اگر W یک زیرفضا از R^n با پایه‌های متعامد $\{w_1, \ldots, w_p\}$ باشد و همچنین $\{v_1, \ldots, v_p\}$ نیز پایه‌های متعامد $W^{\perp}$ باشند، آنگاه:

الف) توضیح دهید که چرا $\{w_1, \ldots, w_p, v_1, \ldots, v_p\}$ یک مجموعه متعامد است.

ب) توضیح دهید که چرا مجموعه بیان شده در بخش الف، فضای R^4 را span می‌کند.

پ) نشان دهید که $dim\, W + dim\, W^{\perp} = n$.

پاسخ)

a. By hypothesis, the vectors $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p$ are pairwise orthogonal, and the vectors $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q$ are pairwise orthogonal. Since $\mathbf{w}_i$ is in W for any i and $\mathbf{v}_j$ is in $W^{\perp}$ for any j, $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ for any i and j. Thus $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ forms an orthogonal set.

b. For any $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$, write $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$ as in the Orthogonal Decomposition Theorem, with $\hat{\mathbf{y}}$ in W and $\mathbf{z}$ in $W^{\perp}$. Then there exist scalars $c_1, \ldots, c_p$ and $d_1, \ldots, d_q$ such that $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z} = c_1\mathbf{w}_1 + \ldots + c_p\mathbf{w}_p + d_1\mathbf{v}_1 + \ldots + d_q\mathbf{v}_q$. Thus the set $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ spans $\mathbb{R}^n$.

c. The set $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ is linearly independent by (a) and spans $\mathbb{R}^n$ by (b), and is thus a basis for $\mathbb{R}^n$. Hence $\dim W + \dim W^{\perp} = p + q = \dim \mathbb{R}^n$.