بخش صحیح غلط :

سوال : اگر $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه بخش های A و B ، می توانند ضرب بلوکی شوند .

جواب : غلط است .

(راه اول) : آوردن مثال نقض

(راه دوم) : زیرا برای اینکه منطبق باشند باید تقسیم بندی ستونی A و تقسیم بندی سطری B باید هماهنگ باشد . (پاراگراف قبل از EXAMPLE 3 صفحه 120 کتاب درسی)

سوال : در تجزیه ی LU یک ماتریس مانند A برای به دست آوردن ماتریس U کافیست ماتریس A را به فرم نردبانی کاهش یافته تبدیل کنیم .

جواب : غلط است . باید ماتریس A را اگر ممکن بود با استفاده از عملیات های row replacement به فرم اشلون تبدیل کنیم .

بخش تشریحی :

سوال :

فرض کنید ماتریس A یک ماتریس وارون پذیر می باشد و همچنین ماتریس های X و Y ، ماتریس هایی مربعی می باشند .

$$A = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

الف) ثابت کنید ماتریس های X و Y وارون پذیرند و سپس وارون ماتریس A را برحسب وارون های X و Y نشان دهید . (راهنمایی : AA^{-1} را که برابر I است می توان به صورت $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ نوشت.)

ب) وارون ماتریس B را با استفاده از رابطه ی وارون به دست آمده در روش الف) به دست بیاورید .

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

پاسخ :

جواب الف) :

ابتدا سعی می کنیم درایه های وارون ماتریس A را به دست آوریم :

$$AA^{-1} = I \rightarrow \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & C \\ Z & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} XB + 0Z & XC + 0T \\ 0B + YZ & 0C + YT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} XB & XC \\ YZ & YT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \rightarrow XB = I\,, YT = I\,, XC = 0\,, YZ = 0$$

بنابراین چون XB=I و طبق فرض X مربعی است می توان نتیجه گرفت X وارون پذیر است و $B = X^{-1}$.

به همین صورت چون YT=I و طبق فرضY مربعی است می توان نتیجه گرفتY وارون پذیر است و$T = Y^{-1}$

اکنون C و Z را به دست می آوریم :

$$XC = 0 \xrightarrow{\times X^{-1}} C = X^{-1}0 = 0\,, YZ = 0 \xrightarrow{\times Y^{-1}} Z = Y^{-1}0 = 0$$

بنابراین وارون ماتریس A می شود :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & Y^{-1} \end{bmatrix}$$

جواب ب) :

ماتریس را به شکل زیر بخش بندی می کنیم :

$$B = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \end{array}\right] \rightarrow X = [2]\,, Y = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

اکنون طبق الف می دانیم که معکوس B می شود :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & Y^{-1} \end{bmatrix}$$

پس کافیست معکوس X و Y را به دست آوریم و جایگذاری کنیم :

$$X^{-1} = [0.5]\,, Y^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2.5 & 3.5 \end{bmatrix}$$

بنابراین وارون ماتریس B می شود :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -2.5 & 3.5 \end{bmatrix}$$

سوال :

ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -3 & -6 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ و $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید .

الف) تجزیه ی LU ماتریس A را به دست آورید .

ب) با استفاده از تجزیه ی LU به دست آمده در بخش الف ، دستگاه Ax=b را حل کنید .

پاسخ :

جواب الف) :

ابتدا U را به دست می آوریم :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -3 & -6 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -6 & -12 & -4 \\ 0 & 12 & 22 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

اکنون L را به دست می آوریم :

$$\underset{\div 1}{\begin{bmatrix}1\\-3\\3\\-5\end{bmatrix}}\ \underset{\div 3}{\begin{bmatrix}3\\-6\\12\end{bmatrix}}\ \underset{\div -2}{\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}}\ \underset{\div 1}{\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}}$$

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\3&-2&1&0\\-5&4&-1&1\end{bmatrix}$$

جواب ب) :

می دانیم که LUx=b و Ux=y . ابتدا Ly=b را حل می کنیم :

$$[L\ \ b]$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\-3&1&0&0&-2\\3&-2&1&0&-1\\-5&4&-1&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&-2&1&0&-4\\0&4&-1&1&7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&-2\\0&0&-1&1&3\end{bmatrix}$$
$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&-2\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\rightarrow y=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

اکنون Ux=y را حل می کنیم :

$$[U\ \ y]$$
$$=\begin{bmatrix}1&3&4&0&1\\0&3&5&2&1\\0&0&-2&0&-2\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&4&0&1\\0&3&5&0&-1\\0&0&-2&0&-2\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&4&0&1\\0&3&5&0&-1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$
$$\sim\begin{bmatrix}1&3&0&0&-3\\0&3&0&0&-6\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&0&0&-3\\0&1&0&0&-2\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&0&0&-2\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

بنابراین x می شود : $x = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$