به نام خدا

پاسخ تمرین سوم

جبر خطی کاربردی – بهار ۱۴۰۱

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱- با توجه به عملیات ساده‌سازی دترمینان A را به دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}0 & -2 & 3\\ 2 & 5 & -6\\ 4 & 8 & -8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & -2 & 3\\ 2 & 5 & -6\\ 2 & 4 & -4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2 & 4 & -4\\ 2 & 5 & -6\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2 & 4 & -4\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}2 & 4 & -4\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & -2 & 3\\ 2 & 5 & -6\\ 4 & 8 & -8\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0 & -2 & 3\\ 2 & 5 & -6\\ 2 & 4 & -4\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}2 & 4 & -4\\ 2 & 5 & -6\\ 0 & -2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}2 & 4 & -4\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}2 & 4 & -4\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=(-2)(2)(1)(-1)=4$$

۲-

الف) با استفاده از دترمینان استقلال خطی بردارهای v_3, v_2, v_1 را ثابت کنید.

$$\mathrm{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ -1\end{bmatrix},\ \mathrm{v}_2=\begin{bmatrix}-4\\ -8\\ -7\end{bmatrix},\ \mathrm{v}_3=\begin{bmatrix}2\\ -9\\ 0\end{bmatrix}$$

ب) حجمی که سه بردار فوق در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌سازند را به دست آورید.

ج) حال حجمی که تبدیل سه بردار ذکر شده تحت تبدیل با ماتریس B می‌سازند را به دست آورید.

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

پاسخ:

الف)

$$|A| = |\mathrm{v}_1 \quad \mathrm{v}_2 \quad \mathrm{v}_3| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & -8 & -9 \\ -1 & -7 & 0 \end{vmatrix} = -63 - 36 + 12 = -87 \ \neq 0$$

پس مستقل خطی است.

ب)

$$\mathrm{V} = |\det(A)| = |-87\ | = 87$$

ج)

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

$$\mathrm{V} = |\det(A)| \times |\det(A)| = 7 \times 87 = 609$$

۳-

الف) با استفاده از روش کرامر، ستون سوم ماتریس A^{-1} را بدون محاسبه‌ی بقیه‌ی ستون‌ها به‌دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ب) با استفاده از روش کرامر، عبارت مقابل را ثابت کنید.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

پاسخ:

الف)

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(20-18) - (-5)(8-6) + (-7)(6-5) = -2 + 10 - 7 = 1$$

x: A^{-1} ستون سوم ماتریس

$$\text{Ax=e}_3 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -5 & -7 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{5}{1} = 5 \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-8}{1} = -8 \\ x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{5}{1} = 5 \end{cases} \Longrightarrow x = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ب)

x: A^{-1} ستون j ام ماتریس

$$\text{Ax=e}_j \Rightarrow x_i = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{11} & & 0 & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & 1 & a_{j(i+1)} & \cdots & a_{jn} \\ & & & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & 0 & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \xRightarrow{\text{بسط روی ستون } j} \dfrac{1 \times c_{ji}}{|A|} = \dfrac{c_{ji}}{|A|} = {a_{ij}}^{-1} = A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

۴- دترمینان ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 9 & 9 & 9 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

اگر $\frac{5}{9}$ برابرِ سطر سوم را از سطر هفتم کم کنیم، ردیف صفر ایجاد می‌شود. لازم به ذکر است عمل کم کردن یک سطر از یک سطر دیگر در دترمینان تغییری ایجاد نمی‌کند.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 9 & 9 & 9 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 9 & 9 & 9 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

با ایجاد سطر صفر دترمینان یک ماتریس صفر می‌شود.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{7\,j} A_{7\,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \times 0 \times A_{7\,j} = 0$$

۵- در صورت درستی هر مورد، آن را اثبات کنید و در صورت نادرست بودن آن، مثال نقضی ارائه دهید.

الف) برای ماتریس مربعی A داریم: $det(A) = det(A^T)$.

ب) اگر A و B، $n \times n$ باشند، داریم: $det(AB) = det(BA)$.

ج) اگر A و P، $n \times n$ باشند و P نیز معکوس‌پذیر باشد، داریم: $det(PAP^{-1}) = det(A)$.

