پاسخ سوال اول:

الف) طبق روند زیر پیش می رویم: λ مقدار ویژه ای از A است:

$$(A-\lambda I)\ not-invertible\ \leftrightarrow$$
$$(A-\lambda I)^T\ not-invertible\ \leftrightarrow$$
$$(A^T-\lambda I)\ not-invertible$$

ب) اگر A قطری شدنی باشد پس می توان آن را به صورت $A=PDP^{-1}$ نوشت و چون با B مشابه است داریم: $B=QAQ^{-1}$ آنگاه: $B=Q(PDP^{-1})Q^{-1}=(QP)D(QP)^{-1}$ بنابراین B هم قطری شدنی است.

ت) با توجه به فرض مشابهت مطرح شده در سوال داریم:

$P^{-1}BP=A$ و $Q^{-1}CQ=A$. بنابراین $Q^{-1}CQ=P^{-1}BP$. در صورتی که Q را از چپ و Q^{-1} را از راست ضرب کنیم به تساوی $QP^{-1}BPQ^{-1}=QQ^{-1}CQQ^{-1}$ می رسیم. بنابراین

$C=QP^{-1}BPQ^{-1}=(PQ^{-1})^{-1}B(PQ^{-1})$ که نشان می دهد B و C مشابه اند.

ث) اگر A مشابه B باشد آنگاه یک ماتریس معکوس پذیر P وجود دارد که $B=\ P^{-1}AP$ در این صورت B معکوس پذیر است. زیرا آن را به صورت ضرب چند ماتریس معکوس پذیر نوشتیم. با توجه به قضیه معکوس ضرب ماتریس ها داریم: $B^{-1}=P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1}$ که نشان می دهد A^{-1} مشابه است با B^{-1}.

ج) اگر $A=PBP^{-1}$ پس داریم:

$$A^2=(PBP^{-1})(PBP^{-1})=PB(P^{-1}P)BP^{-1}=PB^2P^{-1}$$

بنابراین A^2 مشابه است با B^2.

چ) اگر $A=\ PBP^{-1}$ در نتیجه $rank(A)=rank\big(P(BP^{-1})\big)=rank(BP^{-1})$

می دانیم $rank(BP^{-1})=rank(B)$. پس: $rank(A)=rank(B)$

ح) دو طرف عبارت زیر را از چپ در A^{-1} ضرب می کنیم:

$$AV=\lambda V$$
$$A^{-1}AV=\lambda A^{-1}V$$

$$V = \lambda A^{-1}V$$

$$\frac{1}{\lambda}V = (-1)V$$

خ) فرض کنید m مقدار ویژه A و x بردار ویژه متناظر با آن باشد، آنگاه داریم:

$$0x = A^2x$$

$$Amx = m^2x$$

$$0 = m^2x$$

پاسخ سوال دوم:

ابتدا دترمینان ماتریس $A - \lambda I$ را به دست می آوریم و برابر صفر قرار می دهیم :

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A-\lambda I) = (5-\lambda)\big((2-\lambda)(2-\lambda)-1\big) = (5-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-1)$$

$$det(A-\lambda I) = 0 \rightarrow (5-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3\,, \lambda_3 = 5$$

بردار ویژه های $\lambda_1 = 1$:

$$(A-\lambda I)x = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 5-1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2-1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردار ویژه های $\lambda_2 = 3$:

$$(A-\lambda I)x = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 5-3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2-3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردار ویژه های $\lambda_3 = 5$:

$$(A-\lambda I)x=0 \rightarrow \begin{bmatrix} 5-5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2-5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ سوال سوم:

الف) در صورتی که رابطه فیبوناچی را بنویسیم، می توانیم با توجه به معادلات موجود ماتریس A را تشکیل دهیم.

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_{n-1} = F_{n-1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ب) برای محاسبه مقادیر ویژه و بردار های ویژه این ماتریس، ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می دهیم و سپس اقدام به حل می کنیم:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \Longrightarrow |A - \lambda I| = 0$$

$$-\lambda(1-\lambda) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

حال که مقادیر ویژه را محاسبه کردیم، می توانیم به سراغ محاسبه بردار های ویژه ماتریس به ازای هر یک از مقادیر ویژه برویم.

