# ۱. دستگاه‌های خطی

## مقدمه

مسئله‌های زیر را در نظر بگیرید.

۱. آیا بردار داده شده $w \in W$ در فضای تولید شده توسط بردارهای $w_1,\ldots,w_n$ قرار دارد؟ اگر چنین است چه ترکیب‌های خطی $w_1,\ldots,w_n$ برابر $w$ می‌شوند.

۲. آیا بردار داده شده $w \in W$ در تصویر نگاشت خطی $T : V \to W$ قرار دارد؟ اگر چنین است چه بردارهایی در $V$ توسط $T$ به $W$ نگاشته می‌شود.

این دو سوال به سادگی به یکدیگر تبدیل می‌شوند. اگر $\alpha = \{v_1,\ldots,v_n\}$ یک پایه برای $V$ باشد آنگاه تصویر نگاشت $T$ با بردارهای $w_1 = T(v_1),\ldots,w_n = T(v_n)$ تولید می‌شود بنابراین سوال دوم به سوال اول تبدیل می‌گردد. به همین صورت با معرفی نگاشت خطی $T : F^n \to W$ که برای هر $1 \leq i \leq n$، $T(e_i) = w_i$، سوال اول به سوال دوم تبدیل می‌شود.

برای جواب دادن به این سوال‌ها لازم است که بردارهای $w_1,\ldots,w_n$ و همچنین نگاشت خطی $T$ به صورتی معرفی شده باشند. بنابراین فرض می‌کنیم $\alpha$ و $\beta$ پایه‌هایی مرتب برای $V$ , $W$ باشند و نمایش بردارهای $w$ و $w_1,\ldots,w_n$ و یا نگاشت خطی $T$ در این پایه‌ها داده شده باشند.

$$[w]_\beta \; [w_1]_\beta,\ldots,[w_n]_\beta \; [T]_\beta^\alpha$$

برای مثال زمانی که $W = F^m, V = F^n$ فرض کنید نمایش استاندارد بردارها و نگاشت خطی بالا در پایه‌های استاندارد داده شده اند.

در این صورت سوال‌های بالا به پیدا کردن بردارهای ستونی $X \in F^n$ تبدیل می‌شود که

$$[T]_\beta^\alpha X = [w]_\beta \quad \text{و یا} \quad \Big[[w_1]_\beta\Big|\ldots\Big|[w_n]_\beta\Big] X = [w]_\beta$$

به چنین معادلاتی *دستگاه خطی* می‌گویند. بنابراین یک دستگاه خطی رابطه‌ای به صورت

$$AX = b$$

است که در آن $b$ یک بردار ستونی داده شده در $F^m$، $A$ یک ماتریس $m \times n$ مشخص و $X$ بردار ستونی مجهولی در $F^n$ است که باید به گونه پیدا شود که رابطه بالا برقرار شود.

ما معمولاً یک دستگاه خطی را به عنوان نمایش رابطه $T(v) = w$ در پایه‌های $\alpha$ و $\beta$ برای $V$ و $W$ در نظر می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم $A = [T]_\beta^\alpha$ و $b = [w]_\beta$ و $X$ نمایش بردارهایی مانند $v \in V$ در پایه $\alpha$ است که $T(v) = w$.

اگر بردار $w$ در تصویر نگاشت $T$ قرار داشته باشد آنگاه رابطه $T(v) = w$ دارای جواب است و مجموعه جواب‌های آن انتقالی از $\ker T$ است و بنابراین هم شکل و هم بعد با $\ker T$ هستند. $\ker T$ نیز مجموعه جواب‌های معادله $T(v) = 0$ است که محاسبه آن در واقع حل کردن یک دستگاه خطی است. به معادله $T(v) = 0$ و دستگاه $AX = 0$ به ترتیب *معادله همگن* و *دستگاه خطی همگن* می‌گوییم. بنابراین مجموعه جواب‌های معادله ناهمگن برابر جمع مجموعه جواب‌های معادله همگن است با یک جواب خاص معادله ناهمگن. همچنین مجموعه جواب‌های معادله همگن یک زیرفضای برداری $V$ است و برای مشخص کردن آن می‌توان پایه‌ای برای آن ارائه داد.

# نکاتی در مورد دستگاه‌های خطی

در قسمت قبل یک دستگاه خطی به عنوان نمایشی برای رابطه $T(v) = w$ معرفی شد. در این فصل نکات و قضایایی در مورد دستگاه‌های خطی بیان می‌کنیم که ما را در حل کردن این دستگاه‌ها کمک می‌کند. با این حال مطالب این فصل برای حل عملی یک دستگاه چندان موثر نیست. روش عملی برای حل یک دستگاه خطی در قسمت بعد بیان می‌شود. می‌توان این قسمت را در مطالعه سریع نادیده‌گرفت.

فرض کنید دستگاه خطی $AX = b$ نمایش رابطه $T(v) = w$ در پایه‌های $\alpha$ و $\beta$ برای $V$ و $W$ باشد. یعنی فرض می‌کنیم $A = [T]^\alpha_\beta$ و $b = [w]_\beta$ و $X$ نمایش بردارهایی مانند $v \in V$ در پایه $\alpha$ است که $T(v) = w$.

توجه داشته باشید که اگر پایه $\beta$ تغییر کند اگر چه نمایش‌های $[w]_\beta$ ویا $[T]^\alpha_\beta$ تغییر می‌کنند اما نمایش $X = [v]_\beta$ تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر دستگاه خطی به گونه‌ای تغییر می‌کند که جواب‌های آن عوض نمی‌شوند.

