

سوال:

- زیر فضای W که شامل همه وکتورهای x در \mathbb{R}^4 است، به گونه ای که این وکتورها بر ستون های ماتریس A عمود اند را در نظر بگیرید. یک پایه برای W بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$$

جواب:

- طبق تئوری 6.3 کتاب درسی میدانیم که W همان $Nul(A^T)$ است. حال با اعمال کاهش سطری بر روی A^T ، پایه فضای پوچ آن را بدست می آوریم.

$$A^T = \begin{bmatrix} 11 & 21 & 31 & 41 \\ 12 & 22 & 32 & 42 \\ 13 & 23 & 33 & 43 \\ 14 & 24 & 34 & 44 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \rightarrow x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \rightarrow x_2 = -2x_3 - 3x_4 \\ 0 = 0 \rightarrow x_3 \text{ is free variable} \\ 0 = 0 \rightarrow x_4 \text{ is free variable} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4$$

$$Nul(A^T) = Col(W) = span\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$$