پاسخ تمرین سوم (دترمینان)

توجه !!!

- دانشجویان گرامی پاسخ سوالات را به دقت مطالعه کنید و در صورت داشتن هرگونه ابهام و اشکال از طریق ایمیل با تدریسیاران در میان بگذارید.

پاسخ تمارین:

۱. فرض کنید ماتریس های A، I،D،C،B ماتریس های $n \times n$ باشند و A معکوس پذیر است.

(آ) ماتریس های X و Y را بگونه ای پیدا کنید که ماتریس زیر، تجزیه ی LU باشد:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

و سپس نشان دهید:

$$det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = (detA).det(D - CA^{-1}B)$$

حل. قسمت راست:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ XA & XB + Y \end{bmatrix}$$

عبارت فوق باید با سمت چپ برابر باشد:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A & B \\ XA & XB + Y \end{bmatrix}$$

باید مقدار X ، Y را طوری تعیین کنیم که $XA = C$ و $XB + Y = D$. با توجه به اینکه A معکوس پذیر است داریم: $X = CA^{-1}$

$$XB + Y = D$$

$$Y = D - XB = D - CA^{-1}B$$

$$det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} .det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} = detA.det(D - CA^{-1}B)$$

►

(ب) نشان دهید اگر $AC = CA$ آنگاه:

$$det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = det(AD - CB)$$

حل.

$$det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = detA.det(D - CA^{-۱}B) = det(A.(D - CA^{-۱}B)) =$$
$$det(AD - ACA^{-۱}B) = det(AD - CAA^{-۱}B) = det(AD - CB)$$

►

۲. فرض کنید A، B، C، D و I ماتریس های $n \times n$ باشند.با استفاده از تعاریف و خواص دترمینان فرمول های زیر را ثابت کنید:

(آ)

$$det\begin{bmatrix} A & ۰ \\ ۰ & I \end{bmatrix} = detA$$

حل. با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای k داریم: فرض کنید I_k یک ماتریس همانی I و $k \times k$ باشد:

$$k = ۱$$

$$A_۱ = \begin{bmatrix} A & ۰ \\ ۰ & I_۱ \end{bmatrix} = (-۱)^{(n+۱)+(n+۱)}۱.detA = detA$$

ماتریس فوق یک مانریس $(n + ۱) \times (n + ۱)$ و حول سطر آخر گسترش دادیم.

فرض کنید $detA_{k-۱} = detA$ به ازای $۱ < k \leq n$ پس:

$$detA_k = det\begin{bmatrix} A & ۰ \\ ۰ & I_k \end{bmatrix} =$$

توسعه حول سطر آخر

$$(-۱)^{(n+k)+(n+k)}۱.detA_{k-۱} = detA_{k-۱} = detA$$

►

(ب)

$$det\begin{bmatrix} I & ۰ \\ C & D \end{bmatrix} = detD$$

حل. با استفاده از اصل استقرای ریاضی داریم:

$$D_k = \begin{bmatrix} I_k & ۰ \\ C_k & D \end{bmatrix}$$

به ازای $k = ۱$ و گسترش حول سطر اول داریم:

$$D_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ C_۱ & D \end{bmatrix} = (-۱)^{۱+۱}۱.detD = detD$$

حال فرض کنید $detD_{k-۱} = detD$ به ازای $۱ < k \leq n$

حال D_k را حول سطر اول گسترش می دهیم:

$$D_k = \begin{bmatrix} I_k & ۰ \\ C_k & D \end{bmatrix} = (-۱)^{۱+۱} ۱.detD_{k-۱} = detD$$

▶

(ج)

$$det \begin{bmatrix} A & ۰ \\ C & D \end{bmatrix} = detA.detD = det \begin{bmatrix} A & B \\ ۰ & D \end{bmatrix}$$

حل. توجه کنید که :

$$\begin{bmatrix} A & ۰ \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & ۰ \\ ۰ & I \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I & ۰ \\ C & D \end{bmatrix}$$