درواقع گر $\beta'$ پایه‌ای دیگر برای $W$ باشد و $P = [I_W]^\beta_{\beta'}$، آنگاه

$$[T]^\alpha_{\beta'} = [I_W T]^\alpha_{\beta'} = [I_W]^\beta_{\beta'}.[T]^\alpha_\beta = P[T]^\alpha_\beta = PA$$

$$[w]_{\beta'} = [I_W(w)]_{\beta'} = [I_W]^\beta_{\beta'}.[w]_\beta = P[w]_\beta = Pb$$

در نتیجه دستگاه $AX = b$ در پایه‌های $\alpha$ و $\beta'$ به دستگاه $A'X = b'$ تبدیل می‌شود که درآن $A' = PA$ و $b' = Pb$ بدون اینکه جواب‌های آن تغییر کند. هدف ما پیدا کردن پایه $\beta'$ است که جواب‌های دستگاه جدید $A'X = b'$ که همان جواب‌های دستگاه $AX = b$ است به سادگی از شکل آن دستگاه بدست آیند.

دقت کنید که رابطه $T(v) = w$ را می‌توان در پایه دیگری بجای $\alpha$ نیز نوشت. اما با تغییر پایه $\alpha$، $X = [v]_\alpha$ نیز تغییر می‌کند. یعنی جواب‌های دستگاه تغییر خواهند کرد. بنابراین ما تنها اجازه خواهیم داد پایه $\beta$ تغییر کند و پایه $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ را برای $V$ ثابت در نظر می‌گیریم.

برای اینکه $[T]^\alpha_{\beta'}$ تا حد ممکن ساده باشد لازم است اعضای پایه $\beta'$ تا جای ممکن از میان بردارهای $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ انتخاب شوند. این بردارها مولدی برای زیر فضای $\operatorname{Im} T$ هستند. بنابراین با حذف تعدادی از آن‌ها پایه‌ای برای این زیرفضا بدست می‌آید که می‌توان آن را به پایه‌ای برای $W$ گسترش داد. در زیر روشی برای این منظور ارائه می‌دهیم.

در ابتدا (مرحله $i = 0$) مجموعه $\mathcal{A}$ را برابر $\varnothing$ فرض کنید. این مجموعه را مرحله به مرحله به گونه‌ای بزرگ می‌کنیم که مستقل خطی باقی بماند. در مرحله $i$ام اگر $T(v_i)$ در فضای تولید شده توسط بردارهای داخل $\mathcal{A}$ قرار نداشت آن را به $\mathcal{A}$ اضافه می‌کنیم درغیر این‌صورت بدون تغییر $\mathcal{A}$ به مرحله $i+1$ام می‌رویم و این کار را تا مرحله $i = n$ ادامه می‌دهیم. در انتها اگر $\mathcal{A} = \{T(v_{p_1}), \ldots, T(v_{p_r})\}$ آنگاه $T(v_{p_1})$ اولین بردار ناصفر در بین $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ است و برای هر $p_s < i < p_{s+1}$، $T(v_i)$ در فضای تولید شده توسط $\{T(v_{p_1}), \ldots, T(v_{p_s})\}$ قرار دارد. به این ترتیب $\mathcal{A}$ پایه‌ای برای $\operatorname{Im} T$ خواهد بود که می‌توان آن را به پایه $\beta'$ برای $W$ گسترش داد.

نمایش نگاشت خطی $T$ در پایه‌های $\alpha$ و $\beta'$ به صورت زیر است.

$$A' = [T]^\alpha_{\beta'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} & & & p_1 & & & & p_2 & & & & p_3 & & \\ & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

---

در ماتریس بالا همه درایه‌های ستون $p_s$ام صفر است بجز درایه $s$ام که برابر یک است. این ماتریس تنها دارای $r$ سطر ناصفر است. سطرها به صورت پلکانی زیر هم قرار گرفته‌اند و سطرهای صفر زیر سطرهای ناصفر قرار دارند. اولین درایه ناصفر سطر $s$ام در ستون $p_s$ام قرار دارد و برابر یک است. به چنین ماتریسی ماتریس *ساده سطری* می‌گوییم.
دقت کنید که جواب‌های دستگاه $A'X=b'$ به سادگی معرفی می‌شوند، اگر $x_1,\dots,x_n$ مولفه‌های $X$ و $b'_1,\dots,b'_m$ مولفه‌های $b'$ باشند آنگاه دستگاه $A'X=b'$ به صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned} x_{p_1}+\sum_{j\notin\{p_1,\dots,p_r\}} a'_{1j}x_j &= b'_1\\ &\vdots\\ x_{p_r}+\sum_{j\notin\{p_1,\dots,p_r\}} a'_{rj}x_j &= b'_r\\ 0 &= b'_{r+1}\\ &\vdots\\ 0 &= b'_m \end{aligned}$$

بنابراین دستگاه $A'X=b'$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $b'_{r+1}=\cdots=b'_m=0$. در این صورت مقادیر $x_j$ را برای $j\notin\{p_1,\dots,p_r\}$ می‌توان آزادانه انتخاب کرد و از روی آن مقادیر $x_{p_1},\dots,x_{p_r}$ به صورت یکتا مشخص می‌شوند و $X$ جوابی برای دستگاه $A'X=b'$ خواهد بود.
به این تریب بنظر می‌رسد حل کردن دستگاه $AX=b$ کار ساده‌ای باشد. تنها کافی است دستگاه معادل $A'X=b'$ را بدست آورد. برای این کار نیز باید پایه $\beta'$ را بدست آورد. با توجه به اینکه $[T(v_i)]_\beta$ها ستون‌های ماتریس $A$ هستند، برای پیدا کردن پایه $\beta'$ باید به ترتیب از ستون اول ماتریس $A$ شروع کرده و تا جای ممکن ستون‌های مستقل خطی را انتخاب کنیم. بقیه ستون‌های ماتریس $A$ به صورت ترکیب خطی این ستون‌ها هستند. اما اینجا کار به اتمام نمی‌رسد و باید ماتریس $A'$ را کاملاً بدست آوریم. برای این کار لازم است بدانیم که هر یک از ستون‌های ماتریس $A$ چه ترکیب خطی‌ای از اعضای $\beta'$ اند. اما برای این کار باید یک دستگاه خطی دیگر را حل کنیم. توجه داشته باشید که ماتریس تغییر پایه از $\beta$ به $\beta'$ (که با $P$ نمایش داده‌ایم) وارون ماتریس $\left[[T(v_{p_1})]_\beta\middle|\dots\middle|[T(v_{p_n})]_\beta\right]$ است و محاسبه این وارون خود منجر به حل یک دستگاه خطی دیگر خواهد شد.
بنابراین اگرچه می‌دانیم که دستگاه $AX=b$ را می‌توان به دستگاه جدیدی تبدیل کرد که جواب‌های آن به سادگی بدست می‌آیند، اما تاکنون روش مناسبی برای بدست آوردن دستگاه جدید ارائه نداده‌ایم. در ادامه برای بدست آوردن دستگاه ساده $A'X=b'$، پایه $\beta$ را در طی چند مرحله به پایه $\beta'$ تبدیل می‌کنیم که در طی هرکدام تغییرات دستگاه به راحتی و بدون نیاز به حل یک دستگاه خطی پیچیده قابل تشخیص است.