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} x_2 = 0 \\ x_2 \ is \ free \end{cases}$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}x_2\\x_2\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\1\end{bmatrix}\rightarrow v_1=\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\1\end{bmatrix}$$

بردار ویژه متناظر با نیز، به صورت بالا قابل محاسبه است.

$$v_2=\begin{bmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1\end{bmatrix}$$

ج) برای محاسبه قطری سازی شده این ماتریس همانند زیر عمل می کنیم.

$$A=PDP^{-1}$$

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1 & 1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0\\0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\-1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\-1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0\\0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\-1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}$$

د) با تکرار معادله موجود در قسمت الف، می توانیم ماتریس B را محاسبه کنیم.

$$\begin{bmatrix}F_n\\F_{n-1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}F_{n-1}\\F_{n-2}\end{bmatrix}=A\left(A\begin{bmatrix}F_{n-2}\\F_{n-3}\end{bmatrix}\right)=A^{n-1}\begin{bmatrix}F_1\\F_0\end{bmatrix}$$

$$B=A^{n-1}$$

ه)

$$A=PDP^{-1}\Longrightarrow A^{n-1}=PD^{n-1}P^{-1}$$

$$A^{n-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$A^{n-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{bmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$A^{n-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{bmatrix} \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_2^n\lambda_1 - \lambda_2\lambda_1^n \\ \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & \lambda_2^{n-1}\lambda_1 - \lambda_1^{n-1}\lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

پاسخ سوال چهارم:

الف)

$$
\begin{aligned}
Av &= \lambda v \\
&= (a-bi)(Re(v)+iIm(v)) \\
&= (aRe(v)+bIm(v))+i(aIm(v)-bRe(v)) \\
A(Re(v)) &= Re(Av) = aRe(v)+bIm(v) \\
A(Im(v)) &= Im(Av) = -bRe(v)+aIm(v)
\end{aligned}
$$

ب) با توجه به پاسخ قسمت قبل داریم:

$$A(Re(v)) = P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$A(Im(v)) = P\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} A(Re(v)) & A(Im(v)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & P\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = PC$$

پاسخ سوال پنجم:

1-

Since $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$

$$T(\mathbf{e}_1) = 0\mathbf{b}_1 - 1\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = -1\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$$

$$T(\mathbf{e}_2) = -1\mathbf{b}_1 - 0\mathbf{b}_2 - 1\mathbf{b}_3 = -1\mathbf{b}_1 - 1\mathbf{b}_3$$

$$T(\mathbf{e}_3) = 1\mathbf{b}_1 - 1\mathbf{b}_2 + 0\mathbf{b}_3 = 1\mathbf{b}_1 - 1\mathbf{b}_2$$

2-

$$[T(e_1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ [T(e_2)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ [T(e_3)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3-

The matrix for T relative to ε and B is:

$$\begin{bmatrix} [T(e_1)] & [T(e_2)]_B & [T(e_3)]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ سوال ششم:

مقدار ویژه ها و فضاهای ویژه ی متناظر ماتریس a برابرند با:

$$\lambda = 0 \rightarrow v1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \{v2, v3\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

پس برای قطری سازی کافیست تا:

$$p = [v_r, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس b ولی تنها یک مقدار ویژه دارد و فضای برداری متناظر آن یک بعدیست:

$$\lambda = 0 \rightarrow v1 = \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه تنها یک بردار ویژه مستقل خطی برای ماتریس b داریم و بقیه ی مقادیر ویژه ی b مختلط هستند.

پس ماتریس b بر اعداد حقیقی قطری شونده نیست.

پاسخ سوال هفتم:

-1

(۷

الف)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots a_{nn}\end{bmatrix} \Longrightarrow A-\lambda I=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & & \\ & a_{22}-\lambda & \\ & & \ddots a_{nn}-\lambda\end{bmatrix}$$

استقرای ضعیف روی n می‌زنیم فرض می‌کنیم سطر اول تولیدکننده λ_1 باشد و اینکه اگر

ماتریس A_{11} را در نظر بگیریم جمع درایه‌های قطر آن برابر با $\lambda_2+\dots+\lambda_n$ می‌شود.

حال داریم:

$$\det(A-\lambda I)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)=0$$

$$=(a_{11}-\lambda)\det(A_{11})-\underbrace{a_{12}\det(A_{12})\pm\dots\pm a_{1n}\det(A_{1n})}=0$$

حداکثر توان λ در این یکی از جملات می‌تواند $n-2$ باشد.

$$(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_n)=\lambda^n-\lambda^{n-1}\underbrace{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}\pm\dots$$

پس این ضریب از عامل اول یعنی C_{11} باید تولید بیاید. از طرفی خود

$C_{11}=(a_{11}-\lambda)\det(A_{11})$ است و فرض کنیم سطر اول λ_1 را تولید می‌کرد پس داریم:

$$\det(A_{11})=(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)$$

$$\Longrightarrow C_{11}=\underbrace{a_{11}(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)}_{\text{شامل } a_{11}\lambda^{n-1}}-\underbrace{\lambda(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)}$$