با استفاده از قضیه ی $Binet - Couchy$ (داخل کتاب) و همچنین قسمت های الف و ب داریم:

$$\begin{bmatrix} A & ۰ \\ C & D \end{bmatrix} = detA.detD$$

همچنین با استفاده از قضیه ی شماره ی ۵ کتاب:

$$det \begin{bmatrix} A & B \\ ۰ & D \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} A & B \\ ۰ & D \end{bmatrix}^T = det \begin{bmatrix} A^T & ۰ \\ B^T & D^T \end{bmatrix} = detA^T.detD^T = detA.detD$$

▶

۳. هریک گزاره های زیر را با فرض هم اندازه و مربعی بودن A, B ثابت کنید:

(آ) $(adj(A))^T = adj(A^T)$

حل. فرض کنید $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ لذا برای $۱ \leq i, j \leq n$ داریم $b_{ij} = a_{ij}$ فرض کنید برای $۱ \leq i, j \leq n$ ، $c_{ij} = (-)^{i+j}|A(i,j)|$ و $c'_{ij} = (-)^{i+j}|A^T(i,j)|$ طبق تعریف adj داریم :

$$adj(A) = (c_{ij})^T, \qquad adj(A^T) = (c'_{ij})^T$$

بنابراین $(adj(A))^t = (c_{ij})$. $A(i,j)$ ماتریس حاصل از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A است ولی ستون i ام و ستون j ام ماتریس A همان سطر j ماتریس A و ستون i ام ماتریس A^T است لذا $A(i,j) = A^T(j,i)$. بنابراین

$$c_{ij} = (-۱)^{i+j}|A(i,j)| = (-۱)^{i+j}|A^T(j,i)| = c'_{ji}$$

لذا داریم:

$$c_{ij} = (c'_{ij})^T \rightarrow (adj(A))^T = adj(A^T)$$

▶

(ب) اگر A منفرد باشد آنگاه $adj(A)$ نیز منفرد است.

حل. با توجه به رابطه $A.adj(A) = |A|I_n$ چون A منفرد است لذا $|A| = ۰$ بنابراین $A.adj(A) = ۰$ حال اگر به برهان خلف $adj(A)$ نامنفرد باشد طرفین رابطه را از راست در $adj(A)^{-۱}$ ضرب می کنیم رد این صورت داریم:

$$A.adj(A).adj(A)^{-۱} = ۰ \rightarrow A = ۰ \rightarrow adj(A) = ۰$$

که این تناقض است پس $adj(A)$ منفرد است. ▶

(ج) $|adj(A)| = |A|^{n-1}$

حل. اگر A نامنفرد باشد لذا $|A| \neq 0$ و با توجه به رابطه $A.adj(A) = |A|I_n$ از طرفین دترمینان میگیریم :

$$|A.adj(A)| = ||A|I_n| \to |A|.|adj(A)| = |A|^n \to |adj(A)| = |A|^{n-1}$$

حال اگر A منفرد باشد پس $adj(A)$ نیز طبق قسمت قبل منفرد است بنابر این داریم:

$$|adj(A)| = |A|^{n-1} = 0$$

►

(د) $adj(BA) = adj(B)adj(A)$

حل. با توجه به رابطه adj داریم:

$$adj(BA).BA = BA.adj(BA) = |BA|.I_n \quad \text{(چرا؟)}$$

$$A.adj(A) = adj(A).A = |A|I_n, \quad B.adj(B) = adj(B).B = |B|I_n$$

بنابراین

$$B.A.adj(A)adj(B) = B.(|A|I_n).adj(B) = |A|(B.adj(B)) = |A||B|I_n = |AB|I_n \qquad (1)$$

$$adj(A).adj(B).BA = adj(A).(|B|I_n).A = |B|(adj(A).A) = |B||A|I_n = |BA|I_n \qquad (2)$$

با توجه به برابر بودن طرف راست روابط ۱ و ۲ حکم ثابت است.

