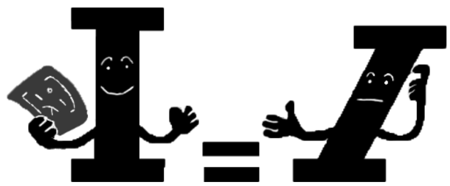
به نام خدا



پاسخ تمرین سوم

جبر خطی کاربردی – پاییز 1400

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

1- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد و $row\ space$ آن $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه دترمینان A مخالف صفر است.

ب) اگر A یک ماتریس بالا مثلثی باشد، آنگاه $\det(A)$ برابر حاصل ضرب عناصر روی قطر اصلی خواهد بود.

پ) یک زیرمجموعه همانند H از فضای برداری V یک زیرفضا از این فضای برداری محسوب می شود اگر بردار صفر این فضای برداری در H باشد.

ت) $Row\ A_{n\times m}^T = \mathbb{R}^m$ اگر و تنها اگر تبدیل خطی $x \mapsto Ax$، یک تبدیل پوشا از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ باشد.

ج) اگر H، $span\{b1, b2, \dots, bn\}$ باشد آنگاه مجموعه $\{b1, b2, \dots, bn\}$ یک پایه برای H است.

چ) هر مجموعه ی مستقل خطی از زیرفضای H، یک پایه برای H است.

ه) اگر ماتریس B، فرم کاهش یافته نردبانی ماتریس A باشد آنگاه $pivot\ column$ های ماتریس B، یک پایه برای فضای ستونی A خواهند بود.

پاسخ:

الف) درست. می دانیم اگر $rowA \in \mathbb{R}^n$ آنگاه ماتریس A ، n عنصر $pivot$ خواهد داشت و از آنجا که ماتریس $n \times n$ است پس طبق تئوری 2.8 کتاب درسی معکوس پذیر خواهد بود.

ب) درست. تئوری 3.2 کتاب درسی.

پ) غلط، چرا که برای برقراری شرط زیرفضا بودن، علاوه بر دارا بودن بردار صفر فضای برداری، این زیرمجموعه باید نسبت به عمل جمع برداری و ضرب اسکالر بسته باشد. برای مثال اگر $\mathbb{R}^2$ را فضای برداری خود در نظر بگیریم، مجموعه بردار هایی در $\mathbb{R}^2$ که دارای مولفه های کوچکتر مساوی یک می باشند، زیرمجموعه ما باشد.

$$H = \{v \mid v \in \mathbb{R}^2, v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; x, y \leq 1\}$$

همانطور که مشاهده می شود این مجموعه، یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}^2$ می باشد که شامل بردار صفر $\mathbb{R}^2$ هم می شود. اما با این حال نسبت به عمل جمع برداری و ضرب اسکالر بسته نیست.

$$\begin{bmatrix}0.7\\0.7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0.5\\0.6\end{bmatrix} \in H$$

$$\begin{bmatrix}0.7\\0.7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.5\\0.6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1.2\\1.3\end{bmatrix} \notin H$$

$$2\begin{bmatrix}0.7\\0.7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1.4\\1.4\end{bmatrix} \notin H$$

ت) درست، چرا که در این حالت $Row\ A^T_{n\times m} = Col\ A_{m\times n}$ می باشد که زمانی $Col\ A_{m\times n} = \mathbb{R}^m$ می باشد که تبدیل خطی $x \mapsto Ax$ یک تبدیل پوشا از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ باشد.

ج) غلط. لزوماً همیشه درست نیست و $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ باید مستقل خطی باشد.

چ) غلط. باید همچنین زیرفضای H را اسپن کند.

ه) غلط. زیرا در اصل ستون های $pivot$ در خود ماتریس A ، یک پایه برای فضای ستونی A تشکیل می دهند.

2- به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) دترمینان های زیر را با عملیات ردیفی بدست آورید.

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$b)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

ب) اگر A و B دو ماتریس 4×4 باشند و داشته باشیم $\det(A) = \frac{1}{2}$ و $\det(B) = 3$، مقدار عبارت $\det\left((A^3)^{-1}B^T\right)$ را بدست آورید.

