریف شد، **ماتریس تبدیل مختصات** نام دارد. با توجه به قسمت ب از قضیه اخیر می‌توان گفت که Q **مختصات در مبنای β' را به مختصات در مبنای β تبدیل می‌کند.** ملاحظه کنید که هرگاه $\beta = \{x_۱, \ldots, x_n\}$ و $\beta' = \{x'_۱, \ldots, x'_n\}$، آنگاه:

$$x'_j = \sum_{i=۱}^{n} Q_{ij}x_i \qquad j = ۱, ۲, \ldots, n \text{ برای هر}$$

به عبارت دیگر، j امین ستون Q، $[x'_j]_\beta$ می‌باشد.

توجه کنید که اگر Q مختصات در پایه β' را به مختصات در پایه β تبدیل کند، $Q^{-۱}$ هم مختصات در پایه β را به مختصات در پایه β' تبدیل خواهد کرد (به تمرین ۱۰ رجوع کنید).

مثال ۱. در $\mathbb{R}^۲$ فرض کنید $\beta = \{(۱, ۱), (۱, -۱)\}$ و $\beta' = \{(۲, ۴), (۳, ۱)\}$. از آنجا که

$$(۲, ۴) = ۳(۱, ۱) - ۱(۱, -۱) \quad \text{و} \quad (۳, ۱) = ۲(۱, ۱) + ۱(۱, -۱)$$

ماتریسی که مختصات در پایه β' را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند، عبارت است از:

$$Q = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس به عنوان مثال،

$$[(۲,۴)]_\beta = Q[(۲,۴)]_{\beta'} = Q\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

□

در ادامه این بخش، تنها تبدیلاتی را در نظر می‌گیریم که فضای برداری مانند V را در درون خودش تصویر کنند. چنین تبدیل خطی را یک **عملگر خطی** بر V می‌نامند. حال فرض کنید که T عملگری خطی بر فضای برداری V، β و β' پایه‌های مرتبی برای آن باشند. در این صورت، T را می‌توان با دو ماتریس $[T]_\beta$ و $[T]_{\beta'}$ نمایش داد. ارتباط میان این دو ماتریس چیست؟ قضیه زیر جواب ساده‌ای برای این سؤال بر حسب یک ماتریس تغییر مختصات می‌دهد.

قضیه ۲۳.۲. فرض کنید T یک عملگر خطی بر فضای برداری متناهی‌البُعد V و β و β' پایه‌های مرتبی برای V باشند. همچنین فرض کنید Q ماتریس تبدیل مختصاتی باشد که مختصات در پایه β' را به مختصات در پایه β تبدیل کند. در این صورت:

$$[T]_{\beta'} = Q^{-۱}[T]_\beta Q.$$

برهان. فرض کنید I تبدیل همانی روی V باشد. در این صورت $T = IT = TI$ و لذا طبق قضیه ۱۱.۲ داریم:

$$Q[T]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta}[T]_{\beta'}^{\beta'} = [IT]_{\beta'}^{\beta} = [TI]_{\beta'}^{\beta} = [T]_{\beta}^{\beta}[I]_{\beta'}^{\beta} = [T]_\beta Q$$

بنابراین $[T]_{\beta'} = Q^{-۱}[T]_\beta Q$. □

مثال ۲. فرض کنید $V = \mathbb{R}$ و $T : V \to V$ با رابطه زیر تعریف شده باشد:

$$T\left(\begin{bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ a_۳ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۲a_۱ + a_۲ \\ a_۱ + a_۲ + ۳a_۳ \\ -a_۲ \end{bmatrix}$$

فرض کنید β پایه مرتب استاندارد $\mathbb{R}^۳$ باشد و فرض کنید:

$$\beta' = \left\{\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}\right\}$$

که خود نیز پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۳$ است. به عنوان مثالی برای قضیه ۲۳.۲ توجه می‌کنیم که:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

فرض کنید Q ماتریسی باشد که مختصات در مبنای β' را به مختصات به مبنای β تبدیل می‌کند. از آنجا که β پایه مرتب استاندارد $\mathbb{R}^۳$ است، برای به دست آوردن ستون‌های Q کافی است اعضای β' را با همان ترتیب قرار گرفتنشان در β' بنویسیم (به تمرین ۱۱ رجوع کنید). در نتیجه:

$$Q^{-۱} = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

به راحتی می‌توان دید که:

$$Q^{-۱} = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

با استفاده از قضیه ۲۳.۲ داریم:

$$[T]_{\beta'} = Q^{-۱}[T]_\beta Q = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۸ \\ -۱ & ۴ & ۶ \\ ۰ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

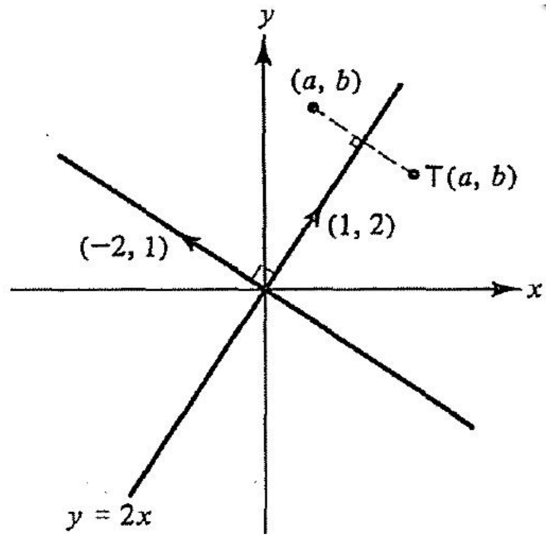
برای اینکه باز هم مطمئن شویم که این همان ماتریس مطلوب است، می‌توانیم تحقیق کنیم که تصویر j امین عضو β' تحت T، آن ترکیب خطی از عناصر β' است که ضرایب آن درایه‌های j امین ستون ماتریس اخیرند. به عنوان مثال، برای $j = ۲$ داریم:

$$T\left(\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\right) = ۲\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + ۴\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + (-۱)\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

توجه کنید که ضرایب این ترکیب خطی، درایه‌های ستون دوم $[T]_{\beta'}$ هستند. □

همان طور که مثال بعدی نشان می‌دهد، به کار بردن قضیه ۲۳.۲ به ترتیب عکس، بسیاری از اوقات مفید واقع می‌شود.

مثال ۳. انعکاس نسبت به محور x ها را از مثال ۳ در قسمت ۲-۱ به یاد آورید. ضابطه $(x, y) \to (x, -y)$ خیلی راحت به دست می‌آید. اکنون ضابطه انعکاس نسبت به خط $y = ۲x$، یعنی T را که وضوح کمتری دارد به دست می‌آوریم (به شکل ۲-۵ رجوع کنید). هدف ما این است که برای هر $(a, b) \in \mathbb{R}^۲$، $T(a, b)$ را با یک فرمول بیان کنیم. از آنجا که T خطی است، با مقادیرش در یگ پایه دلخواه $\mathbb{R}^۲$ کاملاً مشخص می‌شود. واضح است که $T(۱, ۲) = (۱, ۲)$ و



شکل ۲-۵:

$(۲,-۱) = (۲,۱) - (-۲,۱) = T(-۲,۱)$. بنابراین اگر فرض کنیم:

$$\beta' = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

در این صورت β' پایه‌ای مرتب برای $\mathbb{R}^۲$ است و

$$[T]_{\beta'} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

فرض کنیم β پایه مرتب استاندارد $\mathbb{R}^۲$ باشد و فرض کنید Q ماتریسی باشد که مختصات در پایه β' را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند. در این صورت:

$$Q = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

و $[T]_{\beta'} = Q^{-۱}[T]_\beta Q$. می‌توان این معادله را بر حسب $[T]_\beta$ حل کرد که در این صورت خواهیم داشت: $= [T]_\beta$

$Q[T]_{\beta'}Q^{-1}$. از آنجا که:

$$Q^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

خواننده می‌تواند تحقیق کند که:

$$[T]_\beta = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

از آنجا که β پایه مرتب استاندارد است، T تبدیل ضرب از چپ نظیر $[T]_\beta$ است. پس برای هر (a,b) در $\mathbb{R}^2$ داریم:

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3a+4b \\ 4a+3b \end{bmatrix}$$

□

رابطه میان ماتریس‌های $[T]_\beta$ و $[T]_{\beta'}$ در قضیه ۲۳.۲، در فصول ۵، ۶ و ۷ مورد مطالعه بیشتری قرار خواهد گرفت. با این وجود، در همین جا نامی برای این رابطه می‌گذاریم.

تعریف:. فرض کنید A و B اعضایی از $M_{n\times n}(F)$ باشند. گوییم B با A **متشابه** است هرگاه ماتریس وارون‌پذیری مانند Q وجود داشته باشد به طوری که $B = Q^{-1}AQ$.

ملاحظه کنید که رابطه تشابه به وضوح یک رابطه هم‌ارزی است (به مسأله ۸ رجوع کنید).

همچنین توجه کنید که با این نمادگذاری می‌توان قضیه ۲۳.۲ را به شرح زیر بیان کرد:

هرگاه T تبدیلی خطی بر فضای برداری متناهی‌البُعد V باشد و β و β' پایه‌های مرتبی برای V باشند، در این صورت $[T]_{\beta'}$ با $[T]_\beta$ متشابه است.

قضیه ۲۳.۲ را می‌توان برای حالت $T : V \to W$ که در آن V و W متفاوت هستند نیز تعمیم داد. در این حالت پایه‌ها را می‌توان هم در V و هم در W عوض کرد (به تمرین ۷ مراجعه شود).

تمرینات

۱. مشخص کنید که کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) اگر $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ و $\beta' = \{x'_1, \ldots, x'_n\}$ پایه‌های مرتبی برای یک فضای برداری و Q ماتریس تبدیل مختصاتی باشد که مختصات در پایه β' را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند، آنگاه ستون j ام Q، $[x_j]_{\beta'}$ می‌باشد.

ب) هر ماتریس تبدیل مختصات وارون‌پذیر است.

ج) فرض کنید که T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی‌البُعد V و β و β' پایه‌های مرتبی برای V باشند و نیز فرض کنید که Q ماتریس تبدیل مختصاتی باشد که مختصات در پایه β' را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند. در این صورت $[T]_\beta = Q[T]_{\beta'}Q^{-1}$.

د) ماتریس‌های $A, B \in M_{n\times n}(F)$ را متشابه گویند هرگاه به ازای ماتریسی مانند $Q \in M_{n\times n}(F)$، $B = Q^t AQ$.

ه) فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی‌البُعد V باشد. در این صورت به ازای هر دو پایه مرتب β و γ برای V، $[T]_\beta$ با $[T]_\gamma$ متشابه است.

۲. برای هر جفت پایه مرتب β و β' برای $\mathbb{R}^۲$ که در زیر آمده است، ماتریس تبدیل مختصاتی را بیابید که مختصات در پایه β' را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند.

الف) $\beta = \{e_۱, e_۲\}$ و $\beta' = \{(a_۱, a_۲), (b_۱, b_۲)\}$.

ب) $\beta = \{(-۱, ۳), (۲, -۱)\}$ و $\beta' = \{(۰, ۱۰), (۵, ۰)\}$.

ج) $\beta = \{(۲, ۵), (-۱, -۳)\}$ و $\beta' = \{e_۱, e_۲\}$.

د) $\beta = \{(-۴, ۳), (۲, -۱)\}$ و $\beta' = \{(۲, ۱), (-۴, ۱)\}$.

۳. برای هر جفت از پایه‌های مرتب β و β' برای $P_۲(\mathbb{R})$ که در زیر آمده است، ماتریس تبدیل مختصاتی را بیابید که مختصات در پایه β' را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند.

الف) $\beta = \{x^۲, x, ۱\}$ و $\beta' = \{a_۲x^۲ + a_۱x + a_۰, b_۲x^۲ + b_۱x + b_۰, c_۲x^۲ + c_۱x + c_۰\}$.

ب) $\beta = \{۱, x, x^۲\}$ و $\beta' = \{a_۲x^۲ + a_۱x + a_۰, b_۲x^۲ + b_۱x + b_۰, c_۲x^۲ + c_۱x + c_۰\}$.

ج) $\beta = \{۲x^۳ - x, ۳x^۲ + ۱, x^۲\}$ و $\beta' = \{۱, x, x^۲\}$.

د) $\beta = \{x^۲ - x + ۱, x + ۱, x^۲ + ۱\}$ و $\beta' = \{x^۲ + x + ۴, ۴x^۲ - ۳x + ۲, ۲x^۲ + ۳\}$.

ه) $\beta = \{x^۲ - x, x^۲ + ۱, x - ۱\}$ و $\beta' = \{۵x^۲ - ۲x - ۳, -۲x^۲ + ۵x + ۵, ۲x^۲ - x - ۳\}$.

و) $\beta = \{۲x^۲ - x + ۱, x^۲ + ۳x - ۲, -x^۲ + ۲x + ۱\}$ و $\beta' = \{۹x - ۹, x^۲ + ۲۱x - ۲, ۳x^۲ + ۵x + ۲\}$.

۴. فرض کنید T عملگر خطی‌ای بر $\mathbb{R}^۲$ باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۲a + b \\ a - ۳b \end{bmatrix}$$

و نیز فرض کنید β پایه مرتب $\mathbb{R}^۲$ باشند و

$$\beta' = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \right\}$$

با استفاده از این واقعیت که:

$$\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \right)^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

و همچنین با توجه به قضیه ۲۳.۲، $[T]_{\beta'}$ را پیدا کنید.

۵. فرض کنید T عملگر خطی‌ای بر $P_۱(\mathbb{R})$ باشد که به صورت $T(p) = p'$ تعریف می‌شود، که منظور از p' مشتق p است. فرض کنید $\beta = \{۱, x\}$ و $\beta' = \{۱ + x, ۱ - x\}$. با استفاده از این واقعیت که:

$$\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \right)^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

و نیز قضیه ۲۳.۲، $[T]_{\beta'}$ را پیدا کنید.

۶. در $\mathbb{R}^۲$ فرض کنید L برابر با خط $y = mx$ باشد که $m \neq ۰$. فرمولی برای $T(x, y)$ بیابید، هنگامی که:

الف) T انعکاس در $\mathbb{R}^۲$ نسبت به L باشد.

ب) T تصویر روی L در راستای خط عمود بر L باشد (برای تعریف تصویر به تمرینات بخش ۲-۱ رجوع کنید).

۷. تعمیم زیر را از قضیه ۲۳.۲ ثابت کنید. فرض کنید $T : V \to W$، تبدیلی خطی از فضای برداری متناهی‌البُعد V به فضای برداری متناهی‌البُعد W باشد. همچنین فرض کنید که β و β' پایه‌های مرتبی برای V، و γ و γ' پایه‌های مرتبی برای W باشد. در این صورت $[T]_{\beta'}^{\gamma'} = P^{-۱}[T]_{\beta}^{\gamma}Q$ که Q در اینجا ماتریسی است که مختصات در پایه β' را به مختصات در پایه β و P ماتریسی است که مختصات در پایه γ' را به مختصات در پایه γ تبدیل می‌کند.

۸. ثابت کنید که « متشابه است با» یک رابطه هم‌ارزی روی $M_{n\times n}(F)$ است.

۹. ثابت کنید که اگر A و B ماتریس‌های $n \times n$ متشابهی باشند، آنگاه $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$. راهنمایی: از تمرین ۱۲ بخش ۲-۳ استفاده کنید.

۱۰. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی‌البُعد، با سه پایه مرتب α، β و γ باشد.

الف) ثابت کنید که اگر Q و R به ترتیب ماتریس‌های تبدیل مختصاتی باشند که مختصات در پایه α را به مختصات در پایه β و مختصات در پایه β را به مختصات در پایه γ تبدیل می‌کنند، آنگاه RQ ماتریس تبدیل مختصاتی خواهد بود که مختصات در پایه α را به مختصات در پایه γ تبدیل می‌کند.

ب) ثابت کنید که اگر Q مختصات در پایه α را به مختصات در پایه β تبدیل کند آنگاه Q^{-1} مختصات در پایه β را به مختصات در پایه α تبدیل می‌کند.

۱۱. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد که درایه‌های آن در میدان F واقع هستند و γ پایه مرتبی برای F^n باشد و نیز $B = [L_A]_\gamma$. ثابت کنید $B = Q^{-1}AQ$، که Q ماتریس $n \times n$ ای است که ستون j ام آن برابر با j امین بردار γ است.

۱۲. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی‌البُعد روی میدان F باشد و $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ پایه مرتبی برای V باشد. فرض کنید Q یک ماتریس $n \times n$ وارون‌پذیر باشد که درایه‌های آن در F واقع هستند. تعریف کنید:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} Q_{ij} x_i \qquad \text{برای هر } 1 \leqslant j \leqslant n،$$

و قرار دهید $\beta' = \{x'_1, \ldots, x'_n\}$. ثابت کنید که β' پایه‌ای برای V است و در نتیجه Q ماتریس تبدیل مختصاتی است که مختصات در پایه β' را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند.

۱۳. عکس تمرین ۷ را ثابت کنید: اگر A و B هر کدام ماتریس‌های $m \times n$ روی میدان F باشند و ماتریس وارون‌پذیر $P_{m\times m}$ به همراه ماتریس وارون‌پذیر $Q_{n\times n}$ به‌گونه‌ای یافت شوند که $B = P^{-1}AQ$، آنگاه فضای برداری n بُعدی مانند V و فضای برداری m بُعدیی مانند W هر دو روی F، به همراه دو پایه مرتب β و β' برای V و γ و γ' باری W، و یک تبدیل خطی $T : V \to W$ وجود خواهند داشت به گونه‌ای که:

$$B = [T]_{\beta'}^{\gamma'} \qquad \text{و} \qquad A = [T]_\beta^\gamma$$

راهنمایی: فرض کنید $V = F^n$، $W = F^m$، $T = L_A$ و β و γ به ترتیب پایه‌های مرتب استاندارد F^n و F^m باشند. حال با به کارگیری نتایج تمرین ۱۲، به ترتیب با استفاده از Q و P پایه‌های مرتب β' و γ' را از روی β و γ به دست آورید.

۲-۶ *فضای دوگان

در این فصل تنها با تبدیلات خطی از یک فضای برداری مانند V به درون میدان اسکالرهای خودش، F، که خود نیز فضایی برداری با بُعد ۱ روی F است سر و کار داریم. چنین تبدیلی را یک **تابعک خطی** بر V گویند. تابعک‌های خطی را معمولاً با حروفی مانند f، g، h و غیره نشان می‌دهیم. چنانکه در مثال ۱ خواهیم دید، انتگرال معین یکی از مهم ترین نمونه‌های تابعک‌های خطی در ریاضی است.

مثال ۱. فرض کنید V فضای برداری توابع حقیقی روی بازه $[۰, ۲\pi]$ باشد. تابع $g \in V$ را تثبیت کنید. تابع $h : V \to \mathbb{R}$ که به صورت:

$$h(x) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{۰}^{۲\pi} x(t)g(t)dt$$

تعریف می‌شود، تابعکی خطی بر V است. در دو حالتی که $g(t)$ برابر با $\sin nt$ یا $\cos nt$ است، $h(x)$ را معمولاً nامین **ضریب فوریه** x می‌خوانند. □

مثال ۲. فرض کنید $V = M_{n\times n}(F)$ و $f : V \to F$ را به صورت $f(A) = \mathrm{tr}(A)$ یعنی ردّ A تعریف کنید. با استفاده از تمرین ۶ از بخش ۱-۳ معلوم می‌شود که f تابعکی خطی است. □

مثال ۳. فرض کنید V یک فضای متناهی‌البُعدی باشد و $\beta = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ نیز پایه‌ای مرتب برای V باشد. به ازای هر $i = ۱, \ldots, n$، $f_i(x)$ را برابر a_i تعریف می‌کنیم که:

$$[x]_\beta = \begin{bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

بردار مختصات x نسبت به β است. f_i تابعکی خطی بر V است که i **امین تابع مختصی نسبت به پایه** β نام دارد. توجه کنید که $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ که در اینجا δ_{ij} دلتای کرونکر است. این تابعک‌های خطی در نظریه فضاهای دوگان نقش مهمی را ایفا می‌کنند (به قضیه ۲۴.۲ رجوع کنید). □

تعریف:. برای هر فضای برداری V روی F، منظور از **فضای دوگان** V، فضای برداری $\mathcal{L}(V, F)$ است که آن را با V^* نشان می‌دهیم.

در نتیجه V^* فضاهای برداری تمام تابعک‌های خطی با جمع و ضرب اسکالری است که در بخش ۲-۲ تعریف شد. توجه کنید که اگر V متناهی‌البُعد باشد، با توجه به نتیجه قضیه ۲۰.۲ خواهیم داشت:

$$\dim(V^*) = \dim(\mathcal{L}(V, F)) = \dim(V) \cdot \dim(F) = \dim(V)$$

بنابراین طبق قضیه ۱۹.۲، V و V^* ایزومرفند. همچنین **دوگان مضاعف** V یا V^{**} را دوگان V^* تعریف می‌کنیم. در قضیه ۲۶.۲ نشان خواهیم داد که در حقیقت اگر V متناهی‌البُعد باشد، V و V^{**} را می‌توان به صورت طبیعی یکی فرض کرد.

قضیه ۲۴.۲. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی‌البُعد با پایه مرتب $\beta = \{x_۱, \ldots, x_n\}$ باشد. فرض کنید $(۱ \leqslant i \leqslant n)f_i$ به مفهومی که در بالا تعریف شد، i امین تابع مختصی نسبت به β باشد و فرض کنید $\beta^* = \{f_۱, \ldots, f_n\}$.

در این صورت β^* پایه‌ای مرتب برای V^* است و به ازای هر $f \in V^*$ داریم:

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i$$

برهان. فرض کنید $f \in V^*$. از آنجا که $\dim(V^*) = n$ کافی است نشان دهیم که

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i$$

چرا که در این صورت، β^*، V^* را تولید خواهد کرد. فرض کنید:

$$g = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i$$

به ازای هر $1 \leqslant j \leqslant n$، داریم:

$$\begin{aligned} g(x_j) &= \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i\right)(x_j) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i(x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta_{ij} = f(x_j) \end{aligned}$$

پس طبق نتیجه قضیه ۶.۲، $f = g$ و به این ترتیب برهان کامل می‌شود. □

تعریف: با استفاده از نمادگذاری قضیه ۲۴.۲ پایه مرتب $\beta^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ از V^* را که برای هر $1 \leqslant i$، $j \leqslant n$، $f_i(x_j)$، **پایه دوگان** β می‌خوانیم.

مثال ۴. فرض کنید $\beta = \{(2,1), (3,1)\}$ پایه مرتبی برای $\mathbb{R}^3$ باشد. فرض کنید پایه دوگان آن، $\beta^* = \{f_1, f_2\}$ باشد. برای اینکه فرمول صریحی برای f_i بیابیم، باید دو معادله زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} 1 &= f_1(2,1) = f_1(2e_1 + e_2) = 2f_1(e_1) + f_1(e_2) \\ 0 &= f_1(3,1) = f_1(3e_1 + e_2) = 3f_1(e_1) + f_1(e_2) \end{aligned}$$

با حل این دو معادله، نتیجه می‌شود که $f_1(e_1) = -1$ و $f_2(e_2) = 3$ یعنی اینکه $f_1(x,y) = -x + 3y$. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $f_2(x,y) = x - 2y$. □

حال فرض کنیم V و W فضاهای برداری متناهی‌البُعدی روی F به ترتیب با پایه‌های مرتب β و γ باشند. در بخش ۲-۴ ثابت کردیم که تناظری یک به یک میان تبدیلات خطی $T : V \to W$ و ماتریس‌های $m \times n$ (با درایه‌های واقع در F)،

از طریق تناظر $T \leftrightarrow [T]_\beta^\gamma$ برقرار است. در مورد ماتریس‌هایی که به شکل $A = [T]_\beta^\gamma$ هستند، این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توان به صورتی طبیعی یک تبدیل خطی U متناظر با T یافت که ماتریس آن در یک پایه خاص، A^t باشد یا خیر. البته اگر $m \neq n$، ممکن نخواهد بود که U تبدیلی خطی از V به W باشد. حال با استفاده از مطالبی که از قبل در مورد فضاهای دوگان آموخته‌ایم به این سؤال پاسخ می‌دهیم.

قضیه ۲۵.۲. فرض کنید V و W فضاهای برداری متناهی‌البُعدی روی F به ترتیب با پایه‌های مرتب β و γ باشند. به ازای هر تبدیل خطی $T : V \to W$، نگاشت $T^t : W^* \to V^*$ که به صورت $T^t(g) = gT$ برای هر $g \in W^*$ تعریف می‌شود، تبدیل خطی با این خاصبت است که $[T^t]_{\gamma^*}^{\beta^*} = ([T]_\beta^\gamma)^t$.

برهان. برای هر $g \in W^*$، واضح است که $T^t(g) = gT$ تابعکی خطی بر V است و بنابراین عضوی از V^* است. در نتیجه T^t، W^* را به درون V^* تصویر می‌کند. اثبات این را که T^t خطی است به عهده خواننده می‌گذاریم. برای تکمیل برهان، فرض کنید $\beta = \{x_۱, \dots, x_n\}$ و $\gamma = \{y_۱, \dots, y_m\}$ و $\beta^* = \{f_۱, \dots, f_n\}$، و $\gamma^* = \{g_۱, \dots, g_m\}$ به ترتیب پایه‌های دوگان آنها باشند. برای راحتی فرض کنید $A = [T]_\beta^\gamma$. برای یافتن j امین ستون $[T^t]_{\gamma^*}^{\beta^*}$، ابتدا $T^t(g_j)$ را به صورت ترکیبی خطی از اعضای β^* بیان می‌کنیم. بنا بر قضیه ۲۴.۲ داریم:

$$T^t(g_j) = g_jT = \sum_{s=۱}^{n} (g_jT)(x_s) f_s$$

پس درایه سطر i ام و ستون j ام $[T^t]_{\gamma^*}^{\beta^*}$ عبارت است از:

$$\begin{aligned}(g_jT)(x_i) &= g_j(T(x_i)) = g_j\left(\sum_{k=۱}^{m} A_{ki} y_k\right) \\ &= \sum_{k=۱}^{m} A_{ki} g_j(y_k) = \sum_{k=۱}^{m} A_{ki}\delta_{jk} = A_{ji}\end{aligned}$$

در نتیجه $[T^t]_{\gamma^*}^{\beta^*} = A^t$. □

تبدیل خطی T^t که در قضیه ۲۵.۲ تعریف شد، **ترانهاده** T نام دارد. بدیهی است که T^t همان تبدیل خطی یگانه U است که برای آن $[U]_{\gamma^*}^{\beta^*} = ([T]_\beta^\gamma)^t$

قضیه ۲۵.۲ را با مثال زیر شرح می‌دهیم.

مثال ۵. $T : P_۱(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^۲$ را به صورت $T(p) = (p(۰), p(۲))$ تعریف کنید. فرض کنید β و γ به ترتیب پایه‌های مرتب $P_۱(\mathbb{R})$ و $\mathbb{R}^۲$ باشد. واضح است که:

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$[T^t]_{\gamma^*}^{\beta^*}$ را مستقیماً از روی تعریف حساب می‌کنیم. فرض کنید $\beta^* = \{f_1, f_2\}$ و $\gamma^* = \{g_1, g_2\}$. فرض کنید که $[T^t]_{\gamma^*}^{\beta^*} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. در این صورت خواهیم داشت $T^t(g_1) = af_1 + cf_2$. بنابراین:

$$(T^t(g_1))(1) = (af_1 + cf_2)(1) = af_1(1) + cf_2(1) = a(1) + c(0) = a$$

اما از طرف دیگر داریم:

$$(T^t(g_1))(1) = g_1(T(1)) = g_1(1, 1) = 1$$

پس $a = 1$. با محاسباتی مشابه معلوم می‌شود که $c = 0$، $b = 1$ و $d = 2$. بنابراین محاسبه مستقیم چنین نتیجه می‌دهد که:

$$[T^t]_{\gamma^*}^{\beta^*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = ([T]_\beta^\gamma)^t$$

همان طور که طبق قضیه ۲.۲۵، انتظار داشتیم. $\square$

حال به نشان دادن اینکه هر فضای برداری متناهی‌البُعد V را می‌توان به طریقی با دوگان مضاعفش یکی گرفت، می‌پردازیم. در حقیقت، ایزومرفیسمی میان V و V^{**} وجود دارد که به هیچ انتخاب پایه‌ای برای دو فضا وابسته نیست.

به ازای هر بردار $x \in V$، $\hat{x} : V^* \to F$ را به صورت $\hat{x}(f) = f(x)$ برای هر $f \in V^*$ تعریف می‌کنیم. به راحتی می‌توان دید که $\hat{x}$ تابعکی خطی بر V^* است، بنابراین $\hat{x} \in V^{**}$. تناظر $\hat{x} \leftrightarrow x$، ما را قادر می‌سازد به اینکه ایزومرفیسم مطلوب خود را میان V و V^{**} تعریف کنیم.

لم ۲. فرض کنید V فضای برداری متناهی‌البُعدی باشد و نیز فرض کنید که $x \in V$. اگر برای هر $f \in V^*$، $\hat{x}(f) = 0$ در آن صورت $x = 0$.

برهان. فرض کنید $x \neq 0$. نشان می‌دهیم که $f \in V^*$ ای وجود دارد به طوری که $x(f) \neq 0$ است. پایه مرتب $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ را برای V به گونه‌ای انتخاب کنید که $x_1 = x$. فرض کنید $\{f_1, \ldots, f_n\}$ پایه دوگان β باشد. در این صورت $f_1(x_1) = 1 \neq 0$. حال قرار دهید $f = f_1$. $\square$

قضیه ۲.۲۶. فرض کنید V فضای برداری متناهی‌البُعدی باشد و $\psi : V \to V^{**}$ را به صورت $\psi(x) = \hat{x}$ تعریف کنید. در این صورت ψ ایزومرفیسم است.

برهان. الف) ψ خطی است: فرض کنید $x, y \in V$ و $c \in F$. برای هر $f \in V^*$، داریم:

$$\psi(cx + y)(f) = f(cx + y) = cf(x) + f(y) = c\hat{x}(f) + \hat{y}(f) = (c\hat{x} + \hat{y})(f)$$

بنابراین

$$\psi(cx + y) = c\hat{x} + \hat{y} = c\psi(x) + \psi(y)$$

ب) ψ یک به یک است: فرض کنید $\psi(x)$ به ازای $x \in V$ ای تابعک خطی صفر روی V^* باشد. در این‌صورت برای هر $f \in V^*$، $\hat{x}(f) = \circ$. با استفاده از لم قبل نتیجه می‌گیریم که $x = \circ$.

ج) ψ ایزومرفیسم است: این مطلب را می‌توان از قسمت ب و این واقعیت که $\dim(V) = \dim(V^{**})$ نتیجه گرفت. □

نتیجه ۱. فرض کنید V فضای برداری متناهی‌البُعدی با فضای دوگان V^* باشد؛ در این صورت هر پایه مرتب V^*، پایه دوگان یکی از پایه‌های V است.

برهان. فرض کنید $\{f_۱, \ldots, f_n\}$ پایه مرتبی برای V^* باشد، با ترکیب دو قضیه ۲۴.۲ و ۲۶.۲، می‌توان نتیجه گرفت که یک پایه دوگان برای V^* مانند $\{\hat{x}_۱, \ldots, \hat{x}_n\}$ در V^{**} وجود دارد، یعنی برای هر i و j، $\delta_{ij} = \hat{x}_i(f_j) = f_j(x_i)$. بنابراین $\{f_۱, \ldots, f_n\}$، پایه دوگان $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ است. □

با وجود اینکه اکثر ایده‌های این بخش، مثلاً وجود فضاهای دوگان را می‌توان به حالتی که V متناهی‌البُعد نباشد، تعمیم داد تنها فضاهای برداری متناهی‌البُعد از طریق نگاشت $x \to \hat{x}$ با دوگان‌های مضاعف‌شان ایزومرف هستند. در حقیقت، برای فضاهای برداری با بُعد نامتناهی، هیچ دوتایی V، V^* و V^{**} با هم ایزومرف نیستند.

تمرینات

۱. مشخص کنید که کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است. همه فضاهای برداری مفروض متناهی‌البُعد هستند.

الف) هر تبدیل خطی، تابعکی خطی است.

ب) هر تابعک خطی را که روی یک میدان تعریف شده است، می‌توان با یک ماتریس ۱ × ۱ نمایش داد.

ج) هر فضای برداری، با فضای دوگانش ایزومرف است.

د) هر فضای برداری، دوگان یک فضای برداری دیگر است.

ه) اگر T ایزومرفیسمی از V به روی V^* و β یک پایه مرتب متناهی برای V باشد، آنگاه $T(\beta) = \beta^*$.

و) هرگاه T تبدیلی خطی از V به W باشد، دامنه $(T^t)^t$، V^{**} خواهد بود.

ز) اگر V و W ایزومرف باشند، آنگاه V^* نیز با W^* ایزومرف است.

ح) مشتق یک تابع را می‌توان تابعکی خطی روی فضای برداری توابع مشتق‌پذیر در نظر گرفت.

۲. برای هر یک از توابع f روی فضای برداری V که در زیر آمده است، تعیین کنید آیا f یک تابعک خطی است یا خیر.

الف) $V = P(\mathbb{R})$؛ $f(p) = 2p'(0) + p''(1)$ که $'$ عمل مشتق‌گیری را نشان می‌دهد.

ب) $V = \mathbb{R}^2$، $f(x,y) = (2x, 4y)$.

ج) $V = M_{2\times 2}(F)$، $f(A) = \mathrm{tr}(A)$.

د) $V = \mathbb{R}^3$، $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

ه) $V = P(\mathbb{R})$، $f(p) = \int_0^1 p(t)dt$.

و) $V = M_{2\times 2}(F)$؛ $f(A) = A_{11}$.

۳. برای هر یک از فضاهای برداری V و پایه‌های β که در زیر آمده‌اند، شبیه مثال ۴، فرمول‌های صریحی برای پایه دوگان β^* برای V^* بیابید.

الف) $V = \mathbb{R}^3$، $\beta = \{(1,0,1), (1,2,1), (0,0,1)\}$.

ب) $V = P_2(\mathbb{R})$، $\beta = \{1, x, x^2\}$.

۴. فرض کنید $V = \mathbb{R}^3$ و $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f_1(x,y,z) = x - 2y \quad , f_2(x,y,z) = x + y + z \quad , f_3(x,y,z) = y - 3z$$

ثابت کنید که $\{f_1, f_2, f_3\}$ پایه‌ای برای V^* است و سپس پایه‌ای برای V بیابید که دوگان آن $\{f_1, f_2, f_3\}$ باشد.

۵. فرض کنید که $V = P_1(\mathbb{R})$ و برای هر $p \in V$، $f_1, f_2 \in V^*$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(t)dt \quad \text{و} \quad f_2(p) = \int_0^2 p(t)dt$$

ثابت کنید که $\{f_1, f_2\}$ پایه‌ای برای V^* است و پایه‌ای برای V بیابید که دوگان آن، $\{f_1, f_2\}$ باشد.

۶. * $f \in (\mathbb{R}^2)^*$ را به صورت $f(x,y) = 2x + y$، و $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ را به صورت $T(x,y) = (3x + 2y, x)$ تعریف کنید.

الف) $T^t(f)$ را حساب کنید.

ب) $[T^t]_{\beta^*}$ را که β پایه مرتب استاندارد $\mathbb{R}^2$ را نشان می‌دهد و $\beta^* = \{f_1, f_2\}$ پایه دوگان آن است با یافتن اسکالرهای a، b، c و d که به ازای آنها $T^t(f_1) = af_1 + cf_2$ و $T^t(f_2) = bf_1 + df_2$، محاسبه کنید.

ج) $[T]_\beta$ ، $([T]_\beta)^t$ را پیدا کنید و نتایج خود را با قسمت ب مقایسه کنید.

۷. فرض کنید $V = P_1(\mathbb{R})$، $W = \mathbb{R}^2$، و $\beta = \{1, x\}$ و $\gamma = \{e_1, e_2\}$ به ترتیب پایه‌های مرتبی برای آنها باشند. $T : V \to W$ را به صورت $T(p) = (p(0) - 2p(1), p(0) + p'(0))$ تعریف کنید که p' مشتق p است.

الف) برای $f \in W^*$ که با ضابطه $f(a, b) = a - 2b$ تعریف می‌شود، $T^t(f)$ را حساب کنید.

ب) $[T^t]_{\gamma^*}^{\beta^*}$ را بدون به کار گرفتن قضیه ۲۵.۲ حساب کنید.

ج) $[T]_\beta^\gamma$ و ترانهاده آن را حساب کرده، نتایجی را که به دست آورده‌اید با قسمت ب مقایسه کنید.

۸. نشان دهید که هر صفحه‌ای در $\mathbb{R}^3$ که از مبدأ می‌گذرد، برابر با فضای پوچ عضوی از $(\mathbb{R}^3)^*$ است. نتیجه‌ای مشابه برای $\mathbb{R}^2$ بیان کنید.

۹. فرض کنید که T تابعی از F^n به F^m باشد. ثابت کنید که T خطی است اگر و تنها اگر تابعک‌هایی مانند $f_1, \ldots, f_n \in (F^n)^*$ وجود داشته باشند که برای هر $x \in F^n$، $T(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$.
راهنمایی: هرگاه T خطی باشد، برای هر $x \in F^n$، $f_i(x)$ را برابر $(g_iT)(x)$ تعریف کنید یعنی برای هر $1 \leqslant i \leqslant m$، $f_i = T^t(g_i)$ که $\{g_1, \ldots, g_m\}$ در اینجا پایه دوگان پایه مرتب استاندارد F^n است.

۱۰. فرض کنید $V = P_n(F)$ و $c_0, \ldots, c_n$ اسکالرهای متمایزی در F باشند.

الف) برای هر $0 \leqslant i \leqslant n$، $f_i \in V^*$ را به صورت $f_i(p) = p(c_i)$ تعریف کنید. ثابت کنید که $\{f_0, \ldots, f_n\}$ پایه‌ای برای V^*. راهنمایی: هر ترکیب خطی از این مجموعه را که برابر ۰ باشد، بر چندجمله‌ای $p(t) = (t - c_1)(t - c_2) \ldots (t - c_n)$ اثر دهید و نتیجه بگیرید که ضریب اول آن صفر است.

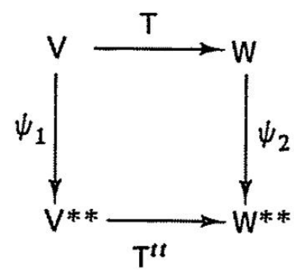
ب) با استفاده از نتیجه قضیه ۲۶.۲ و قسمت الف نشان دهید که چندجمله‌ای‌های منحصر به فرد $p_0, \ldots, p_n$ وجود دارند که برای هر $0 \leqslant i \leqslant n$، $p_i(c_j) = \delta_{ij}$. این چندجمله‌ای‌ها، همان چندجمله‌ای‌های لاگرانژ هستند که در بخش ۱-۶ تعریف شدند.

ج) برای هر دنباله از اسکالرهای (نه لزوماً متمایز) a_0، …، a_n نتیجه بگیرید که چندجمله‌ای منحصر به فردی مانند q با درجه حداکثر n وجود دارد که برای هر $0 \leqslant i \leqslant n$، $q(c_i) = a_i$. در واقع

$$q = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i$$

د) فرمول درون‌یابی لاگرانژ را نتیجه بگیرید:
برای هر $p \in V$،

$$p = \sum_{i=1}^{n} p(c_i) p_i$$



شکل ۲-۶:

ه) ثابت کنید که

$$\int_a^b p(t)dt = \sum_{i=1}^{n} p(c_i)d_i$$

که

$$d_i = \int_a^b p_i(t)dt$$

حال فرض کنید که

$$c_i = a + \frac{i(b-c)}{n} \qquad \text{برای هر } i = 0, \ldots, n$$

به ازای $n = 1$، از نتیجه فوق قانون ذوزنقه برای محاسبه انتگرال معین چندجمله‌ای‌ها به دست می‌آید. به ازای $n = 2$، قاعده سیمپسون برای محاسبه انتگرال معین یک چندجمله‌ای به دست می‌آید.

۱۱. فرض کنید V و W دو فضای برداری متناهی‌البُعد روی F و ψ_1 و ψ_2 به ترتیب ایزومرفیسم‌هایی بین V و V^{**}، و W و W^{**} باشند که در قضیه ۲۶.۲ تعریف شدند. فرض کنید $T : V \to W$ خطی باشد و T^{tt} را برابر $(T^t)^t$ تعریف کنید. ثابت کنید که نموداری که در شکل ۲-۶ نشان داده شده است، تعویض‌پذیر است، یعنی $\psi_2 T = T^{tt}\psi_1$.

۱۲. فرض کنید که V، یک فضای برداری متناهی‌البُعد با پایه مرتب β باشد. ثابت کنید که $\psi(\beta) = \beta^{**}$، که ψ در قضیه ۲۶.۲ تعریف شده است.

در تمرینات ۱۳ الی ۱۷، V نشان‌دهنده یک فضای برداری متناهی‌البُعد روی F است. برای هر زیرمجموعه S از V، **پوچساز** S را که با S° نشان داده می‌شود، این‌گونه تعریف کنید:

$$S^\circ = \{f \in V^* : f(x) = 0, \text{ برای هر } x \in S\}$$

۱۳. الف) ثابت کنید که S° زیرفضایی از V^* است.

ب) اگر W زیرفضایی از V باشد و $x \notin W$، ثابت کنید که $f \in W^\circ$ ای وجود دارد که $f(x) \neq 0$.

ج) ثابت کنید $(S^\circ)^\circ = span(\psi(S))$. ψ در قضیه ۲۶.۲ تعریف شده است.

د) برای هر دو زیرفضای W_1 و W_2 ثابت کنید که $W_1 = W_2$، اگر و تنها اگر $W_1^\circ = W_2^\circ$.

ه) برای هر دو زیرفضای W_1 و W_2 نشان دهید که $(W_1 + W_2)^\circ = W_1^\circ \cap W_2^\circ$.

۱۴. ثابت کنید که اگر W زیرفضایی از V باشد، آنگاه $\dim(W) + \dim(W^\circ) = \dim(V)$ راهنمایی: پایه مرتبی مانند $\{x_1, \ldots, x_k\}$ برای W را به پایه مرتب $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ برای V گسترش دهید. ثابت کنید که $\{f_{k+1}, \ldots, f_n\}$، پایه‌ای برای $W_\circ$ است.

۱۵. فرض کنید W یک فضای برداری متناهی‌البُعد روی F و $T : V \to W$ خطی باشد. ثابت کنید که $N(T^t) = (R(T))^\circ$.

۱۶. با استفاده از تمرینات ۱۴ و ۱۵ نتیجه بگیرید که برای هر ماتریس $A \in M_{m\times n}(F)$، $\operatorname{rank}(L_{A^t}) = \operatorname{rank}(L_A)$.

۱۷. فرض کنید T یک عملگر خطی و W زیرفضایی از V باشد. ثابت کنید که W (به معنایی که در تمرینات بخش ۲-۱ تعریف شد) T-پایاست اگر و تنها اگر W°، T^t-پایا باشد.

۱۸. فرض کنید V یک فضای برداری غیر صفر روی میدان F و S پایه‌ای برای V باشد (طبق نتیجه قضیه ۱۳.۱ در بخش ۱-۷، هر فضای برداری یک پایه دارد). فرض کنید $\varphi : V^* \to \mathcal{F}(S, F)$، نگاشتی باشد که به صورت $\varphi(f) = f_S$ تعریف می‌شود، که منظور از f_S تحدید f به S است. ثابت کنید که φ یک ایزومرفیسم است. راهنمایی: از تمرین ۳۱ بخش ۳-۱ استفاده کنید.

۱۹. فرض کنید V یک فضای برداری غیر صفر و W زیرفضای سره‌ای از V باشد، یعنی $W \neq V$. ثابت کنید که تابعکی خطی مانند $f \in V^*$ وجود دارد که برای هر $x \in W$، $f(x) = 0$. راهنمایی: در حالت با بُعد نامتناهی از تمرین ۳۱ بخش ۲-۱ به همراه نتایجی که در بخش ۱-۷ در مورد گسترش دادن مجموعه‌های مستقل خطی به پایه آمد، استفاده کنید.

۲۰. فرض کنید V و W دو فضای برداری غیر صفر روی یک میدان مشترک و $T : V \to W$ تبدیلی خطی باشد. ثابت کنید که:

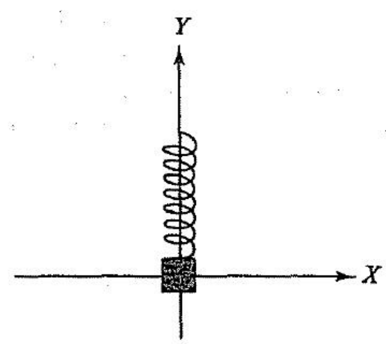
الف) T پوشاست، اگر و تنها اگر T^t یک به یک باشد.

ب) T^t پوشاست، اگر و تنها اگر T یک به یک باشد.

راهنمایی: قسمتی از اثبات مستلزم استفاده از تمرین ۱۹ برای حالت با بُعد نامتناهی خواهد بود.

۲-۷ * معادلات دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت

به عنوان مقدمه‌ای بر این بخش، مسأله فیزیکی زیر را در نظر می‌گیریم. وزنه‌ای به جرم m به فنری که به طور عمودی آویزان است و می‌تواند تا وقتی که نیروهای وارد بر وزنه به تعادل برسند، کش بیاید، آویزان است. فرض کنید که وزنه در حال حاضر بی حرکت باشد و دستگاه مختصات xy را طوری قرار دهیم که وزنه در مرکز و فنر روی قسمت بالایی محور y ها قرار گیرد شکل (۲-۷). فرض کنید در یک لحظه خاص، مثلاً $t = 0$، وزنه به اندازه s در راستای محور y ها پایین کشیده



شکل ۲-۷:

و رها شود. فنر شروع به نوسان خواهد کرد. حال حرکت فنر را توصیف می‌کنیم. در هر زمان $t \geqslant 0$، فرض کنید $F(t)$ نشانگر نیروی وارد بر وزنه و $y(t)$ نشانگر موقعیت وزنه بر روی محور y ها باشد. برای مثال $y(0) = -s$. مشتق دوم y نسبت به زمان یعنی $y''(t)$، شتاب وزنه در لحظه t می‌باشد و بنابراین طبق قانون دوم نیوتن:

$$F(t) = my''(t) \tag{۲-۱}$$

قابل قبول و موجه است که فرض کنیم نیروی وارد بر وزنه تماماً به خاطر کشش فنر است و این نیرو از قانون «هوک» تبعیت می‌کند که می‌گوید: «نیروی وارد بر وزنه متناسب است با میزان تغییر مکان آن نسبت به حالت تعادل، اما در جهت عکس

عمل می‌کند.» هرگاه $k > \circ$، ضریب ثابت این تناسب باشد قانون هوک می‌گوید:

$$F(t) = -ky(t) \qquad (۲-۲)$$

با ترکیب ۲-۱ با ۲-۲ چنین نتیجه می‌گیریم که $my'' = -ky$ و یا:

$$y'' + \frac{k}{m}y = \circ \qquad (۲-۳)$$

عبارت ۲-۳، نمونه‌ای است از یک معادله دیفرانسیل. منظور از یک معادله دیفرانسیل بر حسب تابع مجهول $y = y(t)$، معادله‌ای است شامل y، t و مشتقات y. اگر معادله دیفرانسیل به صورت:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_\circ y = f \qquad (۲-۴)$$

باشد که در آن $a_n, \ldots, a_1, a_\circ$ و f توابعی از t هستند و $y^{(k)}$ نشانگر مشتق k ام y است، معادله را خطی می‌گویند. توابع a_i ضرایب معادله دیفرانسیل ۲-۴ نام دارند. ۲-۳ نمونه‌ای است از یک معادله دیفرانسیل خطی که در آن تابع f متحد با صفر است. هنگامی که f متحد با صفر باشد ۲-۴ را **همگن** می‌گویند.

در این بخش، جبر خطی‌ای را که آموخته‌ایم برای حل معادلات دیفرانسیل همگن با ضرایب ثابت به کار می‌گیریم. اگر $a_n \neq \circ$، می‌گوییم که ۲-۴ از مرتبه n است. در این حالت، دو طرف را بر a_n تقسیم می‌کنیم تا معادله جدید، اما معادل زیر به دست آید:

$$y^n + b_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + b_1 y^{(1)} + b_\circ y = \circ$$

که در اینجا برای هر $i = \circ, 1, \ldots, n-1$، $b_i = a_i/a_n$. بنابراین همیشه فرض می‌کنیم که ضریب a_i در ۲-۴، ۱ باشد.

منظور از یک **جواب** برای ۲-۴ تابعی است که وقتی به جای y قرار گیرد، آن را به یک اتحاد تبدیل کند.

مثال ۱. تابع $y(t) = \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$ جوابی برای ۲-۳ است، چرا که برای هر t داریم:

$$y''(t) + \frac{k}{m}y(t) = -\frac{k}{m}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{k}{m}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t = \circ$$

با این وجود، توجه کنید که گذاشتن $y(t) = t$ در ۲-۳، نتیجه می‌دهد:

$$y''(t) + \frac{k}{m}y(t) = \frac{k}{m}t$$

که متحد با صفر نیست. بنابراین $y(t) = t$، جوابی برای ۲-۷ نیست. □

در مطالعه خود درباره معادلات دیفرانسیل، مفید است که جواب‌ها را به عنوان توابع مختلط از یک متغیر حقیقی در نظر بگیریم، هر چند که جواب‌هایی که از نظر فیزیکی برا ی‌ما معنی دارند، مقدار حقیقی دارند. مفید بودن این طرز فکر، بعداً معلوم خواهد شد. بنابراین با فضای برداری $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ آنگونه که در مثال ۳ از بخش ۱-۲ تعریف شد) سر و کار خواهیم داشت. برای اینکه بتوانیم توابع مختلط از یک متغیر حقیقی را به عنوان جواب معادلات دیفرانسیل در نظر بگیریم، باید مشخص کنیم که منظور از مشتق گرفتن از این توابع چیست. به ازای هر تابع مختلط از یک متغیر حقیقی چون $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، دو تابع حقیقی یکتا از t مانند $x_۱$ و $x_۲$ هست به طوری که:

$$x(t) = x_۱(t) + ix_۲(t) \qquad t \in \mathbb{R} \text{ برای هر }$$

که در آن i، آن عدد موهومی است که در $i^۲ = -۱$، صدق می‌کند. $x_۱$ را **قسمت حقیقی** و $x_۲$ را **قسمت موهومی** x می‌خوانیم.

تعریف:. برای هر تابع $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ با قسمت حقیقی $x_۱$ و قسمت موهومی $x_۲$، می‌گوییم x **مشتق‌پذیر** است هرگاه $x_۱$ و $x_۲$ مشتق‌پذیر باشند. هرگاه x مشتق‌پذیر باشد، **مشتق** x را که با x' نشان می‌دهیم، با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$x' = x'_۱ + ix'_۲$$

چند نمونه از محاسبات با توابع مختلط را در مثال زیر نشان می‌دهیم.

مثال ۲. فرض کنید $x(t) = \cos ۲t + i \sin ۲t$. در این صورت:

$$x'(t) = -۲ \sin ۲t + ۲i \cos ۲t$$

اکنون قسمت‌های حقیقی و موهومی $x^۲$ را پیدا می‌کنیم. از آنجا که:

$$\begin{aligned} x^۲(t) &= (\cos ۲t + i \sin ۲t)^۲ = (\cos^۲ ۲t - \sin^۲ ۲t) + i(۲ \sin ۲t \cos ۲t) \\ &= \cos ۴t + i \sin ۴t \end{aligned}$$

پس قسمت حقیقی $x^۲(t)$، $\cos ۴t$ و قسمت موهوم ایش $\sin ۴t$ است. □

قضیه زیر نشان می‌دهد که می‌توانیم تحقیقاتمان را به فضای برداری نسبتاً کوچکتری از $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ محدود کنیم. اثبات آن -که در مثال ۳ نحوه انجام آن نشان داده شده - متضمن استدلال استقرایی کوچکی است که آن را حذف می‌کنیم.

قضیه ۲۷.۲. هر جواب یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت، از هر مرتبه‌ای مشتق دارد؛ یعنی که اگر x جوابی برای چنین معادله‌ای باشد، در این صورت به ازای هر عدد صحیح مثبت k، $x^{(k)}$ موجود است.

مثال ۳. برای روشن ساختن قضیه ۲۷.۲، معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y^{(۲)} + ۴y = ۰$$

واضح است که برای اینکه y بتواند یک جواب داشته باشد باید دو بار مشتق‌پذیر باشد. با این وجود، اگر y یک جواب داشته باشد، خواهیم داشت:

$$y^{(۲)} = -۴y$$

از آنجا که $y^{(۲)}$ مضرب ثابتی از یک تابع که دو بار مشتق‌پذیر است، یعنی تابع y است، $y^{(۴)}$ هم موجود است. در حقیقت:

$$y^{(۴)} = -۴y^{(۲)}$$

چون $y^{(۴)}$ مضرب ساده‌ای از تابعی است که حداقل دوبار مشتق‌پذیر است، خود نیز حداقل دو بار مشتق‌پذیر است و بنابراین $y^{(۶)}$ موجود است. با ادامه این روش، می‌توانیم ثابت کنیم که هر جواب از این معادله از هر مرتبه‌ای مشتق دارد. □

تعریف:. $\mathbb{C}^\infty$ را برای نمایش مجموعه همه توابعی از $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ به کار می‌بریم که از همه مراتب مشتق دارند.

به عنوان تمرینی ساده می‌توان ثابت کرد که $\mathbb{C}^\infty$ زیرفضای $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ است و بنابراین یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است. از دید قضیه ۲۷.۲ این همان فضای برداری موردنظر است. برای هر $x \in \mathbb{C}^\infty$، مشتق x، x' هم در $\mathbb{C}^\infty$ قرار دارد. می‌توانیم با استفاده از عمل مشتق‌گیری، نگاشت $D : \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^\infty$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$D(x) = x' \qquad x \in \mathbb{C}^\infty \text{ برای هر }$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که D یک عملگر خطی است. به طور کلی‌تر، هر چندجمله‌ای دلخواه روی $\mathbb{C}$ به شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-۱} t^{n-۱} + \ldots + a_۱ t + a_۰$$

در این صورت اگر تعریف کنیم:

$$p(D) = a_n D^n + a_{n-۱} D^{n-۱} + \ldots + a_۰ I$$

$p(D)$ هم یک عملگر خطی روی $\mathbb{C}^\infty$ است (به ضمیمه ه مراجعه کنید).

چند تعریف: برای هر چندجمله‌ای $p(t)$ با درجه مثبت روی $\mathbb{C}$، $p(D)$ یک **عملگر دیفرانسیل** نام دارد. منظور از **مرتبه** عملگر دیفرانسیل $p(D)$، همان درجه $p(t)$ است.

عملگرهای دیفرانسیل از این جهت مفیدند که به ما امکان می‌دهند که معادلات دیفرانسیل را در قالب جبرخطی بیاوریم. هر معادله دیفرانسیل همگن با ضرایب ثابت مثل:

$$y^{(n)} + a_{n-۱} y^{(n-۱)} + \ldots + a_۱ y^{(۱)} + a_۰ y = ۰$$

را می‌توان با استفاده از عملگرهای دیفرانسیل به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$(D^n + a_{n-۱} D^{n-۱} + \ldots + a_۱ D + a_۰ I)(y) = ۰$$

تعریف. هرگاه معادله دیفرانسیل بالا مفروض باشد، چندجمله‌ای مختلط
$$p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$
را **چندجمله‌ای کمکی** نظیر این معادله می‌نامند.

به عنوان مثال، چندجمله‌ای کمکی (۲-۳) عبارت است از:
$$p(t) = t^2 + \frac{k}{m}$$
هر معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:
$$p(D)(y) = 0$$
که $p(t)$ چندجمله‌ای کمکی نظیر معادله است. به وضوح این معادله نتیجه زیر را القا می‌کند.

قضیه ۲.۲۸. مجموعه همه جواب‌های یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت، با فضای پوچ $p(D)$ برابر است که در اینجا $p(t)$ چندجمله‌ای کمکی نظیر معادله است.

برهان. به عهده خواننده است. □

نتیجه ۱. مجموعه همه جواب‌های یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت زیرفضایی از $\mathbb{C}^\infty$ است.

با توجه به نتیجه بالا، مجموعه جواب‌های یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت را **فضای جواب معادله** می‌نامیم. راهی عملی برای توصیف چنین فضایی، ارائه یک پایه برای آن است. حال دسته خاصی از توابع را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که در یافتن پایه برای این فضاهای جواب، مفیدند.

برای عدد حقیقی s، با عدد e^s آشنایی داریم که e آن عدد یکتایی است که لگاریتم طبیعیش ۱ است، (یعنی $\ln e = 1$). مثلاً با برخی از خواص قوه آشنایی داریم:
$$e^{s+t} = e^s e^t \qquad e^{-t} = \frac{1}{e^t} \qquad \text{برای هر دو عدد حقیقی } s \text{و} t,$$
حال تعریف توان‌های e را به گونه‌ای تعمیم می‌دهیم که اعداد مختلط را هم در بر گیرد و این خواص هم باقی بمانند.

تعریف. فرض کنید $c = a + ib$ عددی مختلط با قسمت حقیقی a و قسمت موهومی b باشد. تعریف کنید:
$$e^c = e^a(\cos b + i \sin b)$$

حالت خاص:
$$e^{ib} = (\cos b + i \sin b)$$

فرمول اویلر نام دارد. مثلاً، برای $c = ۲ + i(\pi/۳)$،

$$e^c = e^۲(\cos\frac{\pi}{۳} + i\sin\frac{\pi}{۳}) = e^۲(\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

واضح است که اگر c حقیقی باشد ($b = ۰$)، نتیجه مورد انتظار را به دست می‌آوریم: $e^c = e^a$. با استفاده از اتّحادهای مثلثاتی می‌توان ثابت کرد که

$$\text{برای هر دو عدد مختلط } c \text{ و } d،\quad e^{c+d} = e^c e^d \quad \text{و} \quad e^{-c} = \frac{۱}{e^c}$$

تعریف:. هر تابعی مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ که به ازای عددی مختلط مانند c به صورت $f(t) = e^{ct}$ تعریف می‌شود، یک **تابع نمایی** نام دارد.

مشتق یک تابع نمایی، چنان که در قضیه زیر نشان داده شده، با متناظر آن در حالت حقیقی سازگار است. اثبات آن شامل محاسبه‌ای سرراست است، که به عنوان تمرین به عهده خواننده می‌گذاریم.

قضیه ۲۹.۲. به ازای هر تابع نمایی مانند $f(t) = e^{ct}$، $f'(t) = ce^{ct}$.

برهان. به عهده خواننده است. □

می‌توانیم از توابع نمایی برای توصیف همه جواب‌های یک معادله دیفرانسیل خطی همگن از مرتبه ۱ استفاده کنیم. به یاد بیاورید که مرتبه چنین معادله‌ای همان درجه چندجمله‌ای کمکی آن است. بنابراین معادله درجه ۱، شکل کلی زیر را دارد:

$$y' + a_۰ y = ۰ \qquad (۲-۵)$$

قضیه ۳۰.۲. فضای جواب ۲-۵ یک بُعدی است و $\{e^{-a_۰ t}\}$ یک پایه آن است.

برهان. به وضوح $e^{-a_۰ t}$ جوابی برای ۲-۵ است. فرض کنید $x(t)$ جواب دلخواه دیگری برای ۲-۵ باشد. در این صورت:

$$\text{برای هر } t \in \mathbb{R}،\quad x'(t) = -a_۰ x(t)$$

z را چنین تعریف کنید:

$$z(t) = e^{a_۰ t} x(t)$$

با مشتق‌گیری از z داریم:

$$z'(t) = (e^{a_۰ t})' x(t) + e^{a_۰ t} x'(t) = a_۰ e^{a_۰ t} x(t) - a_۰ e^{a_۰ t} x(t) = ۰$$

(توجه کنید که قاعده معروف مشتق‌گیری از حاصلضرب برای توابع مختلط از متغیر حقیقی نیز صادق است. اثبات این مطلب شامل یک محاسبه طولانی ولی سرراست می‌باشد).

چون z' متحد با صفر است، z تابعی ثابت است (باز هم این مطلب که برای توابع حقیقی کاملاً آشناست، برای توابع با مقدار مختلط هم صادق است. اثبات آن، که بر حالت حقیقی آن استوار است، با در نظر گرفتن مستقل هر یک از قسمت‌های حقیقی و موهومی z صورت می‌گیرد). بنابراین عدد مختلطی مانند c وجود دارد به گونه‌ای که:

$$z(t) = e^{a_0 t}x(t) = c \qquad \text{برای هر } t \in \mathbb{R}،$$

و بنابراین:

$$x(t) = ce^{-a_0 t}$$

پس نتیجه می‌گیریم که هر جواب ۲-۵، ترکیبی خطی از $e^{-a_0 t}$ است. □

طرز دیگر بیان قضیه ۳۰.۲ به شرح ذیل است:

نتیجه ۲. برای هر عدد مختلط c، $\{e^{ct}\}$ پایه‌ای برای فضای پوچ عملگر دیفرانسیل $D - cI$ است.

حال معادلات دیفرانسیل از درجه بالاتر از ۱ را در نظر می‌گیریم. هرگاه معادله خطی همگن با ضرایب ثابت زیر داده شده باشد،

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$$

چندجمله‌ای کمکی آن یعنی:

$$p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

به حاصلضرب چندجمله‌ای‌هایی از درجه ۱ تجزیه می‌شود:

$$p(t) = (t - c_1)(t - c_2)\ldots(t - c_n)$$

که در اینجا $c_1, c_2, \ldots, c_n$ اعدادی مختلط (نه لزوماً متمایز) هستند (این مطلب نتیجه قضیه اساسی جبر است که در ضمیمه د آمده است). بنابراین:

$$p(D) = (D - c_1 I)(D - c_2 I)\ldots(D - c_n I)$$

عملگرهای $D - c_i I$ دو به دو با هم جابجا می‌شوند، بنابراین طبق تمرین ۹ داریم:

$$N(D - c_i I) \subseteq N(p(D)) \qquad \text{برای هر } i،$$

از آنجا که $N(p(D))$ با فضای جواب معادله دیفرانسیل مفروض مساوی است، می‌توان قضیه زیر را از نتیجه قضیه ۳۰.۲ نتیجه گرفت.

قضیه ۳۱.۲. فرض کنید $p(t)$ چندجمله‌ای کمکی یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت باشد. به ازای هر عدد مختلط c، هرگاه c ریشه‌ای از $p(t)$ باشد، e^{ct} جوابی از آن معادله دیفرانسیل خواهد بود.

مثال ۴. معادله دیفرانسیل زیر مفروض است:

$$y'' - ۳y' + ۲y = ۰$$

چندجمله‌ای کمکی آن عبارت است از:

$$p(t) = t^۲ - ۳t + ۲ = (t-۱)(t-۲)$$

در نتیجه طبق قضیه ۳۱.۲ e^t و $e^{۲t}$ جواب‌هایی از معادله فوق هستند، چرا که $c = ۱$ و $c = ۲$ ریشه‌هایی از $p(t)$ هستند. چون فضای جواب معادله فوق زیرفضایی از $\mathbb{C}^\infty$ است، $span(e^t, e^{۲t})$ در فضای جواب قرار دارد.

اثبات اینکه $e^{۲t}$ و e^t مستقل خطی است، کار ساده‌ای است. پس اگر ثابت کنیم که فضای جواب دو بُعدی است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\{e^t, e^{۲t}\}$ پایه‌ای برای فضای جواب است. این مطلب نتیجه قضیه زیر است. □

قضیه ۳۲.۲. به ازای هر عملگر دیفرانسیل $p(D)$ از مرتبه n، فضای پوچ $p(D)$ زیرفضایی n-بُعدی از $\mathbb{C}^\infty$ است.

به عنوان مقدمه‌ای بر اثبات قضیه ۳۲.۲، ابتدا دو لِم را ثابت می‌کنیم.

لم ۳. به ازای هر عدد مختلط c، عملگر دیفرانسیل $D - cI : \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^\infty$ پوشاست.

برهان. فرض کنید $x \in \mathbb{C}^\infty$. می‌خواهیم $y \in \mathbb{C}^\infty$ را به گونه‌ای بیابیم که $(D-cI)(y) = x$. فرض کنید برای هر $t \in \mathbb{R}$، $w(t) = x(t)e^{-ct}$. به وضوح $w \in \mathbb{C}^\infty$، چرا که هم x و هم e^{-ct} در $\mathbb{C}^\infty$ قرار دارند. اگر $w_۱$ و $w_۲$ قسمت‌های حقیقی و موهومی w باشند، در این صورت هر دوی $w_۱$ و $w_۲$ پیوسته‌اند، چرا که مشتق‌پذیر هستند. بنابراین، هر دو پادمشتق دارند، مثلاً به ترتیب $W_۱$ و $W_۲$. فرض کنید $W : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ چنین تعریف شود:

$$W(t) = W_۱(t) + iW_۲(t) \qquad \text{برای هر } t \in \mathbb{R}،$$

در این صورت $W \in \mathbb{C}^\infty$ و قسمت‌های حقیقی و موهومی W به ترتیب $W_۱$ و $W_۲$ می‌باشند. به علاوه $W' = w$. نهایتاً، فرض کنید $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ به صورت $y(t) = W(t)e^{ct}$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ تعریف شده باشد. واضح است که $y \in \mathbb{C}^\infty$ و از آنجا که:

$$\begin{aligned}
(D-cI)(y)(t) &= y'(t) - cy(t) \\
W'(t) &= e^{ct} + W(t)ce^{ct} - cW(t)e^{ct} \\
&= w(t)e^{ct} \\
&= x(t)e^{-ct}e^{ct} \\
&= x(t)
\end{aligned}$$

داریم $(D-cI)(y) = x$. □

لم ۴. فرض کنید V فضایی برداری باشد و T و U چنان عملگرهای خطی‌ای روی V باشند، که U پوشا و فضاهای پوچ T و U متناهی‌البُعد باشند؛ در این صورت فضای پوچ TU هم متناهی‌البُعد است و داریم:

$$\dim(N(TU)) = \dim(N(T)) + \dim(N(U))$$

برهان. فرض کنید $p = \dim(N(T))$، $q = \dim(N(U))$ و $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ و $\{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$ به ترتیب پایه‌هایی برای $N(T)$ و $N(U)$ باشند؛ از آنجا که U پوشاست، برای هر i ای ($1 \leqslant i \leqslant p$)، می‌توانیم عنصر $w_i \in V$ را چنان انتخاب کنیم که $U(w_i) = u_i$. به این ترتیب مجموعه p عضوی $\{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ به دست می‌آید. توجه کنید که به ازای هر i و j، $w_i \neq v_j$، چرا که در غیر این صورت، $u_i = U(w_i) = U(v_j) = 0$، که تناقض است. پس مجموعهٔ

$$\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_p, v_1, \ldots, v_q\}$$

$p + q$ عضو متمایز دارد. برای تکمیل برهان این لِم کافی است ثابت کنیم که β پایه‌ای برای $N(TU)$ است.

ابتدا ثابت می‌کنیم که β، $N(TU)$ را تولید می‌کند. چون برای هر w_i و v_j ای در β:

$$TU(w_i) = T(u_i) = 0 \qquad \text{و} \qquad TU(v_j) = T(0) = 0$$

پس

$$\beta \subseteq N(TU)$$

حال فرض کنید که $v \in N(TU)$. در این صورت،

$$0 = TU(v) = T(U(v))$$

پس $U(v) \in N(T)$. بنابراین، اسکالرهای $a_1, a_2, \ldots, a_p$ وجود دارند به طوری که:

$$\begin{aligned} U(v) &= a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_pu_p \\ &= U(a_1w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_pw_p) \end{aligned}$$

بنابراین:

$$U(v - (a_1w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_pw_p)) = 0$$

در نتیجه، $v - (a_1w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_pw_p)$، در $N(U)$ قرار دارد. نتیجه می‌شود که اسکالرهای $b_1, b_2, \ldots, b_q$ وجود دارند به طوری که:

$$v - (a_1w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_pw_p) = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_qv_q$$

یا به عبارتی:

$$v = a_۱w_۱ + a_۲w_۲ + \ldots + a_pw_p + b_۱v_۱ + b_۲v_۲ + \ldots + b_qv_q$$

بنابراین β، $N(TU)$ را می‌پیماید.

برای اثبات اینکه β مستقل خطی است، فرض کنید $a_۱, a_۲, \ldots, a_p$ و $b_۱, b_۲, \ldots, b_q$ چنان اسکالرهایی باشند که:

$$a_۱w_۱ + a_۲w_۲ + \ldots + a_pw_p + b_۱v_۱ + b_۲v_۲ + \ldots + b_qv_q = ۰ \qquad (۲-۶)$$

با U گرفتن از دو طرف ۲-۶ داریم:

$$a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + \ldots + a_pu_p = ۰$$

از آنجا که $\{u_۱, u_۲, \ldots, u_p\}$ مستقل خطی است، تمام a_i ها صفرند. پس معادله ۲-۶ به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$b_۱v_۱ + b_۲v_۲ + \ldots + b_qv_q = ۰$$

باز استقلال خطی $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_q\}$ نتیجه می‌دهد که b_i ها همگی صفرند. از اینجا نتیجه می‌گیریم که β پایه‌ای برای $N(TU)$ است. بنابراین $N(TU)$ متناهی‌البُعد است و $\dim(N(TU)) = p + q = \dim(N(T)) + \dim(N(U))$. □

برهان (قضیه ۲.۳۲). اثبات با استقرای ریاضی روی مرتبه عملگر دیفرانسیل $p(D)$ صورت خواهد گرفت. قضیه در حالتی که این مرتبه یک باشد، همان قضیه ۲.۳۰ است. فرض کنید $n > ۱$ عددی صحیح باشد وقضیه ۲.۳۲ به ازای هر عملگر دیفرانسیل مرتبه کمتر از n برقرار باشد. عملگر دیفرانسیلی مانند $p(D)$ از مرتبه n را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای $p(t)$ را می‌توان به حاصلضرب دو چندجمله‌ای تجزیه کرد:

$$p(t) = q(t)(t - c)$$

که در آن $q(t)$ چندجمله‌ایی از درجه $n - ۱$ و c عددی مختلط است. در نتیجه، عملگر دیفرانسیل مفروض را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$p(D) = q(D)(D - cI)$$

طبق لِم ۱ می‌دانیم که $D - cI$ پوشاست؛ طبق نتیجه قضیه ۲.۳۰، $\dim(N(D - cI)) = ۱$ و بنا بر فرض استقرا، $\dim(N(q(D))) = n - ۱$. پس طبق لِم ۲، نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned}\dim(N(p(D))) &= \dim(N(q(D))) + \dim(N(D - cI)) \\ &= (n - ۱) + ۱ = n\end{aligned}$$

□

نتیجه ۳. فضای جواب هر معادله دیفرانسیل خطی همگن از مرتبه n با ضرایب ثابت، زیرفضایی n بُعدی از $\mathbb{C}^\infty$ است.

نتیجه قضیه ۳۲.۲، مسأله یافتن تمام جواب‌های یک معادله دیفرانسیل خطی همگن از مرتبه n با ضرایب ثابت را به یافتن مجموعه‌ای از n جواب مستقل خطی برای آن معادله تقلیل می‌دهد. طبق نتایج فصل ۱، هر مجموعه‌ای که دارای این خاصیت باشد باید پایه‌ای برای فضای جواب باشد. قضیه زیر به ما امکان می‌دهد که برای بسیاری از اینگونه معادلات، خیلی سریع پایه پیدا کنیم.

قضیه ۳۳.۲. n عدد مختلط متمایز $c_1, \ldots, c_n$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت مجموعه توابع نمایی $\{e^{c_1 t}, e^{c_2 t}, \ldots, e^{c_n t}\}$ مستقل خطی است.

برهان. به عهده خواننده است. □

نتیجه ۴. به ازای هر معادله دیفرانسیل خطی همگن از مرتبه n با ضرایب ثابت، اگر چندجمله‌ای کمکی آن n ریشه متمایز $c_1, c_2, \ldots, c_n$ را داشته باشد، در این صورت $\{e^{c_1 t}, e^{c_2 t}, \ldots, e^{c_n t}\}$ پایه‌ای برای فضای جواب آن معادله دیفرانسیل خواهد بود.

برهان. به عهده خواننده است. □

مثال ۵. تمام جواب‌های معادله دیفرانسیل زیر را می‌یابیم:

$$y'' + 5y' + 4y = 0$$

از آنجا که چندجمله‌ای کمکی به صورت $(t+1)(t+4)$ تجزیه می‌شود، دارای دو ریشه متمایز ۱− و ۴− می‌باشد. در نتیجه $\{e^{-t}, e^{-4t}\}$ پایه‌ای برای فضای جواب است. پس هر جواب معادله مفروض به ازای دو ثابت منحصر به فرد b_1 و b_2 به صورت زیر است:

$$y(t) = b_1 e^{-t} + b_2 e^{-4t}$$

□

مثال ۶. همه جواب‌های معادله دیفرانسیل

$$y'' + 9y = 0$$

را می‌یابیم.

چندجمله‌ای کمکی $t^{۲} + ۹$، به صورت $(t - ۳i)(t + ۳i)$ تجزیه می‌شود، بنابراین دارای دو ریشه متمایز است: $c_{۱} = ۳i$ و $c_{۲} = -۳i$، بنابراین $\{e^{۳it}, e^{-۳it}\}$ پایه‌ای برای فضای جواب است. با استفاده از تمرین ۷ می‌توان پایه قابل استفاده‌تری یافت. از آنجا که

$$\cos ۳t = \frac{۱}{۲}(e^{۳it} + e^{-۳it}) \qquad \text{و} \qquad \sin ۳t = \frac{۱}{۲i}(e^{۳it} - e^{-۳it})$$

نتیجه می‌شود که $\{\cos ۳t, \sin ۳t\}$ هم پایه‌ای برای فضای جواب است. مزیتی که این پایه نسبت به پایه قبلی دارد این است که فقط شامل توابع آشنای سینوس و کسینوس است و کاری به اعداد موهومی ندارد. □

حال معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' + ۲y' + y = ۰$$

که چندجمله‌ای کمکی آن $(t + ۱)^{۲}$ می‌باشد. طبق قضیه ۳۱.۲، e^{-t} جوابی برای این معادله است. طبق نتیجه قضیه ۳۲.۲ فضای جواب این معادله دو بُعدی است. برای یافتن پایه‌ای برای فضای جواب نیاز به جوابی داریم که نسبت به e^{-t} مستقل خطی باشد. خواننده می‌تواند بررسی کند که te^{-t} هم یک جواب است. این نتیجه را می‌توان تعمیم داد.

قضیه ۳۴.۲. به ازای هر عدد مختلط c و عدد صحیح مثبت n، فرض کنید که $(t-c)^n$ چندجمله‌ای کمکی معادله دیفرانسیل خطی همگنی با ضرایب ثابت باشد. در این صورت مجموعهٔ

$$\beta = \{e^{ct}, te^{ct}, \ldots, t^{n-۱}e^{ct}\}$$

پایه‌ای برای فضای جواب‌های آن معادله خواهد بود.

برهان. از آنجا که فضای جواب‌ها n بُعدی است، کافی است نشان دهیم که β مستقل خطی است و در فضای جواب قرار دارد. ابتدا ملاحظه کنید که به ازای هر عدد صحیح مثبت k،

$$\begin{aligned}(D - cI)(t^k e^{ct}) &= kt^{k-۱}e^{ct} + ct^k e^{ct} - ct^k e^{ct} \\ &= kt^{k-۱}e^{ct}\end{aligned}$$

بنابراین هرگاه $k < n$،

$$(D - cI)^n(t^k e^{ct}) = ۰$$

نتیجه می‌گیریم که β در فضای جواب قرار دارد.

حال نشان می‌دهیم که β مستقل خطی است. به ازای اسکالرهای $b_{n-۱}, \ldots, b_{۱}, b_{۰}$ فرض کنید که

$$b_{۰}e^{ct} + b_{۱}te^{ct} + \ldots + b_{n-۱}t^{n-۱}e^{ct} = ۰ \tag{۲-۷}$$

با تقسیم ۲-۷ بر e^{ct} نتیجه می‌گیریم که

$$b_۰ + b_۱ t + \ldots + b_{n-۱} t^{n-۱} = ۰ \qquad (۲-۸)$$

سمت چپ ۲-۸ باید تابع چندجمله‌ای صفر باشد. نتیجه می‌گیریم که ضرایب $b_۰$، $b_۱$، $\ldots$، $b_{n-۱}$ همگی صفرند. پس β مستقل خطی است و بنابراین پایه‌ای برای فضای جواب می‌باشد. □

مثال ۷. همه جواب‌های معادله دیفرانسیل زیر را می‌یابیم:

$$y^{(۴)} - ۴y^{(۳)} + ۶y^{(۲)} - ۴y^{(۱)} + y = ۰$$

چون چندجمله‌ای کمکی معادله

$$t^۴ - ۴t^۳ + ۶t^۲ - ۴t + ۱ = (t-۱)^۴$$

است، می‌توان فوراً از قضیه ۳۴.۲ نتیجه گرفت که $\{e^t, te^t, t^۲e^t, t^۳e^t\}$ پایه‌ای برای فضای جواب است. پس هر جواب معادله دیفرانسیل مفروض به ازای اسکالرهای یکتایی مانند $b_۱$، $b_۲$، $b_۳$ و $b_۴$ به شکل زیر است:

$$y(t) = b_۱e^t + b_۲te^t + b_۳t^۲e^t + b_۴t^۳e^t$$

□

کلی‌ترین حالت در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۳۵.۲. معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت و با چندجمله‌ای کمکی زیر مفروض است:

$$(t-c_۱)^{n_۱}(t-c_۲)^{n_۲}\ldots(t-c_k)^{n_k}$$

که $n_۱$، $n_۲$، $\ldots$، n_k اعداد صحیح مثبتی هستند و $c_۱$، $c_۲$، $\ldots$، c_k اعداد مختلط متمایزی می‌باشند. در این صورت مجموعه زیر، پایه‌ای برای فضای جواب معادله است.

$$\{e^{c_۱t}, te^{c_۱t}, \ldots, t^{n_۱-۱}e^{c_۱t}, \ldots, e^{c_kt}, te^{c_kt}, \ldots, t^{n_k-۱}e^{c_kt}\}$$

برهان. به عهده خواننده است. □

مثال ۸. چندجمله‌ای کمکی معادله دیفرانسیل زیر:

$$y^{(۳)} - ۴y^{(۲)} + ۵y^{(۱)} - ۲y = ۰$$

عبارت است از:

$$t^۳ - ۴t^۲ + ۵t - ۲ = (t-۱)^۲(t-۲)$$

بنابر قضیه ۲.۳۵، $\{e^t, te^t, e^{2t}\}$ پایه‌ای برای فضای جواب این معادله است. پس هر جواب معادله، به ازای اسکالرهای یکتایی مانند b_1، b_2، b_3 به شکل زیر است:

$$y(t) = b_1 e^t + b_2 te^t + b_3 e^{2t}$$

□

تمرینات

۱. مشخص کنید که کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) فضای جواب‌های یک معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه n با ضرایب ثابت، زیرفضایی n بُعدی از $\mathbb{C}^\infty$ است.

ب) فضای جواب‌های یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت، فضای پوچ یک عملگر دیفرانسیل است.

ج) چندجمله‌ای کمکی یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت، یکی از جواب‌های آن معادله است.

د) هر جواب یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت، به شکل ae^{ct} یا $at^k e^{ct}$ است که a و c اعدادی مختلط و k عدد صحیح مثبتی است.

ه) هر ترکیب خطی از جواب‌های یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت، خود نیز جوابی برای آن معادله است.

و) برای هر معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت و چندجمله‌ای کمکی $p(t)$، هرگاه c_1، …، c_k ریشه‌های متمایز $p(t)$ را تشکیل دهند، $\{e^{c_1 t}, e^{c_2 t}, \dots, e^{c_k t}\}$ پایه‌ای برای فضای جواب‌های معادله مفروض است.

ز) به ازای هر چندجمله‌ای $p(t) \in P(\mathbb{C})$، یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت موجود است که چندجمله‌ای کمکی آن $p(t)$ باشد.

۲. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را تعیین کنید. ادعای خود را با ارائه یک اثبات یا مثال نقض، هر کدام که لازم باشد، ثابت کنید.

الف) هر زیرفضای متناهی‌البُعد $\mathbb{C}^\infty$، فضای جواب‌های یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت است.

ب) معادله دیفرانسیل خطی همگنی با ضرایب ثابت موجود است که $\{t, t^2\}$ پایه‌ای برای فضای جواب‌هایش باشد.

ج) برای هر معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت، اگر x جوابی از معادله باشد، x' هم هست.

برای هر دو چندجمله‌ای $p(t)$ و $q(t)$ از $P(\mathbb{C})$، هرگاه $x \in N(p(D))$ و $y \in N(q(D))$، خواهیم داشت:

د) $x + y \in N(p(D)q(D))$

ه) $xy \in N(p(D)q(D))$

۳. پایه‌ای برای فضای جواب‌های هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر بیابید:

الف) $y'' + ۲y' + y = ۰$

ب) $y''' = y'$

ج) $y^{(۴)} - ۲y^{(۲)} + y = ۰$

د) $y^{(۳)} + y^{(۲)} + ۳y^{(۱)} + ۵y = ۰$

۴. برای هر یک از زیرفضاهای $\mathbb{C}^{\infty}$ در زیر، پایه‌ای بیابید:

الف) $N(D^۲ - D - I)$

ب) $N(D^۳ - ۳D^۲ + ۳D - I)$

ج) $N(D^۳ + ۶D^۲ + ۸D)$

۵. ثابت کنید که $\mathbb{C}^{\infty}$ زیرفضایی از $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ است.

۶. الف) ثابت کنید که $D : \mathbb{C}^{\infty} \to \mathbb{C}^{\infty}$ یک عملگر خطی است.

ب) ثابت کنید که هر عملگر دیفرانسیل، عملگری خطی بر $\mathbb{C}^{\infty}$ است.

۷. ثابت کنید که اگر $\{x, y\}$، پایه‌ای برای یک فضای برداری بر $\mathbb{C}$ باشد،

$$\{\frac{۱}{۲}(x+y), \frac{۱}{۲i}(x-y)\}$$

نیز چنین است.

۸. یک معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت را در نظر بگیرید که چندجمله‌ای کمکی آن دو ریشه متمایز $a + ib$ و $a - ib$ را داشته باشد، که $a, b \in \mathbb{R}$. ثابت کنید $\{e^{at}\cos bt, e^{at}\sin bt\}$ پایه‌ای برای فضای جواب‌هاست.

۹. فرض کنید $\{U_{1}, U_{2}, \ldots, U_n\}$ مجموعه‌ای از عملگرهای خطی بر فضای برداری V باشد که دو به دو با هم جابجا می‌شوند (یعنی برای هر دو i و j، $U_iU_j = U_jU_i$). ثابت کنید که برای هر i، $(1 \leqslant i \leqslant n)$

$$N(U_i) \subset N(U_{1}U_{2}\ldots U_n)$$

۱۰. قضیه ۳۳.۲ و نتیجه آن را ثابت کنید. راهنمایی: فرض کنید:

$$b_{1}e^{c_{1}t} + b_{2}e^{c_{2}t} + \ldots + b_ne^{c_nt} = 0$$

(c_iها متمایز هستند).

برای اینکه ثابت کنید همه b_i ها صفرند، به شرح زیر، بر روی n استقرای ریاضی کنید. قضیه را برای حالت $n = 1$ بررسی کنید. با فرض اینکه قضیه برای $n - 1$ تابع (نمایی) درست باشد، عملگر $D - c_nI$ را بر دو طرف معادله فوق اثر دهید تا قضیه برای n تابع نمایی متمایز به دست آید.

۱۱. قضیه ۳۵.۲ را ثابت کنید. راهنمایی: ابتدا ثابت کنید که مجموعه‌ای که ادعا شده پایه است، در فضای جواب‌ها قرار دارد. بعد با استفاده از استقرای ریاضی بر k به شرح زیر، ثابت کنید که این مجموعه مستقل خطی است. حالت $k = 1$، همان قضیه ۳۴.۲ است. با فرض اینکه قضیه برای $k - 1$ تا از c_i های متمایز برقرار باشد، عملگر $(D - c_kI)^{n_k}$ را به هر ترکیب خطی دلخواه آن مجموعه که مساوی صفر است اثر دهید.

۱۲. فرض کنید که V فضای جواب‌های یک معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه n با ضرایب ثابت و چندجمله‌ای کمکی $p(t)$ باشد. ثابت کنید که اگر برای چندجمله‌ای‌های با درجه مثبت $g(t)$ و $h(t)$، داشته باشیم $p(t) = g(t)h(t)$، آنگاه:

$$N(h(D)) = R(g(D_v)) = g(D)(V)$$

که در آن $D_v : V \to V$، با ضابطه $D_v(x) = x'$ برای هر $x \in V$ تعریف می‌شود. راهنمایی: اول ثابت کنید $g(D)(V) \subseteq N(h(D))$. بعد ثابت کنید که دو فضا دارای بُعد متناهی مساوی هستند.

۱۳. معادله دیفرانسیل زیر را یک معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن با ضرایب ثابت نامند

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{1}y^{(1)} + a_0y = x$$

هرگاه a_i ها ثابت بوده، قسمت سمت راست معادله، یعنی x تابعی باشد که متحداً صفر نیست.

الف) ثابت کنید که برای هر $x \in \mathbb{C}^\infty$، $y \in \mathbb{C}^\infty$ ای هست که y جوابی برای معادله بالا باشد.

راهنمایی: با استفاده از لم ۱ برای قضیه ۳۲.۲ نشان دهید که برای هر چندجمله‌ای مانند $p(t)$، عملگر خطی $p(D) : \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^\infty$ پوشاست.

ب) فرض کنید V فضای جواب‌های معادله دیفرانسیل خطی همگن زیر باشد.

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_{1}y^{(1)} + a_0y = 0$$

ثابت کنید که هرگاه z یک جواب معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن بالا باشد، مجموعه جواب‌های این معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن عبارت است از:

$$\{z+y : y \in V\}$$

۱۴. به ازای هر معادله دیفرانسیل خطی همگن از مرتبه n با ضرایب ثابت، ثابت کنید که به ازای هر جواب از آن مانند x و هر $t_o \in \mathbb{R}$ اگر $x(t_\circ) = x'(t_\circ) = \ldots = x^{(n-۱)}(t_\circ) = \circ$، آنگاه $x = \circ$ (منظور تابع صفر است). راهنمایی: به شرح زیر، از استقرای ریاضی بر n استفاده کنید. ابتدا نتیجه را در حالت $n = ۱$ ثابت کنید. بعد فرض کنید که برای هر معادله با درجه $n - ۱$ درست باشد و معادله‌ای از مرتبه n و با چندجمله‌ای کمک $p(t)$ را در نظر بگیرید. $p(t)$ را به صورت $q(t)(t-c)$ تجزیه کنید و فرض کنید $z = q(D)(x)$. ثابت کنید که $z(t_\circ) = \circ$ و $z' - cz = \circ$، تا نتیجه شود که $z = \circ$. حال فرض استقرا را به کار ببندید.

۱۵. فرض کنید V فضای جواب‌های یک معادله دیفرانسیل خطی همگن از مرتبه n با ضرایب ثابت باشد. $t_\circ \in \mathbb{R}$ را ثابت فرض کنید و نگاشت $\varphi : V \to \mathbb{C}^n$ را با ضابطهٔ

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} x(t_\circ) \\ x'(t_\circ) \\ \vdots \\ x^{(n-۱)}(t_\circ) \end{bmatrix}$$

برای هر x در V تعریف کنید.

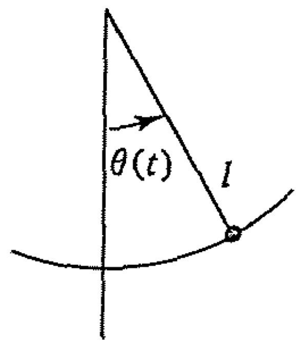
الف) ثابت کنید که φ خطی و فضای پوچ آن بدیهی است. نتیجه بگیرید که φ یک ایزومرفیسم است. راهنمایی: از تمرین ۱۴ استفاده کنید.

ب) ثابت کنید به ازای هر معادله دیفرانسیل خطی همگن از مرتبه n با ضرایب ثابت و هر $t_o \in \mathbb{R}$ و اعداد مختلط $c_\circ$، $c_۱$، $\ldots$، $c_{n-۱}$ (نه لزوماً متمایز)، دقیقاً یک جواب مانند x برای معادله دیفرانسیل مفروض وجود دارد که $x(t_\circ) = c_\circ$ و برای هر $k = ۱, ۲, \ldots, n-۱$، $x^{(k)}(t_\circ) = c_k$.

۱۶. **حرکت آونگی:** کاملاً مشهور است که حرکت یک آونگ را می‌توان با معادله دیفرانسیل زیر تقریب زد:

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = \circ$$

که در آن $\theta(t)$ زاویه‌ای بر حسب رادیان است که آونگ در لحظه t نسبت به یک خط عمودی دارد (به شکل ۲-۸ رجوع کنید)، و این‌گونه تعبیر می‌شود که اگر آونگ نسبت به دید خواننده در سمت راست خط عمود قرار گیرد، θ مثبت و اگر در سمت چپ باشد، θ منفی است. در اینجا l، طول آونگ و g مقدار شتاب ثقل است. متغیر t و



شکل ۲-۸:

ثابت‌های l و g باشد بر حسب واحدهایی باشند که به هم بخورند (مثلاً t بر حسب ثانیه، l بر حسب متر و g بر حسب متر بر مجذور ثانیه باشد).

الف) جواب عمومی این معادله را به صورت ترکیب خطی دو جواب حقیقی بیان کنید.

ب) آن جواب یگانه‌ای از این معادله را بیابید که در شرایط زیر صدق کند:

$$\theta(0) = \theta_0 > 0 \qquad \text{و} \qquad \theta'(0) = 0$$

(معنی این دو شرط این است که در زمان $t = 0$، آونگ از نقطه‌ای که با خط عمود، زاویه θ_0 دارد، رها شود).

ج) ثابت کنید که به اندازه $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ زمان لازم است تا آونگ یک دور رفت و برگشت را طی کند (این زمان را دوره تناوب آونگ نامند).

۱۷. **حرکت تناوبی فنر با صرف‌نظر کردن از نیروهای اصطکاک:** جوابی عمومی برای (۳) بیابید که حرکت تناوبی یک فنر با در نظر گرفتن نیروهای اصطکاک توصیف می‌کند.

۱۸. **حرکت تناوبی فنر با در نظر گرفتن نیروهای اصطکاک:** حرکت تناوبی ایده‌آلی که (۳) آن را توصیف می‌کند، بدون در نظر گرفتن نیروهای اصطکاک به دست می‌آید. اما در واقعیت نیروی اصطکاکی که بر حرکت اثر می‌کند، متناسب با سرعت حرکت است ولی در جهت عکس، عمل می‌کند. صورت اصلاح شده (۳) با در نظر گرفتن نیروی اصطکاک که نیروی کر کننده خوانده می‌شود، به صورت زیر است:

$$my'' + ry' + ky = 0$$

که در آن $r > 0$، نسبت تناسب است.

الف) جواب عمومی این معادله را بیابید.

ب) جواب یکتایی از قسمت الف را بیابید که در شرایط اولیه $y(\circ) = \circ$ ، $y'(\circ) = v_\circ$ صدق کند که در اینجا $v_\circ$ سرعت اولیه است.

ج) برای $y(t)$ که در قسمت ب پیدا شد، نشان دهید که دامنه نوسان تدریجاً به صفر نزدیک می‌شود؛ یعنی ثابت کنید که $\lim_{t\to\infty} y(t) = \circ$.

۱۹. در ادامه مطالعه‌مان در مورد معادلات دیفرانسیل، جواب‌ها را توابعی با مقدار مختلط در نظر گرفتیم، در حالی که توابعی که در توصیف حرکات فیزیکی مفید واقع می‌شوند، مقدار حقیقی دارند. مزایای این‌گونه برخورد را توجیه کنید.

۲۰. مجموعه تمرینات ذیل، که جبر خطی در آنها به کار نمی‌رود به خاطر کامل شدن بحث آورده شده است.

الف) قضیه ۲.۲۷ را ثابت کنید (**راهنمایی:** با استقرا روی تعداد مشتقاتی که یک جواب دلخواه دارند کار کنید).

ب) به ازای هر $c, d \in \mathbb{C}$ ثابت کنید:

$$e^{c+d} = e^c e^d \qquad \text{و} \qquad e^{-c} = \frac{۱}{e^c}$$

ج) قضیه ۲.۲۸ را ثابت کنید.

د) قضیه ۲.۲۹ را ثابت کنید.

ه) قضیه مشتق‌گیری از حاصلضرب را برای توابعی با مقدار مختلط از یک متغیر حقیقی ثابت کنید: برای هر دو تابع مشتق‌پذیر x و y در $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ حاصلضرب xy نیز مشتق‌پذیر است و

$$(xy)' = x'y + xy'$$

(**راهنمایی:** قواعد مشتق‌گیری را بر روی قسمت‌های حقیقی و موهومی xy به کار ببرید).

و) ثابت کنید که اگر $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ و $x' = \circ$، آنگاه x تابعی ثابت است.

فصل ۳

عملیات ماتریسی مقدماتی و دستگاه‌های معادلات خطی

این فصل به دو موضوع مرتبط به هم اختصاص دارد:

۱. مطالعهٔ عملیات خاصی بر روی ماتریس‌ها که «رتبه را حفظ می‌کنند».

۲. کاربرد این عملیات به همراه نظریهٔ تبدیلات خطی در حلّ دستگاه‌های معادلات خطی.

با رسیدن به هدف ۱، راه ساده‌ای برای محاسبهٔ رتبهٔ یک تبدیل خطی بین فضاهای متناهی‌البُعد، از طریق اعمال این عملیات ماتریسی حافظ رتبه بر یک نمایش ماتریسی از این تبدیل خطی، پیدا خواهیم کرد.

شاید حل دستگاه‌های معادلات خطی مهمترین کاربرد جبرخطی باشد. مبنای روش آشنای حذفی که برای حل دستگاه‌های معادلات خطی به کار می‌رود و در بخش ۱–۴ مورد مطالعه قرار گرفت، این است که با حذف متغیرها، دستگاه ساده‌تری به دست آوریم. تکنیکی که با آن متغیرها حذف می‌شوند، شامل سه نوع عملیات است:

۱. تعویض دو سطر دستگاه.

۲. ضرب یکی از معادلات دستگاه در یک ثابت ناصفر.

۳. افزودن مضربی از یک معادله به دیگری.

در بخش ۳-۳، یک دستگاه معادلات خطی را به صورت یک تساوی ماتریسی واحد بیان کردیم. در این طرز نمایش، سه عمل فوق را «اعمال مقدماتی سطری» ماتریسی می‌خوانند. این سه عمل، روش محاسباتی مناسبی برای تعیین تمام جواب‌های دستگاه‌های معادلات خطی فراهم می‌کنند.

۳-۱ عملیات ماتریسی مقدماتی و ماتریس‌های مقدماتی

در این بخش، عملیات مقدماتی‌ای را که در طول فصل به کار خواهیم برد، تعریف خواهیم کرد. در فصل‌های بعدی، از این عملیات برای به دست آوردن روش‌های محاسباتی ساده‌ای که با آنها می‌توان رتبهٔ یک تبدیل خطی را تعیین کرد و جواب دستگاه‌های معادلات خطی را به دست آورد، استفاده خواهیم کرد. دو نوع عملیات ماتریسی مقدماتی وجود دارد: عملیات سطری و عملیات ستونی. همان طور که خواهیم دید، عملیات سطری مفیدتر هستند. این اعمال نشأت گرفته از سه عملی هستند که برای حذف متغیرها در دستگاه‌های معادلات خطی به کار می‌روند.

چند تعریف: فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ باشد. هر یک از سه نوع عمل زیر بر روی سطرهای [ستون‌های] A را یک عمل سطری [ستونی] مقدماتی نامند:

۱. تعویض دو سطر [ستون] A،

۲. ضرب یکی از سطرهای [ستون‌های] A در یک ثابت ناصفر،

۳. افزودن مضربی از یک سطر [ستون] A به سطری [ستونی] دیگر.

هر یک از سه نوع عمل فوق را یک عمل مقدماتی نامند. عملیات مقدماتی بر حسب اینکه از (۱)، (۲) یا (۳) به دست آیند، نوع اول، دوم و سوم خوانده می‌شوند.

مثال ۱. فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

تعویض سطرهای اول و دوم A، نمونه‌ای از عمل سطری مقدماتی نوع اول است. ماتریس حاصل عبارت است از:

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

ضرب کردن ستون دوم در ۳، نمونه‌ای از یک عمل ستونی مقدماتی نوع دوم است. ماتریس حاصل عبارت است از:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

افزودن ۴ برابر سطر سوم A به سطر اول، نمونه‌ای از یک عمل سطری مقدماتی نوع سوم است. در اینجا ماتریس حاصل عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 17 & 2 & 7 & 12 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

□

تعریف:. یک ماتریس $n \times n$ را یک ماتریس مقدماتی گویند، هرگاه بتوان آن را با انجام یک عمل مقدماتی روی I_n به دست آورد. این چنین ماتریسی را به ترتیب از نوع اول، دوم و سوم می‌نامند، هرگاه عمل مقدماتی صورت گرفته از نوع اول، دوم و سوم باشد.

بعنوان مثال با تعویض دو سطر اول I_3، ماتریس زیر حاصل می‌شود:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که E را با تعویض دو ستون اول I_3 هم می‌توان به دست آورد. در حقیقت، هر ماتریس مقدماتی را می‌توان حداقل از دو طریق به دست آورد. یکی با اِعمال یک عمل سطری مقدماتی بر I_n و دیگری با یک عمل ستونی مقدماتی بر آن. به طور مشابه، ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هم یک ماتریس مقدماتی است، چرا که از روی I_3 و با اِمال یک عمل ستونی مقدماتی از نوع سوم (افزودن -2 برابر ستون اول I_3 به ستون سوم) و یا یک عمل سطری مقدماتی نوع سوم (افزودن -2 برابر سطر سوم به سطر اول) به دست می‌آید.

اولین قضیهٔ ما نشان می‌دهد که اِعمال یک عمل سطری مقدماتی بر یک ماتریس، با ضرب آن در یک ماتریس مقدماتی متناظر با آن عمل معادل است.

قضیه ۱.۳. فرض کنید $A \in M_{m\times n}(F)$ و نیز فرض کنید B با اِعمال یک عمل مقدماتی سطری [ستونی] بر A به

دست آید. در این صورت یک ماتریس مقدماتی $m \times m$ $[n \times n]$ مانند E وجود دارد که $B = EA [B = AE]$. در حقیقت E از طریق اِعمال همان سطری [ستونی] مقدماتی‌ای بر $I_m [I_n]$ به دست می‌آید، که برای به دست آوردن B از A روی A صورت می‌گیرد. برعکس، هرگاه E یک ماتریس مقدماتی $m \times m$ $[n \times n]$ باشد، EA $[AE]$ ماتریسی است که از اعمال همان عمل سطری [ستونی] مقدماتی‌ای روی A به دست می‌آید که اگر روی I_m $[I_n]$ اِعمال شود، E حاصل می‌شود.

برهان این قضیه، که آن را حذف می‌کنیم، مستلزم بررسی کردن قضیه با ازای هر یک از اعمال سطری مقدماتی است. برای اثبات قضیه برای اعمال ستونی، می‌توان با استفاده از ماتریس ترانهاده، اعمال ستونی را به اعمال سطری تبدیل کرد. جزئیات برهان را بعنوان تمرین به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

مثال زیر، طرز به کارگیری قضیه را نشان می‌دهد.

مثال ۲. ماتریس B از مثال ۱ را در نظر بگیرید. این ماتریس از تعویض دو سطر اول ماتریس A (در مثال ۱) به دست آمد. با اعمال همین عمل بر I_3، ماتریس زیر را به دست می‌آوریم:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظه کنید که $EA = B$.

در قسمت دوم مثال ۱، C از ضرب ستون دوم A در ۳ به دست آمد. با اعمال همین عمل بر I_4، ماتریس مقدماتی زیر را به دست می‌آوریم:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظه کنید که $AE = C$. □

این واقعیت که وارون یک ماتریس مقدماتی، خود ماتریسی مقدماتی است، بسیار مفید است.

قضیه ۲.۳. ماتریس‌های مقدماتی وارون‌پذیرند و وارون یک ماتریسی مقدماتی، ماتریسی مقدماتی از همان نوع است.

برهان. با در نظر گرفتن این مطلب که هر ماتریس مقدماتی $n \times n$ را می‌توان با اعمال یک عمل سطری مقدماتی بر I_n به دست آورد، کافی است سه حالت در نظر بگیریم؛ (به ازای هر نوع عمل، یک حالت.)

فرض کنیم E یک ماتریس مقدماتی $n \times n$ باشد.

حالت ۱: فرض کنید E با تعویض سطرهای p اُم و q اُم I_n $(p \neq q)$، که یک عمل سطری نوع اول است، به دست آید. به راحتی می‌توان دید که $E^۲ = I_n$. پس E وارون‌پذیر است و در حقیقت، $E = E^{-۱}$.

حالت ۲: فرض کنید E با ضرب سطر p اُم I_n در یک اسکالر ناصفر مانند c، یعنی با یک عمل سطری نوع دوم، به دست آید. چون $c \neq ۰$، c دارای یک وارون ضربی است. فرض کنید $\bar{E}$ ماتریس مقدماتی‌ای باشد که از ضرب سطر p اُم I_n در $c^{-۱}$ حاصل می‌شود. به راحتی می‌توان نشان داد که $E\bar{E} = \bar{E}E = I_n$ و لذا $\bar{E} = E^{-۱}$.

حالت ۳: فرض کنید E از افزودن c برابر سطر q اُم I_n به سطر p اُم I_n به دست آید، که $p \neq q$ و c یک اسکالر است. پس E را می‌توان با اعمال یک عمل سطری مقدماتی نوع سوم بر I_n به دست آورد. توجه کنید که I_n را هم می‌توان با اعمال یک عمل سطری مقدماتی نوع سوم روی E به دست آورد: افزودن $-c$ برابر سطر q اُم E به سطر p اُم آن. طبق قضیهٔ ۳-۱، ماتریسی مقدماتی مانند $\bar{E}$ (از نوع سوم) وجود دارد که $\bar{E}E = I_n$. پس بنابر تمرین ۸ از بخش ۲-۴، E وارون‌پذیر بوده، $E^{-۱} = \bar{E}$. □

تمرینات

۱. مشخص کنید که کدامیک از عبارات زیر درست و کدام نادرست است.

الف) ماتریس‌های مقدماتی همیشه مربعی هستند.

ب) همهٔ درایه‌های یک ماتریس مقدماتی، صفر یا یک هستند.

ج) ماتریس همانی $n \times n$، ماتریسی مقدماتی است.

د) حاصلضرب دو ماتریس مقدماتی $n \times n$، خود ماتریسی مقدماتی است.

ه) وارون یک ماتریس مقدماتی، ماتریسی مقدماتی است.

و) حاصل‌جمع دو ماتریس مقدماتی، ماتریسی مقدماتی است.

ز) ترانهادهٔ یک ماتریس مقدماتی، ماتریسی مقدماتی است.

ح) هرگاه B، ماتریسی باشد که با اِعمال یک عمل سطری مقدماتی بر A به دست آید، B را هم می‌توان با اِعمال یک عمل ستونی مقدماتی بر A به دست آورد.

ط) هرگاه B ماتریسی باشد که با اِعمال یک عمل سطری مقدماتی بر ماتریس A به دست آید، A را هم می‌توان با اِعمال یک عمل سطری مقدماتی بر B به دست آورد.

۲. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad ، \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۱ & -۲ & ۱ \\ ۱ & -۳ & ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۲ & -۲ \\ ۱ & -۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

عملی مقدماتی بیابید که A را به B تبدیل کند و عمل مقدماتی دیگری بیابید که B را به C تبدیل کند. از طریق چند عمل مقدماتی دیگر، C را به $I_۳$ تبدیل کنید.

۳. ادعایی را که در صفحهٔ ۱۶۱ صورت گرفت، ثابت کنید: هر ماتریس مقدماتی $n \times n$ را حداقل به دو طریق می‌توان به دست آورد: یکی با اِعمال یک عمل مقدماتی سطری بر I_n و دیگری با اِعمال یک عمل مقدماتی ستونی بر آن.

۴. ثابت کنید که E ماتریسی مقدماتی است اگر و تنها اگر E^t یک ماتریس مقدماتی باشد.

۵. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ باشد. ثابت کنید که هرگاه B را بتوان با یک عمل مقدماتی سطری [ستونی] از A به دست آورد، آنگاه B^t را می‌توان با انجام عمل مقدماتی ستونی [سطری] نظیر آن، از A^t به دست آورد.

۶. قضیهٔ ۳-۱ را ثابت کنید.

۷. ادعایی را که در حالت ۱ برهان قضیهٔ ۳-۲ صورت گرفته است ثابت کنید: هرگاه E ماتریس مقدماتی $n \times n$ نوع اولی باشد، $E^۲$ I_n.

۸. برای ماتریس $\bar{E}$ که در برهان حالت ۲ قضیهٔ ۳-۲ تعریف شده، ثابت کنید که $E\bar{E} = \bar{E}E = I_n$.

۹. ثابت کنید که هر عمل سطری [ستونی] مقدماتی نوع اول را می‌توان با سه عمل سطری [ستونی] مقدماتی نوع سوم و سپس یک عمل مقدماتی سطری [ستونی] نوع دوم به دست آورد.

۱۰. ثابت کنید که هر عمل مقدماتی سطری [ستونی] نوع دوم را می‌توان با تقسیم یک سطر [ستون]، بر یک اسکالر ناصفر به دست آورد.

۱۱. ثابت کنید که هر عمل مقدماتی سطری [ستونی] نوع سوم را می‌توان با کم کردن مضربی از یک سطر [ستون] از سطری [ستونی] دیگر به دست آورد.

۱۲. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ باشد، ثابت کنید که دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی از نوع‌های اول و سوم وجود دارد که A را به ماتریسی بالا مثلثی تبدیل می‌کند.

۳-۲ رتبهٔ یک ماتریس و وارون‌های ماتریسی

در این بخش رتبهٔ یک ماتریس را تعریف می‌کنیم. با استفاده از اعمال مقدماتی، رتبهٔ یک ماتریس یا تبدیل خطی را حساب خواهیم کرد. در انتهای بخش، روشی برای محاسبهٔ وارون یک ماتریس وارون‌پذیر ارائه شده است.

تعریف:. هرگاه $A \in M_{m\times n}(F)$، رتبهٔ A را که با $\mathrm{rank}(A)$ نشان می‌دهیم، برابر با رتبهٔ تبدیل خطی $L_A : F^n \to F^m$ تعریف می‌کنیم.

بسیاری از نتایج در مورد رتبهٔ ماتریس‌ها، بلافاصله از مطالب نظیر در مورد تبدیلات خطی نتیجه می‌شوند. یک نتیجهٔ مهم از این نوع، که از قضیهٔ ۲-۵ و نتیجهٔ ۲ قضیهٔ ۲-۱۹ حاصل می‌شود، این است که یک ماتریس $n \times n$ وارون‌پذیر است، اگر و تنها اگر رتبه‌اش n باشد.

مسلماً مایل هستیم که با این تعریف برای رتبهٔ یک ماتریس، رتبهٔ یک تبدیل خطی با رتبهٔ هر ماتریسی که نمایشگر آن است، برابر باشد. اولین قضیه نشان می‌دهد که این مطلب واقعاً درست است.

قضیه ۳.۳. فرض کنید $T : V \to W$ تبدیلی خطی میان دو فضای برداری متناهی‌البُعد باشد و فرض کنید β و γ به ترتیب پایه‌های مرتبی برای V و W باشند. در این صورت $\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}([T]_\beta^\gamma)$.

برهان. این مطلب صرفاً بیان دیگری از تمرین ۱۸ بخش ۲-۴ است. □

حال که مسألهٔ یافتن رتبهٔ یک تبدیل خطی، به مسألهٔ یافتن رتبه یک ماتریس کاهش یافت، نیاز به نتیجه‌ای داریم که ما را قادر به انجام اعمال حافظ رتبه ماتریس‌ها کند. قضیهٔ بعد، نحوهٔ انجام این کار را بیان می‌کند.

قضیه ۴.۳. فرض کنید A، ماتریسی $m \times n$ باشد. هرگاه P و Q به ترتیب ماتریس‌های $m \times m$ و $n \times n$ وارون‌پذیر باشند، داریم:

الف) $\mathrm{rank}(AQ) = \mathrm{rank}(A)$.

ب) $\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}(A)$.
و بنابراین

ج) $\mathrm{rank}(PAQ) = \mathrm{rank}(A)$.

برهان. ابتدا ملاحظه کنید که

$$R(L_{AQ}) = R(L_A L_Q) = L_A L_Q(F^n) = L_A(L_Q(F^n)) = L_A(F^n) = R(L_A)$$

زیرا L_Q پوشاست. بنابراین

$$\operatorname{rank}(AQ) = \dim(R(L_{AQ})) = \operatorname{rank}(A)$$

در اینجا الف ثابت می‌شود. برای اثبات ب، تمرین ۱۵ از بخش ۲-۴ را در مورد $T = L_P$ به کار می‌گیریم. جزئیات کار را حذف می‌کنیم. نهایتاً با به کارگیری الف و ب، داریم:

$$\operatorname{rank}(PAQ) = \operatorname{rank}(PA) = \operatorname{rank}(A)$$

□

نتیجه: اعمال سطری و ستونی مقدماتی بر ماتریس‌ها، رتبه را حفظ می‌کنند.

برهان. هرگاه B را بتوان با اِعمال یک عمل سطری مقدماتی بر A به دست آورد، ماتریس مقدماتی‌ای مانند E وجود خواهد داشت که $B = EA$. طبق قضیهٔ ۳-۲، E وارون‌پذیر است و بنابراین طبق قضیهٔ ۳-۴، $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A)$.
اثبات اینکه اعمال ستونی مقدماتی هم حافظ رتبه هستند، به عهدهٔ خواننده است. □

حال که گردایه‌ای از عملیات ماتریسی حافظ رتبه در اختیار داریم، نیازمند روشی هستیم که با آن بتوانیم رتبهٔ ماتریس پدید آمده را تعیین کنیم. قضیهٔ بعد، یکی از چندین راهی است که ما را قادر به تشخیص رتبهٔ یک ماتریس می‌کند.

قضیه ۵.۳. رتبهٔ یک ماتریس، برابر با حداکثر تعداد ستون‌های مستقل خطی آن است. یعنی رتبهٔ یک ماتریس، بُعد فضای پدید آمده از ستون‌های آن است.

برهان. به ازای هر $A \in M_{m\times n}(F)$، $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(L_A) = \dim(R(L_A))$. فرض کنید $\beta = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$، پایهٔ مرتب استاندارد F^n باشد. در این صورت β، F^n را می‌پیماید، لذا طبق قضیهٔ ۲-۲:

$$R(L_A) = \operatorname{span}\{L_A(e_1), L_A(e_2), \ldots, L_A(e_n)\}$$

اما به ازای هر j، دیده‌ایم که $L_A(e_j)$، همان a_j، یعنی ستون j اُم A است. پس

$$R(L_A) = \operatorname{span}\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$$

بنابراین

$$\operatorname{rank}(A) = \dim(R(L_A)) = \dim(\operatorname{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\})$$

□

مثال ۱. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظه کنید که ستون‌های اول و دوم A مستقل خطی هستند و ستون سوم ترکیبی خطی از دو ستون اول است. پس

$$\operatorname{rank}(A) = \dim\left(\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}۱\\۰\\۱\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۰\\۱\\۰\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}\right\}\right) = ۲$$

□

برای محاسبهٔ رتبهٔ A، معمولاً بهتر است که استفاده از قضیهٔ ۳-۵ را تا وقتی که A به گونه‌ای با استفاده از اعمال مقدماتی سطری و ستونی تغییر یافته باشد که تعداد ستون‌های مستقل خطی واضح گردد، به تأخیر بیندازیم. نتیجهٔ قضیهٔ ۳-۴ به ما اطمینان می‌دهد که رتبهٔ ماتریس پدید آمده، با رتبهٔ A یکسان است. یکی از راه‌های انجام این کار، استفاده از اعمال مقدماتی سطری و ستونی برای تولید درایه‌های صفر است. مثال بعد، این روش را توضیح می‌دهد.

مثال ۲. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

با کم کردن سطر اول A از سطرهای دوم و سوم (که عملیاتی از نوع سوم هستند) این ماتریس به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۲ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

با کم کردن دو برابر ستون اول از ستون دوم و کم کردن ستون اول از ستون سوم (که عملیاتی از نوع سوم هستند)، داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

حال واضح است که حداکثر تعداد ستون‌های مستقل خطی این ماتریس ۲ است. پس رتبهٔ A، ۲ می‌باشد. □

قضیهٔ بعدی، از این روشِ استفاده از اعمال سطری و ستونی مقدماتی روی یک ماتریس، برای تبدیل آن به ماتریسی با شکل ساده استفاده می‌کند. قدرت این قضیه را در نتایج آن می‌توان دید.

قضیه ۳.۶. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ با رتبه r باشد. در این صورت، $r \leqslant m$ و $r \leqslant n$ و با استفاده از تعدادی

متناهی عمل مقدماتی سطری و ستونی می‌توان A را به ماتریسی به شکل

$$D = \begin{bmatrix} I_r & O_۱ \\ O_۲ & O_۳ \end{bmatrix}$$

در آورد که $O_۱$، $O_۲$ و $O_۳$ ماتریس‌های صفر هستند. پس برای هر $i \leqslant r$، $D_{ii} = ۱$ و در غیر این صورت $D_{ij} = ۰$.

قضیهٔ ۳-۶ و نتایج آن نسبتاً مهم هستند. برهان آن با وجود اینکه فهمش ساده است خواندنش خسته کننده می‌باشد. به عنوان کمکی برای دنبال کردن اثبات قضیه، ابتدا مثالی را در نظر می‌گیریم.

مثال ۳. ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ & ۲ & ۲ \\ ۴ & ۴ & ۴ & ۸ & ۰ \\ ۸ & ۲ & ۰ & ۱۰ & ۲ \\ ۶ & ۳ & ۲ & ۹ & ۱ \end{bmatrix}$$

با اِعمال دنباله‌ای از عملیات سطری و ستونی مقدماتی، می‌توانیم ماتریس A را به ماتریسی مانند D با خصوصیات ذکر شده در قضیهٔ ۳-۶ تبدیل کنیم. بسیاری از ماتریس‌هایی را که در وسط این عملیات ظاهر می‌شوند، نوشته‌ایم، اما در چند مورد، ماتریسی طی چند عمل مقدماتی از ماتریس قبلی به دست می‌آید. شمارهٔ بالای هر پیکان تعداد اعمال سطری مربوط را نشان می‌دهد. سعی کنید در هر مورد، طبیعت هر عمل مقدماتی به کار رفته (سطری یا ستونی بودن و نوع آن) را شناسایی کنید:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ & ۲ & ۲ \\ ۴ & ۴ & ۴ & ۸ & ۰ \\ ۸ & ۲ & ۰ & ۱۰ & ۲ \\ ۶ & ۳ & ۲ & ۹ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{۱} \begin{bmatrix} ۴ & ۴ & ۴ & ۸ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۴ & ۲ & ۲ \\ ۸ & ۲ & ۰ & ۱۰ & ۲ \\ ۶ & ۳ & ۲ & ۹ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۴ & ۲ & ۲ \\ ۸ & ۲ & ۰ & ۱۰ & ۲ \\ ۶ & ۳ & ۲ & ۹ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{۱}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۴ & ۲ & ۲ \\ ۰ & -۶ & -۸ & -۶ & ۲ \\ ۰ & -۳ & -۴ & -۳ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۴ & ۲ & ۲ \\ ۰ & -۶ & -۸ & -۶ & ۲ \\ ۰ & -۳ & -۴ & -۳ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۶ & -۸ & -۶ & ۲ \\ ۰ & -۳ & -۴ & -۳ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{۲}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۴ & ۰ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \xrightarrow{۳} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ & ۰ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \xrightarrow{۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \xrightarrow{۱}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = D$$

بنابر نتیجهٔ قضیهٔ ۳-۴، $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(D)$. اما واضح است که $\operatorname{rank}(D) = ۳$؛ پس $\operatorname{rank}(A) = ۳$. □

توجه کنید که دو عمل مقدماتی سطری نخست مثال ۳، منجر به ظاهر شدن یک ۱ در مکان $(۱, ۱)$، و چند عمل بعدی (که از نوع سوم هستند)، منجر به ظاهر شدن ۰ در همه جای سطر و ستون اول، به جز در مکان $(۱, ۱)$ می‌شوند. عملیات مقدماتی بعدی، تغییری در سطر و ستون اول نمی‌دهند. با در نظر گرفتن این مثال، کار خود را با برهان قضیهٔ ۳-۶ ادامه می‌دهیم.

برهان (برهان قضیهٔ ۳-۶). هرگاه A ماتریس صفر باشد، طبق تمرین ۴، $r = ۰$. در این حالت، نتیجه با اختیار کردن $D = A$ حاصل می‌شود.

حال فرض کنید $A \neq ۰$ و $r = \operatorname{rank}(A)$؛ در این صورت $r > ۰$. برهان به استقرای ریاضی روی m، یعنی تعداد سطرهای A صورت می‌گیرد. فرض کنید $m = ۱$. با اِعمال حداکثر یک عمل ستونی نوع اول و حداکثر یک عمل ستونی

نوع دوم، می‌توان A را به ماتریسی با ۱ به عنوان درایهٔ ۱ و ۱ تبدیل کرد. با استفاده از حداکثر $m-۱$ عمل ستونی نوع سوم، می‌توان این ماتریس را به ماتریس زیر تبدیل کرد [که آن را D می‌نامیم. م.]

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \dots & ۰ \end{bmatrix}$$

توجه کنید که D فقط یک ستون مستقل خطی دارد. پس طبق نتیجهٔ قضیهٔ ۳-۴ و بنابر قضیهٔ ۳-۵، $\operatorname{rank}(D) = \operatorname{rank}(A) = ۱$. پس قضیه برای حالت $m = ۱$ ثابت است.

حال فرض کنید قضیه برای هر ماتریس دارای حداکثر $m-۱$ سطر (به ازای $m > ۱$ ای) برقرار باشد. باید ثابت کنیم که برای هر ماتریس با m سطر هم درست است.

فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ باشد. هرگاه $n = ۱$، قضیهٔ را می توان به گونه ای مشابه با حالت $m = ۱$ ثابت کرد. (به تمرین ۱۰ رجوع کنید.)

حال فرض می کنیم $n > ۱$. چون $A \neq O$، به ازای $A_{ij} \neq ۰$. با استفاده از حداکثر یک عمل سطری مقدماتی و حداکثر یک عمل ستونی مقدماتی (هر دو از نوع اول)، می توانیم درایهٔ ناصفر را به مکان ۱ و ۱ انتقال دهیم. (همانطور که در مثال ۳ صورت پذیرفت). با استفاده از حداکثر یک عمل دیگر از نوع ۲، می توانیم مطمئن شویم که در مکان ۱ و ۱ ، ۱ قرار دارد. (به عمل دوم در مثال ۳ توجه کنید.) با حداکثر $m-۱$ عمل سطری از نوع سوم و حداکثر $n-۱$ عمل ستونی نوع سوم، می توانیم همهٔ درایه های ناصفر سطر اول و ستون اول را به غیر از ۱ ای که در مکان ۱ و ۱ قرار دارد، حذف کنیم. (در مثال ۳، از دو نوع عمل سطری و سه عمل ستونی برای انجام این کار استفاده کردیم.)

پس با تعدادی متناهی عمل مقدماتی، می توان A را به ماتریسی به صورت زیر تبدیل کرد:

$$B = \left[\begin{array}{c|ccc} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \hline ۰ & & & \\ \vdots & & B' & \\ ۰ & & & \end{array}\right]$$

که B' ماتریسی $(m-۱) \times (n-۱)$ است. در مثال ۳،

$$B' = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۲ & ۲ \\ -۶ & -۸ & -۶ & ۲ \\ -۳ & -۴ & -۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

طبق تمرین ۱۱، رتبهٔ B'، یکی کمتر از رتبهٔ B است. چون $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = r$، $\operatorname{rank}(B') = r-۱$. پس طبق فرض استقراء، $r-۱ \leqslant m-۱$ و $r-۱ \leqslant n-۱$. بنابراین $r \leqslant m$ و $r \leqslant n$.

همچنین طبق فرض استقراء، B' را می توان با تعدادی متناهی عمل مقدماتی سطری و ستونی به ماتریسی $(m-۱)\times(n-۱)$ چون D' تبدیل کرد، که

$$D' = \begin{bmatrix} I_{r-۱} & O_۴ \\ O_۵ & O_۶ \end{bmatrix}$$

که در آن $O_۴$، $O_۵$ و $O_۶$ ماتریس های صفر هستند. یعنی، درایه های D' به غیر از $r-۱$ درایهٔ اول قطری که یک هستند، صفر می باشند. فرض کنید:

$$D = \left[\begin{array}{c|ccc} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \hline ۰ & & & \\ \vdots & & D' & \\ ۰ & & & \end{array}\right]$$

حال می بینیم که اگر نشان داده شود که D را می توان با تعدادی متناهی عمل سطری و ستونی از B به دست آورد، قضیه ثابت خواهد شد. اما این هم از به کارگیری مکرر تمرین ۱۲ حاصل می شود.

پس چون با تعدادی متناهی عمل مقدماتی A را می توان به B، و B را می توان به D تبدیل کرد، A را می توان با تعدادی متناهی عمل مقدماتی به D تبدیل کرد.

در نهایت، چون D' در $r-۱$ درایهٔ قطری اولش یک دارد، D در r درایهٔ اول قطری خود، یک و در بقیهٔ جاها صفر دارد. این مطلب قضیه را ثابت می کند. □

نتیجه ۱. فرض کنید A ماتریسی $m\times n$ با رتبهٔ r باشد. در این صورت، ماتریس های وارون پذیری مانند B و C به ترتیب از اندازه های $m\times m$ و $n\times n$ موجودند به گونه ای که $D=BAC$، که در اینجا

$$D = \begin{bmatrix} I_r & O_۱ \\ O_۲ & O_۳ \end{bmatrix}$$

ماتریسی $m\times n$ و $O_۱$، $O_۲$ و $O_۳$ ماتریس های صفر هستند.

برهان. طبق قضیهٔ ۳-۶، A را می توان با تعدادی متناهی عمل سطری و ستونی به ماتریس D تبدیل کرد. هر وقت که یک عمل مقدماتی انجام می دهیم، می توانیم به قضیهٔ ۱-۳ رجوع کنیم. پس ماتریس های مقدماتی $m\times m$ ای مانند

E_1، E_2، ...، E_p و ماتریس های مقدماتی $n \times n$ ای مانند G_1، G_2، ...، G_q وجود دارند به طوری که

$$D = E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 A G_1 G_2 \dots G_p$$

طبق قضیهٔ ۳-۲، هر E_j و هر G_j وارون پذیر است. فرض کنید $B = E_p E_{p-1} \dots E_1$ و $C = G_1 G_2 \dots G_q$. در این صورت B و C طبق تمرین ۲ ی بخش ۲-۴ وارون پذیر هستند و $D = BAC$. □

نتیجه ۲. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ باشد، در این صورت

الف) $\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(A)$

ب) رتبهٔ یک ماتریس، برابر با حداکثر تعداد سطرهای مستقل خطی آن است، یعنی رتبهٔ یک ماتریس، بُعد زیر فضای تولید شده از سطرهای آن است.

ج) سطرها و ستون های هر ماتریس، زیرفضاهایی با ابعاد یکسان تولید می کنند، که از لحاظ عددی برابر با رتبهٔ ماتریس است.

برهان. الف) طبق نتیجهٔ ۱، ماتریس های وارون پذیر B و C یافت می شوند به گونه ای که $D = BAC$، در شرایط مذکور در آن نتیجه صدق می کنند، با ترانهاده گیری داریم:

$$D^t = (BAC)^t = C^t A^t B^t$$

چون و C وارون پذیر هستند، طبق تمرین ۳ بخش ۲-۴، B^t و C^t نیز چنین‌اند. پس طبق قضیهٔ ۳-۴،

$$\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(C^t A^t B^t) = \operatorname{rank}(D^t)$$

فرض کنید $r = \operatorname{rank}(A)$. در این صورت، D^t ماتریسی $n \times m$ است که در شرایط نتیجهٔ ۱ صدق می کند و لذا طبق قضیهٔ ۳-۵، $\operatorname{rank}(D^t) = r$. پس:

$$\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(D^t) = r = \operatorname{rank}(A)$$

بدین ترتیب، الف ثابت می شود.

اثبات ب و ج به عهدهٔ خواننده است. □

نتیجه ۳. هر ماتریس وارون پذیر حاصلضربی از ماتریس های مقدماتی است.

برهان. هرگاه A ماتریس وارون پذیر $n \times n$ ای باشد، آنگاه $\operatorname{rank}(A) = n$. پس طبق نتیجهٔ ۱، ماتریس های وارون پذیر B و C ای وجود دارند که $D = BAC$، که در آن هرگاه $i \neq j$، $D_{ij} = 0$ و برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، $D_{ii} = 1$. پس $D = I_n$؛ یعنی $I_n = BAC$.

همانند آنچه که در برهان نتیجهٔ ۱ گذشت، ملاحظه کنید که $B = E_p E_{p-1} \ldots E_1$ و $C = G_1 G_2 \ldots G_q$ که E_i ها و G_i ها ماتریس های مقدماتی هستند. پس $A = B^{-1} I_n C^{-1} = B^{-1} C^{-1}$ و در نتیجه

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_p^{-1} G_q^{-1} G_{q-1}^{-1} \ldots G_1^{-1}$$

اما وارون های ماتریس های مقدماتی هم ماتریس های مقدماتی هستند، پس A حاصلضربی از ماتریس های مقدماتی است. □

حال با استفاده از نتیجهٔ ۲، رتبهٔ یک حاصلضرب از ماتریس ها را با رتبهٔ هر یک از عواملش مربوط می سازیم. توجه کنید که برهان حکم زیر چگونه از رابطهٔ میان رتبهٔ یک ماتریس و رتبهٔ یک تبدیل خطی استفاده می کند.

حکم ۳.۷. فرض کنید $T : V \to W$ و $U : W \to Z$ تبدیلاتی خطی بر فضاهای متناهی البعد V، W، و Z و A و B ماتریس هایی باشند که AB برایشان تعریف شده باشد؛ در این صورت:

الف) $\operatorname{rank}(UT) \leqslant \operatorname{rank}(U)$

ب) $\operatorname{rank}(UT) \leqslant \operatorname{rank}(T)$

ج) $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(A)$

د) $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(B)$

برهان. این موارد را با ترتیب الف، ج، د و ب ثابت می کنیم:

الف) به وضوح $R(T) \subseteq W$. پس $R(UT) = UT(V) = U(R(T)) \subseteq U(W) = R(U)$ پس $\operatorname{rank}(UT) = \dim(R(UT)) \leqslant \dim(R(U)) = \operatorname{rank}(U)$

ج) طبق الف،

$$\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(L_{AB}) = \operatorname{rank}(L_A L_B) \leqslant \operatorname{rank}(L_A) = \operatorname{rank}(A)$$

د) طبق ج و نتیجهٔ ۲ی قضیهٔ ۳-۶،

$$\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}((AB)^t) = \operatorname{rank}(B^t A^t) \leqslant \operatorname{rank}(B^t) = \operatorname{rank}(B)$$

ب) فرض کنید α، β و γ به ترتیب پایه های مرتبی برای V، W و Z باشند و فرض کنید $A' = [U]_\beta^\gamma$ و $B' = [T]_\alpha^\beta$.

در این صورت طبق قضیهٔ ۲-۱۱، $A'B' = [UT]_\alpha^\gamma$. پس طبق قضیهٔ ۳-۳ و قسمت د،

$$\operatorname{rank}(UT) = \operatorname{rank}(A'B') \leqslant \operatorname{rank}(B') = \operatorname{rank}(T)$$

توانایی در محاسبهٔ رتبهٔ یک ماتریس مهم است. می توانیم برای رسیدن به این هدف، از نتیجهٔ قضیهٔ ۲-۴، قضایای ۳-۵ و ۳-۶ و نتیجهٔ ۲ ی قضیهٔ ۳-۶ استفاده کنیم.

هدف این است که با استفاده از اعمال سطری و ستونی مقدماتی بر روی یک ماتریس، آن را به قدری «ساده کنیم» (به طوری که ماتریس حاصل درایه های صفر زیادی داشته باشد) که بتوانیم با یک ملاحظهٔ ساده، تعداد سطرها یا ستون های مستقل خطی ماتریس و در نتیجه رتبهٔ آن را پیدا کنیم. □

مثال ۴. الف) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

توجه کنید که سطرهای اول و دوم A مستقل خطی هستند، چرا که هیچ یک مضربی از دیگری نیست. پس $\operatorname{rank}(A) = ۲$.

ب) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

در این حالت، می توان به چندین روش کار کرد. فرض کنید با شروع از یک عمل سطری مقدماتی، مکان ۱ و ۲ را صفر کنیم. با کم کردن سطر اول از سطر دوم، داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

حال توجه کنید که سطر سوم مضربی از سطر دوم است و سطرهای اول و دوم مستقل خطی هستند. پس $\operatorname{rank}(A) = ۲$.

به عنوان روشی دیگر، ابتدا توجه کنید که ستون های اول، سوم و چهارم A مساوی هستند و ستون های اول و دوم A مستقل خطی اند. پس $\operatorname{rank}(A) = ۲$.

ج) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

با استفاده از اعمال سطری و ستونی مختلف، دنبالهٔ زیر از ماتریس ها را به دست می آوریم:

$$A \Longrightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & -۳ & -۵ & -۱ \\ ۰ & -۳ & -۲ & -۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & -۳ & -۵ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & -۵ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

واضح است که ماتریس اخیر، سه سطر مستقل خطی دارد و لذا رتبه اش ۳ است. □

به طور خلاصه، آنقدر از اعمال سطری و ستونی مقدماتی استفاده کنید که ماتریس حاصل به قدری ساده شود که حداکثر تعداد سطرها یا ستون های مستقل خطی آن واضح باشد.

وارون یک ماتریس

قبلاً تذکر داده ایم که یک ماتریس $n \times n$ وارون پذیر است، اگر و تنها اگر رتبه اش n باشد. چون نحوهٔ محاسبهٔ رتبهٔ یک ماتریس را می دانیم، همیشه می توانیم وارون پذیر بودن آن را بررسی کنیم. حال روش ساده ای برای محاسبهٔ وارون یک ماتریس از طریق عملیات سطری ارائه می کنیم.

تعریف:. فرض کنید A و B به ترتیب ماتریس های $m \times n$ و $m \times p$ باشند. در این صورت منظورمان از ماتریس افزودهٔ $[A|B]$، ماتریس $m \times (n+p)$ ی زیر است:

$$[A_۱, A_۲, \ldots, A_n, B_۱, B_۲, \ldots, B_p]$$

که a_i و b_j به ترتیب نشانگر ستون i اُم A و ستون j اُم B هستند.

فرض کنید A ماتریس وارون پذیر $n \times n$ ای باشد و ماتریس افزودهٔ $C = [A|I_n]_{n\times ۲n}$ را در نظر بگیرید. طبق تمرین ۱۵، داریم:

$$A^{-۱}C = [A^{-۱}A|A^{-۱}I_n] = [I_n|A^{-۱}] \qquad (۳\text{-}۱)$$

طبق نتیجهٔ ۳ قضیهٔ ۳-۶، $A^{-۱}$ حاصلضرب ماتریس های مقدماتی است، مثلاً $A^{-۱} = E_pE_{p-۱}\dots E_۱$ پس معادلهٔ ۳-۱ به صورت زیر در می آید:

$$E_pE_{p-۱}\dots E_۱[A|I_n] = A^{-۱}C = [I_n|A^{-۱}]$$

چون ضرب یک ماتریس مقدماتی در یک ماتریس از سمت چپ، مانند اعمال یک عمل مقدماتی سطری بر آن است (قضیهٔ ۳-۱)، نتیجهٔ ذیل را داریم: هرگاه A ماتریس وارون پذیر $n \times n$ ای باشد، می توان ماتریس $[A|I_n]$ را با تعدادی متناهی عمل مقدماتی سطری به $[I_n|A^{-۱}]$ تبدیل کرد.

بر عکس، فرض کنید A ماتریس وارون پذیر بوده و بتوان $[A|I_n]$ را با تعدادی متناهی از عملیات سطری مقدماتی، به $[I_n|B]$ تبدیل کرد. فرض کنید که $E_۱, E_۲, \dots, E_p$ ماتریس های نظیر این اعمال سطری مقدماتی، آن طور که در قضیهٔ ۳-۱ ذکر شد، باشند. در این صورت:

$$E_pE_{p-۱}\dots E_۱[A|I_n] = [I_n|B] \qquad (۳\text{-}۲)$$

با قرار دادن $M = E_pE_{p-۱}\dots E_۱$، از رابطهٔ ۳-۲ داریم:

$$[MA|M] = M[A|I_n] = [I_n|B]$$

پس $MA = I_n$ و $M = B$. در نتیجه $M = A^{-۱}$. پس $B = M = A^{-۱}$. بنابراین، این نتیجه را به دست می آوریم که: هرگاه A ماتریس $n \times n$ وارون‌پذیری باشد و ماتریس $[A|I_n]$ با اعمال تعدادی متناهی از عملیات سطری مقدماتی، به شکل $[I_n|B]$ در آمده باشد، در این صورت $B = A^{-۱}$.

مثال زیر، این فرآیند را شرح می دهد.

مثال ۵. وارون این ماتریس را حساب می کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۴ & ۲ \\ ۳ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

خواننده می تواند در صورت تمایل، بررسی کند که $\mathrm{rank}(A) = ۳$ تا مطمئن شود که A وارون پذیر است. برای محاسبهٔ

A^{-1}، باید با به کارگیری اعمال سطری مقدماتی، ماتریس زیر را به $[I|A^{-1}]$ تبدیل کنیم:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

راهی موثر برای انجام این تبدیل، آن است که ستون های A را به ترتیب با شروع از ستون اول، به ستون های متناظر در I تبدیل کنیم. چون در مکان ۱ و ۱، نیاز به یک درایهٔ نا صفر داریم، کار را با تعویض کردن سطرهای اول و دوم شروع می کنیم. حاصل چنین است:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

برای این که در مکان ۱ و ۱، عدد ۱ قرار دهیم، باید سطر اول را در $\frac{1}{2}$ صرب کنیم؛ نتیجه چنین است:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

حال کار را در ستون اول با افزودن ۳− برابر سطر اول، به سطر سوم تکمیل می کنیم تا نتیجهٔ زیر به دست آید:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

برای تبدیل ستون دوم ماتریس بالا به ستون دوم I، سطر دوم را ضرب در $\frac{1}{2}$ می کنیم تا در مکان ۲ و ۲، عدد ۱ قرار گیرد. حاصل این عمل عبارت است از:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

حال کار خود را در مورد ستون دوم، با افزودن ۲− برابر سطر دوم به سطر اول و ۳ برابر سطر دوم به سطر سوم پایان می بخشیم. حاصل چنین است:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

حال تنها تغییر ستون سوم باقی می ماند. برای قرار دادن عدد ۱ در مکان ۳ و ۳، سطر سوم را در $\frac{۱}{۴}$ ضرب می کنیم؛ حاصل این عمل به شکل زیر است:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & -۳ & -۱ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۳}{۸} & -\frac{۳}{۸} & \frac{۱}{۴} \end{array}\right]$$

افزودن مضاربی مناسب از سطر سوم به سطرهای اول و دوم، عملیات را تکمیل می کند و در نهایت ماتریس زیر به دست می آید:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۸} & -\frac{۵}{۸} & \frac{۳}{۴} \\ ۰ & ۱ & ۰ & -\frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۳}{۸} & -\frac{۳}{۸} & \frac{۱}{۴} \end{array}\right]$$

در نتیجه:

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۸} & -\frac{۵}{۸} & \frac{۳}{۴} \\ -\frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۴} & -\frac{۳}{۸} & \frac{۳}{۸} \end{bmatrix}$$

□

با توانایی در محاسبهٔ وارون ماتریس ها، می توانیم وارون تبدیلات خطی را نیز محاسبه کنیم. مثال زیر این روش را شرح می دهد.

مثال ۶. فرض کنید $T : P_۲(\mathbb{R}) \to P_۲(\mathbb{R})$ با ضابطهٔ $T(f) = f + f' + f''$ تعریف شده باشد، که f' و f'' نشانگر مشتقات اول و دوم f هستند. به راحتی می توان ثابت کرد که $N(T) = \{۰\}$ و بنابراین T وارون پذیر است. با اختیار کردن $\beta = \{۱, x, x^۲\}$، داریم:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حال، وارون این ماتریس عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

اما طبق نتیجهٔ ۱ قضیهٔ ۲-۱۸، $([T]_\beta)^{-1} = [T^{-1}]_\beta$. پس طبق قضیهٔ ۲-۱۴، داریم:

$$[T^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 - a_1 \\ a_1 - 2a_2 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$T^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 - a_1) + (a_1 - 2a_2)x + a_2x^2$$

□

تمرینات

۱. مشخص کنید که کدامیک از عبارات زیر درست و کدام نادرست است.

الف) رتبهٔ یک ماتریس، برابر با تعداد ستون‌های ناصفر آن است.

ب) رتبهٔ حاصلضرب دو ماتریس، همواره برابر مینیمم رتبه های دو ماتریس است.

ج) ماتریس $m \times n$ صفر، تنها ماتریس $m \times n$ ای است که رتبه اش ۰ است.

د) عملیات سطری مقدماتی، رتبه را حفظ می کند.

ه) عملیات ستونی مقدماتی، لزوماً رتبه را حفظ نمی کنند.

و) رتبهٔ یک ماتریس، برابر است با حداکثر تعداد سطرهای مستقل خطی آن ماتریس.

ز) وارون یک ماتریس را می توان با استفاده از اعمال سطری مقدماتی صرف، حساب کرد.

ح) رتبهٔ یک ماتریس $n \times n$، حداکثر n است.

ط) ماتریس $n \times n$ ای که رتبه اش n باشد، وارون پذیر است.

