

کاربرد های جبر خطی

نیم سال دوم ۹۶-۹۷

مدرس: دکتر امیرمزلقانی

دانشکده ی مهندسی کامپیوتر

فصل اول (معادلات خطی در جبر خطی)

توجه:

- این تمرین از مباحث مربوط به فصل اول (معادلات خطی در جبر خطی) طراحی شده است که شامل ۶ مساله و دو تمرین شبیه سازی می باشد.
- کلاس تدریس یار هفته آینده مربوط به رفع مشکلات این تمرین هست. ولی تا اون موقع اگه سوال داشتن از طریق

aut.la2018@gmail.com

حتما بپرسید.

- مساله ها را در یک فایل pdf و فایل کد های مربوط به تمرین های شبیه سازی و گزارش های آنها را به طور مجزا در یک پوشه قرار دهید.
- پاسخ های تمرین را در قالب یک فایل به صورت الگوی زیر آپلود کنید.

9531000_Gabriel_Batistuta_HW1.zip

- مهلت تحویل جمعه ۱۱ اسفند ۱۳۹۶ ساعت ۲۳:۵۴

مسئله ۱.

ماتریس های زیر متعلق ماتریس افزوده سه دستگاه معادله خطی است، در هر مرحله پس از مشخص کردن جایگاه (درایه) و ستون محوری و با استفاده از روش حذفی گاوس جردن ماتریس ها را به شکل کاهش یافته سطری در بیاورید و سپس در مورد جواب دستگاه ها بحث کنید. (در صورت داشتن جواب عمومی، جواب ها را به صورت پارامتریک بنویسید.)

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ب)} \quad \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{ج)} \quad \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مسئله ۲.

مقدار λ را طوری تعیین کنید که
الف) دستگاه معادلات زیر جواب ناصفر داشته باشد:

$$\begin{cases} \lambda x + 3y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

(بیش از آنکه جواب نهایی شما مهم باشد روش حل و نوع نگاه شما به آن مهم است. روشی که قابل تعمیم به مسائل دیگر باشد)

ب) دستگاه معادلات زیر فقط جواب صفر داشته باشد :

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

مسئله ۳.

درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه دهید و در صورت درست بودن آن را اثبات کنید:

۱. اگر $\forall i \ v_i \in \mathbb{R}^n$ و $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک مجموعه وابسته خطی باشد، هریک از v_i ها را می توان به صورت یک ترکیب خطی از بقیه اعضا نوشت.

۲. اگر s_1 و s_2 زیر مجموعه هایی از بردار های \mathbb{R}^n باشند که $span(s_1) = span(s_2)$ آنگاه $s_1 = s_2$.

۳. اگر $A \subset \mathbb{R}^n$ و A مستقل خطی باشد آنگاه $: span(A) = \mathbb{R}^n$.

۴. اگر $span(A) = \mathbb{R}^n$ آنگاه A یک مجموعه مستقل خطی از \mathbb{R}^n است.

۵. اگر w یک ترکیب خطی از بردار های v_1, v_2, \dots, v_n باشد، آنگاه $\{w, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مستقل خطی است.

۶. اگر $S \subseteq \mathbb{R}^n$ مستقل خطی باشد و $v \in (\mathbb{R}^n - span(S))$ آنگاه $S \cup \{v\}$ نیز مستقل خطی است.

مسئله‌ی ۴.

ماتریس سودوکو یک ماتریس 9×9 که اعداد $1, 2, \dots, 9$ در هر سطر در هر ستون و هر بلوک 3×3 آن ظاهر شده اند، اگر S یک ماتریس سودوکو باشد به سوالات زیر پاسخ دهید:

$$1. \text{ حاصلضرب } S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{9 \times 1} \text{ را بیابید.}$$

۲. کدام یک از اعمال سطری روی S ، مجدداً یک ماتریس سودوکو به ما می دهد؟

مسئله‌ی ۵.

