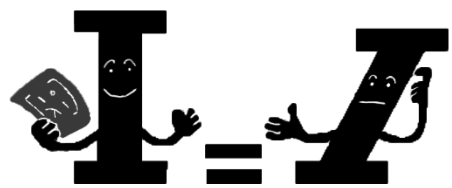
به نام خدا



پاسخ تمرین اول

جبر خطی کاربردی – پاییز 1400

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

1- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) هر ماتریس، تنها دارای یک فرم نردبانی منحصر به فرد می باشد.

- خیر، هر ماتریس دارای یک فرم نردبانی کاهش یافته منحصر به فرد می باشد اما بی شمار ماتریس نردبانی برای یک ماتریس وجود دارد. به شهود بهتر، زمانی است که شما یک ماتریس را به فرم نردبانی تبدیل میکنید. در صورتی که این ماتریس به فرم نردبانی را به ازای هر ردیف تحت عمل ردیفی $row\ scale$ قرار دهیم، ماتریس حاصل هم ماتریسی متفاوت و به فرم نردبانی خواهد بود.

ب) دستگاه معادلات متناظر با ماتریس افزوده $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ناسازگار است.

- خیر، از آنجایی که این ماتریس دارای ستون محوری نیست (هیچ یک از ستون های اول تا سوم دارای موقعیت محوری نمی باشند، بنابراین تمامی این متغیر ها آزاد محسوب می شوند و همچنین در هیچ یک از ردیف های این ماتریس افزوده، تناقض رخ نداده است پس به ازای هر مقداری برای متغیر های x_1, x_2, x_3 این دستگاه معادلات دارای جواب خواهد بود. بنابراین این دستگاه معادلات خطی سازگار دارای بی نهایت جواب خواهد بود.

ج) معادله ی $Ax = b$ سازگار است اگر ماتریس افزوده $[A \ \ b]$ در هر سطر یک درایه $pivot$ داشته باشد.

- غلط. در واقع طبق تئوری 4 فصل 1 کتاب درسی معادله $Ax = b$ سازگار است اگر ماتریس A در هر سطر یک درایه $pivot$ داشته باشد. (به warning زیر تئوری 4 فصل 1 دقت کنید)

چ) هر مجموعه شامل وکتور 0، وابسته خطی است.

- درست، تئوری 9 کتاب درسی.

د) یک معادله ی همگن همیشه سازگار است.

- درست. زیرا معادله ی همگن حداقل یک جواب که همان جواب بدیهی ($trivial$) $x = 0$ می باشد را دارد.

ذ) اگر مجموعه $\{V_1, V_2, V_3\}$ وابسته خطی باشد، آنگاه تبدیل یافته آن به فرم $\{T(V_1), T(V_2), T(V_3)\}$ نیز وابسته خطی است.

- درست، زیرا:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0 \to T(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) = T(0) = 0$$
$$\to c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + c_3T(v_3) = 0\,.$$

بنابراین این مجموعه نیز وابسته خطی است.

ه) معادله ی $Ax = b$ همگن است اگر بردار y ای وجود داشته باشد که $Ay = 0$.

- غلط. مثال نقض: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. در این مثال بردار y ای وجود داشت که $Ay = 0$ اما معادله ی $Ax = b$ همگن نمی باشد.

و) معادله ی $Ax = b$ همگن است اگر بردار صفر یکی از جواب های آن باشد.

- درست. $x = 0$ بنابراین $b = A(0) = 0$. پس می توان آن را به فرم $Ax = 0$ نوشت.

2- مقادیر متغیر های a,b,c را به گونه ای مشخص کنید که دستگاه معادلات خطی مربوط به این ماتریس افزوده($Augmented\ Matrix$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & a \\ 3 & 10 & -9 & b \\ 2 & 0 & c & 2 \end{bmatrix}$$

الف) ناسازگار باشد.

ب) سازگار و دارای یک جواب منحصر به فرد باشد.

ج) سازگار و دارای بی نهایت جواب باشد.

پاسخ:

برای مشخص کردن تعداد جواب های یک دستگاه معادلات خطی، همانطور که در اسلاید ها توضیح داده شده است، باید حداقل ماتریس افزوده مربوط به این دستگاه را به فرم نردبانی ($RREF$) تبدیل کرد و در این فرم به بررسی آخرین ردیف از این ماتریس بپردازیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & a \\ 3 & 10 & -9 & b \\ 2 & 0 & c & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & a \\ 0 & 1 & 6 & b-3a \\ 0 & -6 & 10+c & 2-2a \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & a \\ 0 & 1 & 6 & b-3a \\ 0 & 0 & 46+c & 2-20a+6b \end{bmatrix}$$

حال به بررسی حالات مختلف می پردازیم.

