۱. نگاشت‌های خطی

تعریف و مثال

شباهت بین مجموعه چند جمله‌ای‌ها به همراه جمع چند جمله‌ای‌ها و ضرب اسکالر در آنها با $\mathbb{R}^n$ و ساختار جبری آن موجب شد که در فصل پیش فضاهای برداری را به شکلی کلی تعریف کنیم به گونه‌ای که ویژگی‌های بیان شده در فصل اول برای $\mathbb{R}^n$ برای این فضاها نیز برقرار باشند. در اینجا دوباره به شباهت چند جمله‌ای‌ها و $\mathbb{R}^n$ توجه کرده و آن را به صورت دقیق‌تری مطالعه می‌کنیم.
هر چند جمله‌ای با درجه کمتر از n به شکل زیر است.

$$p(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

بنابراین هر چندجمله‌ای کاملاً با n تایی مرتب $(a_1, \ldots, a_n)$ مشخص می‌شود. به این ترتیب یک نگاشت یک به یک و پوشا بین مجموعه چند جمله‌ای‌های با درجه کمتر از n و $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر وجود دارد.

$$p(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad \leftrightarrow \quad (a_1, \ldots, a_n)$$

فرض کنید که $q(x)$ نیز یک چند جمله‌ای با درجه کمتر از n به صورت زیر باشد.

$$q(x) = b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x + b_n \quad \leftrightarrow \quad (b_1, \ldots, b_n)$$

در این صورت $p(x) + q(x)$ به صورت زیر خواهد بود.

$$p(x) + q(x) = (a_1 + b_1)x^{n-1} + \cdots + (a_n + b_n) \quad \leftrightarrow \quad (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

بنابراین با تناظر معرفی شده در بالا، جمع دو چند جمله‌ای متناظر با جمع بردارهای متناظر آن دو چند جمله‌ای است. به عبارت دیگر این تناظر ساختار جمع را روی این دو مجموعه حفظ می‌کند. این ویژگی برای ضرب اسکالر نیز برقرار است. یعنی اگر r یک عدد حقیقی دلخواه باشد آنگاه $rp(x)$ متناظر است با r برابر بردار متناظر با $p(x)$.

$$rp(x) = ra_1x^{n-1} + ra_2x^{n-2} + \cdots + ra_{n-1}x + ra_n \quad \leftrightarrow \quad (ra_1, \ldots, ra_n)$$

بنابراین این تناظر ساختار ضرب اسکالر را نیز روی این دو مجموعه حفظ می‌کند. در نتیجه این دو مجموعه با ساختارهای جبریشان کاملاً شبیه هم و یکسان اند. به عبارت دیگر اگر ما دید خود را محدود به ساختار جبری جمع برداری و ضرب اسکالر موجود روی این دو مجموعه کنیم این دو مجموعه *یکسان* خواهند بود.
این *یکسانی* را می‌توانیم برای دو فضای برداری دلخواه نیز تعریف کنیم. دو فضای برداری V و W را یکسان می‌نامیم هرگاه تابع $T : V \to W$ وجود داشته باشد که

- یک به یک و پوشا باشد.
- ساختار جبری این دو فضای برداری را حفظ کند، یعنی برای هر دو بردار v و u در V و هر اسکالر r داشته باشیم

$$T(v + u) = T(v) + T(u) \qquad\qquad T(rv) = rT(v)$$

توجه کنید که لازم است V و W دو فضای برداری روی یک میدان باشند تا یکسانی معنی داشته باشد.
شرط اول به ساختار جبری روی فضاهای برداری ارتباطی ندارد در حالی که شرط دوم شرطی است که وابسته به این ساختار است. به همین دلیل این شرط از دیدگاه جبری شرطی مهم است و نگاشت‌هایی که در این شرط صدق می‌کنند دارای ویژگی‌های زیادی هستند. به همین

سبب بررسی یک به یک یا پوشا بودن این نوع نگاشت‌ها نیز ساده‌تر است. در این فصل به مطالعه این نوع نگاشت‌ها می‌پردازیم و ویژگی‌های آنها را مورد بررسی قرار می دهیم.

نگاشت‌های خطی

تعریف. فرض کنید V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند. تابع $T : V \to W$ را یک نگاشت خطی از فضای V به فضای W می‌نامیم هرگاه برای هر دو بردار u و v در V و هر اسکالر r در F داشته باشیم

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \text{ و } T(ru) = rT(u)$$

باید توجه شود که در روابط بالا u و v دو بردار در V و $T(u)$ و $T(v)$ دو بردار در W هستند. بنابراین جمع $u+v$ و ضرب ru طبق ساختار جبری V انجام می‌شوند و جمع $T(u)+T(v)$ و ضرب $rT(u)$ طبق ساختار جبری W انجام می‌شوند. ولی هر دو جمع و ضرب اسکالر را ما با یک نماد مشخص کرده‌ایم. در بعضی از متون برای متمایز کردن آنها روابط بالا را به صورت $T(u +_V v) = T(u) +_W T(v)$ و $T(r._V u) = r._W T(u)$ نمایش می‌دهند.

مثال.

نگاشت صفر. فرض کنید V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند. نگاشتی که هر برداری در V را به بردار صفر W می‌نگارد یک نگاشت خطی از V به W است که معمولاً به آن، *نگاشت صفر* می‌گوییم و آن را با ۰ نمایش می‌دهیم. باید دقت کنید که این صفر با صفر فضای V یا W متفاوت است و تنها نمادی برای نگاشت خطی صفر بین این دو فضای برداری است.

نگاشت همانی. برای هر فضای برداری V نگاشت همانی روی V یک نگاشت خطی از V به خود آن است. معمولاً این نگاشت را با I_V یا اگر اشتباهی پیش نیاید به صورت خلاصه با I نمایش می‌دهیم.

$$I_V : V \to V; \qquad \forall v \in V \quad I_V(v) = v$$

چند نکته.

۱. $T : V \to W$ یک نگاشت خطی از فضای V به فضای W است اگر و تنها اگر برای هر دو بردار u و v در V و هر اسکالر r در F داشته باشیم

$$T(u+rv) = T(u) + rT(v) \qquad (۱.۰)$$

اثبات. اگر T یک نگاشت خطی باشد آنگاه

$$T(u+rv) = T(u) + T(rv) = T(u) + rT(v)$$

برای اثبات عکس گزاره، با قرار دادن $r = ۱$ در رابطه (۱.۰) خواهیم داشت

$$T(u+v) = T(u+۱.v) = T(u) + ۱.T(v) = T(u) + T(v)$$

همچنین با قرار دادن u بجای v و $r-۱$ بجای r در رابطه (۱.۰) خواهیم داشت

$$T(ru) = T(u+(r-۱)u) = T(u) + (r-۱)T(u) = rT(u)$$

۲. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی است. تصویر بردار صفر V توسط نگاشت T بردار صفر W است.

اثبات. $T(۰) = T(۰.v) = ۰.T(v) = ۰$.

---

۳. $T(-u)=T((-1).u)=(-1).T(u)=-T(u)$.

۴. فرض کنید $T:V\to W$ یک نگاشت خطی باشد. برای هر $v_1,\dots,v_k\in V$ و $r_1,\dots,r_k\in F$ داریم

$$T(r_1v_1+\cdots+r_kv_k)=r_1T(v_1)+\cdots+r_kT(v_k)$$

اثبات. با استقرا روی k.

با توجه به ویژگی بالا به سادگی نتیجه می‌شود که یک نگاشت خطی با مقادیرش روی یک پایه کاملاً مشخص می‌شود.

قضیه. فرض کنید $\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایه برای V و $w_1,\dots,w_n$ اعضایی دلخواه از W (نه لزوماً متمایز و یا ناصفر) باشند نگاشت خطی یکتای $T:V\to W$ وجود دارد که برای هر i داشته باشیم $T(v_i)=w_i$.

نکته. این گزاره برای فضاهای با بعد نامتناهی نیز درست است.

اثبات. فرض کنید v برداری دلخواه در V و T و U دو نگاشت خطی با شرایط بالا باشند. چون $\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایه است v دارای نمایشی به شکل زیر است.

$$v=t_1v_1+\cdots+t_nv_n$$

بنابراین

$$\begin{aligned}T(v)&=T(t_1v_1+\cdots+t_nv_n)=t_1T(v_1)+\cdots+t_nT(v_n)=t_1w_1+\cdots+t_nw_n\\&=t_1U(v_1)+\cdots+t_nU(v_n)=U(t_1v_1+\cdots+t_nv_n)=U(v)\end{aligned}$$

در نتیجه دو تابع T و U برابرند. این نشان می‌دهد که حداکثر یک نگاشت خطی با این ویژگی وجود دارد. برای اثبات وجود نیز از روش بالا استفاده می‌کنیم. چون $\{v_1,\dots,v_n\}$ پایه‌ای برای V است هر عضو $v\in V$ برابر ترکیب خطی یکتا به شکل $v=t_1v_1+\cdots+t_nv_n$ است. تابع $T:V\to W$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$T(v)=T(t_1v_1+\cdots+t_nv_n):=t_1w_1+\cdots+t_nw_n$$

این تابع یک نگاشت خطی از V به W است زیرا برای هر دو بردار دلخواه $v,u\in V$ داریم

$$v=t_1v_1+\cdots+t_nv_n\qquad\qquad u=s_1v_1+\cdots+s_nv_n$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}T(u+rv)&=T((t_1+rs_1)v_1+\cdots+(t_n+rs_n)v_n)\\&=(t_1+rs_1)w_1+\cdots+(t_n+rs_n)w_n\\&=(t_1w_1+\cdots+t_nw_n)+r(s_1w_1+\cdots+s_nw_n)=T(v)+rT(u)\end{aligned}$$

همچنین این تابع دارای ویژگی‌های ذکر شده در قضیه است زیرا

$$T(v_i)=T(0.v_1+\cdots+1.v_i+\cdots+0.v_n)=0.w_1+\cdots+1.w_i+\cdots+0.w_n=w_i$$

نگاشت‌های خطی یک به یک

فرض کنید $T:V\to W$ یک نگاشت خطی است و $T(u)=T(v)$. در این صورت داریم $T(u-v)=T(u)-T(v)=0$. حال اگر بدانیم که تنها برداری که توسط T به بردار صفر W نگاشته می‌شود بردار صفر V است آنگاه از رابطه بالا نتیجه می‌شود که $u-v=0$ یا به عبارت دیگر باید داشته باشیم $u=v$. بنابراین یک به یک بودن T نتیجه می‌شود.

