دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات

جبرخطی کاربردی

نیمسال دوم ۹۸ـ۹۷

مدرس :دکتر امیر مزلقانی

پاسخ تمرین دوم (جبر ماتریسی)

توجه !!!

- دانشجویان گرامی پاسخ سوالات را به دقت مطالعه کنید و در صورت داشتن هرگونه ابهام و اشکال از طریق ایمیل با تدریسیاران در میان بگذارید.

تمارین:

۱. معکوس ماتریس زیر را به روش گوس ـ جردن پیدا کنید:

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ -۳ & ۱ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

حل. برای این منظور داریم :

$$[\ B \quad I\ ] = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ -۳ & ۱ & ۴ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & -۳ & ۴ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ & ۳ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۸ & -۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ & ۳ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۷ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۸ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱۰ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۷ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۸ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱۰ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۷/۲ & ۳/۲ & ۱/۲ \end{bmatrix}$$

پس :

$$B^{-۱} = \begin{bmatrix} ۸ & ۳ & ۱ \\ ۱۰ & ۴ & ۱ \\ ۷/۲ & ۳/۲ & ۱/۲ \end{bmatrix}$$

◄

۲. محاسبه معکوس ماتریس:

(آ) به کمک الگوریتم هایی که در این فصل برای محاسبه ماتریس معکوس آموخته اید، معکوس ماتریس های زیر را محاسبه نمایید:

$$A_{۲,۴\times۴} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A_{۱,۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

حل. برای این منظور داریم :

$$[\ A_{1,3\times3} \quad I\ ] = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

بطور مشابه برای ماتریس $A_{2,4\times4}$ می توانید نشان دهید که وارون آن به صورت زیر است(به دلیل کاملاً مشابه بودن روند از آوردن آن صرف نظر شده است):

$$B = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

◀

(ب) فرض کنید ماتریس A یک ماتریس $n \times n$ پایین مثلثی با درایه های ۱ باشد و ماتریس B معکوس آن در نظر گرفته شود. با توجه به قسمت قبل فرم ماتریس B را حدس زده و ثابت کنید : $AB = I$ و $BA = I$

حل. نشان می دهیم $B = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{array}\right]$ همان ماتریس مورد نظر است.

حال برای $j = 1, \ldots, n$ ستون j ام ماتریس های A ، B و I را با $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j,$ و $\mathbf{e}_j$ نشان می دهیم. با توجه به نماد گذاری فوق داریم :

$$\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_{j+1} = \mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j+1}$$

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{b}_n = \mathbf{e}_n$$

حال برای آنکه نشان دهیم $AB = I$ ،کافی است نشان دهیم که $A\mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j$.

برای $j = 1, \ldots, n-1$ داریم :

$$A\mathbf{b}_j = A\left(\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j+1}\right) = A\mathbf{e}_j - A\mathbf{e}_{j+1} = \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_{j+1} = \mathbf{e}_j$$

برای $j = n$ نیز داریم :

$$A\mathbf{b}_n = A\mathbf{e}_n = \mathbf{a}_n = \mathbf{e}_n$$

حال برای آنکه نشان دهیم $BA = I$ کافی است توجه کنیم که برای هر j داریم: $\mathbf{a}_j = \mathbf{e}_j + \cdots + \mathbf{e}_n$.

حال :

$$B\mathbf{a}_j = B\left(\mathbf{e}_j + \cdots + \mathbf{e}_n\right) = \mathbf{b}_j + \cdots + \mathbf{b}_n =$$

$$\left(\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j+1}\right) + \left(\mathbf{e}_{j+1} - \mathbf{e}_{j+2}\right) + \cdots + \left(\mathbf{e}_{n-1} - \mathbf{e}_n\right) + \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_j$$

که این ادعای فوق را ثابت می کند. پس در مجموع نشان دادیم که B وارون A می باشد. ◀

(ج) استراتژی ای که در قسمت الف و ب برای پیدا کردن معکوس ماتریس $A_{n\times n}$ استفاده کردید را درپیش گرفته و معکوس ماتریس زیر را حدس بزنید. سپس حدس خود را ثابت کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & & 0 \\ 1 & 2 & 3 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

حل. نشان خواهیم داد که $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & & \\ 0 & -1/3 & 1/3 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & -1/n & 1/n \end{bmatrix}$ وارون ماتریس معرفی شده است.

حال برای $j=1,\dots,n$ ستون j ام ماتریس های A ، B و I را با $\mathbf{a}_j,\mathbf{b}_j,$ و $\mathbf{e}_j$ نشان می دهیم.

