دانشکده مهندسی کامپیوتر

به نام یزدان پاک

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبر خطی کاربردی

دکتر امیرمزلقانی

نیم‌سال دوم ۰۱ - ۰۰

تمرینات سری چهارم – فصل پنچم و ششم

پاسخ تمرین‌ها را به صورت خوانا و تمیز در قالب $HW?\_Name\_StudentNumber$ (به عنوان مثال، $HW4\_BardiaArdakanian\_9831072$) نوشته و تا قبل از ددلاین در سامانه کورسز دانشگاه آپلود نمایید.

در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل $ala.spring2022@gmail.com$ در ارتباط باشید.

بخش تئوری

۱. مقدار ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌های زیر را بیابید. (آسان)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$$

$$for\ \lambda_1 : X_1 = \begin{bmatrix} -2x_2 + 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$the\ solution\ set = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, solve\ for\ any\ x_2\ and\ x_3$$

$$for\ \lambda_2 : X_2 = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$the\ solution\ set = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, solve\ for\ any\ x_3$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

$$for\ \lambda_1 : X_1 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$the\ solution\ set = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, solve\ for\ any\ x_3$$

$$for\ \lambda_2: X_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$the\ solution\ set = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, solve\ for\ any\ x_3$$

$$for\ \lambda_3: X_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}x_3 \\ \frac{3}{4}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$the\ solution\ set = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, solve\ for\ any\ x_3$$

---

۲. ماتریس $M_{n\times n}$ را در نظر بگیرید: (متوسط)

الف) نشان دهید اگر λ مقدار ویژه ی $M_{n\times n}$ باشد، آنگاه λ مقدار ویژه ی M^T هم خواهد بود.

برای هر λ داریم:

$$(M - \lambda I)^T = M^T - (\lambda I)^T = M^T - \lambda I$$

بنابر تئوری 6 قسمت 2.2 کتاب نیز می دانیم $M^T - \lambda I$ معکوس‌پذیر خواهد بود، اگر و تنها اگر $(M - \lambda I)$ معکوس‌پذیر باشد؛ یا می توان گفت $M^T - \lambda I$ معکوس پذیر نیست، اگر و تنها اگر $(M - \lambda I)$ معکوس پذیر نباشد. بنابراین λ مقدار ویژه ی M^T خواهد بود، اگر و تنها اگر مقدار ویژه ی M باشد.

ب) در تئوری یک کتاب، ثابت شد که مقادیر ویژه ی یک ماتریس پایین مثلثی برابر درایه‌های روی قطر اصلی می‌باشند. حال به َکمک قسمت «الف» این قضیه را برای ماتریس های مربعی بالا مثلثی اثبات کنید تا اثبات تئوری یک کتاب کامل شود.

اگر M یک ماتریس پایین مثلثی باشد، انگاه M^T یک ماتریس بالا مثلثی و درایه های روی قطر آن، همان درایه‌های روی قطر M خواهد بود.بنابراین به کمک بخشی از اثبات تئوری 1 بخش 5.1 می توان نتیجه گرفت که این درایه های قطری، مقادیر ویژه ی M^T هستند (این قسمت اثبات شده بود) و در نهایت به کمک قسمت "الف" می توان نتیجه گرفت که این مقادیر ویژه، مقادیر ویژه ماتریس M نیز خواهند بود و درواقع برای هر دو ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی مقادیر ویژه هستند. پس برای هر ماتریس قطری نیز درایه های قطری مقادیر ویژه خواهند بود.

ج) اکنون فرض کنید M ماتریسی است که مجموع درایه‌های هر ستون آن برابر با s می‌باشد، نشان دهید s یک مقدار ویژه برای M می‌باشد. (راهنمایی: ابتدا این گزاره را برای ماتریسی که مجموع درایه‌های هر سطر آن s می‌شود اثبات کنید و سپس از قسمت «الف» کمک بگیرید)

اگر M ماتریسی باشد که مجموع درایه های هر سطر آن برابر با 1 باشد، به راحتی می توان برداری مانند v را در R^n در نظر گرفت که همه ی درایه های آن 1 هستند و $Av = sv$. بنابراین s یک مقدار ویژه ی A خواهد بود.

حال اگر مجموع درایه های هر ستون M برابر s باشد، این به این معنا است که مجموع درایه های هر سطر M^T برابر با s خواهد بود و طبق قسمت "الف"، s مقدار ویژه M نیز خواهد بود.