مجموعه بردارهایی که توسط T به صفر نگاشته می‌شوند را هسته یا پوچی T می‌نامند و آن را با $\ker T$ نمایش می‌دهند. بنابراین

$$\ker T := \{v \in V : T(v) = 0\}$$

قضیه. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی باشد، آنگاه هسته T زیر فضایی از V است.

اثبات. ابتدا توجه کنید که هسته یک نگاشت خطی ناتهی است زیرا طبق نکات بالا همیشه صفر V در این مجموعه است. برای هر $u, v \in \ker T$ و هر اسکالر $r \in F$ داریم

$$T(u + rv) = T(u) + rT(v) = 0 + r.0 = 0$$

بنابراین هسته T یک زیر فضای برداری V است.

قضیه. نگاشت خطی $T : V \to W$ یک به یک است اگر و تنها اگر هسته آن زیر فضای بدیهی صفر باشد (یعنی $\ker T = \{0\}$).

اثبات. برای هر نگاشت خطی می‌دانیم $T(0) = 0$. اگر T یک به یک باشد آنگاه

$$v \in \ker T \quad \Rightarrow \quad T(v) = 0 = T(0) \quad \Rightarrow \quad v = 0$$

اگر $\ker T = \{0\}$ آنگاه

$$\begin{aligned} T(u) = T(v) \quad &\Rightarrow \quad T(u - v) = T(u) - T(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad u - v \in \ker T \\ &\Rightarrow \quad u - v = 0 \quad \Rightarrow \quad u = v. \end{aligned}$$

قضیه. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت است و $T(u) = w$. در این صورت مجموعه همه بردارهایی که توسط T به بردار w نگاشته می‌شوند برابر است با انتقال هسته T با بردار u. به عبارت دیگر

$$T^{-1}(w) := \{v \in V : T(v) = w\} = u + \ker T$$

اثبات.

$$\begin{aligned} T(v) = w = T(u) \quad &\Leftrightarrow \quad T(v - u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v - u \in \ker T \\ &\Leftrightarrow \quad v \in u + \ker T \end{aligned}$$

قضایای بالا نشان می‌دهند که هسته یک نگاشت خطی یعنی سطح تراز مقدار صفر (مجموعه بردارهایی که به صفر تصویر می‌شوند) یک فضای برداری است. سطوح تراز مقادیر دیگر یک نگاشت خطی نیز انتقال هسته آن هستند و در نتیجه از لحاظ بزرگی و شکل مانند یکدیگرند. بنابراین هرچه بُعد هسته یک نگاشت خطی کمتر باشد آن نگاشت خطی به نگاشتی یک به یک نزدیک‌تر است.

نگاشت‌های خطی پوشا

فرض کنید $T : V \to W$ نگاشتی خطی باشد. طبق تعریف T پوشا است اگر مجموعه $\{T(v) : v \in V\}$ برابر W باشد. معمولاً این مجموعه را تصویر T می‌نامند و آن را با $\operatorname{Im} T$ نمایش می‌دهند. بنابراین

$$\operatorname{Im} T := \{T(v) : v \in V\}$$

قضیه. تصویر هر نگاشت خطی $T : V \to W$ یک زیر فضای W است.

اثبات. واضح است که این مجموعه تهی نیست (زیرا V ناتهی است). فرض کنید w_1 و w_2 دو بردار دلخواه در $\operatorname{Im} T$ باشند. در این صورت بردارهای v_1 و v_2 در V وجود دارند که

$$T(v_1) = w_1 \qquad T(v_2) = w_2$$

بنابراین

$$w_1 + rw_2 = T(v_1) + rT(v_2) = T(v_1 + rv_2) \in \operatorname{Im} T$$

این نشان می‌دهد که $\operatorname{Im} T$ یک فضای برداری است.
با توجه به قضیه بالا تصویر یک نگاشت خطی یک فضای برداری است و هرچه بعد آن بیشتر باشد این نگاشت به نگاشتی خطی شبیه‌تر می‌شود.

قضیه. اگر V با $v_1, \dots, v_k$ تولید شود آنگاه $\operatorname{Im} T$ با $T(v_1), \dots, T(v_k)$ تولید می‌شود. (این قضیه برای فضاهای نامتناهی نیز درست است.)

اثبات. هر عضو $v \in V$ به صورت ترکیبی خطی از v_i ها است. با توجه به خطی بودن T داریم

$$v = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \;\Rightarrow\; T(v) = T(t_1 v_1 + \dots + t_k v_k) = t_1 T(v_1) + \dots + t_k T(v_k)$$

بنابراین تصویر یک پایه توسط نگاشت خطی یک مولد برای تصویر آن نگاشت است. ولی این مولد ممکن است پایه نباشد. یک مثال ساده آن نگاشت خطی صفر است که همه بردارها را به صفر می‌نگارد. در ادامه روش بدست آوردن یک پایه برای تصویر یک نگاشت خطی بیان می‌شود.

قضیه. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی باشد. همچنین فرض کنید $\{v_1, \dots, v_p\}$ یک پایه برای $\ker T$ و $\{v_1, \dots, v_p, \dots, v_n\}$ گسترش آن به یک پایه V باشد. در این صورت $\{T(v_{p+1}), \dots, T(v_n)\}$ یک پایه برای $\operatorname{Im} T$ است.

اثبات. طبق قضیه قبل $\{T(v_1), \dots, T(v_p), \dots, T(v_n)\}$ یک مولد برای $\operatorname{Im} T$ است. همچنین $T(v_1) = \dots = T(v_p) = 0$ و درنتیجه با حذف کردن آنها از مجموعه بالا فضای تولید شده توسط مجموعه تغییر نمی‌کند. بنابراین $\{T(v_{p+1}), \dots, T(v_n)\}$ یک مولد برای $\operatorname{Im} T$ است. تنها کافی است نشان دهیم این مجموعه مستقل خطی نیز است. فرض کنید ترکیبی خطی از آنها صفر شده باشد

$$\begin{aligned} a_{p+1} T(v_{p+1}) + \dots + a_n T(v_n) = 0 \;&\Rightarrow\; T(a_{p+1} v_{p+1} + \dots + a_n v_n) = 0 \\ &\Rightarrow\; a_{p+1} v_{p+1} + \dots + a_n v_n \in \ker T \end{aligned}$$

چون $\{v_1, \dots, v_p\}$ پایه‌ای برای $\ker T$ است داریم

$$a_{p+1} v_{p+1} + \dots + a_n v_n = a_1 v_1 + \dots + a_p v_p$$

و چون $\{v_1, \dots, v_p, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای V است همه ضرایب بالا باید صفر باشند و مخصوصاً

$$a_{p+1} = \dots = a_n = 0$$

این نشان می‌دهد $\{T(v_{p+1}), \dots, T(v_n)\}$ مستقل خطی نیز است و در نتیجه یک پایه برای $\operatorname{Im} T$ خواهد بود.

قضیه بُعد. اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی و $T : V \to W$ یک نگاشت خطی باشد آنگاه تصویر T نیز با بعد متناهی است و داریم

$$\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim V$$

اثبات. نتیجه مستقیم قضیه بالا است.

خلاصه.

فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی است.

۱. T یک به یک است $\Leftrightarrow \ker T = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\ker T) = 0$.

---

۲. T پوشا است $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} T = W$.

۳. اگر W با بعد متناهی باشد آنگاه

$$T \text{ پوشا است } \Leftrightarrow \operatorname{Im} T = W \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} T) = \dim W.$$

۴. اگر V و W با بعد متناهی باشند و $\dim V = \dim W$ آنگاه

$$\begin{aligned} T \text{ یک به یک است } &\Leftrightarrow \ker T = \{0\} &\Leftrightarrow \\ \dim(\ker T) = 0 &\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} T) = \dim W &\Leftrightarrow \\ \operatorname{Im} T = W &\Leftrightarrow T \text{ پوشا است} \end{aligned}$$

ویژگی‌های ۳ و ۴ برای فضاهای با بعد نامتناهی صحیح نیستند. سعی کنید مثال نقضی برای آن بسازید.

ساختار جبری روی نگاشت‌های خطی

جمع دو نگاشت و ضرب یک اسکالر در یک نگاشت

با توجه به اینکه بردارها را در یک فضای برداری می‌توان با هم جمع کرد و یا در یک اسکالر ضرب کرد، هر دو تابع از یک مجموعه به یک فضای برداری را نیز می‌توان با هم جمع کرد و یا در یک اسکالر ضرب کرد.

