① الف) ابتدا دترمینان را برای $n=2$ و $n=3$ ، بدست می آوریم:

$$n=2 \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)$$

$$n=3 \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 - x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 - x_1 x_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 - x_1 x_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2(x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 & x_3(x_3 - x_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_1 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$$

حدس می زنیم که جواب برای n برابر است با: $\prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$

سپس با استقرا آن را اثبات می کنیم.

پایه استقراء: اگر $n=2$ باشد، دترمینان ماتریس برابر با $\underline{x_2 - x_1}$ می شود.

[redacted] فرض استقراء: $n=k \longrightarrow \prod_{1 \le i < j \le k} (x_j - x_i)$

حکم استقراء: $n=k+1 \longrightarrow \prod_{1 \le i < j \le k+1} (x_j - x_i)$

Subject
Date

ستون اول　ستون دوم　ستون سوم　ستون k+1 ام

$$n=k+1 \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^k \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^k \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \cdots & x_{k+1}^k \end{vmatrix}$$

به ازای $2 \leq i \leq k+1$

(ستون i-1 ام) x_1 - ستون i ام ← ستون i ام

$$\begin{vmatrix} 1 & \cancel{x_1}-x_1 & x_1^2-x_1^2 & \cdots & x_1^k-x_1^k \\ 1 & x_2-x_1 & x_2^2-x_2x_1 & \cdots & x_2^k-x_2^{k-1}x_1 \\ 1 & x_3-x_1 & x_3^2-x_3x_1 & \cdots & x_3^k-x_3^{k-1}x_1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_{k+1}-x_1 & x_{k+1}^2-x_1x_{k+1} & & x_{k+1}^k-x_{k+1}^{k-1}x_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{k-1}(x_2-x_1) \\ 1 & x_3-x_1 & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_3^{k-1}(x_3-x_1) \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_{k+1}-x_1 & x_{k+1}(x_{k+1}-x_1) & \cdots & x_{k+1}^{k-1}(x_{k+1}-x_1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{k-1}(x_2-x_1) \\ x_3-x_1 & x_3(x_3-x_1) & & x_3^{k-1}(x_3-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \\ x_{k+1}-x_1 & x_{k+1}(x_{k+1}-x_1) & \cdots & x_{k+1}^{k-1}(x_{k+1}-x_1) \end{vmatrix}$$

$$=(x_{k+1}-x_1)(x_k-x_1)\cdots(x_3-x_1)(x_2-x_1)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{k-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{k-1} \\ 1 & x_4 & x_4^2 & \cdots & x_4^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \cdots & x_{k+1}^{k-1} \end{vmatrix}}_{\text{طبق فرض استقرا، می‌شود } \prod_{2\le i<j\le k+1}(x_j-x_i)}$$

$$=(x_{k+1}-x_1)(x_k-x_1)\cdots(x_2-x_1)\prod_{2\le i<j\le k+1}(x_j-x_i)$$

$$\boxed{=\prod_{1\le i<j\le k+1}(x_j-x_i)}$$

ب) سطر n ام را از سطرهای ۱ تا $n-1$ ام کم می‌کنیم.

سطر i ام $\leftarrow$ سطر i ام $-$ سطر n ام

$1\le i\le n-1$

$$\begin{array}{c|ccccc|} 1 & a & b & b & \cdots & b \\ 2 & b & a & a & \cdots & b \\ 3 & b & b & a & \cdots & b \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & b & b & b & & a \\ \hline & 1 & 2 & 3 & & n \end{array}$$

همه‌ی ستون های ۱ تا $n-1$ ام را با ستون n ام جمع می‌کنیم.

ستون n ام $\leftarrow \sum_{1\le i\le n}$ (ستون i ام)

$$=\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & b-a \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & b-a \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & b-a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

PAPCO

$$= \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & a-b & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a+(n-1)b \end{vmatrix}$$

ماتریس تبدیل به یک ماتریس پایین مثلثی شد. دترمینان می شود حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی :

$$\boxed{=(a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)}$$

ج)

$$T(n) = \begin{array}{c|cccccc|} 1 & a+b & ab & 0 & & 0 & 0 \\ 2 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & a+b & & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ n-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \\ \hline & 1 & 2 & 3 & & n-1 & n \end{array}$$

اگر روی سطر اول بسط دهیم

$$T(n) = (a+b) \underbrace{\begin{array}{c|cccccc|} 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ n-2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ n-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \\ \hline & 1 & 2 & 3 & & n-2 & n-1 \end{array}}_{T(n-1)} - ab \begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a+b & ab & & 0 \\ 0 & 1 & a+b & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & ab \\ 0 & 0 & 0 & & a+b \end{vmatrix}$$

اگر روی ستون اول بسط می دهیم

$$T(n) = (a+b)T(n-1) - ab \underbrace{\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & a+b \end{vmatrix}}$$

Scanned by CamScanner

$$T(n) = (a+b)T(n-1) - abT(n-2)$$

حال باید این رابطه‌ی بازگشتی را حل کنیم.

