کلید سوالات میانترم – ترم اول ۹۹

- درستی و نادرستی عبارت های زیر را با استدلال کامل مشخص نمایید.

ماتریس $A_{3\times3}$ مفروض است. اگر به ازای یک بردار y، رابطه $Ax = y$ دارای پاسخ نباشد، آنگاه بردار z ای وجود دارد که به ازای آن $Ax = z$ دارای پاسخ یکتاست.

نادرست. طبق تئوری ۲ فصل ۱ کتاب درسی ، زمانی که رابطه ای مانند **Ax = y** فاقد جواب باشد، آنگاه سطر آخر فرم اشلون ماتریس افزونه تشکیل شده به صورت [0 0 0 … b] می باشد ($b \neq 0$). حال اگر بردار دیگری مانند **z** موجود باشد، پس از تشکیل ماتریس افزونه معادل با **Ax = z** و تبدیل آن به فرم اشلون کاهش یافته ۲ حالت ممکن داریم:

۱. سطر آخر همچنان به فرم [0 0 0 … b] ($b \neq 0$) می باشد: در این صورت معادله فاقد جواب است
۲. سطر آخر (و حتی در برخی موارد سطر های بالاتر از آن) به طور [0 0 0 … 0] می باشند: در این صورت معادله ما حاوی free variable می باشد و بیش از یک جواب را داراست.

اگر $A_{m\times n}x = b$ به ازای هر b دارای پاسخ باشد، آنگاه پاسخ به ازای هر b یکتاست.

نادرست.

پاسخ اول (تحلیلی): اگر $A_{m\times n}x = b$ به ازای هر **b** دارای جواب باشد، آنگاه طبق تئوری ۲ از فصل ۱ کتاب درسی ماتریس افزونه معادل با معادله فوق تحت هیچ عنوان به صورت [0 0 0 .. b] در نمی آید و یا به عبارتی در هر سطر درایه محوری (Pivot Position) داریم.

از طرفی میدانیم زمانی پاسخ یکتاست که هر یک از گزاره های زیر (که دانشجو میتواند به حداقل یکی از آن ها اشاره کند) برقرار باشد:

- ستون های ماتریس A همگی Pivot Column باشند.
- در تمامی ستون ها درایه محوری موجود باشد
- ستون های ماتریس A مستقل خطی باشند.
- هیچ ستونی از ماتریس A به صورت ترکیب خطی دیگری قابل نوشتن نباشد.

در صورتی که n > m باشد، آنگاه هر ستون دارای درایه محوری نمی باشد، لذا free variable داریم و به ازای هر **b** بی نهایت پاسخ داریم.

پاسخ دوم (مثال نقض):

اگر A به ازای هر **b** دارای جواب باشد، آنگاه در هر سطر درایه محوری داریم. اما مثال نقض زیر نشان میدهد که در صورتی که n>m باشد پاسخ یکتا نخواهد بود:

A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, **b** = $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

در این صورت پس از تشکیل ماتریس افزونه و حل آن داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \\ x_3 \text{ is free variable} \end{cases}$$

ماتریس های $A_{m\times n}$ و $C_{m\times n}$ مفروض هستند. اگر $Ax = 0$ تنها دارای جواب بدیهی باشد و داشته باشیم:

$Span\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = Span\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$، آنگاه تبدیل خطی که با ماتریس C مشخص می‌شود، یک به یک و پوشاست.

نادرست. وقتی **Ax = 0** تنها دارای جواب بدیهی است که طبق definition ارائه شده در صفحه ۴۴ کتاب درسی free variable نداشته باشیم. پس طبق definition ارائه شده در صفحه ۵۸ کتاب درسی ستون های آن مستقل خطی می باشد.

طبق تئوری ۱۲ فصل ۱ کتاب درسی اگر ماتریسی ستون های آن مستقل خطی باشد یک به یک می باشد. و اگر فضای R^m (به تعداد درایه های سطری) را span کند پوشا می باشد.

پس تبدیل T(**x**) = **Ax** یک به یک می باشد. از طرفی با توجه به این که تمامی بردار هایی که با ترکیب خطی ستون های ماتریس A توصیف می شوند، با ترکیب خطی ستون های ماتریس C نیز توصیف می شوند نتیجه میگیریم که ستون های ماتریس C نیز مستقل خطی می باشند. زیر اگر تنها یک ستون مستقل خطی نباشد آنگاه برداری در Col A موجود است که در Col C موجود نیست.

پس تبدیل T(**x**) = **Cx** نیز یک به یک می باشد.