---

۳. ماتریس‌های زیر را درصورتی که بر مجموعه‌ی اعداد حقیقی قطری‌شدنی هستند، قطری سازی کنید. (متوسط)

$$a)\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

مقدار ویژه‌ها و فضاهای ویژه‌ی متناظر ماتریس a برابرند با:

$$\lambda = 0 \to v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1 \to \{v_2, v_3\} = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

پس برای قطری‌سازی کافیست تا:

$$P = [v_r, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس b ولی تنها یک مقدار ویژه دارد و فضای برداری متناظر آن یک بعدیست:

$$\lambda = 0 \to v_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

درنتیجه تنها یک بردار ویژه مستقل خطی برای ماتریس b داریم و بقیه‌ی مقادیر ویژه‌ی b مختلط هستند. پس ماتریس b بر اعداد حقیقی قطری شونده نیست.

۴. برای هر اسکالر a, b, c نشان دهید: (سخت)

$$A = \begin{bmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

همگی متشابه‌اند و اگر $BC = CB$ باشد آنگاه A دو مقدار ویژه صفر دارد. (از مقادیر بدست آمده در تساوی $BC = CB$ استفاده کنید)

---

۵. گزاره‌های زیر را ثابت کنید: (متوسط)

الف) نشان دهید اگر λ مقدار ویژه ماتریس وارون پذیر A باشد آنگاه λ^{-1} مقدار ویژه ماتریس A است. قسمت ۵.۱ سوال ۲۵

ب) نشان دهید اگر $A^2 = 0$ آنگاه مقدار ویژه ماتریس A صفر است. قسمت ۵.۱ سوال ۲۶

پ) فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد که $A^T = A$ نشان دهید اگر برای x های غیر صفری در C^n، $Ax = \lambda x$ باشد آنگاه λ حقیقی است و در واقع قسمت حقیقی x مقدار ویژه A است.

ت) برای بردارهای u, v در $\mathbb{R}^n$ ثابت کنید:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

ج) فرض کنید $u, v \in V$ باشد. برای هر $a, b \in R$ ثابت کنید $\|au+bv\| = \|bu+av\|$ اگر و تنها اگر $\|u\| = \|v\|$.

قسمت اول: فرض کنیم $\|u\| = \|v\| = \beta$. در این صورت:

$$\|au+bv\| = \sqrt{(au+bv).(au+bv)} = \sqrt{a^2\|u\|^2 + b^2\|v\|^2 + 2ab(u.v)}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)\beta^2 + 2ab(u.v)}$$

$$\|bu+av\| = \sqrt{(bu+av).(bu+av)} = \sqrt{b^2\|u\|^2 + a^2\|v\|^2 + 2ab(u.v)}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)\beta^2 + 2ab(u.v)}$$

$$\Longrightarrow \quad \|au+bv\| = \|bu+av\|$$

قسمت دوم: فرض کنیم $\|au+bv\| = \|bu+av\|$. باید ثابت کنیم $\|u\| = \|v\|$.

$$\|au+bv\| = \|bu+av\| \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{(au+bv).(au+bv)} = \sqrt{(bu+av).(bu+av)}$$

$$\Longrightarrow \quad a^2\|u\|^2 + b^2\|v\|^2 + 2ab(u.v) = b^2\|u\|^2 + a^2\|v\|^2 + 2ab(u.v)$$

$$\Longrightarrow \quad (a^2 - b^2)\|u\|^2 + (b^2 - a^2)\|v\|^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (a^2 - b^2)(\|u\|^2 - \|v\|^2) = 0$$

در حالتی که $a^2 = b^2$ باشد، کافیست $a = \pm b$ را در فرض مسئله جایگذاری کنیم تا حکم به سادگی بدست آید.

اما اگر $a^2 \neq b^2$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $\|u\|^2 = \|v\|^2$ و در نتیجه $\|u\| = \|v\|$ و حکم برقرار است.

۶. فرض کنید مقادیر ویژه‌ی ماتریس $M_{n\times n}$ برابر با $\lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = 2$ و فضای ویژه‌ی هر کدام از این مقادیر برابر با $E_1 = Span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ و $E_2 = Span\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ باشد. آیا با اطلاعات جاری می توان M^4u را به ازای $u = \begin{bmatrix}6\\8\\6\\9\end{bmatrix}$ محاسبه کرد؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، M^4u را محاسبه کنید. (متوسط)

باید ببینیم که آیا u ترکیب خطی‌ای از بردارهای $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ هست یا خیر. اگر بود، می توان M^4u را محاسبه کرد.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & | & 6\\1 & 2 & 1 & | & 8\\1 & 1 & 1 & | & 6\\1 & 1 & 2 & | & 9\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & | & 1\\0 & 1 & 0 & | & 2\\0 & 0 & 1 & | & 3\\0 & 0 & 0 & | & 0\end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix} = v_1 + 2v_2 + 3v_3$$

$$M^4u = M^4v_1 + 2M^4v_2 + 3M^4v_3 = 2^4v_1 + 2(-1)^4v_2 + 3(-1)^4v_3 = \begin{bmatrix}21\\23\\21\\24\end{bmatrix}$$