$T(1) = a+b$, $T(2) = a^2+b^2+ab$

جواب معادله را حدس می‌زنیم $T(n) = cr^n$?

$$cr^n = (a+b)cr^{n-1} - abcr^{n-2} \longrightarrow r^2 = (a+b)r - ab$$

$$r^2 - (a+b)r + ab = 0 \longrightarrow (r-a)(r-b) = 0$$

$$r_1 = a,\ r_2 = b \longrightarrow T(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

$$\boxed{T(n) = c_1 a^n + c_2 b^n}$$

---

(2) الف) اگر X یک ماتریس $n\times n$ باشد $\longleftarrow$ $|X| = |X^T|$

$X = A + B^T \quad \rightarrow X^T = (A+B^T)^T$

حال باید ترانهاده‌ی X را حساب کنیم.

$x_{ij} = a_{ij} + b_{ji}$ $\Big]\rightarrow$ $x^t_{ij} = x_{ji} = \boxed{a_{ji} + b_{ij}}$

$$\rightarrow (A+B^T)^T = (A^T + B) \longrightarrow \boxed{X^T = (A^T + B)}$$

$$\Rightarrow |A + B^T| = |A^T + B|$$

ب) با توجه به رابطه $A.adj(A)=|A|I_n$ از دو طرف دترمینان می‌گیریم:

$$|A.adj(A)| = ||A|I_n|$$

$$\to |A||adj(A)| = |A|^n$$

$$\boxed{|adj(A)| = |A|^{n-1}}$$

ج) $X = adj(A)$ $\quad$ $X.adj(X) = |X|I_n$

$$adj(A).adj(adj(A)) = |adj(A)|I_n$$

از دو طرف دترمینان می‌گیریم:

$$\cancel{|adj(A)|}\,|adj(adj(A))| = |adj(A)|^{\cancel{n}\ n-1}$$

۳) برای بدست آوردن دترمینان ماتریس A ، سعی می‌کنیم ماتریس A را به یک ماتریس بالا مثلثی (یا پایین مثلثی) تبدیل کنیم.

$$\begin{bmatrix} \pm ۲ & \pm ۲ & \cdots & \pm ۲ \\ ۰ & & & \\ ۰ & & & \\ ۰ & & & \\ ۰ & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

ابتدا از درایه $a_{0,0}$ شروع به صفر کردن درایه‌های زیر درایه $a_{0,0}$ می‌کنیم، عناصر بقیه ستون‌ها در سطرهای بعد از ۱ برابر ۴± خواهند بود.

اگر همین کار را برای درایه $a_{۲۲}$ انجام دهیم و درایه‌های زیر $a_{۲۲}$ را صفر کنیم بقیه درایه‌ها ۸± خواهند بود.

به همین ترتیب درایه خانه a_{nn} برابر $\pm ۲^{n-1}$ خواهد شد. پس کل دترمینان برابر می‌شود با:

$$(\pm ۲)(\pm ۴)(\pm ۸)\ \dots\ (\pm ۲^{n-1})$$

که عبارت بالا بر ۴^{n-1} بخش‌پذیر است.

ج) ابتدا ماتریس روبرو را در نظر می‌گیریم :

$$Y = \begin{bmatrix} -I_{m,m} & A \\ 0 & I_{n,n} \end{bmatrix}$$

حال ماتریس فوق را در ماتریس داده شده (فرض می‌کنیم X) ضرب می‌کنیم.

$$YX = \begin{bmatrix} -AB & 0 \\ -B & I \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{دو طرف را حساب می‌کنیم}]{\det} \det(YX) = \det\left(\begin{bmatrix} -AB & 0 \\ -B & I \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} -AB & 0 \\ -B & I \end{bmatrix}^T\right)$$

$$\det(Y).\det(X) = (-1)^m \det(AB) \longrightarrow (-1)^m \det(X) = (-1)^m \det(AB)$$

$$\det(X) = \det(AB)$$

به کمک استقرا سوال را حل می کنیم:

۵) برای $k=2$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} P_1 & a \\ b & P_2 \end{vmatrix} = \frac{b(P_1-a)(P_2-a)-a(P_1-b)(P_2-b)}{b-a}$$

$$= \boxed{P_1P_2-ab}$$

فرض می کنیم برای

$$k=n-1 \implies \Delta_{n-1} = \frac{b(P_1-a)\cdots(P_{n-1}-a)-a(P_1-b)(P_2-b)\cdots(P_{n-1}-b)}{b-a}$$

داریم

حال برای $k=n$ اثبات می کنیم:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} P_1 & a & \cdots & a \\ b & P_2 & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & P_{n-1} & a \\ b & b & \cdots\ b & P_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1-b & a-P_2 & \cdots & 0 \\ b & P_2 & \cdots & a \\ \vdots & & & \\ b & b & b\ \cdots & P_n \end{vmatrix}$$

$$= (P_1-b)\begin{vmatrix} P_2 & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots \\ b & \cdots & P_n \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} + (P_2-a)\begin{vmatrix} b & a & \cdots & a \\ b & P_3 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ b & \cdots & \cdots & P_n \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