►

(ه) $|adj(adj(A))| = |A|^{(n-1)^2}$

حل. اگر A منفرد باشد طبق قسمت (ب)، $adj(A)$ نیز منفرد است.لذا با استفاده مجدد از این قسمت $adj(adj(A))$ نیز منفرد است،بنابراین:

$$|adj(adj(A))| = 0 = |A|^{(n-1)^2}$$

حال فرض کنید A نامنفرد باشد لذا $|A| \neq 0$ از طرفی:

$$adj(A), adj(adj(A)) = |adj(A)|I_n$$

با ضرب طرفین از چپ در A داریم:

$$A.adj(A).adj(adj(A)) = |adj(A)|A \to |A|adj(adj(A)) = |adj(A)|A$$

حال طبق قسمت (ج) داریم $|adj(A)| = |A|^{n-1}$.بنابراین:

$$|A|adj(adj(A)) = |A|^{n-1}A \to adj(adj(A)) = |A|^{n-2}A \to |adj(adj(A))| = ||A|^{n-2}A| = (|A|^{n-2})|A|$$
$$\to |A|^{n^2-2n+1} = |A|^{(n-1)^2}$$

►

۴. با استفاده از عملیات های سطری ثبات کنید:

$$det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

حل.

$$det\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{bmatrix} = det\begin{bmatrix}0 & a-b & a^2-b^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{bmatrix} = det\begin{bmatrix}0 & a-b & a^2-b^2\\ 0 & b-c & b^2-c^2\\ 1 & c & c^2\end{bmatrix} = (a-b)(b-c)det\begin{bmatrix}0 & 1 & a+b\\ 0 & 1 & b+c\\ 1 & c & c^2\end{bmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)det\begin{bmatrix}0 & 1 & a+b\\ 0 & 1 & b+c\\ 1 & c & c^2\end{bmatrix} = (a-b)(b-c)det\begin{bmatrix}0 & 0 & a+b-b-c\\ 0 & 1 & b+c\\ 1 & c & c^2\end{bmatrix} = (a-b)(b-c)det\begin{bmatrix}0 & 0 & a-c\\ 0 & 1 & b+c\\ 1 & c & c^2\end{bmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(a-c)det\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & b+c\\ 1 & c & c^2\end{bmatrix}$$
$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

►

۵. فرض کنید $A_{n\times n}$ یک ماتریس $n\times n$ باشد با درایه های ± 1 نشان دهید که $det(A)$ بخش پذیر است بر 2^{n-1} ؟
با استفاده از عملیات سطری تمام سطر ها بجز سطر اول را منهای سطر اول کنید حال تمام درای های سطرهای ۲ تا n
$-2, 0, 2$، هستند پس کافی است از هر سطر ۲ را فاکتور بگیریم که در این صورت داریم :

$$det(A) = det(2^{n-1}B) = 2^{n-1}det(B)$$

۶. فرض کنید $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ یک تبدیل خطی با ماتریس $\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}$ باشد که a,b,c مقادیری مثبت باشند، S را کره واحد در نظر بگیرید که سطح آن با معادله $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ محدود شده است،

۱. نشان دهید $T(S)$ با بیضی به معادله $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$ محدود شده است.

حل. برای اینکه نشان دهیم $T(S)$ با یک بیضی به معادله $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$ محدود شده است فرض کنیم $u=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}$ و در نظر می گیریم $x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=Au$ در این صورت داریم $u_1=x_1/a, u_2=x_2/b, u_3=x_3/c$
پس u در داخل این کره قرارمی گیرد $(u_1^2+u_2^2+u_3^2\leq 1)$ اگر و فقط اگر x در داخل $T(S)$ قرار گیرد $(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}\leq 1)$
►

۲. با این فرض که حجم کره واحد $4\pi/3$ است حجم بیضی مطرح شده در قسمت ۱ را بیابید.

