دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

به نام یزدان پاک

دانشکده مهندسی کامپیوتر

جبر خطی کاربردی

دکتر امیرمزلقانی

نیم‌سال دوم ۰۱ - ۰۰

پاسخ تشریحی تمرین سری سوم

در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل ala.spring2022@gmail.com و یا تلگرام تدریس‌یاران درس در ارتباط باشید.

پرسش اول اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد که $rankA = r > 0$. U شکل سطری پلکانی ماتریس A است.نشان دهید یک ماتریس وارون پذیر مانند E وجود دارد که $A = EU$. با استفاده از این موضوع A را به صورت حاصل جمع r ماتریس با رنک ۱ بنویسید.

حل. می دانیم برای اینکه A را سطری پلکانی کنیم باید یک سری ماتریس مقدماتی را باید در آن ضرب کنیم به شکل زیر :

$$E_1 E_2 E_3 \cdots E_n A = U$$

از تمرین سری قبل می دانیم ماتریس های مقدماتی معکوس پذیرند و معکوس آن ها نیز ماتریس مقدماتی است پس داریم:

$$A = E_n^{-1} E_{n-1}^{-1} \cdots E_1^{-1} U$$

از انجاییکه ضرب چنر ماتریس معکوس پذیر معکوس پذیر است پس

$$E = E_n^{-1} E_{n-1}^{-1} \cdots E_1^{-1}$$

حال برای اثبات قسمت دوم از فصل های قبل می دانیم:

$$AB = \begin{bmatrix} col_1(A) & clo_2(A) & \cdots & col_n(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} row_1(A) \\ row_2(A) \\ \vdots \\ row_n(A) \end{bmatrix} = col_1(A)row_1(B) + col_2(A)row_2(B) + \cdots + col_n(A)row_n(B) \qquad \star$$

چون $rank(A) = r$ هست پس شکل سطری پلکانی آن دارای r سطر مستقل خطی است و بقیه سر ها صفر هستند.پس با توجه $\star$، r سطر غیر صفر داریم و همچنین $col_i(A)row_i(B)$ یک ماتریس با رنک ۱ است زیرا همه سطر های $col_i(A)row_i(B)$ مضربی از $row_i(B)$ هستند که در این صورت فقط یک بردار مستقل خطی داریم و بدین ترتیب حکم ثابت می شود.

▶

پرسش دوم

۱. نشان دهید :

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_n = span(\bigcup_{i=1}^{n} W_i)$$

حل.

$$v \in W_1 + W_2 + \cdots + W_n \longleftrightarrow \exists\, w_1, w_2, \cdots, w_n \quad w_1 \in W_1, w_2 \in W_2, \cdots w_n \in W_n \quad v = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

$$\longleftrightarrow w_1, w_2, \cdots, w_n \in \bigcup_{i=1}^{n} W_i \longrightarrow w_1 + w_2 + \cdots + w_n \in span(\bigcup_{i=1}^{n} W_i) \longleftrightarrow v \in span(\bigcup_{i=1}^{n} W_i)$$

▶

۲. نشان دهید $W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ زیر فضای V هستند و همچنین نشان دهید:

$$W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$$

.

حل. می دانیم $0 \in W_1, 0 \in W_2$ پس 0 عضو $W_1 + W_2$ هست از سوی دیگر اگر $v_1 \in W_1 + W_2, v_2 \in W_1 + W_2$ باشد،آنگاه طبق تعریف داریم :

$$\exists w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \ \ v_1 = w_1 + w_2 \quad , \quad \exists w_1' \in W_1, w_2' \in W_2 \ \ v_2 = w_1' + w_2'$$

در نتجه:

$$v_1 + v_2 = w_1 + w_2 + w_1' + w_2' = \underbrace{w_1 + w_1'}_{\in W_1} + \underbrace{w_2 + w_2'}_{\in W_2} \longrightarrow v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$$

همچنین باید ثابت کنیم اگر $v \in W_1 + W_2$ باشد آنگاه kv هم چنین است که k یک اسکالر است.

$$\exists w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \;\; v = w_1 + w_2 \longrightarrow kv = \underbrace{kw_1}_{\in W_1} + \underbrace{kw_2}_{\in W_2} \longrightarrow kv \in W_1 + W_2$$

پس $W_1 + W_2$ یک زیر فضای V است.