**گزاره. با تغییرات زیر می‌توان از هر پایه مرتب $\beta$ به هر پایه مرتب دیگر $\beta'$ رسید.**

- **عوض کردن جای دو عضو پایه.**
- **ضرب کردن عددی ناصفر در یک عضو پایه**
- **جمع کردن مضربی از یک عضو پایه با عضو دیگر.**

دقت کنید اگر هر کدام از عمل‌های بالا روی یک پایه انجام شود نتیجه باز یک پایه است و دوباره می‌توان با انجام یکی از عمل‌های بالا از پایه جدید به پایه قبلی رسید. به اعمال بالا اعمال *پایه‌ای مقدماتی* می‌گوییم. در واقع با انجام این اعمال روی یک مجموعه مرتب از بردارها فضای تولید شده توسط آن بردارها تغییر نمی‌کند.
اثبات. فرض کنید $\beta=\{w_1,\dots,w_m\}$ و $\beta'=\{w'_1,\dots,w'_m\}$ و فرض کنید $i$ عضو اول $\beta$ با $i$ عضو اول $\beta'$ برابر باشند ($i$ می‌تواند صفر باشد.)

$$w'_1=w_1,\dots,w'_i=w_i$$

---

نشان می‌دهیم با انجام اعمال بالا می‌توان از پایه $\beta$ به پایه‌ای رسید که $(i+1)$ عضو اول آن با $(i+1)$ عضو اول $\beta'$ برابر است و در نتیجه با ادامه این کار از پایه $\beta$ به پایه $\beta'$ می‌رسیم. $w'_{i+1}$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی اعضای $\beta$ نوشت.

$$w'_{i+1} = t_1w_1 + \cdots + t_iw_i + t_{i+1}w_{i+1} + \cdots + t_mw_m$$

یکی از ضرایب $t_{i+1},\dots,t_m$ مانند $t_s$ باید ناصفر باشد، زیرا در غیر این صورت $w'_{i+1}$ به صورت ترکیب خطی $w_1,\dots,w_i$ خواهد بود و چون $w'_1 = w_1,\dots,w'_i = w_i$، $\{w'_1,\dots,w'_i,w'_{i+1}\}$ نمی‌تواند مستقل خطی باشد، در حالی که اعضای پایه باید مستقل خطی باشند! با ضرب کردن $w_s$ در $t_s$ و جابجا کردن آن با $w_{i+1}$ می‌توان فرض کرد $t_{i+1} = 1$. به عبارت دیگر می‌توان به وضعیت زیر رسید.

$$w'_{i+1} = t_1w_1 + \cdots + t_iw_i + w_{i+1} + \cdots + t_mw_m$$

اگر برای هر $j \neq i+1$ ، حاصل‌ضرب $t_j$ در $w_j$ را با $w_{i+1}$ جمع کنیم پایه‌ای بدست می‌آید که عضو $i+1$ام آن برابر $w'_{i+1}$ است. در طول انجام این اعمال اعضای $w_1,\dots,w_i$ تغییر نمی‌کنند بنابراین $i+1$ عضو اول این پایه برابر $i+1$ عضو اول پایه $\beta'$ است.

اکنون باید تاثیر هر یک از تغییرهای بالا را بر یک دستگاه خطی بررسی کنیم.

فرض کنید $\beta$ یک پایه مرتب برای $W$ باشد و پایه‌های مرتب $\beta_1$ و $\beta_2$ و $\beta_3$ به ترتیب از روی پایه $\beta$ با جابجا کردن عضو $i$ام و $j$ام، ضرب کردن عضو $i$ام در عدد ناصفر $r$ و جمع کردن $r$ برابر عضو $j$ام با عضو $i$ام بدست آیند. به عبارت دیگر

$$\begin{aligned}
\beta &= \{w_1,\dots,w_i,\dots,w_j,\dots,w_m\}\\
\beta_1 &= \{w_1,\dots,w_j,\dots,w_i,\dots,w_m\}\\
\beta_2 &= \{w_1,\dots,rw_i,\dots,w_j,\dots,w_m\}\\
\beta_3 &= \{w_1,\dots,rw_j + w_i,\dots,w_j,\dots,w_m\}
\end{aligned}$$

نمایش یک بردار $w \in W$ در پایه‌های بالا به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
w &= t_1w_1 + \cdots + t_iw_i + \cdots + t_jw_j + \cdots + t_mw_m\\
w &= t_1w_1 + \cdots + t_jw_j + \cdots + t_iw_i + \cdots + t_mw_m\\
w &= t_1w_1 + \cdots + \frac{t_i}{r}(rw_i) + \cdots + t_jw_j + \cdots + t_mw_m\\
w &= t_1w_1 + \cdots + t_i(w_i + rw_j) + \cdots + (t_j - rt_i)w_j + \cdots + t_mw_m
\end{aligned}$$