الف) برای این که این دستگاه معادلات ناسازگار بوده و جوابی نداشته باشد، باید که در ردیف آخر فرم نردبانی ماتریس افزوده، یک تناقض رخ دهد. بنابراین فرم کلی ردیف آخر به شکل $[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad v]$ که $b \neq 0$ می باشد. بنابراین به ازای هر مقداری از a,b,c که این حالت را برآورده کند، دستگاه معادلات ناسازگار خواهد بود. به طور کلی:

$$c=-46, \ \ 2-20a+6b \neq 0$$

یک نمونه : $a=b=0, \quad c=-46$

ب) برای اینکه دستگاه معادلات سازگار با یک جواب منحصر به فرد باشد، باید که هیچ متغیر آزادی وجود نداشته باشد. تنها زمانی در این دستگاه معادلات خطی متغیر آزاد نخواهیم داشت که ستون های اول تا سوم ماتریس افزوده، دارای موقعیت محوری(*Pivot Position*) باشند. همانطور که در فرم نردبانی ماتریس افزوده این دستگاه مشخص است، دو ستون اول، دارای موقعیت محوری بوده بنابراین تنها در صورتی این دستگاه سازگار با یک جواب منحصر به فرد خواهد بود که ستون سوم نیز دارای موقعیت محوری باشد. این امر، تنها زمانی اتفاق می افتد که $46 + c \neq 0$ باشد. بنابراین به ازای هر $c \neq -46$ این دستگاه سازگار با یک جواب منحصر به فرد خواهد بود و مقادیر a, b تاثیری در این حالت ندارند و می توانند هر مقدار دلخواهی را انتخاب کرد.

یک نمونه: $a = b = 0, \quad c = -45$

ج) برای اینکه دستگاه سازگار با بی شمار جواب باشد، لازم است که حداقل یک متغیر آزاد در این دستگاه معادلات وجود داشته باشد. همانطور که در قسمت «ب» گفته شد و با توجه به فرم نردبانی ماتریس افزوده این دستگاه معادلات خطی، دو ستون اول این ماتریس دارای موقعیت محوری هستند، بنابراین یک ستون محوری محسوب شده و به عنوان یک متغیر پایه در نظر گرفته می شوند. بنابراین تنها متغیر سوم می تواند یک متغیر آزاد باشد که برای این امر لازم است که ستون سوم از ماتریس افزوده، دارای موقعیت محوری نباشد.($46 + c = 0 \rightarrow c = -46$) از طرف دیگر برای رخ دادن بی نهایت جواب لازم است که به فرم $[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0]$ در آخرین ردیف از فرم نردبانی ماتریس افزوده دستگاه معادلات برسیم. بنابراین $2 - 20a + 6b = 0$ هم باید برقرار باشد.

یک نمونه: $a = 1, \;\; b = 3, \;\; c = -46$

3- ماتریس افزوده دستگاه معادلات خطی زیر را بنویسید. در ادامه آن را به فرم نردبانی کاهش یافته تبدیل کرده و سپس فرم پارامتری مجموعه جواب مربوط به این ماتریس افزوده را بنویسید.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 5x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

پاسخ:

در ابتدا ماتریس افزوده این دستگاه معادلات خطی را تشکیل می دهیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 9 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

حال شروع به اعمال عملیات های ردیفی برای تبدیل ماتریس افزوده به فرم نردبانی و سپس به فرم نردبانی کاهش یافته می کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 9 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -5 & 4 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -8 & -5 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -8 & -5 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{22}{3} & \frac{22}{3} \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{22}{9} & \frac{22}{9} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{9} & -\frac{16}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{22}{9} & \frac{22}{9} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{37}{9} & \frac{82}{9} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{7}{9} & -\frac{16}{9} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{22}{9} & \frac{22}{9} \end{bmatrix}$$

حال که فرم نردبانی کاهش یافته این ماتریس را محاسبه کردیم، تنها نیاز است که فرم پارامتری مجموعه جواب را بنویسیم.

$$\begin{cases} x_1 - \frac{37}{9}x_4 = \frac{82}{9} \\ x_2 + \frac{7}{9}x_4 = -\frac{16}{9} \\ x_3 - \frac{22}{9}x_4 = \frac{22}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{37}{9}x_4 + \frac{82}{9} \\ x_2 = -\frac{7}{9}x_4 - \frac{16}{9} \\ x_3 = \frac{22}{9}x_4 + \frac{22}{9} \\ x_4 \ is\ free \end{cases}$$

4- فرض کنید A یک ماتریس 4×4 است و b یک بردار در فضای $\mathbb{R}^4$ باشد به طوری که $Ax = b$ فقط یک جواب منحصر به فرد دارد. ثابت کنید ستون های ماتریس A فضای $\mathbb{R}^4$ را $span$ می کنند.