ولی با استفاده از تلفیق تئوری ۴ و ۱۲ فصل ۱ کتاب درسی، زمانی یک تبدیل پوشا می باشد که حداقل یکی از گزاره های زیر درست باشند:

- به ازای هر **b** در R^m، رابطه A**x** = **b** حاوی جواب باشد.
- هر بردار **b** در R^m ترکیب خطی از ستون های A می باشند.
- ستون های ماتریس A فضای R^m را span میکنند.
- ماتریس A در هر سطر دارای pivot position می باشد.

با توجه به این که ابعاد m و n در صورت سوال مشخص نشده اند، در یک حالت میتواند m>n باشد. در این صورت با وجود مستقل خطی بودن، حداقل یک سطر وجود دارد که pivot position ندارد. در این صورت اگر در فرم اشلون A**x** = **b**، اگر درایه بردار **b** متناظر در آن سطر غیر صفر باشد آنگاه بردار **b** به صورت ترکیب خطی ستون های A قابل نوشتن نمی باشد و به ازای هر **b** در R^m، A**x** = **b** جواب ندارد.

اگر هر ستون از یک ماتریس افزونه شامل یک درایه محوری (pivot) باشد، سیستم معادلات خطی متناظر با آن سازگار است.

نادرست. اگر ماتریس افزونه در هر ستون دارای درایه محوری باشد. آنگاه پس از تبدیل ماتریس به صورت اشلون، سطری به فرم [0 0 0 … b] ($b \neq 0$) وجود دارد که طبق تئوری ۲ فصل ۱ کتاب درسی دلالت بر ناسازگار بودن ماتریس دارد.

ماتریس $A_{m\times n}$ مفروض است به طوریکه به ازای هر $\mathbf{b}$ از $\mathbf{R^m}$ ، معادله $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ حداکثر یک جواب دارد. ستونهای A از یکدیگر مستقل خطی اند.

درست. با توجه به این که به ازای هر **b** حداکثر یک جواب دارد، نتیجه میگیریم پس از تبدیل ماتریس A به صورت اشلون، هیچ free variable ای موجود نمی باشد. به عبارتی هر ستون دارای یک base variable می باشد و باعث می شود هیچ ستونی به صورت ترکیب خطی باقی ستون ها قابل نوشتن نباشد. پس ستون های A مستقل خطی می باشند.

فرض کنید n عددی صحیح و مثبت است و T تبدیلی است خطی و غیر صفر به طوری که $T: R^n \to R$. در اینصورت فضای پوچ (null space) تبدیل T دارای n بعد است.

درست. تبدیل T به صورت T(**x**) = A**x** قابل نوشتن است. به طوری که ماتریس استاندارد A یک ماتریس 1×n می باشد و با ضرب شدن در یک بردار در فضای R^n، بردار را به یک اسکالر در فضای R نگاشت میکند. طبق تئوری ۱۲ فصل ۲ کتاب درسی اگر ماتریس m×n باشد، آنگاه فضای پوچ یک زیر فضا از R^n می باشد. پس در این مثال نیز فضای پوچ یک زیر فضای در R^n و دارای n بعد است.

– الف) ماتریس $A_{m\times n}$ مفروض است و داریم $AD = I_m$. نشان دهید رابطه $Ax = b$ به ازای هر b دارای جواب است و رابطه بین تعداد سطرها و ستون های A را بیابید. ب) فرض کنید داریم $AD = I_m$ و $CA = I_n$. رابطه بین m و n و رابطه بین ماتریس های C و D را بیابید.

الف) سوال ۲۴ فصل ۲.۱ کتاب درسی: با توجه به فرض سوال داریم:

$$AD = I_m$$

با ضرب بردار **b** از جهت راست به رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned} &AD\boldsymbol{b} = \boldsymbol{I_m b} \\ &\to A(D\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{I_m b} \\ &\to A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \ \boldsymbol{where}\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{Db} \end{aligned}$$

پس رابطه **b** = A**x** به ازای هر **b** دارای جواب **x** = D**b** می باشد.

طبق تئوری ۴ از فصل ۱ کتاب درسی، زمانی که به ازای هر **b** دارای جواب باشیم، آنگاه بایستی در هر سطر درایه محوری داشته باشیم. با توجه به این که هر درایه محوری در ستونی مجزا قرار دارد بایستی تعداد ستون ها بزرگتر مساوی تعداد سطر ها باشد.

ب) سوال ۲۵ از فصل ۲.۱ کتاب درسی:

اگر A یک ماتریس m×n و C یک ماتریس n×m باشد، رابطه $CA = I_n$ بیانگر این است که تعداد سطر های A بزرگتر مساوی تعداد ستون های آن است. به عبارتی $m \geq n$ می باشد.