بنابراین

$$[w]_\beta = \begin{bmatrix} t_1\\ \vdots\\ t_i\\ \vdots\\ t_j\\ \vdots\\ t_m\end{bmatrix},\quad [w]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} t_1\\ \vdots\\ t_j\\ \vdots\\ t_i\\ \vdots\\ t_m\end{bmatrix}\quad [w]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} t_1\\ \vdots\\ \dfrac{t_i}{r}\\ \vdots\\ t_j\\ \vdots\\ t_m\end{bmatrix}\quad [w]_{\beta_3} = \begin{bmatrix} t_1\\ \vdots\\ t_i\\ \vdots\\ t_j - rt_i\\ \vdots\\ t_m\end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر $[w]_{\beta_1}$، $[w]_{\beta_2}$ و $[w]_{\beta_3}$ از روی $[w]_\beta$ به ترتیب با جابجا کردن سطر $i$ام و $j$ام، ضرب کردن سطر $i$ام در عدد ناصفر $r^{-1}$ و جمع کردن $-r$ برابر سطر $i$ام با سطر $j$ام بدست می‌آیند.

به این ترتیب اگر نمایش رابطه $T(v) = w$ در پایه‌های $\beta$، $\beta_1$، $\beta_2$ و $\beta_3$ به ترتیب برابر $AX = b$ و $A_1X = b_1$ و $A_2X = b_2$ و $A_3X = b_3$ باشد آنگاه ستون $b_1$ و ستون‌های ماتریس $A_1$ از جابجا کردن درایه‌های $i$ام و $j$ام ستون $b$ و ستون‌های ماتریس $A$ بدست می‌آیند، به عبارت دیگر ماتریس $[A_1 \mid b_1]$ از جابجا کردن سطر $i$ام و سطر $j$ام ماتریس $[A \mid b]$ بدست می‌آید. به همین صورت ماتریس

---

$[A_2 \mid b_2]$ از ضرب کردن سطر $i$ام ماتریس $[A \mid b]$ در عدد ناصفر $r^{-1}$ بدست می‌آید و $[A_3 \mid b_3]$ از جمع کردن $-r$ برابر سطر $i$ام با سطر $j$ام ماتریس $[A \mid b]$ بدست می‌آید.

اگر $E_i$ ماتریس تغییر پایه از $\beta$ به $\beta_i$ باشد ($i = 1,2,3$)، آنگاه

$$A_i = [T]^{\alpha}_{\beta_i} = [I_W T]^{\alpha}_{\beta_i} = [I_W]^{\beta}_{\beta_i} \cdot [T]^{\alpha}_{\beta} = E_i A$$
$$b_i = [w]_{\beta_i} = [I_W(w)]_{\beta_i} = [I_W]^{\beta}_{\beta_i} \cdot [w]_{\beta} = E_i b$$

به عبارت دیگر $[A_i \mid b_i] = E_i[A \mid b]$. به ماتریس‌های $E_i$ *ماتریس‌های مقدماتی* می‌گوییم.

دقت کنید که ماتریس‌های مقدماتی وارون‌پذیرند و از آنجا که هر ماتریس وارون‌پذیر نمایش نگاشت همانی در دو پایه مناسب فضا است و هر دو پایه را نیز می‌توان با انجام دنباله‌ای از اعمال پایه‌ای مقدماتی به هم تبدیل کرد، هر ماتریس وارون‌پذیر از ضرب کردن دنباله‌ای از ماتریس‌های مقدماتی در ماتریس همانی بدست می‌آید. به عبارت دیگر هر ماتریس وارون‌پذیر برابر حاصل ضرب تعدادی ماتریس مقدماتی است.

به ماتریس $m \times (n+1)$ تایی $[A \mid b]$ که از اضافه کردن ستون $b$ به ماتریس ضرایب $A$ بدست می‌آید، *ماتریس افزوده دستگاه* $AX = b$ می‌گویند. این ماتریس کاملاً دستگاه $AX = b$ را معرفی می‌کند. به اعمال زیر که روی سطرهای یک ستون یا یک ماتریس اعمال می‌شوند نیز *اعمال سطری مقدماتی* می‌گوییم.

۱. جابجا کردن دو سطر.

۲. ضرب کردن یک سطر در عددی ناصفر.

۳. جمع کردن مضربی از یک سطر با سطر دیگر.

دو ماتریسی را که به این صورت به هم تبدیل می‌شوند هم‌ارز سطری می‌گوییم. به این ترتیب دو ماتریس هم اندازه $M$ و $N$ هم‌ارز سطری اند اگر و تنها اگر فضای تولید شده توسط سطرهای آنها برابر باشند.

طبق آنچه بیان شد با انجام این اعمال روی سطرهای ماتریس افزوده یک دستگاه خطی جواب‌های دستگاه خطی تغییر نمی‌کند و می‌توان آن را به دستگاه ساده‌ای تبدیل کرد که جواب‌های آن به سادگی بدست می‌آیند. در واقع با انجام این اعمال روی ماتریس افزوده یک دستگاه می‌توان قسمت ضرایب آن ماتریس را به شکل ساده سطری تبدیل کرد.

**گزاره. سه ویژگی زیر برای دو دستگاه $AX = b$ و $A'X = b'$ با هم معادل اند.**

**۱. این دو دستگاه خطی به ترتیب نمایش‌های معادله $T(v) = w$ در پایه‌های $\alpha$ و $\beta$و $\alpha$ و $\beta'$ اند.**

**۲.ماتریس وارون‌پذیر $P$ وجود دارد که $A' = PA$ و $b' = Pb$.**

**۳. ماتریس افزوده این دو دستگاه هم‌ارز سطری اند.**

**دو دستگاه $AX = b$ و $A'X = b'$ را که در شرایط بالا صدق کنند *دو دستگاه هم‌ارز* می‌نامیم.**

واضح است که جواب‌های دو دستگاه خطی هم‌ارز با یکدیگر برابرند. عکس این گزاره نیز درست است.

