دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبرخطی کاربردی

نیمسال دوم ۹۶ـ۹۷

مدرس :دکتر ناظر فرد

دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات

پاسخ تمرین سری ۴

توجه!!! :

پاسخ سوالات را به دقت از سولوشن که بر روی کانال قرار گرفته است بیابید و به طور کامل مطالعه کنید،برخی سوالات دارای پاسخ بدیهی بودند که صرفا برای تمرین بیشتر در نظر گرفته شده بودند که از آوردن حل آن ها خودداری کردیم.

۱. یکی از ماتریس های زیر را به اختیار انتخاب کنید ابتدا چند جمله ای سرشت نما را برای آن بیابید سپس مقدار ویژه و بردار های ویژه را برای آن مشخص کنید در نهایت صورت قطری شدن آن را قطری کنید.

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۴ & -۲ \\ -۳ & ۴ & ۰ \\ -۳ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ & -۱ \\ -۱ & -۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

۲. ۵ مورد از گزاره های زیر را به اختیار ثابت کنید:

۱. نشان دهید اگر λ مقدار ویژه ماتریس واون پذیر A باشد آنگاه $\lambda^{-۱}$ مقدار ویژه ماتریس $A^{-۱}$ است.

حل. قسمت ۵.۱ سوال ۲۵. ▶

۲. نشان دهید اگر $A^{۲} = ۰$ انگاه تنها مقدار ویژه A صفر است.

حل. قسمت ۵.۱ سوال ۲۶. ▶

۳. λ مقدار ویژه از A است اگر و فقط اگر مقدار ویژه ای از A^T باشد.

حل. قسمت ۵.۱ سوال ۲۷. ▶

نشان دهید A و A^T جند جمله ای سرشت نمای مشابه ای دارند.

۴. **حل.** قسمت ۵.۲ سوال ۲۰. ▶

۵. با توجه به الگوریتم QR ثابت گنید اگر $A = QR$ باشد که Q معکوس پذیر است آنگاه A با $A_۱ = RQ$ متشابه است.

حل. قسمت ۵.۲ سوال ۲۳. ▶

۶. فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد که $A^T = A$. نشان دهید اگر برای x های غیر صفری در $\mathbb{C}^n$، $Ax = \lambda x$ باشد آنگاه λ حقیقی است و در واقع قسمت حقیقی x بردار ویژه A است.

حل. قسمت ۵.۵ سوال ۲۴. ▶

۷. برای بردار های u, v در $\mathbb{R}^n$ ثابت کنید:

$$\| u + v \|^{۲} + \| u - v \| = ۲ \| u \|^{۲} + ۲ \| v \|^{۲}$$

حل. قسمت ۶.۱ سوال ۲۴. ▶

۸. اگر U, V دو ماتریس $n \times n$ متعامد باشند،نشان دهید UV نیز یک ماتریس متعامد است.

حل. قسمت ۶.۲ سوال ۲۹. ▶

۳. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ باشد که مجموع درایه های تمام سطر های آن s باشد ثابت کنید s مقدار ویژه ای از A است.

حل. قسمت ۵.۱ سوال ۲۹ ▶

۴. **(سوال امتیازی)** برای هر اسکالر a, b, c نشان دهید:

$$A = \begin{bmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

همگی متشابهند و اگر $BC = CB$ باشند آنگاه A دو مقدار ویژه صفر دارد.

۵. **(سوال امتیازی)** اگر

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

باشد، $A^۲, A^۶$ را محاسبه کنید.

۶. فرض کنید $\varepsilon = \{e_۱, e_۲, e_۳\}$ پایه استاندارد برای $\mathbb{R}^۳$ و $\mathcal{B} = \{b_۱, b_۲, b_۳\}$ پایه ای برای فضای برداری V باشد و $T : \mathbb{R}^۳ \longrightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد که:

$$T(x_۱, x_۲, x_۳) = (x_۳ - x_۱)b_۱ - (x_۱ + x_۲)b_۲ + (x_۱ - x_۲)b_۳$$

۱. $T(e_۱), T(e_۲)$ و $T(e_۳)$ را محاسبه کنید.

۲. $[T(e_۱)]_{\mathcal{B}}, [T(e_۲)]_{\mathcal{B}}$ و $[T(e_۳)]_{\mathcal{B}}$ را محاسبه کنید.

۳. ماتریس تبدیل T را تحت پایه های $\varepsilon, \mathcal{B}$ بیابید.

