به نام یزدان پاک

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
( پلی تکنیک تهران )

دانشکده مهندسی کامپیوتر

# جبر خطی کاربردی

## دکتر امیرمزلقانی

## نیم‌سال دوم ۰۱ - ۰۰

### تمرینات سری اول – فصل اول

---

**پاسخ تمرین‌ها را به صورت خوانا و تمیز در قالب** $HW?\_Name\_StudentNumber$ **( به عنوان مثال،** $HW1\_BardiaArdakanian\_9831072$ **) نوشته و تا قبل از ددلاین در سامانه کورسز دانشگاه آپلود نمایید. در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل** $ala.spring2022@gmail.com$ **در ارتباط باشید.**

---

# بخش تئوری

۱. ماتریس‌های زیر ماتریس افزوده سه دستگاه معادله خطی است، در هر مرحله پس از مشخص کردن جایگاه (درایه) و ستون محوری و با استفاده از روش کاهش سطری ماتریس‌ها را به شکل کاهش یافته سطری در بیاورید و سپس در مورد جواب دستگاه‌ها بحث کنید. (به عنوان مثال: دستگاه جواب ندارد/یک جواب دارد/بی‌نهایت جواب دارد. در صورت داشتن جواب عمومی، جواب‌ها را به صورت پارامتریک بنویسید.)

$$a)\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad b)\begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad c)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

---

۲. ثابت کنید دو ماتریس زیر هم ارز سطری نیستند. ($a, b, c$ اعدادی دلخواه هستند)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

---

۳. برای $g, h, k$ مقادیری تعیین کنید تا سیستم زیر:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & k & 1 \end{bmatrix}$$

الف) جواب یکتا داشته باشد.

ب) بی نهایت جواب داشته باشد.

ج) جواب نداشته باشد.

---

۴. تمام جواب‌های ممکن برای $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ از دستگاه معادلات زیر بیابید.

$$x_5 + x_2 = yx_1$$
$$x_1 + x_3 = yx_2$$
$$x_2 + x_4 = yx_3$$
$$x_3 + x_5 = yx_4$$

$$x_4 + x_1 = yx_5$$

$y$ یک پارامتر است.

---

۵. در مورد تعداد جواب‌های دستگاه معادلات زیر برای مقادیر مختلف $a, b$ بحث کنید

$$\begin{gathered} ax_1 + bx_2 + 2x_3 = 1 \\ ax_1 + (2b-1)x_2 + 3x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + (b+3)x_3 = 2b-1 \end{gathered}$$

---

۶. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه دهید و در صورت درست بودن آن را اثبات کنید:

1. اگر $v_i \in \mathbb{R}^n$ و $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک مجموعه وابسته خطی باشد، هریک از $v_i$ ها را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از بقیه اعضا نوشت.
2. اگر $A$ زیر مجموعه‌هایی از بردارها در $\mathbb{R}^n$ باشد به طوری که $A \subset \mathbb{R}^n$ و بردارهای عضو مجموعه $A$ مستقل خطی باشند آنگاه $span(A) = \mathbb{R}^n$.
3. اگر $S$ مجموعه‌ای برداری باشد به صورتی که بردارهای داخل $S$ مستقل خطی باشند و $v \in (\mathbb{R}^n - span(S))$ آنگاه $S \cup \{v\}$ نیز مستقل خطی است.
4. بردارهای $v_1, v_2, v_3$ مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر بردارهای $v_1$ و $v_1 + v_2$ و $v_1 + v_2 + v_3$ از هم مستقل باشند.
5. اگر یکی از سطرهای فرم پلکانی ماتریس افزوده‌ای $[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ باشد، سیستم خطی متناظر با آن ناسازگار خواهد بود.
6. ستون‌های ماتریس $5 \times 4$ مستقل خطی هستند.
7. اگر بردارهای $x, y, z, w$ در $R^4$ به گونه‌ای باشند که $y$ ترکیب خطی از $z, w, x$ نباشد آنگاه مجموعه $\{x, y, z, w\}$ مستقل خطی است.
8. تبدیلی که هر بردار به شکل $(x, y, z)$ در فضای $R^3$ را به صفحه $y = 0$ تصویر می‌کند، خطی نیست.

۷. فرض کنید $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی باشد نشان دهید اگر $T$ دو بردار مستقل خطی را به یک مجموعه وابسته خطی نگاشت کند آنگاه $T(x) = 0$ جواب غیر بدیهی دارد.

---

۸. مشخص کنید هریک از تبدیلات زیر خطی هستند یا نه، در صورتی که خطی باشند ماتریس استاندارد آنها را نیز بیابید.

الف)

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \to (4\mathrm{x}_1 - 2x_2, 3|x_2|)$$

ب)

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \to (\sin(x_1)\,, x_2)$$

ج)

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3) \to (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$$

# بخش پیاده‌سازی

## پیشگفتار:

جهت پیاده‌سازی پروژه صفر و مابقی پروژه‌های درس می‌بایست از زبان برنامه نویسی پایتون $(python)$ و کتابخانه‌های مختلف و کاربردی آن مانند نامپای $(numpy)$ استفاده کنید.