**قضیه. هر دو دستگاه هم اندازه $AX = b$ و $A'X = b'$ که دارای جواب بوده و مجموعه جواب‌های آنها با هم برابر باشند هم‌ارز هستند.**

اثبات. فرض کنید نگاشت‌های خطی $L_{A'}, L_A : F^n \to F^m$ به صورت زیر تعریف شده باشند.

$$L_{A'}(X) = A'X \text{ و } L_A(X) = AX$$

هسته‌های این دو نگاشت خطی با هم برابر هستند زیرا هسته یک نگاشت خطی برابر انتقال هر یک از سطح‌های تراز آن به مبدا است و یکی از سطح‌های تراز $L_A$ و یکی از سطح‌های تراز $L_{A'}$ با یکدیگر برابرند.

فرض کنید $\{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_k\}$ پایه‌ای برای هسته این دو نگاشت باشد که آن را به پایه $\alpha = \{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_k, v_1, \ldots, v_{n-k}\}$ برای $F^n$ گسترش داده‌ایم.

---

$u_1 = L_A(v_1), \dots, u_{n-k} = L_A(v_{n-k})$ پایه‌ای برای $\operatorname{Im} L_A$ است. آن را به پایه‌ای مانند $\beta = \{u_1, \dots, u_{n-k}, u_{n-k+1} \dots, u_m\}$ برای $F^m$ گسترش می‌دهیم.
همچنین $u'_1 = L_{A'}(v_1), \dots, u'_{n-k} = L_{A'}(v_{n-K})$ پایه‌ای برای $\operatorname{Im} L_{A'}$ است. آن را نیز به پایه‌ای مانند $\beta' = \{u'_1, \dots, u'_{n-k}, u'_{n-k+1} \dots, u'_m\}$ برای $F^m$ گسترش می‌دهیم. نگاشت خطی وارون‌پذیر $S : F^m \to F^m$ را که پایه مرتب $\beta$ را به پایه مرتب $\beta'$ می‌نگارد در نظر بگیرید. بنابراین

$$S(u_1) = u'_1, \quad \dots \quad , S(u_m) = u'_m$$

نگاشت خطی $SL_A$ برابر $L_{A'}$ است زیرا اثر این دو نگاشت روی پایه $\alpha$ برابر است. در نتیجه در پایه‌های استاندارد $F^n$ و $F^m$ داریم

$$A' = [L_{A'}] = [SL_A] = [S] \cdot [L_A] = [S] \cdot A$$

از آنجا که $S$ یک نگاشت وارون‌پذیر است $P = [S]$ یک ماتریس وارون‌پذیر خواهد بود که برای آن داریم $A' = PA$. اگر $X_0$ یک جواب دستگاه $AX = b$ باشد، $X_0$ جوابی برای دستگاه $A'X = b'$ نیز است بنابراین

$$b' = A'X_0 = (PA)X_0 = P(AX_0) = Pb$$

بنابراین دو دستگاه $AX = b$ و $A'X = b'$ هم‌ارز هستند.
حال فرض کنید $A = [T]^\alpha_\beta$. با انجام اعمال پایه‌ای مقدماتی روی پایه $\beta$، روی ماتریس نمایش $[T]^\alpha_\beta$ اعمال سطری مقدماتی انجام می‌شود.
اگر سطرهای $A$ را به عنوان بردارهایی در $F^n$ در نظر بگیریم آنگاه با انجام اعمال بالا فضای تولید شده توسط آنها تغییر نمی‌کند. همچنین بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های این ماتریس نیز تغییر نمی‌کند و در واقع این مقدار برابر بعد تصویر نگاشت خطی $T$ است. از طرفی با انجام این اعمال می‌توانیم به نمایش ماتریسی ساده سطری برای $T$ برسیم. در یک ماتریس ساده سطری واضح است که بعد فضای تولید شده توسط سطرها و بعد فضای تولید شده توسط ستون‌ها هر دو برابر $r$ هستند. بنابراین بعد فضای تولید شده توسط سطرهای $A$ و بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های آن با هم برابر هستند. توجه کنید که فضای تولید شده توسط سطرها در $F^n$ و فضای تولید شده توسط ستون‌ها در $F^m$ قرار دارد و کاملاً با یکدیگر متفاوت اند. ولی بعد آنها با هم برابر است.

**قضیه. بعد فضای تولید شده توسط سطرهای یک ماتریس و بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های آن با هم برابرند.**

تا کنون همه جا ماتریس، نمایشی برای یک نگاشت خطی بود و هر ویژگی آن متناظر ویژگی‌ای برای نگاشت خطی متناظر بود. اما بنظر می‌رسد که این ویژگی اخیر ماتریس‌ها متناظر ویژگی‌ای برای نگاشت‌های خطی نیست. اما در فصل قبل دیدیم که این ویژگی ماتریس‌ها از این نکته نتیجه می‌شود که بعد تصویر یک نگاشت خطی با بعد ترانهاده آن نگاشت خطی برابر است. به بعد فضای تولید شده توسط سطرهای ماتریس $A$ یا بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های آن *رتبه* آن ماتریس می‌گوییم و آن را با نماد $rank(A)$ نمایش می‌دهیم.
توجه کنید که $rank(A)$ در واقع بعد تصویر نگاشت خطی‌ای است که نمایش آن ماتریس $A$ است. به عبارت دیگر $rank([T]^\alpha_\beta) = \dim \operatorname{Im}(T)$. به همین سبب معمولاً به بعد تصویر یک نگاشت خطی *رتبه آن نگاشت خطی* نیز گفته می‌شود. بنابراین $rank(T) := rank([T]^\beta_\alpha) = \dim \operatorname{Im}(T)$.

