

تمرینات مبنی بر مآر سی ۴ و جبر خطی - سری هفتم ، ۹۴، ۸، ۲۴ بنام او

۱- با ذکر یک مثال نادری گزاره زیر را رد کنید :

(الف) اگر $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک مجموعه وابسته خطی باشد ، هر یک از مجموعه‌های v_1, \dots, v_n به صورت یک ترکیب خطی از بقیه اعضا نوشت

(ب) اگر S_1 و S_2 زیر مجموعه‌های از فضای برداری V باشند که $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$ ، آنگاه $S_1 = S_2$.

(ج) اگر v_1, v_2, \dots, v_n یک ترکیب خطی بردارهای v_1, v_2, \dots, v_n ، آنگاه $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مستقل خطی است.

(د) اگر زیر مجموعه A از فضای V مستقل خطی باشد ، آنگاه A مولد V نیز می‌باشد.

(ه) اگر " " مولد V باشد ، آنگاه مستقل خطی نیز می‌باشد.

(و) اگر $\dim V = n$ و A یک زیر مجموعه وابسته خطی از V باشد ، آنگاه $|A| > n$.

(ز) اگر B یک پایه فضای برداری V و $S \subseteq V$ مستقل خطی باشد ، آنگاه $S \subseteq B$.

(سج ۱)

۲- فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد . موارد زیر را ثابت کنید :

(الف) اگر $S \subseteq V$ مستقل خطی باشد و $v \in V \setminus \langle S \rangle$ ، آنگاه $S \cup \{v\}$ نیز مستقل خطی است.

(ب) هر زیر مجموعه V که شامل بردار صفر باشد ، وابسته خطی است.

(ج) $\{v_1, v_2\} \subseteq V$ وابسته خطی است اگر و تنها اگر این دو عضو هر کدام مضرب اسکالر باشند.

(۷) زیر مجموعه B از V یک پایه آن است اگر و تنها اگر هر عضو $v \in V$ یک نمایش یکتا به صورت یک ترکیب خطی از اعضای B داشته باشد. (سطح ۱)

۳- فرض کنید V یک فضای برداری باشد و $B \subseteq V$. نشان دهید

(الف) اگر B یک مجموعه مستقل خطی ماکسیمال نباشد، رابطه برشمارش مولد باشد (یعنی زیر مجموعه سراسری یک مستقل خطی نباشد) آنگاه B یک پایه نیست. (سطح ۱)

(ب) اگر B یک مولد مینیمال V نباشد، رابطه برشمارش مولد باشد (یعنی هیچ زیر مجموعه سراسری آن مولد نباشد) آنگاه B یک پایه V است. (سطح ۱)

۴- فرض کنید P_2 فضای برداری تمام چندجمله‌ای‌های درجه حداکثر ۲ با ضرایب حقیقی باشد. برابر هریک از زیر فضاهای زیر یک پایه بنویسید: (سطح ۲)

(الف) P_2 (ب) $W_1 = \{f \in P_2 \mid f(1) = f(-1)\}$ (ج) $\{f \in P_2 \mid \frac{df}{dx} = 0\}$

۵- فرض کنید $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ماتریس باشند، A متقارن و B پادمتقارن باشد. نشان دهید $\{A, B\}$ مستقل خطی است. (سطح ۱)

۶- بعد فضای برداری زیر را بیابید: (سطح ۲)

(الف) V فضای برداری تمام توابع $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ که n یک عدد صحیح نامفروض است. (ب) $V = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$