سوال:

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ می باشد. مشخص کنید آیا w در $Col\ A$ می باشد؟ آیا w در $Nul\ A$ می باشد؟ (با نمایش جزئیات توضیح دهید.)

پاسخ:

برای تست این موضوع که آیا w در $Col\ A$ می باشد یا نه، نیاز داریم که معادله $Ax = w$ را حل کنیم. پس در ابتدا ماتریس افزوده این معادله را تشکیل می دهیم.

$$\begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ -8 & -2 & -9 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ x_3\ is\ free \end{cases}$$

همانطور که مشاهده می شود، این معادله سازگار می باشد، بنابراین این بردار در فضای ستونی این ماتریس می باشد.

برای تست این موضوع که آیا w در $Nul\ A$ می باشد یا نه، تنها نیاز است که حاصل ضرب ماتریس A در بردار w را چک کنیم و در صورتی می توانیم بیان کنیم که w در $Nul\ A$ است که این حاصل ضرب برابر با بردار صفر شود ($Aw = 0$) (همانطور که در درس نیز مشاهده کردید، این خاصیتی است که تمامی بردار های درون $Nul\ A$ دارای آن می باشند، پس می توان با چک کردن این خاصیت، به سرعت این تست را انجام داد)

$$\begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 - 2 + 18 \\ 12 + 4 - 16 \\ 8 + 0 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می شود، حاصل برابر با بردار صفر شد، پس بنابراین میتوان گفت که w در $Nul\ A$ نیز می باشد.