حال باید ثابت کنیم $W_1 \cap W_2$ زیر فضای V است. می دانیم صفر عضو هر دو زیر فضا است پس صفر در اشتراک آن ها نیز وجود دارد،حال باید ثابت می کنیم که :

$$v_1 \in W_1 \cap W_2, v_2 \in W_1 \cap W_2 \longrightarrow v_1 \in W_1 \wedge v_1 \in W_2, v_2 \in W_1, v_2 \in W_2$$

$$\longrightarrow v_1 + v_2 \in W_1 \wedge v_1 + v_2 \in W_2 \longrightarrow v_1 + v_2 \in W_1 \cap W_2$$

به همین شکل ثابت می شود ضرب یک اسکالر در اعضای $W_1 \cap W_2$ عضو $W_1 \cap W_2$ است پس زیر فضا بودن اشتراک دو زیر فضا نیز ثابت می شود.

اکنون باید ثابت کنیم رابطه بالا برقرار است بدیهی است که اشتراک دو زیر فضا زیر مجموعه اجتماع آن است (این رابطه برای هر دو مجموعه ای فارغ از زیر فضا بودن یا نبودن صادق است) کافی است ثابت کنیم:

$$W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$$

برای اثبات این موضوع از رابطه قسمت ۱ استفاده می کنیم، طبق قسمت ۱ می دانیم:

$$W_1 + W_2 = span(W_1 \cup W_2)$$

واضح است که اگر مجموعه ای به شکل A داشته باشیم آنگاه:

$$A \subseteq span(A)$$

زیرا :

$$span(A) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}, a_i \in A$$

و فرض کنید در هر مرحله $(\lambda_i = 1)$ و $(\lambda_j = 0, j \neq i)$ در این صورت $A \subseteq span(A)$. ▶

۳. نشان دهید :

$$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$$

.

حل. فرض کنیم :

$$diamW_1 = n, dimW_2 = m, dim(W_1 \cap W_2) = t$$

همچنین فرض کنید: $\{u_1, u_2, \cdots, u_t\}$ یک پایه برای $W_1 \cap W_2$ باشد،پس می توان آنرا به یک پایه $B_1 = \{u_1, u_2, \cdots, u_t, v_1, v_2, \cdots, v_{n-t}\}$ از W_1 و همچنین $B_2 = \{u_1, u_2, \cdots, u_t, w_1, w_2, \cdots, w_{m-t}\}$ از W_2 توسعه داد.ثابت می کنیم:

$$B = \{u_1, u_2, \cdots, u_t, v_1, v_2, \cdots, v_{n-t}, w_1, w_2, \cdots, w_{m-t}\}$$

یک پایه برای $W_1 + W_2$ است.که رد این صورت حکم مسئله نیز ثابت می شود ،برای اثبات پایه بودن باید استقلال خطی و مولد بودن را ثابت می کنیم(مولد بودن یعنی ترکیب های خطی یک مجموعه تمامی اعضای آن مجموعه را تولید می کنند که در واقع بیانگر این است که اگر $if \;\; A \subseteq B \rightarrow span(A) = B$ در بحث ما می گوییم بردار هایی مولد یک فضا یا زیر فضا هستند که تمامی اعضای آن ها را بتوان با ترکیب خطی این بردار ها تولید کرد.)

استقلال خطی :