فرض کنید W یک فضای برداری روی میدان F است و $T : S \to W$ و $U : S \to W$ دو تابع دلخواه باشند. جمع T و U تابعی از V به W است که عضو دلخواه $s \in S$ را به $T(s) + U(s)$ می‌نگارد. به عبارت دیگر

$$(T + U) : V \to W; \qquad (T + U)(s) := T(s) + U(s)$$

ضرب اسکالر $r \in F$ در T تابعی از V به W است که عضو دلخواه $s \in S$ را به بردار $rT(s)$ می‌نگارد. به عبارت دیگر

$$(rT) : V \to W; \qquad (rT)(s) := rT(s)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که مجموعه تابع‌های از S به W با این دو عمل خود یک فضای برداری است زیرا ویژگی‌های جمع و ضرب اسکالر روی فضای برداری W همگی به جمع و ضرب اسکالر روی توابع منتقل می‌شوند (خودتان این ویژگی‌ها را بررسی کنید).

به همین صورت اگر V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند آنگاه نگاشت‌های خطی از V به W را نیز می‌توان با هم جمع کرد و یا در یک اسکالر ضرب کرد. نتیجه تابعی از V به W خواهد بود. قضیه زیر نشان می‌دهد که این تابع خود یک نگاشت خطی از V به W است.

قضیه. فرض کنید V و W دو فضای برداری روی میدان F اند. جمع هر دو نگاشت خطی $T : V \to W$ و $U : V \to W$ خود یک نگاشت خطی از V به W است و حاصل ضرب هر اسکالر $r \in F$ در نگاشت خطی T نیز یک نگاشت خطی است.

اثبات. برای هر دو بردار v و v' در V و هر اسکالر $t \in F$ داریم

$$\begin{aligned} (T + U)(v + tv') &= T(v + tv') + U(v + tv') \\ &= T(v) + tT(v') + U(v) + tU(v') \\ &= (T + U)(v) + t(T + U)(v') \end{aligned}$$

همچنین

$$(rT)(v + tv') = rT(v + tv') = r(T(v) + tT(v')) = (rT)(v) + t(rT)(v')$$

به این ترتیب مجموعه نگاشت‌های خطی از V به W با دو عمل بالا یک زیر فضای برداری در مجموعه توابع از V به W است. مجموعه نگاشت‌های خطی از V به W را معمولاً با $L(V,W)$ نمایش می‌دهند.

قضیه: اگر V و W دو فضای برداری با بعد متناهی روی F باشند آنگاه $L(V,W)$ نیز فضایی با بعد متناهی روی F است و $\dim(L(V,W)) = \dim(V).\dim(W)$.

اثبات: فرض کنید $\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایه برای V و $\{w_1,\dots,w_m\}$ یک پایه برای W باشند. برای هر $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$، نگاشت خطی T_{ij} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$T_{ij}(v_k) = \delta_{ik} w_j \qquad k = 1,\dots,n$$

به عبارت دیگر

$$T_{ij}(v_1) = 0,\dots,T_{ij}(v_i) = w_j,\dots,T_{ij}(v_n) = 0.$$

توجه داشته باشید که برای هر $1 \leq k \leq n$ داریم

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}T_{ij}\right](v_k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}T_{ij}(v_k) = a_{k1}T_{k1}(v_k) + \cdots + a_{km}T_{km}(v_k) = a_{k1}w_1 + \cdots + a_{km}w_m \qquad (*)$$

با توجه به اینکه $\{w_1,\dots,w_m\}$ مستقل خطی است، اگر $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}T_{ij} = 0$، آنگاه برای هر k، ضرایب $a_{k1},\dots,a_{km}$ باید برابر صفر باشند. بنابراین T_{ij} ها مستقل خطی اند.

فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی دلخواه باشد. برای هر $1 \leq k \leq n$ داریم $T(v_k) \in W$، بنابراین ضرایب b_{ki} وجود دارند که

$$T(v_k) = b_{k1}w_1 + \cdots + b_{km}w_m$$

با توجه به رابطه $(*)$ مقدار نگاشت خطی $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}T_{ij}$ نیز روی v_k برابر است با $b_{k1}w_1 + \cdots + b_{km}w_m$. بنابراین مقدار این دو نگاشت خطی روی پایه $\{v_1,\dots,v_n\}$ یکسان است و درنتیجه این دو نگاشت باید با هم برابر باشند. این نشان می‌دهد که T_{ij} ها فضای $L(V,W)$ را نیز تولید می‌کنند و بنابراین پایه‌ای برای آن تشکیل می‌دهند. به این ترتیب

$$\dim L(V,W) = nm = \dim V.\dim W$$

ترکیب نگاشت‌ها

فرض کنید $T : V \to W$ و $U : W \to Z$ نگاشت‌هایی خطی بین فضاهای V، W و Z باشند. این دو نگاشت را می‌توان با هم ترکیب کرد و حاصل تابعی از V به Z خواهد بود. قضیه زیر نشان می‌دهد این ترکیب خود یک نگاشت خطی است.

قضیه. فرض کنید V، W و Z سه فضای برداری روی میدان F باشند و $T : V \to W$ و $U : W \to Z$ نگاشت‌هایی خطی بین آنها باشند. در این صورا $U \circ T : V \to Z$ نیز یک نگاشت خطی است.

اثبات. برای هر دو بردار v و v' در V و هر اسکالر $t \in F$ داریم

$$\begin{aligned} U \circ T(v + tv') &= U(T(v + tv')) = U(T(v) + tT(v')) \\ &= U(T(v)) + tU(T(v')) = U \circ T(v) + tU \circ T(v') \end{aligned}$$

معمولاً $U \circ T$ را به صورت خلاصه با UT نمایش می‌دهیم. بنابراین $UT(v) := U(T(v))$.
اگر $T,U : V \to V$ دو عملگر روی فضای برداری V باشند آنگاه TU و UT هر دو تعریف می‌شوند و عملگرهایی روی فضای برداری V خواهند بود. به این ترتیب می‌توان اعضای $L(V,V)$ را با هم نیز ترکیب کرد و نتیجه باز عضوی از این فضا خواهد بود. به این ترتیب $L(V,V)$ دارای یک عمل جدید است که با جمع و ضرب اسکالر آن متفاوت است. در فصل‌های آینده این ساختار را بیشتر مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

نگاشت‌های خطی وارون‌پذیر

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. می‌دانیم تابع $f : A \to B$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر یک به یک و پوشا باشد. به عبارت دیگر f وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر یک تناظر یک به یک بین اعضای A و B ایجاد کند.
نگاشت خطی یک به یک و پوشا نیز به عنوان یک تابع دارای وارون است. قضیه زیر نشان می‌دهد که وارون آن خود یک نگاشت خطی است.

قضیه: فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی یک به یک و پوشا است. در این صورت $T^{-1} : W \to V$ نیز یک نگاشت خطی است.

اثبات: فرض کنید $w_1, w_2 \in W$ اعضایی دلخواه باشند و $v_1 = T^{-1}(w_1)$ و $v_2 = T^{-1}(w_2)$. با توجه به اینکه T خطی است داریم

$$T(v_1 + rv_2) = T(v_1) + rT(v_2) = w_1 + rw_2$$

در نتیجه

$$T^{-1}(w_1 + rw_2) = v_1 + rv_2 = T^{-1}(w_1) + rT^{-1}(w_2)$$

بنابراین نگاشت $T^{-1} : W \to V$ یک نگاشت خطی است.
معمولا به نگاشت خطی وارون‌پذیر $T : V \to W$ *یکریختی* یا *یکسانی* می‌گویند و در این حالت دو فضای V و W را *یکریخت* یا *یکسان* می‌نامند. زیرا T یک تناظر یک به یک بین V و W ایجاد می‌کند که حافظ ساختار جبری روی آنهاست.

قضیه. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی باشد. گزاره‌های زیر معادل اند

1. **T وارون‌پذیر است.**
2. **T یک به یک و پوشاست.**
3. **تصویر هر پایه V توسط T یک پایه برای W است.**
4. **تصویر یک پایه V توسط T یک پایه W است.**
5. **نگاشت‌های خطی $U_1, U_2 : W \to V$ وجود دارند که $TU_1 = I_W$ و $U_2T = I_V$.**

اثبات: (برای حالت با بعد متناهی)
(۲) $\to$ (۱). بنا به تعریف.
(۳) $\to$ (۲). فرض کنید $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه دلخواه برای V باشد. چون T یک به یک است، مجموعه $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ یک پایه برای $\operatorname{Im} T$ تشکیل می‌دهد. از آنجایی که T پوشاست، $\operatorname{Im} T = W$ و در نتیجه $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ یک پایه برای W است.
(۴) $\to$ (۳). واضح است.
(۵) $\to$ (۴). فرض کنید تصویر پایه $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ برای V پایه‌ای برای W است.
قرار می‌دهیم $u_1 = T(v_1), \dots, u_n = T(v_n)$. بنابراین $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ پایه‌ای برای W است. نگاشت خطی یکتای $U : W \to V$ وجود دارد که برای هر $1 \le i \le n$ داشته باشیم $U(u_i) = v_i$.
نگاشت‌های $UT : V \to V$ و $TU : W \to W$ نگاشت‌هایی خطی خواهند بود که به ترتیب روی پایه‌ای از V و پایه‌ای از W همانی هستند. در نتیجه $UT = I_V$ و $TU = I_W$.
(۱) $\to$ (۵). اگر $T(v_1) = T(v_2)$، آنگاه

$$v_1 = U_2T(v_1) = U_2(T(v_1)) = U_2(T(v_2)) = U_2T(v_2) = v_2$$

بنابراین T یک به یک است. همچنین برای هر $w \in W$ داریم

$$T(U_1(w)) = TU_1(w) = I_W(w) = w$$

بنابر این T پوشاست.
می‌توانید خودتان این اثبات را برای حالت نامتناهی باز نویسی کنید.