حال برای $j=1,\dots,n-1$ داریم:

$$\mathbf{a}_j=j\left(\mathbf{e}_j+\cdots+\mathbf{e}_n\right)$$
$$\mathbf{b}_j=\frac{1}{j}\mathbf{e}_j-\frac{1}{j+1}\mathbf{e}_{j+1}$$

و برای $j=n$ نیز :

$$\mathbf{b}_n=\frac{1}{n}\mathbf{e}_n$$

حال برای آنکه نشان دهیم $AB=I$ کافی است نشان دهیم که $A\mathbf{b}_j=\mathbf{e}_j$.

برای $j=1,\dots,n-1$ داریم :

$$A\mathbf{b}_j=A\left(\frac{1}{j}\mathbf{e}_j-\frac{1}{j+1}\mathbf{e}_{j+1}\right)=\frac{1}{j}\mathbf{a}_j-\frac{1}{j+1}\mathbf{a}_{j+1}\quad=\left(\mathbf{e}_j+\cdots+\mathbf{e}_n\right)-\left(\mathbf{e}_{j+1}+\cdots+\mathbf{e}_n\right)=\mathbf{e}_j$$

هم چنین برای $j=n$ داریم :

$$A\mathbf{b}_n=A\left(\frac{1}{n}\mathbf{e}_n\right)=\frac{1}{n}\mathbf{a}_n=\mathbf{e}_n$$

حال برای آنکه نشان دهیم $BA=I$ کافی است توجه کنیم که برای هر j داریم:

$$B\mathbf{a}_j=j\left(B\mathbf{e}_j+\cdots+B\mathbf{e}_n\right)=j\left(\mathbf{b}_j+\cdots+\mathbf{b}_n\right)=j\left(\frac{1}{j}\mathbf{e}_j\right)=\mathbf{e}_j$$

که در آن از خاصیت تلسکوپی $\mathbf{b}_j+\cdots+\mathbf{b}_n$ استفاده شده است. پس در مجموع خواسته مسئله را نشان دادیم. ◀

۳. یکی از ماتریس های کاربردی در پردازش سیگنال، تصحیح خطا و درون یابی چند جمله ای ها، ماتریس واندرموند می باشد. ماتریس واندرموند به صورت زیر تعریف می شود:

$$V=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

فرض کنید که بردار $\mathbf{c}=(c_0,\dots,c_{n-1})$ در $\mathbb{R}^n$ و بردار $\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_n)$ به گونه ای داده شده اند که رابطه $V\mathbf{c}=\mathbf{y}$ برقرار باشد. هم چنین چند جمله ای $p(t)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$p(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{n-1}t^{n-1}$$

(آ) نشان دهید برای $i = ۱, ۲, ..., n$ داریم:

$$p\left(x_i\right) = y_i$$

در واقع $p(t)$ چند جمله ای درون یاب برای نقاط $\left(x_۱, y_۱\right), \ldots, \left(x_n, y_n\right)$ محسوب می شود چرا که از نقاط مذکور می گذرد.

حل. برای $i = ۱, \ldots, n$ داریم :

$$p\left(x_i\right) = c_۰ + c_۱ x_i + \cdots + c_{n-۱} x_i^{n-۱} = \text{row}_i(V) \cdot \begin{bmatrix} c_۰ \\ \vdots \\ c_{n-۱} \end{bmatrix} = \text{row}_i(V)\mathbf{c}$$

به کمک خاصیت ضرب ماتریس ها و اینکه $\mathbf{c}$ به گونه ای انتخاب شده است که $V\mathbf{c} = \mathbf{y}$ خواهیم داشت:

$$\text{row}_i(V)\mathbf{c} = \text{row}_i(V\mathbf{c}) = \text{row}_i(\mathbf{y}) = y_i$$

فلذا حکم برقرار است. ◀

(ب) فرض کنید $x_۱, \ldots, x_n$ اعدادی متمایز هستند. نشان دهید که ستون های ماتریس V متسقل خطی اند. (راهنمایی: یک چند جمله ای درجه $n - ۱$ چه تعداد صفر می تواند داشته باشد؟)