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n-t} \beta_i v_i + \sum_{i=1}^{m-t} \gamma_i w_i = 0 (\star) \longrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{t} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n-t} \beta_i v_i}_{\in W_1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m-t} -\gamma_i w_i}_{\in W_2}$$

$$\longrightarrow \sum_{i=۱}^{m-t} -\gamma_i w_i \in W_۱ \cap W_۲$$

پس وجود دارد $\mu_۱, \mu_۲, \cdots, \mu_t$ به طوری که:

$$\sum_{i=۱}^{m-t} -\gamma_i w_i = \sum_{i=۱}^{t} \mu_i u_i$$

$$\longrightarrow \sum_{i=۱}^{m-t} \gamma_i w_i + \sum_{i=۱}^{t} \mu_i u_i = ۰$$

چون ترکیب خطی فوق صفر ، μ_i ها ، w_i ها یک پایه برای $w_۲$ و ذا مستقل خطی هستند

پس : $\forall i \ \ \mu_i = ۰, \forall i \ \ \gamma_i = ۰$ با جایگذاری در $\star$ داریم :

$$\sum_{i=۱}^{t} u_i + \sum_{i=۱}^{n-t} = ۰$$

یعنی ترکیب خطی از اعضای پایه $W_۱$ صفر شده است ،پس :

$$\forall i \alpha_i = ۰, \forall i \beta_i = ۰$$

پس B مستقل خطی است.

مولد بودن: باید ثابت کنیم هر $w \in W_۱ + W_۲$ را می توان به صورت ترکیب خطی B نوشت.

می دانیم طبق تعریف :

$$\exists w'_۱ \in W_۱, w'_۲ \in W_۲ \quad w = w'_۱ + w'_۲$$

$$\longrightarrow w'_۱ = \alpha_۱ u_۱ + \alpha_۲ u_۲ + \cdots + \alpha_t u_t + \alpha_{t+۱} v_۱ + \alpha_{t+۲} v_۲ + \cdots + \alpha_n v_{n-t}$$

$$\longrightarrow w'_۲ = \beta_۱ u_۱ + \beta_۲ u_۲ + \cdots + \beta_t u_t + \beta_{t+۱} w_۱ + \beta_{t+۲} w_۲ + \cdots + \beta_m w_{m-t}$$

$$\begin{aligned}\longrightarrow w = w'_۱ + w'_۲ =& (\alpha_۱ + \beta_۱) u_۱ + (\alpha_۲ + \beta_۲) u_۲ + \cdots + (\alpha_t + \beta_t) u_t + \\ & \alpha_{t+۱} v_۱ + \alpha_{t+۲} v_۲ + \cdots + \alpha_n v_{n-t} + \beta_{t+۱} w_۱ + \beta_{t+۲} w_۲ + \cdots + \beta_m w_{m-t}\end{aligned}$$

پس توانستیم w را برحسب B بنویسیم و در نتیجه B مولد و مستقل خطی است و پایه است و حکم ثابت می شود.
▶

۴. نتیجه گیری قسمت ۲ را با استفاده از دو خط که از مبدا مختصات xy می گذرند توجیه کنید.

حل. فرض کنید دو خط متقاطع داریم که در یک نقطه مشترکند،خط اول را با $W_۱$ و خط دوم را با $W_۲$ نشان می دهیم. آنگاه : $W_۱ \cap W_۲$ یک نقطه خواهد بود،و $W_۱ \cup W_۲$ از خود این دو خط متقاطع تشکیل خواهد شد.در این صورت $W_۱ + W_۲$ صفحه گذرنده از این دو خط خواهد بود.که رابطه ۲ به وضوح با این فرضیات مشخص است.
▶

۵. درستی یا نادرستی تساوی زیر را بررسی کنید در صورت درست بودن اثبات و در صورت نادرست بودن مثال نقض بزنید:

$$W_۳ \cap (W_۱ + W_۲) = (W_۳ \cap W_۱) + (W_۳ \cap W_۲)$$

.

حل. برای اینکه نشان دهیم این تساوی برقرار نیست،فرض می کنیم $W_۱, W_۲, W_۳$ سه خط هستند که در مبدا مختصات مشترکند.مثلا فرض کنید $W_۱$ محور x ها ، $W_۲$ محور y ها و $W_۳$ نیمساز ناحیه اول و سوم است، در این صورت $W_۳ \cap (W_۱ + W_۲)$ یک خط خواهد بود ولی $(W_۳ \cap W_۱) + (W_۳ \cap W_۲)$ همان نقطه صفر خواهد بود پس مشاهده می کنید که تساوی برقرار نیست.