قضیه: دو فضای برداری V و W روی یک میدان F یکریخت اند اگر و تنها اگر بعدهایشان برابر باشند.

اثبات. (برای حالت متناهی) اگر $T : V \to W$ یکریختی بین V و W باشد آنگاه طبق قضیه بُعد داریم

$$\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = 0 + \dim W = \dim W$$

برعکس، اگر بُعدهای V و W برابر باشند آنگاه یک تناظر یک به یک بین یک پایه V و یک پایه W وجود دارد. این تناظر نگاشت خطی یکتای $T : V \to W$ را مشخص می‌کند که پایه‌ای از V را به پایه‌ای از W نگاشته است. بنابراین T یک تکریختی بین V و W است.
اثباتی برای حالت نامتناهی بیابید.

قضیه: فرض کنید V و W دو فضای برداری با بعد متناهی و برابر روی یک میدان F اند و $T : V \to W$ یک نگاشت خطی است. گزاره‌های زیر معادل اند

- **T تکریختی بین V و W است.**
- **T یک به یک است.**
- **T پوشاست.**
- **نگاشت خطی $U : W \to V$ وجود دارد که $UT = I_V$**
- **نگاشت خطی $U : W \to V$ وجود دارد $TU = I_W$.**

اثبات: می‌دانیم تحت شرایط این قضیه نگاشت خطی T یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد.
اگر T وارون‌پذیر باشد وارون آن در روابط گزاره‌های (۴) و (۵) صدق می‌کند. همچنین گزاره (۴) یک به یک بودن T را نتیجه می‌دهد و گزاره (۵) پوشا بودن T و در نتیجه اگر گزاره (۴) یا (۵) نیز درست باشد، T وارون‌پذیر است.

تعریف: نگاشت خطی از یک فضای برداری به خود آن فضا عملگر خطی روی آن فضای برداری نامیده می‌شود.

گزاره. اگر بعد V متناهی باشد، یک عملگر خطی روی آن یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد.

تمرین. نشان دهید هر فضای برداری با بعد نامتناهی دارای عملگرهایی است که یک به یک هستند اما پوشا نیستند. همچنین دارای عملگرهایی است که پوشا هستند اما یک به یک نیستند.

مختصات

با داشتن یک پایه مرتب مانند $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ برای فضای برداری V، هر عضو آن فضا کاملاً با n تایی مرتب از اعداد $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{F}$ به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$v = t_1v_1 + \cdots + t_nv_n$$

به این عددها مختصات بردار v در پایه α می‌گویند و معمولاً آنها را در یک ستون به ترتیب قرار می‌دهند. به این ترتیب هر عضو $v \in V$ با یک عضو $\mathbb{F}^n$ متناظر می‌شود که به آن نمایش بردار v در پایه α می‌گویند و آن را با $[v]_\alpha$ نمایش می‌دهند

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \qquad \leftrightarrow \qquad [v]_\alpha = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

برای هر $v, v' \in V$ و هر $r \in \mathbb{F}$ داریم

$$[v + rv']_\alpha = [v]_\alpha + r[v']_\alpha$$

زیرا اگر

$$v' = t'_1 v_1 + \cdots + t'_n v_n, \qquad v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

آنگاه

$$v + rv' = (t_1 + rt'_1)v_1 + \cdots + (t_n + rt'_n)v_n.$$

فرض کنید $V = F^n$. پایه استاندارد روی این فضا یک پایه ویژه و مشخص برای این فضا است. نمایش یک بردار در این پایه همان نمایش طبیعی آن است که به نمایش استاندارد آن بردار معروف است. بنابراین برای هر $X \in F^n$ داریم $[X]_{\varepsilon_n} = X$.

حال فرض کنید V و W دو فضای برداری و $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ و $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$ به ترتیب پایه‌هایی مرتب برای آنها باشند. می‌دانیم هر نگاشت خطی $T : V \to W$ با مقادیرش روی پایه α به صورت یکتا مشخص می‌شود. یعنی با مشخص بودن بردارهای $T(v_1), \ldots, T(v_n)$، نگاشت T کاملاً مشخص می‌شود. این بردارها نیز به کمک مختصاتهایشان در پایه β کاملاً مشخص می‌شوند. در نتیجه نگاشت T با n ستون $[T(v_1)]_\beta, \ldots, [T(v_n)]_\beta$ کاملاً مشخص می‌شود. از کنار هم قرار دادن این ستون‌ها یک آرایه دو بعدی از اعداد در $\mathbb{F}$ بدست می‌آید که به آن نمایش نگاشت T در پایه‌های α و β می‌گوییم و آن را با $[T]^\alpha_\beta$ نمایش می‌دهیم. بنابراین اگر

$$T(v_j) = b^1_j w_1 + \cdots + b^m_j w_m$$

آنگاه

$$[T]^\alpha_\beta = \Big[[T(v_1)]_\beta \mid \ldots \mid [T(v_n)]_\beta \Big] = \begin{pmatrix} b^1_1 & \ldots & b^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^m_1 & \ldots & b^m_n \end{pmatrix}$$

تعریف. به آرایه دو بعدی از اعداد میدان F *ماتریس* می‌گوییم. درایه سطر iام و ستون jام آن را معمولاً با a_{ij} یا $(A)_{ij}$ نشان می‌دهیم و اگر اشتباهی صورت نگیرد گاهی آن را به اختصار با A_{ij} نیز نمایش می‌دهیم.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad : \qquad A_{ij} = (A)_{ij} = a_{ij}$$

به این ترتیب با مشخص بودن پایه‌های α و β هر نگاشت خطی با یک ماتریس $m \times n$ مشخص می‌شود و هر ماتریس $m \times n$ یک نگاشت خطی را معرفی می‌کند. در نتیجه یک تناظر یک به یک بین نگاشت‌های خطی از V به W و ماتریس‌های $m \times n$ ایجاد می‌شود. توجه داشته باشید که با تغییر پایه‌های α و β این تناظر نیز تغییر می‌کند، یعنی ماتریس متناظر با یک نگاشت خطی ممکن است عوض شود.

قضیه: فرض کنید $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ و $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$ پایه‌های مرتبی برای V و W و $T, U : V \to W$ دو نگاشت خطی از V به W باشند. درایه ijام ماتریس نمایش $T + U$ در پایه‌های α, β برابر است با جمع درایه‌های ijام ماتریس‌های نمایش T و

U در پایه‌های α,β. همچنین درایه ijام ماتریس نمایش rT در پایه α,β برابر است با حاصل ضرب r در درایه ijام ماتریس نمایش T در پایه‌های α,β. به عبارت دیگر برای هر i و j

$$\left([T+U]_\beta^\alpha\right)_{ij} = \left([T]_\beta^\alpha\right)_{ij} + \left([U]_\beta^\alpha\right)_{ij} \qquad \left([rT]_\beta^\alpha\right)_{ij} = r\left([T]_\beta^\alpha\right)_{ij}$$

اثبات. ستون jام ماتریس نمایش نگاشت‌های خطی T,U و $T+U$ و rT به ترتیب برابر است با

$$[U(v_j)]_\beta \quad [T(v_j)]_\beta \quad [(T+U)(v_j)]_\beta \quad [(rT)(v_j)]_\beta$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned}[(T+U)(v_j)]_\beta &= [T(v_j)+U(v_j)]_\beta = [T(v_j)]_\beta + [U(v_j)]_\beta \\ [(rT)(v_j)]_\beta &= [rT(v_j)]_\beta = r[T(v_j)]_\beta\end{aligned}$$

با توجه به قضیه بالا می‌توانیم جمع بین ماتریس‌های هم بعد را تعریف کنیم. همچنین می‌توانیم ضرب یک اسکالر را نیز در یک ماتریس تعریف کنیم. اگر A و B دو ماتریس $m\times n$ تایی باشند آنگاه $A+B$ و rA نیز ماتریسهای $m\times n$ تایی اند که برای آنها داریم

$$\begin{aligned}(A+B)_{ij} &= A_{ij} + B_{ij} \\ (rA)_{ij} &= rA_{ij}\end{aligned}$$

به راحتی می‌توان نشان داد مجموعه ماتریس‌های $m\times n$ تایی روی میدان F با دو عمل جمع ماتریسی و ضرب اسکالر که در بالا معرفی شدند یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ است که معمولاً آن را با $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ نمایش می‌دهند.

مثال

فرض کنید α و β پایه‌هایی دلخواه برای V و W، و $U: V\to W$ نگاشت خطی صفر باشد. یعنی برای هر $v\in V$ داریم $U(v)=۰$. در این صورت نمایش نگاشت U در پایه‌های α و β ماتریسی است که همه درایه‌های آن صفر است. به این ماتریس، *ماتریس صفر* می‌گوییم و آن را با ۰ نمایش می‌دهیم. توجه داشته باشید که نمایش نگاشت صفر همیشه صفر است و این نمایش به انتخاب پایه‌ها وابسته نیست.