تمرین. یک ماتریس را با رتبه کامل می‌گوییم هرگاه رتبه آن در بین ماتریس‌های هم اندازه خود بیشترین مقدار را داشته باشد. بنابراین یک ماتریس $m \times n$ با رتبه کامل است اگر و تنها اگر رتبه آن برابر $\min\{m,n\}$ باشد. نشان دهید یک ماتریس با رتبه کامل است اگر و تنها اگر با حذف تعدادی سطر و یا با حذف تعدادی ستون، به یک ماتریس وارون‌پذیر تبدیل شود.

تمرین. یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر با ماتریس همانی هم‌ارز باشد. وارون آن هم با انجام همان اعمال سطری مقدماتی که برای تبدیل آن ماتریس به همانی لازم است روی ماتریس همانی بدست می‌آید.

تمرین. فرض کنید $A$ و $B$ دو ماتریس ساده سطری اند که با هم هم‌ارز سطری نیز هستند. نشان دهید $A = B$.

### خلاصه مطالب

در این قسمت نکاتی راجع به دستگاه‌های خطی بیان شد که می‌تواند در حل آنها مفید باشد. خلاصه‌ای از این مطالب در زیر ارائه می‌شود.

۱. دستگاه $AX = b$ کاملاً از روی ماتریس $[A \mid b]$ مشخص می‌شود. به این ماتریس، ماتریس افزوده دستگاه $AX = b$ می‌گوییم. قسمت اول آن همان ماتریس ضرایب دستگاه است.

۲. با انجام اعمال زیر روی ماتریس افزوده یک دستگاه مجموعه جواب‌های آن تغییر نمی‌کند.

الف. جابجا کردن دو سطر.

ب. ضرب کردن یک اسکالر ناصفر در یک سطر.

ج. جمع کردن مضربی از یک سطر با سطر دیگر.

به این اعمال که روی سطرهای یک ماتریس انجام می‌شود اعمال سطری مقدماتی می‌گوییم. دو ماتریس را که به این صورت به هم تبدیل شوند هم‌ارز سطری می‌گوییم. به این ترتیب دو ماتریس هم اندازه $M$ و $N$ هم‌ارز سطری اند اگر و تنها اگر فضای تولید شده توسط سطرهای آنها برابر باشند.

دستگاه‌های $AX = b$ و $A'X = b'$ را هم‌ارز گوییم هرگاه ماتریس افزوده آنها هم‌ارز سطری باشند. بنابراین دو دستگاه هم‌ارز دارای مجموعه جواب‌های یکسانی هستند.

۳. برای هر عمل سطری مقدماتی روی ماتریس‌های $m \times n$ ماتریس وارون‌پذیر $m$تایی $E$ وجود دارد که $EA$ برابر است با انجام آن عمل سطری مقدماتی روی ماتریس $A$ است. بنابراین $E$ برابر است با حاصل آن عمل سطری مقدماتی روی ماتریس همانی $m$تایی.

۳. دو دستگاه هم اندازه $AX = b$ و $A'X = b'$ که دارای جواب باشند و مجموعه جواب‌های آنها یکسان باشد هم‌ارز اند.

۴. هر دستگاه $AX = b$ با دستگاه $A'X = b'$ هم‌ارز است که در آن $A'$ ماتریسی ساده سطری است. جواب‌های دستگاه $A'X = b'$ به سادگی قابل بیان است.

۵. بعد فضای تولید شده توسط سطرهای یک ماتریس برابر بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های آن است. به این عدد رتبه آن ماتریس می‌گوییم. رتبه یک نگاشت خطی را نیز برابر بعد تصویر آن تعریف می‌کنیم. بنابراین $rank(T) = rank([T]_\alpha^\beta) = \dim \mathrm{Im}(T)$

۶. ماتریس‌های وارون‌پذیر حاصل‌ضرب ماتریس‌های مقدماتی هستند. به عبارت یک ماتریس وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر هم‌ارز سطری با ماتریس همانی باشد.

## حل دستگاه‌های خطی

در قسمت قبل دو نکته راجع به یک دستگاه خطی بیان شد که می‌توان به کمک آنها دستگاه را حل کرد. در این قسمت این دو نکته به صورتی مستقل و به گونه‌ای ارائه می‌شوند که روش عملی برای حل دستگاه خطی بدست آید.

نکته ۱. مجموعه جواب‌های دستگاه خطی $AX = b$ با انجام اعمال زیر روی ماتریس $[A \mid b]$ نغییر نمی‌کند.

الف. جابجا کردن دو سطر

ب. ضرب کردن یک اسکالر ناصفر در یک سطر.

ج. جمع کردن مضربی از یک سطر با سطر دیگر.

نکته ۲. هر دستگاه $AX = b$ را می‌توان با اعمال بالا به دستگاه $A'X = b'$ تبدیل کرد که جواب‌های آن به سادگی بدست می‌آید.

دستگاه $AX = b$ را در نظر بگیرید که در آن

---

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

این دستگاه به شکل مجموعه معادلات زیر است.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

می‌توان روی این معادلات سه عمل زیر را انجام داد که جواب‌های این مجموعه معادلات تغییر نکند.

الف. جابجا کردن دو معادله $i$ام و $j$ام.

ب. ضرب کردن اسکالر ناصفر $r$ در معادله $i$ام.

ج. جمع کردن $r$ برابر معادله $i$ام با معادله $j$ام.

واضح است که این اعمال بازگشت پذیر هستند. بنابراین مجموعه معادلات ایجاد شده از این تغییرات به نوعی با مجموعه معادلات اول معادل است و مجموعه جواب‌های آنها یکسان است. هر یک از اعمال بالا تغییرات زیر را روی دستگاه خطی $AX = b$ ایجاد می‌کنند.

الف. دو سطر $i$ام و $j$ام ماتریس $A$ و همچنین ستون $b$ جابجا می‌شوند.

ب. سطر $i$ام ماتریس $A$ و همچنین ستون $b$ در عدد ناصفر $r$ ضرب می‌شود.

