

سوال:

فرض کنید تبدیل های T و S معادلات (۱) و (۲) وارون پذیری را برآورده می کنند. همچنین فرض کنید که T یک تبدیل خطی می باشد. اثبات کنید که در این صورت تبدیل S نیز یک تبدیل خطی می باشد. (راهنمایی: از تعریف تبدیل خطی استفاده کنید.)

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$۱) S(T(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$۲) T(S(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

پاسخ:

فرض کنید که دو بردار u و v در \mathbb{R}^n وجود دارند به گونه ای که $x = S(u)$ و $y = S(v)$. از آنجایی که دو تبدیل T و S وارون یکدیگر هستند، بنابراین می توان رابطه بالا به صورت دیگر نیز بیان کرد. $T(x) = u$ و $T(y) = v$. برای اثبات خطی بودن تبدیل S لازم است دو شرط خطی بودن یک تبدیل را چک کنیم.

$$L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$1) L(x + y) = L(x) + L(y)$$

$$2) L(cx) = cL(x) \quad c \in \mathbb{R}$$

ابتدا شرط اول را چک می کنیم.

$$S(u + v) = S(T(x) + T(y)) = S(T(x + y)) = x + y = S(u) + S(v)$$

حال که شرط اول برقرار است شرط دوم را بررسی می کنیم.

$$S(cu) = S(cT(x)) = S(T(cx)) = cx = cS(u) \quad c \in \mathbb{R}$$

هر دو شرط برقرار است پس بنابراین اثبات شد که تبدیل S نیز یک تبدیل خطی خواهد بود.