پاسخ:

اگر $Ax = b$ فقط یک جواب منحصر به فرد دارد پس می توان نتیجه گرفت که این دستگاه هیچ متغیر آزادی ندارد . بنابراین از آنجایی که تمام متغیر ها $basic$ هستند می توان نتیجه گرفت که هر ستون از ماتریس A یک ستون $pivot$ است و فرم اشلون کاهش یافته ی ماتریس A به صورت زیر می باشد :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون واضح است که در هر سطر از ماتریس A یک درایه $pivot$ وجود دارد بنابراین طبق تئوری 4 فصل 1 کتاب درسی می توان نتیجه گرفت که ستون های ماتریس A فضای $\mathbb{R}^4$ را $span$ می کنند.

5- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -8 \end{bmatrix}$ و $b = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ می باشد. نشان دهید معادله $Ax = b$ لزوماً برای همه ی b های ممکن جواب ندارد و مجموعه ی b هایی که معادله جواب دارد را توصیف کنید.

(امتیازی): نمودار تقریبی مجموعه ی b های جواب دار را بکشید. (می توانید از این سایت نیز استفاده کنید)

پاسخ:

ابتدا ماتریس افزوده‌ی [A b] را به فرم اشلون کاهش یافته تبدیل می‌کنیم:

$$[A \quad b]: \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & x \\ -3 & 2 & 6 & y \\ 5 & -1 & -8 & z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & x \\ 0 & -7 & -6 & 3x+y \\ 0 & 14 & 12 & -5x+z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & x \\ 0 & -7 & -6 & 3x+y \\ 0 & 0 & 0 & x+2y+z \end{bmatrix}$$

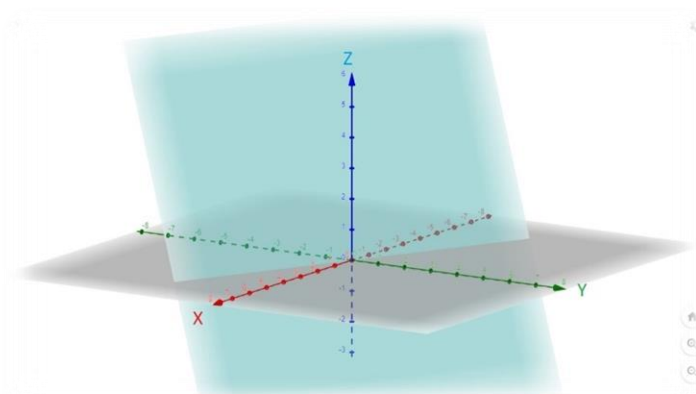
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & x \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{3x+y}{-7} \\ 0 & 0 & 0 & x+2y+z \end{bmatrix}$$

اکنون می دانیم که $Ax = b$سازگار است اگر و فقط اگر $x + 2y + z$ برابر با صفر باشد. زیرا اگر نباشد آنگاه معادله جواب ندارد، زیرا ضرایب سطر پایینی صفر است و لزوماً باید سمت راست معادله نیز صفر می شد.

بنابراین مجموعه‌ی b های جواب دار برابر می‌شود با: $x + 2y + z = 0$

پاسخ بخش امتیازی:

$$x + 2y + z = 0$$



6- مقادیر خواسته شده در هر قسمت را بدست آورید.

الف) به ازای کدام مقادیر a، مجموعه زیر مستقل خطی است؟

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\\a\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a\\0\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\a^2\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\a\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-2\\3\\a^3\end{bmatrix}\right\}$$

ب) مقادیری از h را بیابید که به ازای آن مجموعه زیر مستقل خطی باشد.

$$\left\{\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}h\\1\\-h\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}1\\2h\\3h+1\end{bmatrix}\right\}$$

پاسخ:

الف) از آنجا که مجموعه S شامل 5 وکتور در فضای R^4 است، پس طبق تئوری 8 کتاب درسی بدون توجه به مقدار a در هر صورت این مجموعه وابسته خطی خواهد بود.

ب) ترکیب خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+x_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}.$$

- طبق تعریف کتاب درسی می‌دانیم که تنها در صورتی این مجموعه مستقل خطی است که $x_1=x_2=x_3=0$ تنها پاسخ دستگاه $homogeneous$ زیر باشد. بنابراین ماتریس افزونه این دستگاه را به صورت زیر کاهش می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}1&h&1&0\\0&1&2h&0\\0&-h&3h+1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+hR_2}\begin{bmatrix}1&h&1&0\\0&1&2h&0\\0&0&2h^2+3h+1&0\end{bmatrix}.$$

- با توجه به بالا این دستگاه تنها در صورتی جواب صفر خواهد داشت که $2h^2+3h+1\neq 0$ باشد.