۲. رتبهٔ ماتریس های زیر را بیابید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

و) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \\ -4 & -8 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

ز) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۳. برای هر ماتریس $m \times n$ مانند A، ثابت کنید $\operatorname{rank}(A) = 0$ اگر و تنها اگر A ماتریس صفر باشد.

۴. با استفاده از اعمال سطری و ستونی مقدماتی، هر یک از ماتریس های زیر را به ماتریسی مانند D که در شرایط قضیهٔ ۳-۶ صدق کند تبدیل کنید و سپس رتبهٔ هر یک از ماتریس ها را بیابید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

۵. رتبهٔ هر یک از ماتریس های زیر و وارون شان را در صورت وجود بیابید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

و) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ز) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ح) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

ط) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

۶. برای هر یک از تبدیلات خطی T در زیر، تعیین کنید که آیا T وارون پذیر است یا خیر؟ و اگر وارون پذیر باشد، T^{-1} را محاسبه کنید.

الف) $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ با ضابطهٔ $T(f) = f'' + 2f' - f$.

ب) $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ با ضابطهٔ $T(f)(x) = (x+1)f'(x)$.

ج) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ با ضابطهٔ $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + 2a_2 + a_3, -a_1 + a_2 + 2a_3, a_1 + a_3)$.

د) $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ با ضابطهٔ $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_1 - a_2 + a_3)x + a_1x^2$.

ه) $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ با ضابطهٔ $T(f) = (f(-1), f(0), f(1))$.

و) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ با ضابطهٔ $T(A) = (\operatorname{tr}(A), \operatorname{tr}(A^t), \operatorname{tr}(EA), \operatorname{tr}(AE))$ که

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۷. ماتریس وارون پذیر زیر را به صورت حاصلضربی از ماتریس های مقدماتی بیان کنید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

۸. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ باشد. ثابت کنید که اگر c اسکالری ناصفر باشد، $\operatorname{rank}(cA) = \operatorname{rank}(A)$

۹. با ثابت کردن اینکه اعمال مقدماتی رتبه را حفظ می کنند، نتیجهٔ قضیهٔ ۳-۴ را تکمیل کنید.

۱۰. قضیهٔ ۳-۶ را در حالتی که A ماتریسی $m \times ۱$ باشد، ثابت کنید.

۱۱. فرض کنید

$$B = \left[\begin{array}{c|ccc} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \hline ۰ & & & \\ \vdots & & B' & \\ ۰ & & & \end{array}\right]$$

که B' زیر ماتریسی $m \times n$ از B است. ثابت کنید که اگر $\operatorname{rank}(B) = r$، $\operatorname{rank}(B') = r - ۱$.

۱۲. فرض کنید B' و D' ماتریس هایی $m \times n$، و B و D ماتریس های $(m+۱) \times (n+۱)$ ای باشند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$B = \left[\begin{array}{c|ccc} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \hline ۰ & & & \\ \vdots & & B' & \\ ۰ & & & \end{array}\right] \quad \text{و} \quad D = \left[\begin{array}{c|ccc} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \hline ۰ & & & \\ \vdots & & D' & \\ ۰ & & & \end{array}\right]$$

ثابت کنید که اگر بتوان B' را با یک عمل سطری [ستونی] مقدماتی به D' تبدیل کرد، آنگاه B را هم می توان با یک عمل سطری [ستونی] مقدماتی به D تبدیل کرد.

۱۳. قسمت های ب و ج از نتیجهٔ ۲ قضیهٔ ۳-۶ را ثابت کنید.

۱۴. فرض کنید $T, U : V \to W$ تبدیلاتی خطی باشند. ثابت کنید:

الف) $R(T+U) \subseteq R(T) + R(U)$

ب) اگر W متناهی البعد باشد، $\operatorname{rank}(T+U) \leqslant \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(U)$

ج) از ب نتیجه بگیرید که برای هر دو ماتریس $m \times n$، A و B،

$$\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

۱۵. فرض کنید A و B ماتریس هایی با n سطر باشند. ثابت کنید برای هر ماتریس $m \times n$ مانند M، $M[A|B] =$

.$[MA|MB]$

۱۶. جزئیات برهان قسمت ب از قضیهٔ ۳-۴ را بیان کنید.

۱۷. ثابت کنید که اگر B ماتریسی ۳×۱ و C ماتریسی ۱×۳ باشد، آنگاه رتبهٔ ماتریس ۳×۳ ی BC، حداکثر ۱ است. بر عکس، ثابت کنید که اگر A ماتریس ۳×۳ ی دلخواهی با رتبهٔ ۱ باشد، ماتریس ۳×۱ مانند B و ماتریس ۱×۳ ای مانند C هست که $A = BC$.

۱۸. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times p$ باشد. ثابت کنید که AB را می توان به صورت حاصل جمع n ماتریس با رتبهٔ یک نوشت.

۱۹. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ با رتبهٔ m و B ماتریسی $n \times p$ با رتبهٔ n باشد. رتبهٔ AB را تعیین کنید. برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲۰. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۳ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۴ & -۱ & ۳ \\ ۳ & -۱ & -۵ & ۱ & -۶ \end{bmatrix}$$

الف) ماتریسی ۵×۵ مانند M با رتبهٔ ۲ بیابید که $AM = ۰$، که اینجا ۰، ماتریس صفر ۴×۵ است.

ب) فرض کنید B ماتریسی ۵×۵ باشد که $AB = ۰$. ثابت کنید $\operatorname{rank}(B) \leq ۲$.

۲۱. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ با رتبهٔ m باشد. ثابت کنید ماتریسی $n \times m$ مانند B وجود دارد که $AB = I_m$.

۲۲. فرض کنید B ماتریسی $n \times m$ با رتبهٔ m باشد. ثابت کنید ماتریسی $m \times n$ مانند A وجود دارد که $AB = I_m$.

۳-۳ دستگاه های معادلات خطی - جنبه های نظری

این بخش و بخش بعد، اختصاص به مطالعهٔ دستگاه های معادلات خطی دارد، که هم در علوم فیزیکی و هم در علوم اجتماعی کاربرد فراوان دارند. در این بخش، نتایج فصل ۱ و ۲ را به کار می گیریم تا مجموعه جواب های دستگاه های معادلات خطی را بعنوان زیرفضاهای فضاهایی برداری توصیف کنیم. در بخش ۳-۴، با استفاده از اعمال سطری مقدماتی، روشی محاسباتی برای یافتن همهٔ جواب های این گونه دستگاه ها به دست خواهد آمد.

دستگاه معادلات خطی

$$(S)\qquad \begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

که a_{ij} ها و b_i ها ($1 \leqslant i \leqslant m$ و $1 \leqslant j \leqslant n$) اعضای میدانی مانند F هستند و x_1، ...، x_n متغیرهایی با مقادیر در F هستند، یک دستگاه از m معادلهٔ خطی n مجهولی بر میدان F نام دارد.

ماتریس $m \times n$ زیر،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب دستگاه (S) نام دارد.

هرگاه فرض کنیم

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

آنگاه می توان (S) را به صورت یک معادلهٔ ماتریسی مستقل بازنویسی کرد:

$$Ax = b$$

برای به کارگیری نتایجی که تاکنون به دست آورده ایم، معمولاً دستگاه های معادلات خطی را به صورت یک معادلهٔ ماتریسی مستقل، در نظر می گیریم.

منظور از یک جواب دستگاه (S)، یک n تایی مانند

$$s = \begin{bmatrix} s_۱ \\ s_۲ \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} \in F^n$$

است که $As = b$. مجموعهٔ همهٔ جواب های دستگاه (S)، مجموعهٔ جواب های دستگاه نام دارد.

مثال ۱. الف) دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x_۱ + x_۲ &= ۳ \\ x_۱ - x_۲ &= ۱. \end{aligned}$$

با استفاده از روش های معمولی، می توان دستگاه بالا را حل کرد و نتیجه گرفت که فقط یک جواب دارد: $x_۱ = ۲$، $x_۲ = ۱$؛ یعنی جواب

$$s = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} ???$$

دستگاه فوق را می توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$b = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

ب) دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} ۲x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ &= ۱ \\ x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ &= ۶ \end{aligned}$$

یا به عبارتی دیگر

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

این دستگاه جواب های زیادی دارد، از قبیل:

$$S = \begin{bmatrix} ۸ \\ -۴ \\ -۳ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad S = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۲ \\ ۷ \end{bmatrix}$$

ج) دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x_۱ + x_۲ &= ۰ \\ x_۱ + x_۲ &= ۱ \end{aligned}$$

یا به عبارتی

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

روشن است که این دستگاه جواب ندارد. پس می بینیم که یک دستگاه معادلات خطی ممکن است فقط یک جواب یا چند جواب داشته باشد و یا اصلاً جواب نداشته باشد. □

باید بتوانیم تشخیص دهیم که یک دستگاه چه وقت جواب دارد و بعد بتوانیم همهٔ جواب هایش را توصیف کنیم. این بخش و بخش بعدی به این هدف اختصاص دارد.

مطالعه در مورد دستگاه های معادلات خطی را با بررسی رده ای از دستگاه های معادلات خطی به نام دستگاه های معادلات خطی همگن شروع می‌کنیم. اولین نتیجه ای که به دست می آوریم (قضیهٔ ۳-۸) نشان می دهد که مجموعهٔ جواب های یک دستگاه از m معادلهٔ خطی n مجهولی، زیر فضایی از F^n است. بعد می توانیم نتایج خود در مورد این مجموعه از جواب ها به کار بندیم. مثلاً می توانیم پایه ای برای فضای جواب ها بیابیم و هر جواب را به صورت ترکیبی خطی از اعضای پایه بیان کنیم.

چند تعریف: دستگاه $Ax = b$ متشکل از m معادلهٔ خطی n مجهولی را همگن گویند هرگاه $b = ۰$. در غیر این صورت، دستگاه را غیر همگن می خوانند.

هر دستگاه همگنی حداقل یک جواب دارد: بردار صفر. این جواب را جواب بدیهی گویند. قضیهٔ بعد، اطلاعات بیشتری

در مورد مجموعهٔ جواب های یک دستگاه همگن در اختیار ما قرار می دهد.

قضیه ۸.۳. فرض کنید $Ax = \circ$، دستگاه همگنی متشکل از m معادلهٔ خطی n مجهولی بر میدانی مانند F باشد. فرض کنید K نشانگر مجموعهٔ همه جواب های $Ax = \circ$ باشد، در این صورت $K = N(L_A)$؛ بنابراین K زیر فضایی از F^n، با بُعد $n - \operatorname{rank}(L_A) = n - \operatorname{rank}(A)$ است.

برهان. واضح است که $K = \{s \in F^n : As = \circ\} = N(L_A)$. حال قسمت دوم قضیه، از قضیهٔ بُعد نتیجه می شود. $\square$

نتیجه ۱. هرگاه $m < n$، دستگاه $Ax = \circ$ دارای جواب غیر صفر است.

برهان. فرض کنید $m < n$. در این صورت $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(L_A) \leqslant m$ و در نتیجه
$$\dim(K) = n - \operatorname{rank}(L_A) \geqslant n - m > \circ$$

که $K = N(L_A)$. چون $\dim(K) > \circ$، $K \neq \{\circ\}$. پس عضوی غیر صفر در K مانند s وجود دارد؛ پس s جوابی ناصفر از $Ax = \circ$ است. $\square$

مثال ۲. الف) دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ &= \circ \\ x_۱ - x_۲ - x_۳ &= \circ \end{aligned}$$

فرض کنید
$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

که ماتریس ضرایب دستگاه است. واضح است که $\operatorname{rank}(A) = ۲$. اگر K مجموعه جواب های این دستگاه باشد، $\dim(K) = ۳ - ۲ = ۱$. پس هر جواب ناصفر، پایه ای برای K است. مثلاً از آنجا که
$$\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$
یکی از جواب های دستگاه است،
$$\left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \right\}$$

پایه ای برای K است. پس هر عضو K به شکل زیر است:

$$t\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\-2t\\3t\end{bmatrix}$$

که $t\in\mathbb{R}$.

ب) دستگاه $x_1-2x_2+x_3=0$ متشکل از یک معادلهٔ سه مجهولی را در نظر بگیرید. هرگاه $A=[1,-2,1]$ ماتریس ضرایب معادله باشد، $\mathrm{rank}(A)=1$. پس اگر K مجموعهٔ جواب ها باشد، $\dim(K)=3-1=2$. توجه کنید که

$$\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\quad \text{و} \quad \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

اعضایی مستقل خطی از K هستند. پس پایه ای برای K تشکیل می دهند و بنابراین

$$K=\left\{t_1\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}:t_1,t_2\in\mathbb{R}\right\}$$

□

در بخش ۳-۴، روش های محاسباتی صریحی برای یافتن پایه ای برای فضای جواب های یک دستگاه همگن مورد بررسی قرار می گیرند.

حال به مطالعهٔ دستگاه های غیر همگن می پردازیم. نتیجهٔ بعدی نشان می دهد که مجموعهٔ جواب های معادلهٔ غیر همگن $Ax=b$ را می توان بر حسب مجموعهٔ جواب های دستگاه همگن $Ax=0$ توصیف کرد. معادلهٔ $Ax=0$ را دستگاه همگن نظیر $Ax=b$ خواهیم نامید.

قضیه ۹.۳. فرض کنید K فضای جواب های دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ بوده، K_H فضای جواب های دستگاه نظیر، یعنی $Ax=0$ باشد. در این صورت، برای هر جواب $Ax=b$ مانند s،

$$K=\{s\}+K_H=\{s+k:k\in K_H\}$$

برهان. فرض کنید s یک جواب $Ax=b$ باشد. باید ثابت کنیم که $K=\{s\}+K_H$. هرگاه $w\in K$، آنگاه $Aw=b$. بنابراین

$$A(w-s)=Aw-As=b-b=0$$

پس $w-s\in K_H$. لذا $k\in K_H$ ای هست که $w-s=k$. نتیجه می گیریم که $w=s+k\in\{s\}+K_H$ و در

نتیجه $K \subset \{s\} + K_H$.

برعکس، فرض کنید $w \in \{s\} + K_H$؛ در این صورت به ازای $k \in K_H$ ای، $w = s + k$. اما در این صورت، $Aw = A(s+k) = As + Ak = b + \circ = b$؛ بنابراین $\{s\} + K_H \subseteq K$ و لذا $K = \{s\} + K_H$. □

مثال ۳. دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ = ۷$$
$$x_۱ - x_۲ - x_۳ = -۴$$

دستگاه همگن نظیر این دستگاه همان دستگاه مثال ۲ قسمت الف است. به راحتی می توان بررسی کرد که

$$s = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

جوابی برای دستگاه غیر همگن بالاست. پس طبق قضیهٔ ۳-۹، فضای جواب های دستگاه عبارت است از

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۳ \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

ب) دستگاه $x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ = ۴$ را در نظر بگیرید. دستگاه همگن نظیر، همان دستگاه مثال ۲ قسمت ب است. از آنجا که

$$\begin{bmatrix} ۴ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix}$$

جوابی برای این دستگاه است، فضای جواب ها، را می توان به این صورت نوشت:

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} ۴ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} + t_۱ \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ \circ \end{bmatrix} + t_۲ \begin{bmatrix} -۱ \\ \circ \\ ۱ \end{bmatrix} : t_۱, t_۲ \in \mathbb{R} \right\}$$

□

قضیهٔ زیر، وسیله ای برای محاسبهٔ جواب های نوع خاصی از دستگاه های معادلات خطی در اختیار ما قرار می دهد.

قضیه ۱۰.۳. فرض کنید $Ax = b$، دستگاهی از n معادلهٔ خطی n مجهولی باشد. اگر A وارون پذیر باشد، دستگاه دقیقاً یک جواب دارد: $A^{-1}b$. برعکس، هرگاه دستگاه دقیقاً یک جواب داشته باشد، A وارون پذیر است.

برهان. فرض کنید A وارون پذیر باشد، با جایگذاری $A^{-1}b$ در دستگاه، مشاهده می شود که $A(A^{-1}b = (AA^{-1})b = b$. پس $A^{-1}b$ یک جواب است. اگر s جواب دلخواهی باشد، $As = b$. با ضرب دو طرف در A^{-1}، داریم $s = A^{-1}b$. پس دستگاه یک و تنها یک جواب دارد: $A^{-1}b$.

برعکس، فرض کنید دستگاه دقیقاً یک جواب داشته باشد: s. فرض کنیم K_H نشانگر مجموعهٔ جواب های دستگاه همگن متناظر یعنی $Ax = 0$ باشد. طبق قضیهٔ ۳-۹، $\{s\} = \{s\} + K_H$. اما این فقط وقتی می تواند اتفاق بیفتد که $K_H = \{0\}$. پس $N(L_A) = \{0\}$ و بنابراین A وارون پذیر است. □

مثال ۴. دستگاه زیر متشکل از سه معادلهٔ خطی سه مجهولی را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} 2x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

در مثال ۵ بخش ۳-۲، وارون ماتریس ضرایب این دستگاه، A، را محاسبه کردیم. پس این دستگاه فقط یک جواب دارد:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{8} \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

□

این تکنیک را در مثال کاربردیی که پایان بخش این بخش است، برای حل دستگاه های معادلات خطیی که ماتریس ضراییشان وارون پذیر است به کار می گیریم.

در مثال ۱ قسمت ج دیدیم که ممکن است یک دستگاه معادلات خطی اصلاً جواب نداشته باشد. حال محکی را برای تعیین اینکه یک دستگاه چه موقع جواب دارد ثابت می‌کنیم. این محک، رتبهٔ ماتریس ضرایب دستگاه $Ax = b$ را به همراه رتبهٔ ماتریس $[A|b]$ به کار می‌گیرد. ماتریس $[A|b]$ را ماتریس افزودهٔ دستگاه $Ax = b$ می نامند.

قضیه ۱۱.۳. فرض کنید $Ax = b$ دستگاهی از معادلات خطی باشد؛ در این صورت دستگاه دارای جواب است اگر و تنها اگر $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A|b])$.

برهان. گفتن اینکه $Ax = b$ جواب دارد، معادل با گفتن این است که $b \in R(L_A)$. (به تمرین ۹ رجوع کنید.) در برهان قضیهٔ ۳-۵ دیدیم که

$$R(L_A) = \operatorname{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

یعنی فضای پدید آمده از ستون های A. پس $Ax = b$ جواب دارد اگر و تنها اگر $b \in \operatorname{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. اما $b \in \operatorname{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ اگر و تنها اگر $\operatorname{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \operatorname{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n, b\}$. جملهٔ اخیر معادل است با اینکه

$$\dim(\operatorname{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = \dim(\operatorname{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n, b\})$$

پس طبق قضیهٔ ۳-۵، معادلهٔ بالا چیزی نیست جز اینکه

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b)$$

□

مثال ۵. دستگاه معادلات زیر را از مثال ۱، قسمت ج، به یاد آورید:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

چون

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank}(A) = 1$ و $\operatorname{rank}[A|b] = 2$. چون این دو رتبه نابرابر هستند، دستگاه جواب ندارد. □

مثال ۶. می توانیم قضیهٔ ۳-۱۱ را برای تعیین اینکه آیا $(3, 3, 2)$ در برد تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ که به صورت زیر تعریف می شود قرار دارد یا خیر به کار برد.

$$T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + a_2 + a_3, a_1 - a_2 + a_3, a_1 + a_3)$$

حال $(3, 3, 2) \in R(T)$ اگر و تنها اگر برداری مانند $s = (x_1, x_2, x_3)$ در $\mathbb{R}^3$ وجود داشته باشد که $T(s) = (3, 3, 2)$. چنین برداری باید جوابی از دستگاه زیر باشد:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1 \qquad + x_3 = 2$$

چون رتبه های ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده به ترتیب ۲ و ۳ هستند، نتیجه می شود که دستگاه جواب ندارد. بنابراین $(3,3,2) \notin R(T)$. □

یک کاربرد

در سال ۱۹۷۳، وسلی لئونتیف، جایزهٔ نوبل در رشتهٔ اقتصاد را به پاس کارهایش در ساختن مدل ریاضی ای که قادر بود پدیده های اقتصادی زیادی را توصیف کند، دریافت کرد. برخی از ایده هایی را که در مورد مطالعه قرار داده ایم برای شرح دو مورد خاص از کارهای او به کار خواهیم برد و به این ترتیب، این بخش را به پایان می رسانیم.

کار را با مورد بحث قرار دادن جامعه ای ساده متشکل از سه نفر (یا سه صنعت) آغاز می کنیم. کشاورزی که همهٔ غذا را او تهیه می کند. خیاطی که سازندهٔ همهٔ پوشاک است و نجاری که کل مسکن را تأمین می کند. فرض می کنیم که همهٔ افراد، خرید و فروش خود را با یک انبار مشترک مرکزی انجام می دهند و همهٔ محصولاتی که تولید می شوند، مورد مصرف قرار می گیرند. از آنجا که هیچ کالایی از سیستم خارج نمی شود و به آن نیز وارد نمی گردد، این حالت را مدل بسته می نامند.

هر یک از افراد، هر سه نوع کالای تولید شده در جامعه را مصرف می کند. فرض کنید نسبت هایی از کالاها که افراد مختلف مصرف می کنند، به صورت داده شده در جدول زیر باشد. توجه کنید که مجموع اعداد هر ستون از جدول باید مساوی ۱ باشد.

	غذا	پوشاک	مسکن
کشاورز	۰/۴۰	۰/۲۰	۰/۲۰
خیاط	۰/۱۰	۰/۷۰	۰/۲۰
نجار	۰/۵۰	۰/۱۰	۰/۶۰

فرض کنید p_1، p_2 و p_3 به ترتیب نشان دهندهٔ درآمدهای کشاورز، خیاط و نجار باشند. برای تضمین بقای این جامعه، لازم می دانیم که مصرف هر فرد با درآمدش مساوی باشد. توجه کنید که کشاورز ۲۰ ٪ پوشاک را مصرف می کند. چون کل مخارج پوشاک برابر p_2 یعنی درآمد خیاط است، مقدار پولی که کشاورز خرج پوشاک می کند $20p_2$٪ است. به علاوه، پولی که کشاورز برای غذا، پوشاک و مسکن خرج می کند باید برابر درآمدش باشد و بنابراین معادلهٔ زیر به دست می آید:

$$0/40p_1 + 0/20p_2 + 0/20p_3 = p_1$$

معادلاتی مشابه که بیانگر خرج های خیاط و نجارند، دستگاه زیر از معادلات خطی را به وجود می آورند:

$$0/40p_1 + 0/20p_2 + 0/20p_3 = p_1$$
$$0/10p_1 + 0/70p_2 + 0/20p_3 = p_2$$

$$۰/۵۰p_۱ + ۰/۱۰p_۲ + ۰/۶۰p_۳ = p_۳$$

این دستگاه را می توان به شکل $Ap = p$ نوشت، که

$$p = \begin{bmatrix} p_۱ \\ p_۲ \\ p_۳ \end{bmatrix}$$

و A ماتریس ضرایب دستگاه است. در این شرایط، A ماتریس ورودی - خروجی (یا مصرف) نام دارد و $Ap = p$، شرط تعادل نامیده می شود.

برای دو بردار $b = (b_۱, b_۲, \ldots, b_n)$ و $c = (c_۱, c_۲, \ldots, c_n)$ از $\mathbb{R}^n$، منظورمان از نماد $b \geqslant c$[$b > c$]، این است که برای هر i، $b_i \geqslant c_i$[$b_i > c_i$]. بردار b را نامنفی [مثبت] گویند هرگاه $b \geqslant ۰$[$b > ۰$].

در ابتدا ممکن است معقول به نظر برسد که شرط تعادل را با نامساوی $Ap \leqslant p$ عوض کنیم، یعنی این شرط که مصرف از تولید تجاوز نکند، اما در واقع، $Ap \leqslant p$ در مدل بسته، $Ap = p$ را نتیجه می دهد. چرا که در غیر این صورت، k ای وجود دارد که برای آن

$$p_k > \sum_j A_{kj} p_j$$

پس، از آنجا که مجموع ستون های A برابر ۱ است،

$$\sum_i p_i > \sum_i \sum_j A_{ij} p_j = \sum_j (\sum_i A_{ij}) p_j = \sum_j p_j$$

که تناقض است.

یک جواب برای دستگاه همگن $(I - A)x = ۰$، که معادل شرط تعادل است، عبارت است از

$$p = \begin{bmatrix} ۰/۲۵ \\ ۰/۳۵ \\ ۰/۴۰ \end{bmatrix}$$

می توانیم این را به این صورت تعبیر کنیم که جامعه وقتی بقا می یابد که نسبت درآمدهای کشاورز، خیاط و نجار به صورت ۴۰ : ۳۵ : ۲۵ (و یا ۸ : ۷ : ۵) باشد.

توجه کنید که فقط علاقمند به هر جواب ناصفری نیستیم، بلکه به دنبال جوابی هستیم که نامنفی باشد. پس باید این سوال را در نظر بگیریم که دستگاه $(I - A)x = ۰$، در چه شرایطی جواب نامنفی دارد، در صورتی که A ماتریسی با درایه هایی ناصفر باشد که مجموع درایه های هر ستون آن ۱ است. قضیه ای کارساز در این راستا (که برهانش را می توان در این کتاب یافت: «کاربردهای ماتریس در مدل های اقتصادی و روابط علوم اجتماعی»، گزارش های کنفرانس تابستانی برای

استادان ریاضیات کاربردی دانشگاه، ۱۹۷۱، CUPM، برکلی، کالیفرنیا [1])، در زیر آمده است.

قضیه ۱۲.۳. فرض کنید A یک ماتریس ورودی - خروجی $n \times n$، به شکل زیر باشد:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$$

که در اینجا D، یک بردار مثبت $(n-۱) \times ۱$ و C یک بردار مثبت $۱ \times (n-۱)$ است. در این صورت، $(I-A)x = ۰$، مجموعهٔ جواب های یک بعدیی دارد که با یک بردار نامنفی تولید می شود.

ملاحظه کنید که هر ماتریس ورودی - خروجی که همهٔ درایه هایش مثبت باشد. در فرض این قضیه صدق می کند. ماتریس زیر هم همینطور.

$$\begin{bmatrix} ۰/۷۵ & ۰/۵۰ & ۰/۶۵ \\ ۰ & ۰/۲۵ & ۰/۳۵ \\ ۰/۲۵ & ۰/۲۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

در «مدل باز»، فرض می کنیم که برای هر یک از کالاهای تولید شده، تقاضایی خارجی وجود دارد. با بازگشت به جامعهٔ سادهٔ خود فرض می کنیم که $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ به ترتیب ارزش پولی غذا، پوشاک و مسکن تولید شده، به ترتیب با تقاضای خارجی $d-۱$، $d_۲$، $d_۳$ باشند. فرض کنید A آن ماتریس ۳×۳ ای باشد که برای آن A_{ij} نمایندهٔ مقداری از کالای i اُم (بر حسب یک واحد پولی ثابت مانند دلار)، ات که برای تولید یک واحد پولی کالای j مورد نیاز است. در این صورت، مقدار غذای اضافی در جامعه عبارت است از

$$x_۱ - (A_{۱۱}x_۱ + A_{۱۲}x_۲ + A_{۱۳}x_۳)$$

یعنی مقدار غذای تولید شده منهای مقدار غذای مصرف شده در تولید هر یک از سه کالا. فرض اینکه هر چه تولید می شود به مصرف می رسد، شرط تعادل مشابهی برای مدل باز در اختیارمان می گذارد، که عبارت است از اینکه اضافهٔ هر یک از سه کالا باید برابر با تقاضای خارجی متناظر با آن باشد. بنابراین

$$x_i - \sum_{j=۱}^{۳} A_{ij}x_j = d_i \qquad i = ۱,۲,۳ \text{ برای}$$

در حالت کلی، باید جوابی نامنفی برای $(I-A)x = d$ بیابیم که A ماتریسی با درایه های نامنفی است که مجموع درایه های هر یک از ستون هایش از یک تجاوز نمی کند، و $d \geqslant ۰$. به راحتی می توان دید که اگر $(I-A)^{-۱}$ موجود و نامنفی باشد، جواب مطلوب $(I-A)^{-۱}d$ خواهد بود.

به یاد بیاورید که برای هر عدد حقیقی a، سری $۱ + a + a^۲ + \ldots$ همگرا به $(۱-a)^{-۱}$ است هرگاه $|a| < ۱$.

[1] "Application of matrices to Economic Models and Social Scince Relations", by Ben Mathematics, 1971, CUPM, Berkely California

به طور مشابه، می توان (با استفاده از مفهوم همگرایی ماتریسی که در بخش ۳-۵ به آن خواهیم پرداخت) دید که سری $I + A + A^{۲} + \dots$ به $(I - A)^{-۱}$ همگراست، هرگاه $\{A^n\}$ به ماتریس صفر همگرا باشد. در این حالت از آنجا که ماتریس های $I, A, A^{۲}, \dots$ نامنفی هستند، $(I - A)^{-۱}$ نیز نامنفی است. برای تشریح مدل باز، فرض کنید برای تولید ۱ \$ غذا، ۳۰ سنت غذا، ۱۰ سنت پوشاک و ۳۰ سنت مسکن لازم باشد. به طریقی مشابه برای تولید ۱ \$ پوشاک، ۲۰ سنت غذا، ۴۰ سنت پوشاک و ۲۰ سنت مسکن لازم باشد. نهایتاً برای تولید ۱ \$ مسکن، ۳۰ سنت غذا، ۱۰ سنت پوشاک و ۳۰ سنت مسکن لازم است. در این صورت ماتریس ورودی - خروجی عبارت است از:

$$A = \begin{bmatrix} ۰/۳۰ & ۰/۲۰ & ۰/۳۰ \\ ۰/۱۰ & ۰/۴۰ & ۰/۱۰ \\ ۰/۳۰ & ۰/۲۰ & ۰/۳۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$I - A = \begin{bmatrix} ۰/۷۰ & -۰/۲۰ & ۰/۳۰ \\ -۰/۱۰ & ۰/۶۰ & -۰/۱۰ \\ -۰/۳۰ & -۰/۲۰ & ۰/۷۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad (I - A)^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲/۰ & ۱/۰ & ۱/۰ \\ ۰/۵ & ۲/۰ & ۰/۵ \\ ۱/۰ & ۱/۰ & ۲/۰ \end{bmatrix}$$

چون $(I - A)^{-۱}$ نامنفی است، می توانیم برای هر تقاضای d، یک جواب نامنفی (یکتا) برای $(I - A)x = d$ بیابیم. بعنوان مثال، فرض کنید تقاضای خارجی برای غذا، ۳۰ میلیارد دلار، برای پوشاک ۲۰ میلیارد دلار و برای مسکن ۱۰ میلیارد دلار باشد. هرگاه قرار دهیم:

$$d = \begin{bmatrix} ۳۰ \\ ۲۰ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$$

خواهیم داشت:

$$x = (I - A)^{-۱} d = \begin{bmatrix} ۹۰ \\ ۶۰ \\ ۷۰ \end{bmatrix}$$

پس تولید ناخالصی معادل با ۹۰ میلیارد دلار غذا، ۶۰ میلیارد دلار پوشاک و ۷۰ میلیارد دلار مسکن برای ارضاء تقاضای موجود لازم است.

تمرینات

۱. مشخص کنید که کدامیک از عبارات زیر درست و کدام نادرست است.

الف) هر دستگاه از معادلات خطی حداقل یک جواب دارد.

ب) هر دستگاه از معادلات خطی حداکثر یک جواب دارد.

ج) هر دستگاه همگن از معادلات خطی حداقل یک جواب دارد.

د) هر دستگاه از n معادلهٔ خطی n مجهولی حداکثر یک جواب دارد.

ه) هر دستگاه از n معادلهٔ خطی n مجهولی حداقل یک جواب دارد.

و) اگر دستگاه همگن متناظر با یک دستگاه معادلات خطی مفروض دارای جواب باشد، دستگاه مفروض هم جواب دارد.

ز) اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه همگن از n معادلهٔ خطی n مجهولی وارون پذیر باشد، دستگاه جواب نابدیهی ندارد.

ح) فضای جواب های هر دستگاه از m معادلهٔ خطی n مجهولی زیر فضایی از F^n است.

۲. برای هر یک از دستگاه های معادلات خطی زیر، بُعد فضای جواب ها و پایه ای برای آن را بیابید.

الف)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

د)

$$\begin{aligned} ۲x_۱ + x_۲ - x_۳ &= ۰ \\ x_۱ - x_۲ + x_۳ &= ۰ \\ x_۱ + ۲x_۲ - ۲x_۳ &= ۰ \end{aligned}$$

ه)

$$x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ + x_۴ = ۰$$

و)

$$\begin{aligned} x_۱ + ۲x_۲ &= ۰ \\ x_۱ - x_۲ &= ۰ \end{aligned}$$

ز)

$$\begin{aligned} x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ + x_۴ &= ۰ \\ x_۲ - x_۳ + x_۴ &= ۰ \end{aligned}$$

۳. با استفاده از نتایج تمرین ۲، همهٔ جواب های دستگاه های زیر را بیابید.

الف)

$$\begin{aligned} x_۱ + ۳x_۲ &= ۵ \\ ۲x_۱ + ۶x_۲ &= ۱۰ \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} x_۱ + x_۲ - x_۳ &= ۱ \\ ۴x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ &= ۳ \end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ه)

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1$$

و)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned}$$

ز)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

۴. برای هر یک از دستگاه های معادلات خطی زیر با ماتریس ضرایب وارون پذیر A
اولاً - A^{-1} را محاسبه کنید.
ثانیاً - A^{-1} را برای حل دستگاه به کار ببرید.
الف)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 3 \end{aligned}$$

ب)

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1\\
2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

۵. مثالی از یک دستگاه n معادلهٔ خطی n مجهولی با تعدادی نامتناهی جواب، ارائه کنید.

۶. فرض کنید $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ به این صورت تعریف شده باشد: $T(a,b,c) = (a+b, 2a-c)$. $T^{-1}(1,11)$ را توصیف کنید.

۷. تعیین کنید که هر یک از دستگاه های زیر جواب دارد یا نه.

الف)

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2\\
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1\\
2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4
\end{aligned}
$$

ب)

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1\\
2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

ج)

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1\\
x_1 + x_2 - x_3 &= 0\\
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

د)

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\
x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

$$۴x_۱ + x_۲ + ۸x_۳ - x_۴ = ۰$$

و)

$$\begin{aligned} x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ &= ۱ \\ ۲x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ &= ۳ \\ x_۱ - ۴x_۲ + ۷x_۳ &= ۴ \end{aligned}$$

۸. فرض کنید $T : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ به این صورت تعریف شده باشد: $T(a,b,c) = (a+b, b-۲c, a+۲c)$. برای هر یک از b های زیر در $\mathbb{R}^۳$، تعیین کنید که $b \in R(T)$ یا خیر.

الف) $b = (۱,۳,-۲)$ ب) $b = (۲,۱,۱)$

۹. ثابت کنید که دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ جواب دارد اگر و تنها اگر $b \in R(L_A)$.

۱۰. عبارت «اگر ماتریس ضرایب دستگاهی از m معادلهٔ خطی n مجهولی، رتبه اش m باشد، دستگاه دارای جواب است.» را اثبات کنید و یا اینگه مثالی نقض برای آن بیاورید.

۱۱. در مدل بستهٔ لانتیفی[۲] که غذا، پوشاک و مسکن، صنایع اصلی آن باشند، فرض کنید که ماتریس ورودی - خروجی عبارت باشد از:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{۷}{۱۶} & \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۱۶} \\ \frac{۵}{۱۶} & \frac{۱}{۶} & \frac{۵}{۱۶} \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

کشاورز، خیاط و نجار باید به چه نسبتی تولید داشته باشند تا تعادل برقرار شود؟

۱۲. اقتصاد خاصی از دو بخش کالا و خدمات تشکیل شده است. فرض کنید ۶۰ ٪ کالاها و ۳۰ ٪ خدمات در تولید کالا مصرف شود. چه نسبتی از کل تولیدات این اقتصاد، در تولید کالا مورد استفاده قرار می گیرد؟

۱۳. با به کارگیری اصطلاحات مدل باز لانتیف، فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$$

[۲] Leontief

و بردار تقاضا $d = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$ باشد. از هر کالا چه میزان باید تولید شود تا تقاضا برآورده شود؟

۱۴. اقتصاد خاصی متشکل از دو بخش کالا و خدمات، تأمین کنندهٔ یک سیستم دفاعی است، که ۹۰ میلیارد دلار کالا و ۲۰ میلیارد دلار از خدمات اقتصاد را مصرف می کند اما خود در تولید اقتصادی مشارکت ندارد. فرض کنید ۰/۵ واحد کالا و ۰/۲ واحد خدمات برای تولید ۱ واحد خدمات، و ۰/۳ واحد کالا و ۰/۶ واحد خدمات برای تولید ۱ واحد خدمات لازم باشد. تولید کل دستگاه اقتصادی باید چقدر باشد تا این سیستم دفاعی را تأمین کند.

۳-۴ دستگاه معادلات خطی - جنبه‌های محاسباتی

در بخش ۳-۳، شرطی لازم و کافی اینکه دستگاه مفروضی از معادلات خطی جواب داشته باشد را پیدا کردیم (قضیهٔ ۳-۱۱) و آموختیم که چگونه جواب های یک دستگاه ناهمگن را بر حسب جوابهای دستگاه همگن نظیر آن بیان کنیم (قضیه ۳-۹). نتیجهٔ اخیر، ما را قادر می سازد که همهٔ جوابهای یک دستگاه مفروض را بیابیم، به شرط اینگه بتوانیم یک جواب برای دستگاه مفروض و پایه ای برای مجموعهٔ جوابهای دستگاه همگن نظیر، بیابیم. در این بخش، از اعمال مقدماتی سطری برای دستیابی به این دو هدف استفاده می کنیم. خصوصیت اصلی این روش آن است که دستگاه معادلات خطی مفروض را به دستگاهی با همان مجموعه جواب تبدیل می کند که حل آن آسانتر است (مثل بخش ۱-۴).

تعریف: دو دستگاه از معادلات خطی را معادل می نامیم هرگاه مجموعهٔ جواب های آنها یکی باشد. قضیه و نتیجه زیر، روشی مفید برای به دست آوردن دستگاههای معادل در اختیار ما قرار می دهند.

قضیه ۱۳.۳. فرض کنید $Ax = b$ دستگاهی از m معادله خطی n مجهولی و C یک ماتریس وارون پذیر $m \times m$ باشد. در این صورت دستگاه $(CA)x = Cb$ با $Ax = b$ معادل است.

برهان. فرض کنید K مجموعه جوابهای $Ax = b$ و K' مجموعه جوابهای $(CA)x = Cb$ باشد. هرگاه $w \in K$، $Aw = b$. پس $(CA)w = Cb$ و لذا $w \in K'$. پس $K \subseteq K'$.
برعکس، اگر $w \in K'$، آنگاه $(CA)w = Cb$. لذا

$$Aw = C^{-۱}(CAw) = C^{-۱}(Cb) = b;$$

پس $w \in K$. در نتیجه $K \subseteq K'$، بنابراین $K = K'$. □

نتیجه ۱. فرض کنید $Ax = b$ دستگاهی از m معادلهٔ خطی n مجهولی باشد. هرگاه $[A'|b']$ با اعمال تعدادی متناهی عمل سطری مقدماتی بر $[A|b]$ به دست آید، آنگاه دستگاه $A'x = b'$ با دستگاه اصلی معادل است.

برهان. فرض کنید $[A'|b']$ با اعمال تعداد متناهی عمل سطری مقدماتی از $[A|b]$ به دست آید. این عملیات را می توان با ضرب در ماتریس های مقدماتی $m \times m$ $E_1, E_2, \ldots, E_p$ اعمال کرد. فرض کنید $C = E_p \ldots E_2 E_1$؛ در این صورت:

$$[A'|b'] = C[A|b] = [CA|Cb]$$

چون هر یک از E_i ها وارون پذیر است، C نیز چنین است. حال $A' = CA$ و $b' = Cb$. پس طبق قضیهٔ ۳-۱۳، دستگاه $A'x = b'$ با دستگاه $Ax = b$ معادل است. □

حال روشی را برای حل هر نوع دستگاهی از معادلات خطی شرح می دهیم. به عنوان مثال، این دستگاه را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 3 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2
\end{aligned}$$

ابتدا ماتریس افزودهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

با استفاده از اعمال سطری مقدماتی، ماتریس افزوده را به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می کنیم که اولین درایهٔ ناصفر هر سطر آن ۱ باشد و در ستونی در طرف راست اولین درایهٔ ناصفر سطر قبل قرار داشته باشد. (یادآوری می کنیم که ماتریس A بالا مثلثی است هرگاه برای هر $i > j$، $A_{ij} = 0$.)

۱. در سمت چپ ترین ستون ناصفر و در سطر اول، ۱ قرار دهید. در این مثال می توانیم این مرحله را با تعویض سطرهای اول و سوم انجام دهیم. ماتریس حاصل عبارت است از:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

۲. با استفاده از عملیات سطری نوع سوم، سطر اول را برای به دست آوردن صفر در سایر مکان های سمت چپ ترین ستون به کار برید. در مثال خودمان می توانیم -۱ برابر سطر اول را به سطر دوم، و -۳ برابر سطر اول را به سطر سوم بیفزاییم تا این ماتریس به دست آید:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۴ & ۰ & ۱ & -۵ \end{array}\right]$$

۳. بدون استفاده از سطر (های) قبلی، در سطر بعدی و در سمت چپ ترین ستون ممکن، ۱ قرار دهید. در مثال مورد بحث، ستون دوم سمت چپ ترین ستون ممکن است و می توانیم درایهٔ سطر و ستون دوم را با ضرب سطر دوم در -۱، به ۱ تبدیل کنیم. حاصل این عمل، چنین است:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & -۱ \\ ۰ & -۴ & ۰ & ۱ & -۵ \end{array}\right]$$

۴. حال با استفاده از اعمال مقدماتی سطری نوع سوم، در زیر ۱ ای که در مرحلهٔ قبل به دست آمد، ۰ ایجاد کنید. ماتریس حاصل عبارت است از:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۳ & -۹ \end{array}\right]$$

۵. مراحل ۳ و ۴ را به ترتیب بر سطرهای بعدی اعمال کنید تا سطر ناصفری باقی نماند. در مثال مورد بحث، این کار را می توان با ضرب سطر سوم در $-\frac{۱}{۳}$ انجام داد، حاصل عمل این است:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \end{array}\right]$$

اکنون ماتریس مطلوب را به دست آورده ایم. برای تکمیل روند ساده سازی ماتریس افزوده، باید کاری کنیم که اولین درایهٔ ناصفر هر سطر، تنها درایهٔ ناصفر ستونی که در آن واقع است باشد. (این عمل متناظر است با حذف چند مجهول خاص از همهٔ معادلات، به جز یکی از آنها است.)

۶. برای رسیدن به این هدف، از پایین به بالا کار می کنیم. کار را با سطر آخر شروع کرده، مضاربی از هر سطر به سطرهای بالایی می افزاییم. در مثال مورد بحث، سطر سوم آخرین سطر ناصفر است و اولین درایهٔ ناصفر این سطر، در ستون چهارم واقع است. بنابراین سطر سوم را به سطرهای اول و دوم می افزاییم، تا در سطر اول، ستون چهارم و سطر دوم، ستون چهارم، صفر به دست آید. ماتریس حاصل عبارت است از:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

۷. فرایند مذکور در مرحلهٔ شش را برای هر یک از سطرهای قبلی تکرار می کنیم، تا اینکه برای سطر دوم صورت گیرد، که در این زمان، فرایند تحلیل پایان می پذیرد. در مورد مثال مورد بحث، باید ۲ برابر سطر دوم را به سطر اول بیفزاییم، تا درایهٔ سطر اول، ستون دوم، صفر شود. حاصل این عمل چنین است:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

اکنون شکل تحلیل یافته مورد نظر خود را از ماتریس افزوده در اختیار داریم. این ماتریس، متناظر با دستگاه زیر از معادلات خطی است:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

به یاد بیاورید که طبق نتیجهٔ قضیهٔ ۳-۱۳، این دستگاه با دستگاه اصلی معادل است. اما این دستگاه به راحتی قابل حل است. واضح است که $x_2 = 2$ و $x_4 = 3$ گذشته از این، x_1 و x_3 می توانند به شرط اینکه مجموع آنها ۱ باشد، هر

مقداری را بپذیرند. با فرض اینکه $x_۳ = t$، داریم $x_۱ = ۱ - t$. پس هر جواب دلخواه دستگاه اصلی، شکل زیر را دارد:

$$\begin{bmatrix} ۱-t \\ ۲ \\ t \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \\ ۳ \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

ملاحظه کنید که:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \right\}$$

پایه ای برای دستگاه معادلات همگن نظیر دستگاه مفروض است.

در مثال بالا، آنقدر عملیات سطری مقدماتی بر ماتریس افزودهٔ دستگاه انجام دادیم که ماتریس افزودهٔ دستگاهی با خصوصیات ۱، ۲ و ۳ ی مذکور در صفحه ۳۹ به دست آمد. چنین ماتریسی نام خاصی دارد.

تعریف:. گویند یک ماتریس به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی است، [۳] هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) هر سطری که دارای درایه ای ناصفر باشد، پیش از هر سطری که تمام درایه هایش صفر هستند، (اگر چنین سطری وجود داشته باشد) قرار بگیرد.

ب) اولین درایهٔ ناصفر در هر سطر، تنها درایهٔ ناصفر در ستون مربوط به آن درایه باشد.

ج) اولین درایهٔ ناصفر در هر سطر، ۱ باشد و در ستونی قرار بگیرد که در سمت راست اولین درایهٔ ناصفر سطر قبلی است.

مثال ۱. الف) آخرین ماتریس صفحهٔ ۱۹۹، به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی است. توجه کنید که اولین درایهٔ ناصفر هر سطر ۱ است و هر ستونی که چنین درایه ای داشته باشد، در همهٔ جاهای دیگر صفر است. توجه کنید هر بار که به طرف پایین و به سطر جدیدی می رویم، باید یک یا چند ستون به سمت راست برویم تا اولین درایهٔ ناصفر سطر جدید را بیابیم.

[۳] در اکثر کتب جبر خطی به زبان فارسی، "row reduced echelon form" را «شکل تحویل یافتهٔ سطری پلکانی» ترجمه کرده اند. من کلمهٔ «تحلیل یافته» را جایگزین «تحویل یافته» کردم، زیرا مفهوم کلمهٔ reduced را از آن بهتر استنباط می‌کنم.

ب) ماتریسهای زیر، به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی نیستند:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

چرا که اولین ستون بیش از یک درایهٔ ناصفر دارد؛

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

چرا که اولین درایهٔ ناصفر اول سطر دوم، در سمت راست اولین درایهٔ ناصفر سطر اول نیست؛ و

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

چرا که اولین درایهٔ ناصفر سطر اول ۱ نیست. □

می توان نشان داد (به نتیجهٔ قضیه ۳-۱۶ رجوع کنید) که شکل تحلیل یافته سطری پلکانی یک ماتریس یکتایت؛ یعنی، اگر دو دنبالهٔ متفاوت از اعمال مقدماتی سطری برای تبدیل یک ماتریس به دو ماتریس Q و Q' که به شکل تحلیل شدهٔ سطری پلکانی هستند، به کار گیریم، $Q = Q'$. پس با اینکه دنباله های متفاوت زیادی از عملیات سطری مقدماتی وجود دارند که می توانند برای تبدیل یک ماتریس مفروض به شکل تحلیل شدهٔ سطری پلکانی به کار روند، همگی یک نتیجه را می دهند.

روشی که در بالا برای تحلیل دادن یک ماتریس افزوده، به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی به کار رفته است، حذف به روش گاوس[۴] نام دارد. این روش از دو قسمت متفاوت تشکیل می شود.

۱. در «قدم رو به جلو»، ماتریس افزوده را به ماتریسی بالا مثلثی تبدیل می کنیم که اولین درایهٔ ناصفر هر سطر آن ۱ بوده، در ستونی در سمت راست اولین درایهٔ ناصفر سطر قبلی واقع باشد.

۲. در «قدم رو به عقب» یا «جایگذاری رو به عقب»، ماتریس بالا مثلثی را با صفر کردن همهٔ درایه های دیگر ستونی که اولین درایهٔ ناصفر هر سطر در آن واقع است، به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی در می آوریم.

از میان همهٔ روشهای تبدیل یک ماتریس به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی، حذف به روش گاوس کمترین تعداد اعمال حسابی به کار می گیرد. (برای ماتریس های بزرگ، تقریباً کمتر از نصف تعداد عملیاتی که روش جردن - گاوس به کار می

[۴] Gauss

گیرد. در روش اخیر، ماتریس را با به کارگیری اولین درایهٔ ناصفر هر سطر برای صفر کردن بقیهٔ درایه های ستون مربوط به آن، به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی در می آورند.) حذف به روش گاوس به خاطر کارایی آن، روشی است که در حل دستگاه های معادلات خطی با کامپیوتر ترجیح داده می شود. در کارهای کامپیوتری، معمولاً فرایند حذف به روش گاوس را به گونه ای تغییر می دهند که خطاهای نهایی به حداقل برسند. چون بحث در مورد این روش ها در اینجا مناسب نیست، خوانندگانی را که به چنین مسائلی علاقمند هستند، به کتاب های آنالیز عددی ارجاع می دهیم.

وقتی ماتریسی به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی باشد، حل دستگاه معادلات خطی نظیر آن ساده است. در زیر، روشی را ارائه می کنیم که با آن هر دستگاه از معادلات خطی را که ماتریس افزوده اش به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی باشد، می توان حل کرد. البته، اول توجه می کنیم که هر ماتریس را می توان با حذف به روش گاوس تحلیل شدهٔ سطری پلکانی در آورد. در قدم رو به جلو، شرایط الف و ج تعریف تحلیل یافتگی سطری را ارضاء می کنیم و درایه های واقع در زیر اولین درایهٔ ناصفر هر سطر را نیز صفر می کنیم. بعد، در قدم رو به عقب، همهٔ درایه های بالای درایهٔ ناصفر هر سطر را نیز صفر می کنیم و به این ترتیب شرط ب تعریف تحلیل یافتگی سطری پلکانی نیز ارضاء می شود.

قضیه ۱۴.۳. حذف به روش گاوس، هر ماتریسی را به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی آن در می آورد.

حال روشی را برای حل دستگاهی که ماتریس افزوده اش به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی است، ارائه می کنیم. برای تشریح این روند، دستگاه زیر را در نظر می گیریم

$$
\begin{aligned}
&۲x_۱ + ۳x_)۲ + x_۳ + ۴x_۴ - ۹x_۵ = ۱۷\\
&x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ - ۳x_۵ = ۶\\
&x_۱ + x_۲ + x_۳ + ۲x_۴ - ۵x_۵ = ۸\\
&۲x_۱ + ۲x_۲ + ۲x_۳ + ۳x_۴ - ۸x_۵ = ۱۴
\end{aligned}
$$

که ماتریس افزودهٔ آن چنین است:

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
۲ & ۳ & ۱ & ۴ & -۹ & ۱۷\\
۱ & ۱ & ۱ & ۱ & -۳ & ۶\\
۱ & ۱ & ۱ & ۲ & -۵ & ۸\\
۲ & ۲ & ۲ & ۳ & -۸ & ۱۴
\end{array}\right]
$$

با اِعمال حذف به روش گاوس، بر ماتریس افزودهٔ این دستگاه، دنبالهٔ زیر از ماتریس‌ها به دست می‌آید:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} ۲ & ۳ & ۱ & ۴ & -۹ & ۱۷ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & -۳ & ۶ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۲ & -۵ & ۸ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۳ & -۸ & ۱۴ \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & -۳ & ۶ \\ ۲ & ۳ & ۱ & ۴ & -۹ & ۱۷ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۲ & -۵ & ۸ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۳ & -۸ & ۱۴ \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & -۳ & ۶ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۲ & -۳ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۲ & ۲ \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & -۳ & ۶ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۲ & -۳ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & -۱ & ۴ \\ & ۰ & ۱\,-۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱\,-۲ & ۲ \\ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} & ۱ & ۰ & ۲ & ۰\,۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

دستگاه معادلات خطی مربوط به ماتریس اخیر نیز عبارت است از:

$$\begin{aligned} x_۱ + ۲x_۳ - ۲x_۵ &= ۳ \\ x_۲ - x_۳ + x_۵ &= ۱ \\ x_۴ - ۲x_۵ &= ۲ \end{aligned}$$

توجه کنید که سطر آخر را نادیده گرفته ایم، چرا که فقط شامل صفر است. برای حل دستگاهی که ماتریس افزوده اش به حالت تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی است، متغیرها را به دو دسته تقسیم کنید. دستهٔ اول متشکل از آن متغیرهایی است که بعنوان سمت چپ ترین متغیر یکی از معادلات دستگاه ظاهر می شوند. (در این مثال، این مجموعه $\{x_۱, x_۲, x_۴\}$ است.) دستهٔ دوم متشکل است از همهٔ متغیرهای باقیمانده (در این مثال $\{x_۳, x_۵\}$). به هر یک از متغیرهای مجموعهٔ دوم، مقداری پارامتری چون $t_۱$، $t_۲$، ... منسوب کنید ($x_۳ = t_۱$ و $x_۵ = t_۲$) و سپس دستگاه را نسبت به متغیرهای مجموعهٔ اول، بر حسب متغیرهای مجموعهٔ دوم حل کنید:

$$\begin{aligned} x_۱ &= -۲x_۳ + ۲x_۵ + ۳ = -۲t_۱ + ۲t_۲ + ۳ \\ x_۲ &= x_۳ - x_۵ + ۱ = t_۱ - t_۲ + ۱ \end{aligned}$$

$$x_۴ = ۲x_۵ + ۲ = ۲t_۲ + ۲$$

پس جواب دلخواه s، به شکل زیر است:

$$s = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \\ x_۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲t_۱ + ۲t_۲ + ۳ \\ t_۱ - t_۲ + ۱ \\ t_۱ \\ ۲t_۲ + ۲ \\ t_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} + t_۱ \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + t_۲ \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۰ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

که $t_۱, t_۲ \in \mathbb{R}$. توجه کنید که

$$\left\{ \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۰ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

پایه ای برای مجموعهٔ جواب های دستگاه معادلات همگن نظیر است. و

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

جوابی خاص از دستگاه اصلی است.

بنابراین در ساده سازی ماتریس افزودهٔ دستگاه، به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی، عملاً به طور همزمان جوابی خاص از دستگاه اصلی، و پایه ای برای مجموعهٔ جواب های دستگاه همگن نظیر می یابیم. به علاوه، این روش هنگامی که دستگاه جواب نداشته باشد، این موضوع را نیز تشخیص می دهد. چرا که طبق تمرین ۳، جواب زمانی و تنها زمانی وجود دارد که در تبدیل ماتریس افزوده به شکل تحلیل یافته، سطری حاصل نشود که تنها درایهٔ ناصفر آن در ستون آخر قرار داشته باشد.

بنابراین برای استفاده از این روش در حل دستگاه $Ax = b$ متشکل از m معادلهٔ خطی n مجهولی، کافی است که با استفاده از حذف به روش گاوس شروع به تبدیل ماتریس افزودهٔ $[A|b]$ به شکل تحلیل شدهٔ سطری پلکانی آن، $[A'|b']$ کنیم. اگر سطری به دست آید که تنها درایهٔ ناصفر آن در ستون آخر باشد، دستگاه اصلی جواب ندارد. در غیر این صورت، همهٔ سطرهای صفر را از $[A'|b']$ حذف کنید و دستگاه معادلات نظیر را بنویسید. این دستگاه را که به روشی که شرح آم در بالا داده شد، حل کنید تا جوابی عمومی به این شکل به دست آید:

$$s = s_\circ + t_۱u_۱ + t_۲u_۲ + \ldots + t_{n-r}u_{n-r}$$

که در آن r تعداد سطرهای ناصفر در A' است ($r \leq m$). معادلهٔ بالا، به ما می گوید که یک جواب دلخواه مثل s را می توان بر حسب $n - r$ پارامتر بیان کرد. قضیهٔ زیر بیان می کند که s را با کمتر از $n - r$ پارامتر نمی توان بیان کرد.

قضیه ۱۵.۳. فرض کنید $Ax = b$ دستگاهی از r معادلهٔ ناصفر n مجهولی باشد. فرض کنید $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}[A|b]$ و $[A|b]$ به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی باشد. در این صورت:

الف) $\mathrm{rank}(A) = r$

ب) اگر جواب عمومیی که طبق فرایند بالا به دست می آید، به این شکل باشد:

$$s = s_\circ + t_۱u_۱ + t_۲u_۲ + \ldots + t_{n-r}u_{n-r}$$

آنگاه $\{u_۱, u_۲, \ldots, u_{n-r}\}$ پایه ای برای مجموعهٔ جوابهای دستگاه همگن نظیر بوده، $s_\circ$ جوابی برای دستگاه اصلی است.

برهان. از آنجا که $[A|b]$ به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی است، $[A|b]$ باید r سطر ناصفر داشته باشد. این سطرها طبق تعریف شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی به وضوح مستقل خطی هستند، و بنابراین $\mathrm{rank}[A|b] = r$. پس $\mathrm{rank}(A) = r$.

فرض کنید K مجموعهٔ جواب های $Ax = b$ باشد و K_H مجموعهٔ جوابهای $Ax = \circ$. با قرار دادن $t_۱ = t_۲ = \ldots = t_{n-r} = \circ$، می بینیم که $s = s_\circ \in K$ اما طبق قثضیهٔ ۳-۹، $K = \{s_\circ\} + K_H$. لذا:

$$K_H = \{-s_\circ\} + K = (\{u_۱, u_۲, \ldots, u_{n-r}\})$$

چون $\mathrm{rank}(A) = r$، داریم $\dim(K_H) = n - r$. پس از آنجا که $\dim(K_H) = n - r$ و K_H با مجموعهٔ $\{u_۱, u_۲, \ldots, u_{n-r}\}$ که حداکثر شامل $n - r$ عضو است، تولید می‌شود، نتیجه می‌گیریم که این مجموعه پایه ای برای K_H است. $\square$

تفسیری از شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی

فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ با ستونهای $a_۱$، $a_۲$، …، a_n و b شکل تحلیل یافته سطری پلکانی A باشد. ستونهای B را با $b_۱$، $b_۲$، …، b_n نشان می دهیم. اگر رتبهٔ A، r باشد رتبهٔ B نیز طبق نتیجهٔ قضیهٔ **۳-۴**، r است. چون B به شکل تحلیل یافته سطری پلکانی است، هیچ سطر ناصفری از B ترکیبی خطی از سایر سطرهای B نیست. بنابراین B باید دقیقاً r سطر ناصفر داشته باشد و اگر $r \geq ۱$، بردارهای $e_۱$، $e_۲$، …، e_r باید در میان ستونهای B ظاهر شوند. برای $i = ۱, ۲, \ldots, r$، فرض کنید، j_i شمارهٔ سطری از B را نشان دهد که برای آن $b_{ji} = e_i$. ادعا می‌کنیم که $a_{j۱}$، $a_{j۲}$، …، a_{jr}، یعنی ستونهایی از A که متناظر این ستونهای B هستند، مستقل خطیند؛ چرا که فرض کنید اسکالرهای $c_۱$، $c_۲$، …، c_r وجود داشته باشند که

$$c_۱ a_{j۱} + c_۲ a_{j۲} + \ldots + c_r a_{jr} = ۰$$

چون B را می‌توان با اِعمال دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی بر A به دست آورد، (همانند اثبات نتیجهٔ قضیه **۳-۱۳**) ماتریس وارون‌پذیر $m \times m$ ای مانند M موجود است که $MA = B$. با ضرب معادلهٔ بالا در M داریم:

$$c_۱ Maj_۱ + c_۲ Maj_۲ + \ldots + c_r Maj_r = ۰$$

از آنجا که $Maj_i = bj_i = e_i$، نتیجه می‌شود که

$$c_۱ e_۱ + c_۲ e_۲ + \ldots + c_r e_r = ۰$$

در نتیجه $c_۱ = c_۲ = \ldots = c_r = ۰$ و این ثابت می‌کند که بردارهای $aj_۱, aj_۲, \ldots, a_{j_r}$ مستقل خطی هستند.

چون B فقط r سطر ناصفر دارد، هر ستون B به ازای اسکالرهایی مانند d_1، d_2، ...، d_r، به این شکل است.

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

پس ستون نظیر در A عبارت است از:

$$\begin{aligned} M^{-1}(d_1e_1 + d_2e_2 + \ldots + d_re_r) &= d_1m^{-1}e_1 + d_2m^{-1}e_2 + \ldots + d_rm^{-1}e_r \\ &= d_1M^{-1}b_{j_1} + d_2M^{-1}b_{j_2} + \ldots + d_rM^{-1}b_{j_2} \\ &= d_1a_{j_1} + d_2a_{j_2} + \ldots + d_ra_{j_r} \end{aligned}$$

قضیه زیر، این نتایج را خلاصه می‌کند.

قضیه ۱۶.۳. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ با رتبهٔ r باشد، که $r > 0$، و فرض کنید B شکل تحلیل‌یافتهٔ سطری پلکانی A باشد. در این صورت، موارد زیر برقرارند:

الف) تعداد سطرهای ناصفر B، r است.

ب) برای هر $i = 1, 2, \ldots, r$، ستونی مانند b_{j_i} از B وجود دارد که $b_{ji} = e_i$.

ج) ستون های شمارهٔ $j_1, j_2, \ldots, j_r$ A مستقل خطی هستند.

د) برای هر $k = 1, 2, \ldots, n$، اگر ستون k اُم B، $d_1e_1 + d_2e_2 + \ldots + d_re_r$ باشد، ستون k اُم A عبارت است از $d_1a_{j_1} + d_2a_{j_2} + \ldots + d_ra_{j_r}$.

نتیجه ۲. شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی یک ماتریس، یکتاست.

برهان. به عهدهٔ خواننده است. □

مثال ۲. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۸ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۶ & ۷ & ۵ & ۹ \end{bmatrix}$$

شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی A، عبارت است از:

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

چون B سه سطر نا صفر دارد، رتبهٔ A، ۳ است. ستون های اول، سوم و پنجم B، $e_۱$، $e_۲$، و $e_۳$ هستند و لذا قضیهٔ ۳-۱۶ (ج) حکم می کند که ستون های اول، سوم و پنجم A مستقل خطی هستند.

بگذارید ساون های A را با $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، $a_۴$ و $a_۵$ نشان دهیم. چون ستون دوم B، $۲e_۱$ است، از قضیهٔ ۳-۱۶ (د) نتیجه می‌شود که $a_۲ = ۲a_۱$، که به راحتی هم می توان این را بررسی کرد. به علاوه، چون ستون چهارم B، $۴e_۱ + (-۱)e_۲$ است، همان نتیجه نشان می دهد که:

$$a_۴ = ۴a_۱ + (-۱)a_۳$$

□

در مثال ۶ بخش ۱-۶، از مجموعهٔ مولد زیر، پایه ای برای $\mathbb{R}^۳$ استخراج کردیم:

$$S = \{(۲, -۳, ۵), (۸, -۱۲, ۲۰), (۱, ۰, -۲), (۰, ۲, -۱), (۷, ۲, ۰)\}$$

فرآیندی را که در آنجا توصیف شد، می توان با استفاده از قضیهٔ ۳-۱۶، کارآمدتر کرد. با یادآوری این نکته شروع می کنیم که اگر S مستقل خطی می بود، آنگاه S پایه ای برای $\mathbb{R}^۳$ می شد. در حالت مورد بحث، واضح است که S وابستهٔ خطی است، چرا که S بیشتر از $\dim(\mathbb{R}^۳) = ۳$ بردار دارد. با این وجود آموزنده است که محاسبه ای را که برای تشخیص اینکه S وابستهٔ خطی یا مستقل خطی است، به کار می رود، مورد بررسی قرار دهیم. به یاد بیاورید که S وابستهٔ خطی است هرگاه

اسکالرهایی مانند $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$، $c_۴$ و $c_۵$ که همگی صفر نیستند، وجود داشته باشد به طوری که

$$c_۱(۲,-۳,۵)+c_۲(۸,-۱۲,۲۰)+c_۳(۱,۰,-۲)+c_۴(۰,۲,-۱)+c_۵(۷,۲,۰)=(۰,۰,۰)$$

بنابراین S وابستهٔ خطی است اگر و تنها اگر دستگاه معادلات خطی زیر جواب ناصفر داشته باشد:

$$\begin{aligned}&۲c_۱+۸c_۲+c_۳+۷c_۵=۰\\&-۳c_۱-۱۲c_۲+۲c_۴+۲c_۵=۰\\&۵c_۱+۲۰c_۲-۲c_۳-c_۴=۰\end{aligned}$$

ماتریس افزودهٔ این سیستم عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix}۲&۸&۱&۰&۷&۰\\-۳&-۱۲&۰&۲&۲&۰\\۵&۲۰&-۲&-۱&۰&۰\end{bmatrix}$$

و شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی آن عبارت است از:

$$B=\begin{bmatrix}۱&۴&۰&۰&۲&۰\\۰&۰&۱&۰&۳&۰\\۰&۰&۰&۱&۴&۰\end{bmatrix}$$

با استفاده از تکنیکی که پیشتر در این بخش تشریح شد، می توانیم جواب هایی ناصفر برای دستگاه فوق بیابیم، که وابستهٔ خطی بودن S را تضمین می کند. اما قضیهٔ ۳-۱۶ (ج) اطلاعاتی اضافی در اختیار ما قرار می دهد. از آنجا که ستون های اول، سوم و چهارم B، همان $e_۱$، $e_۲$ و $e_۳$ هستند، نتیجه می گیریم که ستون های اول، سوم و چهارم A مستقل خطی هستند. اما همهٔ ستون های A به غیر از ستون های A به غیر از ستون آخر (که بردار صفر است)، بردارهایی از S هستند. در نتیجه:

$$\beta=\{(۲,-۳,۵),(۱,۰,-۲),(۰,۲,-۱)\}$$

زیرمجموعه ای مستقل خطی از S است. از قسمت (ب) ی نتیجهٔ ۲ قضیهٔ ۱-۱۰ نتیجه می شود که β پایه ای برای $\mathbb{R}^۳$

است.

چون هر فضای برداری متناهی البعدی روی F، به ازای n ای ایزومرف با F^n است، می توان برای کاهش هر مجموعهٔ مولد متناهی به یک پایه، روشی مشابه را به کار برد. این تکنیک در مثال زیر تشریح شده است.

مثال ۳. مجموعهٔ

$$S = \{۲ + x + ۲x^۲ + ۳x^۳, ۴ + ۲x + ۴x^۲ + ۶x^۳, ۶ + ۳x + ۸x^۲ + ۷x^۳, ۲ + x + ۵x^۳, ۴ + x + ۹x^۳\}$$

زیرفضای V از $P_۳(\mathbb{R})$ را تولید می کند. برای یافتن زیرمجموعه ای از S که پایه ای برای V باشد، زیرمجموعهٔ زیر را در نظر می گیریم:

$$S' = \{(۲,۱,۲,۳), (۴,۲,۴,۶), (۶,۳,۸,۷), (۲,۱,۰,۵), (۴,۱,۰,۹)\}$$

که متشکل است از تصاویر اعضای S، تحت نمایش استاندارد $P_۳(\mathbb{R})$ نسبت به پایهٔ مرتب استاندارد. توجه کنید که ماتریس ۴×۵ ای که ستون های آن بردارهای S هستند، همان ماتریس A در مثال ۲ است. از شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی A، که همان ماتریس B ی مثال ۲ است، می بینیم که ستون های اول، سوم و پنجم A مستقل خطی هستند و ستون های دوم و چهارم A، ترکیباتی خطی از ستون های اول، سوم و پمجم هستند. بنابراین $\{(۲,۱,۲,۳), (۶,۳,۸,۷), (۴,۱,۰,۹)\}$ پایه ای برای زیرفضای تولید شده با S از $\mathbb{R}^۴$ است. در نتیجه:

$$\{۲ + x + ۲x^۲ + ۳x^۳, ۶ + ۳x + ۸x^۲ + ۷x^۳, ۴ + x + ۹x^۳\}$$

پایه ای برای زیرفضای V از $P_۳(\mathbb{R})$ است. □

این بخش را با تشریح روشی برای توسیع یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی از یک فضای برداری متناهی‌البُعد V مانند S، به پایه‌ای برای V به پایان می‌بریم. به یاد بیاورید که طبق قسمت ج از نتیجهٔ ۲ قضیهٔ ۱-۱۰، این کار همیشه ممکن است. روش ما مبتنی بر قضیهٔ ۱-۱۰ است و نیز مبتنی بر این فرض است که می توانیم پایه ای مانند β برای V بیابیم. فرض کنید S' مجموعهٔ مرتب متشکل از بردارهای S به دنبال بردارهای β باشد. چون $\beta \subset S'$، پس مجموعهٔ S'، V را تولید می‌کند. پس می توانیم از روش توصیف شده در بالا برای کاهش دادن این مجموعهٔ مولد به پایه ای برای V شامل S استفاده کنیم.

مثال ۴. فرض کنید

$$V = \{(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵) \in \mathbb{R}^۵ : x_۱ + ۷x_۲ + ۵x_۳ - ۴x_۴ + ۲x_۵ = ۰\}$$

به راحتی می توان بررسی کرد که V زیرفضایی از $\mathbb{R}^{۵}$ است و

$$S = \{(-۲, ۰, ۰, -۱, -۱), (۱, ۱, -۲, -۱, -۱), (-۵, ۱, ۰, ۱, ۱)\}$$

زیر مجموعه ای مستقل خطی از V است.

برای توسیع S به پایه ای برای V، ابتدا پایه ای برای V مانند β به دست می آوریم. برای انجام این کار، دستگاه معادلات خطی‌ای که V را تعریف می کند حل می کنیم. چون در مثال مورد بحث، V تنها با یک معادله تعریف می شود، کافی است معادله را به این صورت بنویسیم:

$$x_۱ = -۷x_۲ - ۵x_۳ + ۴x_۴ - ۲x_۵$$

و مقادیری پارامتری به $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ و $x_۵$ منسوب می کنیم. اگر $x_۲ = t_۱$، $x_۳ = t_۲$، $x_۴ = t_۳$ و $x_۵ = t_۴$ بردارهای V به شکل زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵) &= (-۷t_۱ - ۵t_۲ + ۴t_۳ - ۲t_۴, t_۱, t_۲, t_۳, t_۴)\\ &= t_۱(-۷, ۱, ۰, ۰, ۰) + t_۲(-۵, ۰, ۱, ۰, ۰) + t_۳(۴, ۰, ۰, ۱, ۰)\\ &+ t_۴(-۲, ۰, ۰, ۰, ۱)\end{aligned}$$

بنابراین طبق قضیهٔ ۳-۱۵:

$$\beta = \{(-۷, ۱, ۰, ۰, ۰), (-۵, ۰, ۱, ۰, ۰), (۴, ۰, ۰, ۱, ۰), (-۲, ۰, ۰, ۰, ۱)\}$$

پایه ای برای V است. ماتریسی که ستون های آن بردارهای S و به دنبال آنها بردارهای β اند، عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & -۵ & -۷ & -۵ & ۴ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

و شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی آن چنین است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۰/۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰/۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\{(-۲, ۰, ۰, -۱, -۱), (۱, ۱, -۲, -۱, -۱), (-۵, ۱, ۰, ۱, ۱), (۴, ۰, ۰, ۱, ۰)\}$$

پایه ای برای V شامل S است. □

تمرینات

۱. مشخص کنید که کدام یک از عبارات زیر درست و کدام نادرست است.

الف) اگر $[A'|b']$، با اِعمال دنباله ای متناهی از اعمال مقدماتی ستونی بر $[A|b]$ به دست آید، دو دستگاه $Ax = b$ و $A'x = b'$ معادل خواهند بود.

ب) اگر $[A'|b']$ با اِعمال دنباله ای متناهی از اعمال مقدماتی سطری بر $[A|b]$ به دست آید، دو دستگاه $Ax = b$ و $A'x = b'$ معادلند.

ج) هرگاه A ماتریسی $n \times n$ با رتبهٔ n باشد، شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی A، I_n است.

د) هر ماتریس را می توان از طریق دنباله ای متناهی از اعمال سطری مقدماتی به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی در آورد.

ه) اگر $[A|b]$ به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی باشد، دستگاه $Ax = b$ باید دارای جواب باشد.

و) فرض کنید $Ax = b$ دستگاهی از m معادلهٔ خطی n مجهولی باشد که ماتریس افزودهٔ آن به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی است. اگر این دستگاه دارای جواب باشد، بعد مجموعهٔ جواب های $Ax = ۰$، $n - r$ است که r برابر تعداد سطرهای ناصفر A است.

ز) اگر ماتریس A با اعمال مقدماتی سطری به ماتریس A' که به شکل تحلیل یافتهٔ پلکانی است تبدیل شود، تعداد سطرهای ناصفر A' با رتبهٔ A برابر است.

۲. دستگاه های زیر از معادلات خطی را با استفاده از حذف به روش گاوس حل کنید.

الف)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 5x_2 &= 7 \\ x_1 + 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 6x_4 &= 17 \\ 2x_1 - 7x_3 + 11x_4 &= 7 \end{aligned}$$

د)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= -7 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 6x_4 &= -2 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 10x_4 &= -5 \end{aligned}$$

ه)

$$x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$
\begin{aligned}
&۲x_۱ - ۸x_۲ + x_۳ - ۴x_۴ = ۹\\
&-x_۱ + ۴x_۲ - ۲x_۳ + ۵x_۴ = -۶
\end{aligned}
$$

و)

$$
\begin{aligned}
&x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ + ۳x_۴ = ۲\\
&۲x_۱ + ۴x_۲ - x_۳ + ۶x_۴ = ۵\\
&x_۲ + ۲x_۴ = ۳
\end{aligned}
$$

ز)

$$
\begin{aligned}
&۲x_۱ - ۲x_۲ - x_۳ + ۶x_۴ - ۲x_۵ = ۱\\
&x_۱ - x_۲ + x_۳ + ۲x_۴ - x_۵ = ۲\\
&۴x_۱ - ۴x_۲ + ۵x_۳ + ۷x_۴ - x_۵ = ۶
\end{aligned}
$$

ح)

$$
\begin{aligned}
&۳x_۱ - x_۲ + x_۳ - x_۴ + ۲x_۵ = ۵\\
&x_۱ - x_۲ - x_۳ - ۲x_۴ + x_۵ = ۲\\
&۵x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ - ۳x_۴ + ۳x_۵ = ۱۰\\
&۲x_۱ - x_۲ - ۲x_۴ + x_۵ = ۵
\end{aligned}
$$

ط)

$$
\begin{aligned}
&۳x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ + ۴x_۴ + x_۵ = ۲\\
&x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ + ۳x_۴ + x_۵ = -۱\\
&۲x_۱ - ۳x_۲ + ۶x_۳ + ۹x_۴ + ۴x_۵ = -۵\\
&۷x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳ + ۸x_۴ + x_۵ = ۶
\end{aligned}
$$

ی)

$$\begin{aligned}
&۲x_۱ + ۳x_۳ - ۴x_۵ = ۵\\
&۳x_۱ - ۴x_۲ + ۸x_۳ + ۳x_۴ = ۸\\
&x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ + x_۴ - x_۵ = ۲\\
&-۲x_۱ + ۵x_۲ - ۹x_۳ - ۳x_۴ - ۵x_۵ = -۸
\end{aligned}$$

۳. فرض کنید ماتریس افزودهٔ دستگاه $Ax = b$، با اِعمال دنباله ای متناهی از اعمال سطری مقدماتی، به ماتریس $[A'|b']$ که به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی است تبدیل شود.

الف) ثابت کنید که $\text{rank}(A') \neq \text{rank}([A'|b'])$ اگر و تنها اگر $[A'|b']$ شامل سطری باشد که تنها درایهٔ ناصفرش در ستون آخر واقع است.

ب) نتیجه بگیرید که $Ax = b$ جواب دارد اگر و تنها اگر $[A'|b']$ شامل هیچ سطری که تنها درایهٔ ناصفرش در ستون آخر واقع است، نباشد.

۴. برای هر یک از دستگاه های زیر، تمرین ۳ را برای تعیین این که دستگاه جواب دارد یا خیر به کار گیرید. اگر جوابی وجود داشته باشد، همهٔ جواب ها را بیابید و نهایتاً پایه ای برای دستگاه همگن نظیر پیدا کنید.

الف)

$$\begin{aligned}
&x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ + x_۴ = ۲\\
&۲x_۱ + x_۲ + x_۳ - x_۴ = ۳\\
&x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ + ۲x_۴ = ۲
\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}
&x_۱ + x_۲ - ۳x_۳ + x_۴ = -۲\\
&x_۱ + ۹x_۲ + x_۳ - x_۴ = ۲\\
&x_۱ + x_۲ - x_۳ = ۰
\end{aligned}$$

ج)

$$x_۱ + x_۲ - ۳x_۳ + x_۴ = ۱$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ - x_۴ = ۲$$
$$x_۱ + x_۲ - x_۳ = ۰$$

۵. فرض کنید شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی A به این صورت باشد:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & -۵ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$$

در صورتی که ستون های اول، دوم و چهارم A به صورت زیر باشند، A را پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

۶. فرض کنید شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی A چنین باشد:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۰ & ۴ & ۰ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

A را بیابید، در صورتی که ستون های اول، سوم و ششم A به صورت زیر باشند:

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ -۹ \\ ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۲ \\ -۴ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

۷. می توان ثابت کرد که بردارهای $u_۱ = (۲, -۳, ۱)$، $u_۲ = (۱, ۴, -۲)$، $u_۳ = (-۸, ۱۲, -۴)$، $u_۴ = (۱, ۳۷, -۱۷)$ و $u_۵ = (-۳, -۵, ۸)$، $\mathbb{R}^۳$ را تولید می کنند. زیرمجموعه ای از $\{u_۱, u_۲, u_۳, u_۴, u_۵\}$ بیابید که پایه ای برای $\mathbb{R}^۳$ باشد.

۸. فرض کنید W نشان دهندهٔ زیرفضایی از $\mathbb{R}^5$ باشد که متشکل از همهٔ بردارهایی است که جمع مختصاتشان صفر است. بردارهای

$$\begin{array}{lcl} u_1 = (2, -3, 4, -5, 2) & \text{و} & u_2 = (-6, 9, -12, 15, -6) \\ u_3 = (3, -2, 7, -9, 1) & \text{و} & u_4 = (2, -8, 2, -2, 6) \\ u_5 = (-1, 1, 2, 1, -3) & \text{و} & u_6 = (0, -3, -18, 9, 12) \\ u_7 = (1, 0, -2, 3, -2) & \text{و} & u_8 = (2, -1, 1, -9, 7) \end{array}$$

W را تولید می‌کنند. زیرمجموعه ای از $\{u_1, u_2, \ldots, u_8\}$ بیابید که پایه ای برای W باشد.

۹. فرض کنید W زیرفضایی از $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ باشد که از ماتریس های متقارن 2×2 تشکیل شده است. مجموعهٔ:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

W را تولید می‌کند. زیرمجموعه ای از S بیابید که پایه ای برای W باشد.

۱۰. فرض کنید

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0\}$$

الف) نشان دهید که $S = \{(0, 1, 1, 1, 0)\}$ زیرمجموعه ای مستقل خطی از V است.

ب) S را به پایه ای برای V تعمیم دهید.

۱۱. فرض کنید V، همان زیرفضای V در تمرین ۱۰ باشد.

الف) نشان دهید که $S = \{(1, 2, 1, 0, 0)\}$ زیرمجموعه ای مستقل خطی از V است.

ب) S را به پایه ای برای V تعمیم دهید.

۱۲. فرض کنید V نشان دهندهٔ مجموعه جواب های دستگاه معادلات خطی زیر باشد:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 4x_6 &= 0 \end{aligned}$$

الف) نشان دهید که $S = \{(0, -1, 0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1, 1, 0)\}$ زیرمجموعه ای مستقل خطی از V است.

ب) S را به پایه ای برای V توسیع دهید.

۱۳. فرض کنید V، همان زیرفضای V در تمرین ۱۲ باشد.

الف) نشان دهید که $S = \{(۱, ۰, ۱, ۱, ۱, ۰), (۰, ۲, ۱, ۱, ۰, ۰)\}$ زیرمجموعه ای مستقل خطی از V است.

ب) S را به پایه ای برای V توسیع دهید.

۱۴. هرگاه $[A|b]$ به شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی باشد، ثابت کنید A هم چنین است.

۱۵. نتیجهٔ قضیهٔ ۳-۱۶ را ثابت کنید: شکل تحلیل یافتهٔ سطری پلکانی یک ماتریس، یکتاست

فصل ۴

دترمینان‌ها

مفهوم دترمینان، که نقش بارزی در نظریه جبر خطی داشته است، تابع خاصی با مقادیر اسکالر است که بر مجموعه ماتریس‌های مربعی تعریف شده است. با این که هنوز هم در مطالعه جبر خطی و کاربردهای آن، جایگاهی برای خود دارد، نقش آن به میزان گذشته اساسی نیست. با این حال، هر کتاب جبرخطی، بدون یک بررسی سازمان یافته دترمینان ناکامل خواهد بود. ما دراینجا چنین بررسی‌ای را ارائه خواهیم داد. با وجود این کاربرد اصلی دترمینان در این کتاب، محاسبه و اثبات خصوصیات مقادیر ویژه خواهد بود، که در فصل ۵ به آنها خواهیم پرداخت.

با این که به ازای $n > ۱$ ، دترمینان تبدیلی خطی بر $M_{n\times n}(F)$ نیست، نوعی ویژگی خطی (به نام nخطی بودن) داراست، و خصوصیات دیگری هم دارد که که دراین فصل مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بخش ۴-۱ دترمینان را روی مجموعه ماتریس‌های ۲×۲ مورد بررسی قرار می‌دهیم و خواص اصلی آن را استنتاج می‌کنیم. برای تشریح نقش اساسی دترمینان در هندسه، مطالبی اختیاری هم آورده ایم که به بررسی کاربرد دترمینان در مطالعه مساحت و آرایش می‌پردازد. در بخش‌های ۴-۲ و ۴-۳، مفهوم دترمینان را به همه ماتریس‌های مربعی تعمیم می‌دهیم و خصوصیات و روشهای محاسباتی اصلی را استنتاج می‌کنیم. برای خوانندگانی که ترجیح می‌دهند دترمینان را مختصرتر بررسی کنند، بخش ۴-۴ خصوصیات اصلی ای را که در بخشهای بعد مورد نیاز هستند، در بر دارد. نهایتا، بخش ۴-۵، که اختیاری است، با نشان دادن این که چگونه می‌توان دترمینان را بر حسب سه خاصیت اصلی مشخص کرد، برخوردی اصل موضوعی را با دترمینان ارائه می‌دهد.

۴-۱ دترمینان‌های مرتبه ۲

در این بخش، دترمینان ۲×۲ را بررسی کرده، معنی آرایش هندسی آن را در قالب مساحت و آریش مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف:. هرگاه

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

یک ماتریس ۲×۲ باشد که درایه‌های آن در میدان F قرار دارند، دترمینان A را که با $\det(A)$ یا $|A|$ نشان می‌دهیم، برابر با اسکالر $ad - bc$ تعریف می‌کنیم.

مثال ۱. برای دو ماتریس زیر در $M_{۲\times۲}(\mathbb{R})$

$$B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۶ & ۴ \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

داریم:

$$det(B) = ۳ \cdot ۴ - ۲ \cdot ۶ = ۰ \qquad \det(A) = ۱ \cdot ۴ - ۲ \cdot ۳ = -۲$$

برای دو ماتریس A و Bی مثال ۱، داریم:

$$A + B = \begin{bmatrix} ۴ & ۴ \\ ۹ & ۸ \end{bmatrix}$$

و بنابراین $\det(A+B) = ۴ \cdot ۸ - ۴ \cdot ۹ = -۴$.

چون $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$، تابع $\det : M_{۲\times۲}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ تبدیل خطی نیست. با این حال، دترمینان خاصیت مهمی دارد که در حکم زیر توضیح داده شده است.

حکم ۴.۱. تابع $\det : M_{۲\times۲}(F) \to F$ ، تابعی خطی از هر یک از سطرهای یک ماتریس ۲×۲ است، هنگامی که یک سطر ثابت نگه داشته شود. یعنی اگر u، v و w اعضایی از $F^۲$ بوده و k یک اسکالر باشد آنگاه:

$$\det \begin{bmatrix} u + kv \\ w \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} + k \det \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

و

$$\det \begin{bmatrix} w \\ u + kv \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} + k \det \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$$

برهان. فرض کنید $u = (a_۱, a_۲)$، $v = (b_۱, b_۲)$ و $w = (c_۱, c_۲)$ اعضایی از $F^۲$ و k یک اسکالر باشد. در این صورت:

$$\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} + k\det\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{bmatrix} + k\det\begin{bmatrix} b_۱ & b_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{bmatrix} \\
&= (a_۱c_۲ - a_۲c_۱) + k(b_۱c_۲ - b_۲c_۱) \\
&= (a_۱ + kb_۱)c_۲ - (a_۲ + kb_۲)c_۱ \\
&= \det\begin{bmatrix} a_۱ + kb_۱ & a_۲ + kb_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} u + kv \\ w \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

محاسبه‌ای مشابه نشان می‌دهد که:

$$\det\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} + k\det\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} w \\ u + kv \end{bmatrix}$$

□

برای دو ماتریس ۲ × ۲ی A و B در مثال ۱ به راحتی می‌توان بررسی کرد که A وارون پذیر است و B وارون پذیر نیست. نوجه داشته باشید که $\det(A) \neq ۰$ ولی $\det(B) = ۰$. حال نشان می‌دهیم که این خصوصیت در حالت کلی هم درست است.

حکم ۲.۴. فرض کنید $A \in M_{۲\times۲}(F)$،

الف) دترمینان A ناصفر است اگر و تنها اگر A وارون پذیر باشد.

ب) به علاوه اگر A وارون پذیر باشد، آنگاه:

$$A^{-۱} = [\det(A)]^{-۱}\begin{bmatrix} A_{۲۲} & -A_{۱۲} \\ -A_{۲۱} & A_{۱۱} \end{bmatrix}$$

برهان. الف) اگر $\det(A) \neq ۰$، می‌توانیم ماتریس M را چنین تعریف کنیم:

$$M = [\det(A)]^{-۱}\begin{bmatrix} A_{۲۲} & -A_{۱۲} \\ -A_{۲۱} & A_{۱۱} \end{bmatrix}$$

با محاسبه می‌توان نشان داد که $AM = MA = I$ و بنابراین A وارون پذیر است و $M = A^{-۱}$.

برعکس فرض کنید A وارون پذیر باشد. با مراجعه به صفحه ۱۶۶ در می‌یابیم که رتبه:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

باید ۲ باشد.بنابراین $A_{11} \neq 0$ یا $A_{21} \neq 0$. اگر $A_{11} \neq 0$، $-A_{21}/A_{11}$ برابر سطر اول A را به سطر دوم بیفزایید، تا ماتریس زیر به دست آید:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - \frac{A_{12}A_{21}}{A_{11}} \end{bmatrix}$$

چون اعمال سطری مقدماتی طبق نتیجه قضیه ۴.۳، حافظ رتبه هستند، نتیجه می‌شود که

$$A_{22} - \frac{A_{12}A_{21}}{A_{11}} \neq 0$$

بنابراین $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \neq 0$. از طرف دیگر اگر $A_{21} \neq 0$، با افزودن $-\frac{A_{11}}{A_{21}}$ برابر سطر دوم A به سطر اول و به کارگیری استدلالی مشابه، می‌بینیم که $\det(A) \neq 0$. پس در هر دو حالت $\det(A) \neq 0$.

ب) اثبات ب در بند اول برهان الف آمده است. □

در بخش‌های ۴-۲ و ۴-۳، دترمینان را به ماتریس‌های $n \times n$ تعمیم می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که حکم ۲-۴الف در این حالت کلی تر نیز درست باقی می‌ماند. در ادامه این بخش، که می‌توان آن را در صورت تمایل حذف کرد، معنی هندسی دترمینان یک ماتریس 2×2 را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به خصوص، اهمیت علامت دترمینان را در مطالعه آرایش مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مساحت یک متوازی الاضلاع

منظورمان از زاویه بین دو بردار در $\mathbb{R}^2$، زاویه‌ای به اندازه θ است ($0 \leq \theta \leq \pi$) که دو برداری که همان اندازه‌ها و جهت‌های بردارهای مورد نظر را دارند، اما از مبدا شروع می‌شوند، تشکیل می‌دهند (به شکل ۴-۱ رجوع کنید).

هرگاه $\beta = \{u, v\}$ پایه مرتبی برای $\mathbb{R}^2$ باشد، منظور از آرایش β ، عدد حقیقی زیر است:

$$O\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{\det\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}{\left|\det\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right|}$$

(طبق حکم ۴-۲، مخرج این کسر نا صفر است). به وضوح:

$$O\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \pm ۱$$

توجه کنید که:

$$O\begin{bmatrix} e_۱ \\ -e_۲ \end{bmatrix} = -۱, \qquad O\begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \end{bmatrix} = ۱$$

به یاد داشته باشید که دستگاه $\{u, v\}$ را **راستگرد** گویند، هرگاه u را بتوان در جهت پادساعتگرد، به میزان زاویه θای ($۰ < \theta < \pi$)، چرخش داد تا با v بر یک خط قرار گیرد. در غیر این صورت $\{u, v\}$ دستگاهی چپگرد نامیده می‌شود (به شکل ۴-۲ رجوع کنید). در حالت کلی

$$O\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = ۱$$

اگر و تنها اگر پایه مرتب $\{u, v\}$ دستگاه مختصات راستگردی را تشکیل دهد (به تمرین ۱۲ رجوع کنید). همچنین برای راحتی، هر وقت u و v وابسته خطی هم باشند، تعریف می‌کنیم:

$$O\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = ۱$$

هر مجموعه مرتب مانند $\{u, v\}$ در $\mathbb{R}^۲$، به طریقه زیر یک متوازی الاضلاع تعریف می‌کند. اگر u و v را پیکان‌هایی در نظر بگیریم که از مبدا $\mathbb{R}^۲$ خارج می‌شوند، متوازی الااضلاعی را که u و v اضلاع مجاور آن هستند، متوازی الاضلاعی که u و v مشخص می‌کنند، می‌نامیم (به شکل ۴-۳ رجوع کنید). توجه کنید که اگر مجموعه $\{u, v\}$ وابسته خطی باشند یعنی اگر u و v موازی باشند، متوازی الاضلاعی که u و v مشخص می‌کنند، در اصل یک پاره خط خواهد بود، که آن را متوازی الاضلاعی ناقص و با مساحت ۰ در نظر می‌گیریم.

میان مساحت متوازی الاضلاعی که u و v مشخص می‌کنند، یعنی:

$$A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

و

$$\det\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

رابطه جالبی وجود دارد که اکنون به بررسی آن می‌پردازیم. ابتدا توجه کنید که $\det\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ ممکن است منفی باشد و بنابراین

نباید انتظار داشته باشیم که:

$$A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

با این حال می‌توانیم ثابت کنیم که:

$$A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = O\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \det\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = |\det\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}|$$

استدلالی را که برای اثبات رابطه زیر به کار می‌بریم،

$$A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = O\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} . \det\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

می‌توان به گونه‌ای هرچند غیر مستقیم، به $\mathbb{R}^n$ تعمیم داد.

اولاً، چون

$$O\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \pm ۱$$

می‌توانیم دو طرف رابطه مطلوب را در $O\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ ضرب کنیم تا شکل معادله به صورت زیر درآید:

$$O\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} .A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

برای اثبات این معادله، سه شرط ذکر شده در تمرین ۱۱ را برای تابع زیر بررسی می‌کنیم:

$$\delta\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = O\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} .A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

الف) با اثبات این مطلب شروع می‌کنیم که برای هر عدد حقیقی λ،

$$\delta\begin{bmatrix} u \\ \lambda v \end{bmatrix} = \lambda.\delta\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

توجه کنید که اگر $\lambda = 0$، بلافاصله این نتیجه به دست می‌آید، چرا که

$$\delta\begin{bmatrix} u \\ \lambda v \end{bmatrix} = O\begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}.A\begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 = 0$$

پس فرض کنید $\lambda \neq 0$. λv را به عنوان قاعده متوازی الاضلاعی که u و λv مشخص می‌کنند در نظر می‌گیریم و ملاحظه می‌کنیم که

$$A\begin{bmatrix} u \\ \lambda v \end{bmatrix} = \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = |\lambda|(v \text{ طول})(\text{ارتفاع}) = |\lambda| \cdot A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

چرا که ارتفاع متوازی الاضلاعی که u و λv مشخص می‌کنند، h، همان ارتفاع متوازی الاضلاعی است که u و v مشخص می‌کنند (به شکل ۴-۴ رجوع کنید). بنابراین:

$$\begin{aligned} \delta\begin{bmatrix} u \\ \lambda v \end{bmatrix} &= O\begin{bmatrix} u \\ \lambda v \end{bmatrix}.A\begin{bmatrix} u \\ \lambda v \end{bmatrix} = \left(\frac{\lambda}{|\lambda|}.O\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right)\left(|\lambda|.A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda O\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \lambda\delta.\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که

$$\delta\begin{bmatrix} \lambda u \\ v \end{bmatrix} = \lambda\delta\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

به عنوان مرحله بعدی ثابت می‌کنیم که برای هر $w, , v \in \mathbb{R}^2$ و هر دو عدد حقیقی a, b

$$\delta\begin{bmatrix} u \\ au + bw \end{bmatrix} = b \cdot \delta\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

ملاحظه کنید که چون دو متوازی الاضلاعی که u و w از یک طرف، و u و $u + w$ از طرف دیگر تولید می‌کنند، دارای قاعده مشترک u هستند و ارتفاع آنها یکی است (به شکل ۴-۵ رجوع کنید)، داریم:

$$A\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} u \\ u + w \end{bmatrix}$$

پس هرگاه $a = 0$، آنگاه طبق بند اول قسمت الف،

$$\delta\begin{bmatrix} u \\ au + bw \end{bmatrix} = \delta\begin{bmatrix} u \\ bw \end{bmatrix} = b.\delta\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

و در غیر این صورت، اگر $a \neq 0$،

$$\delta\begin{bmatrix} u \\ au+bw \end{bmatrix} = a\cdot\delta\begin{bmatrix} u \\ u+\frac{b}{a}w \end{bmatrix} = a.\delta\begin{bmatrix} u \\ \frac{b}{a}w \end{bmatrix} = b.\delta\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

پس نتیجه مطلوب در هر دو صورت به دست می‌آید.

حال قادریم که برای هر $u, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$،

$$\delta\begin{bmatrix} u \\ v_1+v_2 \end{bmatrix} = \delta\begin{bmatrix} u \\ v_1 \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} u \\ v_2 \end{bmatrix}$$

چون نتیجه در حالتی که $u = 0$، فوراً حاصل می‌شود، فرض کنید $u \neq 0$. بردار دلخواه $w \in \mathbb{R}^2$ را طوری انتخاب کنید که $\{u, w\}$ مستقل خطی باشند. در این صورت، به ازای هر دو بردار $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$، اسکالرهای a_i و b_i یافت می‌شوند که $v_i = a_i u + b_i w$، $i = 1, 2$. بنابراین:

$$\begin{aligned}
\delta\begin{bmatrix} u \\ v_1+v_2 \end{bmatrix} &= \delta\begin{bmatrix} u \\ (a_1+a_2)u+(b_1+b_2)w \end{bmatrix} = (b_1+b_2)\delta\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \\
&= \delta\begin{bmatrix} u \\ a_1u+b_1w \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} u \\ a_2u+b_2w \end{bmatrix} = \delta\begin{bmatrix} u \\ v_1 \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} u \\ v_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که برای هر $u_1, u_2, v \in \mathbb{R}^2$ ،

$$\delta\begin{bmatrix} u_1+u_2 \\ v \end{bmatrix} = \delta\begin{bmatrix} u_1 \\ v \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} u_2 \\ v \end{bmatrix}$$

ب) برای هر $u \in \mathbb{R}^2$، از آنجا که

$$A\begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix} = 0$$

داریم

$$\delta\begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix} = O\begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix}.A\begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix} = 0$$

ج) چون متوازی الاضلاعی که e_1 و e_2 مشخص می‌کنند، مربع واحد است،

$$\delta\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = O\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}.A\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = 1\cdot 1 = 1$$

بنابراین δ در سه شرط مشخص شده در تمرین ۱۱ صدق می‌کند و بنابراین $\delta = \det$. پس مساحت متوازی الاضلاعی که u و v مشخص می‌کنند برابر است با:

$$O\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \det\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

به عنوان مثال، می‌بینیم که مساحت متوازی الاضلاعی که $u = (-۱, ۵)$ و $v = (۴, -۲)$ مشخص می‌کنند، عبارت است از:

$$|\det\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}| = |\det\begin{bmatrix} -۱ & ۵ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix}| = ۱۸$$

تمرینات

۱. تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) تابع $det : M_{۲\times۲}(F) \to F$ یک تبدیل خطی است.

ب) دترمینان یک ماتریس ۲ × ۲، تبدیلی خطی از هر یک از دو سطر آن ماتریس است هنگامی که سطر دیگر ثابت نگه داشته شود.

ج) اگر $A \in M_{۲\times۲}(F)$ و $\det(A) = ۰$ آنگاه A وارون پذیر است.

د) اگر u و v بردارهایی در $\mathbb{R}^۲$ باشند که از مبدا خارج می‌شوند، مساحت متوازی الاضلاعی که u و v اضلاع مجاور آن هستند، عبارت است از:

$$\det\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

ه) یک دستگاه مختصات راستگرد است، اگر و تنها اگر آرایش آن مساوی با ۱ باشد.

۲. دترمینان هر یک از اعضای زیر از $M_{۲\times۲}(\mathbb{R})$ را حساب کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۸ & ۰ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$، ب) $\begin{bmatrix} -۵ & ۲ \\ ۶ & ۱ \end{bmatrix}$، ج) $\begin{bmatrix} ۶ & -۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$

۳. هر یک از دترمینان‌های زیر از $M_{۲\times۲}(\mathbb{C})$ را حساب کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۲i & ۳ \\ ۴ & ۶i \end{bmatrix}$، ب) $\begin{bmatrix} ۵-۲i & ۶+۴i \\ -۳+i & ۷i \end{bmatrix}$، ج) $\begin{bmatrix} -۱+i & ۱-۴i \\ ۳+۲i & ۲-۳i \end{bmatrix}$

۴. به ازای هر جفت از بردارهای u و v در $\mathbb{R}^۲$، مساحت متوازی الااضلاعی را که u و v مشخص می‌کنند، محاسبه کنید.

الف) $u = (۳, -۲)$ و $v = (۲, ۵)$.

ب) $u = (۱, ۳)$ و $v = (-۳, ۱)$.

ج) $u = (۴, -۱)$ و $v = (-۶, -۲)$.

د) $u = (۳, ۴)$ و $v = (۲, -۶)$.

۵. ثابت کنید که اگر B ماتریسی باشد که از تعویض سطرهای ماتریس ۲×۲ی A به دست می‌آید، $\det(B) = -\det(A)$.

۶. ثابت کنید که اگر دو ستون $A \in M_{۲\times۲}(F)$ یکسان باشند، آنگاه $det(A) = ۰$.

۷. ثابت کنید برای هر $A \in M_{۲\times۲}(F)$، $\det(A^t) = \det(A)$.

۸. ثابت کنید که اگر $A \in M_{۲\times۲}(F)$ بالا مثلثی باشد، $\det(A)$ برابر حاصلضرب درایه‌های قطری A است.

۹. ثابت کنید که برای هر $A, B \in M_{۲\times۲}(F)$ داریم:

$$\det(AB) = \det(A).\det(B)$$

۱۰. منظور از **الحاقی کلاسیک** ماتریس $A \in M_{۲\times۲}(F)$، ماتریس زیر است:

$$C = \begin{bmatrix} A_{۲۲} & -A_{۱۲} \\ -A_{۲۱} & A_{۱۱} \end{bmatrix}$$

ثابت کنید:

الف) $CA = AC = (\det(A))I$.

ب) $\det(C) = \det(A)$.

ج) الحاقی کلاسیک A^t، C^t است.

د) اگر A وارون پذیر باشد، آنگاه $A^{-۱} = (\det(A))^{-۱}C$.

۱۱. فرض کنید $\delta : M_{۲\times۲}(F) \to F$ تابعی با سه خاصیت زیر باشد:

الف) δ تابعی خطی از هر یک از دو سطر ماتریس است، هنگامی که سطر دیگر ثابت نگه داشته شده باشد.

ب) اگر دو سطر $A \in M_{۲\times۲}(F)$ یکسان باشد، آنگاه $\delta(A) = ۰$.

ج) اگر I ماتریس همانی ۲×۲ باشد، $\delta(I) = ۱$.

ثابت کنید برای هر $A \in M_{۲\times۲}(F)$، $\delta(A) = \det(A)$ (این نتیجه در بخش ۴-۵، تعمیم داده خواهد شد).

۱۲. فرض کنید $\{u, v\}$ پایه‌ای مرتب برای $\mathbb{R}^۲$ باشد، ثابت کنید:

$$O\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = ۱$$

اگر و تنها اگر دستگاه مختصاتی که $\{u, v\}$ تشکیل می‌دهند راستگرد باشد (راهنمایی از تعریف دوران در مثال ۲ بخش ۲-۱ استفاده کنید).

۲-۴ دترمینان‌های مرتبه n

در این بخش، تعریف دترمینان را به ماتریس‌های $n \times n$ به ازای $n \geq ۳$ تعمیم می‌دهیم. به کار گیری نمادگذاری زیر این تعریف را ساده تر می‌کند. هرگاه $A \in M_{n\times n}(F)$ که $n \geq ۲$، مفروض باشد، $\tilde{A}_{ij}$ را ماتریس $(n-۱)\times(n-۱)$ای تعریف می‌کنیم که از حذف سطر iام و ستون jام A به دست می‌آید. بنابراین برای

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} \in M_{۳\times ۳}(\mathbb{R})$$

داریم:

$$\widetilde{A}_{۳۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}, \widetilde{A}_{۱۳} = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۷ & ۸ \end{bmatrix}, \widetilde{A}_{۱۱} = \begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ ۸ & ۹ \end{bmatrix}$$

و برای

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & -۱ \\ -۳ & ۴ & ۱ & -۱ \\ ۲ & -۵ & -۳ & ۸ \\ -۲ & ۶ & -۴ & ۱ \end{bmatrix} \in M_{۴\times ۴}(\mathbb{R})$$

داریم:

$$\widetilde{B}_{۴۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ -۳ & ۱ & -۱ \\ ۲ & -۳ & ۸ \end{bmatrix}, \widetilde{B}_{۲۳} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ \\ ۲ & -۵ & ۸ \\ -۲ & ۶ & ۱ \end{bmatrix}$$

چند تعریف : فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$. اگر $n = ۱$، به طوری که $A = [A_{۱۱}]$، $\det(A)$ را $A_{۱۱}$ تعریف می‌کنیم. اگر $n \geq ۲$، $\det(A)$ را به طریق بازگشتی و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\det(A) = \sum_{j=۱}^{n} (-۱)^{۱+j} A_{۱j}.det(\tilde{A_{۱j}})$$

اسکالر $(\det A)$، **دترمینان** A نام دارد و آن را با $|A|$ هم نشان می‌دهند. اسکالر زیر
$$(-۱)^{i+j}\det(\tilde{A_{ij}})$$

همسازه درایه سطر iام، ستون jام A نام دارد.

هرگاه
$$c_{ij} = (-۱)^{i+j}\det(\tilde{A_{ij}})$$

نشانگر همسازه سطر iام، ستون jام A باشد، می‌توانیم فرمول دترمینان A را به صورت زیر بیان کنیم:
$$\det(A) = A_{۱۱}c_{۱۱} + A_{۱۲}c_{۱۲} + ... + A_{۱n}c_{۱n}$$

بنابراین دترمینان A برابر با مجموع حاصلضرب‌های هر یک از درایه‌های سطر اول A، در همسازه اش است. این فرمول را بسط همسازه‌ای نسبت به سطر اول A می‌نامند. توجه کنید که برای ماتریس‌های ۲ × ۲، این تعریف از دترمینان A، با تعریف بخش ۴-۱ معادل است، چرا که
$$\det(A) = A_{۱۱}(-۱)^{۱+۱}\det(\tilde{A}_{۱۱}) + A_{۱۲}(-۱)^{۱+۲}\det(\tilde{A}_{۱۲}) = A_{۱۱}A_{۲۲} - A_{۱۲}A_{۲۱}$$

مثال ۱. فرض کنید:
$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۳ \\ -۳ & -۵ & ۲ \\ -۴ & ۴ & -۶ \end{bmatrix} \in M_{۳\times۳}(\mathbb{R})$$

با بسط هم سازه‌ای نسبت به سطر اول A، داریم:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-۱)^{۱+۱}A_{۱۱}.\det(\widetilde{A}_{۱۱}) + (-۱)^{۱+۲}A_{۱۲}.\det(\widetilde{A}_{۱۲}) + (-۱)^{۱+۳}A_{۱۳}.\det(\widetilde{A}_{۱۳}) \\
&= (-۱)^{۲}(۱).\det\begin{bmatrix} -۵ & ۲ \\ ۴ & -۶ \end{bmatrix} + (-۱)^{۳}(۳).\det\begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ -۴ & -۶ \end{bmatrix} \\
&+ (-۱)^{۴}(-۳).\det\begin{bmatrix} -۳ & -۵ \\ -۴ & ۴ \end{bmatrix} \\
&= ۱[-۵(-۶) - ۲(۴)] - ۳[-۳(-۶) - ۲(-۴)] - ۳[-۳(۴) - (-۵)(-۴)] \\
&= ۱(۲۲) - ۳(۲۶) - ۳(-۳۲) \\
&= ۴۰
\end{aligned}$$

مثال ۲. فرض کنید:
$$B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ -۲ & -۳ & -۵ \\ ۴ & -۴ & ۴ \end{bmatrix} \in M_{۳\times۳}(\mathbb{R})$$

با بسط همسازه‌ای نسبت به سطر اول B، داریم:

$$\begin{aligned}
\det(B) &= (-۱)^{۱+۱}B_{۱۱}.\det(\widetilde{B}_{۱۱}) + (-۱)^{۱+۲}B_{۱۲}.\det(\widetilde{B}_{۱۲}) + (-۱)^{۱+۳}B_{۱۳}.\det(\widetilde{B}_{۱۳}) \\
&= (-۱)^{۲}(۰).\det\begin{bmatrix} -۳ & -۵ \\ -۴ & -۴ \end{bmatrix} + (-۱)^{۳}(۱).\det\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix} \\
&+ (-۱)^{۴}(۳).\det\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۴ & -۴ \end{bmatrix} \\
&= ۰ - ۱[-۲(۴) - (-۵)(۴)] + ۳[-۲(-۴) - (-۳)(۴)] \\
&= ۰ - ۱(۱۲) + ۳(۲۰) \\
&= ۴۸
\end{aligned}$$

مثال ۳. فرض کنید

$$C = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ & -۳ \\ -۲ & -۳ & -۵ & ۲ \\ ۴ & -۴ & ۴ & -۶ \end{bmatrix} \in M_{۴\times۴}(\mathbb{R})$$

با استفاده از بسط همسازه‌ای نسبت به سطر اول C و با به کارگیری نتایج مثال‌های ۱ و ۲، داریم:

$$\begin{aligned}
\det(C) &= (-۱)^{۱+۱}(۲).\det(\widetilde{C}_{۱۱}) + (-۱)^{۱+۲}(۰).\det(\widetilde{C}_{۱۲}) + \\
(& -۱)^{۱+۳}(۰).\det(\widetilde{C}_{۱۳}) + (-۱)^{۱+۴}(۱).\det(\widetilde{C}_{۱۴}) \\
&= (-۱)^{۱+۱}(۲).\det\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۳ \\ -۳ & -۵ & ۲ \\ -۴ & ۴ & -۶ \end{bmatrix} + ۰ + ۰ \\
&+ (-۱)^{۱+۴}(۱).\det\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ -۲ & -۳ & -۵ \\ ۴ & -۴ & ۴ \end{bmatrix} \\
&= ۲(۴۰) + ۰ + ۰ - ۱(۴۸) \\
&= ۳۲
\end{aligned}$$

مثال ۴. دترمینان ماتریس همانی $n \times n$، ۱ است. این ادعا را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. نتیجه به وضوح برای ماتریس همانی ۱×۱ برقرار است. فرض کنید که دترمینان ماتریس همانی $(n-۱) \times (n-۱)$، به ازای $n \geq ۲$ای ۱ باشد و فرض کنید I نشان دهنده ماتریس همانی $n \times n$ باشد. با استفاده از بسط همسازه‌ای نسبت به سطر اول I، داریم:

$$\begin{aligned}
\det(I) &= (-۱)^{۲}(۱).\det(\widetilde{I}_{۱۱}) + (-۱)^{۳}(۰).\det(\widetilde{I}_{۱۲}) + ... \\
&+ (-۱)^{۱+n}(۰).\det(\widetilde{I}_{۱n}) \\
&= ۱(۱) + ۰ + ... + ۰ \\
&= ۱
\end{aligned}$$

چراکه $\widetilde{I}_{۱۱}$ همان ماتریس همانی $(n-۱) \times (n-۱)$ است. این بحث نشان می‌دهد که دترمینان ماتریس همانی $n \times n$، ۱ است و بنابراین طبق اصل استقرای ریاضی، دترمینان ماتریس همانی ۱ است.

همان طور که مثال ۳ نشان می‌دهد، محاسبه یک دترمینان از طریق بازگشتی بالا، حتی برای ماتریسی با اندازه کوچک ۴×۴، بسیار خسته کننده است. بعداً در این بخش، روشی کاراتر برای محاسبه دترمینان‌ها معرفی می‌کنیم، اما ابتدا باید بیشتر در مورد آنها بیاموزیم.

با توجه به حکم ۴-۱ می‌توان چنین استنباط کرد که دترمینان ۲×۲ تبدیل خطی نیست، بلکه تبدیلی خطی از هر سطر است وقتی که سطر دیگر ثابت باشد. حال نشان می‌دهیم که ماتریس‌های هر اندازه‌ای دارای خاصیتی مشابه هستند.

قضیه ۳.۴. دترمینان یک ماتریس $n \times n$ ، تابعی خطی از هر سطر است، وقتی که مابقی سطرها ثابت باشند. یعنی برای هر $r = ۱, ۲, ...n$، اگر k یک اسکالر و u و v و هر یک از a_iها عضوی از F^n باشند، داریم:

$$\det\begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_{r-۱} \\ u+kv \\ a_{r+۱} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_{r-۱} \\ u \\ a_{r+۱} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + k\det\begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_{r-۱} \\ v \\ a_{r+۱} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

برهان. برهان به استقرا بر n است. اگر $n = ۱$، نتیجه بلافاصله حاصل می‌شود. فرض کنید که به ازای عدد صحیحی مانند $n \geq ۲$، دترمینان هر ماتریس $(n-۱) \times (n-۱)$، تابعی خطی از هر سطر، هنگامی که سایر سطرها ثابتند، باشد و فرض کنید A ماتریسی $n \times n$باشد که سطرهایش به ترتیب $a_۱, a_۲, ...a_r$ هستند. فرض کنید به ازای rای $(۱ \leq r \leq n)$،

$u, v \in F^n$ و اسکالری چون k وجود داشته باشند به گونه‌ای که $a_r = u + kv$. فرض کنید $u = (b_1, b_2, ..., b_n)$ و $v = (c_1, c_2, ..., c_n)$، و B و C ماتریس‌هایی باشند که از تعویض سطر rام A به ترتیب با u و v حاصل می‌شوند. باید ثابت کنیم که $\det(A) = \det(B) + k\det(C)$. اثبات این مطلب را در حالت $r = 1$ به عهده خواننده می‌گذاریم. در صورتی که $r > 1$ و $1 \leq g_j \leq m$، سطرهای $\tilde{A}_{1j}, \tilde{B}_{1j}$ و $\tilde{C}_{1j}$، به جز سطر $r - 1$ام، یکی هستند. به علاوه سطر $r - 1$ام $\tilde{A}_{1j}$ عبارت است از

$$(b_1 + kc_1, ..., b_{j-1} + kc_{j-1}, b_{j+1} + kc_{j+1}, ..., b_n + kc_n)$$

که برابر مجموع سطر $r-1$ام $\tilde{B}_{1j}$، و k برابر سطر $r-1$ام $\tilde{C}_{1j}$ است چون $\tilde{B}_{1j}$ و $\tilde{C}_{1j}$ ماتریس‌های $(n-1) \times (n-1)$ هستند، طبق فرض استقرا داریم

$$\det(\tilde{A}_{1j}) = \det(\tilde{B}_{1j}) + k\det(\tilde{C}_{1j})$$

پس چون $A_{1j} = B_{1j} = C_{1j}$، داریم

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} A_{1j}. \det(\tilde{A}_{1j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} A_{1j}.[\det(\tilde{B}_{1j}) + k\det(\tilde{C}_{1j})]) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} A_{1j}. \det(\tilde{B}_{1j}) + k\sum_{j=1}^{n} (1)^{1+j} A_{1j}. \det(\tilde{C}_{1j}) \\
&= \det(B) + k\det(c)
\end{aligned}$$

و این نشان می‌دهد که قضیه برای ماتریس‌های $n \times n$ درست است و بنابراین طبق اصل استقرای ریاضی، قضیه برای همه ماتریس‌های مربعی درست است. □

نتیجه ۱. اگر $A \in M_{n \times n}(F)$ دارای سطری باشد که فقط شامل صفر است، آنگاه $\det(A) = 0$

برهان. به عهده خواننده. □

تعریف دترمینان اقتضا می‌کند که دترمینان یک ماتریس، با بسط همسازه‌ای نسبت به سطر اول محاسبه شود. قضیه بعدی نشان می‌دهد که دترمینان یک ماتریس را می‌توان با بسط همسازه‌ای نسبت به هر سطری محاسبه کرد. برهان آن به نتیجه فنی زیر نیاز دارد.

لم ۵. فرض کنید $B \in M_{n\times n}(F)$ که $n \geq ۲$. اگر سطر iام B به ازای kای $(۱ \leq k \leq n)$ مساوی با e_k باشد، در این صورت $\det(B) = (-۱)^{i+k} \det(\tilde{B}_{ik})$.

برهان. برهان به استقراء بر n صورت می‌گیرد. برای $n = ۲$، لم به راحتی ثابت می‌شود. فرض کنید که به ازای عدد صحیح $n \geq ۳$ای، لم برای ماتریس‌های $(n-۱) \times (n-۱)$ درست باشد و B ماتریسی $n \times n$ باشد که سطر iام آن به ازای kای $(۱ \leq k \leq n)$برابر e_k باشد. اگر $i = ۱$، نتیجه بلافاصله از تعریف دترمینان به دست می‌آید. بنابراین فرض کنید $۱ \leq i \leq n$ که برای هر $j \neq k$، $(۱ \leq j \leq n)$ فرض کنید C_{ij} نشان دهنده ماتریس $(n-۲) \times (n-۲)$ای باشد که با حذف سطرهای اول و iام و ستون‌های jام و kام به دست می‌آید. برای هر j، سطر $i-۱$ام $\tilde{B}_{۱j}$ بردار زیر از $F^{n-۱}$ است:

$$\begin{cases} e_{k-۱} & j < k \\ ۰ & j = k \\ e_k & j > k \end{cases}$$

در نتیجه طبق فرض استقرای و نتیجه ۳-۴، داریم:

$$\det(\widetilde{B}_{۱j}) = \begin{cases} (-۱)^{(i-۱)+(k-۱)} \det(C_{ij}) & j < k \\ ۰ & j = k \\ (-۱)^{(۱-j)+k} \det(C_{ij}) & j > k \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{j=۱}^{n} (-۱)^{۱+j} B_{۱j}.\det(\widetilde{B}_{۱j}) \\
&= \sum_{j<k}^{n} (-۱)^{۱+j} B_{۱j}.\det(\widetilde{B}_{۱j}) + \sum_{j>k}^{n} (-۱)^{۱+j} B_{۱j}.\det(\widetilde{B}_{۱j}) \\
&= \sum_{j<k} (-۱)^{۱+j} B_{۱j}.[(۱)^{(i-۱)+(k-۱)} \det(C_{ij})] \\
&+ \sum_{j>k} (-۱)^{۱+j} B_{۱j}.[(-۱)^{(i-۱)+k} \det(C_{ij})] \\
&= (-۱)^{i+k}[\sum_{j<k} (-۱)^{۱+j} B_{۱j}.\det(C_{ij}) \\
&+ \sum_{j>k} (-۱)^{۱+(j-۱)} B_{۱j}.\det(C_{ij})]
\end{aligned}$$

چون عبارت داخل براکت فوق ، همان بسط همسازه‌ای $\tilde{B}_{ik}$ نسبت به سطر اول است، نتیجه می‌شود که
$$\det(B) = (-1)^{i+k}.\det(\widetilde{B}_{ik})$$

و این نشان می‌دهد که لم برای ماتریس‌های $n \times n$ نیز درست است و بنابراین طبق اصل استقراء ریاضی، لم برای همه ماتریس‌های مربعی برقرار است. □

حال توانایی آن را داریم که نشان دهیم بسط همسازه‌ای نسبت به هر سطری را می‌توان برای محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی به کار برد.

قضیه ۴.۴. دترمینان یک ماتریس مربعی را می‌توان با بسط همسازه‌ای نسبت به هر سطری محاسبه کرد. یعنی اگر $A \in M_{n\times n}(F)$ ، آنگاه برای هر عدد صحیح i، $(1 \le i \le n)$:
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij}.\det(\widetilde{A}_{ij})$$

برهان. بسط هم سازه‌ای نسبت به سطر اول A، دترمینان A را به ما می‌دهد. بنابراین نتیجه در صورتی که $i=1$ باشد درست است. $i>1$ را تثبیت کنید. سطر iام را می‌توان به صورت $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}e_j$ نوشت. برای هر $j = 1, 2, ..., n$، فرض کنید B_j نشان دهنده ماتریسی باشد که از جانشینی سطر iام A با e_j حاصل می‌شود. در این صورت طبق قضیه ۴-۳ و لم قبل داریم:
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}.\det(B_j) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij}.\det(\widetilde{A}_{ij})$$

□

نتیجه: اگر $A \in M_{n\times n}$ دارای دو سطر یکسان باشد، آنگاه $\det(A) = 0$.

برهان. اثبات به استقراء ریاضی روی n صورت می‌گیرد. در حالتی که $n=2$، ارائه برهان را به خواننده واگذار می‌کنیم. فرض کنید که برای عدد صحیح $n \ge 3$ ای، نتیجه برای همه ماتریس‌های $(n-1)\times(n-1)$ درست باشد و فرض کنید که به ازای $r \ne s$ سطر rام و s ام $A \in M_{n\times n}$ یکسان باشد. چون $n \ge 3$ می‌توانیم عدد صحیح i $(1 \le i \le n)$ را متفاوت با r و s اختیار کنیم. حال طبق قضیه ۴-۴،
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij}.\det(\tilde{A}_{ij})$$

چون هر یک از $\tilde{A}_{ij}$ها ماتریس $n\times n$ با دو سطر یکسان است، فرض استقرا نتیجه می‌دهد که $\det(\tilde{A}_{ij}) = 0$ و در نتیجه $\det(A) = 0$ به این ترتیب، اثبات برای ماتریس‌های $n \times n$ کامل می‌شود و نتیجه طبق اصل استقراء برای همه ماتریس‌های مربعی صادق است. □

می‌توان با ترکیب بسط هم سازه‌ای با اعمال سطری مقدماتی، مقدار دترمینان‌ها را به طرز کارآمدتری محاسبه کرد. پیش از آن که بتوانیم چنین روشی را ایجاد کنیم، باید به این سوال پاسخ دهیم که با اِعمال یک عمل سطری مقدماتی بر یک ماتریس، چه تغییری در دترمینان آن روی می‌دهد؟ قضیه ۳.۴، جواب این مساله را در مورد اعمال سطری مقدماتی نوع دوم (اعمالی که در آنها سطری در یک اسکالر ناصفر ضرب می‌شود) در بر دارد. حال به موضوع اعمال سطری مقدماتی نوع اول می‌پردازیم (اعمالی که در آنها دو سطر با هم تعویض می‌شوند).

قضیه ۵.۴. هرگاه $A \in M_{n\times n}(F)$، و B ماتریسی باشد که با تعویض دو سطر از A به دست می‌آید، آنگاه $\det(A) = -\det(B)$.

برهان. فرض کنید سطرهای $A \in M_{n\times n}(F)$ عبارت باشند از $a_1, a_2, ..., a_n$ و B ماتریسی باشد که از تعویض سطرهای rام و sام بدست می‌آید که $r < s$. بنابراین

$$B = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

ماتریسی را درنظر بگیرید که با جایگزینی $a_r + a_s$ به جای سطرهای rام و sام A بدست می‌آید. طبق نتیجه قضیه ۴.۴ و قضیه ۳.۴ داریم:

$$0 = \det\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s + a_r \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \det\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \\ &= 0 + \det(A) + \det(B) + 0 \end{aligned}$$

بنابراین $\det(B) = -\det(A)$. □

حال با نشان دادن این که اعمال مقدماتی سطری نوع سوم، تغییری در دترمینان حاصل نمی‌کنند، بررسی خود را در مورد تاثیر اعمال سطری بر دترمینان یک ماتریس، تکمیل می‌کنیم.

قضیه ۶.۴. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$ و B ماتریسی باشد که از اضافه کردن مضربی از یک سطر A به سطر دیگر حاصل شده باشد. در این صورت $\det(B) = \det(A)$.

برهان. فرض کنید B ماتریسی $n \times n$ باشد که با اضافه کردن k برابر سطر rام A به سطر sام آن حاصل شده باشد که $r \neq s$. سطرهای A عبارت باشند از $a_1, a_2, ..., a_n$ و سطرهای B، $b_1, b_2, ...b_n$ باشند. در این صورت به ازای $i \neq s$، $b_i = a_i$ و $b_s = a_s + ka_r$. فرض کنید C ماتریسی باشد که از جانشینی a_r به جای سطر sام A به دست می‌آید. با بکارگیری قضیه ۳.۴ در مورد سطر sام B، داریم:

$$\det(B) = det(A) + k\det(C) = det(A)$$

چرا که طبق نتیجه قضیه ۴.۴، $\det(C) = 0$. □

در قضیه ۲.۴ ثابت کردیم یک ماتریس 2×2 وارون پذیر است اگر و تنها اگر دترمینان آن ناصفر باشد. به عنوان نتیجه‌ای از قضیه ۶.۴ ، می‌توانیم نیمی از حالت کلی این نتیجه را که پیشتر قول آن را داده بودیم، در قالب نتیجه زیر اثبات کنیم. عکس آن، به عنوان نتیجه قضیه ۷.۴ ثابت خواهد شد.

نتیجه ۲. اگر رتبه $A \in M_{n\times n}(F)$ کمتر از n باشد در این صورت $\det(A) = 0$.

برهان. اگر رتبه A کمتر از n باشد، سطرهای A یعنی $a_1, a_2, ..., a_n$ وابسته خطی هستند. طبق تمرین ۱۱ از بخش ۵.۱ سطری از A مثلا سطر rام ترکیبی خطی از بقیه سطرهاست. بنابراین اسکالرهای c_iی وجود دارند که

$$a_r = c_1a_1 + ... + c_{r-1}a_{r-1} + c_{r+1}a_{r+1} + ... + c_na_n$$

فرض کنید B ماتریسی باشد که از اضافه کردن $-c_i$ برابر سطر iام A به سطر rام ، به ازای همه $i \neq r$ها بدست می‌آید. در این صورت سطر rام Bفقط از صفر تشکیل شده است و بنابراین $\det(B) = ۰$. اما طبق قضیه ۶.۴، $\det(B) = \det(A)$. در نتیجه $\det(A) = ۰$. □

قواعد زیر تاثیر یک عمل سطری مقدماتی را بر دترمینان یک ماتریس $A \in M_{n\times n}(F)$، خلاصه می‌کند.

الف) اگر B ماتریسی باشد که با تعویض دو سطر A به دست آید، آنگاه $\det(B) = -\det(A)$.

ب) اگر B ماتریسی باشد که از ضرب یکی از سطرهای A در اسکالر ناصفر k به دست آید، آنگاه $\det(B) = k\det(A)$.

ج) اگر B ماتریسی باشد که با اضافه کردن مضربی از سطر A به سطر دیگر از A به دست می‌آید، آنگاه $\det(B) = \det(A)$.

می‌توان از این واقعیت‌ها برای ساده تر کردن محاسبه دترمینان استفاده کرد. به عنوان مثال، ماتریس مثال ۱ را در نظر گیرید:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۳ \\ -۳ & -۵ & ۲ \\ -۴ & ۴ & -۶ \end{bmatrix}$$

با اضافه کردن ۳ برابر سطر اول A به سطر دوم و ۴ برابر سطر اول به سطر سوم، این ماتریس را به دست می‌آوریم:

$$M = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & -۳ \\ ۰ & ۴ & -۷ \\ ۰ & ۱۶ & -۱۸ \end{bmatrix}$$

چون M از اِعمال دو عمل سطری مقدماتی نوع سوم بر A به دست می‌آید، داریم: $\det(A) = \det(M)$. با بسط همسازه‌ای M نسبت به سطر اول، داریم:

$$\det(M) = (-۱)^{۱+۱}(۱).\det(\tilde{M}_{۱۱} + (-۱)^{۱+۲}(۴).\det(\tilde{M}_{۱۲} + (-۱)^{۱+۲}(-۳).\det(\tilde{M}_{۱۳})$$

هم $\tilde{M}_{۱۲}$ و هم $\tilde{M}_{۱۳}$ ستونی دارند که تماما از صفر تشکیل شده است و بنابراین طبق قضیه ۶.۴ ، $\det(\tilde{M}_{۱۲}) = \det(\tilde{M}_{۱۳}) = ۰$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \det(M) &= (-۱)^{۱+۱}(۱).\det(\tilde{M}_{۱۱} \\ &= (-۱)^{۲}(۱).\begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ ۱۶ & -۸ \end{bmatrix} = ۱[۴(-۸) - (-۷)(۱۶)] = ۴۰ \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از دو عمل سطری مقدماتی نوع سوم، محاسبه $\det(A)$ را به محاسبه دترمینان یک ماتریس ۲×۲ تقلیل دادیم.

اما می‌توانیم حتی بهتر از این هم عمل کنیم. اگر ۴- برابر سطر دوم M را به سطر سوم اضافه کنیم (عمل سطری مقدماتی دیگری از نوع سوم)، داریم:

$$P = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & -۳ \\ ۰ & ۴ & -۷ \\ ۰ & ۰ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

با محاسبه $\det(P)$ از طریق بسط همسازه‌ای نسبت به سطر اول، مانند قسمت بالا داریم:

$$\begin{aligned} \det(P) &= (-۱)^{۱+۱}(۱). \det(\tilde{P_{۱۱}} \\ &= (-۱)^{۲}(۱). \begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ ۰ & ۱۰ \end{bmatrix} \\ &= ۱ \cdot ۴ \cdot ۱۰ = ۴۰ \end{aligned}$$

چون $\det(A) = \det(M) = \det(P)$، $\det(A) = ۴۰$.

روشی که برای محاسبه $\det(P)$ در بالا بکار رفت، در بر دارنده نمونه‌ای از یک حقیقت کلی است. دترمینان یک ماتریسی بالا مثلثی حاصلضرب درایه‌های قطری آن است (به تمرین ۲۳ رجوع کنید). فقط با استفاده از اعمال سطری مقدماتی نوع اول و سوم، می‌توانیم هر ماتریس مربعی را به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل کنیم و بنابراین به راحتی دترمینان هر ماتریس مربعی را حساب کنیم. در مثال‌های زیر این تکنیک را شرح می‌دهیم.

مثال ۵. برای محاسبه دترمینان ماتریس مثال ۲، یعنی

$$B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ -۲ & -۳ & -۵ \\ ۴ & -۴ & ۴ \end{bmatrix}$$

باید با یک تعویض سطر شروع کنیم. تعویض سطر اول و دوم B، ماتریس زیر را تولید می‌کند:

$$C = \begin{bmatrix} -۲ & -۳ & -۵ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۴ & -۴ & ۴ \end{bmatrix}$$

از طریق دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی نوع سوم، همان طور که در زیر نشان داده شده است، می‌توانیم C را به یک

ماتریس بالا مثلثی تبدیل کنیم.

$$\begin{bmatrix} -۲ & -۳ & -۵ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۴ & -۴ & ۴ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -۲ & -۳ & -۵ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & -۱۰ & -۶ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -۲ & -۳ & -۵ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۲۴ \end{bmatrix}$$

بنابراین $\det(C) = -۲ \cdot ۱ \cdot ۲۴ = -۴۸$. چون C با تعویض دو سطر B به دست آمد. نتیجه می‌شود که:

$$\det(B) = -\det(C) = ۴۸$$

□

مثال ۶. تکنیک به کار رفته در مثال ۵ را می‌توان برای محاسبه مقدار دترمینان ماتریس مثال ۳،

$$C = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ & -۳ \\ -۲ & -۳ & -۵ & ۲ \\ ۴ & -۴ & ۴ & -۶ \end{bmatrix}$$

به کار برد. این ماتریس را می‌توان همانطور که در زیر نشان داده شده است، با استفاده از دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی نوع دوم به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل کرد:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ & -۳ \\ -۲ & -۳ & -۵ & ۲ \\ ۴ & -۴ & ۴ & -۶ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ & -۳ \\ ۰ & -۳ & -۵ & ۳ \\ ۰ & -۴ & ۴ & -۸ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ & -۶ \\ ۰ & ۰ & ۱۶ & -۲۰ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ & -۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

پس $\det(C) = ۲ \cdot ۱ \cdot ۴ \cdot ۴ = ۳۲$. این روش بسیار کارآمدتر بسط همسازه‌ای نسبت به سطر اول است. که در مثال‌های ۱و۲و۳ به کارگرفته شده بود. □

از آنجا که

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

محاسبه یک ماتریس ۲×۲ مستلزم دو عمل ضرب (و یک تفریق) است. به ازای $n \geq ۳$ بسط همسازه‌ای دترمینان نسبت به یک سطر، این دترمینان را به صورت مجموعی از n حاصلضرب بیان می‌کند که هرکدام شامل دترمینان یک ماتریس $(n-۱) \times (n-۱)$ است. بنابراین در مجموع، محاسبه دترمینان یک ماتریس $n \times n$ از طریق بسط همسازه‌ای نسبت به یک سطر نیازمند بیش از $n!$ عمل ضرب است. در حالی که می‌توان نشان داد که محاسبه این دترمینان از طریق اعمال سطری مقدماتی، به گونه‌ای که در مثال ۵ و ۶ صورت گرفت مستلزم $(n^۳ + ۲n - ۳)/۳$ عمل ضرب است. برای محاسبه دترمینان یک ماتریس ۲۰×۲۰ که با توجه به استانداردهای موجود، بزرگ هم نیست، بسط هم سازه‌ای نیازمند بیش از $۲۰! \approx ۲/۴ \times ۱۰^{۱۸}$ عمل ضرب است. بنابراین برای کامپیوتری که می‌تواند در هر ثانیه یک میلیارد عمل ضرب را انجام دهد، بیش از ۷۷ سال طول می‌کشد تا این دترمینان را به روش بسط همسازه‌ای محاسبه کند. اما از طرف دیگر روش استفاده از اعمال سطری مقدماتی برای این محاسبه فقط ۲۶۷۹ عمل ضرب بکار می‌گیرد. روش همسازه‌ای بیش از $۹۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰$ برابر این مقدار ضرب بکار می‌گیرد. بنابراین واضح است که چرا برنامه‌های کامپیوتری که برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های نامشخص بکار می‌روند، از این روش استفاده نمی‌کنند.

در این بخش، دترمینان ماتریس‌های مربعی را بر حسب بسط همسازه‌ای نسبت به سطر اول تعریف کردیم. بعد نشان دادیم که دترمینان یک ماتریس مربعی را می‌توان با بسط هم سازه‌ای نسبت به هر سطر دلخواهی محاسبه کرد. به علاوه نشان می‌دادیم که دترمینان چند خاصیت ویژه دارد. از جمله خاصیت‌هایی که به ما کمک می‌کند تا وقتی که ماتریس B با استفاده از یک عمل سطری مقدماتی از روی A بدست می‌آید، $\det(A)$ را از روی $\det(B)$ حساب کنیم. به کمک این خواص، می‌توانیم دترمینان‌ها را به نحو کارآمدتری محاسبه کنیم. در بخش بعد، استفاده از این روش را برای کشف خواص بیشتری در مورد دترمینان‌ها ادامه خواهیم داد.

تمرینات

۱.تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) تابع $\det : M_{n\times n}(F) \to F$ تبدیل خطی است.

ب) دترمینان یک ماتریس مربعی را می‌توان با بسط همسازه‌ای نسبت به هر سطر دلخواه محاسبه کرد.

ج) اگر دو سطر از ماتریس A باهم برابر باشند آنگاه $\det(A) = ۰$.

د) اگر B ماتریسی باشد که با تعویض دو سطر از ماتریس مربعی A بدست می‌آید، آنگاه $\det(B) = -\det(A)$.

ه) هرگاه B ماتریسی باشد که از ضرب یکی از سطرهای ماتریس مربعی A در یک اسکالر ناصفر بدست می‌آید، آنگاه $\det(B) = \det(A)$.

و) هرگاه B ماتریسی باشد که از اضافه کردن k برابر سطر iام ماتریس مربعی A، به سطر jام آن بدست می‌آید، آنگاه $\det(B) = k\det(A)$.

ز) اگر رتبه $A \in M_{n\times n}(F)$، n باشد، آنگاه $\det(A) = ۰$.

ح) دترمینان یک ماتریس بالا مثلثی، برابر حاصلضرب درایه‌های قطری ان است.

۲. مقداری از k را بیابید که در معادله زیر صدق کند.

$$\det\begin{bmatrix} ۳a_۱ & ۳a_۲ & ۳a_۳ \\ ۳b_۱ & ۳b_۲ & ۳b_۳ \\ ۳c_۱ & ۳c_۲ & ۳c_۳ \end{bmatrix} = k\det\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{bmatrix}$$

۳. مقداری از k را بیابید که در معادله زیر صدق کند.

$$\det\begin{bmatrix} ۲a_۱ & ۲a_۲ & ۲a_۳ \\ ۳b_۱+۵c_۱ & ۳b_۲+۵c_۲ & ۳b_۳+۵c_۳ \\ ۷c_۱ & ۷c_۲ & ۷c_۳ \end{bmatrix} = k\det\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{bmatrix}$$

۴. مقداری از k را بیابید که در معادله زیر صدق کند.

$$\det\begin{bmatrix} b_۱+c_۱ & b_۲+c_۲ & b_۳+c_۳ \\ a_۱+c_۱ & a_۲+c_۲ & a_۳+c_۳ \\ a_۱+b_۱ & a_۲+b_۲ & a_۳+b_۳ \end{bmatrix} = k\det\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{bmatrix}$$

در تمرین‌های ۵ الی ۱۲، دترمینان ماتریس داده شده را با بسط همسازه‌ای نسبت به سطر معین شده حساب کنید.

۵.نسبت به سطر اول $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ & -۳ \\ ۲ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ ۶.نسبت به سطراول $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ -۱ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$

۷.نسبت به سطردوم $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ & -۳ \\ ۲ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ ۸.نسبت به سطر سوم $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ -۱ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$

۹.نسبت به سطر سوم $\begin{bmatrix} ۰ & ۱+i & ۲ \\ -۲i & ۰ & ۱-i \\ ۳ & ۴i & ۰ \end{bmatrix}$ ۱۰.نسبت به سطر دوم $\begin{bmatrix} i & ۲+i & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲i \\ ۰ & -۱ & ۱-i \end{bmatrix}$

۱۱. نسبت به سطر چهارم $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۰ & -۲ & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ ۱۲.نسبت به سطر چهارم $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & -۱ \\ -۳ & ۴ & ۱ & -۱ \\ ۲ & -۵ & -۳ & ۸ \\ -۲ & ۶ & -۴ & ۱ \end{bmatrix}$

در تمرین‌های ۱۳ الی ۲۲ ، مقدار دترمینان ماتریس داده شده را با استفاده از یک روش دلخواه مجاز محاسبه کنید.

۱۳. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$
۱۴. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۱۵. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$
۱۶. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -8 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

۱۷. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$
۱۸. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

۱۹. $\begin{bmatrix} i & 2 & -1 \\ 3 & 1+i & 2 \\ -2i & 1 & 4-i \end{bmatrix}$
۲۰. $\begin{bmatrix} -1 & 2+i & 3 \\ 1-i & i & 1 \\ 3i & 2 & -1+i \end{bmatrix}$

۲۱. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
۲۲. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -12 \\ -5 & 12 & -14 & 19 \\ -9 & 22 & -20 & 31 \\ -4 & 9 & -14 & 15 \end{bmatrix}$

۲۳. ثابت کنید دترمینان یک ماتریس بالا مثلثی برابر حاصلضرب درایه‌های روی قطر آن است.

۲۴. نتیجه قضیه ۴.۳ را ثابت کنید.

۲۵ ثابت کنید برای هر $A \in M_{n\times n}(F)$ ، $\det(kA) = k^n \det(A)$.

۲۶. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$. در چه صورت $\det(A) = \det(-A)$؟

۲۷. ثابت کنید که اگر $A \in M_{n\times n}(F)$ دو ستون یکسان داشته باشد، آنگاه $\det(A) = 0$.

۲۸. اگر E_i یک ماتریس مقدماتی نوع iام باشد، $\det(E_i)$ را حساب کنید.

۲۹. ثابت کنید که اگر E یک ماتریس مقدماتی باشد، آنگاه $\det(E^t) = \det(E)$.

۳۰.فرض کنید $a_1, a_2, ..., a_n$ سطرهای $A \in M_{n\times n}(F)$ باشند و فرض کنید B ماتریسی باشد که سطرهای آن $a_n, a_{n-1}, ..., a_1$ هستند. $\det(B)$ را برحسب $\det(A)$ حساب کنید.

۴-۳ خواص دترمینان

در قضیه ۱.۳ دیدیم که هر عمل سطری مقدماتی را می‌توان با ضرب در یک ماتریس مقدماتی انجام داد. این نتیجه، در مطالعه تاثیری که اِعمال یک دنباله از اعمال مقدماتی سطری روی یک دترمینان می‌گذارد، بسیار مفید است. از آنجا که دترمینان ماتریس همانی $n \times n$، ۱ است (به مثال ۴ از بخش ۴-۲ رجوع کنید.)، می‌توانیم گزاره‌های صفحه ۱۹۶ را به صورت حقایق زیر در مورد دترمینان ماتریس‌های تفسیر کنیم.

