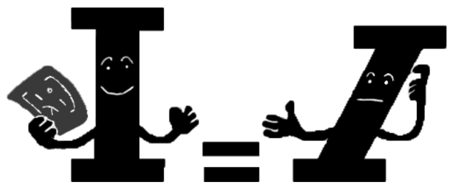
به نام خدا



تمرین چهارم

جبر خطی کاربردی – پاییز ۱۴۰۰

توضیحات

- پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.
- در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق ایمیل linearalgebra.fall1400@gmail.com سوال خود را بپرسید.
- مهلت ارسال پاسخ ها تا ساعت **۲۳:۵۹ جمعه 3** دی می‌باشد.
- پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و درصورت مشاهده هرگونه **تقلب** نمره **صفر** برای کل تمرین منظور خواهد شد
- با توجه به فشردگی برنامه تمرین ها در طول ترم، امکان تمدید تمرین وجود نخواهد داشت.
- پاسخ خود را به صورت یک فایل pdf و با فرمت **HW?_Name_StudentNumber** آپلود کنید. (مثال: HW4_SeyyedFarzadRadnia_9831024).

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) پایه برای یک فضای برداری، بزرگترین مجموعه مستقل خطی ممکن است که آن فضا را $span$ می کند.

ب) اگر V یک مجموعه مستقل خطی در زیرفضای H باشد، آنگاه V یک پایه برای H خواهد بود.

ج) اگر $Ax = \lambda x$ و x یک بردار دلخواه باشد، آنگاه λ یک مقدار ویژه برای A است.

د) اگر $Ax = \lambda x$ برای یک مقدار دلخواه λ برقرار باشد، آنگاه x یک بردار ویژه برای A است.

ذ) اگر A یک ماتریس معکوس پذیر باشد، آنگاه A قطری شونده نیز هست.

ه) اگر $AP = PD$ باشد و D یک ماتریس قطری باشد، آنگاه ستون های غیر صفر P بردار ویژه A هستند.

۲- مجموعه ی $B = \{1 + t^2, t - t^2, 2 - 2t + 2t^2\}$ یک پایه برای $\mathbb{P}_2$ می باشد . مختصات متناسب با پایه ی B را برای $p(t) = 3 + t - 6t^2$ بیابید.

۳- فرض کنید V یک فضای برداری و B یک پایه برای آن باشد. همچنین وکتور های $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5$ نیز وکتور هایی در V باشند و ماتریس A ماتریس، ماتریسی است که ستون های آن متشکل از وکتور مختصات وکتور های $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5$ در پایه B است.

اگر پس از اعمال کاهش سطری، ماتریس A به فرم زیر درآمده باشد، آنگاه به سوالات زیر پاسخ دهید (توضیح):

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

الف) بعد V را بدست آورید. ($\dim V$)

ب) بعد $\mathrm{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5\}$ را بدست آورید.

۴- الف) فرض کنید V یک زیرفضا از $\mathbb{R}^n$ و $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ یک پایه برای V باشد. ثابت کنید که تمام پایه های V دارای K بردار در V هستند.

ب) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ است و $nullspace$ آن یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ است. همچنین $range$ آن توسط بردار غیرصفر v در $\mathbb{R}^5$، $span$ می شود. m و n را تعیین کنید و $rank$ و $nullity$ ماتریس A را بدست آورید.

۵- فرض کنید $B = \{v_1, v_2\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ باشد. ماتریس $S = [v_1 \ \ v_2]$ را در نظر بگیرید. چرا این ماتریس معکوس پذیر است؟

حال ثابت کنید که برای هر وکتور $v \in V$، وکتور $S^{-1}v = [v]_B$.

۶- برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ یک مقدار ویژه بدون محاسبات بدست آورید. جواب خود را توضیح دهید.

۷- الف) نشان دهید اگر ماتریس A، n بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد، آنگاه A^T هم n بردار ویژه مستقل خطی دارد.

ب) اگر λ یک مقدار وِیژه برای ماتریس $A_{n\times n}$ باشد، نشان دهید که $A^T x = \lambda x$.

۸- فرض کنید می خواهیم دنباله فیبوناچی را با استفاده از مفاهیمی که تا به حال خوانده ایم مدل سازی کنیم، در اینصورت خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix}$$

الف) ماتریس A را بیابید.

ب) مقادیر ویژه و بردار ویژه A را بیابید.

ج) ماتریس A را تجزیه طیفی[1] کنید. $(A = PDP^{-1})$

د) ماتریس B را برحسب n بیابید.

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

ه) رابطه صریح برای F_n بیابید.

۹- مقادیر ویژه و $multiplicity$ را برای ماتریس های زیر بدست آورید.

a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & -13 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

[1] Spectral Decomposition

۱۰- مقادیر ویژه ماتریس A را بدست آورده و بردار ویژه های آن را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

سپس ماتریس A را قطری سازی کرده $(A = PDP^{-1})$ و صحت جواب خود را بدون محاسبه P^{-1} بررسی کنید.

۱۱- الف) مقادیر ویژه و بردار های ویژه A را برحسب C بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 1-c \\ 0.4 & c \end{bmatrix}$$

ب) در صورتی که $c = 0.8$ باشد، A^{∞} را محاسبه کنید.

پ) ماتریس 2×2 ای بیابید که $A^{60} = I$ شود و مقادیر ویژه آن را محاسبه کنید.

۱۲- فرض کنید A یک ماتریس 2×2 حقیقی است که دارای یک مقدار ویژه مختلط به فرم $\lambda = a - bj$ و یک بردار وِیژه $v \in C^2$ است. حال نشان دهید:

a) $A\,Re(v) = a\,Re(v) + b\,Im(v)$
b) $A\,Im(v) = -b\,Re(v) + a\,Im(v)$

موفق باشید

تیم تدریسیاری جبر خطی پاییز ۱۴۰۰