سوال (تیپ 1) :

عبارت $Q(x1, x2) = 9{x_1}^2 - 8x_1x_2 + 3{x_2}^2$ را در نظر بگیرید .

ابتدا مشخص کنید که Q مثبت معین است یا منفی معین یا نامعین . سپس عبارت را با تغییر متغیر (x=Py) به یک فرم quadratic (چند جمله ای درجه 2) که هیچ عبارت ضرب متقابل (مثل x1x2) یا همان cross-product ای ندارد تبدیل کنید .

جواب :

ابتدا ماتریس quadratic را به دست می آوریم :

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

اکنون مقادیر ویژه ی A را به دست می آوریم :

$$det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow (9 - \lambda)(3 - \lambda) - (-4)(-4) = 0$$
$$\rightarrow \lambda^2 - 12\lambda + 11 = 0 \rightarrow \lambda = 1, \lambda = 11$$

از آنجایی که هر دو مقدار ویژه ی A ، مثبت بودند طبق تئوری 5 فصل 7 کتاب درسی ، Q مثبت معین است .

اکنون ابتدا بردار ویژه ی هر مقدار ویژه را به دست می آوریم و آن را نرمال می کنیم و ماتریس P را تشکیل می دهیم ($A = PDP^{-1}$) :

$$\boldsymbol{\lambda} = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}} \\ \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = 11 \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}} \\ \frac{\mathbf{-1}}{\sqrt{\mathbf{5}}} \end{bmatrix}$$

$$P = [u \ \ v] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \ , \ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

اکنون x=Py در نظر می گیریم و داریم :

$$x^T A x = (Py)^T A (Py) = y^T P^T A P y = y^T (P^{-1} A P) y = y^T D y$$
$$= {y_1}^2 + 11{y_2}^2$$

سوال (تیپ 2) :

عبارت $Q(x1, x2) = 2{x_1}^2 + \ 10 x_1 x_2 + 2{x_2}^2$ را در نظر بگیرید .

ابتدا مشخص کنید که Q مثبت معین است یا منفی معین یا نامعین . سپس عبارت را با تغییر متغیر (x=Py) به یک فرم quadratic (چند جمله ای درجه 2) که هیچ عبارت ضرب متقابل (مثل x1x2) یا همان cross-product ای ندارد تبدیل کنید .

جواب :

ابتدا ماتریس quadratic را به دست می آوریم :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

اکنون مقادیر ویژه ی A را به دست می آوریم :

$$det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0 \rightarrow (2 - \lambda)(2 - \lambda) - (5)(5) = 0$$
$$\rightarrow \ \lambda^2 - 4\lambda \ - \ 21 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = 7, \lambda = \text{-}3$$

از آنجایی که یکی از مقادیر ویژه مثبت است و یکی منفی است بنابراین طبق تئوری 5 فصل 7 کتاب درسی ، Q نامعین است .

اکنون ابتدا بردار ویژه ی هر مقدار ویژه را به دست می آوریم و آن را نرمال می کنیم و ماتریس P را تشکیل می دهیم ($A = PDP^{-1}$) :

$$\boldsymbol{\lambda} = 7 \ \rightarrow \ \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \ \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \text{-}3 \ \rightarrow \ \begin{bmatrix} \text{-}1 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \rightarrow \ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \frac{\text{-}1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$P = [u \;\; v] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \;\; , \;\; D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

اکنون x=Py در نظر می گیریم و داریم :

$$x^T A x = (Py)^T A (Py) = y^T P^T A P y = y^T (P^{-1} A P) y = y^T D y$$

$$= 7{y_1}^2 - 3{y_2}^2$$