▶

۶. اگر $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ باشد آنگاه به $W_1 + W_2$ جمع مستقیم نیز می گویند و آن را با $W_1 \bigoplus W_2$ نشان می دهند،ثابت کنید اگر V_1 زیر فضایی از فضای برداری V باشد و اگر زیر فضای برداری یکتای V_2 موجود باشد که $V = V_1 \bigoplus V_2$ آنگاه $V_1 = V$.

حل. برای اثبات این سوال به برهان خلف فرض کنید $V_1 \neq V$ در این صورت $dimV_1 < dimV$ فرض کنید

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n\}$$

یک پایه برای V باشد،که $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in V_1$ (این موضوع ممکن است زیرا در واقع می توانیم یک پایه برای V_1 در نظر بگیریم و آن را به پایه ای از V گسترش دهیم.) فرض کنیم $V_2 = span(\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n)$ و $V_3 = span(\alpha_{m+1} + \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ در این صورت V_2, V_3 با V_1 عضو مشتر ک ندارند که در این صورت $V = V_1 \bigoplus V_2$ و $V = V_1 \bigoplus V_3$ که $V_2 \neq V_3$ و این با یکتایی وجود عضوی مانند V_2 در تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم درست است.

▶

پرسش سوم

1. $V = \mathbb{P}_3[x] \quad u = p(x) = 8 + x + 6x^2 + 9x^3$

$B = \{2 + 3x + 4x^2 - x^3 ,\ 3x + 5x^2 + 2x^3 ,\ -5x^2 - 5x^3 ,\ 4 + 4x + 4x^2\}$

$$\left.\begin{matrix} \bar{u} = c_1\bar{b}_1 + c_2\bar{b}_2 + c_3\bar{b}_3 + c_4\bar{b}_4 \\ P_B[\bar{u}]_B = \bar{u} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & -5 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & -5 & 0 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -5 & 2 & 13 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 5 & -5 & -4 & -10 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{4}{5} & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{61}{6} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{15} & \frac{5}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{15} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{61}{15} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{15} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{31}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Longrightarrow [u]_B = -2 - \frac{5}{3}x - \frac{31}{15}x^2 + 3x^3$$

$C = \{1 - x^3 ,\ 1 + x ,\ x + x^2 ,\ x^2 + x^3\}$

$$\left.\begin{matrix} \bar{u} = c_1\bar{c}_1 + c_2\bar{c}_2 + c_3\bar{c}_3 + c_4\bar{c}_4 \\ P_C[\bar{u}]_C = \bar{u} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right] \Rightarrow [u]_C = 2 + 6x - 5x^2 + 11x^3$$

$$[\bar{u}]_B \xrightarrow{P_{C \leftarrow B}} [\bar{u}]_C \Longrightarrow [\bar{u}]_C = P_{C \leftarrow B}[\bar{u}]_B \Rightarrow P_{C \leftarrow B} = \left[[\bar{b}_1]_C ,\ [\bar{b}_2]_C ,\ [\bar{b}_3]_C\right]$$

$$\Rightarrow [C|B] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & -5 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & -5 & 4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -5 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -5 & 2 \end{array}\right] = [I | P_{C \leftarrow B}] \Rightarrow P_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

ب) برای حل این سوال می‌توانیم ضرایب x_1 , x_2 , x_3 , x_4 را پشت سر هر ماتریس(یک بردار از پایه) بگذاریم و درایه‌های نظیر را جمع بزنیم و سپس معادله را حل کنیم. برای مثال فرض کنید ما میخواهیم درایه v_{11} را بسازیم برا اینکار با توجه به پایه B خواهیم داشت (x_i ضریب b_i می‌باشد) :

$$V_{11} \rightarrow (1 \times x_1) + (0 \times x_2) + (3 \times x_3) + (-2 \times x_4) = -3$$

$$V_{12} \rightarrow (0 \times x_1) + (-1 \times x_2) + (5 \times x_3) + (-4 \times x_4) = -2$$

و اگر برای هر ۴ درایه اینکار را انجام دهیم به ۴ معادله و ۴ مجهول می‌رسیم که به راحتی قابل حل می‌باشد و مقادیر بردار X که همان مختصات ما بر اساس پایه مورد نظر است، پیدا می‌کنیم.

