جبر خطی کاربردی

نیمسال اول ۹۸-۹۷

مدرس دکتر ناظر فرد

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

تمرین سری ۵

توجه:

پاسخ تمرین را در یک فایل PDF با الگوی نام گذاری زیر آپلود کنید:

9531000_Claude_Makélélé_HW5.pdf

مهلت تحویل تمارین ساعت ۲۳:۵۵ روز شنبه ۹۷/۱۰/۲۲ خواهد بود.

۱) مقدار h را ماتریس زیر طوری بیابید که فضای ویژه آن به ازای **5** = λ دو بعدی باشد.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲) نشان دهید اگر دو ماتریس A و B متشابه باشند، آن‌گاه det A = det B.

۳) صحیح یا غلط بودن هریک عبارات زیر را مشخص کنید و برای هرکدام علت را توضیح دهید .

در تمامی قسمت ها A و B ماتریس‌های $n \times n$هستند مگر اینکه جداگانه مشخص شده باشند.

لف) برای هر اسکالر a,b,c می توان نتیجه گرفت ماتریس های زیر همگی متشابه اند و اگر $AB = BC$ باشد آنگاه A دو مقدار ویژه صفر دارد.

$$A = \begin{bmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

ب) عملیات مقدماتی سطری دترمینان را عوض نمی‌کند.

ج) نشان دهید اگر $A^2 = 0$ انگاه تنها مقدار ویژه A صفر است

د) اگر $\lambda + 5$ فاکتوری از چندجمله‌ای مشخصه A باشد، آن‌گاه ۵ یک مقدار ویژه A است.

ه) اگر A متشابه B باشد آنگاه A^2 مشابه B^2 است.

۴) A یک ماتریس 5×5با دو مقدار ویژه باشد، یک فضای ویژه ۳ بعدی و فضای ویژه دیگر ۲ بعدی است. آیا A قطری شدنی است؟چرا؟

۵) فرض کنید Aماتریس $n \times n$باشد که مجموع درایه های تمام سطر های آن sباشد ثابت کنید sمقدار ویژه ای از Aاست.

۶)درستی یا نادرستی عبارات زیر را با ذکر دلیل نشان دهید. (همه‌ی بردارها و زیرفضاها عضو $\mathbb{R}^n$ هستند)

الف) اگر z نسبت به u_1 و u_2 متعامد باشد و $W = Span\{u_1 . u_2\}$ آنگاه $z \in W^\perp$

ب) برای هر y و هر زیرفضای W، بردار $y - proj_W\, y$ نسبت به W متعامد است.

ج) اگر $y \in W$ آنگاه تصویر متعامد y بر روی W، خود y خواهد بود.

د) اگر ستون‌های ماتریس $U_{n\times p}$ متعامد یکه باشند، آنگاه UU^Ty تصویر متعامد y بر روی فضای ستونی U خواهد بود.

ه) اگر ستون‌های ماتریس $U_{n\times p}$ متعامد یکه باشند، آنگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داریم: $UU^Tx = x$.

و) اگر W زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ باشد و با فرض اینکه $v \in W . W^\perp$ آنگاه v بردار صفر خواهد بود.

ز) اگر $z_1 \in W$ و $z_2 \in W^\perp$ و $y = z_1 + z_2$ آنگاه z_1 تصویر متعامد y بر W خواهد بود.

۷) اگر $U_{n\times n}$ و $V_{n\times n}$ ماتریس‌های متعامد باشند، چرایی متعامد بودن UV را نشان دهید. (برای این کار کافی است معکوس‌پذیر بودن UV را نشان دهید و همچنین ثابت کنید که مقدار آن برابر است با $(UV)^T$)

۸) فرض کنید زیرفضای W زیرفضایی با پایه های متعامد از فضای $\mathbb{R}^n$ باشد و مجموعه $\{v_1 . v_2 . \dots . v_q\}$ یک پایه متعامد برای فضای متعامد W باشد.

الف) توضیح دهید چرا مجموعه $\{w_1 . \dots . w_p . v_1 . \dots . v_q\}$ یک مجموعه متعامد است.

ب) توضیح دهید چرا مجموعه برداری قسمت الف فضای $\mathbb{R}^n$ را $Span$ می کند.

ج) نشان دهید:

$$\dim W + \dim W^\perp = n.$$

۹) داده های حاصل از یک آزمایش به این شرح است: $(9 \cdot 0- ,3) . (2.5,4) . (1.7,9)$

مدلی توصیف کنید که با استفاده از تابع زیر از لحاظ کمترین مربعات با داده های داده شده متناسب شود.

$$y = A\cos x + B\sin x$$

۱۰) فرض کنید که $\{\boldsymbol{v_1} . \dots . \boldsymbol{v_p}\}$ یک پایه متعامد در $\mathbb{R}^n$ باشد:

الف) اگر داشته باشیم $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v_1} + \dots + c_p\boldsymbol{v_p}$ با استفاده از استقراء نشان دهید که :

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = |c_1|^2 + \dots + |c_p|^2$$

ب) نامساوی زیر را که به نا مساوی بسل (Bessel) معروف است ، به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$

اثبات کنید. $$\|\boldsymbol{x}\|^2 \geq |\boldsymbol{x}.\boldsymbol{v_1}|^2 + |\boldsymbol{x}.\boldsymbol{v_2}|^2 + \dots + |\boldsymbol{x}.\boldsymbol{v_p}|^2$$

۱۱)فرض کنید که $W = Span\{\boldsymbol{x_1} . \boldsymbol{x_2}\}$ به طوریکه $\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$

یک پایه متعامد برای W بیابید.