طبق فرض برابر است با

$$\frac{b(P_2-a)(P_3-a)\cdots(P_n-a)-a(P_2-b)\cdots(P_n-b)}{b-a}$$

طبق فرض برابر است با

$$\frac{b(b-a)(P_3-a)\cdots(P_n-a)-a\cancel{(b-b)}^{0}\cdots}{b-a}$$

Scanned by CamScanner

$$\Longrightarrow \Delta_n=\frac{(P_1-b)}{b-a}\Big(b(P_2-a)\cdots(P_n-a)-a(P_2-b)\cdots(P_n-b)\Big). \quad +$$

$$\frac{P_2-a}{b-a}\Big(b(b-a)(P_3-a)\cdots(P_n-a)\Big)$$

$$\Longrightarrow \Delta_n=\frac{-af(b)}{b-a}+\frac{1}{b-a}\Big((P_3-a)\cdots(P_n-a)\Big)\Big(b(P_1-b)(P_2-a)-b(b-a)(P_2-a)\Big)$$

$$\Longrightarrow \Delta_n=\frac{-af(b)}{b-a}+\frac{1}{b-a}\Big((P_3-a)\cdots(P_n-a)\Big)\Big(b(P_1-a)(P_2-a)\Big)$$

$$=\boxed{\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}}$$

ب) (استقرا)

$$k=2:\ \begin{vmatrix} P_1 & a \\ a & P_2 \end{vmatrix}=P_1P_2-a^2=a(P_2-a)+P_2f_2(a)$$

$$=a\sum_{i=1}^{1}f_i(a)+P_nf_n(a)$$

فرض می‌کنیم برای $k=n-1$ نیز برقرار باشد و برای $k=n$ اثبات می‌کنیم

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} P_1 & a & \cdots & a \\ a & P_2 & \cdots & a \\ \vdots & & \ddots & \\ a & & & P_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} P_1-a & \cdots & & a \\ a-P_2 & P_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a & & & P_n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = (P_1 - a)\begin{vmatrix} P_2 & & a \\ & \ddots & \\ a & & P_n \end{vmatrix}^{\text{I}} + (P_2 - a)\begin{vmatrix} a & P_2 & & a \\ & & \ddots & \\ a & & & P_n \end{vmatrix}^{\text{II}}$$

از فرض استقرا $\Rightarrow \text{(I)} = a\sum_{i=2}^{n-1} f'_i(a) + P_n f'_i(a) \;,\; f'_i(a) = (P_2 - a)\cdots(P_n - a)$

بدون $(P_i - a)$

و $\text{(II)} = a\sum_{i=2}^{n-1} f''_i(a) + P_n f''_i(a) \;,\; f''_{i}(a)_{i=2} = (P_3 - a)\cdots(P_n - a)$

(برای $i \neq 2$ $\quad f''_i(a) = 0$)

$$\Longrightarrow \text{(II)} = a(P_3 - a)\cdots(P_n - a)$$

پس $\Delta_n = (P_1 - a)\left(a\sum_{i=2}^{n-1} f'_i(a) + P_n f'_i(a)\right) + (P_2 - a)\,a(P_3 - a)\cdots(P_n - a)$

$$f_i(a) = f'_i(a)(P_1 - a) \Longrightarrow \Delta_n = a\sum_{i=2}^{n-1} f_i(a) + P_n f(a) + a f_1(a)$$

$$\Longrightarrow \Delta_n = a\sum_{i=1}^{n-1} f_i(a) + P_n f(a)$$

$$\Delta_n = b \sum_{i=1}^{n-1} (a-b)^{n-1} + a\,(a-b)^{n-1}$$

$$= b(n-1)\,(a-b)^{n-1} + a\,(a-b)^{n-1}$$

$$= bn + (a-b)(a-b)^{n-1} = \underline{bn + (a-b)^{n}}$$

۶- الف)

$$A^t=-A \Rightarrow |A^t|=|-A|=(-۱)^n|A|$$
$$|A^t|=|A| \quad \Rightarrow \quad \underline{|A|=۰}$$

n فرد

ب)

$$A^۲+I=۰ \Rightarrow A^۲=-I \Rightarrow |A^۲|=|A|^۲=(-۱)^n$$

n نمی‌تواند فرد باشد

۷- الف)

$$x_۳=\frac{\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ٤ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۵ & ۰ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ & -۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۶ & ۰ & ٤ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۳ & ۳ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۵ & ۱ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۰ & -۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ٤ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & -۳ & ۰ & ٤ \end{vmatrix}}=\frac{۵٤}{۱۳۱}$$

ب)

$$x_۱=\frac{\begin{vmatrix} b_۱ & ۱ & -۲ \\ b_۲ & ۶ & -۱ \\ b_۳ & ۱ & ۵ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٤ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۶ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۵ \end{vmatrix}}=\frac{۳۱b_۱-۷b_۲+۱۱b_۳}{۱۱٤}$$

$$x_۲=\frac{-(۱۶b_۱-۲۲b_۲+۲b_۳)}{۱۱٤} \qquad x_۳=\frac{-۳b_۱-۳b_۲+۲۱b_۳}{۱۱٤}$$