دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات

جبرخطی کاربردی

نیمسال دوم ۹۶ـ۹۷

مدرس :دکتر ناظر فرد

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

تمرین فصل۵،۶و۷

توجه!!! :

- این تمرین از مباحث مربوط به فصل۵ ،۶و۷ طراحی شده است که شامل ۱۱سوال اجباری و ۸ سوال امتیازی است که نمره سوال های امتیازی فقط به نمرات تمرین شما کمک می کند.
- در برخی سوالات چند قسمتی از شما خواسته شده است به تعدادی از قسمت ها به اختیار پاسخ دهید ،پاسخگویی به بیش از مقدار تعیین شده نمره اضافی ندارد ،از بقیه قسمت ها می توانید برای تمرین بیشتر استفاده کنید.
- در پایان نیز تعدادی سوال برای تمرین بیشتر در نظر گرفته شده است ،که به حل آن ها نمره ای تعلق نمی گیرد صرفا برای تمرین توسط خود شما در نظر گرفته شده است.
- پس از حل مسائل آن ها را به صورت یک فایل pdf در قسمت مورد نظر با فرمت زیر

$$9531000\_T\_Lutz\ \ Pfannenstiel\_HW4.pdf$$

آپلود کنید.

- مهلت ارسال پاسخ تمارین ساعت ۲۳:۵۵ روز جمعه ۹۷/۴/۱ خواهد بود.

۱. یکی از ماتریس های زیر را به اختیار انتخاب کنید ابتدا چند جمله ای سرشت نما را برای آن بیابید سپس مقدار ویژه و بردار های ویژه را برای آن مشخص کنید در نهایت صورت قطری شدن آن را قطری کنید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ & -۱ \\ -۱ & -۲ & ۲ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -۱ & ۴ & -۲ \\ -۳ & ۴ & ۰ \\ -۳ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

۲. ۵ مورد از گزاره های زیر را به اختیار ثابت کنید:

۱. نشان دهید اگر λ مقدار ویژه ماتریس واون پذیر A باشد آنگاه $\lambda^{-۱}$ مقدار ویژه ماتریس $A^{-۱}$ است.

۲. نشان دهید اگر $A^{۲} = ۰$ انگاه تنها مقدار ویژه A صفر است.

۳. λ مقدار ویژه از A است اگر و فقط اگر مقدار ویژه ای از A^T باشد.

۴. نشان دهید A و A^T جند جمله ای سرشت نمای مشابه ای دارند.

۵. با توجه به الگوریتم QR ثابت گنید اگر $A = QR$ باشد که Q معکوس پذیر است آنگاه A با $A_{۱} = RQ$ متشابه است.

۶. فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد که $A^T = A$. نشان دهید اگر برای x های غیر صفری در $\mathbb{C}^n$، $Ax = \lambda x$ باشد آنگاه λ حقیقی است و در واقع قسمت حقیقی x بردار ویژه A است.

۷. برای بردار های u, v در $\mathbb{R}^n$ ثابت کنید:

$$\| u + v \|^{۲} + \| u - v \|^{۲} = ۲ \| u \|^{۲} + ۲ \| v \|^{۲}$$

۸. اگر U, V دو ماتریس $n \times n$ متعامد باشند،نشان دهید UV نیز یک ماتریس متعامد است.

۳. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ باشد که مجموع درایه های تمام سطر های آن s باشد ثابت کنید s مقدار ویژه ای از A است.

۴. **(سوال امتیازی)** برای هر اسکالر a, b, c نشان دهید:

$$A = \begin{bmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

همگی متشابهند و اگر $BC = CB$ باشند آنگاه A دو مقدار ویژه صفر دارد.

۵. **(سوال امتیازی)** اگر

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

باشد، $A^{۲}, A^{۶}$ را محاسبه کنید.

۶. فرض کنید $\varepsilon = \{e_{۱}, e_{۲}, e_{۳}\}$ پایه استاندارد برای $\mathbb{R}^{۳}$ و $\mathcal{B} = \{b_{۱}, b_{۲}, b_{۳}\}$ پایه ای برای فضای برداری V باشد و $T : \mathbb{R}^{۳} \longrightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد که:

$$T(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}) = (x_{۳} - x_{۱})b_{۱} - (x_{۱} + x_{۲})b_{۲} + (x_{۱} - x_{۲})b_{۳}$$

۱. $T(e_{۱}), T(e_{۲})$ و $T(e_{۳})$ را محاسبه کنید.

