دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

کاربرد های جبر خطی

نیم‌سال دوم ۹۶ـ۹۷

مدرس: دکتر امیرمزلقانی

تمرین فصل۳و۴

توجه:

- این تمرین از مباحث مربوط به فصل ۳ و ۴ طراحی شده است که شامل ۸ سوال اجباری و ۲ سوال امتیازی است که نمره سوال های امتیازی فقط به نمرات تمرین شما کمک می کند.
- اگه سوالی داشتین از طریق

$aut.la2018@gmail.com$

حتما بپرسید.

- پاسخ های تمرین را در قالب یک فایل به صورت الگوی زیر آپلود کنید.

9531000_Jonatan_Vannieuwenhoven_HW3.pdf

- مهلت تحویل جمعه ۲۱ اردیبهشت ۱۳۹۷ ساعت ۲۳:۵۴:۵۹

مسئله‌ی ۱ . درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید و دلیل آن را بیان کنید.

(از بین ۲۱ مورد ۱۵ مورد را به اختیار انتخاب کرده و مشخص کنید.)

آ) دترمینان $S^{-۱}AS$ برابر $det(A)$ می باشد.

ب) اگر A یک ماتریس مربعی ۴×۴ باشد، دترمینان ۴A برابر $۴det(A)$

ج) ماتریس های AB و BA دترمینان برابری دارند

د) دترمینان AB−BA برابر صفر است

ه) اگر A معکوس پذیر نباشد، AB نیز معکوس پذیر نیست

و) اگر $AA^T = I$ باشد آنگاه $det(A) = \pm ۱$

ز) دترمینان هر ماتریس پادمتقارن $(A^T = -A)$ برابر صفر است

ح) اگر A ماتریسی $n \times n$ با درایه هایی از مجموعه اعداد صحیح باشد به گونه ای که $det(A) = ۱$ آنگاه درایه های وارون ماتریس A نیز عضو مجموعه اعداد صحیح می باشند.

ط) برای هر ماتریس A که ۲×۲ باشد ، طبق محاسبات زیر داریم که دترمینان وارون آن برابر ۱ است:

$$detA^{-۱} = det\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{ad-bc}{ad-bc} = ۱$$

ی) برای هر ماتریس P که $P = A(A^TA)^{-۱}A^T$ داریم:

$$|P| = |A|\frac{۱}{|A^T||A|}|A^T| = ۱$$

ک) اگر دترمینان A برابر صفر باشد، حداقل یکی از cofactor ها باید صفر باشد

ل) دترمینان ماتریسی که همه درایه های آن عضو مجموعه $\{۱, ۰, -۱\}$ باشد، عضو همین مجموعه است.

م) $Adj\,A^T = (Adj\,A)^T$

ن) اگر A وارون پذیر باشد، $Adj\ A$ نیز وارون پذیر است و $Adj\,A^{-۱} = (Adj\,A)^{-۱}$

س) اگر A قطری باشد $Adj\ A$ نیز قطری است

ع) اگر A یک ماتریس مربعی ۵ در ۵ باشد،

$$Adj(۲A) = ۳۲Adj(A)$$

ف) اگر $A = (a, r_۲, r_۳, r_۴)$ و $B = (b, r_۲, r_۳, r_۴)$ دو ماتریس ۴×۴ باشند، که $a, b, r_۲, r_۳, r_۴$ بردار های ستونی در $\mathbb{R}^۴$ باشند، اگر دترمینان A برابر ۴ و دترمینان B برابر ۱ باشد، دترمینان A+B برابر ۴۰ و اگر ماتریس C را برابر $(r_۴, r_۳, r_۲, a+b)$ تعریف کنیم، دترمینان آن برابر ۵ است.

ص) با توجه به اینکه دترمینان همه ماتریس های پاسکال برابر ۱ است. اگر یک واحد از درایه n و n ام کم کنیم، دترمینان آن صفر می شود. (برای مثال ماتریس پاسکال ۴×۴ به صورت $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۱۰ & ۲۰ \end{bmatrix}$ می باشد.)