الف) هرگاه E ماتریسی مقدماتی باشد که از تعویض دو سطر I به دست می‌آید، آنگاه $\det(E) = -1$.

ب) هرگاه E ماتریسی مقدماتی باشد که از ضرب یکی از سطرهای I در اسکالر ناصفر k به دست می‌آید، آنگاه $\det(E) = k$.

ج) هرگاه E ماتریسی مقدماتی باشد که از اضافه کردن مضربی از یکی از سطرهای I به سطر دیگر حاصل می‌شود، آنگاه $\det(E) = 1$.

حال این حقایق را در مورد دترمینان ماتریس‌های مقدماتی بکار می‌گیریم تا ثابت کنیم دترمینان، یک تابع ضربی است.

قضیه ۷.۴. برای هر $A, B \in M_{n\times n}(F)$، $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.

برهان. کار را با اثبات نتیجه در هنگامی که A ماتریسی مقدماتی است، آغاز می‌کنیم. هر گاه A ماتریس مقدماتی باشد که از تعویض دو سطر I بدست می‌آید، آنگاه $\det(A) = -1$. اما صبق قضیه ۱.۳، AB ماتریسی است که از تعویض دو سطر B بدست می‌آید. در نتیجه طبق قضیه ۵.۴، $\det(AB) = -\det(B) = \det(A).\det(B)$. استدلال‌هایی مشابه، نتیجه را در هنگامی که A ماتریسی مقدماتی از نوع دوم یا سوم باشد، ثابت می‌کنند.

هرگاه A ماتریسی $n \times n$ با رتبه کمتر از n باشد، آنگاه طبق نتیجه قضیه ۴.۶، $\det(A) = 0$. چون طبق حکم ۷.۳، $rank(AB) \leq rank(A) < n$، داریم $\det(AB) = 0$. در نتیجه در این حالت، $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.

از طرف دیگر، اگر رتبه A، n باشد، آنگاه A وارون پذیر است و بنابراین حاصلضرب ماتریس‌های مقدماتی است (به نتیجه ۳ از قضیه ۶.۳ رجوع کنید.)، مثلا $E_1E_2...E_m$، بند اول برهان نشان می‌دهد که

$$
\begin{aligned}
\det(AB) &= det(E_m...E_2E_1B) \\
&= \det(E_m).\det(E_{m-1}...E_2E_1B) \\
&= \dots \\
&= \det(E_m)\dots\det(E_2)\det(E_1).\det(B) \\
&= \det(E_m\dots E_2E_1)det(B) \\
&= \det(A).\det(B)
\end{aligned}
$$

□

نتیجه ۱. ماتریس $A \in M_{n\times n}(F)$ وارون پذیر است اگر و تنها اگر $\det(A) \neq ۰$. به علاوه، اگر A وارون پذیر باشد، آنگاه $\det(A^{-۱}) = [\det(A)]^{-۱}$.

برهان. اگر $A \in M_{n\times n}(F)$، وارون پذیر نباشد، آنگاه رتبه A کمتر از n است. پس طبق نتیجه قضیه ۴.۶، $\det(A) = ۰$. از طرف دیگر هرگاه $A \in M_{n\times n}(F)$ وارون پذیر باشد، آنگاه طبق قضیه ۴.۷

$$\det(A).\det(A^{-۱}) = \det(AA^{-۱}) = \det(I) = ۱$$

و در نتیجه $\det(A) \neq ۰$ و $\det(A^{-۱}) = [\det(A)]^{-۱}$. □

در بحثی که تا کنون در مورد دترمینان داشتیم، فقط از سطرهای یک ماتریس استفاده کردیم. به عنوان مثال، تعریف بازگشتی دترمینان شامل بسط همسازه‌ای نسبت به یک سطر بود و روش کارآمدتری که در بخش ۴.۲ بدست آوردیم، عملیات سطری مقدماتی را به کار می‌گرفت. نتیجه بعدی نشان می‌دهد که دترمینان‌های A و A^t برابرند. چون سطرهای A همان ستون‌های A^t هستند این حقیقت به ما کمک می‌کند تا هر عبارتی را در مورد دترمینان‌ها که شامل سطرهای یک ماتریس است، به عبارتی متناظر در مورد ستون‌های آن برگردانیم.

قضیه ۴.۸. برای هر $A \in M_{n\times n}(F)$، $\det(A^t) = \det(A)$.

برهان. هرگاه A وارون پذیر نباشد، $rank(A) < n$. اما طبق نتیجه ۲ از قضیه ۳.۶، $rank(A) = rank(A^t)$. بنابراین A^t هم وارون پذیر نیست. در نتیجه در این حالت $\det(A^t) = ۰ = \det(A)$.

از طرف دیگر اگر A وارون پذیر باشد، A حاصلضربی از ماتریس‌های مقدماتی است، به فرض $A = E_m \dots E_۲E_۱$. چون طبق تمرین ۲۹ از بخش ۴.۲، برای هر i، $\det(E_i^t) = \det(E_i)$، طبق قضیه ۴.۳ داریم:

$$\begin{aligned}
\det(A^t) &= \det(E_۱^t E_۲^t \dots E_m^t) \\
&= \det(E_m^t)\dots\det(E_۲^t).\det(E_۱^t) \\
&= \det(E_m)\dots\det(E_۲).\det(E_۱) \\
&= \det(E_m \dots E_۲E_۱) \\
&= \det(A)
\end{aligned}$$

در نتیجه در هر دو حالت $\det(A^t) = \det(A)$. □

از میان نتایج مختلف قضیه ۴.۸، می‌توان از دو نتیجه نام برد. یکی این که دترمینان‌ها را می‌توان با بسط همسازه‌ای نسبت به یک ستون محاسبه کرد و دیگر اعمال مقدماتی ستونی را هم می‌توان مانند اعمال سطری مقدماتی برای محاسبه دترمینان‌ها

به کار برد. (تاثیر یک عمل ستونی مقدماتی روی دترمینان، معادل تاثیر عمل سطری متناظر با آن است). بحث خود را در مورد خواص دترمینان، با یک نتیجه معروف به پایان می‌بریم، که دترمینان را به جواب‌های دستگاه معادلات خطی خاصی مرتبط می‌سازد.

قضیه ۹.۴ (قضیه کرامر [۱]). فرض کنید $Ax = b$، شکل ماتریسی یک دستگاه از n معادله خطی n مجهولی باشد، که در آن، $x = (x_۱, x_۲, ..., x_n)^t$. هرگاه $\det(A) \neq ۰$، این دستگاه جواب منحصر به فردی دارد و برای هر $(k = ۱, ۲, ..., n)$،

$$x_k = [\det(A)]^{-۱}. \det(M_k)$$

که در آن M_k ماتریس $n \times n$ای است که از جایگزینی b به جای ستون kام A به دست می‌آید.

برهان. اگر $\det(A) \neq ۰$، دستگاه $Ax = b$، طبق نتیجه قضیه ۷.۴ و قضیه ۱۰.۳، جوابی یکتا دارد. برای هر kی صحیح $(۱ \leq k \leq n)$ فرض کنید a_k ستون kام A را نشان دهد، و X_k نشان دهنده ماتریسی باشد که از جانشینی x به جای ستون kام ماتریس همانی به دست می‌آید. در این صورت طبق قضیه ۱۴.۲، داریم:

$$\begin{aligned} AX_k &= A(e_۱, ..., e_{k-۱}, x, e_{k+۱}, ..., e_n) \\ &= (Ae_۱, ..., Ae_{k-۱}, Ax, Ae_{k+۱}, ..., Ae_n) \\ &= (a_۱, ..., a_{k-۱}, b, a_{k+۱}, ..., a_n) \\ &= M_k \end{aligned}$$

با محاسبه دترمینان X_k از طریق بسط همسازه‌ای نسبت به سطر kام، داریم

$$\det(X_k) = x_k. \det(I_{n-۱}) = x_k$$

در نتیجه طبق قضیه ۷.۴،

$$\det(M_k) = \det(AX_k) = \det(A). \det(X_k) = \det(A).x_k$$

در نتیجه

$$x_k = [\det(A)]^{-۱}. \det(M_k)$$

□

مثال ۱. با استفاده از قاعده کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی زیر، قضیه ۹.۴ را شرح می‌دهیم:

$$x_۱ \quad +۲x_۲ + ۳x_۳ = ۲$$

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad\quad &+x_3 = 3\\
x_1 \quad +x_2 &- x_3 = 1
\end{aligned}
$$

شکل ماتریسی این دستگاه معادلات خطی، $Ax = b$ است که

$$
b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

چون $\det(A) \neq 0$، می‌توان قاعده کرامر را به کار برد. با استفاده از نمادگذاری قضیه ۹.۴ داریم:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\det(M_1)}{\det(A)} = \frac{\det\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}{\det(A)} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}\\
x_2 &= \frac{\det(M_2)}{\det(A)} = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}{\det(A)} = \frac{-6}{6} = -1\\
x_3 &= \frac{\det(M_3)}{\det(A)} = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\det(A)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

بنابراین نتیجه یکتای دستگاه معادلات خطی داده شده، عبارت است از

$$
(x_1, x_2, x_3) = (\frac{5}{2}, -1, \frac{1}{2})
$$

□

در کاربردهایی که به معادلات خطی ارتباط می‌یابند، گاهی لازم است بدانیم که جوابی وجود دارد که مختصات آن صحیح هستند. در این حالت قانون کرامر می‌تواند مفید واقع شود، چرا که از آن نتیجه می‌شود که یک دستگاه معادلات خطی با ضرایب صحیح، وقتی که دترمینان ماتریس ضرایبش ± 1 باشد، دارای جواب صحیح است. اما از طرف دیگر، قانون کرامر برای محاسبه مفید نیست، چرا که برای حل یک دستگاه از n معادله n مجهولی مستلزم محاسبه $n+1$ دترمینان $n \times n$

است. میزان محاسبه‌ای که برای این کار لازم است، بسیار فراتر از میزان محاسبه ای است که برای حل دستگاه از طریق حل حذف به روش گاوس، که در بخش ۴-۳ مورد بررسی قرار گرفت، می‌باشد. بنابراین قانون کرامر بیشتر از جنبه نظری و زیبا شناختی مورد توجه ماست تا از نظر ارزش محاسباتی.

همانند بخش ۴-۱، می‌توان دترمینان ماتریس $A \in M_{n\times n}(F)$ را تعبیر هندسی کرد. هرگاه سطرهای A به ترتیب $a_1, a_2, ..., a_n$ باشند، $|\det(A)|$، حجم n-بعدی (تعمیم سطح در $\mathbb{R}^2$ و حجم در $\mathbb{R}^3$) متوازی السطوحی است که بردارهای $a_1, a_2, ..., a_n$، اضلاع مجاور آن هستند.[2]

مثال ۲. حجم متوازی السطوحی که سه ضلع مجاور آن، $a_1 = (1, -2, 1)$، $a_2 = (1, 0, -1)$ و $a_3 = (1, 1, 1)$ هستند برابر است با:

$$\left|\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right| = 6$$

توجه کنید که شی مورد بحث یک مکعب مستطیل است که اندازه اضلاع آن $\sqrt{6}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ است. (به شکل ۴-۶ رجوع کنید.) در نتیجه طبق فرمول معروف حجم، حجم آن باید $\sqrt{6}.\sqrt{2}.\sqrt{3} = 6$ باشد که محاسبه دترمینان نیز، همین نتیجه را نشان می‌دهد. □

در بحث قبلی خود راجع به مفهوم هندسی دترمینانی که از بردارهای یک پایه مرتب $\mathbb{R}^2$ تشکیل می‌شود، به غیر از این دیدیم که این دترمینان مثبت است، اگر و تنها اگر پایه مذکور، تشکیل یک دستگاه مختصات راستگرد بدهد. عبارت مشابهی در مورد $\mathbb{R}^n$ برقرار است. در واقع اگر γ پایه دلخواهی برای $\mathbb{R}^n$ بوده، β پایه مرتب استاندارد $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه γ تشکیل یک دستگاه مختصات راستگرد می‌دهد اگر و تنها اگر $\det(Q) > 0$ که Q ماتریس تبدیل مختصاتی است که مختصات در پایه γ را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند. پس به عنوان مثال،

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

یک دستگاه مختصات چپگرد در $\mathbb{R}^3$ تشکیل می‌دهد، چرا که

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -2 < 0$$

[2] برای برهانی بر این مطلب و همچنین نتیجه کلی تر، به کتاب Jerrold E. Marsden and Michael J.Hoffman, Elementary Classical Analysis , W.H.Freeman and Company New York, 1993, p.524 مراجعه کنید.

در عین حال،

$$\gamma' = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

یک دستگاه مختصات راستگرد در $\mathbb{R}^۳$ تشکیل می‌دهد، زیرا

$$\det \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = ۵ > ۰$$

در حالت کلی، وقتی که β و γ دو پایه مرتب برای $\mathbb{R}^n$ باشند، دو دستگاه مختصات تولید شده به وسیله β و γ را دارای آرایش یکسان گوییم (یا هر دو را راستگرد و یا هر دو را چپگرد گوییم) اگر و تنها اگر $\det(Q) > ۰$، که Q ماتریس تبدیل مختصاتی است که مختصات در پایه γ را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند.

تمرینات

۱. تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) هرگاه E ماتریسی مقدماتی، آنگاه $\det(E) = \pm ۱$.

ب) برای هر $\det(AB) = \det(A).\det(B), A, B \in M_{n\times n}(F)$

ج) ماتریس $M \in M_{n\times n}(F)$ وارون پذیر است اگر و تنها اگر $\det(M) = ۰$.

د) رتبه ماتریس $M \in M_{n\times n}(F)$، n است، اگر و تنها اگر $\det(M) \neq ۰$.

ه) برای هر $A \in M_{n\times n}(F)$، $\det(A^t) = -\det(A)$.

و) دترمینان یک ماتریس مربعی را می‌توان با بسط نسبت به هر سطر دلخواه محاسبه کرد.

ز) هر دستگاه n معادله خطی n مجهولی را می‌توان از طریق قاعده کرامر حل کرد.

ح) فرض کنید $Ax = b$، شکل ماتریسی یک دستگاه از n معادله خطی n مجهولی باشد و $x = [x_۱, x_۲, ..., x_n]^t$. اگر $\det(A) \neq ۰$ و M_k ماتریس $n \times n$ای باشد که از تعویض سطر kام A با b^t به دست می‌آید، آنگاه جواب یکتای $Ax = b$ عبارت است از

$$x_k = [\det(A)]^{-۱}.\det(M_k) \qquad k = ۱, ۲, ..., n \text{ برای هر}$$

در تمرینات ۲ الی ۷، قاعده کرامر را برای حل دستگاه معادلات خطی داده شده بکار برید.

۲.
$$\begin{aligned} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ &= b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ &= b_۲ \\ a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱} &\neq ۰ \end{aligned}$$

۳.
$$\begin{aligned} ۲x_۱ + x_۲ - ۳x_۳ &= ۵ \\ x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ &= ۱۰ \\ ۳x_۱ + ۴x_۲ - ۲x_۳ &= ۱۰ \end{aligned}$$

۴.
$$\begin{aligned} ۲x_۱ + x_۲ - ۳x_۳ &= ۱ \\ x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ &= ۰ \\ ۳x_۱ + ۴x_۲ - ۲x_۳ &= -۵ \end{aligned}$$

۵.
$$\begin{aligned} x_۱ - x_۲ + ۴x_۳ &= -۴ \\ -۸x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ &= ۸ \\ ۲x_۱ - x_۲ + x_۳ &= ۰ \end{aligned}$$

۶.
$$\begin{aligned} x_۱ - x_۲ + ۴x_۳ &= -۲ \\ -۸x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ &= ۰ \\ ۲x_۱ - x_۲ + x_۳ &= ۶ \end{aligned}$$

۷.
$$\begin{aligned} ۳x_۱ + x_۲ + x_۳ &= ۴ \\ -۲x_۱ - x_۲ &= ۱۲ \\ x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ &= -۸ \end{aligned}$$

۸. ثابت کنید که یک ماتریس بالا مثلثی $n \times n$ وارون پذیر است اگر و تنها اگر همه درایه‌های قطری آن ناصفر باشند.

۹. ماتریس $M \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ را پوچ توان گویند، هرگاه به ازای عدد صحیح مثبتی مانند k، $M^k = O$، که O هم ماتریس صفر $n \times n$ است. ثابت کنید که اگر M **پوچ توان** باشد، آنگاه $\det(M) = ۰$.

۱۰. ماتریس $M \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ را متقارب اریب گویند هرگاه $M^t = -M$. ثابت کنید که اگر M **متقارن اریب** بوده، n فرد باشد، آنگاه M وارون پذیر نیست. اگر n زوج باشد چطور؟

۱۱. ماتریس $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ را **متعامد** گویند هرگاه $QQ^t = I$. ثابت کنید که اگر Q متعامد باشد، $\det(Q) = \pm ۱$.

۱۲. برای هر $M \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$، $\overline{M}$را چنین تعریف می‌کنیم که برای هر i و j، $(\overline{M}_{ij}) = \bar{M}_{ij}$، که در اینجا $\overline{M}_{ij}$ **مزدوج مختلط** M_{ij} می‌باشد،

الف) ثابت کنید $\det(\bar{M}) = \overline{\det(M)}$.

ب) ماتریس $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ را **یکانی** گویند هرگاه $QQ^* = I$ که $Q^* = \bar{Q}^t$. ثابت کنید که اگر Q ماتریس یکانی باشد، آنگاه $|\det(Q)| = ۱$.

۱۳. فرض کنید $\beta = \{u_۱, u_۲, \ldots, u_n\}$ زیرمجموعه‌ای از F^n شامل n بردار متمایز باشد و B عضوی از $M_{n\times n}(F)$ که u_j ستون jام آن است. ثابت کنید که β پایه‌ای برای F^n است اگر و تنها اگر $\det(B) \neq ۰$.

۱۴. ثابت کنید که اگر $A, B \in M_{n\times n}(F)$ متشابه باشند، آنگاه $\det(A) = \det(B)$.

۱۵. با استفاده از دترمینان، ثابت کنید که اگر $A, B \in M_{n\times n}(F)$ چنان باشند که $AB = I$، آنگاه A وارون پذیر است (و در نتیجه $B = A^{-۱}$).

۱۶. فرض کنید $A, B \in M_{n\times n}(F)$ چنان باشند که $AB = -BA$. ثابت کنید که اگر n فرد باشد و مشخصه F دو نباشد، آنگاه یکی از A و B وارون ناپذیر است.

۱۷. برای کامل کردن برهان قضیه ۷.۵، نشان دهید که اگر A ماتریسی مقدماتی از نوع دوم یا سوم باشد، آنگاه $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.

۱۸. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$ چنان باشد که برای هر $۱ \leq i < j \leq n$، $A_{ij} = ۰$. $\det(A)$ را محاسبه کنید.

۱۹. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$ را بتوان به شکل زیر نوشت

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ O & I \end{bmatrix}$$

که در آن A ماتریسی مربعی است، I ماتریس همانی است و O ماتریس صفر است. ثابت کنید که $\det(M) = \det(A)$.

۲۰. فرض کنید $M \in M_{n\times n}(F)$ را بتوان به شکل زیر نوشت

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$$

که در آن A ماتریسی مربعی است و O ماتریس صفر است. ثابت کنید که $\det(M) = \det(A).\det(C)$.

۲۱. فرض کنید $T : P_n(F) \rightarrow F^{n+۱}$، همان تبدیل خطی ای باشد که در تمرین ۲۰ از بخش **۲-۴** به این صورت تعریف شد: $T(f) = (f(c_۰), f(c_۱), ..., f(c_n))$ که $c_۰, c_۱, ..., c_n$ اعضای متمایز میدان نامتناهی F هستند. فرض کنید β پایه مرتب استاندارد $P_n(F)$ و γ پایه مرتب استاندارد $F^{n+۱}$ باشد.

الف) ثابت کنید که $M = [T]_\beta^\gamma$ به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & c_۰ & c_۰^۲ & \cdots & c_۰^n \\ ۱ & c_۱ & c_۱^۲ & \cdots & c_۱^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۱ & c_n & c_n^۲ & \cdots & c_n^n \end{bmatrix}$$

ماتریسی به این صورت را یک ماتریس **واندرموند**[۳] می‌نامند.

ب) با استفاده از تمرین ۲۰ بخش ۲-۴، ثابت کنید $\det(M) \neq ۰$.

ج) ثابت کنید

$$\det(M) = \prod_{۰\leq i<j\leq n} (c_j - c_i)$$

که برابر حاصلضرب همه عوامل به صورت $c_j - c_i$, به ازای $۰ \leq i < j \leq n$ است.

۲۲. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$ ناصفر باشد. برای هر m $(۱ \leq m \leq n)$، منظور از یک **زیر ماتریس** $m \times m$، ماتریسی است که از حذف هر $n-m$ سطر و هر $n-m$ ستون دلخواهی از A بدست می‌آید. فرض کنید k $(۱ \leq k \leq n)$ نشانگر بزرگترین عدد صحیحی باشد که برای آن زیر ماتریس $k \times k$ای با دترمینان ناصفر موجود باشد. ثابت کنید $rank(A) = k$.

[۳] Vandermonde

۲۳. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$ به صورت زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & a_۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & a_۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ & \cdots & ۰ & a_۲ \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & -۱ & a_{n-۱} \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه $\det(A+tI)$،که I ماتریس همانی $n\times n$ است.

۲۴. فرض کنید c_{jk} نشانگر همسازه درایه jام و ستون kام ماتریس $A \in M_{n\times n}(F)$ باشد.

الف) ثابت کنید که اگر B ماتریس حاصل از تعویض ستون kام A با e_j باشد، آنگاه $\det(B) = c_{jk}$

ب) ثابت کنید برای هر $۱ \leq j \leq n$ داریم:

$$A\begin{bmatrix} c_{j۱} \\ c_{j۲} \\ \vdots \\ c_{jn} \end{bmatrix} = \det(A).e_j$$

راهنمایی: قاعده کرامر را در مورد $Ax = e_j$ به کار گیرید.

ج) نتیجه بگیرید که اگر C ماتریس $n\times n$ای باشد که $C_{ij} = c_{ji}$، آنگاه $AC = [\det(A)]I$.

د) ثابت کنید که اگر $\det(A) \neq ۰$ آنگاه $A^{-۱} = [\det(A)]^{-۱}C$.

تعریف: هرگاه $A \in M_{n\times n}(F)$، آنگاه ماتریس $n\times n$ C را که برای هر i و j، C_{ij} برابر با همسازه درایه سطر jام و ستون iام A است، **الحاقی کلاسیک** A نامند.

۲۵. الحاقی کلاسیک ماتریس‌های زیر را بیابید.

الف) $\begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} -۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ۳ & ۶ & ۷ \\ ۰ & ۴ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} ۱-i & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۳i & ۰ \\ ۲i & ۱+۴i & -۱ \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۴ \\ ۶ & -۳ & ۰ \\ -۳ & ۵ & -۲ \end{bmatrix}$

ز) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 8 & 0 & -3 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ ح) $\begin{bmatrix} 3 & 2+i & 0 \\ -1+i & 0 & i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{bmatrix}$

۲۶. فرض کنید C، الحاقی کلاسیک $A \in M_{n\times n}(F)$ باشد. موارد زیر را اثبات کنید.

الف) $\det(C) = (\det(A))^{n-1}$.

ب) C^t، الحاقی کلاسیک A^t است.

ج) اگر A یک ماتریس بالا مثلثی وارون پذیر باشد، آنگاه C و A^{-1} هر دو بالا مثلثی هستند.

۲۷. فرض کنید $y_1, y_2, ..., y_n$، توابعی مستقل خطی در $\mathbb{C}^\infty$ باشد. برای هر $y \in \mathbb{C}^\infty$ ، $T(y) \in \mathbb{C}^\infty$ را چنین تعریف کنید:

دترمینان بالا را $Wronskian$، $y_1, y_2, ..., y_n$ نامند.

الف) ثابت کنید که $T : \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^\infty$ یک تبدیل خطی است.

ب) ثابت کنید $N(T) = span(\{y_1, y_2, ..., y_n\})$.

۴-۴ خلاصه مطالب مهم در مورد دترمینان

در این بخش، خصوصیات مهمی از دترمینان را که در ادامه متن لازم هستند، خلاصه می‌کنیم. نتایج موجود در این بخش در بخش‌های ۴-۲و۴-۳ حاصل شده اند. بنابراین مطالب ارائه شده در اینجا، بدون اثبات آمده اند.

دترمینان یک ماتریس $n \times n$ مانند A، که درایه‌هایش عضو میدان F هستند، عنصری از F است که با $\det(A)$ یا $|A|$ نمایش داده می‌شود و می‌توان آن را به طریق زیر محاسبه کرد.

۱. اگر A، 1×1 باشد، آنگاه $\det(A) = A_{11}$ که تنها درایه A است.

۲. هرگاه A، 2×2 باشد، آنگاه $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$. پس به عنوان مثال

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = (-1)(3) - (2)(5) = -13$$

۳. هرگاه A به ازای $n > 2$ای $n \times n$ باشد، آنگاه (در صورتی که دترمینان را از طریق بسط دادن روی درایه‌های سطر iام A محاسبه کنیم)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \cdot \det(\tilde{A}_{ij})$$

یا(در صورتی که دترمینان را از طریق بسط دادن روی درایه‌های ستون jام A حساب کنیم)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det(\tilde{A_{ij}})$$

که $\tilde{A}_{ij}$ ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ است که از حذف سطر iام و ستون jام A حاصل می‌شود.

اسکالر $(-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij})$ در فرمول بالا را **همسازه** سطر i ام و ستون jام A می‌نامند. با این اصطلاح، دترمینان A به صورت مجموعی از عبارت‌ها، که از ضرب هر یک از درایه‌های یک سطر یا ستون A در همسازه‌شان به دست می‌آیند، محاسبه می‌گردد. بنابراین $\det(A)$ بر حسب n دترمینان $(n-1) \times (n-1)$ بیان می‌شود. سپس، خود این دترمینان‌ها را برحسب دترمینان ماتریس‌های $(n-2) \times (n-2)$ محاسبه می‌شوند، و به همین ترتیب، تا این که ماتریس‌های 2×2 حاصل شوند. در این هنگام دترمینان ماتریس‌های 2×2، به روش گفته شده در حالت ۲ی بالا محاسبه می‌شوند.

حال دو نمونه از این تکنیک را در محاسبه دترمینان ماتریس 4×4 زیر در نظر می‌گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه دترمینان A از طریق بسط نسبت به سطر چهارم، ابتدا باید همسازه هر یک از درایه‌های آن سطر را بدانیم.
همسازه $A_{41} = 3$، $(-1)^{4+1} \det(B)$ است که

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

حال دترمینان بالا را از طریق بسط نسبت به ستون اول محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}
\det(B) &= (-1)^{1+1}(1)\det\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + (-1)^{2+1}(1)\det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\
&+ (-1)^{3+1}(0)\det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \\
&= 1(1)[(-4)(1) - (-1)(-3)] + (-1)(1)[(1)(1) - (5)(-3)] + 0 \\
&= -7 - 16 + 0 = -23
\end{aligned}$$

بنابراین همسازه $A_{۴۱}$ ۲۳ $=(-۲۳)^{۵}(-۱)$ است. به طور مشابه همسازه‌های $A_{۴۲}, A_{۴۳}, A_{۴۴}$، به ترتیب ۱۳−، ۱۱ و ۸ هستند. حال می‌توانیم دترمینان A را از طریق ضرب هر یک از درایه‌های سطر چهارم در همسازه اش به دست آوریم، به این ترتیب

$$\det(A) = ۳(۲۳) + ۶(۸) + ۱(۱۱) + ۲(-۱۳) = ۱۰۲$$

به خاطر مقایسه هم که شده، بگذارید دترمینان A را با بسط نسبت به ستون دوم هم حساب کنیم. خواننده باید تحقیق کند که همسازه‌های $A_{۲۲}, A_{۱۲}$ و $A_{۴۲}$ به ترتیب ۱۴−، ۴۰ و ۸ هستند. در نتیجه:

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-۱)^{۱+۲}(۱)\det\begin{bmatrix} ۱ & -۴ & -۱ \\ ۲ & -۳ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} + (-۱)^{۲+۲}(۱)\det\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ ۲ & -۳ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \\ &+ (-۱)^{۳+۲}(۰)\det\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ ۱ & -۴ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} + (-۱)^{۴+۲}(۶)\det\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ ۱ & -۴ & -۱ \\ ۲ & -۳ & ۱ \end{bmatrix} \\ &= ۱۴ + ۴۰ + ۰ + ۴۸ = ۱۰۲\end{aligned}$$

البته این حقیقت که دوباره مقدار ۱۰۲ به دست آمد جای تعجب ندارد، چرا که مقدار دترمینان A از انتخاب سطر یا ستونی که برای بسط به کار می‌رود مستقل است.

ملاحظه می‌کنید که محاسبه $\det(A)$ وقتی که نسبت به ستون دوم بسط داده می‌شود، آسانتر از هنگامی است که نسبت به سطر دوم بسط می‌یابد. تفاوت در وجود یک صفر در سطر سوم نهفته است، که محاسبه یکی از همسازه‌ها را غیر ضروری می‌کند (یعنی همسازه $A_{۳۲}$). بنابراین مقرون به صرفه است که دترمینان یک ماتریس را نسبت به سطر یا ستونی محاسبه کنیم که بیشترین تعداد درایه صفر را دارد. در واقع، معمولا بهتر است که از طریق اعمال سطری مقدماتی، پیش از محاسبه دترمینان، صفر وارد ماتریس کنیم. این تکنیک، از سه خاصیت اول دترمینان بهره می‌گیرد.

خصوصیات دترمینان

۱. هرگاه B ماتریسی باشد که از تعویض دو سطر یا ستون ماتریس A $n\times n$ به دست می‌آید، $\det(B) = -det(A)$.

۲. اگر B ماتریسی باشد که از ضرب هر یک از درایه‌های یک سطر یا ستون ماتریس $n \times n$، A در اسکالر k به دست می‌آید، آنگاه $\det(B) = kdet(A)$.

۳. هرگاه B ماتریسی باشد که از اضافه کردن مضربی از سطر iام به سطر jام، یا اضافه کردن مضربی از ستون iام به ستون jام A بدست می‌آید و $i \neq j$، آنگاه $\det(B) = det(A)$.

به عنوان نمونه‌ای از کاربرد این سه خاصیت در محاسبه دترمینان، دترمینان ماتریس ۴ × ۴ A را که مدتی پیش مورد بحث قرار دادیم، محاسبه می‌کنیم. روشمان این است که با استفاده از خاصیت سوم، صفر را وارد ستون دوم کنیم و بعد نسبت به این ستون بسط دهیم. (عملیات سطری مقدماتی ای که در اینجا به کار می‌روند اضافه کردن مضاربی از سطر اول به سطرهای دوم و چهارم هستند.)حاصل به کار گیری این روش چنین است:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ & ۵ \\ ۱ & ۱ & -۴ & -۱ \\ ۲ & ۰ & -۳ & ۱ \\ ۳ & ۶ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ & ۵ \\ -۱ & ۰ & -۵ & -۶ \\ ۲ & ۰ & -۳ & ۱ \\ -۹ & ۰ & -۵ & -۲۸ \end{bmatrix} \\
&= ۱(-۱)^{۱+۲} \det \begin{bmatrix} -۱ & -۵ & -۶ \\ ۲ & -۳ & ۱ \\ -۹ & -۵ & -۲۸ \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

دترمینان ۳ × ۳ی حاصل را می‌توان به همین روش حساب کرد. با استفاده از عملیات سطری مقدماتی نوع سوم، دو تا صفر وارد ستون اول کنید و سپس نسبت به این ستون بسط دهید. نتیجه این عمل، مقدار ۱۰۲− است بنابراین:

$$\det(A) = ۱(-۱)^{۱+۲}(-۱۰۲) = ۱۰۲$$

خواننده بهتر است محاسبه $\det(A)$ را با طریقه قبلی مقایسه کنید تا پی ببرید که با به کارگیری خواص ۱،۲ و۳ چقدر کار مورد نیاز کاهش می‌یابد.

در فصول بعدی باید دترمینان‌های ماتریسهایی از نوع خاص را محاسبه کنیم. دو خاصیت بعدی دترمینان در این باره مفید واقع می‌شوند.

۴. دترمینان یک ماتریس بالا مثلثی برابر با حاصلضرب درایه‌های قطری آن است. به خصوص $\det(I) = ۱$.

۵. هرگاه دو سطر یا دو ستون یک ماتریس مساوی باشند، آنگاه دترمینان آن ماتریس صفر است.

به عنوان نمونه‌ای از خاصیت ۴، ملاحظه کنید که:

$$\det \begin{bmatrix} -۳ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۰ & -۶ \end{bmatrix} = (-۳)(۴)(-۶) = ۷۲$$

خاصیت۴، روش مناسبی برای محاسبه دترمینان یک ماتریس در اختیارمان می‌گذارد:

الف) با استفاده از حذف به روش گوس و خواص ۱، ۲ و ۳ در بالا، ماتریس را به یک ماتریس بالا مثلثی تقلیل دهید.
ب) حاصلضرب درایه‌های قطری را حساب کنید.
به عنوان مثال:

$$\det\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & -۱ & -۱ & ۴ \\ -۴ & ۵ & -۱۰ & -۶ \\ ۳ & -۲ & ۱۰ & -۱ \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ & -۵ & ۲ \\ ۰ & ۱ & -۲ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۴ & -۴ \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ & -۵ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۳ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۹ & -۶ \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ & -۵ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۳ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$= ۱.۱.۳.۶ = ۱۸$$

سه خاصیت آخری که برای دترمینان ارائه می‌کنیم، بکرات در فصول بعدی به‌کار خواهند رفت. واقعا شاید مهمترین خاصیت دترمینان این باشد که توصیف ساده برای ماتریس‌های وارون پذیر ارائه می‌دهد. (به خاصیت ۷ رجوع کنید).

۶. برای هر دو ماتریس $n \times n$ A, B، $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

۷. ماتریس $n \times n$ A وارون پذیر است اگر و تنها اگر $\det(A) \neq ۰$. به علاوه اگر A وارون پذیر باشد، آنگاه $\det(A^{-۱}) = (\det(A))^{-۱}$.

۸. به ازای هر ماتریس $n \times n$ A، دترمینان‌های A و A^t مساوی هستند.

پس به عنوان مثال، خاصیت ۷، تضمین می‌کند که ماتریس Aی صفحه ۲۰۹، وارون پذیر است چرا که $\det(A) = ۱۰۲$.

تمرینات

۱. تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) دترمینان یک ماتریس مربعی را می‌توان با بسط دادن ماتریس نسبت به هر یک از سطرها یا ستون‌ها حساب کرد.

ب) در محاسبه دترمینان یک ماتریس، عاقلانه است که نسبت به سطری بسط دهیم که بیشترین تعداد درایه‌های صفر را دارد.

ج) اگر دو سطر یا ستون A یکسان باشند آنگاه $\det(A) = ۰$

د) هرگاه B ماتریسی باشد که از تعویض دو سطر یا دو ستون A بدست می‌آید، آنگاه $\det(B) = \det(A)$.

ه) هرگاه B ماتریسی باشد که از ضرب تمام درایه‌های یکی از سطرها یا ستون‌های A در یک اسکالر به دست می‌آید، آنگاه $\det(A) = \det(B)$.

و) هرگاه B ماتریسی باشد که از اضافه کردن مضربی از یک سطر A به سطری دیگر به دست می‌آید آنگاه $\det(A) = \det(B)$.

ز) دترمینان یک ماتریس بالا مثلثی $n \times n$، حاصلضرب درایه‌های آن است.

ح) برای هر $A \in M_{n\times n}(F)$، $\det(A^t) = -\det(A)$.

ط) هرگاه $A, B \in M_{n\times n}(F)$ آنگاه $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.

ی) هرگاه Q ماتریسی وارون پذیر باشد، $\det(Q^{-۱}) = (\det(Q))^{-۱}$.

ک) Q ماتریسی وارون پذیر است اگر و تنها اگر $\det(Q) \neq ۰$.

۲. دترمینان ماتریس‌های ۲ × ۲ی زیر راحساب کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۴ & -۵ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -۱ & ۷ \\ ۳ & ۸ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۲+i & -۱+۳i \\ ۱-۲i & ۳-i \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ۳ & ۴i \\ -۶i & ۲i \end{bmatrix}$

۳. دترمینان ماتریس‌های زیر را به طریقه ذکر شده حساب کنید.

الف)نسبت به سطر اول $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ & -۳ \\ ۲ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ ب) نسبت به ستون دوم $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ -۱ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$

ج) نسبت به ستون دوم $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ & -۳ \\ ۲ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ د) نسبت به سطر سوم $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ -۱ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$

ه) نسبت به سطر سوم $\begin{bmatrix} ۰ & ۱+i & ۲ \\ -۲i & ۰ & ۱-i \\ ۳ & ۴i & ۰ \end{bmatrix}$

و) نسبت به ستون سوم $\begin{bmatrix} i & ۲+i & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲i \\ ۰ & -۱ & ۱-i \end{bmatrix}$

ز) نسبت به ستون چهارم
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ح) نسبت به سطر چهارم
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & 8 \\ -2 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

۴. دترمینان ماتریس‌های داده شده را با هر روش مجاز دلخواهی محاسبه کنید.

الف)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ب)
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -8 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ج)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

د)
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ه)
$$\begin{bmatrix} i & 2 & -1 \\ 3 & 1+i & 2 \\ -2i & 1 & 4-i \end{bmatrix}$$

و)
$$\begin{bmatrix} -1 & 2+i & 3 \\ 1-i & i & 1 \\ 3i & 2 & -1+i \end{bmatrix}$$

ز)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ح)
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -12 \\ -5 & 12 & -14 & 19 \\ -9 & 22 & -20 & 31 \\ -4 & 9 & -14 & 15 \end{bmatrix}$$

۵. فرض کنید $M \in M_{n\times n}(F)$ را بتوان به صورت زیر نوشت
$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ O & I \end{bmatrix}$$

که در آن A ماتریس مربعی ، I ماتریس همانی است و O ماتریس صفر است. ثابت کنید $\det(M) = \det(A)$.

۶. فرض کنید $M \in M_{n\times n}(F)$ را بتوان به صورت زیر نوشت:
$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$$

که A و C ماتریس مربعی و O ماتریس صفر است. ثابت کنید $\det(M) = det(A).\det(C)$.

۴-۵ طریقه‌ای برای توصیف دترمینان

در بخش‌های ۴-۲ و ۴-۳ چند خاصیت را برای دترمینان ثابت کردیم. در این بخش، ثابت می‌کنیم که سه تا از این خاصیت‌ها هستند که دترمینان را مشخص می‌کنند، به این معنا که تنها تابع $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ که این سه خاصیت را دارد ، دترمینان است. این طریقه توصیف دترمینان، همان است که در بخش ۴-۱، برای اثبات رابطه میان $\det \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ و مساحت متوازی الاضلاعی که u و v مشخص می‌کنند، به کار رفت. اولین این سه خاصیت که دترمینان را مشخص می‌کنند، همان است که در قضیه ۴-۳ بیان شد.

تعریف: تابع $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ را تابعی n-خطی گویند، هرگاه نسبت به هر یک از سطرهای یک ماتریس $n \times n$، وقتی که $n - 1$ سطر باقیمانده ثابت باشند خطی باشد، یعنی هرگاه برای هر $r = 1, 2, ..., n$، هر اسکالر k و هر u، v و a_i در F^n داشته باشیم:

$$\delta \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ u + kv \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ u \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + k\delta \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ v \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

مثال ۱. تابع $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ که به صورت $\delta(A) = 0$ برای هر $A \in M_{n\times n}(F)$ تعریف می‌شود، تابعی n-خطی است. □

مثال ۲. برای هر $j = 1, 2, ..., n$ تابع $\delta_j : M_{n\times n}(F) \to F$ را به صورت $\delta_j(A) = A_{1j}A_{2j}...A_{nj}$ برای هر $A \in M_{n\times n}(F)$ تعریف کنید، یعنی $\delta(A)$ را برابر با حاصلضرب درایه‌های ستون jام A تعریف کنید. فرض کنید، $A \in M_{n\times n}(F)$ $a_i = [A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{in}]$ و $v = (b_1, b_2, ..., b_n) \in F^n$. در این صورت، δ_j تابعی n-خطی

است، چرا که برای هر اسکالر k داریم:

$$\delta_j \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ a+k_v \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = A_{1j}...A_{(r-1)j}(A_{rj}+kb_j)A_{(r+1)j}...A_{nj}$$

$$\begin{aligned} &= A_{1j}...A_{(r-1)j}A_{rj}A_{(r+1)j}...A_{nj} + A_{1j}...A_{(r-1)j}(kb_j)A_{(r+1)j}...A_{nj} \\ &= A_{1j}...A_{(r-1)j}A_{rj}A_{(r+1)j}...A_{nj} + k(A_{1j}...A_{(r-1)j}b_jA_{(r+1)j}...A_{nj}) \end{aligned}$$

$$= \delta_j \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ a_r \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + k\delta_j \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ v \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

□

مثال ۳. تابع $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ که برای هر $A \in M_{n\times n}(F)$، به صورت: $\delta(A) = A_{11}A_{22}...A_{nn}$ تعریف می‌شود (به عبارت دیگر، $\delta(A)$ برابر با حاصلضرب درایه‌های قطری A است)، تابعی n-خطی است. □

مثال ۴. تابع $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ که برای هر $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$، به صورت $\delta(A) = tr(A)$ تعریف می‌شود. به ازای $n \geq 2$ یک تابع n-خطی نیست، چرا که اگر I ماتریس همانی $n \times n$ و A ماتریسی باشد که از ضرب سطر اول I در ۲ به دست می‌آید، آنگاه $\delta(A) = n + 1 \neq 2n = 2.\delta(I)$. □

قضیه ۳.۴، تصریح می‌کند که دترمینان، تابعی n-خطی است. برای مقاصدی که ما داریم، این مهمترین نمونه از توابع

n-خطی است. حال دومین خصوصیتی را که در مشخص سازی دترمینان به کار می‌رود، معرفی می‌کنیم.

تعریف:. تابع n-خطی $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ را **متناوب** گویند هرگاه به ازای هر $A \in M_{n\times n}(F)$، در صورتی که دو سطر مجاور A یکسان باشند، داشته باشیم $\delta(A) = ۰$.

قضیه ۱۰.۴. فرض کنید $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$، یک تابع n-خطی متناوب باشد.

الف) هرگاه $A \in M_{n\times n}(F)$، و b ماتریسی باشد که از تعویض دو سطر دلخواه A به دست می‌آید، آنگاه $\delta(B) = -\delta(A)$.

ب) هرگاه $A \in M_{n\times n}(F)$ دو سطر یکسان داشته باشد، آنگاه $\delta(A) = ۰$.

برهان. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$ و B ماتریسی باشد که از تعویض سطرهای rام و sام A به دست می‌آید، که $r < s$. نتیجه را ابتدا در حالتی که $s = r + ۱$ ثابت می‌کنیم. از آنجا که $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ تابعی n-خطی است که متناوب هم هست، داریم:

$$
\begin{aligned}
۰ &= \delta\begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_r + a_{r+۱} \\ a_r + a_{r+۱} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \delta\begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_r \\ a_r + a_{r+۱} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_{r+۱} \\ a_r + a_{r+۱} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \\
&= \delta\begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_r \\ a_r \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_r \\ a_{r+۱} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_{r+۱} \\ a_r \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_{r+۱} \\ a_{r+۱} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \\
&= ۰ + \delta(A) + \delta(B) + ۰
\end{aligned}
$$

بنابراین $\delta(B) = -\delta(A)$.

حال فرض کنید $s > r + 1$ و سطرهای A، عبارت باشند از $a_1, ...a_n$. با شروع از a_r و a_{r+1}، به ترتیب a_r را با سطرهای بعدی عوض کنید، تا سطرها به ترتیب زیر درآیند:

$$a_1, a_2, ..., a_{r-1}, a_{r+1}, ..., a_s, a_r, a_{s+1}, ...a_n$$

در کل، $s - r$ بار تعویض سطرهای مجاور مورد نیاز است تا این دنباله به وجود آید. حال a_s را به ترتیب با سطرهای قبلی عوض کنید، تا سطرها به این ترتیب درآیند:

$$a_1, a_2, ..., a_{r-1}, a_s, a_{r+1}, ..., a_{s-1}, a_r, a_{s+1}, ..., a_n$$

این فرآیند، نیازمند $s - r - 1$ بار تعویض سطرهای مجاور مورد نیاز است و طی آن ماتریس B تولید می‌شود. از بند قبل نتیجه می‌شود که:

$$\delta(B) = (-1)^{(s-r)+(s-r-1)}\delta(A) = -\delta(A)$$

ب) فرض کنید سطرهای rام و sام $A \in M_{n\times n}(F)$ یکسان باشند، که $r < s$. هرگاه $s = r + 1$، آنگاه $\delta(A) = 0$، چرا که δ متناوب است و دو سطر مجاور A یکسان هستند. هرگاه $s > r + 1$، فرض کنید B ماتریسی باشد که از تعویض سطرهای $r + 1$ام و sام A به دست می‌آید. در این صورت $\delta(B) = 0$، چرا که دو سطر مجاور B یکسان هستند. اما طبق الف، $\delta(B) = -\delta(A)$. در نتیجه $\delta(A) = 0$. □

نتیجه ۱. فرض کنید $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$، یک تابع n-خطی متناوب باشد. هرگاه B ماتریسی باشد که از اضافه کردن مضربی از یک سطر A به سطری دیگر به دست می‌آید، آنگاه $\delta(B) = \delta(A)$.

برهان. فرض کنید B از اضافه کردن k برابر سطر iام $A \in M_{n\times n}(F)$ به سطر jام به دست آید. که در اینجا $i \neq j$ و فرض کنید C از گذاشتن سطر iام Aبه جای سطرjام به دست آید. در این صورت سطرهای A،B و C همگی به جز سطر jام یکسان هستند. به علاوه، سطر jام B، مجموع سطر jام A و k برابر سطر jام C است. از آنجا که δ تابعی n-خطی است و C دو سطر یکسان دارد، نتیجه می‌شود که:

$$\delta(B) = \delta(A) + k\delta(C) = \delta(A) + k.0 = \delta(A)$$

□

اثبات نتیجه زیر شبیه اثبات نتیجه قضیه ۴-۶ است. به تمرین ۱۱ مراجعه کنید.

نتیجه ۲. فرض کنید $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ یک تابع n-خطی متناوب باشد. هرگاه رتبه $M \in M_{n\times n}(F)$ کمتر از n باشد، آنگاه $\delta(M) = 0$.

برهان. تمرین. □

نتیجه ۳. فرض کنید $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ یک تابع n-خطی متناوب باشد و $E_۱$، $E_۲$ و $E_۳$ به ترتیب ماتریس‌های مقدماتی از نوع اول، دوم و سوم باشند. فرض کنید $E_۲$ از ضرب یکی از سطرهای I در اسکالر ناصفر k به دست آید. در این صورت $\delta(E_۱) = -\delta(I)$ و $\delta(E_۲) = k\delta(I)$ و $\delta(E_۳) = \delta(I)$.

برهان. تمرین. □

می خواهیم نشان دهیم که تحت شرایط خاصی، تنها تابع متناوب n-خطی $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ دترمینان است، یعنی برای هر $A \in M_{n\times n}(F)$، $\delta(A) = \det(A)$. با توجه به نتیجه سوم قضیه ۱۰.۴ و حقایق مذکور در صفحه ۲۰۱ در مورد دترمینان یک ماتریس مقدماتی، این تنها در صورتی امکان پذیر است که ۱ $= \delta(I)$. در نتیجه، شرط سومی که در مشخص سازی دترمینان به کار میرود این است که دترمینان ماتریس همانی ۱ است. پیش از این که بتوانیم توصیف مورد نظر از دترمینان را ثابت کنیم، ابتدا باید نشان دهیم که یک تابع n-خطی متناوب که ۱ $= \delta(I)$، تابعی ضربی است. برهان این نتیجه با برهان قضیه ۷.۴ یکسان است و بنابراین حذف می‌گردد (به تمرین ۱۲ رجوع کنید).

قضیه ۱۱.۴. فرض کنید $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ تابعی n-خطی باشد به گونه ای که ۱ $= \delta(I)$، برای هر $A, B \in M_{n\times n}(F)$ داریم: $\delta(AB) = \delta(A)\cdot\delta(B)$.

برهان. تمرین. □

قضیه ۱۲.۴. هرگاه $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ تابعی n-خطی و متناوب باشد که ۱ $= \delta(I)$، آنگاه برای هر $A \in M_{n\times n}(F)$، $\delta(A) = \det(A)$.

برهان. فرض کنید $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ تابعی n-خطی و متناوب باشدکه ۱ $= \delta(I)$ و همچنین $A \in M_{n\times n}(F)$. اگر رتبه A کمتر از n باشد، آنگاه طبق نتیجه دوم قضیه ۱۰.۴، ۰ $= \delta(a)$. چون طبق نتیجه قضیه ۶.۴ ۰ $= \det(A)$ در این حالت $\delta(A) = \det(A)$. از طرف دیگر اگر رتبه A n باشد، معکوس پذیر است و بنابراین حاصلضرب ماتریس‌های مقدماتی است (نتیجه ۳ از قضیه ۶.۳)، مثلا $A = E_m...E_۲E_۱$. از آنجا که ۱ $= \delta(I)$، از نتیجه ۳ی قضیه ۴-۱۰ و حقایق صفحه ۲۰۱ نتیجه می‌شود که برای هر ماتریس مقدماتی E، $\delta(E) = det(E)$. در نتیجه طبق قضایای ۱۱.۴ و ۷.۴ داریم:

$$\begin{aligned}\delta(A) &= \delta(E_m...E_۲E_۱)\\ &= \delta(E_m)...\delta(E_۲)\cdot\delta(E_۱)\\ &= \det(E_m)...\det(E_۲)\cdot\det(E_۱)\\ &= \det(E_m...E_۲E_۱)\end{aligned}$$

$$= \det(A)$$

□

قضیه ۴.۱۲، توصیف مورد نظرمان را از دترمینان ارایه می‌دهد. دترمینان، آن تابع یکتای $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ای است که n-خطی متناوب و دارای این خاصیت است که $\delta(I) = ۱$.

تمرینات

۱. تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) هر تابع n-خطی $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ تبدیلی خطی است.

ب) هر تابع n-خطی $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$، نسبت به هر یک از سطرهای یک ماتریس $n \times n$، وقتی که $n - ۱$ سطر دیگر ثابت نگه داشته شوند، تابعی خطی است.

ج) هرگاه $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ یک تابع n-خطی متناوب باشد و $A \in M_{n\times n}(F)$ دو سطر یکسان داشته باشد، آنگاه $\delta(A) = ۰$.

د) هرگاه $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ یک تابع n-خطی متناوب باشد و B از تعویض دو سطر $A \in M_{n\times n}(F)$ حاصل شده باشد، آنگاه $\delta(B) = \delta(A)$.

ه) تنها یک تابع n-خطی متناوب $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ وجود دارد.

و) تابع $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ که به صورت $\delta(A) = ۰$ برای هر $A \in M_{n\times n}(F)$تعریف می‌شود، یک تابع n-خطی متناوب می‌باشد.

۲. همه توابع ۱-خطی $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ را مشخص کنید.

۳.تعیین کنید که از میان توابع $\delta : M_{۳\times ۳}(F) \to F$ در تمرینات ۳ الی ۱۰، کدام یک توابعی ۳ خطی هستند. برای هر یک از پاسخ‌های خود دلیل بیاورید.

۳. $\delta(A) = k$، که k اسکالری ناصفر است.

۴. $\delta(A) = A_{۲۲}$.

۵. $\delta(A) = A_{۱۱}A_{۲۳}A_{۳۲}$

۶. $\delta(A) = A_{۱۱} + A_{۲۳} + A_{۳۲}$

۷. $\delta(A) = A_{۱۱}A_{۲۱}A_{۳۲}$

۸. $\delta(A) = A_{۱۱}A_{۲۱}A_{۳۲}$

۹. $\delta(A) = A_{۱۱}^{۲}A_{۲۲}^{۲}A_{۳۳}^{۲}$

۱۰. $\delta(A) = A_{۱۱}A_{۲۲}A_{۳۳} - A_{۱۱}A_{۲۱}A_{۳۲}$

۱۱. نتایج ۲ و ۳ از قضیه ۴-۱۰ را ثابت کنید.

۱۲. قضیه ۴-۱۱ را ثابت کنید.

۱۳. ثابت کنید $\det : M_{2\times 2}(F) \to F$ تابعی دو خطی از ستون‌های $A \in M_{2\times 2}(F)$ است.

۱۴. فرض کنید $a, b, c, d \in F$. ثابت کنید تابع $\delta : M_{2\times 2}(F) \to F$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، تابعی دو خطی است.

$$\delta(A) = A_{11}A_{22}a + A_{11}A_{21}b + A_{12}A_{22}c + A_{12}A_{21}d$$

۱۵. ثابت کنید که $\delta : M_{2\times 2}(F) \to F$ تابعی دو خطی است اگر و تنها اگر به ازای اسکالرهایی مانند $a, b, c, d \in F$ به شکل زیر باشد:

$$\delta(A) = A_{11}A_{22}a + A_{11}A_{21}b + A_{12}A_{22}c + A_{12}A_{21}d$$

۱۶. ثابت کنید اگر $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ تابع n-خطی متناوبی باشد، آنگاه اسکالری مانند k موجود است به طوری که برای هر $A \in M_{n\times n}(F)$، $\delta(A) = k\det(A)$.

۱۷. ثابت کنید که ترکیبی خطی از دو تابع n-خطی، تابعی است n-خطی که در اینجا جمع و ضرب اسکالر، مانند مثال ۳ از بخش ۲-۱ تعریف می‌گردند.

۱۸.ثابت کنید که مجموعه توابع n-خطی، بر یک میدان مانند F تحت اعمال جمع و ضرب اسکالر تابعی که در مثال ۳ از بخش ۱-۲ تعریف شد، فضایی برداری است.

۱۹. فرض کنید $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ تابعی n-خطی بوده، و مشخصه F مخالف دو باشد. ثابت کنید که اگر هنگامی که B از تعویض دو سطر دلخواه $A \in M_{n\times n}(F)$ به دست می‌آید، داشته باشیم $\delta(B) = -\delta(A)$، آنگاه هنگامی که $M \in M_{n\times n}(F)$ دو سطر یکسان داشته باشد، $\delta(M) = 0$.

۲۰. مثالی ارائه دهید که نشان دهد استلزام مذکور در تمرین ۱۹، در حالتی که مشخصه F دو باشد، لزوماً برقرار نیست.

فصل ۵

قطری کردن

در این فصل به بررسی مساله‌ای می‌پردازیم که به اصطلاح، مساله قطری سازی نامیده می‌شود. به ازای عملگر خطی مفروض T بر فضای متناهی البُعد V، به دنبال جواب‌هایی برای پرسش‌های زیر هستیم:

۱. آیا پایه مرتب β برای V وجود دارد که $[T]_\beta$ ماتریسی قطری باشد؟

۲. اگر چنین پایه‌ای وجود داشته باشد، چگونه می‌توانیم آن را پیدا کنیم؟

از آنجا که محاسباتی که شامل ماتریس‌های قطری هستند، ساده می‌باشند، پاسخ مثبت به سوال اول، منجر به درک بهتر از نحوه عملکرد T روی V می‌شود و پاسخ به سوال دوم، به ما این امکان را می‌دهد که برای بسیاری از مسایل عملی که در قالب جبر خطی قابل بیان هستند، پاسخهای ساده‌ای بیابیم. برخی از این سوال‌ها و پاسخ‌های آنها را در این فصل مورد بررسی قرار خواهیم داد: به عنوان مثال، بخش ۵-۳ را ملاحظه کنید.

هر راه حلی برای مساله قطری سازی، به طور طبیعی منجر به دو مفهوم مقدار ویژه و بردار ویژه می‌گردد. علاوه بر نقش مهمی که این دو مفهوم در مساله قطری سازی دارند، همانطور که در فصل ۷ خواهیم دید، در مطالعه بسیاری از عملگرهای قطری ناپذیر هم ابزار مفیدی واقع می‌شوند.

۵-۱ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

از آنجا که نمایش ماتریسی عملگرهای خطی، مورد توجه ماست، این بخش را با یادآوری قضیه ۲۳.۲ آغاز می‌کنیم، که نحوه ارتباط میان نمایش‌های ماتریسی متفاوت را بیان می‌کند. فرض کنید T عملگر خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد

بوده، β' و β پایه‌های مرتبی برای V باشند. در این صورت:

$$[T]_{\beta'} = Q^{-۱}[T]_{\beta}Q$$

که در اینجا Q، ماتریس تبدیل مختصاتی است که مختصات در پایهβ' را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند. یک حالت خاص از این رابطه در قضیه زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد، که بیان دیگری از تمرین ۱۱ بخش ۲-۵ است.

قضیه ۵.۱. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$ و γ پایه مرتبی برای F^n باشد. در این صورت $[L_A]_\gamma = Q^{-۱}AQ$، که در اینجا Q، ماتریس $n \times n$ است که ستون jاُم آن بردار jاُم γ است.

برهان. فرض کنید β پایه مرتب استاندارد F^n باشد. به سادگی دیده می‌شود که ماتریس Q، ماتریس تبدیل مختصاتی است که مختصات در پایه γ را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند. در نتیجه:

$$[L_A]_\gamma = Q^{-۱}[L_A]_\beta Q = Q^{-۱}AQ$$

$\square$

مثال ۱. به عنوان مثالی برای قضیه ۵.۱، فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \in M_{۲\times ۲}(\mathbb{R}), \qquad \gamma = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \right\}$$

همچنین فرض کنید

$$Q = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

ماتریسی باشد که ستون‌های آن بردارهای γ هستند. به راحتی می‌توان بررسی کرد که

$$Q^{-۱} = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$$

پس می‌توانیم با به کارگیری قضیه ۵.۱، نتیجه بگیریم که:

$$[L_A]_\gamma = Q^{-۱}AQ = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۱ & -۸ \\ ۱۸ & ۱۳ \end{bmatrix}$$

$\square$

در انتهای بخش ۲-۵ رابطه تشابه را معرفی کردیم و دیدیم که نمایشهای ماتریسی مختلف یک عملگر خطی، با هم متشابه هستند. حال عکس مطلب را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲.۵. فرض کنید T عملگر خطی بر یک فضای برداری nبعدی مانند V بوده، β پایه‌ای مرتب برای V باشد. هرگاه B یک ماتریس $n \times n$ متشابه با $[T]_\beta$ باشد، آنگاه پایه مرتبی مانند γ برای V وجود دارد که $B = [T]_\gamma$.

برهان. فرض کنید B با $[T]_\beta$ متشابه باشد. در این صورت، ماتریس وارون پذیری مانند Q وجود دارد که $B = Q^{-1}[T]_\beta Q$. فرض کنید $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ و برای $1 \leq j \leq n$ تعریف کنید:

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} Q_{ij} v_i$$

در این صورت $\gamma = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ پایه مرتبی برای V است و Q ماتریس تبدیل مختصاتی است که مختصات در پایه γ را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند (تمرین ۱۲ از بخش ۲-۵). در نتیجه طبق قضیه ۲۳.۲:

$$[T]_\gamma = Q^{-1}[T]_\beta Q = B$$

□

مفهوم تشابه به این دلیل در مساله قطری سازی مفید واقع می‌شودکه می‌توان با استفاده از آن، مساله را به زبان ماتریس‌ها بیان کرد. حال مفهوم قطری پذیری را هم برای ماتریس‌ها و هم برای عملگرها معرفی می‌کنیم.

چند تعریف: عملگر خطی T بر فضای برداری V را قطری پذیر گوییم هرگاه پایه مرتبی برای V مانند β وجود داشته باشد که $[T]_\beta$ ماتریس قطری باشد.

ماتریس مربعی A را **قطری پذیر** گویند هرگاه A متشابه با یک ماتریس قطری باشد.

قضیه زیر این دو تعریف را به هم ربط می‌دهد.

قضیه ۳.۵. فرض کنید T عملگر خطی بر یک فضای برداری nبُعدی مانند V بوده، β پایه‌ای مرتب برای V باشد. در این صورت، T قطری پذیر است، اگر و تنها اگر $[T]_\beta$ ماتریسی قطری پذیر باشد.

برهان. فرض کنید T قطری پذیر باشد. در این صورت، پایه مرتبی مانند γ برای V وجود دارد به طوری که $[T]_\gamma$ ماتریسی قطری است. طبق قضیه ۲۳.۲، $[T]_\beta$ با $[T]_\gamma$ متشابه است و بنابراین $[T]_\beta$ قطری پذیر است.

حال فرض کنید $[T]_\beta$ قطری پذیر باشد. در این صورت، $[T]_\beta$ با یک ماتریس قطری مانند B متشابه است. طبق قضیه ۲.۵، پایه مرتبی مانند γ برای V وجود دارد که $B = [T]_\gamma$ و بنابراین T قطری پذیر است. □

نتیجه: ماتریس A قطری پذیر است اگر و تنها اگر L_A قطری پذیر باشد.

با استفاده از قضیه ۳.۵، می‌توانیم مساله‌ی قطری سازی را به زبان ماتریس‌ها بیان کنیم.

۱. آیا ماتریس مربعی مفروض A قطری پذیر است؟

۲. اگر A قطری پذیر است، چگونه می‌توان ماتریس وارون پذیری مانند Q یافت که $Q^{-1}AQ$ ماتریسی قطری باشد؟

اولین مورد از چندین نتیجه‌ای را که به حل مساله قطری پذیری می‌آنجامند، ارائه می‌کنیم.

قضیه ۴.۵. عملگر خطی T بر فضای برداری متناهی البُعد V قطری پذیر است، اگر و تنها اگر پایه مرتبی مانند $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ برای V و اسکالرهای (نه لزوماً متمایز) $\lambda_1, ..., \lambda_n$ موجود باشند به طوری که برای هر $1 \leq j \leq n, T(v_j) = \lambda_j v_j$، تحت این شرایط:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

برهان. فرض کنید T قطری پذیر باشد. در این صورت، پایه مرتبی برای V مانند $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ موجود دارد به طوری که $[T]_\beta = D$ ماتریسی قطری است. برای هر j، که $1 \leq j \leq n$، قرار دهید $\lambda_j = D_{jj}$. در این صورت برای هر j،

$$T(v_j) \sum_{i=1}^{n} D_{ij} v_i = D_{jj} v_j = \lambda_j v_j$$

برعکس، فرض کنید $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ پایه مرتبی برای V باشد، به گونه‌ای که به ازای اسکالرهای $\lambda_1, ..., \lambda_n$، $T(v_j) = \lambda_j v_j$. در این صورت به وضوح:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

□

در قضیه ۴.۵، هر یک از بردارهای v در پایه β برای V، در این شرط صدق می‌کند که به ازای اسکالری مانند λ، $T(v) = \lambda v$. از آنجا که v در یک پایه قرار دارد، v ناصفر است. این دو موضوع، انگیزه لازم برای تعاریف زیر را فراهم می‌کند.

چند تعریف: فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری V باشد. عنصر ناصفر $v \in V$ را یک **بردار ویژه** T گویند، هرگاه اسکالر λ موجود باشد به طوری که $T(v) = \lambda v$. اسکالر λ را یک مقدارویژه T، متناظر با بردارویژه v می‌نامند.

فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد که درایه‌هایش در میدان F واقع اند. بردار ناصفر $v \in F^n$، یک **بردار ویژه** A است، هرگاه v یک بردار ویژه L_A باشد، یعنی این که به ازای اسکالری مانند λ، $Av = \lambda v$. اسکالر λ، مقدار ویژه A، متناظر با بردار ویژه v نام دارد.

با به کارگیری این واژه‌ها، قضیه ۴.۵ را می‌توانیم به صورت جدید زیر بیان کنیم.

قضیه ۴.۵(بیان جدید): عملگر خطی T بر فضای برداری متناهی البُعد V قطری پذیر است اگر و تنها اگر، پایه مرتبی مانند β برای V، متشکل از بردارهای ویژه T وجود داشته باشد. به علاوه، اگر T قطری پذیر بوده، $\beta = \{v_۱, v_۲, ..., v_v\}$ پایه‌ای مرتب متشکل از بردارهای ویژه T باشد و $D = [T]_\beta$، آنگاه D ماتریسی قطری است و برای هر $۱ \leq i \leq n$، D_{ii} مقدار ویژه متناظر با v_i می‌باشد.

پیش از ادامه بحث درباره مساله قطری سازی، دو نمونه از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ارائه می‌کنیم.

مثال ۲. فرض کنید

$$v_۲ = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}, v_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

از آنجا که

$$L_A(v_۱) = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۲ \end{bmatrix} = -۲ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} = -۲v_۱$$

$v_۱$ یک بردار ویژه L_A، و بنابراین یک بردار ویژه A است، که مقدار ویژه متناظر با آن $\lambda_۱ = -۲$ است.

$$L_A(v_۲) = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۵ \\ ۲۰ \end{bmatrix} = ۵ \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = ۵v_۲$$

و بنابراین $v_۲$ یک بردار ویژه L_A و در نتیجه یک بردار ویژه A، متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۲ = ۵$ می‌باشد. توجه کنید که $\beta = \{v_۱, v_۲\}$ پایه مرتبی برای $\mathbb{R}^۲$ است و بنابراین طبق قضیه ۴.۵:

$$[L_A]_\beta = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

نهایتا فرض کنید:

$$Q = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

در این صورت، طبق قضیه ۱.۵:

$$Q^{-۱}AQ = [L_A]_\beta = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین A قطری پذیر است. □

مثال ۳. فرض کنید $C^\infty(\mathbb{R})$ نشانگر مجموعه همه توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ باشد که از هر مرتبه‌ای مشتق دارند. (بنابراین $C^\infty(\mathbb{R})$، توابع چند جمله ای، توابع سینوس و کسینوس، توابع نمایی و غیره را در بر دارد). واضح است که $C^\infty(\mathbb{R})$

زیر فضایی از فضای برداری $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ است، که همانطور در بخش۱-۲ تعریف شد، متشکل از همه توابع $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است. فرض کنید $T : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$ تابعی باشد که به صورت $T(f) = f'$ یعنی مشتق f تعریف شده باشد. به راحتی می‌توان بررسی کرد که T عملگری خطی بر$C^{\infty}(\mathbb{R})$ است. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه T را تعیین خواهیم کرد.

فرض کنید که f، یک بردار ویژه T متناظر با مقدار ویژه λ باشد. در این صورت، $f' = T(f) = \lambda f$. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است که هر جواب آن به ازای عدد ثابتی مانند c، به صورت $f(t) = ce^{\lambda t}$ است. در نتیجه، هر عدد حقیقی λ یک مقدار ویژه T است. λ متناظر با همه بردارهای ویژه به شکل $ce^{\lambda t}$ به ازای $c \neq ۰$ است. توجه کنید که به ازای $\lambda = ۰$، بردارهای ویژه λ توابع ثابت ناصفر هستند. □

مثال۲ تکنیک قطری کردن یک ماتریس $A_{n\times n}$ را نشان می‌دهد: پایه ای برای F^n متشکل از بردارهای ویژه A بیابید وماتریس Q را که ستونهای آن، n عضو پایه اند، تشکیل دهید. در این صورت طبق قضایای۵.۱ و ۵.۴، $Q^{-۱}AQ$ ماتریسی قطری است. برای این که بتوانیم از این روش استفاده کنیم، به روشی برای تعیین بردارهای ویژه یک ماتریس یا عملگر خطی نیاز داریم. همان طور که خواهیم دید، وقتی که مقادیر ویژه را پیدا کنیم، بردارهای ویژه به راحتی تعیین می‌گردند. بنابراین، کار را با بحث در مورد روشی برای یافتن مقادیر ویژه آغاز می‌کنیم. برای تسهیل این بحث، قضیه بعدی را برای ایجاد انگیزه برای تعریف دترمینان یک عملگر خطی به کار می‌بریم.

قضیه ۵.۵. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد، و β و γ پایه‌های مرتبی برای V. در این صورت، $\det([T]_\beta) = \det([T]_\gamma)$.

برهان. طبق قضیه ۵.۱، ماتریس وارون پذیری مانند Q وجود دارد به طوری که $[T]_\gamma = Q^{-۱}([T]_\beta)Q$ در نتیجه:

$$\begin{aligned}
\det([T]_\gamma) &= \det(Q^{-۱}[T]_\beta Q)\\
&= \det(Q^{-۱}).\det([T]_\beta).\det(Q)\\
&[\det(Q)]^{-۱}.\det([T]_\beta).\det(Q) = \det([T]_\beta)
\end{aligned}$$

□

تعریف:. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد. دترمینان T را که با $\det(T)$ نشان داده می‌شود، به این صورت تعریف می‌کنیم: پایه مرتب دلخواهی مانند β برای V اختیار کنید و $\det(T)$ را برابر $\det([T]_\beta)$ تعریف کنید.

با توجه به قضیه ۵.۵ دترمینان یک عملگر خطی خوش تعریف است، چرا که از انتخاب پایه مرتب مستقل می‌باشد.

مثال ۴. فرض کنید $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ به این صورت تعریف شود: $T(f) = f'$، یعنی مشتق f. برای محاسبه $det(T)$، فرض کنید $\beta = \{1, x, x^2\}$، پایه مرتب استاندارد $P_2(\mathbb{R})$ باشد. در اینصورت:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $det(T) = det([T]_\beta) = 0$. □

نتیجه بعدی، خصوصیات مقدماتی دترمینان یک عملگر خطی را ثابت می‌کند. اکثر این نتایج، نتیجه فوری خواص مشابه در مورد دترمینان‌ها هستند.

قضیه ۶.۵. فرض کنید T عملگری خطی برفضای متناهی البُعد V باشد. در این صورت:

الف) T وارون پذیر است اگر و تنها اگر $det(T) \neq 0$.

ب) هرگاه T وارون پذیر باشد، آنگاه $det(T^{-1}) = [det(T)]^{-1}$.

ج) برای هر دو عملگر خطی U و V، $det(UV) = det(U)det(V)$..

د) برای هر اسکالر λ و هر پایه مرتب β برای V،

$$det(T - \lambda I_V) = det(A - \lambda I)$$

که در آن $A = [T]_\beta$.

برهان. اثبات‌های الف، ب و ج به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

د) فرض کنید λ یک اسکالر و β پایه ای مرتب برای V باشد و فرض کنید $A = [T]_\beta$ در این صورت، $[I_V]_\beta = I$ و بنابراین $T - \lambda I_V = A - \lambda I$. بنابراین طبق تعریف داریم: $det(T - \lambda I_V) = det(A - \lambda I)$. □

قضیه بعد، روشی برای محاسبه مقادیر ویژه به ما می‌دهد.

قضیه ۷.۵. فرض کنید T عملگری خطی برفضای متناهی البُعد V باشد. اسکالر λ، یک مقدار ویژه T است اگر و تنها اگر $det(T - \lambda I) = 0$.

برهان. اسکالر λ یک مقدار ویژه T است، اگر و تنها اگربردار ناصفری مانند $v \in V$ وجود داشته باشد که $T(v) = \lambda v$، و یا $(T - \lambda I)(v) = 0$. طبق قضیه ۲.۵، این برقرار است اگر تنها اگر $T - \lambda I$ وارون پذیر نباشد. اما طبق قضیه ۶.۵، این نتیجه معادل آن است که $det(T - \lambda I) = 0$. □

نتیجه ۱. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$. اسکالر λ، یک مقدار ویژه A است اگر و تنها اگر $det(A - \lambda I) = 0$

برهان. به عهده خواننده است. □

مثال ۵. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix} \in M_{۲\times ۲}(\mathbb{R})$$

از آنجا که

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} ۱-\lambda & ۱ \\ ۴ & ۱-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^۲ - ۲\lambda - ۳ = (\lambda - ۳)(\lambda + ۱)$$

تنها مقادیر ویژه A، ۳ و ۱− هستند. □

مثال ۶. فرض کنید T عملگری خطی بر $P_۲(\mathbb{R})$ باشد که چنین تعریف می‌شود: $T(f(x)) = f(x) + (x+۱)f'(x)$ و فرض کنید β پایه مرتب استاندارد $P_۲(\mathbb{R})$ باشد. در این صورت:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

از آنجا که

$$\begin{aligned} \det(T - \lambda I) = \det([T]_\beta - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} ۱-\lambda & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲-\lambda & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۳-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (۱-\lambda)(۲-\lambda)(۳-\lambda) \\ &= -(\lambda-۱)(\lambda-۲)(\lambda-۳) \end{aligned}$$

λ یک مقدار ویژه T است اگر و تنها اگر $\lambda = ۱$، $\lambda = ۲$ یا $\lambda = ۳$. □

نتیجه ۲. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای متناهی البُعد V بوده، β پایه ای مرتب برای V باشد. در این صورت، λ یک مقدار ویژه برای T است اگر و تنها اگر مقداری ویژه برای $[T]_\beta$ باشد.

برهان. به عهده خواننده است. □

مثالهای ۵و ۶، این مطلب را به ذهن القاء می‌کنند که برای هر ماتریس $n \times n$، مانند A، $\det(A - \lambda I)$ چند جمله‌ایی است بر حسب λ از درجه n که ضریب پیشروی آن $(-۱)^n$ است. مقادیر ویژه A هم چیزی جز ریشه‌های این چند جمله ای نیستند.

تعریف:. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$. چند جمله ای $det(A-tI)$ بر حسب متغیر t را **چند جمله ای مشخص** [۱] A نامند.

به راحتی می‌توان دید که ماتریس‌های متشابه دارای چند جمله ای مشخص یکسان هستند (به تمرین۱۲رجوع کنید). این مطلب، تعریف زیر را مجاز می‌سازد.

تعریف:. فرض کنید T عملگری خطی برفضای متناهی البُعد V با پایه مرتب β باشد. چند جمله ای مشخص T را برابر با چند جمله ای مشخص $A=[T]_\beta$، یعنی چند جمله ای زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(t)=det(A-tI)$$

یادآوریی که در بند قبل از تعریف فوق آمد، نشان می‌دهد که تعریف فوق، مستقل از انتخاب پایه مرتب β است. معمولا چند جمله ای مشخص عملگر T را با $det(T-tI)$ نشان می‌دهیم.

نتیجه بعدی، مشاهداتمان رادر مورد مثالهای ۵و ۶ تأیید می‌کند و برهان استقرایی سر راستی دارد.

قضیه ۸.۵. چند جمله ای مشخص $A\in M_{n\times n}(F)$، چند جمله‌ایی است از درجه n با ضریب پیشروی $(-۱)^n$.

برهان. به عهده خواننده است. □

موارد زیر، بلافاصله از قضیه ۸.۵ نتیجه می‌شوند. (به نتیجه ۲ از قضیه ۳.۱ رجوع کنید).

نتیجه ۳. فرض کنید A ماتریسی $n\times n$ با چند جمله ای مشخص $f(t)$ باشد.

الف) اسکالر λ یک مقدار ویژه A است اگر و تنها اگر λ ریشه ای از $f(t)$ باشد، یعنی $f(\lambda)=۰$.

ب) A حداکثر n مقدار ویژه متمایز دارد.

برهان. به عهده خواننده است. □

نتیجه ۴. فرض کنید T عملگری خطی برفضای برداری n-بعدی V، با چند جمله ای مشخص $f(t)$ باشد.

الف) اسکالر λ یک مقدار ویژه T است اگر و تنها اگر λ یک ریشه $f(t)$ باشد یعنی $f(\lambda)=۰$.

ب) T حداکثر n مقدار ویژه متمایز دارد.

برهان. به عهده خواننده است. □

---

[۱] خوانند با دقت ممکن است پی برده باشد که درایه‌های ماتریس $A-tI$، اعضای میدان F نیستند. ولی با این حال، اعضای میدان دیگری، یعنی $F(t)$ هستند، که عبارت است از میدان کسرهای چند جمله‌ای‌های با ضرایب واقع در F بر حسب متغیرt. در نتیجه، هر نتیجه ای که در فصل۴ در مورد دترمینان ثابت شد، در این فصل نیز برقرار است.

نتایج بالا، روشی را برای تعیین تمام مقدار ویژه یک ماتریس ویا تبدیل خطی در اختیارمان قرار می‌دهند. نتیجه بعدی، روشی رابرای تعیین بردارهای ویژه نظیر یک مقدار ویژه مفروض، در اختیارمان می‌گذارد.

قضیه ۹.۵. فرض کنید T عملگری خطی برفضای برداری V باشد و فرض کنید λ یک مقدار ویژه T باشد. بردار $v \in V$، یک بردار ویژه T نظیر λ است اگر و تنها اگر $v \in N(T - \lambda I)$, $v \neq ۰$.

برهان. به عهده خواننده است. □

مثال ۷. برای یافتن همه مقادیر ویژه ماتریس زیراز مثال ۵،

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

به یاد آورید که A دو مقدار ویژه دارد: $\lambda_۱ = ۳$ و $\lambda_۲ = -۱$. کار را با یافتن همه بردارهای ویژه نظیر $\lambda_۱ = ۳$ آغاز می‌کنیم. قرار دهید:

$$B = A - \lambda_۱ I = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix}$$

در این صورت

$$x = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^۲$$

یک بردار ویژه نظیر $\lambda_۱ = ۳$ است اگر و تنها اگر

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲x_۱ + x_۲ \\ ۴x_۱ - ۲x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

واضح است که مجموعه جواب‌های معادله بالا عبارت است از:

$$\left\{ t \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

بنابراین x یک بردار ویژه نظیر $\lambda_۱ = ۳$ است اگر و تنها اگر به ازای $t \neq ۰$ ای: $x = t \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$

حال فرض کنید که x یک بردار ویژه A نظیر $\lambda_۲ = -۱$، باشد. قرار دهید:

$$B = A - \lambda_۲ I = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

در این صورت:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in N(L_B)$$

اگر و تنها اگر x، یک جواب دستگاه زیر باشد:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$N(L_B) = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

بنابراین x یک بردار ویژه نظیر $\lambda_2 = -1$ است اگر و تنها اگربه ازای $t \neq 0$ ای:

$$x = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ملاحظه کنید که:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

پایه ای برای $\mathbb{R}^2$، متشکل از بردارهای ویژه A است. در نتیجه، طبق قضیه ۴.۵، L_A و در نتیجه A قطری پذیر است. در واقع اگر

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

قضیه ۱.۵ ایجاب می‌کند

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

□

برای یافتن بردارهای ویژه یک تبدیل خطی T بریک فضای برداری n بعدی، پایه مرتبی مانند β اختیار کرده، فرض کنید $A = [T]_\beta$، و شکل ۱-۵ را (که حالت خاصی از شکل۲-۲از بخش۲-۴، با $V = W$ و $\beta = \gamma$ است)در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم که $v \in V$، یک بردار ویژه T نظیر λ است اگر و تنها اگر $\phi_\beta(v)$ یک بردار ویژه A نظیر λ باشد. فرض کنید v یک بردار ویژه T نظیر λ باشد، در این صورت$T(v) = \lambda v$. در نتیجه:

$$A\phi_\beta(v) = L_A\phi_\beta(v) = \phi_\beta T(v) = \phi_\beta(\lambda v) = \lambda\phi_\beta(v)$$

شکل ۵-۱:

حال چون ϕ_β یک ایزومرفیسم است، $\phi_\beta(v) \neq 0$ و در نتیجه $\phi_\beta(v)$ یک بردار ویژه A است. این استدلال بازگشت پذیر است و بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر $\phi_\beta(v)$ یک بردار ویژه A نظیر λ باشد، v یک بردار ویژه T نظیر λ است (به تمرین۱۳رجوع کنید). بیان معادلی از نتیجه مذکور در بند قبلی این است که برای هر مقدار ویژه A (ودر نتیجهT)مانند λ، بردار $y \in F^n$، یک بردار ویژه A نظیر λ است اگر و تنها اگر $\phi_\beta^{-1}(y)$، یک بردار ویژه T نظیر λ باشد.

بنابراین مسأله یافتن بردارهای ویژه یک عملگر خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد را به مسأله یافتن بردارهای ویژه یک ماتریس تقلیل داده ایم. مثال بعدی این فرایند را شرح می‌دهد.

مثال ۸. فرض کنید T، عملگر خطی‌ای باشد که در مثال ۶ روی $P_2(\mathbb{R})$ تعریف شد و فرض کنید β پایه مرتب استاندارد $P_2(\mathbb{R})$ باشد. به یاد آورید که مقادیر ویژه، ۱، ۲ و ۳ هستند ونیز:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

هر یک از مقادیر ویژه را جداگانه مورد بحث قرار می‌دهیم. فرض کنید $\lambda_1 = 1$ و تعریف کنید:

$$B = A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

دراین صورت

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

یک بردار ویژه T، متناظر با $\lambda_1 = 1$ است اگر و تنها اگر $x \neq 0$ و $x \in N(L_B)$، یعنی x جوابی ناصفر برای دستگاه زیر باشد:

$$\begin{array}{rcrcl} x_2 & & & = & 0 \\ x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

توجه کنید که این دستگاه سه مجهول دارد: x_1، x_2 و x_3، اما یکی از این مجهول‌ها، یعنی x_1 در اصل هیچ جا ظاهر نمی شود. چون مقادیر x_1، تأثیری در دستگاه ندارند، به مقدار x_1 مقداری پارامتری نسبت می‌دهیم، مثلاً $x_1 = a$ وبعد دستگاه

را نسبت به x_2 و x_3 حل می‌کنیم. واضح است که $x_2 = x_3 = 0$ و در نتیجه بردارهای ویژه A نظیر $\lambda_1 = 1$، به ازای $a \neq 0$ای به شکل زیر هستند:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = ae_1$$

در نتیجه بردارهای ویژه T نظیر $\lambda_1 = 1$، به ازای یک $a \neq 0$، به صورت زیر هستند.

$$\phi_\beta^{-1}(ae_1) = a\phi_\beta^{-1}(e_1) = a \cdot 1 = a$$

پس چند جمله‌ایهای ثابت ناصفر، مقادیر ویژه T، نظیر $\lambda_1 = 1$ را تشکیل می‌دهند. حال فرض کنید $\lambda_2 = 2$ و قرار دهید:

$$B = A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در این صورت به راحتی می‌توان بررسی کرد که:

$$N(L_B) = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

ودر نتیجه بردارهای ویژه A متناظر با $\lambda_2 = 2$، به ازای مقادیر $a \neq 0$ به صورت زیر هستند.

$$\phi_\beta^{-1}(a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = a\phi_\beta^{-1}(e_1 + e_2) = a(1 + x) = a + ax$$

نهایتا فرض کنید $\lambda_3 = 3$ و

$$B = A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از آنجا که

$$N(L_B) = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

بردارهای ویژه T متناظر با $\lambda_3 = 3$ به ازای $a \neq 0$ای، به این شکل هستند:

$$\phi_\beta^{-1}(a\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}) = a\phi_\beta^{-1}(e_1 + 2e_2 + e_3) = a(1 + 2x + x^2) = a + 2ax + ax^2$$

به ازای هر یک از مقادیر ویژه، بردار ویژه ای را که از قرار دادن $a = 1$ در عبارات فوق حاصل می‌شود انتخاب کنید تا $\gamma = \{1, 1 + x, 1 + 2x + x^2\}$ بدست آید، که به وضوح مستقل خطی و بنابراین پایه ای مرتب برای $P_2(\mathbb{R})$ متشکل از بردارهای ویژه T است. بنابراین T قطری پذیر است و

$$[T]_\gamma = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

□

این بخش را با توصیفی هندسی از نحوه عملکرد یک عملگر خطی روی یک بردار ویژه، هنگامی که فضای برداری مورد بحث روی $\mathbb{R}$ باشد، به پایان می‌رسانیم. فرض کنید v یک بردار ویژه نظیر مقدار ویژه λ، از عملگر خطی T باشد که بر فضای برداری V روی $\mathbb{R}$ عمل می‌کند. فرض کنید $W = span(\{v\})$، زیر فضای یک بعدی از V باشد که با v تولید می‌شود. می‌توانیم W را خطی فرض کنیم که از 0 و v می‌گذرد. برای هر $w \in W$، به ازای اسکالری مانند c داریم $w = cv$ و بنابراین:

$$T(w) = T(cv) = cT(v) = c\lambda v = \lambda w$$

بنابراین، T روی اعضای W، با ضرب هر عضو در λ عمل می‌کند. بسته به مقدار λ، T به چند طریق ممکن است روی اعضای W عمل کند. چند حالت در نظر می‌گیریم (به شکل۵-۲رجوع کنید).

حالت ۱: هرگاه $\lambda > 1$، آنگاه T اعضای W را نسبت به نقطه 0، λ برابر دورتر می‌کند.

حالت۲: هرگاه $\lambda = 1$، آنگاه T روی W به شکل تابع همانی عمل می‌کند.

حالت۳: اگر $0 < \lambda < 1$، آنگاه T اعضای W را λ برابر به نقطه صفر نزدیکتر می‌کند.

حالت۴: اگر $\lambda = 0$، T به صورت تبدیل صفر روی W عمل می‌کند.

حالت۵: اگر $\lambda < 0$، T آرایش W را برعکس می‌کند؛ یعنی T اعضای W را از یک طرف 0 به طرف دیگر منتقل می‌کند.

برای شرح این ایده ها، عملگرهای خطی مثالهای ۳، ۴ و ۲ی بخش۲-۱ را در نظر می‌گیریم.

برای عملگر T که به صورت $T(a_1, a_2) = (a_1, -a_2)$ روی $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌شود، e_1، e_2 بردارهای ویژه T به ترتیب متناظر با مقادیر ویژه ۱ و -1 هستند. چون e_1 و e_2 به ترتیب محور xها و yها را پدید می‌آورند، T روی محور xها به صورت همانی عمل می‌کند و روی محور y ها، جهت بردارها راعوض می‌کند. برای عملگر T که به صورت

شکل ۵-۲: عملگر T روی $W = span(\{x\})$ هنگامی که x یک بردار ویژه T است.

$T(a_1, a_2) = (a_1, 0)$ روی $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌شود، یعنی تابع تصویر روی محور x ها، e_1 و e_2 بردارهایی ویژه به ترتیب متناظر با مقادیر ویژه ۱ و ۰ هستند. در نتیجه، T روی محور x ها به صورت تابع همانی و روی محور yها به صورت تابع صفر عمل می‌کند.

نهایتا عملگری را که صفحه را با زاویه ای معادل θ دوران می‌دهد، در نظر بگیرید که به این صورت تعریف می‌شود: $T_\theta(a_1, a_2) = (a_1 \cos\theta - a_2 \sin\theta, a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta)$. فرض کنید $0 < \theta < \pi$ دراین صورت برای هر بردار ناصفر v، بردارهای۰، v و $T_\theta(v)$، غیر هم خط هستند و بنابراین T_θ هیچ زیر فضای یک بعدی $\mathbb{R}^2$ را به درون خویش تصویر نمی‌کند. اما از اینجا نتیجه می‌شود که T_θ بردار ویژه ندارد و در نتیجه مقدار ویژه‌ای هم ندارد. برای این که با استفاده از نتیجه ۲ از بخش ۸-۵، این نتیجه گیری را تأیید کنیم. ملاحظه می‌کنیم که چند جمله ای مشخص T_θ عبارت است از:

$$\det(T_\theta - tI) = \det \begin{bmatrix} \cos\theta - t & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - t \end{bmatrix} = t^2 - (2\cos\theta)t + 1$$

که ریشه حقیقی ندارد، چرا که برای $0 < \theta < \pi$، مبین $4\cos^2\theta - 4$ منفی است. بنابراین عملگرهایی (و در نتیجه ماتریس‌هایی) وجود دارند که مقدار ویژه ویا بردار ویژه ندارند. البته واضح است که چنین عملگرها وماتریس‌هایی قطری پذیر نیستند.

تمرینات

۱.تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) هر عملگر خطی بر یک فضای برداری $n-$ بعدی، n مقدار ویژه متمایز دارد.

ب) اگر یک ماتریس حقیقی بردار ویژه ای داشته باشد، آنگاه بی نهایت بردار ویژه دارد.

ج) ماتریس مربعی وجود دارد که بردار ویژه ندارد.

د) مقادیر ویژه باید اسکالرهای نا صفری باشند.

ه) هردو بردار ویژه، مستقل خطی هستند.

و) مجموع دو مقدار ویژه عملگر خطی T، خود یک مقدار ویژه است.

ز) عملگرهای خطی روی فضاهای برداری با بعد نامتناهی، هیچگاه مقدار ویژه ندارند.

ح) ماتریس $A_{n\times n}$ که درایه‌های آن متعلق به میدان F است، متشابه با یک ماتریس قطری است اگر و تنها اگر پایه ای برای F^n متشکل از بردارهای ویژه A موجود باشد.

ط) مجموع دو بردار ویژه عملگر T، همواره یک بردار ویژه T است.

۲. برای هر یک از ماتریس‌های A و پایه‌های مرتب β که در زیر آمده‌اند، $[L_A]_\beta$ را بیابید. همچنین ماتریس وارون پذیری مانند Q بیابید به طوری که $[L_A]_\beta = Q^{-۱}AQ$.

الف) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \right\}$

ب) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \right\}$

ج) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \right\}$

د) $A = \begin{bmatrix} ۱۳ & ۱ & ۴ \\ ۱ & ۱۳ & ۴ \\ ۴ & ۴ & ۱۰ \end{bmatrix}$ و $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$

۳. برای هریک از ماتریس‌های $A \in M_{n\times n}(F)$ در زیر:

i) همه مقادیر ویژه A را بیابید.

ii) برای هر یک از مقادیر ویژه A، مجموعه بردارهای ویژه نظیر λ را بیابید.

iii) در صورت امکان، پایه ای برای F^n متشکل از بردارهای ویژه A را بیابید.

vi) اگر در یافتن چنین پایه ای موفق بودید، یک ماتریس وارون پذیر Q ویک ماتریس قطری D بیابید که $Q^{-۱}AQ = D$

الف) برای $F = \mathbb{R}$ $\quad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$

ب) برای $F = \mathbb{R}$ $\quad A = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ & -۳ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}$

ج) برای $F = \mathbb{C}$ $\quad A = \begin{bmatrix} i & ۱ \\ ۲ & -i \end{bmatrix}$

د) برای $F = \mathbb{R}$ $\quad A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۴ & ۱ & -۴ \\ ۲ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

۴. فرض کنید که $T : P_۲(\mathbb{R}) \to P_۲(\mathbb{R})$ به این صورت تعریف شود: $T(f(x)) = f(x) + xf'(x)$.
مقادیر ویژه T را بیابید و پایه ای مانند β برای $P_۲(\mathbb{R})$ بیابید که $[T]_\beta$ ماتریسی قطری باشد.

۵. قسمتهای الف، ب و ج از قضیه ۶.۵ را ثابت کنید.

۶. نتایج ۱ و ۲ از قضیه ۷.۵ را ثابت کنید.

۷. قضیه ۹.۵ را ثابت کنید.

۸. الف) ثابت کنید عملگر خطی T بر یک فضای برداری متناهی البُعد وارون پذیر است اگر و تنها اگر صفر، مقدار ویژ ه آن نباشد.

ب) فرض کنید T یک عملگر خطی وارون پذیر باشد. ثابت کنید که اسکالر λ، یک مقدار ویژه T است اگر و تنها اگر λ^{-1} یک مقدار ویژه T^{-1} باشد.

۹. ثابت کنید که مقادیر ویژه ماتریس بالا مثلثی ، درایه‌های قطری آن هستند.

۱۰. فرض کنید T یک فضای برداری متناهی البُعد و λ یک اسکالر دلخواه باشد.

الف) برای هر پایه مرتب β، ثابت کنید که $[\lambda I_v]_\beta = \lambda I$.

ب) چند جمله ای مشخص λI_v را حساب کنید.

ج) ثابت کنید که λI_v قطری پذیر است و فقط یک مقدار ویژه دارد.

۱۱. منظور از یک ماتریس اسکالر ماتریس مربعی به شکل λI به ازای یک اسکالر λ است؛ یعنی یک ماتریس اسکالر ماتریسی قطری است که همه درایه‌های قطری آن برابر هستند.

الف) ثابت کنید که اگر ماتریس مربعی A، متشابه با ماتریس اسکالر λI باشد، آنگاه $A = \lambda I$.

ب) ثابت کنید هر ماتریس قطری پذیر که فقط یک مقدار ویژه داشته باشد، ماتریسی اسکالر است.

ج)ثابت کنید که $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ قطری پذیر نیست.

۱۲. الف) ثابت کنید که ماتریس‌های متشابه، چند جمله‌ایهای مشخص یکسانی دارند.

ب) ثابت کنید که تعریف ماتریس مشخص یک عملگر خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد V، از پایه مرتب انتخاب شده برای V مستقل است.

۱۳. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V روی میدان F بوده، β پایه ای مرتب برای V باشد و فرض کنید $A = [T]_\beta$. با مراجعه به شکل ۵-۱، موارد زیر را ثابت کنید.

الف) اگر $v \in V$ و $\phi_\beta(v)$ یک بردار ویژه A متناظر با مقدار ویژه λ باشد، آنگاه v یک برداری ویژه T متناظر با λ است.

ب) هرگاه λ، یک مقدار ویژه A (و بنابراین T) باشد، آنگاه $y \in F^n$ یک بردار ویژه A متناظر با λ است اگر و تنها اگر $\phi_\beta^{-1}(y)$ یک بردار ویژه T، متناظر با λ باشد.

۱۴. برای هر ماتریس مربعی A، ثابت کنید که A و A^t، چند جمله ای مشخص یکسانی دارند. (و بنابراین مقادیر ویژه آنها یکی است).

۱۵. الف) فرض کنید T یک عملگر خطی بر فضای برداری V بوده، x یک بردار ویژه T متناظر با مقدار ویژه λ باشد. ثابت کنید که برای هر عدد صحیح مثبت m، x یک بردار ویژه T^m، متناظر با مقدار ویژه λ^m است.

ب) نتیجه مشابهی را برای ماتریس‌ها ثابت کنید.

۱۶. الف) ثابت کنید که ماتریس‌های متشابه، رد یکسانی دارند. راهنمایی: از تمرین ۱۲ بخش ۳-۲ استفاده کنید.

ب) رد یک عملگر خطی را بر یک فضای برداری متناهی البُعد، چگونه تعریف می‌کنید؟ دلیل خوشتعریف بودن پاسختان را بیان کنید.

۱۷. فرض کنید $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$، نگاشتی باشد که چنین تعریف می‌شود: $T(A) = A^t$. یعنی ترانهاده A.

الف) ثابت کنید که T عملگری خطی بر $M_{n\times n}(F)$ است.

ب) ثابت کنید که ± ۱، تنها مقادیر ویژه T هستند.

ج) بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه T را توصیف کنید.

د) پایه مرتب β را طوری برای $M_{۲\times۲}(F)$ بیابید که $[T]_\beta$ ماتریسی قطری باشد.

ه) به ازای $n > ۲$، پایه ای مانند β برای $M_{n\times n}(F)$ بیابید به گونه ای که $[T]_\beta$ ماتریسی قطری باشد.

۱۸. فرض کنید $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$،

الف) ثابت کنید که اگر B وارون پذیر باشد، آنگاه اسکالری مانند $c \in \mathbb{C}$ وجود دارد به طوری که $A + cB$ وارون پذیر نیست. راهنمایی: $\det(A + cB)$ رابررسی کنید.

ب) ماتریس‌های ۲×۲ ی و را طوری بیابید که A وارون پذیر باشد و $B \neq O$، اما برای هر $c \in \mathbb{C}$، $A + cB$ وارون پذیر باشد.

۱۹. فرض کنید A و B دوماتریس متشابه $n \times n$ باشند. ثابت کنید که فضای برداری متناهی البُعدی مانند V، یک عملگر خطی T روی V و پایه‌های مرتبی برای V مانند β و γ وجود دارند به گونه ای $A = [T]_\beta$ و $B = [T]_\gamma$.راهنایی: از تمرین ۱۳ بخش۲-۵ استفاده کنید.

۲۰. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با چند جمله ای مشخص زیر باشد:

$$f(t) = (-۱)^n t^n + a_{n-۱} t^{n-۱} + ... + a_۱ t + a_۰$$

ثابت کنید که $f(۰) = a_۰ = \det(A)$. نتیجه بگیرید که A وارون پذیر است اگر و تنها اگر $a_۰ \neq ۰$.

۲۱. فرض کنید که A و $f(t)$، همانند تمرین ۲۰باشند.

الف) ثابت کنید که $f(t) = (A_{۱۱} - t)(A_{۲۲} - t)...(A_{nn} - t) + q(t)$، که $q(t)$ چند جمله‌ایی بر حسب t، با درجه حداکثر $n - ۲$ است. راهنمایی: ازاستقراء ریاضی روی n استفاده کنید.

ب) نشان دهید که $tr(A) = (-۱)^{n-۱} a_{n-۱}$.

۲۲. الف) فرض کنید T، عملگری خطی بر فضای برداری V روی F باشد و $g(t)$ یک چند جمله ای با ضرایب در F باشد. ثابت کنید که اگر x، یک بردار ویژه T باشد که مقدار ویژه متناظر با آن λ است، آنگاه $g(T)(x) = g(\lambda)x$.

ب) نتیجه ای مشابه را برای ماتریس‌ها بیان کرده آن را ثابت کنید.

ج) درستی (ب) را در حالتی بررسی کنید که: A همانند تمرین ۳(الف) باشد، $g(t) = ۲t^۲ - t + ۱$ باشد، x بردار ویژه برابر با $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ باشد و مقدار ویژه نظیر آن، $\lambda = ۴$ باشد.

۲۳. با استفاده از تمرین ۲۲، ثابت کنید که اگر $f(t)$ چند جمله ای مشخص عملگر خطی قطری پذیر T باشد، آنگاه $f(T) = T_۰$، که $T_۰$، عملگر صفر است.(در بخش۵-۴ ثابت می‌کنیم که این نتیجه بستگی به قطری پذیری بودن T ندارد).

۲۴. با استفاده از تمرین ۲۱ (الف)، قضیه ۵-۸ را ثابت کنید.

۲۵. نتایج ۱ و ۲ از قضیه ۵-۸ را ثابت کنید.

۲۶.تعداد توابع متمایزی را که به صورت چند جمله ای‌های مشخص ماتریس‌های $M_{۲\times۲}(\mathbb{Z}_۲)$ تعریف می‌شوند، بیابید.

۵-۲ قطری پذیری

در بخش ۵-۱، مسأله قطری سازی را معرفی کردیم و ملاحظه نمودیم که همه عملگرهای خطی وماتریس‌ها، قطری پذیر نیستند. با این که قادر به قطری کردن برخی عملگرها و ماتریس‌ها بودیم و حتی توانستیم شرطی لازم وکافی برای قطری پذیری (قضیه ۵.۴)بیابیم، هنوز هم مسأله قطری سازی را حل نکردیم. هنوز هم نیازمند آزمونی ساده هستیم که مشخص کند که آیا یک عملگر خطی یا ماتریس را می‌توان قطری کرد یا خیر؟ و همچنین روشی عملی برای یافتن پایه ای متشکل از بردارهای ویژه نیاز داریم.

در مثال ۷ از بخش ۵-۱، با اختیار کردن یک بردار ویژه متناظر با هریک از مقادیر ویژه، پایه ای متشکل از بردارهای ویژه یافتیم. در حالت کلی، این فرایند منجر به یک پایه نمی شود، اما قضیه ذیل نشان می‌دهد که هر مجموعه ای که از این طریق به دست آید، مستقل خطی است.

قضیه ۵.۱۰. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری V بوده، $\lambda_۱, \lambda_۲, ..., \lambda_k$، مقادیر ویژه متمایزی برای T باشند. هرگاه $v_۱, v_۲, ..., v_k$ چنان بردارهای ویژه ای برای T باشند که v_i، متناظر با λ_i باشد، $۱ \leq i \leq k$، آنگاه $\{v_۱, v_۲, ..., v_k\}$ مستقل خطی است.

برهان. اثبات با استقراء ریاضی روی k صورت می‌گیرد. فرض کنید $k = ۱$. در این صورت، $v_۱ \neq ۰$ چرا که $v_۱$ یک بردار ویژه است و بنابراین $\{v_۱\}$ مستقل خطی است. حال فرض کنید که قضیه برای $k - ۱$ مقدار ویژه متمایز برقرار باشد، که $k - ۱ \geq ۱$ و فرض کنید که k بردار ویژه $\{v_۱, v_۲, ..., v_k\}$ متناظر با مقادیر ویژه متمایز $\lambda_۱, ..., \lambda_k$ در اختیار داشته

باشیم. می‌خواهیم نشان دهیم که $\{v_۱, v_۲, ..., v_k\}$ مستقل خطی است. فرض کنید $a_۱, ..., a_k$ اسکالرهایی باشند که

$$a_۱v_۱ + a_۲v_۲ + ... + a_kv_k = ۰ \qquad (۵\text{-}۱)$$

با اعمال $T - \lambda_k I$ به دو طرف رابطه (۵-۱) داریم:

$$a_۱(\lambda_۱ - \lambda_k)v_۱ + a_۲(\lambda_۲ - \lambda_k)v_۲ + ... + a_{k-۱}(\lambda_{k-۱} - \lambda_k)v_{k-۱} = ۰$$

طبق فرض استقراء $\{v_۱, v_۲, ..., v_{k-۱}\}$ مستقل خطی است و در نتیجه:

$$a_۱(\lambda_۱ - \lambda_k) = a_۲(\lambda_۲ - \lambda_k) = ... = a_{k-۱}(\lambda_{k-۱} - \lambda_k) = ۰$$

از آنجا که $\lambda_۱, ..., \lambda_k$ متمایز هستند، نتیجه می‌شود که برای هر $۱ \leq i \leq k - ۱$، $(\lambda_i - \lambda_k) \neq ۰$، پس $a_۱ = a_۲ = ... = a_{k-۱} = ۰$، و بنابراین (۵-۱)به $a_k = ۰$ تقلیل می‌یابد. اما $v_k \neq ۰$، بنابراین $a_۱ = a_۲ = ... = a_k = ۰$ و در نتیجه $\{v_۱, v_۲, ..., v_k\}$ مستقل خطی است. □

نتیجه ۱. فرض کنید T یک عملگر خطی بر فضای برداری $n-$ بعدی V باشد. هرگاه T، n مقدار ویژه متمایز داشته باشد، T قطری شدنی است.

برهان. فرض کنید T، n مقدار ویژه متمایز داشته باشد: $(\lambda_۱, ..., \lambda_n)$. به ازای هر i، بردار ویژه ای نظیر λ_i مانند v_i انتخاب کنید. طبق قضیه ۵-۱۰،$\{v_۱, v_۲, ..., v_n\}$ مستقل خطی است و از آنجا که $dim(V) = n$، این مجموعه پایه ای برای V است. طبق قضیه ۴.۵ ، T قطری پذیر است. □

مثال ۱. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \in M_{۲\times۲}(\mathbb{R})$$

چند جمله ای مشخص A (و در نتیجه L_A)، عبارت است از: $\det(A - tI) = \det(\begin{bmatrix} ۱-t & ۱ \\ ۱ & ۱-t \end{bmatrix}) = t(t - ۲)$ و بنابراین مقادیر ویژه L_A، ۰ و۲ هستند. چون L_A عملگری خطی بر فضای برداری دو بعدی $\mathbb{R}^۲$ است، از نتیجه بالا نتیجه می‌گیریم که L_A (و بنابراین A)، قطری پذیر است. □

با این که قضیه ۱۰.۵، یک شرط کافی برای قطری پذیری در اختیارمان می‌گذارد، این شرط لازم نیست. در واقع، با این که عملگر همانی فقط یک مقدار ویژه، یعنی $\lambda = ۱$ دارد، قطری پذیر است.

دیدیم که قطری پذیری مستلزم وجود مقادیر ویژه است. در واقع، قطری پذیری شرطی بسیار قویتر را بر چند جمله ای مشخص تحمیل می‌کند

.

تعریف:. چند جمله ای $f(x)$ واقع در $P(F)$، روی F می‌شکافد، هر گاه اسکالرهایی مانند c، $a_۱, ..., a_n$ (نه لزوما متمایز) در F یافت شوند، به گونه ای که:

$$f(x) = c(x - a_۱)...(x - a_n)$$

به عنوان مثال، $x_۲ - ۱ = (x - ۱)(x + ۱)$ بر $\mathbb{R}$ می‌شکافد، اما $(x - ۲)(x^۲ + ۱)$ بر $\mathbb{R}$ نمی شکافد، چرا که $x^۲ + ۱$ را نمی توان به صورت حاصلضرب عوامل خطی تجزیه کرد. با این حال، $(x - ۲)(x^۲ + ۱)$ بر $\mathbb{C}$ میشکافد، چرا که به صورت $(x - ۲)(x - i)(x + i)$ تجزیه می‌شود. هرگاه $f(x)$ چند جمله ای مشخص یک عملگر خطی و یا ماتریس روی میدان F باشد، این عبارت را که « $f(x)$ می‌شکافد» به این معنی خواهیم گرفت که f روی F می‌شکافد.

قضیه ۱۱.۵. چند جمله ای مشخص هر عملگر خطی قطری پذیر می‌شکافد.

برهان. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری $n-$ بعدی V باشد و β پایه ای برای V باشد که $[T]_\beta = D$، ماتریسی قطری باشد. فرض کنید

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

و فرض کنید $f(t)$ چند جمله ای مشخص T باشد. در این صورت:

$$f(t) = \det(D - tI) = \det(\begin{bmatrix} \lambda_۱ - t & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ - t & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & \lambda_n - t \end{bmatrix})$$
$$= (\lambda_۱ - t)(\lambda_۲ - t)...(\lambda_n - t) = (-۱)^n(t - \lambda_۱)...(t - \lambda_n)$$

□

با توجه به این قضیه واضح است که اگر T عملگر خطی قطری پذیری بر فضای برداری متناهی البُعدی باشد که مقادیر ویژه متمایز نداشته باشد، آنگاه چند جمله ای مشخص T، باید ریشه ای مکرر داشته باشد. این ملاحظه به تعریف زیر می‌انجامد.

تعریف: فرض کنید λ، یک مقدار ویژه برای یک عملگر خطی و یا یک ماتریس با چند جمله ای مشخص $f(t)$ باشد. چندگانگی (جبری) λ، بزرگترین عدد صحیح مثبتی است که به ازای آن $(t-\lambda)^k$، عاملی از $f(t)$ است.

مثال ۲. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

که چند جمله ای مشخص آن $f(t) = -(t-۳)^۲(t-۴)$ است. در نتیجه، $\lambda = ۳$، یک مقدار ویژه A با چند گانگی ۲ است و $\lambda = ۴$ مقداری ویژه برای A با چند گانگی ۱ می‌باشد. □

اگر T یک عملگر خطی قطری پذیر بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد، آنگاه پایه مرتبی برای V مانند β، متشکل از بردارهای ویژه T موجود است. از قضیه ۴.۵ می‌دانیم که $[T]_\beta$ ماتریسی قطری است که درایه‌های قطری آن مقادیر ویژه T هستند. از آنجا که چند جمله ای مشخص T، $\det([T]_\beta - tI)$ است، به راحتی می‌توان دید که هر مقدار ویژه T، باید دقیقا به تعداد دفعاتی برابر چندگانگی‌اش، به عنوان یک درایه قطری $[T]_\beta$ ظاهر شود. بنابراین β به ازای هر یک از مقادیر ویژه، به تعداد چند گانگی آن مقدار ویژه، بردار ویژه (مستقل خطی) متناظر با آن دارد. پس تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی نظیر یک مقدار مفروض، در قطری پذیر بودن یا نبودن آن عملگر خطی مورد توجه است. با به خاطر آوردن این نکته از قضیه ۹.۵ که بردارهای ویژه ای از T که متناظر با مقدار ویژه λ هستند، بردارهای ناصفر فضای پوچ $T - \lambda I$ هستند، به طور طبیعی به مطالعه این مجموعه هدایت می‌شویم.

تعریف: فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری V و λ یک مقدار ویژه T باشد. E_λ را برابر

$$\{x \in V \quad : \quad T(x) = \lambda x\} = N(T - \lambda I_V)$$

تعریف کنید. مجموعه E_λ، فضای ویژه T متناظر با مقدار ویژه λ نام دارد. مشابها فضای ویژه یک ماتریس مربعی A را برابر با فضای ویژه L_A تعریف می‌کنیم.

واضح است که E_λ، زیر فضایی از V است که از بردار صفر به همراه بردارهای ویژه T متناظر با مقدار ویژه λ تشکیل شده است. بنابراین حداکثر تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی T متناظر با مقدار ویژه λ، بعد E_λ است. نتیجه بعدی، این بعد را با چند گانگی λ مرتبط می‌سازد.

قضیه ۱۲.۵. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V، و λ، یک مقدار ویژه T با چند گانگی m باشد. در این صورت $۱ \leq dim(E_\lambda) \leq m$.

برهان. پایه ای مرتب مانند $\{v_۱, v_۲, ..., v_p\}$ برای E_λ انتخاب کرده، آن را به پایه ای برای V، مانند

$$\beta = \{v_۱, v_۲, ..., v_p, v_{p+۱}, ..., v_n\}$$

تعمیم دهید و فرض کنید $A=[T]_\beta$. توجه کنید که v_1،$(1\le i\le p)$، یک بردار ویژه T نظیر λ است و بنابراین:

$$A=\begin{bmatrix}\lambda I_p & B\\ O & C\end{bmatrix}$$

طبق تمرین ۲۰ از بخش ۴-۳، چند جمله ای مشخص T عبات است از:

$$\begin{aligned}f(t)=\det(A-tI_n)=&\begin{bmatrix}(\lambda-t)I_p & B\\ O & C-tI_{n-p}\end{bmatrix}\\ =&\det((\lambda-t)I_p)\det(C-tI_{n-p})\\ =&(\lambda-t)^p g(t)\end{aligned}$$

که در اینجا $g(t)$ یک چند جمله ای است. در نتیجه $(\lambda-t)^p$ عاملی از $f(t)$ است و در نتیجه چند گانگی λ حداقل p است. اما $dim(E_\lambda)=p$ و بنابراین $\dim(E_\lambda)\le m$. □

مثال ۳. فرض کنید $T:P_2(\mathbb{R})\to P_2(\mathbb{R})$ تبدیل خطی‌ای باشد که به این صورت تعریف می‌شود: $T(f)=f'$، یعنی مشتق f. ماتریس T نسبت به پایه مرتب β برای $P_2(\mathbb{R})$ چنین تعریف می‌شود:

$$[T]_\beta=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

نتیجتاً چند جمله ای مشخص T عبارت است از :

$$\det([T]_\beta-tI)=\begin{bmatrix}-t&1&0\\0&-t&2\\0&0&-t\end{bmatrix}=-t^3$$

در نتیجه T یک مقدار ویژه $(\lambda=0)$ با درجه چندگانگی ۳دارد. اما $E_\lambda=N(T-\lambda I)=N(T)$ زیر فضایی از $P_2(\mathbb{R})$ است که از چند جمله ای‌های ثابت تشکیل شده است. بنابراین $\{1\}$ پایه‌ای برای E_λ است و بنابراین $dim(E_\lambda)=1$. نتیجتا پایه ای برای $P_2(\mathbb{R})$ که مرکب از بردارهای ویژه T باشد وجود ندارد ودر نتیجه T قطری پذیر نیست. □

مثال ۴. فرض کنید T عملگری خطی بر $\mathbb{R}^3$ باشد که چنین تعریف می‌شود:

$$T\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4a_1+a_3\\2a_1+3a_2+2a_3\\a_1+4a_3\end{bmatrix}$$

فضای ویژه T، متناظر با هر یک از مقادیر ویژه T راتعیین خواهیم کرد. فرض کنید β پایه مرتب استاندارد $\mathbb{R}^۳$ باشد در این صورت:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه چند جمله ای مشخص T عبارت است از:

$$\det([T]_\beta - tI) = \det \begin{bmatrix} ۴-t & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳-t & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۴-t \end{bmatrix} = -(t-۵)(t-۳)^۲$$

پس مقادیر ویژه T، $\lambda_۱ = ۵$ و $\lambda_۲ = ۳$ هستند که چند گانگی آنها به ترتیب ۱و ۲ است. از آنجا که

$$E_{\lambda_۱} = N(T-\lambda_۱ I) = \left\{ \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^۳ : \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & -۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \right\}$$

$E_{\lambda_۱}$، فضای جواب دستگاه معادلات زیر است:

$$\begin{aligned} -x_۱ \qquad + x_۳ &= ۰ \\ ۲x_۱ - ۲x_۲ + ۲x_۳ &= ۰ \\ x_۱ \qquad - x_۳ &= ۰ \end{aligned}$$

به راحتی می‌توان (با استفاده از فنون فصل ۳)، مشاهده کرد که:

$$\left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

پایه ای برای $E_{\lambda_۱}$ است. در نتیجه $dim(E_{\lambda_۱}) = ۱$. به صورت مشابه $E_{\lambda_۲} = N(T - \lambda_۲ I)$، فضای جواب دستگاه زیر است.

$$\begin{aligned} -x_۱ \qquad + x_۳ &= ۰ \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ + \qquad &= ۰ \end{aligned}$$

$$x_۱ \qquad - x_۳ = ۰$$

از آنجا که $x_۲$ در دستگاه فوق ظاهر نمی شود، مقداری پارامتری به آن می‌دهیم، مثلا $x_۲ = s$ و دستگاه را با معرفی پارامتر جدید t، نسبت به $x_۱$ و $x_۲$ حل می‌کنیم. در نتیجه، جواب عمومی دستگاه خواهد بود

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

به این ترتیب نتیجه می‌شود که :

$$\left\{ \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

پایه ای برای $E_{\lambda_۲}$ است و$dim(E_{\lambda_۲}) = ۲$. در این مثال، چند گانگی هر یک از مقادیر ویژه λ_i، برابر با بعد فضای ویژه متناظر با آن، E_{λ_i} است. ملاحظه می‌کنید که اجتماع دو پایه ای که در بالا حاصل شد یعنی:

$$\left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

مستقل خطی است و در نتیجه پایه ای برای $\mathbb{R}^۳$، متشکل از بردارهای ویژه T است. در نتیجه، T قطری پذیر است. □

مثالهای ۳ و ۴ این مطلب را القا می‌کنند که برای عملگر خطی T، که چند جمله ای مشخص آن می‌شکافد، قطری پذیری T معادل با آن است که بعد فضای ویژه وچند گانگی هر یک از مقادیر ویژه T برابر باشند. همانطور که هم اکنون نشان خواهیم داد، این مطلب واقعا هم درست است. با لم زیر شروع می‌کنیم، که حاصل تغییری جزئی در قضیه ۵.۱۰ است.

لم ۶. فرض کنید T عملگری خطی باشد و $\lambda_۱, \lambda_۲, ..., \lambda_k$، مقادیر ویژه متمایزی برای T باشند.برای هر $i = ۱, ۲, ..., k$، فرض کنید v_i متعلق به E_{λ_i}، فضای ویژه نظیر λ باشد. هر گاه:

$$v_۱ + v_۲ + ... + v_k = ۰$$

آنگاه برای هرi، $v_i = ۰$.

برهان. فرض کنید چنین نباشد، با شماره گذاری مجدد در صورت لزوم، فرض کنید که به ازای عدد صحیح m ($۱ \leq m \leq k$)، برای هر i ($۱ \leq i \leq m$) داشته باشیم $v_i \neq ۰$ و برای هر $i > m$، $v_i = ۰$. در این صورت، برای هر $i < m$، v_i

یک بردار ویژه T نظیر λ_i است و

$$v_۱ + v_۲ + ... + v_k = ۰$$

اما این مساله با قضیه ۵-۱۰ که میگوید v_iها مستقل خطی هستند، در تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که برای هر i، $v_i = ۰$. □

دو قضیه بعدی به ما کمک می‌کنند تا تشخیص دهیم که یک عملگر خطی چه موقع قطری پذیر است و پایه‌ای برای فضای برداری مفروض، متشکل از بردارهای ویژه عملگر مفروض را بیابیم.

قضیه ۱۳.۵. فرض کنید T عملگر خطی بر فضای برداری V بوده، $\lambda_۱, \lambda_۲, ..., \lambda_k$، مقادیر ویژه متمایز T باشند. برای هر $i = ۱, ۲, ..., k$، فرض کنید S_i یک زیر مجموعه متناهی مستقل خطی از فضای ویژه E_{λ_i} باشد. در این صورت $S = S_۱ \cup S_۲ \cup ... \cup S_k$، یک زیر مجموعه مستقل خطی V است.

برهان. فرض کنید برای هر i:

$$S_i = \{v_{i۱}, v_{i۲}, ..., v_{in_i}\}$$

در این صورت $S = \{v_{ij} : \quad ۱ \leq i \leq k, ۱ \leq j \leq n_i\}$. دنباله دلخواهی از اسکالرها به شکل $\{a_{ij}\}$ را در نظر بگیرید که برای آن:

$$\sum_{i=۱}^{k} \sum_{j=۱}^{n_i} a_{ij} v_{ij} = ۰$$

برای هر i فرض کنید:

$$w_i = \sum_{j=۱}^{n_i} a_{ij} v_{ij}$$

در این صورت برای هر i، $w_i \in E_{\lambda_i}$ و $w_۱ + ... + w_k = ۰$. بنابراین، طبق لم، برای هر i، $w_i = ۰$. اما هر S_i مستقل خطی است و در نتیجه برای هر j، $a_{ij} = ۰$. نتیجه میگیریم که S مستقل خطی است. □

قضیه ۱۳.۵ راه را برای ساختن یک زیر مجموعه مستقل خطی متشکل از بردارهای ویژه به ما می‌گوید: با جمع آوری پایه برای هر یک از فضاهای ویژه. قضیه بعدی بیان می‌دارد که چه هنگام، حاصل این کار پایه‌ای برای کل فضا خواهد بود.

قضیه ۱۴.۵. فرض کنید T عملگر خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد، به گونه‌ای که چند جمله‌ای T بشکافد. فرض کنید $\lambda_۱, \lambda_۲, ..., \lambda_k$، مقادیر ویژه متمایز T را تشکیل دهند. در این صورت:

الف) T قطری پذیر است اگر و تنها اگر برای هر i، چندگانگی λ_i برابر با $dim(E_{\lambda_i})$ باشد.

ب) اگر T قطری پذیر بوده، برای هر i، β_i پایه مرتبی برای E_{λ_i} باشد، آنگاه $\beta = \beta_1 \cup ... \cup \beta_k$ [۲] پایه‌ای مرتب برای V متشکل از بردارهای ویژه T است.

برهان. برای هر i، فرض کنید m_i نشان دهنده چند گانگی λ_i بوده، $d_i = dim(E_{\lambda_i})$ و $n = dim(V)$. ابتدا فرض کنید که T قطری پذیر باشد. فرض کنید β پایه ای برای V متشکل از بردارهای ویژه T باشد. برای هر i، فرض کنید $\beta_i = \beta \cap E_{\lambda_i}$، که عبارت است از مجموعه بردارهایی از β که بردارهای ویژه متناظر با λ_i هستند وفرض کنید n_i نشان دهنده تعداد برداهای β_i باشد. دراین صورت برای هر i، $n_i \leq d_i$، چرا که β_i زیر مجموعه مستقل خطی از زیر فضایی با بعد d_i است وطبق قضیه ۵-۱۲، $d_i \leq m_i$. در نتیجه:

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i \leq \sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=1}^{k} m_i = n$$

مجموع n_iها به این دلیل برابر n است که β، n عضودارد. مجموع m_i ها به این دلیل n است که درجه چند جمله ای مشخص T، برابر با مجموع چند گانگی‌های مقادیر ویژه است. نتیجه می‌شود که: $\sum_{i=1}^{k} (m_i - d_i) = 0$ از آنجا که برای هر i، $m_i - d_i \geq 0$، نتیجه می‌گیریم که برای هر i، $m_i = d_i$.

برعکس، فرض کنید برای هر i، $m_i = d_i$. نشان می‌دهیم که T قطری پذیر است و همزمان (ب) را ثابت می‌کنیم. برای هر i، فرض کنید β_i پایه ای مرتب E_{λ_i} باشد و فرض کنید $\beta = \beta_1 \cup ... \cup \beta_k$. طبق قضیه ۵.۱۲، β مستقل خطی است. به علاوه، از آنجا که برای هر i، $m_i = d_i$، β شامل:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = \sum_{i=1}^{k} m_i = n$$

عضو است. در نتیجه، β پایه ای مرتب برای V متشکل از بردارهای ویژه T است و نتیجه می‌گیریم که T قطری پذیر است.
□

این قضیه مطالعه ما را در مورد مسأله قطری سازی تکمیل می‌کند. نتایج را خلاصه می‌کنیم.

آزمونی برای قطری پذیری

فرض کنید T یک عملگر خطی برفضای برداری $n-$ بعدی V باشد در این صورت T قطری پذیر است اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند:

۱.چند جمله ای مشخص T بشکافد.

۲.برای هر مقدار ویژه T مانند λ، چندگانگی λ برابر با $dim(E_\lambda) = dim(N(T-\lambda I)) = n-\text{rank}(T-\lambda I)$ باشد.

[۲] $\beta = \beta_1 \cup ... \cup \beta_k$ را به صورت طبیعی به عنوان پایه‌ای مرتب در نظر میگیریم: ابتدا بردارهای β_1 به همان ترتیبی که در β_1 قرار دارند لیست می‌شوند و بعد بردارهای β_2 (به همان ترتیبی که در β_2 قرار گرفته اند) و الی آخر.

به علاوه، اگر T قطری پذیر باشد و $\beta_1, \beta_2, ...\beta_k$، پایه‌های مرتبی برای فضاهای ویژه T باشند، آنگاه اجتماع $\beta = \beta_1 \cup ... \cup \beta_k$، پایه ای مرتب برای V متشکل از بردارهای ویژه T است ودر نتیجه $[T]_\beta$، ماتریسی قطری است.

ملاحظه می‌کنید که شرط دوم از قضیه بُعد استفاده می‌کند. همچنین ملاحظه کنید که طبق قضیه ۵-۱۲، شرط دوم خود به خود برای همه مقادیر ویژه با چندگانگی ۱ برقرار است. در نتیجه شرط دوم فقط لازم است برای مقادیر ویژه‌ای که چندگانگی آنها بیشتر از ۱ است، بررسی شود.

از آنجا که قطری پذیری ماتریس A با قطری پذیری عملگر L_A معادل است، برای ماتریس‌ها هم روش مشابهی وجود دارد. به این ترتیب که هرگاه $A \in M_{n\times n}(F)$ ماتریسی قطری پذیر و β پایه مرتبی برای F^n متشکل از بردارهای ویژه A باشد، آنگاه $Q^{-1}AQ = D$ ماتریسی قطری است که درایه‌های قطری آن مقادیر ویژه A است. در اینجا Q ماتریس $n \times n$ای است که ستون iام آن برابر عضو iام β است.

مثال ۵. قطری پذیر بودن یا نبودن ماتریس زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \in M_{۳\times۳}(\mathbb{R})$$

چند جمله‌ای مشخص A، $\det(A - tI) = -(t-۴)(t-۳)^۲$ است. در نتیجه مقادیر ویژه A، $\lambda_1 = ۴$ و $\lambda_2 = ۳$ هستند. به ترتیب با چندگانگی‌های ۱ و ۲. واضح است که شرط اول آزمون قطری پذیری برقرار است و از آنجا که چندگانگی λ_1، ۱ است، شرط دوم برای λ_1 برقرار است. پس کافی است شرط دوم را برای λ_2 بررسی کنیم. از آنجا که رتبه:

$$B = A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۲ است، $۳ - rank(B) = ۱$، که برابر چند گانگی λ_2 نیست. در نتیجه شرط ۲ برای λ_2 صادق نیست و بنابراین A قطری پذیر نمی‌باشد. □

مثال ۶. فرض کنید T عملگر خطی بر $\mathbb{R}^۳$ باشد که چنین تعریف می‌شود:

$$T\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲a_1 - ۳a_3 \\ a_1 + ۳a_2 + ۳a_3 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

قطری پذیری T را بررسی می‌کنیم. فرض کنید γ نشان دهنده پایه مرتب استاندارد $\mathbb{R}^۳$ باشد. در این صورت:

$$[T]_\gamma = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ & -۳ \\ ۱ & ۳ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

چند جمله ای مشخص T، $-(t-۱)^۲(t-۲)$ است. در نتیجه مقادیر ویژه T، $\lambda_۱ = ۱$ و $\lambda_۲ = ۲$ هستند، که چند گانگی آنها به ترتیب ۲ و ۱ است. توجه کنید که شرط اول امتحان قطری پذیری برقرار است و شرط دوم برای $\lambda_۲$ صادق است. زیرا چند گانگی آن ۱ است. پس کافی است شرط دوم را برای $\lambda_۱$ بررسی کنیم. برای $\lambda_۱ = ۱$،

$$۳ - rank(T - \lambda_۱ I) = ۳ - rank(\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & -۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}) = ۳ - ۱ = ۲$$

که برابر با چند گانگی $\lambda_۱ = ۱$ است.بنابراین T قطری پذیر می‌باشد.

حال چنان پایه β ای برای $\mathbb{R}^۳$ می‌یابیم که $[T]_\beta$ ماتریسی قطری باشد. از آنجا که

$$E_{\lambda_۱} = N(T - \lambda_۱ I) = \left\{ \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^۳; \begin{bmatrix} -۱ & -۲ & -۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰ \right\}$$

$E_{\lambda_۱}$ مجموعه جوابهای دستگاه زیر است:

$$-x_۱ - ۲x_۲ - ۳x_۳ = ۰$$

$$x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ = ۰$$

که

$$\beta_۱ = \left\{ \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

پایه ای برای آن می‌باشد. همچنین از آنجا که

$$E_{\lambda_۲} = N(T - \lambda_۲ I) = \left\{ \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^۳; \begin{bmatrix} -۲ & -۲ & -۳ \\ ۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰ \right\}$$

E_{λ_2} مجموعه جوابهای دستگاه زیر است:

$$-2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$
$$-x_3 = 0$$

که

$$\beta_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

پایه ای برای آن است. فرض کنید:

$$\beta = \beta_1 \cup \beta_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

در این صورت β پایه ای مرتب برای $\mathbb{R}^3$ متشکل از بردارهای ویژه T است و

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

□

مثال بعدی کاربردی است از قطری سازی که در بخش ۵-۳ مورد توجه قرار خواهد گرفت.

مثال ۷. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

نشان می‌دهیم که A قطری پذیر است و ماتریس 2×2ی Q را طوری می‌یابیم که $Q^{-1}AQ$ ماتریسی قطری باشد. سپس نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان این نتیجه را برای محاسبه A^n به ازای هر عدد صحیح مثبت n به کار برد.

ابتدا ملاحظه کنید که چند جمله ای مشخص A، $(t-1)(t-2)$ است و در نتیجه A دو مقدار ویژه متمایز دارد، $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 2$. با به کار گیری نتیجه قضیه ۵.۱ در مورد عملگر L_A، نتیجه می‌گیریم که A قطری پذیر است. به راحتی می‌توان دید (جزئیات را حذف می‌کنیم) که:

$$\beta_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \beta_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

به ترتیب پایه‌هایی برای فضاهای ویژه E_{λ_1} و E_{λ_2} است. بنابراین

$$\beta=\beta_1\cup\beta_2=\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

پایه ای برای $\mathbb{R}^2$ متشکل ازبردارهای ویژه A است.فرض کنید:

$$Q=\begin{bmatrix}-2&-1\\1&1\end{bmatrix}$$

ماتریسی باشد که ستونهای آن بردارهای β هستند. در نتیجه طبق قضیه ۱-۵ :

$$Q^{-1}AQ=[L_A]_\beta=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$$

برای یافتن A^n به ازای هر عدد صحیح مثبت n، توجه کنید که:

$$A=Q\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}Q^{-1}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}A^n&=\left[Q\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}Q^{-1}\right]^n\\&=Q\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}Q^{-1}Q\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}Q^{-1}\cdots Q\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}Q^{-1}\\&=Q\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}^nQ^{-1}\\&=\begin{bmatrix}-2&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2^n&2-2^{n+1}\\-1+2^n&-1+2^{n+1}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

□

حال کاربردی را مطرح می‌کنیم که از قطری سازی برای حل دستگاهی از معادلات دیفرانسیل استفاده می‌کند.

دستگاه معادلات دیفرانسیل

دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$x'_1 = 3x_1 + x_2 + x_3$$
$$x_2 = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3$$
$$x'_3 = -x_1 - x_2 + x_3$$

که در آن برای هر i، $x_i = x_i(t)$ یک تابع مشتق پذیر با مقادیر حقیقی از متغیر حقیقی t است. این دستگاه به وضوح جواب دارد، جوابی که در آن هر $x_i(t)$ تابع صفر است. همه جوابهای این دستگاه را تعیین می‌کنیم.

فرض کنید $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$، تابعی باشد که چنین تعریف می‌شود:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

مشتق x، که آن را با x' نشان می‌دهیم، چنین تعریف می‌شود:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{bmatrix}$$

حال فرض می‌کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب دستگاه مفروض باشد، تا بتوانیم دستگاه را به صورت معادله ماتریسی $x' = Ax$ بنویسیم. به راحتی می‌توان بررسی کرد (جزئیات را حذف می‌کنیم) که A قطری پذیر است و در نتیجه ماتریس وارون پذیر Q و ماتریس قطری Dای وجود دارند که $D = Q^{-1}AQ$. در اینجا:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

حال $A = QDQ^{-1}$ را در $x' = Ax$ جایگزین کنید تا $x' = QDQ^{-1}x$، یا معادلا $Q^{-1}x' = DQ^{-1}x$ به دست آید. تابع $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ را چنین تعریف می‌کنیم: $y = Q^{-1}x(t)$. می‌توان نشان داد که y تابعی مشتق پذیر است و $y' = Dy$.

چون D ماتریسی قطری است، دستگاه را به راحتی می‌توان حل کرد. با قرار دادن

$$y'(t) = \begin{bmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \\ y'_3(t) \end{bmatrix}$$

می توان $y' = Dy$ به این صورت بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \\ y'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1(t) \\ 2y_2(t) \\ 4y_3(t) \end{bmatrix}$$

سه معادله

$$y'_1 = 2y_1$$
$$y'_2 = 2y_2$$
$$y'_3 = 4y_3$$

از یکدیگر مستقل هستند و در نتیجه می‌توان هر کدام را مستقلا حل کرد. به راحتی می‌توان دید (به طرز مشابه با مثال ۲ از بخش ۵-۱) که جوابهای عمومی این معادلات عبارتند از $y_1(t) = c_1e^{2t}$، $y_2(t) = c_2e^{2t}$ و $y_3(t) = c_3e^{4t}$، که در اینجا: c_1, c_2, c_3 ثابتهای دلخواهی هستند. نهایتا

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = x(t) = Qy(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1e^{2t} \\ c_2e^{2t} \\ c_3e^{4t} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -c_1e^{2t} - c_3e^{4t} \\ -c_2e^{2t} - 2c_3e^{4t} \\ c_1e^{2t} + c_2e^{2t} + c_3e^{4t} \end{bmatrix}$$

جواب دستگاه اصلی را در اختیارمان می‌گذارد. توجه کنید که این جواب را می‌توان به این صورت نوشت:

$$x(t) = e^{2t}\left[c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right] + e^{4t}\left[c_3\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right]$$

عبارت درون براکت، به ترتیب اعضای دلخواهی از E_{λ_1} و E_{λ_2} هستند، که $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 4$. بنابراین جواب عمومی دستگاه اصلی، $x(t) = e^{2t}z_1 + e^{4t}z_2$ است که درآن $z_1 \in E_{\lambda_1}$ و $z_2 \in E_{\lambda_2}$.

مجموعهای مستقیم*

فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد. روشی برای تجزیه V به زیر فضاهای ساده تر وجود دارد که کمی بر بینش ما نسبت به رفتار T می‌افزاید. این روش به خصوص در فصل ۷ مفید خواهد بود که در آنجا عملگرهای قطری ناپذیر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در مورد عملگرهای قطری پذیر، این زیر فضاهای ساده تر، همان فضاهای ویژه عملگر هستند.

تعریف:. فرض کنید $W_1, W_2, ..., W_k$ زیر فضاهایی از فضای برداری V باشند. مجموع این زیر فضاها $W_1 + W_2 + ... + W_k = \sum_{i=1}^{k} W_i$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$W_1 + W_2 + ... + W_k = \sum_{i=1}^{k} W_i = \{v_1 + v_2 + ... + v_k : v_i \in W_i, 1 \leq i \leq k\}$$

نشان دادن این که مجموع چند زیرفضای برداری خود یک زیر فضا است، تمرینی ساده می‌باشد.

مثال ۸. فرض کنید $V = \mathbb{R}^3$. فرض کنید W_1 نشان دهنده صفحه xy باشد و فرض کنید W_2 نشان دهنده صفحه yz. در این صورت $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$، چرا که برای هر بردار $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$، داریم:

$$(a, b, c) = (a, 0, 0) + (0, b, c)$$

که $(a, 0, 0) \in W_1$ و $(0, b, c) \in W_2$. □

توجه کنید که در مثال ۸، نمایش (a, b, c) به عنوان مجموع بردارهای واقع در W_1 و W_2 منحصر به فرد نمی‌باشد. به عنوان مثال، $(a, b, c) = (a, b, 0) + (0, 0, c)$ نمایشی دیگر است. از آنجا که معمولا مجموعه‌هایی مورد توجه ما است که در آنها طرز نمایش منحصر به فرد است، شرط جدیدی معرفی می‌کنیم که این مساله را تضمین می‌کند. تعریفی از مجموع مستقیم که در زیر می‌آید، تعمیمی از تعریفی است که در تمرین بخش ۱-۳ آمد.

تعریف:. فرض کنید $W_1, W_2, ..., W_k$ زیرفضاهایی از فضای برداری V باشند. V را مجموع مستقیم زیرفضاهای $W_1, W_2, ..., W_k$ نامیده، می‌نویسیم $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$، در صورتی که

$$V = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

و همچنین برای هر j، $(1 \leq j \leq k)$:

$$W_j \cap \sum_{i \neq j} W_i = \{0\}$$

مثال ۹. فرض کنید $V = \mathbb{R}^{4}$، $W_1 = \{(a,b,0,0) : a,b \in \mathbb{R}\}$، $W_2 = \{(0,0,c,0) : c \in \mathbb{R}\}$ و $W_3 = \{(0,0,0,d) : d \in \mathbb{R}\}$. برای هر $(a,b,c,d) \in V$،

$$(a,b,c,d) = (a,b,0,0) + (0,0,c,0) + (0,0,0,d) \in W_1 + W_2 + W_3$$

در نتیجه:

$$V = \sum_{i=1}^{3} W_i$$

برای اثبات این که V مجموع مستقیم W_1, W_2, W_3 است، باید ثابت کنیم که $W_1 \cap (W_2 + W_3) = W_2 \cap (W_1 + W_3) = W_3 \cap (W_1 + W_2) = \{0\}$. اما این تساوی‌ها بدیهی هستند و بنابراین $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$. □

نتیجه بعدی شامل چند شرط است که با تعریف مجموع مستقیم معادلند.

قضیه ۵.۱۵. فرض کنید $W_1, W_2, ..., W_k$، زیرفضاهایی از فضای برداری V باشند. شرایط زیر معادل اند.

الف) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$

ب) $V = \sum_{i=1}^{k} W_i$ و برای هر دنباله از بردارها مثل $v_1, v_2, ..., v_k$ که $v_i \in W_i$ $(1 \leq i \leq k)$، هرگاه $v_1 + v_2 + ... + v_k = 0$ آنگاه برای هر i، $v_i = 0$.

ج) هر بردار $v \in V$ را می‌توان به صورت منحصر به فردی به شکل $v = v_1 + v_2 + ... + v_k$ نوشت به طوری که $v_i \in W_i$

د) هر گاه γ_i پایه ای مرتب برای W_i باشد ($1 \leq i \leq k$)، آنگاه $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup ... \cup \gamma_k$ پایه ای مرتب برای V است.

ه) برای هر $i = 1, 2, ..., k$ پایه مرتب γ_i برای W_i وجود دارد به گونه ای که $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup ... \cup \gamma_k$ پایه ای مرتب برای V باشد.

برهان. فرض کنید (الف) درست باشد (ب) را ثابت می‌کنیم. واضح است که:

$$V = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

حال فرض کنید که $v_1, v_2, ..., v_k$ چنان بردارهایی باشند که برای هر i، $v_i \in W_i$، و $v_1 + v_2 + ... + v_k = 0$. در این صورت برای هر j،

$$-v_j = \sum_{i \neq j} v_i \in \sum_{i \neq j} W_i$$

اما $-v_j \in W_j$ و بنابراین

$$-v_j \in W_j \cap \sum_{i \neq j} W_i = \{0\}$$

در نتیجه $v_j = 0$ که (ب) به این ترتیب اثبات می‌شود.

حال فرض کنید که (ب) درست باشد، (ج) را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $v \in V$. طبق (ب)، بردارهای $v_1, v_2, ..., v_k$ موجودند به گونه ای که $v_i \in W_i$ و $v = v_1 + v_2 + ... + v_k$. باید نشان دهیم که این نمایش منحصر به فرد است. فرض کنید که علاوه براین، $v = w_1 + w_2 = ... + w_k$، که برای هر i، $w_i \in W_i$.در این صورت:

$$(v_1 - w_1) + (v_2 - w_2) + ... + (v_k - w_k) = 0$$

اما برای هر i، $(v_i - w_i) \in W_i$ و بنابراین طبق (ب) برای هر i، $(v_i - w_i) = 0$. در نتیجه برای هر i، $v_i = w_i$ که یکتایی نمایش را ثابت می‌کند.

حال (ج) را مفروض بگیرید. (د) را ثابت می‌کنیم. برای هر i، فرض کنید γ_i پایه مرتبی برای W_i باشد. از آنجا که طبق (ج):

$$V = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

نتیجه می‌شود که $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup ... \cup \gamma_k$، V را تولید می‌کند. برای اثبات این که این مجموعه مستقل خطی است، بردارهای $v_{ij} \in \gamma_i$ ($j = 1, 2, .., m_i$ و $i = 1, 2, ..., k$) و اسکالرهای a_{ij} را چنان در نظر بگیرید که: $\sum_{i,j} a_{ij} v_{ij} = 0$ برای هر i، قرار دهید: $w_i = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} v_{ij}$ در این صورت برای هر i، $w_i \in span(\gamma_i)$ و $w_1 + w_2 + ... + w_k = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} v_{ij} = 0$ از آنجا که برای هر i، $0 \in W_i$ و $0 = 0 + ... + 0 + 0 = w_1 + w_2 + ... + w_k$، از قسمت ج این نتیجه را می‌توان دریافت کرد که برای هر i، $w_i = 0$. در نتیجه برای هر i :

$$0 = w_i = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} v_{ij}$$

اما هر γ_i مستقل خطی است و بنابراین برای i و j، $a_{ij} = 0$. در نتیجه : $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup ... \cup \gamma_k$، مستقل خطی است و بنابراین پایه ای برای هر V است.