پاسخ:

الف)

$$\text{a}= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{b} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

(می دانیم که دترمینان یک ماتریس بالا مثلثی برابر است با ضرب اعضای روی قطر اصلی آن ماتریس)

ب)

میدانیم که $\det(B^T) = \det(B)$ و $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ و

$$\det(A^3) = \det(A \times A \times A) = \det(A) \times \det(A) \times \det(\text{A})$$

در نتیجه داریم :

$$det((A^3)^{-1}B^T) = det((A^3)^{-1}) . det(B) = \frac{1}{det(A^3)} . det(B) = 8 * 3 = 24$$

3- با استفاده از قانون کرامر به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار y را در سیستم زیر بدست آورید.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + z = 4 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

ب) معکوس ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

الف)

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{3} = -2$$

ب) فرض کنیم وکتور x ستون j ام ماتریس A^{-1} باشد. در اینصورت خواهیم داشت:

$$Ax = e_j$$

که e_j ستون j ام ماتریس همانی و x_i درایه (i, j) ماتریس A^{-1} است.

حال طبق قانون کرامر داریم:

$$\{(i, j) - entry\ of\ A^{-1}\} = x_i = \frac{\det\left(A_i(e_j)\right)}{\det A}$$

که $A_i(e_j)$ همان ماتریس A است که ستون i ام آن با ستون j ام ماتریس همانی جایگزین شده است.

حال به صورت زیر فرض می کنیم:

$$\det\left(A_i(e_j)\right) = C_{ji}$$

حال با محاسبه عبارت زیر ماتریس معکوس A بدست می آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

پس داریم:

$$\det(A) = 1 \rightarrow \ A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4- با استفاده از مفهوم دترمینان به سوالات زیر پاسخ دهید.

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الف) مساحت متوازی الاضلاع متشکل از این دو بردار را بدست آورید.

ب) مساحت متوازی الاضلاع متشکل از $a, b + 2a$ را بدست آورید. از مقایسه مقدار بدست آمده با بخش الف چه نتیجه ای می‌گیرید؟ علت آن را توضیح دهید و نتیجه را به صورت یک قانون بیان کنید.

پ) حجم متوازی الاضلاع متشکل از بردار های زیر را بدست آورید. از آن چه نتیجه ای می گیرید؟

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

الف) طبق تئوری 9 کتاب درسی داریم:

$$area = \left\| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\| = 3$$

ب) همانطور که مشاهده می شود این مساحت با قسمت قبل برابر است. زیرا همانطور که در کتاب درسی بیان شد برای بدست آوردن این مساحت از دترمینان استفاده می کنیم و از آنجا که عمل $replacment$ سطر های ماتریس بر مقدار دترمینان تاثیری ندارد، پس مقدار بدست آمده با مقدار قسمت قبل برابر خواهد بود.

می توانیم نتیجه را به صورت قانون زیر بیان کنیم:

Let $\mathbf{a}_1$ and $\mathbf{a}_2$ be nonzero vectors. Then for any scalar c, the area of the parallelogram determined by $\mathbf{a}_1$ and $\mathbf{a}_2$ equals the area of the parallelogram determined by $\mathbf{a}_1$ and $\mathbf{a}_2 + c\mathbf{a}_1$.

پ) طبق تئوری 9 کتاب درسی داریم:

$$volume = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 4 \\ 0 & 7 & 7 \end{matrix} \right\| = 0$$

نتیجه می گیریم که دترمینان یک مجموعه وابسته خطی صفر است و پیرو آن حجم متوازی السطوح متشکل توسط این مجموعه نیز صفر خواهد بود.

5- فرض کنید بردار های u و v ، بردار هایی در فضای برداری V باشد. همچنین فرض کنید که H هر زیرفضایی از فضای برداری V می باشد که این دو بردار u و v را شامل شود. نشان دهید چرا H در این حالت لزوما شامل $Span\{u, v\}$ می شود.

پاسخ:

بنا به خواص زیرفضا، هر زیرفضای H که دارای بردار های u و v باشد، لزوما شامل تمامی ضرایب عددی بردار های u و v هم خواهد شد. علاوه بر این موضوع، لزوما شامل تمامی مجموع های ضرایب عددی u و v هم خواهد شد. پس بنابراین می توان گفت که زیرفضای H لزوما شامل همه ترکیب های خطی u و v یا همان $Span\{u, v\}$ می شود.

6- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -5 & -6 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ باشد. یک پایه برای $Nul\ A$ و یک پایه برای $Col\ A$ به دست آورید.