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ است که:

۱. برای هر b در \mathbb{R}^n معادله $Ax = b$ حداکثر یک جواب دارد، ثابت کنید ستون های ماتریس A باید مستقل خطی باشند.

۲. که n تا از ستون های آن محوری هستند، ثابت کنید برای هر b در \mathbb{R}^n معادله \mathbb{R}^n حداکثر یک جواب دارد.

مسئله‌ی ۶.

مشخص کنید هریک از تبدیلات زیر خطی هستند یا نه، در صورتی که خطی باشند ماتریس استاندارد آن ها را نیز بیابید.

(الف)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x^2, 2y)$$

(ب)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x + y, -y)$$

(ج) اگر تبدیل خطی زیر به شکل:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (v_1, v_2) \mapsto \left(\frac{v_1 + v_2}{2}, \frac{v_1 + v_2}{2} \right)$$

آنگاه در مورد $f(f(v_1, v_2))$ چه می توان گفت؟ (مشخص کنید خطی هست یا نه و در صورت خطی بودن ماتریس استاندارد آن را بیابید.)

سوالات شبیه سازی

مسئله ۷.

دستگاه معادله زیر را در نظر بگیرید

$$x_1 + 3x_3 + x_5 = -1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 6x_5 = 1$$

$$3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 - 19x_5 = 6$$

$$10x_1 - 4x_2 + 38x_3 + 2x_4 - 12x_5 = 0$$

۱. ماتریس افزوده این دستگاه را به نام A ایجاد کنید.
۲. با استفاده از اعمال سطری مقدماتی، ماتریس A را به فرم سطری مقدماتی تبدیل کنید.
۳. با استفاده از نتیجه قسمت قبل، فرم کاهش یافته سطری ستونی ماتریس A را به دست آورید.
۴. مجموعه پاسخ این دستگاه را به دست آورید. (مشخص کنید که آیا این دستگاه پایدار است یا خیر و در صورت پایدار بودن اگر متغیر آزاد دارد، متغیرهای پایه ای را بر حسب آنها به دست آورید.)
(راهنمایی: برای بخش ۲ عملیات سطری مقدماتی در متلب به صورت زیر قابل انجام هستند:
 - دستور زیر، ۴- برابر سطر اول ماتریس A را به سطر سوم این ماتریس اضافه می کند
 $A(3,:) = A(3,:) + (-4)*A(1,:)$
 - دستور زیر، مقادیر سطر سوم ماتریس A را دو برابر می کند
 $A(3,:) = 2*A(3,:)$
 - دستور زیر، سطر دوم و سوم ماتریس A را جا به جا می کند
 $A([2\ 3],:) = A([3\ 2],:)$

(

مسئله ۸. Elimination Gauss-Jordan

به فرایند اعمال کردن عملیات سطری مقدماتی (*EROs*) بر روی یک ماتریس برای تبدیل آن به فرم کاهش یافته سطری مقدماتی، حذف گاوس جردن گفته می شود و اگر تنها به فرم سطری مقدماتی بسنده کنیم به آن حذف گاوس گفته می شود. در این تمرین، شما باید یک تابع بنویسید که با گرفتن یک ماتریس به عنوان ورودی و با اعمال عملیات سطری مقدماتی بر روی آن، فرم کاهش یافته سطری مقدماتی آن و تعداد عملیات سطری مقدماتی انجام شده به این منظور را برگرداند.

جزئیات این تابع که آن را *MyRREF* می نامیم به صورت شبه کد در ادامه آمده است. فرض کنید ماتریس ورودی A ، دارای ابعاد $m \times n$ باشد. در این شبه کد، نام تابع های *MATLAB* را که به این منظور می توانید استفاده کنید به رنگ قرمز و کامنت ها را به رنگ آبی مشخص کرده ایم. همان طور که در *MATLAB* نیز استفاده می شود، $A(i, j)$ بیانگر درایه i, j ام ماتریس A می باشد و $A(i, :)$ بیانگر سطر i ام ماتریس A است. در این شبه کد عملیات سطری مقدماتی بر روی خود ماتریس ورودی A اعمال می شوند، لذا در نهایت ماتریس کاهش یافته سطری مقدماتی آن در خود A قرار می گیرد و n_e تعداد عملیات سطری مقدماتی انجام شده را مشخص می کند.