ه) به وضوح از (د) نتیجه می‌شود.

در نهایت (ه) را مفروض گرفته، (الف) را ثابت می‌کنیم. برای هر i، فرض کنید که γ_i پایه ای مرتب برای W_i باشد به گونه ای که $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup ... \cup \gamma_k$ پایه ای مرتب برای V باشد. دراین صورت، با چند بار به کارگیری تمرین ۱۲ از بخش ۱-۴،

$$\begin{aligned} V &= span(\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_k) \\ &= span(\gamma_1) + span(\gamma_2) + \ldots + span(\gamma_k) = \sum_{i=1}^{k} W_i \end{aligned}$$

j را ثابت گرفته و فرض کنید که برای بردار $v \in V$:

$$\circ \neq v \in W_j \cap \sum_{j\neq i} W_i$$

در این صورت $v \in \sum_{j\neq i} W_i = span(\cup_{i\neq j}\gamma_j)$ و $v \in W_j = span(\gamma_i)$ و بنابراین v را می‌توان به بیش از یک طریق به صورت ترکیبی خطی از $\gamma_۱ \cup \gamma_۲ \cup ... \cup \gamma_k$ نوشت. اما وجود این دو نمایش با قضیه ۱-۷ در تناقض است و بنابراین نتیجه می‌گیریم که:

$$W_j \cap \sum_{j\neq i} W_i = \{\circ\}$$

که الف را ثابت می‌کند. □

با کمک قضیه ۱۵.۵، می‌توانیم قطری پذیری را برحسب مجموع‌های مستقیم توصیف کنیم.

قضیه ۱۶.۵. عملگر خطی T بر فضای برداری متناهی البُعد V قطری پذیر است اگر و تنها اگر V مجموع مستقیم فضاهای ویژه T باشد.

برهان. فرض کنید $\beta_۱, \beta_۲, ..., \beta_k$ مقادیر ویژه متمایز T باشند. ابتدا فرض کنید که T قطری پذیر باشد و برای هر i، پایه مرتب γ_iای برای فضای ویژه E_{λ_i} انتخاب کنید. طبق قضیه ۵-۱۴، $\gamma_۱ \cup \gamma_۲ \cup ... \cup \gamma_k$ پایه ای برای V است و طبق قضیه ۵-۱۵، V مجموع مسقیم‌های E_{λ_i}ها است.

بر عکس، فرض کنید V مجموع مستقیم فضاهای ویژه T باشد، برای هر i، پایه مرتبی مانند γ_i برای E_{λ_i} انتخاب کنید. طبق قضیه ۵-۱۵، اجتماع $\gamma_۱ \cup \gamma_۲ \cup ... \cup \gamma_k$ پایه ای برای V است. چون این پایه از بردارهای ویژه، T تشکیل شده است، نتیجه می‌گیریم که T قطری پذیر است. □

مثال ۱۰. فرض کنید T عملگری خطی بر $\mathbb{R}^۴$ باشد که چنین تعریف می‌شود:

$$T(a, b, c, d) = (a, b, ۲c, ۳d)$$

به راحتی می‌توان دید که T قطری پذیر با مقادیر ویژه $\lambda_۱ = ۱$، $\lambda_۲ = ۲$ و $\lambda_۳ = ۳$ است. به علاوه، فضاهای ویژه نظیر این مقادیر، با زیر فضاهای $W_۱$، $W_۲$ و $W_۳$ در مثال ۹ یکسان هستند. قضیه ۵-۱۶، برهان دیگری بر این که $\mathbb{R}^۴ = W_۱ \oplus W_۲ \oplus W_۳$ در اختیارمان می‌گذارد. □

تمرینات

۱. ۱. تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) هر عملگر خطی بر یک فضای برداری n-بعدی که کمتر از n مقدار ویژه متمایز داشته باشد، قطری پذیر است.

ب) بردارهای ویژه نظیر یک مقدار ویژه یکسان، همیشه وابسته خطی هستند.

ج) اگر λ مقداری ویژه برای عملگر خطی T باشد، آنگاه هر عضو E_λ یک بردار ویژه T است.

د) هرگاه $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ دو مقدار ویژه متمایز عملگر خطی T باشند، آنگاه $E_{\lambda_۱} \cap E_{\lambda_۲} = \{۰\}$.

ذ) فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$ و $\beta = \{v_۱, v_۲, ..., v_n\}$ پایه ای مرتب برای F^n متشکل از بردارهای ویژه A باشد. هرگاه Q ماتریسی $n \times n$ باشد که ستون jام آن v_i است($۱ \leq i \leq n$) آنگاه $Q^{-۱}AQ$ ماتریسی قطری است.

ر) عملگر خطی T بر یک فضای برداری متناهی البُعد قطری پذیر است اگر و تنها اگرچندگانگی هر مقدار ویژه آن مانند λ، برابر با بعد E_λ باشد.

ز) هر عملگر خطی قطری پذیربر یک فضای برداری ناصفر حداقل یک مقدار ویژه دارد.

دو مورد بعدی مربوط به«زیر بخش» اختیاری در مورد مجموعهای مستقیم هستند.

ح) هرگاه فضای برداری مجموع مستقیم زیر فضاهای $W_۱, W_۲, ..., W_n$ باشد، آنگاه برای هر $i \neq j$، $W_i \cap W_j = \{۰\}$.

ط) اگر $V = \sum i = ۱^k W_i$ و برای هر $i \neq j$، $W_i \cap W_j = \{۰\}$، آنگاه $V = W - ۱ \oplus W_۲ \oplus ... \oplus W - k$.

۲. برای هر یک از ماتریس‌های $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ در زیر، قطری پذیری A را بررسی کنید و در صورتیکه A قطری پذیر باشد، ماتریس Q را طوری بیابید که $Q^{-۱}AQ$ یک ماتریس قطری باشد. الف) ب) ج) د) ه) و) ز)

۳. برای هر یک از عملگرهای خطی T در زیر، قطری پذیری T را بررسی کنید. اگر T قطری پذیر باشد، پایه ای مانند β را طوری بیابید که $[L_A]_\beta$ ماتریسی قطری باشد.

الف) $T : P_۳(\mathbb{R}) \to P_۳(\mathbb{R})$ که چنین تعریف می‌شود: $T(f) = f' + f''$ که در اینجا f' و f'' به ترتیب مشتقات اول و دوم f هستند.

ب) $T : P_۲(\mathbb{R}) \to P_۲(\mathbb{R})$ که چنین تعریف می‌شود: $T(ax^۲ + bx + c) = cx^۲ + bx + a$

ج) $T : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ که چنین تعریف می‌شود:

$$T\begin{bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ a_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_۱ \\ -a_۲ \\ ۲a_۳ \end{bmatrix}$$

د) $T: P_۲(\mathbb{R}) \to P_۲(\mathbb{R})$ که چنین تعریف می‌شود:
$$T(f)(x) = f(۰) + f(۱)(x + x^۲)$$

ه) $T: \mathbb{C}^۲ \to \mathbb{C}^۲$ که چنین تعریف می‌شود: $T(z, w) = (z + iw, iz + w)$

و) $T: M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ که چنین تعریف می‌شود: $T(A) = A^t$

۴. شکل ماتریسی قضیه ۱۰-۵را ثابت کنید: هرگاه $A \in M_{n\times n}(F)$، n مقدار ویژه متمایز داشته باشد، آنگاه A قطری پذیر است.

۵. شکل ماتریسی قضیه ۱۱.۵ را بیان کرده، آن را ثابت کنید

۶. الف) دلیل درستی آزمون قطری پذیری وروش قطری سازی را که در این بخش ذکر شد، بیان کنید.

ب) نتایج قسمت (الف) را برای ماتریس‌ها بیان کنید.

۷. هرگاه
$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \in M_{۲\times۲}(F)$$
فرمولی برای A^n بیابید که در اینجا n عدد صحیح دلخواهی است.

۸. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$ دو مقدار ویژه متمایز داشته باشد، $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$. فرض کنید $dim(E_{\lambda_۱}) = n - ۱$: ثابت کنید A قطری پذیر است.

۹. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای متناهی البُعد V باشد و فرض کنید که پایه مرتبی مانند β برای V وجود داشته باشد به گونه‌ای که $[T]_\beta$ بالا مثلثی باشد.

الف) ثابت کنید که چند جمله‌ای T می‌شکافد.

ب) نتیجه مشابه برای ماتریس‌ها را بیان و اثبات کنید.

عکس (الف) در تمرین ۳۲ از بخش ۵-۴ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۱۰. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری V باشد که مقادیر ویژه آن $\lambda_۱, ..., \lambda_k$ به ترتیب با چندگانگی‌های $m_۱, m_۲, ..., m_k$ هستند. فرض کنید β چنان پایه‌ای برای V باشد که $[T]_\beta$ بالا مثلثی باشد. ثابت کنید درایه‌های ماتریسی قطری $[T]_\beta$، عبارت اند از $\lambda_۱, ..., \lambda_k$ و λ_i، m_i بار روی قطر ظاهر می‌شود. $(۱ \leq i \leq k)$.

۱۱. فرض کنید A یک ماتریس بالا مثلثی $n \times n$ با مقادیر ویژه متمایز $\lambda_1, ..., \lambda_k$ باشد که چندگانگی‌های متناظر آنها $m_1, m_2, ..., m_k$ است. ثابت کنید:

الف) $tr(A) = \sum_{i=1}^{k} m_i\lambda_i$

ب) $\det(A) = (\lambda_1)^{m_1}(\lambda_2)^{m_2}...(\lambda_k)^{m_k}$

۱۲. فرض کنید T یک عملگر خطی وارون پذیر بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد.

الف) یادآوری می‌کنیم که برای هر مقدار ویژه T مانند λ، λ^{-1} یک مقدار ویژه T^{-1} است (تمرین ۸ بخش ۵-۱). ثابت کنید که فضای ویژه T متناظر با λ، برابر با فضای ویژه T^{-1} متناظر با λ^{-1} است.

ب) ثابت کنید که اگر T قطری پذیر باشد، آنگاه T^{-1} نیز قطری پذیر است.

۱۳. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$. از تمرین ۱۴ بخش ۵-۱ به یاد بیاورید که A و A^t دارای چند جمله‌ای مشخص یکسان هستند و بنابراین مقادیر ویژه و چندگانگیشان برای هر دو یکسان است. برای هر مقدار ویژه A و A^t مانند λ، فرض کنید $E_\lambda(A)$ و $E_\lambda(A^t)$ به ترتیب نشانگر فضاهای ویژه مربوط به A و A^t باشند.

الف) با یک مثال نشان دهید که برای هر مقدار ویژه مشترک A و A^t، این دو فضای ویژه لزوما یکسان نیستند.

ب) ثابت کنید برای هر مقدار ویژه λ، $dim(E_\lambda(A)) = dim(E_\lambda(A^t))$.

ج) ثابت کنید که اگر A قطری پذیر باشد، A^t نیز چنین است.

۱۴. جواب عمومی برای هریک از دستگاه‌های معادله دیفرانسیل زیر بیابید.

الف) $$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= 3x - y \end{aligned}$$

ب) $$\begin{aligned} x_1' &= 8x_1 + 10x_2 \\ x_2 &= -5x_1 - 7x_2 \end{aligned}$$

ج) $$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_3 \\ x_2 &= x_2 + x_3 \\ x_3' &= 2x_3 \end{aligned}$$

۱۵. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی زیر باشد:

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$
$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$$
$$\vdots$$
$$x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n$$

فرض کنید A قطری پذیر بوده، مقادیر ویژه متمایز A، $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ باشند. ثابت کنید که تابع مشتق پذیر $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$، جوابی برای این دستگاه است اگر و تنها اگر x به شکل زیر باشد:

$$x(t) = e^{\lambda_1 t}z_1 + e^{\lambda_2 t}z_2 + ... + e^{\lambda_k t}z_k$$

که برای هر k ،$i = 1, 2, ..., k$، $z_i \in E_{\lambda_i}$. با استفاده از این نتیجه ثابت کنید که مجموعه جوابهای این دستگاه، یک فضای برداری $n-$ بعدی حقیقی است.

تمرینات ۱۶ تا ۱۸ مربوط به قطری سازی هم زمان هستند.

چند تعریف: دو عملگر خطی T و U برفضای برداری متناهی البُعد V را هم زمان قطری پذیر نامیم هرگاه پایه مرتبی مانند β برای V موجود باشد، به گونه ای که هر دو $[T]_\beta$ و $[U]_\beta$ ماتریس‌های قطری باشند. به صورتی مشابه، $A, B \in M_{n\times n}(F)$، را **همزمان قطری پذیر** گویند هرگاه ماتریس قطری $Q \in M_{n\times n}(F)$ موجود باشد به گونه ای که $Q^{-1}AQ$ و $Q^{-1}BQ$ هردو قطری پذیر باشد.

۱۶. الف) ثابت کنید که اگر T و U هم زمان بر فضای برداری متناهی البُعد V قطری پذیر باشند، آنگاه ماتریس‌های $[T]_\beta$ و $[U]_\beta$ به ازای هر پایه مرتب β همزمان قطری پذیر هستند.

ب) ثابت کنید که اگر A و B هم زمان قطری پذیر باشند، آنگاه L_A و L_B عملگرهایی هم زمان قطری پذیر هستند.

۱۷. ثابت کنید که اگر T و U هم زمان قطری پذیر باشند، آنگاه T و U با هم جابجا می‌شوند. (یعنی $UT = TU$)

ب) ثابت کنید که اگر A و B ماتریس‌هایی هم زمان قطری پذیر باشند، آنگاه A و B با یکدیگر جابجا می‌شوند.

عکس قسمت‌های الف و ب، در تمرین ۲۵ از بخش ۵-۴ ثابت خواهند شد.

۱۸. فرض کنید T عملگری قطری پذیر بریک فضای برداری متناهی البُعد بوده، m عدد صحیح مثبتی باشد. ثابت کنید که T و T^m هم زمان قطری پذیر هستند.

تمرینات ۱۹ الی ۲۲ با مجموعهای مستقیم ارتباط دارند.

۱۹. فرض کنید $W_1, W_2, ..., W_k$ زیر فضاهایی از فضای برداری متناهی البُعد V باشند به گونه ای که :
$$\sum_{i=1}^{k} W_i = V$$
ثابت کنید که V مجموع مستقیم $W - 1, W_2, ..., W_k$ است اگر و تنها اگر:
$$\sum_{i=1}^{k} \dim(W_i) = \dim(V)$$

۲۰. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی البُعد با پایه β باشد و $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ افرازی از β باشد (یعنی $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ چنان زیر مجموعه‌هایی از β باشند که $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup ... \cup \beta_k$ و هرگاه $\beta_i \cap \beta_j = \emptyset, i \neq j$). ثابت کنید $V = span(\beta_1) \oplus span(\beta_2) \oplus ... \oplus span(\beta_k)$.

۲۱. فرض کنید T عملگری خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد V بوده، مقدارهای ویژه متمایز T، $\lambda_1, ..., \lambda_k$ باشند. ثابت کنید:
$$span(\{x \in V : \text{ یک بردار ویژه } T \text{ است } x\}) = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_1} \oplus ... \oplus E_{\lambda_1}$$

۲۲. فرض کنید $W_1, W_2, K_1, K_2, ..., K_p, M_1, M_2, ..., M_q$ چنان زیر فضاهایی از فضای برداری V باشند که $W_1 = K_1 \oplus K_2 \oplus ... \oplus K_p$ و $W_2 = M_1, \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_q$. ثابت کنید که اگر $W_1 \cap W_2 = \{0\}$، آنگاه:
$$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 = K_1 \oplus K_2 \oplus ... \oplus K_p \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_q$$

۵-۳ حدود ماتریسی و زنجیرهای مارکف

در این فصل، آنچه را که تا کنون در فصل ۵ آموخته ایم، به کار می‌گیریم تا حد دنباله ای از توان‌ها به شکل $A, A^2, ..., A^n, ...$ را که در اینجا A ماتریسی مربعی با درایه‌های مختلط است، مورد مطالعه قرار دهیم. اینگونه دنباله ها و حدودشان، کاربردهایی عملی در علوم طبیعی وعلوم انسانی دارند.

آشنایی با حدود دنباله‌های حقیقی را مفروض می‌گیریم. حد یک دنباله از اعداد مختلط مانند $\{z_m : m = 1, 2, ...\}$ را می‌توان بر حسب حدود دنباله‌های متشکل از قسمتهای حقیقی و موهومی آن تعریف کرد. هرگاه $z_m = r_m + is_m$ که r_m و s_m حقیقی هستند، آنگاه:
$$\lim_{m\to\infty} z_m = \lim_{m\to\infty} r_m + i \lim_{m\to\infty} s_m$$
به شرطی که $\lim_{m\to\infty} r_m$ و $\lim_{m\to\infty} s_m$ موجود باشند.

تعریف:. فرض کنید L، ... $A_۱, A_۲,$ ، ماتریس‌هایی $n \times p$ با درایه‌های مختلط باشند. گوئیم دنباله ... $A_۱, A_۲,$ به ماتریس L، که حد دنباله می‌باشد **همگرا** است، هر گاه برای هر $۱ \leq i \leq n$ و $۱ \leq j \leq p$،

$$\lim_{m\to\infty}(A_m)_{ij} = L_{ij}$$

برای مشخص کردن حد دنباله، می‌نویسیم:

$$\lim_{m\to\infty}(A_m) = L$$

مثال ۱. هرگاه:

$$A_m = \begin{bmatrix} ۱ - \frac{۱}{m} & (\frac{-۳}{۴})^m & \frac{۳m^۲}{m^۲+۱} + i(\frac{۲m+۱}{m-۱}) \\ (\frac{i}{۲})^m & ۲ & (۱+\frac{۱}{m})^m \end{bmatrix}$$

آنگاه:

$$\lim_{m\to\infty} A_m = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳+۲i \\ ۰ & ۲ & e \end{bmatrix}$$

که در اینجا e پایه لگاریتم طبیعی است. $\square$

یک خاصیت ساده اما مهم که حدود ماتریسی دارند، در قضیه بعدی آمده است. به شباهت میان این خاصیت وخصوصیت آشنای دنباله‌های اعداد حقیقی توجه کنید، که می‌گوید هر گاه $\lim\limits_{m\to\infty} a_m$ موجود باشد آنگاه :

$$\lim_{m\to\infty} ca_m = c(\lim_{m\to\infty} a_m)$$

قضیه ۵.۱۷. فرض کنید ... $A_۱, A_۲,$ ، دنباله ای از ماتریس‌های مختلط باشد که به ماتریس L همگراست. در این صورت برای هر $P \in M_{r\times n}(\mathbb{C})$ و $Q \in M_{p\times s}(\mathbb{C})$:

$$\lim_{m\to\infty} PA_m = PL \qquad \text{و} \qquad \lim_{m\to\infty} A_mQ = LQ$$

برهان. برای هر $i(۱ \leq i \leq r)$ و $j(۱ \leq j \leq p)$:

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}[(PA_m)]_{ij} &= \lim_{m\to\infty}[\sum_{k=۱}^{n} P_{ik}(A_m)_{kj}] \\ &= \sum_{k=۱}^{n} P_{ik}\cdot \lim_{m\to\infty}(A_m)_{kj} = \sum_{k=۱}^{n} P_{ik}L_{kj} = (PL)_{ij}\end{aligned}$$

در نتیجه $\lim\limits_{m\to\infty} PA_m = PL$. اثبات این که $\lim\limits_{m\to\infty} A_mQ = LQ$ ، مشابه است. $\square$

نتیجه ۱. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ به گونه ای که $\lim_{m\to\infty} A^m = L$. در این صورت، برای هر ماتریس وارون پذیر $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$،

$$\lim_{m\to\infty}(QAQ^{-۱})^m = QLQ^{-۱}$$

برهان. ازآنجا که:

$$(QAQ^{-۱})^m = (QAQ^{-۱})(QAQ^{-۱})...(QAQ^{-۱}) = (QA^mQ^{-۱})$$

با دوبار به کار گیری قضیه ۱۷.۵، داریم:

$$\lim_{m\to\infty}(QAQ^{-۱})^m = \lim_{m\to\infty} QA^mQ^{-۱} = Q\lim_{m\to\infty} A^mQ^{-۱} = QLQ^{-۱}$$

□

در بحثی که در ادامه این بخش خواهد آمد، معمولا به این مجموعه بر می‌خوریم:

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = ۱ \quad \text{یا} |\lambda| < ۱\}$$

از لحاظ هندسی، این مجموعه متشکل از عدد مختلط ۱ و درون قرص واحد (قرص به شعاع ۱ و به مرکز مبدا مختصات) است. این مجموعه به این لحاظ مورد توجه است که هرگاه λ عددی مختلط باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} \lambda^n$ موجود است اگر و تنها اگر $\lambda \in S$. این حقیقت که در حالتی که λ حقیقی باشد به وضوح برقرار است، می‌توان برای اعداد مختلط نیز ثابت کرد.

نتیجه مهم بعدی شرط لازم وکافی برای وجود حدی که مورد توجه ماست، در اختیارمان می‌گذارد.

قضیه ۱۸.۵. فرض کنید A ماتریسی با درایه‌های مختلط باشد. در این صورت $\lim_{m\to\infty} A^m$ موجود است اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) هرگاه λ یک مقدار ویژه A باشد، آنگاه $\lambda \in S$.

ب) اگر ۱ یک مقدار ویژه A باشد، آنگاه بعد فضای ویژه متناظر با ۱، برابر با چند گانگی ۱ به عنوان یک مقدار ویژه A باشد.

یک برهان برای این قضیه را که بر نظریه فرم‌های متعارف جردن (بخش۷-۲) متکی است، می‌توان در تمرین ۱۹ از بخش ۷-۲ از همین کتاب یافت. برهان دیگری را که از قضیه شور استفاده می‌کند (قضیه۶-۱۴ بخش ۴-۶)، می‌توان در مقاله فرید برگ و اینسل تحت عنوان«همگرایی یک ماتریس» [۳] یافت.

لزوم شرط الف به راحتی ثابت می‌شود، چرا که فرض کنید λ چنان مقدار ویژه ای از A باشد که $\lambda \notin S$. فرض کنید v یک بردار ویژه A متناظر با λ باشد. با در نظر گرفتن v به عنوان یک ماتریس $n \times ۱$ مشاهده می‌کنیم که طبق قضیه

[۳] Convergence of Matrix Power ,Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 1992,Vol. no. 5,pp765-769

۱۷.۵:
$$\lim_{m\to\infty}(A^m v) = (\lim_{m\to\infty} A^m)v = Lv$$

که در اینجا $L = \lim_{m\to\infty} A^m$. اما $\lim_{m\to\infty}(\lambda^m v) = \lim_{m\to\infty}(A^m v)$ واگراست، چرا که $\lim_{m\to\infty} \lambda^m$ وجود ندارد. در نتیجه اگر $\lim_{m\to\infty} A^m$ وجود داشته باشد، شرط الف از قضیه ۵–۱۸ باید برقرار باشد. با این که در اینجا قادر به اثبات لزوم شرط ب نیستیم، می‌توانیم نمونه ای را در نظر بگیریم که این شرط برای آن برقرار نباشد. توجه کنید که چند جمله ای مشخص ماتریس

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$(t-۱)^۲$ است و بنابراین $\lambda = ۱$ یک مقدار ویژه B با چندگانگی ۲ است. به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\dim(E_\lambda) = ۱$ و بنابراین شرط (ب) از قضیه ۱۸.۵ نقض شده است. به کمک استدلالی ساده می‌توان نشان داد که

$$B^m = \begin{bmatrix} ۱ & m \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

و بنابراین $\lim_{m\to\infty} B^m$ وجود ندارد. در فصل ۷ خواهیم دید که اگر A ماتریسی باشد که شرط (ب) برای آن صادق نباشد، آنگاه A متشابه با ماتریسی است که زیر ماتریس ۲×۲ی گوشه بالای چپ آن خود B است.

در بیشتر کاربردهای مر بوط به حدود ماتریسی، ماتریس مورد نظر قطری پذیر است و بنابراین شرط (ب) از قضیه ۱۸.۵ خود به خود برقرار است. در این حالت، قضیه ۱۸.۵ به قضیه زیر تقلیل می‌یابد که می‌توان آن را با استفاده از نتایج قبلی که به دست آورده ایم ثابت کرد.

قضیه ۱۹.۵. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ در دو شرط زیر صدق کند:

الف) هرگاه λ یک مقدار ویژه A باشد، آنگاه $\lambda \in S$.

ب) A قطری پذیر است.

در این صورت $\lim_{m\to\infty} A^m$ وجود دارد.

برهان. از آنجا که A قطری پذیر است، ماتریسی وارون پذیر مانند Q وجود دارد به گونه ای که $Q^{-۱}AQ = D$ ماتریسی قطری باشد. فرض کنید:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

از آنجا که $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ مقادیر ویژه A هستند، شرط (الف) مستلزم آن است که برای هر i یا $\lambda_i = 1$ و یا $|\lambda_i| < 1$.
در نتیجه:

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_i^m = \begin{cases} 1 & \text{هرگاه } \lambda_i = 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اما از آنجا که:

$$D^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{bmatrix}$$

دنباله $D, D^2, ...$، به حدی مانند L می‌گراید. در نتیجه طبق نتیجه قضیه ۱۷.۵:

$$\lim_{m\to\infty} A^m = \lim_{m\to\infty} (QDQ^{-1})^m = QLQ^{-1}$$

□

تکنیکی را که در برهان قضیه ۱۹.۵ برای محاسبه $\lim_{m\to\infty} A^m$ به کار رفت، می‌توان همان طور که هم اکنون شرح خواهیم داد، در محاسبات عملی نیز به کار برد. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{-9}{4} & \frac{-15}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-9}{4} & \frac{-11}{4} \end{bmatrix}$$

با استفاده از روشهایی که در بخش‌های ۵-۱ و ۵-۲ شرح دادیم، می‌توانیم A را قطری کنیم (جزئیات را حذف می‌نماییم)، تا ماتریس وارون پذیر Q و ماتریس قطری D چنان به دست آیند که $Q^{-1}AQ = D$. در اینجا:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

ودر نتیجه:

$$\lim_{m\to\infty} A^m = \lim_{m\to\infty} (QDQ^{-1})^m = \lim_{m\to\infty} QD^mQ^{-1} = Q(\lim_{m\to\infty} D^m)Q^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ -۳ & -۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ & -۱ \end{bmatrix} \left[\lim_{m\to\infty} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & (\frac{-۱}{۲})^m & ۰ \\ ۰ & ۰ & (\frac{۱}{۴})^m \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ -۵ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ -۳ & -۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ -۵ & ۳ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۰ & -۳ \\ -۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

اکنون کاربردی را در نظر می‌گیریم که از حد توانهای یک ماتریس استفاده می‌کند. فرض کنید که جمعیت یک ناحیه بزرگ شهری همواره ثابت است. اما ساکنان ناحیه دائما بین شهر اصلی و حومه آن تغییر مکان می‌دهند. در واقع فرض کنید درایه‌های ماتریس A که در زیر آمده است، احتمال ساکن بودن فردی را که در اول ژانویه، در شهر یا در حومه آن زندگی می‌کند، در هریک از این دو قسمت در اول ژانویه سال بعد، نشان می‌دهد.

$$A = \begin{array}{cc} \text{هم اکنون ساکن در شهر} & \text{هم اکنون ساکن در حومه} \\ \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ \end{array}\left[\begin{array}{cc} ۰/۹۰ & ۰/۱۰ \\ ۰/۰۲ & ۰/۹۸ \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{ساکن در شهر در سال آینده} \\ \text{ساکن در حومه در سال آینده} \end{array}$$

به عنوان مثال، احتمال آنکه فردی که (در اول ژانویه) در شهر زندگی می‌کند، در (اول ژانویه) سال بعد، در حومه زندگی کند، ۰/۱۰ است. توجه کنید که چون درایه‌های A احتمال هستند، نامنفی می‌باشند. علاوه براین، فرض ثابت بودن جمعیت در ناحیه بزرگ شهری مستلزم آن است که مجموع درایه‌های هریک از ستونهای A، ۱باشد.

هر ماتریس مربعی را که دارای این خواص (درایه‌های نامنفی و ستونهایی که مجموع درایه هاشان۱است) باشد، یک ماتریس تغییر وضعیت یا یک ماتریس تصادفی (یا احتمال) می‌نامند. سطرها و ستون‌های یک ماتریس تغییر وضعیت $n \times n$ دلخواه مانند M، هرکدام متناظر با یک حالت هستند و درایه M_{ij}، نشان دهنده احتمال انتقال از حالت j ام به حالت i ام، طی یک مرحله می‌باشد.

در مثال بالا، دو «حالت» وجود دارد (سکونت در شهر و سکونت در حومه). پس به عنوان مثال، $A_{۲۱}$ احتمال جابجایی از شهر به حومه طی یک مرحله، یعنی یک سال می‌باشد. احتمال این را که یکی از ساکنان شهر، پس از۲سال در حومه سکونت داشته باشد، تعیین می‌کنیم. چنین جابجایی می‌تواند از دو طریق متفاوت صورت بگیرد: باقیماندن در شهر به مدت یک سال و سپس رفتن به حومه ویا انتقال از شهر به حومه در طول سال اول و باقیماندن در آنجا در سال دوم (به شکل۵-۳رجوع کنید). احتمال این که یکی از ساکنان شهر سال اول در شهر باقی بماند، ۰/۹۰ است، در حالی که احتمال انتقال یکی از ساکنان شهر به حومه در طول سال دوم، ۰/۱۰ است. در نتیجه احتمال این که یک ساکن شهر، درسال اول در شهر باقی بماند و سپس در طول سال دوم، به حومه انتقال بیابد، $(۰/۹۰)(۰/۱۰)$ است. به طرز مشابه احتمال این که یک ساکن

شهر در طول سال اولبه حومه انتقال یابد و در طی سال دوم در حومه باقی بماند، $(۰/۱۰)(۰/۹۸)$ است. بنابراین، احتمال این که یک مقیم شهر، پس از دوسال مقیم حومه باشدبرابر است با $(۰/۹۰)(۰/۱۰) + (۰/۱۰)(۰/۹۸) = ۰/۱۸۸$. توجه کنید که این عدد با همان محاسبه ای به دست می‌آید که $(A^۲)_{۲۱}$ ازآن حاصل می‌شود و در نتیجه $(A^۲)_{۲۱}$ نشانگر احتمال آن است که ساکن شهر پس از دو سال، ساکن حومه باشد. به طور کلی، برای ماتریس تغییر وضعیت M، M_{ij}، احتمال انتقال ازحالت j ام به حالت i ام طی m مرحله را نشان می‌دهد.

فرض کنید که علاوه براین، ۷۰٪جمعیت ناحیه بزرگ شهری در سال۱۹۷۰، مقیم شهر بوده اند و ۳۰٪ آنها در حومه زندگی می‌کردند. این داده ها را به صورت یک بردار ستونی ثبت می‌کنیم.

$$P = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{bmatrix} ۰/۷۰ \\ ۰/۳۰ \end{bmatrix}\begin{array}{l} \text{نسبت ساکنان شهر} \\ \text{نسبت ساکنان حومه} \end{array}$$

توجه کنید که سطرهای P، به ترتیب متناظر با دو حالت اقامت در شهر و اقامت در حومه هستند و این دو حالت با همین ترتیب در ماتریس تغییر وضعیت A آمده‌اند. همچنین توجه کنید که بردار ستونی P درایه‌هایی دارد که مجموع آنها ۱ است؛ چنین برداری را یک بردار احتمال گویند. با استفاده از این اصطلاح، هر ستون یک ماتریس تغییر وضعیت، یک بردار احتمال است.

در بردار AP، مختص اول، مجموع$(۰/۹۰)(۰/۷۰) + (۰/۰۲)(۰/۳۰)$ است. اولین جمله این مجموع، یعنی $(۰/۹۰)(۰/۷۰)$، نشانگر نسبتی از جمعیت ناحیه بزرگ شهری در سال ۱۹۷۰است که طی سال بعد در شهر باقی ماندند. جمله دوم یعنی $(۰/۰۲)(۰/۳۰)$، نشانگر نسبتی از جمعیت ناحیه بزرگ شهری در سال ۱۹۷۰است که طی سال بعد به شهر انتقال یافتند. در نتیجه اولین مختص AP نشانگر نسبتی از جمعیت ناحیه بزرگ شهری است که در سال ۱۹۷۱ در شهر مقیم بوده‌اند. به طور مشابه، مختص دوم:

$$AP = \begin{bmatrix} ۰/۶۳۶ \\ ۰/۳۶۴ \end{bmatrix}$$

نشانگر نسبتی از جمعیت ناحیه بزرگ شهری است که در سال ۱۹۷۱ مقیم حومه بوده است. این استدلال را می‌توان به راحتی تعمیم داد وثابت کرد که مختصات

$$A^۲P = A(AP) = \begin{bmatrix} ۰/۵۷۹۶۸ \\ ۰/۴۲۰۳۲ \end{bmatrix}$$

نشان دهنده نسبتهایی از جمعیت ناحیه بزرگ شهری است که در سال۱۹۷۲، در هر یک از دو ناحیه شهر ساکن بوده‌اند. به طور کلی، مختصات A^mP نشانگر نسبتی ازجمعیت شهری است که پس از m مرحله (m سال پس از سال ۱۹۷۰)، به ترتیب در شهر ودر حومه ساکن خواهند بود.

آیا در صورتی که این روند ادامه یابد، شهر به تدریج خالی از سکنه خواهد شد؟ با توجه به بحث فوق، طبیعی است

که نسبت نهایی ساکنان شهر وحومه‌ای‌ها را به ترتیب، مختص اول و دوم $\lim\limits_{m\to\infty} A^m P$ تعریف کنیم. به راحتی می‌توان دید که A قطری پذیر است و بنابراین یک ماتریس وارون پذیر Q به همراه ماتریس قطری پذیر D چنان موجود است که $Q^{-۱}AQ = P$. در واقع:

$$D = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰/۸۸ \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} & \frac{-۱}{۶} \\ \frac{۵}{۶} & \frac{۱}{۶} \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$L = \lim_{m\to\infty} A^m = \lim_{m\to\infty} QD^mQ^{-۱} = Q\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}Q^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۶} \\ \frac{۵}{۶} & \frac{۵}{۶} \end{bmatrix}$$

پس:

$$\lim_{m\to\infty} A^m P = LP = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} \\ \frac{۵}{۶} \end{bmatrix}$$

بنابراین در پایان همه ساله $\frac{۱}{۶}$ جمعیت، ساکن شهر و $\frac{۵}{۶}$ آنها ساکن حومه خواهند بود. توجه کنید که بردار LP، در رابطه $A(LP) = LP$ صدق می‌کند. در نتیجه LP هم یک بردار احتمال است و هم یک بردارویژه A متناظر با مقدار ویژه ۱. از آنجا که طبق قضیه ۱۸.۵ (ب)، فقط یک چنین برداری وجود دارد، LP مستقل از انتخاب اولیه بردار احتمال P است. به عنوان مثال، حتی اگر جمعیت ناحیه بزرگ شهری در سال۱۹۷۰، تماما از ساکنان شهر تشکیل می‌شد، نتیجه حدی یکسان می‌بود.

در تجزیه و تحلیل مسأله شهر و حومه، تعبیرهای احتمالی برای $A^۲$ و AP ارائه دادیم و نشان دادیم که $A^۲$ یک ماتریس تغییر وضعیت و AP یک بردار احتمال است. در واقع، حاصلضرب هر دو ماتریس تغییر وضعیت، یک ماتریس تغییر وضعیت است و حاصلضرب یک ماتریس تغییر وضعیت در یک بردار احتمال، خود یک بردار احتمال است. اثبات این دو مطلب نتیجه ای ساده از قضیه زیر است، که ماتریس‌های تغییر وضعیت و بردارهای احتمال را مشخص می‌سازد.

قضیه ۲۰.۵. فرض کنید M یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی نامنفی بوده، v یک ماتریس ستونی در $\mathbb{R}^n$ باشد که مختصاتش نامنفی است، و $u \in \mathbb{R}^n$ بردار ستونی باشد که همه مختصات آن ۱ است. در این صورت:

الف) M یک ماتریس تغییر وضعیت است اگر و تنها اگر $M^t u = u$

ب) v یک بردار احتمال است اگر و تنها اگر $u^t u = [۱]$

برهان. به عهده خواننده است. □

نتیجه ۲. الف) حاصلضرب هردو ماتریس تغییر وضعیت $n \times n$، یک ماتریس تغییر وضعیت $n \times n$ است. خصوصا هر توانی از یک ماتریس تغییر وضعیت، یک ماتریس تغییر وضعیت است.

ب) حاصلضرب یک ماتریس تغییر وضعیت در یک بردار احتمال، یک بردار احتمال است.

برهان. به عهده خواننده است. □

مسأله شهر و حومه نمونه ای است از فرآیندی که در آن فرض می‌شود که هر یک از اعضای یک مجموعه، در یکی از چند حالت ثابت واقع است و فرض می‌کنند که این اعضا می‌توانند با گذشت زمان از حالتی به حالت دیگر بروند. به طورکلی چنین فرآیندی را یک فرآیند تصادفی می‌نامند. انتقال به هر حالت خاص، به کمک یک احتمال توصیف می‌شود و در حالت کلی، این احتمال بستگی دارد به عواملی مانند حالت مورد نظر، زمان مورد نظر، برخی یا همه حالات قبلیی که شیئی طی کرده است (از جمله حالت کنونی) و حالاتی که اشیاء دیگر در آن هستند یا بوده‌اند.

به عنوان مثال، شیی مورد نظر می‌تواند یک رأی دهنده آمریکایی و حالت آن شیئی، حزب سیاسی باشد که او به آن علاقه مند است و یا شیئی مورد نظریک مولکول H_2O باشد و حالات مورد نظر سه حالت فیزیکی باشند که H_2O می‌تواند داشته باشد(جامد، مایع، گاز). در این مثال‌ها، هر چهار عاملی که در بالا معرفی شدند، بر احتمال این که شیئی در زمان معین در یک حالت معین باشد تأثیر می‌گذارند.

با این حال اگر احتمال این که شیئی که در یک حالت قرار دارد، در بازه زمانی ثابتی به حالتی دیگر تغییر حالت دهد، فقط به آن دو حالت بستگی داشته باشد (و نه به زمان حالتهای قبلی، یا عوامل دیگر). در این صورت آن فرایند تصادفی را یک فرایند مارکف گویند. اگر علاوه بر این، تعدادحالتهای ممکن متناهی باشد، آن فرایند مارکف را یک زنجیر مارکف نامند. مثال شهر وحومه را به عنوان نمونه ای از یک زنجیر مارکف دو حالتی مورد بررسی قرار دادیم. البته، یک فرایند مارکف معمولا فقط تصوری از حقیقت است. چرا که احتمال‌های مربوطه، تقریبا هیچگاه با زمان ثابت نمی مانند.

با درنظر گرفتن این مسأله، زنجیر مارکف دیگری را در نظر می‌گیریم. دانشگاه خاصی می‌خواهد در مورد احتمال فارغ التحصیل شدن دسته‌های مختلف دانشجویان اطلاعاتی جمع آوری کند. این دانشگاه، دانشجویان را بر حسب تعداد واحدهایی که گذرانده اند، دانشجوی سال دوم یا اول می‌داند. اطلاعات جمع آوری شده از دانشگاه نشان می‌دهد که از یک ترم پائیزه تا ترم بعدی، ۴۰٪ دانشجویان سال دوم فارغ التحصیل خواهند شد، ۳۰٪ دانشجوی سال دوم باقی خواهند ماند و ۳۰٪ به طور دائم دانشگاه را ترک خواهند کرد.

در مورد دانشجویان سال اول، اطلاعات نشان می‌دهد که ۱۰٪ آنها تا پائیز بعد فارغ التحصیل خواهند شد، ۵۰٪ دانشجوی سال دوم خواهند شد، ۲۰٪ دانشجویان سال اول باقی خواهند ماند و ۲۰٪ دانشکده را به طور دائم ترک خواهند کرد. در سال جاری ۵۰٪ دانشجویان دانشکده سال دوم هستند و ۵۰٪ آنها سال اول. با فرض این که روندی که داده ها مشخص می‌کنند، به طور نامحدود ادامه یابد، دانشکده مایل است بداند:

۱. تا پائیز بعد چند درصد دانشجویان کنونی فارغ التحصیل خواهند شد، چند درصد دانشجوی سال دوم خواهند بود، چند درصد دانشجوی سال اول خواهند بود وچند درصد تا پا ئیز بعد، دانشکده را به طور دائم ترک خواهند کرد.

۲. همان درصدهای مورد ۱ برای ترم پائیزه دو سال بعد.

۳. درصدی از دانشجویان کنونی که نهایتا فارغ التحصیل خواهند شد.

بند قبل، زنجیر مارکف چهار حالتی که را توصیف می‌کند که حالات آن عبارتند از :

۱. فارغ التحصیل

۲. دانشجوی سال دوم بودن.

۳. دانشجوی سال اول بودن.

۴. ترک تحصیلی بودن.

اطلاعاتی را که در بالا به آن اشاره شد، ماتریس تغییر وضعیت این زنجیر مارکف را در اختیارمان می‌گذارد:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۴ & ۰/۱ & ۰ \\ ۰ & ۰/۳ & ۰/۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۲ & ۰ \\ ۰ & ۰/۳ & ۰/۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

(توجه کنید که فرض بر این است که دانشجویانی که فارغ التحصیل می‌گردند یا به طور دائمی دانشکده را ترک می‌کنند، برای همیشه در این حالت باقی می‌ماند. بنابراین دانشجوی سال اولی که دانشگاه را ترک می‌کند و چند ترم بعد بر می‌گردد، به عنوان کسی که تغییر حالت داده محسوب نمی شود -بلکه چنین فرض می‌شود که در مدتی که دانشگاه را ترک کرده است، دانشجوی سال اول باقی مانده است). علاوه براین، به ما گفته اند که توزیع کنونی دانشجویان در حالت‌های ۲و ۳، نصف افراد و در حالات ۱و ۴، صفر است. بردار:

$$P = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰/۵ \\ ۰/۵ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

که احتمال اولیه بودن در هر کدام از حالات را نشان می‌دهد، بردار احتمال اولیه زنجیر مارکف مفروض نامیده می‌شود.

برای پاسخ دادن به سوال ۱، باید احتمال قرار گرفتن یک دانشجوی کنونی را در هریک از حالات، در پائیز بعد تعیین کنیم. همان طور که دیده‌ایم این احتمالات، مختصات بردار زیر هستند:

$$AP = \begin{bmatrix} ۰/۲۵ \\ ۰/۴۰ \\ ۰/۱۰ \\ ۰/۲۵ \end{bmatrix}$$

در نتیجه در پاییز بعدی، ۲۵٪ دانشجویان کنونی فارغ التحصیل خواهند شد، ۴۰٪ دانشجوی سال دوم خواهند بود،۱۰٪

دانشجوی سال اول خواهند بود و ۲۵٪ دانشگاه را به طور دائم ترک کرده‌اند. به طور مشابه:

$$A^{۲}P = A(AP) = \begin{bmatrix} ۰/۴۲ \\ ۰/۱۷ \\ ۰/۰۲ \\ ۰/۳۹ \end{bmatrix}$$

اطلاعات مورد نیاز برای پاسخ به سوال ۲ را فراهم می‌کند: پس از ۲ سال، ۴۲٪ دانشجویان کنونی فارغ التحصیل خواهند شد، ۱۷٪ آنها دانشجوی سال دوم خواهند بود، ۲٪ دانشجوی سال اول خواهد بود و ۳۹٪ به طور دائم ترک تحصیل خواهند کرد.

نهایتا، پاسخ سوال ۳ را بردار LP می‌دهد، که در اینجا $L = \lim_{m\to\infty} A^m$. از آنجا که A قطری پذیر است، ماتریس وارون پذیر Q و ماتریس قطری D چنان یافت می‌شوند که $Q^{-۱}AQ = D$ (جزئیات را کنار می‌گذاریم)، که:

$$Q = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱۹ & ۰ \\ ۰ & -۷ & -۴۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۱۳ & ۱ \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰/۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{m\to\infty} A^m = Q(\lim_{m\to\infty} D^m)Q^{-۱} \\ &= \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱۹ & ۷ \\ ۰ & -۷ & -۴۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۱۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۴}{۷} & \frac{۲۷}{۵۶} & ۰ \\ ۰ & \frac{-۱}{۷} & \frac{-۵}{۷} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۸} & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۷} & \frac{۲۹}{۵۶} & ۱ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۴}{۷} & \frac{۲۷}{۵۶} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۷} & \frac{۲۹}{۵۶} & ۱ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

پس:

$$LP = \begin{bmatrix} \frac{۵۹}{۱۱۲} \\ ۰ \\ ۰ \\ \frac{۵۳}{۱۱۲} \end{bmatrix}$$

و بنابراین احتمال این که یک دانشجوی کنونی فارغ التحصیل شود، $\frac{۵۹}{۱۱۲}$ است.

در دو مثال قبل، دیدیم که $\lim_{m\to\infty} A^m P$ ، هنگامی که A ماتریس تغییر وضعیت و P بردار احتمال زنجیر مارکف است، نتیجه نهایی هر حالت را به ما می‌دهد. اما در حالت کلی، حد توانهای یک ماتریس انتقال لزوما موجود نیستند. به عنوان مثال، اگر:

$$M = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

آنگاه $\lim_{m\to\infty} M^m$ وجود ندارد، چرا که توان‌های فرد M برابر با M وتوان‌های زوج آن برابر با I هستند. علت این که حد این ماتریس وجود ندارد، این است که شرط الف از قضیه ۱۸.۵ در مورد M برقرار نیست (۱- یک مقدار ویژه ان است). در واقع، می‌توان نشان داد (به تمرین ۲۰ بخش ۷-۲ رجوع کنید)که تنها ماتریس‌های تغییر وضعیت A یی که $\lim_{m\to\infty} A^m$ برایشان وجود ندارد، دقیقا همان ماتریس‌هایی هستند که شرط قسمت الف از قضیه ۱۸.۵ برای آنها برقرار نیست.

با این حال حتی اگر حد توان‌های یک ماتریس تغییر وضعیت موجود باشد، محاسبه این حد ممکن است دشوار باشد (توصیه می‌کنیم که خواننده روی تمرین ۶ کار کند تا درستی این جمله اخیر رابه راستی درک کند). خوشبختانه، دسته بزرگ ومهمی از ماتریس‌های تغییر وضعیت وجود دارد که این حد برای آنها موجود و به راحتی قابل مقایسه است -این دسته، دسته ماتریس‌های انتقال«منظم» است.

تعریف:. یک ماتریس تغییر وضعیت را منظم گویند هرگاه توانی از آن فقط شامل درایه‌های مثبت باشد.

مثال ۲. ماتریس تغییر وضعیت:

$$\begin{bmatrix} ۰/۹۰ & ۰/۰۲ \\ ۰/۱۰ & ۰/۹۸ \end{bmatrix}$$

مربوط به زنجیر مارکفی است که در مسأله شهر وحومه مورد استفاده قرار گرفت، به وضوح منظم است. چرا که هر درایه اش

مثبت است. از طرف دیگر

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۴ & ۰/۱ & ۰ \\ ۰ & ۰/۳ & ۰/۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۲ & ۰ \\ ۰ & ۰/۳ & ۰/۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

یعنی ماتریس تغییر وضعیت زنجیر مارکفی که ثبت نام‌های دانشکده را توصیف می‌کند منظم نیست، چرا که اولین ستون A^m، برای هر توان m برابر با:

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

است.

ملاحظه می‌کنید که یک ماتریس تغییر دهنده وضعیت منظم، ممکن است شامل درایه‌های صفر باشد، چرا که به عنوان مثال:

$$M = \begin{bmatrix} ۰/۹ & ۰/۵ & ۰ \\ ۰ & ۰/۵ & ۰/۴ \\ ۰/۱ & ۰ & ۰/۶ \end{bmatrix}$$

منظم است، زیرا هر درایه $M^۲$ مثبت است. □

ادامه این بخش اختصاص به اثبات این مطلب دارد که برای یک ماتریس تغییر وضعیت منظم A، $\lim_{m\to\infty} A^m$ وجود دارد و ستون‌هایش برابر هستند. با توجه به این حقیقت به راحتی می‌توان حد را محاسبه کرد. در طی اثبات این نتیجه، کران‌های جالبی برای اندازه مقدار ویژه یک ماتریس مربعی دلخواه به دست می‌آوریم. اصطلاحات لازم در تعاریف زیر معرفی شده اند.

چند تعریف فرض کنید برای هر $۱ \leq i, j \leq n$، $\rho_i(A)$ را برابر با مجموع قدر مطلق‌های درایه‌های سطر iام A و $\nu_j(A)$ را برابر با مجموع قدرمطلق‌های ستون jام A تعریف کنید. در نتیجه:

$$\rho_i(A) = \sum_{j=۱}^n |A_{ij}| \qquad \text{برای هر } i = ۱, ۲, ..., n$$

$$\nu_i(A) = \sum_{i=۱}^n |A_{ij}| \qquad \text{برای هر } j = ۱, ۲, ..., n$$

مجموع سطری A که با $\rho(A)$ نشان داده می‌شود و مجموع ستونی A که با $\nu(A)$ نمایش داده می‌شود، چنین تعریف می‌شوند:

$$\nu(A)=max\{\nu_j(A):۱\leq j\leq n\} \quad \text{و} \quad \rho(A)=max\{\rho_i(A):۱\leq i\leq n\}$$

مثال ۳. برای ماتریس:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۵ \\ -۴ & ۰ & ۶ \\ ۳ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$\rho_۱(A)=۷$، $\rho_۲(A)=۱۰$، $\rho_۳=۶$، $\nu_۱(A)=۸$، $\nu_۲(A)=۳$، $\nu_۳(A)=۱۲$. در نتیجه $\rho(A)=۱۰$ و $\nu(A)=۱۲$. □

نتیجه بعدی به ما نشان می‌دهد که کوچکترینِ $\rho(A)$ و $\nu(A)$ کران بالا برای قدرمطلق مقادیر ویژه A است. مثلا در مثال قبل، A مقدار ویژه‌ای با قدر مطلق بالاتر از ۱۰ ندارد.

قضیه ۲۱.۵ (قضیه قرص گرشگرین). فرض کنید $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. برای هر $i=۱,۲,...,n$، تعریف کنید:

$$r_i=\rho_i(A)-|A_{ii}|$$

و فرض کنید که C_i نشان دهنده قرص به مرکز A_{ii} و شعاع r_i باشند. در این صورت، هر مقدار ویژه A در یکی از C_iها قرار دارد.

برهان. فرض کنید λ، یک مقدار ویژه A متناظر با بردار ویژه زیر باشد:

$$v=\begin{bmatrix} v_۱ \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

در این صورت v در معادله ماتریسی $Av=\lambda v$ صدق می‌کند که می‌توان آن را چنین نوشت:

$$\sum_{j=۱}^{n} A_{ij}v_j=\lambda v_i(i=۱.۲,....,n) \tag{۵-۲}$$

فرض کنید v_k مختصی از v باشد که بزرگترین قدر مطلق را دارد؛ توجه کنید که $v_k\neq ۰$، چرا که v یک بردار ویژه A است. ثابت می‌کنیم λ در C_k قرار دارد، یعنی $|\lambda-A_{kk}|\leq r_k$. از (۵-۲) به ازای $i=k$ نتیجه می‌شود که:

$$|\lambda v_k-A_{kk}v_k|=|\sum_{j=۱}^{n}A_{kj}v_j-A_{kk}v_k|=|\sum_{j\neq k}A_{kj}v_j|$$

$$\begin{aligned}&\leq \sum_{j\neq k}|A_{kj}||v_j| \leqslant \sum_{j\neq k}|A_{kj}||v_k|\\&=|v_k|\sum_{j\neq k}|A_{kj}|=|v_k|r_k\end{aligned}$$

درنتیجه $|v_k||\lambda - A_{kk} \leq |v_k|r_k$. پس:

$$|\lambda - A_{kk}| \leq r_k$$

چرا که $|v_k| > 0$. □

نتیجه ۳. فرض کنید λ یک مقدار ویژه دلخواه $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ باشد. دراین صورت $|\lambda| \leq \rho(A)$.

برهان. طبق قضیه گرشگرین، به ازای k ای $|\lambda - A_{kk}| \leq r_k$. در نتیجه:

$$\begin{aligned}|\lambda| &= |(\lambda - A_{kk}) + A_{kk}| \leq |\lambda - A_{kk}| + |A_{kk}|\\&\leq r_k + |A_{kk}| = \rho_k(A) \leq \rho(A)\end{aligned}$$

□

نتیجه ۴. فرض کنید که λ یک مقدار ویژه دلخواه $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ باشد. در این صورت:

$$|\lambda| \leq min\{\rho(A), \nu(A)\}$$

برهان. از آنجا که طبق نتیجه ۱، $|\lambda| \leq \rho(A)$، کافی است نشان دهیم که $|\lambda| \leq \nu(A)$. طبق تمرین ۱۴ از بخش ۱-۵، λ یک مقدار ویژه A^t است و در نتیجه $|\lambda| \leq \rho(A^t)$. اما سطرهای A همان ستون‌های A^t هستند. در نتیجه $\rho(A^t) = \nu(A)$. بنابراین $|\lambda| \leq \nu(A)$. □

مطلب زیر، فوراً از نتیجه ۲ حاصل می‌شود.

نتیجه ۵. هرگاه، λ مقدار ویژه یک ماتریس تغییر وضعیت باشد، آنگاه $|\lambda| \leq 1$.

نتیجه بعد تضمین می‌کند که کران بالای نتیجه ۳، عملا اختیار می‌شود.

قضیه ۲۲.۵. هر ماتریس تغییر وضعیت، ۱ را به عنوان یکی از مقادیر ویژه داراست.

برهان. فرض کنید A یک ماتریس تغییر وضعیت $n \times n$ باشد و فرض کنید $u \in \mathbb{R}^n$ بردار ستونی باشد که هر مختصش ۱ است. در این صورت طبق قضیه ۲۰.۵، $A^t u = u$ ودر نتیجه u یک بردار ویژه A^t متناظر با مقدار ویژه ۱است. اما چون A و A^t دارای مقادیر ویژه یکسان هستند، نتیجه می‌شود که ۱ مقدار ویژه A نیز هست. □

فرض کنید A ماتریس تغییر وضعیتی باشد که یکی از بردارهای ویژه نظیر مقدار ویژه ۱ آن فقط درایه‌های نامنفی داشته باشد. در این صورت ضریبی از این بردار یک بردار احتمال مانند P و همچنین یک بردار ویژه A متناظر با مقدار ویژه ۱است. مشاهده این نکته جالب است که اگر P بردار احتمال اولیه زنجیر مارکف باشد که A ماتریس انتقال آن است، آنگاه زنجیر مارکف کاملا ایستاست. چرا که در این شرایط، برای هر عدد صحیح مثبت m، $A^mP = P$ و درنتیجه احتمال وقوع در هیچکدام از حالتها تغییر نمی‌کند. به عنوان مثال، مسأله شهر وحومه را با:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} \\ \frac{۵}{۶} \end{bmatrix}$$

در نظر بگیرید.

قضیه ۲۳.۵. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ماتریسی باشد که هر درایه اش مثبت است و λ چنان مقدار ویژه ای از A باشد که $\rho(A) = |\lambda|$. در این صورت $\lambda = \rho(A)$ و $\{u\}$ پایه ای برای E_λ است که در اینجا $u \in \mathbb{C}^n$ ماتریسی ستونی است که هر مختصش برابر با ۱ است.

برهان. فرض کنید v یک بردار ویژه A نظیر λ باشد، که مختصاتش $v_۱, v_۲, ..., v_n$ هستند. فرض کنید v_k مختصی از v باشد که بیشترین قدر مطلق را دارد و $b = |v_k|$. در این صورت:

$$\begin{aligned} |\lambda|b = |\lambda||v_k| = |\lambda v_k| &= |\sum_{j=۱}^{n} A_{kj}v_j| \leqslant \sum_{j=۱}^{n} |A_{kj}v_j| \\ &= \sum_{j=۱}^{n} |A_{kj}||v_j| \leqslant \sum_{j=۱}^{n} |A_{kj}|b = \rho_k(A)b \leqslant \rho(A)b \end{aligned} \tag{۵-۳}$$

از آنجا که $\rho(A) = |\lambda|$؛ سه نامساوی ۵-۳ در واقع تساویند؛ یعنی:

الف) $|\sum_{j=۱}^{n} A_{kj}v_j| = \sum_{j=۱}^{n} |A_{kj}v_j|$

ب) $\sum_{j=۱}^{n} |A_{kj}||v_j| = \sum_{j=۱}^{n} |A_{kj}|b$

ج) $\rho_k(A) = \rho(A)$

در تمرین ۱۵(ب) از بخش۶-۱، خواهیم دید که (الف) برقرار است اگر و تنها اگر جملات $A_{kj}v_j$ $(j = ۱, ۲, ..., n)$ همگی مضارب نامنفی یک عدد مختلط ناصفر z باشند. بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم که $|z| = ۱$. بنابراین اعداد حقیقی نامنفی $c_۱, ..., c_n$ چنان موجودند که:

$$A_{kj}v_j = c_jz \tag{۵-۴}$$

طبق (ب) و این فرض که برای هر j و k، $A_{kj} \neq ۰$، داریم:

$$|v_j| = b \qquad j = ۱, ۲, ..., n \quad \text{برای هر} \qquad (۵\text{-}۵)$$

با ترکیب روابط (۴) و(۵)، داریم:

$$b = |v_j| = |\frac{c_j}{A_{kj}} z| = \frac{c_j}{A_{kj}} \qquad j = ۱, ۲, ..., n \quad \text{برای هر}$$

و بنابراین طبق رابطه (۴) برای هر j داریم $v_j = bz$. بنابراین:

$$v = \begin{bmatrix} v_۱ \\ \vdots \\ v_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bz \\ \vdots \\ bz \end{bmatrix} = bzu$$

و بنابراین $\{u\}$ پایه ای برای E_λ است.

نهایتا، ملاحظه می‌کنید که درایه‌های Au تماما مثبت هستند چرا که این مسأله هم برای درایه‌های A و هم درایه‌های u درست است. اما $Au = \lambda u$ و در نتیجه $\lambda > ۰$. بنابراین $\lambda = |\lambda| = \rho(A)$. □

نتیجه ۶. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ماتریسی باشد که هر درایه اش مثبت است و فرض کنید λ چنان مقدار ویژه‌ای از A باشد که $|\lambda| = \nu(A)$. در این صورت $\lambda = \nu(A)$ و بعد $E_\lambda = ۱$.

برهان. به عهده خواننده است. □

نتیجه ۷. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ماتریس تغییر وضعیتی باشد که هر درایه آن مثبت است و فرض کنید λ یک مقدار ویژه A به غیر از ۱ باشد. در این صورت، $|\lambda| < ۱$. به علاوه، بعد فضای ویژه نظیر مقدار ویژه ۱، یک می‌باشد.

برهان. به عهده خواننده است. □

نتیجه بعدیمان، نتیجه ۲ را به ماتریس‌های تغییر وضعیت منظم تعمیم می‌دهد و بنابراین نشان می‌دهد که ماتریس‌های تغییر وضعیت منظم، شرط الف از قضایای ۱۸.۵ و ۱۹.۵ را برآورده می‌سازد.

قضیه ۲۴.۵. فرض کنید A یک ماتریس تغییر وضعیت منظم و λ یک مقدار ویژه A باشد. در این صورت:

الف) $|\lambda| \leq ۱$.

ب) هرگاه $|\lambda| = ۱$، آنگاه $\lambda = ۱$ و $dim(E_\lambda) = ۱$.

برهان. گزاره الف به عنوان نتیجه ۳ از قضیه ۲۱.۵ ثابت شد.

ب) از آنجا که A منظم است، عدد صحیح مثبت s یافت می‌شود به گونه ای که A^s تماما از درایه‌های مثبت تشکیل شده است. چون A یک ماتریس تغییر وضعیت است و درایه‌های A^s همگی مثبت هستند. درایه‌های $A^{s+1} = A^s(A)$ هم مثبت هستند. فرض کنید $|\lambda| = 1$، در این صورت λ^s و λ^{s+1} به ترتیب مقادیر ویژه ای برای A^s و A^{s+1} هستند که قدر مطلق آنها ۱ است. پس طبق نتیجه ۲ از قضیه ۲۳.۵، $\lambda^s + \lambda^{s+1} = 1$، در نتیجه $\lambda = 1$. فرض کنید E_λ و E'_λ به ترتیب نشانگر فضاهای ویژه A و A^s، متناظر با $\lambda = 1$ باشند. در این صورت $E_\lambda \subseteq E'_\lambda$ و طبق نتیجه ۲ از قضیه ۲۳.۵، $\dim(E'_\lambda) = 1$ در نتیجه $E_\lambda = E'_\lambda$ و $\dim(E_\lambda) = 1$. □

نتیجه ۸. فرض کنید A یک ماتریس تغییر وضعیت منظم باشد که قطری پذیر است. در این صورت $\lim_{m\to\infty} A^m$ وجود دارد.

نتیجه فوق، که بلافاصله از قضایای ۲۴.۵ و ۱۹.۵ نتیجه می‌شود، بهترین نتیجه ممکن نیست. در حقیقت، می‌توان نشان داد که اگر A یک ماتریس تغییر وضعیت منظم باشد، آنگاه چندگانگی ۱ به عنوان یک مقدار ویژه A، ۱ است. پس طبق قضیه ۱۲.۵، شرط قسمت ب از قضیه ۱۸.۵ ارضاء می‌شود. پس اگر A یک ماتریس تغییر وضعیت منظم باشد، چه قطری پذیر باشد وچه قطری پذیر نباشد، $\lim_{m\to\infty} A^m$ وجود دارد. واما در مورد قضیه ۱۸.۵، در حال حاضر قادر نیستیم این حقیقت را که چندگانگی ۱ به عنوان مقدار ویژه‌ای از A، ۱ است. ثابت نمائیم. با ان وجود، این نتیجه را در اینجا بیان می‌کنیم (و اثبات آن را تا تمرین ۲۰ بخش ۲-۷ به تعویق می‌اندازیم) و حقایق دیگری را در مورد $\lim_{m\to\infty} A^m$ وقتی‌که A یک ماتریس تغییر وضعیت منظم باشد، بدست می‌آوریم.

قضیه ۲۵.۵. فرض کنید A یک ماتریس تغییر وضعیت $n \times n$ منظم باشد، در این صورت:

الف) چند گانگی ۱ به عنوان یک مقدار ویژه A،۱ است.

ب) $\lim_{m\to\infty} A^m$ وجود دارد.

ج) $L = \lim_{m\to\infty} A^m$ یک ماتریس تغییر وضعیت می‌باشد.

د) $AL = LA = L$

ه) ستون‌های L با هم برابر هستند. در واقع هر ستون L برابر با یگانه بردار احتمال v است،که بردار ویژه‌ای برای A متناظر با مقدار ویژه ۱ نیز هست.

و) برای هر بردار احتمال w، $\lim_{m\to\infty}(A^m w) = v$.

برهان. الف) به تمرین ۲۰از بخش ۷-۲ رجوع کنید.

ب) این مطلب از قسمت الف و دو قضیه ۱۸.۵ و ۱۸.۵ نتیجه می‌شود.

ج) طبق قضیه ۲۰.۵، باید نشان دهیم که $u^tL = u^t$. A^m نیز طبق نتیجه قضیه ۲۰.۵ یک ماتریس تغییر وضعیت است، بنابراین:

$$u^tL = u^t \lim_{m\to\infty} A^m = \lim_{m\to\infty} u^t A^m = \lim_{m\to\infty} u^t = u^t$$

و در نتیجه L یک ماتریس تغییر وضعیت است.

د) طبق قضیه ۱۷.۵:

$$AL = A(\lim_{m\to\infty} A^m) = \lim_{m\to\infty}(AA^m) \lim_{m\to\infty} A^{m+۱} = L$$

به طور مشابه $LA = L$.

ه) چون $AL = L$، طبق(د)، هر یک از ستونهای L یک بردار ویژه A متناظر با مقدار ویژه ۱ است. علاوه براین، طبق (ج) هریک از ستونهای Lیک بردار احتمال است. پس طبق (الف)، هر ستون L برابر با یگانه بردار احتمال v متناظر با مقدار ویژه ۱ از A می‌باشد.

و) فرض کنید w یک بردار احتمال دلخواه باشد و قرار دهید $y = \lim_{m\to\infty} A^m w = Lw$. در این صورت،طبق نتیجه ۲۰.۵ ، yیک بردار احتمال است و همچنین طبق (د) $ALw = Lw = y$. در نتیجه y یک بردار ویژه نظیر مقدار ویژه ۱ از A نیز هست. بنابراین طبق (ه)، $y = v$. □

تعریف:. بردار w از قضیه ۲۵.۵ (ه)،بردار احتمال ثابت یا بردار ساکن ماتریس تغییر وضعیت منظم A نام دارد.

قضیه ۲۵.۵ می‌تواند برای بدست آوردن اطلاعاتی در مورد توزیع نهایی هر یک از حالات زنجیر مارکفی که ماتریس تغییر وضعیت آن منظم است، به کار رود.

مثال ۴. کشاورزان لامرون، سالی یک محصول کشت می‌دهند، ذرت، سویا و یا گندم. از آنجا که به لزوم تعویض محصولاتشان اعتقاد دارند، این کشاورزان در دو سال متوالی یک محصول نمی‌کارند. در واقع، کل زمینی که در یک سال به کاشتن یکی از محصولاتشان اختصاص دارد، سال بعد به نسبت مساوی به کاشت دو محصول دیگر اختصاص می‌یابد. در سال جاری، ۳۰۰ هکتار ذرت، ۲۰۰ هکتار سویا و ۱۰۰ هکتار گندم کشت شد. وضعیتی که در بند بالا توصیف شد، زنجیر مارکف سه حالته دیگری است که سه حالت آن به ترتیب متناظر با کشت ذرت، سویا وگندم هستند؛ ولی در این مسأله، به جای درصدی از مساحت کل زمین (۶۰۰هکتار) که به هر محصول اختصاص دارد، خود مساحت آن داده شده است. با تبدیل این مقادیر به کسرهایی از کل مساحت زمین، می‌بینیم که ماتریس تغییر وضعیت A و بردار احتمال اولیه Pی این زنجیر مارکف به این صورت هستند:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{۳۰۰}{۶۰۰} \\ \frac{۲۰۰}{۶۰۰} \\ \frac{۱۰۰}{۶۰۰} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۶} \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$$

کسری از مساحت کل زمین که پس از mسال به هر یک از محصولات اختصاص خواهد داشت، با مختصات $A^m P$ معلوم می‌شود ونسبتهای نهایی از این مساحت که برای هر یک از محصولات به کار خواهد رفت، مختصات $\lim_{m\to\infty} A^m P$ هستند. بنابراین مقادیر نهایی از زمین که به هر محصول اختصاص یافت، با ضرب این حد در مساحت کل به دست می‌آید. یعنی مقادیر نهایی از زمین که برای هر محصول به کار خواهند رفت، مختصات $(\lim_{m\to\infty} A^m P)$۶۰۰هستند.

چون A یک ماتریس تغییر وضعیت منظم است، قضیه ۲۵.۵ نشان می‌دهد که $\lim_{m\to\infty} A^m$ ، ماتریسی مانند L است که هر ستون آن برابر با بردار احتمال ثابت A است. به راحتی می‌توان دید که بردار احتمال ثابت A عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$(\lim_{m\to\infty} A^m P) = ۶۰۰LP = \begin{bmatrix} ۲۰۰ \\ ۲۰۰ \\ ۲۰۰ \end{bmatrix}$$

پس در دراز مدت، انتظار داریم که ۲۰۰ هکتار از هر محصول همه ساله کشت شود. (برای محاسبه مستقیم $(\lim_{m\to\infty} A^m P)$ ۶۰۰، به تمرین ۱۴ رجوع کنید). □

در این بخش،در درجه اول بر نظریه ماتریس‌های تغییر وضعیت منظم تمرکز داشته ایم. دسته دیگری از ماتریس‌های تغییر وضعیت وجود دارد که می‌توانند به شکل زیر نشان داده شوند:

$$\begin{bmatrix} I & B \\ O & C \end{bmatrix}$$

که در اینجا Iیک ماتریس همانی و Oیک ماتریس صفر است (اینگونه ماتریس‌های انتقال، منظم نیستند چرا که بخش مربعی پایین سمت چپ آنه در هر توانی باقی می‌ماند). حالتهای متناظر با زیر ماتریس همانی، نام دارند، چون وقتی شیئی وارد یکی از این حالتها می‌شود، دیگر هیچگاه از آن خارج نمی‌شود. یک مفروض را d؛ زنجیر مارکف جاذب می‌نامند، هرگاه بتوان از هر حالت دلخواهی طی تعدادی متناهی از مراحل وارد یک حالت جاذب شد. ملاحظه کنید که زنجیر مارکفی که روند ثبت نامهای یک دانشکده را توصیف می‌کند، یک زنجیر مارکف جاذب است که حالات۱ و۴،حالات جاذب آن هستند. خوانندگانی را که به یادگیری بیشتر در مورد زنجیرهای مارکف جاذب علاقمندند، به کتابهای زیر ارجاع می‌دهیم:

Introduction to Finite Mathematics (third edition) by J.Kemeny، J.Snell، and Discrete G.Thompson (Prentice Hall، Inc، Englewood Cliffs، N.J. (۱۹۷۴ or Mathematal Models by Fred S.Roberts (Prentice Hall، Inc، Englewood Cliffs،N.J .(۱۹۷۶)

یک کاربرد

در گونه‌هایی که به صورت جنسی تولید مثل می‌کنند، ویژگیهای یک فرزند نسبت به یک خصیصه ژنتیکی خاص را یک جفت ژن تعیین می‌کند،که از هر یک از والدین، یک ژن به ار ث می‌رسد. ژنها یک خصیصه معین، از دو نوع هستند؛ که با G و g نشان داده می‌شوند. ژن Gنمایانگر ویژگی غالب و g نشانگر ویژگی مغلوب است. فرزندانی که دارای ژنوتیپ GG یا Gg باشند، ویژگی غالب را از خود نشان می‌دهند، در حالی که فرزندان دارای ژنوتیپ gg ویژگی مغلوب را نشان می‌دهند. به عنوان مثال، در انسان، چشمهای قهوه‌ای ویژگی غالب و چشمان آبی ویژگی مغلوب متناظر با آن هستند؛ بنابراین فرزندانی که ژنوتیپ GG یا Gg را دارند، دارای چشمان قهوه‌ای هستند، در حالی که آنهایی که ژنوتیپ آنهاggاست، دارای چشم آبی هستند.

حال احتمال دارا شدن فرزند از هر یک از انواع ژن را برای والد نری که دارای ژنوتیپ Ggاست، بررسی می‌کنیم. (فرض کنید که جمعیت مورد مطالعه بزرگ باشد وجفت گیری نسبت به ژنوتیپ اتفاقی صورت گیرد و توزیع هر ژنوتیپ در میان جمعیت، مسقل از جنس، و طول عمر مورد انتظار باشد). فرض کنید:

$$P = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

به ترتیب نشان دهنده نسبت جمعیت بزرگ سال دارای ژنوتیپ GG، Gg و gg در آغاز آزمایش باشد. این آزمایش، زنجیر مارکف سه مرحله‌ای را توصیف می‌کند که ماتریس تغییر وضعیت آن چنین است:

$$\text{ژنوتیپ فرزند} \quad \begin{array}{c c} & \text{ژنوتیپ والد ماده} \\ & \begin{array}{ccc} GG & Gg & gg \end{array} \\ \begin{array}{c} GG \\ Gg \\ gg \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۴} & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \end{array} = B$$

به راحتی می‌توان امتحان کرد که B فقط دارای درایه‌های مثبت است؛ بنابراین B منظم است. پس اگر فقط به والدهای نر دارای ژنوتیپ Gg امکان تولید مثل دهیم، در صد فرزندان دارای هر یک از ژنوتیپها در بردار احتمال ثابت ماتریس B، به مقدار نهایی خود خواهد رسید، و این بردار عبارت است از :

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۴} \end{bmatrix}$$

حال فرض کنید قرار باشد آزمایشهای مشابهی بر روی نرهای دارای ژنوتیپهای GG و gg صورت گیرد مانند بالا، این آزمایشات زنجیرهای مارکف سه حالته‌ای هستند که ماتریس تغییر وضعیت آنها به ترتیب

$$C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۱ \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

برای در نظر گرفتن حالتی که در آن تولید مثل همه ژنوتیپ‌های نر مجاز باشد، باید ماتریس تغییر وضعیت $M = pA + qB + rC$ را تشکیل دهیم که ترکیبی خطی از A، B و C است که ضرایب آن، درصد نرهای دارای هر یک از ژنوتیپها هستند. بنابراین:

$$M=\begin{bmatrix} P+\frac{۱}{۲}q & \frac{۱}{۲}p+\frac{۱}{۴}q & ۰ \\ \frac{۱}{۲}q+r & \frac{۱}{۲}p+\frac{۱}{۲}q+\frac{۱}{۲}r & p+\frac{۱}{۲}q \\ ۰ & \frac{۱}{۴}q+\frac{۱}{۲}r & \frac{۱}{۲}q+r \end{bmatrix}$$

برای ساده تر کردن نمادها، فرض کنید $a = p+\frac{۱}{۲}q, b=\frac{۱}{۲}q+r$ (اعداد a و b به ترتیب نشان دهنده نسبت ژن‌های G و g جامعه هستند). در این صورت:

$$M=\begin{bmatrix} a & \frac{۱}{۲}a & ۰ \\ b & \frac{۱}{۲} & a \\ ۰ & \frac{۱}{۲}b & b \end{bmatrix}$$

و دراینجا $a+b=p+q+r=۱$.

فرض کنید p'، q' و r' به ترتیب نشان دهنده نسبت‌هایی از فرزندان نسل اول باشند که ژنوتیپ آنها GG، Gg و gg است. در این صورت:

$$\begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} = MP = \begin{bmatrix} ap+\frac{۱}{۲}aq \\ bp+\frac{۱}{۲}q+ar \\ \frac{۱}{۲}bq+br \end{bmatrix}$$

برای این که تاثیرات جفتگیری‌های بدون محدودیت در میان فرزندان نسل اول نیز مورد بررسی قرار گیرند، باید ماتریس تغییر وضعیت جدید $\tilde{M}$ را بر اساس توزیع ژنوتیپ‌های نسل اول تعیین کرد. مانند گذشته، در می‌یابیم که:

$$M=\begin{bmatrix} p'+\frac{۱}{۲}r' & \frac{۱}{۲}p'+\frac{۱}{۴}q' & ۰ \\ \frac{۱}{۲}q'+r' & \frac{۱}{۲}p'+\frac{۱}{۲}q'+\frac{۱}{۲}r' & p'+\frac{۱}{۲}q' \\ ۰ & \frac{۱}{۴}q'+\frac{۱}{۲}r' & \frac{۱}{۲}q'+r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & \frac{۱}{۲}a' & ۰ \\ b' & \frac{۱}{۲} & a' \\ ۰ & \frac{۱}{۲}b' & b' \end{bmatrix}$$

که در اینجا $a' = p' + \frac{1}{2}q'$ و $b' = \frac{1}{2}q' + r'$. اما:

$$a' = a^۲ + \frac{۱}{۲}(۲ab) = a(a+b) = a$$

و

$$b' = \frac{۱}{۲}(۲ab) + b^۲ = b(a+b) = b$$

بنابراین $M = \tilde{M}$؛ پس توزیع فرزندان نسل دوم در میان سه ژنوتیپ، عبارت است از:

$$\tilde{M}(MP)M^۲P = \begin{bmatrix} a^۳ + a^۲b \\ a^۲b + ab + ab^۲ \\ ab^۲ + b^۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^۲(a+b) \\ ab(a+۱+b) \\ b^۲(a+b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^۲ \\ ۲ab \\ b^۲ \end{bmatrix} = MP$$

که با فرزندان نسل اول یکسان است. به عبارت دیگر، MP بردار احتمال ثابت M است و تنها پس از یک نسل تعادل ژنتیکی میان جمعیت برقرار می‌شود. (این نتیجه، قانون هاردی –وندبرگ نام دارد) توجه کنید که مهمترین حالت خاص، حالت $a = b$ (یا معادلا $p = r$) است که در مورد آن توزیع در حالت تعادل، به صورت زیر می‌باشد:

$$MP = \begin{bmatrix} a^۲ \\ ۲ab \\ b^۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۴} \end{bmatrix}$$

تمرینات

۱. تعیین کنید کدامیک از موارد زیر درست وکدامیک نادر ست است.

الف) هرگاه $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ و $\lim_{m\to\infty} A^m = L$، آنگاه برای هر ماتریس وارون پذیر $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$، $\lim_{m\to\infty} QA^mQ^{-۱} = QLQ^{-۱}$.

ب) اگر ۲ یک مقدار ویژه $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ باشد، آنگاه $\lim_{m\to\infty} A^m$ موجود نیست.

ج) هر بردار

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

که $x_۱ + \ldots + x_n = ۱$، یک بردار احتمال است.

د) مجموع درایه‌های هرسطریک ماتریس تغییر وضعیت، برابر با ۱است.

ه) حاصلضرب یک ماتریس تغییر وضعیت در یک بردار احتمال، یک بردار احتمال است.

و) فرض کنید z چنان عدد مختلطی باشدکه $|z| < ۱$. در این صورت ۳ یک مقدار ویژه ماتریس زیر نیست:

$$\begin{bmatrix} ۱ & z & -۱ \\ z & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & z \end{bmatrix}$$

ز) ۱مقدار ویژه هر ماتریس تغییر وضعیت است.

ح) ۱- نمی‌تواند یک مقدار ویژه هر ماتریس تغییر وضعیتی باشد.

ط) هر گاه A یک ماتریس تغییر وضعیت باشد، آنگاه $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$ موجود است.

ی) هر گاه A یک ماتریس تغییر وضعیت منظم باشد، آنگاه $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$ وجود دارد و رتبه آن ۱ است.

۲. برای ماتریس‌های زیر مشخص کنید که آیا $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$ وجود دارد یا خیر؟در صورت وجود آن را حساب کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۰/۱ & ۰/۷ \\ ۰/۷ & ۰/۱ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -۱/۴ & ۰/۸ \\ -۲/۴ & ۱/۸ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۰/۴ & ۰/۷ \\ ۰/۶ & ۰/۳ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} -۱/۸ & ۴/۸ \\ -۰/۸ & ۲/۲ \end{bmatrix}$ ه) $\begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} ۲/۰ & -۰/۵ \\ ۳/۰ & -۰/۵ \end{bmatrix}$

ز) $\begin{bmatrix} -۱/۸ & ۰ & -۱/۴ \\ -۵/۶ & ۱ & -۲/۸ \\ ۲/۸ & ۰ & ۲/۴ \end{bmatrix}$ ح) $\begin{bmatrix} ۳/۴ & -۰/۲ & ۰/۸ \\ ۳/۹ & ۱/۸ & ۱/۳ \\ -۱۶/۵ & -۲/۰ & -۴/۵ \end{bmatrix}$

ط) $\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} - ۲i & ۴i & \frac{۱}{۲} + ۵i \\ ۱ + ۲i & -۳i & -۱ - ۴i \\ -۱ - ۲i & ۴i & ۱ + ۵i \end{bmatrix}$ ی) $\begin{bmatrix} \frac{-۲۶+i}{۳} & \frac{-۲۸-۴i}{۳} & ۲۸ \\ \frac{-۷+۲i}{۳} & \frac{-۵+i}{۳} & ۷ - ۲i \\ \frac{-۱۳+۶i}{۶} & \frac{-۵+۶i}{۶} & \frac{۳۵-۲۰i}{۶} \end{bmatrix}$

۳. ثابت کنید که هرگاه $A_۱, A_۲, \ldots$ دنباله‌ای از ماتریس‌های $n \times p$ با درایه‌های مختلط باشد که $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = L$، $\lim\limits_{m\to\infty} (A_m)^t = L^t$.

۴. ثابت کنید که هر گاه $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ قطری پذیر بوده، $L = \lim\limits_{m\to\infty} A^m$ موجود باشد، آنگاه $L = I_n$ و یا $rank(L) < n$.

۵. ماتریس‌های ۲ × ۲ ی A و B با درایه‌های حقیقی را چنان بیابید که $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$، $\lim\limits_{m\to\infty} B^m$ و $\lim\limits_{m\to\infty} (AB)^m$ همگی موجود باشند اما $L = \lim\limits_{m\to\infty} (AB)^m \neq (\lim\limits_{m\to\infty} A^m)(\lim\limits_{m\to\infty} A^m)$.

۶. بخش سوانح یک بیمارستان مشخص کرده که ۳۰٪ بیمارانش در هنگام ورود به بیمارستان قادر به حرکت و ۷۰٪ آنان بستری هستند. یک ماه پس از ورود، ۶۰٪ بیماران قادر به حرکت بهبود یافته اند، ۲۰٪ قادر به حرکت باقی می‌مانند و ۲۰٪ بستری می‌شوند. پس از همین مقدار زمان، ۱۰٪ بیماران بستری بهبود یافته اند، ۲۰٪ قادر به حرکت می‌شوند، ۵۰٪ بستری باقی می‌مانند و ۲۰٪ می‌میرند. پس از یک ماه، درصد بیمارانی که بهبود یافته اند، آنهایی را که قادر به حرکتند، بستریها و فوت کردگان را حساب کنید. همچنین درصد نهایی بیماران هر نوع راتعیین کنید.

۷. در یک بازی که بر مبنای شانس است، بازیکن بازی را با قرار دادن یک مهره در خانه شماره ۲، که «شروع»روی آن نوشته آغازمی کند (به شکل۵-۴ رجوع کنید). تاسی ریخته می‌شود ومهره در صورتی که تاس۱یا۲ بیاید، یک واحد به چپ واگر ۳،۴،۵ ویا ۶ بیاید، یک واحد به راست انتقال می‌یابد. این روند تا هنگامی ادامه می‌یابد که مهره در خانه اول فرود آید،که در این صورت بازیکن بازی را می‌برد،یا در خانه ۴ فرود آید، که در این صورت بازنده است. احتمال بردن این بازی چقدر است؟

شکل۵-۴

۸. کدامیک از ماتریس‌های زیر، ماتریس تغییر وضعیت منظم هستند؟

الف) $\begin{bmatrix} ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۵ \\ ۰/۳ & ۰/۲ & ۰/۵ \\ ۰/۵ & ۰/۵ & ۰ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰ & ۱ \\ ۰/۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰ & ۰ \\ ۰/۵ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰ & ۱ \\ ۰/۵ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ه) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۳} & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰/۷ & ۰/۲ \\ ۰ & ۰/۳ & ۰/۸ \end{bmatrix}$

ز) $\begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ح) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۹. برای هر یک از ماتریس‌های A در تمرین ۸، $\lim_{m\to\infty} A^m$ را در صورت وجود محاسبه کنید.

۱۰. هر یک از ماتریس‌های زیر، ماتریس تغییر وضعیت منظم یک زنجیر مارکف سه حالته است. در هر مورد، بردار

احتمال اولیه عبارت است از:

$$P = \begin{bmatrix} ۰/۳ \\ ۰/۳ \\ ۰/۴ \end{bmatrix}$$

برای هر یک از ماتریس‌های تغییر وضعیت، نسبت اشیا موجود در هریک از حالات را پس از دو مرحله، ونیز نسبت نهایی اشیا موجود در هر حالت را با تعیین بردار احتمال ثابت محاسبه کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۰/۱ & ۰/۱ & ۰/۶ \\ ۰/۲ & ۰/۹ & ۰/۱ \\ ۰/۷ & ۰ & ۰/۳ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۰/۲ & ۰/۱ & ۰/۸ \\ ۰/۲ & ۰/۸ & ۰/۱ \\ ۰/۶ & ۰/۱ & ۰/۱ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۰/۱ & ۰/۱ & ۰/۹ \\ ۰/۱ & ۰/۶ & ۰/۱ \\ ۰/۸ & ۰/۳ & ۰ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ۰/۲ & ۰/۲ & ۰/۴ \\ ۰/۲ & ۰/۷ & ۰/۱ \\ ۰/۶ & ۰/۱ & ۰/۵ \end{bmatrix}$ ه) $\begin{bmatrix} ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۵ \\ ۰/۳ & ۰/۵ & ۰/۲ \\ ۰/۵ & ۰/۲ & ۰/۳ \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} ۰/۴ & ۰ & ۰/۶ \\ ۰/۲ & ۰/۸ & ۰/۲ \\ ۰/۲ & ۰/۲ & ۰/۲ \end{bmatrix}$

۱۱. در سال ۱۹۴۰، گزارشی در مورد نحوه استفاده از زمین در یک شهرستان نشان داد که ۱۰٪ زمین شهرستان شهری است، ۵۰٪ آن بلا استفاده است و ۴۰٪ آن کشاورزی است. پنج سال بعد، گزارشی برای پیگیری این امر آشکار ساخت که ۷۰٪ زمین شهری،شهری باقی مانده است، ۱۰٪ آن بلا استفاده شده و ۴۰٪ آن کشاورزی شده است. مشابهاً ۲۰٪ زمین بلا استفاده شهری شد، ۶۰٪ بلا استفاده باقی ماند و ۴۰٪ کشاورزی شد. نهایتا گزارش سال۱۹۴۵ نشان داد که ۲۰٪ زمین کشاورزی بلا استفاده شده بود در حالی که ۸۰٪ آن کشاورزی باقی ماند. با فرض این که روندهای مشخص شده درگزارش سال ۱۹۴۵ ادامه می‌یابند، در صد زمینهای شهری، بلا استفاده و کشاورزی شهرستان را در سال ۱۹۵۰محاسبه کرده، درصد نهایی متناظر را بیابید.

۱۲. در هر پوشکی که یک نوزاد می‌پوشد، یک پوشش پوشک قرار داده می‌شود. اگر پس از تعویض پوشک، پوشش کثیف شده باشد دور انداخته می‌شود ویک پوشش جدید جایگزین آن می‌شود؛ در غیر این صورت،پوشش به همراه پوشک شسته می‌شود و مجددا مصرف می‌شود، به جز این که هر پوشش را پس از سومین مصرف دور می‌اندازند وعوض می‌کنند. (حتی اگر هیچگاه کثیف نشده باشد). احتمال این که یک بچه پوشش یک پوشک را کثیف کند یک سوم است. اگر در ابتدا فقط پوششهای پوشک نو وجود داشته باشد، در نهایت چه بخشی از پوششهای پوشک نو خواهند بود. چند درصد یک بار مورد مصرف قرار گرفته اند و چند درصد دو بار؟ راهنمایی: فرض کنید که هر پوشش پوشک آماده برای مصرف در یکی از این سه حالت باشد: نو، یک بار مصرف شده و دوبار مصرف شده. بعد از مصرف، به گونه‌ای که در بالا توصیف شده، به یکی از این سه حالت تبدیل می‌شود.

۱۳. در سال ۱۹۷۵، صنعت خودرو سازی مشخص کرد که ۴۰٪ آمریکایی‌های صاحب خودرو، از ماشین بزرگ استفاده

می‌کردند، ۲۰٪ از ماشینهای متوسط و ۴۰٪ از ماشینهای کوچک. گزارشی دیگر در سال ۱۹۸۵ نشان داد که ۷۰٪ دارنگان ماشین‌های بزرگ در سال ۱۹۷۵، هنوز هم ماشین بزرگ دارند. اما ۳۰٪ آنان به ماشین متوسط روی آورده بودند، ۷۰٪ هنوز ماشین متوسط دارند و ۲۰٪ در سال ۱۹۸۵ به ماشین کوچک روی آورده بودند. نهایتا از میان دارندگان ماشین کوچک در سال ۱۹۷۵، ۱۰٪ در سال ۱۹۸۵ صاحب ماشین متوسط بودند و ۹۰٪ صاحب ماشین کوچک. با فرض این که این روندها ادامه یابند. درصد آمریکایی‌هایی را که در سال۱۹۹۵، دارای هر یک از اندازه‌های ماشین بوده اند و نیز درصدهای نهایی متناظر را حساب کنید.

۱۴. ثابت کنید که اگر A و P مانند مثال ۵ باشند،آنگاه:

$$A^m = \begin{bmatrix} r_m & r_{m+1} & r_{m+1} \\ r_{m+1} & r_m & r_{m+1} \\ r_{m+1} & r_{m+1} & r_m \end{bmatrix}$$

که در اینجا:

$$r_m = \frac{1}{3}[1 + \frac{(-1)^m}{2^{m-1}}]$$

نتیجه بگیرید که:

$$(A^m P) = A^m \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 + \frac{(-1)^m}{2^m}(100) \\ 200 \\ 200 + \frac{(-1)^m}{2^m}(100) \end{bmatrix}$$

۱۵. قضیه ۲۰.۵ ونتیجه آن را ثابت کنید.

۱۶. دو نتیجه قضیه ۲۳.۵ را ثابت کنید.

۱۷. نتیجه قضیه ۲۴.۵ را ثابت کنید.

۱۸. فرض کنید M و M' دو ماتریس تغییر وضعیت باشند.

الف) ثابت کنید که اگر Mمنظم بوده، N یک ماتریس تغییر وضعیت دلخواه و α عددی حقیقی باشد که $0 < \alpha \leq 1$، آنگاه $\alpha M + (1-\alpha)N$ یک ماتریس تغییر وضعیت منظم است.

ب) فرض کنید برای هر i و j، وقتی که $M_{ij} > 0$، داشته باشیم $M'_{ij} > 0$. ثابت کنید که ماتریس تغییر وضعیت N و عدد حقیقی $0 < \alpha \leq 1$ چنان یافت می‌شوند که $M' = \alpha M + (1-\alpha)N$.

ج) نتیجه بگیرید که اگر درایه‌های نا صفر M و M' در یک مکان واقع باشند، آنگاه M منظم است اگر و تنها اگر M' منظم باشد.

تعریف زیر در تمرینات ۱۹ الی ۲۳ کاربرد دارد.

تعریف: برای هر $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$، تعریف کنید $e^A = \lim_{m\to\infty} B_m$ که در اینجا :

$$B_m = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^m}{m!}$$

(به تمرین ۲۱ رجوع کنید) بنابراین e^Aحاصل جمع سری نامتناهی زیر است:

$$I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots$$

و B_mمجموع جزئی m ام این سری است. (مشابهت موجود با سری توانی زیر را

$$e^a = I + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!}\ldots+$$

که برای همه اعداد مختلط a معتبر است،مورد توجه قرار دهید).

۱۹. e^O و e^I را محاسبه کنید، که در اینجا O و Iبه ترتیب نمایشگر ماتریس‌های صفر و همانی $n \times n$ هستند.

۲۰. فرض کنید $P^{-1}AP = D$ یک ماتریس قطری باشد. ثابت کنید $e^A = Pe^DP^{-1}$.

۲۱. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ قطری پذیر باشد. نتیجه تمرین ۲۰ را برای اثبات وجود $\lim_{m\to\infty} B_m$ به کار گیرید، که در اینجا:

$$B_m = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^m}{m!}$$

(تمرین ۲۱ از بخش ۷-۲ نشان می‌دهد که این حد برای هر $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ وجود دارد).

۲۲. ماتریس‌های $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ را چنان بیابید که $e^{A+B} \neq e^Ae^B$.

۲۳. ثابت کنید که تابع مشتق پذیر $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ جوابی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل تمرین ۱۵ از بخش ۵-۲ است اگر و تنها اگر به ازای $v \in \mathbb{R}^n$ای داشته باشیم: $x(t) = e^{tA}v$،که A در تمرین مذکور تعریف شده است.

۵-۴ زیر فضاهای پایا و قضیه کیلی – همیلتن[۴]

در بخش ۵-۱ مشاهده کردیم که اگر v یک بردار ویژه عملگر خطی T باشد، آنگاه Tزیر فضای پدید آمده از $\{v\}$ را به درون خویش می‌نگارد. زیر فضاهایی که به درون خودشان نگاشته می‌شوند، در مطالعه تبدیلات خطی بسیار مهم هستند (به عنوان مثال، بهتمرینات ۲۶ الی۳۰ از بخش ۲-۱ رجوع کنید).

[۴] Cayley-Hamilton

تعریف:. فرض کنید T یک عملگر خطی بر فضای برداری V باشد. زیر فضای W از T را $T-$ پایا (یا پایا تحت T) گوییم هرگاه $T(W) \subseteq W$، یعنی هرگاه برای هر $v \in W$، $T(v) \in W$.

مثال ۱. فرض کنید T یک عملگر خطی بر فضای برداری V باشد. دراینصورت زیر فضاهای زیر از V، $T-$ پایا هستند.

۱. $\{\circ\}$

۲. V

۳. $R(T)$

۴. $N(T)$

۵. برای هر مقدار ویژه Tمانند λ، E_λ.

اثبات این که این زیر فضاها $T-$ پایا هستند، به عهده خواننده است. □

مثال ۲. فرض کنید T یک عملگر خطی بر $\mathbb{R}^۳$ باشد که چنین تعریف می‌شود:

$$T(a, b, c) = (a + b, b + c, \circ)$$

در این صورت صفحه $\{(x, y, \circ) : x, y \in \mathbb{R}\}$ و محور xها=$\{(x, \circ, \circ) : x \in \mathbb{R}\}$ زیر فضاهای $T-$ پایای $\mathbb{R}^۳$ هستند. □

فرض کنید T یک عملگر خطی بر فضای برداری V و x یک عنصر ناصفر Vباشد. زیر فضای:

$$W = span(\{x, T(x), T^۲(x), ...\})$$

را زیر فضای $T-$ دوری تولید شده از x می‌نامیم. نشان دادن این که W،تحت T پایاست، کاری ساده است. در حقیقت، W«کوچکترین» زیر فضای پایا تحت T است که شامل x می‌باشد. یعنی هر زیر فضای $T-$پایای V که شامل x باشد، باید W را نیز در بر داشته باشد(به تمرینها رجوع کنید.). زیر فضاهای دوری دارای کاربردهای متعددی هستند. در این بخش، آنها را برای قضیه کیلی -همیلتن به کار می‌گیریم. در تمرینات، روشی را برای به کارگیری زیر فضاهای دوری برای محاسبه چند جمله‌ای مشخص یک عملگر خطی بدون کمک گرفتن از دترمینان به اختصار آورده ایم. زیر فضاهای دوری در فصل ۷ نیز،که در آن به مطالعه نمایشهای ماتریسی عملگرهای قطری ناپذیر می‌پردازیم،نقش مهمی را ایفا می‌کنند.

مثال ۳. فرض کنید Tیک عملگر خطی باشد که بر $\mathbb{R}^۳$ چنین تعریف می‌شود:

$$T(a, b, c) = (-b + c, a + c, ۳c)$$

زیر فضای $T-$دوری تولید شده از $e_۱ = (۱, \circ, \circ)$ را تعیین می‌کنیم. چون

$$T(e_۱) = T(۱, \circ, \circ) = (\circ, ۱, \circ) = e_۲$$

و $T^۲(e_۱) = T(T(e_۱)) = T(e_۲) = (-۱, \circ, \circ) = -e_۱$. نتیجه می‌شود که:

$$span(\{e_۱, T(e_۱), T^۲(e_۱), ...\}) = span(\{e_۱, e_۲\}) = \{(s, t, \circ) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

□

مثال ۴. فرض کنید T عملگری خطی بر $P(\mathbb{R})$، فضای چند جمله‌ای‌ها باشد که با ضابطه $T(f)=f'$ تعریف می‌شود. در این صورت، زیر فضای $T-$ دوری تولید شده از $x^{۲}$، $span(\{x^{۲},۲x,۲\})=P_{۲}(\mathbb{R})$ است. □

وجود یک زیر فضای پایا تحت T، امکان تعریف یک عملگر جدید را که دامنه اش زیر فضای مفروض است، فراهم می‌آورد. اگر T یک عملگر خطی بر V و W یک زیر فضای $T-$پایا ی V باشد، تحدید T_Wی T به W (ضمیمه ب را ملاحظه کنید)، نگاشتی از W به W است و نتیجه می‌شود که T_W یک عملگر خطی بر W است (تمرینات را ملاحظه کنید). T_W به عنوان یک تبدیل خطی، از T به عنوان والد خود، ویژگی‌های خاصی را به ارث می‌برد. نتیجه زیر، نحوه ارتباط این دو تبدیل را تشریح می‌کند.

قضیه ۲۶.۵. فرض کنید T یک تبدیل خطی بر فضای متناهی البُعد V بوده، W یک زیر فضای $T-$ پایای V باشد. در این صورت، چند جمله‌ای مشخص T_W، چند جمله‌ای مشخص T را عاد می‌کند.

برهان. پایه‌ای مانند $\gamma=\{v_{۱},...,v_k\}$، برای W انتخاب کرده، آن را به پایه $\beta=\{v_{۱},...,v_k,...,v_n\}$ برای V توسیع دهید. فرض کنید $A=[T]_\beta$ و$B_{۱}=[T_W]_\gamma$. در این صورت، طبق تمرین ۱۲:

$$A=\begin{bmatrix} B_{۱} & B_{۲} \\ O & B_{۳} \end{bmatrix}$$

که در اینجا O ماتریس صفر $(n-k)\times k$ و$B_{۲}$ و$B_{۳}$ ماتریس‌هایی از اندازه مناسب هستند. فرض کنید $f(t)$ چند جمله‌ای مشخص T و $g(t)$ چند جمله‌ای مشخص T_W باشد. در این صورت، طبق تمرین ۲۰ بخش **۳-۴**:

$$f(t)=\det(A-tI_n)=\det\begin{bmatrix} B_{۱}-tI_k & B_{۲} \\ O & B_{۳}-tI_{n-k} \end{bmatrix}=g(t).\det(B_{۳}-tI_{n-k})$$

پس $g(t)$،$f(t)$ را عاد می‌کند. □

مثال ۵. فرض کنید T عملگری خطی بر $\mathbb{R}^{۴}$ باشد که چنین تعریف می‌شود:

$$T(a,b,c,d)=(a+b+۲c-d,b+d,۲c-d,c+d)$$

و فرض کنید $W=\{(t,s,\circ,\circ):t,s\in\mathbb{R}\}$. ملاحظه می‌کنید که W یک زیر فضای $T-$پایای $\mathbb{R}^{۴}$ است، چرا که برای هر بردار $(a,b,\circ,\circ)\in\mathbb{R}^{۴}$:

$$T(a,b,\circ,\circ)=(a+b,b,\circ,\circ)\in W$$

فرض کنید$\gamma\{e_{۱},e_{۲}\}$،که پایه‌ای برای Wاست. γ را به β، پایه استاندارد $\mathbb{R}^{۴}$ توسیع دهید. در این صورت، با نماد گذاری

قضیه ۲۶.۵:

$$A=[T]_\beta=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}, \qquad B_۱=[T_W]_\gamma=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

فرض کنید $f(t)$ چند جمله‌ای مشخص T و $g(t)$ چند جمله‌ای مشخص T_W باشد. در این صورت:

$$\begin{aligned} f(t) &= \det(A-tI_۴)=\det\begin{bmatrix} ۱-t & ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱-t & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲-t & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱-t \end{bmatrix} \\ &= \det\begin{bmatrix} ۱-t & ۱ \\ ۰ & ۱-t \end{bmatrix}.\det\begin{bmatrix} ۲-t & -۱ \\ ۱ & ۱-t \end{bmatrix}=g(t).\det\begin{bmatrix} ۲-t & -۱ \\ ۱ & ۱-t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

با در نظر داشتن قضیه ۶.۵، می‌توانیم از چند جمله‌ای مشخص T_W برای بدست آوردن اطلاعات بیشتر در مورد چند جمله‌ای مشخص T استفاده کنیم. از این نظر، زیر فضاهای دوری به این جهت مفید هستند که چند جمله‌ای مشخص تحدید یک تبدیل خطی مانند T به یک زیر فضای دوری، به سادگی قابل محاسبه است.

قضیه ۲۷.۵. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V بوده، W نشان دهنده زیر فضای $T-$دوری V تولید شده از بردار ناصفر $v\in V$ باشد. فرض کنید $k=dim(W)$. در این صورت:

الف) $\{v,T(v),T^۲(v),...,T^{k-۱}(v)\}$ پایه‌ای برای W است.

ب) هرگاه $a_۰v+a_۱T(v)+a_۲T^۲(v)+...+a_{k-۱}T^{k-۱}(v)+T^k(v)=۰$ آنگاه چند جمله‌ای مشخص $f(t)=(-۱)^k(a_۰+a_۱t+a_۲t^۲+...+a_{k-۱}t^{k-۱}+t^k)$ است.

برهان. الف) از آنجا که $v\neq ۰$، مجموعه $\{v\}$ مستقل خطی است. فرض کنید j بزرگترین عدد صحیح مثبتی باشد که به ازای آن:

$$\beta=\{v,T(v),T^۲(v),...,T^{j-۱}(v)\}$$

مستقل خطی است. چنین jای باید موجود باشد، چرا که V متناهی البُعد است. فرض کنید $Z=span(\beta)$. در این صورت β پایه‌ای برای Z است. به علاوه، طبق قضیه ۸.۱، $T^j(v)\in Z$. از این اطلاعات برای اثبات این که Z یک

زیر فضای پایا تحت T است، استفاده می‌کنیم. فرض کنید که $w \in Z$ ترکیبی خطی از اعضای β باشد. اسکالرهای $b_\circ, v_1, ..., b_{j-1}$ به گونه‌ای موجودند که:

$$w = b_\circ v + b_1 T(v) + ... + b_{j-1} T^{j-1}(v)$$

و در نتیجه:

$$T(w) = b_\circ T(v) + b_1 T^2(v) + ... + b_{j-1} T^{j}(v)$$

در نتیجه $T(w)$ ترکیبی خطی از اعضای Z است و بنابراین به Z تعلق دارد. پس Z تحت T پایاست. به علاوه، $v \in Z$. طبق تمرین ۱۱، W کوچکترین زیر فضای $T-$پایای V است که v را در بر دارد و در نتیجه $W \subseteq Z$. به وضوح $Z \subset W$ و بنابراین نتیجه می‌گیریم که $Z = W$. پس نتیجه می‌شود که β پایه‌ای برای W است و بنابراین $dim(W) = j$. پس $j = k$. به این ترتیب الف ثابت می‌شود.

ب) حال β را (با توجه به الف) به صورت پایه‌ای مرتب برای W در نظر می‌گیریم. فرض کنید $a_\circ, a_1, ..., a_{k-1}$ چنان اسکالرهایی باشند که $a_\circ v + a_1 T(v) + a_2 T^2(v) + ... + a_{k-1} T^{k-1}(v) + T^k(v) = \circ$ مشاهده کنید که:

$$[T_W]_\beta = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \cdots & \circ & -a_\circ \\ 1 & \circ & \cdots & \circ & -a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix}$$

که طبق تمرین ۱۹ چند جمله‌ای مشخص این ماتریس، عبارت است از :

$$f(t) = (-1)^k (a_\circ + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_{k-1} t^{k-1} + t^k)$$

در نتیجه $f(t)$ چند جمله‌ای مشخص T_W است و به این ترتیب ب نیز ثابت می‌شود. □

مثال ۶. فرض کنید T عملگر خطی مثال ۳ بوده، $W = spna\{e_1, e_2\}$ زیرفضای $T-$ دوری تولید شده از e_1 باشد. چند جمله‌ای مشخص T_W، یعنی $f(t)$ را یک بار با استفاده از قضیه ۲۷.۵ و یک بار با استفاده از دترمینان، محاسبه می‌کنیم:

الف) با استفاده از قضیه ۲۷.۵: از مثال ۳ می‌دانیم که e_1، e_2، W را تولید می‌کنند و $T^2(e_1) = -e_1$. بنابراین طبق قضیه ۲۷.۲ (ب)، $f(t) = t^2 + 1$.

ب) از طریق دترمینان: فرض کنید $\beta = \{e_1, e_2\}$ که پایه‌ای مرتب برای W است. چون $T(e_1) = e_2$ و

$T(e_۲) = -e_۱$، داریم:

$$[T_W]_\beta = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

و بنابراین :

$$f(t) = \det(\begin{bmatrix} -t & -۱ \\ ۱ & -t \end{bmatrix}) = t^۲ + ۱$$

□

قضیه کیلی – همیلتن

به عنوان نمونه‌ای از کارایی قضیه ۲۷.۵، نتیجه‌ای معروف را ثابت می‌کنیم که در فصل ۷ مفید واقع خواهد شد. برای تعریف $f(T)$ که در آن T یک عملگر خطی و $f(T)$ یک چند جمله‌ای است. خواننده می‌تواند به ضمیمه ه رجوع کند.

قضیه ۲۸.۵ (کیلی- همیلتن). فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی العبد V و $f(t)$ چند جمله‌ای مشخص T باشد. در این صورت، $f(T) = T_۰$ یعنی تبدیل صفر. به عبارت دیگر T در معادله مشخص خود «صدق می‌کند».

برهان. نشان می‌دهیم که برای هر $v \in V$، $f(T)(v) = ۰$. در صورتی که $v = ۰$، این مطلب واضح است؛ چرا که $f(T)$ خطی است. بنابراین فرض کنید $v \neq ۰$. فرض کنید W زیر فضای $T-$ دوری تولید شده از v باشد و همچنین $dim(W) = k$. بنابر قضیه ۲۷.۵، اسکالرهای $-a_۰, -a_۱, ..., -a_{k-۱}$ چنان یافت می‌شوند که:

$$T^k(v) = -a_۰ v - a_۱ T(v) - ... - a_{k-۱} T^{k-۱}(V)$$

در نتیجه، قضیه ۲۷.۵ ایجاب می‌کند که:

$$g(t) = (-۱)^k (a_۰ + a_۱ t + ... + a_{k-۱} t^{k-۱} + t^k)$$

چند جمله‌ای مشخص T_W است. با ترکیب این دو معادله نتیجه می‌گیریم که:

$$g(T)(v) = (-۱)^k (a_۰ I + a_۱ T + ... + a_{k-۱} T^{k-۱} + T^k)(v) = ۰$$

طبق قضیه ۲۶.۵، $g(t)$، $f(t)$ را عاد می‌کند و بنابراین چند جمله‌ای $q(t)$ای وجود دارد، بگونه‌ای که $f(t) = q(t)g(t)$ بنابراین:

$$f(T)(v) = q(T)g(T)(v) = q(T)(g(T)(v)) = q(T)(۰) = ۰$$

□

مثال ۷. فرض کنید T تبدیلی خطی بر فضای $\mathbb{R}^{2}$ باشد که با رابطه $T(a,b)=(a+2b,-2a+b)$ تعریف می‌شود و فرض کنید$\beta=\{e_1,e_2\}$ در این صورت:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

که در اینجا$A=[T]_\beta$. بنابراین چند جمله‌ای مشخص T عبارت است از:

$$f(t)=\det(A-tI)=\det(\begin{bmatrix} 1-t & 2 \\ -2 & 1-t \end{bmatrix})=t^{2}-2t+5$$

به راحتی می‌توان امتحان کرد که $T_0=f(T)=T^{2}-2T+5I$ به طور مشابه :

$$f(A)=A^{2}-2A+5I=\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

مثال ۷، الهام بخش مطلب زیر است:

نتیجه ۱. (قضیه کیلی –همیلتن برای ماتریس‌ها): فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$بوده، $f(t)$ چند جمله‌ای مشخص A باشد. در این صورت، $f(A)=O$، که O ماتریس صفر $n\times n$ است.

برهان. به عهده خواننده است. □

زیر فضاهای پایا ومجموع‌های مسقیم*

تجزیه یک فضای برداری متناهی البُعد V به حداکثر تعداد زیر فضاهای $T-$ پایای ممکن آن، مفید است. چرا که رفتار T بر V را می‌توان از رفتار آن بر جمعوندهای مستقیم نتیجه گرفت. به عنوان مثال، T قطری پذیر است اگر و تنها اگر V را بتوان به مجموع زیر فضاهی $T-$ پایای یک بعدی V تجزیه کرد (به تمرین ۳۶ رجوع کنید). در فصل ۷، روشهای جایگزینی را برای تجزیه V به مجموعهای مستقیم زیر فضاهای $T-$پایا، هنگامیکه T قطری پذیر نباشد، بررسی خواهیم کرد. اکنون کار خود را با جمع آوری نکاتی چند در مورد مجموعهای مستقیم زیر فضاهای پایا تحت T ادامه خواهیم داد که در بخش ۴-۷ مفید واقع خواهند شد. نخستین مورد از این نکات در باره چند جمله‌ای‌های مشخص است.

قضیه ۲۹.۵. فرض کنید T یک عملگر خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V بوده، $V=W_1\oplus+..\oplus W_k$،برای هر i، ($1\le i\le k$) W_i یک زیر فضای T پایای Vاست. فرض کنید $f(t)$ چند جمله‌ای مشخص T و $f_i(t)$، ($1\le i\le k$) چند جمله‌ای مشخص T_{W_i} باشد. در اینصورت؛

$$f(t)=f_1(t).f_2(t).\ldots.f_k(t)$$

برهان. اثبات با استقرا بر روی k صورت می‌گیرد. ابتدا فرض کنید $k=۲$. فرض کنید β_1 پایه‌ای برای W_1 و β_2 پایه‌ای برای W_2 باشد و نیز $\beta=\beta_1\cup\beta_2$. در این صورت طبق قضیه ۱۵.۵ (د)، β پایه‌ای برای V است. فرض کنید $A=[T]_\beta$، $B_1=[T_{W_1}]_{\beta_1}$ و $B_2=[T_{W_2}]_{\beta_2}$ از تمرین ۳۴ نتیجه می‌شود که:

$$A=\begin{bmatrix} B_1 & O \\ O' & B_2 \end{bmatrix}$$

که O و O' ماتریس‌های صفر با اندازه مناسب هستند. در نتیجه طبق تمرین ۲۰ بخش ۳-۴،

$$f(t)=\det(A-tI)=det(B_1-tI).\det(B_2-tI)=f_1(t).f_2(t)$$

وبه این ترتیب نتیجه در حالت $k=۲$ ثابت می‌شود.

حال فرض کنید که قضیه برای $k-۱$ جمعوند درست باشد، که $k-۱\geq ۲$ و فرض کنید V مجموع مستقیم k زیر فضا باشد:

$$V=W_1\oplus..\oplus W_k$$

فرض کنید $W=W_1+..W_{k-1}$. به راحتی می‌توان بررسی کرد که W تحت T پایاست و $V=W\oplus W_k$، پس طبق حالت $k=۲$، $k=۲$، $f(t)=g(t)f_k(t)$ که در اینجا $g(t)$ چند جمله‌ای مشخص T_W است. به وضوح $W=W_1\oplus+..\oplus W_{k-1}$ و بنابراین طبق فرض استقرا، $g(t)=f_1(t)f_2(t)...f_{k-1}(t)$ نتیجه می‌گیریم که
$f(t)=f_1(t).f_2(t).\dots.f_k(t)$ □

به عنوان مثالی برای این نتیجه، فرض کنید T یک عملگر خطی قطری پذیر بر فضای برداری متناهی البُعد V، با مقادیر ویژه متمایز $\lambda_1,...,\lambda_k$ باشد. طبق قضیه ۱۶.۵، می‌دانیم که V مجموع مستقیم فضاهای ویژه T است. چون هر فضای ویژه، تحت T پایاست، می‌توانیم این وضعیت را در قالب قضیه ۲۹.۵، مورد بررسی قرار دهیم. برای هر مقدار ویژه مانند λ_i، چند جمله‌ای مشخص تحدید T به E_{λ_i}، $(\lambda_i-t)^{m_i}$ می‌باشد، که m_i بعد E_{λ_i} است. طبق قضیه ۲۹.۵، چند جمله‌ای مشخص T، یعنی $f(t)$ برابر حاصلضرب زیر است:

$$f(t)=(\lambda_1-t)^{m_1}(\lambda_2-t)^{m_2}...(\lambda_k-t)^{m_k}$$

نتیجه می‌گیریم که چندگانگی هر مقدار ویژه، برابر با بعد فضای ویژه متناظر با آن است و همین طور هم انتظار می‌رفت.

مثال ۸. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای $\mathbb{R}^4$ باشد که چنین تعریف می‌شود:

$$T(a,b,c,d)=(۲a-b,a+b,c-d,c+d)$$

و فرض کنید $W_1=\{(s,t,۰,۰):s,t\in\mathbb{R}\}$ و $W_2=\{(۰,۰,s,t):s,t\in\mathbb{R}\}$. توجه کنید که W_1 و W_2 هردو $T-$ پایا هستند و $\mathbb{R}^4=W_1\oplus W_2$. فرض کنید $\beta_1=\{e_1,e_2\}$ و $\beta_2=\{e_3,e_4\}$ و نیز $\beta=\beta_1\cup\beta_2=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$. در این صورت β_1 پایه‌ای مرتب برای W_1، β_2 پایه‌ای مرتب برای W_2، β پایه‌ای مرتب برای $\mathbb{R}^4$

می‌باشد. فرض کنید $A=[T]_\beta$، $B_1=[T_{W_1}]_{\beta_1}$ و $B_2=[T_{W_2}]_{\beta_2}$. در این صورت:

$$B_1=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_2=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

و

$$A=\begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فرض کنید $f(t)$، $f_1(t)$ و $f_2(t)$ به ترتیب نشان دهنده چند جمله‌ای‌های مشخص T، T_{W_1} و T_{W_2} باشند، در این صورت:

$$f(t)=\det(A-tI)=det(B_1-tI).\det(B_2-tI)=f_1(t).f_2(t)$$

□

ماتریس A در مثال ۸ را می‌توان از متصل کردن ماتریس‌های B_1و B_2، به نحوی که در تعریف زیر خواهد آمد، به دست آورد.

تعریف:. فرض کنید $B_1\in M_{m\times m}(F)$ و$B_2\in M_{n\times n}(F)$. مجموع مستقیم B_1 و B_2 را که با $B_1\oplus B_2$ نشان داده می‌شود. ماتریس $A_{(m+n)\times(m+n)}$ تعریف کنیم که:

$$A_{ij}=\begin{cases} (B_1)_{ij} & \text{هرگاه}\ 1\le i,j\le m \\ (B_2)_{(i-m)\times(j-m)} & \text{هرگاه}\ m+1\le i,i\le n+m \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

هرگاه $B_1,B_2,...,B_k$، ماتریس‌های مربعی با درایه‌های واقع در F باشند، مجموع مستقیم $B_1,B_2,...,B_k$ را به طور بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$B_1\oplus B_2\oplus ...\oplus B_k=(B_1\oplus B_2\oplus ...\oplus B_{k-1})\oplus B_k$$

اگر $A=B_1\oplus B_2\oplus ...\oplus B_k$، معمولا می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix} B_1 & O & \cdots & O \\ O & B_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & B_k \end{bmatrix}$$

مثال ۹. فرض کنید:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = [3], \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

در این صورت:

$$B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

آخرین نتیجه این بخش، مجموع‌های مستقیم ماتریس‌ها را به مجموع‌های مستقیم زیر فضاهای پایا مرتبط می‌سازد و تعمیمی است از تمرین ۳۴ به حالتی که در آن $k \geq 2$.

قضیه ۳۰.۵. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V بوده $V = W_1 \oplus +..\oplus W_k$ و برای هر i، فرض کنید β_i پایه‌ای برای W_i باشد. قرار دهید $\beta = \beta_1 \cup ... \cup \beta_k$ فرض کنید برای هر $i = 1, 2, ..., k$، $A = [T]_\beta$ و $B_i = [T_{W_i}]_{\beta_i}$. در این صورت، $A = B_1 \oplus B_2 ... \oplus B_k$

برهان. به عهده خواننده است. □

تمرینات

۱. تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) عملگری خطی مانند T وجود دارد که هیچ زیرفضای $T-$ پایایی ندارد.

ب) هرگاه T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد و W یک زیر فضای T- پایای V، آنگاه چند جمله‌ای مشخص T_W، چند جمله‌ای مشخص T را عاد می‌کند.

ج) فرض کنید T عملگری خطی بر فضای متناهی البُعد V بوده، v و w اعضایی از V باشند. هرگاه W زیرفضای $T-$ دوری تولید شده از v و W' زیرفضای $T-$ دوری تولید شده از w باشد و $W = W'$، آنگاه $v = w$.

د) هرگاه T یک عملگر خطی بر فضای متناهی البُعد V باشد، آنگاه برای هر $v \in V$، زیر فضای T-دوری تولید شده از v، همان زیر فضای $T-$ دوری تولید شده از $T(v)$ است.

ه) فرض کنید که T عملگری خطی بر یک فضای برداری $n-$بعدی باشد. در این صورت چند جمله‌ای $g(t)$ از درجه n وجود دارد، به قسمی که $g(T) = T_\circ$.

و) هر چند جمله‌ای از درجه n که ضریب پیشروی آن $(-۱)^n$ باشد چند جمله‌ای مشخص عملگر خطی است.

ز) هرگاه T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V بوده، V مجموع مستقیم k زیرفضای $T-$ پایا باشد، آنگاه پایه مرتبی مانند β برای V به گونه‌ای وجود دارد که $[T]_\beta$ مجموع مستقیم k ماتریس است.

۲. برای هر یک از عملگرهای خطی Tی زیر، مشخص کنید که آیا زیر فضای Wی داده شده یک زیرفضای $T-$ پایای V هست یا خیر.

الف) $V = P_۳(\mathbb{R})$، $T(f) = f'$ و $W = P_۲(\mathbb{R})$

ب) $V = P(\mathbb{R})$، $T(f(x)) = xf(x)$ و $W = P_۲(\mathbb{R})$

ج) $V = \mathbb{R}^۳$، $T(a,b,c) = (a+b+c, a+b+c, a+b+c)$ و $W = \{(t,t,t); t \in \mathbb{R}$

د) $V = C[\circ, ۱]$ و $T(f(t)) = [\int_\circ^۱ f(x)dx]t$ و $W = \{f \in V : f(t) = at + b\}$

ه) $V = M_{۲\times۲}(\mathbb{R})$ و $T(A) = \begin{bmatrix} \circ & ۱ \\ ۱ & \circ \end{bmatrix}$ و $W = \{A \in V : A^t = A\}$

۳. فرض کنید T عملگری خطی بر روی فضای برداری متناهی البُعد V باشد. ثابت کنید که زیرفضاهای زیر تحت T پایا هستند.

الف) $\{\circ\}$ و V.

ب) $N(T)$ و $R(T)$.

ج) برای هر مقدار ویژه λ برای T، E_λ.

۴. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری V بوده، W یک زیر فضای $T-$پایای V باشد. ثابت کنید که W به ازای هر چند جمله‌ای $g(t)$، $g(T)-$پایاست.

۵. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری V باشد. ثابت کنید که اشتراک هر گردایه‌ای از زیر فضای $T-$پایای V، یک زیر فضای T پایای V است.

۶. برای هر کدام از عملگرهای خطی T زیر بر فضای برداری V، پایه‌ای مرتب برای زیر فضای $T-$ دوری تولید شده از z بیابید.

الف) $V = \mathbb{R}^۴$، $T(a,b,c,b) = (a+b, b-c, a+c, a+d)$ و $z = e_۱$.

ب) $V = P_{۳}(\mathbb{R})$، $T(f) = f''$، $z = x^{۳}$.

ج) $V = M_{۲\times۲}(\mathbb{R})$، $T(A) = A^t$، $z = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$.

د) $V = M_{۲\times۲}(\mathbb{R})$، $T(A) = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$، $z = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$.

۷. ثابت کنید که تحدید عملگری خطی مانند T به یک زیر فضای $T-$ پایا، عملگری خطی بر آن زیر فضاست.

۸. فرض کنید T عملگری خطی بریک فضای برداری، و W یک زیر فضای $T-$ پایا باشد. ثابت کنید که اگر v یک بردار ویژه T_W متناظر با مقدار ویژه λ باشد. آنگاه یک بردار ویژه T نیز هست.

۹. برای هریک از عملگرهای خطی T و زیر فضاهای دوریW در تمرین ۶، چند جمله‌ای مشخص T_W را مانند مثال ۶، به دو روش محاسبه کنید.

۱۰. برای هریک از عملگرهای خطی مثال ۶،چند جمله‌ای مشخص T،$f(t)$ را بیابید و بررسی کنید که چند جمله‌ای مشخص T_W(که درتمرین ۹محاسبه شد) $f(t)$ را عاد می‌کند.

۱۱. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری V باشد و فرض کنید که W زیر فضای $T-$ دوری V باشد که vتولید می‌کند،ثابت کنید که:

الف) W تحت T پایاست.

ب) هر زیر فضای T پایای V که شامل v باشد، W را نیز در بر دارد.

۱۲. ثابت کنید که در برهان قضیه ۲۶.۵، $A = \begin{bmatrix} B_{۱} & B_{۲} \\ O & B_{۳} \end{bmatrix}$

۱۳. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری V بوده، v یک عنصر نا صفر V و W زیر فضای T- دوری V، باشد که v تولید می‌کند. برای هر $w \in V$، ثابت کنید که $w \in W$ اگر و تنها اگر چند جمله‌ای $g(t)$ چنان یافت شود که $w = g(T)(v)$.

۱۴. ثابت کنید که چند جمله‌ای $g(t)$ی تمرین ۱۳ را همواره می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که درجه اش کوچکتر یا مساوی با $dim(W)$ باشد.

۱۵. قضیه کیلی -همیلتن (قضیه۵.۲۸)را برای اثبات نتیجه ماتریسی آن به کار برید.

۱۶. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد:

الف) ثابت کنید که اگر چند جمله‌ای مشخص T بشکافد، چند جمله‌ای مشخص تحدیدT به هر زیر فضای T پایای Vنیز می‌شکافد.

ب) نتیجه بگیرید که اگر چند جمله‌ای مشخص T بشکافد، آنگاه هر زیر فضای T پایای نابدیهی V شامل یک بردار ویژه T است.

۱۷. فرض کنید که A ماتریس $n \times n$ باشد، ثابت کنید که:

$$dim(span(\{I_n, A, A^۲, ...\})) \leq n$$

۱۸. فرض کنید که A ماتریسی $n \times n$ با چند جمله‌ای مشخص زیر باشد:

$$f(t) = (-۱)^n t^n + a_{n-۱} t^{n-۱} + ... + a_۱ t + a_۰$$

الف) ثابت کنید که A وارون پذیر است اگر و تنها اگر $a_۰ \neq ۰$

ب) ثابت کنید که اگر A وارون پذیر باشد، آنگاه :

$$A^{-۱} = (-۱/a_۰)[(-۱)^n A^{n-۱} + a_{n-۱} A^{n-۲} + ... + a_۱ I]$$

ج) ب را برای محاسبه $A^{-۱}$ به ازای :

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

به کار برید.

۱۹. فرض کنید که A نشان دهنده ماتریس $k \times k$ زیر باشد:

$$[T_W]_\beta = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & -a_۰ \\ ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & -a_۱ \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & -a_{k-۱} \end{bmatrix}$$

که در اینجا $a_۰, a_۱, ..., a_{k-۱}$ اسکالرهای دلخواهی هستند. ثابت کنید که چند جمله‌ای مشخص A،چند جمله‌ای مشخص زیر است:

$$(-۱)^n (t^n + a_{n-۱} t^{n-۱} + ... + a_۱ t + a_۰)$$

راهنمایی: از استقراءریاضی بر روی k، و بسط دتر مینان نسبت به سطر اول استفاده کنید.

۲۰. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری V و نیز فرض کنید که W یک زیر فضای T-دوری خود باشد. ثابت کنید که اگر U یک عملگر خطی بر V باشد، آنگاه $UT = TU$ اگر و تنها اگر به ازای چند جمله‌ای مانند g $U = g(T)$. راهنمایی: فرض کنید که V با v تولید شود. $g(t)$ را مطابق با تمرین ۱۳ چنان انتخاب کنید که $g(T)(v) = U(v)$.

۲۱. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری دو بعدی V باشد. ثابت کنید که یا Vیک زیر فضایT دوری خود است یا به ازای اسکالری مانند c, $T = cI$.

۲۲. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری دو بعدی V باشد و فرض کنید که برای هر اسکالر c, $T \neq cI$. نشان دهید که اگر U تبدیلی خطی بر V باشد که $UT = TU$، آنگاه به ازای چند جمله‌ای مانند$g(t)$, $U = g(T)$.

۲۳. فرض کنید T یک عملگر خطی قطری پذیر بر فضای برداری متناهی البُعدV بوده، W یک زیر فضای T پایای V باشد. فرض کنید که $v_1, v_2, ..., v_k$، بردارهای ویژه‌ای از T متناظر با مقادیر ویژه متمایز باشند. ثابت کنید که اگر $v_1 + v_2 + ... + v_k$ در W باشد، آنگاه برای هر i، $v_i \in W$. راهنمایی: از استقراءریاضی روی k استفاده کنید.

۲۴. ثابت کنید که تحدید عملگر خطی قطری پذیر T به هر یک از زیرفضاهای T -پایای نابدیهی T خود قطری پذیر است. راهنمایی:از نتیجه تمرین ۲۳ استفاده کنید.

۲۵. الف) عکس تمرین ۱۷، قسمت الف از بخش ۵-۲ را ثابت کنید؛ هرگاه T وU چنان عملگرهای قطری پذیری بر فضای برداری متناهی البعد V باشند که $UT = TU$، آنگاه T و U همزمان قطری پذیر هستند (به تعریف‌های تمرینهای بخش۵-۲ رجوع کنید). راهنمایی: به ازای هر مقدار ویژه Tمانند λ نشان دهید که E_λ، U پایاست و سپس تمرین ۲۴ را برای به دست آورده پایه‌ای برای E_λ متشکل از بردارهای ویژه U به کار گیرید.

ب) متناظری ماتریسی برای قسمت الف بیان کرده، آن را ثابت کنید.

۲۶. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری $n-$ بعدی V باشد که دارای n مقدار ویژه متمایز است، ثابت کنید V یک زیر فضای $T-$ دوری است. راهنمایی: تمرین ۳۳ را برای یافتن برداری مانند v به کار ببرید که $\{v, T(v), ..., T^{n-1}(V)\}$ مستقل خطی باشد.

تمرینات ۲۷ الی ۳۲ مستلزم آشنایی با فضاهای خارج قسمتی می‌باشند، که در تمرین ۳۱از بخش ۳-۱ تعریف شد. پیش از مبادرت به حل این مسائل، خواننده باید نخست تمرینات دیگری را که با فضاهای خارج قسمتی سرو کار دارند، مرور کند، یعنی تمرینات ۲۳ از بخش ۱-۶، تمرین ۳۴ از بخش ۱-۲ و تمرین ۲۲ از بخش ۲-۴.

در تمرینات ۲۷ الی ۳۲ ، T یک عملگر خطی ثابت بر فضای برداری متناهی البعد V و W یک زیر فضای T پایای نابدیهی V است. به تعریف زیر نیاز خواهیم داشت.

تعریف: فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری V و Wیک زیر فضای T-پایای V باشد. $\overline{T} : V/W \to V/W$ را چنین تعریف کنید:

$$\overline{T}(v+W) = T(v) + W \qquad \text{برای هر } v+W \in V/W$$

۲۷. الف) ثابت کنید که $\overline{T}$ خوش تعریف است. یعنی نشان دهید که هرگاه $v+W = v'+W$، آنگاه $\overline{T}(v+w) = \overline{T}(v'+W)$.

ب) ثابت کنید که $\overline{T}$ عملگری خطی بر V/W است.

ج)فرض کنید $\eta : V \to V/W$ تبدیل خطی باشد که در تمرین ۳۴ از بخش ۱-۲، با رابطه $\eta(v) = v + W$ تعریف شد. نشان دهید که نمودار تصویر ۵-۵ تعویض پذیر است؛ یعنی ثابت کنید که $\eta T = \overline{T}\eta$. (در این تمرین نیازی به این فرض که V متناهی البعد باشد، نیست.)

شکل۵-۵

۲۸. فرض کنید که $f(t)$، $g(t)$ و$h(t)$ به ترتیب چند جمله‌ای‌های مشخص T،T_W و$\overline{T}$ باشند. ثابت کنید که $f(t) = g(t).h(t)$. راهنمایی: پایه‌ای برای W مثل $\gamma = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ را به پایه‌ای برای V، چون $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_k, ..., v_n\}$ تعمیم دهید. نشان دهید که $\alpha = \{v_{k+1} + W, ..., v_n + W\}$ پایه‌ای برای V/W است، و ثابت کنید که:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ O & B_3 \end{bmatrix}$$

که در اینجا $B_1 = [T]_\gamma$ و$B_3 = [\overline{T}]_\alpha$

۲۹. با استفاده از راهنمایی تمرین ۲۸ ثابت کنید که اگر T قطری پذیر باشد، $\overline{T}$ نیز قطری پذیر است.

۳۰. عکس تمرین‌های ۲۴ و ۲۹ را ثابت کنید. اگر T_W و $\overline{T}$ هر دو قطری پذیر باشند، آنگاه T نیز قطری پذیر است.
نتایج قضیه ۲۷.۵ و تمرین ۲۸ در طرح‌ریزی روشهایی برای محاسبه چند جمله‌ای‌های مشخص بدون استفاده از دترمینان مفید واقع می‌شوند. این مطلب در تمرین بعدی تشریح می‌شود.

۳۱. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$، $T = L_A$ و W زیر فضای دوری $\mathbb{R}^3$ تولید شده از e_1 باشد.

الف) از قضیه ۲۷.۵ برای محاسبه چند جمله‌ای مشخص T_W استفاده کنید.

ب) ثابت کنید که $\{e_2 + W\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^3/W$ است و از این واقعیت برای محاسبه چند جمله‌ای مشخص $\overline{T}$ استفاده کنید.

ج) نتایج دو قسمت الف و ب را برای یافتن چند جمله‌ای مشخص A به کار ببرید.

۳۲. عکس تمرین ۹ الف از بخش ۵-۲ را ثابت کنید: اگر چند جمله‌ای مشخص T بشکافد، آنگاه پایه مرتب βای برای Vچنان یافت می‌شود که $[T]_\beta$ بالا مثلثی باشد. چند راهنمایی: از استقراءریاضی روی $dim(V)$استفاده کنید. ابتدا ثابت کنید که T دارای یک بردار ویژه مانند v است، فرض کنید $W = span(\{v\})$ و فرض استقراء را در مورد $\overline{T} : V/W \to V/W$به کار برید. تمرین ۳۳ (ب) از بخش ۶-۱ در اینجا مفید واقع می‌شود.

تمرینات ۳۳ الی ۴۰ با مجموعهای مستقیم ارتباط می‌یابند.

۳۳. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری V بوده، $W_1, W_2, ..., W_k$ زیر فضاهایی T پایا از V باشند. ثابت کنید که $W_1 + W_2 + ... + W_k$ نیز یک زیر فضای T پایای V است.

۳۴. اثباتی مستقیم برای قضیه۵.۳۰ در حالت $k = 2$ ارائه دهید (این نتیجه در برهان قضیه ۲۹.۵ مورد استفاده قرار می‌گیرد).

۳۵. قضیه ۳۰.۵ را ثابت کنید. راهنمایی: با تمرین ۳۴ شروع کرده، آن را با استفاده از استقراء ریاضی روی k، یعنی تعداد زیر فضاها، تعمیم دهید.

۳۶. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البعدی V باشد. ثابت کنید که T قطری پذیر است اگر و تنها اگر مجموع مستقیم زیر فضاهای یک بُعدی، Tپایا باشد.

۳۷. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البعدیV باشد و $W_1, W_2, ..., W_k$ چنان زیر فضاهای Tپایایی از V باشند که $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$. ثابت کنید:

$$\det(T) = \det(T_{W_1})\det(T_{W_k})...\det(T_{W_k})$$

۳۸. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البعدیV بوده، $W_1, W_2, ..., W_k$ چنان زیر فضاهای T پایایی از V باشند که $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$. ثابت کنید که$T$ قطری پذیری است اگر و تنها اگر برای هر i، T_{W_i} قطری پذیر باشد.

۳۹. فرض کنید که C گردایه‌ای از عملگرهای خطی قطری پذیر بر فضای برداری متناهی البعد V باشد، ثابت کنید که پایه مرتبی مانند β وجود دارد به گونه‌ای که $[T]_\beta$ برای هر $T \in C$ قطری پذیر است. اگر و تنها اگر اعضای C تحت عمل ترکیب با هم جابجا شوند (این مطلب تعمیمی از تمرین ۲۵ است). راهنمایی برای حالتی که عملگرها

با یکدیگر جابجا شوند: نتیجه هنگامی که هر عملگر فقط یک مقدار ویژه داشته باشد، بدیهی است. در غیر این صورت، نتیجه کلی را بااستقراء روی $\dim V$ و با استفاده از این واقعیت که Vمجموع مستقیم فضاهای ویژه یکی از عملگرهای C است که بیش از یک مقدار ویژه دارد، ثابت کنید.

۴۰. فرض کنید $B_۱, B_۲, ..., B_K$ ماتریس‌های مربعی باشند که درایه‌های آنها همگی متعلق به یک میدان هستند و نیز فرض کنید که$A = B_۱ \oplus B_۲ \oplus ... \oplus B_k$. ثابت کنید که چند جمله‌ای مشخص A، حاصلضرب چند جمله‌ای‌های مشخص B_iهاست.

۴۱. فرض کنید که:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & \cdots & n \\ n+۱ & n+۲ & \cdots & ۲n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^۲-n+۱ & n^۲-n+۲ & \cdots & n^۲ \end{bmatrix}$$

چند جمله‌ای مشخص A را بیابید. راهنمایی: ابتدا فرض کنید که رتبه A، ۲ است و

$$span(\{(۱, ۱, ..., ۱), (۱, ۲, ..., n)\})$$

، تحت L_A پایاست.

۴۲. فرض کنید که $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ماتریسی باشد که چنین تعریف می‌شود: برای هر i, j $A_{ij} = ۱$. چند جمله‌ای مشخص A را بیابید.

فصل ۶

فضاهای ضرب داخلی

در اغلب کاربردهای ریاضی، مفهوم اندازه‌گیری و در نتیجه مقدار و اندازه نسبی کمیّت‌های مختلف وارد بحث می شوند. بنابراین جای تعجب نیست که میدان‌های اعداد حقیقی و اعداد مختلط، که دارای مفهوم فاصله درونی در خود هستند، نقش مهمی ایفا می کنند. جز در بخش ۶-۷، فرض می‌کنیم که همه فضاهای برداری، روی میدان F هستند، که F یکی از دو میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است (برای اطلاع از خواص اعداد مختلط به ضمیمه د رجوع کنید).

ایده‌های طول و فاصله را در فضاهای برداری معرفی می‌کنیم و به این ترتیب ساختاری بسیار غنی تر به دست می‌آوریم که به اصطلاح، ساختار فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود. این ساختار با اجزاء جدید، کاربردهایی در هندسه (بخش‌های ۶-۵ و ۶-۱۰)، فیزیک (بخش ۶-۸)، تعیین حالت دستگاه‌های معادلات خطی (بخش ۶-۹)، کاربردهای مربوط به کمترین مربعات (بخش ۶-۳) و فرم‌های درجه دوم (بخش ۶-۷) دارد.

۶-۱ ضرب‌های داخلی و نرم ها

بسیاری از مفاهیم هندسه، مثل زاویه، طول و تعامد در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ را می‌توان به فضاهای برداری کلی تر با پیچیدگی بیشتر نیز تعمیم داد. همه این ایده ها، با مفهوم ضرب داخلی مرتبط هستند.

تعریف:. فرض کنید V فضایی برداری بر F باشد. منظور از یک ضرب داخلی بر V، تابعی است که به هر زوج مرتب x و y از بردارهای V، اسکالری را در F، که با $\langle x, y\rangle$ نشان داده می‌شود، نظیر می‌سازد، به گونه‌ای که برای هر x، y و z در V و هر c در F، داشته باشیم:

الف) $\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$.

ب) $\langle cx, y\rangle = c\langle x, y\rangle$.

ج) $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$، که در اینجا ــــ نشان دهنده تزویج مختلط است.

د) اگر $x \neq ۰$، $\langle x, x\rangle > ۰$.

توجه کنید که شرط ج هنگامی که $F = \mathbb{R}$، مستلزم آن است که $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$. شرایط الف و ب صرفاً مستلزم آن هستند که ضرب داخلی، نسبت به مؤلفه اول خطی باشد.

به راحتی می‌توان نشان داد که اگر $a_۱, a_۲, \ldots, a_n \in F$ و $y, v_۱, v_۲, \ldots, v_n \in V$، آنگاه:

$$\left\langle \sum_{i=۱}^{n} a_i v_i, y \right\rangle = \sum_{i=۱}^{n} a_i \langle v_i, y\rangle$$

مثال ۱. برای هر $x = (a_۱, \ldots, a_n)$ و $y = (b_۱, \ldots, b_n)$ در F^n، قرار دهید:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=۱}^{n} a_i \bar{b}_i$$

بررسی کردن این مطلب که $\langle ۰, ۰\rangle$ در شرایط (الف) تا (د) صدق می‌کند ساده است. به عنوان مثال، هرگاه $z = (c_۱, \ldots, c_n)$ در مورد (الف) داریم:

$$\begin{aligned}\langle x + z, y\rangle &= \sum_{i=۱}^{n} (a_i + c_i)\bar{b}_i = \sum_{i=۱}^{n} a_i \bar{b}_i + \sum_{i=۱}^{n} c_i \bar{b}_i \\ &= \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle\end{aligned}$$

بنابراین به ازای $x = (۱ + i, ۴)$ و $y = (۲ - ۳i, ۴ + ۵i)$ در $\mathbb{C}^۲$ داریم:

$$\langle x, y\rangle = (۱ + i)(۲ + ۳i) + ۴(۴ - ۵i) = ۱۵ - ۱۵i$$

□

ضرب داخلی مثال ۱، ضرب داخلی استاندارد F^n نام دارد (در دوره‌های مقدماتی جبرخطی، این حاصلضرب داخلی را «حاصلضرب نقطه‌ای» می‌نامند).

