

سوال:

فرض کنید V زیرفضایی از \mathbb{R}^n است که فقط شامل وکتور صفر است، یا همان $V = \{\mathbf{0}\}$.

نشان دهید که V یک زیرفضا از \mathbb{R}^n است.

پاسخ: برای بررسی زیرفضا بودن V باید سه شرط زیرفضا بودن را بررسی کنیم:

(1) وکتور $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ در V باشد.

(2) V تحت عملگر جمع بسته باشد.

(3) V تحت عملگر ضرب بسته باشد.

- از آنجا که V فقط شامل وکتور $\mathbf{0}$ است پس شرط اول به طور واضح برقرار است.

- برای بررسی کردن شرط دوم از آنجا که تنها $\mathbf{0}$ عضو V است به ازای هر $x, y \in V$ هر دو آن ها $\mathbf{0}$

خواهند بود و در هر صورت این مجموعه تحت عمل جمع بسته خواهد بود.

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in V$$

- و در آخر شرط سوم، $x \in V$ و $c \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید، مشابه بالا قطعا x وکتور صفر خواهد بود و

داریم:

$$c\mathbf{x} = c\mathbf{0} = \mathbf{0} \in V$$

پس این مجموعه تحت عمل ضرب نیز بسته است.

از آنجا که هر سه شرط برقرار است پس این مجموعه یک زیرفضا از \mathbb{R}^n است.