دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات

جبر خطی کاربردی

نیمسال اول ۹۸-۹۷

مدرس: دکتر ناظرفرد

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

تمرین شماره ۱

توجه!!! :

تمارین زیر مربوط به فصل اول (معادلات خطی در جبر خطی) بوده و انتظار می رود تمامی تمارین را با دقت خوانده و حل کنید.

پاسخ های تمرین را درقالب یک فایل فشرده به صورت الگوی زیر آپلود کنید.

9531000_Bastian_Schweinsteiger_HW1.zip

مهلت تحویل تمارین تا روز جمعه ۹۷/۸/۴ ساعت ۲۳:۵۵خواهد بود.

مسئله ۱:

ماتریس های افزوده سه دستگاه معادله خطی در زیر آمده است. با روش حذفی گاوس جردن آن ها را به شکل کاهش یافته سطری دربیاورید و در هر مرحله درایه و ستون محوری را مشخص کنید و در نهایت در مورد جواب دستگاه ها بحث کنید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

مسئله ۲:

مقدار λ و k را طوری بدست آورید که:

الف) دستگاه معادلات زیر جواب نداشته باشد.

$$\begin{cases} x + \lambda y = 5 \\ 2x + 4y = k \end{cases}$$

ب) دستگاه زیر بیش از یک جواب داشته باشد.

$$\begin{cases} \lambda x + 8y = 0 \\ 3x + 9y = 0 \end{cases}$$

مسئله ۳:

درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید و در صورت درست بودن آن را اثبات کرده و در صورت غلط بودن برای آن مثال نقضی بیاورید:

۱. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $ad - bc \neq 0$ باشد آنگاه $Ax = 0$ تنها جواب بدیهی دارد.

۲. اگر A یک مجموعه وابسته خطی باشد آنگاه هر بردار از آن به صورت ترکیب خطی از سایر بردارها قابل نوشتن است.

۳. بردارهای v_1،v_2، v_3 مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر بردارهای v_1 و $v_2 + v_1$ و $v_3 + v_2 + v_1$ از هم مستقل باشند.

۴. اگر یکی از سطرهای فرم پلکانی ماتریس افزوده ای [0 0 0 1 0] باشد ، سیستم خطی متناظر با آن ناسازگار خواهد بود.

۵. اگر معادله $Ax = b$ جواب یکتا داشته باشد آنگاه A ماتریسی مربعی است.

۶. ستون های هر ماتریس 4*5 مستقل خطی هستند .

۷. اگر بردار های x , y , z ,w در R^4 به گونه ای باشند که y ترکیب خطی از x و w و z نباشد آن گاه مجموعه {x,y,z,w} مستقل خطی است.

۸. تبدیلی که هر بردار به شکل (x , y , z) در فضای R^3 را به صفحه y = 0 تصویر می کند، خطی نیست.

مسئله ۴:

سه خط راست زیر را در صفحه xy در نظر بگیرید:

L_1: ax + by + c = 0

L_2: bx + cy + a = 0

L_3: cx + ay + b = 0

نشان دهید این سه خط در یک نقطه متقاطع اند اگر و تنها اگر a + b + c = 0.

مسئله ۵:

الف) ثابت کنید اگر مجموعه بردار های $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ مستقل خطی باشند و $\boldsymbol{v}_{k+1} \notin span\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ آن گاه مجموعه ی $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}\}$ یک مجموعه ی مستقل خطی است.

ب) فرض کنید $AD = I_m$ (ماتریس همانی m×m). نشان دهید به ازای هر b در R^n، معادله Ax = b دارای جواب است (راهنمایی: به معادله ADb = b فکر کنید). توضیح دهید چرا تعداد سطر های A نمی تواند بیشتر از ستون هایش باشد.

مسئله ۶:

در مورد هر یک از تبدیل های زیر خطی بودن یا نبودن را بررسی کنید. در صورت خطی بودن ماتریس استاندارد آن ها را بیابید.

الف)

$$T: R^2 \to R^3$$

$$T(x,y) = (3x - 2y, x + 3, 8y)$$

ب)

$$T: R^3 \to R^3$$

$$T\ (\ x\ ,y\ ,z\ )\ =\ (\ x - y + 2z, 2x + y, -x - y + 2z\ )$$

ج)

$$T:\ R^2 \to R^2$$

$$T\ (\ x, y\ )\ =\ (\ |x|, y\ )$$

شبیه سازی:

۱. برنامه ای به نام Gauss_elim بنویسید که خصوصیات زیر را داشته باشد:

الف) ماتریس A_{nxn} و بردار b_{nx1} را از ورودی بگیرد.

ب) برای دستگاه معادلات Ax = b ماتریس افزوده [A|b] را نشان دهد.

ج) دستگاه معادلات Ax = b را با استفاده از الگوریتم حذفی گاوسی حل نماید (برنامه باید بتواند در صورت نیاز عمل محورگیری را انجام دهد).

د) ماتریس های مقدماتی لازم برای هر یک از مراحل الگوریتم حذفی گاوسی نشان دهد.

ه) در نهایت جواب دستگاه معادلات Ax = b یعنی بردار x، و فرم بالامثلثی شده ماتریس [A|b] را نمایش دهد.

۲. برنامه خود را برای حل دو دستگاه زیر امتحان نمایید و نتیجه آن ها را ارائه دهید:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = -3 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 19 \\ -x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 = -2 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = -11 \\ x_1 + 2x_2 + -8x_3 + 6x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ -2x_2 + \frac{2}{3}x_3 - 2x_4 = -\frac{10}{3} \\ -2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -1 \\ -2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = -1 \\ -2x_5 + 3x_6 = 1 \end{cases}$$