و معادله ما به شکل زیر در می‌آید :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

که با حل این معادله به جواب زیر می‌رسیم :

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

حال مراحل بالا را برای پایه C نیز تکرار می‌کنیم و معادله برای این پایه به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

که با حل به جواب زیر می‌رسیم :

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

برای حل این قسمت باید هر ماتریس در پایه B را بر اساس ماتریس‌های پایه C بنویسیم. می‌توانیم رویه قسمت قبل را در پیش بگیریم و ۴ بار روند تشکیل ماتریس را انجام دهیم ولی اگر کمی به ساختار ماتریس های پایه C نگاه کنیم، در می‌یابیم که با اولویت‌بندی بین آن‌ها به راحتی می‌توانیم اینکار را بدون تشکیل معادله انجام دهیم. برای مثال برای ایجاد درایه a_2 فقط اولین ماتریس $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ نقش دارد؛ پس با مشخص‌کردن ضریب این ماتریس به سراغ ماتریس بعدی می‌رویم و در گام بعد هم می‌بینیم برای a_{21} فقط ماتریس‌های اول و دوم نقش دارند که ما ضریب اولی را مشخص کردیم پس فقط باید ضریب دومی را مشخص کنیم و با ادامه همین روال تمام ضرایب برای ما مشخص می‌شود:

$$[b_1]_c = -2c_1 + c_2 + c_3 + c_4$$

$$[b_2]_c = 0c_1 + 3c_2 - 4c_3 + c_4$$

$$[b_3]_c = 0c_1 + 0c_2 + 5c_3 - 2c_4$$

$$[b_4]_c = 0c_1 + 0c_2 - 4c_3 + 2c_4$$

میدانیم که هر $[b_i]_c$ یک ستون از ماتریس انتقال است و با کنار هم قرار دادن ستون‌ها به ماتریس زیر می‌رسیم:

$$: \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

۳. $V=\mathbb{R}^3 \quad \bar{v}=(1,7,7)$

$$B=\{\underbrace{(-7,4,4)}_{\bar{b}_1},\underbrace{(4,2,-1)}_{\bar{b}_2},\underbrace{(-7,5,0)}_{\bar{b}_3}\} \to \bar{v}=c_1\bar{b}_1+c_2\bar{b}_2+c_3\bar{b}_3 \quad \boxed{P_B[\bar{v}]_B=\bar{v}}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 4 & -7 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & 0 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ -7 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 5/3 & 0 \\ 1 & -4/7 & 1 & -1/7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 5/4 & 7/4 \\ 0 & 1 & 5/3 & 0 \\ 0 & -15/14 & -1/4 & -53/28 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 5/4 & 7/4 \\ 0 & 1 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 43/28 & -53/28 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 5/4 & 7/4 \\ 0 & 1 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -53/43 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 292/129 \\ 0 & 1 & 0 & 265/129 \\ 0 & 0 & 1 & -53/43 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow [\bar{v}]_B=\begin{bmatrix} 292/129 \\ 265/129 \\ -53/43 \end{bmatrix} \qquad P_B=[\bar{b}_1\ \bar{b}_2\ \bar{b}_3] \qquad P_C=[\bar{c}_1\ \bar{c}_2\ \bar{c}_3]$$

$$C=\{\underbrace{(1,1,0)}_{\bar{c}_1},\underbrace{(0,1,1)}_{\bar{c}_2},\underbrace{(3,-1,-1)}_{\bar{c}_3}\} \Rightarrow \bar{v}=c_1\bar{C}_1+c_2\bar{C}_2+c_3\bar{C}_3 \quad \boxed{P_C[\bar{v}]_C=\bar{v}}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 22/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right] \Rightarrow [\bar{v}]_C=\begin{bmatrix} 0 \\ 22/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

