

## سوالات بخش 1.4 و 1.5

### بخش صحیح غلط

---

سوال : معادله  $Ax=b$  سازگار است اگر ماتریس افزوده  $[A \ b]$  در هر سطر یک  $\text{pivot}$  داشته باشد.  
پاسخ : غلط . در واقع طبق تئوری 4 فصل 1 کتاب درسی معادله  $Ax=b$  سازگار است اگر ماتریس  $A$  در هر سطر یک  $\text{pivot}$  داشته باشد . ( به  $\text{warning}$  زیر تئوری 4 فصل 1 دقت کنید )

سوال : یک معادله ی همگن همیشه سازگار است .

پاسخ : درست . زیرا معادله ی همگن حداقل یک جواب که همان جواب بدیهی ( $\text{trivial}$ )  $x=0$  می باشد را دارد .

سوال : معادله ی  $Ax=b$  همگن است اگر بردار صفر یکی از جواب های آن باشد .

پاسخ : درست .  $x=0$  بنابراین  $b=A(0)=0$  . پس می توان آن را به فرم  $Ax=0$  نوشت .

سوال : معادله ی  $Ax=b$  همگن است اگر بردار  $y$  ای وجود داشته باشد که  $Ay=0$  .

پاسخ : غلط . مثال نقض :  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  و  $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  . در این مثال بردار  $y$  ای وجود داشت که  $Ay=0$  اما معادله ی  $Ax=b$  همگن نمی باشد .

### بخش سوالات تشریحی 1.4

---

سوال :

فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $4 \times 4$  است و  $b$  یک بردار در فضای  $\mathbb{R}^4$  باشد به طوری که  $Ax=b$  فقط یک جواب منحصر به فرد دارد . ثابت کنید ستون های ماتریس  $A$  فضای  $\mathbb{R}^4$  را  $\text{span}$  می کنند .

پاسخ :

اگر  $Ax=b$  فقط یک جواب منحصر به فرد دارد پس می توان نتیجه گرفت که این دستگاه هیچ متغیر آزادی ندارد . بنابراین از آنجایی که تمام متغیر ها basic هستند می توان نتیجه گرفت که هر ستون از ماتریس  $A$  یک ستون pivot است و فرم اشلون کاهش یافته ی ماتریس  $A$  به صورت زیر می باشد :

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix}$$

اکنون واضح است که در هر سطر از ماتریس  $A$  یک درایه pivot وجود دارد بنابراین طبق تئوری 4 فصل 1 کتاب درسی می توان نتیجه گرفت که ستون های ماتریس  $A$  فضای  $\mathbb{R}^4$  را span می کنند .

سوال:

فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -8 \end{bmatrix}$  و  $b = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  می باشد . نشان دهید معادله  $Ax=b$  لزوماً برای همه ی  $b$  های ممکن جواب ندارد و مجموعه ی  $b$  هایی که معادله جواب دارد را توصیف کنید .

(امتیازی) : نمودار تقریبی مجموعه ی  $b$  های جواب دار را بکشید . ( می توانید از [geogebra.org/3d](http://geogebra.org/3d) نیز استفاده کنید )

پاسخ :

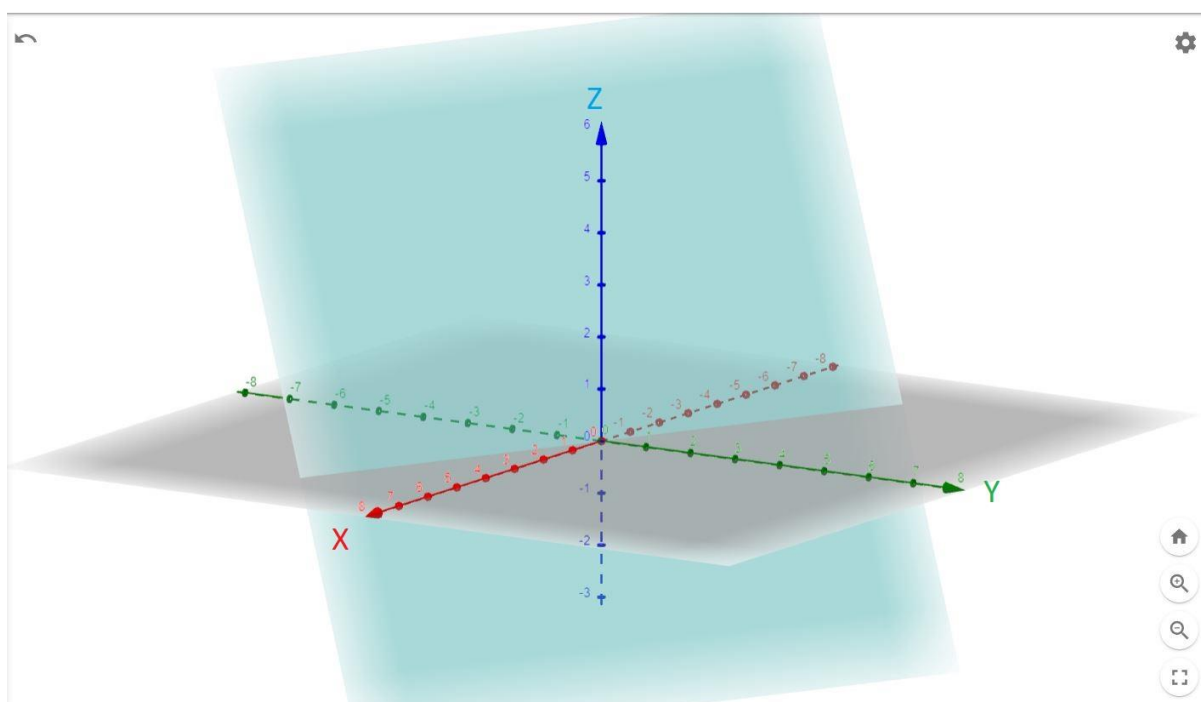
ابتدا ماتریس افزوده ی  $[A \ b]$  را به فرم اشلون کاهش یافته تبدیل می کنیم :

