«به نام او»

تمرینات مبانی ماتریس ها و جبرخطی - سری چهارم ۹۶/۱/۳۰

۱- فضای بردار $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید. زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ را مثال بزنید که تحت جمع بسته باشد ولی تحت ضرب اسکالر نه. زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ را مثال بزنید که تحت ضرب اسکالر بسته باشد ولی تحت جمع نه. (سطح ۱)

۲- در هر مورد مشخص کنید زیرمجموعه داده شده یک زیرفضای فضای برداری مشخص شده می‌باشد یا خیر. (سطح ۱)

الف) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$ در فضای بردار $\mathbb{R}^2$؛

ب) $\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \mid a=b,\ b=-\frac{c}{2}\}$ در فضای برداری $\mathbb{R}^3$؛

ج) $\{A\in M_n(\mathbb{R}) \mid A^2=A\}$ در فضای برداری $M_n(\mathbb{R})$.

۳- نادرستی گزاره های زیر را با ذکر یک مثال مشخص کنید وقتی که V فضای بردار روی $\mathbb{F}$ است:

الف) اگر $v\in V$ و $\alpha,\beta\in F$ و $\alpha v=\beta v$، آنگاه $\alpha=\beta$؛

ب) اگر $S_1,S_2\subseteq V$ و $\langle S_1\rangle=\langle S_2\rangle$، آنگاه $S_1=S_2$؛

ج) اگر B پایه V باشد و $S\subseteq V$ مستقل خطی باشد، آنگاه $S\subseteq B$.

(سطح ۱)

۴- فرض کنیم P_2 فضای برداری چندجمله‌ای های از درجه‌ی حداکثر ۲ روی متغیر x و با ضرایب حقیقی باشد. به عبارت دیگر

$$P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

با جمع و ضرب اسکالر معمولی روی میدان $\mathbb{R}$. نشان دهید الف) $B=\{1,x,x^2\}$ و $C=\{1,1-x,(1-x)^2\}$ پایه‌هایی از P_2 هستند. ب) چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر ۱ زیرفضایی از P_2 است. ج) بعد زیرفضای زیر را بیابید:

$$W = \{f \in P_2 \mid f(0) = 0\}$$

(سطح ۱)

۵- فرض کنیم $A,B \in M_n(\mathbb{R})$ ناصفر باشند، A متقارن و B پادمتقارن باشد. ثابت کنید $\{A,B\}$ مستقل خطی است. (سطح ۲)

۶- فرض کنید V یک فضای برداری باشد و $B \subseteq V$. B یک پایه است اگر و تنها اگر هر عضو V نمایش یکتا به صورت ترکیب خطی اعضای B داشته باشد.

(سطح ۲)

۷- فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ باشد. هر سطر A را می‌توان به عنوان عضوی از $\mathbb{R}^n$ در نظر گرفت. اگر این سطرها را با $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ نمایش دهیم، زیرفضای $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ از $\mathbb{R}^n$، فضای سطری A نام دارد. نشان دهید در صورتی که یک عمل سطری مقدماتی روی A اعمال شود، فضای سطری آن تغییر نمی‌کند. (سطح ۲)

۸- فرض کنید $A_1, \dots, A_m \in M_n(\mathbb{R})$. اگر ماتریس ستونی ناصفر $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ موجود داشته باشد که برای هر i، $A_iY = 0$، آنگاه $\{A_1, \dots, A_m\}$ نمی‌تواند مولد $M_n(\mathbb{R})$ باشد. (سطح ۳)