پاسخ:

برای محاسبه یک پایه برای $Col\ A$ تنها لازم است که ماتریس را به فرم نردبانی تبدیل کنیم و ستون های محوری ماتریس را پیدا کرده و بر اساس شماره ستون های محوری در فرم نردبانی ماتریس، بردار های ستونی پایه را پیدا کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -5 & -6 & -4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -5 & -6 & -4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 13 & 2 & -7 \\ 0 & -26 & -4 & 14 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -4 & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{13} & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می شود، بردار های ستونی اول و دوم، در ماتریس اصلی یک پایه برای فضای $Col\ A$ محسوب می شود.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} \right\} \ is\ a\ basis\ for\ Col\ A$$

برای محاسبه یک پایه برای $Nul\ A$ نیاز است که معادله $Ax = 0$ را حل کنیم و سپس به کمک فرم پارامتری جواب، پایه های مربوط به $Nul\ A$ را به دست بیاوریم.

$$Ax = 0 \to \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & -6 & -4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & -6 & -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 13 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & -26 & -4 & 14 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 13 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -4 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{13} & -\frac{7}{13} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{8}{13} & \frac{11}{13} & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{13} & -\frac{7}{13} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1+\frac{8}{13}x_3+\frac{11}{13}x_4=0\\ x_2+\frac{2}{13}x_3-\frac{7}{13}x_4=0\\ x_3\ is\ free\\ x_4\ is\ free\end{cases} \Longrightarrow x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{8}{13}x_3-\frac{11}{13}x_4\\ -\frac{2}{13}x_3+\frac{7}{13}x_4\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

$$=x_3\begin{bmatrix}-\frac{8}{13}\\ -\frac{2}{13}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-\frac{11}{13}\\ \frac{7}{13}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

همانگونه که مشخص است، توانستیم $Nul\ A$ را به صورت ترکیب خطی دو بردار مستقل خطی بنویسیم.

بنابراین این دو بردار یک پایه برای این فضا محسوب می شود.

$$\left\{\begin{bmatrix}-\frac{8}{13}\\ -\frac{2}{13}\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-\frac{11}{13}\\ \frac{7}{13}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}\ is\ a\ basis\ for\ Nul\ A$$

7- فرض کنید که W مجموعه تمامی بردار هایی است که می توان به فرم های زیر نمایش داد، که در آن ها $a, b, c \in \mathbb{R}$ می باشند. در هر یک از موارد زیر، در صورتی که W یک فضای برداری می باشد، یک مجموعه برداری S به گونه ای پیدا کنید که W را $span$ کند. در صورتی که W یک فضای برداری نمی باشد، با یک مثال دلیل خود را توضیح دهید.

الف) $\begin{bmatrix} -a+1 \\ a-6b \\ 2b+a \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \\ b \end{bmatrix}$

پ) $\begin{bmatrix} 4a+3b \\ 0 \\ a+b+c \\ c-2a \end{bmatrix}$

پاسخ:

الف) از آن جا که در فضای برداری W بردار صفر قرار نمی گیرد، W یک فضای برداری نخواهد بود.

ب) از آنجایی که هر بردار همانند w را در W به صورت

$$w = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نوشت بنابراین می توان گفت این سه بردار می توانند W را اسپن می کنند.

$$Span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = W$$

پ) از آنجایی که هر بردار همانند w در W می تواند به صورت

$$w = a\begin{bmatrix}4\\0\\1\\-2\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}3\\0\\1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

نوشته شود. بنابراین می توان گفت این سه بردار W را اسپن می کنند.

$$Span\left\{\begin{bmatrix}4\\0\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\} = W$$

8- فرض کنید $H = Span\{u_1, u_2, u_3\}$ و $K = Span\{v_1, v_2, v_3\}$ باشد به طوری که:

$$u1 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, u2 = \begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}, u3 = \begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}$$

$$v1 = \begin{bmatrix}-2\\-2\\-1\end{bmatrix}, v2 = \begin{bmatrix}-3\\2\\5\end{bmatrix}, v3 = \begin{bmatrix}-1\\4\\6\end{bmatrix}$$

الف) پایه ای برای H بیابید.

ب) پایه ای برای K بیابید.

پ) پایه ای برای $H + K$ بیابید. $(H + K = \{w : w = u + v, u\ in\ H\ , v\ in\ K\})$

پاسخ:

الف) ماتریس $[u_1\ u_2\ u_3]$ را به فرم کاهش یافته نردبانی در می آوریم تا ستون های $pivot$ را پیدا کنیم:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\2 & 2 & 4\\0 & -1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

بنابراین $\{u_1, u_2\}$ پایه ای برای H می باشد.

