به نام خدا

حل روابط بازگشتی

سایز مساله

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

تعداد فراخوانی بازگشتی

سایز زیرمساله

هزینه تقسیم و ترکیب

رشد $T(n)$ ؟

حل رابطه بازگشتی

روش‌های حل روابط بازگشتی

۱ـ روش جایگذاری (حدس + اثبات با استقراء)
substitution

۲ـ روش قضیه اصلی master theorem

۳ـ روش درخت بازگشت recursion Tree

روش جایگذاری :

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \quad , \quad T(1) = c$$

$$= 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\right] + n$$

$$= 4T\left(\frac{n}{4}\right) + n + n$$

$$= 4\left[2T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4}\right] + n + n$$

$$= 8T\left(\frac{n}{8}\right) + n + n + n$$

$$= 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3n$$

$$= 2^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + k \cdot n$$

$$T(n) = 2^k \, T\left(\frac{n}{2^k}\right) + k.n$$

تا این زیرمساله $\frac{n}{2^k} = 1 \Rightarrow k = \log_2^n$

$$T(n) = 2^{\log_2^n} \times T(1) + \log_2^n \times n$$

$$= c.n + n.\log_2^n \in \Theta(n \log n)$$

حدس

میتوان با استقرا اثبات کرد

$T(n) \in O(n \cdot \lg n)$?

طبق تعریف :

$\exists\, c > 0,\ n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0$

$T(n) \leq c \cdot n \cdot \lg_2 n$ حکم

$$\begin{cases} T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ T(1) = c' \end{cases}$$

$T(2) = 2T\left(\frac{2}{2}\right) + 2 = 2c' + 2$

$$T(n) \leq c \cdot n \log_2^n$$

$$T(2) = 2c' + 2 \leq c \cdot 2 \times \log_2^2 = 2 \cdot c$$

$$\boxed{c \geq c' + 1} \quad (1)$$

پایه استقرا
$n = 2$

پایه برقرار است (اگر ~~...~~ شرط (1) برقرار باشد)

حالت کلی: اگر حکم برای هر مقدار کمتر از n برقرار است آنگاه برای n برقرار است.

فرض استقرا : $T(n) \le c \cdot n \log_2 n$

حکم برای هر مقدار کمتر از n برقرار است

(از جمله $\frac{n}{2}$)

فرض استقرا $\boxed{T\left(\frac{n}{2}\right) \le c \cdot \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2}}$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$\le 2 \cdot c \cdot \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + n$$

$$\le c \cdot n \log_2 \frac{n}{2} + n$$

$$T(n) \leq c \cdot n\,(\log_2 n - \log_2 2) + n$$

$$\leq c \cdot n \cdot \log_2 n - cn + n$$

$$\leq \underline{c \cdot n \log_2 n} + \underbrace{(n - cn)}_{\leq 0}$$

$$\leq c \cdot n \cdot \log_2 n$$

$$n - cn \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c \geq 1}$$

۱ , ۲ $\Rightarrow$ $\boxed{c \geq c' + 1}$

اگر جواب یک رابطه بازگشتی را اشتباه حدس بزنیم

آیا با استقراء اثبات می‌شود؟

فرض کنید که جواب $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$

را به اشتباه $O(n)$ حدس بزنیم.

حکم $T(n) \leq c.n$?

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \quad , \quad T(1) = c'$$

حکم $\quad T(n) \le c \cdot n$

پایه: $n = 2$

$$T(2) = 2T\left(\frac{2}{2}\right) + 2 = 2c' + 2 \le 2 \cdot c$$

$$\boxed{c \ge c' + 1} \quad (1)$$

حالت تکرار: فرض استقرا $T\left(\frac{n}{2}\right) \le c \cdot \frac{n}{2}$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \le 2c \cdot \frac{n}{2} + n$$

$$\le cn + n \not\le c \cdot n$$

* تابعی که از n ضرب میشود در حکم c است نه هر چیز دیگری مثل c''

$$\le (c+1) \cdot n = c'' \cdot n$$

دقیقاً باید همان چیزی که در حکم است اثبات شود.

بنابراین حکم $T(n) \leq c.n$ و حدس $T(n) \in O(n)$

اثبات نشود.

$$f(n) \in O(g(n)) \iff \exists\, c>0 \,,\, n_0>0$$

تعریف $\quad \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c.g(n)$

$$f(n) = 2n^2+n \in O(n^2)$$

$c = ?$

$\forall n \geq n_0 : \quad 2n^2+n \leq c.n^2 \implies n_0 = ?$

(اثبات با تعریف O)

master theorem روش قضیه اصلی

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$a \geq 1 \quad , b > 1$

$n^{\log_b a} \quad ? \quad f(n)$

① اگر $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \quad \exists \varepsilon > 0$

آنگاه $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$

۲) اگر $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ آنگاه $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$

۳) اگر $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ ، $\exists\, \varepsilon > 0$ و

$a f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$ $\quad \exists\, c < 1$, $c > 0$

آنگاه $T(n) \in \Theta(f(n))$