ج. $r$ برابر سطر $i$ام ماتریس $A$ با سطر $j$ام ماتریس $A$ جمع می‌شود. همچنین $r$ برابر سطر $i$ام ستون $b$ با $r$ برابر سطر $j$ام ستون $b$ جمع می‌شود.

اگر ستون $b$ را به ماتریس $A$ اضافه کنیم ماتریسی $m \times (n+1)$ تایی $[A \mid b]$ ایجاد می‌شود که کاملاً دستگاه $AX = b$ را مشخص می‌کند و اعمال بالا چیزی جز اعمال زیر روی این ماتریس نیستند.

الف. جابجا کردن دو سطر $i$ام و $j$ام.

ب. ضرب کردن اسکالر ناصفر $r$ در سطر $i$ام.

ج. جمع کردن $r$ برابر سطر $i$ام با سطر $j$ام.

به این اعمال که روی سطرهای یک ماتریس انجام می‌شود *اعمال سطری مقدماتی* می‌گوییم. دو ماتریسی را که با انجام تعدادی اعمال سطری مقدماتی به هم تبدیل می‌شوند *هم‌ارز سطری* می‌گوییم. به این ترتیب دو ماتریس هم اندازه $M$ و $N$ هم‌ارز سطری اند اگر و تنها اگر فضای تولید شده توسط سطرهای آنها برابر باشند.

به ماتریس $[A \mid b]$ *ماتریس افزوده* دستگاه $AX = b$ می‌گوییم. *دستگاه‌های خطی* $AX = b$ و $A'X = b'$ *را هم‌ارز* گوییم هرگاه ماتریس افزوده آنها هم‌ارز سطری باشند. بنابراین دو دستگاه هم‌ارز دارای مجموعه جواب‌های یکسانی هستند.

نشان می‌دهیم که با اعمال بالا می‌توان دستگاه خطی را به دستگاهی ساده تبدیل کرد که جواب‌های آن به سادگی بدست آیند.

## دستگاه‌های خطی خاص

ساده‌ترین دستگاه خطی دستگاهی است که هر سطر ناصفر آن تنها یک درایه ناصفر داشته باشد و آن هم برابر ۱ باشد. با جابجا کردن سطرهای این دستگاه خطی می‌توان فرض کرد که سطرهای صفر همگی زیر سطرهای ناصفر باشند. اگر ماتریس ضرایب چنین دستگاهی دارای $r$ سطر ناصفر باشد و درایه ناصفر سطر $s$ام نیز در ستون $p_s$ام باشد آنگاه معادلات متناظر با این دستگاه به شکل زیر خواهد بود.

-----------------------------------------------------------------------------

$$\begin{aligned} x_{p_1} &= b_1 \\ &\vdots \\ x_{p_r} &= b_r \\ 0 &= b_{r+1} \\ &\vdots \\ 0 &= b_m \end{aligned}$$

اگر $p_1,\dots,p_r$ متمایز باشند آنگاه شرط لازم و کافی برای وجود جواب برای این معادلات این است که $b_{r+1}=\cdots=b_m=0$ و در صورتی که این شرط برقرار باشد متغیرهای $x_{p_1},\dots,x_{p_r}$ به صورت یکتا بدست می‌آیند. مقدار بقیه متغیرها نیز مهم نیست، یعنی هر مقداری را می‌توان برای آنها در نظر گرفت. البته چنین دستگاهی خیلی ساده است و به ندرت با چنین دستگاهی مواجه می‌شویم.
اکنون اجازه می‌دهیم کمی دستگاه پیچیده‌تر باشد. فرض کنید ماتریس ضرایب دستگاه خطی دارای $r$ سطر ناصفر است که همگی بالای سطرهای صفر آن قرار دارند. مانند قبل فرض کنید که $r$ ستون $p_1,\dots,p_r$ وجود دارند که هر یک تنها یک درایه ناصفر دارند و مقدار آن هم برابر ۱ است. به علاوه درایه‌های ناصفر این ستون‌ها در سطرهای مختلف قرار دارند. با جابجا کردن سطرها می‌توان فرض کرد که درایه ناصفر ستون $p_s$ام در سطر $s$ام قرار داشته باشد.

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccc} & & & p_1 & & & & p_{r-1} & & & & p_r & & & \\ & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccccccc} * & \cdots & * & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 1 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

مجموعه معادلات متناظر این دستگاه به شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} x_{p_1} + \sum_{j\notin\{p_1,\dots,p_r\}} a_{1j}x_j &= b_1 \\ &\vdots \\ x_{p_r} + \sum_{j\notin\{p_1,\dots,p_r\}} a_{rj}x_j &= b_r \\ 0 &= b_{r+1} \\ &\vdots \\ 0 &= b_m \end{aligned}$$

توجه کنید که در هر یک از $r$ معادله اول تنها یکی از متغیرهای $x_{p_1},\dots,x_{p_r}$ ظاهر می‌شود. بنابراین شرط لازم و کافی برای وجود جواب چنین دستگاهی نیز $b_{r+1}=\cdots=b_m=0$ است و در صورت برقرار بودن این شرط مقدار متغیرهای $x_{p_1},\dots,x_{p_r}$ به صورت یکتا از روی مقادیر دیگر متغیرها بدست می‌آید. در این دستگاه نیز می‌توان هر مقداری را برای متغیرهای $x_j$ که $j\notin\{p_1,\dots,p_r\}$ انتخاب کرد و جواب از روی آن به صورت یکتا بدست می‌آید. بنابراین جواب‌های چنین دستگاهی نیز به سادگی نیز بدست می‌آیند.
حال نوع دیگری از دستگاه‌های خطی خاص را در نظر می‌گیریم.
ماتریس $A$ را *پلکانی* می‌گوییم هرگاه سطرهای ناصفر آن بالای سطرهای صفر قرار داشته باشند و اولین درایه ناصفر هر یک بعد از اولین درایه ناصفر سطر قبلی قرار داشته باشد. اولین درایه ناصفر یک سطر را در یک ماتریس *درایه پیشرو* آن سطر می‌گوییم. به این ترتیب سطرهای صفر یک ماتریس دارای درایه پیشرو نیستند. با این تعریف ماتریس $A$ با $r$ سطر ناصفر پلکانی است هرگاه سطرهای ناصفر آن همان سطرهای اول تا $r$ام آن باشند و اگر درایه پیشرو سطر $s$ام در ستون $p_s$ام قرار داشته باشد آنگاه $p_1<p_2<\cdots<p_r$. در زیر ماتریس اول پلکانی است ولی بقیه پلکانی نیستند.