۷. اگر معادله مشخصه ماتریس قطری A برابر $f_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda-3)(\lambda+2)^3(\lambda-4)^3$ باشد: (متوسط)

a. ابعاد ماتریس A را چقدر است؟ ابعاد ماتریس ۹*۹ می‌باشد. چون اگر ابعاد یک ماتریس n باشد معادله مشخصه چند جمله‌ای آن از درجه n است.

b. ابعاد فضای ویژه مربوط به مقدار ویژه $\lambda = 4$ که با E_4 نمایش داده می شود چقدر است؟ تعداد دفعاتی که $(\lambda - 4)$ در f_A ضاهر شده ۳ می‌باشد.

c. ابعاد فضای تهی[1] ماتریس A چقدر است؟ ابعاد فضا تهی A برابر با ابعاد فضا ویژه E_0 متناظر با مقدار ویژه صفر می‌باشد. با توجه به این که A قطری شدنی است ابعاد فضا ویژه E_0 برابر مقدار چندگانگی مقدار ویژه صفر می‌باشد. بنابر این ابهاد فضای تهی ماتریس A برابر ۲ است.

۸. فرض کنید q_1, q_2, q_3 بردارهایی $orthonormal$ در R^3 باشند. تمامی مقادیر ممکن برای دترمینان ماتریس A را بدست آورده و راه‌حل خود را توضیح دهید. (آسان)

$$A = [2q_1 \quad 3q_2 \quad 5q_3]$$

اگر ماتریس $Q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]$ را در نظر بگیریم، می‌دانیم دترمینان این ماتریس برابر 1 یا -1 خواهد بود؛ چرا که $Q^TQ = I$ پس $\det(Q^T) . \det(Q) = 1$ و بنابراین $\det Q^2 = 1$. همچنین می‌دانیم اگر ستونی از ماتریس را در عددی ضرب کنیم دترمینان نیز در آن عدد ضرب می‌شود. بنابراین می‌توان به سادگی نتیجه گرفت که دترمینان ماتریس A برابر 30 یا -30 خواهد بود.

---

۹. فرض کنید W زیرفضایی از R^4 باشد و پایه‌ای به شکل زیر داشته باشد:

$$\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix} \right\}$$

یک پایه $orthonormal$ برای W بیابید. (آسان)

فرض کنید:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

می‌توان با محاسبه ضرب داخلی این دو بردار نشان داد که متعامد نیستند؛ چرا که حاصل ضرب داخلیشان برابر با ۹ نیست.

---

[1] Null space

بنابراین باید ابتدا یک پایه متعامد برای W بیابیم. از روش گرم اشمیت استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} w_1 := v_1 \\ w_2 := v_2 + a v_1 \\ w_1 \cdot w_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1) \\ &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \\ &= 2 + 3a. \end{aligned}$$

به این ترتیب $a = -{}^{2}/_{3}$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{2}{3}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

تغییر ابعاد متعامد بودن بردارها را تغییر نمی‌دهد. بنابراین برای رهایی از اعشار میتوان نوشت:

$$3\mathbf{w}_2 = 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

بنابراین مجموعه $\{w_1 . 3w_2\}$یک پایه متعامد برای W است. ولی طول این بردارها یک نمی‌باشد بنابراین orthonormal نیست. برای این تبدیل می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_1\| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\ \|3\mathbf{w}_2\| &= \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{15}. \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

---

۱۰. فرض کنید $\varepsilon = \{e_1, e_2, e_3\}$ پایه استاندارد برای R^3 باشد و $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ پایه‌ای برای فضای برداری V باشد و $T: R^3 \to V$ یک تبدیل خطی باشد که:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_3 - x_2)b_1 - (2x_2)b_2 + (x_1 + 3x_3)b_3$$

۱. $T(e_1), T(e_2)$ و $T(e_3)$ را محاسبه کنید.

۲. $[T(e_1)]_B, [T(e_2)]_B$ و $[T(e_3)]_B$ را محاسبه کنید.

۳. ماتریس تبدیل T را تحت پایه‌های ε و B بیابید. (متوسط)

1) $T(e_1) = 0b_1 - 0b_2 + b_3\ , T(e_2) = -b_1 - 2b_2 + 0b_3\ , T(e_3) = 2b_1 + 0b_2 + 3b_3$

2) $[T(e_1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ , [T(e_2)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\ , [T(e_3)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

3) $[[T(e_1)]_B \quad [T(e_2)]_B \quad [T(e_3)]_B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

---

۱۱. اگر

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

باشد، A^2, A^6 را محاسبه کنید. (نباید ماتریس را در خودش ضرب کنید. از موارد آموخته شده در فصل پنج و ششم استفاده کنید) (سخت)