حل. طبق فرض سوال $x_۱, \ldots, x_n$ اعدادی متمایز هستند. حال $V\mathbf{c} = ۰$ را در نظر بگیرید. المان های $\mathbf{c}$ ضرایب یک چند جمله ای هستند که مقدار آن در $x_۱, \ldots, x_n$ صفر می شود. حال می دانیم که یک چندجمله ای غیر صفر از درجه $n - ۱$ نمی تواند در n نقطه صفر شود. بنابراین، چند جمله ای می بایست صفر باشد و این بدان معناست که تمام c_i ها برابر صفر هستند که این موضوع یعنی آن که ستون های ماتریس V مستقل خطی هستند. ◀

(ج) ثابت کنید که اگر $x_۱, \ldots, x_n$ اعداد متمایز و $y_۱, \ldots, y_n$ اعداد دلخواه باشند، یک چند جمله ای از درجه حداکثر $n - ۱$ موجود است که از نقاط $\left(x_۱, y_۱\right), \ldots, \left(x_n, y_n\right)$ می گذرد.

حل. همانطور که در قسمت قبلی سوال دیدیم اگر $x_۱, \ldots, x_n$ متمایز باشند، آنگاه ستون های V مستقل خطی می باشند. از قضایایی که خوانده ایم، می دانیم که با توجه به گزاره ذکر شده، V معکوس پذیر بوده و ستون های آن $\mathbf{R}^n$ را اسپن می کند. بنابراین، برای هر $\mathbf{y} = (y_۱, \ldots, y_n)$ دلخواه در $\mathbf{R}^n$ یک بردار $\mathbf{c}$ ای وجود دارد به گونه ای که $V\mathbf{c} = \mathbf{y}$.
حال کافی است که چند جمله ای p را یک چندجمله ای با ضرایب درایه های بردار $\mathbf{c}$ بگیریم. بنابراین p از نقاط $\left(x_۱, y_۱\right), \ldots, \left(x_n, y_n\right)$ می گذرد ◀

۴. یکی از تبدیلات معمولی که در کارهای گرافیکی دو بعدی برروی مختصات همگن مورد استفاده قرار می گیرد شامل ماتریس ۳×۳ با فرمت زیر است :

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{p} \\ ۰^T & ۱ \end{bmatrix}$$

که در آن A یک ماتریس ۲×۲ بوده و $\mathbf{p}$ در $\mathbb{R}^۲$ تعریف می شود. نشان دهید چنین تبدیلی اینگونه عمل مي كند كه ابندا يك تبديل خطي اعمال سپس به دنبال ان يك انتقال را روی $\mathbb{R}^۲$ انجام مي دهد. (راهنمایی : یک فاکتوریزاسیون مناسب شامل ماتریس های بلوکی پیدا کنید.)

حل. فرض کنید که در ابتدا تبدیل خطی روی $\mathbb{R}^۲$ که با A نشان داده می شود اعمال شده و سپس به دنبال آن، یک انتقال $\boldsymbol{p}$ اعمال می گردد. نمایش ماتریسی در مختصات همگن برای تبدیل خطی به صورت $\begin{bmatrix} A & ۰ \\ ۰^T & ۱ \end{bmatrix}$ بوده و نمایش

ماتریسی برای انتقال به صورت $\begin{bmatrix} I & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$ می باشد.
با اعمال این تبدیلات به ترتیب، نمایش ماتریسی به صورت زیر خواهد بود که همان ماتریس مورد انتظار است :

$$\begin{bmatrix} I & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

◀

۵. تجزیه LU را برای ماتریس زیر بدست آورده و با استفاده از آن معادله $Ax = b$ را حل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \\ 24 \end{bmatrix}$$

حل.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0/5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & -0/5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[L \;\; b] = \begin{bmatrix} 0/5 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 21 \\ 1 & 0 & 1 & 24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = [I \;\; y]$$

$$[U \;\; y] = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 & 21 \\ 0 & -2 & -0/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [I \;\; x]$$

◀

۶. موارد زیر را ثابت کنید.

(آ) اگر ستون های B وابسته خطی باشند ستون های AB نیز وابسته خطی هستند.

حل. اگر ستون های ماتریس hB وابسته خطی باشند آنگاه بردار غیر صفری مانند x وجود دارد که $Bx = 0$. در نتیجه A را از دو طرف در عبارت ضرب می کنیم داریم : $A(Bx) = 0$ و در نتیجه داریم $(AB)x = 0$ از انجاییکه x یک بردار غیر صفر است پس ستون های AB نیز وابسته خطی هستند. ◀

(ب) اگر A, B و C ماتریس های وارون پذیر $n \times n$ باشند آنگاه جواب معادله $C^{-1}(A + X)B^{-1} = I_n$ بیابید.(Xیک ماتریس مجهول است).