د) اگر U، $n \times n$ باشد و $U^TU = I$، داریم: $det(U) = \pm 1$.

ه) اگر $det(A^4) = 0$ باشد داریم: A معکوس‌پذیر است.

پاسخ:

الف) درست

اثبات استقرا:

The base case: $n = 1 \Rightarrow \det A_{1\times 1} = \det A^T_{1\times 1}$

The inductive step:

$$n = k \Rightarrow \det A_{k\times k} = \det A^T_{k\times k}$$

Now we want prove for $n = k + 1$

$$a_{ij} \in A, \qquad a'_{ij} \in A^T$$

$$\det A_{(k+1)\times(k+1)} = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} \quad \left(A_{ij} \in M_k(\mathbb{R})\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A^T_{1j} = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} a'_{j1} \det A^T_{1j} = \det A^T_{(k+1)\times(k+1)}$$

ب) درست

$$\left.\begin{matrix} \det AB = \det A \cdot \det B \\ \det BA = \det B \cdot \det A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \det AB = \det BA$$

ج) درست

$$\det PAP^{-1} = \det P \cdot \det A \cdot \det P^{-1} = \det PP^{-1} \cdot \det A = \det I \cdot \det A = \det A$$

د) درست

$$\det U^T U = \det I \Rightarrow \det U^T \cdot \det U = (\det U)^2 = 1 \Rightarrow \det U = \pm 1$$

ه) نادرست

$$\det A^4 = (\det A)^4 = 0$$

$$\det A = 0$$

بنابراین، ماتریس A وارون پذیر نخواهد بود.

مثال نقض:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A^4 = (0 \times 1) - (0 \times 1) = 0$$

$$\det A = (0 \times 1) - (0 \times 1) = 0$$

همانطور که مشاهده می شود، ماتریس A وارون پذیر نخواهد بود. پس حکم برقرار نخواهد بود.

۶- اگر A ماتریس $n \times n$ باشد که فقط از ۱± تشکیل شده است نشان دهید دترمینان آن بر 2^{n-1} بخش‌پذیر است.

پاسخ:

با اعمال عملیات های کاهش سطری برای صفر کردن خانه های ستون های اول به جز a_{11} به ماتریس زیر که دترمینانش با دترمینان ماتریس اولیه A برابر است می رسیم.

$$A=\begin{bmatrix} \pm1 & \pm1 & \pm1 & \cdots & \pm1 \\ 0 & b & b & \cdots & b \\ 0 & b & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & b & \cdots & b \end{bmatrix}$$

درایه های ماتریس B برابر با صفر یا ±2 خواهد بود چرا که در صورت جمع دو ±1 حالت خروجی دیگری وجود نخواهد داشت. ($b=0\ or\ b=\pm2$)

حال که تمامی درایه های ماتریس B زوج می باشند، تمامی درایه های آن را بر ۲ تقسیم می کنیم و ماتریس B' را می سازیم. بنابراین رابطه زیر بین دترمینان ماتریس های B و B' برقرار خواهد بود.

$$\det B = 2^{n-1}\det B'$$

حال، چون درایه های ماتریس B' برابر صفر یا ±1 می باشند، پس دترمینان آن مقداری صحیح خواهد بود.

$$\det A = \pm1\cdot\det B = (\pm1)\cdot 2^{n-1}\cdot\det B' \xrightarrow{\det B'\in\mathbb{Z}}$$ $\det A$ بر 2^{n-1} بخش پذیر است

۷- اگر A و B ماتریس‌های مربعی باشند، می‌دانیم:

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = det(A).det(B)$$

اگر C و D ماتریس‌های $n\times n$ باشند دترمینان ماتریس زیر را به‌دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

اگر سطر i ام از ماتریس های C و D را با هم جا به جا کنیم، به فرم ماتریسی $\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ می رسیم که دترمینان آن را می دانیم.

$$\det\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ d_{11} & \cdots & d_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{21} & \cdots & d_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)\det\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ d_{21} & \cdots & d_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^n\det\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{21} & \cdots & d_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^n \det D \det C$$