مثال ۲. اگر $\langle x, y\rangle$ یک ضرب داخلی بر فضای برداری V باشد و $r > ۰$، می‌توانیم ضرب داخلی دیگری را با این ضابطه تعریف کنیم: $\langle x, y\rangle' = r\langle x, y\rangle$. اگر $r < ۰$، قسمت د برقرار نمی‌باشد. □

مثال ۳. فرض کنید $V = C([۰,۱])$، یعنی فضای متشکل از توابع پیوسته حقیقی بر $[۰,۱]$. برای هر $f, g \in V$، تعریف کنید $\langle f, g\rangle = \int_۰^۱ f(t)g(t)dt$. چون این انتگرال نسبت به f خطی است، قسمت‌های الف و ب بلافاصله نتیجه می‌شوند و (ج) نیز بدیهی است. هرگاه $f \neq ۰$، آنگاه $f^۲$ بر زیربازه‌ای از $[۰,۱]$ کران پایینی بزرگتر از صفر داد (پیوستگی در اینجا مورد استفاده قرار می‌گیرد). و در نتیجه $\langle f, f\rangle = \int_۰^۱ [f(t)]^۲ dt > ۰$. □

تعریف: فرض کنید $A \in M_{m\times n}(F)$. ترانهاده مزودج A را با ماتریس $A^*_{n\times m}$ تعریف می‌کنیم که برای هر i و j، $(A^*)_{ij} = \overline{A}_{ij}$.

مثال ۴. فرض کنید :

$$A = \begin{bmatrix} i & ۱+۲i \\ ۲ & ۳+۴i \end{bmatrix}$$

در این صورت:

$$A^* = \begin{bmatrix} -i & ۲ \\ ۱-۲i & ۳-۴i \end{bmatrix}$$

□

توجه کنید که اگر به x و y به دید بردار ستونی نگاه کنیم در آن صورت $< x, y >= y^*x$.

ترانهاده مزدوج یک ماتریس در ادامه این فصل نقش بسیار مهمی ایفا می‌کند. توجه کنید که اگر درایه‌های A حقیقی باشند، A^* چیزی جز ترانهاده A نخواهد بود.

مثال ۵. فرض کنید $V = M_{n\times n}(F)$ و برای هر $A, B \in V$ $< A, B >$ را برابر با $tr(B^*A)$ تعریف کنید (به یاد آورید که رد ماتریس A، به صورت تعریف می‌شود: $tr(A) = \sum_{i=۱}^n A_{ii}$) قسمت الف و د را خود بررسی می‌کنیم و قسمت‌های ب و ج را به خواننده واگذار می‌کنیم. برای این منظور، فرض کنید $A, B, C \in V$. در این صورت (با استفاده از تمرین ۶ از بخش ۱-۳) داریم:

$$\begin{aligned} < A+B, C > &= tr(C^*(A+B)) = tr(C^*A + C^*B) \\ &= tr(C^*A) + tr(C^*B) =< A, C > + < B, C > \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \langle A, A\rangle &= tr(A^*A) = \sum_{i=۱}^n (A^*A)_{ii} = \sum_{i=۱}^n \sum_{k=۱}^n (A^*)_{ik}(A)_{ki} \\ &= \sum_{i=۱}^n \sum_{k=۱}^n \overline{A}_{ki}A_{ki} = \sum_{i=۱}^n \sum_{k=۱}^n |A_{ki}|^۲ \end{aligned}$$

حال اگر $A \neq O$، آنگاه برای k و iای $A_{ki} \neq 0$، بنابراین $\langle A, A\rangle > 0$. $\square$

فضای برداری V روی F که با یک ضرب داخلی همراه شده باشد، فضای ضرب داخلی نام دارد. هرگاه $F = \mathbb{C}$، V را فضای ضرب داخلی مختلط می‌نامیم، در حالتی که $F = \mathbb{R}$، V را فضای ضرب داخلی حقیقی می‌نامیم.

بنابراین مثال‌های ۱ و ۳ و ۵ مثال‌های از فضاهای ضرب داخلی هستند. در ادامه این فصل، F^n نشان دهنده فضای دارای یک ضرب داخلی استاندارد، به گونه ای که در مثال ۱ ظاهر شد، می‌باشد. این نکته را در نظر بگیرید که دو ضرب داخلی متفاوت بر یک فضای برداری مفروض، منجر به دو فضای ضرب داخلی متفاوت می‌شوند.

یک فضای ضرب داخلی بسیار مهم که یادآور $C([0,1])$ است، فضای H، متشکل از توابع مختلط پیوسته بر بازه $[0, 2\pi]$ با ضرب داخلی زیر می‌باشد:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

دلیل آمدن ثابت $1/2\pi$ بعدا آشکار خواهد شد. این فضای ضرب داخلی، که در مسائل فیزیکی زیاد ظاهر می‌شود در بخش‌های بعدی با دقت بیشتری مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

حال چند نکته را در مورد انتگرال گیری از توابع مختلط یادآوری می‌کنیم. اولاً، زیر علامت انتگرال می‌توان با i به عنوان یک عدد ثابت برخورد کرد. ثانیاً، هر تابع مختلط f را می‌توان به شکل $f = f_1 + if_2$ نوشت که در آن f_1, f_2 توابع حقیقی هستند. بنابراین داریم:

$$\overline{\int f} = \int \overline{f} \qquad \text{و} \qquad \int f = \int f_1 + i\int f_2$$

با استفاده از این خواص، به همراه فرض پیوستگی، نتیجه می‌شود که H یک فضای ضرب داخلی است (به تمرین ۱۶(الف) مراجعه کنید).

چند خاصیت که به راحتی از تعریف فضای ضرب داخلی نتیجه می‌شوند، در قضیه زیر آمده اند.

قضیه ۶.۱. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد در این صورت برای هر $x, y, z \in V$ و $c \in F$:

الف) $< x, y+z >=< x, y > + < x, z >$.

ب) $< x, cy >= \overline{c} < x, y >$.

ج) $< x, x >= 0$، اگر و تنها اگر $x = 0$.

د) اگر برای هر $x \in V$، $< x, y >=, x, z >$ آنگاه $y = z$.

برهان. الف)

$$\begin{aligned}\langle x, y+z\rangle &= \overline{\langle y+z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle}\\ &= \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, x\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle\end{aligned}$$

اثبات قسمت‌های ب، ج و د به خوانند واگذار می‌شود. $\square$

خواننده باید ملاحظه کند که قسمت‌های الف و ب از قضیه ۱.۶ نشان می‌دهد که ضرب داخلی نسبت به مولفه دوم به طور مزدوج خطی است.

برای تعمیم مفهوم طول در $\mathbb{R}^3$ به فضای ضرب داخلی دلخواه، کافی است ملاحظه کنیم که طول $x=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$، عدد $\sqrt{<x,x>}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ می‌باشد. این مساله به تعریف زیر منجر می‌شود.

تعریف:. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد. برای هر $x\in V$ **نرم** یا**طول** x را به این صورت تعریف کنید: $||x||=\sqrt{<x,x>}$.

مثال ۶. فرض کنید $V=F^n$، در این صورت:

$$||(a_1,a_2,...,a_n)||=\left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right]^{1/2}$$

همان تعریف اقلیدسی طول است. توجه کنید که اگر $n=1$ داریم: $||a||=|a|$. $\square$

همان طور که ممکن است انتظار آن را داشته باشیم، خواص معروف طول در $\mathbb{R}^3$، همان گونه که در زیر نشان داده شده است، در حالت کلی نیز برقرار هستند.

قضیه ۲.۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی روی F باشد. در این صورت برای هر $x,y\in V$ و $c\in F$ موارد زیر برقرار است:

الف) $||cx||=|c|.||x||$.

ب) $||x||=0$ اگر و تنها اگر $x=0$. در هر صورت $||x||\geq 0$.

ج) (نامساوی کشی-شوارتز) $|<x,y.|\leq ||x||.||y||$.

د) (نامساوی مثلثی) $||x+y||\leq ||x||+||y||$.

برهان. اثبات الف و ب را به خواننده واگذار می‌کنیم.

ج) در صورتی که $y=0$ نتیجه بلافاصله حاصل است. پس فرض کنید $y\neq 0$. در این صورت برای هر $c\in F$ داریم:

$$0\leq ||x-cy||^2 \quad = \quad <x-cy,x-cy>=<x,x-cy>-c<y,x-cy>$$

$$= \quad < x,x > -\bar{c} < x,y > -c < y,x > +c\bar{c} < y,y >$$

با قرار دادن $c = \frac{<x,y>}{<y,y>}$، نامساوی فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$\leq < x,x > -\frac{| < x,y > |^۲}{< y,y >} = ||x||^۲ - \frac{| < x,y > |^۲}{||y||^۲}$$

که از آن (ج) نتیجه می‌شود.

د)

$$\begin{aligned} ||x+y||^۲ &= < x+y, x+y > = < x,x > + < x,y > + < y,x > + < y,y > \\ &= ||x||^۲ + ۲\,\mathrm{Re} < x,y > + ||y||^۲ \\ &\leq ||x||^۲ + ۲ < x,y > + ||y||^۲ \\ &\leq ||x||^۲ + ۲||x||.||y|| + ||y||^۲ \\ &= (||x|| + ||y||)^۲ \end{aligned}$$

که $\mathrm{Re} < x,y >$ نشان دهنده بخش حقیقی عدد مختلط $< x,y >$ است. توجه کنید که برای اثبات (ج) از (د) استفاده کردیم. □

مثال ۷. در مورد F^n قسمت‌های (ج) و (د) قضیه ۲.۶ را برای ضرب داخلی استاندارد به کار می‌بریم تا نامساوی‌های معروف زیر به دست آیند:

$$\left|\sum_{i=۱}^{n} a_i\overline{b_i}\right| \leq \left[\sum_{i=۱}^{n} |a_i|^۲\right]^{۱/۲} \left[\sum_{i=۱}^{n} |b_i|^۲\right]^{۱/۲}$$

و

$$\left[\sum_{i=۱}^{n} |a_i+b_i|^۲\right]^{۱/۲} \leq \left[\sum_{i=۱}^{n} |a_i|^۲\right]^{۱/۲} + \left[\sum_{i=۱}^{n} |b_i|^۲\right]^{۱/۲}$$

□

خواننده ممکن از دوره‌های جبر خطی قبلی خود به یاد بیاورد که برای $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$، داریم $< x,y > = ||x|| \cdot ||y|| \cos(\theta)$ که θ نشان دهنده زاویه ($۰ \leq \theta \leq \pi$) بین xو y است. این معادله قسمت (ج) را بلافاصله نتیجه می‌دهد، چرا

که $|\cos\theta| \leq 1$. همچنین ملاحظه کنید که x و y متعامد هستند اگر و تنها اگر $\cos\theta = 0$، یعنی اگر و تنها اگر $<x, y> = 0$.

حال در موقعیتی هستیم که می‌توانیم مفهوم متعامد بودن را به فضاهای ضرب داخلی دلخواه تعمیم دهیم.

چند تعریف: فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی دلخواه باشد. گویند که بردارهای x و y از V، متعامد هستند (یا بر هم عمود هستند) هرگاه $<x, y> = 0$. زیر مجموعه S از V متعامد است هرگاه هر دو عضو متمایز S متعامد باشند. بردار x از V را یک **بردار یکه** گویند هرگاه $||x|| = 1$. در نهایت، زیر مجموعه S را **متعامد یکه** گویند هرگاه S متعامد بوده و همه بردارهای آن یکه باشند.

توجه کنید که اگر $S = \{v_1, v_2, ...\}$، آنگاه S متعامد یکه است اگر و تنها اگر $<v_i, v_j> = \delta_{ij}$، که δ_{ij} نشان دهنده دلتای کرونکر است. همچنین ملاحظه کنید که تقسیم بردارها بر اسکالر ناصفر، بر تعامد آنها تاثیری ندارد و اگر x یک بردار ناصفر دلخواه باشد، $(1/||x||)x$ یک بردار یکه است.

مثال ۸. در F^3، مجموعه $\{(1, 1, 0), (1, -1, 1), (-1, 1, 2)\}$ متعامد است، اما متعامد یکه نیست. با این حال اگر هر بردار را بر طولش تقسیم کنیم، یک مجموعه متعامد یکه به دست می‌آید:

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)\}$$

□

مثال بعدی یک مجموعه نامتناهی متعامد یکه است که در آنالیز اهمیت دارد. این مجموعه در مثال‌های بعدی این فصل بکار خواهد رفت.

مثال ۹. فضای ضرب داخلی H را (که در صفحه ۳۳۰ تعریف شد) به یاد بیاورید. نمونه مهمی از یک زیرمجموعه متعامد یکه S از H را معرفی می‌کنیم که در آنالیز غالبا به کار میرود. در مطالب زیر، i عدد موهومی $\sqrt{-1}$ است. برای هر عدد صحیح j، فرض کنید $f_j(t) = e^{ijt}$، که $0 \leq t \leq 2\pi$ (به یاد بیاورید که $e^{ijt} = \cos jt + i\sin jt$). حال قرار دهید $S = \{f_j | \text{یک عدد صحیح است } j\}$. به وضوح S یک زیر مجموعه H می‌باشد. با استفاده از خاصیت $\overline{e^{it}} = e^{-it}$ که برای هر عدد حقیقی t برقرار است، برای هر k و j که $j \neq k$ داریم:

$$\begin{aligned} <f_j, f_k> &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ijt}\overline{e^{ikt}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi(j-k)} e^{i(j-k)t}|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

همچنین

$$< f_j, f_j >= \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} e^{i(j-j)t}dt = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} ۱dt = ۱$$

به عبارت دیگر، $< f_j, f_k >= \delta_{jk}$. □

تمرینات

۱. تعیین کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) هر ضرب داخلی، تابعی با مقادیر اسکالر است که بر مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب از بردارها تعریف شده است.

ب) یک فضای ضرب داخلی باید روی میدان اعداد حقیقی یا مختلط باشد.

ج) هر ضرب داخلی، تابعی خطی از هر دو مولفه است.

د) تنها یک ضرب داخلی بر فضای برداری $\mathbb{R}^n$ وجود دارد.

ه) نامساوی مثلثی فقط در فضاهای ضرب داخلی متناهی البُعد برقرار است.

و) فقط ماتریس‌های مربعی ترانهاده مزدوج دارند.

ز) اگر x, y, z بردارهایی از یک فضای ضرب داخلی باشند که $< x, y >=< x, z >$، آنگاه $y = z$.

ح) هرگاه برای هر x در یک فضای ضرب داخلی، $< x, y >= ۰$، آنگاه $y = ۰$.

۲. فرض کنید $V = \mathbb{C}^۳$ دارای ضرب داخلی استاندارد باشد. فرض کنید $x = (۲, ۱+i, i)$ و $y = (۲-i, ۲, ۱+۲i)$. $< x, y >$، $||x||, ||y||$ و $||x + y||$ را حساب کنید. سپس نامساوی کوشی-شوارتز و نیز نامساوی مثلثی را امتحان کنید.

۳. در $C([۰, ۱])$، فرض کنید $f(t) = t$ و $g(t) = e^t$. $< f, g >$ (به گونه‌ای که در مثال ۳ تعریف شد)، $||f||, ||g||, ||f + g||$ را حساب کنید. سپس نامساوی کوشی -شوارتز و نیز نامساوی مثلث را امتحان کنید.

۴. فرض کنید $V = M_{n\times n}(F)$ و $< A, B >= tr(B^*A)$. برهان مثال ۵ را برای این که $< ., . >$ یک ضرب داخلی بر V است تکمیل کنید. اگر $n = ۲$ و

$$A = \begin{bmatrix} ۱+i & ۰ \\ i & -i \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲+i \\ ۳ & i \end{bmatrix}$$

$< A, B >, ||A||, ||B||$ را حساب کنید.

۵. ثابت کنید که $< x, y >= xAy^*$ روی $\mathbb{C}^۲$ یک ضرب داخلی تعریف می‌کند که در اینجا:
$$A = \begin{bmatrix} ۱ & i \\ -i & ۲ \end{bmatrix}$$
$< x, y >$ را به ازای $x = (۱ - i, ۲ + ۳i)$ و $y = (۲ + i, ۳ - ۲i)$ حساب کنید.

۶. برهان قضیه ۱.۶ را تکمیل کنید

۷. برهان قضیه ۲.۶ را تکمیل کنید.

۸. دلیل ضرب داخلی نبودن هر یک از موارد زیر را بر فضای برداری ذکر شده، بیان کنید.

الف) $< (a, b), (c, d) >= ac - bd$ بر $\mathbb{R}^۲$.

ب) $< A, B >= tr(A + B)$ بر $M_{۲\times۲}(\mathbb{R})$.

ج) $< f, g >= \int_۰^۱ f'(t)g(t)dt$ بر $P(\mathbb{R})$ که $'$ نشان دهنده مشتقگیری است.

۹. فرض کنید β پایه‌ای برای یک فضای ضرب داخلی متناهی البُعد باشد. ثابت کنید که اگر برای هر $x \in \beta$، $< x, y >= ۰$ آنگاه $y = ۰$.

۱۰. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی بوده، x و y اعضای متعامدی از V باشند. ثابت کنید که $||x + y||^۲ = ||x||^۲ + ||y||^۲$. قضیه فیثاغورث را در فضای $\mathbb{R}^۲$ نتیجه بگیرید.

۱۱. قانون متوازی الاضلاع را در فضای ضرب داخلی V نتیجه بگیرید. یعنی ثابت کنید که برای هر $x, y \in V$:
$$||x + y||^۲ + ||x - y||^۲ = ۲||x||^۲ + ۲||y||^۲$$

این تساوی درباره متوازی الاضلاع‌های $\mathbb{R}^۲$ چه می‌گوید؟

۱۲. فرض کنید $\{v_۱, ..., v_k\}$ مجموعه‌ای متعامد در V و $a_۱, ..., a_k$ اسکالر باشند. ثابت کنید که:
$$||\sum_{i=۱}^{k} a_i v_i||^۲ = \sum_{i=۱}^{k} |a_i|^۲ ||v_i||^۲$$

۱۳. فرض کنید $< ., . >_۱$ و $< ., . >_۲$ دو ضرب داخلی بر فضای برداری V باشند. ثابت کنید که $< ., . >=< ., . >_۱ + < ., . >_۲$ ضرب داخلی دیگری بر V است.

۱۴. فرض کنید Aو B دو ماتریس $n \times n$ و c یک اسکالر باشد. ثابت کنید که
$$(A + cB)^* = A^* + \bar{c}B^*$$

۱۵. الف) ثابت کنید که اگر V یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه $|<x,y>| = ||x||.||y||$ اگر و تنها اگر یکی از بردارهای x, y مضربی از دیگری باشد.
راهنمایی: هرگاه $y \neq ۰$، فرض کنید:
$$aa = \frac{<x,y>}{||y||^۲}$$
در اینصورت $x = ay + z$، که در آن $<y,z>= ۰$. با فرض:
$$|a| = \frac{||x||}{||y||}$$
تمرین ۱۰ را در مورد $||x||^۲ = ||ay+z||^۲$ به کار ببرید و نتیجه بگیرید که $||z|| = ۰$.

ب) نتیجه‌ای مشابه برای معادله $||x+y|| = ||x|| + ||y||$ به دست آورده، آن را به حالت مربوط به n بردار تعمیم دهید.

۱۶. الف) نشان دهید که فضای برداری H که در این بخش تعریف شد، یک فضای ضرب داخلی است.

ب) فرض کنید $V = C([۰,۱])$ و تعریف کنید:
$$<f,g>= \int_۰^{۱/۲} f(t)g(t)dt$$
آیا این یک ضرب داخلی روی V است؟

۱۷. فرض کنید عملگر خطی T بر فضای ضرب داخلی V تعریف شده باشد و برای هر x، $||T(x)|| = ||x||$. ثابت کنید که T یک به یک است.

۱۸. فرض کنید V فضایی برداری روی F باشد، که $F = \mathbb{R}$ یا $F = \mathbb{C}$، و فرض کنید که W یک فضای ضرب داخلی روی F، با ضرب داخلی $<.,.>$ باشد. هرگاه $T : V \to W$ خطی باشد، ثابت کنید که $<x,y>' = <T(x), T(y)>$ تعریف کننده یک ضرب داخلی روی V است، اگر و تنها اگر T یک به یک باشد.

۱۹. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد، ثابت کنید:

الف) برای هر $x, y \in V$، $||x \pm y||^۲ = ||x||^۲ ۲ \pm \mathrm{Re} <x,y> + ||y||^۲$ که $\mathrm{Re} <x,y>$ نشان دهنده قسمت حقیقی عدد مختلط $<x,y>$ می‌باشد.

ب) برای هر $x, y \in V$، $|\,||x|| - ||y||\,| \leq ||x-y||$.

۲۰.

۲۱. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ باشد، تعریف کنید:

$$A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*) \qquad A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$$

الف) ثابت کنید که $A_1^* = A_1$ و $A_2^* = A_2$ و $A = A_1 + iA_2$. آیا عاقلانه به نظر نمی‌رسد که A_1 و A_2 را به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی ماتریس A بنامیم؟

ب) فرض کنید که A یک ماتریس $n \times n$ باشد. ثابت کنید که اگر $A = B_1 + iB_2$ که $B_1^* = B_1$ و $B_2^* = B_2$، آنگاه $B_1 = A_1$ و $B_2 = A_2$.

۲۲. فرض کنید که V فضایی برداری روی F باشد، که در آن $F = \mathbb{R}$ یا $F = \mathbb{C}$. چه V یک فضای ضرب داخلی باشد و چه نباشد می‌توانیم یک نرم $||.||$ را به عنوان یک تابع حقیقی بر V تعریف کنیم که در سه شرط زیر به ازای هر $x, y \in V$ و $a \in F$ صدق کند:

اولا- $||x|| \geq 0$ و $||x|| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

ثانیا- $||ax|| = |a|.||x||$.

ثالثا- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

ثابت کنید که هر یک از موارد زیر، نرمی بر فضای برداری V داده شده است:

الف) $V = M_{n\times n}(F)$: برای هر $A \in V$، $||A|| = \max_{i,j} |A_{ij}|$.

ب) $V = C([0, 1])$: برای هر $f \in V$، $||f|| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

ج) $V = C([0, 1])$: برای هر $f \in V$، $||f|| = \int_0^1 |f(t)|dt$.

د) $V = \mathbb{R}^2$: برای هر $(a, b) \in V$، $||(a, b)|| = max\{|a|, |b|\}$.

از تمرین ۲۰، برای نشان دادن این مطلب استفاده کنید که اگر نرم تعریف شده بر $\mathbb{R}^2$، نرم قسمت د باشد، آنگاه هیچ ضرب داخلی بر $\mathbb{R}^2$ موجود نیست که برای هر $x \in \mathbb{R}^2$، $||x||^2 =< x, x >$.

۲۳. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد و برای هر زوج مرتب از بردارها اسکالر $d(x, y)$ را برابر با $||x - y||$ تعریف کنید. $d(x, y)$ را فاصله x و y می‌نامند. موارد زیر را برای هر $x, y, z \in V$ ثابت کنید.

الف) $d(x, y) \geq 0$.

ب) $d(x, y) = d(y, x)$.

ج) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

د) $d(x, x) = 0$

ه) اگر $x \neq y$ آنگاه $d(x,y) \neq 0$.

۲۴. فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی یا مختلط (احتمالاً با بعد نامتناهی) و β پایه‌ای برای V باشد. برای هر $x, y \in V$ بردارهای $v_1, ..., v_n \in \beta$ موجود هستند به گونه‌ای که

$$y = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i, \qquad x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

تعریف کنید:

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i$$

الف) ثابت کنید که $< . , . >$ یک ضرب داخلی بر V و β پایه متعامد یکه برای V است. بنابراین هر فضای برداری حقیقی یا مختلط را می‌توان یک ضرب داخلی در نظر گرفت.

ب) ثابت کنید اگر $V = \mathbb{R}^n$ یا $V = \mathbb{C}^n$ و β پایه مرتب استاندارد باشد، آنگاه ضرب داخلی تعریف شده فوق، همان ضرب داخلی استاندارد است.

۲۵. فرض کنید $||.||$ یک نرم بر فضای برداری حقیقی V (به گونه‌ای که در تمرین ۲۲ تعریف شد) باشد که در قانون متوازی الاضلاع که در تمرین ۱۱ آمد، صدق کند. تعریف کنید:

$$< x, y >= \frac{1}{4}[||x+y||^2 - ||x-y||^2]$$

ثابت کنید که $< . , . >$، تعریف کننده ضربی داخلی بر V است به گونه‌ای که برای هر $x \in V$، $||x||^2 =< x, x >$.

۲۶. فرض کنید که $||.||$، نرمی بر فضای برداری مختلط V (به گونه‌ای که در تمرین ۲۲ تعریف شد) باشد که در این رابطه صدق کند:

$$\sum_{k=1}^{4} ||x + i^k y||^2 = 4[||x||^2 + ||y||^2]$$

که $i = \sqrt{-1}$. قرار دهید:

$$< x, y >= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k ||x + i^k y||^2$$

ثابت کنید $< . , . >$ تعریف کننده چنان ضرب داخلی‌ای بر V است که برای هر $x \in V$، $< x, x >= ||x||^2$.

۲۷. عکس تمرین ۲۶ را ثابت کنید: فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت، نرم مربوط به آن در معادله اول تمرین ۲۶ صدق می‌کند (توجه کنید که تمرین ۱۱ نیز به همین ترتیب عکسی برای تمرین ۲۵ می‌باشد).

۶-۲ فرآیند متعامد سازی و مکمل‌های متعامد

در فصول قبلی، نقش ویژه پایه‌های مرتب استاندارد $\mathbb{C}^n$ و $\mathbb{R}^n$ را مشاهده کردیم. ویژگی‌های خاص این پایه‌ها ریشه در این واقعیت دادند که بردارهای پایه تشکیل یک مجموعه متعامد یکه می‌دهند. همانطور که پایه ها، عنصر ساختمانی فضاهای برداری هستند، پایه‌هایی که مجموعه متعامد یکه نیز می‌باشند، عنصر ساختمانی فضاهای ضرب داخلی هستند.

تعریف:. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد. یک زیر مجموعه V را یک**پایه متعامد یکه** برای V می‌گوییم، هرگاه پایه مرتب باشد که متعامد یکه است.

مثال ۱. پایه مرتب استاندارد F^n، یک پایه مرتب یکه برای F^n است. □

مثال ۲. مجموعه $\{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})\}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathbb{R}^2$ است. □

قضیه بعدی و نتایج آن توضیح می‌دهند که چرا مجموعه‌های متعامد یکه و به خصوص پایه‌های متعامد تا این اندازه اهمیت دارند.

قضیه ۳.۶. فرض کنید که V یک فضای ضرب داخلی بوده و $S = \{v_1, ... v_k\}$ یک مجموعه متعامد از بردارهای ناصفر باشد. هرگاه :

$$y = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$$

آنگاه برای هر j، $a_j =< y, v_j > /||v_j||^2$.

برهان. برای هر $1 \leq j \leq k$، داریم:

$$\begin{aligned} \langle y, v_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \langle v_j, v_j \rangle = \\ &= a_j ||v_j||^2 \end{aligned}$$

□

نتیجه ۱. اگر علاوه بر فرض‌های قضیه ۳.۶، S متعامد یکه نیز باشد، آنگاه $y = \sum_{i=1}^{k} < y, v_i > v_i$.

هرگاه V دارای یک پایه متعامد یکه متناهی باشد، قضیه ۱ به ما این امکان را می‌دهد که ضرایب یک ترکیب خطی را به راحتی تعیین کنیم.

نتیجه ۲. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی و S یک مجموعه متعامد از بردارهای ناصفر باشد. در این صورت S مستقل خطی است.

برهان. فرض کنید $v_۱, ..., v_k \in S$ و

$$\sum_{i=۱}^{k} a_i v_i = ۰$$

طبق قضیه ۳.۶، برای هر j، $a_j = < ۰, v_j > / ||v_j||^۲ = ۰$. بنابراین S مستقل خطی است. □

مثال ۳. طبق نتیجه ۲، مجموعه متعامد یکه

$$\left\{ \frac{۱}{\sqrt{۲}}(۱, ۱, ۰), \frac{۱}{\sqrt{۳}}(۱, -۱, ۱), \frac{۱}{\sqrt{۶}}(-۱, ۱, ۲) \right\}$$

که در مثال ۸ از بخش ۶-۱ به دست آمد، پایه متعامد یکه برای $\mathbb{R}^۳$ است. فرض کنید $x = (۲, ۱, ۳)$. ضرایبی که از نتیجه ۱ قضیه ۳.۶ به دست می‌آیند و x را به صورت ترکیبی خطی از بردارهای پایه بیان می‌کنند، عبارت هستند از:

$$a_۱ = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(۲ + ۱) = \frac{۳}{\sqrt{۲}}, \qquad a_۲ = \frac{۱}{\sqrt{۳}}(۲ - ۱ + ۳ = \frac{۴}{\sqrt{۳}},$$

و

$$a_۳ = \frac{۱}{\sqrt{۶}}(-۲ + ۱ + ۶) = \frac{۵}{\sqrt{۶}}$$

اگر بخواهیم نتایج را امتحان کنیم، باز مشاهده خواهیم کرد که:

$$(۲, ۱, ۳) = \frac{۳}{۲}(۱, ۱, ۰) + \frac{۴}{۳}(۱, -۱, ۱) + \frac{۵}{۶}(-۱, ۱, ۲)$$

□

از نتیجه ۲ متوجه می‌شویم که فضای برداری H که در بخش ۶-۱ ذکر شد، شامل یک مجموعه مستقل خطی نامتناهی است و بنابراین یک فضای برداری متناهی البُعد نیست.

البته هنوز ثابت نکردیم که هر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد، یک پایه متعامد یکه دارد. قضیه بعدی، ما را به دستیابی به این نتیجه بسیار نزدیک می‌کند. این نتیجه نشان می‌دهد که چگونه از یک مجموعه مستقل خطی از بردارها، مجموعه‌ای متعامد یکه بسازیم به گونه‌ای که هر دو مجموعه، یک فضا را تولید کنند.

پیش از بیان این قضیه، اجازه دهید که یک حالت ساده از آن را در نظر بگیریم. فرض کنید $\{w_۱, w_۲\}$ یک زیر مجموعه مستقل خطی از یک فضای ضرب داخلی باشد و بنابراین پایه‌ای برای یک زیرفضای دو بعدی است. می‌خواهیم

یک مجموعه متعامد یکه از روی $\{w_۱, w_۲\}$ بسازیم که همان فضا را تولید کند. تصویر ۶-۱ القا کننده این مطلب به ذهن است که مجموعه $\{v_۱, v_۲\}$ که $v_۱ = w_۱$ و $v_۲ = w_۲ - cw_۱$، در صورتی که c مناسب اختیار شود، خواص مورد نظر را خواهد داشت. برای یافتن c، کافی است معادله زیر را حل کنیم.

$$۰ =< v_۲, w_۱ >=< w_۲ - cw_۱, w_۱ >=< w_۲, w_۱ > -c < w_۱, w_۱ > .$$

بنابراین

$$c = \frac{< w_۲, w_۱ >}{||w_۱||^۲}.$$

پس

$$v_۲ = w_۲ - \frac{< w_۲, w_۱ >}{||w_۱||^۲} w_۱.$$

این روند را می‌توان به هر زیر مجموعه مستقل خطی متناهی تعمیم داد.

قضیه ۴.۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی و $S = \{w_۱, ..., w_n\}$ یک زیر مجموعه مستقل خطی V باشد. S' را برابر با $\{v_۱, ..., v_n\}$ تعریف کنید که $v_۱ = w_۱$ و

$$v_k = w_k - \sum_{j=۱}^{k-۱} \frac{<w_k, v_j>}{||v_j||^۲} v_j \qquad ۲ \leq k \leq n \text{ برای هر } \qquad (۶\text{-}۱)$$

در این صورت S' مجموعه‌ای متعامد از بردارهای ناصفر است به گونه‌ای که $span(S') = span(S)$.

برهان. اثبات با استقرا روی n صورت می‌گیرد. فرض کنید $S_n = \{w_۱, ..., w_n\}$. اگر $n = ۱$، قضیه با اختیار کردن $S' = S$ ثابت می‌شود. یعنی با گرفتن $v_۱ = w_۱ \neq ۰$. فرض کنید که مجموعه $S'_{k-۱} = \{v_۱, ..., v_{k-۱}\}$ با خواص مطلوب، با به کار گیری مکرر ۶-۱ ساخته شده باشد. ثابت می‌کنیم که $S'_k = \{v_۱, ..., v_{k-۱}, v_k\}$ نیز خواص مطلوب را دارد، که v_k با استفاده از ۶-۱ از روی $S'_{k-۱}$ به دست می‌آید. هر گاه $v_k = ۰$، ۶-۱ نتیجه می‌دهد که $w_k \in span(S'_{k-۱}) = span(S_{k-۱})$ که فرض مستقل خطی بودن S_k را نقض می‌کند. برای هر $۱ \leq i \leq k - ۱$، از ۶-۱ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} < v_k, v_i > &= < w_k, v_i > - \sum_{j=۱}^{k-۱} \frac{< w_k, v_j >}{||v_j||^۲} < v_j, v_i > \\ &= < w_k, v_i > - \frac{< w_k, v_i >}{||v_i||^۲} ||v_i||^۲ = ۰ \end{aligned}$$

چرا که طبق فرض استقرا $S'_{k-۱}$ متعامد است و بنابراین در صورتی که $i \neq j$، $< v_i, v_j >= ۰$. در نتیجه S'_k یک مجموعه متعامد متشکل از بردارهای ناصفر است. حال طبق ۶-۱ $span(S'_k) \subseteq span(S'_{k-۱})$. اما طبق نتیجه ۲ قضیه ۶.۳ S'_k

مستقل خطی است بنابراین $dim(span(S'_k)) = dim(span(S_k)) = k$ در نتیجه $span(S'_k) = span(S_k)$.
□

ساخت $\{v_1, ..., v_n\}$ از طریق معادله ۶-۱ فرآیند متعامد سازی گرام-اشمیت نام داد.

مثال ۴. در $\mathbb{R}^3$ فرض کنید $w_1 = (1,1,0), w_2 = (2,0,1), w_3 = (2,2,1)$. در این صورت $\{w_1, w_2, w_3\}$ مستقل خطی است. با استفاده از ۶-۱، بردارهای متعامد v_1, v_2, v_3 را محاسبه می‌کنیم. v_1 را برابر با $w_1 = (1,1,0)$ اختیار کنید. در این صورت $||v_1||^2 = 2$، لذا:

$$\begin{aligned} v_2 &= w_2 - \frac{< w_2, v_1 >}{||v_1||^2} v_1 \\ &= (2,0,1) - \frac{2}{2}(1,1,0) \\ &= (1,-1,1) \end{aligned}$$

نهایتاً

$$\begin{aligned} v_3 &= w_3 - \frac{< w_3, v_1 >}{||v_1||^2} v_1 - \frac{< w_3, v_2 >}{||v_2||^2} v_2 \\ &= (2,2,1) - \frac{4}{2}(1,1,0) - \frac{1}{3}(1,-1,1) \\ &= (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \end{aligned}$$

□

قضیه ۵.۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی البعد ناصفر باشد. در این صورت، V یک پایه متعامد یکه مانند β دارد. به علاوه اگر $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ و $x \in V$، آنگاه:

$$x = \sum_{i=1}^{n} < x, v_i > v_i$$

برهان. فرض کنید β_0 پایه مرتبی برای V باشد. با استفاده از قضیه ۴.۶، مجموعه متعامدی از بردارهای ناصفر مانند β' بیابید به طوریکه $span(\beta_0) = span(\beta') = V$. با تقسیم هر بردار β' بر طولش، به مجموعه متعامد یکه β دست

می‌یابیم که V را تولید می‌کند. طبق نتیجه ۲ از قضیه ۳.۶، β مستقل خطی است و بنابراین β یک پایه متعامد یکه برای V است. ادامه قضیه از نتیجه ۱ از بخش ۶-۳ نتیجه می‌شود. $\square$

حال روش جدیدی برای محاسبه نمایش ماتریسی یک عملگر خطی در اختیار داریم.

نتیجه ۳. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی البُعد با پایه متعامد یکه $\beta = \{v_۱, ..., v_n\}$ باشد. فرض کنید T یک عملگر خطی بر فضای V باشد و $A = [T]_\beta$. در این صورت به ازای هر j ، i داریم: $A_{ij} =< T(v_i), v_j >$.

برهان. با توجه به قضیه ۵.۶ داریم:

$$T(v_j) = \sum_{i=۱}^{n} < T(v_j), v_i > v_i$$

در نتیجه $A_{ij} =< T(v_i), v_j >$. $\square$

اسکالرهای $< x, v_i >$ مربوط به x، در برخی از فضاهای ضرب داخلی خاص بسیار مورد مطالعه قرار گرفته اند. با این که بردارهای $v_۱, ..., v_n$ در قضیه فوق، از یک پایه متعامد یکه انتخاب می‌شوند، برای تعریف اسکالرهای $< x, v_i >$، مجموعه‌های βی کلی تری را در نظر می‌گیریم.

تعریف:. فرض کنید β یک زیر مجموعه متعامد یکه (شاید نامتناهی) از فضای ضرب داخلی V باشد و $x \in V$. ضرایب فوریه x نسبت به β را برابر مجموعه اسکالرهای $< x, y >$ تعریف می‌کنیم که $y \in \beta$.

در قرن نوزدهم ژان باپتیست فوریه [۱] ریاضیدان فرانسوی، به مطالعه ضرایب زیر برای تابع f پرداخت:

$$\int_۰^{۲\pi} f(t) \cos ntdt, \qquad \int_۰^{۲\pi} f(t) \sin ntdt$$

یا به بیان کلی تر:

$$c_n = \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} f(t) e^{-int} dt$$

با نمادگذاری‌های مثال ۹ از بخش ۶-۱ مشاهد می‌کنیم که $c_n =< f, e^{-inx} >$. یعنی c_n، n امین ضریب فوریه تابع پیوسته $f \in V$، نسبت به S می‌باشد. این ضرایب، ضرایب فوریه کلاسیک یک تابع هستند و نوشته‌هایی که رفتار این ضرایب را بررسی می‌کنند، بسیار هستند. در ادامه این فصل، مطالب بیشتری در مورد ضرایب فوریه می‌آموزیم.

[۱] Jean Baptista Fourier

مثال ۵. در H، $f(t)$ را برابر t تعریف کنید. ضرایب فوریه f نسبت به مجموعه متعامد یکه S از تمرین ۹ بخش ۶-۱ را محاسبه می‌کنیم. با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء برای $n \neq ۰$ داریم:

$$\langle f, f_n\rangle = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} te^{\overline{\text{int}}}dt = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} te^{-\text{ int}}dt = \frac{-۱}{in}$$

و برای $n = ۰$ داریم:

$$\langle f, ۱\rangle = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} t(۱)dt = \pi$$

به عنوان نتیجه‌ای از این محاسبات، در زیر به کمک تمرین ۱۴، برای یک سری نامتناهی خاص یک کران بالا به دست می‌آوریم. برای هر k،

$$\begin{aligned} ||f||^۲ &\geq \sum_{n=-k}^{-۱} |\langle f, f_n\rangle|^۲ + |\langle f, ۱\rangle|^۲ + \sum_{n=۱}^{k} |\langle f, f_n\rangle|^۲ \\ &= \sum_{n=-k}^{-۱} \frac{۱}{n^۲} + \pi^۲ + \sum_{n=۱}^{k} \frac{۱}{n^۲} \\ &= ۲\sum_{n=۱}^{k} \frac{۱}{n^۲} + \pi^۲ \end{aligned}$$

حال با استفاده از این واقعیت که $||f||^۲ = \frac{۴}{۳}\pi^۲$، می‌بینیم که:

$$\frac{۴}{۳}\pi^۲ \geq ۲\sum_{n=۱}^{k} \frac{۱}{n^۲} + \pi^۲$$

و یا:

$$\frac{\pi^۲}{۶} \geq \sum_{n=۱}^{k} \frac{۱}{n^۲}$$

چون این نامساوی به ازای هر k برقرار است، می‌توانیم k را به بی نهایت میل دهیم تا نامساوی زیر به دست آید:

$$\frac{\pi^۲}{۶} \geq \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$$

نتایج دیگری را می‌توان با جایگذاری f به دست آورد. □

حال آماده ایم تا بحث را با مفهوم مکمل متعامد ادامه دهیم.

تعریف:. فرض کنید S، زیر مجموعه فضای ضرب داخلی V باشد $S^{\perp}$ (بخوانید S عمود) را برابر مجموعه تمام بردارهایی در V تعریف کنید که بر تمام بردارهای S عمودند، یعنی

$$S^{\perp} = \{x \in V :< x, y >= \circ, \text{برای هر } y \in S\}$$

. $S^{\perp}$ را**مکمل متعامد** S می‌خوانند.

به راحتی می‌توان دید که برای هر زیر مجموعه از V، $S^{\perp}$ یک زیر فضای V است.

مثال ۶. خواننده باید تحقیق کند که برای هر فضای ضرب داخلی V، $\{\circ\}^{\perp} = V$ و $V^{\perp} = \{\circ\}$. □

مثال ۷. هرگاه $V = \mathbb{R}^{۳}$ و $S = \{x\}$، آنگاه $S^{\perp}$ چیزی جز مجموعه همه بردارهای عمود بر x نیست (به تمرین ۵ رجوع کنید). □

تمرین ۱۶ نمونه جالبی از یک مکمل متعامد در یک فضای ضرب داخلی با بعد نامتناهی را در اختیارمان قرار می‌دهد.

حکم ۶.۶. فرض کنید W زیر فضایی متناهی البُعد از فضای ضرب داخلی V باشد و $y \in V$. در این صورت بردارهای یکتای $u \in W$ و $z \in W^{\perp}$ یافت می‌شوند به گونه‌ای که $y = u + z$. به علاوه، اگر $\{v_{۱}, ..., v_k\}$ یک پایه متعامد یکه برای W باشد، آنگاه:

$$u = \sum_{i=۱}^{k} < y, v_i > v_i$$

برهان. فرض کنید $\{v_{۱}, ..., v_k\}$ یک پایه متعامد یکه برای W و u به صورت بالا تعریف شده باشد، و نیز فرض کنید $z = y - u$. واضح است که $u \in W$.

برای اثبات این که $z \in W^{\perp}$، کافی است نشان دهیم که z بر هر یک از v_jها عمود است. برای هر j، داریم:

برای اثبات یکتایی، فرض کنید که $y = u + z = u' + z'$ که $u' \in W$ و $z' \in W^{\perp}$. در این صورت، $u - u' = z' - z \in W \cap W^{\perp} = \{\circ\}$. بنابراین $u = u'$ و $z = z'$. □

نتیجه ۴. با نمادهای حکم ۶.۶، بردار u یکتا برداری از W است که از همه به y نزدیکتر است، یعنی برای هر $x \in W$، $||y - x|| \geq ||y - u||$ و این نامساوی وقتی به تساوی تبدیل می‌شود اگر وتنها اگر $x = u$.

برهان. مانند حکم ۶.۶ داریم: $y = z + u$، که $z \in W^{\perp}$. فرض کنید $x \in W$. طبق تمرین ۱۰ از بخش ۶-۱ داریم:

$$||y - x||^{۲} \quad = \quad ||u + z - x||^{۲} = ||(u - x) + z||^{۲} = ||u - x||^{۲} + ||z||^{۲}$$

$$\geq \quad ||z||^{۲} = ||y-u||^{۲}$$

حال فرض کنید $||y-x|| = ||y-u||$. در این صورت نامساوی بالا تبدیل به تساوی می‌شود و در نتیجه $||z||^{۲} = ||z||^{۲} + ||u-x||^{۲}$. در نتیجه $||u-x|| = ۰$ و بنابراین $x = u$. □

بردار u در نتیجه بالا، تصویر متعامد y بر W نام دارد. اهمیت تصویر متعامد بردارها را در کاربردی که در بخش ۶-۳ در مورد کمترین مربعات خواهیم آورد، مشاهده خواهیم کرد.

مثال ۸. فرض کنید $V = P_{۲}(\mathbb{R})$ با ضرب داخلی زیر همراه باشد:

$$< f, g >= \int_{۰}^{۱} f(x)g(x)dx$$

فرض کنید که $W = P_{۱}(\mathbb{R}) = span(۱, x)$ و $f(x) = x^{۲}$. برای محاسبه تصویر متعامد f بر W، $f_{۱}$، ابتدا فرآیند گرام اشمیت را در مورد $\{۱, x\}$ به کار می‌بریم تا پایه متعامد یکه $\{g_{۱}, g_{۲}\}$ برای W به دست آید:

$$g_{۱}(x) = ۱, \qquad g_{۲}(x) = ۲\sqrt{۳}(x - \frac{۱}{۲})$$

به راحتی می‌توان با محاسبه در یافت که $< f, g_{۱} >= \frac{۱}{۳}$ و $< f, g_{۲} >= \frac{\sqrt{۳}}{۶}$. بنابراین:

$$f_{۱}(x) = \frac{۱}{۳}۱ + \frac{sqrt۳}{۶}(۲\sqrt{۳}(x - \frac{۱}{۲})) = -\frac{۱}{۶} + x$$

قبلاً (در نتیجه ۲ی قضیه ۱۰.۱) ثابت شد که هر مجموعه مستقل خطی در یک فضای برداری متناهی البُعد را می‌توان به یک پایه تعمیم داد. قضیه بعدی، نتیجه و مشابه و جالبی در مورد یک زیر مجموعه متعامد یکه از یک فضای ضرب داخلی در اختیارمان قرار می‌دهد. □

قضیه ۷.۶. فرض کنید که $S = \{v_{۱}, ..., v_{k}\}$ یک مجموعه متعامد یکه در فضای ضرب داخلی n بعدی V باشد. در اینصورت:

الف) S را می‌توان به یک پایه متعامد یکه چون $\{v_{۱}, ..., v_{k}, v_{k+۱}, ..., v_{n}\}$ برای V تعمیم داد.

ب) هرگاه $W = span(S)$، آنگاه با نماد گذاری فوق، $S_{۱} = \{v_{k+۱}, ..., v_{n}\}$ یک پایه متعامد یکه برای $W^{\perp}$ است.

ج) هرگاه W یک زیر فضای دلخواه V باشد، آنگاه $\dim(V) = dim(W) + \dim(W^{\perp})$

برهان. (الف) طبق نتیجه ۲ی قضیه ۱۰.۱۱، S را می‌توان به پایه $\{v_{۱}, ..., v_{k}, v_{k+۱}, ..., v_{n}\}$ برای V تعمیم داد. حال فرآیند گرام اشمیت را برای این پایه بکار ببرید. طبق تمرین ۷، k بردار اولی که از این فرآیند حاصل می‌شوند، بردار Sاند. با تقسیم $n-k$ تای اخر این بردارها بر طولشان، یک مجموعه متعامد یکه به دست می‌آید. حال نتیجه حاصل می‌شود.

(ب) چون S_1 متعامد یکه است، طبق نتیجه ۲ی قضیه ۳.۶، مستقل خطی است. چون S_1 به وضوح زیر مجموعه ای از $W^\perp$ است، کافی است ثابت کنیم که $W^\perp$ را پدید می‌آورد. توجه کنید که برای هر $x \in V$، داریم:

$$x = \sum_{i=1}^{n} < x, v_i > v_i$$

حال اگر $x \in W^\perp$، آنگاه برای هر $1 \leq i \leq k$، $< x, v_i >= 0$. بنابراین:

$$x = \sum_{i=k+1}^{n} < x, v_i > v_i \in span(S_1)$$

(ج) فرض کنید W زیر فضایی از V با پایه متعامد یکه $\{v_1, ..., v_k\}$ باشد. طبق (الف) و (ب)، داریم:

$$\dim(V) = n = k + (n-k) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$$

□

مثال ۹. فرض کنید در F^3، $W = span(\{e_1, e_2\})$. در این صورت، $x = (a, b, c) \in W^\perp$ اگر و تنها اگر $a =< x, e_1 >= 0$ و $b =< x, e_2 >= 0$. بنابراین $x = (0, 0, c)$، و بنابراین $W^\perp = span(\{e_3\})$. همچنین می‌توان با التفات به این که $e_3 \in W^\perp$ و این که طبق قسمت (ج) از قضیه فوق، $\dim(W^\perp) = 3 - 2 = 1$، نتیجه بالا را به دست آورد. □

تمرینات

۱. تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) فرآیند گرام اشمیت به ما این امکان را می‌دهد که از مجموعه‌های دلخواه از بردارها، مجموعه‌های متعامد یکه بسازیم.

ب) هر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد، یک پایه متعامد یکه دارد.

ج) مکمل متعامد هر زیر مجموعه، یک زیرفضا است.

د) هرگاه $\{v_1, ..., v_n\}$ پایه‌ای برای فضای ضرب داخلی V باشد، آنگاه برای هر $x \in V$، اسکالرهای $< x, v_i >$ ضرایب فوریه x می‌باشند.

ه) هر پایه متعامد یکه، باید یک پایه مرتب باشد.

و) هر مجموعه متعامد مستقل خطی است.

ز) هر مجموعه متعامد یکه،مستقل خطی است.

۲. در هر یک از قسمت‌های زیر، فرآیند گرام-اشمیت را در مورد زیر مجموعه S از فضای ضرب داخلی V به کار گیرید. سپس یک پایه متعامد یکه چون β برای V بیابید و ضرایب فوریه بردار داده شده را نسبت به β به دست آورید. نهایتاً، از قضیه ۶.۵ برای کنترل کردن نتایج خود استفاده کنید.

الف) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,3,3)\}, x = (1,1,2)$.

ب) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}, x = (1,0,2)$.

ج) $V = P_2(\mathbb{R})$، با ضرب داخلی $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

$S = \{1, x, x^2\}, f(x) = 1 + x$.

د) $V = span(S)$، که $S = \{(1,i,0),(1-i,2,4i)\}$ و $x = (3+i, 4i, -4)$.

۳. در $\mathbb{R}^3$ فرض کنید که

$$\beta = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

ضرایب فوریه $(3,4)$ را نسبت به β بیابید.

۴. فرض کنید که در $\mathbb{C}^3$، $S = \{(1,0,2),(1,2,1)\}$. $S^\perp$ را حساب کنید.

۵. فرض کنید $S = \{x_0\}$، که x_0 یک بردار ناصفر در $\mathbb{R}^3$ است. $S^\perp$ را تعبیر هندسی کنید. اگر $S_0 = \{x_1, x_2\}$ مستقل خطی باشد، $S_0^\perp$ را تعبیر هندسی کنید.

۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی، و W یک زیرفضای متناهی البُعد V باشد. هرگاه $x \notin W$، ثابت کنید که یک $y \in V$ موجود است که $y \in W^\perp$ اما $< x, y > \neq 0$. راهنمایی: از حکم ۶.۶ استفاده کنید.

۷. ثابت کنید که اگر $\{w_1, ..., w_n\}$، مجموعه‌ای متعامد از بردارهای ناصفر باشد، در این صورت بردارهای $v_1, ..., v_n$ که از فرآیند گرام اشمیت به دست می‌آیند در رابطه $v_i = w_i$ برای هر $i = 1, ..., n$ صدق می‌کنند. راهنمایی: از استقرا استفاده کنید.

۸. فرض کنید در $\mathbb{C}^3$ با ضرب داخلی استاندارد، $W = span(\{(i,0,1)\})$. پایه متعامد یکه برای W و $W^\perp$ بیابید.

۹. فرض کنید W زیرفضایی متناهی البُعد از فضای ضرب داخلی V باشد. ثابت کنید که یک تصویر مانند T روی W در راستای $W^\perp$ وجود دارد که $N(T) = W^\perp$. به علاوه ثابت کنید که برای هر $x \in V$، $||T(x)|| \leq ||x||$. راهنمایی: از حکم ۶.۶ و تمرین ۱۰ از بخش ۶-۱ استفاده کنید (برای تعریف تصویرها به بخش ۲-۱ رجوع کنید).

۱۰. فرض کنید A، ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های مختلط باشد ثابت کنید $AA^* = I$ اگر وتنها اگر سطرهای A، پایه‌ای متعامد یکه برای $\mathbb{C}^n$ تشکیل دهند.

۱۱. فرض کنید که $W_۱$ و $W_۲$ زیرفضاهایی از یک فضای ضرب داخلی متناهی البُعد باشند. ثابت کنید که $(W_۱ + W_۲)^\perp = W_۱^\perp \cap W_۲^\perp$ و $(W_۱ \cap W_۲)^\perp = W_۱^\perp + W_۲^\perp$.

۱۲. فرض کنید که V یک فضای ضرب داخلی، و S و $S_۰$ زیرمجموعه‌هایی از V و W یک زیر فضای متناهی البُعد V باشد. موارد زیر را ثابت کنید:

الف) $S_۰ \subseteq S$ نتیجه می‌دهد که $S^\perp \subseteq S_۰^\perp$.

ب) $S \subseteq (S^\perp)^\perp$ بنابراین $span(S) \subseteq (S^\perp)^\perp$.

ج) $W = (W^\perp)^\perp$.راهنمایی: از تمرین ۶ استفاده کنید.

د) $V = W \bigoplus W^\perp$. (به تمرینات بخش ۱-۳ رجوع کنید).

۱۳. الف) **اتحاد پارزوال:** فرض کنید $\{v_۱, ..., v_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای V باشد. برای هر $x, y \in V$ ثابت کنید

$$< x, y >= \sum_{i=۱}^{n} < x, v_i > \overline{< y, v_i >}$$

ب) با استفاده از الف ثابت کنید که اگر β یک پایه متعامد یکه برای فضای ضرب داخلی V روی F، با ضرب داخلی $< .,. >$ باشد، آنگاه برای هر $x, y \in V$

$$< \phi_\beta(x), \phi_\beta(y) >' = < [x]_\beta, [y]_\beta >' = < x, y >$$

که $< .,. >'$ ضرب داخلی استاندارد F^n است.

۱۴. الف) **نامساوی بسل:** فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی بوده و $S = \{v_۱, ..., v_n\}$ یک زیر مجموعه متعامد یکه V باشد. ثابت کنید برای هر $x \in V$ داریم:

$$||x||^۲ \geq \sum_{i=۱}^{n} | < x, v_i > |^۲$$

راهنمایی: حکم ۶.۶ را در مورد $x \in V$ و $W = span(S)$ به کار گیرید و سپس از تمرین ۱۰ بخش ۶-۱ استفاده کنید.

ب) در قسمت الف، ثابت کنید که نامساوی بسل تساوی است اگر و تنها اگر $x \in span(S)$.

۱۵. فرض کنید T عملگر خطی بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد V باشد. هرگاه برای هر $x, y \in V$، $< T(x), y >= 0$، ثابت کنید $T = T_0$. در واقع ثابت کنید که اگر این تساوی برای هر x و y در یک پایه V برقرار باشد، همین نتیجه برقرار است.

۱۶. فرض کنید $V = C([-1, 1])$. فرض کنید که W_e و W_o به ترتیب نشان دهنده زیرفضاهای V متشکل از توابع زوج و فرد باشد (به تمرین ۲۲ از بخش ۱-۳ رجوع کنید). ثابت کنید که $W_e^{\perp} = W_o$، که ضرب داخلی روی V در اینجا چنین تعریف می‌شود:

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

۱۷. در هر یک از موارد زیر، تصویر متعامد بردار داده شده را بر زیر فضای Wی داده شده از فضای ضرب داخلی V را بیابید:

الف) $V = \mathbb{R}^2$، $u = (2, 6)$ و $W = \{(x, y) : y = 4x\}$.

ب) $V = \mathbb{R}^3$، $u = (2, 1, 3)$ و $W = \{(x, y, z) : x + 3y - 2z = 0\}$.

ج) $V = P(\mathbb{R})$ با ضرب داخلی $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$، $h(t) = 4 + 3x - 2x^2$، $W = P_1(\mathbb{R})$.

۱۸. در تمرین ۱۷، فاصله بردار داده شده را از زیر فضای W بیابید.

۱۹. فرض کنید $V = C[-1, 1]$ دارای ضرب داخلی $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ باشد. فرض کنید W زیر فضای $P_2(\mathbb{R})$ با پایه مرتب استاندارد β باشد.

الف) ثابت کنید که از اعمال فرآیند گرام-اشمیت بر β، چند جمله‌ای‌های لاگرانژ ۱، t و $t^3 - \frac{1}{3}$ به دست می‌آیند.

ب) قسمت الف را برای تولید یک پایه متعامد یکه λ برای W بکار برید.

ج) فرض کنید که $h(t) = e^t$. با استفاده از (ب) «بهترین» (نزدیکترین) تقریب به صورت چند جمله‌ای درجه دوم را برای h روی بازه $[-1, 1]$ بیابید.

۲۰. فرض کنید V فضایی برداری باشد که در مثال ۵ بخش ۱-۲ تعریف شده، یعنی فضای همه دنباله‌های σ در F ($F = \mathbb{R}$ یا $F = \mathbb{C}$)، که فقط به ازای تعداد متناهی عدد صحیح مثبت n، $\sigma(n) \neq 0$. برای هر $\sigma, \mu \in V$، $< \sigma, \mu >$ را برابر $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)\overline{\mu(n)}$ تعریف می‌کنیم. چون جملات این سری به جز تعدادی متناهی، صفر است، سری همگرا است.

الف) ثابت کنید $< . , . >$، ضربی داخلی بر V است و بنابراین V یک فضای ضرب داخلی است.

ب) برای هر عدد صحیح n، فرض کنید e_n دنباله‌ای باشد که به صورت $e_n(k) = \delta_{n,k}$ تعریف می‌شود که $\delta_{n,k}$ دلتای کرونکر است. ثابت کنید $\{e_1, e_2, ...\}$، یک پایه متعامد یکه برای V است.

۶-۳ الحاقی یک عملگر خطی

در بخش ۶-۱ A^*، ترانهاده مزدوج ماتریس A را تعریف کردیم. حال برای یک تبدیل خطی T بر فضای ضرب داخلی V، عملگری مرتبط به آن روی V، به نام الحاقی T تعریف می‌کنیم که نمایش ماتریس آن نسبت به هر پایه متعامد یکه β، $[T]^*_\beta$ می‌باشد. تناظر بین مزدوج اعداد مختلط و الحاقی عملگرهای خطی آشکار خواهد شد. ابتدا به یک نتیجه اولیه نیاز داریم.

فرض کنید که V یک فضای ضرب داخلی باشد و $y \in V$. تابع $g : V \to F$ که با ضابطه $g(x) =< x, y >$ تعریف می‌شود به وضوح خطی است. جالبتر این نکته است که اگر V متناهی البُعد باشد، هر تبدیل خطی از V به F به همین شکل است.

قضیه ۶.۸. فرض کنید که V یک فضای ضرب داخلی متناهی البُعد بر F و $g : V \to F$ یک تبدیل خطی باشد. در این صورت بردار یکتای $y \in V$ چنان موجود است که برای هر $x \in V$، $g(x) =< x, y >$.

برهان. فرض کنید $\beta = \{v_۱, ..., v_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای V باشد و

$$y = \sum_{i=۱}^{n} \overline{g(v_i)} v_i$$

فرض کنید $h : V \to F$ به صورت $h(x) =< x, y >$ تعریف شده باشد، که به وضوح خطی است. به علاوه، برای هر $۱ \leq j \leq n$ داریم:

$$\begin{aligned} h(v_j) &= < v_j, y >=< v_j, \sum_{i=۱}^{n} \overline{g(v_i)} v_i >= \sum_{i=۱}^{n} g(v_i) < v_j, v_i > \\ &= \sum_{i=۱}^{n} g(v_i) \delta_{ji} = g(v_j) \end{aligned}$$

چون g و h بر روی β مساوی هستند، طبق نتیجه قضیه ۲-۶ $h = g$.

برای اثبات یکتایی y، فرض کنید برای هر x، $g(x) =< x, y' >$ در این صورت برای هر x، $< x, y >=< x, y' >$، بنابراین طبق قضیه ۶.۱ (د) داریم: $y = y'$. □

مثال ۱. $g : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ راچنین تعریف کنید: $g(a_۱, a_۲) = ۲a_۱ + a_۲$. به وضوح g یک تبدیل خطی است. فرض کنید که $\beta = \{e_۱, e_۲\}$ و مانند برهان قضیه ۶.۸ $y = g(e_۱)e_۱ + g(e_۲)e_۲ = ۲e_۱ + e_۲ = (۲, ۱)$. در این صورت $g(a_۱, a_۲) =< (a_۱, a_۲), (۲, ۱) >= ۲a_۱ + a_۲$. □

قضیه ۹.۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی البعد بوده، T عملگری خطی بر V باشد. در این صورت تابع یکتایی مانند $T^* : V \to V$ موجود است به گونه‌ای که برای هر $x, y \in V$، $< T(x), y >=< x, T^*(y) >$، به علاوه T^* خطی است.

برهان. فرض کنید $y \in V$. تابع $g : V \to F$ را چنین تعریف کنید: برای هر $x \in V$، $g(x) =< T(x), y >$. ابتدا نشان می‌دهیم که g خطی است. فرض کنید $x_1, x_2 \in V$ و $c \in F$ در این صورت:

$$\begin{aligned} g(cx_1 + x_2) &= < T(cx_1 + x_2), y >=< cT(x_1) + T(x_2), y > \\ &= c < T(x_1), y > + < T(x_2), y >= cg(x_1) + g(x_2). \end{aligned}$$

در نتیجه g خطی است.

حال قضیه ۸.۶ را بکار می‌بریم تا بردار یکتای $y' \in V$ به قسم به دست آید که $g(x) =< x, y' >$. یعنی برای هر $x \in V$، $< T(x), y >=< x, y' >$. $T^* : V \to V$ را به صورت $T^*(y) = y'$ تعریف می‌کنیم به این ترتیب داریم:$< T(x), y >=< x, T^*(y) >$. برای اثبات این که T^* خطی است، فرض کنید $y_1, y_1 \in V$ و $c \in F$. در این صورت برای هر $x \in V$ داریم:

$$\begin{aligned} < x, T^*(cy_1 + y_2) > &=< T(x), cy_1 + y_2 > \\ &= \bar{c} < T(x), y_1 > + < T(x), y_2 > \\ &= \bar{c} < x, T^*(y_1) > + < x, T^*(y_2) > \\ &=< x, cT^*(y_1) + T^*(y_2) > \end{aligned}$$

چون x دلخواه است، طبق قضیه ۱.۶ (د) داریم: $T^*(cy_1 + y_2) = cT^*(y_1) + T^*(y_2)$ نهایتا باید نشان دهیم که T^* یکتا است. فرض کنید $U : V \to V$ خطی بوده و برای هر $x, y \in V$، در رابطه $< T(x), y >=< x, U(y) >$ صدق کند. در این صورت برای هر $x, y \in V$ $< x, T^*(y) >=< x, U(y) >$ و بنابراین $T^* = U$. □

عملگر خطی T^* را که در قضیه ۶-۹ توصیف شد، تبدیل T می‌نامند. نماد T^*، T ستاره خوانده می‌شود.

پس T^* یگانه عملگر خطی بر V است که برای هر $x, y \in V$ در رابطه $< T(x), y >=< x, T^*(y) >$ صدق می‌کند. توجه کنید که علاوه بر این، برای هر $x, y \in V$ داریم:

$$< x, T(y) >= \overline{< T(y), x >} = \overline{< y, T^*(x) >} =< T^*(x), y >$$

بنابراین برای هر $x, y \in V$ $< x, T(y) > = < T^*(x), y >$ از لحاظ نمادی، می‌توان برای توضیح این معادله گفت که T را می‌توان با اضافه کردن یک $*$ به آن، درون نماد ضرب داخلی جابه جا کرد. در حالت بعد نامتناهی، الحاقی تبدیل خطی T را می‌توان T^*ای تعریف کرد که برای هر $x, y \in V$، $< T(x), y > = < x, T^*(y) >$. با این که یکتایی و خطی بودن T^* مانند قبل نتیجه می‌شود، وجود یک الحاقی تضمینی ندارد (به تمرین ۲۲ رجوع کنید). خوانند باید فرض متناهی البُعد بودن را در برهان قضبه ۶-۸ درک کند. با این حال، بسیاری از قضایایی که در مورد الحاقی‌ها ثابت می‌کنیم بستگی به متناهی العد بودن V ندارد. بنابراین در ادامه این فصل، این قرار داد را در تمرینها می‌پذیریم که هنگام صحبت از الحاقی یک عملگر خطی بر یک فضای ضرب داخلی با بعد نامتناهی وجود این الحاقی مفروض گرفته شده است، مگر این که خلاف آن تصریح شود. نتیجه‌ای مفید برای محاسبه الحاقی، در قضیه ۱۰.۶ در زیر آمده است.

قضیه ۱۰.۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی البُعد و β پایه متعامد یکه برای V باشد. هرگاه T یک عملگر خطی بر V باشد، آنگاه :

$$[T^*]_\beta = [T]^*_\beta$$

برهان. فرض کنید $A = [T]_\beta$، $B = [T^*]_\beta$ و $\beta = \{v_1, ... v_n\}$. در این صورت از نتیجه قضیه ۵.۶ داریم:

$$B_{ij} = < T^*(v_j), v_i > = \overline{< v_i, T^*(v_j)} \qquad = \overline{< T(v_i), v_j} = \overline{A}_{ji} = (A^*)_{ij}$$

در نتیجه $B = A^*$. □

نتیجه ۱. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. در این صورت، $L_{A^*} = (L_A)^*$.

برهان. هرگاه β پایه مرتب استاندارد F^n باشد طبق قضیه ۱۶.۲ داریم: $[L_A]_\beta = A$، در نتیجه $[(L_A)^*]_\beta = [L_A]^*_\beta = A^* = [L_{A^*}]_\beta$ و بنابراین $L_{A^*} = (L_A)^*$. □

مثال ۲. فرض کنید T عملگری خطی بر $\mathbb{C}^۲$ باشد که چنین تعریف می‌شود: $T(a_۱, a_۲) = (۲ia_۱ + ۳a_۲, a_۱ - a_۲)$ هرگاه β پایه استاندارد $\mathbb{C}^۲$ باشد، آنگاه:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} ۲i & ۳ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$[T^*]_\beta = [T]^*_\beta = \begin{bmatrix} -۲i & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$T^*(a_۱, a_۲) = (-۲ia_۱ + a_۲, ۳a_۱ - a_۲)$$

□

قضیه زیر، تناظر میان مزدوج اعداد مختلط و مزدوج عملگرهای خطی را نشان می‌دهد.

قضیه ۱۱.۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی، T و U عملگرهایی خطی بر V باشند. در این صورت:

الف) $(T+U)^* = T^* + U^*$.

ب) برای هر $c \in F$ $(cT)^* = \overline{c}T^*$.

ج) $(TU)^* = U^*T^*$.

د) $T^{**} = T$.

هـ) $I^* = I$.

برهان. قسمت‌های الف و د را ثابت می‌کنیم. بقیه موارد به صورتی مشابه ثابت می‌شوند. فرض کنید $x, y \in V$:

الف) از آنجا که:

$$\begin{aligned} < x, (T+U)^*(y) > &= < (T+U)(x), y >=< T(x)+U(y), y > \\ &= < T(x), y > + < U(x), y) = (x, T^*(y) > + < x, U^*(y) > \\ &= < x, T^*(y) + U^*(y) >=< x, (T^* + U^*)(y) > \end{aligned}$$

به این ترتیب (الف) اثبات می‌شود.

د) به صورت مشابه چون:

$$< x, T(y) >=< T^*(x), y >=< x, T^{**}(y) >$$

قسمت د نتیجه می‌شود. □

همین برهان در حالت بعد نامتناهی، با فرض وجود T^*، U^* نیز صادق است.

نتیجه ۲. فرض کنید A و B ماتریس‌هایی $n \times n$ باشند. در این صورت:

الف) $(A+B)^* = A^* + B^*$.

ب) برای هر $c \in F$، $(cA)^* = \overline{c}A^*$.

ج) $(AB)^* = B^*A^*$.

د) $A^{*}* = A$.

هـ) $I^* = I$.

برهان. فقط (ج) را ثابت می‌کنیم، قسمت‌های باقی مانده را می‌توان به صورت مشابه اثبات کرد.
چون $L_{B^*A^*} = L_{B^*}L_{A^*} = (L_B)^*(L_A)^* = (L_A L_B)^* = (L_{AB})^* = L_{(AB)^*}$ داریم: $(AB)^* = B^*A^*$. $\square$

در برهان بالا به نتیجه قضیه ۱۰.۶ وابسته بودیم. برهان جایگزین را که حتی برای ماتریس‌های غیر مربعی نیز برقرار است می‌توان با بکارگیری مستقیم تعریف ترانهاده مزدوج ماتریس‌های A و B به دست آورد (به تمرین ۵ رجوع شود).

تقریب به روش کمترین مربعات

مساله زیر را در نظر بگیرید آزمایشگری با اندازه گیری مقادیر $y_1, ..., y_m$ به ترتیب در زمان‌های $t_1, t_2, ..., t_m$ اطلاعات جمع آوری می‌کند. به عنوان مثال، ممکن است در حال اندازه‌گیری بیکاری در یک دوره زمانی خاص باشد. فرض کنید اطلاعات $(t_1, y_1), ..., (t_m, y_m)$، به صورت نقاطی در صفحه رسم شوند (به تصویر ۶-۲ رجوع کنید) با توجه به نحوه توزیع آرایش این نقاط، آزمایشگر احساس می‌کند که رابطه ای اساساً خطی میان y و t وجود دارد مثلا، $y = ct + d$ و مایل است که ثابت‌های c و d را چنان بیابد که خط $y + ct + d$، بهترین «برازش» ممکن برای اطلاعات جمع آوری شده را نشان دهد. نحوه سنجش میزان این برازش محاسبه خطای E است که برابر است با مجموع مربعات فاصله‌های عمودی نقاط خط مذکور، یعنی:

$$E = \sum_{i=1}^{m}(y_i - ct_i - d)^2$$

پس مساله عبارت است از یافتن آن دسته از مقادیر c و d که مقدار E را حداقل کند (به همین دلیل، $y = ct + d$ را «خط کمترین مربعات » می‌نامند)، اگر فرض کنیم:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_m & 1 \end{bmatrix}$$

نتیجه خواهد شد که $E = ||y - Ax||^2$.

حال روشی کلی برای یافتن بردار $x_0 \in F^n$، که E را حداقل می‌کند، پیدا می‌کنیم. یعنی با داشتن ماتریس $m \times n$ A، $x_0 \in F$ را چنان می‌یابیم که برای هر بردار $x \in F^n$، $||y - Ax_0|| \le ||y - Ax||$. این روش نه تنها ما را قادر می‌سازد که تابع خطی ای را که بهتر از همه با این اطلاعات تناسب دارد پیدا کنیم، بلکه کمک می‌کند آن چند جمله‌ای از هر درجه ثابتی را که بهتر از همه به آنها می‌خورد را نیز بیابیم.

ابتدا به چند نماد و دو لم ساده نیاز داریم. برای هر $x, y \in F^n$ فرض کنید $< x, y >_n$ نشان دهنده ضرب داخلی x و y در F^n باشد. توجه کنید که اگر x و y را بردارهای ستونی فرض کنیم، آنگاه $< x, y >_n = y^*x$.

لم ۷. فرض کنید $A \in M_{m\times n}(F)$، $x \in F^n$ و $y \in F^m$. در این صورت:

$$< Ax, y >_m = < x, A^*y >_n$$

برهان. طبق تمرین ۵ قسمت ب داریم:

$$< Ax, y >_m = y^*(Ax) = (y^*A)x = (A^*y)^*x = < x, A^*y >_n$$

□

لم ۸. فرض کنید $A \in M_{m\times n}(F)$. در این صورت $rank(A^*A) = rank(A)$.

برهان. طبق قضیه بُعد، کافی است ثابت کنیم که برای هر $x \in F^n$، داریم: $A^*Ax = ۰$ اگر وتنها اگر $Ax = ۰$. واضح است که $Ax = ۰$ نتیجه می‌دهد که $A^*Ax = ۰$. پس فرض کنید که $A^*Ax = ۰$ در این صورت:
$۰ = < A^*Ax, x >_n = < Ax, A^{**}x >_m = < Ax, Ax >_m$. بنابراین $Ax = ۰$. □

نتیجه ۳. هرگاه A چنان ماتریس $m \times n$ای باشد که $rank(A) = n$. آنگاه A^*A وارون پذیر است.

حال دستگاه $Ax = y$ را در نظر بگیرید، که A ماتریسی $m \times n$ است و $y \in F^m$. W را برابر با $\{Ax : x \in F^n\}$ تعریف کنید. یعنی فرض کنید $W = R(L_A)$. طبق نتیجه حکم ۶-۶، بردار یکتایی در W مانند $Ax_۰$ وجود دارد که $x_۰ \in F^n$ و از همه به y نزدیکتر است. بنابراین برای هر $x \in F^n$، $||Ax_۰ - y|| \leq ||Ax - y||$.

برای دست یافتن به روشی عملی برای یافتن چنین $x_۰$ای، به یاد می‌آوریم که طبق طبق حکم ۶.۶ و نتیجه اش $Ax_۰ - y \in W^\perp$. پس برای هر $x \in F^n$، $< Ax, (Ax_۰ - y) >_m = ۰$. سپس طبق لم ۱، برای هر $x \in F^n$، $< x, A^*(Ax_۰ - y) >_n = ۰$ یعنی $A^*(Ax_۰ - y) = ۰$. پس کافی است جوابی برای $A^*Ax_۰ = A^*y$ بیابیم. اگر علاوه بر این فرض کنیم که $rank(A) = n$ در این صورت طبق لم ۲ داریم: $x_۰ = (A^*A)^{-۱}A^*y$. بحث را در قضیه زیر خلاصه می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۶. فرض کنید $A \in M_{m\times n}(F)$ و $y \in F^m$. در این صورت $x_۰ \in F^n$ای وجود دارد که $(A^*A)x_۰ = A^*y$ و برای هر $x \in F^n$، $||Ax_۰ - y|| \leq ||Ax - y||$. به علاوه اگر $rank(A) = n$ آنگاه $x_۰ = (A^*A)^{-۱}A^*y$.

حال بر می‌گردیم به مساله آزمایشگر و فرض می‌کنیم که اطلاعات جمع آوری شده، $(۱,۲), (۲,۳), (۳,۵), (۴,۷)$ باشند. در این صورت:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۵ \\ ۷ \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$A^*A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۰ & ۱۰ \\ ۱۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$(A^*A)^{-۱} = \frac{۱}{۲۰} \begin{bmatrix} ۴ & -۱۰ \\ -۱۰ & ۳۰ \end{bmatrix}$$

درنتیجه:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = x_۰ = \frac{۱}{۲۰} \begin{bmatrix} ۴ & -۱۰ \\ -۱۰ & ۳۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۵ \\ ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۷ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

پس خط $y = ۱/۷t$، خط کمترین مربعات است. خطای E را می‌توان مستقیما محاسبه کرد. $||Ax_۰ - y||^۲ = ۰/۳$.

روش بالا را می‌توان در صورتی که آزمایشگر بخواهد سهمی $y = ct^۲ + dt + e$ را بر داده‌ها برازش دهد نیز به کار برد. در این مورد، ماتریس مناسب، ماتریس زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} t_۱^۲ & t_۱ & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_m^۲ & t_m & ۱ \end{bmatrix}$$

نهایتاً، در حالت خطی فرض کنید که آزمایشگر، زمان‌های t_i $(۱ \leq i \leq m)$ را طوری اختیار کرده باشد که در رابطه زیر صدق کنند:

$$\sum_{i=۱}^{m} t_i = ۰$$

در این صورت ستون‌های A متعامد خواهند بود و بنابراین A^*A، ماتریسی قطری خواهد بود (به تمرین ۱۷ رجوع کنید)، در این حالت محاسبات بسیار ساده خواهند شد.

جوابهای مینیمال

در طول بحث قبل ثابت کردیم که اگر $rank(A) = n$، آنگاه بردار یکتای $x_۰ \in F^n$ موجود خواهد بود، به گونه‌ای که $Ax_۰$ فاصله اش از y در بین نقاط W از همه کمتر باشد. البته اگر $rank(A) < n$، تعدادی نامتناهی از این بردارها

وجود خواهد داشت. معمولا مطلوب است که یک چنین برداری بیابیم که کوچکترین اندازه ممکن را داشته باشد. در مطلبی که در زیر خواهد آمد، مانند بالا فرض خواهیم کرد که، $b = Ax_{\circ}$. در این صورت $Ax = b$ حداقل یک جواب دارد. جواب s را یک جواب مینیمال می‌نامند، هرگاه برای هر جواب uی دیگری برای $Ax = b$، $||s|| \leq ||u||$.

قضیه ۶.۱۳. فرض کنید $A \in M_{m\times n}(F)$ و $b \in F^m$. فرض کنید $Ax = b$ حداقل یک جواب داشته باشد. در این صورت موارد زیر برقرار هستند:

الف) دقیقاً یک جواب مینیمال s برای $Ax = b$ وجود دارد و $s \in R(L_{A^*})$.

ب) بردار s، تنها جوابی از $Ax = b$ است که در $R(L_{A^*})$ قرار دارد. یعنی اگر u در $(AA^*)u = b$ صدق کند، آنگاه $s = A^*u$.

برهان. الف) برای ساده شدن نماد ها، فرض کنید $W = R(L_{A^*})$ و $W' = N(L_A)$. فرض کنید x جوابی برای $Ax = b$ باشد. طبق حکم ۶-۶، به ازای $s \in W$ و $y \in W^\perp$ای، $x = s + y$. اما طبق تمرین ۱۲، $W^\perp = W'$ و بنابراین $b = Ax = As + Ay = As$. پس s جوابی برای $Ax = b$ است که در W قرار دارد. برای اثبات (الف) کافی است نشان دهیم که s تنها جوابی مینیمال است. فرض کنید v یک جواب دلخواه $Ax = b$ باشد. طبق قضیه ۹.۳، $v = s + u$ که $u \in W'$. چون $s \in W$ و W طبق تمرین ۱۲ برابر با $W^\perp$ است، از تمرین ۱۰ بخش ۶-۱ نتیجه می‌شود که:

$$||v||^۲ = ||s + u||^۲ = ||s||^۲ + ||u||^۲ \geq ||s||^۲$$

بنابراین s یک جواب مینیمال است. همچنین از محاسبه بالا مشاهده می‌کنیم که اگر $||s|| = ||v||$، آنگاه $u = \circ$ و $v = s$. پس s تنها جواب مینیمال $Ax = b$ است و به این ترتیب (الف) ثابت می‌شود.

ب) فرض کنید v نیز جوابی برای $Ax = b$ باشد که در W قرار دارد. در این صورت:

$$v - s \in W \cap W' = W \cap W^\perp = \{\circ\}$$

پس $v = s$.

نهایتاً، فرض کنید که $(AA^*)u = b$ و قرار دهید $v = A^*u$. در این صورت $v \in W$ و $Av = b$. پس طبق بحث بالا، $s = v = A^*u$. □

مثال ۳. دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x + ۲y + z &= ۴ \\ x - y + ۲z &= -۱۱ \\ x + ۵y \quad &= ۱۹ \end{aligned}$$

فرض کنید:

$$b = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۱۱ \\ ۱۹ \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

برای یافتن جوابی مینیمال برای این دستگاه، باید جوابی برای $AA^*x = b$ بیابیم. حال داریم:

$$AA^* = \begin{bmatrix} ۶ & ۱ & ۱۱ \\ ۱ & ۶ & -۴ \\ ۱۱ & -۴ & ۲۶ \end{bmatrix}$$

پس دستگاه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} ۶x + y + ۱۱z &= ۴ \\ x + ۶y - ۴z &= -۱۱ \\ ۱۱x - ۴y + ۲۶z &= ۱۹ \end{aligned}$$

که یک جواب آن عبارت است از:

$$u = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

(هر جوابی در اینجا نیازمان را برآورده می‌کند). در نتیجه:

$$s = A^*u = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۴ \\ -۳ \end{bmatrix}$$

جوابی مینیمال برای دستگاه است. $\square$

تمرینات

۱. تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدامیک نادرست است. فرض کنید که فضاهای ضرب داخلی مورد بحث متناهی البُعد هستند.

الف) هر عملگر خطی یک الحاقی دارد.

ب) هر عملگر خطی بر V، به ازای یک $y \in V$ به صورت $x \to < x, y >$ است.

ج) برای هر عملگر خطی T بر V و هر پایه مرتب β برای V داریم: $[T^*]_\beta = ([T]_\beta)^*$.

د) الحاقی یک عملگر خطی همیشه یکتا ست.

هـ) برای دو عملگر خطی T و U و هر دو اسکالر a و b:

$$(aT + bU)^* = aT^* + bU^*$$

و) برای هر ماتریس A $n \times n$ داریم: $(L_A)^* = L_{A^*}$.

ز) برای هر عملگر خطی T درایم $(T^*)^* = T$.

۲. برای هر یک از فضاهای ضرب داخلی V (روی F) و تبدیل‌های خطی $g : V \to F$ که در زیر آمده اند، بردار y را چنان بیابید که برای هر $v \in V$، $g(x) =< x, y >$.

الف) $V = \mathbb{R}^۳$ و $g(a_۱, a_۲, a_۳) = (a_۱, a_۲, a_۳)$.

ب) $V = \mathbb{C}^۲$ و $g(z_۱, z_۲) = z_۱ - ۲z_۲$.

ج) $V = P_۲(\mathbb{R})$ با ضرب داخلی $< f, h >= \int_۰^۱ f(t)h(t)dt$ و $g(f) = f(۰) + f'(۱)$.

۳. برای هر یک از فضاهای ضرب داخلی V و عملگر خطی T بر V که در زیر آمده است، مقدار T^* را در عضو ارائه شده از V حساب کنید:

الف) $V = \mathbb{R}^۲$، $T(a, b) = (۲a + b, a - ۳b)$، $x = (۳, ۵)$.

ب) $V = \mathbb{C}^۲$ و $T(z_۱, z_۲) = (۲z_۱ + iz_۲, (۱ - i)z_۱)$، $x = (۳ - i, ۱ + ۲i)$.

ج) $V = P_۱(\mathbb{R})$، با ضرب داخلی $< f, g >= \int_{-۱}^۱ f(t)g(t)dt$، $T(f) = f' + ۳f$ و $f(t) = ۴ - ۲t$.

۴. برهان قضیه ۱۱.۶ را کامل کنید.

۵. الف) برهان نتیجه قضیه ۱۱.۶ را مانند قسمت ج با استفاده از قضیه ۱۱.۶ کامل کنید.

ب) نتیجه‌ای برای ماتریس‌های غیر مربعی بیان کنید که متناظر با نتیجه قضیه ۱۱.۶ باشد و با استفاده از یک استدلال ماتریسی، آن را اثبات کنید.

۶. فرض کنید T عملگر خطی بر فضای ضرب داخلی V باشد و فرض کنید $U_۱ = T + T^*$ و $U_۲ = TT^*$. ثابت کنید $U_۱ = U_۱^*$ و $U_۲ = TU_۲^*$.

۷. مثالی از یک عملگر خطی T بر فضای ضرب داخلی V ارائه کنید که $N(T) \neq N(T^*)$.

۸. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی البعد باشد، و T یک عملگر خطی بر V. ثابت کنید اگر T وارون پذیر باشد، آنگاه T^* نیز وارون پذیر است و $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

۹. ثابت کنید اگر $V = W \oplus W^\perp$ و T تصویر بر W در راستای $W^\perp$ باشد آنگاه $T = T^*$. راهنمایی: یادآوری می‌کنیم که $N(T) = W \perp$. (برای پی بردن به تعاریف مربوطه، به تمرینات بخش ۱-۳ و ۲-۱ رجوع کنید).

۱۰. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای ضرب داخلی V باشد. ثابت کنید برای هر $x \in V$، $||T(x)|| = ||x||$، اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in V$، $< T(x), T(y) >=< x, y >$. راهنمایی: از تمرین ۲۰ بخش ۶-۱ استفاده کنید.

۱۱. برای هر عملگر خطی T بر فضای ضرب داخلی V ثابت کنید که $T^*T = T_\circ$ نتیجه می‌هد که $T = T_\circ$. آیا همین نتیجه در صورتی که فرض کنیم $TT^* = T_\circ$ برقرار است؟

۱۲. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی البعد و T یک عملگر خطی بر V باشد. ثابت کنید که $R(T^*) = N(T)^\perp$. راهنمایی: ثابت کنید $R(T^*)^\perp = N(T)$ و از تمرین ۱۲ قسمت ج بخش ۶-۲ استفاده کنید.

۱۳. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد. موارد زیر را ثابت کنید:

الف) $N(T^*T) = N(T)$. نتیجه بگیرید که $rank(T^*T) = rank(T)$.

ب) $rank(T^*) = rank(T)$ و از (الف) نتیجه بگیرید که $rank(TT^*) = rank(T)$.

ج) برای هر ماتریس $n \times n$ A داریم: $rank(A^*A) = rank(AA^*) = rank(A)$.

۱۴. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد و $y, z \in V$. $T : V \to V$ را به صورت $T(x) =< x, y > z$ برای هر $x \in V$ تعریف کنید. ابتدا ثابت کنید T خطی است. سپس ثابت کنید که T^* وجود دارد و فرمول صریحی برای آن بیان کنید.

۱۵. فرض کنید $T : V \to W$ یک تبدیل خطی باشد که V و W فضاهای ضرب داخلی متناهی البُعد هستند. فرض کنید $<.,.>_1$ و $<.,.>_2$ به ترتیب ضرب‌های داخلی V و W را نشان دهند.

الف) ثابت کنید تبدیل خطی یکتای $T^* : W \to V$ موجود است که برای هر $x \in V$ و $y \in W$، $< T(x), y >_2 =< x, T^*(y) >_1$

ب) فرض کنید β و γ به ترتیب پایه‌های متعامد یکه‌ای برای V و W باشند. ثابت کنید $[T^*]_\gamma^\beta = ([T]_\beta^\gamma)^*$.

۱۶. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد. ثابت کنید $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.

۱۷. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ باشد که هیچ دو ستون آن یکسان نباشد. ثابت کنید A^*A ماتریس قطری است اگر و تنها اگر جفت ستون‌های A متعامد باشند.

۱۸. برای داده‌های $(-۳,۹)$، $(-۲,۶)$، $(۰,۲)$، $(۱,۱)$، خط و سهمی ای را بیابید که برازش‌های کمترین مربعات را ایجاد کنند. خطای E را در دو حالت حساب کنید.

۱۹. در فیزیک قانون هوک بیان می‌کند که (در محدوده خاص) رابطه‌ای خطی میان x یعنی طول فنر و y یعنی نیروی اعمال شده بر (یا وارد شده از) فنر وجود دارد. به عبارت دیگر $y = cx + d$، که c ضریب ثابت فنر نام دارد. با استفاده از داده‌های زیر، ضریب ثابت فنر را تخمین بزنید (طول برحسب اینچ و نیرو برحسب پوند داده شده است).

طول	نیرو
x	y
۳.۵	۱.۰
۴.۰	۲.۲
۴.۵	۲.۸
۵.۰	۴.۳

۲۰. جواب مینیمال دستگاه زیر را بیابید:

$$x + ۲y - z = ۱$$
$$۲x + ۳y + z = ۲$$
$$۴x + ۷y - z = ۴$$

۲۱. نشان دهید که در مساله یافتن خط کمترین مربعات $y = ct + d$ متناظر با m مشاهده $(y_۱, t_۱), ..., (y_m.t_m)$ معادله $(A^*A)x_۰ = A^*y$ در قضیه ۱۲.۶ به دو معادله نرمال زیر تبدیل می‌شود:

$$\left(\sum_{i=۱}^{m} t_i^۲\right) c + \left(\sum_{i=۱}^{m} t_i\right) d = \sum_{i=۱}^{m} t_i y_i$$

و

$$\left(\sum_{i=۱}^{m} t_i\right) c + md = \sum_{i=۱}^{m} y_i$$

این معادلات را می‌توان از روی خطای E نیز با مساوی صفر قرار دادن مشتقات جزئی E نسبت به c و d به دست آورد.

۲۲. فرض کنید V و $\{e_1, e_2, \ldots\}$ مانند تمرین ۲۰ از بخش ۶-۲ تعریف شده باشند. $T : V \to V$ را چنین تعریف کنید:

$$T(\sigma)(k) = \sum_{i=k}^{\infty} \sigma(i) \qquad \text{برای هر عدد صحیح مثبت } k$$

توجه کنید که سری نامتناهی که در تعریف T آمده است، همگرا است چرا که فقط به ازای تعداد متناهی i، $\sigma(i) \neq 0$.

الف) ثابت کنید که T عملگری خطی بر V است.

ب) ثابت کنید که برای هر عدد صحیح مثبت n، $T(e_n) = \sum_{i=1}^{n} e_n$.

ثابت کنید T الحاقی ندارد. راهنمایی: به عنوان فرض خلف، اگر T^* موجود باشد ثابت کنید که برای هر عدد صحیح مثبت n به ازای تعداد نامتناهی k، $T^*(e_n)(k) \neq 0$.

۶-۴ عملگرهای نرمال و خود الحاقی

اهمیت عملگرهای قطری پذیر را در فصل ۵ مشاهده کردیم. برای این عملگرها لازم و کافی است که فضای برداری V، پایه‌ای متشکل از بردارهای ویژه داشته باشد. از آنجا که V در این فصل، یک فضای ضرب داخلی است، عاقلانه است که شرایطی را جستجو کنیم که تضمین می‌کند V یک پایه متعامد یکه متشکل از بردارهای ویژه داشته باشد. نتیجه مهم که به ما کمک می‌کند تا به هدف خود برسیم، قضیه شور (قضیه ۱۴.۶) می‌باشد. بیانی از این قضیه که در زیر آمده است، به زبان تبدیلات خطی است. بخش بعدی، شکل مرسوم تر ماتریس را در بردارد. با بیان یک لم کار خود را آغاز می‌کنیم.

لم ۹. فرض کنید T یک عملگر خطی بر فضای ضرب داخلی متناهی البعد V باشد. اگر T یک بردار ویژه داشته باشد، T^* نیز یک بردار ویژه دارد.

برهان. فرض کنید $A = [T]_\beta$ که β یک پایه متعامد یکه برای V است. فرض کنید λ یک مقدار ویژه T و بنابراین A باشد. در این صورت $\det(A - \lambda I) = 0$. پس طبق تمرین ۱۶ از بخش ۶-۳ و در نتیجه قضیه ۱۱.۶ داریم: $\det(A^* - \overline{\lambda} I) = 0$. پس $\overline{\lambda}$ یک مقدار ویژه A^* و در نتیجه T^* است. به ویژه T^* یک مقدار ویژه دارد. $\square$

به یاد بیآورید (به تمرینات بخش ۲-۱ رجوع کنید) که زیر فضای W از V T-پایا نامیده می‌شود هر گاه $T(W)$ مشمول در W باشد. اگر W زیرفضای از V T-پایا باشد، می‌توانیم تحدید $T_W : W \to W$ را به صورت $T_W(x) = T(x)$ برای هر $x \in W$ تعریف کنیم. واضح است که T_W عملگری خطی بر W است. همچنین از بخش ۵-۲ بیاد آورید که یک چند جمله‌ای می‌شکافد، هرگاه به صورت حاصلضرب چند جمله‌ای‌های خطی تجزیه شود.

قضیه ۱۴.۶ (قضیه شور). فرض کنید T عملگری خطی بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد V باشد. فرض کنید چند جمله‌ای مشخص T بشکافد در این صورت پایه متعامد یکه برای V مانند β وجود خواهد داشت به گونه‌ای که $[T]_\beta$ بالا مثلثی باشد.

برهان. اثبات با استقرا بر بعد V یعنی n صورت می‌گیرد. نتیجه در صورتی که $n = ۱$ بلافاصله صورت می‌گیرد. پس فرض کنید نتیجه برای همه عملگرهای خطی بر فضاهای ضرب داخلی $(n - ۱)$ بعدی که چند جمله‌ای مشخص آنها می‌شکافد، برقرار باشد. طبق لم می‌توانیم فرض کنیم که T^* دارای بردار ویژه یکه z است. فرض کنید $T^*(z) = \lambda z$ و $W = span(\{z\})$. نشان می‌دهیم که $W^\perp$، T-پایا است. هرگاه $y \in W^\perp$ و $x = cz \in W$، آنگاه:

$$\begin{aligned} \langle T(y), x\rangle &= \langle T(y), cz\rangle = \langle y, T^*(cz)\rangle = \langle y, cT^*(z)\rangle \\ &= \langle y, c\lambda z\rangle = \bar{c}\bar{\lambda}\,\langle y, z\rangle = \bar{c}\bar{\lambda}(۰) = ۰ \end{aligned}$$

پس $T(y) \in W^\perp$. به راحتی می‌توان نشان داد (به قضیه ۲۶.۵ رجوع کنید) که چند جمله‌ای مشخص $T_{W^\perp}$ چند جمله‌ای T را عاد می‌کند و بنابراین می‌شکافد. طبق قضیه ۷.۶ قسمت ج $\dim(W^\perp) = n - ۱$. پس می‌توانیم فرض استقرا را برای به دست آوردن پایه متعامد یکه γ برای $W^\perp$ به گونه‌ای که $[T_{W^\perp}]_\gamma$ بالا مثلثی باشد به کار بریم. به وضوح $\beta = \gamma \cup \{z\}$ یک پایه متعامد یکه برای V است به گونه‌ای که $[T]_\beta$ بالا مثلثی است. □

حال به هدف اصلی خود مبنی بر یافتن یک پایه متعامد یکه متشکل از بردارهای ویژه عملگر خطی T بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد V باز می‌گردیم. توجه کنید که اگر چنین پایه متعامد یکه βای موجود باشد، $[T]_\beta$ قطری پذیر خواهد بود. چون ماتریس‌های قطری با هم جابه جا می‌شوند، نتیجه می‌گیریم که T و T^* با یکدیگر جابجا می‌شوند. پس هر گاه V دارای پایه متعامد یکه‌ای باشد که از بردارهای ویژه T تشکیل شده باشد، در این صورت $TT^* = T^*T$.

چند تعریف: فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی و T عملگری خطی بر V باشد. T را **نرمال** گویند هر گاه $TT^* = T^*T$. ماتریس حقیقی یا مختلط A را نرمال گویند هرگاه $AA^* = A^*A$.

فوراً نتیجه میشود که T نرمال است اگر و تنها اگر $[T]_\beta$ نرمال باشد، که β یک پایه متعامد یکه است.

مثال ۱. فرض کنید $T : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ دوران به اندازه θ باشد که $۰ < \theta < \pi$. نمایش ماتریسی T در پایه مرتب استاندارد، به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

توجه کنید که $AA^* = I = A^*A$، بنابراین A و در نتیجه T نرمال است. □

مثال ۲. فرض کنید A یک ماتریس متقارن اریب حقیقی باشد، یعنی $A^t = -A$. در این صورت A نرمال است، زیرا هر دوی AA^t و A^tA برابر با $-A^2$ هستند. □

واضح است که عملگر Tی مثال ۱ حتی یک مقدار ویژه هم ندارد. پس در مورد فضاهای ضرب داخلی حقیقی، مشاهد می‌کنیم که نرمال بودن برای تضمین وجود پایه‌ای مرکب از بردارهای ویژه کافی نیست. با این حال همه چیز را از دست نداده ایم. نشان می‌دهیم نرمال بودن در صورتی که V یک فضای ضرب داخلی مختلط باشد، کافی است.

پیش از اثبات نتیجه‌ای که برای عملگرهای نرمال، قولش را دادیم، ابتدا نیاز به چند خاصیت کلی عملگرهای نرمال داریم.

قضیه ۶.۱۵. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی و T یک عملگر نرمال بر V باشد. در این صورت موارد زیر برقراراند:

الف) برای هر $x \in V$، $||T(x)|| = ||T^*(x)||$.

ب) $T - cI$ برای هر $c \in F$ نرمال است.

ج) اگر x، یک بردار ویژه T باشد، آنگاه x یک بردار ویژه T^* نیز خواهد بود. در واقع اگر $T(x) = \lambda x$ آنگاه $T^*(x) = \overline{\lambda} x$.

د) هرگاه λ_1 و λ_2 دو مقدار ویژه متمایز T، با بردارهای ویژه متناظر x_1 و x_2 باشند، x_1, x_2 متعامد هستند.

برهان. الف) برای هر $x \in V$ داریم:

$$\begin{aligned} ||T(x)||^2 &= \langle T(x), T(x)\rangle = \langle T^*T(x), x\rangle = \langle TT^*(x), x\rangle \\ &= \langle T^*(x), T^*(x)\rangle = ||T^*(x)||^2 \end{aligned}$$

اثبات (ب) به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

ج) فرض کنید که به ازای یک بردار $x \in V$، $T(x) = \lambda x$. فرض کنید که $U = T - \lambda I$. در این صورت $U(x) = 0$ و طبق (ب) U نرمال است. پس با توجه به الف داریم:

$$= ||U(x)|| = ||U^*(x)|| = ||(T^* - \overline{\lambda} I)(x)|| = ||T^*(x) - \overline{\lambda} x||$$

در نتیجه $T^*(x) = \overline{\lambda} x$، پس x یک بردار ویژه T^* است.

د) فرض کنید λ_1 و λ_2 دو مقدار ویژه T متناظر با x_1, x_2 باشند. در این صورت با استفاده از (ج) داریم:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle x_1, x_2\rangle &= \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \langle T(x_1), x_2\rangle = \langle x_1, T^*(x_2)\rangle \\ &= \langle x_1, \overline{\lambda_2} x_2\rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2\rangle \end{aligned}$$

چون $\lambda_۲ \neq \lambda_۱$ نتیجه می‌گیریم که $< x_۱, x_۲ >= ۰$. □

قضیه ۱۶.۶. فرض کنید T عملگری خطی بر یک فضای ضرب داخلی متناهی البُعد مختلط باشد. در این صورت T نرمال است اگر و تنها اگر پایه متعامد یکه برای V موجود باشد که از بردارهای ویژه T تشکیل شده باشد.

برهان. فرض کنید T نرمال باشد. طبق قضیه اساسی جبر (قضیه د-۴) چند جمله‌ای مشخص T می‌شکافد. پس می‌توان با به کارگیری قضیه شور، پایه متعامد یکه $\beta = \{v_۱, ..., v_n\}$ را برای V چنان به دست آورد که $[T]_\beta = A$ بالا مثلثی باشد. می‌دانیم که $v_۱$ یک بردار ویژه T است، چر اکه A بالا مثلثی است. فرض کنید $v_۱, ..., v_{k-۱}$ بردارهای ویژه T باشند. ادعا می‌کنیم که v_k نیز یک بردار ویژه T است. با استقرا روی k نتیجه می‌شود که همه v_iها بردارهای ویژه T هستند یا معادلاً A یک ماتریس قطری است. داریم:

$$A^* = \begin{bmatrix} B^* & O \\ C^* & E^* \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} B & C \\ O & E \end{bmatrix}$$

که B یک ماتریس قطری $(k-۱) \times (k-۱)$ است. چون A بالا مثلثی است برای هر $j > k$، $A_{jk} = ۰$. برای اثبات این که v_k یک بردار ویژه T است، کافی است ثابت کنیم برای هر $j < k$ $A_{jk} = ۰$. توجه کنید که طبق قضیه ۶-۱۵ (ج) $v_۱, ..., v_{k-۱}$ بردارهای ویژه T^* نیز هستند. اما $A^* = [T^*]_\beta$. بنابراین $C^* = ۰$. پس برای هر $j < k$ $(A^*)_{kj} = ۰$ و لذا برای هر $j < k$، $A_{jk} = ۰$. بنابراین بردار $v - k$ یک بردار ویژه T است. پس با استقرا ریاضی بردارهای β بردارهای ویژه T هستند.

عکس این قضیه ثابت شده است. □

جالب است که همانگونه که مثال بعدی نشان می‌دهد قضیه ۱۶.۶ به فضاهای ضرب داخلی مختلط با بعد نامتناهی تعمیم نمی‌یابد.

مثال ۳. فضای ضرب داخلی H با مجموعه متعامد یکه S از مثال ۹ بخش ۶-۱ را به یاد آورید. فرض کنید $V = span(S)$ و T و U دو عملگر خطی بر V باشند که با روابط $T(f) = f_۱ f$ و $U(f) = f_{-۱} f$ تعریف می‌شوند. پس برای هر عدد صحیح مثبت k داریم:

$$U(f_k) = f_{k-۱} \qquad T(f_k) = f_{k+۱}$$

بنابراین:

$$< T(f_i), f_j >=< f_{i+۱}, f_j >= \delta_{i+۱,j} = \delta_{i,j-۱} =< f_i, f_{j-۱} >=< f_i, U(f_j) >$$

نتیجه می‌گیریم که $U = T^*$. علاوه بر این $TT^* = I = T^*T$. بنابراین T نرمال است.

نشان می‌دهیم که T بردار ویژه ندارد. فرض کنید f یک بردار ویژه T باشد. مثلا به ازای λای $T(f) = \lambda f$. چون V برابر با فضای پدید آمده از S است می‌توانیم بنویسیم:

$$f = \sum_{i=n}^{m} a_i f_j \qquad \text{که} \quad a_m \neq 0$$

با اعمال T به دو طرف معادله فوق نتیجه می‌شود که:

$$\sum_{i=n}^{m} a_i f_{i+1} = \sum_{i=n}^{m} \lambda a_i f_i$$

چون $a_m \neq 0$ می‌توانیم f_{m+1} را به صورت ترکیبی خطی از $f_n, f_{n+1}, ..., f_m$ بنویسیم. اما این یک تناقض است زیرا S مستقل خطی است. $\square$

مثال ۱ شاهدی است بر این که نرمال بودن، برای تضمین وجود پایه متعامد یکه متشکل از بردارهای ویژه برای یک فضای ضرب داخلی حقیقی کافی نیست. برای فضاهای ضرب داخلی حقیقی، باید نر مال بودن را با شرط قویتر $T = T^*$ جایگزین کنیم.

چند تعریف : فرض کنید T یک عملگر خطی بر فضای ضرب داخلی V باشد. می‌گوییم T **خود الحاقی** است (**هرمیتی**) هر گاه $T = T^*$. ماتریس $n \times n$ حقیقی یا مختلط A را خود **الحاقی (هرمیتی)** گوییم هر گاه $A = A^*$.

بلافاصله نتیجه می‌شود که T خود الحاقی است اگر و تنها اگر $[T]_\beta$ خود الحاقی باشد که β یک پایه متعامد یکه است. برای ماتریس‌های حقیقی این شرط به متقارن بودن A کاهش می‌یابد. پیش از آنکه نتیجه اصلی خود را در مورد عملگرهای خود الحاقی بیان کنیم ابتدا باید مقدماتی را فراهم کنیم.

طبق تعریف هر عملگر خطی بر یک فضای ضرب داخلی حقیقی فقط مقادیر ویژه حقیقی می‌تواند داشته باشد. لم بعد نشان می‌دهد که همین مطلب را می‌توان در مورد عملگرهای خود الحاقی بر فضاهای ضرب داخلی مختلط بیان کرد. به طور مشابه، چند جمله‌ای مشخص هر عملگر خطی بر یک فضای ضرب داخلی مختلط می‌شکافد و همین مطلب در مورد عملگرهای خود الحاقی بر فضاهای ضرب داخلی حقیقی درست است.

لم ۱۰. فرض کنید T یک عملگر خود الحاقی بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد V باشد. در این صورت:

الف) هر مقدار ویژه T حقیقی است.

ب) فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی حقیقی باشد، در این صورت چند جمله‌ای مشخص T می‌شکافد.

برهان. الف) فرض کنید به ازای $x \neq 0$، $T(x) = \lambda x$. چون هر عملگر خود الحاقی نرمال است می‌توانیم قضیه ۶.۱۵ قسمت ج را به کار بریم تا به دست آوریم که:

$$\lambda x = T(x) = T^*(x) = \overline{\lambda} x$$

پس $\lambda = \overline{\lambda}$ یعنی λ حقیقی است. $\square$

حال آماده ایم تا یکی از مهمترین نتایج این فصل را ثابت کنیم.

قضیه ۱۷.۶. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد V باشد و در این صورت T خود الحاقی است اگر و تنها اگر پایه متعامد یکه βای برای V موجود باشد که از بردارهای ویژه T تشکیل شده باشد است.

برهان. فرض کنید T، خود الحاقی باشد. طبق لم، می‌توانیم قضیه شور را برای به دست آوردن پایه متعامد یکه β برای V به کار گیریم به گونه‌ای که $A = [T]_\beta$ بالا مثلثی باشد. اما:

$$A^* = [T]_\beta^* = [T^*]_\beta = [T]_\beta = A$$

پس A و A^* هر دو بالا مثلثی هستند و بنابراین A یک ماتریس قطری است. پس β باید متشکل از بردارهای ویژه T باشد.

عکس قضیه به عنوان تمرین به عهده خواننده است. □

قضیه ۶-۱۷ به کرات در بسیاری از بخش‌های ریاضی و آمار به کار می‌رود. این قضیه را به شکل ماتریسی در بخش بعدی مجددا بیان خواهیم کرد.

مثال ۴. همانطور که پیش‌تر متذکر شدیم، ماتریس‌های خود الحاقی حقیقی متقارن هستند و ماتریس‌های خود الحاقی نرمال هستند. ماتریس Aی زیر مختلط و متقارن است:

$$A^* = \begin{bmatrix} -i & -i \\ -i & ۱ \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} i & i \\ i & ۱ \end{bmatrix}$$

اما A نرمال نیست، چرا که $(AA^*)_{۱۲} = ۱ + i$ و $(A^*A)_{۱۲} = ۱ - i$. □

تمرینات

۱. تعین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است. فرض کنید فضای ضرب داخلی مورد نظر متناهی البُعد باشد.

الف) هر عملگر خود الحاقی نرمال است.

ب) عملگرها و الحاقی‌های آنها بردارهای ویژه یکسان دارند.

ج) هرگاه T عملگری بر فضای ضرب داخلی V باشد، T نرمال است اگر و تنها اگر $[T]_\beta$ نرمال باشد که β یک پایه مرتب دلخواه V است.

د) ماتریس حقیقی یا مختلط A نرمال است اگر و تنها اگر L_A نرمال باشد.

هـ) مقادیر ویژه یک عملگر خود الحاقی باید همگی حقیقی باشند.

و) عملگرهای همانی و صفر، خود الحاقی هستند.

ز) هر عملگر نرمال، قطری پذیر است.

ح) هر عملگر خود الحاقی، قطری پذیر است.

۲. برای هر یک از عملگرهای خطی زیر تعیین کنید که آیا این عملگر نرمال است یا خودالحاقی یا هیچکدام.

الف) $T : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ که چنین تعریف می‌شود: $T(a, b) = (۲a - ۲b, -۲a + ۵b)$.

ب) $T : \mathbb{C}^۲ \to \mathbb{C}^۲$ که چنین تعریف می‌شود: $T(a, b) = (۲a + ib, a + ۲b)$.

ج) $T : P_۲(\mathbb{R}) \to P_۲(\mathbb{R})$ که چنین تعریف می‌شود: $T(f) = f'$ که $< f, g >= \int_۰^۱ f(t)g(t)dt$.

در مورد (الف) پایه‌ای متعامد یکه برای $\mathbb{R}^۲$ بیابید که از بردارهای ویژه T تشکیل شده باشد.

۳. فرض کنید T و U دو عملگر خود الحاقی بر یک فضای ضرب داخلی باشند. ثابت کنید TU خود الحاقی است اگر و تنها اگر $TU = UT$.

۴. قسمت ب از قضیه ۱۵.۶ را ثابت کنید.

۵. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی مختلط و T یک عملگر خطی بر V باشد. $T_۱$ و $T_۲$ را چنین تعریف کنید:

$$T_۲ = \frac{۱}{۲i}(T - T^*), \quad T_۱ = \frac{۱}{۲}(T + T^*)$$

الف) ثابت کنید $T_۱$ و $T_۲$ خود الحاقی هستند و $T = T_۱ + iT_۲$.

ب) فرض کنید T برابر با $U_۱ + iU_۲$ نیز باشد که $U_۱$ و $U_۲$ عملگرهایی خودالحاقی هستند. ثابت کنید $U_۱ = T_۱$ و $U_۲ = T_۲$.

ج) ثابت کنید T نرمال است اگر و تنها اگر $T_۱T_۲ = T_۲T_۱$.

۶. فرض کنید T یک عملگر خطی بر فضای ضرب داخلی V باشد و W یک زیر فضای T-پایای V. موارد زیر را ثابت کنید:

الف) اگر T خود الحاقی باشد آنگاه T_W نیز خود الحاقی است.

ب) $W^\perp$، T^*-پایا است.

ج) هرگاه W هم T-پایا و هم T^*-پایا باشد آنگاه $(T_W)^* = (T^*)_W$.

د) اگر W هم T-پایا و هم T^*-پایا باشد و T نرمال باشد آنگاه T_W نرمال است.

۷. فرض کنید T یک عملگر نرمال بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد مختلط V و W یک زیر فضای V باشد. ثابت کنید که اگر W Tپایا باشد آنگاه T^*–پایا نیز می‌باشد. راهنمایی از تمرین ۲۴ بخش ۵-۴ استفاده کنید.

۸. فرض کنید T یک عملگر نرمال، بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد V باشد. ثابت کنید $R(T) = R(T^*)$ و $N(T) = N(T^*)$. راهنمایی: از قضیه ۱۵.۶ و تمرین ۱۲ از بخش ۶-۳ استفاده کنید.

۹. فرض کنید T یک عملگر خود الحاقی بر فضای ضرب داخلی متناهی البعد V باشد. ثابت کنید برای هر $x \in V$،

$$||T(x) \pm ix||^۲ = ||T(X)||^۲ + ||x||^۲$$

نتیجه بگیرید که $(T - iI)$ وارون پذیر است و $[(T - iI)^{-۱}]^* = (T + iI)^{-۱}$.

۱۰. فرض کنید T عملگری خطی روی یک فضای ضرب داخلی مختلط (نه لزوما متناهی البُعد) با مزدوج T^* باشد. موارد زیر را ثابت کنید:

الف) اگر T خود الحاقی باشد، $< T(x), x >$ برای هر $x \in V$ حقیقی است.

ب) هرگاه T برای هر $x \in V$ در $< T(x), x >= ۰$ صدق کند، آنگاه $T = T_۰$. راهنمایی: x را با $x + y$ و سپس با $x + iy$ جایگزین کنید و حاصلضرب‌های داخلی حاصل را بسط دهید.

ج) اگر $< T(x), x >$ برای هر $x \in V$ حقیقی باشد، آنگاه $T = T^*$.

۱۱. فرض کنید T یک عملگر نرمال بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد حقیقی V باشد که چند جمله‌ای مشخص آن می‌شکافد، ثابت کنید V پایه‌ای متعامد یکه متشکل از بردارهای ویژه T دارد. در نتیجه ثابت کنید T خود الحاقی است.

۱۲. ماتریس $n \times n$ A را ماتریس **گرامین** نامند، هرگاه ماتریس حقیقی (مربعی) B چنان یافت شود که $A = B^tB$. ثابت کنید که A یک ماتریس گرامین است اگر و تنها اگر A متقارن بوده و تمامی مقادیر ویژه‌های آن نامنفی باشند. **راهنمایی:** قضیه ۱۷.۶ را در مورد L_A به کار برید تا مجموعه $\{v_۱, ..., v_n\}$ از بردارهای ویژه با مقادیر ویژه متناظر $\lambda_۱, ..., \lambda_n$ به دست آید. عملگر خطی U را به صورت $U(v_i) = \sqrt{\lambda_i}v_i$ تعریف کنید و برهان را کامل کنید.

تعریف‌های زیر، در تمرینات ۱۳، ۱۴، ۱۷، الی ۲۱ به کار خواهند رفت.
تعریف: عملگر خطی T، بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد V را **معین مثبت (نیمه معین مثبت)** نامیم هرگاه T خود الحاقی باشد و برای هر $x \neq ۰$. $< T(x), x >> ۰$ $[< T * (x), x >\geq ۰]$

۱۳. فرض کنید T یک عملگر خطی خود الحاقی بر فضای ضرب داخلی n–بعدی V باشد و $A = [T]_\beta$ که β پایه ای مرتب برای V است. ثابت کنید:

الف) T معین (نیمه معین) مثبت است اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه آن مثبت (نامنفی) باشند.

ب) T معین (نیمه معین) مثبت است اگر و تنها اگر L_A اینگونه باشد.

ج) T معین مثبت است اگر وتنها اگر

$$\sum_{i,j} A_{ij} a_j \overline{a}_i > 0 \quad (a_1, ..., a_n) \qquad \text{برای هر } n\text{–تایی ناصفر}$$

این نامساوی را به عنوان تعریف ماتریس معین مثبت به کار می‌برند. با تغییر این نامساوی به یک نامساوی غیر اکید، تعریف متناظری برای ماتریس‌های نیمه معین مثبت به دست می‌آید.

د) T معین مثبت است اگر وتنها اگر به ازای ماتریسی مربعی مانند B، $A = B^*B$.

هـ) اگر T و U عملگرهایی معین مثبت باشند به گونه‌ای که $T^2 = U^2$ آنگاه $T = U$.

و) آیا ترکیب دو عملگر معین مثبت، معین مثبت است؟

نتایج قسمت‌های الف تا هـ برای ماتریس‌ها نیز مانند عملگرها برقرار هستند.

۱۴. فرض کنید $T : V \to W$ یک تبدیل خطی باشد که V و W فضاهای ضرب داخلی متناهی البُعد هستند. ثابت کنید TT^* نیمه معین مثبت است و $rank(T^*T) = rank(T)$. (به تمرین ۱۵ از بخش ۶–۳ رجوع کنید).

۱۵. قطری پذیری همزمان:

الف) فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی البُعد حقیقی و U و T چنان عملگرهای خطی خود الحاقی بر V باشند که $TU = UT$. ثابت کنید پایه متعامد یکه برای V وجود دارد که بردارهای آن هم بردار ویژه U هستند و هم T (شکل مختلط این نتیجه به صورت تمرین ۱۰ از بخش ۶–۶ ظاهر خواهد شد). راهنمایی: برای هر فضای ویژه $W = E_\lambda$ از T، W هم T–پایا است و هم U پایا است.طبق تمرین ۶، $W^\perp$ نیز هم T–پایا و هم U–پایا است. قضیه ۱۷.۶ و حکم ۶.۶ را بکارگیرید.

ب) نتیجه‌ای مشابه را برای ماتریس‌های متقارن (حقیقی) جابجا شوند، ثابت کنید.

۱۶. قضیه کیلی–هامیلتون را برای ماتریس مختلط $A_{n\times n}$ ثابت کنید. یعنی اگر $f(t)$ چند جمله‌ای مشخص A باشد، ثابت کنید $f(A) = O$. راهنمایی: با استفاده از قضیه شور، نشان دهید که می‌توان فرض کرد A بالا مثلثی است که در این صورت:

$$f(t) = \prod_{i=1}^{n} (A_{ii} - t)$$

حال اگر $T = L_A$، آنگاه برای هر $j \geq 2$ داریم: $(A_{jj}I - T)(e_j) \in span(\{e_1, ..., e_{j-1}\})$ که $\{e_1, ..., e_n\}$ پایه مرتب استاندارد $\mathbb{C}^n$ است. (حالت کلی تر در بخش ۵–۴ ثابت شده است).

تمرینات ۱۷ تا ۲۱، از تعریف عملگر معین مثبت استفاده می‌کنند که پیش از تمرین ۱۳ آمد.

۱۷. فرض کنید T و U، عملگرهایی معین مثبت بر فضای ضرب داخلی V باشند. موارد زیر را ثابت کنید:

الف) $T+U$ معین مثبت است.

ب) اگر $c>0$ باشد آنگاه cT معین مثبت است.

ج) T^{-1} معین مثبت است.

۱۸. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی، با ضرب داخلی $<.,.>$ و T یک عملگر معین مثبت بر V باشد. ثابت کنید که $<x,y>'=<T(x),y>$ ضرب داخلی دیگری را بر V تعریف می‌کند.

۱۹. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی البعد و T و U عملگرهای خود الحاقی بر V باشند که T معین مثبت است. ثابت کنید که TU و UT هر دو عملگرهای خطی قطری پذیری هستند که فقط مقادیر ویژه حقیقی دارند. راهنمایی: نشان دهید که UT نسبت به ضرب داخلی $<x,y>'=<T(x),y>$ خود الحاقی است. برای اثبات خود الحاقی بودن TU، همین استدلال را با جایگذاری T^{-1} به جای T تکرار کنید.

۲۰. نتیجه زیر، عکسی برای تمرین ۱۸ ارئه می‌دهد. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی البُعد، با ضرب داخلی $<.,.>$ و $<.,.>'$ ضرب داخلی دلخواه دیگری بر V باشد.

الف) ثابت کنید که عملگر خطی یکتای T بر V موجود است به گونه‌ای که برای هر x و y در V، $<x,y>'=<T(x),y>$. راهنمایی: فرض کنید $\beta=\{v_1,...,v_n\}$ پایه متعامد یکه برای V نسبت به $<.,.>$ باشد و ماتریس A را به صورت $A_{ij}=<v_j,v_i>'$ برای هر i و j تعریف کنید. فرض کنید که T یکتا عملگری بر V باشد که $[T]_\beta=A$.

ب) ثابت کنید که عملگر T در قسمت الف، نسبت به هر دو ضرب داخلی معین مثبت است.

۲۱. فرض کنید U یک عملگر خطی قطری پذیر بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد V باشد. به طوری که همه مقادیر ویژه U حقیقی باشند. ثابت کنید که دو عملگر خطی معین مثبت T_1 و T_1' و دو عملگر خطی خود الحاقی T_2 و T_2' چنان موجودند که $U=T_2T_1=T_1'T_2'$. راهنمایی: فرض کنید $<.,.>$ ضرب داخلی مربوط به V، β پایه‌ای مرکب از بردارهای ویژه U و $<.,.>'$ یک ضرب داخلی بر V باشد که β نسبت به آن متعامد یکه است (به تمرین ۲۴ الف از بخش ۶-۱ رجوع کنید) و T_1 عملگر معین مثبتی باشد که طبق تمرین ۲۰ موجود است. نشان دهید که U نسبت به $<.,.>'$ خود الحاقی است و $U=T_1^{-1}U^*T_1$. (الحاقی U^*، نسبت به $<.,.>$ است). T_2 را برابر با $T_1^{-1}U^*$ بگیرید.

۲۲. بحث زیر اثبات دیگری برای قضیه شور ارائه می‌دهد. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای ضرب داخلی V باشد:

الف) فرض کنید β چنان پایه مرتبی برای V باشد که $[T]_\beta$ ماتریسی بالا مثلثی باشد. فرض کنید γ، پایه متعامد یکه‌ای برای V باشد که از اعمال فرآیند متعامد سازی گرام- اشمیت بر β و سپس تقسیم هر یک از بردارهای حاصل بر طولش حاصل می‌شود.

ب) از تمرین ۳۲ بخش ۵-۴ و قسمت الف این مساله برای به دست آوردن برهانی دیگر برای قضیه شور استفاده کنید.

۶-۵ عملگرها وماتریس‌های یکانی و متعامد

در این بخش، به نشان دادن تناظر بین اعداد مختلط و عملگرهای خطی ادامه می‌دهیم. به یاد آورید که الحاقی عملگرهای خطی، رفتاری مشابه با مزدوج اعداد مختلط دارند (به عنوان مثال به قضیه ۶-۱۱ رجوع کنید). طول عدد مختلط z، ۱ است هر گاه $z\overline{z} = 1$. در این بخش به مطالعه آن دسته از عملگرهای خطی T بر فضای ضرب داخلی V می‌پردازیم که $T^*T = T^*T = I$. خواهیم دید که این موارد دقیقا همان عملگرهای خطی هستند که «طول را حفظ می‌کنند». به این معنی که برای هر $x \in V$، $||T(x)|| = ||x||$. به عنوان توصیفی دیگر، ثابت خواهیم کرد که بر یک فضای ضرب داخلی مختلط متناهی البُعد، این موارد همان عملگرهای نرمالی هستند که قدرمطلق همه مقادیر ویژه آنها یک است.

در فصول قبلی، علاقه مند به مطالعه توابعی بودیم که ساختار فضای مربوطه را حفظ می‌کنند. از جمله، عملگرهای خطیریال جمع برداری و ضرب اسکالر را حفظ می‌کنند و ایزومرفیسم ها، کل ساختار فضای برداری را حفظ می‌کنند. حال طبیعی است که به بررسی آن دسته از عملگرهای خطی T بر یک فضای ضرب داخلی بپردازیم که طول را حفظ می‌کنند. خواهیم دید که در واقع این شرط، تضمین می‌کند که T ضرب داخلی را حفظ می‌کند.

چند تعریف: فرض کنید T عملگری خطی بر فضای ضرب داخلی V بر F باشند. هرگاه برای هر $x \in V$، $||T(x)|| = ||x||$، در صورتی که $F = \mathbb{C}$، T را **عملگر یکانی** و در صورتی که $F = \mathbb{R}$، یک **عملگر متعامد** می‌نامیم.

باید خاطر نشان کنیم که معمولا در حالت بعد نامتناهی، عملگری که شرط نرمی بال را ارضا می‌کند، ایزومتری می‌نامند. اگر علاوه بر این، عملگر پوشا نیز باشد (این شرط یک به یک بودن را تضمین می‌کند) عملگر را یکانی یا متعامد می‌نامند.

واضح است که هر دوران یا انعکاسی در $\mathbb{R}^2$ طول را حفظ می‌کند و بنابراین یک عملگر متعامد است. این عملگرها را با جزئیات بیشتر در بخش ۶-۱۰ مطالعه خواهیم کرد.

مثال ۱. فرض کنید $h \in H$. برای هر x که در $|h(x)| = 1$ صدق می‌کند عملگر خطی T را بر H به صورت $T(f) = hf$ تعریف کنید در این صورت:

$$||T(f)||^2 = ||hf||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)f(t)\overline{h(t)f(t)}dt = ||f||^2$$

چرا که برای هر t $|h(t)| = 1$. پس T عملگریکانی است. □

قضیه ۶.۱۸. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای ضرب داخلی متناهی البعد V باشد. موارد زیر معادل هستند:

الف) $TT^* = T^*T = I$.

ب) برای هر $x, y \in V$، $< T(x), T(y) >=< x, y >$.

ج) هرگاه β پایه متعامد یکه برای V باشد، $T(\beta)$ پایه متعامد یکه برای V است.

د) پایه متعامد یکه βای برای V موجود است به گونه‌ای که $T(\beta)$ پایه متعامد یکه برای V باشد.

هـ) برای هر $x \in V$، $||T(x)|| = ||x||$.

بنابراین همه شرایط بالا با تعریف عملگر یکانی یا متعامد معادل هستند. از (الف) نتیجه می‌شود که عملگرهای یکانی یا متعامد نرمال هستند.

پیش از اثبات قضیه، ابتدا لم زیر را اثبات می‌کنیم. این لم را با لم تمرین ۱۰ قسمت ب از بخش ۶-۴ مقایسه کنید.

لم ۱۱. فرض کنید U یک عملگر خود الحاقی بر فضای ضرب داخلی V باشد. اگر برای هر $x \in V$، $< x, U(x) >= \circ$ آنگاه $U = T_\circ$.

برهان. با استفاده از قضیه ۶.۱۶ یا ۶.۱۷، می‌توانیم پایه متعامد یکه برای V نظیر β متشکل از بردارهای ویژه U انتخاب کنیم. اگر $x \in \beta$، آنگاه به ازای λای $U(x) = \lambda x$. پس:

$$\circ =< x, U(x) >=< x, \lambda x >= \overline{\lambda} < x, x >$$

پس $\overline{\lambda} = \circ$، در نتیجه برای هر $x \in \beta$، $U(x) = \circ$ و بنابراین $U = T_\circ$. □

برهان (قضیه ۶-۱۸). ابتدا ثابت می‌کنیم که (الف)، (ب) را نتیجه می‌دهد. فرض کنید $x, y \in V$. در این صورت $< x, y >=< T^*T(x), y >=< T(x), T(y) >$.

ثانیاً ثابت می‌کنیم که (ب)، (ج) را نتیجه می‌دهد. فرض کنید که $\beta = \{v_\text{۱}, ..., v_n\}$ پایه متعامد یکه‌ای برای V باشد. پس $T(\beta) = \{T(v_\text{۱}), ..., T(v_n)\}$. حال

$$< T(v_i), T(v_j) >=< v_i, v_j >= \delta_{ij}$$

در نتیجه $T(\beta)$ پایه متعامد یکه‌ای برای V است.

این موضوع که (ج)، (د) را نتیجه می‌دهد بدیهی است.

به عنوان مرحله بعدی ثابت می‌کنیم که (د)، (هـ) را نتیجه می‌دهد. فرض کنید $x \in V$ و $\beta = \{v_\text{۱}, ..., v_n\}$. حال به ازای اسکالرهای a_iای:

$$x = \sum_{i=\text{۱}}^{n} a_i v_i$$

و بنابراین:

$$\begin{aligned} ||x||^۲ &= \left\langle \sum_{i=۱}^{n} a_i v_i, \sum_{j=۱}^{n} a_j v_j \right\rangle = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} a_i \bar{a}_j \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} a_i \bar{a}_j \delta_{ij} = \sum_{i=۱}^{n} |a_i|^۲ \end{aligned}$$

چرا که β متعامد یکه است.

با به کارگیری همین عملیات روی:

$$T(x) = \sum_{i=۱}^{n} a_i T(v_i)$$

و با استفاده از این واقعیت که $T(\beta)$ متعامد یکه است، نتیجه می‌گیریم که:

$$||T(x)||^۲ = \sum_{i=۱}^{n} |a_i|^۲$$

در نتیجه $||T(x)|| = ||x||$.

در پایان ثابت می‌کنیم که (هـ)، (الف) را نتیجه می‌دهد. برای هر $x \in V$، داریم:

$$< x.x >= ||x||^۲ = ||T(x)||^۲ =< T(x), T(x) >=< x, T^*T(x) >$$

پس برای هر $x \in V$، $< x, (I - T^*T)(x) >= ۰$. فرض کنید که $U = I - T^*T$. پس U خود الحاقی است و برای هر $x \in V$، $< x, U(x) >= ۰$. بنابراین طبق لم، داریم: $T_۰ = U = I - T^*T$ و در نتیجه $T^*T = I$. چون V متناهی البُعد است می‌توانیم از تمرین ۸ بخش ۲-۴ استفاده کنیم و نتیجه بگیریم که $TT^* = I$. □

بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شود که قدر مطلق هر مقدار ویژه عملگریکانی یا متعامد، ۱ است. در واقع حقایق دیگری نیز در این باره وجود دارند.

نتیجه ۱. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای ضرب داخلی حقیقی متناهی البُعد V باشد. در این صورت V دارای پایه متعامد یکه‌ای متشکل از بردارهای ویژه T متناظر با مقادیر ویژه دارای قدر مطلق ۱ است اگر وتنها اگر T هم خودالحاقی و هم متعامد باشد.

برهان. فرض کنید V دارای پایه متعامد یکه $\{v_۱, ..., v_n\}$ باشد، به گونه‌ای که برای هر i، $T(v_i) = \lambda_i v_i$ و $|\lambda_i| = ۱$. طبق قضیه ۱۷.۶، T خود الحاقی است در نتیجه $(TT^*)(v_i) = T(\lambda_i v_i) = \lambda_i \lambda_i v_i = \lambda_i^۲ v_i = v_i$. پس $TT^* = I$ و باز هم طبق تمرین ۸ از بخش ۲-۴ و طبق قضیه ۱۸.۶ (الف)، T متعامد است.

هرگاه T خود الحاقی باشد، طبق قضیه ۱۷.۶، V دارای پایه متعامد یکه $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ است که برای هر i، $T(v_i) = \lambda_i v_i$. هرگاه T متعامد هم باشد، داریم:

$$|\lambda_i|.||v_i|| = ||\lambda_i v_i|| = ||T(v_i)|| = ||v_i||$$

پس برای هر i، $|\lambda_i| = 1$. □

نتیجه ۲. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای ضرب داخلی متناهی البعد مختلط V باشد. در این صورت V دارای پایه متعامد یکه مرکب از بردارهای ویژه T، با مقادیر ویژه متناظر دارای قدرمطلق ۱ است اگر و تنها اگر T یکانی باشد.

برهان. اثبات مانند برهان نتیجه ۱ است. □

مثال ۲. فرض کنید $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$، دوران به اندازه زاویه θ باشد که $0 < \theta < \pi$. از لحاظ هندسی واضح است که T «طول را حفظ می‌کند»، یعنی برای هر $x \in \mathbb{R}^2$، $||T(x)|| = ||x||$. این حقیقت که دوران به اندازه زاویه ثابت، تعامد را حفظ می‌کند نه تنها از نظر هندسی قابل مشاهده است، بلکه هم اکنون از قسمت ب قضیه ۱۸.۶ نیز نتیجه می‌شود. شاید این حقیقت که چنین تبدیلی ضرب داخلی را حفظ می‌کند، از نظر هندسی چنین واضح نباشد. با این حال، این واقعیت را هم از (ب) نتیجه می‌گیریم. در نهایت با بررسی ماتریس زیر:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

این واقعیت آشکار می‌شود که T با توجه به محدوده‌ای که برای θ فرض کردیم، خود الحاقی نیست. همان طور که قبلاً متذکر شدیم، این حقیقت از این ملاحظه هندسی که T بردار ویژه ندارد، به همراه قضیه ۱۵.۶ نیز نتیجه می‌شود. به راحتی از روی ماتریس فوق می‌توان دید که T^* دروان به اندازه $-\theta$ است. □

حال ماتریس‌هایی را که معرف تبدیلات یکانی و متعامد هستند بررسی می‌کنیم.

چند تعریف: فرض کنید A ماتریسی مربعی باشد که درایه‌های آن در میدان دلخواه F قرار دارند. A را **ماتریسی متعامد** گوییم هرگاه $A^tA = AA^t = I$. اگر $F = \mathbb{C}$ یا $F = \mathbb{R}$ و $A^*A = AA^* = I$، A را یک **ماترس یکانی** می‌نامند.

چون برای ماتریس حقیقی A، داریم $A^* = A^t$، هر ماتریس یکانی حقیقی متعامد نیز هست. در این حالت A را به جای یکانی، **متعامد** می‌خوانیم. توجه کنید که شرط $AA^* = I$ ، معادل با این است که سطرهای A پایه متعامد یکه برای F^n تشکیل دهند، چرا که:

$$\delta_{ij} = I_{ij} = (AA^*)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(A^*)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\overline{A}_{jk}$$

و عبارت آخر، نشان دهنده ضرب داخلی سطرهای i ام و jام A است.

نکته مشابهی را می‌توان در مورد ستون‌های A و شرط $A^*A = I$ بیان کرد.

از تعریف بالا نتیجه می‌شود که عملگر خطی T بر فضای ضرب داخلی V یکانی [متعامد] است اگر و تنها اگر به ازای پایه متعامد یکه βای برای V، $[T]_\beta$ یکانی [متعامد] باشد.

مثال ۳. ماتریس زیر از مثال ۲ به وضوح متعامد است.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

به راحتی می‌توان دید که سطرهای این ماتریس تشکیل یک پایه متعامد یکه برای $\mathbb{R}^۲$ می‌دهند. به طور مشابه ستون‌های این ماتریس، پایه متعامد یکه برای $\mathbb{R}^۲$ می‌سازند. □

می دانیم که برای ماتریس مختلط نرمال [حقیقی متقارن] A، پایه متعامد یکه βای برای F^n متشکل از بردارهای ویژه A موجود است. بنابراین A متشابه با یک ماتریس قطری چون D است. طبق قضیه ۱.۵ ماتریس Q که ستون‌های آن بردارهای β هستند، دارای این ویژگی است که $D = Q^{-۱}AQ$. اما چون ستون‌های Q پایه متعامد یکه برای F^n هستند نتیجه می‌شود که Q یکانی [متعامد] است. در این حالت، می‌گوییم A، **هم ارز یکانی [هم ارز متعامد]** D است. به راحتی می‌توان دید (به تمرین ۱۷ رجوع کنید) که این رابطه، یک رابطه هم ارزی بر $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ $[M_{n\times n}(\mathbb{R})]$ است. در حالت کلی A و B هم ارز یکانی [هم ارز متعامد] خوانده می‌شود، اگر و تنها اگر ماتریس یکانی [متعامد] P چنان یافت شود که $A = P^*BP$.

در بند قبل، نیمی از هر یک از دو قضیه زیر ثابت شده است.

قضیه ۱۹.۶. فرض کنید A یک ماتریس مختلط $n \times n$ باشد. در این صورت A نرمال است اگر و تنها اگر A هم ارز یکانی یک ماتریس قطری باشد.

برهان. طبق یادآوری‌های بالاکافی است ثابت کنیم که اگر A هم ارز یکانی یک ماتریس قطری باشد، A نرمال است.

فرض کنید $A = P^*DP$، که P ماتریسی یکانی و D یک ماتریس قطری است. در این صورت:

$$AA^* = (P^*DP)(P^*DP)^* = (P^*DP)(P^*D^*P) = P^*DID^*P = P^*DD^*P$$

به صورت مشابه $A^*A = P^*D^*DP$. اما چون D ماتریسی قطری است داریم $D^*D = DD^*$. در نتیجه $AA^* = A^*A$. □

قضیه ۲۰.۶. فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد. در این صورت A متقارن است اگر و تنها اگر A هم ارز متعامد یک ماتریس قطری حقیقی باشد.

برهان. اثبات، مانند قضیه ۱۹.۶ است و به خواننده واگذار می‌شود. □

مثال ۴. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۴ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

چون A متقارن است، قضیه ۲۰.۶ بیان می‌کند که A هم ارز متعامد یک ماتریس قطری است. حال به یافتن ماتریس متعامد P و ماتریس قطری D می‌پردازیم که $P^tAP = D$.

برای یافتن P، ابتدا پایه‌ای متعامد یکه متشکل از بردارهای ویژه را به دست می‌آوریم. به راحتی می‌توان دید که مقادیر ویژه A ۲ و ۸ است. مجموعه $\{(-۱, ۱, ۰), (-۱, ۰, ۱)\}$ پایه‌ای برای فضای ویژه متناظر با ۲ است. چون این مجموعه متعامد نیست، فرآیند گرام-اشمیت را به کار می‌بریم تا مجموعه متعامد $\{(-۱, ۱, ۰), -\frac{۱}{۲}(۱, ۱, -۲)\}$ به دست آید. مجموعه $\{(۱, ۱, ۱)\}$ پایه‌ای برای فضای ویژه متناظر با ۸ است. ملاحظه می‌کنید که $(۱, ۱, ۱)$ همان گونه که قضیه ۱۵.۶ (د) پیش بینی می‌کند، با دو بردار قبلی متعامد است. با اجتماع گیری از این دو پایه و یکه کردن بردارها، پایه متعامد یکه زیر، متشکل از بردارهای ویژه A را برای $\mathbb{R}^۳$ به دست می‌آوریم:

$$\left\{ \frac{۱}{\sqrt{۲}}(-۱, ۱, ۰), \frac{۱}{\sqrt{۶}}(۱, ۱, -۲), \frac{۱}{\sqrt{۳}}(۱, ۱, ۱) \right\}$$

پس یک انتخاب ممکن عبارت است از:

$$D = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} \frac{-۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۶}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۶}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ ۰ & \frac{۲}{\sqrt{۶}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \end{bmatrix}$$

□

نتیجه بعدی از قضیه شور (قضیه ۱۶.۶) مستقیما نتیجه می‌شود. چون این نتیجه، شکل ماتریسی قضیه شور است، آن را هم قضیه شور می‌نامیم.

قضیه ۲۱.۶ (قضیه شور). فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$ یک ماتریس باشد که چند جمله‌ای مشخص آن در F بشکافد.

الف) هرگاه $F = \mathbb{C}$، A هم ارز یکانی یک ماتریس بالا مثلثی مختلط است.

ب) هرگاه $F = \mathbb{R}$، A هم ارز متعامد یک ماتریس بالا مثلثی حقیقی است.

حرکات صلب در صفحه

هدف از این کاربرد، تعیین حرکات به اصطلاح صلب در فضای $\mathbb{R}^۲$ است. می‌توان چنین تبدیلی را از لحاظ شهودی تبدیلی در نظر گرفت که با تاثیر بر یک جسم، شکل آن را عوض نمی‌کند. کله صلب از اینجا نشات می‌گیرد. به عنوان مثال، انعکاس

ها، دوران‌ها و انتقال‌ها ($x \to x + x_\circ$)، نمونه‌هایی از حرکات صلب هستند. در واقع ثابت خواهیم کرد که هر حرکت صلبی، ترکیبی از این سه نوع تبدیل است. حالت کلی در $\mathbb{R}^n$، در بخش ۶-۱۰ مورد بررسی قرار می‌گیرد و از نتایجی که در اینجا اثبات می‌کنیم، در ان بخش استفاده می‌کنیم.

تعریف:. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی حقیقی باشد. تابع $f : V \to V$ را یک **حرکت صلب** نامند، هر گاه برای هر $x, y \in V$:

$$||f(x) - f(y) = ||x - y||$$

با این که چندین نتیجه کلی در مورد حرکات صلب ثابت خواهیم کرد و نتیجه اصلی ما در $\mathbb{R}^۲$ بیان خواهد شد.

قضیه ۶.۲۲. هر حرکت صلب در $\mathbb{R}^۲$، از یکی از این دو نوع است: اول دوران (حول مرکز) و به دنبال آن یک انتقال یا این که یک انعکاس (نسبت به محور x ها) سپس یک دوران (حول مرکز) و به دنبال آن یک انتقال.

در طول بحث زیر، فرض خواهیم کرد که f یک حرکت صلب بر فضای ضرب داخلی حقیقی V است و $T : V \to V$ چنین تعریف می‌شود:

$$T(x) = f(x) - f(\circ) \qquad \text{برای هر } x \in V،$$

لم ۱۲. برای هر $x, y \in V$:

الف) $||T(x)|| = ||x||$.

ب) $||T(x) - T(y)|| = ||x - y||$.

ج) $< T(x), T(y) >=< x, y >$.

د) T خطی است.

در نتیجه T یک عملگر متعامد است.

برهان. الف) چون f یم حرکت صلب است، برای هر $x \in V$ داریم:

$$||T(x)|| = ||f(x) - f(\circ)|| = ||x - \circ|| = ||x||$$

ب) برای هر $x, y \in V$ داریم:

$$\begin{aligned} ||T(x) - T(y)|| &= ||f(x) - f(\circ) - (f(y) - f(\circ))|| \\ &= ||f(x) - f(y)|| = ||x - y|| \end{aligned}$$

ج) برای هر $x, y \in V$ داریم:

$$||T(x) - T(y)||^۲ = ||T(x)||^۲ - ۲\langle T(x), T(y)\rangle + ||T(y)||^۲$$

و

$$||x-y||^۲ = ||x||^۲ - ۲ < x, y > + ||y||^۲$$

حال (ج) از قسمت‌های الف و ب و دو نتیجه بالا نتیجه می‌شود.

