سوال (تیپ 1) :

فرض کنید $Q(x) = x^T Ax$ و $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ باشد و $det(A) \neq 0$. اگر مقدارویژه های ماتریس A ، $\boldsymbol{\lambda 1}$ و $\boldsymbol{\lambda 2}$ باشند و $det(A - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}) = (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda 1})(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda 2})$ ثابت کنید :

الف) $\boldsymbol{\lambda 1} + \boldsymbol{\lambda 2} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}$ و $\boldsymbol{\lambda 1 \lambda 2} = \boldsymbol{det(A)}$

ب) اگر det(A)>0 **و** a>0 آنگاه Q مثبت معین است .

جواب :

الف) ابتدا دترمینان $A - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}$ را به دست می آوریم و با $(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda 1})(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda 2})$ مساوی قرار می دهیم :

$$det(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}) = \boldsymbol{det}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} - \lambda & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} - \lambda \end{bmatrix}\right) = (\boldsymbol{a} - \lambda)(d - \lambda) - b^2 =$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - b^2$$

$$(\lambda - \lambda 1)(\lambda - \lambda 2) = \lambda^2 - (\lambda 1 + \lambda 2)\lambda + \lambda 1 \lambda 2$$

اکنون اگر ضریب ها را یکسان قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\lambda 1 \lambda 2 = ad - b^2 = det(A), \lambda 1 + \lambda 2 = a + d$$

ب)

از آنجاییکه det(A)>0 و از الف داریم که $det(A) = \lambda 1 \lambda 2$ بنابراین $\lambda 1 \lambda 2 > 0$ که این یعنی $\lambda 1$ و $\lambda 2$ هم علامت هستند .

همچنین چون det(A)>0 است پس $\text{ad-b}^2 > 0$ است بنابراین $\text{ad} > \text{b}^2$ می باشد . که این یعنی ad>0 است . از آنجاییکه طبق فرض a>0 است بنابراین می توانیم نتیجه بگیریم که d>0 .

از طرفی می دانستیم که $\lambda 1 + \lambda 2 = \text{a} + \text{d}$ و چون a+d مثبت است بنابراین $\lambda 1 + \lambda 2$ نیز مثبت است . همچنین ثابت کردیم که $\lambda 1$ و $\lambda 2$ هم علامت هستند بنابراین می توان نتیجه گرفت هر دو مقدارویژه ی ماتریس A مثبت هستند بنابراین Q مثبت معین است .

سوال(تیپ 2):

فرض کنید $Q(x) = x^T Ax$ و $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ باشد و $det(A) \neq 0$. اگر مقداروپژه های ماتریس A ، $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}$ و $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{2}$ باشند و $det(A - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}) = (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{1})(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{2})$ ثابت کنید :

الف) $\boldsymbol{\lambda 1 + \lambda 2 = a + d}$ و $\boldsymbol{\lambda 1 \lambda 2 = det(A)}$

ب) اگر det(A)>0 **و** a<0 آنگاه Q منفی معین است .

جواب :

الف) ابتدا دترمینان $A - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}$ را به دست می آوریم و با $(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{1})(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{2})$ مساوی قرار می دهیم :

$$det(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}) = \boldsymbol{det}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} - \lambda & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} - \lambda \end{bmatrix}\right) = (\boldsymbol{a} - \lambda)(d - \lambda) - b^2 =$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - b^2$$

$$(\lambda - \lambda 1)(\lambda - \lambda 2) = \lambda^2 - (\lambda 1 + \lambda 2)\lambda + \lambda 1\lambda 2$$

اکنون اگر ضریب ها را یکسان قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\lambda 1\lambda 2 = ad - b^2 = det(A), \lambda 1 + \lambda 2 = a + d$$

ب)

از آنجاییکه det(A)>0 و از الف داریم که $det(A) = \lambda 1\lambda 2$ بنابراین $\lambda 1\lambda 2 > 0$ که این یعنی $\lambda 1$ و $\lambda 2$ هم علامت هستند .

همچنین چون det(A)>0 است پس $\mathrm{ad}\text{-}\mathrm{b}^2 > 0$ است بنابراین $\mathrm{ad} > \mathrm{b}^2$ می باشد . که این یعنی ad>0 است . از آنجاییکه طبق فرض a<0 است بنابراین می توانیم نتیجه بگیریم که d<0 .

از طرفی می دانستیم که $\lambda 1 + \lambda 2 = \mathrm{a} + \mathrm{d}$ و چون a+d منفی است بنابراین $\lambda 1 + \lambda 2$ نیز منفی است . همچنین ثابت کردیم که $\lambda 1$ و $\lambda 2$ هم علامت هستند بنابراین می توان نتیجه گرفت هر دو مقداروپژه ی ماتریس A منفی هستند بنابراین Q منفی معین است .