

- نشان دهید اگر A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times p$ باشد به طوری که $AB = 0$ ، آنگاه:

$$\text{rank } A + \text{rank } B \leq n$$

هر بردار دلخواه x در فضای ستونی B به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$x = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_n b_n$$

پس داریم $By = x$ به طوری که $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

حال اگر Ax را حساب کنیم داریم:

$$Ax = A(By) = (AB)y = 0y = 0$$

پس هر بردار دلخواه در فضای ستونی B به صورت یک بردار در فضای $\text{Null } A$ قابل نوشتن است. لذا داریم:

$$\dim \text{Col } B \leq \dim \text{Null } A$$

$$\rightarrow \text{rank } B \leq \dim \text{Null } A$$

$$\rightarrow \text{rank } B + \text{rank } A \leq \dim \text{Null } A + \text{rank } A$$

$$\rightarrow \text{rank } A + \text{rank } B \leq n$$