طبق تعریف ماتریس انتقال داریم:

$$[\bar{v}]_B \xrightarrow{P_{C\leftarrow B}} [\bar{v}]_C \Rightarrow [\bar{v}]_C = P_{C\leftarrow B}[\bar{v}]_B$$

$$P_{C\leftarrow B} = [\,[\bar{b}_1]_C,\ [\bar{b}_2]_C,\ [\bar{b}_3]_C\,]$$

برای آنکه محاسبه‌ی $[\bar{b}_i]_C$ها طولانی نشود، می‌توان یکباره همه را باهم پیدا کرد:

$$[C\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -7 & 4 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 & -2/3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 & 1/3 & -4 \end{array}\right] = [I\,|\,P_{C\leftarrow B}]$$

$$\Rightarrow P_{C\leftarrow B}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 5/3 & -2/3 & -4 \\ -7/3 & 1/3 & -4 \end{bmatrix}$$

پرسش چهارم

$$\text{i}: S_1=\left\{\begin{bmatrix}1\\7\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-5\\4\end{bmatrix}\right\}\qquad \begin{bmatrix}1&3&-2&x_1\\7&1&-5&x_2\\2&-1&4&x_3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&-2&x_1\\0&20&-9&7x_1-x_2\\0&7&-8&2x_1-x_3\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&3&-2&x_1\\0&20&-9&7x_1-x_2\\0&0&\frac{-97}{20}&\star\end{bmatrix}\longrightarrow$$

دستگاه دارای جواب یکتا می باشد، پس S_1 پایه برای $\mathbb{R}^3$ می باشد

$$\text{ii}: S_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\5\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\6\\-5\end{bmatrix}\right\}\qquad \begin{bmatrix}1&7&3&x_1\\4&5&6&x_2\\1&-3&5&x_3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&3&x_1\\0&23&6&4x_1-x_2\\0&10&-2&x_1-x_3\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&7&3&x_1\\0&23&6&4x_1-x_2\\0&0&\frac{106}{23}&\star\end{bmatrix}\longrightarrow$$

دستگاه دارای جواب یکتا می باشد، پس S_2 پایه برای $\mathbb{R}^3$ می باشد.

$$\text{iii}: S_3=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\7\end{bmatrix}\right\}\qquad \begin{bmatrix}1&3&x_1\\2&1&x_2\\2&7&x_3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&x_1\\0&5&2x_1-x_2\\0&-1&2x_1-x_3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&x_1\\0&5&2x_1-x_2\\0&0&\star\neq 0\end{bmatrix}$$

دستگاه فاقد پاسخ می باشد، پس S_3 برای $\mathbb{R}^3$ پایه نیست.

$$\text{iv}: S_4=\left\{\begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\4\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\5\end{bmatrix}\right\}\qquad \begin{bmatrix}3&2&-2&x_1\\0&4&0&x_2\\5&-1&5&x_3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3&2&-2&x_1\\0&4&0&x_2\\0&\frac{13}{3}&\frac{-25}{3}&\frac{5}{3}x_1-x_3\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}3&2&-2&x_1\\0&4&0&x_2\\0&0&\frac{-25}{3}&\star\end{bmatrix}\longrightarrow$$

دستگاه دارای جواب یکتا می باشد، پس S_4 پایه برای $\mathbb{R}^3$ می باشد.

$$\text{v}: S_5=\left\{\begin{bmatrix}-4\\3\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\7\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\8\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\9\\8\end{bmatrix}\right\}$$

چون هر ۴ برداری که هر کدام دارای ۳ مولفه باشند، حتماً وابسته خطی هستند، پس S_5 نمی تواند پایه برای $\mathbb{R}^3$ باشد.

پرسش پنجم

۵- برای آنکه نشان دهیم U زیرفضا از V می باشد، ۳ شرط زیرفضا بودن را بررسی می کنیم:

الف) بررسی می کنیم آیا عضو ۰ در فضای برداری V در U نیز قرار دارد یا خیر:

عضو ۰ فضای برداری V: $(a_i)_{i=1}^{\infty}=0$؛ به ازای هر k در مجموعه $\{1,2,3,\ldots\}$ در زیرفضای U داریم:

$$a_{k+2}-5a_{k+1}+3a_k \overset{?}{=} 0 \longrightarrow 0-5\times 0+3\times 0 \overset{\checkmark}{=} 0$$

پس شرط اول (وجود عضو صفر در U) برقرار است.

