



مدرس: دکتر زاهد رحمتی
مقطع کارشناسی
نیمسال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تمرین سری پنجم
درس طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها
موعد تحویل: ۱۴۰۱/۰۳/۱۶

✱ شما می‌توانید سوالات این سری از تمرین‌ها را با هر ایده‌ای (ترجیحا برنامه‌نویسی پویا) حل کنید.

سوال اول

روزی استاد اسپیلینتر در یکی از امتحانات خود سوال زیر را مطرح میکند و از آنجایی که مایکل بسیار تنبل است به او کمک کنید که تابعی با ویژگی‌های زیر پیدا کند:

- $f(1) = 1$
- $f(2) = 2$
- دنباله $f(1), f(2), f(3), \dots$ دنباله‌ای صعودی است که عدد n در آن $f(n)$ بار آمده است.

به عنوان مثال چند جمله اول این دنباله به صورت زیر است.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f(n)	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6

سوال دوم

یک رشته متقارن است اگر خودش با برعکس خودش برابر باشد، مانند «مادام». الگوریتمی در زمان $O(n^2)$ ارائه دهید که حداقل تعداد حرفی که لازم است به رشته ورودی (با طول n) اضافه کنیم تا رشته متقارن شود را به دست آورید.

سوال سوم

مسئله Rod Cutting را در نظر بگیرید. این شرط را در نظر بگیرید که اگر ما چوبی به طول L را در نقطه‌ای به طول k قطع کنیم، باید هزینه‌ای معادل $k * (L - k)$ را نیز پرداخت کنیم.

الگوریتمی ارائه دهید که بیشترین سود ممکن را مشخص کند.

سوال چهارم)

فرض کنید شما در یک بازی کامپیوتری وزیر دفاع شهرتان هستید. جاسوس‌های شما از پیش به شما خبر داده‌اند گروهی از رباتها قرار است به شهر شما حمله کنند. همچنین شما برنامه حمله آنها را می‌دانید. به این صورت که در طی n ساعت، بنا است در ساعت t ام، ربات x_t به شهر برسند. شما برای دفاع از شهر، یک اسلحه الکترومغناطیسی دارید. این اسلحه به این صورت کار میکند:

در ساعت 0، این اسلحه انرژی ندارد. هر موقع شارژ اسلحه را شروع کنید، بعد از t ساعت، انرژی‌ای را آزاد می‌کند که توانایی نابود کردن $f(i)$ ربات را دارد. در صورتی که رباتی در آن ساعت باقی مانده باشد، عقب‌نشینی کرده و باز نمی‌گردد. پس از آزادسازی انرژی، شارژ اسلحه خالی شده و برای ادامه دادن دوباره باید از اول شارژ شود. به شما دنباله‌ای x_1, x_2, \dots, x_n و تابع $f(k)$ که $1 \leq k \leq n$ داده می‌شود. الگوریتمی ارائه دهید که بیشترین تعداد رباتی را که می‌توانید نابود کند.

سوال پنجم)

الگوریتمی بنویسید که در یک گراف جهت‌دار بدون برچسب، وجود یا عدم وجود مسیر بین هر زوج گره را مشخص کند. هدف یافتن ماتریس D است به گونه‌ای که اگر حداقل یک مسیر از i به j باشد $D[i][j]$ و در غیراینصورت $false$ شود. زمان اجرای الگوریتم را بدست آورید.

سوال ششم)

فرض کنید به مدت n هفته، سرپرست تیمی از برنامه‌نویسان هستید. در هر هفته، دو نوع موقعیت شغلی برای شما به وجود می‌آید که یکی از آنها پر استرس و دیگری کم استرس است. دستمزد موقعیت شغلی پر استرس هفته t ام با h_t و دستمزد موقعیت شغلی کم استرس در آن هفته، با l_t نشان داده می‌شود. در هر هفته، سه انتخاب داریم:

شما هیچ موقعیت شغلی‌ای انتخاب نکنید تا تیمتان استراحت کند.

