

تمرینات مابین ماریس ها و جبر خطی - سرگشته ۹۴، ۲، ۲۷ به نام او

۱- فرض کنید $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ نگاشت خطی با ضابطه زیر باشد:

$$T(x, y) = (x + y, 2x - 3y, -x)$$

پایه $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ از \mathbb{R}^2 و پایه $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ از \mathbb{R}^3

ارزینظ مبریر $M(T, B, C)$ را بیاید. (مسئله ۱)

۲- $T, S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ نگاشت های خطی هستند، مابین آنها نسبت به پایه های هر

$B = \{(1, 1), (0, 1)\}$ و $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ به صورت زیر است:

$$M(T, B) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M(S, C, B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

الف) مابین $T+S$ را نسبت به B بیاید:

ب) مابین $T \circ S$ را نسبت به C بیاید:

ج) اگر $\alpha = (2, 1)$ ، مختصات $T(\alpha)$ نسبت به B را بیاید. (مسئله ۲)

۳- فرض کنید $T, S: V \rightarrow V$ نگاشت های خطی باشند و $\dim V < \infty$. نشان دهید

اگر $T \circ S = 2 \text{Id}_V$ ، آنگاه $S \circ T = 2 \text{Id}_V$. (مسئله ۱)

۴- فرض کنید V یک فضای برداری از بعد n و $T: V \rightarrow V$ یک نگاشت خطی

باشد که برای $x \in V$ برانیم $T^{n-1}(x) \neq 0$ ولی $T^n(x) = 0$.

الف) نشان دهید که $B = \{x, T, T^2, \dots, T^{n-1}\}$ زیر مجموعه مستقل خطی از V و در نتیجه
 یک پایه برای V است. (سلاج ۲)

ب) پایه B در مستقیم (الف) را در نظر بگیرید و $M(T, B)$ را بنویسید.

۵- فرض کنید V^* دوگان فضای برداری V باشد و $C \subseteq C' \subseteq V$ ،
 $D \subseteq D' \subseteq V$.

الف) نشان دهید $C^\perp = \langle C \rangle^\perp$ و $D^\perp = \langle D \rangle^\perp$
 ب) $C'^\perp \subseteq C^\perp$ و $D'^\perp \subseteq D^\perp$ (سلاج ۲)

۶- ثابت کنید برای هر ماتریس $A \in M_n(\mathbb{R})$ ، ماتریس $B \in M_n(\mathbb{R})$ وجود دارد که
 $A = B^t - \lambda B$ (راهنمایی: با کمک نگاشت خطی $T: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ می‌توان حاصل کرد)
 $B \mapsto B^t - \lambda B$
 (سلاج ۲)

۷- فرض کنید P_k فضای بردار چندجمله‌ای‌ها از درجه حداکثر k روی \mathbb{R} باشد.
 اگر $n \geq 1$ یک عدد صحیح باشد، نشان دهید برای هر $f \in P_{n-1}$ ، چندجمله‌ای
 $g \in P_n$ وجود دارد که $f(x) = g(x+1) - g(x)$. (سلاج ۳)