د) برای هر $x, y \in V$ و هر $a \in \mathbb{R}$، طبق قسمت‌های الف، ب و ج داریم:

$$\begin{aligned}
||T(x+ay) - T(x) - aT(y)||^۲ &= ||[T(x+ay) - T(x)] - aT(y)||^۲ \\
&= ||[T(x+ay) - T(x)]||^۲ + a^۲||T(y)||^۲ \\
&- ۲a < T(x+ay) - T(x), T(y) > \\
&= ||[(x+ay) - (x)]||^۲ + a^۲||y||^۲ \\
&- ۲a[< T(x+ay), T(y) > - < T(x), T(y) >] \\
&= a^۲||y||^۲ + a^۲||y||^۲ - ۲a[< (x+ay), y > - < x, y >] \\
&= ۲a^۲||y||^۲ - ۲a[< x, y > + a||y||^۲ - < x, y >] \\
&= ۰
\end{aligned}$$

□

لم ۱۳. تابع f حاصل از اعمال یک انتقال به دنبال یک عملگر متعامد است.

برهان. طبق لم ۱، T عملگری متعامد است. هرگاه $U : V \to V$ را به صورت $U(x) = x + f(۰)$ برای هر x تعریف کنیم، U یک انتقال خواهد بود. پس برای هر x:

$$UT(x) = U(T(x)) = T(x) + f(۰) = f(x)$$

□

لم ۱۴. هرگاه V متناهی البُعد باشد، آنگاه $\det(T) = \pm ۱$.

برهان. فرض کنید β پایه متعامد یکه‌ای برای V باشد. در این صورت طبق قضیه ۶.۱۰ و تمرین ۱۶ از بخش ۶-۳ داریم:

$$\det(T^*) = \det([T^*]_\beta) = \det([T]_\beta^*) = \det([T]_\beta) = \det(T)$$

چون T طبق لم ۱ متعامد است، با استفاده از قضیه ۶.۱۸ (الف) داریم $I = T^*T$. بنابراین:

$$۱ = \det(I) = \det(T^*T) = \det(T).\det(T^*) = \det(T).\det(T) = \det(T)^۲$$

□

لم ۱۵. فرض کنید $V = \mathbb{R}^{۲}$ و β پایه مرتب استاندارد $\mathbb{R}^{۲}$ باشد. در این صورت زاویه $\theta (۰ \leq \theta < ۲\pi)$ چنان موجود است که :

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{هرگاه } \det(T) = ۱$$

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{هرگاه } \det(T) = -۱$$

برهان. فرض کنید $A = [T]_\beta$. چون طبق لم ۱، T عملگری متعامد است، از قضیه ۶.۱۸ (ج) نتیجه می‌شود که $T(\beta) = \{T(e_۱), T(e_۲)\}$ پایه‌ای متعامد یکه برای $\mathbb{R}^{۲}$ است. چون $T(e_۱)$ یک بردار یکه است، زاویه θ $(۰ \leq \theta < \pi)$ چنان موجود است که $T(e_۱) = (\cos\theta, \sin\theta)$. چون $T(e_۲)$، برداری یکه و عمود بر $T(e_۱)$ است فقط دو انتخاب ممکن برای $T(e_۲)$ وجود دارد: یا $T(e_۲) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ یا $T(e_۲) = (\sin\theta, -\cos\theta)$.

در صورتی که $\det(T) = ۱$، باید حالت اول را داشته باشیم، اگر $\det(T) = -۱$ باید حالت دوم درست باشد. □

برهان (قضیه ۶-۲۲). طبق لم ۲، کافی است عملگر متعامد T را بررسی کنیم. طبق لم ۳، $\det(T) = \pm۱$. طبق لم ۴، اگر $\det(T) = ۱$، می‌بینیم که T دوران به اندازه θ است. هرگاه $\det(T) = -۱$، با استفاده از:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم که T انعکاس نسبت به محور xها و به دنبال آن یک دوران است. □

مقاطع مخروطی

به عنوان کاربردی از قضیه ۶.۲۰، معادله درجه دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$ax^{۲} + ۲bxy + cy^{۲} + dx + ey + f = ۰ \qquad (۶\text{-}۲)$$

با انتخاب مقادیر خاص برای ضرایب معادله ۶-۲، مقاطع مخروطی مختلف را به دست می‌آوریم. به عنوان نمونه، هرگاه $a = c = ۱$، $b = d = e = ۰$ و $f = -۱$، دایره $x^{۲} + y^{۲} = ۱$ را که مرکز آن مبدا مختصات است به دست می‌آوریم. سایر مقاطع مخروطی، یعنی سهمی، بیضی و هذلولی با اختیار کردن مقادیر دیگر برای ضرایب به دست می‌آیند. رسم نمودار هر یک از مثال‌های قبلی با استفاده از روش کامل کردن مربع ساده است، زیرا جمله xy در آنها حذف شده است. به عنوان مثال، معادله $x^{۲} + ۲x + y^{۲} + ۴y + ۲ = ۰$ را می‌توان به صورت $(x + ۱)^{۲} + (y + ۲)^{۲} = ۳$ نوشت، که دایره به

مرکز $(-۱, -۲)$ و شعاع $\sqrt{۳}$ را در دستگاه مختصات xy نشان می‌دهد. اگر تبدیل مختصات $(x,y) \to (x',y')$ را که $x' = x + ۱$ و $y' = y + ۲$ را در نظر بگیریم معادله مان به $(x')^۲ + (y')^۲ = ۳$ تقلیل می‌یابد. این تغییر متغیر به ما امکان حذف جملات x و y را می‌دهد.

حال صرفاً به حذف جمله xy می‌پردازیم. برای رسیدن به این هدف، این جمله را در نظر می‌گیریم:

$$ax^۲ + ۲bxy + xy^۲$$

که فرم درجه دوم مربوط به معادله ۶-۲ نام دارد. فرم‌های درجه دوم به صورت کلی تری در بخش ۶-۷ مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.

اگر فرض کنیم که:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

در این صورت معادله ۶-۲ را می‌توان به صورت $X^tAX =< AX, X >$ نوشت. به عنوان مثال، می‌توان فرم درجه دوم $۳x^۲ + ۴xy + ۶y^۲$ را به این صورت نوشت:

$$X^t \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix} X$$

این حقیقت که A متقارن است در بحث ما بسیار مهم است. چرا که طبق قضیه ۶.۲۰، می‌توانیم ماتریس متعامد P و ماتریس قطری D با درایه‌های حقیقی $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ را چنان بیابیم که $P^tAP = D$. حال:

$$X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

را به صورت $X' = P^tX$ تعریف می‌کنیم که با معادله $PX' = PP^tX = X$ معادل است. در این صورت:

$$X^tAX = (PX')^tA(PX') = (X')^t(P^tAP)X' = (X')^tDX' = \lambda_۱(x')^۲ + \lambda_۲(y')^۲$$

بنابراین تبدیل $(x,y) \to (x',y')$ به ما امکان حذف جمله xy را در معادله ۶-۳ و در نتیجه ۶-۲ می‌دهد.

به علاوه چون P متعامد است، طبق لم ۳ برای قضیه ۶-۲۲ (به ازای $T = L_P$) داریم $\det(P) = \pm ۱$. اگر $\det(P) = -۱$، می‌توانیم با تعویض ستون‌های P ماتریس Q را به دست آوریم. چون ستون‌های P تشکیل پایه‌ای متعامد یکه از بردارهای ویژه A می‌دهند، در مورد ستون‌های Q نیز چنین است. بنابراین:

$$Q^tAQ = \begin{bmatrix} \lambda_۲ & ۰ \\ ۰ & \lambda_۱ \end{bmatrix}$$

توجه کنید که $\det(Q) = -\det(P) = ۱$. بنابراین در صورتی که $\det(P) = -۱$ می‌توانیم Q را به عنوان Pی جدیدمان انتخاب کنیم، در نتیجه فرض می‌کنیم $\det(P) = ۱$. طبق لم ۴ برای قضیه ۲.۶ (به ازای $T = L_P$) نتیجه می‌شود که ماتریس P نمایانگر یک دوران است.

به طور خلاصه، جمله xy معادله ۶-۲ را می‌توان با دوران دادن محورهای x و y به محورهای جدید x' و y' که با معادله $X = PX'$ مشخص می‌شوند، حذف کرد، که P ماتریسی متعامد است و $\det(P) = ۱$ به علاوه ضرایب $(x')^۲$ و $(y')^۲$ مقادیر ویژه:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

هستند

این نتیجه، بیان دیگری از نتیجه ای است که به عنوان قضیه اساسی محورها در $\mathbb{R}^۲$ شناخته شده است. البته استدلال‌های بالا را می‌توان به راحتی به معادلات درجه دوم بر حسب n متغیر تعمیم داد. به عنوان مثال، در حالت $n = ۳$، با اختیار کردن مقادیر خاصی برای ضرایب سطوح درجه دوم را به دست می‌آوریم -مخروط بیضوی، بیضی گون، سهمی گون هذلولوی و غیره-.

به عنوان نمونه، معادله درجه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$x^۲ - ۴xy + ۵y^۲ - ۳۶ = ۰$$

که فرم درجه دوم متناظر با آن، $۲x^۲ - ۴xy + ۵y^۲$ است. با نماد گذاری بالا،

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

و بنابراین مقادیر ویژه A، ۱و ۶ هستند، که بردارهای ویژه متناظر با آنها عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

همانگونه که (طبق قضیه ۱۵.۶ قسمت د) انتظار می‌رفت، این بردارها متعامد هستند. پایه متعامد یکه متشکل از بردارهای ویژه حاصل از آنها، یعنی:

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{۲}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix} \right\}$$

محورهای جدید x' و y' را به صورت نشان داده شده در تصویر ۶-۳ معین می‌کند. بنابراین اگر:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{۲}{\sqrt{۵}} & \frac{-۱}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix} = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

خواهیم داشت:

$$P^tAP = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

تحت تبدیل $X = PX'$، یا

$$x = \frac{۲}{\sqrt{۵}}x' - \frac{۱}{\sqrt{۵}}y'$$
$$y = \frac{۱}{\sqrt{۵}}x' + \frac{۲}{\sqrt{۵}}y'$$

فرم درجه دوم جدید $(x')^۲ + ۶(y')^۲$ را به دست می‌آوریم. بنابراین معادله اصلی $۲x^۲ - ۴xy + ۵y^۲ = ۳۶$ را می‌توان نسبت به دستگاه مختصات جدید، که محورهای x' و y' آن به ترتیب هم جهت با عناصر اول و دوم β هستند، به شکل $(x')^۲ + ۶(y')^۲ = ۳۶$ نوشت. واضح است که این معادله یک بیضی را نشان می‌دهد (به شکل ۶-۳ رجوع کنید). توجه کنید که ماتریس Pی بالا، به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

که $\theta = \cos^{-۱}(\frac{۲}{\sqrt{۵}}) \approx ۲۶/۶^\circ$. پس P نمایش ماتریس دوران $\mathbb{R}^۲$ به اندازه زاویه θ است. بنابراین تغییر متغیر $X = PX'$ را می‌توان با اعمال این دوران بر محورهای x و y به دست آورد. با این حال، انتخاب دیگری نیز برای P وجود دارد. اگر بردار ویژه نظیر ۶ را به جای $(-۱, ۲)$ برابر با $(۱, -۲)$ بگیریم، این ماتریس را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۵}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} \\ \frac{-۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix}$$

که نمایش ماتریسی دوران به اندازه زاویه $\theta = \sin^{-۱}(\frac{-۲}{\sqrt{۵}}) \approx -۶۳/۴^\circ$ این انتخاب نیز همان بیضی شکل ۶-۳ را پدید می‌آورد، اما نام‌های محورهای x' و y' را با هم عوض می‌کند.

تمرینات

۱. تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است. فرض کنید که فضاهای ضرب داخلی مورد نظر، متناهی البُعد هستند.

الف) هر عملگریکانی، نرمال است.

ب) هر عملگر متعامد، قطری پذیر است.

ج) هر ماتریس یکانی است، اگر و تنها اگر وارون پذیر باشد.

د) اگر دو ماتریس هم ارز یکانی باشند، متشابه نیز هستند.

ه) مجموع دو ماتریس یکانی، یکانی است.

و) الحاقی یک عملگریکانی، یکانی است.

ز) اگر T عملگری متعامد بر V باشد، آنگاه $[T]_\beta$ به ازای هر پایه مرتب β برای V، ماتریسی متعامد است.

ح) اگر همه مقادیر ویژه یک عملگر خطی ۱ باشند، آن عملگریا یکانی است یا متعامد.

ط) یک عملگر خطی ممکن نرم را حفظ کند، اما ضرب داخلی را حفظ نکند

۲. برای هر یک از ماتریس‌های A در زیر، ماتریسی متعامد یا یکانی مانند P و ماتریسی قطری مانند D را چنان بیابید که $P^*AP = D$.

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۲ & ۳-۳i \\ ۳+۳i & ۵ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ ه) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$

۳. ثابت کنید که ترکیب دو عملگریکانی [متعامد]، یکانی [متعامد] است.

۴. برای هر $z \in \mathbb{C}$ ، $T_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ را به صورت $T_z(u) = zu$ تعریف کنید. آن zهایی را به ازای آنها T_z نرمال، خود الحاقی و یا یکانی است، توصیف کنید.

۵. کدامیک از زوج‌های ماتریسی زیر هم ارز یکانی هستند؟

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & i & ۰ \\ -i & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ فرض کنید V، فضای ضرب داخلی متشکل از توابع پیوسته مختلط بر

بازه $[۰,۱]$، با ضرب داخلی زیر باشد:

$$< f,g >= \int_۰^۱ f(t)\overline{g(t)}dt$$

۶. فرض کنید $h \in V$، و $T : V \to V$ را چنین تعریف کنید $T(f) = hf$. ثابت کنید که T عملگری یکانی است اگر و تنها اگر برای هر $۰ \leq t \leq ۱$، $|h(t)| = ۱$.

۷. ثابت کنید که اگرT عملگریکانی بر یک فضای ضرب داخلی متناهی البُعد مختلط باشد، آنگاه T یک ریشه دوم یکانی خواهد داشت، یعنی عملگری یکانی مانند U موجود است به گونه‌ای که $T = U^۲$.

۸. فرض کنید T عملگری خود الحاقی بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد V باشد. با استفاده از تمرین ۹ بخش، ثابت کنیدکه $(T+iI)(T-iI)^{-۱}$ یکانی است.

۹. فرض کنید U عملگری خطی بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد V باشد. اگر برای هر x در یک پایه متعامد یکه برای V، $||U(x)|| = ||x||$، آیا U الزاما یکانی است؟ یا این مطلب را اثبات کنید یا مثال نقضی برای آن بیاورید.

۱۰. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ متقارن حقیقی یا نرمال مختلط باشد، ثابت کنید که :

$$\mathrm{tr}(A^*A) = \sum_{i=۱}^n |\lambda_i| \qquad \text{و} \qquad tr(A) = \sum_{i=۱}^n \lambda_i$$

که λ_iها مقادیر ویژه (نه لزوما متمایز) A هستند.

۱۱. ماتریسی متعامد بیابید که سطر اول آن $(\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳})$ باشد.

۱۲. فرض کنید A یک ماتریس متقارن حقیقی یا نرمال مختلط $n \times n$ باشد. ثابت کنید:

$$\det(A) = \prod_{i=۱}^n \lambda_i$$

که λ_iها مقادیر ویژه (نه لزوما متمایز) A هستند.

۱۳. فرض کنید که A و B دو ماتریس قطری پذیر باشند. این مطلب را ثابت یا رد کنید که A و B متشابه هستند اگر و تنها اگر A و B، هم ارز یکانی باشند.

۱۴. فرض کنید که U یک عملگریکانی بر فضای ضرب داخلی V، و W یک زیر فضای U-پایای متناهی البُعد V باشد. ثابت کنید که:

الف) $U(W)=W$.

ب) $W^{\perp}$، U-پایاست.

قسمت (ب) را با تمرین ۱۵ مقایسه کنید.

۱۵. نمونه‌ای از یک عملگریکانی U بر یک فضای ضرب داخلی و یک زیر فضای U-پایای W بیابید که $W^{\perp}$، U-پایا نباشد.

۱۶. ثابت کنید ماتریسی که هم یکانی و هم بالا مثلثی است، باید ماتریسی قطری باشد.

۱۷. ثابت کنیدکه «هم ارز یکانی بودن» یک رابطه هم ارزی بر $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ است.

۱۸. فرض کنید W زیر فضای متناهی البُعد از فضای ضرب داخلی V باشد. طبق قضیه ۶-۷ و تمرین‌های بخش ۱-۳، $U:V\to V=W\oplus W^{\perp}$ را چنین تعریف کنید $U(v_۱+v_۲)=v_۱-v_۲$، که $v_۱\in W$ و $v_۲\in W^{\perp}$. ثابت کنید که U یک عملگریکانی خود الحاقی است.

۱۹. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی البُعد باشد. عملگر خطی U بر V را یک **ایزومتری جزئی** گویند، هر گاه زیر فضای W از V چنان موجود باشد که برای هر $x\in W$، $||U(x)||=||x||$ و برای هر $x\in W^{\perp}$، $U(x)=۰$. ملاحظه کنید که W لزوماً U-پایا نیست. فرض کنید که U یک چنین عملگری باشدو $\{v_۱,...,v_k\}$ پایه‌ای متعامد یکه برای W. موارد زیر را ثابت کنید:

الف) برای هر $x,y\in W$، $<U(x),U(y)>=<x,y>$. راهنمایی: از تمرین ۲۰ بخش ۶-۱ استفاده کنید.

ب) $\{U(v_۱),...,U(v_k)\}$ پایه‌ای متعامد یکه برای $R(U)$ است.

ج) پایه متعامد یکه γ برای V چنان موجود است که K ستون اول $[U]_\gamma$ تشکیل مجموعه‌ای متعامد یکه می‌دهند و سایر ستون‌ها صفر هستند.

د) فرض کنید $\{w_۱,...,w_j\}$ پایه‌ای متعامد یکه برای $R(U)^{\perp}$ باشد. فرض کنید

$$\beta=\{U(v_۱),...,U(v_k),w_۱,...,w_j\}$$

. در این صورت β پایه متعامد یکه برای V است.

ه) فرض کنید T عملگر خطی ای بر V باشد که در $T(U(v_i))=v_i$ ، $(۱\le i<k)$، $T(w_i)=۰$، $(۱\le i\le k)$ صدق می‌کند. ثابت کنید که T خوش تعریف است و $T=U^*$. راهنمایی: ثابت کنید که برای هر $x,y\in\beta$، $<U(x),y>=<x,T(y)>$. چهار حالت وجود دارد.

و) ثابت کنید که U^* یک ایزومتری جزئی است.

این تمرین در تمرین ۹ بخش ۶-۶ ادامه می‌یابد.

۲۰. فرض کنید A و B ماتریس‌هایی $n \times n$ باشند که هم ارز یکانی هستند:

الف) ثابت کنید $tr(A^*A) = tr(B^*B)$.

ب) با استفاده از (الف) ثابت کنید که

$$\sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |B_{ij}|^2$$

۲۱. مختصات جدید x', y' را به گونه‌ای بیابید که فرم‌های درجه دوم زیر را بتوان به صورت $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$ نوشت.

الف) $x^2 + 4xy + y^2$

ب) $2x^2 + 2xy + y^2$

ج) $x^2 - 12xy - 4y^2$

د) $3x^2 + 2xy + 3y^2$

ه) $x^2 - 2xy + y^2$

۲۲. عبارت X^tAX را در نظر بگیرید که $X^t = (x, y, z)$ و A به گونه‌ای باشد که در تمرین ۲ (هـ) آمده است. تبدیل مختصات x' و y' و z' را به گونه‌ای بیاید که عبارت فوق را بتوان به صورت $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2$ نوشت.

۲۳. فرض کنید $w_1, \ldots, w_n$ بردارهایی مستقل خطی در F^n باشند و $u_1, \ldots, u_n$ بردارهای متعامدی باشند که از طریق فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت از $w_1, \ldots, w_n$ به دست می‌آیند. فرض کنید $v_1, \ldots v_n$ پایه متعامد یکه ای باشد که از قرار دادن

$$v_k = \frac{1}{||u_k||} u_k \quad \text{برای هر } k$$

به دست می‌آید.

الف) با حل معادله (۱) در بخش ۶-۲ نسبت به w_k و بر حسب v_k، نشان دهید که

$$w_k = ||u_k|| v_k + \sum_{j=1}^{k-1} < w_k, v_j > v_j \qquad (1 \leq k \leq n)$$

ب) فرض کنید A و Q نشان دهنده ماتریس‌های $n \times n$ای باشند که ستون kام آنها به ترتیب w_k و v_k باشد. $R \in M_{n\times n}(F)$ را چنین تعریف کنید:

$$R_{jk} = \begin{cases} ||u_j|| & \text{هرگاه } j = k \\ < w_k, v_j > & \text{هرگاه } j < k \\ \circ & \text{هرگاه } j > k \end{cases}$$

ثابت کنید که $A = QR$.

ج) Q و R قسمت ب را برای ماتریس ۳ × ۳ای که ستون‌های آن به ترتیب بردارهای $w_۱, w_۲, w_۳$ در مثال ۴ از بخش ۶-۲ هستند، حساب کنید.

د) چون در قسمت ب، Q یکانی [متعامد] و R بالا مثلثی است، نشان دادیم که هر ماتریس وارون پذیر، حاصلضرب یک ماتریس یکانی [متعامد] در یک ماتریس بالا مثلثی است. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$ وارون پذیر باشد و $A = Q_۱R_۱ = Q_۲R_۲$ که $Q_۱, Q_۲ \in M_{n\times n}(F)$ یکانی هستند و $R_۱, R_۲ \in M_{n\times n}(F)$ بالا مثلثی اند. ثابت کنید $D = R_۲R_۱^{-۱}$ یک ماتریس قطری یکانی است. راهنمایی: از تمرین ۱۶ استفاده کنید.

هـ) تجزیه به صورت QR که در قسمت ب توضیح داده شد، روشی برای حل دستگاه خطی $Ax = b$، هنگامی که A وارون پذیر است، با استفاده از متعامد سازی ارائه می‌کند، از طریق فرآیند گرام-اشمیت یا هر راه دیگری A را به شکل QR تجزیه کنید که Q یکانی و R بالا مثلثی باشد. در این صورت، $QRx = b$ و در نتیجه $Rx = Q^*b$. دستگاه اخیر را به راحتی می‌توان حل کرد چرا که R بالا مثلثی است.

زمانی این روش حل دستگاه‌های معادلات خطی به خاطر پایداری بالایش، به عنوان روشی بهتر از روش حذفی گاوس در حل دستگاه‌های بزرگ معادلات خطی از طریق کامپیوتر، مورد حمایت قرار می‌گرفت. حتی با وجود این که تقریباً سه برابر آن کار لازم دارد (با این حال بعدها جی. ایچ. ویلکینسن نشان داد که حذف به روش گاوس، اگر به طرز «مناسب» صورت بگیرد، تقریبا به اندازه روش متعامد سازی پایدار است). با استفاده از روش متعامد سازی و قسمت ج، دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} x_۱ + ۲x_۲ + ۲x_۳ &= ۱ \\ x_۱ + \qquad ۲x_۳ &= ۱۱ \\ x_۲ + x_۳ &= -۱ \end{aligned}$$

۲۴. فرض کنید β و γ پایه‌های مرتب برای فضای ضرب داخلی n-بعدی حقیقی [مختلط] V باشند. ثابت کنید که اگر Q، ماتریس متعامد [یکانی] $n \times n$ای باشد که مختصات در پایه γ را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند، آنگاه β متعامد یکه است اگر و تنها اگر γ چنین باشد.

۲۵. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی البُعد مختلط [حقیقی] وu برداری یکه در V باشد. عملگر **هاوس هولدر**، $H_u : V \to V$ را به صورت $H_u(x) = x - 2 < x, u > u$ برای هر $x \in V$ تعریف کنید. موارد زیر را ثابت کنید:

الف) H_u خطی است.

ب) $H_u(x) = x$ اگر و تنها اگر x و u متعامد باشند.

ج) $H_u(u) = -u$

د) $H_u^* = H_u$ و $H_u^2 = I$. در نتیجه H_u عملگری یکانی [متعامد] بر V است.

(**تذکر:** اگر V یک فضای ضرب داخلی حقیقی باشد، در این صورت به زبان بخش ۶-۱۰ H_u یک «انعکاس» است.)

۲۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی البُعد بر F باشد. فرض کنید $x \neq y$، دو بردار ناصفر در V باشند که $||x|| = ||y||$.

الف) اگر $F = \mathbb{C}$ ثابت کنید که بردار یکه u در V و عدد مختلط θ که $|\theta| = 1$ چنان موجودند که $H_u(x) = \theta y$ (H_u در تمرین ۲۵ تعریف شد). راهنمایی: θ را طوری انتخاب کنید که $< x, \theta y >$ حقیقی باشد و قرار دهید: $u = \frac{\theta}{||x-y||}(x - y)$.

ب) اگر $F = \mathbb{R}$، ثابت کنید که بردار یکه u و V چنان موجود است که $H_u(x) = y$.

۶-۶ تصویرهای متعامد و قضیه طیفی

در این بخش با تکیه فراوان بر قضایای ۶.۱۶ و ۶.۱۷، روشی برای به دست آوردن نمایشی ظریف برای عملگر نرمال (در صورتی که $F = \mathbb{C}$) یا خود الحاقی (در صورتی که $T(F = \mathbb{R}$، بر یک فضای ضرب داخلی متناهی البُعد به دست خواهیم آورد. ثابت می‌کنیم که چنین عملگری را می‌توان به شکل $\lambda_1 T_1 + ... + \lambda_k T_k$ نوشت که $\lambda_1, ..., \lambda_k$، مقادیر ویژه متمایز $T, T_1, ..., T_k$، تصاویری متعامد هستند. ابتدا باید چند نتیجه در مورد این تصویرهای خاص به دست آوریم.

فرضمان بر آن است که خواننده با نتایجی که در پایان بخش ۵-۲ در مورد مجموعهای مستقیم ثابت شد، آشنایی داشته باشد. حالت خاصی که در آن، V مجموع مستقیم دو زیر فضاست، در تمرینات بخش ۱-۳ مورد بررسی قرار گرفته است.

از تمرینات بخش ۲-۱ به یاد آورید که اگر $V = W_1 \oplus W_2$، آنگاه عملگر خطی T بر V را **تصویر** بر W_1 در **راستای** W_2 گویند، هرگاه اگر $x = x_1 + x_2$ که $x_1 \in W_1$ و $x_2 \in W_2$، داشته باشیم $T(x) = x_1$. طبق تمرین ۲۴ از بخش ۲-۱ داریم:

$$N(T) = W_۲ \text{ و } R(T) = W_۱ = \{x \in V : T(x) = x\}$$

بنابراین $V = R(T) \oplus N(T)$. پس ابهامی به وجود نخواهد آمد اگر T را «تصویری بر $W_۱$»، یا به طور ساده تر «تصویر» بخوانیم. در واقع می‌توان نشان داد (به تمرین ۱۴ از بخش ۲-۳ رجوع کنید) که T یک تصویر است اگر و تنها اگر $T = T^۲$. چون $V = W_۱ \oplus W_۲ = W_۱ \oplus W_۳$، ایجاب کننده آن نیست که $W_۲ = W_۳$، می‌بینیم که $W_۱$، T را به طور یکتا مشخص نمی‌کند. با این حال، برای هر تصویر متعامد T،برد T آن را به طور یکتا مشخص می‌کند.

تعریف:. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی و $T : V \to V$ یک تصویر باشد. گوییم T یک تصویر متعامد است، هرگاه $N(T)^\perp = R(T), R(T)^\perp = N(T)$.

از تمرین ۱۲ (ج) از بخش ۶-۲ به یاد آورید که اگر V متناهی البُعد باشد، کافی است که فقط یکی از شرایط بالا برقرار باشد. به عنوان مثال، اگر $R(T)^\perp = N(T)$، آنگاه $R(T) = R(T)^{\perp\perp} = N(T)^\perp$.

حال فرض کنید که W یک زیر فضای متناهی البُعد فضای ضرب داخلی V باشد. با در نظر گرفتن مفروضات و نمادگذاری‌های حکم ۶.۶، می‌توانیم تابع $T : V \to V$ را به صورت $T(y) = u$ تعریف کنیم. به راحتی می‌توان نشان داد که T، تصویری متعامد بر W است. می‌توانیم بیش از این هم بگوییم. دقیقا یک تصویر متعامد بر W وجود دارد، چرا که اگر T و U تصاویر متعامد بر W باشد، آنگاه $R(T) = W = R(U)$. در نتیجه $N(T) = R(T)^\perp = R(U)^\perp = N(U)$ و چون هر تصویری را برد و فضای پوچ آن به طور یکتا مشخص می‌کنند، داریم $T.T = U$ را تصویر متعامد بر W می‌نامیم.

برای درک تفاوت هندسی بین یک تصویر دلخواه بر W و تصویر متعامد بر آن، فرض کنید $V = \mathbb{R}^۲$ و $U.W = span\{(۱,۱)\}$ و T را همانگونه که در تصویر ۶-۴ نشان داده شده تعریف کنید، که در آن $T(v)$ پای عمود رسم شده از نقطه v بر خط $y = x$ و $U(a_۱, a_۲) = (a_۱, a_۱)$. بنابراین T تصویر متعامد بر W است و U تصویری بر W است که متعامد نیست. توجه کنید که $v - T(v) \in W^\perp$ در حالی که $v - U(v) \notin W^\perp$. از تصویر ۶ − ۴ متوجه می‌شویم که $T(v)$، بهترین تقریب برای v در W است، یعنی اگر $w \in V$، آن گاه $||w - v|| > ||T(v) - v||$. در واقع، این خاصیت تقریب زدن، T را به طور یکتا مشخص می‌کند. این مطلب بلافاصله از نتیجه حکم ۶-۶ نتیجه می‌شود.

به عنوان یک کاربرد در زمینه آنالیز فوریه، فضای ضرب داخلی Hو مجموعه متعامد یکه S را از مثال ۹ بخش ۶-۱ به خاطر آورید. یک چند جمله‌ای مثلثاتی از درجه n را به صورت تابع $g \in H$ای تعریف کنید که شکل زیر را داشته باشد:

$$g(t) = \sum_{j=-n}^{n} a_j f_j(t) = \sum_{j=-n}^{n} a_j e^{ijt}$$

که یکی از a_n و a_{-n} در اینجا ناصفر است.

فرض کنید $f \in H$. ثابت می‌کنیم که بهترین تقریب برای f به صورت یک چند جمله‌ای مثلثاتی با درجه کوچکتر یا مساوی n، برابر با آن چند جمله‌ای مثلثاتی‌ای است که ضرایب آن، ضرایب فوریه f نسبت به پایه متعامد یکه S هستند.

برای کسب این نتیجه، فرض کنید که $W = span(\{f_j : |j| \leq n\})$ و T تصویر متعامد بر W باشد. نتیجه حکم ۶.۶ بیان می‌دارد که بهترین تقریب برای f به صورت عضوی از W عبارت است از :

$$T(f) = \sum_{j=-n}^{n} < f, f_j > f_j$$

در قضیه بعدی توصیفی جبری از تصاویر متعامد ارائه شده است.

قضیه ۲۳.۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی و T عملگری خطی بر V باشد. در این صورت، T یک تصویر متعامد است اگر و تنها اگر دارای الحاقی T^* باشد و $T^۲ = T = T^*$.

برهان. فرض کنید T یک تصویر متعامد باشد. از آنجا که T یک تصویر است، $T^۲ = T$، کافی است ثابت کنیم که T^* وجود دارد و $T = T^*$. حال داریم $R(T)^\perp = N(T), V = R(T) \oplus N(T)$. فرض کنید که $x, y \in V$. در این صورت $y = y_۱ + y_۲$ و$x = x_۱ + x_۲$ که $x_۱, y_۱ \in R(T)$ و $x_۲, y_۲ \in N(T)$. در نتیجه:

$$< x, T(y) >=< x_۱ + x_۲, y_۱ >=< x_۱, y_۱ > + < x_۲, y_۱ >=< x_۱, y_۱ >$$

و

$$< T(x), y >=< x_۱, y_۱ + y_۲ >=< x_۱, y_۱ > + < x_۱, y_۲ >=< x_۱, y_۱ >$$

بنابراین برای هر $x, y \in V$، $< x, T(y) >=< T(x), y >$ و در نتیجه T^* موجود است و $T = T^*$.

حال فرض کنید $T^۲ = T = T^*$. در این صورت طبق تمرین ۱۴ از بخش ۲-۳، T یک تصویر است و در نتیجه باید نشان دهیم که $R(T) = N(T)^\perp$ و $R(T)^\perp = N(T)$. فرض کنید که $x \in R(T)$ و $y \in N(T)$. در این صورت، $x = T(x) = T^*(x)$ و بنابراین:

$$< x, y >=< T^*(x), y >=< x, T(y) >=< x, ۰ >= ۰$$

در نتیجه $x \in N(T)^\perp$ که از آن نتیجه می‌شود که $R(T) \subseteq N(T)^\perp$.

فرض کنید $y \in N(T)^\perp$. باید ثابت کنیم که $y \in R(T)$، یعنی $T(y) = y$. حال:

$$\begin{aligned} ||y - T(y)||^۲ &= < y - T(y), y - T(y) > \\ &= < y, y - T(y) > - < T(y), y - T(y) > \end{aligned}$$

از آنجا که $y - T(y) \in N(T)$، جمله اول باید بردار صفر باشد، اما علاوه بر این :

$$< T(y), y - T(y) >=< y, T^*(y - T(y)) >=< y, T(y - T(y)) >=< y, ۰ >= ۰$$

در نتیجه، $y - T(y) = ۰$ یعنی $y = T(y) \in R(T)$. در نتیجه $R(T) = N(T)^\perp$.

با استفاده از نتایج بالا (طبق تمرین ۱۲، قسمت ب از بخش ۶-۲)، داریم: $R(T)^{\perp} = N(T)^{\perp\perp} \subseteq N(T)$.
فرض کنید $u \in R(T)^{\perp}$. برای هر $y \in V$ داریم: $0 = \langle x, T(y) \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle$. در نتیجه $T(x) = 0$ و بنابراین $x \in N(T)$. در نتیجه، $R(T)^{\perp} = N(T)$. □

فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی البُعد، W زیر فضایی از V و T تصویر متعامد بر W باشد. می‌توانیم پایه متعامد یکه $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ را برای V چنان بیابیم که $\{v_1, ..., v_k\}$ پایه‌ای برای W باشد. در این صورت $[T]_\beta$ ماتریسی قطری است که در k درایه قطری اول آن، یک و در سایر درایه‌ها صفر قرار دارد. در واقع $[T]_\beta$ به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} I_k & O_1 \\ O_2 & O_3 \end{bmatrix}$$

اگر U یک تصویر بر W باشد. می‌توانیم پایه γ را چنان بیابیم که $[U]_\gamma$ به شکل بالا باشد. با این حال γ لزوماً متعامد یکه نیست.

حال برای قضیه اصلی این بخش آماده‌ایم.

قضیه ۲۴.۶ (قضیه طیفی). فرض کنید T عملگری خطی بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد V بر F، با مقادیر ویژه متمایز $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ باشد. فرض کنید که اگر $F = \mathbb{C}$، T نرمال و اگر $F = \mathbb{R}$، T خود الحاقی باشد. برای هر i ($1 \leq i \leq k$)، فرض کنید W_i فضای ویژه T متناظر با مقدار ویژه λ_i و T_i تصویر متعامد بر W_i باشد. در این صورت، موارد زیر همواره برقرارند:

الف) $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$.

ب) هرگاه W_i' نشان‌دهنده مجموع زیرفضاهای W_j، $j \neq i$ باشد، آنگاه $W_i^{\perp} = W_i'$.

ج) برای هر $1 \leq i, j \leq k$، $T_i T_j = \delta_{ij} T_i$.

د) $I = T_1 + \ldots + T_k$.

ه) $T = \lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_k T_k$.

برهان. الف) طبق قضایای ۱۶.۶ و ۱۷.۶، T قطری پذیر است. بنابراین طبق قضیه ۱۶.۵:

$$V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$$

ب) هرگاه به ازای $i \neq j$ ای، $x \in W_i$ و $y \in W_j$، آنگاه طبق قضیه ۱۵.۶ قسمت د، $\langle x, y \rangle = 0$. از اینجا به راحتی

نتیجه می‌شود که $W_i' \subseteq W_i^\perp$. از (الف) داریم:

$$\dim(W_i') = \sum_{j \neq i} \dim(W_j) = \dim(V) - \dim(W_i)$$

از طرف دیگر طبق قضیه ۷.۶ (ج)، $\dim(W_i^\perp) = \dim(V) - \dim(W_i)$. در نتیجه $W_i' = W_i^\perp$، که (ب) را ثابت می‌کند.

ج) اثبات (ج) به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

د) چون T_i تصویر متعامد بر W_i است، از (ب) داریم: $N(T_i) = R(T_i)^\perp = W_i^\perp = W_i'$. در نتیجه برای هر $x \in V$ داریم: $x = x_1 + \ldots + x_k$، که $x_i \in W_i$ و $T_i(x) = x_i$، و به این ترتیب (د) ثابت می‌شود.

ه) برای هر $x \in V$، می‌نویسیم $x = x_1 + \ldots + x_k$ که $x_i \in W_i$. در این صورت،

$$\begin{aligned} T(x) &= T(x_1) + \ldots + T(x_k) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k \\ &= \lambda_1 T_1(x) + \ldots + \lambda_k T_k(x) = (\lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_k T_k)(x) \end{aligned}$$

مجموعه $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ متشکل از مقادیر ویژه T، **طیف** T نام دارد و مجموع $I = T_1 + \ldots + T_k$ در قسمت د، **تفکیک همانی القاء شده** از T و مجموع $T = \lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_k T_k$ در قسمت ه، **تفکیک طیفی** T نام دارد. چون زیرفضاهای W_i (و بنابراین تصاویر متعامد T_i) مقادیر ویژه متمایز T را (صرف نظر از ترتیب) به طور یکتا مشخص می‌کنند، تفکیک طیفی T یکتاست.

با در نظر گرفتن نمادگذاری‌های فوق، فرض کنید β اجتماع پایه‌هایی متعامد یکه برای W_iها باشد و $m_i = \dim(W_i)$ (در نتیجه، m_i چند گانگی λ_i است). در این صورت، $[T]_\beta$ به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & O & \ldots & O \\ O & \lambda_2 I_{m_2} & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \ldots & \lambda_k I_{m_k} \end{bmatrix}$$

یعنی $[T]_\beta$ ماتریسی قطری است که درایه‌های قطری آن مقادیر ویژه T، یعنی λ_iها هستند و هر λ_i، m_i بار تکرار شده است. اگر $\lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_n T_n$، تفکیک طیفی T باشد، از تمرین ۷ نتیجه می‌شود که برای هر چندجمله‌ای g، $g(T) = g(\lambda_1)T_1 + \ldots + g(\lambda_k)T_k$. این حقیقت، در مطالب زیر به کار رفته است.

حال چند نتیجه جالب قضیه طیفی را بر می‌شماریم؛ نتایج بسیار زیاد دیگری در تمرینات یافت می‌شوند. در مطالب

زیر، فرض خواهیم کرد که T عملگری خطی بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد V بر F باشد. □

نتیجه ۱. هرگاه $F = \mathbb{C}$، آنگاه T نرمال است اگر و تنها اگر به ازای چند جمله‌ای g ای، $T^* = g(T)$.

برهان. ابتدا فرض کنید که T نرمال باشد و $T = \lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_k T_k$، تفکیک طیفی T باشد. با گرفتن الحاقی از دو طرف نامساوی بالا، چون هر T_i خود الحاقی است، داریم $T^* = \overline{\lambda}_1 T_1 + \ldots + \overline{\lambda}_k T_k$. با استفاده از فرمول درونیابی لاگرانژ (به بخش ۱-۶ رجوع کنید)، می‌توانیم چند جمله‌ای g را چنان انتخاب کنیم که برای هر $1 \leq i \leq k$، $g(\lambda_i) = \overline{\lambda}_i$. در این صورت:

$$\begin{aligned} g(T) &= g(\lambda_1)T_1 + \ldots + g(\lambda_k)T_k \\ &= \overline{\lambda}_1 T_1 + \ldots + \overline{\lambda}_k T_k \\ &= T^* \end{aligned}$$

بر عکس، اگر به ازای چند جمله‌ای g ای، $T^* = g(T)$، آنگاه T با T^* جابجا می‌شود، چرا که T با هر چند جمله‌ای بر حسب T جابجا می‌شود. پس T نرمال است. □

نتیجه ۲. هرگاه $F = \mathbb{C}$، آنگاه T یکانی است، اگر و تنها اگر T نرمال باشد و برای هر مقدار ویژه T چون λ، $|\lambda| = 1$.

برهان. ابتدا فرض کنید که T یکانی و در نتیجه نرمال است. فرض کنید λ مقدار ویژه‌ای از T، با بردار ویژه متناظر x باشد. در این صورت $\|x\| = \|T(x)\| = \|\lambda x\| = \|x\| \cdot |\lambda|$، و در نتیجه از آنجا که $x \neq 0$، $|\lambda| = 1$.

حال فرض کنید که برای هر مقدار ویژه λ از T، $|\lambda| = 1$ و $T = \lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_k T_k$، تفکیک طیفی T باشد، در این صورت طبق قسمت ج از قضیه طیفی:

$$\begin{aligned} TT^* &= (\lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_k T_k)(\overline{\lambda}_1 T_1 + \ldots + \overline{\lambda}_k T_k) \\ &= |\lambda_1|^2 T_1 + \ldots + |\lambda_k|^2 T_k \\ & T_1 + \ldots + T_k \\ &= I \end{aligned}$$

بنابراین T یکانی است. □

نتیجه ۳. هرگاه $F = \mathbb{C}$ و T نرمال باشد آنگاه T خود الحاقی است، اگر و تنها اگر هر مقدار ویژه T حقیقی باشد.

برهان. فرض کنید $T = \lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_k T_k$ تفکیک طیفی T باشد. فرض کنید هر مقدار ویژه T حقیقی باشد. در این صورت:

$$T^* = \overline{\lambda}_1 T_1 + \ldots + \overline{\lambda}_k T_k = \lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_k T_k = T$$

عکس این مطلب در لِم پیش از قضیه ۱۷.۶ ثابت شد. □

نتیجه ۴. فرض کنید T، مانند قضیه طیفی و دارای تفکیک طیفی $T = \lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_k T_k$ باشد. در این صورت هر T_j چند جمله ایی بر حسب T است.

برهان. چند جمله‌ای g_j $(1 \leq j \leq k)$ را چنان اختیار کنید که $g(\lambda_i) = \delta_{ij}$. در این صورت،

$$g_j(T) = g_j(\lambda_1)T_j + \ldots + g_1(\lambda_k)T_k = \delta_{1j}T_1 + \ldots + \delta_{kj}T_k = T_j.$$

□

تمرینات

۱. تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است. فرض کنید که فضاهای ضرب داخلی موردنظر، متناهی البُعد هستند.

الف) هر تصویری خود الحاقی است.

ب) هر تصویر متعامد، به طور یکتا از روی بردش مشخص می‌شود.

ج) هر عملگر خود الحاقی، ترکیبی از تصاویر متعامد است.

د) هرگاه T تصویری بر W باشد، آنگاه $T(x)$ برداری از W است که از همه به x نزدیکتر است.

ه) هر تصویر متعامد، عملگری یکانی است.

۲. فرض کنید $V = \mathbb{R}^2$، $W = \mathrm{span}(\{(1,2)\})$ ، β پایه مرتب استاندارد V باشد. $[T]_\beta$ را، که T تصویر متعامد بر W است حساب کنید. همین کار را در مورد $V = \mathbb{R}^3$ و $W = \mathrm{span}\{(1,0,1)\}$ انجام دهید.

۳. برای هر یک از ماتریس‌های A در تمرین ۲ بخش ۶-۵:

الف) تحقیق کنید که L_A، دارای یک تفکیک طیفی است.

ب) برای هر مقدار ویژه L_A، تصویر متعامد بر فضای ویژه متناظر با آن را صریحاً مشخص کنید.

ج) درستی نتایج خود را با استفاده از قضیه طیفی بررسی کنید.

۴. فرض کنید W زیرفضای متناهی البُعدی از فضای ضرب داخلی V باشد. ثابت کنید که اگر T تصویر متعامد بر W باشد، آنگاه $I-T$، تصویر متعامد بر $W^{\perp}$ است.

۵. فرض کنید T، عملگری متعامد بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد V باشد:

الف) هرگاه T تصویری متعامد باشد، ثابت کنید که برای هر $x \in V$، $\|T(x)\| \leq \|x\|$. مثالی از تصویری ارائه دهید که این نامساوی برای آن صادق نباشد. در مورد تصویری که برای آن، این نامساوی در مورد هر $x \in V$، در واقع تساوی باشد، چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

ب) فرض کنید T چنان تصویری باشد که برای هر $x \in V$، $\|T(x)\| \leq \|x\|$. ثابت کنید که T یک تصویر متعامد است.

۶. فرض کنید T عملگری نرمال بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد V باشد. ثابت کنید که اگر T یک تصویر باشد، آنگاه تصویری متعامد نیز هست.

۷. فرض کنید T عملگری نرمال بر فضای داخلی متناهی البُعد مختلط V باشد. با به کارگیری تفکیک طیفی T، یعنی $\lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_k T_k$ موارد زیر را ثابت کنید:

الف) هرگاه g یک چند جمله‌ای باشد، آنگاه:

$$g(T) = \sum_{i=1}^{k} g(\lambda_i) T_i$$

ب) هرگاه به ازای n ای، $T^n = T_0$، آنگاه $T = T_0$.

ج) فرض کنید U عملگری خطی بر V باشد. در این صورت U با T جابجا می‌شود، اگر و تنها اگر U با هر یک از T_iها جابجا شود.

د) عملگر نرمال U بر V چنان موجود است که $U^2 = T$.

ه) T وارون پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $1 \leq i \leq k$، $\lambda_i \neq 0$.

و) T یک تصویر است اگر و تنها اگر هر مقدار ویژه T، ۱ یا ۰ باشد.

۸. با به کارگیری نتیجه ۱ از قضیه طیفی، نشان دهید که اگر T عملگری نرمال بر یک فضای ضرب داخلی متناهی البُعد مختلط و U عملگری خطی باشد که با T جابجا می‌شود، آنگاه U با T^* نیز جابجا می‌شود.

۹. با مراجعه به تمرین ۱۹ از بخش ۶-۵، موارد زیر را در مورد یک ایزومتری جزئی مانند U ثابت کنید:

الف) U^*U، تصویری متعامد بر W است.

ب) $UU^*U = U$.

۱۰. قطری سازی هم زمان: فرض کنید U و T، چنان عملگرهای نرمالی بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد مختلط V باشند که $TU = UT$. ثابت کنید که پایه‌ای متعامد یکه برای V وجود دارد، که از بردارهایی تشکیل شده است که هم بردار ویژه T هستند و هم بردار ویژه U.
راهنمایی: از راهنمایی تمرین ۱۴ بخش ۶-۴، به همراه تمرین ۸ استفاده کنید.

۱۱. قسمت ج از قشیه طیفی را ثابت کنید.

۶-۷ فرم‌های دو خطی و درجه دوم

رده معینی از توابع دو متغیره با مقادیر اسکالر بر فضاهای برداری وجود دارد که معمولاً در مطالعه موضوعات گوناگونی مانند هندسه و حسابان چند متغیره، مورد توجه قرار می‌گیرد. این رده، رده **فرم‌های دو خطی** است. خواص ابتدایی این رده را با تأکید خاص بر فرم‌های دو خطی متقارن، مطالعه خواهیم کرد و برخی از کاربردهای آن را در زمینه سطوح درجه دوم و حسابان چند متغیره مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در طول این بخش، همه پایه‌ها را پایه مرتب در نظر بگیرید.

۶-۸ فرم‌های درجه دوم

تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری بر میدان F باشد. تابع H از مجموعه زوج‌های مرتب $V \times V$ به F را یک فرم دو خطی بر V نامیم، هرگاه H نسبت به هر دو متغیر، هنگامی که متغیر دیگر ثابت در نظر گرفته شود، خطی باشد، یعنی

الف) برای هر $x_1, x_2, y \in V$ و $a \in F$، $H(ax_1 + x_2, y) = aH(x_1, y) + H(x_2, y)$.

ب) برای هر $x, y_1, y_2 \in V$ و $a \in F$، $H(x, a_1y_1 + y_2) = aH(x, y_1) + H(x, y_2)$.

مجموعه همه فرم‌های دو خطی بر V را با $\mathcal{B}(V)$ نشان می‌دهیم. ملاحظه کنید که یک ضرب داخلی روی یک فضای برداری، در صورتی که میدان مربوطه حقیقی باشد، یک فرم دو خطی است؛ اما اگر این میدان مختلط باشد، یک دو خطی نیست.

مثال ۱. $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را چنین تعریف کنید:

$$H\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = 2a_1b_1 + 3a_1b_2 + 4a_2b_1 - a_2b_2 \qquad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ برای هر}$$

می‌توانیم مستقیماً بررسی کنیم که H یک فرم دو خطی بر $\mathbb{R}$ است. اما راه روشن کننده تر و مستلزم خستگی کمتر، ملاحظه این نکته است که اگر:

$$y = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{،} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

خواهیم داشت:

$$H(x, y) = x^tAy$$

حال دو خطی بودن H، مستقیماً از خاصیت پخش پذیری ضرب ماتریسی نسبت به جمع ماتریسی حاصل می‌شود. □

فرم دو خطی بالا، حالت خاصی از مثال کلی تر زیر است.

مثال ۲. فرض کنید $V = F^n$، که عناصر آن به عنوان بردارهای ستونی در نظر گرفته شده اند. برای هر $A \in M_{n\times n}$، $H : V \times V \to F$ را چنین تعریف کنید:

$$H(x, y) = x^tAy \qquad x, y \in V \text{ برای هر}$$

توجه کنید که چون x و y ماتریس‌هایی $n \times 1$ و A ماتریسی $n \times n$ است، $H(x, y)$ ماتریسی 1×1 است. این ماتریس را با تنها درایه آن معادل می‌گیریم. دو خطی بودن H، به مانند مثال ۱ نتیجه می‌شود. به عنوان مثال، برای هر $a \in F$ و $x_1, x_2, y \in V$ داریم:

$$\begin{aligned} H(ax_1 + x_2, y) &= (ax_1 + x_2)^tAy = (ax_1^t + x_2^t)Ay \\ &= ax_1^tAy + x_2^tAy \\ &= aH(x_1, y) + H(x_2, y) \end{aligned}$$

□

چند خاصیت را که همه فرم‌های دو خطی دارند، بر می‌شماریم. برهان‌های آنها به عهده خواننده است (به تمرین ۲ رجوع کنید).

برای هر فرم دو خطی H بر فضای برداری V روی F، موارد زیر برقرار هستند:
الف) هرگاه به ازای یک $x \in V$، $L_x, R_x : V \to F$ چنین تعریف شوند:

$$L_x(y) = H(x,y) \quad \text{و} \quad R_x(y) = H(y,x) \qquad \text{برای هر } y \in V$$

آنگاه L_x و R_x خطی هستند.
ب) برای هر $x \in V$، $H(\circ, x) = H(x, \circ) = \circ$.
ج) برای هر $x, y, z, w \in V$،

$$H(x+y, z+w) = H(x,z) + H(x,w) + H(y,z) + H(y,w)$$

د) هرگاه $J : V \times V \to F$ به صورت $J(x,y) = H(y,x)$ تعریف شود، آنگاه J یک فرم دو خطی است.
چند تعریف: فرض کنید V فضایی برداری، $H_۱$ و $H_۲$ دو فرم دو خطی بر V و a یک اسکالر باشد. **مجموع** $H_۱ + H_۲$ و **حاصلضرب اسکالر** $aH_۱$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(H_۱ + H_۲)(x,y) = H_۱(x,y) + H_۲(x,y) \qquad \text{برای هر } x, y \in V$$

و

$$(aH_۱)(x,y) = a(H_۱(x,y))$$

قضیه زیر بلافاصله نتیجه می‌شود.

قضیه ۲۵.۶. برای هر فضای برداری V، مجموع دو فرم دو خطی و حاصلضرب یک اسکالر در یک فرم دو خطی بر V، خود نیز فرمی دو خطی بر V است. بعلاوه، $\mathcal{B}(V)$ نسبت به این دو عمل، فضایی برداری است.

برهان. به عهده خواننده است. □

فرض کنید $\beta = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$، پایه‌ای مرتب برای فضای برداری $n-$ بُعدی V باشد و $H \in \mathcal{B}(V)$. می‌توانیم به H، ماتریس $n \times n$ A را نسبت دهیم که درایه سطر i اُم و ستون j اُم آن چنین تعریف می‌شود:

$$A_{ij} = H(v_i, v_j) \qquad \text{برای هر } i, j = ۱, ۲, \ldots, n$$

تعریف:. ماتریس Aرا که در بالا آمد، **نمایش ماتریسی** H **نسبت به پایه مرتب** β می‌نامند و به صورت $A = \psi_\beta(H)$ نشان می‌دهند.

بنابراین می‌توانیم نگاشت ψ_β را از $\mathcal{B}(V)$ به $M_{n\times n}(F)$، (که F میدان اسکالرهای مربوط به V است) این گونه تعریف کنیم که ψ_β، فرم دو خطی H را به شکل ماتریسی آن، یعنی $\psi_\beta(H)$ ببرد. ابتدا یک مثال را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس نشان می‌دهیم که ψ_β یک ایزومرفیسم است.

مثال ۳. فرم دو خطی H در مثال ۱ را در نظر بگیرید و فرض کنید که:

$$B = \psi_\beta(H) \quad \text{و} \quad \beta = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \right\}$$

در این صورت:

$$B_{۱۱} = H\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \right) = ۲ + ۳ + ۴ - ۱ = ۸$$

$$B_{۱۲} = H\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \right) = ۲ - ۳ + ۴ + ۱ = ۴$$

$$B_{۲۱} = H\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \right) = ۲ + ۳ - ۴ + ۱ = ۲$$

$$B_{۲۲} = H\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \right) = ۲ - ۳ - ۴ - ۱ = -۶$$

بنابراین:

$$\psi_\beta(H) = \begin{bmatrix} ۸ & ۴ \\ ۲ & -۶ \end{bmatrix}$$

در صورتی که γ پایه مرتب استاندارد $\mathbb{R}^۲$ باشد، خواننده می‌تواند بررسی کند که:

$$\psi_\gamma(H) = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

$\square$

قضیه ۲۶.۶. برای هر فضای برداری $n-$ بُعدی V بر میدان F و هر پایه مرتب β برای V، $\psi_\beta : \mathcal{B}(V) \to M_{n\times n}(F)$ یک ایزومورفیسم است.

برهان. اثبات این مطلب را که ψ_β خطی است به عهده خواننده می‌گذاریم.
برای اثبات این که ψ_β یک به یک است، فرض کنید که به ازای $H \in \mathcal{B}(V)$ ای، $\psi_\beta(H) = O$. $v_i \in \beta$ را انتخاب کنید و نگاشت $L_{v_i} : V \to F$ را به یاد آورید که طبق خاصیت الف در صفحه ۳۳۴، خطی است. طبق فرض برای هر $v_j \in \beta$، $L_{v_i}(v_j) = H(v_i, v_j) = \circ$. پس L_{v_i} نگاشت صفر از V به F است. بنابراین:

$$H(v_i, x) = L_{v_i}(x) = \circ \quad , v_i \in \beta \text{ و } x \in V \text{ برای هر} \qquad (۶\text{-}۴)$$

حال $y \in V$ ی دلخواهی را انتخاب کنید و نگاشت خطی $R_y : V \to F$ را که در خاصیت الف در صفحه ۳۳۴، این گونه تعریف شد که برای هر $x \in V$، $R_y(x) = H(x, y)$، به خاطر آورید. طبق رابطه ۴-۳، برای هر $v_i \in \beta$، $R_y(v_i) = H(v_i, y)$ و بنابراین R_y تبدیل صفر است. پس برای هر $x, y \in V$، $H(x, y) = R_y(x) = \circ$. پس H، همان فرم دو خطی صفر می‌باشد و بنابراین ψ_β یک به یک است.
برای اثبات این مطلب که ψ_β پوشاست، $A \in M_{n\times n}(F)$ دلخواهی را در نظر بگیرید. ایزومورفیسم $\phi_\beta : V \to F^n$ را که در بخش ۲-۴ تعریف شد به خاطر آورید. برای هر $x \in V$، $\phi_\beta(x) \in F^n$ را یک بردار ستونی در نظر می‌گیریم. فرض کنید $H : V \times V \to F$، نگاشتی باشد که چنین تعریف می‌شود:

$$H(x, y) = [\phi_\beta(x)]^t A[\phi_\beta(y)] \quad x, y \in V \text{ برای هر}$$

با کمی تغییر در روش مثال ۲، می‌توان ثابت کرد که $H \in \mathcal{B}(V)$. نشان می‌دهیم که $\psi_\beta(H) = A$. فرض کنید که $v_i, v_j \in \beta$. در این صورت $\phi_\beta(v_i) = e_i$ و $\phi_\beta(v_j) = e_j$ و در نتیجه برای هر i و j:

$$H(v_i, v_j) = [\phi_\beta(v_i)]^t A[\phi_\beta(v_j)] = e_i^t A e_j = A_{ij}$$

نتیجه می‌گیریم که $\psi_\beta(H) = A$ و بنابراین ψ_β پوشاست. $\square$

نتیجه ۱. برای هر فضای برداری $n-$ بُعدی V، بعد $\mathcal{B}(V)$، برابر با $n^۲$ است.

برهان. به عهده خواننده است. $\square$

نتیجه زیر به راحتی با مرور قضیه ۲۶.۶ ثابت می‌شود.

نتیجه ۲. فرض کنید که V یک فضای برداری $n-$ بُعدی بر میدان F با پایه مرتب β باشد. هرگاه $H \in \mathcal{B}(V)$ و $A \in M_{n\times n}(F)$، آنگاه ماتریس یکتای $A \in M_{n\times n}(F)$، که در واقع همان $A = \psi_\beta(H)$ است وجود دارد به گونه‌ای که:

$$H(x,y) = x^tAy \quad \text{،}x,y \in F^n \text{ برای هر}$$

فرم‌های دو خطی و عملگرهای خطی از این نظر شبیه به هم هستند که هر دو با ماتریس‌های مربعی یکتا متناظر می‌شوند و این تناظرها بستگی به انتخاب پایه مرتب برای فضای برداری مفروض دارند. همان طور که در مورد عملگرهای خطی مطرح شد، در اینجا هم می‌توان این سؤال را مطرح کرد که: ماتریس نظیر یک فرم دو خطی ثابت، هنگام تغییر پایه مرتب چه تغییری می‌یابد؟ همان طور که قبلاً دیده‌ایم، همین سؤال در مورد نمایش‌های ماتریسی عملگرهای خطی به تعریف رابطه تشابه روی ماتریس‌های مربعی می‌آنجامد. این سؤال در مورد فرم‌های دو خطی، به رابطه دیگری بر ماتریس‌های مربعی می‌انجامد، یعنی رابطه همنهشتی.

تعریف:. فرض کنید $A, B \in M_{n\times n}(F)$. B را **همنهشت** با A گویند هرگاه ماتریس وارون‌پذیر $Q \in M_{n\times n}(F)$ چنان موجود باشد که $B = Q^tAQ$.

مشاهده کنید که رابطه همنهشتی، یک رابطه هم ارزی است (به تمرین ۱۱ رجوع کنید).

قضیه زیر، همنهشتی را به نمایش ماتریسی یک فرم دو خطی مرتبط می‌سازد.

قضیه ۲۷.۶. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی البُعد با پایه‌های مرتب $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و $\gamma = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ باشد و نیز Q ماتریس تغییر مختصاتی باشد که مختصات در پایه γ را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند. برای هر $H \in \mathcal{B}(V)$، $\psi_\gamma(H) = Q^t\psi_\beta(H)Q$. بنابراین، $\psi_\gamma(H)$ با $\psi_\beta(H)$ همنهشت است.

برهان. اساساً دو نوع اثبات برای این قضیه وجود دارد که یکی شامل محاسبه مستقیم است، در حالی که دیگری بلافاصله از یک مشاهده هوشمندانه نتیجه می‌شود. در اینجا برهان اول را ارائه می‌دهیم و برهان دیگر را برای تمرینات می‌گذاریم (به تمرین ۱۲ رجوع کنید).

فرض کنید که $A = \psi_\beta(H)$ و $B = \psi_\gamma(H)$، در این صورت، برای هر i و j که $1 \le i,j \le n$:

$$w_i = \sum_{k=1}^{n} Q_{ki}v_k \quad \text{و} \quad w_j = \sum_{r=1}^{n} Q_{rj}v_r$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
B_{ij} = H(w_i, w_j) &= H\left(\sum_{k=1}^{n} Q_{ki} v_k, w_j\right) = \sum_{k=1}^{n} Q_{ki} H(v_k, w_j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} Q_{ki} H\left(v_k, \sum_{r=1}^{n} Q_{rj} v_r\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} Q_{ki} \sum_{r=1}^{n} Q_{rj} H(v_k, v_r) \\
&= \sum_{k=1}^{n} Q_{ki} \sum_{r=1}^{n} Q_{rj} A_{kr} \\
&= \sum_{k=1}^{n} Q_{ki} \sum_{r=1}^{n} A_{kr} Q_{rj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} Q_{ki} (AQ)_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} Q_{ik}^{t} (AQ)_{kj} = (Q^t AQ)_{ij}
\end{aligned}$$

بنابراین، $B = Q^t AQ$. □

نتیجه زیر، عکس قضیه ۲۷.۶ است.

نتیجه ۳. فرض کنید V یک فضای برداری $n-$ بُعدی با پایه مرتب β، H یک فرم دو خطی بر V باشد. برای هر ماتریس $n \times n$ B، اگر B متشابه با $\psi_\beta(H)$ باشد، آنگاه پایه مرتب γ برای V وجود خواهد داشت که $\psi_\beta(H) = B$. به علاوه اگر به ازای ماتریس وارون پذیری چون Q، $B = Q^t \psi_\beta(H) Q$ آنگاه Q مختصات در پایه γ را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند.

برهان. به ازای ماتریس وارون پذیر Q ای، $B = Q^t \psi_\beta(H) Q$ و نیز $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. فرض کنید $\gamma = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$، که:

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} Q_{ij} v_i \quad , 1 \leq j \leq n \text{ برای هر}$$

چون Q وارون پذیر است، γ پایه مرتبی برای V است و Q ماتریس تبدیل مختصاتی است که مختصات در پایه γ را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند. بنابراین طبق قضیه ۲۶.۶:

$$B = Q^t \psi_\beta(H) Q = \psi_\gamma(H)$$

□

فرم‌های دو خطی متقارن

همانند مسأله قطری سازی عملگرهای خطی، مسأله قطری سازی مشابهی برای فرم‌های دو خطی وجود دارد که عبارت است از مسأله تعیین آن دسته از فرم‌های دو خطی که نمایش ماتریسی قطری دارند. همان طور که خواهیم دید، رابطه نزدیکی میان فرم‌های دو خطی قطری پذیر و آن دسته از فرم‌هایی که متقارن هستند، وجود دارد.

تعریف:. فرم دو خطی H بر فضای برداری V را **متقارن** نامیم هرگاه برای هر $x, y \in V$، $H(x,y) = H(y,x)$.

همان طور که از نامشان پیداست، فرم‌های دو خطی متقارن، متناظر با ماتریس‌های متقارن هستند.

قضیه ۲۸.۶. فرض کنید H فرمی دو خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V و β پایه مرتبی برای V باشد. در این صورت H متقارن است اگر و تنها اگر $\psi_\beta(H)$ متقارن باشد.

برهان. فرض کنید $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و $B = \psi_\beta(H)$.
ابتدا فرض کنید که H متقارن باشد. در این صورت برای هر $1 \le i, j \le n$:

$$B_{ij} = H(v_i, v_j) = H(v_j, v_i) = B_{ji}$$

و بنابراین B قطری است.

برعکس، فرض کنید که B متقارن باشد. فرض کنید $J : V \times V \to F$ (F میدان اسکالرهایی نظیر V است) نگاشتی باشد که به صورت $J(x,y) = H(y,x)$ برای هر $x, y \in V$ تعریف می‌شود. طبق خاصیت د از صفحه ۳۴۴ J یک فرم دو خطی است. فرض کنید $C = \psi_\beta(J)$. در این صورت برای هر $1 \le i, j \le n$:

$$C_{ij} = J(v_i, v_j) = H(v_j, v_i) = B_{ji} = B_{ij}$$

بنابراین $C = B$؛ چون ψ_β یک به یک است، داریم $J = H$. در نتیجه برای هر $x, y \in V$، $H(y,x) = J(x,y) = H(x,y)$ و بنابراین H متقارن است. □

تعریف: فرم دو خطی H، بر فضای برداری متناهی البُعد V را قطری پذیر گویند هرگاه پایه مرتب βای برای V موجود باشد که $\psi_\beta(H)$ماتریسی قطری باشد.

نتیجه ۴. فرض کنید H یک فرم دو خطی قطری پذیر بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد. در این صورت H متقارن است.

برهان. فرض کنید H قطری پذیر باشد، در این صورت، پایه مرتب β برای V چنان یافت می‌شود که $\psi_\beta(H) = D$، ماتریسی قطری باشد، به وضوح D ماتریسی متقارن است و در نتیجه طبق قضیه ۲۸.۶، H متقارن است. □

متأسفانه، عکس مطلب، همان گونه که در مثال زیر نشان داده شده است، درست نیست.

مثال ۴. فرض کنید $F = \mathbb{Z}_۲$ میدانی که فقط دو عضو دارد باشد، (به ضمیمه ج رجوع کنید). فرض کنید $V = F^۲$ و $H : V \times V \to F$، فرم دو خطی ای باشد که به این صورت تعریف می‌شود:

$$H\left(\begin{bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \end{bmatrix}\right) = a_۱b_۲ + a_۲b_۱$$

واضح است که H متقارن است، در واقع اگر β پایه مرتب استاندارد V باشد:

$$A = \psi_\beta(H) = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

که ماتریسی متقارن است. ثابت می‌کنیم که H قطری پذیر نیست.

به عنوان فرض خلف، فرض کنید که H قطری پذیر باشد. در این صورت، پایه مرتب γای برای V موجود است، که $B = \psi_\gamma(H)$ ماتریسی قطری باشد؛ پس طبق قضیه ۲۷.۶، ماتریس وارون پذیر Q چنان موجود است که $B = Q^tAQ$. چون Q وارون پذیر است، $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A) = ۲$ و بنابراین درایه‌های قطری B ناصفر هستند. چون تنها درایه ناصفر F، ۱ است،

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

فرض کنید:

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} &= B = Q^t A Q \\ &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+ac & bc+ad \\ bc+ad & bd+bd \end{bmatrix} \end{aligned}$$

اما برای هر $p \in F$، $p + p = ۰$ و در نتیجه $ac + ac = ۰$. پس با مقایسه درایه‌های سطر اول و ستون اول دو ماتریس معادله بالا، نتیجه می‌گیریم که $۰ = ۱$ که این یک تناقض است. در نتیجه H قطری پذیر نیست. □

فرم دو خطی مثال **۴**، غیر عادی است. ناتوانی آن در قطری پذیری، ناشی از این حقیقت است که مشخصه میدان F، دو است. میدان F را دارای **مشخصه دو** گویند هرگاه در F، $۱ + ۱ = ۰$. اگر مشخصه F دو نباشد، آنگاه $۲ = ۱ + ۱$ دارای وارون خواهد بود که با $۱/۲$ نشان می‌دهیم.

پیش از اثبات عکس قضیه ۲۸.۶ برای میدان‌های اسکالری که دارای مشخصه ۲ نیستند، لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۱۶. فرض کنید H یک فرم دو خطی متقارن ناصفر بر فضای برداری V روی میدان F باشد که مشخصه اش ۲ نیست. در این صورت عضو $x \in V$ چنان موجود است که $H(x, x) \neq ۰$.

برهان. چون H ناصفر است، می‌توانیم اعضای $u, v \in V$ را چنان اختیار کنیم که $H(u, v) \neq ۰$. هرگاه $H(u, u) \neq ۰$ یا $H(v, v) \neq ۰$، چیزی برای اثبات باقی نخواهد ماند. در غیر این صورت، قرار دهید $x = u + v$. به این ترتیب:

$$\begin{aligned} H(x, x) &= H(u, u) + H(u, v) + H(v, u) + H(v, v) \\ &= ۲H(u, v) \neq ۰ \end{aligned}$$

زیرا $۲ \neq ۰$ و نیز $H(u, v) \neq ۰$. □

قضیه ۲۹.۶. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی البُعد بر میدان F با مشخصه غیر ۲ باشد. در این صورت، هر فرم دو خطی متقارن بر V قطری پذیر است.

برهان. از استقراء ریاضی روی $n = \dim(V)$ استفاده می‌کنیم. هرگاه $n = ۱$، آنگاه هر عضو $\mathcal{B}(V)$ قطری پذیر است. حال فرض می‌کنیم که قضیه به ازای عدد صحیح ثابت $n > ۱$، برای همه فضاهای برداری با بُعد کمتر از n صادق باشد و نیز فرض کنید که $\dim(V) = n$ هرگاه H، فرم دو خطی صفر روی V باشد. بدیهی است که H قطری پذیر است، پس فرض کنید که H، یک فرم دو خطی متقارن ناصفر بر V است. در این صورت، طبق لِم، عضو ناصفر $x \in V$ چنان موجود است که $H(x,x) \neq ۰$. تابع $L_x : V \to F$را که برای هر $y \in V$، به صورت $L_x(y) = H(x,y)$ تعریف می‌شود، به خاطر آورید. طبق خاصیت الف از صفحه ۳۴۴ L_x خطی است. به علاوه چون $L_x(x) = H(x,x)$، پس L_x ناصفر است. در نتیجه $\operatorname{rank}(L_x) = ۱$ و بنابراین $\dim(N(L_x)) = n - ۱$.

تحدید H به $N(L_x)$، به وضوح فرمی دو خطی بر یک فضای برداری با بُعد $n - ۱$ است. پس طبق فرض استقراء، پایه مرتب $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_{n-۱}\}$ برای $N(L_x)$ چنان موجود است که برای هر $i \neq j$ ($۱ \leq i,j \leq n-۱$)، $H(v_i, v_j) = ۰$. قرار دهید $v_n = x$. در این صورت $v_n \notin N(L_x)$ و بنابراین $\beta = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ پایه مرتبی برای V است. به علاوه، برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n-۱$، $H(v_i, v_n) = H(v_n, v_i) = ۰$. نتیجه می‌گیریم که $\psi_\beta(H)$ ماتریسی قطری است و بنابراین H قطری پذیر است. □

نتیجه ۵. فرض کنید F میدانی با مشخصه غیر از ۲ باشد. هرگاه $A \in M_{n\times n}(F)$ ماتریسی متقارن باشد، آنگاه A همنهشت با ماتریسی قطری است.

برهان. به عهده خواننده است. □

قطری سازی ماتریس‌های متقارن

فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های واقع در میدان F با مشخصه غیر از ۲ باشد. طبق نتیجه قضیه ۶.۲۹، ماتریس‌های $Q, D \in M_{n\times n}(F)$ چنان موجود هستند که Q وارون پذیر و D قطری است و $Q^tAQ = D$. در بحث زیر، روشی را برای محاسبه Q و D ارائه می‌کنیم. این روش، مستلزم آشنایی با ماتریس‌های مقدماتی و خواص آنهاست، که خواننده ممکن است بخواهد این مطالب را در بخش ۳-۱ مرور کند.

هرگاه E یک ماتریس مقدماتی $n \times n$ باشد، AE را می‌توان با انجام یک عمل ستونی مقدماتی بر A به دست آورد. طبق تمرین ۲۰، E^tA را می‌توان به اعمال همین عمل ولی به جای سطرها، بر ستون‌های A به دست آورد. در نتیجه E^tAE را می‌توان با اِعمال یک عمل مقدماتی بر ستون‌های A و سپس اِعمال همین عمل بر سطرهای AE به دست آورد (توجه کنید که ترتیب این عملیات را می‌توان به خاطر خاصیت شرکت پذیری ضرب ماتریسی عوض کرد). حال فرض کنید که Q ماتریسی وارون پذیر و D ماتریسی قطری باشد که $Q^tAQ = D$. طبق نتیجه ۳ از قضیه ۶.۳، Q حاصلضرب

ماتریس‌های مقدماتی است، مثلاً $Q = E_1E_2\dots E_k$ و در نتیجه:

$$D = Q^tAQ = E_k^tE_{k-1}^t\dots E_1^tAE_1E_2\dots E_k$$

بر پایه معادله فوق، نتیجه می‌گیریم که با استفاده از چندین عمل ستونی مقدماتی و اعمال سطری متناظر با آنها، می‌توان A را به یک ماتریس قطری D تبدیل کرد. علاوه بر این، هرگاه $E_1, E_2, \dots, E_k$، ماتریس‌های مقدماتی نظیر این اعمال ستونی مقدماتی باشند که به ترتیب انجام شدن اعمال، اندیس گذاری شده باشند و هرگاه $Q = E_1E_2\dots E_k$، آنگاه $Q^tAQ = D$.

مثال ۵. فرض کنید A، آن ماتریسی متقارن با درایه‌های حقیقی باشد که چنین تعریف می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

کار را با حذف همه درایه‌های ناصفر سطر اول و ستون اول، به جز درایه واقع در سطر و ستون اول، آغاز می‌کنیم. برای این منظور، ستون اول A را به ستون دوم اضافه می‌کنیم تا در سطر اول، ستون دوم صفر به دست آید. ماتریس مقدماتی نظیر این عمل عبارت است از:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

عمل سطری مقدماتی نظیر این عمل را بر سطرهای AE_1 انجام می‌دهیم، تا ماتریس زیر به دست آید:

$$E_1^tAE_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

حال از ستون اول $E_1^tAE_1$ برای حذف ۳ ی واقع در سطر اول و ستون سوم استفاده می‌کنیم و سپس عمل ستونی متناظر با این عمل را انجام می‌دهیم. ماتریس مقدماتی مربوط به این دو عمل، یعنی E_2 و نتیجه این دو عمل مقدماتی یعنی

$E_2^t E_1^t A E_1 E_2$، عبارتند از:

$$E_2^t E_1^t A E_1 E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نهایتاً، چهار برابر ستون دوم $E_2^t E_1^t A E_1 E_2$ را از ستون آخر کم می‌کنیم و سپس عمل سطری متناظر با این عمل را انجام می‌دهیم. ماتریس مقدماتی نظیر این عمل، یعنی E_3 و نتیجه این اعمال مقدماتی، یعنی $E_3^t E_2^t E_1^t A E_1 E_2 E_3$، عبارتند از:

$$E_3^t E_2^t E_1^t A E_1 E_2 E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چون یک ماتریس قطری به دست آورده ایم، کار پایان پذیرفته است. بنابراین قرار می‌دهیم:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Q = E_1 E_2 E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تا قطری سازی مورد نظر، $Q^t A Q = D$ حاصل شود. □

خواننده باید برای اثبات درستی روش زیر که در آن ماتریس Q بدون ثبت جدا گانه هر یک از ماتریس‌های مقدماتی محاسبه می‌شود، دلیل بیاورد. این روش، از الگوریتم محاسبه وارون یک ماتریس، که در بخش ۳-۲ پدید آمد، الهام می‌گیرد. با استفاده از دنباله‌ای از عملیات ستونی مقدماتی و عملیات سطری مقدماتی نظیر آنها، ماتریس $n \times 2n$ $[A|I]$ را به شکل $[D|B]$ در می‌آوریم که D یک ماتریس قطری است و $B = Q^t$. در این حالت، نتیجه خواهد شد که $D = Q^t A Q$.

با شروع از ماتریس A در مثال قبل، این روش، منجر به دنباله زیر از ماتریس‌ها می‌شود:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۴ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۴ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۴ & -۸ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۴ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ & -۸ & -۳ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ & -۲۴ & -۳ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲۴ & -۷ & -۴ & ۱ \end{array}\right] = [D|Q^t]$$

در نتیجه:

$$Q = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۷ \\ ۰ & ۱ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Q^t = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۷ & -۴ & ۱ \end{bmatrix} \quad ,D = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲۴ \end{bmatrix}$$

فرم‌های درجه دوم

توابعی به نام فرم‌های درجه دوم وجود دارند که با فرم‌های دو خطی متقارن ارتباط می‌یابند.

تعریف:. فرض کنید V یک فضای برداری بر میدان F باشد. تابع $K : V \rightarrow F$ را یک **فرم درجه دوم** گویند، هرگاه فرم دو خطی متقارن $H \in \mathcal{B}(V)$ چنان موجود باشد که:

$$K(x) = H(x,x) \quad ,x \in V \text{ برای هر} \tag{۶-۵}$$

در صورتی که مشخصه F، ۲ نباشد، تناظر یک به یکی میان فرم‌های دو خطی متقارن و فرم‌های درجه دوم وجود دارد که از رابطه ۶-۵ حاصل می‌شود. در واقع، اگر K یک فرم درجه دوم بر فضای برداری V روی میدان F، که مشخصه آن ۲ نیست، باشد و به ازای فرم دو خطی متقارنی بر V مانند H، $K(x) = H(x,x)$ می‌توانیم H را مجدداً از روی K به دست بیاوریم، زیرا:

$$H(x,y) = \frac{۱}{۲}[K(x+y) - K(x) - K(y)] \tag{۶-۶}$$

(به تمرین ۱۵ رجوع کنید).

مثال ۶. نمونه کلاسیک یک فرم درجه دوم، چندجمله‌ای درجه دوم همگن از چند متغیر است. هرگاه متغیرهای $t_1, t_2, \ldots, t_n$ که در میدان F با مشخصه غیر ۲ سیر می‌کنند، به همراه اسکالرهای (نه لزوماً متمایز) a_{ij} $(1 \leq i \leq j \leq n)$ داده شده باشند، چندجمله‌ای $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ را برابر با:

$$\sum_{i \leq j} a_{ij} t_i t_j$$

تعریف کنید.

چنین تابعی یک فرم درجه دوم است. در واقع، اگر β پایه مرتب استاندارد F^n باشد، و H فرم دو خطی نظیر فرم درجه دوم f باشد، آنگاه نمایش ماتریسی فرم درجه دوم f، یعنی $\psi_\beta(H)$، برابر با A است، که:

$$A_{ij} = A_{ji} = \begin{cases} a_{ii} & i = j \text{ هرگاه } \\ \frac{1}{2} a_{ij} & i \neq j \text{ هرگاه } \end{cases}$$

برای مشاهده این مطلب، در رابطه ۶-۶ به جای فرم درجه دوم K، f را قرار دهید تا $H(e_i, e_j) = A_{ij}$ به دست آید و بررسی کنید که f با استفاده از رابطه ۶-۵، در صورتی که K در آن با f جایگزین شود، قابل محاسبه است.

به عنوان مثال، در صورتی که چندجمله‌ای زیر با ضرایب حقیقی مفروض باشد:

$$f(t_1, t_2, t_3) = 2t_1^2 - t_2^2 + 6t_1 t_2 - 4t_2 t_3$$

قرار دهید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

با قرار دادن $H(x, y) = x^t A y$ برای هر $x, y \in \mathbb{R}^3$، می‌بینیم که:

$$f(t_1, t_2, t_3) = [t_1, t_2, t_3] A \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ برای هر }$$

□

فرم‌های درجه دوم روی میدان $\mathbb{R}$

چون ماتریس‌های متقارن روی $\mathbb{R}$ به طور متعامد قطری پذیر هستند (به قضیه ۶-۲۰ رجوع کنید) نظریه فرم‌های دو خطی متقارن و فرم‌های درجه دوم بر فضاهای برداری متناهی البُعد روی $\mathbb{R}$، زیبایی خاصی دارد. قضیه بعدی و نتیجه آن مفید هستند.

قضیه ۶.۳۰. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی البعد حقیقی و H یک فرم دو خطی متقارن بر V باشد. در این صوزت، پایه متعامد یکه β چنان موجود است که $\psi_\beta(H)$ یک ماتریس قطری است.

برهان. پایه متعامد یکه دلخواه $\gamma = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ را برای V اختیار کنید و فرض کنید که $A = \psi_\lambda(H)$. چون A متقارن است، ماتریس متعامد یکه Q و ماتریس قطری D، طبق قضیه ۶.۲۰ چنان موجود هستند که $D = Q^tAQ$. فرض کنید $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ چنین تعریف شود:

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} Q_{ij} v_i \quad 1 \leq j \leq n \text{ برای هر}$$

طبق قضیه ۶.۲۷، $\psi_\beta(H) = D$. به علاوه، چون Q متعامد و γ متعامد یکه است، طبق تمرین ۲۴ از بخش ۶-۵ متعامد است. □

نتیجه ۶. فرض کنید K یک فرم درجه دوم بر فضای ضرب داخلی حقیقی متناهی البُعد V باشد. پایه متعامد یکه $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ برای V و اسکالرهای (نه لزوماً متمایز) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ وجود دارند به گونه‌ای که اگر $x \in V$ و

$$x = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i, \quad \text{که} \quad s_i \in \mathbb{R}$$

آنگاه:

$$K(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i^2$$

در واقع، اگر H فرم دو خطی متقارن مشخص شده به وسیله K باشد، β را می‌توان هر پایه متعامد یکه دلخواهی برای V اختیار کرد که برای آن $\psi_\beta(H)$ یک ماتریس قطری است.

برهان. فرض کنید H چنان فرم دو خطی متقارنی باشد که برای هر $x \in V$، $K(x) = H(x,x)$. طبق قضیه ۶-۳۰، پایه متعامد یکه $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ چنان موجود است که $\psi_\beta(H)$ برابر با ماتریس قطری زیر است.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

فرض کنید که $x = \sum_{i=1}^n s_i v_i$. در این صورت

$$K(x) = H(x,x) = [\psi_\beta(x)]^t D[\phi_\beta(x)] = [s_1, \dots, s_n] D \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i^2$$

□

مثال ۷. برای چند جمله‌ای حقیقی همگن درجه دومی که اینگونه تعریف می‌شود:

$$f(t_1, t_2) = 5t_1^2 + 2t_3^{+} 24 t_1 t_2 \tag{۶-۷}$$

می توانیم پایه متعامد یکه $\gamma = \{x_1, x_2\}$ را برای $\mathbb{R}^2$ و اسکالرهای λ_1 و λ_2 را چنان بیابیم که اگر:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = s_1 x_1 + s_2 x_2$$

آنگاه $f(t_1, t_2) = \lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2$. می‌توانیم s_1 و s_2 را مختصات (t_1, t_2) نسبت به γ تصور کنیم، بنابراین چند جمله‌ای $f(t_1, t_2)$، که عبارتی بر حسب مختصات یک نقطه نسبت به پایه مرتب استاندارد $\mathbb{R}^2$ است، به چند جمله‌ای جدید $g(s_1, s_2) = \lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2$ که به عبارتی بر حسب مختصات یک نقطه نسبت به پایه مرتب جدید λ است، تبدیل می‌گردد.

فرض کنید H، فرم دو خطی متقارن نظیر فرم درجه دوم تعریف شده در ۷ باشد. β پایه مرتب استاندارد $\mathbb{R}^۲$ باشد و $A = \psi_\beta(H)$. در این صورت:

$$A = \psi_\beta(H) = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

حال ماتریس متعامد Q را چنان می‌یابیم که Q^tAQ یک ماتریس قطری باشد. برای این منظور، ملاحظه کنید که $\lambda_۱ = ۶$ و $\lambda_۲ = ۱$، مقادیر ویژه A، هستند، و دو بردار زیر، به ترتیب دو بردار ویژه متعامد یکّه متناظر با آنها هستند:

$$v_۱ = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad v_۲ = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

فرض کنید $\gamma = \{v_۱, v_۲\}$. در این صورت γ پایه متعامد یکه‌ای برای $\mathbb{R}^۲$، متشکل از بردارهای ویژه A است. در نتیجه با قرار دادن:

$$Q = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

می بینیم که Q ماتریسی متعامد است و

$$Q^tAQ = \begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

واضح است که Q یک ماتریس تبدیل مختصات نیز هست. در نتیجه:

$$\psi_\gamma(H) = Q^t\psi_\beta(H)Q = Q^tAQ = \begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس طبق نتیجه قضیه ۳۰.۶ برای هر $x = s_۱v_۱ + s_۲v_۲ \in \mathbb{R}^۲$:

$$K(x) = ۶s_۱^۲ + s_۲^۲$$

بنابراین $g(s_۱, s_۲) = ۶s_۱^۲ + s_۲^۲$. □

مثال بعدی نشان می‌دهد که نظریه فرم‌های درجه دوم را چگونه می‌توان برای توصیف سطوح درجه دوم در $\mathbb{R}^۲$ به کار گرفت.

مثال ۸. فرض کنید S، رویه‌ای در $\mathbb{R}^۳$ باشد که با معادله زیر تعریف می‌شود:

$$۲t_۱^۲ + ۶t_۱t_۲ + ۵t_۲^۲ - ۲t_۲t_۳ + ۲t_۳^۲ + ۳t_۱ - ۲t_۲ - t_۳ + ۱۴ = ۰ \qquad (۸-۶)$$

فرض کنید β پایه مرتب استاندارد $\mathbb{R}^۳$ باشد. در این صورت رابطه ۶-۸ نقاط S را بر حسب مختصات آنها نسبت به β بیان می‌کند. پایه متعامد یکه جدید γ را برای $\mathbb{R}^۳$ به گونه‌ای می‌یابیم که معادله توصیف کننده مختصات نقاط S نسبت به γ، به طرز قابل ملاحظه‌ای ساده تر از رابطه ۶-۸ باشد.

کار را با این مشاهده آغاز می‌کنیم که مجموع جملات درجه دوم در سمت چپ ۶-۸، فرم درجه دومی بر $\mathbb{R}^۳$ تشکیل می‌دهند.

$$K\begin{bmatrix} t_۱ \\ t_۲ \\ t_۳ \end{bmatrix} = ۲t_۱^۲ + ۶t_۱t_۲ + ۵t_۲^۲ - ۲t_۲t_۳ + ۲t_۳^۲$$

حال K را قطری می‌کنیم. فرض کنید H، فرم دو خطی متقارن نظیر K باشد و $A = \psi_\beta(H)$. در این صورت:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۰ \\ ۳ & ۵ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

چند جمله‌ای مشخص A، $(-۱)(t-۲)(t-۷)t$ است و بنابراین A دارای مقادیر ویژه $\lambda_۱ = ۲$، $\lambda_۲ = ۷$ و $\lambda_۳ = ۰$ است. یک محاسبه ساده، بردارهای ویژه یکه متناظر با این مقادیر ویژه را به ما می‌دهد:

$$v_۱ = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۳ \end{bmatrix} \quad ، \quad v_۲ = \frac{۱}{\sqrt{۳۵}}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \\ -۱ \end{bmatrix} \quad و \quad v_۳ = \frac{۱}{\sqrt{۱۴}}\begin{bmatrix} -۳ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

حال قرار دهید: $\gamma = \{v_۱, v_۲, v_۳\}$ و :

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۱۰}} & \frac{۳}{\sqrt{۳۵}} & \frac{-۳}{\sqrt{۱۴}} \\ ۰ & \frac{۵}{\sqrt{۳۵}} & \frac{۲}{\sqrt{۱۴}} \\ \frac{۳}{\sqrt{۱۰}} & \frac{-۱}{\sqrt{۳۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۱۴}} \end{bmatrix}$$

مانند مثال ۷، Q ماتریس تبدیل مختصاتی است که مختصات در پایه γ را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند و :

$$\psi_\gamma(H) = Q^t \psi_\beta(H) Q = Q^t A Q = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

طبق نتیجه قضیه ۳۰.۶، اگر $x = s_۱v_۱ + s_۲v_۲ + s_۳v_۳$، داریم

$$K(x) = ۲s_۱^۲ + ۷s_۲^۲ \qquad (۱-۶)$$

اکنون آماده ایم تا رابطه ۶-۸ را به معادله‌ای بر حسب مختصات نسبت به γ تبدیل کنیم. فرض کنید $x = (t_۱, t_۲, t_۳) \in \mathbb{R}^۳$ و نیز $x = s_۱v_۱ + s_۲v_۲ + s_۳v_۳$. در این صورت طبق قضیه ۲۲.۲:

$$x = \begin{bmatrix} t_۱ \\ t_۲ \\ t_۳ \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} s_۱ \\ s_۲ \\ s_۳ \end{bmatrix}$$

و بنابراین:

$$\begin{aligned} t_۱ &= \frac{s_۱}{\sqrt{۱۰}} + \frac{۳s_۲}{\sqrt{۳۵}} - \frac{۳s_۳}{\sqrt{۱۴}} \\ t_۲ &= \frac{۵s_۲}{\sqrt{۳۵}} + \frac{۲s_۳}{\sqrt{۱۴}} \\ t_۳ &= \frac{۳s_۱}{\sqrt{۱۰}} - \frac{s_۲}{\sqrt{۳۵}} + \frac{s_۳}{\sqrt{۱۴}} \end{aligned}$$

پس:

$$3t_1 - 2t_2 - t_3 = -\frac{14s_3}{\sqrt{14}} = -\sqrt{14}s_3$$

با ترکیب روابط ۶-۸ و ۶-۹. معادله بالا، نتیجه می‌گیریم که اگر $x \in \mathbb{R}^3$ ، $x = s_1v_1 + s_2v_2 + s_3v_3$، آنگاه $x \in S$ اگر و تنها اگر:

$$2s_1^2 + 7s_2^2 - \sqrt{14}s_3 + 14 = 0 \quad \text{و یا} \quad s_3 = \frac{\sqrt{14}}{7}s_1^2 + \frac{\sqrt{14}}{2}s_2^2 + \sqrt{14}$$

در نتیجه اگر محورهای جدید x'، y' و z' را به ترتیب در جهت v_1 و v_2 و v_3 رسم کنیم، نمودار معادله فوق، که به شکل زیر بازنویسی شده است:

$$z' = \frac{\sqrt{14}}{7}(x')^2 + \frac{\sqrt{14}}{2}(y')^2 + \sqrt{14}$$

برابر با رویه S خواهد بود. بنابراین مشخص می‌شود که S، یک سهمی گون بیضوی است (به شکل ۶-۵ رجوع کنید). □

آزمون مشتق دوم برای توابع چند متغیره

حال کاربردی از نظریه فرم‌های درجه دوم را در مورد حسابان چند متغیره مورد بحث قرار می‌دهیم: اثبات آزمون مشتقات دوم برای تعیین اکسترمم‌های نسبی توابع چند متغیره. در این بخش، آشنایی با حسابان توابع چند متغیره را تا حد قضیه تیلر، مفروض می‌گیریم. خواننده بی شک با شکل یک متغیره قضیه تیلر آشناست. برای بیان و اثبات شکل چند متغیره آن می‌توانید مثلاً به کتاب Introduction to Analysis نوشته Maxwell Rosenlicht رجوع کنید (Dover, ۱۹۸۶ (NewYork,.[2]

در طول بحث، فرض کنید $z = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ یک تابع حقیقی از n متغیر حقیقی باشد که همه مشتقات مرتبه سوم آن موجود و پیوسته باشند[3]. تابع f را دارای **ماکزیمم نسبی** در $p \in \mathbb{R}^n$ گویند، هرگاه $\delta > 0$ای چنان موجود باشد که اگر $\|x - p\| < \delta$، آنگاه $f(p) \geq f(x)$. به همین ترتیب، گویند

[2] این مطالب در کتاب «آنالیز ریاضی نوشته تام م. آپوستل، ترجمه علی اکبر عالم زاده، مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف» نیز آمده است. م

[3] پیوستگی مستقات جزئی مرتبه دوم نیز در این بحث کافی است. م

شکل ۶-۱:

f دارای مینیمم نسبی در $p \in \mathbb{R}^n$ است هرگاه $\delta > 0$ای چنان موجود باشد که اگر $\|x-p\| < \delta$، آنگاه $f(p) \leq f(x)$.
اگر f دارای مینیمم نسبی یا ماکزیمم نسبی در p باشد، می‌گوییم f در p، اکسترمم نسبی دارد. نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ را یک نقطه بحرانی f نامیم، هرگاه برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، $\partial f(p)/\partial t_i = 0$. این که اگر f در نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ اکسترمم نسبی داشته باشد، p یک نقطه بحرانی f است، حقیقت شناخته شده‌ای است. دلیل آن این است که اگر f در نقطه $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ اکسترمم نسبی داشته باشد، آنگاه برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، تابع ϕ_i که این گونه تعریف می‌شود: $\phi_i(t) = f(p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}, t, p_{i+1}, \ldots, p_n)$، دارای اکسترمم نسبی در $t = p_i$ است. پس با استفاده از یک استدلال مقدماتی در حالت یک متغیره:

$$\frac{\partial f(p)}{\partial t_i} = \frac{d\phi_i(p_i)}{dt} = 0$$

پس p یک نقطه بحرانی f است. اما نقاط بحرانی، لزوماً اکسترمم نسبی نیستند.

معمولاً می‌توان از مشتقات جزئی مرتبه دوم f در نقطه بحرانی p، برای مشخص ساختن این که آیا f در نقطه p اکسترمم نسبی دارد یا نه استفاده کرد. این مشتقات جزئی، ماتریس $A(p)$ را مشخص می‌کنند، که درایه سطر i اُم و ستون j اُم آن عبارت است از:

$$\frac{\partial^2 f(p)}{(\partial t_i)(\partial t_j)}$$

این ماتریس، **ماتریس هسه** (Hessian) f در نقطه p نام دارد. توجه کنید که اگر مشتقات جزئی مرتبه سوم پیوسته باشند[۴]، مشتقات جزئی مخلوط مرتبه دوم f در نقطه p، از ترتیب گرفته شدن مشتق‌ها مستقل هستند یعنی برای هر i, j

$$\frac{\partial^2 f(p)}{(\partial t_i)(\partial t_j)} = \frac{\partial^2 f(p)}{(\partial t_j)(\partial t_i)}$$

در نتیجه $A(P)$ یک ماتریس متقارن است.

قضیه ۳۱.۶ (آزمون مشتق دوم). فرض کنید که $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ یک تابع حقیقی از n متغیر حقیقی باشد، که همه مشتقات جزئی مرتبه سوم آن موجود و پیوسته اند. فرض کنید $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$، یک نقطه بحرانی f و $A(p)$، ماتریس هسه f در نقطه p باشد:

[۴] همانگونه که قبلاً هم ذکر شد، پیوستگی مشتقات جزئی مرتبه دوم نیز کافی است. م

الف) هرگاه همه مقادیر ویژه $A(p)$ مثبت باشند، f در p دارای مینیمم نسبی است.

ب) هرگاه همه مقادیر ویژه $A(p)$ منفی باشند، f در p دارای ماکزیمم نسبی است.

ج) اگر $A(p)$ حداقل یک مقدار ویژه مثبت و یک مقدار ویژه منفی داشته باشد، آنگاه f در نقطه p دارای اکسترمم نسبی نیست (p را در این حالت، یک نقطه زینی f می‌نامند)..

د) هرگاه $\operatorname{rank}(A(p)) < n$ و $A(p)$ هم دارای مقدار ویژه مثبت و هم دارای مقدار ویژه منفی نباشد، آزمون مشتق دوم چیزی را مشخص نخواهد کرد.

برهان. اگر $p \neq 0$ می‌توانیم تابع $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را چنین تعریف کنیم:

$$g(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(t_1 + p_1, t_2 + p_2, \ldots, t_n + p_n) - f(p)$$

موارد زیر را می‌توان به راحتی بررسی کرد:

الف) تابع f، در نقطه p دارای ماکزیمم [مینیمم] نسبی است، اگر و تنها اگر g در نقطه $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ دارای ماکزیمم [مینیمم] نسبی باشد.

ب) مشتقات جزئی g در 0، برابر با مشتقات جزئی نظیر f در نقطه p هستند.

ج) 0 یک نقطه بحرانی g است.

د) برای هر i و j، $A_{ij}(p) = \dfrac{\partial^2 g(0)}{(\partial t_i)(\partial t_j)}$.

با در نظر گرفتن این مطالب، می‌توانیم بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنیم که $p = 0$ و $f(p) = 0$. در گام بعدی، قضیه تیلر را در مورد f به کار می‌گیریم، تا تقریب مرتبه اول f حول 0 به دست آید.

$$\begin{aligned} f(t_1, \ldots, t_n) &= f(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(0)}{\partial t_i} t_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(0)}{(\partial t_i)(\partial t_j)} t_i t_j + S(t_1, \ldots, t_n) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(0)}{(\partial t_i)(\partial t_j)} t_i t_j + S(t_1, \ldots, t_n) \qquad (۶\text{-}۱۰) \end{aligned}$$

که S یک تابع حقیقی بر $\mathbb{R}^n$ است که:

$$\lim_{x \to 0} \frac{S(x)}{\|x\|^2} = \lim_{(t_1, \ldots, t_n) \to 0} \frac{S(t_1, t_2, \ldots, t_n)}{t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2} = 0 \qquad (۶\text{-}۱۱)$$

فرض کنید $K:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$، فرم درجه دومی باشد که چنین تعریف می‌شود:

$$K\begin{bmatrix}t_1\\t_2\\\vdots\\t_n\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(0)}{(\partial t_i)(\partial t_j)}t_it_j \tag{۶-۱۲}$$

فرض کنید H، فرم درجه دوم متناظر با K، و β پایه مرتب استاندارد $\mathbb{R}^n$ باشد. به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\psi_\beta(H)=\frac{1}{2}A(p)$. چون $A(p)$ متقارن است، قضیه ۶.۲۰ نتیجه می‌دهد که ماتریس متعامد Q چنان موجود است که:

$$Q^tA(p)Q=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

ماتریسی قطری باشد که درایه‌های قطری آن، مقادیر ویژه $A(p)$ هستند. فرض کنید $\gamma=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. پایه متعامد یکه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ باشد که عضو i اُم آن، ستون i اُم Q است. در این صورت Q ماتریس تبدیل مختصاتی است که مختصات در پایه γ را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند و طبق قضیه ۶.۲۷:

$$\psi_\gamma(H)=Q^t\psi_\beta(H)Q=\frac{1}{2}Q^tA(p)Q=\begin{bmatrix}\frac{\lambda_1}{2} & 0 & \dots,0 & \\ 0 & \frac{\lambda_2}{2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_n}{2}\end{bmatrix}$$

فرض کنید $A(p)$ ماتریس صفر نباشد. در این صورت، $A(p)$ مقدار ویژه ناصفری دارد. $\varepsilon>0$ را چنان اختیار کنید که برای هر $\lambda_i\neq 0$، $\varepsilon<|\lambda_i|/2$، طبق رابطه ۶-۱۱، $\delta>0$ چنان موجود است که برای هر $x\in\mathbb{R}^n$ صادق در $0<\|x\|<\delta$، داریم: $|S(x)|<\varepsilon\|x\|^2$. حال $x\in\mathbb{R}^n$ دلخواهی را چنان در نظر بگیرید که $0<\|x\|<\delta$. در این صورت طبق روابط ۶-۱۰ و ۶-۱۲ داریم:

$$|f(x)-K(x)|=|S(x)|<\varepsilon\|x\|^2$$

و در نتیجه:

$$K(x) - \varepsilon\|x\|^{۲} < f(x) < K(x) + \varepsilon\|x\|^{۲} \qquad (۱۳\text{-}۶)$$

فرض کنید که $x = \sum_{i=۱}^{n} s_i v_i$. در این صورت:

$$K(x) = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i s_i^{۲} \qquad ,||x||^{۲} = \sum_{i=۱}^{n} s_i^{۲}$$

با ترکیب این معادلات با نامساوی ۶-۱۳، نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{i=۱}^{n}(\frac{۱}{۲}\lambda_i - \varepsilon)s_i^{۲} < f(x) < \sum_{i=۱}^{n}(\frac{۱}{۲}\lambda_i + \varepsilon)s_i^{۲} \qquad (۱۴\text{-}۶)$$

حال فرض کنید که همه مقادیر ویژه $A(p)$ مثبت باشند. در این صورت برای هر i، $\frac{۱}{۲}\lambda_i - \varepsilon > ۰$ و در نتیجه طبق نامساوی سمت چپ رابطه ۶-۱۴:

$$f(\circ) = ۰ \leq \sum_{i=۱}^{n}(\frac{۱}{۲}\lambda_i - \varepsilon)s_i^{۲} < f(x)$$

پس در صورتی که $\|x\| < \delta$، $f(\circ) \leq f(x)$ و f دارای مینیمم نسبی در ۰ است. با استدلال مشابهی که سمت چپ نامساوی ۶-۱۴ را به کار می‌گیرد، نتیجه می‌گیریم که اگر همه مقادیر ویژه $A(p)$ منفی باشند، f در ۰ ماکزیمم نسبی دارد. قسمت‌های الف و ب قضیه به این ترتیب ثابت می‌شود.

حال فرض کنید که $A(p)$، هم یک مقدار ویژه مثبت و هم یک مقدار ویژه منفی داشته باشد. مثلاً به ازای i و j ای، $\lambda_i > ۰$ و $\lambda_j < ۰$. در این صورت، $\frac{۱}{۲}\lambda_i - \varepsilon > ۰$ و $\frac{۱}{۲}\lambda_j + \varepsilon < ۰$. در این صورت با جایگزینی $x = sv_i$ و در نامساوی سمت چپ رابطه ۶-۱۴ و $x = sv_j$ در نامساوی سمت راست، نتیجه می‌گیریم که:

$$f(sv_j) < (\frac{۱}{۲}\lambda_j + \varepsilon)s^{۲} < ۰ = f(\circ) \quad \text{و} \quad f(\circ) = ۰ < (\frac{۱}{۲}\lambda_i - \varepsilon)s^{۲} < f(sv_i)$$

در نتیجه f در فاصله‌های به اندازه دلخواه نزدیک به ۰، هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی را اختیار می‌کند؛ پس نتیجه می‌گیریم که f، نه ماکزیمم نسبی در ۰ دارد و نه مینیمم نسبی. (ج) به این ترتیب ثابت می‌شود.

برای اثبات این که آزمون مشتق دوم، در شرایط مذکور، نتیجه بخش نیست، دو تابع زیر را در نقطه $p = ۰$ در نظر

بگیرید:

$$g(t_1,t_2) = t_1^2 + t_2^4 \quad \text{و} \quad f(t_1,t_2) = t_1^2 - t_2^4$$

در هر دو حالت، p یک نقطه بحرانی f است و :

$$A(p) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با این حال f در نقطه 0 اکسترمم نسبی ندارد، در حالی که g در 0 مینیمم نسبی دارد. □

قانون لَختی سیلوستر

هر دو نمایش ماتریس برای یک فرم دو خطی، رتبه یکسانی دارند زیرا رتبه تحت همنهشتی پایاست. بنابراین می‌توانیم رتبه یک فرم دو خطی را برابر رتبه هر یک از نمایش‌های ماتریسی آن تعریف کنیم. هرگاه یکی از این نمایش‌های ماتریسی قطری باشد، رتبه آن برابر با تعداد درایه‌های قطری ناصفر آن است.

بررسیمان را به فرم‌های دو خطی متقارن بر فضاهای برداری متناهی البُعد حقیقی محدود می‌کنیم. هر چنین فرمی یک نمایش ماتریی قطری دارد که می‌تواند درایه‌های مثبت، منفی و همچنین صفر داشته باشد. با این که این درایه‌ها یکتا نیستند، نشان خواهیم داد که تعداد درایه‌های مثبت و نیز تعداد درایه‌های منفی، یکتا هستند. به عبارت دیگر، از انتخاب نمایش قطری مستقلند. این نتیجه، قانون لَختی سیلوستر نام دارد. این قانون را ثابت می‌کنیم و آن را برای توصیف کلاس‌های هم ارزی ماتریس‌های حقیقی همنهشت به کار می‌بریم.

قضیه ۳۲.۶ (قانون لَختی سیلوستر). فرض کنید که H یک فرم دو خطی متقارن، بر فضای برداری حقیقی متناهی البُعد V باشد. در این صورت تعداد درایه‌های قطری منفی هر نمایش ماتریسی قطری H از نمایش ماتریسی مستقل است.

برهان. فرض کنید β و γ پایه‌هایی برای V باشند که نمایش ماتریسی H نسبت به آنها قطری است. بدون کاستن از کلیت، می‌توانیم فرض کنیم که β و γ به گونه‌ای مرتب شده اند که درایه‌های مثبت نمایش ماتریسی نظیر آنها پیش از درایه‌های منفی، و درایه‌های منفی هم پیش از درایه‌های صفر می‌آیند. کافی است نشان دهیم که این دو نمایش تعداد درایه‌های مثبت یکسانی دارند، چرا که تعداد درایه‌های منفی برابر با اختلاف میان رتبه و تعداد درایه‌های مثبت است. فرض کنید p و q به ترتیب تعداد درایه‌های قطری مثبت نمایش ماتریسی H نسبت به β و γ باشد. فرض می‌کنیم که $p \neq q$ و به تناقض

می‌رسیم. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید که $p < q$. فرض کنید:

$$\beta = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_p, \ldots, v_r, \ldots, v_n\}$$

و

$$\gamma = \{w_۱, w_۲, \ldots, w_q, \ldots, w_r, \ldots, w_n\}$$

که r رتبه H است و $n = \dim(V)$. فرض کنید $L : V \to R^{p+r-q}$، نگاشتی باشد که چنین تعریف می‌شود:

$$L(x) = (H(x, v_۱), H(x, v_۲), \ldots, H(x, v_p), H(x, w_{q+۱}), \ldots, H(x, w_r))$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که L خطی است و $\text{rank}(L) \leq p + r - q$. در نتیجه:

$$\text{nullity}(L) \geq n - (p + r - q) > n - r$$

بنابراین بردار ناصفر $v_۰$ چنان موجود است که $v_۰ \notin \text{span}(\{v_{r+۱}, v_{r+۲}, \ldots, v_n\})$ ولی $v_۰ \in N(L)$. چون $v_۰ \in N(L)$، نتیجه می‌شود که برای هر $i \leq p$، $H(v_۰, v_i) = ۰$ و برای هر $q < i \leq r$، $H(v_i, w_i) = ۰$. فرض کنید:

$$v_۰ = \sum_{j=۱}^{n} a_j v_j = \sum_{j=۱}^{n} b_j w_j$$

برای هر $i \leq p$،

$$H(v_۰, v_i) = H\left(\sum_{j=۱}^{n} a_j v_j, v_i\right) = \sum_{j=۱}^{n} a_j H(v_j, v_i) = a_i H(v_i, v_i)$$

اما برای هر $i \leq p$، داریم $H(v_i, v_i) > ۰$ و $H(v_۰, v_i) = ۰$ و بنابراین $a_i = ۰$. به طور مشابه، برای هر $q + ۱ \leq i \leq r$، $b_i = ۰$. چون $v_۰$ در فضای پدید آمده از $\{v_{r+۱}, \ldots, v_n\}$ قرار ندارد، نتیجه می شود که به ازای

$p < i \leq r$ای $a_i \neq ۰$. در نتیجه:

$$\begin{aligned} H(v_۰, v_۰) &= H\left(\sum_{j=۱}^{n} a_j v_j, \sum_{i=۱}^{n} a_i v_i\right) \\ &= \sum_{j=۱}^{n} a_j^۲ H(v_j, v_i) \\ &= \sum_{j=p+۱}^{r} a_j^۲ H(v_j, v_j) \\ &< ۰ \end{aligned}$$

از طرف دیگر:

$$\begin{aligned} H(v_۰, v_۰) &= H\left(\sum_{j=۱}^{n} b_j w_j, \sum_{i=۱}^{n} b_i w_i\right) \\ &= \sum_{j=۱}^{n} b_j^۲ H(w_j, w_j) \\ &= \sum_{j=۱}^{q} b_j^۲ H(w_j, w_j) \\ &\geq ۰ \end{aligned}$$

در نتیجه، هم $H(v_۰, v_۰) < ۰$ و هم $H(v_۰, v_۰) \geq ۰$ که تناقض است. نتیجه می‌گیریم که $p = q$. □

چند تعریف: تعداد درایه‌های قطری مثبت یک نمایش قطری از یک فرم دو خطی متقارن بر یک فضای برداری حقیقی، **اندیس** آن نام دارد. اختلاف میان تعداد درایه‌های قطری مثبت و تعداد درایه‌های قطری منفی یک نمایش ماتریسی از یک فرم دو خطی متقارن، **نشان** آن فرم نامیده می‌شود. سه اصطلاح رتبه، اندیس و نشان **پایاهای** فرم دو خطی نامیده می‌شوند، زیرا نسبت به نمایش‌های ماتریسی، پایا هستند. این اصطلاحات، در مورد فرم درجه دوم متناظر نیز به کار می‌روند. توجه کنید که مقادیر هر دو تا از این پایاها، مقدار سومی را هم مشخص می‌کنند.

مثال ۹. فرم دو خطی متناظر با فرم درجه دوم K در مثال ۸، دارای یک نمایش ماتریسی قطری ۳×۳ با درایه‌های قطری ۲، ۷ و ۰ است. در نتیجه، رتبه، اندیس و نشان K، همگی ۲ هستند. □

مثال ۱۰. نمایش ماتریسی فرم دو خطی متناظر با فرم درجه دوم $K(x, y) = x^۲ - y^۲$ بر فضای $\mathbb{R}^۲$ نسبت به پایه مرتب استاندارد، ماتریسی قطری با درایه‌های قطری ۱ و ۱− است. بنابراین، رتبه K، ۲، اندیس K، ۱، و نشان K، ۰ می‌باشد. □

چون رابطه همنهشتی، ارتباط بسیار نزدیکی با فرم‌های دو خطی دارد، می‌توانیم قانون لَختی سیلوستر را برای مطالعه این رابطه روی مجموعه ماتریس‌های حقیقی به کار ببریم. فرض کنیم A یک ماتریس حقیقی متقارن $n \times n$، و D و E هر دو ماتریس‌های قطری همنهشت با A باشند. طبق نتیجه ۳ از قضیه ۲۶.۶، A نمایش ماتریسی فرم دو خطی H بر $\mathbb{R}^n$ نسبت به پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ است که H به صورت $H(x, y) = x^t Ay$ تعریف می‌شود. در نتیجه، قانون لَختی سیلوستر بیان می‌دارد که D و E دارای تعداد درایه‌های قطری مثبت و نیز درایه‌های قطری منفی یکسان هستند. می‌توانیم این نتیجه را به عنوان شکل ماتریسی قانون سیلوستر معرفی کنیم.

نتیجه ۷ (قانون اینرسی سیلوستر برای ماتریس ها). فرض کنید A یک ماتریس متقارن حقیقی باشد. تعداد درایه‌های قطری مثبت و تعداد درایه‌های قطری منفی هر ماتریس قطری همنهشت با A، از انتخاب این ماتریس قطری مستقل است.

چند تعریف: فرض کنید A یک ماتریس حقیقی متقارن و D ماتریسی قطری متناظر با A باشد. تعداد درایه‌های قطری مثبت D، **اندیس** A نام دارد. اختلاف تعداد درایه‌های قطری مثبت و تعداد درایه‌های قطری منفی D، **نشان** A نام دارد. مانند گذشته رتبه، اندیس و نشان یک ماتریس پایاهای آن ماتریس نام دارند و مقادیر هر دو تا از این پایاها، مقدار سومی را مشخص می‌سازند.

هر دو تا از این پایاها را می‌توان برای تعیین دسته هم ارزی تمام ماتریس‌های متقارن حقیقی همنهشت با هم به کار برد.

نتیجه ۸. دو ماتریس متقارن $n \times n$ حقیقی همنهشت هستند، اگر و تنها اگر پایاهای یکسان داشته باشند.

برهان. اگر A و B ماتریس‌های متقارن $n \times n$ متقارن همنهشت باشند، هر دو با ماتریس قطری یکسانی همنهشت هستند و نتیجه می‌شود که دارای پایاهای یکسان هستند. به عکس فرض کنید A و B ماتریس‌های $n \times n$ متقارنی با پایاهای یکسان باشند. فرض کنید D و E ماتریس‌های متقارنی به ترتیب همنهشت با A و B باشند و طوری انتخاب شده باشند که درایه‌های قطری آنها با ترتیب مثبت، منفی و صفر، مرتب شده باشند (تمرین ۲۲ اجازه این کار را می‌دهد). چون A و B دارای پایای یکسان هستند، D و E نیز چنین هستند. فرض کنید p و r به ترتیب نشان دهنده اندیس و رتبه مشترک D و E باشند. فرض کنید d_i نشان دهنده درایه قطری i اُم D، و Q ماتریس قطری $n \times n$ای باشد که درایه قطری i اُم آن، q_i چنین تعریف می‌شود:

$$q_i = \begin{cases} \dfrac{۱}{\sqrt{d_i}} & \text{هرگاه } ۱ \le i \le p \text{؛} \\ \dfrac{-۱}{\sqrt{-d_i}} & \text{هرگاه } p < i \le r \text{؛} \\ ۰ & \text{هرگاه } r < i \text{؛} \end{cases}$$

در این صورت $Q^tDQ = J_{pr}$، که:

$$J_{pr} = \begin{bmatrix} I_p & O & O \\ O & -I_{r-p} & O \\ O & O & O \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم که A، همنهشت با J_{pr} است. به طور مشابه B نیز همنهشت با J_{pr} است و در نتیجه Aبا B همنهشت است. □

ماتریس J_{pr}، نقش یک فرم متعارف برای نظریه ماتریس‌های حقیقی متقارن را دارد. نتیجه بعدی، که برهان آن در برهان نتیجه ۲ گنجانده شده است، نقش J_{pr} را نشان می‌دهد.

نتیجه ۹. ماتریس متقارن A $n \times n$ دارای اندیس p و رتبه r است، اگر و تنها اگر با J_{pr} (که در بالا تعریف شد) همنهشت باشد.

مثال ۱۱. فرض کنید:

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \quad ، \quad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

نتیجه ۲ را برای تشخیص وجود همنهشتی میان A، B و C به کار می‌گیریم. ماتریس A همان ماتریس ۳ × ۳ ی مثال ۵ است، و در آن مثال ثابت شد که A همنهشت با ماتریس قطری دارای درایه‌های قطری ۱، ۱ و ۲۴− است. بنابراین رتبه A، ۳ و اندیس آن ۲ است. با استفاده از روش‌های مثال ۵ (محاسبه Q لازم نیست) می‌توان نشان داد که B و C به ترتیب همنهشت با ماتریس‌های قطری زیر هستند:

$$D_C = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۴ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad D_B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌شود که رتبه A و C هر دو ۳ و اندیس آنها ۲ است، در حالی که رتبه B، ۳ و اندیس آن ۱ می‌باشد. نتیجه می‌گیریم که A و C همنهشت هستند، در حالی که B نه با A همنهشت است و نه با C. □

تمرینات

۱. تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) هر فرم درجه دوم، یک فرم دو خطی است.

ب) هرگاه دو ماتریس همنهشت باشند، دارای مقادیر ویژه یکسان هستند.

ج) فرم‌های دو خطی متقارن، نمایش ماتریسی متقارن دارند.

د) هر ماتریس متقارن، با یک ماتریس قطری همنهشت است.

ه) مجموع دو فرم دو خطی متقارن، یک فرم دو خطی متقارن است.

و) دو ماتریس متقارن با چند جمله‌ای مشخص یکسان، نمایش‌های ماتریسی یک فرم دو خطی مشترک هستند.

ز) یک فرم دو خطی مانند H موجود است که برای هر x و y، $H(x,y) \neq 0$.

ح) هرگاه V فضایی برداری با بُعد n باشد، آنگاه $\dim(\mathcal{B}(V)) = 2n$.

ط) فرض کنید H فرمی دو خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد. برای هر $x \in V$، $y \in V$ای چنان موجود است که $y \neq 0$ اما $H(x,y) = 0$.

ی) اگر H، فرمی دو خطی بر فضای ضرب داخلی متناهی البُعد حقیقی V باشد، پایه مرتب β برای V موجود است به گونه‌ای که $\psi_\beta(H)$ ماتریسی قطری باشد.

۲. خواص الف، ب، ج و د در صفحه ۳۴۴ را ثابت کنید.

۳. الف) ثابت کنید که مجموع دو فرم دو خطی، فرمی دو خطی است.

ب) ثابت کنید که حاصلضرب یک اسکالر در یک فرم دو خطی، فرمی دو خطی است.

ج) قضیه ۶.۲۵ را ثابت کنید.

۴. مشخص کنید که کدام یک از موارد زیر، فرم دو خطی هستند. برای پاسخ خود دلیل آورید.

الف) فرض کنید $V = C[0,1]$، فضای توابعی حقیقی پیوسته بر بازه بسته $[0,1]$ باشد. برای هر $f, g \in V$، $H(f,g)$ را برابر با:

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt$$

تعریف کنید.

ب) فرض کنید V فضایی برداری بر میدان F و $J \in B(V)$ ناصفر باشد. $H : V \times V \to F$ را چنین تعریف کنید:

$$H(x,y) = [J(x,y)]^{2} \quad \text{برای هر } x,y \in V،$$

ج) $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را اینگونه تعریف کنید: $H(t_1,t_2) = t_1 + 2t_2$.

د) اعضای $\mathbb{R}^2$ را به صورت بردارهای ستونی در نظر بگیرید و فرض کنید که $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$، تابعی باشد که به صورت $H(x,y) = \det(x,y)$، یعنی دترمینان ماتریس 2×2 ی دارای ستون‌های x و y تعریف می‌شود.

ه) فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی حقیقی باشد و $H : V \times V \to C$ تابعی باشد که برای هر $x,y \in V$ به صورت $H(x,y) = \langle x,y \rangle$ تعریف می‌شود.

و) فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی مختلط باشد و $H : V \times V \to \mathbb{C}$، تابعی باشد که برای هر $x,y \in V$ چنین تعریف می‌شود $H(x,y) = \langle x,y \rangle$.

۵. دو خطی بودن هر یک از نگاشت‌های زیر را بررسی کنید. سپس نمایش ماتریسی آن را نسبت به پایه مرتب ارائه شده محاسبه کنید.

الف) $H : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$، که:

$$H\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right) = a_1b_1 - 2a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_3$$

با پایه :

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

ب) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ را با پایه :

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

در نظر بگیرید. $H : V \times V \to \mathbb{R}$ را به صورت $H(A, B) = \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(B)$ تعریف کنید.

ج) فرض کنید $\beta = \{\cos t, \sin t, \cos ۲t, \sin ۲t\}$ در این صورت β پایه‌ای مرتب برای $V = \operatorname{span}(\beta)$ است، که زیرفضایی چهار بُعدی از تمام توابع پیوسته بر $\mathbb{R}$ است. فرض کنید $H : V \times V \to \mathbb{R}$، تابعی باشد که به این صورت تعریف می‌شود: $H(f, g) = f'(\circ) \cdot g''(\circ)$.

۶. فرض کنید V و W دو فضای برداری بر یک میدان مشترک باشند و $T : V \to W$ تبدیلی خطی بر V باشد. برای هر $H \in \mathcal{B}(W)$ ، $\hat{T}(H) : V \times V \to F$ را به صورت $\hat{T}(H)(x, y) = H(T(x), T(y))$ برای هر $x, y \in V$ تعریف کنید. موارد زیر را ثابت کنید:

الف) برای هر $H \in \mathcal{B}(W)$، $\hat{T}(H) \in \mathcal{B}(V)$.

ب) $\hat{T} : \mathcal{B}(W) \to \mathcal{B}(V)$ تبدیلی خطی است.

ج) اگر T یک ایزومرفیسم باشد، $\hat{T}$ نیز چنین است.

۷. نمادگذاری قضیه ۲۶.۶ را مفروض بگیرید:

الف) ثابت کنید که برای هر پایه مرتب β، ψ_β خطی است.

ب) فرض کنید که V یک فضای ضرب داخلی $n-$ بُعدی بر میدان F، با پایه مرتب β باشد و $\varphi_\beta : V \to F^n$، نمایش استاندارد V نسبت به β. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$. $H : V \times V \to F$ را چنین تعریف کنید. $H(x, y) = [\varphi_\beta(x)]^t A[\varphi_\beta(y)]$. ثابت کنید $H \in \mathcal{B}(V)$. آیا می‌توانید این مطلب را به عنوان نتیجه تمرین ۶ ثابت کنید؟

ج) عکس (ب) را ثابت کنید: فرض کنید H یک فرم دو خطی بر V باشد. اگر $A = \psi_\beta(H)$، آنگاه
$H(x, y) = [\phi_\beta(x)]^t A[\phi_\beta(y)]$

۸. الف) نتیجه ۱ از قضیه ۶-۲۶ را ثابت کنید.

ب) برای هر فضای برداری متناهی البُعد V، روشی را برای یافتن یک پایه مرتب برای $\mathcal{B}(V)$ شرح دهید.

۹. نتیجه ۲ از قضیه ۲۶.۶ را ثابت کنید.

۱۰. نتیجه ۳ از قضیه ۲۶.۶ را ثابت کنید.

۱۱. ثابت کنید که رابطه همنهشتی یک رابطه هم ارزی است.

۱۲. طرح زیر، جایگزینی برای برهان قضیه ۲۷.۶ ارائه می‌دهد:

الف) فرض کنید β و γ پایه‌هایی مرتب برای فضای برداری متناهی البُعد V، و Q ماتریس تبدیل مختصاتی باشد که مختصات در پایه γ را به مختصات در پایه β تبدیل می‌کند. ثابت کنید که $\phi_\beta = L_Q\phi_\gamma$ که ϕ_β و ϕ_γ، به ترتیب نمایش‌های استاندارد V نسبت به β و γ هستند.

ب) نتیجه ۲ قضیه ۲۶.۶ را در مورد الف به کار گیرید تا برهان جدیدی برای قضیه ۲۷.۶ به دست آید.

۱۳. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی البُعد باشد و $H \in \mathcal{B}(V)$. ثابت کنید که برای هر دو پایه مرتب β و γ برای V، $\operatorname{rank}(\psi_\beta(H)) = \operatorname{rank}(\psi_\gamma(H))$.

۱۴. موارد زیر را ثابت کنید:

الف) هر ماتریس مربعی قطری، متقارن است.

ب) هر ماتریس همنهشت با یک ماتریس قطری، متقارن است.

ج) نتیجه قضیه ۲۹.۶.

۱۵. فرض کنید V فضایی برداری روی میدان F با مشخصه غیر ۲ باشد و H یک فرم دو خطی متقارن بر V باشد. ثابت کنید که اگر $K(x) = H(x,x)$، فرم درجه دوم مربوط به H باشد، آنگاه برای هر $x, y \in V$،

$$H(x,y) = \frac{۱}{۲}[K(x+y) - K(x) - K(y)]$$

۱۶. به ازای هر یک از فرم‌های درجه دوم K بر فضای ضرب داخلی حقیقی V که در زیر آمده اند، فرم دو خطی متقارن H را چنان بیابید که برای هر $x \in V$، $K(x) = H(x,x)$. سپس پایه مرتب متعامد یکه β برای V را به گونه‌ای بیابید که $\psi_\beta(H)$ ماتریسی قطری باشد:

الف) $K : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ که چنین تعریف می‌شود: $K\begin{bmatrix} t_۱ \\ t_۲ \end{bmatrix} = -۲t_۱^۲ + ۴t_۱t_۲ + t_۲^۲$

ب) $K : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ که چنین تعریف می‌شود: $K\begin{bmatrix} t_۱ \\ t_۲ \end{bmatrix} = ۷t_۱^۲ - ۸t_۱t_۲ + t_۲^۲$

ج) $K : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ که چنین تعریف می‌شود: $K\begin{bmatrix} t_۱ \\ t_۲ \\ t_۳ \end{bmatrix} = ۳t_۱^۲ + ۳t_۲^۲ + ۳t_۳^۲ - ۲t_۱t_۳$

۱۷. فرض کنید که S مجموعه همه $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$هایی باشد که:

$$3t_1^2 + 3t_2^2 + 3t_3^2 - 2t_1t_3 + 2\sqrt{2}(t_1 + t_3) + 1 = 0$$

پایه متعامد یکه β را برای $\mathbb{R}^3$ چنان بیابید که معادله مربوط به مختصات نقاط S نسبت به β ساده باشد؛ S را توصیف هندسی کنید.

۱۸. عبارت زیر را که از قضیه ۳۱.۶ قسمت د گرفته شده است را ثابت کنید.

الف) اگر $0 < \operatorname{rank}(A) < n$ و A مقدار ویژه منفی نداشته باشد، آنگاه f در نقطه p ماکزیمم نسبی ندارد.

ب) هرگاه $0 < \operatorname{rank}(A) < n$ و A مقدار ویژه مثبت نداشته باشد، آنگاه f در نقطه p مینیمم نسبی ندارد.

۱۹. شکل تغییر یافته آزمون مشتق دوم را که در زیر برای حالت $n = 2$ داده شده، ثابت کنید. D را برابر با

$$\left[\frac{\partial^2 f(p)}{(\partial t_1)^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(p)}{(\partial t_2)^2}\right] - \left[\frac{\partial^2 f(p)}{(\partial t_1)(\partial t_2)}]\right]^2$$

تعریف کنید

الف) هرگاه $D > 0$ و $\partial^2 f(p)/(\partial t_1)^2$، آنگاه f در نقطه p مینیمم نسبی دارد.

ب) اگر $D > 0$ و $\partial^2 f(p)/(\partial t_1)^2 < 0$، آنگاه f در نقطه p ماکزیمم نسبی دارد.

ج) هرگاه $D < 0$، f در p اکسترمم نسبی ندارد.

د) اگر $D = 0$، آزمون نتیجه بخش نیست.

راهنمایی: توجه کنید که مانند قضیه ۶-۳۱، $D = \det(A) = \lambda_1\lambda_2$، که λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه A هستند.

۲۰. فرض کنید که A، ماتریسی $n \times n$ روی میدان F باشد و E یک ماتریس مقدماتی $n \times n$ روی F باشد. در بخش ۳-۱ ثابت شد که AE را می‌توان با انجام یک عمل ستونی مقدماتی به دست آورد. ثابت کنید که E^tA را می‌توان از طریق انجام همان عمل مقدماتی، اما روی سطرهای A به جای ستون‌های آن به دست آورد. راهنمایی: توجه داشته باشید که: $E^tA = (A^tE)^t$.

۲۱. برای هر یک از ماتریس‌های A ی زیر با درایه‌های واقع $\mathbb{R}$، ماتریس قطری D و ماتریس وارون پذیر Q را چنان بیابید که $Q^tAQ = D$.

الف) $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$　　ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$　　ج) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$

راهنمایی برای قسمت ب: عمل مقدماتی ای غیر از تعویض ستون‌ها به کار برید.

۲۲. ثابت کنید که اگر درایه‌های قطری یک ماتریس قطری، جایشان با هم عوض شود، ماتریس حاصل با ماتریس اول همنهشت خواهد بود.

۲۳. فرض کنید که T، عملگری خطی بر فضای ضرب داخلی حقیقی V باشد و $H : V \times V \to \mathbb{R}$ را چنین تعریف کنید: برای هر $x, y \in V$، $H(x, y) = \langle x, T(y) \rangle$.

الف) ثابت کنید که H، یک فرم دو خطی است.

ب) ثابت کنید که H متقارن است اگر و تنها اگر T خود الحاقی باشد.

ج) T چه ویژگی‌هایی باید داشته باشد تا H، ضربی داخلی بر V باشد؟

د) توضیح دهید که چرا در صورتی که V یک فضای ضرب داخلی مختلط باشد H ممکن است یک فرم دو خطی نباشد.

۲۴. عکس قسمت الف تمرین ۲۳ را ثابت کنید. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی حقیقی متناهی البُعد و H یک فرم دو خطی بر V باشد. در این صورت، ثابت کنید عملگر خطی یکتای T بر V چنان موجود است که برای هر $x, y \in V$، $H(x, y) = \langle x, T(y) \rangle$. راهنمایی: پایه متعامد یکه βای برای V انتخاب کنید. فرض کنید که $A = \psi_\beta(H)$ و T عملگر خطیی بر V باشد که برای آن $[T]_\beta = A$. تمرین ۷ (ج) از این بخش و تمرین ۱۳ از بخش ۶-۲ را به کار گیرید.

۲۵. ثابت کنید که تعداد کل رده‌های هم ارزی متمایز کاتریس‌های حقیقی متقارن همنهشت $n \times n$، از عبارت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}$$

۶-۹ * نظریه نسبیت خاص اینیشتین

در نتیجه آزمایش‌های فیزیکی که در نیمه دوم قرن نوزدهم صورت گرفت (مهم تر از همه، آزمایش نیکلسن - مورلی، ۱۸۸۷)، فیزیکدانان به این نتیجه رسیدند که نتایج حاصل از اندازه‌گیری سرعت نور، از سرعت دستگاهی که برای اندازه‌گیری سرعت

به کار می‌رورد مستقل است. به عنوان مثال فرض کنید بر روی کره زمین، آزمایشگری سرعت نوری را که از خورشید تابانده می‌شود، اندازه بگیرد و مقدار آن را ۱۸۶۰۰۰ مایل بر ثانیه به دست آورد. حال فرض کنید که آزمایشگر، دستگاه اندازه گیری را در فضاپیمایی که با سرعت ۱۰۰۰۰۰ مایل بر ثانیه، در جهت خاصی از خورشید دور می‌شود، قرار دهد. تکرار همان آزمایش از درون فضاپیما، همان نتیجه قبلی را در بر دارد؛ نور با سرعت ۱۸۶۰۰۰ مایل بر ثانیه نسبت به فضاپیما حرکت می‌کند. نه با سرعت ۸۶۰۰۰ مایل بر ثانیه که انتظار آن می‌رفت!

این کشف ناگهانی، به روش جدیدی برای برقراری ارتباط میان دستگاه‌های مختصاتی که برای مکان یابی رویدادها در فضا - زمان به کار می‌روند، انجامید. حاصل امر، نسبیت خاص آلبرت اینشتین بود. در این بخش، از دیدگاه جبر خطی پایه‌های نظریه نسبیت را می‌سازیم.

مسأله اصلی آن است که دو دستگاه مختصات لَخت (بی شتاب) را که نسبت به یکدیگر در حرکت هستند، با این فرض که سرعت نور در هر دو دستگاه، یکسان اندازه گیری می‌شود، با هم مقایسه کنیم. فرض کنید که دو دستگاه مختصات لَخت S و S' در فضای سه بُعدی ($\mathbb{R}^3$) به گونه‌ای مفروض باشند که S'، آنطور که در S اندازه گیری می‌شود، با سرعت ثابت نسبت به S حرکت کند (به شکل ۶-۶ رجوع کنید). برای این که کار ساده تر شود، اجازه دهید فرض کنیم که:

۱. محورهای متناظر S و S' با یکدیگر موازی هستند (x با x'، y با y' و z یا z') و مبدأ S' در جهت مثبت محور xهای S، با سرعت ثابت $v > 0$ نسبت به S در حرکت است.

شکل

۲. ساعت‌های C و C' در فضا قرار گرفته اند، اولی ثابت نسبت به دستگاه مختصات S و دومی ثابت نسبت به دستگاه مختصات S'. این دو دستگاه، طوری طراحی شده اند که اعدادی حقیقی را بر حسب ثانیه گزارش می‌کنند. ساعت‌ها به گونه‌ای درجه بندی شده اند که هنگام روی هم قرار گرفتن مبدأهای S و S'، هر دو ساعت، صفر را نشان می‌دهند.
۳. واحد طولمان ثانیه نوری است (مسافتی که نور در یک ثانیه می‌پیماید). و واحد زمانمان را ثانیه انتخاب می‌کنیم. توجه داشته باشید که نسبت به این دو واحد، سرعت نور ۱ ثانیه نوری بر ثانیه است.

به هر رویداد مفروضی (چیزی که مکان و زمان رُخ دادن آن قابل توصیف باشد)، می‌توانیم مختصات زمان - مکان

نسبت دهیم. به عنوان مثال، هرگاه p رویدادی باشد که در مکان:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

نسبت به S و آن طور که ساعت C گزارش می‌دهد، در زمان t رُخ دهد، می‌توانیم به p مختصات زیر را نسبت دهیم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

این چهارتایی، مختصات فضا - زمان p نسبت به S و C نام دارد. به طور مشابه، p نسبت به S' و C' مختصات فضا - زمان زیر را دارد.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix}$$

در ادامه بحث، فرض می‌کنیم v مقداری برای سرعت، و $T_v : \mathbb{R}^۴ \to \mathbb{R}^۴$، نگاشتی باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_v \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix}$$

که در اینجا

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

مختصات فضا – زمان یک رویداد ثابت، به ترتیب نسبت به S و C، و S' و C' هستند.

اینشتین، مفروضات خاصی را در مورد T_v در نظر گرفت که به نظریه نسبیت خاص او انجامید. اکنون مجموعه معادلی از این مفروضات را بیان می‌کنیم.

اصول موضوعه نظریه نسبیت خاص

(R_1) سرعت هر پرتوی از نور، در هر یک از دو دستگاه، با استفاده از ساعتی که نسبت به آن دستگاه مختصات ساکن است، ۱ می‌باشد.

(R_2) نگاشت $T_v : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ یک ایزومرفیسم است.

(R_3) برای هر:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

اگر

$$T_v \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix}$$

آنگاه $y' = y$ و $z' = z$.

($R_۴$) هرگاه:

$$T_v \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix}$$

آنگاه x' و t' از y و z مستقل هستند، یعنی اگر:

$$T_v \begin{bmatrix} x \\ y_۱ \\ z_۱ \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad T_v \begin{bmatrix} x \\ y_۲ \\ z_۲ \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ t'' \end{bmatrix}$$

آنگاه $x'' = x'$ و $t'' = t'$.

($R_۵$) مبداء S، در جهت منفی محور x'های S' و آن طور که در S' اندازه گیری می‌شود با سرعت ثابت $-v < ۰$ حرکت می‌کند.

همان طور که خواهیم دید، این پنج اصل موضوع T_v را کاملاً مشخص می‌سازند. عملگر T_v، تبدیل لُرنتز در جهت x نام دارد. هدف ما آن است که T_v را محاسبه کنیم و آن را برای مطالعه پدیده مرموز انقباض زمان به کار گیریم.

قضیه ۳۳.۶. موارد زیر در فضای $\mathbb{R}^۴$ برقرار هستند:

الف) به ازای $i = ۲, ۳$، $T_v(e_i) = e_i$.

ب) $\text{span}(\{e_۲, e_۳\})$، تحت T_v-پایاست.

ج) $\text{span}(\{e_۱, e_۴\})$، تحت T_v-پایاست.

د) هر دوی $\text{span}(\{e_۲, e_۳\})$ و $\text{span}(\{e_۱, e_۴\})$، تحت T_v^*-پایا هستند.

ه) به ازای $i = ۲, ۳$، $T_v^*(e_i) = e_i$.

برهان. الف) طبق اصل $(R_۲)$

$$T_v \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه طبق اصل $(R_۴)$، مختص‌های اول و چهارم

$$T_v \begin{bmatrix} ۰ \\ a \\ b \\ ۰ \end{bmatrix}$$

هر دو به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ صفر هستند، در نتیجه طبق اصل $(R_۳)$

$$T_v \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad T_v \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

اثبات قسمت‌های ب، ج و د به عهده خواننده گذاشته می‌شود.

ه) برای هر $j \neq ۲$، طبق قسمت‌های الف و ج، $\langle T_v^*(e_۲), e_j\rangle = \langle e_۲, T_v(e_j)\rangle = ۰$؛ به ازای $j = ۲$، طبق قسمت الف $\langle T_v^*(e_۲), e_j\rangle = \langle e_۲, T_v(e_۲)\rangle = \langle e_۲, e_۲\rangle = ۱$. نتیجه می‌گیریم که $T_v^*(e_۲)$ مضربی از $e_۲$ است. یعنی به ازای $\lambda \in \mathbb{R}$ ای، $T_v^*(e_۲) = \lambda e_۲$. در نتیجه:

$$۱ = \langle e_۲, e_۲\rangle = \langle e_۲, T_v(e_۲)\rangle = \langle T_v^*(e_۲), e_۲\rangle = \langle \lambda e_۲, e_۲\rangle = \lambda$$

و در نتیجه $T_v^*(e_۲) = e_۲$. به طور مشابه، $T_v^*(e_۳) = e_۳$. □

فرض کنید که در لحظه‌ای که مبداءهای S و S' بر روی هم قرار می‌گیرند، جرقه نوری از مبداء مشترک آنها تابیده شود. رویداد جرقه نور، هنگامی که اندازه گیری نسبت به S و C یا نسبت به S' و C' صورت می‌گیرد، مختصات فضا – زمان

آن عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فرض کنید P، مجموعه تمام رویدادهایی باشد که مختصات فضا - زمان آنها نسبت به S و C، یعنی

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

طوری باشد که در زمان t (هنگامی که در C سنجیده می‌شود)، جرقه نور از نقطه‌ای که مختصاتش (هنگامی که نسبت به S سنجیده می‌شود)،

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

است، قابل رؤیت باشد. بیایید P را بر حسب x، y، z و t توصیف کنیم. چون سرعت نور ۱ است، در هر زمان $t \geq 0$، جرقه نور از هر نقطه‌ای که فاصله اش نسبت به مبدأ S (آنطور که در S اندازه گیری می‌شود)، $t \cdot 1 = t$ باشد، قابل رؤیت است. اینها دقیقاً همان نقاطی هستند که بر کره‌ای به شعاع t و به مرکز مبداء قرار دارند. مختصات چنین نقاطی (نسبت به S) در معادله $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$ صدق می‌کنند. بنابراین یک رویداد، در P قرار دارد اگر و تنها اگر مختصات فضا - زمان آن نسبت به S و C، یعنی:

$$(t \geq 0) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

فصل ۷

فرم‌های متعارف

همانگونه که در فصل ۵ آموختیم، مزیت یک عملگر قطری پذیر، در توصیف ساده آن نهفته است. چنین عملگری یک نمایش ماتریسی قطری دارد. یا به طور معادل پایه مرتبی برای فضای برداری مربوطه وجود دارد که از بردارهای ویژه آن تشکیل شده است. با این حال، هر عملگر خطی‌ای قطری پذیر نیست.، حتی اگر چندجمله‌ای مشخصه آن شکافته شود. مثال ۳ از بخش ۵-۲ نمونه‌ای از چنین عملگری است.

هدف ما در این فصل، آن است که به بررسی نمایش‌های ماتریسی جایگزین برای عملگرهای قطری ناپذیر بپردازیم. این نمایش‌ها، فرم‌های متعارف نام دارند. انواع گوناگونی از فرم‌های متعارف وجود داد و مزیت‌ها و نقص‌های هر یک بستگی به نحوه به کارگیری آن دارد. فرم متعارف انتخاب شده، با اختیار کردن یک پایه مرتب مناسب مشخص می‌شود. طبیعی است که فرم‌های متعارف یک عملگر خطی، **در صورتی که قطری پذیر نباشد، ماتریس‌های قطری باشد**.

