فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

A) نشان دهید $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=0$

B) نشان دهید اگر $ad-bc=0$ باشد آنگاه فرم کاهش یافته آن به فرم $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ می‌شود

C) نشان دهید اگر $ad-bc\neq 0$ باشد آنگاه ماتریس A وارون پذیر خواهد بود.

جواب:

A) $A^2=\begin{bmatrix} a^2-bc & ab-bd \\ ac-cd & bc-d^2 \end{bmatrix}$ و $(a+d)A=\begin{bmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^2-(a+d)I+(ad-bc)I=\begin{bmatrix} a^2-a^2-ad+ad-bc+bc & ab-ab+db-db \\ ac-ac+dc-cd & bc-bc+d^2-d^2+ad-ad \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} ad & bd \\ c & d \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} ad & bd \\ -bc & -bd \end{bmatrix}$

$$\sim\begin{bmatrix} ad & bd \\ \underbrace{ad-bc}_{0} & \underbrace{bd-bd}_{0} \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ad & bd \\ -bc & -bd \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ad-bc & bd-bd \\ -bc & -bd \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ -bc & -bd \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -bc & -bd \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -bd \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از آن جا که در هر ستون عنصر ستونی دارای پیش وارون‌پذیر است