حل. یافتن جواب این معادله شامل بررسی وجود جواب و یافتن آن است،حال برای اینکه ببینیم جواب اگر وجود داشته باشد چه چیزی باید باشد،فرض کنیم X جوابی باشد که در معادله مورد نظر ما صدق کند آنگاه هر دو طرف معادله را در C ضرب می کنیم. داریم:

$$CC^{-1}(A + X)B^{-1} = CI, \quad I(A + X)B^{-1} = C, \quad (A + X)B^{-1}B = CB, \quad (A + X)I = CB$$

داخل پرانتز را در I ضرب می کنیم و از دو طرف A را کم می کنیم آنگاه داریم:

$$AI + XI = CB, \quad A + X = CB, \quad X = CB - A$$

پس اگر جوابی وجود داشته باشد همان $CB-A$ حال برای اینکه نشان دهیم واقعا $CB-A$ جواب است آن را به جای X جایگذاری می کنیم و داریم:

$$C^{-1}[A+(CB-A)]B^{-1}=C^{-1}[CB]B^{-1}=C^{-1}CBB^{-1}=II=I$$

▶

(ج) اگر مجموع داریه های روی قطر اصلی یک ماتریس مربعی را با $trc(A)$ نشان دهیم ثابت کنید: $trc(AB) = trc(BA)$

حل. فرض کنید $AB=(C_{ij})$ و $BA=(C'_{ij})$ داریم:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\qquad c'_{ij}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj},\qquad 1\leq i,j\leq n$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}trc(AB)&=\sum_{i=1}^{n}C_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}b_{ki}\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n}C'_{kk}=trc(BA)\end{aligned}$$

▶

(د) ثابت کنید: $\lambda\in\mathbb{R}\quad trc(\lambda A+B)=\lambda trc(A)+trc(B)$

حل. فرض کنید $A=(a_{ij}),B=(B_{ij})$ داریم:

$$trc(\lambda A+B)=\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_{kk}+b_{kk})=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{kk}+\sum_{k=1}^{n}b_{kk}=\lambda trc(A)+trc(B)$$

▶

(ه) ثابت کنید اگر $trc(AA^T)=0$ آنگاه $A=0$ است.

حل. فرض کنید $A=(a_{ij})$ و $A^T=(B_{ij})$ بنابراین:

$$b_{ij}=a_{ji}\qquad i=1,2,\cdots,n\qquad j=1,2,\cdots,n$$

حال با فرض $AA^T=(C_{ij})$ لذا $C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ و چون $trc(AA^T)=0$ بنابراین $\sum_{i=1}^{n}C_{ii}=0$ داریم:

$$0=\sum_{i=1}^{n}C_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$$

ولی چون $b_{ki}=a_{ik}$ بنابراین: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=0$ لذا مجموع مربعات تمام درایه های ماتریس A برابر صفر است لذا تمام درایه ها صفر می باشند پس $A=0$.

▶

۷. ماتریس $\begin{bmatrix}A_{n\times n} & B_{n\times m}\\ C_{m\times n} & D_{m\times m}\end{bmatrix}_{(n+m)\times(n+m)}$ را در نظر بگیرید.

(آ) اگر ماتریس A و $D - CA^{-۱}B$ معکوس پذیر باشند، آنگاه نشان دهید:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} A^{-۱} + A^{-۱}B\left(D - CA^{-۱}B\right)^{-۱} CA - ۱ & -A^{-۱}B\left(D - CA^{-۱}B\right)^{-۱} \\ -\left(D - CA^{-۱}B\right)^{-۱} CA - ۱ & \left(D - CA^{-۱}B\right)^{-۱} \end{bmatrix}$$

حل.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} I + B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} - B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} + -B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ CA^{-1} + CA^{-1}(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} - D(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -CA^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} + D(D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} - (D - CA^{-1}B)(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)(D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

▶

(ب) اگر ماتریس D و $A - BD^{-۱}C$ معکوس پذیر باشند، آنگاه نشان دهید:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} \left(A - BD^{-۱}C\right)^{-۱} & -\left(A - BD^{-۱}C\right)^{-۱} BD^{-۱} \\ -D^{-۱}C\left(A - BD^{-۱}C\right)^{-۱} & D^{-۱}C\left(A - BD^{-۱}C\right)^{-۱} BD^{-۱} + D^{-۱} \end{bmatrix}$$