فرض کنید $\alpha=\{v_۱,\dots,v_n\}$ پایه‌ای دلخواه برای فضای برداری V و I_V عملگر همانی روی این فضا باشد آنگاه برای هر i

$$I_V(v_i) = v_i = ۰v_۱ + \cdots + ۱v_i + \cdots + ۰v_n$$

بنابراین

$$[I_V(v_i)]_\alpha^\alpha = \left[[I_V(v_۱)]_\alpha \mid \cdots \mid [I_V(v_n)]_\alpha\right] = \begin{bmatrix} ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & \cdots & ۱\end{bmatrix}$$

به این ترتیب نمایش عملگر همانی در هر پایه‌ای ماتریسی $n\times n$ می‌شود که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ و بقیه درایه‌هایش صفر است. به این ماتریس، *ماتریس همانی* می‌گوییم و آن را با I_n و یا اگر اشتباهی پیش نیاید با I نمایش می‌دهیم.

$$(I)_{ij} = (I_n)_{ij} = \begin{cases} ۱ & i=j \\ ۰ & i\neq j\end{cases}$$

توجه کنید نمایش عملگر همانی زمانی ماتریس همانی است که پایه‌های مبدأ و مقصد یکی باشند. اگر β پایه دیگری برای V باشد در این صورت $[I_V]_\beta^\alpha$ ماتریس همانی نخواهد بود.

فرض کنید V و W به ترتیب F^n و F^m اند. پایه استاندارد روی این فضاها پایه‌ای مشخص برای آنها است. نمایش یک نگاشت خطی از F^n به F^m در پایه‌های استاندارد این دو فضا نمایش استاندارد این نگاشت نامیده می‌شود. بنابراین هر ماتریس $A \in M_{m\times n}(F)$ متناظر با یک نگاشت خطی $L: F^n \to F^m$ است که نمایش استاندارد L برابر ماتریس A است. از این به بعد این نگاشت خطی را با L_A نمایش می‌دهیم. به این ترتیب $[L_A]_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_n} = A$.

با داشتن نمایش یک بردار $v \in V$ در پایه α و نمایش نگاشت خطی $T: V \to W$ در پایه‌های α و β می‌توانیم نمایش بردار $T(v)$ را در پایه β بدست آوریم. اگر

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

آنگاه

$$[T(v)]_\beta = [t_1 T(v_1) + \cdots t_n T(v_n)]_\beta = t_1[T(v_1)]_\beta + \cdots + t_n[T(v_n)]_\beta$$

رابطه نمایش $T(v)$ در پایه β را به نمایش v در پایه α و نمایش T در پایه‌های α و β می‌توان به صورت نمادین به شکل زیر بیان کرد.

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha$$

در بالا ماتریس $m\times n$ تایی $[T]_\beta^\alpha$ روی ستون n تایی $[v]_a$ اثر می‌کند و حاصل ستون m تایی $[T(v)]_\alpha$ می‌شود. به این ترتیب می‌توانیم حاصل اثر یا ضرب یک ماتریس را در یک ستون تعریف کنیم. اگر $A = [A_1 \mid \cdots \mid A_n]$ یک ماتریس $m\times n$ تایی با ستون‌های $A_1,\dots,A_n$ و B یک ستون n تایی با درایه‌های $b_1,\dots,b_n$ باشد، منظور از *ضرب ماتریس* A *در ستون* B، ستون m تایی زیر است.

$$AB = [A_1 \mid \cdots \mid A_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = b_1 A_1 + \cdots + b_n A_n$$

در واقع درایه iام ستون بالا برابر است با $a_{i1}b_1 + \cdots + a_{in}b_n$.

فرض کنید $A \in M_{m\times n}(F)$ ماتریسی دلخواه باشد. در این صورت نگاشت L_A به صورت زیر است.

$$L_A(X) = [L_A(X)]_{e_m} = [L_A]_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_n}[X]_{\varepsilon_n} = AX$$

به صورت مشابه می‌توان رابطه نمایش ترکیب دو نگاشت خطی را با نمایش‌های آن دو نگاشت بدست آورد. فرض کنید $\alpha = \{v_1,\dots,v_n\}$ و $\beta = \{w_1,\dots,w_m\}$ و $\gamma = \{z_1,\dots,z_p\}$ پایه‌هایی مرتب برای فضاهای برداری V و W و Z و $T: V \to W$ و $Q: W \to Z$ دو نگاشت خطی بین این فضاها باشند. از آنجا که ماتریس‌های $[T]_\beta^\alpha$ و $[Q]_\gamma^\beta$ نگاشت‌های T و Q را کاملاً مشخص می‌کنند، با داشتن آنها نگاشت QT و نمایش آن نیز مشخص خواهد شد. رابطه نمایش $[QT]_\gamma^\alpha$ با $[T]_\beta^\alpha$ و $[Q]_\gamma^\beta$ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} [QT_\gamma^\alpha &= \left[[(QT)(v_1)]_\gamma \mid \cdots \mid [(QT)(v_n)]_\gamma\right] \\ &= \left[[Q(T(v_1))]_\gamma \mid \cdots \mid [Q(T(v_n))]_\gamma\right] \\ &= \left[[Q]_\gamma^\beta[T(v_1)]_\beta \mid \cdots \mid [Q]_\gamma^\beta[T(v_n)]_\beta\right] \end{aligned}$$

اگر $[Q]_\gamma^\beta$ را به صورت نمادین از رابطه بالا فاکتور بگیریم خواهیم داشت

$$[QT]_\gamma^\alpha = [Q]_\gamma^\beta\left[\left[T(v_1)\right]_\beta \mid \cdots \mid \left[T(v_n)\right]_\beta\right] = [Q]_\gamma^\beta[T]_\beta^\alpha$$

به این ترتیب می‌توان ضرب دو ماتریس را نیز به صورت طبیعی به شکل زیر تعریف کرد.

تعریف: فرض کنید $A = [A_1 \mid \cdots \mid A_m]$ یک ماتریس $p \times m$ تایی و $B = [B_1 \mid \cdots \mid B_n]$ یک ماتریس $m \times n$ تایی باشد. ***ضرب ماتریس*** **A** ***در ماتریس*** **B، ماتریس $p \times n$ تایی C است که برای آن داریم**

$$C = AB = A[B_1 \mid \cdots \mid B_n] := \left[AB_1 \mid \cdots \mid AB_n\right]$$

در بالا ضرب ماتریس $p \times m$ تایی A در یک ستون m تایی با درایه‌های $b_1,\ldots,b_m$ همان گونه که پیش از این بیان شد برابر است با

$$b_1A_1 + \cdots + b_mA_m$$

به عبارت دیگر AB ماتریس $p \times n$ تایی C است که درایه ij ام آن برابر است با

$$(C)_{ij} = (A)_{i1}(B)_{1j} + \cdots + (A)_{im}(B)_{mj}$$

قضیه: ضریب ماتریس‌ها شرکت پذیر است. یعنی اگر A و B و C به ترتیب ماتریس‌های $p \times m$ و $m \times n$ و $p \times n$ تایی باشند آنگاه $(AB)C = A(BC)$.

اثبات: این رابطه را می‌توان به راحتی به کمک تعریف ضرب ماتریس‌ها تحقیق کرد و نشان داد درایه ijام دو طرف برابر است با $\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$. همچنین می‌توان با توجه به منشأ تعریف ضرب ماتریس‌ها این رابطه را ثابت کرد. اگر A و B و C به ترتیب ماتریس‌های نمایش نگاشت‌های خطی $T : F^m \to F^p$ و $Q : F^n \to F^m$ و $P : F^q \to F^n$ باشند آنگاه سمت چپ ماتریس نمایش نگاشت $(TQ)P$ است و سمت راست نمایش نگاشت $T(QP)$. ولی این دو نگاشت برابرند زیرا ترکیب توابع شرکت پذیر است.

دقت داشته باشید که ضرب دو ماتریس لزوماً جابجا نمی‌شود، زیرا ترکیب دو نگاشت خطی لزوماً جابجا نمی‌شود!

مثال

اگر A یک ماتریس $m \times n$ تایی باشد آنگاه $I_mA = AI_n = A$.

این رابطه را می‌توان به راحتی با توجه به قوانین ضرب ماتریس بررسی کرد.

$$(AI_n)_{ij} = \sum_k (A)_{ik}(I_n)_{kj} = (A)_{ij}(I_n)_{jj} = (A)_{ij}$$
$$(I_mA)_{ij} = \sum_k (I_m)_{ik}(A)_{kj} = (I_m)_{ii}(A)_{ij} = (A)_{ij}$$

این رابطه با توجه به اینکه ماتریس‌ها نمایش‌های نگاشت‌های خطی اند نیز به سادگی نتیجه می‌شود

اگر A نمایش نگاشت خطی $T : V \to W$ در پایه‌های α و β باشد آنگاه

$$A = [T]_\beta^\alpha = [TI_V]_\beta^\alpha = [T]_\beta^\alpha[I_V]_\alpha^\alpha = AI_n$$
$$A = [T]_\beta^\alpha = [I_WT]_\beta^\alpha = [I_V]_\beta^\beta[T]_\beta^\alpha = I_mA$$

ماتریس A را *وارون‌پذیر* گوییم هرگاه نمایش یک نگاشت خطی وارون‌پذیر باشد.

قضیه: گزاره‌های زیر معادل اند.

- **A وارون‌پذیر است.**

- **ماتریس‌های B و C وجود دارند که AB و CA تعریف شده اند و برابر ماتریس همانی هستند. به عبارت دیگر $AB = I_m$ و $CA = I_n$.**
- **A مربعی است و ماتریس B وجود دارد به گونه‌ای که AB ماتریس همانی است. (وارون راست)**
- **A مربعی است و ماتریس C وجود دارد به گونه‌ای که CA ماتریس همانی است. (وارون چپ)**
- **A مربعی است و تنها جواب معادله همگن $AX = 0$ جواب بدیهی $X = 0$ است.**
- **A مربعی است و برای هر $Y \in F^n$، $X \in F^n$ ای وجود دارد که $AX = Y$.**

اثبات: این قضیه بیان ماتریسی قضیه‌های مربوط به وارون نگاشت‌های خطی است.