۲. $[T(e_{۱})]_{\mathcal{B}}, [T(e_{۲})]_{\mathcal{B}}$ و $[T(e_{۳})]_{\mathcal{B}}$ را محاسبه کنید.

۳. ماتریس تبدیل T را تحت پایه های $\varepsilon, \mathcal{B}$ بیابید.

۷. ثابت کنید مجموع درایه های روی قطر اصلی هر ماتریس قطری شدنی برابر است با مجموع مقادیر ویژه آن ماتریس.

۸. یک دیگر از روش هایی زمانی که تقریبی از بردار ویژه در دسترس باشد می شود با آن مقادیر ویژه را یافت روش خارج قسمت ریلی (quotient ayleighr) است.

مشاهده کردیم اگر $Ax = \lambda x$ آنگاه $x^T Ax = x^T(\lambda x) = \lambda(xTx)$ و در این صورت خارج قسمت ریلی

$$R(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x}$$

برابر λ خواهد بود.اگر x به حد کافی به به یک بردار ویژه λ نزدیک باشد آنگاه این خارج قسمت به λ نزدیک خواهد شد.زمانی که A متقارن باشد خارج قشمت ریلی $R(x_k) = (x_k^T Ax_k)/(x_k^T x_k)$ با دقتی دو برابر نسبت μ_k در روش توانی عمل خواهد کرد این موضوع را برای ماتریس و بردار اولیه زیر نشان دهید:

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}, x_۰ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

۹. **(سوال امتیازی)** اگر W یک زیر فضا از فضای ضرب داخلی V باشد، $u \in V$ را در نظر بگیرید نشان دهید $v \in W$ تصویری از u بر روی W است به طوری که

$$u = v + v' \qquad for \ \ some \ \ v' \in W^{\perp}$$

اگر و فقط اگر

$$\| u - v \| \leq \| u - w \| \quad , \quad for \ \ every \ \ w \in W$$

۱۰. **(سوال امتیازی)** فرض کنید $W_۱, W_۲$ زیر فضایی از فضای ضرب داخلی V باشد آنگاه نشان دهید:

۱. $(W_۱ + W_۲)^{\perp} = W_۱^{\perp} \cap W_۲^{\perp}$

۲. $(W_۱ \cap W_۲)^{\perp} = W_۱^{\perp} + W_۲^{\perp}$

۱۱. فرض کنید $y = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۹ \end{bmatrix}$ و $u_۱ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۱۰}} \\ -\frac{۳}{\sqrt{۱۰}} \end{bmatrix}$ و $W = span\{u_۱\}$.
$proj_W \boldsymbol{y}, (UU^T)y$ را حساب کنید.

۱۲. فرض کنید W زیر فضایی از $\mathbb{R}^n$ با پایه متعامد $\{w_۱, w_۲, \cdots, w_p\}$ و همچنین فرض کنید $\{v_۱, v_۲, \cdots, v_q\}$ پایه ای متعامد برای $W^{\perp}$ باشد.

۱. چرا $\{w_۱, w_۲, \cdots, w_p, v_۱, v_۲, \cdots, v_q\}$ یک پایه متعامد است ؟

۲. چرا $span$ مجموعه قسمت ۱ $\mathbb{R}^n$ را تولید می کند؟

۳. نشان دهید $dimW + dimW^{\perp} = n$.

۱۳. یکی از ماتریس های زیر را به اختیار انتخاب و برای فضایی ستونی آن یک پایه متعامد پیدا کنید:

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۵ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۵ & -۲ \\ ۳ & -۷ & ۸ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ & -۴ \\ -۱ & ۴ & -۳ \\ ۱ & -۴ & ۷ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

۱۴. تمام جواب های کوچکترین مربعات را برای تساوی $Ax = b$ بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۸ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