ق) ماتریس L یک ماتریس پایین مثلثی ۳ در ۳ است، معکوس هر ماتریس پایین مثلثی یک ماتریس پایین مثلثی است، برای همین cofactor های C_{21}, C_{31}, C_{32} برای ماتریس L برابر صفر هستند.

ر) ماتریس S یک ماتریس متقارن ۳ در ۳ است. معکوس هر ماتریس متقارن یک ماتریس متقارت است برای همین رابطه $C_{12} = C_{21} C_{13} = C_{31}, C_{23} = C_{32}$ بین cofactor های ماتریس S برقرار است.

ش) مساحت مثلث ABC که در آن $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ ، $C(x_3, y_3)$ را می توان از طریق رابطه

$$Area(ABC) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

به دست آورد.

مسئله‌ی ۲. در هر مورد مشخص کنید آیا زیر مجموعه ی داده شده یک زیر فضا از فضای برداری مشخص شده می باشد یا خیر.

(آ) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$ در فضای برداری $\mathbb{R}^2$

(ب) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a + b + 2c = 0\}$ در فضای برداری $\mathbb{R}^3$.

(ج) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) | A^2 = A\}$ در $M_n(\mathbb{R})$. (منظور از $M_n(\mathbb{R})$ مجموعه تمام ماتریس های $n \times n$ با درایه هایی از مجموعه اعداد حقیقی است.)

(د) $\{p(x) | 2p(0) = p(1), p(x) \in \mathbb{P}[x]\}$ در فضای برداری $\mathbb{P}[x]$ (تمامی چند جمله های حداکثر از درجه n با ضرایب حقیقی را با نماد $\mathbb{P}_n[x]$ نشان می دهیم و همچنین مجموعه تمام چند جمله ها با ضرایب حقیقی را با $\mathbb{P}[x]$ نشان می دهیم)

(ه) $\{p(x) | p(x) = a + x^2, a \in \mathbb{R}\}$ در فضای برداری $\mathbb{P}_3[x]$.

مسئله‌ی ۳. اگر $\mathbb{P}[x], \mathbb{P}_n[x]$ طبق تعریف بالا فضا های برداری با ضرایب حقیقی باشند آنگاه :

(آ) نشان دهید اگر $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$ پایه ای برای $\mathbb{P}_n[x]$ باشد آنگاه:

$$\{1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}\}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

نیز پایه ای برای $\mathbb{P}_n[x]$ است.

(ب) مختصات

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \in \mathbb{P}_n[x]$$

را نسبت به پایه

$$\{1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}\}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

بیابید.

(ج) فرض کنید $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ و متمایز باشند.برای هر $i = 1, 2, \cdots, n$

$$f_i(x) = (x - a_1) \dots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \dots (x - a_n)$$

را در نظر بگیرید،نشان دهید $\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\}$ نیز پایه ای برای $\mathbb{P}_n[x]$ است.

مسئله‌ی ۴. فرض کنید $W_۱, W_۲$ زیر فضا های فضای برداری V باشند، تعریف می کنیم :

$$W_۱ + W_۲ = \{w_۱ + w_۲ | w_۱ \in W_۱, w_۲ \in W_۲\}$$

.

(آ) نشان دهید :

$$W_۱ + W_۲ + \cdots + W_n = span(\bigcup_{i=۱}^{n} W_i)$$

(ب) نشان دهید $W_۱ \cap W_۲, W_۱ + W_۲$ زیر فضای V هستند و همچنین نشان دهید:

$$W_۱ \cap W_۲ \subseteq W_۱ \cup W_۲ \subseteq W_۱ + W_۲$$

.

(ج) نشان دهید :

$$dim(W_۱ + W_۲) = dim(W_۱) + dim(W_۲) - dim(W_۱ \cap W_۲)$$

.

(د) نتیجه گیری قسمت ۲ را با استفاده از دو خط که از مبدا مختصات xy می گذرند توجیه کنید.

(ه) درستی یا نادرستی تساوی زیر را بررسی کنید در صورت درست بودن اثبات و در صورت نادرست بودن مثال نقض بزنید:

$$W_۳ \cap (W_۱ + W_۲) = (W_۳ \cap W_۱) + (W_۳ \cap W_۲)$$

.

