سوالات تمرین 2 جبر – بخش 2.8 2.9 :

1) بررسی کنید کدام یک از زیرمجموعه های زیر یک زیرفضا (subspace) از R^3 هستند.

الف) $\{(x, y, z) \mid 2x + y - 3z = 7\}$

ب) $\{(-5x , 3x , 2x) \mid x \in R\}$

ج) $\{(x - 2 , x , x - 5) \mid x \in R\}$

د) $\{(x , y , z) \mid 2x + 9y = 0 , 8x - 5z = 0\}$

پاسخ :

الف) زیر فضا نیست چون 0 جز جواب تساوی $2x + y - 3z = 7$ نیست.

ب) تحت ضرب و جمع بسته است و 0 نیز جز جواب های ان است => زیر فضا هست.

ج) بردار صفر را شامل نمیشود در نتیجه زیرفضا نیست.

د) زیر فضا هست. طبق تساوی ها داریم : $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 8 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ بطوریکه $Ax = 0$

با حل تساوی بالا داریم $x = \begin{bmatrix} 5/8 \\ -5/36 \\ 1 \end{bmatrix} z$ به ازای هر $z \in R$ در نتیجه این مجموعه $\{ \text{span} \{ \begin{bmatrix} 5/8 \\ -5/36 \\ 1 \end{bmatrix} \}$ است و

از انجایی که هر span ای زیر فضاست، این زیر مجموعه یک زیرفضا برای R^3 است.

2) با توجه به ماتریس زیر به سوالات زیر پاسخ دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

الف) یک پایه برای column space این ماتریس بیابید.

ب) یک پایه برای nullspace این ماتریس بیابید.

ج) اگر $p = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$ نشان دهید p در فضای ستونی ماتریس A قرار دارد.

د) آیا $q = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ در nullspace ماتریس A قرار دارد ؟ توضیح دهید.

پاسخ:

الف) فرم کاهش یافته A را بدست میاوریم :

با توجه به اینکه در ستون های یک و دو pivot position داریم. ستون های یک و $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
دو ماتریس اولیه پایه های فضای ستونی را تشکیل میدهند. {(2-, 0, 2) = c1 = (1, 3, 2) , c2}

ب) $Ax = 0$ با حل این تساوی داریم :
فرم کاهش یافته:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

X1 + 1/3 x3 + 5/3 x4 = 0
X2 + 4/3 x3 -1/3 x3 = 0

$$X = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}x3 - \frac{5}{3}x4 \\ -\frac{4}{3}x3 + \frac{1}{3}x4 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x3 + \begin{bmatrix} -5/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{x4}$$

در نتیجه :

Null A = {(-1/3, -4/3, 1, 0), (-5/3, 1/3, 0, 1)}

ج)

$$[A \;\; p\,] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 8/3 & 4 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

معادله ی $Ax = p$ جواب دارد در نتیجه p در فضای ستونی ماتریس A قرار دارد.

د) خیر چون q ∈ R ^4 نیست.

3) فرض کنید A یک ماتریس 7 x 5 میباشد. اگر داشته باشیم range A∈ R^2 ، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) dim (nul(A)) را بدست آورید.
ب) rank (A^T) را بدست اورید.

پاسخ: range همان فضای ستونی ماتریس است در نتیجه rank(A) = 2
الف) rank theorem: dim(nul(A)) = n – rank(A) = 5 – 2 = 3
ب) ترانهاده جای ستون ها و ردیف هارا عوض میکند در نتیجه :
اگر $B = A^T$:

Rank(A^T) = rank (B) = dim (colB) = dim (row(A))

از طرفی طبق rank theorem rank: $\dim(\mathrm{col}(A)) = \dim(\mathrm{row}(A)) = \mathrm{rank}(A)$

در نتیجه $\mathrm{Rank}(A^T) = \dim(\mathrm{row}(A)) = \mathrm{rank}(A) = 2$

4) پایه B و بردار x را مطابق زیر در نظر بگیرید.
مختصات نقطه ای x نسبت به پایه B را بدست اورید.

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, \quad x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ :

$[X]_B = \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix}$ انگاه $X = c1b1 + c2b2 + c3b3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه $c1 = 1/2$ $\;c2 = 2\;$ $c3 = -1$