سوال :

فرض کنید H و K زیر فضاهایی از فضای برداری V باشند . مجموع H و K که به صورت H + K نوشته می شود ، مجموعه ی تمام بردارهایی در V است که می توانند به صورت جمع دو بردار نوشته شوند ؛ یکی در H و یکی در K . به عبارتی دیگر : $\mathrm{H}+\mathrm{K}=\{\boldsymbol{w}:\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\}$ که u برداری در H و v برداری در K می باشد .

الف) نشان دهید H + K یک زیرفضا از V می باشد .

ب) نشان دهید H یک زیرفضا از H + K و K نیز یک زیرفضا از H + K می باشد .

پاسخ :

الف) H و K یک زیرفضا می باشند بنابراین بردار صفر را شامل می شوند . بنابراین بردار صفر در H + K نیز می باشد (0=0+0)

فرض کنید w1 و w2 دو بردار در H + K می باشند و w1=u1+v1 و w2=u2+k2 و u1,u2 در H و v1 و v2 در K می باشند . آنگاه w1+w2 = u1+v1+u2+v2 که می توان آن را به صورت زیر نوشت :

$$w1+w2=(u1+u2)+(v1+v2)$$

از آنجایی که جمع بردار ها در V بسته است بنابراین u1+u2 در H و v1+v2 در K می باشند زیرا H و K زیرفضا هستند . پس w1+w2 نیز در H + K می باشد . بنابراین می توانیم نتیجه بگیریم که H + K نسبت به جمع بردارها بسته است .

فرض کنید w1=u1+v1 یک بردار در H + K می باشد و u1 در H و v1 در K می باشد . از آنجایی که H یک زیرفضا است بنابراین بردار ها نسبت به ضرب بسته اند پس می توان گفت c(u1) به ازای هر c اسکالر نیز در H می باشد . به همین صورت c(v1) در K می باشد . بنابراین c(w1)=c(u1)+c(v1) نیز در H+K می باشد پس H + K نسبت به ضرب توسط اعداد اسکالر نیز بسته است .

3 استدلال فوق تمامی شرایط زیرفضا بودن H + K از V را ارضا می کند .

ب) می توانیم هر بردار عضو H مانند u را به صورت u+0 بنویسیم که 0 نیز عضو K می باشد. از آنجاییکه H بردار صفر را شامل می شود (چون یک زیرفضا است) و H نسبت به جمع بردار ها و ضرب اسکالر ها بسته است بنابراین H یک زیرفضا از H + K می باشد . از همین استدلال با عوض کردن H و K در آن می توان به این نتیجه رسید که K نیز زیرفضایی از H + K می باشد .