سوال:

الف) فرض کنید V یک زیرفضا از R^n و $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ یک پایه برای V باشد. ثابت کنید که تمام پایه‌های V دارای k بردار در V هستند.

ب) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ است و $nullspace$ آن یک صفحه در R^3 است. همچنین $range$ آن توسط بردار غیر صفر v در R^5، $span$ می‌شود. m و n را تعیین نمایید و $rank$ و $nullity$ ماتریس A را بدست آورید.

پاسخ:

الف) اگر $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_l\}$ یک پایه دلخواه برای زیرفضای V باشد هدف ما نشان دادن $l = k$ است.

از آنجاییکه B یک پایه است، می‌توان گفت که یک $spanning\ set$ شامل k بردار برای V می‌باشد. پس مجموعه‌ای از $k+1$ و یا تعداد بیشتر بردار در V وابسته خطی می‌باشند. از آنجایی‌که B′ یک پایه است، پس مستقل خطی است. پس $l \le k$ می‌باشد.

از طرفی B′ یک پایه است پس یک $spanning\ set$ برای V می‌باشد که دارای l بردار است. پس می‌توان گفت هر مجموعه دارای $l+1$ و یا تعداد بیشتر بردار در V وابسته خطی است. از طرفی B نیز یک پایه است که مستقل خطی است. پس $k \le l$ است.

می‌توان نتیجه گرفت که $l = k$ می‌باشد.

ب) برای ماتریس $m \times n$ به نام A می‌توان گفت $null\ space$ آن دارای بردارهای xای می‌باشد که $Ax = 0$. پس x باید *n-dimensional* باشد. از آنجاییکه $null\ space$ یک زیرفضا از R^3 است، می‌توان نتیجه گرفت $n = 3$.

$Range$ ماتریس A شامل بردارهای yای است که $y = Ax$ به طوری که $x \in R^n$. بنابراین y باید *m-dimensional* باشد. پس $range$ یک زیرفضا از R^5 است و $m = 5$.

از آنجایی‌که یک صفحه یک زیرفضای ۲بعدی است، پس $nullity = 2$ و $range$ توسط یک بردار v، $span$ می‌شود. بنابر این v یک پایه برای $range$ است و $\text{rank} = 1$.

همچنین می‌توان نوشت :

$$\text{rank of } A + \text{nullity of } A = n.$$

پس $n = 3$ و $nullity = 2$ و $rank = 1$.