(و) اگر $W_۱ \cap W_۲ = \{۰\}$ باشد آنگاه به $W_۱ + W_۲$ جمع مستقیم نیز می گویند و آن را با $W_۱ \bigoplus W_۲$ نشان می دهند،ثابت کنید اگر $V_۱$ زیر فضایی از فضای برداری V باشد و اگر زیر فضای برداری یکتای $V_۲$ موجود باشد که $V = V_۱ \bigoplus V_۲$ آنگاه $V_۱ = V$.

مسئله‌ی ۵. فرض کنید $T : V \longrightarrow W$ نگاشت خطی باشد، $Nul \ \ T = \{۰\}$ اگر و فقط اگر T هر زیر مجموعه مستقل خطی را به زیر مجموعه مستقل خطی نگاشت کند. علاوه بر ویژگی های بالا اگر A ماتریس استاندارد تبدیل T باشد که به ازای هر b که b مختصات برداری در W است وجود داشته باشد x ای که مختصات برداری در V باشد که $Ax = b$ باشد آنگاه T هر پایه V را به پایه ای در W می نگارد.

مسئله‌ی ۶. فرض کنید $T : V \longrightarrow V$ تبدیل خطی رو فضای متناهی البعد V باشد و $T^۲ = ۰$. ثابت کنید $۲rank(A) \leq dim(V)$ (A ماتریس استاندارد تبدیل T است.)

مسئله‌ی ۷. اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد که $rankA = r > ۰$. U شکل سطری پلکانی ماتریس A است.نشان دهید یک ماتریس وارون پیذیر مانند E وجود دارد که $A = EU$. با استفاده از این موضوع A را به صورت حاصل جمع r ماتریس با رنک ۱ بنویسید.

مسئله‌ی ۸. در هر یک از قسمت های زیر ابتدا مختصات بردار داده شده (v) را در هریک از پایه ها بیابید سپس ماتریس انتقال از یک پایه (B) به پایه (C) دیگر را محاسبه کنید.

(آ)

$$V = \mathbb{P}_3[x] \qquad v = p(x) = 8 + x + 6x^2 + 9x^3$$
$$B = \{2 + 3x + 4x^2 - x^3, 3x + 5x^2 + 2x^3, -5x^2 - 5x^3, 4 + 4x + 4x^2\}$$
$$C = \{1 - x^3, 1 + x, x + x^2, x^2 + x^3\}$$

(ب)

$$V = M_2(\mathbb{R}) \qquad v = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$B = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}$$
$$C = \{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}$$

(ج)

$$V = \mathbb{R}^3 \qquad v = (1, 7, 7)$$
$$B = \{(-7, 4, 4), (4, 2, -1), (-7, 5, 0)\}$$
$$C = (1, 1, 0), (0, 1, 1), (3, -1, -1)$$

مسئله‌ی ۹. سوال امتیازی

بازی دو نفره ی زیر را در نظر بگیرید:

(آ) بازی با یک ماتریس ۱۰ در ۱۰ خالی بازی شروع می شود.

(ب) بازیکن اول و دوم به ترتیب اعداد حقیقی دلخواهی در درایه های این ماتریس قرار می دهند

(ج) بعد از پر شدن ماتریس، بازیکن اول در صورتی برنده است که دترمینان ماتریس نهایی مخالف صفر باشد و بازیکن دوم در صورتی برنده است که دترمینان صفر شود.

کدام یک از بازیکنان یک استراتژی ای برای پیروزی دارد؟ در واقع اگر شما در این بازی حق انتخاب اول یا دوم بودن را داشتید کدام را انتخاب می کردید و استراتژی شما برای پیروزی در این نوبت چیست؟

مسئله‌ی ۱۰. سوال امتیازی برای حل این سوال باید از لم زُرن استفاده کنید که لم زُرن یک لم پر کاربرد در زمینه

نظریه مجموعه ها است.
نشان دهید هر فضای برداری غیر صفر یک پایه دارد؟