شما موقعیت شغلی کم استرس را انتخاب کنید و دستمزد آن را دریافت کنید.

در صورتی که هفته قبل، تیم حتما استراحت کرده باشد، شما موقعیت شغلی پر استرس را انتخاب کنید و دستمزد آن را دریافت کنید.

دو دنباله h_1, h_2, \dots, h_n و l_1, l_2, \dots, l_n به شما داده شده است. با توجه به آن‌ها، برنامه‌ای برای تیمتان مشخص کنید که تیمتان بیشترین دستمزد دریافتی را داشته باشد.

سوال هفتم)

تعدادی از بچه‌های دانشکده‌ی فیزیک دور هم جمع شده‌اند تا در مورد بارش شهابی که امشب قرار است رصد کنند، برنامه‌ریزی کنند. ما اطلاعات زیر را در مورد این بارش شهابی داریم: n بارش به فاصله یک ثانیه از هم رخ می‌دهند. پس می‌توان فرض کرد شهاب n ام در ثانیه n ام می‌بارد.

دانشکده‌ی فیزیک تلسکوپ بزرگی را راه‌اندازی کرده است تا در رصدها مورد استفاده قرار بگیرد. این تلسکوپ محدودیت‌هایی دارد و فقط به راست و چپ از 0 تا 359 درجه می‌چرخد (می‌تواند دور کامل بزند) ولی نمی‌تواند بالا و پایین برود. رخداد j ام در درجه d_j رخ می‌دهد که d_j عددی صحیح است. تلسکوپ ما نیز در ثانیه صفرم روی درجه‌ی صفر که همان ستاره قطبی هست، تنظیم شده است. رخداد n ام مهمترین رخداد است و حتما باید رصد شود.

به دلیل اینکه این تلسکوپ ابزار پیچیده‌ای است، تنها می‌تواند با سرعت یک درجه بر ثانیه حرکت کند. به همین دلیل گروه رصد انتظار ندارند که بتوانند تمامی شهاب‌ها را رصد کنند. بنابر این می‌خواهند حداکثر تعداد ممکن را (با توجه به محدودیت سرعت تلسکوپ و اهمیت رخداد n ام ببینند. شما باید زیر مجموعه‌ی قابل رویت از شهاب‌ها را بیابید که شهاب n ام شامل آن باشد و بیشترین تعداد اعضا را داشته باشد. مثال: اگر مختصات رخدادها به صورت زیر باشد، مجموعه جواب برابر با $\{1, 3, 6, 9\}$ خواهد بود.

رخدادها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
مختصات	۱	-۴	-۱	۴	۵	-۴	۶	۷	-۲

الگوریتمی کارا برای پیدا کردن مجموعه‌ی جواب بیابید.

*از بین سوالات ۸ تا ۱۱ دو تا را به دلخواه حل کنید.

سوال هشتم)

n سرور کامپیوتری S_1, S_2, \dots, S_n داریم و می‌خواهیم فایلی را در تعدادی از این سرورها ذخیره کنیم و در اختیار کاربران قرار دهیم. هزینه‌ی قراردعی این فایل در سرور i ام برابر با C_i است که عددی طبیعی است. حال اگر کاربری درخواست دریافت این فایل را از سرور i ام بکند و فایل در این سرور وجود نداشته باشد، سرورهای $S_{i+1}, S_{i+2}, \dots, S_n$ به ترتیب جستجو می‌شوند تا فایل مورد نظر را در یکی از این سرورها که آن را S_j می‌نامیم یافت شود. هزینه‌ی دسترسی به سرور S_i را برابر با مقدار $i - j$ تعریف می‌کنیم. (توجه کنید که سرورهای S_1, S_2, \dots, S_{i-1} جستجو نمی‌شوند و یک کپی از فایل در سرور S_n وجود دارد تا تمامی جستجوها پایان پذیر باشند). الگوریتمی کارآمد ارائه دهید که مشخص کند فایل را در کدام سرورها ذخیره کنیم تا مجموع هزینه‌های قراردعی و دسترسی کمینه شود.

