سوال:

فرض کنید که مجموعه برداری $S = \{b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\}$ ، یک مجموعه برداری مستقل خطی است. در هر یک از بخش های سوال، مشخص کنید اگر بردار b به مجموعه برداری S اضافه شود، مجموعه برداری S از نظر استقلال خطی تغییر می کند؟ وضعیت این مجموعه برداری را از نظر استقلال خطی مشخص کنید.

a) $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \end{bmatrix}$

b) $b = \begin{bmatrix} 29 \\ 15 \\ 32 \\ 11 \end{bmatrix}$

c) $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

پاسخ:

بنا به تعریف استقلال خطی می دانیم، *یک مجموعه برداری مستقل خطی خواهد بود اگر و تنها اگر هر یک از بردار ها را، نتوان به صورت ترکیب خطی دیگر بردار های آن مجموعه برداری نوشت.* از آنجایی که در این سوال، مجموعه برداری داده شده (یعنی مجموعه برداری S) خود به تنهایی مستقل خطی است. بنابراین، برای حل سوال تنها باید چک کنیم بردار b را می توان به صورت ترکیب خطی بردار های این مجموعه نوشت یا نه. در صورتی که b ترکیب خطی از بردار های $S = \{b_1, b_2, b_3\}$ باشد، آنگاه در صورت اضافه کردن b به مجموعه S ، این مجموعه وابسته خطی خواهد شد. در غیر اینصورت، این مجموعه برداری همچنان مستقل خطی باقی خواهد ماند.

قسمت *a*)

در ابتدا صرفا ماتریس افزونه این معادله را تشکیل داده و طی آن چک می کنیم که $b \in Span(S)$

$$\begin{bmatrix}2&5&0&6\\0&3&0&12\\3&4&2&21\\1&0&3&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&3&8\\2&5&0&6\\3&4&2&21\\0&3&0&12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&3&8\\0&5&-6&-10\\0&4&-7&-3\\0&3&0&12\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&3&8\\0&1&0&4\\0&4&-7&-3\\0&5&-6&-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&3&8\\0&1&0&4\\0&0&-7&-19\\0&0&-6&-30\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&3&8\\0&1&0&4\\0&0&1&5\\0&0&-7&-19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&3&8\\0&1&0&4\\0&0&1&5\\0&0&0&16\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 0x_1+0x_2+0x_3=16\ (paradox)$$

از آنجایی که در حل، به پارادوکس رسیدیم، این به این معناست که معادله $[b_1\ b_2\ b_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=b$ جواب ندارد. بنابراین نمی توانیم بردار b را به صورت ترکیب خطی بردار های مجموعه برداری S نوشت. پس بعد اضافه کردن بردار b به مجموعه برداری S این مجموعه برداری همچنان **مستقل خطی** باقی خواهد ماند.

قسمت b)

در ابتدا صرفا ماتریس افزونه این معادله را تشکیل داده و طی آن چک می کنیم که $b\in Span(S)$

$$\begin{bmatrix}2&5&0&29\\0&3&0&15\\3&4&2&32\\1&0&3&11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&3&11\\2&5&0&29\\3&4&2&32\\0&3&0&15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&3&11\\0&5&-6&7\\0&4&-7&-1\\0&3&0&15\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&3&11\\0&1&0&5\\0&4&-7&-1\\0&5&-6&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&3&11\\0&1&0&5\\0&0&-7&-21\\0&0&-6&-18\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&3&11\\0&1&0&5\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&5\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_1=2\\x_2=5\\x_3=3\end{cases}$$

$$b=2b_1+5b_2+3b_3$$

همانطور که مشاهده می شود، پس از حل معادله متوجه شدیم که b در $Span(S)$ قرار دارد. بنابراین اگر این بردار را به این مجموعه برداری اضافه کنیم، مجموعه برداری حاصل، **وابسته خطی** خواهد بود.

قسمت c)

در ابتدا صرفا ماتریس افزونه این معادله را تشکیل داده و طی آن چک می کنیم که $b \in Span(S)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{22}{3} \end{bmatrix} \to 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -\frac{22}{3} \ (paradox)$$

در این قسمت هم، همانطور که مشاهده می شود با تناقض مواجه شدیم. بنابراین بردار b را نمی توان به صورت ترکیب خطی بردار های مجموعه برداری S نوشت. پس در صورتی که این بردار را به این مجموعه برداری اضافه کنیم، این مجموعه برداری همچنان **مستقل خطی** باقی خواهد ماند.