۸- فرض کنید $B = \{b_1, b_2\}$ یک پایه برای فضای V باشد و $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ یک پایه برای فضای برداری W باشد. اگر $T: V \to W$ یک تبدیل خطی با ویژگی‌های زیر باشد. ماتریس M مربوط به تبدیل T را به‌دست آورید.

$$T(b_1) = 3c_1 - 2c_2 + 5c_3$$

$$T(b_2) = 4c_1 + 7c_2 - c_3$$

پاسخ:

$$M = [[T_1(b_1)]_c \quad [T_2(b_2)]_c] = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

۹- یک پایه برای همه مقدارهای ممکن بردار زیر به‌دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 2a-4b+10c \\ 2a+5b-8c \\ -a-4b+7c \\ 3a+b+c \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} 2a-4b+10c \\ 2a+5b-8c \\ -a-4b+7c \\ 3a+b+c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 10 \\ 2 & 5 & -8 \\ -1 & -4 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ستون اول و دوم pivot هستند.

B = $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

۱۰- فرض کنید $T: V \rightarrow W$ و $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ مجموعه‌ای از بردارهایی در فضای برداری V است به گونه‌ای که $\{T(\boldsymbol{v}_1), \dots, T(\boldsymbol{v}_m)\}$ یک مجموعه برداری مستقل خطی در فضای برداری W خواهد بود. ثابت کنید $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ مستقل خطی است.

پاسخ:

$T: V \to W$

فرض خلف: بردار $\boldsymbol{v}_i$ را می توان بر حسب سایر بردار های این مجموعه برداری نوشت. (به این معنی که مجموعه برداری $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ وابسته خطی است)

$$\boldsymbol{v}_i = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \dots + c_m\boldsymbol{v}_m \overset{T}{\Rightarrow} T(\boldsymbol{v}_i) = T(c_1\boldsymbol{v}_1) + T(c_2\boldsymbol{v}_2) + \cdots + T(c_m\boldsymbol{v}_m)$$

$$\xRightarrow{linearity} T(\boldsymbol{v}_i) = c_1T(\boldsymbol{v}_1) + c_2T(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_mT(\boldsymbol{v}_m)$$

تناقض با عبارت مستقل بودن فرض سوال زیرا $T(\boldsymbol{v}_i)$ مستقل خطی اند.

۱۱-

الف) فرض کنید V یک زیرفضا از R^n و $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ یک پایه برای V باشد. ثابت کنید که تمام پایه های V دارای K بردار در V هستند.

ب) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ است و $nullspace$ آن یک صفحه در R^3 است. همچنین $range$ آن توسط بردار غیرصفر v در R^5، $span$ می‌شود. m و n را تعیین کنید و $rank$ و $nullity$ ماتریس A را به‌دست آورید.

پاسخ:

الف) فرض کنیم $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ یک پایه دلخواه برای زیرفضای V باشید، هدف ما نشان دادن $l = k$ است. از آنجاییکه B یک پایه است، می توان گفت که یک $spanning\ set$ شامل k بردار برای V می باشد. پس مجموعه ای از $k + 1$ و یا تعداد بیشتر بردار در V وابسته خطی می باشد. از آنجایی که B' یک پایه است، پس مستقل خطی است و $l \leq k$ است.

همچنین B' پایه است پس یک $spanning\ set$ برای V می باشد که دارای l بردار است. پس می توان گفت هر مجموعه دارای $l + 1$ و یا تعداد بیشتر بردار در V وابسته خطی است. از طرفی B نیز یک پایه است که مستقل خطی است. پس $k \leq l$ است.

از قسمت ۱ و ۲ نتیجه می شود که $k = l$.

ب) می دانیم که فضای پوچ هر ماتریس، شامل وکتور های x ای است به طوری که $Ax = 0$. پس x ها $n - dimensional$ اند و از آنجا که فضای پوچ یک زیرفضا از $\mathbb{R}^3$ است پس $n = 3$.

همچنین میدانیم $range$ ماتریس شامل تمام b هایی است به طوریکه $Ax = b$، بنابرین b باید $m - dimensional$ باشد و از آنجا که $range$ در اینجا زیرفضایی از $\mathbb{R}^5$ است، پس $m = 5$.