حل. قسمت۵.۴ سوال ۳. ◀

۷. ثابت کنید مجموع درایه های روی قطر اصلی هر ماتریس قطری شدنی برابر است با مجموع مقادیر ویژه آن ماتریس.

حل. قسمت ۵.۴ سوال ۲۵و ۲۶. ◀

۸. یک دیگر از روش هایی زمانی که تقریبی از بردار ویژه در دسترس باشد می شود با آن مقادیر ویژه را یافت روش خارج قسمت ریلی (quotient ayleighr) است.

مشاهده کردیم اگر $Ax = \lambda x$ آنگاه $x^TAx = x^T(\lambda x) = \lambda(xTx)$ و در این صورت خارج قسمت ریلی

$$R(x) = \frac{x^TAx}{x^Tx}$$

ّبرابر λ خواهد بود.اگر x به حد کافی به یک بردار ویژه λ نزدیک باشد آنگاه این خارج قسمت به λ نزدیک خواهد شد.زمانی که A متقارن باشد خارج قشمت ریلی $R(x_k) = (x_k^TAx_k)/(x_k^Tx_k)$ با دقتی دو برابر نسبت μ_k در روش توانی عمل خواهد کرد این موضوع را برای ماتریس و بردار اولیه زیر نشان دهید:

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}, x_۰ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

حل. قسمت ۵.۸ سوال ۱۱. ◀

۹. **(سوال امتیازی)** اگر W یک زیر فضا از فضای ضرب داخلی V باشد، $u \in V$ را در نظر بگیرید نشان دهید $v \in W$ تصویری از u بر روی W است به طوری که

$$u = v + v' \qquad for \;\; some \;\; v' \in W^{\perp}$$

اگر و فقط اگر

$$\| u - v \| \leq \| u - w \| \quad , \quad for \;\; every \;\; w \in W$$

۱۰. **(سوال امتیازی)** فرض کنید $W_۱, W_۲$ زیر فضایی از فضای ضرب داخلی V باشد آنگاه نشان دهید:

۱. $(W_۱+W_۲)^{\perp}=W_۱^{\perp}\cap W_۲^{\perp}$

۲. $(W_۱\cap W_۲)^{\perp}=W_۱^{\perp}+W_۲^{\perp}$

۱۱. فرض کنید $y=\begin{bmatrix}۷\\۹\end{bmatrix}$ و $u_۱=\begin{bmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\\-\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\end{bmatrix}$ و $W=span\{u_۱\}$.
$proj_W\boldsymbol{y},(UU^T)y$ را حساب کنید.

حل. قسمت ۶.۳ سوال ۱۱. ◀

۱۲. فرض کنید W زیر فضایی از $\mathbb{R}^n$ با پایه متعامد $\{w_۱,w_۲,\cdots,w_p\}$ و همچنین فرض کنید $\{v_۱,v_۲,\cdots,v_q\}$ پایه ای متعامد برای $W^{\perp}$ باشد.

۱. چرا $\{w_۱,w_۲,\cdots,w_p,v_۱,v_۲,\cdots,v_q\}$ یک پایه متعامد است ؟

۲. چرا $span$ مجموعه قسمت ۱ $\mathbb{R}^n$ را تولید می کند؟

۳. نشان دهید $dimW+dimW^{\perp}=n$.

حل. قسمت ۶.۳ سوال ۲۴. ◀

۱۳. یکی از ماتریس های زیر را به اختیار انتخاب و برای فضایی ستونی آن یک پایه متعامد پیدا کنید:

$$\begin{bmatrix}۳&-۵&۱\\۱&۱&۱\\-۱&۵&-۲\\۳&-۷&۸\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}۱&۲&-۱\\-۱&۱&-۴\\-۱&۴&-۳\\۱&-۴&۷\\۱&۲&۱\end{bmatrix}$$

حل. قسمت۶.۴ سوال ۹و۱۲. ◀

۱۴. تمام جواب های کوچکترین مربعات را برای تساوی $Ax=b$ بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}۱&۱&۰\\۱&۱&۰\\۱&۰&۱\\۱&۰&۱\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}۱\\۳\\۸\\۲\end{bmatrix}$$

حل. قسمت ۶.۵ سوال ۵. ◀

۱۵. فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ باشد که ستون هایش مستقل خطی هستند و $b\in\mathbb{R}^n$.
با استفاده از روش نرمال یک فرمول برای $\hat{b}$ که تصویر b بر روی $Col\ \ A$ هست بیابید.

