به نام خدا

تمرین پنجم

جبر خطی کاربردی – بهار 1401

توضیحات

- پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.
- در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق ایمیل la.spring1401.aut@gmail.com سوال خود را بپرسید.
- مهلت ارسال پاسخ ها تا ساعت **23:59 جمعه 30 تیر** می‌باشد.
- پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و درصورت مشاهده هرگونه **تقلب** نمره **صفر** برای کل تمرین منظور خواهد شد
- با توجه به فشردگی برنامه تمرین ها در طول ترم، امکان تمدید تمرین وجود نخواهد داشت.
- پاسخ خود را به صورت یک فایل pdf و با فرمت **HW?_Name_StudentNumber** آپلود کنید. (مثال: HW5_SeyyedFarzadRadnia_9831024).

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

1- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) اگر ستون های ماتریس $A_{m\times n}$، $orthnormal$ باشند، آنگاه $\|Ax\| = \|x\|$.

ب) تصویر عمودی y بر روی v با تصویر عمودی y بر روی cv یکسان است اگر $c \neq 0$ باشد.

ج) در صورتی که در معادله $Ax = b$، b یک بردار $orthogonal$ نسبت به تمامی بردار های ستونی ماتریس A باشد، آنگاه جواب $least\ squares$ برای این معادله تمامی بردار های $\hat{x}$ خواهند بود که $A\hat{x} = \mathbf{0}$.

د) فرم درجه دو مثبت معین Q شرط $Q(\boldsymbol{x}) > 0$ را به ازای هر $\boldsymbol{x}$ در $\mathbb{R}^n$ برآورده می کند.

ذ) یک ماتریس $orthogonal$، قابل قطری سازی عمودی است.

ه) در صورتی که ماتریس A یک ماتریس مربعی و وارون پذیر باشد و $A = U\Sigma V^T$ باشد، آنگاه $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$ خواهد بود.

پ) عبارت $\|\boldsymbol{x}\|^2$ یک فرم درجه دوم نمی باشد.

2- فرض کنید $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ یک مجموعه متشکل از وکتور های غیر صفر در $\mathbb{R}^n$ باشد. اگر مجموعه S یک مجموعه $orthogonal$ باشد، آنگاه:

الف) نشان دهید که S یک مجموعه مستقل خطی است.

ب) اگر $k = n$، آنگاه نشان دهید که S یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

3- اگر $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تبدیل خطی بدست آمده از تصویر عمودی ($orthogonal\ projection$) بر خط $span$ شده توسط بردار $v = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه یک فرمول صریح برای $T(x)$ به ازای هر x در $\mathbb{R}^3$ پیدا کنید.

4- فرض کنید $u, v \in \mathbb{R}$ باشد، برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ ثابت کنید $||au + bv|| = ||bu + av||$ اگر و تنها اگر $||u|| = ||v||$ باشد.

5- بردارهای $y = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}$، $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر زیرفضای W از $span\{v_1 , v_2\}$ به وجود بیاید، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) نزدیک ترین نقطه به y در زیرفضای W.

ب) فاصله y از زیرفضای W.

6- یک پایه متعامد یکه $(orthonormal\ basis)$ برای فضای ستونی $(column\ space)$ ماتریس A به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

7- تجزیه QR ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

8- تجزیه مقادیر منفرد (SVD) ماتریس زیر را محاسبه کنید. تمامی محاسبات را ذکر کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

9- عبارت ${Q(x_1, x_2) = 2x_1}^2 + 10x_1x_2 + 2{x_2}^2$ را در نظر بگیرید.

الف) مشخص کنید که Q مثبت معین است یا منفی معین یا نامعین.

ب) سپس عبارت را با تغییر متغیر ($x = Py$) به یک فرم $quadratic$ (چند جمله ای درجه 2) که هیچ عبارت ضرب متقابل (مثل x_1x_2) یا همان $cross - product$ ای ندارد تبدیل کنید.

10- به سوالات زیر با استدلال کافی پاسخ دهید.

الف) فرض کنید ماتریس های V و U ماتریس هایی $n \times n$ و $orthogonal$ باشند. توضیح دهید چرا ماتریس UV یک ماتریس $orthogonal$ خواهد بود.

ب) فرض کنید که ماتریس P یک ماتریس $orthogonal$ و $m \times m$ می باشد. اثبات کنید که ماتریس PA مقادیر منفرد یکسانی با ماتریس A دارد.

11- فرض کنید $Q(\boldsymbol{x}) = -2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ باشد. یک بردار واحد ($unit\ vector$) $\boldsymbol{x}$ در $\mathbb{R}^3$ بیابید به طوری که $Q(\boldsymbol{x})$ ماکزیمم شود به شرط اینکه $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = 1$ باشد. (محاسبات به طور کامل نوشته شود)

12- فرض کنید ماتریس های A و B ماتریس های متقارن $n \times n$ با مقادیر ویژه تماما مثبت می باشند. نشان دهید که مقادیر ویژه ماتریس $A + B$ نیز تماما مثبت خواهد بود.

موفق باشید

تیم تدریسیاری جبر خطی بهار 1401