حل. همانند قسمت الف و به علت کاملاً مشابه بودن از آوردن حل صرف نظر شده است. ▶

۸. اگر داشته باشیم $A^{۳} = ۲I$ ،نشان دهید ماتریس B وارون پذیر است:

$$B = A^{۲} - ۲A + ۲I$$

حل.

$$B = A^{۲} - ۲A + ۲I = A^{۲} - ۲A + A^{۳} = A\left(A^{۲} + A - ۲I\right) = A(A + ۲I)(A - I)$$

و داریم :

$$I = A^{۳} - I = (A - I)\left(A^{۲} + A + I\right)$$

فلذا خواهیم داشت: $|A - I| \neq ۰$ از طرفی:

$$A^{۳} + ۸I = ۱۰I \rightarrow (A + ۲I)\left(A^{۲} - ۴A + ۴I\right) = ۱۰I$$

فلذا خواهی داشت: $|A + ۲I| \neq ۰$ از طرفی طبق رابطه اول:

$$|B| = |A||A + ۲I||A - I| \neq ۰$$

در نتیجه B وارون پذیر است. ▶

۹. اگر $A = LU$ و همچنین $A = L_۱U_۱$ و همه فاکتورها $(\mathrm{L}_۱, \mathrm{U}_۱, L, U)$ وارون پذیر باشند ، ثابت کنید: $L = L_۱$ و $U = U_۱$.

حل. داریم $\mathrm{LU} = \mathrm{L}_۱\mathrm{U}_۱$ ، دو طرف تساوی را از سمت چپ در $L_۱^{-۱}$ و از سمت راست در $U^{-۱}$ ضرب میکنیم . در نتیجه خواهیم داشت : $\mathrm{L}_۱^{-۱}\mathrm{LUU}^{-۱} = \mathrm{L}_۱^{-۱}\mathrm{L}_۱\mathrm{U}_۱\mathrm{U}^{-۱}$

و به دلیل اینکه طبق فرض وارون پذیر هستند ، داریم : $UU^{-۱} = I$ و $L_۱^{-۱}L_۱ = I$.بنابراین $\mathrm{L}_۱^{-۱}\mathrm{L} = \mathrm{U}_۱\mathrm{U}^{-۱}$

سمت راست تساوی بالامثلثی و سمت چپ تساوی پایین مثلثی است ،بنابراین این دو تنها در صورتی با هم برابرند که ماتریس های قطری باشند و به علت اینکه درایه های روی قطر آنها ۱ است پس برابر با ماتریس همانی I هستند.بنابراین حکم اثبات میشود و $L = L_۱$ و $U = U_۱$ است. ▶

۱۰. ماتریس جایگشت (P) از ضرب دنباله ای از ماتریس های مقدماتی که از جابه جایی دو سطر ایجاد شده اند، به دست می آید.

(آ) نشان دهید که وارون ماتریس و ترانهاده ماتریس جایگشت با هم برابر است یعنی : $P^{-1} = P^T$

حل. طبق آنچه در سوال گفته شده است داریم:

$$P = E_1 E_2 \cdots E_n$$

که هر E_i از جابجایی دو سطر ماتریس همانی تشکیل شده و ماتریسی مقدماتی است. با توجه به اینکه E_i ماتریسی متقارن است ، داریم : $E_i^T = E_i$ و همچنین به علت اینکه انجام دو جابجایی سطری یکسان روی ماتریس همانی ، همان ماتریس همانی را نتیجه میدهد و تغییری ایجاد نمیشود ، داریم : $E_i^2 = I$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} PP^T &= (E_1 E_2 \cdots E_n)(E_1 E_2 \cdots E_n)^T = (E_1 E_2 \cdots E_n)\left(E_n^T E_{n-1}^T \cdots E_1^T\right) \\ &= (E_1 E_2 \cdots E_n)(E_n E_{n-1} \cdots E_1) = E_1 \cdots E_{n-1} E_n^2 E_{n-1} \cdots E_1 \\ &= E_1 \cdots E_{n-1} E_{n-1} \cdots E_1 = \cdots = I \end{aligned}$$

در نتیجه :

$$P^{-1} = P^T$$

◀

(ب) اگر $P^{-1} = P^T$ آیا لزوما P ، ماتریس جایگشت است؟ اگر پاسخ شما مثبت است، این ادعا را اثبات کرده و در غیر این صورت، مثال نقض بزنید.

حل. خیر ، مثال نقض : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ◀