سوال:

فرض کنید $u_1, u_2, \dots, u_p$ و $v_1, v_2, \dots, v_q$ بردار هایی در مجموعه برداری V می باشد. همچنین فرض کنید، $H = span\{u_1, \dots, u_p\}$ و $K = span\{v_1, \dots, v_q\}$ باشند. نشان دهید $H + K = span\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$

$H + K = \{w \mid w = u + v, u \in H \; and \; v \in K\}$

پاسخ:

اثبات این که $H + K = span\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ دارای دو بخش است. در قسمت اول باید اثبات کنید که $H + K$ زیرمجموعه $span\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ است. و در قسمت دوم باید نشان دهیم $span\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ زیرمجموعه ای از $H + K$ می باشد.

قسمت اول اثبات)

یک بردار معمولی در زیرفضا H به فرم $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_pu_p$ و یک بردار معمولی در زیر فضا K به فرم $d_1v_1 + d_2v_2 + \cdots + d_qv_q$ می باشد. مجموع این دو بردار ترکیب خطی از $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ می باشد پس بنابراین متعلق به $span\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ می باشد. بنابراین $H + K$ یک زیرمجموعه از $span\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ می باشد.

قسمت دوم اثبات)

از آنجایی که هر بردار مانند u در زیرفضای برداری H را می توان به فرم $u + \mathbf{0}$ می توان نوشت و همچنین از آنجایی که بردار صفر در زیرفضای برداری K می باشد (همچنین در زیرفضای برداری H نیز هست. بنا بر اولین شرط از زیرفضا بودن یک مجموعه برداری) پس هر برداری در H در $H + K$ نیز خواهد بود. همچنین بنا به شرط زیرفضا بودن، زیرفضای برداری H نسبت به جمع برداری و ضرب اسکالر بسته می باشد(چرا که H یک زیرفضا از فضای برداری V می باشد.) بنابراین H زیرفضایی از $H + K$ می باشد.
همین قاعده را می توان برای اثبات اینکه K زیرفضایی از $H + K$ می باشد، استفاده کرد. بنابراین هر یک از بردار های $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ متعلق به $H + K$ خواهند بود بنابراین ترکیب خطی این بردار های نیز متعلق به $H + K$ خواهد بود چرا که $H + K$ یک زیر فضا است. (شرط دوم زیرفضا بودن)

برای اثبات زیرفضا بودن $H + K$ درستی سه شرط مربوط به زیرفضا بودن را چک کنید.

بنابراین در نهایت می توانیم بگوییم که $span\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ زیرمجموعه از $H + K$ می باشد.