در پیاده سازی استاندارد این تابع، تفاوت های محدودی وجود دارد. برای مثال بزرگ ترین عدد در یک ستون به عنوان *pivot* استفاده می شود در حالی که در شبه کد فوق، اول عدد غیر صفر انتخاب می گردد.

۱. این تابع را همانند شبه کد بیان شد پیاده سازی کنید. همان طور که بیان شد این تابع باید یک ماتریس ورودی A را گرفته و کاهش یافته سطری مقدماتی آن و تعداد عملیات سطری مقدماتی استفاده شده را بازگرداند. شما می توانید برای اطمینان از درستی تابع خود، خروجی آن را با خروجی تابع آماده متلب به نام `rref` مقایسه کنید. یک روش برای انجام این مقایسه به صورت زیر است:

`[A1, n1] = MyRREF(A); A2 = rref(A);`

`normdiff = norm(A1 - A2);`

خروجی تابع `norm` یک ماتریس که تمام درایه های آن صفر باشد، صفر خواهد بود. بنابراین اگر خروجی شما برابر خروجی `rref` باشد، حاصل $A_1 - A_2$ صفر خواهد شد و در نتیجه `norm` آن هم صفر است. ولی اگر تفاوت اندکی بین A_1 و A_2 وجود داشته باشد، `normdiff` یک عدد کوچک غیر صفر خواهد بود و اگر مقدار بزرگی را شود احتمالاً به جای کار اشتباه کرده اید!

۲. بررسی کنید که با تغییر تعداد سطر ها و ستون های ماتریس ورودی، تعداد عملیات لازم برای تبدیل به فرم کاهش یافته سطری مقدماتی چه تغییری می کند. به طور خاص برای حالت های زیر تعداد عملیات لازم را به دست آورید. در هر حالت ماتریس ورودی خود را با استفاده از اعداد رندم و از طریق دستور

`A = round(1000*rand(m,n))`

در متلب تولید کنید.

آ تعداد سطر ها (m) را ثابت و برابر ۱۰۰ در نظر بگیرید و تابع خود را بر روی ماتریس هایی با تعداد ستون $n = 50, 75, 100, 200, 400, 600, 800, 1000$ اجرا کنید. در هر حالت، تعداد عملیات انجام شده و مقدار `normdiff` را یادداشت کنید و در یک جدول با ستون های n و تعداد عملیات لازم و `normdiff` نشان دهید.

ب تعداد ستون ها (n) را ثابت و برابر ۱۰۰ در نظر بگیرید و تابع خود را بر روی ماتریس هایی با تعداد سطر $m = 50, 75, 100, 200, 400, 600, 800, 1000$ اجرا کنید. در هر حالت، تعداد عملیات انجام شده و مقدار `normdiff` را یادداشت کنید و در یک جدول با ستون های n و تعداد عملیات لازم و `normdiff` نشان دهید.

۳. با توجه به مشاهدات انجام شده به سوالات زیر پاسخ دهید:

- آ تعداد عملیات لازم، هنگامی که تعداد سطر ها ثابت است و تعداد ستون ها تغییر میکند چگونه تغییر میکند؟
- ب تعداد عملیات لازم، هنگامی که تعداد ستون ها ثابت است و تعداد سطر ها تغییر میکند چگونه تغییر میکند؟
- ج مقدار `normdiff` هنگامی که تعداد سطر ها ثابت است و تعداد ستون ها تغییر میکند چگونه تغییر میکند؟
- د مقدار `normdiff` هنگامی که تعداد ستون ها ثابت است و تعداد سطر ها تغییر میکند چگونه تغییر میکند؟