رابطه $AD = I_m$ بیانگر این است که تعداد سطر های ماتریس A کوچکتر مساوی تعداد ستون های آن است. به عبارتی $m \leq n$ می باشد.

با ترکیب دو استدلال فوق نتیجه میگیریم m = n است.

برای رابطه بین C و D داریم:

$$\left.\begin{array}{l} CAD = (CA)D = I_nD = D \\ CAD = C(AD) = CI_m = C \end{array}\right\} C = D$$

- اگر $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی در R^n باشد و $Span\{R^n\} = R^n$، نشان دهید مجموعه B نیز مجموعه ای مستقل خطی است و $Span\{B\} = R^n$.

$$B = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \dots, v_1 + v_2 + \cdots + v_n\}$$

❋ بایستی در صورت سوال به جای $Span\{R^n\} = R^n$، عبارت $Span\{A\} = R^n$ نوشته شود.

اثبات مستقل خطی بودن: با توجه به این که A مستقل خطی می باشد داریم:

$$\begin{array}{l} c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + .. + c_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0} \\ \leftrightarrow c_i = 0\,, \quad i = 0, .., n \end{array}$$

حال برای اثبات مستقل خطی بودن مجموعه B بایستی اثبات کنیم:

$$\begin{array}{l} d_1\boldsymbol{v_1} + d_2(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) + .. + d_n(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_n}) = \boldsymbol{0} \\ \leftrightarrow d_i = 0\,, \quad i = 0, .., n \end{array}$$

رابطه فوق برابر است با:

$$(d_1 + d_2 + .. + d_n)\boldsymbol{v_1} + (d_2 + .. + d_n)\boldsymbol{v_2} + .. + d_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}$$

با توجه به مستقل خطی بودن مجموعه A داریم:

$$\left.\begin{array}{r} d_1 + d_2 + .. + d_n = 0 \\ d_2 + .. + d_n = 0 \\ \cdots \\ d_n = 0 \end{array}\right\} d_1 = d_2 = d_3 = .. = d_n = 0$$

پس مجموعه B نیز مستقل خطی است.

اثبات span کردن: با توجه به $Span\{A\} = R^n$، به ازای هر بردار دلخواه **u** در فضای R^n داریم:

$$c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + .. + c_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{u}$$

حال بایستی ثابت کنیم بردار دلخواه **u** به صورت ترکیب خطی بردار های مجموعه B قابل نوشتن است. یعنی:

$$d_1\boldsymbol{v_1} + d_2(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) + .. + d_n(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_n}) = \boldsymbol{u}$$
$$\rightarrow\ (d_1 + d_2 + .. + d_n)\boldsymbol{v_1} + (d_2 + .. + d_n)\boldsymbol{v_2} + .. + d_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{u}$$

میتوان نتیجه گرفت:

$$\begin{gathered} d_1 + d_2 + .. + d_n = c_1 \\ d_2 + .. + d_n = c_2 \\ \cdots \\ d_n = c_n \end{gathered}$$

– ماتریس $A_{m\times n}$ مفروض است. نشان دهید این ماتریس در هر ستون یک درایه محوری دارد اگر و تنها اگر ستون های ماتریس مستقل باشند.

سوال ۳۰ قسمت b از فصل ۱.۷ کتاب درسی:

اگر در هر ستون یک درایه محوری موجود باشد، آنگاه free variable نداریم و لذا هیچ ستونی به صورت ترکیب خطی دیگری قابل نوشتن نیست و ماتریس مستقل خطی می باشد.

اگر ماتریس مستقل خطی باشد، آنگاه اگر ترکیب خطی ستون های آن برابر با ۰ گذاشته شود، ضرایب همگی صفر خواهند شد. یعنی هیچ یک از ستون ها به صورت ترکیب خطی باقی ستون ها قابل نوشتن نیست. پس هر ستون در فرم اشلون یک درایه منحصر به فرد دارد که برابر با درایه محوری است.

– معکوس ماتریس $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ را بیابید. ب) فرض کنید ماتریس A یک ماتریس پایین مثلثی با درایه های تمام ۱ (مشابه ماتریس قسمت الف) با ابعاد $n \times n$ باشد. اگر معکوس ماتریس A را با ماتریس B نمایش دهیم، با استفاده از قسمت (الف) فرم کلی B را حدس زده و سپس اثبات کنید $AB = I$

الف) با توجه به الگوریتم معرفی شده در فصل ۲.۲ کتاب درسی صفحه ۱۱۰ داریم:

$$[\,A\ I\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim .. \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [\,I\ A^{-1}]$$

بنابراین معکوس ماتریس A برابر است با:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ب) با توجه به الگو بدست آمده توسط عملیات سطری انجام شده در قسمت (الف) در میابیم فرم کلی ماتریس B به صورت زیر می باشد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن درایه های قطری همگی ۱ و درایه های پایین آن ها ۱- و باقی درایه ها همگی صفر می باشند.