ب) بررسی می کنیم آیا جمع ۲ عضو از U باز هم در U قرار دارد یا خیر؛ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}(a_i)_{i=1}^{\infty}\in U\\ (b_i)_{i=1}^{\infty}\in U\end{array}\right\} \longrightarrow \forall k\in\{1,2,\ldots\}: \left.\begin{array}{l}a_{k+2}-5a_{k+1}+3a_k=0\\ b_{k+2}-5b_{k+1}+3b_k=0\end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\forall k\in\{1,2,\ldots\}: (a_{k+2}+b_{k+2})-5(a_{k+1}+b_{k+1})+3(a_k+b_k)=0 \longrightarrow$$

$$(a_i)_{i=1}^{\infty}+(b_i)_{i=1}^{\infty}\in U \quad \checkmark$$

پس شرط دوم نیز برقرار است (U نسبت به عمل جمع بسته می باشد)

پ) بررسی می کنیم آیا ضرب عدد اسکالر در عضوی از U باز هم در U قرار دارد یا خیر، داریم:

$$(a_i)_{i=1}^{\infty}\in U \longrightarrow \forall k\in\{1,2,\ldots\}: a_{k+2}-5a_{k+1}+3a_k=0 \xrightarrow{\times c}$$

$$(ca_{k+2})-5(ca_{k+1})+3(ca_k)=0$$

$$(ca_i)_{i=1}^{\infty}\in U \quad \checkmark$$

بنابراین شرط سوم نیز برقرار بوده و U نسبت به ضرب اسکالر بسته می باشد.

در نتیجه U یک زیرفضا از V است.

پرسش ششم اگر $\mathbb{P}[x], \mathbb{P}_n[x]$ طبق تعریف بالا فضا های برداری با ضرایب حقیقی باشند آنگاه :

۱. نشان دهید اگر $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$ پایه ای برای $\mathbb{P}_n[x]$ باشد آنگاه:

$$\{1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}\}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

نیز پایه ای برای $\mathbb{P}_n[x]$ است.

حل. از انجاییکه $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ یک پایه برای $\mathbb{P}_n[x]$ است کافی است ثابت کنیم :

$$\{1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}\}$$

این مجموعه مستقل خطی است زیرا در صورت مستقل خطی بودن چون تعداد اعضای دو مجموعه برابر است پس $\{1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}\}$ یک پایه است.برای اثبات مستقل خطی بودن ضرایب $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}\}$ در نظر می گیریم باید ثابت کنیم اگر:

$$\lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \cdots + \lambda_{n-1}(x-a)^{n-1} = 0$$

آنگاه:

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$$

برای اثبات این موضوع یکبار $x = a$ در نظر می گیریم آنگاه $\lambda_0 = 0$ می شود،در مرحله بعد از $x - a$ فاکتور می گیریم و نتیجه می گیریم $\lambda_1 = 0$ و همینطور الی آخر،پس استقلال خطی ثابت شد

$$\{1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}\}$$

پایه است.

▶

۲. مختصات

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \in \mathbb{P}_n[x]$$

را نسبت به پایه

$$\{1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}\}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

بیابید.

حل. برای پیدا کردن ضرایب فرض کنیم $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}$ ضرایب مورد نظر ما بر اساس پایه $\{1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}\}$ باشند آنگاه داریم:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \cdots + \lambda_{n-1}(x-a)^{n-1}$$

حال $x = a$ قرار می دهیم آنگاه $f(a) = \lambda_0$ حال از دو طرف تساوی مشتق می گیریم:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n - 1a_{n-1}x^{n-2} = \lambda_1 + 2\lambda_2(x-a) + \cdots + (n-1)\lambda_{n-1}(x-a)^{n-2}$$

پس نتیجه می گیریم $f'(a) = \lambda_1$ در حالت کلی نتیجه می شود ضرایب λ به صورت $(f(a), \frac{f'(a)}{1!}, \cdots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!})$ خواهد بود که $f^{(i)}$ مشتق مرتبه i ام می باشد.