داریم:

$$2h^2+3h+1=(2h+1)(h+1)$$

بنابراین اگر $h\neq-\frac{1}{2},-1$، آنگاه $2h^2+3h+1\neq 0$ و وکتورهای $V_1,\ V_2,V_3$ مستقل خطی خواهند بود.

7- مشخص کنید که مجموعه زیر مستقل خطی است یا خیر. اگر وابسته خطی است، یک وکتور را به صورت ترکیب خطی ای از وکتور های دیگر بدست آورید.

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-2\\7\\11\end{bmatrix}\right\}$$

پاسخ:

ترکیب خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-2\\-2\\7\\11\end{bmatrix}=\mathbf{0} \qquad (*)$$

برای آنکه نشان دهیم این مجموعه مستقل خطی است باید $(x_1,x_2,x_3,x_4)\neq(0,0,0,0)$ که در معادله بالا صدق می‌کند بیابیم.

حال ترکیب خطی بالا را به صورت دستگاه زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix}1&1&-1&-2\\0&2&-2&-2\\-1&3&0&7\\0&4&1&11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\mathbf{0}.$$

ماتریس افزوده آن را تشکیل می‌دهیم و آن را کاهش سطری می‌دهیم:

$$[A\mid\mathbf{0}]=\begin{bmatrix}1&1&-1&-2&0\\0&2&-2&-2&0\\-1&3&0&7&0\\0&4&1&11&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}R_2]{R_3+R_1}\begin{bmatrix}1&1&-1&-2&0\\0&1&-1&-1&0\\0&4&-1&5&0\\0&4&1&11&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1-R_2\\R_3-4R_2\\R_4-4R_2}}\begin{bmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&-1&-1&0\\0&0&3&9&0\\0&0&5&15&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{5}R_4]{\frac{1}{3}R_3}\begin{bmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&-1&-1&0\\0&0&1&3&0\\0&0&1&3&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2+R_3\\R_4-R_3}}\begin{bmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&2&0\\0&0&1&3&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

طبق بالا جواب کلی آن به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_4 \\ x_2 &= -2x_4 \\ x_3 &= -3x_4, \end{aligned}$$

که متغیر x_4 آزاد است. اگر $x_4 = 1$ قرار دهیم آنگاه جواب غیر صفر $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = -3, x_4 = 1$ را خواهیم داشت، بنابراین این مجموعه وابسته خطی است.

حال برای نوشتن یک وکتور به صورت ترکیب خطی‌ای از وکتور های دیگر با قرار دادن مقادیر بالا در معادله $(*)$ داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

و با انتقال آخرین وکتور به سمت راست، آن را به صورت ترکیب خطی ای از 3 وکتور دیگر بدست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8- فرض کنید A یک ماتریس 3×3 است و y یک بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ می باشد به طوری که معادله‌ی $Ax = y$ هیچ جوابی ندارد. در اینصورت آیا برداری مانند بردار t وجود دارد که معادله ی $Ax = t$ فقط یک جواب داشته باشد؟ توضیح دهید.

پاسخ:

از آنجایی که $Ax = y$ هیچ جوابی ندارد می‌توانیم نتیجه بگیریم که ماتریس A در هر سطر خود یک $pivot$ ندارد (تئوری 4 فصل 1 کتاب درسی). پس یعنی حداکثر 2 تا $pivot$ (ماتریس 3 در 3 است) دارد. بنابراین معادله ی $Ax = t$ حداکثر دو متغیر $basic$ و حداقل یک متغیر $free$ (آزاد) دارد. پس معادله ی $Ax = t$ یا هیچ جوابی ندارد و یا بی نهایت جواب دارد.

9- معادله $Ax = b$ را با معلومات داده شده حل کنید(ماتریس افزوده را به فرم نردبانی کاهش یافته یا همان $RREF$ تبدیل کنید) پاسخ بدست آمده را به فرم $x = p + tv$ معرفی کنید که در آن t عددی حقیقی است. صحت پاسخ خود را با محاسبه‌ی Ap و Av بررسی کنید.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

با توجه به فرم نردبانی کاهش یافته ماتریس A ، به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) آیا برداری مانند d در R^3 وجود دارد به طوری که معادله‌ی $Ax = d$ ناسازگار باشد؟

ب) آیا برداری مانند d در R^3 وجود دارد به طوری که معادله‌ی $Ax = d$ جوابی یکتا داشته باشد؟

پاسخ:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

که در آن یک عنصر غیر پیشتاز وجود دارد. اگر $\boldsymbol{x} = (x, y, z, w)^t$ ، در اینصورت $z = t$.

