به نام یزدان پاک

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبر خطی کاربردی

دکتر امیرمزلقانی

نیم‌سال دوم ۰۱ - ۰۰

تمرینات سری دوم – فصل دوم و سوم

پاسخ تمرین‌ها را به صورت خوانا و تمیز در قالب $HW?\_Name\_StudentNumber$ **(به عنوان مثال،** $HW2\_BardiaArdakanian\_9831072$ **) نوشته و تا قبل از ددلاین در سامانه کورسز دانشگاه آپلود نمایید. در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل** $ala.spring2022@gmail.com$ **در ارتباط باشید.**

بخش تئوری

---

۱. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. برای گزاره‌های نادرست مثال نقض و برای گزاره‌های درست اثبات ارائه دهید.

آ) اگر A و B ماتریس‌های $n \times n$ و $AB - BA = A$، آنگاه A معکوس‌پذیر نیست.

ب) هر ماتریس مربعی را می‌توان به صورت جمع دو ماتریس معکوس‌پذیر نوشت.

پ) اگر $A^2 = A$ باشد و $A \neq 0$ آنگاه A معکوس‌پذیر است.

ت) می‌توان دو ماتریس A و B ای یافت که $AB - BA = I$

ث) اگر ماتریس Bیک ماتریس ۳×۳ باشد، آنگاه $A = B^4 + 3B^2 + 7B + 3I_3$ معکوس‌پذیر است.

---

۲. اگر A یک ماتریس $n \times n$باشد، گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

آ) $adj(A^t) = (adj\ A)^t$

ب) $adj\ A^{-1} = (adj\ A)^{-1}$

پ) اگر A ماتریس قطری باشد، آنگاه $adj\ A$ نیز قطری است.

ت) نشان دهید اگر $I - AB$ معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $I - BA$ نیز معکوس‌پذیر است.

ث) نشان دهید: $|adj(adj\ A)| = |A|^{(n-1)^2}$

۳. فرض کنید A و B و C ماتریس‌هایی $n \times n$ باشند. به ازای چه n هایی رابطه‌ی زیر برقرار است؟

$$(AB - BA)^2 C = C(AB - BA)^2$$

---

۴. ماتریس متقارن A را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

آ) تجزیه LU را برای این ماتریس حساب کنید.

ب) چهار شرط برای اعداد a, b, c, d بیابید تا ماتریس A دارای **4** درایه محوری باشد.

---

۵. با استفاده از ماتریس‌های بلوکی مقدار A^2 را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۶. دترمینان ماتریس های زیر را بیابید.

الف)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ب)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

ج)

$$\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{a-1} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

د)

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

ه)

$$\begin{bmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{bmatrix}$$

ی)

$$\begin{bmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{bmatrix}$$

---

۷. وارون ماتریس‌های زیر را در صورت وجود، با استفاده از هر دو روش (استفاده از ماتریس های مقدماتی و ماتریس الحاقی یا $adjacent$) بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 14 & -6 \\ -33 & 25 & -7 \\ 10 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -7 & -9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

۸.

آ) اگر ماتریس A معکوس پذیر باشد نشان دهید $det\ (A^{-1})\ = \frac{1}{det\ (A)}$.

ب) با توجه به ماتریس های زیر، مقدار عبارت $det\ ((A^4)^T B^{-1} A^{-4} (B^3)^T)$ را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

۹. با استفاده از روش کرامرز، مقادیر زیر را به دست آورید.

آ) x_3

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = -1 \\ -2x_2 - 3x_3 + 4x_5 = 6 \end{cases}$$

ب) جواب‌های $Ax = b$ در صورتی که:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b_1 . b_2 . b_3 \in R$$

با آرزوی موفقیت و شادکامی در سال پیش رو

گروه تدریسیاری درس جبر خطی