۱۵. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد که ستون هایش مستقل خطی هستند و $b \in \mathbb{R}^n$.
با استفاده از روش نرمال یک فرمول برای $\hat{b}$ که تصویر b بر روی $Col\ \ A$ هست بیابید.
۱۶. (**سوال امتیازی**)نشان دهید اگر A یک ماتریس $n \times n$ مثبت معین باشد،آنگاه یک ماتریس مثبت معین $n \times n$ مانند B وجود دارد که $A = BB^T$.
۱۷. (**سوال امتیازی**) ماتریس A را در نظر بگیرید، $\lambda_۱$ بزرگترین مقدار ویژه آن و $u_۱$ بردار ویژه یکه متناظر با $\lambda_۱$ است،ثابت کنید بزرگترین مقدار $x^T Ax$ با توجه به قیود:

$$x^T x = ۱ \qquad x^T u_۱ = ۰$$

برابر $\lambda_۲$ است که $\lambda_۲$ دومین مقدار ویژه بزرگ A است. همچنین این بزرگترین مقدار زمانی اتفاق می افتد که x برابر $u_۲$ که بردار ویژه یکه متناظر با $\lambda_۲$ است،باشد.

۱۸. (**سوال امتیازی**)تجزیه SVD ماتریس زیر را به دست آورید.(راهنمایی: ماتریس $\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$ می تواند به عنوان یک انتخاب برای U در نظر گرفته شود.)

$$\begin{bmatrix} -۳ & ۱ \\ ۶ & -۲ \\ ۶ & -۲ \end{bmatrix}$$

۱۹. (**سوال امتیازی**) نشان دهید در یک ماتریس مربعی قدر مطلق دترمینان برابر حاصلضرب مقادیر تکین ماتریس است.

$\star\star$ **سوالات زیر برای تمرین بیشتر در نظر گرفته شده است و به آن ها نمره ای تعلق نمی گیرد:**
۲۰. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰/۲ & ۰/۳ \\ ۰/۳ & ۰/۸ & ۰/۳ \\ ۰/۲ & ۰ & ۰/۴ \end{bmatrix}, v_۱ = \begin{bmatrix} ۰/۳ \\ ۰/۶ \\ ۰/۱ \end{bmatrix}, v_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \\ ۲ \end{bmatrix}, v_۳ = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

۱. نشان دهید $v_۱, v_۲$ و $v_۳$ بردار ویژه های A هستند.

۲. فرض کنید $x_۰$ برداری در $\mathbb{R}^۳$ باشد که درایه های آن نامنفی باشند و مجموعشان ۱ باشد. ثابت کنید وجود دارد ثابت هایی مثل $c_۱, c_۲, c_۳$ که $x_۰ = c_۱v_۱ + c_۲v_۲ + c_۳v_۳$ باشد و همچنین $w^T x_۰$ را محاسبه کنید و نتیجه بگیرید $c_۱ = ۱$.

۳. برای $k = ۱, ۲, \cdots$ تعریف می کنیم $x_k = A^k x_۰$ که $x_۰$ در قسمت (۲) معرفی شده است .نشان دهید $x_k \to v_۱$ زمانی که k افزایش می یابد.

۲۱. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ متقارن باشد،فرض x هر برداری در $\mathbb{C}^n$ باشد و در نظر بگیرید $q = \bar{x}^T Ax$.
تساوی های زیر نشان می دهند که $q = \bar{q}$. هرکدام از تساوی ها را با ادله کافی توجیه کنید.

$$\bar{q} = \overline{\bar{x}^T Ax} = x^T \overline{Ax} = x^T A\bar{x} = (x^T A\bar{x})^T = \bar{x}^T A^T x = q$$

۲۲. $u \neq ۰$ را در $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید،فرض کنید $L = span\{u\}$ برای هر y در $\mathbb{R}^n$ تصویر y نسبت به L را اینگونه تعریف می کنیم:

$$refl_L\boldsymbol{y} = ۲.proj_L\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}$$

نشان دهید $\boldsymbol{y} \mapsto refl_L\boldsymbol{y}$ یک تبدیل خطی است.
۲۳. فرض کنید $A = QR$ یک تقسیم بندی QR برای ماتریس Aای باشد که ستون های آن مستقل خطی هستند. A را به شکل $[A_۱ \ \ A_۲]$ می نویسیم که $A_۱$ p ستون دارد. چگونه می توان یک تقسیم بندی QR برای $A_۱$ یافت؟توضیح دهید تقسیم بندی شما چگونه شرایط یک تقسیم بندی QR را حفظ می کند.