با خواندن ماتریس و با شروع از پایین ترین ردیف یک پاسخ به صورت زیر است:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - 2t \\ 4 + t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p + tv, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

برای چک کردن پاسخ کافی است که جواب را در ماتریس A ضرب نمایید، در آن صورت باید $Ap = b$ و $Av = 0$ باشد.

$$Ap = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ap = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

می دانیم که ماتریس کاهش یافته ردیفی ماتریس A شامل 4 ستون اول ماتریس کاهش یافته ردیفی ماتریس افزوده است.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الف) خیر. هیچ بردار d ای وجود ندارد که به ازای آن معادله ناسازگار نباشد، چرا که در هر یک از ردیف های ماتریس کاهش یافته A یک عنصر پیشتاز 1 وجود دارد. پس معادله $Ax = d$ سازگار است.

ب) خیر. هیچ بردار d ای وجود ندارد که به ازای آن سیستم دارای پاسخ یکتا باشید. معادله $Ax = d$ به ازای تمام d ها دارای بی‌شمار جواب است. چرا که همواره یک متغیر آزاد وجود دارد و در ستون سوم عنصر پیشتاز وجود ندارد.

10- $T: R^n \to R^m$ یک تبدیل خطی است که $T(x) = Bx$ به طوری که B یک ماتریس $m \times n$ است.

نشان دهید که اگر A ماتریس استاندارد تبدیل T باشد، آنگاه $A = B$.

پاسخ:

بنا به تعریف داریم که $A = [T(e_1) \ \ldots T(e_n)]$ ، که در آن e_i پایه های $\mathbb{R}^n$ هستند یا همان ستون i ام از I_n هستند. داریم:

$$T(e_i) = Be_i = b_i$$

که در آن b_i ستون i ام ماتریس B است.

بنابراین هر ستون از A با هر ستون از B برابر است، پس $A = B$.

11- دو تبدیل $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ و $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ را به صورت زیر تعریف کرده ایم:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 0 \end{bmatrix}, S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ xy \end{bmatrix}$$

مشخص کنید که آیا T و S و همچنین ترکیب آن ها $S \circ T$ تبدیل خطی است یا خیر؟

پاسخ:

ابتدا برای آنکه نشان دهیم T یک تبدیل خطی است طبق تعریف کتاب درسی داریم:

A transformation (or mapping) T is **linear** if:

(i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for all $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ in the domain of T;

(ii) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ for all scalars c and all $\mathbf{u}$ in the domain of T.

پس برای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y_1 + y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

- پس شرط اول برقرار است.

حال درستی شرط دوم را بررسی می‌کنیم:

$$T(c\mathbf{x}) = T\left(c\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2cx_1 + cx_2 \\ 0 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = cT(\mathbf{x})$$

- شرط دوم نیز برقرار است. بنابراین تبدیل T یک تبدیل خطی است.

S تبدیل خطی نیست، برای نشان دادن آن کافی است که یک مثال نقض بیاوریم:

$$S\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, S\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, S\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

و

$$\begin{aligned}S\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) &= S\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\ &= S\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)+S\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

- بنابراین از آنجا که شرط اول تبدیل خطی بودن نقض شد، S یک تبدیل خطی نیست.

همچنین ترکیب آن ها یعنی همان $S \circ T$ یک تبدیل خطی است، برای اثبات آن کافی است نشان دهیم که:

$$S\circ T(\mathbf{x})=S\left(T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)\right)=S\left(\begin{bmatrix}2x+y\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x+y\\0\end{bmatrix}=T(\mathbf{x})$$

- از آنجا که $S\circ T=T$ شد و T یک تبدیل خطی است، پس $S\circ T$ نیز یک تبدیل خطی خواهد بود.

بنابرین T و $S\circ T$ خطی و S غیرخطی بودند.

12- فرض کنید $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $T: R^2 \to R^2$ باشد، اثبات کنید که T پوشا و یک به یک است.

پاسخ:

$T(x) = Ax$

$B = RREF(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

از آنجا که ستون های فرم کاهش یافته سطری ماتریس A همان بردار های یکه i, j هستند، پس B $\mathbb{R}^2$ را $span$ می‌کند. بنابراین تبدیل T هم یک به یک و هم پوشا است.

موفق باشید

تیم تدریسیاری جبر خطی پاییز 1400