---

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جواب‌های دستگاهی که ماتریس ضرایب آن یک ماتریس پلکانی است نیز به سادگی بدست می‌آیند. شاید شما روش عملی ساده‌ای برای بدست آوردن جواب‌های چنین دستگاهی در نظر داشته باشید. اما با چند عمل سطری مقدماتی ساده روی یک دستگاه با ماتریس ضرایب پلکانی می‌توان آن را به دستگاه خطی از نوع قبل تبدیل کرد.

دو نوع عمل سطری مقدماتی زیر را روی یک ماتریس پلکانی در نظر بگیرید.

۱. ضرب کردن یک سطر ماتریس پلکانی در عددی ناصفر. با این عمل ماتریس حاصل همچنان پلکانی باقی می‌ماند و جای درایه‌های پیشرو آن نیز عوض نمی‌شود.

۲. جمع کردن مضربی از یک سطر با یک سطر بالاتر. با این عمل در یک ماتریس پلکانی ماتریس حاصل همچنان پلکانی است. به‌علاوه هم جای درایه‌های پیشرو و هم مقدار آنها تغییر نمی‌کند.

بنابراین با انجام اعمال از نوع اول می‌توان فرض کرد که درایه‌های پیشرو ماتریس پلکانی برابر ۱ هستند و با انجام اعمال نوع دوم می‌توان فرض کرد که هر درایه دیگری که در ستون یک درایه پیشرو قرار دارد برابر صفر است.

به ماتریس پلکانی که مقدار درایه‌های پیشرو آن برابر ۱ است و هر درایه دیگری که در ستون یک درایه پیشرو قرار دارد برابر صفر است، ماتریس *ساده سطری* می‌گوییم.

به این ترتیب می‌توان دستگاهی با ماتریس ضرایب پلکانی را به دستگاهی با ماتریس ضرایب ساده سطری تبدیل کرد. فرض کنید $A'$ ماتریسی ساده سطری با $r$ سطر ناصفر باشد که درایه‌های پیشرو سطرهای آن در ستون‌های $p_1, \ldots, p_r$ قرار داشته باشند.

$$A' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccc} & & & p_1 & & & & p_2 & & & & p_3 & & & \\ & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right] \end{array}$$

مجموعه معادلات متناظر با دستگاه $A'X = b'$ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} x_{p_1} + \sum_{j \notin \{p_1, \ldots, p_r\}} a'_{1j} x_j &= b'_1 \\ &\vdots \\ x_{p_r} + \sum_{j \notin \{p_1, \ldots, p_r\}} a'_{rj} x_j &= b'_r \\ 0 &= b'_{r+1} \\ &\vdots \\ 0 &= b'_m \end{aligned}$$

بنابراین دستگاه $A'X = b'$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $b'_{r+1} = \cdots = b'_m = 0$. در این صورت مقادیر $x_j$ را برای $j \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$ می‌توان آزادانه انتخاب کرد و از روی آن مقادیر $x_{p_1}, \ldots, x_{p_r}$ به صورت یکتا مشخص می‌شوند.

در این مثال‌ها متغیرهای $x_{p_1}, \ldots, x_{p_r}$ را *متغیرهای وابسته* و بقیه متغیرها را *متغیرهای آزاد* می‌نامیم.

مثال.

---

.....................................................

## روش حل دستگاه خطی دلخواه

هدف این قسمت این است که دستگاه دلخواه $AX=b$ را با انجام اعمال سطری مقدماتی به دستگاهی مانند $A'X=b'$ تبدیل کنیم که در آن $A'$ ماتریسی پلکانی باشد. از آنجا که دستگاه‌های خطی با ماتریس ضرایب پلکانی به راحتی حل می‌شوند در صورتی که بتوان این کار را انجام داد جواب‌های دستگاه خطی اول نیز به سادگی بدست می‌آیند.

فرض کنید اولین ستون ناصفر $A$ ستون $p_1$ باشد. با جابجایی سطرها می‌توان فرض کرد که $a_{1p_1}$ ناصفر است. با جمع کردن مضارب مناسب سطر اول با دیگر سطرها همه درایه‌های دیگر ستون $p_1$ام می‌توان را صفر کرد. بنابراین درایه‌های پیشرو دیگر سطرها در ستون‌های بعد از ستون $p_1$ام قرار می‌گیرند و در صورتی که روی بقیه سطرها اعمال سطری مقدماتی انجام دهیم این درایه‌های پیشرو همچنان در ستون‌های بعد از ستون $p_1$ام قرار خواهند داشت. بنابراین می‌توانیم سطر اول را نادیده بگیریم و سعی کنیم ماتریس حاصل از حذف سطر اول را با اعمال سطری مقدماتی پلکانی کنیم. در صورتی که این کار ممکن باشد ماتریس اصلی نیز پلکانی خواهد شد.

این روند را می‌توان به صورت استقرایی روی ماتریس کوچک‌تر حاصل از حذف سطر اول انجام داد. به این ترتیب بعد از چند مرحله به ماتریس صفر یا ماتریسی با یک سطر می‌رسیم که به روشنی پلکانی هستند.

مثال‌ها

..............................................

-------------------------------------------------------------------------------