حل. قسمت ۶.۵ سوال ۲۳. ◀

۱۶. نشان دهید اگر A یک ماتریس $n\times n$ مثبت معین باشد،آنگاه یک ماتریس مثبت معین $n\times n$ مانند B وجود دارد که $A=BB^T$.

حل. قسمت ۷.۲ سوال ۲۵. ◀

۱۷. ماتریس A را در نظر بگیرید، $\lambda_۱$ بزرگترین مقدار ویژه آن و $u_۱$ بردار ویژه یکه متناظر با $\lambda_۱$ است،ثابت کنید بزرگترین مقدار x^TAx با توجه به قیود:

$$x^Tx=۰\qquad x^Tu_۱=۰$$

برابر $\lambda_۲$ است که $\lambda_۲$ دومین مقدار ویژه بزرگ A است. همچنین این بزرگترین مقدار زمانی اتفاق می افتد که x برابر $u_۲$ که بردار ویژه یکه متناظر با $\lambda_۲$ است،باشد.

۱۸. تجزیه SVD ماتریس زیر را به دست آورید.(راهنمایی: ماتریس $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ می تواند به عنوان یک انتخاب برای U در نظر گرفته شود.)

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

حل. قسمت ۷.۴ سوال ۱۱. ◀

۱۹. نشان دهید در یک ماتریس مربعی قدر مطلق دترمینان برابر حاصلضرب مقادیر تکین ماتریس است.

حل.

$$det(A) = det(U \sum V^T) = det(U)det(\sum)det(V^T)$$

می دانیم $det(U), det(V^T)$ برابر ۱ یا ـ۱ است و همچنین چون $\sum$ ماتریس قطری است که بر روی قطر آن مقدار ویژه منفرد هستند پس

$$|det(A)| = |det(\sum)| = \prod_i \sigma_i$$

◀

$\star\star$ **سوالات زیر برای تمرین بیشتر در نظر گرفته شده است و به آن ها نمره ای تعلق نمی گیرد:**

۲۰. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 0/5 & 0/2 & 0/3 \\ 0/3 & 0/8 & 0/3 \\ 0/2 & 0 & 0/4 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 0/3 \\ 0/6 \\ 0/1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۱. نشان دهید v_1, v_2 و v_3 بردار ویژه های A هستند.

۲. فرض کنید x_0 بردار برداری در $\mathbb{R}^3$ باشد که درایه های آن نامنفی باشند و مجموعشان ۱ باشد. ثابت کنید وجود دارد ثابت هایی مثل c_1, c_2, c_3 که $x_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ باشد و همچنین w^Tx_0 را محاسبه کنید و نتیجه بگیرید $c_1 = 1$.

۳. برای $k = 1, 2, \cdots$ تعریف می کنیم $x_k = A^kx_0$ که x_0 در قسمت (۲) معرفی شده است .نشان دهید $x_k \to v_1$ زمانی که k افزایش می یابد.

حل. قسمت ۵.۲ سوال ۲۷. ◀

۲۱. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ متقارن باشد،فرض x هر برداری در $\mathbb{C}^n$ باشد و در نظر بگیرید $q = \bar{x}^TAx$. تساوی های زیر نشان می دهند که $q = \bar{q}$. هرکدام از تساوی ها را با ادله کافی توجیه کنید.

$$\bar{q} = \overline{\bar{x}^TAx} = x^T\overline{Ax} = x^TA\bar{x} = (x^TA\bar{x})^T = \bar{x}^TA^Tx = q$$

حل. قسمت ۵.۵ سوال ۲۳. ◀

۲۲. $u \neq 0$ را در $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید،فرض کنید $L = span\{u\}$ برای هر y در $\mathbb{R}^n$ تصویر y نسبت به L را اینگونه تعریف می کنیم:

$$refl_L\boldsymbol{y} = 2.proj_L\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}$$

نشان دهید $\boldsymbol{y} \mapsto refl_L\boldsymbol{y}$ یک تبدیل خطی است.

حل. قسمت ۶.۲ سوال ۳۴. ◀

۲۳. فرض کنید $A = QR$ یک تقسیم بندی QR برای ماتریس Aای باشد که ستون های آن مستقل خطی هستند. A را به شکل $[A_1 \ \ A_2]$ می نویسیم که A_1 p ستون دارد. چگونه می توان یک تقسیم بندی QR برای A_1 یافت؟توضیح دهید تقسیم بندی شما چگونه شرایط یک تقسیم بندی QR را حفظ می کند.

حل. قسمت ۶.۴ سوال ۲۳. ◀