و از آنجا که فضای پوچ یک **صفحه** در $\mathbb{R}^3$ است، پس $nullity = 2$. به طور مشابه از آنجا که $range$ توسط ۱ بردار $span$ می شود، پس $rank = 1$.

۱۲- (امتیازی) فرض کنید n عددی صحیح و مثبت است و T تبدیلی خطی و غیر صفر به طوری که $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. عبارت‌های زیر را اثبات کنید.

الف) فضای پوچ $(nullspace)$ تبدیل T دارای $n - 1$ بعد می‌باشد.

ب) فرض کنید $B = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ یک پایه برای فضای پوچ $(nullspace)$ تبدیل T می‌باشد و w برداری است n بعدی که در $Nul(T)$ قرار ندارد. ثابت کنید $B = \{v_1, \dots, v_{n-1}, w\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.

ج) هر بردار $u \in \mathbb{R}^n$ را می‌توان به صورت $u = v + \frac{T(u)}{T(w)} w$ نشان داد که $v \in Nul(T)$.

پاسخ:

الف) فرض کنید A نمایش ماتریس تبدیل خطی $T: R^n \to R$ است . پس A ماتریسی غیر صفر و $1 \times n$ می باشد . حال از آنجایی که rank ماتریس A برابر ۱ می‌باشد، rank تبدیل T نیز برابر ۱ خواهد بود. حال با توجه به قضیه $rank - nullity$ داریم که $rank(T) + nullity(T) = n$ که نتیجه می‌دهد $nullity(T) = n - 1$.

ب) ادعا می‌کنیم که n بردار $v_1, \ldots, v_{n-1}, w$ مستقل خطی می‌باشند . فرض کنید به ازای $c_1, \ldots, c_{n-1} \in R$ داریم که $c_1 v_1 + \ldots + c_{n-1} v_{n-1} + c_n w = 0$. اگر $c_n \neq 0$ خواهیم داشت $w = \frac{-c_1}{c_n} v_1 + \ldots + \frac{-c_{n-1}}{c_n} v_{n-1}$ که نتیجه می‌دهد $w \in \mathrm{Span(B)} = \mathrm{Nul(T)}$ که با فرض سوال تناقض دارد. در نتیجه $c_n = 0$. حال معادله فوق به صورت $c_1 v_1 + \ldots + c_{n-1} v_{n-1} = 0$ در می‌آید که چون B یک پایه می‌باشد، بردارهای $v_1, \ldots, v_{n-1}$ مستقل خطی می‌باشند و در نتیجه داریم:
$c_1 = \ldots = c_n = 0$.

حال با توجه به این که همه ضرایب $c_1, \ldots, c_n$ باید صفر باشند، نتیجه می‌گیریم که بردارهای $v_1, \ldots, v_{n-1}, w$ مستقل خطی می‌باشند . حال چون R^n یک فضای برداری n بعدی می‌باشد و B' شامل n بردار مستقل خطی است، مجموعه B' یک پایه برای R^n می‌باشد.

ج) فرض کنید $u \in R^n$ که چون B' یک پایه برای R^n می‌باشد وجود دارد $c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{R}$ که $u = c_1 v_1 + \ldots + c_{n-1} v_{n-1} + c_n w$ که می‌توان آن را به صورت $u = v + c_n w$ نوشت که $v \in \mathrm{Nul(T)}$.

حال با اعمال ترکیب خطی T بر دو عبارت مساوی خواهیم داشت که:

$$T(u) = T(v + c_n w) = T(v) + c_n T(w)$$
$$\xrightarrow{by\ linearity\ of\ T\ since\ v \in \mathrm{Nul(T)}} = 0 + c_n T(w) = c_n T(w)$$

و از آنجایی که $w \notin \mathrm{Nul(T)}$ مقدار تبدیل T(w) مخالف صفر خواهد بود. در نتیجه خواهیم داشت که $c_n = \frac{T(u)}{T(w)}$ که از ترکیب آن با رابطه به‌دست آمده در بالا خواهیم داشت که $u = v + \frac{T(u)}{T(w)} w$ که $v \in \mathrm{Nul(T)}$.