

سوال:

محاسبات لازم را برای پاسخگویی به سوالات زیر انجام دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

الف) آیا معادله $Ax = b$ به ازای هر بردار b در \mathbb{R}^4 جواب دارد؟ (با ذکر دلیل توضیح داده شود)

ب) آیا ستون های ماتریس B یک $Spanning(Generating)$ set برای فضای برداری \mathbb{R}^4 محسوب می

شود؟ آیا معادله $Bx = c$ به ازای هر بردار c در \mathbb{R}^4 جواب دارد؟ (با ذکر دلیل توضیح داده شود)

ج) آیا هر بردار در \mathbb{R}^4 را می توان به صورت ترکیب خطی ستون های ماتریس A نوشت؟ آیا ستون های

این ماتریس، فضای برداری \mathbb{R}^4 را اسپن می کند؟ (با ذکر دلیل توضیح داده شود)

د) آیا هر بردار در \mathbb{R}^4 را می توان به صورت ترکیب خطی ستون های ماتریس B نوشت؟ هر بردار در \mathbb{R}^3

چطور؟ (با ذکر دلیل توضیح داده شود)

پاسخ:

$$\begin{aligned} A_{4 \times 4} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & -6 & 3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_{4 \times 4} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

توجه: موقعیت های محوری این ماتریس ها، به صورت *highlighted* مشخص شده است.

THEOREM 4

Let A be an $m \times n$ matrix. Then the following statements are logically equivalent. That is, for a particular A , either they are all true statements or they are all false.

- For each \mathbf{b} in \mathbb{R}^m , the equation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has a solution.
- Each \mathbf{b} in \mathbb{R}^m is a linear combination of the columns of A .
- The columns of A span \mathbb{R}^m .
- A has a pivot position in every row.

الف) همانطور که در ردیف های فرم نردبانی ماتریس $A_{4 \times 4}$ مشاهده می شود، آخرین ردیف دارای موقعیت محوری نیست، بنابراین گزاره "ماتریس A باید در هر ردیف دارای موقعیت محوری باشد" که آخرین گزاره از قضیه ۱.۴ است، نقض شده و نادرست است. بنابراین باقی گزاره های این قضیه نیز نقض شده و نادرست خواهند بود. بنابراین گزاره اول یعنی "به ازای هر بردار \mathbf{b} در فضای برداری \mathbb{R}^m ، معادله $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ دارای جواب است" نقض شده و نادرست خواهد بود. پس این معادله به ازای هر بردار \mathbf{b} در \mathbb{R}^4 جواب نخواهد داشت.

ب) در فرم نردبانی ماتریس $B_{4 \times 4}$ مشهود است که آخرین ردیف دارای موقعیت محوری نبوده بنابراین در این قسمت سوال هم گزاره "ماتریس A باید در هر ردیف دارای موقعیت محوری باشد" که آخرین شرط از قضیه ۱.۴ است، نقض شده و نادرست است. پس گزاره های دیگر این قضیه نیز نقض شده و نادرست خواهند بود. پس طبق گزاره سوم قضیه ۱.۴، ستون های ماتریس B فضای برداری \mathbb{R}^4 را اسپن نمی کند پس ستون های ماتریس B یک *Spanning (Generating) set* برای \mathbb{R}^4 نخواهد بود. همچنین از آن جایی که گزاره اول نیز نادرست خواهد بود، بنابراین معادله $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$ هم به ازای هر بردار \mathbf{c} در \mathbb{R}^4 دارای جواب نخواهد بود.

ج) در این قسمت نیز، همانطور که در قسمت «الف» اشاره شد، آخرین گزاره از قضیه ۱.۴ نقض شده است، پس گزاره های دوم و سوم این قضیه نیز نادرست خواهند بود. بنابراین هر برداری در \mathbb{R}^4 را نمی توان به صورت ترکیب خطی ستون های ماتریس A نوشت. پس ستون های این ماتریس فضای برداری \mathbb{R}^4 را اسپن نمی کند.

د) با توجه به توضیحات داده شده در قسمت «ب»، تمامی بردار ها در \mathbb{R}^4 را نمی توان به صورت ترکیب خطی ستون های ماتریس B نوشت. (نادرستی گزاره دوم قضیه ۱.۴) همچنین از آنجایی که هر یک از ستون های ماتریس B عضو فضای برداری \mathbb{R}^4 هستند (و نه فضای برداری \mathbb{R}^3) قطعاً ستون های این ماتریس، فضای برداری \mathbb{R}^3 را اسپن نخواهد کرد. (این سوال به این دلیل پرسیده شد تا دانشجویان نسبت به یکی از اشتباهات رایجی که در ابتدای یادگیری مفهوم *spanning* با آن مواجه می شوند، آگاهی پیدا کنند.)