- ❖ جهت آموزش پایتون، کتابخانه‌هایش ویدعوهایی در کانال تلگرامی درس قرار گرفته است.
- ❖ در صورتی که قصد دارید به طور تخصصی‌تر زبان برنامه نویسی پایتون $python$ را آموزش ببینید می‌توانید از این لینک استفاده کنید.
- ❖ در صورتی که قصد دارید به طور تخصصی‌تر درباره کتابخانه نامپای $numpy$ که یکی از کتابخانه‌های پرکاربرد پایتون می‌باشد مطالعه داشته باشید می‌توانید از این لینک استفاده کنید.
- ❖ کد پایتون خود را به همراه عکس از خروجی برنامه در قالب یک فایل فشرده $zip$ ارسال کنید. همچنین استفاده از ژوپیتر برای اجرای مرحله به مرحله برنامه و دیدن نتایج آن توصیه می‌شود.

شما می‌توانید از این منابع و یا هر منبع دیگرای برای یادگیری پایتون و زدن پروژه استفاده کنید.

توجه! در صورتی که پروژه را با هر زبان دیگری پیاده‌سازی کنید نمره پروژه را از دست می‌دهید.

## شرح مسئله:

بعضا موازنه فرمول‌های شیمیایی به آسانی سوالات کنکور و قلمچی نیست و برای بدست آوردن موازنه شده یک ترکیب شیمیایی به کامپیوتر نیاز داریم. در این مسئله قصد داریم برنامه‌ای بنویسیم تا ترکیبات شیمیایی موازنه نشده را موازنه کند.

فرض کنید معادله ی شیمیایی پایین با ضرایب نامشخص $x_1$ تا $x_4$ را داریم:

$$X_1C_2H_6 + X_2O_2 \rightarrow X_3CO_2 + X_4H_2O$$

برای موازنه کردن معاله فوق باید چندین مراحل با موفقیت به انجام برسند.

در ابتدا معادله‌ی برداری آن را بدست می‌آوریم:

$$x_1\begin{bmatrix}2\\6\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} \begin{matrix}\leftarrow C\\ \leftarrow H\\ \leftarrow O\end{matrix}$$

برای موزانه‌ی معادله نیاز است که ضرایب $x_1$ تا $x_4$ مشخص شوند. بدین‌منظور همه عبارات را در سمت چپ معادله قرار می‌دهیم و سپس فرم ماتریسی آن را تشکیل می‌دهیم:

$$x_1\begin{bmatrix}2\\6\\0\end{bmatrix}+\ x_2\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}+\ x_3\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0\\-2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&0&-1&0\\6&0&0&-2\\0&2&-2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

برای حل این معادله‌ی همگن، در ابتدا آن را به فرم ماتریس افزوده می‌نویسیم و سپس آن را به فرم اشلون و اشلون کاهش یافته تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}2&0&-1&0&0\\6&0&0&-2&0\\0&2&-2&-1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&0&-1&0&0\\0&0&3&-2&0\\0&2&-2&-1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&0&-1&0&0\\0&2&-2&-1&0\\0&0&3&-2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{1}{3}&0\\0&1&0&-\frac{7}{6}&0\\0&0&1&-\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}$$

**توجه کنید باید فرم اشلون و اشلون کاهش یافته‌ی ماتریس را در خروجی چاپ کنید**

با توجه به فرم کاهش یافته‌ی ماتریس، ضرایب هر یک از $x_1$ تا $x_4$ را بدست می‌آوریم:

$$x_1=\frac{1}{3}x_4\,,\qquad x_2=\frac{7}{6}x_4\,,\qquad x_3=\frac{2}{3}x_4\,,\qquad x_4\ is\ Free$$

از آنجا که مقدار ضرایب باید عدد صحیح باشد و $x_4$ نیز متغیر آزاد می‌باشد، باید کوچکترین مقدار صحیح را برای $x_4$ انتخاب کنیم، به گونه‌ای که مقدار سایر ضرایب نیز عدد صحیح شود. پس مقدار $x_4$ را برابر با ۶ قرار می‌دهیم.

بدین شکل ترکیب شیمیایی ما با موفقیت موازنه شده است و به پاسخی که دنبالش بوده‌ایم رسیده‌ایم.

## ورودی و خروجی برنامه:

در خط اول و دوم ورودی، به ترتیب نام عناصر ترکیب شیمیایی و معادله شیمیایی به برنامه داده می‌شود.

مثال:

ورودی:

$$C\ H\ O$$
$$C_2H_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

در تنها خط خروجی می‌بایست ضریب $x_1$ تا $x_n$ در کنسول چاپ شود.

خروجی:

$$x_1 = 2, x_2 = 7, x_3 = 4, x_4 = 6$$

برنامه‌ی شما علاوه بر خروجی نشان داده شده، باید فرم اشلون و اشلون کاهش یافته‌ی ماتریس را نیز نشان دهد.

## نکات پیاده‌سازی:

- برای راحتی شما، نیازی به بدست آوردن ضرایب به صورت صحیح نمی‌باشد و ضرایب به صورت اعشاری نیز قابل قبول می‌باشد. همچنین تمام عناصری که به عنوان ورودی وارد می‌شوند، تک حرفی می‌باشند و معادلاتی مانند $Mg(OH)2\ +\ 2HNO3\ \rightarrow\ Mg(NO3)2\ +\ 2H2O$ که دارای پرانتز می‌باشد داده نمی‌شود.
- ورودی توضیح داده شده در شرح مسئله به صورت فایل متنی $txt$ بارگذاری شده است.
- از خروجی برنامه خود با ورودی داده شده $screenshot$ بگیرید و همراه با بقیه بخش‌های تکلیف آن را آپلود کنید.
- استفاده از کتابخانه های آماده‌ی پایتون برای حل معادله **مجاز نمی‌باشد** و تنها مجاز به استفاده از کتابخانه $numpy$ می‌باشید.