

به نام خدا

تاریخ ارسال 1399/7/11

تاریخ تحویل 1399/7/26

- 1- برای تمرین های عملی خود می توانید از هر زبانی که مسلط تر هستید استفاده نمایید.
- 2- تمرین های خود را حتما از طریق hws ارسال نمایید.
- 3- تمرین های خود را زیپ کرده و نام فایل زیپ خود را به فرمت زیر تغییر دهید.

DS-991-firstname_lastname-name project

تمرین تئوری

مسئله ۱.

[2 نمره]

توابع زیر را از لحاظ رشد مرتب کنید.

$$\begin{array}{cccccc} n^{\lg \lg n} & n^{\sqrt{}} & c & n \times 2^n & n! & 3^{2^n} \\ \lg n^{\lg n} & n^{\frac{1}{\lg n}} & (\lg n)! & \ln \ln n & \sqrt{\lg n} & 8^{\lg n} \end{array}$$

مسئله ۲.

[4 نمره]

تعیین کنید هر کدام از گزاره‌های زیر صحیح هستند یا خیر؟

الف) $f(n) + g(n) = \theta(\max(f(n), g(n)))$

ب) $f(n) = \theta(f(n/2))$

مسئله ۳.

[30 نمره]

[مرتبه زمانی] مرتبه زمانی هر کدام از توابع زیر را به صورت $T(n) = \theta(g(n))$ به دست آورید.

۱. $T(n) = 4T(n/2) + cn$

۲. $T(n) = 3T(n/3) + \sqrt{n}$

۳. $T(n) = 6T(n/3) + O(n^2 \log n)$

۴. $T(n) = \sqrt{2}T(n/2) + O(\log n)$

۵. $T(n) = 2T(n-1) + O(n^2)$

۶. $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

مسئله ۴.

[6 نمره]

مسئله‌ی جستجوی عنصر x در آرایه‌ی A شامل n عنصر را در نظر بگیرید. فرض کنید اطلاع داریم که توزیع ورودی به این صورت است که احتمال حضور عنصر x در نیمه‌ی دوم آرایه سه برابر احتمال حضور آن در نیمه‌ی اول است. همچنین برای هر نیمه، احتمال حضور در هر خانه یکسان هست. با این فرض، الگوریتم جستجوی خطی را در بدترین، بهترین و حالت متوسط بررسی کنید.

مسئله‌ی ۵.

[6 نمره]

در یک آرایه‌ی شامل n عضو، عضو اکثریت عضوی است که بیش از $n/2$ بار در آرایه تکرار شده باشد. این الگوریتم را در نظر بگیرید: به ازای هر اندیس i ، تعداد اعضایی از آرایه را که مقدار برابر با $A[i]$ دارند، می‌شماریم. اگر این تعداد از $n/2$ بیشتر بود، $A[i]$ را به عنوان عضو اکثریت به خروجی می‌دهیم.

الف) این الگوریتم را از لحاظ تعداد مقایسه، در بهترین، بدترین و **حالت متوسط** (با فرض ورودی یکنواخت) تحلیل کنید.

ب) آیا می‌توانید الگوریتمی با تعداد مقایسه‌ی کمتر در بدترین حالت پیشنهاد دهید؟

مسئله‌ی ۶.

[12 نمره]

رویه‌ی زیر قرار است مقدار a^n را محاسبه کند.

```

POWER( $a, n$ )
1   $x \leftarrow a$ 
2   $z \leftarrow 1$ 
3   $m \leftarrow n$ 
4  while  $m > 0$ 
5      do if  $m$  is even
6          then  $m \leftarrow \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 
7               $x \leftarrow x^2$ 
8          else statement-1
9              statement-2
10 return  $z$ 

```

- (ا) به جای statement-1 و statement-2 به ترتیب چه عباراتی بگذاریم تا الگوریتم درست کار کند؟
- (پ) تعداد دقیق تکرار سطر ۵ الگوریتم چند تا است؟ یک رابطه‌ی بازگشتی بنویسید و آنرا حل کنید.
- (ت) زمان اجرای الگوریتم چه قدر است؟

مسئله‌ی ۷.

[15 نمره]

شخصی یک بسته شامل 100 کارت خریداری کرده که از 1 تا 100 شماره گذاری شده اند. در زمان جابجایی متوجه میشود که ترتیب کارت‌ها به هم ریخته به ترتیب نیستند و از تمامی کارت‌ها یکی از آنها گم شده است. حال میخواهیم کارتی که گم شده است را بیابیم.

- الف) این مسئله را چگونه مدلسازی می کنید؟
- ب) برای این مسئله ساختمان داده مناسب طراحی نمایید.
- ج) با توجه به ساختمان (های) داده تان، الگوریتم مناسب برای حل این مساله ارائه نمایید.
- د) الگوریتم پیشنهادی خویش را از نظر مکانی و زمانی تحلیل نمایید.
- ه) در صورت کارا بودن الگوریتم خویش، آن را پیاده سازی نمایید. در غیر این صورت به قسمت ب بروید.

محسن به مناسبت اواخر دهه‌ی فجر یک بسته مستطیل شکل $m \times n$ شکلات برای فلانی هدیه آورده‌است، ولی جای بعضی از شکلات‌ها در جعبه خالیست! محسن این شرط را برای فلانی گذاشته‌است که برای برداشتن شکلات‌های داخل جعبه فقط می‌تواند به مستطیل از شکلات‌ها را بردارد که همه‌ی خانه‌هایش پر باشد. بعد از اصرارهای زیاد فلانی، محسن به او اجازه داد که به هر تعدادی که بخواهد ستون‌های شکلات‌ها را جابه‌جا کند و بعد از آن یک مستطیل از شکلات‌ها را بردارد! به فلانی کمک کنید که بیشترین تعداد شکلاتی که می‌تونه رو از جعبه بردارد!

الف) این مسئله را چگونه مدلسازی می‌کنید؟

ب) برای این مسئله ساختمان داده مناسب طراحی نمایید.

ج) با توجه به ساختمان (های) داده تان، الگوریتم مناسب برای حل این مساله ارائه نمایید.

د) الگوریتم پیشنهادی خویش را از نظر مکانی و زمانی تحلیل نمایید.

ه) در صورت کارا بودن الگوریتم خویش، آن را پیاده‌سازی نمایید. در غیر این صورت به قسمت ب بروید.