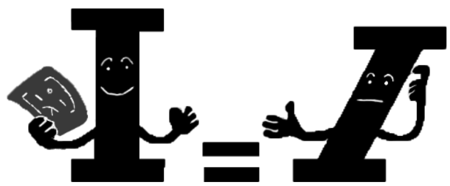
به نام خدا



تمرین پنجم

جبر خطی کاربردی – پاییز ۱۴۰۰

توضیحات

- پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.
- در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق ایمیل linearalgebra.fall1400@gmail.com سوال خود را بپرسید.
- مهلت ارسال پاسخ ها تا ساعت **۲۳:۵۹ جمعه ۱۷** دی می‌باشد.
- پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و درصورت مشاهده هرگونه **تقلب** نمره **صفر** برای کل تمرین منظور خواهد شد
- با توجه به فشردگی برنامه تمرین ها در طول ترم، امکان تمدید تمرین وجود نخواهد داشت.
- پاسخ خود را به صورت یک فایل pdf و با فرمت **HW?_Name_StudentNumber** آپلود کنید. (مثال: HW5_SeyyedFarzadRadnia_9831024).

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) دو وکتور u, v متعامد هستند اگر و تنها اگر $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|u\|^2$.

ب) اگر ستون های ماتریس $A_{m\times n}$، $orthnormal$ باشند، آنگاه $\|Ax\| = \|x\|$.

ج) در صورتی که در معادله $Ax=b$، b یک بردار $orthogonal$ نسبت به تمامی بردار های ستونی ماتریس A باشد، آنگاه جواب $least\ squares$ برای این معادله تمامی بردار های $\hat{x}$ خواهند بود که $A\hat{x} = \mathbf{0}$.

د) هر ماتریس دلخواهی را می توان به فرم تجزیه QR نوشت.

ذ) هر ماتریس متقارن ، n تا مقدار ویژه ی حقیقی متمایز دارد.

ه) در یک عبارت مثبت معین مانند Q به ازای تمام x ها در $\mathbb{R}^n$ مقدار $Q(x)$ بزرگتر از صفر می باشد.

پ) اگر مقدار ویژه($eigenvalue$) های یک ماتریس متقارن مانند A، همگی منفی باشند، آنگاه فرم درجه دوم ($quadratic\ form$) x^TAx، نامعین است.

۲- وکتور های زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}.$$

همچنین وکتور v_4 که بر وکتور های v_1, v_3 عمود است و $v_2 \cdot v_4 = -3$ را در نظر بگیرید. عبارت های خواسته شده را محاسبه کنید.

الف) $v_1 \cdot v_2$

ب) $v_3 \cdot v_4$

پ) $(2v_1 + 3v_2 - v_3)\cdot v_4$

ج) $\|v_1\|, \|v_2\|, \|v_3\|$

چ) فاصله بین v_1 و v_2

۳- فرض کنید a, b وکتور هایی در $\mathbb{R}^n$ باشند به طوریکه $\|a\| = \|b\| = 1$ و $a \cdot b = -\frac{1}{2}$.

طول وکتور $\|a - b\|$ را بدست آورید.

.

۴- فرض کنید $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ یک مجموعه متشکل از وکتور های غیر صفر در $\mathbb{R}^n$ باشد. اگر مجموعه S یک مجموعه $orthogonal$ باشد، آنگاه:

الف) نشان دهید که S یک مجموعه مستقل خطی است.

ب) اگر $k = n$، آنگاه نشان دهید که S یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

۵- تجزیه QR ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

۶- فرض کنید که ماتریس A یک ماتریس $m \times n$ باشد به گونه ای که $A^T A$ وارون پذیر می باشد. نشان دهید که در این صورت ستون های ماتریس A، مستقل خطی می باشند.

۷- ماتریس A را قطری سازی عمودی کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۸- عبارت ${x_2}^2 6+ Q(x1,x2) = 3{x_1}^2 - 4x_1x_2$ را در نظر بگیرید.

الف) مشخص کنید که آیا Q مثبت معین است یا منفی معین یا نامعین؟

ب) عبارت را با تغییر متغیر $(x = Py)$ به یک فرم $quadratic$ (چند جمله ای درجه ۲) که هیچ عبارت ضرب متقابل (مثل x_1x_2) یا همان $cross - product$ ای ندارد تبدیل کنید.

۹- تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بیابید. تمام محاسبات خود را نشان دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۰- ثابت کنید اگر $A_{n\times n}$ یک ماتریس مثبت معین باشد، آن گاه قطری سازی عمودی ماتریس A، $(A = PDP^{-1})$ برابر با تجزیه SVD آن خواهد بود.

موفق باشید

تیم تدریسیاری جبر خطی پاییز ۱۴۰۰