سوال:

فرض کنید که بردار های u, v, w_1, w_2, w_3 برداری هایی در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ باشند. در صورتی که بردار های u, v متعلق به مجموعه $Span\{w_1, w_2, w_3\}$ باشد، اثبات کنید:

$$ru + sv \in Span\{w_1, w_2, w_3\} \qquad\qquad r, s \in \mathbb{R}$$

پاسخ:

از آنجایی که هر یک از بردار های u, v متعلق به مجموعه $Span\{w_1, w_2, w_3\}$ می باشد، بنابرین می توان این دو بردار را به صورت ترکیب خطی(Linear Combination) بردار های w_1, w_2, w_3 نوشت.

$$u = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

$$v = c_1' w_1 + c_2' w_2 + c_3' w_3 \qquad c_1', c_2', c_3' \in \mathbb{R}$$

حال رابطه $ru + sv$ را می نویسیم. $(r, s \in \mathbb{R})$

$$ru + sv = r(c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3) + s(c_1' w_1 + c_2' w_2 + c_3' w_3)$$

حال، سمت راست معادله بر حسب w_1, w_2, w_3 می نویسیم.

$$\rightarrow ru + sv = (rc_1 + sc_1')w_1 + (rc_2 + sc_2')w_2 + (rc_3 + sc_3')w_3$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_1'' = rc_1 + sc_1' \\ c_2'' = rc_2 + sc_2' \\ c_3'' = rc_3 + sc_3' \end{cases}$$

$$\rightarrow ru + sv = c_1'' w_1 + c_2'' w_2 + c_3'' w_3$$

همانطور که مشاهده می شود، توانستیم $ru + sv$ به صورت ترکیب خطی از بردار های w_1, w_2, w_3 بنویسیم. بنابراین طبق تعریف $Span$ ، داریم $ru + sv \in Span\{w_1, w_2, w_3\}$ و قضیه اثبات می شود.