نتیجه: اگر A وارون‌پذیر باشد، A مربعی است و ماتریس یکتای B وجود دارد که $AB = I_n$ و $BA = I_n$. به ماتریس B *وارون ماتریس* A می‌گوییم.

اثبات: این گزاره برای نگاشت‌های خطی واضح است. یعنی وارون یک نگاشت خطی یکتا است. اما اثباتی به کمک ویژگی‌های ماتریس‌ها نیز ارائه می‌کنیم. اگر $AB = I$ و $CA = I$ آنگاه

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$$

نتیجه. اگر نمایش یک نگاشت خطی ماتریسی وارون‌پذیر باشد آنگاه خود آن نگاشت نیز وارون‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید نمایش نگاشت خطی $T: V \to W$ در پایه‌های α و β ماتریس وارون‌پذیر A است. بنابر قضیه قبل A مربعی است و ماتریس مربعی B وجود دارد که $BA = I$. در نتیجه فضاهای V و W هم بعد اند و نگاشت خطی یکتای $U: W \to V$ وجود دارد که نمایش آن در پایه‌های β و α برابر ماتریس B است. به این ترتیب

$$[UT]_\alpha^\alpha = [U]_\alpha^\beta [T]_\beta^\alpha = BA = I$$

این نشان می‌دهد که $UT = I_V$ و چون V و W هم بعد اند T نگاشتی وارون‌پذیر است.

طبق تعریف یک ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ نمایش نگاشتی وارون‌پذیر روی یک فضای برداری n بعدی در پایه‌های مناسب است. با عوض شدن پایه‌ها، ماتریس نمایش نیز عوض می‌شود. به این صورت ماتریس‌های وارون‌پذیر متفاوتی به دست می‌آید. در زیر نشان می‌دهیم که همه ماتریس‌های وارون‌پذیر $n \times n$ در این فرایند ظاهر می‌شوند. به عبارت دیگر هر ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ نمایش آن نگاشت خطی در پایه‌های مناسب است. برای این کار نشان می‌دهیم که هر ماتریس وارون‌پذیر نمایش نگاشت همانی در پایه‌های مناسب است.

قضیه: فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی و α و α' دو پایه برای آن باشند، آنگاه $[I_V]_{\alpha'}^\alpha$ یک ماتریس وارون‌پذیر است. اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ تایی باشد، آنگاه پایه‌های β و β' برای V وجود دارند که $A = [I_V]_\beta^\alpha$ و $A = [I_V]_{\alpha'}^{\beta'}$.

اثبات: از آنجایی که نگاشت همانی وارون‌پذیر است هر نمایش آن نیز طبق تعریف وارون‌پذیر خواهد بود. در واقع داریم

$$[I_V]_\alpha^{\alpha'} [I_V]_{\alpha'}^\alpha = [I_V I_V]_\alpha^\alpha = [I_V]_\alpha^\alpha = I$$

در نتیجه $[I_V]_{\alpha'}^\alpha$ وارون‌پذیر است و وارون آن ماتریس $[I_V]_\alpha^{\alpha'}$ است.

فرض کنید A یک ماتریس وارون‌پذیر است و $T: V \to V$ عملگر یکتایی است که $A = [T]_\alpha^\alpha$. چون A وارون‌پذیر است، عملگر T نیز وارون‌پذیر است. در نتیجه

$$u_1 = T(v_1), \ldots, u_n = T(v_n)$$

یک پایه برای V خواهد بود که آن را با β نمایش می‌دهیم. در این صورت

$$A = [T]_\alpha^\alpha = \left[[T(v_1)]_\alpha \mid \cdots \mid [T(v_n)]_\alpha \right] = \left[[u_1]_\alpha \mid \cdots \mid [u_n]_\alpha \right] = [I_V]_\alpha^\beta$$

اگر در روند بالا به جای ماتریس A و پایه α، A^{-1} و α' را قرار دهیم، پایه β' به گونه‌ای به دست می‌آید که $A^{-1}=[I_V]_{\alpha'}^{\beta'}$. بنابراین $A=[I_V]_{\beta'}^{\alpha'}$.

تغییر مختصات

فرض کنید $\alpha=\{v_1,\dots,v_n\}$ و $\alpha'=\{v'_1,\dots,v'_n\}$ دو پایه برای V باشند و

$$v=t_1v_1+\cdots+t_nv_n.$$

آنگاه

$$\begin{aligned}[v]_{\alpha'}&=[t_1v_1+\cdots+t_nv_n]_{\alpha'}=t_1[v_1]_{\alpha'}+\cdots+t_n[v_n]_{\alpha'}\\&=\big[[v_1]_{\alpha'}\mid\cdots\mid[v_n]_{\alpha'}\big]\begin{bmatrix}t_1\\\vdots\\t_n\end{bmatrix}=P[v]_\alpha\end{aligned}$$

یعنی با ضرب کردن ماتریس P در نمایش بردار v در پایه α، نمایش این بردار در پایه α' بدست می‌آید. ستون‌های P نمایش اعضای پایه α در پایه α' اند. در واقع ماتریس P را می‌توان به عنوان ماتریس نمایش عملگر همانی $I:V\to V$ در پایه‌های α و α' در نظر گرفت. بنابراین

$$\begin{aligned}[v]_{\alpha'}&=[I]_{\alpha'}^{\alpha}[v]_\alpha=P[v]_\alpha\\ [v]_\alpha&=[I]_\alpha^{\alpha'}[v]_{\alpha'}=Q[v]_{\alpha'}\end{aligned}$$

دقت کنید که ماتریس‌های P و Q وارون هم اند زیرا

$$\begin{aligned}P.Q&=\left[I\right]_{\alpha'}^{\alpha}\left[I\right]_{\alpha}^{\alpha'}=\left[II\right]_{\alpha'}^{\alpha'}=\left[I\right]_{\alpha'}^{\alpha'}=I\\ Q.P&=\left[I\right]_{\alpha}^{\alpha'}\left[I\right]_{\alpha'}^{\alpha}=\left[II\right]_{\alpha}^{\alpha}=\left[I\right]_{\alpha}^{\alpha}=I\end{aligned}$$

به همین شکل می‌توان رابطه دو نمایش یک نگاشت خطی را در پایه‌های مختلف بدست آورد. فرض کنید α و α' دو پایه برای V و β و β' دو پایه برای W و $T:V\to W$ یک نگاشت خطی باشد. ماتریس‌های تغییر مختصات P و Q وجود دارند که

$$[v]_{\alpha'}=P[v]_\alpha \quad [w]_{\beta'}=Q[w]_\beta$$

بنابراین برای هر v

$$\begin{aligned}&[T(v)]_{\beta'}=[T]_{\beta'}^{\alpha'}[v]_{\alpha'}\\ &\Rightarrow Q[T(v)]_\beta=[T]_{\beta'}^{\alpha'}P[v]_\alpha\\ &\Rightarrow [T(v)]_\beta=Q^{-1}[T]_{\beta'}^{\alpha'}P[v]_\alpha=[T]_\beta^\alpha[v]_\alpha\end{aligned}$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود که $Q^{-1}[T]_{\beta'}^{\alpha'}P=[T]_\beta^\alpha$. در واقع این رابطه به سادگی از نمایش ترکیب نگاشت‌های خطی نیز بدست می‌آید:

$$[T]_\beta^\alpha=[I_WTI_V]_\beta^\alpha=[I_W]_\beta^{\beta'}[T]_{\beta'}^{\alpha'}[I_V]_{\alpha'}^{\alpha}$$

با توجه به مطالب بالا $[I_V]_{\alpha'}^{\alpha}$ ماتریس تغییر مختصات از پایه α به پایه α' و $[I_W]_\beta^{\beta'}$ نیز ماتریس تغییر مختصات از پایه β' به پایه β است که وارون ماتریس تغییر مختصات از پایه β به پایه β' می‌باشد.

نگاشت‌های خطی خاص

نگاشت‌های تصویر

فرض کنید فضای برداری V برابر جمع مستقیم دو زیرفضای V_1 و V_2 است. بنابراین هر عضو $v \in V$ نمایشی یکتا به صورت $v = v_1 + v_2$ دارد که $v_1 \in V_1$ و $v_2 \in V_2$. به این ترتیب می‌توانیم به هر عضو $v \in V$، مولفه اول یعنی v_1 را نسبت دهیم و این نگاشت خوش تعریف است.

$$T : V \to V; \qquad T(v) = v_1$$

نشان می‌دهیم این نگاشت یک نگاشت خطی است که به آن تصویر گویند. در واقع این نگاشت فضای V را در راستای زیر فضای V_2 روی زیر فضای V_1 تصویر می‌کند.
فرض کنید v و u دو بردار دلخواه در V و $v = v_1 + v_2$ و $u = u_1 + u_2$ نمایش آنها در تجزیه $V = V_1 \oplus V_2$ باشد. در این صورت

$$v + ru = (v_1 + ru_1) + (v_v + ru_2), \quad (v_1 + ru_1) \in V_1, \quad (v_v + ru_2) \in V_2$$

بنابراین

$$T(v + ru) = v_1 + ru_1 = T(v) + rT(u)$$

توجه کنید که $\operatorname{Im} T = V_1$ و $\ker T = V_2$ و $T\mid_{V_1} = I_{V_1}$. در نتیجه برای نگاشت تصویر T داریم $T^2 = T$.
در زیر نشان می‌دهیم این ویژگی‌های نگاشت تصویر را می‌توان در رابطه $T^2 = T$ خلاصه کرد.