▶

۳. فرض کنید $a_۱, a_۲, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ و متمایز باشند.برای هر $i = ۱, ۲, \cdots, n$

$$f_i(x) = (x - a_۱) \dots (x - a_{i-۱})(x - a_{i+۱}) \dots (x - a_n)$$

را در نظر بگیرید،نشان دهید $\{f_۱(x), f_۲(x), \cdots, f_n(x)\}$ نیز پایه ای برای $\mathbb{P}_n[x]$ است.

حل. از انجاییکه تعداد اعضای $\{f_۱(x), f_۲(x), \cdots, f_n(x)\}$ برابر تعداد اعضای پایه است برای اثبات پایه بودن کافی است ثابت کنیم این مجموعه مستقل خطی است یعنی به ازای هر $\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_n$ اگر

$$\alpha_۱ f_۱(x) + \alpha_۲ f_۲(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = ۰$$

باشد انگاه α_i ها مساوی صفر هستند برای اثبات این موضوع a_i را در این عبارت جایگذاری می کنیم آنگاه داریم :

$$\alpha_۱ f_۱(a_i) + \cdots + \alpha_i f(a_i) + \cdots + \alpha_n f_n(a_i) = ۰$$

در این صورت به ازای هر f_j که $i \neq j$ ، $f_j(a_i) = ۰$ پس از اینجا نتیجه می شود تمامی α_i ها مساوی صفر هستند و استقلال خطی ثابت می شوند که پایه بودن را نتیجه می دهد. ▶

پرسش هفتم

آ)

$$\mathbf{x} \in \mathcal{N}(A) \quad A\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow A^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

$$\mathbf{x} \in \mathcal{N}(A^{\mathrm{T}} A) \rightarrow \mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(A^{\mathrm{T}} A)$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{0} = \mathbf{0}. \rightarrow \mathbf{0} = (A\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(A\mathbf{x}) = ||A\mathbf{x}||^2$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{N}(A) \rightarrow \mathcal{N}(A) \supset \mathcal{N}(A^{\mathrm{T}} A)$$

ب)

$$\operatorname{rank}(A) = n - \dim(\mathcal{N}(A)) = n - \dim(\mathcal{N}(A^{\mathrm{T}} A)) = \operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}} A).$$

پرسش هشتم

سؤال هشتم) می دانیم که: $T(0) = T(0.0) = 0 \times T(0) = 0$

برای اینکه نشان دهیم x و Tx و T^2x یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ هستند، کافی است ثابت کنیم که این سه مستقل خطی هستند.

$$a_1 x + a_2 (Tx) + a_3 (T^2x) = 0 \qquad (*)$$

اگر بتوان ثابت کرد که $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ آنگاه مستقل خطی اند.

برای اینکار به طرفین معادله بالا، T را اعمال می کنیم.

$$T\left(a_1 x + a_2 (Tx) + a_3 (T^2x)\right) = T(0)$$

$$\Rightarrow a_1 (Tx) + a_2 (T^2x) + a_3 (T^3x) = 0$$

می دانیم $T^3 = 0$ است پس:

$$a_1 (Tx) + a_2 (T^2x) = 0 \qquad (**)$$

حال دوباره T را اعمال می کنیم.

$$T\left(a_1 (Tx) + a_2 (T^2x)\right) = T(0)$$

$$a_1 (T^2x) + a_2 (T^3x) = 0$$

$$a_1 (T^2x) = 0$$

چون T^2x مخالف صفر است پس حتماً داریم $\boxed{a_1=0}$

حال a_1 را در (**) جایگذاری می‌کنیم.

$$a_1(Tx) + a_2(T^2x) = 0$$

$$\Rightarrow a_2(T^2x) = 0 \qquad T^2x \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

حال a_1, a_2 را در (*) جایگذاری می‌کنیم.

$$a_3(T^2x) = 0 \qquad T^2x \neq 0$$

$$\Rightarrow a_3 = 0$$

توانستیم ثابت کنیم a_1 ، a_2, a_3 هر سه صفر هستند

پس نتیجه می‌شود که x ، Tx ، T^2x مستقل خطی

هستند پس برای $\mathbb{R}^3$ یک پایه به حساب می‌آیند.