طبق فرض استقرا شامل:

$$a_{22}\lambda^{n-1},\dots,a_{nn}\lambda^{n-1}$$

$$\Longrightarrow a_{11}\lambda^{n-1}+a_{22}\lambda^{n-1}+\dots+a_{nn}\lambda^{n-1}=(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)\lambda^{n-1}$$

با تشکر از آقای مانی مقیمی

2- فرض کنیم x یک بردار ویژه غیر صفر از A باشد در این صورت داریم:

$$Ax = \lambda x$$

$$A^۲ x = \lambda^۲ x \rightarrow Ax = \lambda^۲ x \rightarrow \lambda x = \lambda^۲ x \rightarrow (\lambda^۲ - \lambda) x = ۰ \rightarrow \lambda = ۰ \quad or \quad \lambda = ۱$$

پاسخ سوال هشتم:

1-

$$Av1 = v1, Av2 = 0.5v2, Av3 = 0.2v3$$

که این نشان می دهد مقادیر ویژه ی A برابر با 1 و 0.5 و 0.2 می باشند.

2-

{v1, v2, v3} مستقل خطی است. زیرا بردار ویژه های آن متناظر با مقادیر ویژه ی متمایز است. از آنجایی که 3 بردار در مجموعه است، این مجموعه یک پایه برای R^3 می باشد. بنابراین ثابت های یکتایی وجود دارند که:

$$x0 = c1v1 + c2v2 + c3v3$$

بنابراین:

$$w^T x0 = c1w^T v1 + c2w^T v2 + c3w^T v3$$

از آنجایی که درایه های v2 و v3 همگی مجموع 0 دارند، می توان نتیجه گرفت که c1= 1 است.

3-

با توجه به قسمت قبل:

$$x0 = v1 + c2v2 + c3v3$$

با استفاده از قسمت اول:

$$x_k = A^k x_0 = A^k v_1 + c_2 A^k v_2 + c_3 A^k v_3 = v_1 + c_2 (0.5)^k v_2 + c_3 (0.2)^k v_3 \\ \rightarrow v_1 \ as \ k \rightarrow \infty$$

پاسخ سوال نهم:

با توجه به اطلاعات سوال داریم:

$$A\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \end{bmatrix} \text{ which implies } \mu_0 = 0.5$$

$$A\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.66 \\ 0.96 \end{bmatrix} \text{ which implies } \mu_1 = 0.96$$

$$A\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .6875 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.54375 \\ 0.975 \end{bmatrix} \text{ which implies } \mu_2 = 0.975$$

$$A\mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .5577 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.47885 \\ 0.92308 \end{bmatrix} \text{ which implies } \mu_2 = 0.92308$$

$$A\mathbf{x_4} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .5188 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4594 \\ 0.90752 \end{bmatrix} \text{ which implies } \mu_2 = 0.90752$$

طبق این توالی X_k به $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$ میل می کند و مقدار μ_k هم به 0.9 میل می کند. در نتیجه 0.9 بزرگترین مقدار ویژه و $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$ بردار ویژه متناظر با آن است که می توان با روش زیر از این پاسخ اطمینان حاصل کنیم:

$$A\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.9 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ سوال دهم:

1- فرض کنید بعد فضای ویژه مربوط به مقدار ویژه λ را با $dimE_\lambda$ و تکرر آن مقدار ویژه را با $m(\lambda)$ نشان می دهیم در واقع می خواهیم ثابت کنیم $dimE_\lambda \leq m(\lambda)$. فرض کنید $dimE_\lambda = k$ و $C =$ $\{v1, \dots, vk\}$ پایه ای برای فضای ویژه λ باشد. C را به پایه ای چون $B =$ $\{v1, v2, \dots, vk, w1, w2, \dots, wn-k\}$ گسترش می دهیم. اکنون ماتریس S که ستون های آن عناصر B هستند را در نظر می گیریم. به عبارت دیگر $S = [v1|v2| \dots |vk|w1| \dots |wn-k]$. از آنجاییکه B مستقل است ماتریس S معکوس پذیر خواهد بود. اکنون داریم:

$$I = S^{-1}S = [S^{-1}v_1|S^{-1}v_2|\cdots|S^{-1}v_k|S^{-1}w_1|\cdots|S^{-1}w_{n-k}]$$