قضیه. عملگر خطی $T : V \to V$ یک تصویر است اگر و تنها اگر $T^2 = T$.

اثبات. در بالا دیدیم که نگاشت‌های تصویر در این رابطه صدق می‌کنند. برای اثبات طرف دیگر فرض کنید $T : V \to V$ نگاشتی خطی است به گونه‌ای که $T^2 = T$. برای هر $v \in \operatorname{Im} T$ بردار $u \in V$ وجود دارد که $T(u) = v$. بنابراین $T(v) = T(T(u)) = T^2(u) = T(u) = v$. در نتیجه تحدید T به زیرفضای $\operatorname{Im} T$ عملگر همانی است. (به عبارت دیگر $T\mid_{\operatorname{Im} T} = I_{\operatorname{Im} T}$).
این نشان می‌دهد که دو زیر فضای $\ker T$ و $\operatorname{Im} T$ نمی‌توانند اشتراک نابدیهی داشته باشند. زیرا اگر v در اشتراک این دو زیرفضا باشد، $T(v)$ از آنجا که در هسته T است بردار ۰ خواهد بود و از آنجا که در تصویر T است برابر با خود v است. بنابراین v باید صفر باشد. در نتیجه V برابر جمع مستقیم دو زیرفضای $\ker T$ و $\operatorname{Im} T$ است، زیرا طبق قضیه بعد داریم

$$\dim(\operatorname{Im} T + \ker T) = \dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\ker T) = \dim V$$

بنابراین هر عضو V را می‌توان به صورت جمع عضوی از $\operatorname{Im}(T)$ و عضوی از $\ker(T)$ نوشت. فرض کنید $v = u + w$ که $w \in \ker T$ و $u \in \operatorname{Im} T$. در این صورت

$$T(v) \;= T(u) + T(w) = \; u + 0 \; = u$$

در تجزیه $V = V_1 \oplus V_2$ فرض کنید T_1 و T_2 به ترتیب تصویر روی مولفه اول و دوم باشند. در این صورت واضح است که $T_1 + T_2 = I$ و $T_1T_2 = T_2T_1 = 0$. برعکس این حکم نیز برقرار است، یعنی اگر T_1 و T_2 دو نگاشت خطی باشند که $T_1 + T_2 = I$ و $T_1T_2 = T_2T_1 = 0$ آنگاه $V = \operatorname{Im} T_1 \oplus \operatorname{Im} T_2$ و T_1 و T_2 تصویر روی مولفه اول و دوم هستند. قضیه زیر این موضوع را به صورت کلی‌تر نشان می‌دهد.

قضیه. فرض کنید $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ و برای هر i، T_i عملگر تصویر روی مولفه iام باشد. در این صورت

- $T_1+\cdots+T_k=I$.
- **برای هر** $i\neq j$، $T_iT_j=0$.

برعکس، فرض کنید $T_1,\ldots,T_k:V\to V$ **عملگرهای با دو ویژگی بالا باشند. در این صورت** $V=\operatorname{Im}T_1\oplus\cdots\oplus\operatorname{Im}T_k$ **و** T_i**ها تصویر روی مولفه** i**ام اند.**

اثبات. فرض کنید $v\in V$ برداری دلخواه و $v=v_1+\cdots+v_k$ نمایش آن در تجزیه $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$ باشد. در این صورت برای هر i داریم $T_i(v)=v_i$. بنابراین

$$(T_1+\cdots+T_k)(v)=T_1(v)+\cdots+T_k(v)=v_1+\cdots+v_k=v$$

بنابراین $T_1+\cdots+T_k=I$. با توجه به اینکه نمایش هر $v_j\in V_j$ در تجزیه بالا به صورت $0+\cdots+v_j+\cdots+0$ است، برای هر $i\neq j$ داریم $T_i(v_j)=0$. به این ترتیب برای هر $v\in V$ داریم $T_iT_j(v)=T_i(v_j)=0$ و در نتیجه $T_iT_j=0$. برعکس، فرض کنید $T_1,\ldots,T_k$ عملگرهای باشند که در دو شرط قضیه صدق می‌کنند. ابتدا توجه کنید که برای هر $v\in V$ داریم

$$v=I(v)=(T_1+\cdots+T_k)(v)=T_1(v)+\cdots+T_k(v)\in\operatorname{Im}T_1+\cdots+\operatorname{Im}T_k$$

بنابراین v نمایشی به صورت $v=v_1+\cdots+v_k$ دارد که در آن $v_i=T_i(v)\in\operatorname{Im}T_i$. نشان می‌دهیم این تنها نمایش v به این صورت است. فرض کنید $v=u_1+\cdots+u_k$ که در آن $u_i\in\operatorname{Im}T_i$. دقت کنید که شرط $T_iT_j=0$ نشان می‌دهد که $T_i\,|_{\operatorname{Im}T_j}=0$. همچنین این شرط به همراه شرط دوم نتیجه می‌دهد که T_iها عملگر تصویر اند، زیرا

$$\begin{aligned}T_i=T_iI=T_i(T_1+\cdots+T_k)&=T_iT_1+\cdots+T_iT_k\\&=0+\cdots+T_i^2+\cdots+0=T_i^2\end{aligned}$$

بنابراین $T_i\,|_{\operatorname{Im}T_i}=I_{\operatorname{Im}T_i}$ و در نتیجه

$$T_i(v)=T_i(u_1+\cdots+u_k)=T_i(u_1)+\cdots+T_i(u_k)=0+\cdots+T_i(u_i)+\cdots+0=u_i$$

اگر $\{v_1,\ldots,v_s\}$ پایه‌ای برای $\operatorname{Im}(T)$ و $\{w_1,\ldots,w_{n-s}\}$ پایه‌ای برای $Ker(T)$ باشد آنگاه $\alpha=\{v_1,\ldots,v_s,w_1,\ldots,w_{n-s}\}$ پایه‌ای برای V است و نمایش عملگر T در این پایه مرتب به شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}[T]_\alpha^\alpha&=\big[[T(v_1)]_\alpha\mid\cdots\mid[T(v_s)]_\alpha\mid 0\mid\cdots\mid 0\big]\\&=\big[[v_1]_\alpha\mid\cdots\mid[v_s]_\alpha\mid 0\mid\cdots\mid 0\big]=\begin{bmatrix}I_s&0\\0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

عملگرهای پوچ‌توان

به عنوان مثال دیگر از عملگرهای مهم که رفتاری ساده دارند می‌توان به عملگرهایی مانند $T:V\to V$ اشاره کرد که در رابطه $T^2=0$ صدق می‌کنند. این ویژگی‌معادل این است که $\operatorname{Im}T\subset\ker T$ باشد. فرض کنید $\{v_1,\ldots,v_k\}$ پایه‌ای برای $\operatorname{Im}T$ و $\{v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_s\}$ گسترش آن به پایه‌ای برای $\ker T$ باشد. از آنجایی که $v_1,\ldots,v_k$ در $\operatorname{Im}T$ قرار دارند بردارهای $u_1,\ldots,u_k$ای وجود دارند که $T(u_i)=v_i$. توجه کنید که چون تصویر $u_1,\ldots,u_k$ مستقل خطی است خود این بردارها نیز مستقل خطی اند و به علاوه در $\ker T$ نیز نیستند. در واقع نشان می‌دهیم که با اضافه کردن این بردارها به $\{v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_s\}$ یک پایه برای V بدست می‌آید. توجه کنید که تعداد همه این بردارها برابر مجموع بعد $\operatorname{Im}T$ و $\ker T$ است که طبق قضیه بعد این مجموع نیز برابر بعد فضای V است. بنابراین تنها کافی است نشان دهیم که این بردارها مستقل خطی اند. فرض کنید

$$a_1u_1+\cdots+a_ku_k+b_1v_1+\cdots+b_sv_s=0$$

با اثر دادن نگاشت T روی رابطه بالا و توجه به اینکه $v_1,\dots,v_s$ در $\ker T$ قرار دارند، خواهیم داشت

$$0=a_1T(u_1)+\cdots+a_kT(u_k)=a_1v_1+\cdots+a_kv_k$$

از آنجا گه $v_1,\dots,v_s$ مستقل خطی اند همه ضرایب ترکیب خطی بالا باید صفر باشند. بنابراین رابطه اول به صورت زیر در می‌آید.

$$b_1v_1+\cdots+b_sv_s=0$$

دوباره با توجه به اینکه $v_1,\dots,v_s$ مستقل خطی اند همه ضرایب ترکیب خطی بالا نیز باید صفر باشند. این نشان می‌دهد که مجموعه $\{u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_s\}$ مستقل خطی و درنتیجه یک پایه برای V است. به این ترتیب V دارای پایه‌ای است که به صورت زیر با عملگر T ارتباط دارد.

$$\begin{array}{ccccc}
u_1 & \xrightarrow{T} & v_1 & \xrightarrow{T} & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
u_k & \xrightarrow{T} & v_k & \xrightarrow{T} & 0\\
 & & v_{k+1} & \xrightarrow{T} & 0\\
 & & \vdots & & \vdots\\
 & & v_s & \xrightarrow{T} & 0
\end{array}$$

نمایش عملگر T در پایه مرتب $\alpha=\{v_1,u_1,v_2,u_2,\dots,v_k,u_k,v_{k+1},\dots,v_s\}$ به صورت زیر است.

