1) الف) دترمینان های زیر را با عملیات ردیفی بدست اورید.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

ب) اگر A و B دو ماتریس 4x4 باشند و داشته باشیم $\det(A) = \frac{1}{2}$ و det(B) = 3، مقدار عبارت $\det((A^3)^{-1}\ B^T)$ را بدست آورید.

جواب : الف)

$$a=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$b = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

ب) میدانیم $\det(B^T) = \det(B)$ و $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ و

$$\det(A^3) = \det(A \times A \times A) = \det(A) \times \det(A) \times \det(A)$$

در نتیجه داریم :

$$\text{Det}(((A^3)^{-1}B^T) = \det((A^3)^{-1}) . \det(B) = \frac{1}{\det(A^3)} . \det(B) = 8 * 3 = 24$$

2) با استفاده از قانون کرامر y را در سیستم زیر بدست بیاورید.

2x + y + z = 1
3x + z = 4
x - y – z = 2

جواب :

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{3} = -2$$

3) الف) مساحت شکل زیر را با استفاده از قضیه 9 بدست بیاورید.

ب) حجم یک متوازی الاضلاع در R^3 محدود به یک مجموعه خطی وابسته چقدر است؟

جواب : الف) متوازی الاضلاع را حرکت میدهیم تا از مبدا شروع شود، در این صورت متوازی الاضلاع با دو بردار $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ تشکیل میشود . طبق قضیه 9 مساحت ان برابر است با :

$$\begin{vmatrix}3 & 2\\0 & 1\end{vmatrix} = 3$$

ب) حجم آن برابر صفر است چون دترمینان یک مجموعه خطی وابسته صفر است.

صحیح غلط :

1) اگر A یک ماتریس n x n باشد و row space آن R^n باشد، آنگاه دترمینان A مخالف صفر است.
جواب) صحیح ، چون فضای ردیفی A R^n است در نتیجه ردیف های A یک basis برای فضای R^n هستند در نتیجه ردیف ها مستقل خطی هستند و دترمینان A مخالف صفر است.

2) اگر det(A) = 0 باشد آنگاه داریم A = 0.
جواب) غلط ، لزوما اینطور نیست.