سوال نهم)

با استفاده از الگوریتم ضرب بهینه ماتریس‌ها نشان دهید بهترین روش برای ضرب چهار ماتریس با ابعاد زیر چیست؟ (جدول‌های زیر را پر کنید و ترتیب بهینه را مشخص کنید).

$M1[4][5], M2[5][2], M3[6][5], M4[5][8]$

ماتریس M

	M1	M2	M3	M4
M1				
M2				
M3				
M4				

ماتریس A

	M1	M2	M3	M4
M1				
M2				
M3				
M4				

سوال دهم)

یک کارخانه دارای یک سیستم بسته‌بندی کالا به شرح زیر است: n کالا که هر یک وزنی معادل w_i دارد به ترتیبی از پیش تعیین شده وارد مرکز بسته‌بندی می‌شود. در مرکز بسته‌بندی دو بسته باز قرار دارد که هر یک حداکثر P واحد وزن را در خود جای می‌دهد. سیستم ما در برابر کالایی که وارد می‌شود این عکس العمل را می‌تواند نشان دهد:

۱. آن را در یکی از بسته‌های فعلی قرار دهد.

۲. یکی از بسته‌ها را ببندد و کنار بگذارد و یک بسته خالی مشابه را به جایش قرار دهد و کالا را در آن قرار دهد.

در انتهای کار بسته‌های غیرخالی فعلی را بسته و کنار می‌گذاریم. هدف ما کم کردن تعداد بسته‌هایی است که استفاده کرده‌ایم.

الف- الگوریتمی با زمان $O(nP^2)$ ارائه دهید.

ب- زمان الگوریتم خود را به $O(nP)$ کاهش دهید.

سوال یازدهم)

فرض کنید می‌خواهید به سفری بروید که در طول مسیر n هتل وجود دارد. این هتل‌ها در فواصل $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ از مبدا قرار دارند. در طول سفر تنها می‌توان در این هتل‌ها اقامت داشت و شما می‌توانید انتخاب کنید که در طول سفر در کدام هتل‌ها اقامت داشته باشید. هتلی که در فاصله a_n از مبدا قرار دارد مقصد شما می‌باشد. شما می‌توانید در روز ۲۰۰ مایل مسافرت کنید ولی این امکان به دلیل محدودیت هتل‌ها همیشه امکان‌پذیر نمی‌باشد. جریمه برای میزان سفر در هرروز برابر $(200 - x)^2$ می‌باشد که x طول سفر در آن روز به مایل می‌باشد. هدف شما بدست آوردن ترتیبی از استراحت در هتل‌ها است که کمترین میزان جریمه کل سفر را داشته باشید. الگوریتمی ارائه دهید که ترتیب هتل‌های محل توقف را برای این سفر ارائه دهد.

درباره ارسال پاسخ‌ها:

- پاسخ‌هایتان را به فایل PDF تبدیل کنید. (ترجیحا یکپارچه)
- فایل مورد نظر را در سامانه کورسز بارگذاری کنید.
- در صورت تاخیر در زمان مقرر شده، می‌توانید تکلیف را تا سه روز بعد از ددلاین تحویل دهید و به ازای هر روز تاخیر ۱۰ درصد از نمره کم میشود. بعد از این سه روز، نمره تکلیف صفر خواهد شد.
- در صورت مشاهده تقلب و مشابهت واضح پاسخ‌ها سوال‌های امتیازی در نظر گرفته نخواهد شد.
- چنانچه سوال یا ابهامی در مورد سوالات داشتید، میتوانید آنها را از طریق تلگرام (در توضیحات کانال وجود دارند) و یا ایمیل‌های dariushkazemi77@gmail.com یا ashkan.vedadi@aut.ac.ir بپرسید.

موفق باشید!