که در آن e_i ستون iام ماتریس I است $(1 \leq i \leq k)$ می دانیم مقادیر ویژه A و $S^{-1}AS$ یکی هستند. لذا $XA = XS^{-1}AS$ (منظور از X چندجمله ای مشخصه یک ماتریس است) بنابراین:

$$S^{-1}AS = S^{-1}A[v_1|v_2|\cdots|v_k|w_1|\cdots|w_{n-k}] = S^{-1}[Av_1|Av_2|\cdots|Av_k|Aw_1|\cdots|Aw_{n-k}]$$

$$= S^{-1}[\lambda v_1|\lambda v_2|\cdots|\lambda v_k|Aw_1|\cdots|Aw_{n-k}] = [\lambda S^{-1}v_1|\lambda S^{-1}v_2|\cdots|\lambda S^{-1}v_k|S^{-1}Aw_1|\cdots|S^{-1}Aw_{n-k}]$$
$$= [\lambda e_1|\lambda e_2|\cdots|\lambda S^{-1}v_k|\underbrace{S^{-1}Aw_1}_{=y_1}|\cdots|\underbrace{S^{-1}Aw_{n-k}}_{=y_{n-k}}]$$

بنابراین به ازای یک $q(x)$ خواهیم داشت:

$$\chi_A = \chi_{S^{-1}AS} = |xI - S^{-1}AS| = (x-\lambda)^k q(x)$$

از طرف دیگر :

$$\chi_A = (x-\lambda)^{m(\lambda)} p(x)$$

پس:

$$(x-\lambda)^{m(\lambda)} p(x) = (x-\lambda)^k q(x) \to k \leq m(\lambda)$$

2- فرض کنید $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ مقادیر ویژه متمایز A باشند و $k_i = dimE_{\lambda_i}$ و $S_i = \{v_{i_1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ پایه E_{λ_i} باشد. در این صورت به ازای هر $i \neq j$ داریم $S_i \cap S_j = \emptyset$. از این رو $k_i = m(\lambda_i)$ آنگاه:

$$|S| = \sum_{i=1}^{r} |S_i| = \sum_{i=1}^{r} k_i = \sum_{i=1}^{r} m(\lambda_i) = n$$

پس S مجموعه ای مستقل از n بردار ویژه A است. لذا A قطری شدنی است. برعکس فرض کنید A قطری شدنی باشد پس مجموعه ای چون S حاوی n بردار ویژه مستقل خواهیم داشت. از قبل می دانیم که $k_i \leq m(\lambda_i)$ پس اگر به ازای یک $1 \leq t \leq r$ داشته باشیم $k_t \neq m(\lambda_t)$ آنگاه $k_t < m(\lambda_t)$. اگر $S_i \subseteq S$ مجموعه های بردار ویژه متناظر با λ_i باشد آنگاه S_i نیز مستقل خواهد بود و لذا S_i یک زیر مجموعه مستقل E_{λ_i} می باشد. پس $|S_i| \leq k_i$. از طرفی $S_i \cap S_j = \emptyset$ زیرا از قبل می دانیم که یک بردار نمی تواند بردار ویژه دو مقدار متمایز باشد. لذا داریم:

$$\begin{aligned} n = |S| = \sum_{i=1}^{r} |S_i| \leq \underbrace{k_1}_{\leq m(\lambda_1)} + \underbrace{k_2}_{\leq m(\lambda_2)} + \cdots + \underbrace{k_t}_{< m(\lambda_1)} + \cdots + \underbrace{k_r}_{\leq m(\lambda_r)} \\ < m(\lambda_1) + m(\lambda_2) + \cdots + m(\lambda_r) = n \to n < n \end{aligned}$$

از تناقض اخیر حکم ثابت می شود.

پاسخ سوال یازدهم:

الف) بردار ویژه مورد نظر را به شکل $v = (11 \dots 1)$ در نظر می گیریم. در این صورت به وضوح داریم:

$$Av = sv$$

ب) جواب بله است. زیرا یک ماتریس و ترانهاده اش مقادیر ویژه یکسان دارند. پس اگر A مجموع ستون هایش s باشد در این صورت A^T مجموع سطرهایش s است و از قسمت یک نتیجه حاصل می شود.

پ) می دانیم که:

$$Av = \lambda v$$

درایه های دو طرف را با هم جمع می کنیم. داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} v_i = \lambda (v_۱ + v_۲ + \cdots + v_n)$$

حال با یک تغییر آرایش داریم:

$$\sum_{j=۱}^{n} v_j \sum_{i=۱}^{n} a_{ij} = \sum_{j=۱}^{n} v_j = \lambda \sum_{j=۱}^{n} v_j$$

چون $\lambda \neq 0$ است، در این صورت باید $\sum_{j=1}^{n} v_j = 0$ باشد که حکم ثابت می شود.