به طور کلی از ضرب دو ماتریس AB داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

که تمامی درایه های 1- با 1 خنثی خواهند شد و داریم:

$$AB = I$$

- تبدیل $T: R^3 \to R^2$ مفروض است. این تبدیل ابتدا نقطه $x = [x_1, x_2, x_3]$ را به صفحه $x_2 = 0$ نگاشت می‌کند. سپس نقطه حاصل را در جهت ساعتگرد به اندازه θ دوران می‌دهد. خطی بودن این تبدیل را بررسی نمایید و در صورت خطی بودن ماتریس تبدیل را بیابید.

ابتدا نقطه **x** را به صفحه $x_2 = 0$

$$T_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

سپس این range این تبدیل دامنه تبدیل دیگری میباشد که به اندازه θ در جهت ساعتگرد دوران میدهد:

$$T_2=\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta x_1 \ + \ sin\theta x_3 \\ -sin\theta x_1 \ + \ cos\theta x_3 \end{bmatrix}$$

پس تبدیل T به فرم زیر می باشد:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

اثبات خطی بودن: بردار دلخواه $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ را اختیار میکنیم. اثبات میکنیم:

- T(**u** + **v**) = T(**u**) + T(**v**)

$$\begin{aligned} T &= \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \ + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 \ + v_3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} cos\theta(u_1 \ + v_1) + sin\theta(u_3 \ + v_3) \\ -sin\theta(u_1 \ + v_1) + cos\theta(u_3 \ + v_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cos\theta u_1 \ + \ sin\theta u_3 \ + \ cos\theta v_1 \ + \ sin\theta v_3 \\ -sin\theta u_1 \ + \ cos\theta u_3 \ - sin\theta v_1 \ + \ cos\theta v_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cos\theta u_1 \ + \ sin\theta u_3 \\ -sin\theta u_1 \ + \ cos\theta u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cos\theta v_1 \ + \ sin\theta v_3 \\ -sin\theta v_1 \ + \ cos\theta v_3 \end{bmatrix} \\ &= T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

- T(a**u**) = aT(**u**)

$$T = \left(a\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) \ = \ T = \left(\begin{bmatrix} au_1 \\ au_2 \\ au_3 \end{bmatrix}\right) \ = \ \begin{bmatrix} acos\theta u_1 \ + \ asin\theta u_3 \\ -asin\theta u_1 \ + \ acos\theta u_3 \end{bmatrix}$$

$$= a\begin{bmatrix} cos\theta u_1 \ + \ sin\theta u_3 \\ -sin\theta u_1 \ + \ cos\theta u_3 \end{bmatrix} = aT(\boldsymbol{u})$$

❋ میتوان به جای اثبات خطی بودن T، به طور جدا اثبات کنیم T_1 و T_2 خطی هستند و سپس نتیجه بگیریم T خطی است.

– نشان دهید اگر A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $\mathbf{n} \times \mathbf{p}$ باشد به طوریکه $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. نشان دهید:

$$\mathbf{rankA + rankB \leq n}$$

هر بردار دلخواه x در فضای ستونی B به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$\boldsymbol{x} = y_1\boldsymbol{b_1} + y_2\boldsymbol{b_2} + \ldots + y_n\boldsymbol{b_n}$$

پس داریم $B\mathbf{y} = \mathbf{x}$ به طوری که $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

حال اگر $A\mathbf{x}$ را حساب کنیم داریم:

$A\mathbf{x} = A(B\mathbf{y}) = (AB)\mathbf{y} = 0\mathbf{y} = \mathbf{0}$

پس هر بردار دلخواه در فضای ستونی B به صورت یک بردار در فضای Null A قابل نوشتن است. لذا داریم:

$$\begin{aligned}
&dim\ Col\ B \leq dim\ Null\ A \\
&\rightarrow rank\ B \leq dim\ Null\ A \\
&\rightarrow rank\ B + rank\ A \leq dim\ Null\ A + rank\ A \\
&\rightarrow rank\ A + rank\ B \leq n
\end{aligned}$$

❄ استنتاج dim Null A + rank A = n از تئوری ۱۴ فصل ۴.۶ برداشته شده است که دانشجویان هنوز آن بخش را مطالعه نکرده اند.