$$[T]_\alpha^\alpha=\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}=$$

مشابه این مطالب برای عملگرهایی که در شرط $T^3=0$ صدق می‌کنند نیز برقرار است. توجه کنید گه تحدید نگاشت T به $\operatorname{Im}T$ نگاشتی از $\operatorname{Im}T$ به خود این فضا است. بنابراین تحدید T به $\operatorname{Im}T$ عملگری روی این فضا است که اگر با خودش ترکیب شود برابر صفر می‌شود. طبق مطالب بالا پایه‌ای برای $\operatorname{Im}T$ مانند $\{u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_s\}$ وجود دارد که به صورت زیر با عملگر T ارتباط دارد.

$$\begin{array}{ccccc}
u_1 & \xrightarrow{T} & v_1 & \xrightarrow{T} & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
u_k & \xrightarrow{T} & v_k & \xrightarrow{T} & 0\\
 & & v_{k+1} & \xrightarrow{T} & 0\\
 & & \vdots & & \vdots\\
 & & v_s & \xrightarrow{T} & 0
\end{array}$$

تعداد این بردارخا برابر بعد $\operatorname{Im}T$ است و چون همه آنها در این فضا قرار دارند بردارهای $w_1,\dots,w_s$ وجود دارند که

$$\begin{array}{ccccccc}
w_1 & \xrightarrow{T} & u_1 & \xrightarrow{T} & v_1 & \xrightarrow{T} & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
w_k & \xrightarrow{T} & u_k & \xrightarrow{T} & v_k & \xrightarrow{T} & 0 \\
 & & w_{k+1} & \xrightarrow{T} & v_{k+1} & \xrightarrow{T} & 0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & w_s & \xrightarrow{T} & v_s & \xrightarrow{T} & o
\end{array}$$

توجه کنید که $v_1,\dots,v_s$ در $\ker T$ قرار دارند، ولی ممکن است که کل این فضا را تولید نکنند. در این صورت این مجموعه مستقل خطی را نیز می‌توانیم با اضافه کردن بردارهایی مانند $w_{s+1},\dots,w_r$ به پایه‌ای برای $\ker T$ گسترش داد. دقت کنید که در این فرایند بردارهای $w_1,\dots,w_s,\dots,w_r$ به پایه $\operatorname{Im} T$ اضافه شدند که تعداد آنها برابر بعد $\ker T$ است. پس طبق قضیه بعد تعداد کل بردارها برابر بعد فضای V است. نشان می‌دهیم که این مجموعه مستقل خطی نیز است که این خود نتیجه می‌دهد که پایه‌ای برای V خواهد بود.

برای اثبات مستقل خطی بودن این مجموعه گزاره کلی زیر را ثابت می‌کنیم.

گزاره. فرض کنید $T : V \to V$ عملگری دلخواه است. مجموعه زنجیرهایی به صورت

$$\begin{array}{ccccccc}
v^1_{s_1} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^1_1 & \xrightarrow{T} & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
v^r_{s_r} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^r_1 & \xrightarrow{T} & 0
\end{array}$$

مستقل خطی است اگر و تنها اگر مجموعه بردارهای انتهای این زنجیرها یعنی $\{v^1_1,\dots,v^r_1\}$ مستقل خطی باشند.

اثبات. یک طرف حکم بالا که واضح است، زیرا مجموعه بردارهای انتهایی زیر مجموعه بردارهای زنجیرها است. اگر مجموعه بزرگ‌تر مستقل خطی باشد آنگاه مجموعه کوچک‌تر نیز مستقل خطی است. برای اثبات طرف دیگر حکم از استقرا روی طول بزرگ‌ترین زنجیر استفاده می‌کنیم. اگر طول بزرگ‌ترین زنجیر یک باشد آنگاه همه بردارها انتهایی هستند و دیگر چیزی برای اثبات نمی‌ماند. فرض کنید حکم برای زمانی که طول بزرگ‌ترین زنجیر از s بیشتر نباشد برقرار است. زنجیرهایی به صورت

$$\begin{array}{ccccccc}
v^1_{s_1} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^1_1 & \xrightarrow{T} & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
v^r_{s_r} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^r_1 & \xrightarrow{T} & 0
\end{array}$$

را در نظر بگیرید که در آن $\{v^1_1,\dots,v^r_1\}$ مستقل خطی و طول بزرگ‌ترین زنجیر s است.طبق فرض استقرا می‌دانیم مجموعه $\{v^1_1,\dots,v^1_{s_1-1},\dots,v^r_1,\dots,v^r_{s_r-1}\}$ مستقل خطی است.

فرض کنید

$$a^1_1 v^1_1 + a^1_2 v^1_2 + \cdots + a^1_{s_1} v^1_{s_1} + \cdots + a^r_1 v^r_1 + a^r_2 v^r_2 + \cdots + a^r_{s_r} v^r_{s_r} = 0$$

با اعمال T روی ترکیب خطی بالا خواهیم داشت

$$0 + a^1_2 v^1_1 + \cdots + a^1_{s_1} v^1_{s_1-1} + \cdots + 0 + a^r_2 v^r_1 + \cdots + a^r_{s_r} v^r_{s_r-1} = 0$$

با توجه به مستقل خطی بودن $\{v^1_1,\dots,v^1_{s_1-1},\dots,v^r_1,\dots,v^r_{s_r-1}\}$ نتیجه می‌شود که همه ضرایب $a^1_2,\dots,a^1_{s_1},\dots,a^r_2,\dots,a^r_{s_r}$ صفر اند. بنابراین ترکیب خطی اول به صورت $a^1_1 v^1_1 + \cdots + a^r_1 v^r_1 = 0$ خواهد بود که از مستقل خطی بودن $\{v^1_1,\dots,v^r_1\}$ نیز نتیجه می‌شود ضرایب $a^1_1,\dots,a^r_1$ نیز صفر اند.

به این ترتیب با کمک این گزاره ثابت می‌شود که برای هر عملگری که در رابطه $T^{۳} = ۰$ صدق می‌کند پایه‌ای به صورت اجتماع چند زنجیر به طول حداکثر سه وجود دارد.

یک عملگر $T : V \to V$ را *پوچ‌توان* گوییم هرگاه عدد طبیعی k وجود داشته باشد که $T^k = ۰$. کوچک‌ترین k با این ویژگی را نیز *مرتبه آن عملگر* می‌نامیم.

قضیه. برای هر عملگر پوچ‌توان $T : V \to V$ پایه‌ای از زنجیرها برای V به صورت زیر وجود دارد.

$$\begin{array}{ccccccc}
v^{۱}_{s_۱} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^{۱}_{۱} & \xrightarrow{T} & ۰ \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
v^{r}_{s_r} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^{r}_{۱} & \xrightarrow{T} & ۰
\end{array}$$

طول بزرگ‌ترین زنجیر برابر مرتبه T است. به این ترتیب نمایش T در پایه مرتب $\alpha = \{v^{۱}_{۱},\ldots,v^{۱}_{s_۱},\ldots,v^{r}_{۱},\ldots,v^{r}_{s_r}\}$ به صورت زیر خواهد بود.

$$[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} J_۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & \cdots & J_r \end{bmatrix} \qquad\qquad J_i = \left.\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \end{bmatrix}\right\} s_i$$

اثبات. (استقرا روی مرتبه T). اگر مرتبه T یک باشد چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. ما این حکم را نیز برای عملگرهای پوچ‌توان مرتبه دو به صورت مستقل ثابت کردیم. فرض کنید حکم برای عملگرهای مرتبه کمتر از s برقرار باشد. همچنین فرض کنید T عملگری پوچ‌توان از مرتبه s است. تحدید T به $\operatorname{Im} T$ عملگری پوچ‌توان روی $\operatorname{Im} T$ از مرتبه $s - ۱$ است. طبق فرض استقرا پایه‌ای از زنجیرها برای $\operatorname{Im} T$ به صورت زیر وجود دارد که در ضمن طول بزرگ‌ترین زنجیر برابر $s - ۱$ است.

$$\begin{array}{ccccccc}
v^{۱}_{s_۱} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^{۱}_{۱} & \xrightarrow{T} & ۰ \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
v^{r}_{s_r} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^{r}_{۱} & \xrightarrow{T} & ۰
\end{array}$$

چون این بردارها در $\operatorname{Im} T$ قرار دارند بردارهای $v^{۱}_{s_۱+۱},\ldots,v^{r}_{s_r+۱}$ در V وجود دارند که $T(v^{i}_{s_i+۱}) = v^{i}_{s_i}$. همچنین توجه داشته باشید که $v^{۱}_{۱},\ldots,v^{r}_{۱}$ مستقل خطی اند و در $\ker T$ قرار دارند. بنابراین می‌توان با اضافه کردن بردارهای $v^{r+۱}_{۱},\ldots,v^{l}_{۱}$ به آنها یک پایه برای $\ker T$ بدست آورد. به این ترتیب زنجیرهای

$$\begin{array}{ccccccc}
v^{۱}_{s_۱+۱} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^{۱}_{۱} & \xrightarrow{T} & ۰ \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
v^{r}_{s_r+۱} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^{r}_{۱} & \xrightarrow{T} & ۰ \\
 & & & & v^{r+۱}_{۱} & \xrightarrow{T} & ۰ \\
 & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & v^{l}_{۱} & \xrightarrow{T} & ۰
\end{array}$$

بدست می‌آیند که طوب بزرگ‌ترین آنها برابر s است و تعداد بردارهای آن برابر مجموع بعد $\operatorname{Im} T$ و $\ker T$ است که این مقدار طبق قضیه بعد برابر بعد V است. از طرفی بردارهای انتهایی این زنجیرها پایه‌ای برای $\ker T$ و در نتیجه مستقل خطی اند. بنابراین طبق گزاره بالا این مجموعه این زنجیرها مستقل خطی است، پس پایه‌ای برای V خواهد بود.
