



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

به نام یزدان پاک



دانشکده مهندسی کامپیوتر

جبر خطی کاربردی

دکتر امیرمزلقانی

نیم سال دوم ۰۱ - ۰۰

تمرینات سری چهارم - فصل
پنجم و ششم

پاسخ تمرین ها را به صورت خوانا و تمیز در قالب `HW?_Name_StudentNumber` (به عنوان مثال،
`HW4_BardiaArdakanian_9831072`) نوشته و تا قبل از ددلاین در سامانه کورسز دانشگاه آپلود نمایید.
در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل `ala.spring2022@gmail.com` در ارتباط باشید.

بخش تئوری

۱. مقدار ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌های زیر را بیابید. (آسان)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

۲. ماتریس $M_{n \times n}$ را در نظر بگیرید: (متوسط)

الف) نشان دهید اگر λ مقدار ویژه ی $M_{n \times n}$ باشد، آنگاه λ مقدار ویژه ی M^T هم خواهد بود.

ب) در تئوری یک کتاب، ثابت شد که مقادیر ویژه ی یک ماتریس پایین مثلثی برابر درایه‌های روی قطر اصلی می‌باشند. حال به کمک قسمت «الف» این قضیه را برای ماتریس‌های مربعی بالا مثلثی اثبات کنید تا اثبات تئوری یک کتاب کامل شود.

ج) اکنون فرض کنید M ماتریسی است که مجموع درایه‌های هر ستون آن برابر با S می‌باشد، نشان دهید S یک مقدار ویژه برای M می‌باشد. (راهنمایی: ابتدا این گزاره را برای ماتریسی که مجموع درایه‌های هر سطر آن S می‌شود اثبات کنید و سپس از قسمت «الف» کمک بگیرید)

۳. ماتریس‌های زیر را در صورتی که بر مجموعه‌ی اعداد حقیقی قطری‌شدنی هستند، قطری سازی کنید.

(متوسط)

$$a) \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

۴. برای هر اسکالر a, b, c نشان دهید: (سخت)

$$A = \begin{bmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

همگی متشابه‌اند و اگر $BC = CB$ باشد آنگاه A دو مقدار ویژه صفر دارد. (از مقادیر بدست آمده در تساوی $BC = CB$ استفاده کنید)

۵. گزاره‌های زیر را ثابت کنید: (متوسط)

الف) نشان دهید اگر λ مقدار ویژه ماتریس وارون پذیر A باشد آنگاه λ^{-1} مقدار ویژه ماتریس A است.

ب) نشان دهید اگر $A^2 = 0$ آنگاه مقدار ویژه ماتریس A صفر است.

پ) فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد که $A^T = A$. نشان دهید اگر برای x های غیر صفری در C^n ، $Ax = \lambda x$ باشد آنگاه λ حقیقی است و در واقع قسمت حقیقی x مقدار ویژه A است.

ت) برای بردارهای u, v در \mathbb{R}^n ثابت کنید:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

ج) فرض کنید $u, v \in V$ باشد. برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ ثابت کنید $\|au + bv\| = \|bu + av\|$ اگر و تنها اگر $\|u\| = \|v\|$.

۶. فرض کنید مقادیر ویژه‌ی ماتریس $M_{n \times n}$ برابر با $\lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = 2$ و فضای ویژه‌ی هر کدام از این

مقادیر برابر با $E_1 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ و $E_2 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ باشد. آیا با اطلاعات جاری می‌توان

$M^4 u$ را به ازای $u = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ محاسبه کرد؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، $M^4 u$ را محاسبه کنید. (متوسط)

۷. اگر معادله مشخصه ماتریس قطری A برابر $f_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 3)(\lambda + 2)^3(\lambda - 4)^3$ باشد: (متوسط)

a. ابعاد ماتریس A را چقدر است؟

b. ابعاد فضای ویژه مربوط به مقدار ویژه $\lambda = 4$ که با E_4 نمایش داده می شود چقدر است؟

c. ابعاد فضای تهی^۱ ماتریس A چقدر است؟

۸. فرض کنید q_1, q_2, q_3 بردارهایی *orthonormal* در R^3 باشند. تمامی مقادیر ممکن برای دترمینان

ماتریس A را بدست آورده و راه حل خود را توضیح دهید. (آسان)

$$A = [2q_1 \quad 3q_2 \quad 5q_3]$$

۹. فرض کنید W زیرفضایی از R^4 باشد و پایه ای به شکل زیر داشته باشد:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

یک پایه *orthonormal* برای W بیابید. (آسان)

۱۰. فرض کنید $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ پایه استاندارد برای R^3 باشد و $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ پایه ای برای فضای

بردار V باشد و $T: R^3 \rightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد که:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_3 - x_2)b_1 - (2x_2)b_2 + (x_1 + 3x_3)b_3$$

۱. $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ را محاسبه کنید.

۲. $[T(e_1)]_B, [T(e_2)]_B, [T(e_3)]_B$ را محاسبه کنید.

۳. ماتریس تبدیل T را تحت پایه های \mathcal{E} و B بیابید. (متوسط)

¹ Null space

۱۱. اگر

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

باشد، A^2, A^6 را محاسبه کنید. (نباید ماتریس را در خودش ضرب کنید. از موارد آموخته شده در فصل پنج و ششم استفاده کنید) **(سخت)**