در این فصل، دو فرم متعارف معروف را مورد بررسی قرار می‌دهیم. وجود اولین اینها که فرم متعارف جردن است، مستلزم آن است که چند جمله‌ای مشخص T بشکافد. این فرم، همیشه در صورتی که میدان مربوطه بسته جبری باشد، یعنی هر چند جمله‌ایی که ضرایب آن در میدان باشد، شکافته شود، موجود است. به عنوان مثال، طبق قضیه اساسی جبر، میدان اعداد مختلط بسته جبری است (به ضمیمه د رجوع کنید). دو بخش اول با این فرم سروکار دارند. وجود فرم‌های متعارف گویا، که در بخش ۷-۴ بررسی شده اند مستلزم چنین تجزیه‌ای نیست.

۷-۱ فرم متعارف جردن (قسمت اول)

فرض کنید T عملگری خطی برفضای برداری متناهی البُعد V باشد ونیز فرض کنید که چندجمله‌ای مشخص T بشکافد. از بخش ۲-۵ به یاد آورید که قطری پذیری T وابسته به این شرط است که اگر برای هریک از فضاهای ویژه T پایه مرتبی اختیار شود، اجتماع آنها پایه مرتبی برای V باشد، بنابراین، فقدان قطری پذیری بدین معناست که فضاهای ویژه، به قدر کافی «بزرگ» نیستند.

در این بخش، این فضاهای ویژه «نامناسب» را به فضاهای ویژه تعمیم یافته‌ای گسترش می‌دهیم و از هر یک پایه مرتبی انتخاب می‌کنیم، که اجتماع آنها پایه مرتب βای برای V است به گونه‌ای که

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} A_۱ & O & \cdots & O \\ O & A_۲ & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

که دراینجا O ماتریس صفر، از اندازه مناسب، و هر A_i به ازای مقدار ویژه λ ای، به شکل $[\lambda]$، و یا به صورت

$$\begin{bmatrix} \lambda & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & \lambda & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & \lambda & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & \lambda \end{bmatrix}$$

است. چنین ماتریس A_i ای را یک **بلوک جردن،** متناظر با λ می‌نامند، و ماتریس $[T]_\beta$ یک **فرم متعارف جردن** برای T نام دارد. ملاحظه کنید که هر یک از بلوک‌های جردن A_i، «تقریباً» ماتریسی قطری است. در واقع، $[T]_\beta$ ماتریسی قطری است، اگر و تنها اگر هر یک از A_i ها به شکل $[\lambda]$ باشد.

مثال ۱. فرض کنید T عملگری خطی بر $\mathbb{C}^۸$ و $\beta = \{v_۱, v_۲, ..., v_۸\}$، پایه مرتبی برای $\mathbb{C}^۸$ باشد به گونه‌ای که:

یک فرم جردن متعارف برای T باشد. توجه کنید که چندجمله‌ای مشخص T، $det(J-t\,I) = (t-۲)^۴(t-۳)^۲t^۲$ است و بنابراین چندگانگی هر مقدار ویژه T، برابر با تعداد دفعاتی است که این مقدار ویژه بر روی قطر ماتریس J ظاهر می‌شود. همچنین توجه کنید که $v_۱, v_۴, v_۵, v_۷$ تنها بردارهایی در β هستند که بردار ویژه T هستند. اینها بردارهای نظیر ستون‌هایی J از هستند که بالای درایه قطری آنها، ۱ قرار ندارد. □

ثابت خواهد شد که هر عملگر خطی که چند جمله‌ای مشخص آن بشکافد، دارای فرم متعارف جردنی است که صرفنظر از ترتیب بلوک‌های جردن آن یکتاست. با این حال، اینگونه نیست که فرم جردن کاملاً از روی چندجمله مشخص معین شود.

به عنوان مثال، فرض کنید که T'، عملگر خطی‌ای بر $\mathbb{C}^n$ باشد که $[T']_\beta = J'$، که در اینجا β پایه مرتب مذکور در مثال ۱ است و:

$$J' = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

در این صورت، چندجمله‌ای مشخص T' نیز $(t-۲)^۴(t-۳)^۲t^۲$ است اما عملگرخطی T' دارای فرم متعارف جردنی است که با J که فرم متعارف جردن عملگر T از مثال ۱ است، متفاوت می‌باشد.

باز هم ماتریس J و پایه مرتب β از مثال ۱ را در نظر بگیرید. توجه کنید که $T(v_۲) = v_۱ + ۲v_۲$ و بنابراین $(T-۲I)(v_۲) = v_۱$. به طور مشابه، $(T-۲I)(v_۳) = v_۲$. چون $v_۱$ و $v_۲$ بردارهای ویژه‌ای از T متناظر با $\lambda = ۲$ هستند، برای $i = ۱, ۲, ۳, ۴$ داریم: $(T-۲I)^۳(v_i) = ۰$. به صورت مشابه، به ازای $i = ۵, ۶$ داریم $(T-۳I)^۲(v_i) = ۰$ و به ازای $i = ۷, ۸$، $(T-۰I)^۲(v_i) = ۰$.

به خاطر ساختار خاص هر یک از بلوک‌های جردن یک فرم متعارف جردن می‌توانیم این مشاهدات را تعمیم دهیم: اگر v در یک پایه متعارف جردن برای عملگر خطی T باشد و با بلوک جردنی که درایه قطری آن λ است مرتبط باشد، آنگاه به ازای pای به اندازه کافی بزرگ $(T-\lambda I)^p(v) = ۰$. بردارهای ویژه همواره به ازای $p = ۱$، دراین شرط صدق می‌کنند.

تعریف:. فرض کنید که T عملگری خطی برفضای برداری V باشد. بردار ناصفر x در V را یک **بردار ویژه تعمیم یافته** T **متناظر با اسکالر** λ نامیم، هرگاه به ازای عدد صحیح مثبت pای: $(T-\lambda I)^p(x) = ۰$.

توجه کنید که اگر x یک بردار ویژه تعمیم یافته T متناظر با λ و p کوچکترین عدد صحیح pای باشد که $(T-\lambda I)^p(x) = ۰$، آنگاه $(T-\lambda I)^{p-۱}(x)$، بردار ویژه‌ای از T متناظر با λ است و در نتیجه λ یک مقدار ویژه T است.

در موردمثال ۱، هر عضو β یک بردار ویژه تعمیم یافته T است. در واقع $v_۱$، $v_۲$، $v_۳$ و $v_۴$ متناظر با اسکالر ۲، $v_۵$، $v_۶$ متناظر با اسکالر۳ و $v_۷$ و $v_۸$، متناظر با اسکالر ۰ هستند.

همان گونه که بردارهای ویژه در فضاهای ویژه قرار دارند، بردارهای ویژه تعمیم یافته در فضاهای ویژه تعمیم یافته واقع هستند.

تعریف:. فرض کنید که T عملگری خطی بر فضای برداری V و λ یک مقدار ویژه T باشد. **فضای ویژه تعمیم یافته T متناظر با λ**، که با $K_\lambda(T)$ نشان داده می‌شوند، زیر مجموعه‌ای از V است که چنین تعریف می‌شوند:

$$K_\lambda(T) = \{x \in V : \quad (T-\lambda I)^p(x) = \circ \ \text{به ازای عدد صحیح مثبت } p \text{ ای}\}$$

توجه کنید که $K_\lambda(T)$ متشکل از بردار صفر و همه بردارهای ویژه تعمیم یافته نظیر λ است.

یادآوری می‌کنیم که زیر فضای W از V به ازای عملگر خطی T، $T-$پایاست، هرگاه $T(W) \subseteq W$. در مطالبی که در زیر شرح داده می‌شوند، نتایج تمرینات ۳ و۴ ا ز بخش ۴-۵ را مفروض می‌گیریم. به خصوص برای هر چند جمله‌ای $g(t)$ اگرW، $T-$ پایا باشد، آنگاه $g(t)-$ پایا نیز هست. برد عملگر خطی T، $T-$پایاست.

قضیه ۷.۱. :فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری V و λ یک مقدار ویژه T باشد. دراین صورت:

الف) $K_\lambda(T)$، زیر فضای $T-$پایا از V است که E_λ (فضای ویژه متناظر با λ) را در بردارد.

ب) برای هر اسکالر $\lambda \neq \mu$، تحدید $T-\mu I$ به $K_\lambda(T)$ یک به یک است.

برهان. الف) واضح است که $\circ \in K_\lambda(T)$، فرض کنید که x و y در $K_\lambda(T)$ واقع باشند، در این صورت، اعداد صحیح مثبت p و q چنان موجودند که:

$$(T-\lambda I)^p(x) = (T-\lambda I)^q(y) = \circ$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}(T-\lambda I)^{p+q}(x+y) &= (T-\lambda I)^{p+q}(x) + (T-\lambda I)^{p+q}(y)\\ &= (T-\lambda I)^q(\circ) + (T-\lambda I)^p(\circ)\\ &= \circ\end{aligned}$$

و در نتیجه $x+y \in K_\lambda(T)$. اثبات این که $K_\lambda(T)$ تحت ضرب اسکالر بسته است، سر راست است و بنابراین حذف می‌گردد.

برای نشان دادن این که $K_\lambda(T)$ تحت T پایاست، $x \in K_\lambda(T)$ را مفروض بگیرید. عدد صحیح مثبت p را چنان انتخاب کنید که $(T-\lambda I)^p(x) = \circ$. بنابراین:

$$\begin{aligned}(T-\lambda I)^p T(x) &= T(T-\lambda I)^p(x)\\ &= T(\circ)\\ &= \circ\end{aligned}$$

پس $T(x) \in K_\lambda(T)$.

در نهایت، این که E_λ در $K_\lambda(T)$ واقع است، به سادگی قابل مشاهده است.

ب) فرض کنید $x \in K_\lambda(T)$ و $(T-\mu I)(x) = \circ$. به عنوان فرض خلف، فرض کنید که $x \neq \circ$. فرض کنید p کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که برای آن $(T-\lambda I)^p(x)f(x) = \circ$ و نیز فرض کنید که $y = (T-\lambda I)^{p-1}(x)$ در این صورت:

$$(T-\lambda I)^p(x) = (T-\lambda I)(y) = \circ$$

و در نتیجه $y \in E_\lambda$. به علاوه:

$$(T-\mu I)(y) = (T-\mu I)(T-\lambda I)^{p-1}(x) = (T-\lambda I)^{p-1}(T-\mu I)(x) = \circ$$

و درنتیجه $y \in E_\mu$. اما $E_\lambda \cap E_\mu = \{\circ\}$ و بنابراین $y = \circ$، که خلاف فرض است. بنابراین $x = \circ$ و تحدید $T-\mu I$ به $K_\lambda(T)$ یک به یک است. □

حکم ۲.۷. فرض کنید T چنان عملگری خطی‌ای بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد که چند جمله‌ای مشخص T بشکافد. فرض کنید که λ، مقدار ویژه‌ای از T با چندگانگی m باشد. در این صورت:

الف) $\dim(K_\lambda(T)) \leq m$

ب) $K_\lambda(T) = N((T-\lambda I))^m$

برهان. الف) فرض کنید $W = K_\lambda(T)$ و $h(t)$ چند جمله‌ای مشخصه T_W باشد. طبق قضیه ۲۶.۵، $h(t)$ چند جمله‌ای مشخص T را عاد می‌کند و طبق قضیه ۱.۷ قسمت ب λ تنها مقدار ویژه T_Wاست. بنابراین $h(t) = (-1)^d(t-\lambda)^d$ که $d = \dim(W)$ و$d \leq m$.

ب) واضح است که $N((T-\lambda I)^m) \subseteq K_\lambda(T)$. حال فرض کنید که W و $h(t)$، مانند قسمت الف باشند. در این صورت طبق قضیه کیلی-هامیلتن یعنی قضیه ۲۸.۵ $h(T_W)$ متحد با صفر است و بنابراین برای هر $x \in W$ $(T-\lambda I)^d(x) = \circ$. چون $d \leq m$ داریم: $K_\lambda(T) \subset N((T-\lambda I)^m)$. □

قضیه ۳.۷. فرض کنید T چنان عملگری خطی‌ای بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد که چند جمله‌ای مشخص T بشکافد و فرض کنید که $\lambda_1, ..., \lambda_k$ مقادیر ویژه متمایز T باشند. در این صورت برای هر $x \in V$ اعضای $v_i \in K_{\lambda_i}(T)$، $1 \leq i \leq k$ موجود هستند به گونه‌ای که:

$$x = v_1 + ... + v_k$$

برهان. برهان از طریق استقراء ریاضی برتعداد مقادیر ویژه متمایز T، k صورت می‌پذیرد. نتیجه در حالتی که $k = 1$ بدیهی است. [1] پس فرض کنید که نتیجه به ازای عدد صحیح $k > 1$ هرگاه T کمتر از k مقدار ویژه متمایز داشته باشد،

[1] قضیه کیلی هامیلتون را بکار گیرید.

برقرار باشد.

فرض کنید که m چندگانگی λ_k باشد و $f(t)$ چندجمله‌ای مشخص T. دراین صورت، به ازای چند جمله‌ای $g(t)$ای که بر $(t-\lambda_k)$ بخش پذیر نیست، $f(t)=(t-\lambda_k)^m g(t)$. فرض کنید $W=R((T-\lambda_k I)^m)$. واضح است که W تحت T پایا است. مشاهده کنید که به ازای $i<k$، $(T-\lambda_k I)^m$، $K_{\lambda_i}(T)$ را به روی خودش می‌نگارد. چرا که فرض کنید $i<k$. چون $(T-\lambda_k I)^m$، $K_{\lambda_i}(T)$ را به درون خودش می‌نگارد و $\lambda_k \neq \lambda_i$، (طبق قضیه ۱.۷ قسمت ب) تحدید $T-\lambda_k I$ به $K_{\lambda_i}(T)$ یک به یک و در نتیجه پوشاست. یک نتیجه این مطلب این است که برای هر $i<k$، $K_{\lambda_i}(T)$ درون W قرار دارد و بنابراین برای هر $i<k$، λ_i یک مقدار ویژه T_W است.

حال ملاحظه کنید که λ_k یک مقدار ویژه T_W نیست، چرا که فرض کنید به ازای $v \in W$ ای $T(v)=\lambda_k v$. در اینصورت به ازای $y \in V$، $v=(T-\lambda_k I)^m(y)$ و در نتیجه:

$$\circ=(T-\lambda_k I)(v)=(T-\lambda_k I)^{m+۱}(y)$$

بنابراین $y \in K_{\lambda_k}(T)$. پس طبق حکم ۷.۱، $v=(T-\lambda_k I)^m(y)$.

چون هر مقدار ویژه T_W یک مقدار ویژه T است، نتیجه می‌شود که مقادیر ویژه متمایز T_W، $\lambda_۱,\ldots,\lambda_{k-۱}$ هستند.

حال فرض کنید $x \in V$. در این صورت $(T-\lambda_k I)^m(x) \in W$. چون T_W دارای $k-۱$ مقدار ویژه متمایز $\lambda_۱,\ldots,\lambda_{k-۱}$ است، فرض استقراء را می‌توان به کار برد و بنابراین اعضای $w_i \in K_{\lambda_i}(T_W)$، $۱ \leq i \leq k-۱$ چنان موجود هستند که:

$$(T-\lambda_k I)^m(x)=w_۱+\ldots+w_{k-۱}$$

چون برای هر $i<k$، $K_{\lambda_i}(T_W) \subseteq K_{\lambda_i}(T)$ و $(T-\lambda_k I)^m$، $K_{\lambda_i}(T)$ را برای هر $i<k$ به روی خودش می‌نگارد، اعضای $v_i \in K_{\lambda_i}(T)$ چنان موجود هستند که برای هر $i<k$، $(T-\lambda_k I)^m(v_i)=w_i$ پس داریم:

$$(T-\lambda_k I)^m(x)=(T-\lambda_k I)^m(v_۱)+\ldots+(T-\lambda_k I)^m(v_{k-۱})$$

و در نتیجه $x-(v_۱+\ldots+v_{k-۱}) \in K_{\lambda_k}(T)$. در نتیجه $v_k \in K_{\lambda_k}(T)$ چنان موجود است که:

$$x=v_۱+\ldots+v_k$$

□

قضیه ۴.۷. فرض کنید که T چنان عملگر خطی‌ای برفضای برداری متناهی البُعد V باشد که چند جمله‌ای مشخص T بشکافد و $\lambda_۱,\ldots,\lambda_k$ مقادیر ویژه T به ترتیب با چندگانگی‌های $m_۱,\ldots m_k$ باشند. برای هر $i=۱,\ldots,k$ فرض کنید β_i پایه مرتبی برای $K_{\lambda_i}(T)$ باشد. دراین صورت:

الف) برای هر $i \neq j$، $\beta_i \cap \beta_j=\varnothing$.

ب) $\beta=\beta_۱ \cup \beta_۲ \cup \ldots \cup \beta_k$ پایه مرتبی برای V است.

ج) برای هر i، $\dim(K_{\lambda_i}(T)) = m_i$.

برهان. الف) فرض کنید $x \in \beta_i \cap \beta_j \subseteq K_{\lambda_i}(T) \cap K_{\lambda_j}(T)$ که $i \neq j$. طبق قضیه ۷.۱ قسمت ب، $T - \lambda_i t$ روی $K_{\lambda_i}(T)$ یک به یک است و بنابراین به ازای هر عدد صحیح p، $(T - \lambda_i I)^p(x) \neq ۰$، اما این مساله با این واقعیت که $x \in K_{\lambda_i}(T)$ متناقض است و نتیجه حاصل می‌شود.

ب) فرض کنید $x \in V$. طبق قضیه ۳.۷، به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, k$، اعضای $v_i \in K_{\lambda_i}(T)$ چنان موجودند که $x = v_۱ + \ldots + v_k$. چون هر v_i، ترکیبی خطی از اعضای β_i است، x ترکیبی خطی از اعضای β است. بنابراین، β، Vرا پدید می‌آورد. برای هر i، فرض کنید که $d_i = \dim(K_{\lambda_i}(T))$ و q تعداد اعضای β باشد. در این صورت طبق قضیه ۲.۷ قسمت ب:

$$q = \sum_{i=۱}^{k} d_i \leq \sum_{i=۱}^{k} m_i = \dim(V)$$

طبق تمرین ۱۹ قسمت ب از بخش ۱-۶، $\dim(V) \leq q$ و در نتیجه طبق نامساوی بالا، $q = \dim(V)$ بنابراین β طبق نتیجه ۲ از قضیه ۱۰.۱ پایه‌ای برای V است.

ج)با استفاده از نماد گذاری و نتیجه قسمت ب، می‌بینیم که $\sum_{i=۱}^{k} m_i = \sum_{i=۱}^{k} d_i$. اما طبق قضیه ۲.۷ قسمت ب، $d_i \leq m_i$ و بنابراین برای هر i، $d_i = m_i$. □

نتیجه: فرض کنید T چنان عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد که چند جمله‌ای مشخص T بشکافد. در این صورت T قطری پذیر است اگر و تنها اگر برای هر مقدار ویژه λ از T، $E_\lambda = K_\lambda(T)$.

برهان. با ترکیب قضایای ۴.۷ و ۱۴.۵ قسمت الف، می‌بینیم که T قطری پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر مقدار ویژه λ برای T، $\dim(E_\lambda) = \dim(K_\lambda(T))$. اما $E_\lambda \subseteq K_\lambda(T)$ و در نتیجه این فضاها دارای بعد مساوی هستند اگر و تنها اگر مساوی باشند. □

حال توجه خود را به مساله انتخاب پایه‌های مناسب برای فضاهای ویژه تعمیم یافته یک تبدیل خطی معطوف می‌کنیم، تا بتوانیم با استفاده از قضیه ۴.۷، پایه متعارف جردنی برای آن عملگر بیابیم. برای این منظور، باز پایه β از مثال ۱ را بررسی می‌کنیم. دیدیم که چهار بردار اول β در فضای ویژه تعمیم یافته $K_۲(T)$ قرار دارند. ملاحظه کنید که بردارهایی در β که اولین بلوک جردن را مشخص می‌کنند، به شکل زیر هستند:

$$\{v_۱, v_۲, v_۳\} = \{(T - ۲I)^۲(v_۳), (T - ۲I)(v_۳), v_۳\}$$

علاوه بر این، ملاحظه می‌کنید که $(T - ۲I)^۳(v_۳) = ۰$. ارتباط میان این بردارها، کلید یافتن یک پایه متعارف جردن است. این مساله ما را به تعریف‌های زیر رهنمون می‌کند.

چند تعریف: فرض کنید که T، عملگری خطی بر فضای برداری V و x یک بردار ویژه تعمیم یافته T، متناظر با مقدار ویژه λ باشد. فرض کنید p کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که به ازای آن $(T - \lambda I)^p(x) = ۰$. در این صورت مجموعه

مرتب زیر :

$$\{(T-\lambda I)^{p-1}(x), (T-\lambda I)^{p-2}(x), ..., (T-\lambda I)(x), x\}$$

رایک **دور از بردارهای ویژه تعمیم یافته** T، متناظر با λ می‌نامند. عناصر $(T-\lambda I)^{p-1}(x)$ و x، به ترتیب بردارهای **ابتدایی** و **انتهایی** این دور نامیده می‌شوند. همچنین می‌گوییم که طول این دور، p است. توجه کنید که بردار ابتدایی یک دور از بردارهای ویژه تعمیم یافته عملگر خطی T، تنها بردار ویژه T در آن دور است. همچنین توجه کنید که اگر x بردار ویژه‌ای از T متناظر با مقدار ویژه λ باشد، آنگاه مجموعه $\{x\}$ دوری از بردارهای ویژه T متناظر با λ و با طول ۱ است.

در مثال۱، زیر مجموعه‌های $\beta_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$، $\beta_2 = \{v_4\}$، $\beta_3 = \{v_5, v_6\}$ و $\beta_4 = \{v_7, v_8\}$، دورهایی از بردارهای ویژه تعمیم یافته Tاند، که در β واقع هستند. توجه کنید که β، اجتماع مجزای این دورهاست. به علاوه، برای هر $1 \leq i \leq 4$، باقرار دادن $W_i = span(\beta_i)$، می‌بینیم که β_i پایه‌ای برای W_i است و $[T_{W_i}]_{\beta_i}$، iامین بلوک جردن فرم متعارف T است. این دقیقاً همان شرطی است که برای یک پایه متعارف جردن مورد نیاز است.

قضیه ۵.۷. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد، که چند جمله‌ای مشخص آن بشکافد و نیز فرض کنید β چنان پایه‌ای برای V باشد که از اجتماع مجزای دورهایی از بردارهای ویژه تعمیم یافته T تشکیل شده باشد. دراین صورت:

الف) برای هر دور از بردارهای ویژه تعمیم یافته γ که در β قرار دارد $W = span(\gamma)$، $T-$پایاست و $[T_W]_\gamma$ یک بلوک جردن می‌باشد.

ب) β یک پایه متعارف جردن برای T است.

برهان. الف) فرض کنید که γ متناظر با λ، γ دارای طول p و x بردار انتهایی γ باشد. در این صورت $\gamma = \{v_1, v_2, ...v_p\}$ که :

$$v_p = x \quad \text{و} \quad v_i = (T-\lambda I)^{p-i}(x) \qquad p > i \text{ برای هر } $$

بنابراین:

$$(T-\lambda I)(v_1) = (T-\lambda I)^p(x) = 0$$

و در نتیجه $T(v_1) = \lambda v_1$. برای هر $i > 1$،

$$(T-\lambda I)(v_i) = (T-\lambda I)^{p-(i-1)}(x) = v_{i-1}$$

بنابراین T، W رابه درون خودش می‌نگارد وطبق معادلات بالا می‌نویسیم که $[T_W]_\gamma$، یک بلوک جردن است.

برای اثبات قسمت ب کافی است استدلال قسمت الف را برای هر دور واقع در β تکرار کنید تا $[T]_\beta$ به دست آید. جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم. □

با توجه به این نتایج، باید نشان دهیم که تحت شرایط مناسب، پایه‌هایی وجود دارند که اجتماع مجزای دورهایی از بردارهای ویژه تعمیم یافته هستند. چون چند جمله‌ای مشخص یک فرم متعارف جردن می‌شکافد، این شرط، یکی از شروط لازم برای وجود چنین پایه‌ای است. به زودی می‌بینیم که این شرط کافی نیز هست. نتیجه بعدی مارا به قضیه وجودی مورد نیاز راهنمایی می‌کند.

قضیه ۶.۷. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری V، و λ یک مقدار ویژه T باشد. فرض کنید $\gamma_1, ..., \gamma_q$ دورهایی از بردارهای ویژه تعمیم یافته T متناظر با λ باشند، به گونه‌ای که بردارهای ابتدایی γ_i متمایز هستند و مجموعه‌ای مستقل خطی تشکیل می‌دهند. دراین صورت γ_iها مجزا هستند (برای هر $i \neq j$، $\gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing$) و اجتماع $\gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{q} \gamma_i$ مستقل خطی است.

برهان. از تمرین ۵ نتیجه می‌شود که γ_i مجزا هستند.

اثبات این که γ مستقل خطی است، با استقراء ریاضی روی تعداد بردارهای γ صورت خواهد گرفت. اگر این تعداد کوچکتر از ۲باشد، نتیجه بدیهی است. پس فرض کنید که به ازای عدد صحیح $n > 1$ای، نتیجه هرگاه که γ کمتر از n بردار داشته باشد صادق باشد وسپس فرض کنید که γ دقیقاً n بردار داشته باشد. فرض کنید W زیرفضایی از V باشد که γ آن را تولید می‌کند. واضح است که W، $(T - \lambda I)$ پایاست و $\dim(W) \leq n$. فرض کنید U نشان دهنده تحدید $T - \lambda I$ به W باشد.

برای هر i، فرض کنید γ'_i نشان دهنده دوری باشد که از حذف بردار انتهایی γ_i حاصل می‌شود، مگر در حالتی که طول γ_i یک باشد که در این صورت، γ'_i را برابر $\varnothing$ می‌گیریم. در صورتی که $\gamma'_i \neq \varnothing$، هر بردار γ'_i، تصویر برداری از γ_i تحت U است و برعکس، هر تصویر ناصفر هر بردار از γ_i تحت U، در γ'_i قرار دارد. فرض کنید $\gamma'_i = \bigcup\limits_i \gamma'_i$ طبق گزاره اخیر، γ'، $R(U)$ را تولید می‌کند.

علاوه بر این γ'، $n - q$ بردار دارد و بردار ابتدایی هر γ'_i، بردار ابتدایی γ_i نیز هست. بنابراین می‌توانیم فرض استقراء را به کار گیریم و نتیجه بگیریم که γ'_iها مستقل خطی هستند. درنتیجه γ' پایه‌ای برای $R(U)$ است. بنابراین، $\dim(R(U)) = n - q$ چون q بردار ابتدایی γ_iها، مجموعه‌ای مستقل خطی تشکیل می‌دهند و در $N(U)$ قرار دارند، داریم $\dim(N(U)) \geq q$. از این نامساوی‌ها و قضیه بعد به دست می‌آید که:

$$\begin{aligned} n &\geq dim(W) \\ &= \dim(R(U)) + \dim(N(U)) \\ &\geq (n-q) + q \\ &= n \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم که $\dim(W) = n$. چون γ، W را تولید می‌کند و از n بردارتشکیل شده است باید طبق نتیجه ۲ از قضیه ۱۰.۱ مستقل خطی باشد. بنابراین γ مستقل خطی است. $\square$

نتیجه: هر دور از بردارهای ویژه تعمیم یافته یک عملگر خطی، مستقل خطی است.

قضیه ۷.۷. فرض کنید T عملگری خطی برفضای برداری متناهی البُعد V و λ یک مقدار ویژه T باشد. در این صورت، $K_\lambda(T)$ پایه مرتبی دارد که از اجتماع دورهای مجزایی از بردارهای ویژه تعمیم یافته متناظر با λ تشکیل شده است.

برهان. اثبات با استقراء ریاضی روی $n = dim(K_\lambda(T))$ صورت می‌گیرد. نتیجه به ازای $n = ۱$ بدیهی است. پس فرض کنید که به ازای عدد صحیح $n > ۱$ای، نتیجه هرگاه $n > dim(K_\lambda(T))$ برقرار باشد. فرض کنید U نشان دهنده تحدید $T - \lambda I$ به $K_\lambda(T)$ باشد. در این صورت $R(U)$ زیر فضایی از $K_\lambda(T)$ با بعد کمتر است و $R(U)$ خود برابر با فضای ویژه تعمیم یافته متناظر با λ برای تحدید T به $R(U)$ است، بنابراین، طبق فرض استقراء دورهای مجزای $\gamma_۱, ..., \gamma_k$، متشکل از بردارهای ویژه تعمیم یافته متناظر با λ برای این تحدید و در نتیجه خود T وجود دارد که به ازای آنها $\gamma = \bigcup_{i=۱}^{q} \gamma_i$، پایه‌ای برای $R(U)$ است. برای هر i $(۱ \leq i \leq q)$، بردار انتهایی γ_i، تصویر تحت U یک بردار $v_i \in K_\lambda(T)$ است و بنابراین می‌توانیم هر γ_i را به دور بزرگتر $\widetilde{\gamma_i} = \gamma_i \cup \{v_i\}$ از بردارهای ویژه تعمیم یافته T، متناظر با λ، تعمیم دهیم.

برای هر i $(۱ \leq i \leq q)$، فرض کنید w_i بردار ابتدایی $\widetilde{\gamma_i}$ (و در نتیجه γ_i) باشد، چون $\{w_۱, ..., w_q\}$ زیر مجموعه‌ای مستقل خطی از E_λ است، این مجموعه را می‌توان به پایه $\{w_۱, ..., w_q, u_۱, ..., u_s\}$ برای E_λ تعمیم داد. در این صورت، $\widetilde{\gamma_۱}, ..., \widetilde{\gamma_q}$ ، $\{u_۱\}, ..., \{u_s\}$ دورهایی مجزا از بردارهای ویژه تعمیم یافته T، متناظر با λ هستند و بردارهای ابتدایی این دورها مستقل خطی هستند. بنابراین، اجتماع آنها طبق قضیه ۶.۷، زیر مجموعه‌ای مستقل خطی است. فرض کنید که $\widetilde{\gamma}$، نشان دهنده این اجتماع باشد.

ثابت می‌کنیم که $\widetilde{\gamma}$ پایه‌ای برای $K_\gamma(T)$ است. فرض کنید γ متشکل از $r = \operatorname{rank}(U)$ عضو باشد، در این صورت $\widetilde{\gamma}$ متشکل از $r + q + s$ عضو است. به علاوه، چون $\{w_۱, ..., w_q, u_۱, ..., u_s\}$، پایه‌ای برای $E\lambda = N(U)$ است، داریم $nullity(U) = q + s$ بنابراین:

$$\dim(K_\lambda(T)) = \operatorname{rank}(U) + nullity(U) = r + q + s$$

پس $\widetilde{\gamma_i}$، زیر مجموعه‌ای مستقل خطی از $K_\lambda(T)$، متشکل از اعضایی به تعداد $\dim(K_\lambda(T))$ است. در نتیجه، طبق قسمت ب از نتیجه قضیه ۱۰.۱، $\widetilde{\gamma}$ پایه‌ای برای $K_\lambda(T)$ است. $\square$

نتیجه زیر بلافاصله به دست می‌آید.

نتیجه ۱. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد که چند جمله‌ای مشخص آن بشکافد. در این صورت T دارای فرم متعارف جردن است.

برهان. فرض کنید $\lambda_k ,..., \lambda_۱$ مقادیر ویژه متمایز T باشد. طبق قضیه ۷.۷، به ازای هر i، یک پایه مرتب β_i که اجتماع مجزای دورهایی از بردارهای ویژه تعمیم یافته نظیر λ_i است، وجود دارد. فرض کنید $\beta = \beta_۱ \cup ... \cup \beta_n$. طبق قضیه ۴.۷ قسمت ب، β پایه مرتبی برای V است. □

فرم متعارف جردن را می‌توان از دیدگاه ماتریسی نیز مطالعه کرد.

تعریف:. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$ و چند جمله‌ای مشخص A (و در نتیجه L_A)بشکافد. در این صورت منظور از **فرم متعارف جردن** A، فرم متعارف جردن عملگر خطی L_A روی F^n است.

نتیجه زیر، نتیجه مستقیم تعریف فوق و نتیجه ۱ است.

نتیجه ۲. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد که چندجمله‌ای مشخص آن بشکافد. دراین صورت A دارای فرم متعارف جردنی مانند J است و A با J متشابه می‌باشد.

برهان. اثبات به عهده خواننده است. □

مثال ۲. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۲ \\ -۱ & ۰ & ۵ \\ -۱ & -۱ & ۴ \end{bmatrix} \in M_{۳\times ۳}(\mathbb{R})$$

برای یافتن فرم متعارف جردن A لازم است که پایه متعارف جردنی برای $T = L_A$ بیابیم.

چند جمله‌ای مشخص A، $f(t) = det(A - tI) = -(t-۳)(t-۲)^۲$ است.

در نتیجه $\lambda_۱ = ۳$ و $\lambda_۲ = ۲$ مقادیر ویژه A هستند که به ترتیب چندگانگی آنها ۱ و ۲ است. طبق قضیه ۴.۷، $\dim(K_{\lambda_۱}(T)) = ۱$ و $\dim(K_{\lambda_۲}(T)) = ۲$.

طبق حکم ۱.۷، $K_{\lambda_۱}(T) = N(T - ۳I)$ و $K_{\lambda_۲}(T) = N(T - ۲I)^۲$. چون $E_{\lambda_۱} = N(T - ۳I)$ داریم: $E_{\lambda_۱} = K_{\lambda_۱}(T)$. ملاحظه می‌کنید که $(-۱, ۲, ۱)$ بردار ویژه‌ای برای T، متناظر با $\lambda_۱ = ۳$ است و در نتیجه

$$\beta_۱ = \left\{ \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

پایه‌ای برای $K_{\lambda_۱}(T)$ است.

چون $\dim(K_{\lambda_۲}(T)) = ۲$ و هر فضای ویژه تعمیم یافته پایه‌ای متشکل از اجتماعی از دورها دارد، این پایه یا اجتماع دو دور است که طول هر کدام یک است، یا فقط دوری به طول ۲است. حالت اول غیر ممکن است، چرا که اعضای پایه، هر دو بردار ویژه خواهند بود و این مساله با این واقعیت که $\dim(E_{\lambda_۲}) = ۱$ به راحتی می‌توان آن را بررسی کرد، در

تناقض است. بنابراین پایه مورد نظر، فقط یک دور به طول ۲ است. بردار v، بردار انتهایی چنین دوری است اگر و تنها اگر $(A-۲I)(v) \neq ۰$ ولی $(A-۲I)^۲(v) = ۰$ به راحتی می‌توان نشان داد که:

$$\left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \\ -۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \right\}$$

پایه‌ای برای فضای جواب‌های دستگاه همگن $(A-۲I)^۲x = ۰$ است. حال بردار v از این مجموعه را طوری انتخاب می‌کنیم که $(A-۲I)(v) \neq ۰$. بردار $v = (-۱, ۲, ۰)$، نامزد قابل قبولی برای v است. چون $(A-۲I)(v) = (۱, -۳, -۱)$، دور زیر از بردارهای ویژه تعمیم یافته را به عنوان پایه‌ای برای $K_{\lambda_۲}(T) = ۲$ بدست می‌آوریم:

$$\beta_۲ = \{(A-۲I)v, v\} = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \\ -۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \right\}$$

در نهایت، از اجتماع دو پایه فوق، مجموعه زیر حاصل می‌شود:

$$\beta = \beta_۱ \cup \beta_۲ = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \\ -۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

که پایه متعارف جردنی برای A است. در نتیجه:

$$J = [T]_\beta = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

فرم متعارف جردنی برای A است. توجه کنید که A با J متشابه است. در واقع، $J = Q^{-۱}AQ$، که Q ماتریسی است که ستون‌های آن بردارهای β هستند. □

مثال ۳. فرض کنید T عملگر خطی‌ای بر $P_۲(\mathbb{R})$ باشد که این گونه تعریف می‌شود: $T(f) = -f - f'$. فرض کنید $\beta = \{۱, x, x^۲\}$ پایه مرتب استاندارد $P_۲(\mathbb{R})$ باشد. در این صورت:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} -۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

که چند جمله‌ای مشخص آن $f(t) = -(t+۱)^۳$ است. در نتیجه $\lambda = -۱$ تنها مقدار ویژه T است و بنابراین طبق

قضیه ۴-۷ $K_\lambda(T) = P_2(\mathbb{R})$. بنابراین β پایه‌ای برای $K_\lambda(T)$ است. حال:

$$\dim(E_\lambda) = 3 - rank(A+I) = 3 - rank\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

بنابراین یک پایه برای $K_\lambda(T)$، نمی‌تواند اجتماع دو یا سه دور باشد چرا که بردار ابتدایی هریک ازدورها یک بردار ویژه است و مجموعه‌ای مستقل خطی از بردارهای ویژه با تعداد اعضای دو یا بیشتر نمی‌تواند موجود باشد. پس پایه مورد نظر باید از دوری به طول ۳ تشکیل شده باشد. اگر γ چنین دوری باشد، γ تک بلوک جردن زیر را مشخص خواهد کرد:

$$[T]_\gamma = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

بردار انتهایی f چنین دوری باید در $(T+I)^2(f) \neq 0$ صدق کند. در هر پایه‌ای برای $K_\lambda(T)$ باید برداری که در این شرط صدق می‌کند موجود باشد، چرا که در غیر اینصورت هیچ یک از بردارهای $K_\lambda(T)$ در این شرط صدق نخواهند کرد که با استدلال ما متناقض است. با آزمودن بردارهای موجود در β می‌بینیم که $f(x) = x^2$ قابل قبول است و در نتیجه:

$$\gamma = \{(T+I)^2(x^2), (T+I)(x^2), x^2\} = \{2, -2x, x^2\}$$

یک پایه متعارف جردن است. □

در بخش بعدی، روشی محاسباتی برای یافتن یک فرم متعارف جردن و همچنین یک پایه متعارف جردن را شرح خواهیم داد. در این میان، ثابت می‌کنیم که فرم‌های متعارف جردن در حد ترتیب بلوک‌های جردن یکتا هستند.

مجموع‌های مستقیم *

فرض کنید که T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد و چند جمله‌ای مشخص T بشکافد. طبق قضیه ۱۶.۵، T قطری پذیر است اگر و تنها اگر V مجموع مستقیم فضاهای ویژه T باشد. اگر T قطری پذیر باشد، آنگاه فضاهای ویژه و فضاهای ویژه تعمیم یافته، یکی خواهند بود. نتیجه بعد، قضیه ۱۶.۵را به حالت قطری ناپذیر تعمیم می‌دهد.

قضیه ۸.۷. فرض کنید که T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد که چند جمله‌ای مشخص آن می‌شکافد. در این صورت، V مجموع مستقیم بردار ویژه تعمیم یافته‌ای از T است.

برهان. اثبات به عهده خواننده است. □

تمرینات

۱. تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) بردارهای ویژه عملگر خطی T، بردارهای ویژه تعمیم یافته آن نیز هستند.

ب) ممکن است که یک بردار ویژه تعمیم یافته T، متناظر با اسکالری باشد که مقدار ویژه T نیست.

ج) هر عملگر خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد، دارای یک فرم متعارف جردن است.

د) دورهای بردارهای ویژه تعمیم یافته، مستقل خطی هستند.

ه) متناظر با هریک از مقادیر ویژه یک عملگر خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد دقیقاً یک دور از بردارهای ویژه تعمیم یافته موجود است.

و) فرض کنید که T عملگری خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد باشد که چند جمله‌ای مشخص آن بشکافد و نیز فرض کنید $\lambda_۱, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه متمایز T باشند. اگر به ازای هر i، β_i پایه‌ای برای $K_{\lambda_i}(T)$ باشد، آنگاه $\beta_۱ \cup \dots \cup \beta_k$، پایه متعارف جردنی برای T است.

ز) برای هر بلوک جردن J، L_J دارای فرم متعارف جردن J است

ح) فرض کنید که T عملگری خطی بر یک فضای برداری n-بعدی باشد که چند جمله‌ای مشخص آن می‌شکافد. در این صورت، برای هر مقدار ویژه λ از T، $K_\lambda(T) = N((T - \lambda I)^n)$.

۲. برای هریک از عملگرهای خطی T زیر پایه‌ای برای هر یک از فضاهای ویژه تعمیم یافته آن عملگر بیابید که از دورهای مجزای بردارهای ویژه تعمیم یافته تشکیل شده باشد.

الف) $T = L_A$، که

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

ب) $T = L_A$، که

$$A = \begin{bmatrix} ۱۱ & -۴ & -۵ \\ ۲۱ & -۸ & -۱۱ \\ ۳ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

ج) T عملگر خطی‌ای بر $P_۲(\mathbb{R})$ است که اینگونه تعریف می‌شود: $T(f) = ۲f - f'$.

۳. فرم متعارف جردن هر یک از عملگرهای خطی تمرین ۲ را بیابید.

۴. * فرض کنید T عملگری خطی بر یک فضای برداری V و γ دوری از بردارهای ویژه تعمیم یافته باشد که متناظر با مقدار ویژه λ است. ثابت کنید که $span(\gamma)$ زیر فضای $T-$پایا از V است.

۵. فرض کنید $\gamma_1, ..., \gamma_p$ دورهایی از بردارهای ویژه تعمیم یافته عملگر خطی T، متناظر با مقدار ویژه λ باشند. ثابت کنید که دورها در صورتی که بردارهای ویژه ابتدایی آنها متمایز باشند، مجزا هستند.

۶. فرض کنید $T : V \to W$ تبدیلی خطی باشد. موارد زیر را ثابت کنید:

الف) $N(T) = N(-T)$

ب) $N(T^k) = N(-T)^k$ [۲]

ج) هرگاه $V = W$ (که در اینصورت T عملگری خطی بر V است) و λ یک مقدار ویژه T باشد، آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت k :

$$N((T - \lambda I_V)^k) = N((\lambda I_V - T)^k)$$

۷. فرض کنید U عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد. موارد زیر را ثابت کنید:

الف) $N(U) \subseteq N(U^2) \subseteq ... \subseteq N(U^k) \subseteq N(U^{k+1}) \subseteq ...$

ب) هرگاه به ازای عدد صحیح مثبت m، $\mathrm{rank}(U^m) = \mathrm{rank}(U^{m+1})$ آنگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت $k \geq m$، $\mathrm{rank}(U^m) = \mathrm{rank}(U^k)$

ج) هرگاه به ازای عدد صحیح مثبت m، $\mathrm{rank}(U^m) = \mathrm{rank}(U^{m+1})$ آنگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت $k \geq m$، $N(U^m) = N(U^{(k)})$.

د) فرض کنید T عملگری خطی باشد و λ یک مقدار ویژه T باشد. ثابت کنید که اگر به ازای عدد صحیح m، $\mathrm{rank}((T - \lambda I)^m) = \mathrm{rank}((T - \lambda I)^{m+1})$، آنگاه $K_\lambda(T) = N((T - \lambda I)^m)$.

ه) آزمون دوم برای قطر پذیری: فرض کنید که T عملگر خطی باشد که چند جمله‌ای مشخص آن می‌شکافد. فرض کنید $\lambda_1, ..., \lambda_k$ مقادیر ویژه متمایز T باشند. دراین صورت T قطری پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $1 \leq i \leq k$
$\mathrm{rank}((T - \lambda I)) = \mathrm{rank}((T - \lambda I)^i)$

و) با استفاده از قسمت ه برهانی ساده تر برای تمرین ۲۴ بخش ۵-۴ بیابید. هرگاه T یک عملگر خطی قطری پذیر بر فضای برداری متناهی البُعد V، و W یک زیر فضای $T-$ پایای V باشد، آنگاه T_W قطری پذیر است.

۸. با استفاده از قضیه ۴.۷ ثابت کنید که بردارهای $v_1, ..., v_k$ که در صورت قضیه ۳.۷ آمده اند یکتا هستند.

[۲] البته این تساوی تنها وقتی معنی دارد که $W \subset V$. م

۹. فرض کنید که T عملگری خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد V باشد که چند جمله‌ای مشخص آن می‌شکافد.

الف) قضیه ۵.۷ قسمت ب را ثابت کنید.

ب) فرض کنید که β یک پایه متعارف جردن برای T، و λ یک مقدار ویژه T باشد. فرض کنید $\beta' = \beta \cap K_\lambda(T)$. ثابت کنید که β پایه‌ای برای $K_\lambda(T)$ است.

۱۰. فرض کنید که T عملگری خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد باشد که چند جمله‌ای مشخص آن بشکافد و λ مقدار ویژه‌ای از T باشد.

الف) فرض کنید γ پایه‌ای برای $K_\lambda(T)$ متشکل از اجتماعی از q دور مجزا از بردارهای ویژه تعمیم یافته باشد. ثابت کنید $q \leq \dim(E_\lambda)$.

ب) فرض کنید β یک پایه متعارف جردن برای T باشد و $J = [T]_\beta$ دارای q بلوک جردن باشد که در مکان‌های قطری آنها λ قرار دارد. ثابت کنید $q \leq \dim(E_\lambda)$.

۱۱. نتیجه ۲ از قضیه ۷.۷ را ثابت کنید.

تمرینات ۱۲ و ۱۳ با مجموع‌های مستقیم ماتریس‌ها ارتباط دارند.

۱۲. قضیه ۸.۷ را ثابت کنید.

۱۳. فرض کنید که T عملگری خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد V باشد که چند جمله‌ای مشخص آن بشکافد و $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$، مقادیر ویژه متمایز T باشند. برای هر i، فرض کنید J_i فرم متعارف جردن تحدید T به $K_{\lambda_i}(T)$ باشد. ثابت کنیدکه: $J = J_1 \oplus J_2 \oplus \ldots \oplus J_k$ فرم متعارف جردن J است.

۲-۷

مثال ۱. برای تشریح بحث فوق، فرض کنید به ازای i ای، پایه مرتب β_i برای $(K_{\lambda_i}(T))$، اجتماع چهار دور $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ به ترتیب باطول‌های $p_1 = 3, p_2 = 3, p_3 = 2, p_4 = 1$ باشد. دراین صورت □

برای این که بتوانیم تصوری عینی از هریک از ماتریس‌های A_i و پایه‌های مرتب β_i به دست می‌آوریم، از آرایه‌ای از نقاط به نام نمودار نقطه‌ای T_i استفاده می‌کنیم، که T_i تحدید T به $K_{\lambda_i}(T)$ است. فرض کنید β_i، اجتماع مجزایی از دورهایی از بردارهای ویژه تعمیم یافته، یعنی $\gamma_1, \gamma_2, .., \gamma_{n_i}$ به ترتیب با طول‌های $p_1 \geq p_2 \ldots \geq p_{n_i}$ باشد. نمودار نقطه‌ای T_i به ازای هریک از اعضای β_i یک نقطه دارد واین نقاط طبق قاعده‌های زیر در آرایه‌ای آرایش یافته اند:

الف) آرایه شامل n_i ستون است (به ازای هردور یکی).

ب) ستون j ام آرایه از سمت چپ، p_j نقطه متمایز دارد که هریک عضوی از γ_j رانشان می‌دهند و با نقطه نماینده بردار ابتدایی γ_j در بالا آغاز می‌شود و در پایین به نقطه نشان دهنده بردار انتهایی آن ختم می‌شود.

فرض کنید که بردارهای انتهایی دورها، $v_1, \ldots, v_{n_i}$ باشند. دراین صورت نمودار نقطه‌ای T_i عبارت است از:

$$\begin{array}{llll}
\bullet(T-\lambda_i I)^{p_1-1}(v_1) & \bullet(T-\lambda_i I)^{p_2-1}(v_2) & \ldots & \bullet(T-\lambda_i I)^{p_{n_i}-1}(v_{n_i}) \\
\bullet(T-\lambda_i I)^{p_1-2}(v_1) & \bullet(T-\lambda_i I)^{p_2-2}(v_2) & \ldots & \bullet(T-\lambda_i I)^{p_{n_i}-2}(v_{n_i}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
 & & & \bullet(T-\lambda_i I)(v_{n_i}) \\
 & & & \bullet v_{n_i} \\
 & \bullet(T-\lambda_i I)(v_2) & & \\
 & \bullet v_2 & & \\
\bullet(T-\lambda_i I)(v_1) & & & \\
\bullet v_1 & & &
\end{array}$$

در نمودار بالا، درکنار هر یک از نقاط، نام عضو نظیر آن در β_i نوشته شده است. توجه کنید که نمودار نقطه‌ای T_i، دارای n_i ستون (برای هریک از دورهای یکی) و p_1 ردیف است. چون $p_1 \geq p_2 \ldots \geq p_{n_i}$، ستون‌های نمودار نقطه‌ای با حرکت از چپ به راست، کوتاهتر می‌شوند (یا حداقل بلندتر نمی‌شوند).

حال فرض کنید که r_j، نشان دهنده تعداد نقاط واقع در سطر j ام نمودار بالا باشد. ملاحظه کنید که $r_1 \geq r_2 \geq r_{p_1}$. به علاوه، نمودار را می‌توان از روی مقادیر r_iها بازسازی کرد. اثبات‌های مطالب فوق، که ماهیت ترکیباتی دارند، در تمرین ۹ مورد بررسی قرار می‌گیرند. در مثال۱، که در مورد آن $n_i = ۴$ ، $p_1 p_2 = ۳$، $p_3 = ۲$ و $p_4 = ۱$ نمودار نقطه‌ای T_i چنین است:

$$\begin{array}{llll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & \bullet & &
\end{array}$$

حال روشی رابرای محاسبه نمودار نقطه‌ای T_i، با استفاده از رتبه‌های عملگرهای خطی خاصی که بوسیله T و λ_i مشخص می‌شوند، طراحی می‌کنیم. به این ترتیب خود T، نمودار نقطه‌ای را کاملا مشخص می‌کند واز اینجا یکتایی این نمودار معلوم می‌گردد. از طرف دیگر β_i یکتا نیست. به عنوان نمونه، به تمرین ۷ رجوع کنید (به این دلیل است که نمودار نقطه‌ای را به T_i ربط می‌دهیم و نه به β_i).

برای مشخص ساختن نمودار نقطه‌ای T_i، روشی را برای محاسبه r_j یعنی تعداد نقاط ظاهر شده در سطر j ام نمودار نقطه‌ای، تنها با استفاده از T و λ_i طراحی می‌کنیم. سه نتیجه بعدی، روش مورد نظر را در اختیارمان می‌گذارند. برای ساده کردن بحث، دراین سه نتیجه پایه β_iی ثابتی را برای $K_{\lambda_i}(T)$ مفروض می‌گیریم، که اجتماع مجزای n_i دور از بردارهای

ویژه تعمیم یافته با طول‌های $p_1 \geq p_2 \ldots \geq p_{n_i}$ است.

قضیه ۹.۷. به ازای هر عدد صحیح r، بردارهایی در β_i که با نقاط واقع در r سطر اول نمودار نقطه‌ای T_i متناظر هستند، پایه‌ای برای $N((T-\lambda_i I)^r)$ تشکیل می‌دهند. در نتیجه تعداد نقاط واقع در r سطر اول نمودار نقطه‌ای برابر با $nullity((T-\lambda_i I)^r)$ است.

برهان. واضح است که $N((T-\lambda_i I)^r) \subseteq K_{\lambda_i}(T)$ و $K_{\lambda_i}(T)$ تحت $(T-\lambda_i I)^r$ پایاست. فرض کنید U نشان دهنده تحدید $(T-\lambda_i I)^r$ به $K_{\lambda_i}(T)$ باشد. دراین صورت، طبق یادآوری‌های بالا $N((T-\lambda_i I)^r) = N(U)$، و بنابراین کافی است نتیجه رابرای U ثابت کنیم. فرض کنید:

$$S_1 = \{x \in \beta_i : U(x) = 0\} \text{ و } S_2 = \{x \in \beta_i : U(x) \neq 0\}$$

فرض کنید a و b به ترتیب نشان دهنده تعداد اعضای S_1 و S_2 باشند و $m_i = \dim(K_{\lambda_i}(T))$ در این صورت، $a+b=m_i$. برای هر $x \in \beta_i$، $x \in S_1$ اگر و تنها اگر x، یکی از r بردار اول یکی از دورها باشد و این مطلب درست است اگر و تنها اگر x متناظر با نقطه‌ای واقع در r سطر اول نمودار نقطه‌ای باشد. در نتیجه a تعداد نقاط r سطر اول نمودار نقطه‌ای است. برای هر $x \in S_2$، تاثیر اعمال U بر x این است که نقطه نظیر x در نمودار، دقیقاً به اندازه r نقطه، در ستونی که در آن واقع است، بالا برده می‌شود. نتیجه می‌شود که U، S_2 رابه طرز یک به یکی به درون β_i انتقال می‌دهد. بنابراین $\{U(x) : x \in S_2\}$ پایه ای برای $R(U)$، متشکل از b عضو است و در نتیجه $\operatorname{rank}(U) = b$. بنابراین $nullity(U) = m_i - b = a$. اما S_1، زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از $N(U)$ متشکل از a بردار است و بنابراین S_1 پایه‌ای برای $N(U)$ است. □

در حالتی که $r = 1$ قضیه ۹.۷به نتیجه زیر می‌انجامد.

نتیجه ۱. بعد E_{λ_i}، n_i است. بنابراین در یک فرم متعارف جردن برای T، تعداد بلوک‌های جردن متناظر با λ_i برابر با بعد E_{λ_i} است.

برهان. اثبات به عهده خواننده است. □

حال توانایی آن راداریم که روشی رابرای توصیف نمودار نقطه‌ای، برحسب رتبه‌های عملگرهای خاص طراحی کنیم.

قضیه ۱۰.۷. فرض کنید r_j نشان دهنده تعداد نقاط سطر j ام نمودار نقطه‌ای T_i، یعنی تحدید T به $K_{\lambda_i}(T)$ باشد. دراین صورت:

الف) $r_1 = \dim(V) - \operatorname{rank}(T-\lambda_i I)$

ب) برای هر $j > 1$، $r_j = \operatorname{rank}((T-\lambda_i I)^{j-1}) - rank((T-\lambda_i I)^j)$

برهان. طبق قضیه ۹.۷، برای هر $1 \leq j \leq p_1$ داریم:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + ... + r_j &= nullity((T - \lambda_i I)^j) \\ &= \dim(V) - \operatorname{rank}((T - \lambda_i I)^j) \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$r_1 = \dim(V) - \operatorname{rank}(T - \lambda_i I)$$

و برای هر $j > 1$،

$$\begin{aligned} r_j =&(r_1 + r_2 + ... + r_j) - (r_1 + r_2 + ... + r_{j-1}) \\ &= [\dim(V) - rank((T - \lambda_i I))^j] - [\dim(V) - rank((T - \lambda_i I))^{j-1}] \\ &= rank((T - \lambda_i I))^{j-1} - rank((T - \lambda_i I))^j \end{aligned}$$

بنابراین نمودار نقطه‌ای T_i را T و λ_i کاملاً مشخص می‌کنند. بنابراین نتیجه زیر را ثابت کرده ایم. □

نتیجه ۲. برای هر مقدار ویژه λ_i برای T، نمودار نقطه‌ای T_i یکتاست. در نتیجه به شرط رعایت این قرارداد که در پایه هر یک از فضاهای ویژه تعمیم یافته، دورهای متشکل از بردارهای ویژه تعمیم یافته، به ترتیب نزولی نسبت به طولشان نوشته می‌شوند. فرم متعارف جردن یک عملگر خطی یا ماتریس در حد ترتیبی که مقادیر ویژه در نظر گرفته شده است، یکتاست.

این نتایج را برای یافتن فرم متعارف جردن دو ماتریس ویک عملگر خطی به کار می‌بریم.

مثال ۲. فرض کنید

فرم متعارف جردن A و یک پایه متعارف جردن برای عملگر خطی $T = L_A$ می‌یابیم. چند جمله‌ای مشخص A عبارت است از:

$$det(A - tI) = (t - 3)^3 (t - 4)$$

بنابراین A دو مقدار ویژه دارد: $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 3$ که چندگانگی آنها به ترتیب ۳ و ۱است. فرض کنید T_1 و T_2، به ترتیب تحدیدهای L_A به فضاهای ویژه تعمیم یافته $K_{\lambda_1}(L_A)$ و $K_{\lambda_2}(L_A)$ باشند.

فرض کنید که β_1 یک پایه متعارف جردن برای T_1 باشد. چون چند گانگی $T\lambda_1$، ۳می باشد، طبق قضیه ۴.۷ قسمت ج، $\dim(K_{\lambda_1}(L_A)) = 3$ و بنابراین نمودار نقطه‌ای T_1 سه نقطه دارد. فرض کنید که مانند قبل r_j تعداد نقاط واقع در

سطر jام این نمودار نقطه‌ای باشد. در این صورت طبق قضیه ۱۰.۷ :

$$r_1 = 4 - \operatorname{rank}(A - 2I) = 4 - \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4 - 2 = 2$$

به راحتی می‌توان دید که:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

پایه‌ای برای $N((T - 2I)^2) = K_{\lambda_1}(T)$ است. از میان این سه بردار پایه، دو بردار آخر به $N(T - 2I)$ تعلق ندارند و در نتیجه یکی از این دو بردار را به عنوان v_1 انتخاب می‌کنیم:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در این صورت:

$$(T - 2I)(v_1) = (A - 2I)(v_1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حال v_2 را هر عضو دلخواهی از E_{λ_1} در نظر بگیرید که از $(T - 2I)(v_1)$ مستقل خطی است؛ مثلا v_2 را

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اختیار کنید. بنابراین، پایه متعارف جردن زیر را داریم:

$$\beta_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

که نمودار نقطه‌ای آن به صورت زیر است:

$$(T-2I)(v_1) = (A-2I)(v_1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

طبق قضیه ۶.۷، استقلال خطی β_1 به این دلیل که v_2 طوری انتخاب شده است که با $(T-2I)(v_1)$ مستقل خطی باشد، تضمین می‌گردد.

چون چندگانگی λ_3، ۱است: $\dim(K_{\lambda_2}(T)) = \dim(E_{\lambda_2}) = 1$ و بنابراین هر بردار ویژه‌ای برای L_A متناظر با $\lambda_2 = 3$، تشکیل پایه مناسبی برای β_2 می‌دهد. به عنوان مثال:

$$\beta_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

بنابراین:

$$\beta = \beta_1 \cup \beta_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

پایه متعارف جردنی برای L_A است. توجه کنید که اگر

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

داریم $J = Q^{-۱}AQ$ $\square$

مثال ۳. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۴ & ۲ & ۲ \\ -۲ & ۰ & ۱ & ۳ \\ -۲ & -۲ & ۳ & ۳ \\ -۲ & -۶ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}$$

فرم متعارف جردن A، یعنی J، پایه متعارف جردنی برای L_A، وماتریس Q را به گونه‌ای می‌یابیم که $J = Q^{-۱}AQ$.

چند جمله‌ای مشخص A، $det(A - tI) = (t-۲)^۲(t-۴)^۲$ است. فرض کنید $T = L_A$، $\lambda_۱ = ۲, \lambda_۲ = ۴$ و T_i به ازای $i = ۱, ۲$ تحدید L_A به $K_{\lambda_i}(T)$ باشد.

با محاسبه نمودار نقطه‌ای $T_۱$ شروع می‌کنیم. فرض کنید $r_۱$ نشان دهنده تعداد نقاط واقع در سطر اول این نمودار باشد. در این صورت:

$$r_۱ = ۴ - \mathrm{rank}(A_۲I) = ۴ - ۲ = ۲$$

و در نتیجه نمودار نقطه‌ای $T_۱$ به صورت زیر است:

$$\bullet \quad \bullet$$

نتیجه می‌شود که:

$$A_۱ = [T_۱]_{\beta_۱} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

که در اینجا $\beta_۱$ پایه دلخواهی متناظر با نقاط فوق می‌باشد. در این مثال، $\beta_۱$ پایه دلخواهی برای $E_{\lambda_۱} = N(T - ۲I)$ است، مثلاً:

$$\beta_۱ = \left\{ \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \right\}$$

حال نمودار نقطه‌ای $T_۲$ راحساب می‌کنیم. چون $\mathrm{rank}(A - ۴I) = ۳$، تنها $۴ - ۳ = ۱$ نقطه در سطر اول نمودار وجود دارد. چون چند گانگی $\lambda_۲ = ۴$، ۲است داریم: $\dim(K_{\lambda_۲}(T)) = ۲$ و لذا نمودار نقطه‌ای به شکل زیر است:

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}$$

بنابراین:

$$A_۲ = [T_۲]_{\beta_۲} = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

که $\beta_۲$ پایه مرتب دلخواهی برای $K_{\lambda_۲}(T)$ متناظر با دو نقطه بالاست.

در این مثال، $\beta_۲$ دوری به طول ۲ است. بردار انتهایی این دور، بردار $v \in K_{\lambda_۲}(T) = N((T - ۴I)^۲)$ای است که $v \notin N(T - ۴I)$.

یک طریقه یافتن چنین برداری، در انتخاب $v_۱$ در مثال ۲ به کار رفت. در مثال حاضر، روش دیگری را شرح می‌دهیم. محاسبه ساده‌ای نشان می‌دهد که یک پایه برای فضای پوچ $L_A - ۴I$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

است. حال v رابرابر با جواب دلخواهی برای دستگاه معادلات خطی

$$(A - ۴I)x = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

یک فرم متعارف جردن ویک پایه متعارف جردن برای T می‌یابیم. فرض کنید $A = [T]_\alpha$ در این صورت:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

و بنابراین چند جمله‌ای مشخص T،

$$det(A-tI) = det\begin{bmatrix} -t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t \end{bmatrix} = t^6$$

است. در نتیجه، $\lambda = 0$ تنها مقدار ویژه T است و $K_\lambda(T) = V$. برای هر j، فرض کنید r_j نشان دهنده تعداد نقاط سطر jام نمودار نقطه‌ای T باشد. طبق قضیه ۷.۱۰.۳: $r_1 = 6 - \mathrm{rank}(A) = 6 - 3 = 3$ و چون:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_2 = rank(A) - rank(A^2) = 3 - 1 = 2$$

چون درمجموع شش نقطه در نمودار نقطه ای وجود دارد و $r_1 = 3$ و $r_2 = 2$ نتیجه می‌شود که $r_3 = 1$. پس نمودار نقطه‌ای T، چنین است:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \end{array}$$

نتیجه می‌گیریم که فرم جردن T عبارت است از:

حال پایه متعارف جردنی برای T می‌یابیم. چون ستون اول نمودار نقطه‌ای T، ازسه نقطه تشکیل شده است، باید چند جمله‌ای $f_1(x,y)$ را چنان بیابیم که $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_1(x,y) \neq 0$. با بررسی پایه $\alpha = \{1, x, y, x^2, y^2, xy\}$ برای $K_\lambda(T) = V$ می‌بینیم که x^2 عضو مناسبی است. با قراردادن $f_1(x,y) = x^2$، مشاهده می‌کنیم که:

$$(T - \lambda I)(f_1(x,y)) = T(f_1(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x$$

و

$$(T-\lambda I)^2(f_1(x,y)) = T^2(f_1(x,y)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2) = 2$$

به طور مشابه، چون ستون دوم نمودار نقطه‌ای از دو نقطه تشکیل شده است، باید چند جمله‌ای $f_2(x,y)$ را طوری بیبابیم که:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f_2(x,y)) = 0 \quad \text{ولی} \quad \frac{\partial}{\partial x}(f_2(x,y)) \neq 0$$

چون انتخاب ما باید با چندجمله‌ای‌هایی که قبلاً برای دور اول انتخاب شده اند، مستقل خطی باشد تنها انتخاب باقی مانده موجود در α که در این دو محدودیت صدق می‌کند، xy است. پس قرار می‌دهیم $f_2(x,y) = xy$ در نتیجه :

$$(T-\lambda I)(f_2(x,y)) = T(f_2(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$$

در نهایت، ستون سوم نمودارنقطه‌ای، فقط از یک چند جمله‌ای که در فضای پوچ T قرار دارد تشکیل شده است. تنها عضو باقی مانده از α، یعنی y^2، در اینجا مناسب است. پس قرار دهید $f_3(x,y) = y^2$، بنابراین، به صورت زیر، چند جمله‌ای‌هایی را بانقاط نمودار نقطه‌ای نظیر کرده ایم:

$$\begin{array}{lll} \bullet 2 & \bullet y & \bullet y^2 \\ \bullet 2x & \bullet xy & \\ \bullet x^2 & & \end{array}$$

بنابراین $\beta = \{2, 2x, x^2, y, xy, y^2\}$ یک پایه متعارف جردن برای T است. رعایت همان ترتیب قبلی برای مقادیر ویژه باشند. در این صورت (باحذف جزئیات):

$$J_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, J_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, J_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

چون $J_A = J_C$، A با C متشابه است. چون J_B متفاوت با J_A و J_C است، B با هیچ یک از A و C متشابه نیست. □

خواننده باید توجه کند که هر ماتریس قطری یک فرم متعارف جردن است. بنابراین، عملگر خطی T بر فضای برداری متناهی البُعد V، قطری پذیر است اگر و تنها اگر فرم متعارف جردن آن ماتریسی قطری باشد. در نتیجه T قطری پذیر است اگر و تنها اگر پایه متعارف جردن T از بردارهای ویژه T تشکیل شده باشد. گزاره‌های مشابهی را می‌توان در مورد ماتریس‌ها بیان کرد. پس در بین ماتریس‌های A, B و C در مثال ۵، A و C قطری پذیر نیستند، چرا که فرم متعارف جردن آنها ماتریس‌های قطری نمی‌باشد.

تمرینات

۱. تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است. فرض کنید که چند جمله‌ای مشخص ماتریس یا عملگر خطی مورد نظرمی شکافد.

الف) فرم متعارف جردن یک ماتریس قطری، خود آن ماتریس است.

ب) فرض کنیدکه T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد که دارای فرم متعارف جردن J است. هرگاه β پایه‌ای برای V باشد، فرم متعارف $[T]_\beta$ ، J است.

ج) عملگرهای خطی‌ای که چند جمله‌ای‌های مشخص یکسان دارند، متشابه هستند.

د) ماتریس‌های دارای فرم متعارف جردن یکسان متشابه هستند.

ه) هر ماتریسی متشابه با فرم متعارف جردن خود است.

و) هر دو عملگر خطی با چند جمله‌ای مشخص $(-1)^n(t-\lambda)^n$، فرم متعارف جردن یکسانی دارند.

ز) هر عملگر خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد، فرم متعارف جردن یکتایی دارد.

ح) نمودار نقطه‌ای یک عملگر خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد یکتاست.

۲. فرض کنید که T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد که چند جمله‌ای مشخص آن می‌شکافد. فرض کنید $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -3$، مقادیر ویژه متمایز T بوده، نمودارهای نقطه‌ای تحدید T به $K_{\lambda_i}(T)(i = 1, 2, 3)$ به صورت زیر باشند.

$\lambda_1 = 2$	$\lambda_2 = 4$	$\lambda_3 = -3$
• • •	• •	• •
• •	•	
•	•	

فرم متعارف جردن T را بیابید.

۳. فرض کنید که T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد که فرم متعارف جردن آن چنین است:

الف) چند جمله‌ای مشخص T را بیابید.

ب) نمودار نقطه‌ای نظیر هر یک از مقادیر ویژه T را بیابید.

ج) به ازای کدام مقدار ویژه λ_i (اگر اصلا چنین مقداری وجود داشته باشد)، $E_{\lambda_i} = K_{\lambda_i}(T)$

د) برای هر مقدار ویژه λ_i کوچکترین عدد صحیح مثبت p_i ای را بیابید که به ازای آن $K_{\lambda_i}(T) = N((T-\lambda_i I)^{p_i})$.

ه) برای هر i، موارد زیر را محاسبه کنید. در اینجا U_i نشان دهنده تحدید $(T-\lambda_i I)$ به $K_{\lambda_i}(T)$ است.

i- $\mathrm{rank}(U_i)$

ii- $\mathrm{rank}(U_i^2)$

iii- $nullity(U_i)$

iv- $nullity(U_i^2)$

۴. برای هریک از ماتریس‌های A زیر، فرم متعارف جردن J و ماتریس وارون پذیر Q را به گونه‌ای بیابید که $J = Q^{-1}AQ$. توجه کنید که ماتریس‌های قسمت‌های الف، ب وج همان ماتریس‌های مثال ۵ هستند.

الف) $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ب) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ج) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ د) $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

۵. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد که چند جمله‌ای مشخص آن بشکافد. ثابت کنید که A و A^t فرم متعارف جردن یکسانی دارند ونتیجه بگیرید که A و A^t متشابه هستند. راهنمایی: برای هرمقدار ویژه λ برای A و A^t، و هر عدد صحیح مثبت r نشان دهید $\mathrm{rank}((A-\lambda I)^r) = \mathrm{rank}((A^t-\lambda I)^r)$.

۶. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد که چند جمله‌ای مشخص آن می‌شکافد، γ دوری از بردارهای ویژه تعمیم یافته متناظر با λ، و W زیرفضای پدید آمده از γ باشد. فرض کنید γ' مجموعه مرتب حاصل از برعکس کردن ترتیب بردارهای γ باشد:

الف) ثابت کنید که $[T_W]_{\gamma'} = ([T_W]_\gamma)^t$

ب) فرض کنید که J، فرم متعارف جردن A باشد. با استفاده از قسمت الف، ثابت کنیدکه J و J^t متشابه هستند.

ج) با استفاده از قسمت ب ثابت کنید که A و A^t متشابه هستند.

۷. فرض کنید T عملگری خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد بوده، چند جمله‌ای مشخص آن بشکافد. فرض کنید که β پایه متعارف جردنی برای T باشد.

الف) ثابت کنید که به ازای هر اسکالر ناصفر $c \neq ۱$، $\{cx : x \in \beta\}$ پایه متعارف جردن دیگری برای T است.

ب) فرض کنید γ یکی از دورهای متشکل ازبردارهای تعمیم یافته‌ای باشد که β را تشکیل می‌دهند. فرض کنید γ متناظر با مقدار ویژه λ باشد و طول آن بیشتر از ۱ باشد. همچنین فرض کنید x بردار انتهایی γ و y بردار ناصفری در E_λ باشد. نهایتاً فرض کنید که γ' پایه مرتب حاصل از جایگزینی $x + y$ به جای x در γ باشد. ثابت کنید که γ' دوری از بردارهای ویژه تعمیم یافته نظیر λ است و اگر γ' را در اجتماعی که β را تعریف می‌کند به جای γ بگذاریم، اجتماع جدید نیز پایه متعارف جردنی برای T است.

ج)با به کارگیری قسمت ب، در مثال ۲ پایه متعارف جردنی برای A، متفاوت از آنچه که در مثال ارائه شد بیابید.

۸. فرض کنیدکه V، فضای برداری حقیقی توابع حقیقی پدیدآمده از مجموعه تابعهای حقیقی $\{e^x, xe^x, x^۲e^x, e^{۲x}\}$، و T عملگر خطی‌ای بر T باشد که اینگونه تعریف می‌شود: $T(f) = f'$ فرم متعارف جردن وپایه متعارف جردنی برای T بیابید.

۹. فرض کنید که یک نمودار نقطه‌ای k ستون و m سطر داشته باشد و ستون jام این نمودار p_j نقطه و iامین سطرآن r_i نقطه داشته باشد. موارد زیر را ثابت کنید:

الف) $k = r_۱$ و $m = p_۱$.

ب) برای هر $۱ \leq j \leq k$، $p_j = \max\{i : r_i \geq j\}$ و برای هر $۱ \leq j \leq m$، $r_i = \max\{j : r_j \geq i\}$
راهنمایی: از استقرا روی m استفاده کنید.

ج) $r_۱ \geq r_۲ \geq \ldots \geq r_m$.

د) نتیجه بگیرید که تعداد نقاط واقع در هر یک از ستون‌های نمودار نقطه‌ای کاملا از روی تعداد نقاط واقع در هریک از سطرها مشخص می‌شود.

۱۰. فرض کنید که T عملگر خطی‌ای باشد که چند جمله‌ای مشخص آن می‌شکافد و λ مقدار ویژه T باشد.

الف) ثابت کنید که $\dim(K_\lambda(T))$ برابر با مجموع طول‌های همه دورهای نظیر λ، در هر فرم متعارف جردن دلخواه برای T است.

ب) نتیجه بگیرید که $E_\lambda = K_\lambda(T)$ اگر وتنها اگر همه بلوک‌های جردن نظیر λ ماتریس‌هایی ۱×۱ باشند.

تعاریف زیر در تمرینهای ۱۱الی۱۹به کار رفته اند.

چند تعریف: عملگر خطی T برفضای برداری V را **پوچ توان** گویند، هرگاه به ازای عدد صحیح مثبت p ای، $T^p = T_۰$. ماتریس $n \times n$ را **پوچ توان** گویند هرگاه به ازای عدد صحیح مثبت p ای $A^p = ۰$.

۱۱. فرض کنید T عملگری خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد V، و β پایه مرتبی برای V باشد. ثابت کنید که T پوچ توان است اگر و تنها اگر $[T]_\beta$ پوچ توان باشد.

۱۲. ثابت کنید که هر ماتریس بالا مثلثی که هر درایه قطری آن صفر باشد، پوچ توان است.

۱۳. فرض کنید T عملگری پوچ توان برفضای برداری V باشد و فرض کنید p کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که به ازای آن، $T^p = T_0$. موارد زیر را ثابت کنید:

الف) برای هر عدد صحیح مثبت i ، $N(T^i) \subseteq N(T^{i+1})$

ب) دنباله‌ای از پایه‌های مرتب مانند $\beta = \beta_p, ..., \beta_2\beta_1$ به گونه‌ای موجود است که β_i پایه‌ای برای $N(T^i)$ است و به ازای هر $1 \leq i \leq p - 1$، β_{i+1} توسیعی از β_i می‌باشد.

ج) فرض کنیدکه $\beta = \beta_p$ پایه مرتب مذکور در قسمت ب برای $N(T^p) = V$ باشد. در این صورت $[T]_\beta$ ماتریسی بالا مثلثی است که هر درایه قطر اصلی آن صفر است.

د) چند جمله‌ای مشخص T، $(-1)^n t^n$ است. در نتیجه چند جمله‌ای مشخص T می‌شکافد و 0 تنها مقدار ویژه آن است.

۱۴. عکس تمرین ۱۳ قسمت د را ثابت کنید. هرگاه T عملگری خطی بر یک فضای برداری n–بعدی V بوده، چند جمله‌ای مشخص T، $(-1)^n t^n$ باشد آنگاه T پوچ توان است.

۱۵. ۱۵. نمونه‌ای از عملگر خطی T بر یک فضای برداری متناهی البُعد ارائه دهید که T پوچ توان نباشد، اما تنها مقدار ویژه آن صفر باشد. مجموعه این گونه عملگرها را توصیف کنید.

۱۶. فرض کنید T عملگری پوچ توان برفضای برداری متناهی البُعد V باشد. از تمرین۱۳به یادآورید که $\lambda = 0$، تنها مقدار ویژه T است و در نتیجه $V = K_\lambda(T)$. فرض کنید β یک پایه متعارف جردن برای T باشد. ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح i، اگر بردارهای نظیر i نقطه آخر هر ستونی از نمودار نقطه‌ای را از β برداریم، مجموعه حاصل پایه‌ای برای $R(T^i)$ خواهد بود (اگر ستونی کمتراز i نقطه داشته باشد. تمام بردارهای مربوط به آن ستون از β برداشت می‌شوند).

۱۷. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد که چند جمله‌ای مشخص آن می‌شکافد وفرض کنید که $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ مقادیر ویژه متمایز T باشند. فرض کنید $S : V \to V$ نگاشتی باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(x) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$$

که v_iها، به ترتیب آن اعضای یکتایی از $K_{\lambda_i}(T)$ هستند که $x = v_۱ + v_۲ + ... + v_k$ (وجود این نمایش یکتا را قضیه ۳.۷ و تمرین ۸ از بخش ۱-۷ تضمین می‌کند).

الف) ثابت کنید که S عملگری قطری پذیر بر V است.

ب) فرض کنید که $U = T - S$. ثابت کنید که U پوچ توان است و با S جابجا می‌شود، یعنی $SU = US$.

۱۸. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V و J فرم متعارف جردن T باشد. فرض کنید D ماتریس قطری باشد که درایه‌های قطری آن همان درایه‌های قطری J هستند و قرار دهید $M = J - D$. موارد زیر را ثابت کنید:

الف) M پوچ توان است.

ب) $DM = MD$

ج) فرض کنید p کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که به ازای آن $M^p = O$. در این صورت به ازای هر عدد صحیح مثبت $r < p$

$$J^r = D^r + rD^{r-۱}M + \frac{r(r-۱)}{۲!}D^{r-۲}M^۲ + ... + rDM^{r-۱} + M^r$$

وبه ازای هر عدد صحیح $r \geq p$،

$$\begin{aligned} J^r = D^r + rD^{r-۱}M + \frac{r(r-۱)}{۲!}D^{r-۲}M^۲ + ... \\ + \frac{r!}{(r-p+۱)!(p-۱)!}D^{r-p+۱}M^{p-۱} \end{aligned}$$

۱۹. فرض کنید

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & \lambda & ۱ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \lambda & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

بلوک جردن $m \times m$ نظیر λ باشد و نیز $N = J - \lambda I_m$. موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $N^m = O$ و به ازای هر $1 \leq r < m$،

$$N_{ij}^r = \begin{cases} 1 & ; j = i + r \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ب) به ازای هر عدد صحیح $r \geq m$،

$$J^r = \begin{bmatrix} \lambda^r & r\lambda^{r-1} & \frac{r(r-1)}{2!}\lambda^{r-2} & \cdots & \frac{r(r-1)\cdots(r-m+2)}{(m-1)!}\lambda^{r-m+1} \\ 0 & \lambda^r & r\lambda^{r-1} & \cdots & \frac{r(r-1)\cdots(r-m+3)}{(m-2)!}\lambda^{r-m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^r \end{bmatrix}$$

ج) $\lim\limits_{r\to\infty} J^r$ موجود است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $1 > |\lambda|$.

۲. $\lambda = 1$ و $m = 1$.

به علاوه، $\lim\limits_{r\to\infty} J^r$، در صورتی که شرط اول برقرار باشد ماتریس صفر است و در صورتی که شرط دوم برقرار باشد، ماتریس 1×1 $[1]$ است.

د) قضیه ۱۸.۵ راثابت کنید.

تعریف زیر در تمرینات ۲۰ و ۲۱ به کار رفته است.

تعریف:. برای هر $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$، نرم A را به صورت زیر تعریف کنید:

$||A|| = max\{|A_{ij}| : 1 \leq i, j \leq n\}$

۲۰. فرض کنید که $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ موارد زیر ثابت کنید:

الف) $||A|| \geq 0$ و $||A|| = 0$ اگر و تنها اگر $A + O$.

ب) $||cA|| = c.||A||$.

ج) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$.

د) $||AB|| \leq ||A||||B||$.

۲۱. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ یک ماتریس تغییر وضعیت باشد (به بخش۵-۳رجوع کنید). چون $\mathbb{C}$ یک میدان بسته جبری است، A فرم متعارف جردن Jای دارد که با A متشابه است. فرض کنید P ماتریس وارون پذیری

باشد که $P^{-1}AP = J$ موارد زیر را ثابت کنید:

الف) به ازای هر عدد صحیح مثبت m، $||A^m|| \leq 1$

ب) عدد صحیح مثبتی مانند c چنان موجود است که برای هر هر عدد صحیح مثبت m، $||J^m|| < c$

ج) هر بلوک جردنی در J متناظر با مقدار ویژه $\lambda = 1$، 1×1 است.

د) $\lim_{m\to\infty} A^m$ موجود است اگر و تنها اگر به ازای هر مقدار ویژه λ برای A، از $|\lambda| = 1$ نتیجه شود که $\lambda = 1$.

ه) قسمت الف از قضیه ۲۵.۵ را با استفاده از قسمت ج و قضیه ۲۴.۵ ثابت کنید.

تمرین بعدی نیازمند آشنایی با سریهای همگرای مطلق و تعریف e^A به ازای ماتریسی چون A است. به صفحه ۲۷۵ مراجعه کنید.

۲۲.

۲۳. فرض کنید $x' = Ax$ دستگاهی از n معادله دیفرانسیل خطی باشد که در اینجا مانند تمرین ۱۵از بخش ۵-۲، x یک $n-$تایی مرتب از توابع مشتق پذیر $x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)$ بر حسب متغیر حقیقی t است، و A یک ماتریس ضرایب $n \times n$ می‌باشد. اما برخلاف آن تمرین، فرض نمی‌کنیم که A لزوما قطری پذیر باشد، بلکه فقط فرض می‌کنیم که چند جمله‌ای مشخص A بشکافد. فرض کنید $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ مقادیر ویژه متمایز A باشند.

الف) ثابت کنید که اگر u، بردار انتهایی یکی از دورهای متشکل از بردارهای ویژه تعمیم یافته

L_A به طول p باشد و u متناظربا مقدار ویژه λ_i باشد، آنگاه به ازای هر چند جمله‌ای $f(t)$ با درجه کمتر از p، تابع:

$$e^{\lambda_i t}[f(t)(A-\lambda_i I)^{p-1} + f'(t)(A-\lambda_i I)^{p-2} + ... + f^{(p-1)}(t)]u$$

جوابی برای دستگاه $x' = Ax$ است.

ب) ثابت کنید که جواب عمومی $x' = Ax$، مجموعی از توابع ارائه شده در قسمت الف می‌باشد که بردارهای u در این مجموع، بردارهای انتهایی دورهای متمایزی هستند که تشکیل یک پایه متعارف جردن برای L_A می‌دهند.

۲۴. با استفاده از تمرین ۲۳ برای هر یک از دستگاه‌های معادلات خطی زیر، که x, y, z در آنها توابع حقیقی مشتق پذیری برحسب متغیر حقیقی t می‌باشند، جوابی بیابید.

الف) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y - z \\ z' = 3z \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y + z \\ z' = 2z \end{cases}$

۳-۷ چند جمله‌ای مینیمال

قضیه کیلی-همیلتن (قضیه ۲۸.۵ از بخش۵-۴) بیان می‌کند که به ازای هر عملگر خطی T بر یک فضای برداری $n-$ بعدی، یک چند جمله‌ای $f(t)$ بادرجه n -که همان چند جمله‌ای مشخص T است- موجود است به گونه‌ای که $f(T) = T_\circ$. بنابراین یک چند جمله‌ای وجود دارد که علاوه برداشتن خاصیت فوق کمترین درجه را دارد واین درجه حداکثر n می‌باشد و هرگاه $g(t)$ چنین چند جمله‌ای باشد می‌توانیم $g(t)$ را بر ضریب پیشرواش تقسیم کنیم تا چند جمله‌ای دیگر $p(t)$ باهمان درجه و با ضریب پیشروی ۱ بدست آید، یعنی $p(t)$ یک چند جمله‌ای تکین باشد (به ضمیمه ه رجوع کنید).

تعریف:. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعدباشد. چند جمله‌ای $p(t)$ رایک **چند جمله‌ای مینیمال** برای T گویند، هرگاه $p(t)$ یک چند جمله‌ای تکین با حداقل درجه مثبت ممکن باشد که برای آن، $p(T) = T_\circ$.

بحث بالا نشان می‌دهد که هر عملگر خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد، همیشه یک چند جمله‌ای مینیمال دارد. نتیجه بعدی نشان می‌دهد که این چند جمله‌ای یکتاست.

قضیه ۱۱.۷. فرض کنید $p(t)$ یک چند جمله‌ای مینیمال برای عملگر خطی T برفضای برداری متناهی البُعد V باشد.

الف) به ازای هر چند جمله‌ای $g(t)$ اگر $g(T) = T_\circ$، آنگاه $p(t)$، $g(t)$ را عاد خواهد کرد به ویژه $p(t)$ چند جمله‌ای مشخص T را عاد می‌کند.

ب) چند جمله‌ای مینیمال T یکتاست.

برهان. الف) فرض کنید $g(t)$، یک چند جمله‌ای باشد که به ازای آن $g(T) = T_\circ$. طبق الگوریتم تقسیم چند جمله‌ای‌ها (قضیه ۱ از ضمیمه)، دو چند جمله‌ای $q(t)$ و $r(t)$ به گونه‌ای موجود هستند که

$$g(t) = q(t)p(t) + r(t) \tag{۱-۷}$$

و $r(t)$ درجه‌ای کمتر از درجه $p(t)$ داشته باشد. با جایگذاری T در رابطه ۱-۷ و با استفاده از این که $g(T) = p(T) = T_\circ$، داریم $r(T) = T_\circ$. چون $r(t)$ درجه اش کمتر از درجه $p(t)$ است و $p(t)$ چند جمله‌ای مینیمال T است، $r(t)$ باید چند جمله‌ای صفر باشد. بنابراین رابطه ۱-۷ به $g(t) = q(t)p(t)$ تقلیل می‌یابد و به این ترتیب قسمت الف ثابت می‌شود.

ب) فرض کنید $p_1(t)$ و $p_2(t)$، هر دو چند جمله‌ای‌های مینیمالی برای T باشند. در این صورت طبق قسمت الف، $p_1(t)$، $p_2(t)$ را عاد می‌کند. چون $p_1(t)$ و $p_2(t)$ درجه یکسانی دارند. به ازای اسکالر ناصفری چون c داریم: $p_2(t) = cp_1(t)$، چون $p_1(t)$ و $p_2(t)$ تکین هستند، $c = 1$ در نتیجه $p_1(t) = p_2(t)$. □

چند جمله‌ای مینیمال یک تبدیل خطی، به طرز کاملا مشابهی برای ماتریس‌های هم تعریف می‌شوند.

تعریف: فرض کنید که $A \in M_{n\times n}(F)$. **چند جمله‌ای مینیمال** A، $p(t)$، چند جمله‌ای تکین دارای حداقل درجه مثبتی است که به ازای آن، $p(A) = O$.

نتایج زیر مستقیماً حاصل می‌شوند.

قضیه ۱۲.۷. فرض کنید که T عملگری خطی برفضای برداری متناهی البُعد V باشد و β پایه مرتبی برای V باشد. در این صورت، چند جمله‌ای مینیمال T با چند جمله‌ای مینیمال $[T]_\beta$ برابر است.

برهان. به عهده خواننده است. □

نتیجه ۱. برای هر $A \in M_{n\times n}(F)$، چند جمله‌ای مینیمال A با چند جمله‌ای مینیمال L_A یکی است.

برهان. به عهده خواننده است. □

باتوجه به قضیه قبل و نتیجه آن، قضیه ۱۲.۷ و تمام قضایای بعدی این بخش که برای عملگرها بیان خواهند شد، برای ماتریس‌ها نیز برقرار هستند. درادامه این بخش، بیش از هر چیزی چند جمله‌ای‌های مینیمال عملگرهای (و در نتیجه ماتریس‌هایی) را مورد بررسی قرار می‌دهیم که چند جمله‌ای مشخص آنها می‌شکافد. بررسی کلی تری از چند جمله‌ای‌های مینیمال در بخش ۷-۴ ارائه شده است.

قضیه ۱۳.۷. فرض کنید که T عملگری خطی برفضای برداری متناهی البُعد V، و $p(t)$ چند جمله‌ای مینیمال T باشد. اسکالر λ، یک مقدار ویژه T است اگر و تنها اگر $p(\lambda) = 0$. بنابراین چند جمله‌ای مشخص و چند جمله‌ای مینیمال T ریشه یکسانی دارند.

برهان. فرض کنید $f(t)$ چند جمله‌ای مشخص T باشد. چون $p(t)$، $f(t)$ را عاد می‌کند. به ازای چندجمله‌ای $q(t)$ای، $f(t) = q(t)p(t)$. فرض کنید λ یکی از ریشه‌های $p(t)$ باشد. در این صورت:

$$f(\lambda) = q(\lambda)p(\lambda) = q(\lambda)0 = 0$$

پس λ یکی از ریشه‌های $f(t)$ است، یعنی λ مقدار ویژه‌ای برای T است.

برعکس، فرض کنید λ مقدار ویژه‌ای برای T باشد و یک $x \in V$ بردار ویژه متناظربا λ باشد. طبق تمرین ۲۲ از بخش ۵-۱ داریم:

$$0 = T_0(x) = p(T)(x) = p(\lambda)(x)$$

چون $x \neq 0$، $p(\lambda) = 0$ و بنابراین λ یک ریشه $p(t)$ است. □

نتیجه زیر بلافاصله بدست می‌آید.

نتیجه ۲. فرض کنید که T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد که چند جمله‌ای مینیمال آن $p(t)$، و چند جمله‌ای مشخص آن $f(t)$ است. فرض کنید که $f(t)$ به شکل زیر تجزیه شود:

$$f(t) = (\lambda_۱ - t)^{n_۱}(\lambda_۲ - t)^{n_۲} .... (\lambda_k - t)^{n_k}$$

که $\lambda_۱ ... \lambda_k$ مقادیر ویژه متمایز T هستند، در این صورت، اعداد صحیح $m_۱ ... m_k$ به گونه‌ای موجود هستند که برای هر i، $۱ \leq m_i \leq n_i$ و

$$p(t) = (\lambda_۱ - t)^{m_۱}(\lambda_۲ - t)^{m_۲} .... (\lambda_k - t)^{m_k}$$

مثال ۱. چند جمله‌ای مینیمال ماتریس زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

چون چند جمله‌ای مشخص A

$$f(t) = \det \begin{bmatrix} ۳ - t & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ - t & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۲ - t \end{bmatrix} = -(t - ۲)^۲(t - ۳)$$

است، چند جمله‌ای مینیمال A، طبق قضیه ۱۴.۷ یا $(t - ۲)^۲(t - ۳)$ است و یا $(t - ۲)(t - ۳)$. باجایگزینی A در $p(t) = (t - ۲)(t - ۳)$، می‌بینیم که $p(A) = ۰$ و بنابراین $p(t)$ چند جمله‌ای مینیمال A است. □

مثال ۲. فرض کنید T عملگر خطی‌ای باشد که بر $\mathbb{R}^۲$ چنین تعریف می‌شود:

$$T(a, b) = (۲a + ۵b, ۶a + b)$$

فرض کنید β پایه مرتب استاندارد $\mathbb{R}^۲$ باشد. در این صورت:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۶ & ۱ \end{bmatrix}$$

و بنابراین چند جمله‌ای مشخص T،

$$f(t) = \det \begin{bmatrix} ۲ - t & ۵ \\ ۶ & ۱ - t \end{bmatrix} = (t - ۷)(t + ۴)$$

است. پس چند جمله‌ای مینیمال T هم $(t - ۷)(t - ۴)$ است. □

مثال ۳. فرض کنید D عملگر خطی‌ای بر $P_۲(\mathbb{R})$ باشد که به ازای هر f به صورت $D(f) = f'$، یعنی مشتق f تعریف

می‌شود. حال چند جمله‌ای مینیمال T را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید β پایه مرتب استاندارد $P_۲(\mathbb{R})$ باشد. در این صورت:

$$[D]_\beta = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

و بنابراین چند جمله‌ای مشخص D، $-t^۳$ است. پس طبق نتیجه قضیه ۱۴.۷، چند جمله‌ای مینیمال D، t، $t^۲$ و یا $t^۳$ است. چون $D^۲(x^۲) = ۲ \neq ۰$، $D^۲ \neq T_۰$ و بنابراین چند جمله‌ای مشخص D باید $t^۳$ باشد. □

در مثال ۳ به راحتی می‌توان بررسی کرد که $P_۲(\mathbb{R})$، یک زیر فضای D دوری (خودش) است. در اینجا چند جمله‌ای‌های مینیمال و مشخص یک درجه دارند. این به هیچ وجه تصادفی نیست.

قضیه ۱۴.۷. فرض کنید که T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد به گونه‌ای که V یک زیر فضای T-دوری خودش باشد. در این صورت چند جمله‌ای مشخص T، $f(t)$ و چند جمله‌ای مینیمال آن، $p(t)$ از یک درجه هستند و بنابراین $f(t) = (-۱)^n p(t)$

برهان. چون V یک زیر فضای T-دوری است، عضو $x \in V$ چنان یافت می‌شود که:

$$\beta = \{x, T(x), ..., T^{n-۱}(x)\}$$

پایه‌ای برای V باشد (قضیه ۲۷.۵). فرض کنید:

$$g(t) = a_۰ + a_۱ t + ... + a_k t^k$$

چند جمله‌ای با درجه $k < n$ باشد. دراین صورت، $a_k \neq ۰$ و

$$g(T)(x) = a_۰ x + a_۱ T(x) + ... + a_k T^k(x)$$

ترکیبی خطی از اعضای β است، که حداقل یک ضریب ناصفردارد، که در واقع a_k می‌باشد. چون β مستقل خطی است، $g(T)(x) \neq ۰$ و در نتیجه $g(T) \neq T_۰$. بنابراین درجه چند جمله‌ای مینیمال T، n است که در ضمن درجه چند جمله‌ای مشخص T نیز هست. □

قضیه ۱۵.۷ شرطی به ما ارائه می‌دهد که تحت آن، درجه چند جمله‌ای مینیمال یک عملگر تاحد ممکن بزرگ است. حال، به بررسی طرف دیگر قضیه، یعنی حالت حداقل می‌پردازیم. طبق قضیه ۱۴.۷، درجه چند جمله‌ای مینیمال یک عملگر باید بزرگتر یا مساوی تعداد مقادیر ویژه متمایز آن باشد. نتیجه بعدی نشان می‌دهد که عملگرهایی که درجه چند جمله‌ای مینیمال آنها حداقل ممکن است، دقیقا همان عملگرهای قطری پذیر هستند.

قضیه ۱۵.۷. فرض کنید که T عملگری خطی برفضای برداری متناهی البُعد V باشد. در این صورت T قطری پذیر است اگر و تنها اگر چند جمله‌ای مینیمال T به شکل :

$$p(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)....(t-\lambda_k)$$

باشد که $\lambda_1, ..., \lambda_k$ اسکالرهایی متمایز هستند (توجه کنید که λ_i لزوما مقادیر ویژه متمایز T هستند).

برهان. فرض کنید T قطری پذیر باشد. فرض کنید $\lambda_1, ..., \lambda_k$ مقادیر ویژه متمایز T باشند و $p(t)$ را برابر

$$(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)....(t-\lambda_k)$$

تعریف کنید. طبق قضیه ۱۴.۷، $p(t)$ چند جمله‌ای مینیمال T را عاد می‌کند. فرض کنید $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ پایه‌ای برای V، متشکل از بردارهای ویژه T باشد و $v_i \in \beta$ی دلخواهی را در نظر بگیرید. در این صورت به ازای مقدار ویژه λ_j ای، $(T\lambda_j I)(v_i) = \circ$. چون $(t\lambda_j)$، $p(t)$ را عاد می‌کند، چند جمله‌ای $g_j(t)$ به گونه‌ای موجود است که $p(t) = q_j(t)(t-\lambda_j)$. در نتیجه:

$$p(T)(v_i) = q_j(T)(T-\lambda_j I)(v_i) = \circ$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $p(T) = T_\circ$، چرا که $p(T)$ هر عضو پایه‌ای از V را به $\circ$ می‌برد. بنابراین $p(t)$ چند جمله‌ای مینیمال T است.

برعکس، فرض کنید اسکالرهای متمایز $\lambda_1, ..., \lambda_k$ به گونه ا ی یافت شوند که چند جمله‌ای مینیمال T، $p(t)$، به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$p(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)....(\lambda_k - t)$$

طبق قضیه ۱۴.۷، λ_iها مقادیر ویژه T هستند. برروی $n = \dim(V)$ استقراء ریاضی انجام می‌دهیم. واضح است که به ازای ۱ $= n$ ای، T قطری پذیر است. حال فرض کنید T به ازای $n >$ ۱ هرگاه که $\dim(V) < n$، قطری پذیر باشد. فرض کنید که $n = \dim(V)$. قرار دهید $W = R(T-\lambda_k I)$. واضح است که $W \neq V$، چرا که λ_k یک مقدار ویژه T است. هرگاه $W = \{\circ\}$، $T = \lambda_k I$ به وضوح قطری پذیر است. پس فرض کنید $\circ < \dim(W) < n$. در این صورت W، $T-$ پایاست وبه ازای هر $x \in W$:

$$(T-\lambda_1 I)...(T-\lambda_{k-1} I)(x) = \circ$$

از اینجا معلوم می‌شود که چند جمله‌ای مینیمال T_W، چند جمله‌ای $(t-\lambda_1)...(t-\lambda_{k-1})$ را عاد می‌کند. در نتیجه طبق فرض استقرا، T_W قطری پذیر است. به علاوه، λ_k طبق قضیه ۱۴.۷، یک مقدار ویژه T_W نیست. بنابراین $W \cap N(T-\lambda_k I) = \{\circ\}$. حال فرض کنید $\beta_1 = \{v_1, ..., v_m\}$ پایه‌ای برای W متشکل از بردارهای ویژه T_W (و در نتیجه T) باشد و نیز فرض کنید که $\beta_2 = \{w_1, ..., w_p\}$ پایه‌ای برای $N(T-\lambda_k I)$ یعنی فضای ویژه T متناظر با λ_k باشد. در این صورت، طبق تذکر بالا، β_1 و β_2 مجزا هستند. همچنین ملاحظه می‌کنید که با بکارگیری قضیه بُعد در

مورد $T-\lambda_k I$ داریم $m+p=n$. نشان می‌دهیم که $\beta=\beta_1\cup\beta_2$ مستقل خطی است. اسکالرهای $a_1,\dots a_m$ و $b_1,\dots b_p$ را طوری در نظر بگیرید که:

$$a_1v_1+\dots+a_mv_m+b_1w_1+\dots+b_pw_p=0$$

فرض کنید:

$$y=\sum_{i=1}^{p}b_iw_i,\qquad x=\sum_{i=1}^{m}a_iv_i$$

در این صورت، $x\in W$، $y\in N(T-\lambda_kI)$ و $x+y=0$. نتیجه می‌شود که $x=-y\in W\cap N(T-\lambda_kI)$ و بنابراین $x=0$. چون β_1 مستقل خطی است، داریم $a_1=\dots=a_m=0$. به طور مشابه، $b_1=\dots=b_p=0$. نتیجه می‌گیریم که β زیر مجموعه‌ای مستقل خطی از V، متشکل از n بردار ویژه است. نتیجه می‌شود که β پایه‌ای برای V متشکل از بردارهای ویژه T است و بنابراین T قطری پذیر است. □

غیر از عملگرهای قطری پذیر، روش‌هایی برای چند جمله‌ای مینیمال عملگرهای خطی دیگر برفضاهای برداری متناهی البعد نیز وجود دارند. در حالتی که چند جمله‌ای مشخص عملگر بشکافد، چند جمله‌ای مینیمال را می‌توان برحسب فرم متعارف جردن عملگر بیان کرد (به تمرین ۱۳ رجوع کنید). در حالتی که چند جمله‌ای مشخص نشکافد، چند جمله‌ای مشخص را می‌توان بر حسب فرم متعارف گویا، که در بخش بعد مطالعه خواهیم کرد،بیان نمود. (به تمرین ۷ از بخش ۴-۷ رجوع کنید).

مثال ۴. همه ماتریس‌های $A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ را که به ازای آنها $A^2-3A+2I=o$ تعیین می‌کنیم. فرض کنید $g(t)=t^2-3t+2=(t-2)(t-1)$. چون $g(A)=o$، چند جمله‌ای مینیمال A، $p(t)$، $g(t)$ را عاد می‌کند. در نتیجه تنها نامزدهای ممکن برای $p(t)$، $t-1$، $t-2$ و $(t-2)(t-1)$ هستند. هرگاه $p(t)=t-1$ یا $p(t)=t-2$ به ترتیب $A=I$ یا $A=2I$. هرگاه $p(t)=(t-2)(t-1)$، A قطری پذیر و دارای مقادیر ویژه ۱و ۲ است و بنابراین A متشابه با:

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$$

است. □

مثال ۵. فرض کنید که $A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$، در $A^3=A$ صدق کند. نشان خواهیم داد که A قطری پذیر است. فرض کنید $g(t)=t^3-t=t(t+1)(t-1)$. در این صورت $g(A)=O$ و در نتیجه چند جمله‌ای مینیمال A، $p(t)$، $g(t)$ را عاد می‌کند. در نتیجه طبق قضیه ۷-۱۶، A قطری پذیر است. □

مثال ۶. در مثال ۳ دیدیم که چند جمله‌ای مینیمال عملگر مشتق گیری D بر $P_2(\mathbb{R})$، t^3 است. بنابراین طبق قضیه ۱۶.۷، D قطری پذیر نیست. □

تمرینات

۱. تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است. فرض کنید همه فضاهای برداری مورد نظر متناهی البُعد هستند.

الف) هر عملگر خطی T، چند جمله‌ای $p(t)$ای با بزرگترین درجه ممکن دارد که به ازای آن $p(T) = T_0$.

ب) هر عملگر خطی، دارای یک چند جمله‌ای مینیمال یکتاست.

ج) چند جمله‌ای مشخص یک عملگر، چند جمله‌ای مینیمال آن عملگر را عاد می‌کند.

د) چند جمله‌ای مینیمال و مشخص هر عملگر خطی قطری پذیر، یکسان هستند.

ه) فرض کنید که T عملگرخطی بر فضای برداری n-بعدی V، $p(t)$ چند جمله‌ای مینیمال T و $f(t)$ چند جمله‌ای مشخص T باشد فرض کنید $f(t)$ بشکافد. در این صورت، $f(t)$، $[p(t)]^n$ را عاد می‌کنند.

و) چند جمله‌ای مینیمال یک عملگرخطی، همواره درجه‌ای مساوی با درجه چند جمله‌ای مشخص آن عملگر دارد.

ز) هر عملگرخطی درصورتی که چند جمله‌ای مینیمال آن بشکافد، قطری پذیر است.

ح) فرض کنید T چنان عملگرخطیی برفضای برداری V باشد که V، زیر فضایی T-دوری از خودش باشد. در این صورت، درجه چند جمله‌ای مینیمال T، برابر با $\dim(V)$ است.

ط) فرض کنید T چنان عملگرخطیی برفضای برداری V باشد که T، n مقدار ویژه متمایز داشته باشد، که $n = \dim(V)$ در این صورت درجه چند جمله‌ای مینیمال T، برابر با n است.

۲. چند جمله‌ای مینیمال هریک از ماتریس‌های زیر را بیابید.

الف) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 4 & -14 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۳. چند جمله‌ای مینیمال هریک از عملگرهای خطی زیر را بیابید.

الف) T بر $\mathbb{R}^2$، که $T(a,b) = (a+b, a-b)$.

ب) T بر $P_2(\mathbb{R})$، که $T(f) = f' + 2f$.

ج) T بر $P_2(\mathbb{R})$، که $T(f)(x) = -xf''(x) + f'(x) + 2f(x)$.

د) T بر $M_{n\times n}(\mathbb{R})$، که $T(A) = A^t$. راهنمایی:توجه کنید که $T^{۲} = I$.

۴. تعیین کنید که کدام یک از ماتریس‌ها وعملگرهای تمرینات ۲ و ۳ قطری پذیر هستند.

۵. تمام عملگرهای خطی T بر $\mathbb{R}^{۲}$ را که قطری پذیر هستند و $T^{۳} - ۲T^{۲} + T = T_{۰}$ مشخص کنید.

۶. قضیه ۱۳.۷ و نتیجه آن را ثابت کنید.

۷. نتیجه قضیه ۱۴.۷ را ثابت کنید.

۸. فرض کنید T عملگری خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد، و $g(t)$ چند جمله‌ای مینیمال T باشد. موارد زیر را ثابت کنید.

الف) T وارون پذیر است اگر و تنها اگر $g(۰) \neq ۰$.

ب) هرگاه T وارون پذیر باشد و $g(t) = t^n + ... + a_{۱}t + a_{۰}$، آنگاه:

$$T^{-۱} = -\frac{۱}{a_{۰}}(T^{n-۱} + a_{n-۱}T^{n-۲}... + a_{۱}I)$$

۹. فرض کنید T عملگری خطی قطری پذیری بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد. ثابت کنید که V زیر فضایی T-دوری خودش است اگر و تنها اگر هریک از فضاهای ویژه، یک-بعدی باشند.

۱۰. فرض کنید T عملگری خطی قطری پذیری بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد، و W زیر فضایی $T-$ پایا از V باشد. ثابت کنید که چند جمله‌ای مینیمال T_W چند جمله‌ای مینیمال T را عاد می‌کند.

۱۱. فرض کنید $g(t)$، چند جمله‌ای کمکی نظیر یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت (به گونه‌ای که در بخش ۷-۲ تعریف شد) باشد و نیز فرض کنید V نشان دهنده فضای جواب‌های این معادله دیفرانسیل باشد. موارد زیر را ثابت کنید:

الف) V زیر فضایی $D-$ پایاست که در اینجا D عملگر مشتق گیری بر $\mathbb{C}^{\infty}$ است.

ب) چند جمله‌ای مینیمال D_V، (تحدید D به V) $g(t)$ است.

ج) هرگاه درجه $g(t)$، n باشد، چند جمله‌ای مشخص D_V، $(-۱)^n g(t)$ است.

راهنمایی: از قضیه ۳۲.۲ برای قسمت‌های ب و ج استفاده کنید.

۱۲. فرض کنید که D عملگر مشتق گیری بر $P(\mathbb{R})$ یعنی فضای چند جمله‌ای‌های روی $\mathbb{R}$ باشد. ثابت کنید که چند جمله‌ای $g(t)$ای وجودندارد که به ازای آن $g(D) = T_{۰}$. بنابراین D، چند جمله‌ای مینیمال ندارد.

۱۳. فرض کنید T عملگری خطی بر یک فضای متناهی البُعد باشد و نیز فرض کنید که چند جمله‌ای مشخص T بشکافد. فرض کنید $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ مقادیر ویژه متمایز T باشد و به ازای هر i ، p_i مرتبه بزرگترین بلوک جردن نظیر λ_i، در یک فرم متعارف جردن دلخواه برای T باشد. ثابت کنید که چند جمله‌ای مینیمال T، $(t-\lambda_1)^{p_1}...(t-\lambda_k)^{p_k}$ است.

برای انجام تمرینات زیر، آشنایی با مجموعهای مستقیم الزامی است.

۱۴. فرض کنید T عملگری خطی بر یک فضای متناهی البُعد V بوده، W_1 و W_2 چنان زیر فضاهای $T-$ پایایی از V باشند که $V = W_1 \oplus W_2$. فرض کنید $p_1(t)$ و $p_2(t)$ به ترتیب چند جمله‌ای‌های مینیمال T_{W_1} و T_{W_2} باشند. این مطلب را اثبات یا نقض کنید که $p_1(t)$ و $p_2(t)$، چند جمله‌ای مینیمال T است.

تمرین ۱۵ از تعریف زیر استفاده می‌کند.

تعریف:. فرض کنید T عملگری خطی بر یک فضای متناهی البُعد V و x بردار ناصفری از V باشد. چند جمله‌ای $p(t)$ رایک $T-$ **پوچ ساز** x گویند هرگاه $p(t)$ یک چند جمله‌ای تکین با حداقل درجه ممکن باشد که به ازای آن $p(T)(x) = 0$.

۱۵. فرض کنید T عملگری خطی بر یک فضای متناهی البُعد V باشد و x یک بردار ناصفر V باشد. موارد زیر را ثابت کنید.

الف) بردار x، $T-$پوچ ساز یکتایی دارد.

ب) $T-$پوچ ساز x، هرچند جمله‌ای $g(t)$ای را که به ازای آن، $g(T) = T_0$، عاد می‌کند.

ج) هرگاه $p(t)$، $T-$پوچساز x و W زیر فضای $T-$دوری پدید آمده از x باشد، $p(t)$ چند جمله‌ای مینیمال T_W خواهد بود و $\dim(W)$، برابر با درجه $p(t)$ است.

د) درجه $T-$پوچساز x، ۱ است اگر و تنها اگر x یک بردار ویژه T باشد.

۱۶. فرض کنید T عملگری خطی بر یک فضای متناهی البُعد V و W_1 زیر فضایی $T-$پایا از V باشد و فرض کنید $x \in V$ به گونه‌ای باشد که $x \notin W_1$. موارد زیر را ثابت کنید.

الف) چند جمله‌ای تکین یکتای $g_1(t)$ باحداقل درجه مثبت ممکن موجود است به گونه‌ای که $g_1(T)(x) \in W_1$.

ب) هرگاه $h(t)$ یک چند جمله‌ای باشد که به ازای آن $h(T)(x) \in W_1$، آنگاه g_1، $h(t)$ را عاد می‌کند.

ج) $g_1(t)$ چند جمله‌ای‌های مینیمال و مشخص T را عاد می‌کند.

د) فرض کنید W_2، چنان زیر فضایی $T-$پایایی از V باشد که $W_2 \subseteq W_1$ و نیز فرض کنید $g_2(t)$، چند جمله‌ای تکین یکتای دارای کمترین درجه ممکنی باشد که به ازای آن، $g_2(T)(x) \in W_2$. در این صورت، $g_1(t)$، $g_2(t)$ را عاد می‌کند.

۷-۴ فرم متعارف گویا

تا کنون در تحلیلی که از عملگرهای خطی‌ای که چند جمله‌ای مشخص آنها می‌شکافد داشته‌ایم، از مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و بردارهای ویژه تعمیم یافته استفاده کرده‌ایم. به طور کلی، لزومی ندارد که چند جمله‌ای مشخص بشکافد و در واقع لزومی ندارد که یک عملگر خطی مقدار ویژه داشته باشد! با این حال قضیه تجزیه یکتا (ضمیمه ه)، این مطلب را تضمین می‌کند که چند جمله‌ای مشخص $f(t)$ی هر عملگر خطی T بر یک فضای برداری متناهی البُعد، به طرز منحصر به فردی به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$f(t) = (-1)^n(\phi_1(t))^{n_1}(\phi_2(t))^{n_2}...(\phi_k(t))^{n_k}$$

که در آن $\phi_i(t)$ها ($1 \le i \le k$)، چند جمله‌ای‌های تحویل ناپذیر تکین و n_iها اعداد صحیح مثبت هستند. در حالتی که $f(t)$ بشکافد، هریک از عوامل تحویل ناپذیر تکین به شکل $\phi_i(t) = t - \lambda_i$ است، که λ_i مقدار ویژه‌ای از T است و در این حالت تناظر یک به یکی میان مقادیر ویژه T، و عوامل تکین تحویل ناپذیر چندجمله‌ای مشخص، وجود دارد. درحالت کلی، مقادیر ویژه لزوما موجود نیستند، اما عوامل تکین تحویل ناپذیر، همواره موجود هستند. در این بخش چند قضیه ساختاری را ثابت می‌کنیم که به جای مقادیر ویژه، برعوامل تکین تحویل ناپذیر چند جمله‌ای مشخص تکیه دارند.

درچنین قالبی، تعریف زیر جایگزین مناسبی برای فضاهای ویژه و فضاهای ویژه تعمیم یافته می‌باشد.

تعریف:. فرض کنید که T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V با چندجمله‌ای مشخص زیر باشد:

$$f(t) = (-1)^n(\phi_1(t))^{n_1}(\phi_2(t))^{n_2}...(\phi_k(t))^{n_k}$$

که $\phi_i(t)$ها ($1 \le i \le k$)، چندجمله‌ای‌های تکین تحویل ناپذیر متمایز و n_i اعداد صحیح متمایزی هستند. به ازای هر ($1 \le i \le k$)، زیر مجموعه $K_{\phi_i}(T)$ از V را این گونه تعریف می‌کنیم:

$K_{\phi_i}(T) = \{x \in V : (\phi_i(t))^p(x) = 0$ ،به ازای عدد صحیح مثبتی چون p $\}$

خواهیم دید که هریک از $K_{\phi_i}(T)$ها، زیر فضای $T-$پایای ناصفری از V است. هرگاه $\phi_i(t) = t - \lambda$ درجه اش یک باشد، $K_{\phi_i}(T)$ فضا ویژه تعمیم یافته T متناظر با مقدار ویژه λ خواهد بود.

حال که تعمیم‌های مناسبی برای دو مفهوم مرتبط به هم مقدار ویژه وفضای ویژه به دست آورده ایم، وظیفه بعدی ما این است که به توصیف فرم متعارفی برای عملگرهای خطی بپردازیم که متناسب با این تعمیم‌ها باشد. فرمی که مطالعه خواهیم کرد، فرم **متعارف گویا** نام دارد. چون هر فرم متعارف بیانگر نوعی نمایش ماتریسی برای عملگرهای خطی است، می‌توان آن را با مشخص ساختن نوع پایه‌هایی که چنین نمایش‌هایی را تولید می‌کنند، تعریف کرد.

در بحث ما، پایه‌های مورد نظر به شکلی طبیعی از مولدهای زیرفضاهای دوری خاصی به وجود می‌آیند. به این دلیل خواننده باید تعریف زیر فضای $T-$دوری تولید شده از یک بردار و قضیه ۲۷.۵ ازبخش ۵-۴ را به یاد داشته باشد.

فرض کنید که T، عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V و x بردار ناصفری در V باشد. نماد $C_x(T)$ را

برای زیر فضای $T-$دوری‌ای که x تولید می‌کند، به کار می‌بریم. به یاد بیاورید (قضیه ۲۷.۵) که اگر $\dim(C_x(T)) = k$، مجموعه:

$$\{x, T(x), T^{2}(x), ..., T^{k-1}(x)\}$$

پایه‌ای مرتب برای $C_x(T)$ است، برای تمییز دادن این پایه از تمام پایه‌های مرتب دیگر برای $C_x(T)$، آن را **پایه** $T-$دوری تولید شده از x می‌نامیم وبا $B_x(T)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید A نمایشی ماتریسی تحدید T به $C_x(T)$ نسبت به پایه مرتب $B_x(T)$ باشد. از برهان قضیه ۲۷.۵ به یاد بیاورید که در اینجا:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix}$$

که:

$$a_0 x + a_1 T(x) + ... + a_{k-1} T^{k-1}(x) + T^k(x) = 0$$

به علاوه، چند جمله‌ای مشخص A از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\det(A - tI) = (-1)^k (a_0 + a_1 t + ... + a_{k-1} t^{k-1} + t^k)$$

ماتریس A را **ماتریس همدم** چند جمله‌ای تکین $h(t) = (a_0 + a_1 t + ... + a_{k-1} t^{k-1} + t^k)$ می‌نامند. هرچند جمله‌ای تکین، یک ماتریس همدم دارد و چند جمله‌ای مشخص ماتریس همدم چند جمله‌ای تکین $g(t)$ با درجه k، برابر با $(-1)^k g(t)$ است. (به تمرین ۱۹ از بخش ۵-۴ رجوع کنید) طبق قضیه ۱۵.۷، چند جمله‌ای تکین $h(t)$، چند جمله‌ای مینیمال A نیز هست. چون A، نمایش ماتریسی تحدید T به $C_x(T)$ است، $h(t)$ چند جمله‌ای مینیمال این تحدید می‌باشد. طبق تمرین ۱۵ از بخش ۷-۳، $h(t)$، $T-$ پوچ ساز x هم هست.

هدف ما در این بخش، اثبات این مطلب است که برای هر عملگر خطی T بر فضای برداری متناهی البُعد V، پایه مرتب βای برای V به گونه‌ای یافت شود که نمایش ماتریسی $[T]_\beta$، به شکل زیر باشد :

$$\begin{bmatrix} C_1 & O & \cdots & O \\ O & C_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & C_r \end{bmatrix}$$

به طوری که هریک از C_iها، ماتریس همدم یک چند جمله‌ای به شکل $(\phi(t))^m$ای باشد که $\phi(t)$ مقسوم علیه تحویل

ناپذیر تکینی از چند جمله‌ای مشخص T و m یک عدد صحیح مثبت است. چنین نمایش ماتریسی‌ای یک **فرم متعارف گویا** برای T نام دارد. پایه مرتب β را یک **پایه متعارف گویا** برای T می‌نامیم. قضیه بعدی، نتیجه ساده‌ای از لم زیر است که بر مفهوم T-پوچ ساز که در تمرینات بخش ۷-۳ معرفی شد، تکیه دارد.

لم ۱۷. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V، و x بردار ناصفری در v باشد و نیز فرض کنید که T-پوچ ساز x، به ازای چند جمله‌ای تکین تحویل ناپذیری به صورت $(\phi(t))^p$ باشد. در این صورت $\phi(t)$ چند جمله‌ای مینیمال T را عاد می‌کند و $x \in K_\phi(T)$.

برهان. طبق تمرین ۱۵ قسمت ب از بخش ۷-۳، $(\phi(t))^p$، چندجمله‌ای مینیمال T را عاد می‌کند. به علاوه، طبق تعریف $K_\phi(t)$، $x \in K_\phi(t)$. □

قضیه ۱۶.۷. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد T و β پایه مرتبی برای T باشد. در این صورت، T پایه متعارف گویایی برای T است اگر و تنها اگر T اجتماع مجزایی از پایه‌های T-دوری به شکل $B_{v_i}(T)$ باشد که هر v_i به ازای مقسوم علیه تکین تحویل ناپذیر $\varphi(t)$ ای از چند جمله‌ای مشخص T، عضو $K_\varphi(T)$ است.

برهان. به عهده خواننده است. □

مثال ۱. فرض کنید T عملگری خطی بر $\mathbb{R}^8$ باشد و

$$\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

پایه متعارف گویایی برای T باشد به گونه‌ای که

فرم متعارف گویایی برای T باشد. در این حالت، زیر ماتریس‌های C_1، C_2 و C_3 به ترتیب چند جمله‌ای‌های همدم $\phi_1(t), (\phi_2(t))^2$ و $\phi_2(t)$ هستند، که:

$$\phi_1(t) = t^2 - t + 3, \phi_2(t) = t^2 + 1$$

با نماد گذاریهای قضیه ۱۷.۷، β اجتماع مجزای پایه‌های T-دوری زیر است:

$$\begin{aligned}\beta &= B_{v_1}(T) \cup B_{v_3}(T) \cup B_{v_7}(T)\\ &= \{v_1, v_2\} \cup \{v_3, v_4, v_5, v_6\} \cup \{v_7, v_8\}\end{aligned}$$

طبق تمرین ۴۰ از بخش ۴-۵ چند جمله‌ای مشخص T، $f(t)$، حاصلضرب چند جمله‌ای‌های مشخص ماتریس‌های همدم است.

$$f(t) = \varphi_1(t)(\varphi_2(t))^2\varphi_2(t) = \varphi_1(t)(\varphi_2(t))^3$$

□

فرم متعارف گویای عملگر T در مثال ۱، به ازای هر مقسوم علیه تحویل ناپذیر چند جمله‌ای مشخص T، ماتریس همدم توانی از آن را در بر دارد. چون این ماتریس همدم، حاصل اثر T بر یک زیر فضای T-دوری است که عضو ناصفری چون x آن را تولید می‌کند، توانی از این مقسوم علیه تحویل ناپذیر، T-پوچ ساز x است. بنابراین $K_\phi(T)$ به ازای هر مقسوم علیه تحویل ناپذیر تکین ϕ از چندجمله‌ای مشخص T ناصفر است.

در طول اثبات این مطلب که هر عملگر خطی T بر یک فضای برداری متناهی البُعد، یک فرم متعارف گویا دارد، نشان خواهیم داد که خصوصیاتی که در مورد مثال ۱ ذکر شد، در حالت کلی هم صادقند. نقش کلیدی در بررسی هایمان را زیر فضاهای ناصفر $K_\phi(T)$، که ϕ یک چند جمله‌ای تحویل ناپذیر تکین است، بر عهده خواهند داشت. نشان دادن این که چند جمله‌ای‌های دارای این خاصیت، دقیقاً همان‌هایی هستند که چند جمله‌ای مینیمال T را عاد می‌کنند، دشوار نیست. چون چند جمله‌ای مینیمال یک عملگر، چند جمله‌ای مشخص آن را عاد می‌کند، هر مقسوم علیه تحویل ناپذیر اولی، مقسوم علیه تحویل ناپذیر دومی نیز هست. در نهایت نشان خواهیم داد که عکس این مطلب هم صحیح است، یعنی چند جمله‌ای‌های مینیمال و مشخص، مقسوم علیه‌های تحویل ناپذیر یکسان دارند. کار را با نتیجه‌ای که چند خاصیت مقسوم علیه‌های تحویل ناپذیر چند جمله‌ای مینیمال را ذکر می‌کند آغاز می‌کنیم. به خواننده توصیه می‌شود که تعریف T پوچ ساز وتمرین ۱۵ از بخش ۳-۷ را که پس از آن آمده است، مرور کند.

قضیه ۱۷.۷. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد و
$$p(t) = (\varphi_1(t))^{m_1}(\varphi_2(t))^{m_2}...(\varphi_k(t))^{m_k}$$

چند جمله‌ای مینیمال T باشد که اینجا φ_iها ($1 \leq i \leq k$)، عوامل تکین تحویل ناپذیر متمایز $p(t)$ و m_i ها اعداد صحیح مثبتی هستند. در این صورت :

الف) برای هر i، $K_{\phi_i}(T)$، زیر فضای $T-$ پایای ناصفری از V است.

ب) به ازای هر i، اگر x عضو ناصفری از $K_{\phi_i}(T)$ باشد، $T-$ پوچ ساز x به ازای عدد صحیح p ای، به صورت $(\phi_i(t))^p$ است.

ج) برای هر $i \neq j$ ، $K_{\phi_i}(T) \cap K_{\phi_j}(T) = \{0\}$.

د) برای هر $i \neq j$، $K_{\phi_i}(T)$ تحت $\phi_j(T)$ پایاست و تحدید $\phi_j(T)$ به $K_{\phi_i}(T)$ یک به یک و پوشاست.

ه) برای هرi، $K_{\phi_i}(T) = N((\phi_i(T))^{m_i})$.

برهان. الف) اثبات این که $K_{\phi_i}(T)$ زیر فضای T پایایی از V است. به عهده خواننده است. فرض کنید $f_i(t)$ چند جمله ایی باشد که از حذف عامل $(\phi_i(t))^{m_i}$ از $p(t)$ حاصل می‌شود. برای اثبات این که $K_{\phi_i}(T)$ ناصفر است ابتدا توجه کنید که $f_i(t)$، مقسوم علیه سره‌ای از $p(t)$ است و بنابراین عضو $z \in V$ چنان وجود دارد که $x = f_i(t)(z) \neq 0$. در این صورت $x \in K_{\phi_i}(t)$، چرا که
$$(\phi_i(T))^{m_i}(x) = (\phi_i(T))^{m_i} f_i(T)(z) = p(T)(z) = 0$$

ب) با توجه به فرض به ازای عدد صحیح مثبت q، $(\phi_i(T))^q(x) = 0$. بنابراین، T-پوچ ساز x، طبق تمرین ۱۵ از بخش۷-۳ $(\phi_i(T))^q$ را عاد می‌کند و نتیجه حاصل می‌شود.

ج) فرض کنید که $x \in K_{\phi_i}(T) \cap K_{\phi_j}(T)$، و طبق قسمت ب، $x \neq 0$. $T-$ پوچ ساز x، هم توانی از $\phi_i(T)$ است و هم توانی از $\phi_j(T)$ است. اما این غیر ممکن است، چرا که $\phi_i(T)$ و $\phi_j(T)$ نسبت به هم اولند (به ضمیمه ه رجوع کنید)، نتیجه می‌گیریم که $x = 0$.

د) چون $K_{\phi_i}(T)$، $T-$پایاست، $\phi_j(T)-$پایا نیز هست. فرض کنید که به ازای یک $x \in K_{\phi_i}(T)$، $\phi_j(T)(x) = 0$. در این صورت طبق قسمت ج $x \in K_{\phi_i}(T) \cap K_{\phi_j}(T) = \{0\}$. بنابراین، تحدید $\phi_j(T)$ به $K_{\phi_i}(T)$ یک به یک است. چون V متناهی البُعد است، این تحدید پوشا نیز می‌باشد.

ه) i دلخواهی رادر نظر بگیرید. واضح است که $N((\phi_i(T))^{m_i}) \subseteq K_{\phi_i}(T)$. فرض کنید $f_i(t)$ چند جمله‌ای تعریف شده در قسمت الف باشد. چون $f_i(t)$، حاصلضربی از چند جمله‌ای‌های به شکل $\phi_j(t)$ به ازای $i \neq j$ می‌باشد، طبق قسمت د نتیجه می‌شود که تحدید $f_i(T)$ به $K_{\phi_i}(T)$ پوشاست. فرض کنید $x \in K_{\phi_i}(T)$. در این صورت $y \in K_{\phi_i}(T)$ چنان موجود است که $f_i(T)(y) = x$. بنابراین:

$$(\phi_i(T))^{m_i}(x) = ((\phi_i(T))^{m_i})f_i(T)(y) = p(T)(y) = 0$$

و در نتیجه $x \in N((\phi_i(T))^{m_i})$. بنابراین $K_{\phi_i}(T) = N((\phi_i(T))^{m_i})$. □

چون یک پایه متعارف گویا برای عملگر T، اجتماعی از پایه‌های $T-$دوری است. لازم است بدانیم که چنین اجتماعی چه موقعی مستقل خطی است. نتیجه مهم بعدی، قضیه ۷.۱۹، این مساله را به مطالعه پایه‌های $T-$دوری واقع در $K_\phi(T)$ تقلیل می‌دهد، که $\phi(t)$ مقسوم علیه تحویل ناپذیر تکینی از چند جمله‌ای مینیمال T است. با لم زیر کار را شروع می‌کنیم.

لم ۱۸. فرض کنید T عملگری بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد و فرض کنید که
$$p(t) = (\phi_1(t))^{m_1}(\phi_2(t))^{m_2}...(\phi_k(t))^{m_k}$$

چند جمله‌ای مینیمال T باشد، که ϕ_iها ($1 \leq i \leq k$)، عوامل تکین تحویل ناپذیر متمایز $p(t)$ و m_iها اعداد صحیح مثبتی هستند. به ازای هر k ($1 \leq i \leq k$)، فرض کنید $v_i \in K_{\phi_i}(T)$ به گونه‌ای باشد که:

$$v_1 + v_2 + ... + v_k = 0 \qquad (۷-۲)$$

در این صورت به ازای هر i، $v_i = 0$.

برهان. i دلخواهی را مفروض بگیرید. فرض کنید $f_i(t)$، چند جمله‌ای حاصل از حذف عامل $(\phi_i())^{m_i}$ از $p(t)$ باشد. به عنوان نتیجه‌ای از قضیه ۷.۱۸، $f_i(T)$ بر $K_{\phi_i}(T)$ یک به یک است و به ازای هر $j \neq i$، $f_i(T)(v_j) \neq 0$. پس با اعمال $f_i(t)$ بر رابطه ۷-۲ نتیجه می‌گیریم که $f_i(T)(v_i) = 0$ که از آن نتیجه می‌شود که $v_i = 0$. □

قضیه ۱۸.۷. فرض کنید T عملگری خطی برفضای برداری متناهی البُعد V باشد. فرض کنید:
$$p(t) = (\phi_۱(t))^{m_۱}(\phi_۲(t))^{m_۲}...(\phi_k(t))^{m_k}$$

چند جمله‌ای مینیمال T باشد که ϕ_iها $(۱ \leq i \leq k)$ عوامل تکین تحویل ناپذیر متمایز $p(t)$ و m_iها اعداد صحیح مثبتی هستند. برای هر $(۱ \leq i \leq k)$، فرض کنید که S_i، زیر مجموعه‌ای مستقل خطی از $K_{\phi_i}(T)$ باشد. در این صورت:

الف) برای هر $i \neq j$، $S_i \cap S_j = \varnothing$.

ب) $S_۱ \cup S_۲ \cup ... \cup S_k$ مستقل خطی است.

برهان. الف) این مطلب مستقیما از قضیه ۱۸.۷ قسمت ج نتیجه می‌شود.

ب) اثبات دقیقا همان اثبات قضیه ۱۳.۵ از بخش ۲-۵ است، که در آن زیر فضاهای به شکل $K_{\phi_i}(T)$ به جای فضاهای ویژه به کار برده می‌شود. □

با توجه به قضیه ۱۹.۷ می‌توانیم تمرکز خود را به بررسی جداگانه پایه برای هر یک از فضاهای به شکل $K_\phi(T)$ که ϕ مقسوم علیه تکین تحویل ناپذیری از T است، قرار دهیم. نتایجی که در زیر می‌آیند، راههایی برای ساختن پایه‌هایی برای این فضاها ارائه می‌دهند، که اجتماع پایه‌هایی $T-$دوری باشند. این نتایج، دو هدف را برآورده می‌سازند که یکی قضیه وجودی برای فرم متعارف گویا و دومی ارائه روش‌هایی برای ساختن پایه‌های متعارف گویاست.

در قضیه ۲۰.۷، و قضیه ۲۱.۷ و نتیجه آن، عملگر خطی T برفضای برداری متناهی البُعد V و مقسوم علیه تکین تحویل ناپذیر ϕ از چند جمله‌ای مینیمال T را تثبیت می‌کنیم.

قضیه ۱۹.۷. فرض کنید $v_۱, v_۲, ..., v_k$ چنان بردارهای متمایزی در $K_\phi(T)$ باشند که
$$S_۱ = B_{v_۱}(T) \cup B_{v_۲}(T) \cup ... \cup B_{v_k}(T)$$

مستقل خطی باشد. برای هر i، فرض کنید w_i چنان برداری در V باشد که $\phi(T)(w_i) = v_i$. در این صورت:
$$S_۲ = B_{w_۱}(T) \cup B_{w_۲}(T) \cup ... \cup B_{w_k}(T)$$

نیز مستقل خطی است.

برهان. ترکیب خطی دلخواهی از بردارهای $S_۲$ را که حاصل آن صفر است در نظربگیرید. به عنوان مثال:

$$\sum_{i=۱}^{k}\sum_{j=۰}^{n_i} a_{ij}T^j(w_i) = ۰ \tag{۳-۷}$$

برای هر i فرض کنید $f_i(t)$ چند جمله ایی باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:
$$f_i(t) = \sum_{j=۱}^{n_i} a_{ij}t^j$$

در اینصورت رابطه ۳-۷ را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(T)(w_i) = 0 \tag{۴-۷}$$

حال $\phi(T)$ را بر دو طرف رابطه۷-۴ اثر دهید تا رابطه زیر به دست آید:

$$\sum_{i=1}^{k} \phi(T) f_i(T)(w_i) = \sum_{i=1}^{k} f_i(T)\phi(T)(w_i) = \sum_{i=1}^{k} f_i(T)(v_i) = 0$$

مجموع اخیر را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از S_1 درآورد که در آن به ازای هرi، $f_i(T)(v_i)$ ، به صورت ترکیبی خطی از بردارهای $B_{v_i}(T)$ می‌شود. چون S_1 مستقل خطی است، نتیجه می‌شود که:

$$f_i(T)(v_i) = 0 \qquad \text{برای هر} i،$$

بنابراین به ازای هرi، $T-$پوچ ساز v_i، $f_i(T)$ را عاد می‌کند (به تمرین ۱۵از بخش ۳-۷ رجوع کنید). طبق قضیه ۱۸.۷ (ب)، $\phi(t)$، $T-$ پوچ ساز v_i را عاد می‌کند و بنابراین $\phi(T)$ به ازای هرi، $f_i(t)$ را عاد می‌کند. بنابراین به ازای هر i، چند جمله‌ای $g_i(t)$ چنان موجود است که $f_i(t) = g_i(t)\phi(t)$. بنابراین رابطه ۴-۷ به صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{k} g_i(T)\phi(T)(w_i) = \sum_{i=1}^{k} g_i(T)(v_i) = 0$$

بار دیگر استقلال خطی S_1 ایجاب می‌کند که:

$$f_i(T)(w_i) = g_i(T)(v_i) = 0 \qquad \text{برای هر} i،$$

اما $f_i(T)(w_i)$، حاصل دسته بندی جملاتی از ترکیب خطی رابطه ۷-۳ است که از مجموعه مستقل خطی $B_{w_i}(T)$ می‌آیند. نتیجه می‌گیریم که به ازای هر i و برای هر j ای $a_{ij} = 0$. پس S_2 مستقل خطی است. □

حال نشان می‌دهیم که $K_\phi(T)$، پایه‌ای متشکل از اجتماعی از $T-$دورها دارد.

لم ۱۹. فرض کنید که W زیر فضایی $T-$ پایا از $K_\phi(T)$ و β پایه مرتبی برای V باشد. در این صورت موارد زیر برقرار هستند.

الف) فرض کنید که $x \in N(\phi(T))$ اما $x \notin W$. در این صورت $\beta \cup B_x(T)$ مستقل خطی است.

ب) اعضای $w_1, w_2, ..., w_s$ در $N(\phi(T))$ وجود دارند به گونه‌ای که β را می‌توان به مجموعه مستقل خطی:

$$\beta' = \beta \cup B_{w_1}(T) \cup ... \cup B_{w_s}(T)$$

تعمیم داد که فضای پدید آمده از آن، $N(\phi(T))$ را در بر داشته باشد.

برهان. الف) فرض کنید $\beta = \{v_۱, v_۲, ..., v_k\}$ و نیز فرض کنید:

$$\sum_{i=۱}^{k} a_i v_i + z = ۰$$

که $z = \sum_{j=۰}^{d-۱} b_j T^j(x)$ و d درجه $\phi(t)$ است. در این صورت $z \in C_x(T) \cap W$ و در نتیجه $C_z(T) \subseteq C_x(T) \cap W$. فرض کنید که $z \neq ۰$. در این $T-$پوچ ساز z، $\phi(t)$ است و بنابراین:

$$d = \dim(C_z(T)) \leq \dim(C_x(T) \cap W) \leq \dim(C_x(T)) = d$$

نتیجه می‌شود که $C_x(T) \cap W = C_x(T)$ و بنابراین $x \in W$، که خلاف فرض است. در نتیجه $z = ۰$، که از آن نتیجه می‌شود که به ازای هرj، $b_j = ۰$. چون β مستقل خطی است، نتیجه می‌شود که برای هرi، $a_i = ۰$. پس $\beta \cup B_x(T)$ مستقل خطی است.

ب) فرض کنید W، $N(\phi(T))$ را در برنداشته باشد. برداری در $N(\phi(T))$ چون $w_۱$ انتخاب کنید که در W نباشد. طبق قسمت الف، $\beta_۱ = \beta \cup B_{w_۱}(T)$ مستقل خطی است. فرض کنید که $W_۱$، فضای بدست آمده از $\beta_۱$ را نشان دهد. هرگاه $W_۱$، $N(\phi(T))$ را در برنداشته باشد، بردار $w_۲$ای انتخاب کنید که در $N(\phi(T))$ باشد ولی در $W_۱$ نباشد تا نتیجه شود که، $\beta_۲ = \beta_۱ \cup B_{w_۲}(T) = \beta \cup B_{w_۱}(T) \cup B_{w_۲}(T)$ مستقل خطی است. با ادامه این روند، در نهایت به بردارهای $w_۱, w_۲, ..., w_s$ در $N(\phi(T))$ می‌رسیم که: $\beta' = \beta \cup B_{w_۱}(T) \cup ... \cup B_{w_s}(T)$ مجموعه‌ای مستقل خطی باشد که فضای پدید آمده ازآن، $N(\phi(T))$ رادر برداشته باشد. □

قضیه ۲۰.۷. هرگاه چند جمله‌ای مینیمال T به شکل $p(t) = (\phi(T))^m$ باشد، آنگاه T یک پایه متعارف گویا دارد.

برهان. اثبات از طریق استقرا ریاضی بر m صورت می‌گیرد. فرض کنید $m = ۱$. بابه کار گیری قسمت ب از لم در مورد $W = \{۰\}$، زیر مجموعه‌ای مستقل خطی از V به شکل $B_{v_۱}(T) \cup ... \cup B_{v_k}(T)$، به دست می‌آید که فضای پدیدآمده از آن، $N(\phi(T))$ را در بردارد. چون $V = N(\phi(T))$، این مجموعه پایه متعارف گویایی برای V است.

حال فرض کنید که به ازای عدد صحیح $m > ۱$، نتیجه هرگاه که چند جمله‌ای مشخص T به شکل $(\phi(T))^k$ باشد، در صورتی که $k < m$ برقرار باشد و فرض کنید چند جمله‌ای مشخص T، $p(t) = (\phi(T))^m$ باشد. قرار دهید $r = \text{rank}(\phi(T))$. در این صورت $R(\phi(T))$ زیرفضایی $T-$پایا از V است و چند جمله‌ای مینیمال تحدید T به این زیر فضا، $(\phi(T))^{m-۱}$ است. بنابراین می‌توانیم فرض استقراء رابکار گیریم تا پایه متعارف گویایی برای تحدید T به $R(\phi(T))$ به دست آید. فرض کنید $v_۱, v_۲, ..., v_k$، بردارهای تولید کننده پایه‌های $T-$ دوریی باشند که این پایه متعارف گویا راتشکیل می‌دهند. برای هرi، w_i رادر V طوری انتخاب کنید که $v_i = \phi(T)(w_i)$. طبق قضیه ۲۰.۷، اجتماع مجموعه‌های $B_{w_i}(T)$، β، مستقل خطی است. فرض کنید $W = span(\beta)$. در این صورت $W, R((\phi(T))$ را دربردارد. قسمت ب از لم را به کاربرده، در صورت لزوم پایه‌های $T-$دوری اضافی $B_{w_{k+۱}}(T), ..., B_{w_s}(T)$ را به

گونه‌ای که به ازای هر $i > k$، w_i، در $N(\phi(T))$ قرار داشته باشد، به β اضافه تا مجموعه مستقل خطی زیر به دست آید:

$$\beta' = B_{w_1}(T) \cup ... \cup B_{w_k}(T) \cup ... \cup B_{w_s}(T)$$

که فضای پدید آمده از آن، که با W' نشانش می‌دهیم، W و $N(\phi(T))$ را دربردارد.

ثابت می‌کنیم که $W' = V$. فرض کنید U نشان دهنده تحدید $\phi(T)$ به W' باشد، که $\phi(T)-$پایاست. با توجه به طریقه‌ای که W' از $R(\phi(T))$ به دست آمد نتیجه می‌شود که $R(U) = R(\phi(T))$ و $N(U) = N(\phi(T))$. بنابراین:

$$\begin{aligned}\dim(W') &= \operatorname{rank}(U) + nullity(U)\\ &= \operatorname{rank}(\phi(T)) + nullity(\phi(T))\\ &= \dim(V)\end{aligned}$$

بنابراین $W' = V$ و β' پایه متعارف گویایی برای T است. □

نتیجه: $K_\phi(T)$ پایه‌ای متشکل از اجتماع پایه‌های $T-$دوری دارد.

برهان. قضیه ۲۱.۷ را در مورد تحدید T به $K_\phi(T)$ به کار گیرید. □

قضیه ۲۱.۷. هر عملگر خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد، دارای یک پایه متعارف گویا و بنابراین یک فرم متعارف گویاست.