ب) ماتریس $[v_1\ v_2\ v_3]$ را به فرم کاهش یافته نردبانی در می آوریم تا ستون های $pivot$ را پیدا کنیم:

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $\{v_1, v_2\}$پایه ای برای K می باشد.

پ) ماتریس $[u_1\ u_2\ u_3\ v_1\ v_2\ v_3]$ را به فرم کاهش یافته نردبانی در می آوریم تا ستون های $pivot$ را پیدا کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین $\{u_1, u_2, v_2\}$ پایه ای برای $H + K$ می باشد.

9- (امتیازی) فرض کنید n عددی صحیح و مثبت است و T تبدیلی خطی و غیر صفر به طوری که $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. عبارت های زیر را اثبات کنید.

الف) فضای پوچ $(nullspace)$ تبدیل T دارای $n - 1$ بعد می باشد.

ب) فرض کنید $B = \{v_1, \dots, v_n - 1\}$ یک پایه برای فضای پوچ $(nullspace)$ تبدیل T می باشد و w برداری است n بعدی که در $Nul(T)$ قرار ندارد. ثابت کنید $B = \{v_1, \dots, v_n - 1, w\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ می باشد.

ج) هر بردار $u \in \mathbb{R}^n$ را میتوان به صورت $u = v + \frac{t(u)}{t(w)} w$ نشان داد که $v \in Nul(T)$.

پاسخ:

الف) فرض کنید A نمایش ماتریس تبدیل خطی $T: R^n \to R$ است . پس A ماتریسی غیر صفر و $1 \times n$ می باشد . حال از آنجایی که rank ماتریس A برابر 1 می باشد، rank تبدیل T نیز برابر 1 خواهد بود . حال

با توجه به قضیه $rank - nullity$ داریم که $rank(T) + nullity(T) = n$ که نتیجه می دهد $nullity(T) = n - 1$.

ب) ادعا می کنیم که n بردار $v_1, \ldots, v_{n-1}, w$ مستقل خطی می باشند . فرض کنید به ازای $c_1, \ldots, c_{n-1} \in R$ داریم که $c_1v_1 + \ldots + c_{n-1}v_{n-1} + c_nw = 0$. اگر $c_n \neq 0$ خواهیم داشت $w = \frac{-c_1}{c_n}v_1 + \ldots + \frac{-c_{n-1}}{c_n}v_{n-1}$ که نتیجه می دهد $w \in \mathrm{Span(B)} = \mathrm{Nul(T)}$ که با فرض سوال تناقض دارد . در نتیجه $c_n = 0$. حال معادله فوق به صورت $c_1v_1 + \ldots + c_{n-1}v_{n-1} = 0$ در می آید که چون B یک پایه می باشد ، بردار های $v_1, \ldots, v_{n-1}$ مستقل خطی می باشند و در نتیجه داریم $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

حال با توجه به این که همه ضرایب $c_1, \ldots, c_n$ باید صفر باشند ، نتیجه می گیریم که بردار های $v_1, \ldots, v_{n-1}, w$ مستقل خطی می باشند . حال چون R^n یک فضای برداری n بعدی می باشد و B' شامل n بردار مستقل خطی است ، مجموعه B' یک پایه برای R^n می باشد.

ج) فرض کنید $u \in R^n$ که چون B' یک پایه برای R^n می باشد وجود دارد $c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{R}$ که $u = c_1v_1 + \ldots + c_{n-1}v_{n-1} + c_nw$ که می توان آن را به صورت $u = v + c_nw$ نوشت که $v \in \mathrm{Nul(T)}$.

حال با اعمال ترکیب خطی T بر دو عبارت مساوی خواهیم داشت که:

$$T(u) = T(v + c_nw) = T(v) + c_nT(w)$$

$$\xrightarrow{by\ linearity\ of\ T\ since\ v \in \mathrm{Nul(T)}} = 0 + c_nT(w) = c_nT(w)$$

و از آنجایی که $w \notin \mathrm{Nul(T)}$ مقدار تبدیل $\mathrm{T(w)}$ مخالف صفر خواهد بود . در نتیجه خواهیم داشت که $c_n = \frac{T(u)}{T(w)}$ که از ترکیب آن با رابطه بدست آمده در بالا خواهیم داشت که $u = v + \frac{T(u)}{T(w)}w$ که $v \in \mathrm{Nul(T)}$.

موفق باشید

تیم تدریسیاری جبر خطی پاییز 1400