

به نام خدا

تمرین سری پنجم

تاریخ ارسال 99/3/13

تاریخ تحویل 99/3/23

1- تمرین های خود را حتما از طریق Hws بفرستید.

2- تمرین های تئوری و عملی را هر کدام جداگانه زیپ کرده و نام فایل خود را به صورت زیر تغییر دهید.

DS-982-firstname_lastname-name project

تمرین تئوری

مسئله ۱.

(10 نمره)

فرض کنید که A آرایه ای نامرتب از n عناصر است. به طوری که کلید آن ها فقط K عدد متمایز دارند (فرض کنید $K < \sqrt{n}$).

میخواهیم A را با الگوریتمی پایدار از مرتبه $O(n \log K)$ مرتب کنیم. برای این کار،

الف) آرایه ی مرتب B را از K مقدار متفاوت در A بسازید.

ب) آرایه ی A را به کمک B در زمان $O(n)$ مرتب کنید.

الگوریتم های هر دو مرحله ی بالا را تشریح کنید. داده ساختارهای مورد نیاز را نام ببرید. الگوریتم بند (ب) را به صورت شبه کد بنویسید و آن را تحلیل کنید.

مسئله ۲.

(9 نمره)

آرایه ای از n رکورد فقط با کلید های 0 یا 1 داده شده است. الگوریتمی که چنین آرایه ای را مرتب می کند ممکن است زیر

مجموعه ای از ویژگی های مطلوب زیر را دارا باشد:

1. زمان اجرای الگوریتم $O(n)$ باشد،

2. مرتب سازی پایدار باشد و

3. مرتب سازی درجا باشد و به حافظه اضافی بیش از مقداری ثابت احتیاج نداشته باشد.

الف) الگوریتمی بیابید که ویژگی های 1 و 2 را داشته باشد.

ب) الگوریتمی بیابید که ویژگی های 1 و 3 را داشته باشد.

پ) الگوریتمی بیابید که ویژگی های 2 و 3 را داشته باشد.

مسئله ۳.

(10 نمره)

یک کوه آرایه ای از n نقطه با ارتفاع متمایز است که نقطه ای مانند یک قله دارد که ارتفاعش از همه ی نقاط دیگر بیشتر است و آرایه قبل از آن صعودی و بعد از آن نزولی باشد. الگوریتمی طراحی کنید که قله ی یک کوه را در $O(\lg n)$ بیابد.

مسئله ۴.

(10 نمره)

روی یک جاده تعدادی روستا قرار دارند که پراکندگی آن ها از قاعده ی خاصی پیروی نمی کند. می خواهیم یک پمپ بنزین در یکی از روستاها بسازیم تا مجموع فاصله ی همه ی روستاها از پمپ بنزین کمینه شود. نشان دهید که بهترین روستا برای این کار روستای میانه است.

مسئله ۵.

(6 نمره)

نشان دهید که دومین کمینه از میان n عنصر را میتوان در بدترین حالت با $2 - \lceil \log n \rceil + n$ مقایسه یافت.

مسئله‌ی ۶.

(10 نمره)

برای $n = 2^k - 1$ ، فرض کنید آرایه‌ی $A[1 \dots n]$ شامل همه‌ی اعداد k بیتی به جز یک عدد ناشناخته است. می‌خواهیم این عدد را پیدا کنیم. تنها عمل مجاز بر روی A ، دسترسی به i امین بیت درایه‌ی $A[i]$ است که در زمان ثابت انجام می‌شود. نشان دهید که با $\Theta(n)$ بار انجام این عمل مجاز، می‌توان عدد ناموجود در آرایه را پیدا کرد.

مسئله‌ی ۷.

(10 نمره)

در گونه‌ای جدید از مرتب‌سازی سریع آرایه‌ی n عضوی A ، $2\sqrt{n} + 1$ عنصر اول را انتخاب کرده و با یک الگوریتم ساده مثل مرتب‌سازی درجی، این عناصر را مرتب می‌کنیم و سپس عنصر میانه‌ی آن را می‌یابیم. این عنصر را محور قرار می‌دهیم و بقیه‌ی الگوریتم مرتب‌سازی را بر روی A به صورت بازگشتی اجرا می‌کنیم. الف) رابطه‌ی بازگشتی برای زمان اجرای الگوریتم جدید در بدترین حالت بنویسید.

ب) می‌توان با کشیدن درخت بازگشت و بررسی آن به این نتیجه رسید که طولانی‌ترین شاخه‌ی آن از $O(\sqrt{n})$ است. با توجه به این موضوع زمان اجرای الگوریتم را بررسی کنید. (کران بالایی مناسبی برای زمان اجرای الگوریتم ارائه دهید.)

مسئله‌ی ۸.

(10 نمره)

فرض کنید n لیوان به رنگ آبی و n لیوان به رنگ قرمز داده شده‌اند که اندازه و شکل آن‌ها با یکدیگر متفاوت است. ظرفیت همه‌ی لیوان‌های قرمز با یکدیگر و نیز ظرفیت لیوان‌های آبی با هم متفاوت است. می‌دانیم که هر لیوان قرمز یک لیوان آبی متناظر دارد که ظرفیت‌های آن دو دقیقاً با هم مساوی‌اند. می‌خواهیم لیوان‌ها را به جفت‌های آبی-قرمز دسته‌بندی کنیم طوری که لیوان‌های هر جفت ظرفیت یکسانی داشته باشند. برای این کار از روش زیر استفاده می‌کنیم:

یک لیوان قرمز و یک لیوان آبی را بر میداریم، لیوان قرمز را از آب پر می کنیم و آب آن را درون لیوان آبی می ریزیم. با این کار مشخص می شود که آیا دو لیوان ظرفیت یکسانی دارند یا خیر، و در صورت تفاوت، می فهمیم که ظرفیت کدام بیشتر است. فرض کنید زمان انجام چنین مقایسه ای یک واحد زمانی است.

هدف این است که الگوریتمی بیابیم که این دسته بندی را با کم ترین تعداد مقایسه انجام دهد. توجه داشته باشید که مقایسه ی مستقیم دو لیوان هم رنگ امکان پذیر نیست.

الف) یک الگوریتم قطعی که $\theta(n^2)$ مقایسه برای یافتن جفت لیوان ها نیاز دارد ارائه دهید.

ب) یک الگوریتم تصادفی پیشنهاد کنید که میانگین تعداد مقایسه های آن $O(n \log n)$ باشد. تعداد مقایسه های الگوریتم شما در بدترین حالت چقدر است؟

تمرین عملی

(25 نمره)

n عدد پیچ و n عدد مهره هر کدام با اندازه های متمایز داده شده اند. می دانیم که دقیقاً یک عدد از پیچ ها به یک عدد از مهره ها می خورند. تنها کار مجاز انتخاب یک عدد پیچ و مهره و آزمون این دو با هم است که آیا پیچ و مهره به هم می خورند یا این که کدام یک کوچک تر از دیگری است.

الف) می خواهیم با انجام تعدادی آزمون، کوچک ترین پیچ و کوچک ترین مهره (که مسلماً به هم می خورند) را پیدا کنیم. روشی ارائه دهید تا بتوان مسئله را در حالت کلی با $2n - 2$ آزمون حل کرد.

ب) می خواهیم با میانگین $O(n \lg n)$ عدد آزمون، پیچی را که به یک مهره داده شده می خورد پیدا کنیم. الگوریتمی برای این مسئله ارائه دهید.