

سوال :

مقادیر ویژه ماتریس A را به دست آورده و سپس بردارهای ویژه ی آن را مشخص کنید .

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

پاسخ :

ابتدا دترمینان ماتریس $A - \lambda I$ را به دست می آوریم و برابر صفر قرار می دهیم :

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)((2 - \lambda)(2 - \lambda) - 1) = (5 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow (5 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$$

بردار ویژه های $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)x = 0 &\rightarrow \begin{bmatrix} 5-1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2-1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بردار ویژه های $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)x = 0 &\rightarrow \begin{bmatrix} 5-3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2-3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بردار ویژه های $\lambda_3 = 5$:

$$\begin{aligned}
 (A - \lambda I)x = 0 &\rightarrow \begin{bmatrix} 5-5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2-5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
 &= x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$