$$\begin{aligned} [A \ b]: \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & x \\ -3 & 2 & 6 & y \\ 5 & -1 & -8 & z \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & x \\ 0 & -7 & -6 & 3x+y \\ 0 & 14 & 12 & -5x+z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & x \\ 0 & -7 & -6 & 3x+y \\ 0 & 0 & 0 & x+2y+z \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -3 & -4 & x \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{6}{-7} & \frac{3x+y}{-7} \\ 0 & 0 & 0 & x+2y+z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

اکنون می دانیم که  $Ax=b$  سازگار است اگر و فقط اگر  $x+2y+z$  برابر با صفر باشد . زیرا اگر نباشد آنگاه معادله جواب ندارد زیرا ضرایب سطر پایینی صفر است و لزوماً باید سمت راست معادله نیز صفر می شد .

بنابراین مجموعه ی  $b$  های جواب دار می شود :  $x+2y+z=0$

$$x+2y+z=0$$



## بخش سوالات تشریحی 1.5

سوال :

عیناً سوال 5 تمرین اول سال پیش :

۵. معادله‌ی  $Ax = b$  را با معلومات داده شده حل کنید (ماتریس افزونه را به فرم نردبانی کاهش یافته تبدیل کنید) پاسخ بدست آمده را به فرم  $x = p + tv$  معرفی کنید که در آن  $t$  عددی حقیقی است. صحت پاسخ خود را با محاسبه‌ی  $Av$  و  $Ap$  بررسی کنید.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

با توجه به فرم نردبانی کاهش یافته ماتریس  $A$ ، به سوالات زیر پاسخ دهید:

- الف) آیا برداری مانند  $d$  در  $R^3$  وجود دارد به طوری که معادله‌ی  $Ax = d$  ناسازگار باشد؟  
 ب) آیا برداری مانند  $d$  در  $R^3$  وجود دارد به طوری که معادله‌ی  $Ax = d$  جوابی یکتا داشته باشد؟

پاسخ :

$$\begin{aligned}
 (A|\mathbf{b}) &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

که در آن یک عنصر غیر پیشتاز وجود دارد. اگر  $\mathbf{x} = (x, y, z, w)^T$  در آن صورت  $\mathbf{z} = t$ .

با خواندن ماتریس و با شروع از پایین ترین ردیف یک پاسخ به صورت زیر است:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - 2t \\ 4 + t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

برای چک کردن پاسخ کافی است که جواب را در ماتریس  $A$  ضرب نمایید. در آن صورت باید  $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$  و  $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$  باشد.

$$A\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ماتریس کاهش یافته ردیفی ماتریس  $A$  شامل ۴ ستون اول ماتریس کاهش یافته ردیفی ماتریس افزونه است.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

الف) خیر. هیچ بردار  $\mathbf{d}$  وجود ندارد که به ازای آن معادله سازگار نباشد (یا *inconsistent* باشد) چرا که در هریک از ردیف های ماتریس کاهش یافته  $A$  یک عنصر پیشتاز ۱ وجود دارد. پس معادله  $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$  سازگار است.

ب) خیر. هیچ بردار  $\mathbf{d}$  ای وجود ندارد که به ازای آن سیستم دارای پاسخ یکتا باشد. معادله  $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$  به ازای تمام  $\mathbf{d}$  ها دارای بی شمار جواب است. چرا که همواره یک متغیر آزاد وجود دارد و در ستون سوم عنصر پیشتاز وجود ندارد.

سوال :

فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  است و  $y$  یک بردار در فضای  $\mathbb{R}^3$  می باشد به طوری که معادله  $Ax=y$  هیچ جوابی ندارد . در اینصورت آیا برداری مانند بردار  $t$  وجود دارد که معادله  $Ax=t$  فقط یک جواب داشته باشد ؟ توضیح دهید .

پاسخ :

از آنجاییکه  $Ax=y$  هیچ جوابی ندارد می توانیم نتیجه بگیریم که ماتریس  $A$  در هر سطر خود یک pivot ندارد (تئوری 4 فصل 1 کتاب درسی) . پس یعنی حداکثر 2 تا pivot (ماتریس  $3$  در  $3$  است) دارد . بنابراین معادله  $Ax=t$  حداکثر دو متغیر basic و حداقل یک متغیر free (آزاد) دارد . پس معادله  $Ax=t$  یا هیچ جوابی ندارد و یا بی نهایت جواب دارد .