برهان. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البعد V و
$$p(t) = (\phi_1(t))^{m_1}(\phi_2(t))^{m_2}...(\phi_k(t))^{m_k}$$

چند جمله‌ای مینیمال T باشد، که $\phi_i(t)$ ها، عوامل تکین تحویل ناپذیر متمایز $p(t)$ هستند و برای هر i، $m_i > 0$. اثبات از طریق استقراء ریاضی بر k صورت می‌گیرد. حالت $k = 1$ در قضیه ۲۱.۷ ثابت شد.

فرض کنید که به ازای $k > 1$ ای، نتیجه هرگاه که چند جمله‌ای مینیمال کمتر از k عامل تحویل ناپذیر متمایز داشته باشد و $p(t)$، k عامل متمایز داشته باشد. فرض کنید U تحدید T به زیر فضای $T-$ پایای $W = R(\phi_k(T)^{m_k})$ باشد، و $q(t)$ چند جمله‌ای مینیمال U. در این صورت، طبق تمرین ۱۰ از بخش۷-۳، $q(t)$، $p(t)$ را عاد می‌کند. به علاوه، $\phi_k(T)$، $q(t)$ را عاد نمی‌کند، چرا که در غیر این صورت بردار ناصفر $x \in W$ وجود خواهد داشت که $\phi_k(U)(x) = 0$ و نیز بردار $y \in V$ موجود خواهد بود به گونه‌ای که $x = (\phi_k(T))^{m_k}(y)$. نتیجه می‌شود که $(\phi_k(T))^{m_{k+1}}(y) = 0$ و در نتیجه $y \in K_{\phi_k}(T)$ و طبق قضیه ۱۸.۷ قسمت ه، $x = (\phi_k(T))^{m_k}(y) = 0$، که یک تناقض است. پس $q(t)$ کمتر از k مقسوم علیه تحویل ناپذیر متمایز دارد. پس طبق فرض اسقراء U دارای پایه متعارف گویای β_1 است، که از

اجتماعی از پایه‌های $U-$ دوری (و در نتیجه $T-$ دوری) تولید شده به وسیله بردارهایی از برخی از زیر فضاهای $K_{\phi_i}(T)$، $1 \leq i \leq k-1$ تشکیل شده است. طبق نتیجه قضیه ۲۱.۷ $K_{\phi_k}(T)$، پایه β_2ای دارد که از اجتماعی از پایه‌های $T-$ دوری تشکیل شده است. طبق قضیه۷-۱۹، β_1 و β_2 مجزا هستند و $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ مستقل خطی است. فرض کنید s نشان دهنده تعداد اعضای β باشد، در این صورت:

$$
\begin{aligned}
s &= \dim(R((\phi_k(T))^{m_k}) + \dim(K_{\phi_k}(T)) \\
&= \operatorname{rank}((\phi_k(T))^{m_k}) + nullity((\phi_k(T))^{m_k}) \\
&= n
\end{aligned}
$$

نتیجه می‌گیریم که β یک پایه متعارف گویاست و T یک فرم متعارف گویا دارد. $\square$

در مطالعه‌ای که در مورد فرم متعارف گویا داشتیم، بر چند جمله‌ای مینیمال تکیه کردیم. حال قادریم که فرم متعارف گویا را به چند جمله‌ای مشخص ارتباط دهیم.

قضیه ۲۲.۷. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V، با چند جمله‌ای مشخص زیر باشد:

$$f(t) = (-1)^n(\phi_1(t))^{n_1}(\phi_2(t))^{n_2}...(\phi_k(t))^{n_k}$$

که ϕ_iها ($1 \leq i \leq k$)، چند جمله‌ای‌های تحویل ناپذیر تکین متمایزی هستند و n_iها نیز اعداد صحیح مثبتی هستند. در این صورت:

الف) $\phi_1(t), \phi_2(t), ...\phi_k(t)$ عوامل تحویل ناپذیر چند جمله‌ای مینیمال هستند.

ب) به ازای هر $\dim(K_{\phi_i}(T)) = d_i n_i$ که d_i درجه $\phi_i(t)$ است.

ج) هرگاه β، پایه متعارف گویایی برای V باشد، آنگاه $\beta_i = \beta \cap K_{\phi_i}(T)$ به ازای هر i، پایه‌ای برای $K_{\phi_i}(T)$ است.

د) هرگاه γ_i به ازای هر i، پایه‌ای برای $K_{\phi_i}(T)$ باشد، آنگاه $\gamma = \gamma_1 \cup ... \cup \gamma_k$ پایه‌ای برای V است. به خصوص اگر هر یک از γ_iها اجتماع مجزایی از پایه‌های $T-$ دوری باشد، γ یک پایه متعارف گویا برای T می‌باشد.

برهان. الف) طبق قضیه ۲۲.۷، T فرم متعارف گویایی چون C دارد. طبق تمرین ۴۰ از بخش ۴-۵ چند جمله‌ای مشخص C و بنابراین T، حاصلضرب چند جمله‌ای مشخص ماتریس‌های همدمی است که C را تشکیل می‌دهند. بنابراین هر یک از عوامل تحویل ناپذیر تکین $f(t)$، چون $\phi_i(t)$، چند جمله‌ای مشخص حداقل یکی از ماتریس‌های همدم را عاد می کند و بنابراین به ازای عدد صحیح p ای، $(\phi_i(t))^p$، $T-$پوچ ساز بردار ناصفری از V است. نتیجه می‌گیریم که $(\phi_i(t))^p$ و در نتیجه $\phi_i(t)$، چند جمله‌ای مینیمال T را عاد می‌کند. بر عکس، اگر $\phi(t)$ چند جمله‌ای مینیمال تکینی باشد که چند جمله‌ای مینیمال T را عاد کند، $\phi(t)$ چند جمله‌ای مشخص T را نیز عاد خواهد کرد، چرا که چند جمله‌ای مینیمال T، چند

جمله‌ای مشخص را عاد می‌کند.

ب، ج و د) فرض کنید $C = [T]_\beta$ که فرم متعارف گویایی برای T است. i دلخواهی را که $1 \leq i \leq k$ در نظر بگیرید. چون $f(t)$ حاصلضرب چند جمله‌ای‌های مشخص ماتریس‌های همدمی است که C را تشکیل می‌دهند، می‌توانیم آن چند جمله‌ای‌های مشخصی را که مربوط به پایه‌های $T-$دوری واقع در β_i هستند، در هم ضرب کنیم، تا عامل $(\phi_i(t))^m$ از $f(t)$ به دست آید. چون این چند جمله‌ای، درجه اش $n_i d_i$ است و اجتماع این پایه ها، زیر مجموعه مستقل خطی β_i از $K_{\phi_i}(T)$ است، داریم:

$$n_i d_i \leq \dim(K_{\phi_i}(T))$$

به علاوه، $n = \sum_{i=1}^{k} d_i n_i$، چرا که این مجموع برابر با درجه $f(t)$ است. حال فرض کنید g نشان دهنده تعداد اعضای γ باشد. طبق قضیه ۷.۱۹، γ مستقل خطی است و بنابراین:

$$n = \sum_{i=1}^{k} d_i n_i \leq \sum_{i=1}^{k} \dim(K_{\phi_i}(T)) = g \leq n$$

در نتیجه $n = g$ و به به ازای هر i، $n_i d_i = \dim(K_{\phi_i}(T))$. نتیجه می‌شود که γ پایه‌ای برای V است و به ازای هر i، β_i پایه‌ای برای $K_{\phi_i}(T)$ است. □

یکتایی فرم متعارف گویا

حال که وجود فرم گویا رانشان دادیم، اکنون می‌توانیم از خود بپرسیم که این فرم تا چه حدی یکتاست. واضح است که فرم متعارف گویای عملگر T را می‌توان با جایگشت دادن پایه‌های دوری‌ای که پایه‌های متعارف گویای این فرم را به وجود می‌آورند، تغییر داد. این کار، باعث می‌شودکه ماتریس‌های همدمی که فرم متعارف گویا می‌آورند، جایگشت داده شوند. همانند فرم متعارف جردن نشان می‌دهیم که صرف نظر از این جایگشت‌ها فرم متعارف گویا یکتاست، گرچه پایه‌های متعارف گویا یکتا نیستند. برای ساده شدن این کار، این قرارداد را می‌پذیریم که هرکدام از پایه‌های متعارف گویا به گونه‌ای مرتب شوند که همه پایه‌های $T-$دوری که متناظر با یک مقسوم علیه تحویل ناپذیر تکین یکسان از چند جمله‌ای مشخص هستند، در کنار همدیگر و در یک دسته قرار بگیرند. به علاوه، در چنین دسته ای، پایه‌های $T-$دوری را به ترتیب نزولی نسبت به اندازه شان مرتب می‌کنیم. وظیفه ما این است که نشان دهیم که با رعایت این قرارداد، فرم متعارف گویای یک عملگر خطی صرف نظر از ترتیب قرارگرفتن عوامل تکین تحویل ناپذیر یکتاست.

مانند حالت فرم متعارف جردن، ازآرایه‌های نقطه‌ای خاصی استفاده می‌کنیم که می‌توانیم فرم متعارف گویا را از روی آنها بازسازی کنیم. در مورد فرم متعارف جردن، به ازای هریک از مقادیر ویژه عملگر مفروض، یک نمودار نقطه‌ای طراحی کردیم. در مورد فرم متعارف گویا، به ازای هر یک از عوامل تحویل ناپذیر تکین از چند جمله‌ای مشخص عملگر، یک نمودار نقطه‌ای تعریف می‌کنیم. اثبات این که نمودارهای نقطه‌ای حاصل، کاملا به وسیله عملگر مفروض مشخص می‌شوند، برهانی

بر فرم متعارف گویا نیز هست.

در ادامه بحث، فرض می‌کنیم T یک عملگر خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد با پایه متعارف گویای β باشد. همچنین فرض می‌کنیم که $\phi(t)$ یک عامل تحویل ناپذیر تکین از چند جمله‌ای مشخص

$$T, B_{v_1}(T), B_{v_2}(T), ..., B_{v_k}(T)$$

پایه‌های $T-$ دوری واقع در βای هستند که در $K_\phi(T)$ قرار دارند، و d درجه $\phi(t)$ است. به ازای هر j فرض کنید $(\phi(t))^{p_j}$، پوچ ساز v_j باشد. این چند جمله‌ای درجه اش dp_j است و بنابراین طبق تمرین۱۵از بخش۷-۳، $B_{v_1}(T)$، dp_j عضو دارد. به علاوه، $p_1 \geq p_2 \geq ... \geq p_k$، چرا که پایه‌های $T-$دوری به ترتیب افزایش اندازه شان مرتب شده اند. نمودار نقطه‌ای $\phi(t)$ را به صورت آرایه‌ای از نقاط تعریف می‌کنیم که دارای k ستون است و در ستون j ام آن p_j نقطه قرار دارد که این نقاط طوری مرتب شده اند که ستون j ام از بالا شروع شده، پس از p_j نقطه پایان می‌پذیرد. به عنوان مثال، اگر$k=۳$، $p_1=۴$، $p_2=۲$ و $p_3=۲$، آنگاه نمودار نقطه‌ای به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{array}{ccc}\bullet&\bullet&\bullet\\ \bullet&\bullet&\bullet\\ \bullet&&\\ \bullet&&\end{array}$$

باوجود این که هریک از ستون‌های یک نمودار نقطه‌ای، مربوط به یکی از پایه‌های $T-$دوری $B_{v_i}(T)$ واقع در $K_\phi(T)$ است، تعدادنقاط هر ستون کمتر از تعداد اعضای این پایه است.

مثال۲

عملگر خطی T در مثال ۱ را به همراه پایه متعارف گویای β و فرم متعارف گویای $C=[T]_\beta$ به یاد بیاورید. چون چند جمله‌ای مشخص T دارای دو مقسوم علیه تحویل ناپذیر $\phi_1(t)=t^۲-t+۳$ و $\phi_2(t)=t^۲+۱$ است، باید دو نمودار نقطه‌ای در نظر بگیریم. چون $\varphi_1(t)$ $T-$پوچ ساز v_1 است و $B_{v_1}(T)$ پایه‌ای برای $K_{\phi_1}(T)$ است. نمودار نقطه‌ای $\phi_1(t)$ فقط از یک نقطه تشکیل شده است. دو پایه $T-$دوری دیگر، $B_{v_3}(T)$ و $B_{v_2}(T)$ در $K_{\phi_2}(T)$ قرار دارند. چون $T-$پوچ ساز v_3، $(\phi_2(t))^۲$ است و $T-$پوچ ساز v_2، $\phi_2(t)$ است، برای نمودار نقطه‌ای $\phi_2(t)$ داریم $p_1=۲$ و $p_2=۱$. این دونمودار در زیر نشان داده شده اند:

$$\begin{array}{cc}\bullet&\bullet\\ \bullet&\end{array} \qquad\qquad \bullet$$

نمودار نقطه ای$\phi_2(t)$ — نمودار نقطه ای$\phi_1(t)$

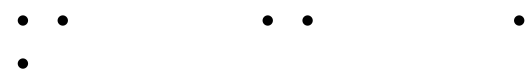
در عمل فرم متعارف گویای یک عملگر خطی را از طریق اطلاعات حاصل از نمودار نقطه‌ای به دست می‌آوریم. این کار، در مثال زیر شرح داده شده است. □

مثال۳

فرض کنید T عملگری خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد بر $\mathbb{R}$ باشد و فرض کنید که مقسوم علیه‌های تحویل ناپذیر چند جمله‌ای مشخص T عبارت باشند از:

$$\phi_1(t) = t - 1 \qquad \phi_2(t) = t^2 + 2 \qquad \phi_3(t) = t^2 + t + 1$$

علاوه براین، فرض کنید که نمودارهای نقطه‌ای مربوط به این مقسوم علیه‌ها به صورت زیر باشند:



$\phi_1(t)$ نمودار نقطه ای $\qquad$ $\phi_2(t)$ نمودار نقطه ای $\qquad$ $\phi_3(t)$ نمودار نقطه ای

چون نمودار نقطه‌ای $\phi_1(t)$ دو ستون دارد، دو ماتریس همدم در فرم متعارف گویا ایجاد می‌کند. ستون اول دو نقطه دارد و بنابراین مربوط به ماتریس همدم 2×2ی $(\phi_1(t))^2 = (t-1)^2$ است. ستون دوم که فقط یک نقطه دارد، متناظر با ماتریس همدم 1×1 نظیر $\phi_1(t) = t - 1$ است. این دو ماتریس همدم به صورت زیر هستند:

$$C_2 = [1], \qquad\qquad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نمودار نقطه‌ای $\phi_2(t) = t^2 + 2$ از دو ستون تشکیل شده است که هر کدام، شامل یک نقطه است و در نتیجه این نمودار دو نسخه از ماتریس همدم 2×2 ی $\phi_2(t)$ در فرم متعارف ایجاد می‌کند.

$$C_3 = C_4 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نمودار نقطه‌ای $\phi_3(t) = t^2 + t + 1$ تنها از یک ستون تشکیل شده است که یک نقطه دارد که فقط ماتریس همدم 2×2 ی زیر را در فرم متعارف ایجاد می‌کند:

$$C_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین فرم متعارف گویای T، ماتریس 9×9 زیر است:

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & O & O & O & O \\ O & C_2 & O & O & O \\ O & O & C_3 & O & O \\ O & O & O & C_4 & O \\ O & O & O & O & C_5 \end{bmatrix}$$

□

حال به مساله کلی یافتن نمودارهای نمودارهای نقطه‌ای برمی گردیم. مانند قبل، عملگر خطی تثبیت شده T بر یک

فضای برداری متناهی البُعد و مقسوم علیه تحویل ناپذیرتکین $\phi(t)$ از چندجمله‌ای مشخص T را مفروض می‌گیریم. فرض کنید U نشان دهنده تحدید عملگر خطی $\phi(t)$ به $K_\phi(T)$ باشد. طبق قضیه ۱۸.۷ قسمت د، به ازای یک عدد صحیح مثبت q، $U^q = T_0$. در نتیجه طبق تمرین ۱۳ از بخش ۲-۷ چند جمله‌ای مشخص U، $(-1)^m t^m$ است که $m = \dim(K_\phi(T))$. بنابراین $K_\phi(T)$ فضای ویژه تعمیم یافته U نظیر $\lambda = 0$ است و U دارای یک فرم متعارف جردن می‌باشد. نمودار نقطه‌ای نظیر فرم متعارف جردن U راهی برای بهتر درک کردن نمودار نقطه‌ای T متناظر با $\phi(t)$ است. حال، ارتباط میان این دو نمودار را شرح می‌دهیم.

فرض کنید β یک پایه متعارف گویا برای T و $B_{v_1}(T), ...B_{v_k}(T)$ پایه‌های $T-$دوری مشمول در β باشند که در $K_\phi(T)$ قرار دارند. یکی از این پایه‌های $T-$دوری، مثلا $B_{v_j}(T)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که مانند بالا، $T-$پوچ ساز v_j، $(\phi(t))^{p_j}$ باشد. در این صورت $B_{v_j}(T)$ از dp_j عضواز β تشکیل شده است. به ازای هر i که $0 \leq i < d$، فرض کنید γ_i دوری از بردارهای ویژه تعمیم یافته U نظیر $\lambda = 0$ باشد که بردار انتهایی آن $T^i(v_j)$ است که در اینجا منظور از $T^0(v_j)$، v_j است. در این صورت:

$$\gamma_i = \{(\phi(T))^{p_j-1}T^i(v_j), (\phi(T))^{p_j-2}T^i(v_j), ..., (\phi(T))T^i(v_j), T^i(v_j)\}$$ [3]

طبق نتیجه قضیه ۶.۷، γ_i زیر مجموعه‌ای مستقل خطی از $C_{v_i}(T)$ است. حال فرض کنید که:

$$\alpha_j = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_{d-1}$$

توجه کنید که α_j (مجموعه مرتبی)شامل $p_j d$ عضو است. اکنون خواهیم دید که در واقع α_j، پایه‌ای مرتب برای $C_{v_j}(T)$ است.

لم ۲۰. α_j پایه‌ای مرتب برای $C_{v_j}(T)$ است.

برهان. نکته اصلی که در این برهان مورد استفاده قرار می‌گیرید، قضیه ۴.۷ است. چون، α_j اجتماعی از دورهایی از بردارهای ویژه تعمیم یافته U متناظر با $\lambda = 0$ است، کافی است نشان دهیم که مجموعه بردارهای ابتدایی این دورها:

$$\{(\phi(T))^{p_j-1}(v_j), (\phi(T))^{p_j-1}T(v_j), ..., (\phi(T))^{p_j-1}T^{d-1}(v_j)\}$$

مستقل خطی است. ترکیب خطی دلخواهی از این بردارها را در نظر بگیرید:

$$a_0(\phi(T))^{p_j-1}(v_j) + a_1(\phi(T))^{p_j-1}T(v_j) + ...$$

[3] برای اثبات این که γ_i برابر با مجموعه سمت راست تساوی است، کافی است دو مورد را ثابت کنیم:
اول-این که $(\phi(T))^{p_j}T^i(v_j)$ که با توجه به این که $(\phi(T))^{p_j}(v_j) = 0$ و جابجایی $\phi(T)^{p_j}$ و T واضح است.
دوم-این که $(\phi(T))^{p_j-1}T^i(v_j) \neq 0$ مطلب اخیر را می‌توان چنین ثابت کرد:
چون $0 \leq i < d$ $deg((\phi(t))^{p_j-1}t^i) = d(p_j-1) + i < dp_j = deg(\phi(t)^{p_j}$
چون $\phi(T)^{p_j}$، $T-$پوچساز v_j است، $(\phi(T))^{p_j-1}T^i(v_1) = (\phi(t)^{p_j-1}t^i)(T)(v_i) \neq 0$. م.

$$+ a_{d-1}(\phi(T))^{p_j-1}T^{d-1}(v_j) \qquad (۵-۷)$$

به گونه‌ای که همه ضرایب صفر نباشند. فرض کنید $g(t)$ چند جمله ایی باشد که چنین تعریف می‌شود $g(t) = a_0 + a_1t + ... + a_nt^n$. در این صورت $g(t)$ چند جمله‌ای ناصفری با درجه کمتر از d است و در نتیجه $(\phi(t))^{p_j-1}g(t)$ چند جمله‌ای نا صفری با درجه کمتر از p_jd است. چون $(\phi(t))^{p_j}$، $T-$پوچ ساز v_j است، نتیجه می‌شود که $(\phi(T))^{p_j-1}g(T)(v_j) \neq 0$. اما ترکیب خطی ارائه شده در رابطه ۷-۵ همان $(\phi(T))^{p_j-1}g(T)(v_j)$ است و بنابراین مجموعه بردارهای ابتدایی مستقل خطی است. پس طبق قضیه ۴.۷، α_j مستقل خطی است و γ_iها مجزا هستند. در نتیجه α_j از p_jd بردار مستقل خطی واقع در $C_{v_j}(T)$، که بعد آن p_jd است تشکیل شده است. نتیجه می‌گیریم که α_j پایه‌ای برای $C_{v_j}(T)$ است. □

پس می‌توانیم به عنوان پایه‌ای برای $C_{v_j}(T)$، $B_{v_j}(T)$ رابا α_j عوض کنیم. برای هر j این کار را انجام می‌دهیم تا زیر مجموعه $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup ... \cup \alpha_k$ برای $K_\phi(T)$ به دست آید. حال ثابت می‌کنیم که این مجموعه، پایه مرتبی برای $K_\phi(T)$ است و بنابراین پایه متعارف جردنی برای U است.

لم ۲۱. α پایه متعارف جردنی برای U است.

برهان. چون $B_{v_1}(T) \cup B_{v_2}(T) \cup ... \cup B_{v_k}(T)$، پایه‌ای برای $K_\phi(T)$ است و چون $span(\alpha_i) = span(B_{v_i}(T)) = C_{v_i}(T)$، α طبق تمرین ۹ پایه‌ای برای $K_\phi(T)$ است. چون α اجتماعی از دورهای متشکل از بردارهای ویژه تعمیم یافته U است، نتیجه میگیریم که α یک پایه متعارف جردن می‌باشد. □

حال در موقعیتی قرار داریم که می‌توانیم نمودار نقطه‌ای نظیر $\phi(t)$ رابه نمودار نقطه‌ای U ربط دهیم، ضمن این که توجه داریم که در حالت اول، بایک فرم متعارف گویا و در حالت دوم با یک فرم متعارف جردن سروکار داریم. برای ساده شده بحث، نمودار اول را D_1 ونموداردوم را D_2 می‌نامیم. برای هر j، حضور پایه $T-$دوری $B_{v_j}(T)$، منجربه p_j نقطه در D_1 میگردد. طبق لم ۱، این پایه می تواند با اجتماع α_j ی d دور از بردارهای ویژه تعمیم یافته U جایگزین گردد. در عمل، α_j، d ستون در D_2 مشخص می‌کند که هر یک p_j نقطه دارد. پس هریک از ستون‌های D_1، d ستون در D_2 با همان طول مشخص می‌کنند وتمام ستون‌های D_2 به همین صورت به دست می‌آیند. به عبارت دیگر هر یک سطرD_2، d برابر سطر متناظر در D_1 نقطه دارد. چون قضیه ۱۰.۷، تعداد نقاط هریک از سطرهای D_2 را در اختیارمان میگذارد، می‌توانیم برای بدست آوردن تعداد نقاط واقع در یک سطر D_1 فرمولی را که در این قضیه برای تعداد نقاط واقع در سطر متناظر در D_2 داده شده است، بر d تقسیم کنیم. به این ترتیب، نتیجه زیر بدست می‌آید.

قضیه ۲۳.۷. فرض کنید T عملگری خطی بر یک فضای برداری متناهی البُعد V و $\phi(t)$ مقسوم علیه تحویل ناپذیر تکینی از چند جمله‌ای مشخص T با درجه d باشد و r_i نشان دهنده تعداد نقاط واقع در سطر r ام نمودار نقطه‌ای $\phi(t)$ نسبت به یک پایه متعارف گویای T باشد. در این صورت:

الف) $r_1 = \frac{1}{d}[\dim(V) - \text{rank}(\phi(T))]$.

ب) برای هر $i > 1$ $r_i = \frac{1}{d}[\text{rank}((\phi(T))^{i-1}) - \text{rank}((\phi(T))^i)]$.

پس نمودارهای نقطه‌ای فرم متعارف گویای یک عملگر را خود آن عملگر کاملا مشخص می‌شود. چون فرم متعارف گویا را نمودارهای نقطه‌ای آن کاملا معین می‌کنند، داریم:

نتیجه ۱. تحت قرادادهایی که قبلا ذکر شد. فرم متعارف گویای یک عملگر خطی، صرف نظر از ترتیب عوامل تکین تحویل ناپذیر چند جمله‌ای مشخص، یکتاست.

چون فرم متعارف گویای یک عملگر خطی یکتاست، چند جمله‌ای‌های نظیرماتریس‌های همدمی که این فرم را مشخص می‌کنند نیز یکتا هستند. این چند جمله‌ای ها، که توان‌هایی از مقسوم علیه‌های تکین تحویل ناپذیر هستند، **مقسوم علیه‌های مقدماتی** عملگر خطی نامیده میشوند. چون یک ماتریس همدم می‌تواند بیش از یک بار در فرم متعارف گویا ظاهر شود، همین مطلب در مورد مقسوم علیه‌های مقدماتی نیز صحیح است. تعداد چنین تکرارهایی را چند گانگی مقسوم علیه‌های مقدماتی می‌نامند.

برعکس، مقسوم علیه‌های مقدماتی وچند گانگی آنها، ماتریس‌های همدم و در نتیجه فرم متعارف گویای عملگر خطی را مشخص می‌کنند.

مثال ۲. مجموعه زیر را:

$$\beta = \{e^x cos2x . e^x sin2x, xe^x cos2x, xe^x sin2x\}$$

به عنوان زیر مجموعه‌ای از $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$، یعنی مجموعه همه توابع با مقدار حقیقی که روی $\mathbb{R}$ تعریف شده اند در نظر بگیرید و فرض کنید $V = span(\beta)$. در این صورت V زیر فضایی چهار بعدی از $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ است و β پایه مرتبی برای V. فرض کنید D عملگر خطی‌ای بر V باشد که چنین تعریف می‌شود: $D(y) = y'$ که y' مشتق y است. فرض کنید $A = [D]_\beta$. در این صورت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

و چند جمله‌ای مشخص D و در نتیجه A، عبارت است از:

$$f(t) = (t^2 - 2t + 5)^2$$

پس $\phi(t) = t^2 - 2t + 5$ تنها مقسوم علیه تکین تحویل ناپذیر $f(t)$ است. چون درجه $\phi(t)$، ۲می باشد و V چهاربعدی است، نمودار نقطه‌ای $\phi(t)$ فقط از دو نقطه تشکیل شده است. بنابراین نمودار نقطه‌ای از روی r_1، یعنی تعداد نقاط واقع

در سطر اول مشخص می‌شود. چون رتبه، تحت نمایس ماتریسی حفظ می‌شود، در فرمول قضیه ۲۴.۷ به جای D از A استفاده می‌کنیم. چون:

$$\phi(A)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

داریم:

$$r_1=\frac{1}{2}[4-\operatorname{rank}(\phi(A))]=\frac{1}{2}[4-2]=1$$

نتیجه می‌گیریم که نقطه دوم، در ردیف دوم قرار دارد ونمودار نقطه‌ای به شکل زیر است:

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}$$

بنابراین، V یک فضای $D-$دوری است که یک تابع که $D-$پوچ سازش $(\phi(t))^2$ است، به تنهایی آن را تولید می‌کند. به علاوه، فرم متعارف گویای D، از ماتریس همدم $(\phi(t))^2=t^4-4t^3+14t^2-20t+25$ به دست می‌آید، که عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -25 \\ 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین$(\phi(t))^2$، تنها مقسوم علیه مقدماتی D است و چند گانگی آن ۱می باشد. برای یافتن مولد دور، کافی است تابع gای در V بیابیم که به ازای آن، $\phi(D)(g)\neq 0$ چون $\phi(A)(e_3)\neq 0$ نتیجه می‌شود که $\phi(D)(xe^x cos2x)\neq 0$ و بنابراین $g(x)=xe^e cos2x$ را می‌توان به عنوان مولد دور انتخاب کرد. پس:

$$B_g(D)=\{xe^x cos2x, D(xe^x cos2x), D^2(xe^x cos2x), D^3(xe^x cos2x)\}$$

پایه متعارف گویایی برای D است. توجه کنید که تابع h را چنین تعریف می‌شود: $h(x)=xe^x sin2x$ می‌توان به جای g انتخاب کرد و این نشان می‌دهد که پایه متعارف گویا یکتا نیست. $\square$

استفاده از اصطلاحات فرم متعارف گویای یک ماتریس ومقسوم علیه‌های مقدماتی آن، که به صورت طبیعی تعریف می‌شوند، مفید واقع خواهد شد.

چند تعریف: فرض کنید $A\in M_{n\times n}(F)$. منظور از **فرم متعارف گویای** A، فرم متعارف گویای L_A است. به صورتی

مشابه **مقسوم علیه‌های مقدماتی** A و **چند گانگی آنها** همان مقسوم علیه‌های مقدماتی L_A و چند گانگی آنها نسبت به L_A تعریف می‌شوند.

فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$، C فرم متعارف گویایی برای A و β پایه متعارف گویایی نظیر C برای L_A باشد. در این صورت $C = [L_A]_\beta$ و بنابراین A متشابه با C است. در واقع اگر Q ماتریسی باشد که ستون‌های آن اعضای β به همان ترتیبی که در β آمده اند باشند $C = Q^{-1}AQ$.

مثال ۳. برای ماتریس Aای که در زیر می‌آید، C، یعنی فرم متعارف گویای A را بیابید و ماتریس Q را طوری پیدا کنید که $Q^{-1}AQ = C$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

چند جمله‌ای مشخص A، عبارت است از:

$$f(t) = det(A - tI) = -(t^2 + 2)^2(t - 2)$$

و بنابراین $\phi_1(t) = t^2 + 2$ و $\phi_2(t) = t - 2$، مقسوم علیه‌های تحویل ناپذیر تکین $f(t)$ هستند. طبق قضیه ۲۳.۷، $\dim(K_{\phi_1}(T)) = 4$ و $\dim(K_{\phi_2}(T)) = 1$. چون درجه $\phi_1(t)$، ۲ است، تعداد کل نقاط واقع در نمودار نقطه‌ای $\phi_1(t)$، $4/2 = 2$ است و تعداد نقاط واقع در سطر اول r_1، عبارت است از:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2}[\dim(\mathbb{R}^5) - \operatorname{rank}(\phi_1(A))] \\ &= \frac{1}{2}[5 - \operatorname{rank}(A^2 + 2I)] \\ &= \frac{1}{2} = [5 - 1] = 2 \end{aligned}$$

بنابراین نمودار نقطه‌ای $\phi_1(t)$ عبارت است از:

$$\bullet \quad \bullet$$

و هر یک از ستون‌های نمودار نقطه ای، ماتریس همدم $\phi_1(t) = t^2 + 2$ یعنی:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

را در فرم متعارف گویا، یعنی C ایجاد می‌کند. پس $\phi_1(t)$ مقسوم علیه‌ای مقدماتی با چند گانگی ۲ است. چون $\dim(K_{\phi_2}(T)) = 1$، نمودار نقطه‌ای $\phi_2(t) = t - 2$، فقط از یک نقطه تشکیل شده است که ماتریس $[2]_{1\times 1}$ را ایجاد می‌کند. بنابراین، $\phi_2(t)$ مقسوم علیهی مقدماتی با چند گانگی ۱ است. بنابراین فرم متعارف گویای C عبارت است از:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

از نمودار نقطه‌ای $\phi_1(t)$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر β پایه متعارف گویایی برای L_A باشد، $\beta \cap K_{\phi_1}(T)$ متشکل از دو پایه دوری $B_{v_1}(L_A), B_{v_2}(L_A)$ خواهد بود که v_1 و v_2 هر دو پوچ سازشان $\phi_1(t)$ است. نتیجه می‌شود که هر دوی v_1 و v_2 در $N(\phi(L_A))$ قرار دارند. می‌توان نشان داد که:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

پایه مرتبی برای $N(\phi(L_A))$ است. با قرار دادن :

$$v_1 = e_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

می بینیم که:

$$Av_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

حال $v_2 \in K_{\phi_1}(T) = N(\phi(L_A))$ را طوری انتخاب کنید که از $B_{v_1}(L_A) = \{v_1, Av_1\}$ مستقل خطی باشد. به عنوان مثال:

$$v_2 = e_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

در این صورت می‌توان دید که:

$$Av_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$$

و $B_{v_1}(L_A) \cup B_{v_2}(L_A)$ پایه‌ای برای $K_{\phi_1}(T)$ است.

چون نمودار نقطه‌ای $\phi_2(t) = t - 2$ فقط از یک نقطه تشکیل شده است، هر بردار ناصفری در $K_{\phi_2}(T)$ بردار ویژه‌ای برای A متناظر با مقدار ویژه $\lambda = 2$ است. به عنوان مثال:

$$v_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

را انتخاب کنید.

طبق قضیه ۲۳.۷، $\beta = \{v_۱, Av_۱, v_۲, Av_۲, v_۳\}$ پایه متعارف گویایی برای L_A است. با قرار دادن:

$$Q = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

داریم: $Q^{-۱}AQ = C$. □

مثال ۴. برای ماتریس Aای که در زیر می‌آید، C، یعنی فرم متعارف گویای A را بیابید و ماتریس Q را طوری پیدا کنید که $Q^{-۱}AQ = C$.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

چون چند جمله‌ای مشخص A، $f(t) = (t-۲)^۴$ است، تنها مقسوم علیه تکین تحویل ناپذیر$f(t)$، $\phi(t) = t - ۲$ است و بنابراین $K_\phi(T) = \mathbb{R}^۴$. در این حالت درجه $\phi(t)$ ، ۱ است و بنابراین با به کار گیری قضیه ۲۴.۴ به منظور محاسبه نمودار نقطه‌ای $\phi(t)$، نتایج زیر بدست می‌آیند:

$$r_۱ = ۴ - \mathrm{rank}(\phi(A)) = ۴ - ۲ = ۲$$
$$r_۲ = \mathrm{rank}(\phi(A)) - \mathrm{rank}((\phi(A))^۲) = ۲ - ۱ = ۱$$

و

$$r_۳ = \mathrm{rank}()\phi(A))^۲) - \mathrm{rank}((\phi(A))^۳) = ۱ - ۰ = ۱$$

که r_i تعداد نقاط واقع در سطر i ام نمودار نقطه‌ای است. چون به تعداد $\dim(\mathbb{R}^۴) = ۴$ نقطه در نمودار نقطه‌ای وجود دارد، می‌توانیم محاسبات فوق را با یافتن $r_۳$ قطع کنیم. پس نمودار نقطه‌ای A:

$$\begin{array}{ll} \bullet & \bullet \\ \bullet & \\ \bullet & \end{array}$$

می باشد. چون ماتریس همدم $(t-۲)^۳$:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۸ \\ ۱ & ۰ & -۱۲ \\ ۰ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$$

است و ماتریس همدم $(t-۲)$:

$$[۲]$$

می باشد، فرم متعارف گویای A چنین است:

حال یک پایه متعارف گویا برای L_A می‌یابیم. نمودار نقطه‌ای بالا مشخص می‌کند که دو بردار$v_۱$، $v_۲$ در $\mathbb{R}^۴$ به ترتیب با پوچ سازهای $(\phi(t))^۳$ و $\phi(t)$ چنان موجود هستند که:

$$\beta_۱ = B_{v_۱}(L_A) \cup B_{v_۲}(L_A) = \{v_۱, Av_۱, A^۲v_۱, v_۲\}$$

پایه متعارف گویایی بر L_A است. علاوه براین، $v_۱ \notin N((L_A-۲I)^۲)$ و $v_۲ \in N(L_A-۲I)$. به راحتی می‌توان نشان داد که:

$$N(L_A - ۲I) = span\{e_۱, e_۴\}$$

و

$$N((L_A - ۲I)^۲) = span\{e_۱, e_۲, e_۴\}$$

بردار استاندارد $e_۳$ شرایط لازم برای $v_۱$ را دارد، پس قرار می‌دهیم $v_۱ = e_۳$، نتیجه می‌شود که:

$$Av_۱ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}, \qquad A^۲v_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \\ ۴ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

اکنون بردار $v_۲ \in N(L_A-۲I)$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که در فضا ی پدید آمده از $B_{v_۱}(L_A)$ واقع نباشد. واضح است که $v_۲ = e_۴$ این شرایط را ارضا می‌کند. پس:

$$\left\{ \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \\ ۴ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

پایه متعارف گویایی برای L_A است.

در نهایت فرض کنید Q ماتریسی باشد که ستون هایش اعضای β به همان ترتیبی که در β آمده اند باشند:

$$Q = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۴ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

در این صورت $Q^{-1}AQ = C$. □

مجموع‌های مستقیم*

قضیه زیر، نتیجه ساده‌ای از قضیه ۲۳.۷ است.

قضیه ۲۴.۷ (قضیه تجزیه اولیه). فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری $n-$ بعدی V، با چند جمله‌ای مشخص زیر باشد:

$$f(t) = (-1)^n(\phi_1(t))^{n_1}(\phi_2(t))^{n_2}...(\phi_k(t))^{n_k}$$

که $\phi_i(t)$ها ($1 \leq i \leq k$)، چند جمله‌ای‌های تکین تحویل ناپذیر متمایزی هستند و n_iها اعداد صحیح مثبت. در این صورت:

الف) $V = K_{\phi_1}(T) \oplus K_{\phi_2}(T) \oplus ... \oplus K_{\phi_k}(T)$.

ب) برای هر i، فرض کنید T_i تحدید T به $K_{\phi_i}(T)$ باشد و C_i فرم متعارف گویای T_i باشد. در این صورت:

$$C_1 \oplus C_2 \oplus ... \oplus C_k$$

فرم متعارف گویایی برای T است.

برهان. :به عهده خواننده است. □

قضیه زیر، نتیجه ساده‌ای از قضیه ۱۷.۷است.

قضیه ۲۵.۷. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد. در این صورت، V مجموع مستقیم زیر فضاهای $T-$ دوری $C_{v_i}(T)$ است، که هر v_i به ازای مقسوم علیه تکین تحویل ناپذیر از چند جمله‌ای مشخص T چون $\phi(t)$، در $K_\phi(T)$ قرار دارد.

برهان. به عهده خواننده است. □

تمرینات

۱. تعیین کنید کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف) هر پایه متعارف گویایی برای عملگر خطی T، اجتماع پایه‌هایی $T-$دوری است.

ب) اگر پایه β اجتماع پایه‌هایی $T-$دوری از عملگر خطی T باشد، β پایه متعارف گویایی برای T است.

ج) ماتریس‌های مربعی وجود دارند که فرم متعارف گویا ندارند.

د) هر ماتریس مربعی با فرم متعارف گویایش متشابه است.

ه) برای هر عملگر خطی T بر یک فضای برداری متناهی البُعد، هر عامل تحویل ناپذیر چند جمله‌ای مشخص T، چند جمله‌ای مینیمال آن را عاد می‌کند.

و) فرض کنید $\phi(t)$، مقسوم علیه تکین تحویل ناپذیری از چند جمله‌ای مشخص T باشد. نقاط واقع در نموداری که برای محاسبه فرم متعارف گویای تحدید T به $K_\phi(T)$ بکار می‌روند، در تناظر یک به یک با بردارهای هر پایه برای $K_\phi(T)$ قرار دارند.

ز) هرگاه ماتریسی فرم متعارف جردن داشته باشد، فرم متعارف جردن وفرم متعارف گویایش متشابه هستند.

۲. برای هریک از ماتریس‌های $A \in M_{n\times n}(F)$ در زیر، ماتریس‌های $Q \in M_{n\times n}(F)$ و C را چنان بیابید که C فرم متعارف گویای A باشد و $Q^{-1}AQ = C$.

الف) $$F=\mathbb{R}, A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ب) $$F=\mathbb{R}, A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ج) $$F=\mathbb{C}, A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

د) $$F=\mathbb{R}, A=\begin{bmatrix} 0 & -7 & 14 & -6 \\ 1 & -4 & 6 & -3 \\ 0 & -4 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

ه) $F = \mathbb{R}, A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 12 & -7 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 8 & -5 \end{bmatrix}$

۳. فرض کنید T عملگری خطی بر $P_3(\mathbb{R})$ باشد که این گونه تعریف می‌شود:
$T(f(x)) = f(0)x - f'(1)$

مقسوم علیه‌های مقدماتی، فرم متعارف گویای C و پایه متعارف گویای βای برای T بیابید.

۴. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد که چند جمله‌ای مینیمال آن به ازای عدد صحیح مثبت nای $(\phi(t))^m$ است.

الف) ثابت کنید که $R(\phi(T)) \subseteq N((\phi(t))^{m-1})$.

ب) مثالی بیاورید که نشان دهد فضاهای مذکور در قسمت الف، لزوما مساوی نیستند.

ج) ثابت کنید که چند جمله‌ای مینیمال تحدید T به $R(\phi(T))$، $(\phi(t))^{m-1}$ است.

۵. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد باشد. ثابت کنید که فرم متعارف گویای T، یک ماتریس قطری است اگر و تنها اگر T قطری پذیر باشد.

۶. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد که چند جمله‌ای مشخص آن $f(t) = (-1)^n\phi_1(t)\phi_2(t)$ است که $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ چند جمله‌ای‌های تکین تحویل ناپذیر متمایزی هستند و $n = \dim(V)$.

الف) ثابت کنید $v_1, v_2 \in V$ چنان موجود هستند که $T-$پوچ ساز v_1، $\phi_1(t)$ و $T-$ پوچ ساز v_2، $\phi_2(t)$ است و $B_{v_1}(T) \cup B_{v_2}(T)$ پایه‌ای برای V است.

ب) ثابت کنید که بردار v_3ای با $T-$پوچ ساز $\phi_1(t)\phi_2(t)$ چنان موجود است که $B_{v_3}(T)$ پایه‌ای برای V است.

ج) تفاوت میان نمایش ماتریسی T نسبت به $B_{v_1}(T) \cup B_{v_2}(T)$ و نمایش ماتریسی T نسبت به $B_{v_3}(T)$ را توضیح دهید.

پس برای تضمین یکتایی فرم متعارف گویا، لازم میدانیم که مولدهای پایه‌های $T-$دوری که یک پایه متعارف گویا را تشکیل می‌دهد، $T-$ پوچ سازهایشان برابر با توان‌هایی از عوامل تکین تحویل ناپذیر چند جمله‌ای مشخص T باشند.

۷. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد باشد که چند جمله‌ای مینیمال آن:
$$f(t) = (\phi_1(t))^{m_1}(\phi_2(t))^{m_2}...(\phi_k(t))^{m_k}$$

است، که در اینجا $\phi_i(t)$ها عوامل تحویل ناپذیر تکین متمایز $f(t)$ هستند. ثابت کنید که برای هر i، m_i تعداد درایه‌های واقع در ستون اول نمودار نقطه‌ای $\phi_i(t)$ است.

۸. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد V باشد. ثابت کنید که برای هر چند جمله‌ای تحویل ناپذیر $\phi(t)$، اگر $\phi(T)$ یک به یک نباشد، $\phi(t)$ چند جمله‌ای مشخص T را عاد می‌کند.

راهنمایی: تمرین ۱۵ از بخش ۳-۷ را به کار برید.

۹. فرض کنید T یک فضای برداری باشدو $\beta_1, \beta_2, ...\beta_k$ زیر مجموعه‌های مجزایی از V باشد که اجتماع آنها پایه‌ای برای V است. حال فرض کنید $\gamma_1, \gamma_2, ...\gamma_k$ چنان زیر مجموعه‌های مستقل خطی‌ای از V باشند که برای هر i، $span(\gamma_1) = span(\beta_i)$، ثابت کنید $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup ... \cup \gamma_k$ هم پایه‌ای برای $\gamma_1, \gamma_2, ...\gamma_k$ است.

۱۰. فرض کنید T عملگری خطی بر فضای برداری متناهی البُعد باشد و نیز فرض کنید که $\phi(t)$ عامل تحویل ناپذیر تکینی از چند جمله‌ای مشخص T باشد. ثابت کنید که اگر $\phi(t)$، $T-$پوچ ساز بردارهای x و y باشد، آنگاه $x \in C_y(T)$ اگر و تنها اگر $C_x(T) = C_y(T)$.

تمرین‌های ۱۱ و ۱۲با مجموعهای مستقیم ارتباط دارند.

۱۱. قضیه ۲۵.۷ را ثابت کنید.

۱۲. قضیه ۲۶.۷ را ثابت کنید.

پیوست آ

مجموعه‌ها

منظور از یک مجموعه، گردایه‌ای از اشیاء است که به آنها عناصر یا عضوهای مجموعه گفته می‌شود. اگر x عضوی از مجموعه A باشد، می‌نویسیم $x \in A$، و اگر x عضوی از A نباشد می‌نویسیم $x \notin A$، برای مثال، اگر $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح باشد، آنگاه $۳ \in \mathbb{Z}, \frac{۱}{۲} \notin \mathbb{Z}$.

مجموعه‌ای که غالباً در مثال‌ها عنوان می‌شود، مجموعه اعداد حقیقی است که در این کتاب آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم.

دو مجموعه A و B رابرابر گویند و می‌نویسند $A = B$، هر گاه اعضای این دو مجموعه دقیقاً یکسان باشند. مجموعه‌ها می‌توانند به یکی از دو صورت زیر ارائه شوند:

۱. با نوشتن فهرست وار اعضا بین دوآکولاد مجموعه$\{\}$.

۲. باتوصیف اعضا برحسب برخی از خصوصیات اختصاصی آنها.

برای مثال، مجموعه ای را که شامل اعضای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ باشد می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

یا

$$\{x | \text{یک عدد صحیح مثبت کوچکتر از ۵ است } x\}$$

توجه داشته باشید که ترتیب نوشتن اعضای مجموعه بی اهمیت است. بنابراین:

$$\{۱, ۲, ۳, ۴\} = \{۱, ۳, ۲, ۴\} = \{۱, ۳, ۱, ۴, ۲\}$$

مثال ۵. فرض کنید A مجموعه اعداد حقیقی بین۱ و ۲ باشد. در این صورت A را می‌توان به این صورت نوشت:

$$A = \{x \in \mathbb{R} | ۱ < x < ۲\}$$

□

می‌گوئیم مجموعه B **زیر مجموعه** A است و می‌نویسیم $B \subseteq A$ یا $A \supseteq B$، اگر هر عضو B عضوی از A باشد. برای مثال $\{۱, ۲, ۶\} \subseteq \{۲, ۸, ۷, ۶, ۱\}$.

اگر $B \subseteq A$ و $B \neq A$، آنگاه B یک زیر **مجموعه محض** A خوانده می‌شود. ملاحظه می‌کنید که $A = B$ اگر و تنها اگر $B \subseteq A$ و $A \subseteq B$. از این موضوع غالباً در اثبات تساوی دو مجموعه استفاده می‌شود.

مجموعه تهی- که با $\varnothing$ نشان داده می‌شود- مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد. مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه‌ای است.

به دو روش اساسی می‌توان دو مجموعه را به منظور ایجاد مجموعه‌ای جدید با هم ترکیب کرد. اجتماع دو مجموعه A, B که با $A \cup B$ نشان داده می‌شود-مجموعه عناصری است که یا عضو A هستند ویا عضو B و یا عضو هردو؛ یعنی:

$$A \cup B = \{x : x \in B \quad \text{یا} \quad x \in B\}$$

اشتراک دو مجموعه A, B- که با $A \cap B$ نشان داده می‌شود-مجموعه عناصری است که هم عضو A هستند و هم عضو B؛ یعنی:

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{و} \quad x \in B\}$$

دو مجموعه را مجزا گویند هرگاه اشتراک آنها تهی باشد.

مثال ۶. فرض کنید $A = \{۱, ۳, ۵\}$ و $B = \{۱, ۵, ۷, ۸\}$. در این صورت:

$$A \cup B = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۸\}, \qquad A \cap B = \{۱, ۵\}$$

به همین ترتیب اگر $X = \{۱, ۲, ۸\}$ و $Y = \{۳, ۴, ۵\}$، آنگاه:

$$X \cap Y = \varnothing, \qquad X \cup Y = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۸\}$$

لذا X و Y دو مجموعه مجزا هستند. □

اجتماع و اشتراک بیش از دو مجموعه را می‌توان به صورت مشابه تعریف کرد. در واقع اگر $A_۱, A_۲, ..., A_n$ مجموعه باشند، اجتماع واشتراک این مجموعه‌ها به ترتیب چنین تعریف می‌شوند:

$$\bigcup_{i=۱}^{n} A_i = \{x : x \in A_i \text{ به طوریکه } ، i = ۱, ۲, ..., n \text{ وجود دارد } \}$$

و

$$\bigcap_{i=۱}^{n} A_i = \{x : x \in A_i \text{ ،} i = ۱, ۲, ..., n \text{ برای هر } \}$$

به همین ترتیب اگر Λ مجموعه‌ای از اندیس‌ها باشد و $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌ها باشد، اجتماع و اشتراک این مجموعه‌ها، به ترتیب، چنین تعریف می‌شود:

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha \text{، به طوریکه } \alpha \in \Lambda \text{ وجود دارد }\}$$

و

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha \text{ ،} \alpha \in \Lambda \text{ برای هر }\}$$

مثال ۷. فرض کنید $\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > ۱\}$ ، و فرض کنید برای هر $\alpha \in \Lambda$

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \frac{-۱}{\alpha} \leq x \leq ۱ + \alpha\}$$

در این صورت

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : -۱ < x\}, \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : ۰ \leq x \leq ۲\}$$

□

منظور از یک رابطه روی A، قاعده‌ای است که با استفاده از آن مشخص می‌شود که به ازای دو عضو x, y از A، آیا فلان رابطه بین x, y برقرار هست یا خیر. دقیق تر بگویم، منظور از یک رابطه روی A، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب از اعضای A، مثل S است به گونه‌ای که $(x, y) \in S$، اگر و تنها اگر x فلان رابطه خاص را با y داشته باشد. به عنوان مثال، روی مجموعه اعداد حقیقی، «برابراست با»، «کوچکتراست از»، «بزرگتراست از» رابطه‌های شناخته شده‌ای هستند. معمولاً وقتی که S، رابطه‌ای روی مجموعه A باشد، به جای $(x, y) \in S$ می‌نویسیم $x \sim y$.

یک رابطه را روی S، یک رابطه هم ارزی می‌نامیم، هر گاه سه شرط زیر برقرار باشند:

۱. برای هر$x \in A$، $x \sim x$(بازتابی بودن)

۲. اگر $x \sim y$، آنگاه $y \sim x$(متقارن بودن)

۳. اگر $x \sim y, y \sim z$، آنگاه $x \sim z$(متعدی بودن)

به عنوان مثال، اگر $x \sim y$ را به این معنا تعریف کنیم که $x - y$، برعدد صحیح ثابت n بخش پذیر است، در آن صورت $\sim$، یک رابطه هم ارزی روی مجموعه اعداد صحیح خواهد بود.

پیوست ب

توابع

هرگاه A و B دو مجموعه باشند، منظور از یک تابع f از A به B، که به صورت $f : A \to B$ نوشته می‌شود، قاعده‌ای است که به هر عضو x در A عضو منحصر به فردی از B را که با $f(x)$ نشان داده می‌شود، نسبت می‌دهد. $f(x)$ را **تصویر** x (تحت f) می‌نامند و x، یک **تصویر وارون** $f(x)$(تحت f)نامیده می‌شوند. هر گاه $f : A \to B$، A را دامنه f، B را هم دامنه f و مجموعه $\{f(x) : x \in A\}$ را برد f می‌نامند. توجه کنید که برد f، زیر مجموعه‌ای از B است. هرگاه $S \subseteq A$، منظورمان از $f(S)$، مجموعه $\{f(x) : x \in S\}$ متشکل از تصاویر همه اعضای S است. به همین ترتیب، هرگاه $T \subseteq B$، منظورمان از $f^{-1}(T)$، مجموعه $\{x \in A : f(x) \in T\}$،، متشکل از همه تصاویر وارون اعضای T می‌باشد. در نهایت دو تابع $f : A \to B$ و $g : A \to B$ را مساوی گویند و می‌نویسند $f = g$، هرگاه که برای هر $x \in A$، $f(x) = g(x)$.

مثال ۸. فرض کنید $A = [-10, 10]$ و فرض کنید $f : A \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که به هر عضو x از A، عضو $x^2 + 1$ را از $\mathbb{R}$ نسبت می‌دهد، یعنی f به صورت $f(x) = x^2 + 1$ تعریف می‌شود. در این صورت، دامنه f، A است. $\mathbb{R}$ هم دامنه f و $[1, 101]$ برد f است. چون $f(2) = 5$، تصویر ۲، ۵ است و ۲ یک تصویر وارون ۵ می‌باشد. توجه کنید که ۲-، تصویر وارون دیگری برای ۵است. به علاوه، اگر $S = [1, 2]$، و $T = [82, 101]$، آنگاه $f(S) = [2, 5]$ و $f^{-1}(T) = [-10, -9] \cup [9, 10]$. $\square$

همانطور که مثال ۱ نشان می‌دهد، تصویر وارون یک عضو از برد لزوماً منحصر به فرد نیست. تابعی که هر عضو بردش تصویر وارون یکتایی داشته باشد، یک به یک خوانده می‌شود، یعنی $f : A \to B$، یک به یک است، هر گاه از $f(x) = f(y)$ نتیجه شود که $x = y$ یا به عبارت دیگر $x \neq y$ نتیجه بدهد که $f(x) \neq f(y)$.

اگر $f: A \to B$ تابعی با برد B باشد، یعنی $f(A) = B$، آنگاه f پوشا نامیده می‌شود (و می‌گوییم که f، تابعی از A به روی B است). پس B پوشاست اگر و تنها اگر برد f با هم دامنه f برابر باشد.

فرض کنید $f: A \to B$ یک تابع باشد و $S \subseteq A$. در این صورت تابع $f_S: S \to B$ را که تحدید f به S خوانده می‌شود، می‌توان به صورت $f_S(x) = f(x)$ برای هر $x \in S$ تعریف کرد.

مثال زیر مفاهیم فوق را شرح می‌دهد.

مثال ۹. فرض کنید $f: [-۱, ۱] \to [۰, ۱]$ چنین تعریف می‌شود: $f(x) = x^۲$. این تابع پوشاست ولی یک به یک نیست، چرا که $f(-۱) = f(۱) = ۱$. توجه کنید که اگر $S = [۰, ۱]$، آنگاه f_S هم پوشاست و هم یک به یک. در نهایت اگر $T = [\frac{۱}{۲}, ۱]$ آنگاه f_T یک به یک است ولی پوشا نیست. □

فرض کنید A، B و C سه مجموعه و $f: A \to B$ و $g: B \to C$ دو تابع باشند. با اثر دادن g به دنبال f، تابع $g \circ f: A \to C$ را بدست می‌آوریم که ترکیب f و g نامیده می‌شود. بنابراین برای هر $x \in A$، $g \circ f(x) = g(f(x))$.

به عنوان مثال، فرض کنید که $A = B = C = \mathbb{R}$، $f(x) = sin(x)$ و $g(x) = x^۲ + ۳$. در این صورت:

$g \circ f(x) = g(f(x)) = sin^۲(x) + ۳$، در حالی که $f \circ g = f(g(x)) = sin(x^۲ + ۳)$. در نتیجه $g \circ f \neq f \circ g$.

با این حال، ترکیب توابع شرکت پذیر است، یعنی اگر $h: C \to D$ تابع دیگری باشد آنگاه $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

تابع $f: A \to B$ را وارون پذیر گویند هرگاه تابع $g: B \to A$ موجود باشد به طوری که برای هر $y \in B$، $f \circ g(y) = y$ و برای هر $x \in A$، $g \circ f(x) = x$. اگر چنین تابع gای وجود داشته باشد، یکتا خواهد بود و آن را وارون f می‌نامیم. وارون f را (وقتی که وجود داشته باشد) با $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم. می‌توان نشان داد که f وارون پذیر است اگر و تنها اگر f یک به یک و پوشا باشد.

مثال ۱۰. تابع $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ که به صورت $f(x) = ۳x + ۱$ تعریف می‌شود یک به یک و پوشاست، در نتیجه f وارون پذیر است. وارون f، تابع $f^{-۱}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ است که به صورت $f^{-۱}(x) = (x - ۱)/۳$ تعریف می‌شود. □

مطالب زیر در مورد توابع وارون پذیر، به راحتی قابل اثبات هستند.

۱. اگر $f: A \to B$ وارون پذیر باشد، $f^{-۱}$ وارون پذیر خواهد بود و $(f^{-۱})^{-۱} = f$.

۲. اگر $f: A \to B$ و $g: B \to C$ وارون پذیر باشند آنگاه $g \circ f$ نیز وارون پذیر است و $(g \circ f)^{-۱} = f^{-۱} \circ g^{-۱}$.

پیوست پ

میدان ها

مجموعه اعداد حقیقی، نمونه‌ای از یک ساختار جبری است که میدان نام دارد. اساساً، یک میدان مجموعه‌ای است که در آن چهار عمل اصلی (به نام‌های جمع، ضرب، تفریق و تقسیم) را می‌توان طوری تعریف کرد که جمع، ضرب، تفاضل و حاصل تقسیم هر دو عضو مجموعه مگر در حالت تقسیم بر صفر، عضوی از همان مجموعه باشد. دقیق تر بگوییم، یک میدان به صورت زیر تعریف می‌شود.

چند تعریف: منظور از یک **میدان** F، مجموعه‌ای است که در آن دو عمل $+$ و $.$ (که به ترتیب **جمع** و **ضرب** نامیده می‌شود) به گونه‌ای تعریف شده اند که به ازای هر جفت x و y از اعضای F، اعضای منحصر به فرد $x+y$ و xy در F وجود داشته باشند به گونه‌ای که شرایط زیر، برای هر سه عضو c و b و a از F، برقرار باشد.

$(F۱)$ $a+b=b+a$ و $a.b=b.a$

(تعویض پذیری جمع وضرب)

$(F۲)$ $(a+b)+c=a+(b+c)$ و $a.(b.c)=(a.b).c$

(شرکت پذیری جمع وضرب)

$(F۳)$ اعضای متمایز ۰و۱ در F وجود داشته باشند به گونه‌ای که

$$۱.a=a, \qquad ۰+a=a$$

(وجود اعضای همانی برای جمع وضرب)

$(F۴)$ به ازای هر عضو a از F و هر عضو ناصفر b از آن، اعضای c و d در F موجود باشند به گونه‌ای که

$$a + c = \circ, \qquad b.d = \text{۱}$$

(وجود وارون‌ها برای جمع وضرب)

$a.(b+c) = a.b + a.c$ (F۵)

(توزیع پذیری ضرب روی جمع)

عناصر $x + y$ و $x.y$، به ترتیب حاصل جمع و حاصل ضرب x و y نامیده می‌شوند. عضو۰(که **صفر** خوانده می‌شود) و ۱ (که **یک** خوانده می‌شود) که در (F۳) به آنها اشاره شد، به ترتیب اعضای همانی جمع و ضرب نامیده می‌شوند و اعضای c و d که در (F۴) به آنها اشاره شد، به ترتیب **وارون جمعی** a و **وارون ضربی** b نامیده می‌شوند.

مثال ۱۱. مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با تعاریف معمول برای جمع و ضرب یک میدان است. □

مثال ۱۲. مجموعه اعداد گویا با تعاریف معمول برای جمع و ضرب یک میدان است. □

مثال ۱۳. مجموعه اعداد حقیقی به شکل $a + b\sqrt{\text{۲}}$ که a و b اعدادی گویا هستند، همراه با جمع و ضرب $\mathbb{R}$، یک میدان است. □

مثال ۱۴. میدان $\mathbb{Z}_{\text{۲}}$، متشکل از دو عضو ۰و۱ و اعمال جمع وضربی است که با معادلات زیرتعریف می‌شود:

$\circ + \circ = \circ$، $\circ + \text{۱} = \text{۱} + \circ = \text{۱}$، $\text{۱} + \text{۱} = \circ$

$\circ.\circ = \circ$، $\text{۱}.\circ = \circ.\text{۱} = \circ$، $\text{۱}.\text{۱} = \text{۱}$ □

مثال ۱۵. مجموعه اعداد صحیح مثبت، ومجموعه تمام اعداد صحیح با تعاریف معمول جمع و ضرب میدان نیستند، چرا که در هیچ یک از این دو رابطه (F۴) صدق نمی‌کند. □

عناصر همانی و عناصر وارون که وجودشان در روابط (F۳) و (F۴) تضمین شد، یکتا هستند، این مطلب، نتیجه قضیه زیر است.

قضیه پ.۱. (قوانین حذف):فرض کنید a، b و c، اعضای دلخواهی از میدان F باشند.

الف) هرگاه $a + b = c + b$، آنگاه $a = c$.

ب) اگر $a.b = c.b$ و $b \neq \circ$، $a = c$.

برهان. الف) اثبات به عهده خواننده است.

ب) اگر $b \neq \circ$، رابطه (F۴) وجود عنصری مانند d را در F تضمین می‌کند به گونه‌ای که $b.d = \text{۱}$. دو طرف تساوی $a.b = c.b$ را در d ضرب کنید تا رابطه $a.b.d = c.b.d$ بدست آید. سمت چپ این تساوی را در نظر بگیرید. طبق روابط (F۲) و (F۳) داریم:

$$(a.b).d = a.(b.d) = a.\text{۱} = a$$

به همین ترتیب سمت راست تساوی برابر با c است، پس $a = c$. □

نتیجه: اعضای $\circ$ و ۱که در رابطه $(F۳)$ به آنها اشاره شد و اعضای c و d که در رابطه $(F۴)$ ذکر شدند، یکتا هستند.

برهان. فرض کنید $\circ' \in F$، به ازای هر $a \in F$ در رابطه $a = a + \circ'$ صدق کند. چون برای هر $a \in F$، $a = a + \circ$، برای هر $a \in F$ داریم: $a + \circ' = a = a + \circ$. پس طبق قضیه ج-۱، $\circ' = \circ$. برهان‌های سایر قسمت‌ها مشابه هستند. □

پس هر عضو b در یک میدان، یک وارون جمعی منحصر به فرد دارد و اگر $b \neq \circ$، وارون ضربی منحصر به فردی هم دارد. (در نتیجه قضیه ج-۲، نشان داده می‌شود که صفر وارون ضربی ندارد). وارون جمعی و وارون ضربی b، به ترتیب با $-b$ و $b^{-۱}$ نشان داده می‌شوند. توجه کنید که $-(-b) = b$ و $(b^{-۱})^{-۱} = b$.

تفریق و تقسیم را می‌توان با استفاده از وارون‌های جمعی و ضربی، بر حسب جمع و ضرب تعریف کرد در واقع، کم کردن b افزودن $-b$ است و تقسیم بر $b \neq \circ$، ضرب کردن در $b^{-۱}$ تعریف می‌شود، یعنی:

$$a - b = a + (-b) \quad \text{و} \quad a/b = a.b^{-۱}$$

تقسیم بر صفر تعریف نمی‌گردد، اما به غیر از این مورد استثنا، حاصل جمع، حاصل ضرب، تفاضل و حاصل تقسیم هر دو عضو یک میدان تعریف شده اند. بسیاری از خواص آشنای ضرب اعداد حقیقی، همان گونه که قضیه زیر نشان می‌دهد، در هر میدانی برقرار است.

قضیه پ.۲. : فرض کنید a و b، اعضای دلخواهی از یک میدان باشند در این صورت هر یک از موارد زیر درست است:

الف) $a.\circ = \circ$.

ب) $(-a).b = a.(-b) = -(a.b)$

ج) $(-a).(-b) = a.b$.

برهان. الف) چون $\circ = \circ + \circ$، رابطه $(F۵)$ نشان می‌دهد که:

$$a.\circ = a(\circ + \circ) = a.\circ + a.\circ$$

پس طبق قضیه ج-۱، $a.\circ = \circ$.

ب) طبق تعریف، $-(a.b)$ تنها عضوی از F با این خاصیت است که $a.b + [-(a.b)] = \circ$. پس برای اثبات $(-a).b = -(a.b)$، کافی است نشان دهیم $a.b + (-a).b = \circ$. اما $-a$ عضوی از F است که به ازای آن $a + (-a) = \circ$، بنابراین طبق رابطه $(F۵)$ و قسمت الف :

$$a.b + (-a).b = [a + (-a)].b = \circ.b = b.\circ = \circ$$

پس $(-a).b = -(a.b)$. به طرز مشابه می‌توان نشان داد که: $a.(-b) = -a.b$.

ج) با دو بار به کار گیری ب، در می‌یابیم که:

$$(-a).(-b) + -[a.(-b)] = -[-(a.b)] = a.b$$

□

نتیجه: عضو همانی جمعی یک میدان، وارون ضربی ندارد.

در یک میدان دلخواه F ممکن است مجموع ۱ + ... + ۱ + ۱ (تعداد ۱ها p است)، به ازای عدد صحیح pای برابر ۰ باشد. به عنوان مثال، در میدان $\mathbb{Z}_2$ (که در مثال ۴ تعریف شد)، ۰ = ۱ + ۱. در چنین حالتی کوچکترین عدد صحیح مثبت p که مجموع p تا ۱ برابر ۰ باشد، **مشخصه** F نامیده می‌شود، اگر چنین عدد صحیح مثبتی وجود نداشته باشد، F را دارای **مشخصه صفر** می گویند. در نتیجه مشخصه $\mathbb{Z}_2$، دو است و مشخصه $\mathbb{R}$، صفر است. ملاحظه کنید که اگر F میدانی با مشخصه $p \neq 0$ باشد آنگاه $x + x + ... + x$ (p تا x)، به ازای هر x برابر با صفر است. در میدانی که مشخصه غیر صفر داشته باشد (به خصوص مشخصه دو)، مسائل غیر طبیعی زیادی پدید می‌آیند. به همین دلیل برخی از نتایجی که در این کتاب در مورد فضاهای برداری بیان شده اند، مستلزم آن هستند که میدانی که فضای برداری روی آن تعریف شده است مشخصه اش صفر باشد (یا حداقل چیزی غیر از دو باشد).

در نهایت، توجه کنید که در سایر قسمت‌های این کتاب، حاصل ضرب دو عضو a و b از یک میدان با ab نشان داده می‌شود، نه با $a.b$.

پیوست ت

اعداد مختلط

برای مقاصد جبر، میدان اعداد حقیقی کافی نیست، چرا که چند جمله‌ای‌هایی با درجه غیر صفر و با ضرایب حقیقی موجودند که در میدان اعداد حقیقی ریشه ندارند (مثل معادله $x^۲ + ۱$). معمولاً مطلوب خواهد بود که میدانی داشته باشیم که هر چند جمله‌ای با درجه ناصفر که ضرایبش در آن میدان است، در آن میدان ریشه داشته باشد. می‌توان اعداد حقیقی را «بزرگتر کرد» تا چنین میدانی به دست آید.

چند تعریف: منظور از یک عدد مختلط، عبارتی است به شکل $z = a + bi$ که a و b دو عدد حقیقی هستند و به ترتیب قسمت **حقیقی** و قسمت **موهومی** z نامیده می‌شوند.

مجموع و حاصل ضرب دو عدد مختلط $z = a + bi$ و$w = c + id$ (که a، b، c و d اعداد حقیقی هستند،) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$z + w = (a + bi) + (c + id) = (a + c) + (b + d)i$$

و

$$zw = (a + bi)(c + id) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

مثال ۱۶. مجموع و حاصل ضرب $z = ۳ - ۵i$ و $w = ۹ + ۷i$، عبارتند از

$$z + w = (۳ - ۵i) + (۹ + ۷i) = (۳ + ۹) + [(-۵) + ۷]i = ۱۲ + ۲i$$

و

$$zw = (۳ - ۵i)(۹ + ۷i) = [۳ \cdot ۹ - (-۵) \cdot ۷] + [(-۵) + ۷]i = ۶۲ - ۲۴i$$

□

هر عدد حقیقی را می‌توان یک عدد مختلط در نظر گرفت، به این ترتیب که c را با عدد مختلط $c + \circ i$ نظیر کرد. ملاحظه کنید که این تناظر، مجموع و حاصل ضرب را حفظ می‌کند، یعنی:

$$(c+\circ i)+(d+\circ i)=(c+d)+\circ i \qquad \text{و} \qquad (c+\circ i)(d+\circ i)=cd+\circ i$$

هر عدد مختلط به شکل $bi = \circ + bi$، را که b یک عدد حقیقی ناصفر باشد، یک عدد **موهومی** می‌نامند. حاصل ضرب دو عدد موهومی یک عدد حقیقی است، چرا که:

$$(bi)(di)=(\circ+bi)(\circ+di)=(\circ-bd)+(b.\circ+\circ.d)i=-bd$$

از جمله برای $i = \circ + ۱i$، داریم:$i.i = -۱$.

توجه به این مطلب که $i^۲ = i.i = -۱$، راهی ساده برای به خاطر سپردن تعریف ضرب اعداد مختلط در اختیارمان می‌گذارد. کافی است دو عدد مختلط را همان گونه ضرب کنید که دو عبارت جبری را ضرب می‌نمایید و به جای $i^۲$، -۱ را قرار دهید. مثال ۲ این روش را شرح می‌دهد.

مثال ۱۷. حاصل ضرب $-۵ + ۲i$ و $۱ - ۳i$، برابر است با:

$$\begin{aligned}(-۵+۲i)(۱-۳i) &= -۵(۱-۳i)+۲i(۱-۳i)\\ &= -۵+۱۵i+۲i-۶i^۲\\ &= -۵+۱۷i-۶(-۱)\\ &= ۱+۱۷i\end{aligned}$$

□

عدد حقیقی ۰، در صورتی که به دید یک عدد مختلط به آن بنگریم، همانی جمعی اعداد مختلط است چرا که:

$$(a+bi)+\circ=(a+bi)+(\circ+\circ i)=(a+\circ)+(b+\circ)i=a+bi$$

به طور مشابه عدد حقیقی ۱، اگر به دید یک عدد مختلط به آن بنگریم، همانی ضربی مجموعه اعداد مختلط است چرا که:

$$(a+bi).۱=(a+bi)(۱+\circ.i)=(a/۱-b/\circ)+(b/\circ+a/\circ)i=a+bi$$

هر عدد مختلط $a + bi$، یک وارون جمعی دارد: $(-a) + (-b)i$. اما هر عدد مختلط غیر صفر، یک وارون ضربی نیز دارد. در واقع:

$$(a+bi)^{-۱}=\left(\frac{a}{a^۲+b^۲}\right)-\left(\frac{b}{a^۲+b^۲}\right)i$$

با توجه به مطالب فوق، نتیجه زیر چندان تعجب آور نیست.

قضیه ت.۱. : مجموعه اعداد مختلط همراه با اعمال جمع وضربی که در بالا تعریف شدند، یک میدان است.

برهان. :به عهده خواننده. $\square$

تعریف: مزدوج (مختلط) عدد مختلط $a+bi$، عدد مختلط $a-bi$ می‌باشد. مزدوج عدد مختلط z را با $\overline{z}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۸. مزدوج‌های $۴-۷i$, $-۳+۲i$ و ۶ عبارتند از

$$\overline{۴-۷i}=۴+۷i \qquad \overline{-۳+۲i}=-۳-۲i \quad \text{و} \quad \overline{۶}=۶+\bar{۰}.i=۶-۰.i=۶$$

$\square$

قضیه زیر، حاوی نکات مهمی در مورد مزدوج یک عدد مختلط است.

قضیه ت.۲. فرض کنید z و w دو عدد مختلط باشند. در این صورت:

الف) $\overline{\overline{z}}=z$.

ب) $\overline{(z+w)}=\overline{z}+\overline{w}$.

ج) $\overline{zw}=\overline{z}.\overline{w}$.

د) z عدد حقیقی است، اگر و تنها اگر $\overline{z}=z$.

برهان. : برهان قسمت‌های (الف) و (د) را به خواننده واگذار می‌کنیم.

ب) فرض کنید $z=a+bi$، و $w=c+di$، که $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ در این صورت:

$$\begin{aligned}\overline{(z+w)}&=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a+c)-(b+d)i\\&=(a-bi)+(c-di)=\overline{z}+\overline{w}\end{aligned}$$

ج) برای هر z و w به شکل فوق،

$$\begin{aligned}\overline{zw}&=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}\\&=(ac-bd)-(ad+bc)i=(a-bi)(c-di)=\overline{z}.\overline{w}\end{aligned}$$

□

برای هر عدد مختلط $z = a + bi$، $z\overline{z}$ حقیقی و نامنفی است، چرا که

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^۲ + b^۲$$

این واقعیت را می‌توان برای تعریف بکار برد.

تعریف: فرض کنید $z = a + bi$، که $a, b \in \mathbb{R}$. **قدر مطلق** (یا **اندازه**) z، برابر با عدد حقیقی $\sqrt{a^۲ + b^۲}$ تعریف می‌شود. قدر مطلق z را با $|z|$ نشان می‌دهیم.

ملاحظه کنید که $|z| = z\overline{z}$. این واقعیت که حاصل ضرب یک عدد مختلط در مزدوجش حقیقی است، روش ساده‌ای برای تعیین حاصل تقسیم دو عدد مختلط در اختیارمان می‌گذارد، چرا که اگر $c + di \neq ۰$، آنگاه

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} . \frac{c - di}{c - di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^۲ + d^۲} = \frac{ac + bd}{c^۲ + d^۲} + \frac{bc - ad}{c^۲ + d^۲}i$$

برای توضیح فرآیند فوق، کسر $(۱ + ۴i)/(۳ - ۲i)$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۱ + ۴i}{۳ - ۲i} = \frac{۱ + ۴i}{۳ - ۲i} . \frac{۳ + ۲i}{۳ + ۲i} = \frac{-۵ + ۱۴i}{۴ + ۹} = -\frac{۵}{۱۳} + \frac{۴}{۱۳}i$$

همانگونه که نتیجه زیر نشان می‌دهد قدر مطلق یک عدد مختلط خواص آشنای قدر مطلق یک عدد حقیقی را دارا است.

قضیه ت.۳. فرض کنید z و w دو عدد مختلط دلخواه را نشان دهند. در این صورت،

الف) $|zw| = |z|.|w|$.

ب) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

ج) $|z| - |w| \leq |z + w|$.

برهان. الف) طبق قضیه د-۲ داریم:

$$|zw|^۲ = (zw)\overline{(zw)} = (z\overline{z})(w\overline{w}) = |z|^۲|w|^۲$$

و قسمت الف به این ترتیب ثابت می‌شود.

ب) برای هر عدد مختلط $x = a + bi$، که $a, b \in \mathbb{R}$، می‌بینیم که:

$$x + \overline{x} = (a + bi) + (a - bi) = ۲a \leq ۲\sqrt{a^۲ + b^۲} = ۲|x|$$

بنابراین $x + \overline{x}$ حقیقی است، و در نامساوی $x + \overline{x} \leq ۲|x|$ صدق می‌کند. با اختیار کردن $x = w\overline{z}$، طبق قضیه د-۲ و قسمت الف داریم:

$$w\overline{z} + \overline{w}z \leq ۲|w\overline{z}| = ۲|w||\overline{z}| = ۲|z||w|$$

با بکارگیری قضیه د-۲ داریم:

$$\begin{aligned}|z+w|^{2} &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z}+w\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{w}\\ &\leq |z|^{2}+2|z||w|+|w|^{2} = (|z|+|w|)^{2}\end{aligned}$$

با جذر گرفتن، قسمت ب ثابت می‌شود.

ج) از قسمتهای الف و ب نتیجه گرفته می‌شود که:

$$|z| = |((z+w)-w| \leq |z+w| + |-w| = |z+w| + |w|$$

پس:

$$|z| - |w| \leq |z+w|$$

و قسمت ج به این ترتیب ثابت می‌شود. □

انگیزه ما برای گسترش دادن اعداد حقیقی به مجموعه اعداد مختلط، به دست آوردن میدانی بود که هرچند جمله‌ای با درجه ناصفر که ضرایبش در آن میدان باشد، ریشه داشته باشد. نتیجه بعدی ما تضمین می‌کند که میدان اعداد مختلط، این خاصیت را دارد.

قضیه ت.۴ (قضیه اساسی جبر). فرض کنید $a_0, a_1, ..., a_n$ ($n \geq 1$) چنان اعداد مختلطی باشند که $a_n \neq 0$. در این صورت

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

در میدان اعداد مختلط ریشه دارد.

برای یافتن اثباتی برای این قضیه به کتاب Principles of Mathematical Analysis (اصول آنالیز ریاضی) نوشته، Walter Rudin مراجعه نمایید.[1]

نتیجه: اگر $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ یک چند جمله‌ای با درجه $n \geq 1$ و با ضرایب مختلط باشد، آنگاه اعداد مختلط (نه لزوما متمایز) $c_1, c_2, ..., c_n$، به گونه‌ای یافت می‌شوند که:

$$p(z) = a_n (z-c_1)(z-c_2)...(z-c_n)$$

برهان. به عهده خواننده است. □

[1] ترجمه این کتاب توسط علی اکبر عالم زاده از انتشارات علمی و فنی موجود است. م.

F را یک میدان می‌نامند، هرگاه دارای این خاصیت باشد که هر چند جمله‌ای که ضرایبش در آن میدان، به صورت حاصلضربی از چند جمله‌ای‌ها با درجه ۱ تجزیه شود. بنابراین نتیجه بالا این مطلب را تصریح می‌کند که میدان اعداد مختلط، بسته جبری است.

پیوست ث

چند جمله‌ای ها

در این ضمیمه، برخی از خواص چند جمله‌ای‌هایی را که ضرایبشان در یک میدان قرار دارند، بررسی می‌کنیم. برای دیدن تعریف یک چند جمله‌ای به بخش ۲-۱رجوع کنید. در طول این ضمیمه، همواره فرض خواهیم کرد که همه چند جمله‌ای‌ها ضرایبشان در میدان ثابت F قرار دارند.

تعریف: چند جمله‌ای $f(x)$، چند جمله‌ای $g(x)$ را **عاد می‌کند،** هر گاه یک چند جمله‌ای $q(x)$ با این خاصیت وجود داشته باشد که $g(x) = q(x)f(x)$.

اولین نتیجه ما نشان می‌دهد که فرایند آشنای تقسیم طولانی چند جمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی، برای چند جمله‌های با ضرایب واقع در هر میدان دلخواه نیز معتبر است.

قضیه ث.۱ (الگوریتم تقسیم برای چند جمله‌ای ها). :فرض کنید $f(x)$، چند جمله ایی با درجه n و $g(x)$ یک چند جمله‌ای با درجه $m \geq 0$ باشد. در این صورت، چند جمله‌ای‌های منحصر به فرد $q(x), r(x)$ وجود خواهند داشت به گونه‌ای که

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \tag{۱}$$

ودرجه $r(x)$، کوچکتر از m باشد.

برهان. با اثبات وجود $q(x)$ و $r(x)$ای که در رابطه (۱) صدق کنند، کار را شروع می‌کنیم.

حالت۱. اگر $n < m$، قرار دهید $q(x) = 0$ و $r(x) = f(x)$ تا رابطه (۱) برقرار شود.

حالت۲. در حالتی که $0 \leq m \leq n$، از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. ابتدا فرض کنید $n = 0$. در این صورت

$m=0$ و در نتیجه $f(x)$ و $g(x)$ ثابتهایی غیر صفرند. در نتیجه می‌توانیم $q(x)$ را برابر $f(x)/g(x)$ و $r(x)$ را برابر 0 اختیار کنیم، تا رابطه (۱) برقرار گردد.

حال فرض کنید نتیجه به ازای $n>0$ ثابتی، برای تمام چند جمله‌ای‌های با درجه کمتر از n برقرار باشد، و فرض کنید که درجه $f(x)$، n باشد. فرض کنید

$$f(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$$

و

$$g(x)=b_mx^m+...+b_1x+b_0$$

و $h(x)$ چند جمله ایی باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(x)=f(x)-a_nb_m^{-1}x^{n-m}g(x) \tag{۲}$$

در این صورت $h(x)$ چند جمله‌ای با درجه کمتر از n است. بنابراین می‌توانیم از فرض استقرا یا از حالت ۱ (هرکدام که مورد نیاز باشد) استفاده کنیم، تا دو چند جمله‌ای $q_1(x)$ و $r(x)$ طوری بدست آیند که $r(x)$ درجه اش از m کوچکتر باشد و:

$$h(x)=q_1(x)g(x)+r(x) \tag{۳}$$

با ترکیب روابط (۲) و (۳) وحل آنها برای یافتن $f(x)$ در می‌یابیم که $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$، که $q(x)=a_nb_m^{m-1}x^{n-m}+q_1(x)$، به این ترتیب وجود $q(x)$ و $r(x)$ با استفاده از اصل استقرا ریاضی ثابت می‌شود.

حال یکتایی $q(x)$ و $r(x)$ را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $q_1(x),r_1(x)$ و $q_2(x),r_2(x)$ به گونه‌ای موجود باشند که درجه هر یک از $r_1(x)$ و $r_2(x)$ از m کمتر باشد و:

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)=q_2(x)g(x)+r_2(x)$$

در این صورت:

$$[q_1(x)-q_2(x)]g(x)=r_1(x)-r_2(x) \tag{۴}$$

عبارت سمت راست رابطه (۴)، چند جمله‌ای با درجه کمتر از m است. چون درجه$g(x)$، m می‌باشد، نتیجه می‌شود که: $q_1(x)-q_2(x)$ چند جمله‌ای صفر است. در نتیجه $q_2(x)=q_1(x)$ ؛ بنابراین طبق رابطه (۴)، $r_1(x)=r_2(x)$ $\square$

در شرایط قضیه ه-۱، $q(x)$ و $r(x)$ را به ترتیب، **خارج قسمت** و **باقیمانده تقسیم** $f(x)$ بر $g(x)$ می‌نامیم. به عنوان

مثال، فرض کنید F میدان اعداد مختلط باشد. در این صورت، خارج قسمت و باقیمانده تقسیم:

$$f(x) = (۳+i)x^۵ - (۱-i)x^۴ + ۶x^۳ + (-۶+۲i)x^۲ + (۲+i)x + ۱$$

بر:

$$g(x) = (۳+i)x^۲ - ۲ix + ۴$$

به ترتیب عبارتند از:

$$q(x) = x^۳ + ix^۲ - ۲ \qquad \text{و} \qquad r(x) = (۲-۳i)x + ۹$$

نتیجه ۲. فرض کنید $f(x)$ چند جمله ایی با درجه حداقل ۱ باشد و $a \in F$. در این صورت $f(a) = ۰$ اگر و تنها اگر $x-a$، $f(x)$ را عاد کند.

برهان. فرض کنید $x-a$، $f(x)$ را عاد کند. در این صورت چند جمله‌ای $q(x)$ای موجود خواهد بود که $f(x) = (x-a)q(x)$. پس $f(a) = (a-a)q(a) = ۰$.

برعکس، فرض کنید $f(a) = ۰$. طبق الگوریتم تقسیم، چند جمله‌ای‌هایی مانند $q(x)$ و $r(x)$ موجودند به گونه‌ای که درجه $r(x)$ کوچکتر از یک است و :

$$f(x) = (x-a)q(x) + r(x)$$

با گذاشتن a به جای x در معادله فوق، نتیجه می‌گیریم که: $r(a) = ۰$ چون درجه $r(x)$ کمتر از ۱است، $r(x)$ باید چند جمله‌ای ثابت ۰باشد. پس $f(x) = (x-a)q(x)$ □

برای هر چند جمله‌ای $f(x)$ با ضرایب واقع در میدان F عضو $a \in F$ را یک صفر یا ریشه $f(x)$ گویند، هرگاه $f(a) = ۰$. با این نام‌گذاری، نتیجه فوق بیان می‌کند که a یک ریشه $f(x)$ است اگر و تنها اگر $x-a$، $f(x)$ را عاد کند.

نتیجه ۳. هر چند جمله‌ای با درجه $n \geq ۱$ حداکثر n ریشه متمایز دارد.

برهان. اثبات با استقرا بر روی n صورت خواهد گرفت. نتیجه در حالت $n = ۱$، بدیهی است. حال فرض کنید که نتیجه برای عدد صحیح مثبت nای برقرار باشد و $f(x)$ چند جمله ایی با درجه n باشد. هرگاه $f(x)$ ریشه نداشته باشد، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. در غیر این صورت اگر a ریشه‌ای برای $f(x)$ باشد، طبق قضیه ه-۱ می‌توانیم به ازای چند جمله‌ای $q(x)$ای بنویسیم $f(x) = (x-a)q(x)$. توجه کنید که درجه $q(x)$ باید n باشد؛ بنابراین طبق فرض استقرا $q(x)$ حداکثر n ریشه متمایز دارد. پس از آنجا که هر ریشه $f(x)$ به غیر از a یک ریشه $q(x)$ نیز هست، $f(x)$ باید حداکثر $n+۱$ ریشه متمایز داشته باشد. □

چند جمله‌ای‌هایی که هیچ مقسوم علیه مشترکی ندارند، در مطالعه فرم‌های متعارف به طور طبیعی وارد بحث می‌شوند. (به فصل۷رجوع کنید).

تعریف: دو چند جمله‌ای ناصفر را **نسبت به هم اول** گویند، هرگاه هیچ چند جمله‌ای با درجه مثبتی هر دو آنها را عاد نکند.

به عنوان مثال، چند جمله‌ایهایی با ضرایب حقیقی $f(x) = x^۲(x-۱)$ و $h(x) = (x-۱)(x-۲)$، نسبت به هم اول نیستند چرا که $(x-۱)$ هردوی آنها را عاد می‌کند. از طرف دیگر $f(x)$ و $g(x) = (x-۲)(x-۳)$ را در نظر بگیرید که به نظر نمی‌آید عامل مشترکی داشته باشند. آیا تجزیه‌های دیگری برای $f(x)$ و $g(x)$ می‌توانند یک عامل مشترک پنهانی را آشکار کنند؟ به زودی (در قضیه ه‍–۹) خواهیم دید که عامل‌های فوق، تنها عوامل ممکن هستند. بنابراین $f(x)$ و $g(x)$ نسبت به هم اولند چرا که عامل مشترکی با درجه مثبت ندارند.

حکم ث.۲. هرگاه $f_۱(x)$ و $f_۲(x)$ چند جمله‌هایی باشند که نسبت به هم اولند، آنگاه دو چند جمله‌ای $q_۱(x)$ و $q_۲(x)$ به گونه‌ای موجود خواهند بود که:

$$f_۱(x)q_۱(x) + f_۲(x)q_۲(x) = ۱$$

که ۱در اینجا چند جمله‌ای ثابت با مقدار ۱ را نشان می‌دهد.

برهان. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید درجه $f_۱(x)$ بزرگتر یا مساوی با درجه $f_۲(x)$ باشد. اثبات با استقرا ریاضی روی درجه $f_۲(x)$ صورت خواهد گرفت. هرگاه درجه $f_۲(x)$، ۰ باشد، آنگاه $f_۲(x)$، ثابتی ناصفر مانند c است. در این حالت می‌توانیم $q_۱(x)$ را برابر ۰ و $q_۲(x)$ را برابر $۱/c$ اختیار کنیم.

حال فرض کنید که قضیه هرگاه که درجه چند جمله‌ای با درجه کمتر، به ازای عدد صحیح ثابت $n \geq ۱$ کمتر از n باشد، برقرار باشد ونیز درجه $f_۲(x)$، n باشد. طبق الگوریتم تقسیم، دو چند جمله‌ای $q(x)$ و $r(x)$ موجودند به گونه‌ای که درجه $r(x)$ از n کمتر است و:

$$f_۱(x) = q(x)f_۲(x) + r(x) \tag{۵}$$

چون $f_۱(x)$ و $f_۲(x)$ نسبت به هم اولند، $r(x)$ چند جمله‌ای صفر نیست. حال مشاهده کنید که $f_۲(x)$ و $r(x)$ نسبت به هم اولند. فرض کنید چنین نباشد، دراین صورت چند جمله‌ای $g(x)$ای با درجه مثبت وجود دارد که هم $f_۲(x)$ وهم $r(x)$ را عاد می‌کند. در نتیجه طبق رابطه(۵) $g(x)$ ، $f_۱(x)$ را هم عاد می‌کند، که با این حقیقت که $f_۱(x)$ و $f_۲(x)$ نسبت به هم اولند متناقض است. چون درجه $r(x)$، کمتر از n است، می‌توانیم فرض استقرا را بر روی $f_۲(x)$ و $r(x)$ به کار گیریم. بنابراین دو چند جمله‌ای $g_۱(x)$ و $g_۲(x)$ به گونه‌ای موجودند که:

$$g_۱(x)f_۲(x) + g_۲(x)r(x) = ۱ \tag{۶}$$

با ترکیب روابط (۵) و (۶) داریم:

$$\begin{aligned} 1 &= g_1(x)f_2(x) + g_2(x)[f_1(x) - q(x)f_2(x)] \\ &= g_2(x)f_1(x) + [g_1(x) - g_2(x)q(x)]f_2(x) \end{aligned}$$

پس با قرار دادن $q_1(x) = g_2(x)$ و $q_2(x) = g_1(x) - g_2(x)q(x)$ به نتیجه مطلوب دست می‌یابیم. □

مثال ۱۹. فرض کنید $f_1(x) = x^3 - x^2 + 1$ و $f_2(x) = (x-1)^2$. $f_1(x)$ و $f_2(x)$ به عنوان چند جمله‌ای‌هایی با ضرایب حقیقی، نسبت به هم اولند. به راحتی می‌توان بررسی کرد که چند جمله‌ای‌هایی $q_1(x) = -x + 2$ و $q_2(x) = x^2 - x - 1$ در معادله زیر صدق می‌کنند:

$$f_1(x)q_1(x) + f_2(x)q_2(x) = 1$$

و در نتیجه این چند جمله‌ای‌ها در حکم ۰-۲ صدق می‌کنند. □

در طول فصل‌های ۵، ۶ و ۷ عملگرهای خطی ای رادر نظر می‌گیریم که چند جمله‌ای‌هایی برحسب عملگری چون T هستند و نیز ماتریس‌هایی رادر نظر می‌گیریم که چند جمله‌ای‌هایی برحسب ماتریس معین A هستند. برای چنین عملگرها و ماتریس‌هایی، نمادگذاری زیر مناسب است.

چند تعریف: فرض کنید

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

یک چند جمله‌ای باشد که ضرایبش در میدان F واقع هستند. هرگاه T عملگری خطی بر فضای برداری V روی F باشد، $f(T)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(T) = a_0I + a_1T + \ldots + a_nT^n$$

به صورتی مشابه اگر A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های واقع در F باشد، $f(A)$ را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$f(A) = a_0I + a_1A + \ldots + a_nA^n$$

مثال ۲۰. فرض کنید T، عملگر خطی ای بر فضای V باشد که به فرم $T(a,b) = (2a+b, a-b)$ تعریف می‌شود، و $f(x) = x^2 + 2x - 3$ به راحتی می‌توان بررسی کرد که $T^2(a,b) = (5a+b, a+2b)$؛ پس:

$$f(T)(a,b) = (T^2 + 2T - 3I)(a,b)$$

$$= (6a + 3b, 3a - 3b)$$

به همین ترتیب اگر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

آنگاه:

$$f(A) = A^2 + 2A - 3I = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

□

حکم ث.۳. :فرض کنید $f(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب واقع در میدان F، و T عملگر خطی ای بر فضای برداری V روی F باشد. دراین صورت:

الف) f(T) عملگری خطی بر V است.

ب) هرگاه β پایه مرتب متناهیی برای V باشد و $A = [T]_\beta$ آنگاه $[f(T)]_\beta = f(A)$

برهان. :به عهده خواننده است. □

حکم ث.۴. فرض کنید T عملگر خطی ای بر فضای برداری V روی میدان F، و A یک ماتریس مربعی با درایه‌های واقع در میدان F باشد. در این صورت به ازای هر دو چند جمله‌ای $f_1(x)$ و $f_2(x)$ با ضرایب واقع در F داریم:

الف) $f_1(T)f_2(T) = f_2(T)f_1(T)$.

ب) $f_1(A)f_2(A) = f_2(A)f_1(A)$.

برهان. به عهده خواننده است. □

حکم ث.۵. فرض کنید T عملگر خطی ای بر فضای برداری V روی میدان F، و A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های واقع در F باشد. هرگاه $f_1(x)$ و $f_2(x)$ دو چند جمله‌ای با ضرایب واقع در F باشند که نسبت به هم اولند، آنگاه چند جمله‌ای‌های $q_1(x)$ و $q_2(x)$ای با ضرایب واقع در F وجود دارند که:

الف) $q_1(T)f_1(T) + q_2(T)f_2(T) = I$.

ب) $q_1(A)f_1(A) + q_2(A)f_2(A) = I$.

برهان. به عهده خواننده است. □

در فصلهای ۵ و ۷با دو مساله سر وکار داریم: یکی تعیین کردن این که چه وقت عملگر خطی T بر یک فضای برداری متناهی البُعد را می‌توان قطری کرد و دیگری یافتن یک نمایش (متعارف) ساده برای T. هر دوی این مسائل از مساله تجزیه یک چند جمله‌ای خاص که به وسیله T مشخص می‌شود (یعنی چند جمله‌ای مشخص T)، تاثیر می‌پذیرند. در اینجا، انواع خاصی از چند جمله‌ای‌ها نقش مهمی ایفا می‌کنند.

چند تعریف: چند جمله‌ای $f(x)$ با ضرایب واقع در میدان F را **تکین** می‌نامند هرگاه ضریب پیشروی آن (ضریب جمله با بیشترین درجه آن) ۱باشد. هرگاه درجه $f(x)$ مثبت باشد و نتوان آن را به صورت حاصل ضرب چند جمله‌ای‌هایی با ضرایب واقع در F نوشت که درجه آنها مثبت باشد. آنگاه $f(x)$ **تحویل ناپذیر** نامیده می‌شود.

این که یک چند جمله‌ای تحویل ناپذیر است یا خیر، بستگی به میدان Fای دارد که ضرایب چند جمله‌ای متعلق به آن میدان در نظر گرفته می‌شوند. به عنوان مثال $f(x) = x^۲ + ۱$ در میدان اعداد حقیقی تحویل ناپذیر است ولی در میدان اعدا دمختلط تحویل ناپذیر نیست چرا که $x^۲ + ۱ = (x - i)(x + i)$.

هر چند جمله‌ای با درجه ۱ تحویل ناپذیر است. به علاوه، برای چند جلمله ای‌هایی که ضرایبشان متعلق به یک میدان بسته جبری هستند، چند جمله‌ای‌های با درجه ۱، تنها چند جمله‌ای‌های تحویل ناپذیر هستند.

دو مطلب زیر به راحتی اثبات می‌شوند.

حکم ث.۶. فرض کنید $\phi(x)$ و $f(x)$ دو چند جمله‌ای باشند. هرگاه $\phi(x)$ تحویل ناپذیر باشد و $\phi(x)$، $f(x)$ را عاد نکند، آنگاه $f(x)$ و $\phi(x)$ نسبت بهم اولند.

برهان. به عهده خواننده است. □

حکم ث.۷. هردو چند جمله‌ای تحویل ناپذیر تکین متمایز، نسبت بهم اولند.

برهان. به عهده خواننده است. □

حکم ث.۸. فرض کنید $f(x)$، $g(x)$ و $\phi(x)$ چند جمله‌ای باشند. اگر $\phi(x)$ تحویل ناپذیر بوده، حاصل ضرب $f(x)g(x)$ را عاد کند، آنگاه یا $\phi(x)$، $f(x)$ را عاد می‌کند یا $\phi(x)$، $g(x)$ را عاد می‌کند.

برهان. فرض کنید $\phi(x)$، $f(x)$ را عاد نکند. در این صورت، $\phi(x)$ و $f(x)$ طبق حکم ه-۶، نسبت به هم اولند و بنابراین دو چند جمله‌ای $q_۱(x)$ و $q_۲(x)$ به گونه‌ای موجودند که

$$۱ = q_۱(x)\phi(x) + q_۲(x)f(x)$$

با ضرب کردن دو طرف این معادله در $g(x)$ داریم:

$$g(x) = q_۱(x)\phi(x)g(x) + q_۲(x)f(x)g(x) \qquad (۷)$$

چون $\phi(x)$ ، $f(x)g(x)$ را عاد می‌کند، چند جمله‌ای $h(x)$ای به گونه‌ای وجود دارد که $f(x)g(x) = h(x)\phi(x)$. پس رابطه (۷) به صورت زیر در می‌آید:

$$g(x) = q_1(x)\phi(x)g(x) + q_2(x)\phi(x)h(x) = \phi(x)[q_1(x)g(x) + q_2(x)h(x)]$$

□

نتیجه: فرض کنید $\phi(x)$، $\phi_1(x), \phi_2(x), ..., \phi_n(x)$ چند جمله‌ای‌های تکین تحویل ناپذیری باشند. اگر $\phi(x)$ حاصل ضرب $\phi_1(x)\phi_2(x)...\phi_n(x)$ را عاد کند، آنگاه به ازای $1 \leq i \leq n$ای $\phi(x) = \phi_i(x)$.

برهان. این نتیجه را با استقرا بر روی n ثابت می‌کنیم. در حالت $n = 1$ این نتیجه حاصل مستقیم حکم ه-۷ است. حال فرض کنید به ازای $n > 1$ ای، نتیجه برای هر $n - 1$ چند جمله‌ای تحویل ناپذیر تکین درست باشد و n چند جمله‌ای تحویل ناپذیر تکین $\phi_1(x), \phi_2(x), ..., \phi_n(x)$ مفروض باشند، هرگاه $\phi(x)$

$$\phi_1(x)\phi_2(x)...\phi_n(x) = [\phi_1(x)\phi_2(x)...\phi_{n-1}(x)]\phi_n(x)$$

را عاد کند، آنگاه $\phi(x)$ طبق قضیه ه-۸ $\phi_n(x)$ یا $\phi_1(x)\phi_2(x)...\phi_{n-1}(x)$ را عاد می‌کند. در حالت اول، طبق فرض استقراءبه ازای iای $i = 1 \ldots n - 1$، $\phi(x) = \phi_i(x)$. در حالت دوم طبق حکم ه-۷، $\phi(x) = \phi_n(x)$ □

حال آماده ایم تا قضیه تجزیه یکتا را ثابت کنیم که در طول فصلهای ۵ و ۷ به کار رفته است. این نتیجه بیان می‌دارد که هر چند جمله‌ای با درجه مثبت را می‌توان به صورت منحصر به فردی به صورت حاصل ضرب یک ثابت در حاصل ضربی از چند جمله‌ای‌های تکین تحویل ناپذیر نوشت.

قضیه ث.۹ (قضیه تجزیه یکتا برای چند جمله‌ای ها). برای هر چند جمله‌ای $f(x)$ با درجه مثبت، ثابت یکتایی مانند c، چند جمله ایها تحویل ناپذیر تکین متمایز منحصر به فردی مانند $\phi_1(x), \phi_2(x), ..., \phi_k(x)$ و اعداد صحیح مثبت منحصر به فرد

$n_1, n_2, ..., n_k$ به گونه‌ای موجود هستند که،

$$f(x) = c[\phi_1(x)]^{n_1}[\phi_2(x)]^{n_2}...[\phi_k(x)]^{n_k}$$

برهان. اثبات را با نشان دادن وجود چنین تجزیه‌ای با استفاده از استقرا روی درجه $f(x)$ شروع می‌کنیم. اگر درجه $f(x)$، ۱باشد. آنگاه به ازای ثابت‌های a و bای که $a \neq 0$ داریم $f(x) = ax + b$. با قرار دادن $\phi(x) = x + b/a$، داریم $f(x) = a\phi(x)$. چون $\phi(x)$ یک چند جمله‌ای تحویل ناپذیر تکین است، نتیجه در این حالت ثابت شده است. حال فرض کنید حکم برای هر چند جمله‌ای با درجه مثبت کمتر از عدد صحیح $n > 1$ برقرار باشد و $f(x)$ چند جمله‌ایی با درجه n باشد؛ در این صورت، به ازای اسکالرهای a_i که $a_i \neq 0$ داریم:

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$$

اگر $f(x)$ تحویل ناپذیر باشد، آنگاه

$$f(x) = a_n(x^n + \frac{a_{n-۱}}{a_n}x^{n-۱} + ... + \frac{a_۱}{a_n}x + \frac{a_۰}{a_n})$$

نمایشی از $f(x)$، به عنوان حاصل ضرب a_n در یک چند جمله‌ای تکین تحویل ناپذیر است. اگر $f(x)$ تحویل ناپذیر نباشد آنگاه برای دو چند جمله‌ای $g(x)$ و $h(x)$ که هریک درجه شان مثبت وکمتر از n است، $f(x) = g(x)h(x)$. فرض استقرا تضمین می‌کند که $g(x)$ و $h(x)$ هردو به صورت حاصل ضرب یک ثابت در توانهایی از چند جمله‌ای‌های تحویل ناپذیر تکین متمایز تجزیه می‌شوند. در نتیجه $f(x) = g(x)h(x)$ نیز به همین طریق تجزیه می‌شود. بنابراین در هردو حالت $f(x)$ را می‌توان به صورت حاصل ضرب یک ثابت در توان‌هایی از چند جمله‌ای‌های تحویل ناپذیر تکین متمایز تجزیه کرد. حال به اثبات یکتایی چنین تجزیه‌ای می‌پردازیم. فرض کنید که:

$$\begin{aligned} f(x) &= c[\phi_۱(x)]^{n_۱}[\phi_۲(x)]^{n_۲}...[\phi_k(x)]^{n_k} \\ &= d[\psi_۱(x)]^{m_۱}[\psi_۲(x)]^{m_۲}...[\psi_r(x)]^{m_r} \qquad (۸) \end{aligned}$$

که c و d دو ثابت هستند و به ازای $i = ۱, ۲, ..., k$ ، $j = ۱, ۲, ..., r$ و $\phi_i(x)$، $\psi_j(x)$ چند جمله‌ای‌های تکین تحویل ناپذیر و m_i و n_i اعداد صحیح مثبتی هستند. واضح است که هردو ثابت c و d باید ضریب پیش روی $f(x)$ باشند، در نتیجه $c = d$. با تقسیم طریق رابطه (۸) بر c داریم

$$[\phi_۱(x)]^{n_۱}[\phi_۲(x)]^{n_۲}...[\phi_k(x)]^{n_k} = c[\psi_۱(x)]^{m_۱}[\psi_۲(x)]^{m_۲}...[\psi_r(x)]^{m_r} \qquad (۹)$$

پس به ازای هر $i = ۱, ۲, ..., k$، $\phi_i(x)$ سمت راست رابطه (۹) را عاد می‌کند. در نتیجه، طبق نتیجه حکم ۰–۸ به ازای هر $(i = ۱, ۲, ..., k)$ ،i، به ازای $j = ۱, ۲, ..., r$ای $\phi_i(x) = \psi_j(x)$ و به ازای هر j، $(j = ۱, ۲, ..., r)$، به ازای $i = ۱, ۲, ..., k$ای $\phi_i(x) = \psi_j(x)$. نتیجه می‌گیریم که $r = k$ و در صورت لزوم، با شماره گذاری مجدد، $\phi_i(x) = \psi_i(x)$. فرض کنید به ازای iای $n_i \neq m_i$. بدون کاستن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم که $i = ۱$ و $n_۱ > m_۱$. در این صورت با حذف $[\phi_۱(x)]^{m_۱}$ از دو طرف رابطه (۹)، نتیجه می‌شودکه:

$$[\phi_۱(x)]^{n_۱-m_۱}[\phi_۲(x)]^{n_۲}...[\phi_k(x)]^{n_k} = [\phi_۲(x)]^{m_۲}...[\phi_k(x)]^{m_k} \; (۱۰)$$

چون $n_۱ - m_۱ > ۰$، $\phi_۱(x)$ سمت چپ رابطه (۱۰) را عاد می‌کند و در نتیجه سمت راست آن را نیز عاد می‌کند. پس طبق نتیجه حکم ۰–۸، به ازای $i = ۱, ۲, ..., k$ ای، $\phi_۱(x) = \phi_i(x)$. اما این مساله، با این واقعیت که $\phi_۱(x)\phi_۲(x)...\phi_k(x)$ متمایز هستند در تناقض است. در نتیجه دو تجزیه $f(x)$ در رابطه(۸)یکی هستند. □

معمولا مفید است که هر چند جمله‌ای $f(x) = a_nx^n + ... + a_۱x + a_۰$ با ضرایب واقع در میدان F را به صورت یک تابع $f : F \to F$ در نظر بگیریم. در این حالت مقدار f در نقطه $c \in F$ برابر است با $f(c) = a_nc^n + ... + a_۱c + a_۰$. متاسفانه در میدانهای دلخواه تناظر یک به یکی میان چند جمله‌ای‌ها وتوابع چند جمله‌ای وجود ندارد. به عنوان مثال، اگر $f(x) = x^۲$ و $g(x) = x$ دو چند جمله‌ای روی میدان $\mathbb{Z}^۲$ (که در مثال۴ پیوست ج تعریف شد) باشند، آنگاه $f(x)$ و

$g(x)$، درجه‌های متفاوتی دارند و در نتیجه مساوی نیستند. اما به ازای هر $a \in \mathbf{Z}_۲$، $f(a) = g(a)$ و بنابراین $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع چند جمله‌ای مساوی هستند. آخرین نتیجه ما نشان می‌دهد که این وضع غیر عادی در یک میدان نامتناهی نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

قضیه ث.۱۰. فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو چند جمله‌ای با ضرایب واقع در میدان F باشند. اگر برای هر $a \in F, f(a) = g(a)$ آنگاه $f(x)$ و $g(x)$ برابر هستند.

برهان. فرض کنید که برای هر $a \in F$، $f(a) = g(a)$. $h(x)$ رابرابر $f(x) - g(x)$ تعریف کنید و فرض کنید درجه $h(x), n \geq ۱$ باشد. از نتیجه ۲ از قضیه ه-۱ نتیجه می‌شود که $h(x)$ حداکثر n ریشه می‌تواند داشته باشد. اما برای هر $a \in F$:

$$h(a) = f(a) - g(a) = ۰$$

که این فرض را که درجه $h(x)$ مثبت است نقض می‌کند. پس $h(x)$ یک چند جمله‌ای ثابت است وچون برای هر $a \in F$، $h(a) = ۰$، نتیجه می‌شود که $h(x)$ چند جمله‌ای صفر است. در نتیجه $f(x) = g(x)$. □

پاسخ به تمرینات انتخاب شده

بخش۱-۱

۰۱ فقط زوج‌های ب و ج موازیند.

۲.الف) $x = (۳, -۲, ۴) + t(-۸, ۹, -۳)$ ج) $x = (۳, ۷, ۲) + t(۰, ۰, -۱۰)$

۳.الف) $x = (۲, -۵, -۱) + t_۱(-۲, ۹, ۷) + t_۲(-۵, ۱۲, ۲)$

ج) $x = (-۸, ۲, ۰) + t_۱(۹, ۱, ۰) + t_۲(۱۴, -۷, ۰)$

بخش۱-۲

۱.الف) د ب) ن ج)ن د)ن ه)د و)ن ز)ن ح)ن ط)د ی)د ک)د

۳. $M_{۱۳} = ۳, M_{۲۱} = ۴, M_{۲۲} = ۵$

۴.الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۶ \\ ۹ & ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -۱۲ & ۲۰ & ۸ \\ ۲۸ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$

ه) $۲x^۴ + x^۳ + ۲x^۲ - ۲x + ۱۰$ ز) $۱۰x^۷ - ۳۰x^۴ + ۴۰x^۲ - ۱۵$

۱۳. خیر، $(VS۴)$ برقرار نیست.

۱۴.بله.

۱۵.خیر.

۱۷.خیر. $(VS۵)$ برقرار نیست.

۲۲. ۲^{mn}

بخش ۱-۳

۱.الف) ن ب) ن ج)د د)ن ه)د و)ن

۲.الف) $\begin{bmatrix} ۵ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ رد آن ۵- است. ج) $\begin{bmatrix} ۶ & ۰ & -۳ \\ ۱ & -۲ & ۹ \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$ ز) $\begin{bmatrix} ۷ & ۶ & ۵ \end{bmatrix}$

۸. الف) بله ب) بله ج) خیر

۱۱.خیر، این مجموعه تحت عمل جمع بسته نیست.

۱۵. بله.

بخش ۱-۴

۱.الف) د ب) ن ج)د د)ن ه)د و)ن

۲.الف) $\{r\,(۱,۱,۰,۰) + s(-۳,۰,-۲,۱) + (۵,۰,۴,۰) : r,s \in \mathbb{R}\}$

ج) جوابی وجود ندارد.

ه)$\{r\,(۱۰,-۳,۱,۰,۰) + s(-۳,۲,۰,۱,۰) + (-۴,۳,۰,۰,۵) : r,s \in \mathbb{R}\}$

۳.الف) بله ج) خیر ه) خیر

۴.الف) بله ج) بله ه) خیر

بخش۱-۵

۱.الف) ن ب) د ج)ن د)ن ه)د و)د

۵.$\left\{ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \right\}$

۸.۲^n

بخش۱-۶

۱.الف) ن ب) د ج)ن د)ن ه)د و)ن ز)ن ح)د ط)ن ی)د ک)د

۲.الف) بله ج) بله ه) خیر

۳.الف) خیر ج) بله ه) خیر

۴.خیر

۵.خیر

۷.$\{u_۱, u_۲, u_۵\}$

۹.$(a_۱, a_۲, a_۳, a_۴) = a_۱u_۱ + (a_۲ - a_۱)u_۲ + (a_۳ - a_۲)u_۳ + (a_۴ - a_۳)u_۴$

۱۲.$\{(۱, ۱, ۱)\}$

۱۴.$n^۲ - ۱$

۱۶.$\frac{۱}{۲}n(n - ۱)$

۲۵.$n - ۱$

۲۸. $\dim(W_۱ \cap W_۲) = ۱, \dim(W_۱ + W_۲) = ۴, \dim(W_۲) = ۲, \dim(W_۱) = ۳$

بخش۱-۷

۱.الف) ن ب) ن ج)ن د)د ه)د و)د

بخش ۱-۲

۱.الف) د ب) ن ج)ن د)د ه)ن و)ن ز)د ح)ن

۲.پوچی T، ۱و رتبه آن ۲ است. T یک به یک نیست ولی پوشاست.

۴. پوچی T، ۴و رتبه آن ۲ است. T نه یک به یک است ونه پوشا.

۵. پوچی T، ۰و رتبه آن ۳ است. T یک به یک است ولی پوشانیست.

۱۰.$T(۲, ۳) = (۵, ۱۱)$. T یک به یک است.

۱۲.خیر.

بخش۲-۲

۱.الف) د   ب) د   ج)ن   د)د   ه)د   و)ن

۲.الف) $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۳ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$

و) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ز) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۳. $[T]_\beta^\gamma = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۳} & -۱ \\ ۰ & ۱ \\ \frac{۲}{۳} & ۰ \end{bmatrix}$ و $[T]_\alpha^\gamma = \begin{bmatrix} \frac{-۷}{۳} & \frac{-۱۱}{۳} \\ ۲ & ۳ \\ \frac{۲}{۳} & \frac{۴}{۳} \end{bmatrix}$

۵.الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ه) $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۰ \\ ۴ \end{bmatrix}$

۹. $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$

بخش۲-۳

۱.الف) ن   ب) د   ج)ن   د)د   ه)ن   و)ن   ز)ن   ح)ن   ط)د   ی)د

۲.الف) $A(۲B+۳C)=\begin{bmatrix} ۲۰ & -۹ & ۱۸ \\ ۵ & ۱۰ & ۸ \end{bmatrix}$ و $A(BD)=\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۲۶ \end{bmatrix}$

ب) $A^tB=\begin{bmatrix} ۲۳ & ۱۹ & ۰ \\ ۲۶ & -۱ & ۱۰ \end{bmatrix}$ و $CB=[۲۷ \quad ۷ \quad ۹]$

۳.الف) $[U]_\beta^\gamma=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}, [T]_\beta=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ و $[UT]_\beta^\gamma=\begin{bmatrix} ۲ & ۶ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۲ & ۰ & -۶ \end{bmatrix}$

۴.الف) $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۴ \\ ۶ \end{bmatrix}$ ج) $[۵]$

۱۱.الف) خیر. ب) خیر.

بخش۲-۴

۱.الف) ن ب) د ج)ن د)ن ه)د و)ن ز)د ح)د ط)د

۱۷.ب) $[T]_\beta=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

بخش۲-۵

۱.الف) ن ب) د ج)د د)ن ه)د

۲.الف) $\begin{bmatrix} a_۱ & b_۱ \\ a_۲ & b_۲ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}$

۳.الف) $\begin{bmatrix} a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۰ & b_۰ & c_۰ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۳- & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ ه) $\begin{bmatrix} ۵ & -۶ & ۳ \\ ۰ & ۴ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$

۴. $[T]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}$

۵. $[T]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

۶.الف) $T(x,y) = \frac{1}{1+m^2}((1-m^2)x + 2my, 2mx + (m^2-1)y)$

بخش۲-۶

۱.الف) ن ب) د ج)د د)د ه)ن و)ن ز)د ح)ن

۲.توابع قسمت‌های الف، ج، ه، و، تبدیل‌های خطی هستند.

۳.الف) $f_1(x,y,z) = x - \frac{1}{2}y$, $f_2(x,y,z) = \frac{1}{2}y$ و $f_3(x,y,z) = -x + z$

۵. پایه مورد نظر برای V، $\{p_1(x), p_2(x)\}$ است، که $p_1(x) = 2 - 2x$ و $p_2(x) = -\frac{1}{2} + x$.

۷.الف) $T^t(f) = g$، که $g(a+bx) = -3a - 4b$

ب) $[T]_{\gamma^*}^{\beta^*} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ج) $[T^t]_{\beta}^{\gamma} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

بخش۲-۷

۱. الف) د ب) د ج)ن د)ن ه)د و)ن ز)د

۲. الف)ن ب) ن ج)د د)د ه)ن

۳.الف) $\{e^{-t}, te^{-t}\}$ ج) $\{e^{-t}, te^{-t}, e^{t}, te^{t}\}$ ه) $\{e^{-t}, e^{t}cos2t, e^{t}sin2t\}$

۴.الف) $\{e^{(1-\sqrt{5})t/2}, e^{(1+\sqrt{5})t/2}\}$ ج) $\{1, e^{-4t}, e^{-2t}\}$

بخش ۱-۳

۱.الف) د ب) ن ج)د د)ن ه)د و)ن ز)د ح)ن ط)د

۲. با افزودن ۲− برابر ستون اول به ستون دوم، ماتریس A را به B تبدیل می‌کند.

بخش ۲-۳

۱.الف) ن   ب) ن   ج)د   د)د   ه)ن   و)د   ز)د   ح)د   ط)د

۲. الف) ۲   ج) ۲   ه)۳   ز)۱

۴. الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ، رتبه ماتریس ۲ است.

۵. الف) رتبه ماتریس ۲ و وارونش $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ است.

ج) رتبه ماتریس ۲ است ولی وارون پذیر نیست.

ه)رتبه ماتریس ۳ است و وارونش $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} & \frac{-۱}{۳} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{-۱}{۲} \\ \frac{-۱}{۶} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ است.

و)رتبه ماتریس ۴ و وارونش $\begin{bmatrix} -۵۱ & ۱۵ & ۷ & ۱۲ \\ ۳۱ & -۹ & -۴ & -۷ \\ -۱۰ & ۳ & ۱ & ۲ \\ -۳ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ است.

۶.الف) $T^{-۱}(ax^۲ + bx + c) = -ax^۲ - (۴a + b)(۱۰a + ۲b + c)$

ج)$T^{-۱}(a,b,c) = (\frac{۱}{۶}a - \frac{۱}{۳}b + \frac{۱}{۲}c, \frac{۱}{۲}a - \frac{۱}{۲}c, -\frac{۱}{۶}a + \frac{۱}{۳}b + \frac{۱}{۲}c)$

ه)$T^{-۱}(a,b,c) = (\frac{۱}{۲}a - b + \frac{۱}{۲}c)x^۲ + (-\frac{۱}{۲}a + \frac{۱}{۲}c)x + b$

۷. $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۲۰.الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

بخش۳-۳

۱.الف) ن   ب) ن   ج)د   د)ن   ه)ن   و)ن   ز)د   ح)ن

۲.الف) $\left\{\begin{bmatrix} -۳ \\ ۱ \end{bmatrix}\right\}$ ج) $\left\{\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}\right\}$

ه) $\left\{\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}\right\}$ ز) $\left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۳ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\right\}$

۳.الف) $\left\{\begin{bmatrix} ۵ \\ ۰ \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -۳ \\ ۱ \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$

ج) $\left\{\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$

ه) $\left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R}\right\}$

ز) $\left\{\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} -۳ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} : r, s \in \mathbb{R}\right\}$

۴.ب) ۱) $A^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۹} & \frac{۱}{۳} & \frac{-۲}{۹} \\ \frac{-۴}{۹} & \frac{۲}{۳} & \frac{-۱}{۹} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \\ -۲ \end{bmatrix}$

۶. $T^{-۱}\{(۱, ۱۱)\} = \left\{\begin{bmatrix} \frac{۱۱}{۲} \\ \frac{-۹}{۲} \\ ۰ \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$

۷.در دستگاه‌های ارئه شده در قسمت‌های (ب)، (ج) و (د) دارای جواب هستند.

۱۱.درآمدهای کشاورز، خیاط و بنا باید به نسبت ۴:۳:۴ باشد.

۱۳.باید ۷/۸ واحد از کالای اول و ۹/۵ واحد از کالای دوم تولید شود.

بخش۳-۴

۱.الف) ن ب) د ج)د د)د ه)ن و)د ز)د

۲.الف) $\begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \\ -۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$

ه) $$\left\{ \begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

ز) $$\left\{ \begin{bmatrix} -۲۳ \\ ۰ \\ ۷ \\ ۹ \\ ۰ \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -۲۳ \\ ۰ \\ ۶ \\ ۹ \\ ۱ \end{bmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

ط) $$\left\{ \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۰ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} ۱ \\ -۴ \\ ۰ \\ -۲ \\ ۱ \end{bmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

۴.الف) $$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{۴}{۳} \\ \frac{۱}{۳} \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

ج)جوابی وجود ندارد.

۵. $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۱ & ۴ \\ -۱ & -۱ & ۳ & -۲ & -۷ \\ ۳ & ۱ & ۱ & ۰ & -۹ \end{bmatrix}$

۷. $\{u_۱, u_۲, u_۵\}$

۱۱. ب) $\{(۱, ۲, ۰, ۰, ۰), (۲, ۱, ۰, ۰, ۰), (۱, ۰, ۰, ۱, ۰), (-۲, ۰, ۰, ۰, ۱)\}$

بخش۴-۱

۱.الف) ن ب) د ج)ن د)ن ه)د

۲.الف) ۳۰ ج) ۸-

۳.الف) $-۱۰ + ۱۵i$ ج) ۲۴-

۴.الف) ۱۹ ج) ۱۴

بخش۴-۲

۱.الف) ن ب) د ج)د د)د ه)ن و)ن ز)ن ح)د

۳. ۴۲

۵. ۱۲- ۷. ۱۲- ۹. ۲۲ ۱۱. ۳- ۱۳. ۸- ۱۵. ۰ ۱۷. ۴۹- ۱۹. $-۲۸ - i$

۲۱. ۹۵

بخش۴-۳

۱.الف) ن ب) د ج)ن د)د ه)ن و)د ز)ن ح)ن

۳. $(۴, -۳, ۰)$ ۵. $(-۲۰, -۴۸, -۸)$ ۷. $(۰, -۱۲, ۱۶)$

۲۳. $t^n + a_{n-۱}t^{n-۱} + \dots + a_۱ t + a_۰$

۲۵.الف) $\begin{bmatrix} A_{۲۲} & -A_{۱۲} \\ -A_{۲۱} & A_{۱۱} \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۱۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۸ \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} -۳i & ۰ & ۰ \\ ۴ & -۱+i & ۰ \\ ۱۰+۱۶i & -۵-۳i & ۳+۳i \end{bmatrix}$ ز) $\begin{bmatrix} ۱۸ & ۲۸ & -۶ \\ -۲۰ & -۲۱ & ۳۷ \\ ۴۸ & ۱۴ & -۱۶ \end{bmatrix}$

بخش۴-۴

۱.الف) د ب) د ه) ن ج)د د)ن و)د ز)د ح)ن ط)د ی)د ک)د

۲.الف) ۲۲ ج)$۲-۴i$

۳.الف) ۱۲- ج)۱۲- ه)۲۲ ز)۳-

۴.الف) ۰ ج)۴۹- ه)$-۲۸-i$ ز)۹۵

بخش۴-۵

۱.الف) ن ب) د ج)د د)ن ه)ن و)د

۳. خیر. ۵.بله. ۷.بله. ۹.خیر.

بخش۵-۱

۱.الف) ن ب) د ج)د د)ن ه)ن و)ن ز)ن ح)د ط)د ی)ن ک)ن

۲.الف) $Q = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $[L_A]_\beta = \begin{bmatrix} ۶ & ۱۱ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix}$

ج) $Q = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $[L_A]_\beta = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۲ \\ -۲ & -۳ & -۴ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$

۳.الف) مقادیر ویژه این ماتریس ۴ و۱- است و پایه متشکل از بردارهای ویژه،

$$\left\{ \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \right\}$$

می باشد، $Q = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

ج) مقادیر ویژه این ماتریس ۱ و۱− است و پایه متشکل از بردارهای ویژه،

$$\left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱-i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱-i \end{bmatrix}\right\}$$

می باشد، $Q = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱-i & -۱-i \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

۴.مقادیر ویژه این ماتریس ۱، ۲ و۳ است و پایه متشکل از بردارهای ویژه، $\{۱, x, x^۲\}$ میباشد.

. ۴ .۲۶

بخش۵-۲

۱.الف) ن ب) ن ج)ن د)د ه)د و)د ز)د ح)د ط)ن

۲.الف) قطری پذیر نیست. ج) $Q = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}$

ه)قطری پذیر نیست. ز) $Q = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

۳.الف) قطری پذیر نیست. ج) قطری پذیر نیست.

د) $\beta = \{x - x^۲, ۱ - x - x^۲, x + x^۲\}$

ه) $\beta = \left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}\right\}$

۷. $A^n = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۵^n + ۲(-۱)^n & ۲(۵^n) - ۲(-۱)^n \\ ۵^n - (-۱)^n & ۲(۵^n) + (-۱)^n \end{bmatrix}$

۱۴.ب) $x(t) = c_۱ e^{۳t}\begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix} + c_۲ e^{-۲t}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$

ج) $x(t) = e^t\left[c_۱\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + c_۲\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\right] c_۳ e^{۲t}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$

بخش۵-۳

۱.الف) د ب) د ج)ن د)ن ه)د و)د ز)د ح)ن ط)ن ی)د

۲.الف) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} \frac{۷}{۱۳} & \frac{۷}{۱۳} \\ \frac{۶}{۱۳} & \frac{۶}{۱۳} \end{bmatrix}$ ه) حدی وجود ندارد.

ز) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۱ \\ -۲ & ۱ & -۴ \\ ۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ط)حدی وجود ندارد.

۶. یک ماه پس از ورود، ۲۵ درصد از بیماران بهبود خواهند یافت، ۲۰ درصد قادر به حرکت خواهند بود، ۴۱ درصد بستری خواهند بود و ۱۴ درصد خواهند مرد. در نهایت، $\frac{۵۹}{۹۰}$ بیماران بهبود خواهند یافت و $\frac{۳۱}{۹۰}$ خواهند مرد.

۷. $\frac{۳}{۷}$.

۹.الف) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$ ج)حدی وجود ندارد.

ه) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۲} \\ ۱ & ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ ز) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ ۱ & ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

۱۰. الف) بعد از دو مرحله، $\begin{bmatrix} ۰/۲۲۵ \\ ۰/۴۴۱ \\ ۰/۳۳۴ \end{bmatrix}$ و در نهایت $\begin{bmatrix} ۰/۲۰ \\ ۰/۶۰ \\ ۰/۲۰ \end{bmatrix}$.

ج) بعد از دو مرحله، $\begin{bmatrix} ۰/۳۷۲ \\ ۰/۲۲۵ \\ ۰/۴۰۳ \end{bmatrix}$ و در نهایت $\begin{bmatrix} ۰/۵۰ \\ ۰/۲۰ \\ ۰/۳۰ \end{bmatrix}$.

ه) بعد از دو مرحله، $\begin{bmatrix} ۰/۳۲۹ \\ ۰/۳۳۴ \\ ۰/۳۳۷ \end{bmatrix}$ و در نهایت $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$.

۱۲. $\frac{۹}{۱۹}$ نو خواهند بود، $\frac{۶}{۱۹}$ یک بار مصرف شده و $\frac{۴}{۱۹}$ دوبار مصرف شده اند.

۱۳. در سال ۱۹۹۵، ۲۴ درصد دارای ماشین بزرگ، ۳۴ درصد دارای ماشین متوسط و ۴۲ درصد دارای ماشین کوچک خواهند بود. مقادیر نهایی نظیر ۰/۱۰، ۰/۳۰ و ۰/۶۰ خواهند بود.

۱۹. $e^O = I$، $e^I = eI$.

بخش۵-۴

۱.الف) ن ب) د ج)ن د)ن ه)د و)د ز)د

۳. زیرفضاهای قسمت‌های الف ، ج ، د، $T-$پایا هستند.

۶.الف) $\left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}\right\}$ ج) $\left\{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\right\}$

۹. الف) $-t(t^۲ - ۳t + ۳)$ ج) $۱ - t$

۱۰. الف) $t(t - ۱)(t^۲ - ۳t + ۳)$ ج)$(t - ۱)^۳(t + ۱)$

۱۸. ج) $A^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & -۴ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$

۳۱. الف) $t^۲ - ۶t + ۶$ ج) $-(t + ۱)(t^۲ - ۶t + ۶)$

بخش۶-۱

۱.الف) د ب) د ج)ن د)ن ه)ن و)ن ز)ن ح)د

۲. $\langle x, y\rangle = ۸ + ۵i$, $||x|| = \sqrt{۷}$, $||y|| = \sqrt{۱۴}$, $||x + y||^۲ = ۳۷$.

۳. $\langle f, g\rangle = ۱$, $||f|| = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$, $||g|| = \sqrt{\frac{e^۲-۱}{۲}}$, $||f + g|| = \sqrt{\frac{۱۱+۳e^۲}{۶}}$.

۱۶. ب) خیر.

بخش۶-۲

۱.الف) ن ب) د ج)د د)ن ه)د و)ن ز)د

۲. ب) پایه متعامد یکه مورد نظر:

$$\left\{\frac{\sqrt{۳}}{۳}(۱, ۱, ۱), \frac{\sqrt{۶}}{۶}(-۲, ۱, ۱), \frac{\sqrt{۲}}{۲}(۰, -۱, ۱)\right\}$$

است. ضرایب فوریه مورد نظر، $\sqrt{۲}/۲, -\sqrt{۶}/۶, ۲\sqrt{۳}/۳$ هستند.

ج) پایه متعامد یکه مورد نظر $\{۱, ۲\sqrt{۳}(x-\frac{۱}{۲}), ۶\sqrt{۵}(x^۲-x+\frac{۱}{۶})\}$ است.

ضرایب فوریه مورد نظر $۳/۲, \sqrt{۳}/۶$ و ۰ هستند.

۴. $S^{\perp} = span(\{i, -\frac{۱}{۲}(۱+i), ۱\})$

۵. $S^{\perp}$ صفحه گذرنده از مبدئی است که بر $x_۰$ عمود است؛ $S_۰^{\perp}$ خط گذرنده از مبدئی است که بر صفحه شامل $x_۱$ و $x_۲$ عمود است.

۱۷.الف) $\frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix} ۲۶ \\ ۱۰۴ \end{bmatrix}$ ب) $\frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ ۱۷ \\ ۴۰ \end{bmatrix}$

۱۸.ب) $\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}$.

بخش۶-۳

۱.الف) د   ب) ن   ج)ن   د)د   ه)ن   و)د   ز)د

۲. الف) $y=(۱,۲,-۴)$ ج) $y=۲۱۰x^۲-۲۰۴x+۳۳$

۳.الف) $T^*(x)=(۱۱,-۱۲)$ ج) $T^*(f(t))=۱۲+۶t$

۴. $T^*(x)=\langle x,z\rangle y$

۱۸. خط مورد نظر ، $y=-۲t+\frac{۵}{۲}$ با $E=۱$ و سهمی مورد نظر $y=t^۲/۳-۴t/۳+۲$ با $E=۰$ می‌باشد.

۱۹. ثابت فنر تقریبا ۲/۱ است.

۲۰. $x=\frac{۲}{۷}$، $y=\frac{۳}{۷}$ و $z=\frac{۱}{۷}$.

بخش۶-۴

۱.الف) د   ب) ن   ج)ن   د)د   ه)د   و)د   ز)ن   ح)د

۲.الف) T خودالحاقی است: پایه متعامد یکه مورد نظر $\{\frac{۱}{\sqrt{۵}}(۱,-۲), \frac{۱}{\sqrt{۵}}(۲,۱)\}$ است.

ب) T نرمال است اما خودالحاقی نیست.

ج) T نرمال است.

بخش۶-۵

۱.الف) د ب) ن ج)ن د)د ه)ن و)د ز)ن ح)ن ط)ن

۲.الف) $P = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

د) $P = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۶}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ \frac{-۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۶}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ ۰ & \frac{-۲}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$

۴. T_z برای هر $z \in \mathbb{C}$ نرمال است: T_z خود الحاقی است اگر و تنها اگر $z \in \mathbb{R}$؛ T_z یکانی است اگر و تنها اگر $|z| = ۱$.

۵. فقط دو ماتریس قسمت د هم ارز یکانی هستند.

۲۱. الف) $x = \frac{۱}{\sqrt{۲}}x' + \frac{۱}{\sqrt{۲}}y'$ و $y = \frac{۱}{\sqrt{۲}}x' - \frac{۱}{\sqrt{۲}}y'$

فرم درجه دوم جدید، $۳(x')^۲ - (y')^۲$ است.

ج) $x = \frac{۳}{\sqrt{۱۳}}x' + \frac{۲}{\sqrt{۱۳}}y'$ و $y = \frac{-۲}{\sqrt{۱۳}}x' + \frac{۲}{\sqrt{۱۳}}y'$

فرم درجه دوم جدید، $۵(x')^۲ - ۸(y')^۲$ است.

۲۳. ج) $P = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} & \frac{-۶}{\sqrt{۶}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{-۱}{\sqrt{۳}} & \frac{\sqrt{۶}}{۶} \\ ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۳}} & \frac{\sqrt{۶}}{۳} \end{bmatrix}$ و $R = \begin{bmatrix} \sqrt{۲} & \sqrt{۲} & ۲\sqrt{۲} \\ ۰ & \sqrt{۳} & \frac{\sqrt{۳}}{۳} \\ ۰ & ۰ & \frac{\sqrt{۶}}{۳} \end{bmatrix}$

ه) $x_۱ = ۳, x_۲ = -۵$ و $x_۳ = ۴$

بخش۶-۶

۱.الف) ن ب) د ج)د د)ن ه) ن

۲. برای $W = span(\{(۱,۲)\})$ داریم: $[T]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & \frac{۲}{۵} \\ \frac{۲}{۵} & \frac{۴}{۵} \end{bmatrix}$

۳. ۲- الف) $T_۱(a,b) = \frac{۱}{۲}(a+b, a+b)$ و $T_۲(a,b) = \frac{۱}{۲}(a-b, -a+b)$

د) $T_۱(a,b,c) = \frac{۱}{۳}(۲a-b-c, -a+۲b-c, -a-b+۲c)$ و

$T_۲(a,b,c) = \frac{۱}{۳}(a+b+c, a+b+c, a+b+c)$

بخش۶-۷

۱.الف) ن ب) ن ج)د د)ن ه)د و)ن ز)ن ح)ن ط)د ی)ن

۴.الف) بله ب) خیر ج)خیر د)بله ه)بله و)خیر

۵.الف) $\begin{bmatrix} -۲ & ۲ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۴ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۸ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$

۱۶.الف) $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{۲}{\sqrt{۵}} \\ \frac{-۱}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix} \right\}$

ب) مانند جواب قسمت الف.

ج) $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ ۰ \\ \frac{-۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ ۰ \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix} \right\}$

۱۷. مانند جواب تمرین ۱۶ قسمت ج.

۲۱.الف) $Q = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۷ \end{bmatrix}$

ب) $Q = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{-۱}{۲} \\ ۱ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & \frac{-۱}{۲} \end{bmatrix}$

ج) $Q = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۰/۲۵ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۶/۷۵ \end{bmatrix}$

بخش۶-۸

.۷ $$(B_v)^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۱-v^۲}} & ۰ & ۰ & \frac{v}{\sqrt{۱-v^۲}} \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ \frac{v}{\sqrt{۱-v^۲}} & ۰ & ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۱-v^۲}} \end{bmatrix}$$

بخش۶-۹

۱.الف) ن ب) د ج)د د)ن ه)ن

۲.الف) $\sqrt{۱۸}$ ج) تقریبا ۲/۳۴.

۴. الف) $||A|| \approx ۸۴/۷۴$ و $||A^{-۱}|| \approx ۱۷/۰۱$، $cond(A) \approx ۱۴۴۱$

ب) $||\widetilde{x} - A^{-۱}b|| \leq ||A^{-۱}||.||A\widetilde{x} - b|| \approx ۰/۱۷$ و

$$\frac{||\widetilde{x}-A^{-۱}b||}{||A^{-۱}b||} \leq cond(A)\frac{||b-A\widetilde{x}||}{||b||} \approx \frac{۱۴/۴۱}{||b||}$$

۵. $۰/۰۰۱ \leq \frac{||x-\hat{x}||}{||x||} \leq ۱۰$

۷. $\frac{۹}{۷} = R\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}, ||B|| = ۲, cond(B) = ۲$

بخش۶-۱۰

۱.الف) ن ب) د ج)د د)ن ه)د و)ن ز)ن ح)د ط)د ی)ن

۳.ب) $\left\{t\begin{bmatrix} \sqrt{۳} \\ ۱ \end{bmatrix} : \quad t \in \right\}$

۴.ب) $\left\{t\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} : \quad t \in \right\}$ اگر $\varphi = ۰$ و $\left\{t\begin{bmatrix} \cos\varphi + ۱ \\ \sin\varphi \end{bmatrix} : \quad t \in \right\}$ اگر $\varphi \neq ۰$

۷.ج) شش حالت وجود دارد.

۱. در صورتی که $\phi = \psi = ۰$، هر خط گذرنده از مبدا است.

۲.در صورتی که $\phi = ۰, \psi = \pi$، $\left\{t\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$

۳.در صورتی که $\phi = \pi, \psi \neq \pi$، $\left\{t\begin{bmatrix} cos\psi + ۱ \\ -sin\psi \\ ۰ \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$

۴.در صورتی که $\phi \neq \pi, \psi = \pi$، $\left\{ t \begin{bmatrix} ۰ \\ cos\phi - ۱ \\ sin\phi \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

۵.در صورتی که $\phi = \psi = \pi$، $\left\{ t \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

۶.به غیر از موارد فوق، $\left\{ t \begin{bmatrix} sin\phi(cos\psi + ۱) \\ -sin\phi sin\psi \\ sin\psi(cos\phi + ۱) \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

بخش۷-۱

۱.الف) د   ب) ن   ج)د   د)ن   ه)ن   و)ن   ز)د   ح)د

۲.الف) برای $\lambda = ۲$،

$$\left\{ \begin{bmatrix} -۱ \\ -۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \right\}$$

برای $\lambda = -۱$،

$$\left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۰ \end{bmatrix} \right\}$$

برای $\lambda = ۲$،

$$\left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \right\}$$

ج) برای $\lambda = ۲$، $\{۴, -۴x, x^۲\}$.

۳. الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$

بخش۷-۲

۱.الف) د ب) د ج)ن د)د ه)د و)ن ز)ن ح)د

۲. $J=\begin{bmatrix} A_۱ & o & o \\ o & A_۲ & o \\ o & o & A_۳ \end{bmatrix}$ که $A_۱=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$

$$A_۲=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}, A_۳=\begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}$$

۳. الف) $-(t-۲)^۵(t-۳)^۲$

ب)
$$\begin{array}{ccc} \lambda_۱=۲ & \qquad & \lambda_۲=۳ \\ \bullet\ \bullet & & \\ \bullet\ \bullet & & \bullet\ \bullet \\ \bullet & & \end{array}$$

ج) $\lambda_۲=۳$

د) $p_۱=۳, p_۲=۱$

ه) ۱- $\mathrm{rank}(U_۱)=۳, \mathrm{rank}(U_۲)=۰$.

۲- $\mathrm{rank}(U_۱^۲)=۱, \mathrm{rank}(U_۲^۲)=۰$.

۳-۲ $nullity(U_۱)=۲, nullity(U_۲)=۲$.

۴-۴ $nullity(U_۱^۲)=۲, nullity(U_۲^۲)=۲$.

۴.الف) $J=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $Q=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

د) $J = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $Q = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۸. فرم متعارف جردن T عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

و پایه متعارف جردن آن، $\{۲e^x, ۲xe^x, x^۲e^x, e^{۲x}\}$ است.

۲۴.الف) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = e^{۲t}(c_۱ + c_۲t)\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + c_۲\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + c_۳e^{۳t}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = e^{۲t}\left[(c_۱ + c_۲t + c_۳t^۲)\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + (c_۲ + ۲c_۳t)\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + ۲c_۳\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\right]$

بخش۷-۳

۱.الف) ن ب) د ج)ن د)ن ه)د و)ن ز)ن ح)د ط)د

۲. الف) $(t-۳)(t-۱)$ ج)$(t-۲)(t-۱)^۲$ د) $(t-۲)^۲$

۳.الف) $t^۲-۲$ ج) $(t-۲)^۲$ د) $(t+۱)(t-۱)$

۴. در تمرین ۲، الف: و در تمرین ۳، الف و د.

۵. عملگرهای $T_۰$، I و تمام عملگرهایی که هم ۰ و هم ۱ مقدار ویژه آنها هستند.

بخش۷-۴

۱.الف) د ب) ن ج)ن د)د ه)ن و)د ز)ن ح)د

۲.الف) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۲۷ \\ ۱ & ۰ & -۲۷ \\ ۰ & ۱ & ۹ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲}(-۱ + i\sqrt{۳}) & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲}(-۱ - i\sqrt{۳}) \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ۰ & -۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۳. $t^۲ + ۱, t^۲$: $C = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ $\beta = \{۱, x, ۶x + x^۳, -۶ - ۳x^۲\}$