حل. با استفاده از قشیه ۱۰ کتاب داریم:

$$\text{مساحت بیضی} = \text{مساحت T(S)} = |detA|.\text{مساحت S} = abc\frac{4\pi}{3}$$

►

۷. (امتیازی)علی و ولی در دو شهر مجاور یکدیگر زندگی می کنند ،شهری که علی در آن زندگی می کند دچار سیل شده است و آب همه جای شهر را فرا گرفته است،دریچه ای در وسط این دو شهر قرار دارد که در صورت باز شدن تمامی

آب شهر علی وارد شهر ولی می شود این دریچه به یک کامپیوتر وصل است،طرز کار این کامپیوتر به گونه ای است که ماتریسی ۱۳۹۸×۱۳۹۸ بر روی آن در نظر گرفته شده است زمانی که دترمینان مانریس ناصفر باشد دریچه باز می شود و در غیر اینصورت دریچه بسته می ماند،علی و ولی هرکدام به عنوان نماینده شهرشان وظیفه دارند تلاش کنند تا شهر خود را از سیل برهانند برای این کار هرکدام به نوبت باید یک درایه خالی این ماتریس را پر کنند(در ابتدا ماتریس خالی است) و در نهایت کامپیوتر بر اساس دترمینان ماتریس کامل پر شده تصمیم به باز و بسته کردن دریچه می کند. روشی برای پرکردن ماتریس توسط ولی ارائه دهید تا شهر خود را از سیل مصون نگه دارد.

حل. دترمینان ماتریسی با دو سطر(یا ستون) برابر صفر است حال فرض کنید هر خانه ای با مختصات i و j ای که علی انتخاب کرد ولی همان عدد را در خانه ی $(i + ۱ - (i \bmod ۲) \times ۲)$ و j بگذارد(شماره گذاری سطر ها از صفر شروع میشود) در این صورت سطر ها دو به دو با هم برابر میشوند که این دترمینان را صفر میکند و این کار برای ولی حتما شدنی است زیرا هر خانه ای یک خانه ی متناظر دارد و اگر علی بتواند در یکی از آن ها عددی بگذارد(یعنی آن خانه خالی باشد) حتما خانه ی متناظرش هم خالی است .

◀

۸. (امتیازی) فرض کنید $f(x) = (p_۱ - x)(p_۲ - x)\dots(p_n - x)$ و همچنین:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} p_۱ & a & a & a & \dots & a & a \\ b & p_۲ & a & a & \dots & a & a \\ b & b & p_۳ & a & \dots & a & a \\ b & b & b & p_۴ & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & b & \dots & p_{n-۱} & a \\ b & b & b & b & \dots & b & p_n \end{vmatrix}$$

الف) نشان دهید اگر $a \neq b$ انگاه:

$$\Delta_n = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

حل. با استفاده از استقرا روی n .ستون دوم را از ستون اول کم کنید و دترمینان نتیجه را حول ستون اول باز کنید.

$$\Delta_n = (p_۱ - a)\Delta_{n-۱} + a(p_۲ - b)\dots(p_n - b)$$

با استفاده از استقرا داریم:

$$\Delta_{n-۱} = \frac{bF(a) - aF(b)}{b - a}$$

که در آن $F(x) = (p_۲ - x)\dots(p_n - x)$ با ساده کردن داریم:

$$\Delta_n = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}, if a \neq b$$

◀

ب)نشان دهید اگر $a = b$ آنگاه:

$$\Delta_n = a\sum_{i=۱}^{n} f_i(a) + p_n f_n(a)$$

که $f_i(a)$ یعنی $f(a)$ بدون عامل $(p_i - a)$

حل. اگر $a = b$ آنگاه:

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= (p_۱ - a)\Delta_{n-۱} + af_۱(a) \\
&= (p_۱ - a)[(p_۲ - a)\Delta_{n-۲} + aF_۲(a)] + af_۱(a) \\
&= (p_۱ - a)(p_۲ - a)\Delta_{n-۲} + af_۲(a) + af_۱(a) \\
&= \dots \\
&= (p_۱ - a)\dots(p_{n-۲} - a)\Delta_۲ + af_{n-۲}(a) + af_۱(a)
\end{aligned}$$

توجه کنید که:

$$\Delta_۲ = p_n p_{n-۱} - a^۲ = p_n(p_{n-۱} - a) + (p_n - a)a$$

که بوسیله ی آن، به جواب مورد نظر می رسیم.

▶