به نام خدا

حل روابط بازگشتی

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$$a \geq 1 \ , \ b > 1$$

روش جایگذاری

* روش قضیه اصلی

① حالت اول: اگر $\exists \varepsilon > 0 \ , \ f(n) \in O\left(n^{\log_b^a - \varepsilon}\right)$

آنگاه $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b^a}\right)$

② حالت دوم: $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b^a}\right)$ آنگاه $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b^a} \cdot \log n\right)$

③ حالت سوم: $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b^a + \varepsilon}\right)$ $\exists \varepsilon > 0$ و

$a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$ $\quad \exists \ 0 < c < 1$

آنگاه $T(n) \in \Theta(f(n))$

الف)

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$a = 4, \quad b = 2, \quad f(n) = n$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 4} = n^2 \quad ؟ \quad f(n) = n$$

حالت اول قضیه اصلی : $\exists \varepsilon > 0 \quad f(n) = n \in O(n^{\log_2 4 - \varepsilon})$

$$0 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow n^1 \in O(n^{2-\varepsilon}) \Rightarrow 1 \leq 2 - \varepsilon \Rightarrow \boxed{\varepsilon \leq 1}$$

بنابراین $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_2 4})$

$$\in \Theta(n^2)$$

مثال 2)

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$a = 2 \;,\; b = 2 \;,\; f(n) = n$$

$$n^{\log_b^a} = n^{\log_2^2} = n^1 \;?\; f(n) = n$$

حالت دوم: $f(n) = n \in \theta(n^{\log_b^a}) = \theta(n^{\log_2^2})$

$$\in \theta(n)$$

پس $T(n) \in \theta(n^{\log_b^a} \cdot \log n)$

$$\in \theta(n^{\log_2^2} \cdot \log n)$$

$$\in \theta(n \cdot \log n)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$ (3 حالت

$$a = 2, \quad b = 2, \quad f(n) = n^2$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n \ \overset{?}{\ } \ f(n) = n^2$$

$\exists \varepsilon > 0 \quad f(n) = n^2 \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ حالت سوم :

$$\in \Omega(n^{\log_2 2 + \varepsilon})$$

$$\in \Omega(n^{1+\varepsilon})$$

$$\Rightarrow \quad 2 \geq 1 + \varepsilon \Rightarrow \boxed{0 < \varepsilon \leq 1} \checkmark$$

$$\exists \ 0 < c < 1 \qquad a\, f\left(\frac{n}{b}\right) \le c \cdot f(n)$$

$$2 \cdot f\left(\frac{n}{2}\right) \le c \cdot f(n)$$

$$2\left(\frac{n}{2}\right)^2 \le c \cdot n^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \le c < 1} \ \checkmark$$

$$T(n) \in \Theta(f(n))$$ بس:

$$\in \Theta(n^2)$$

مثال 4)

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + n.\log n$$

$$a = 4, \quad b = 4, \quad f(n) = n.\log n$$

$$n^{\log_b^a} = n^{\log_4^4} = n^1 \;?\; f(n) = n.\log n$$

بررسی حالت سوم :

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad f(n) = n\lg n \in \Omega\left(n^{\log_b^a + \varepsilon}\right)$$

$$\in \Omega\left(n^{\log_4^4 + \varepsilon}\right)$$

$$\in \Omega\left(n^{1 + \varepsilon}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n.\log n}{n^{1+\varepsilon}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{\varepsilon}} = 0$$

$$\varepsilon > 0$$

چون رشد هر تابع چند جمله‌ای از رشد هر تابع چند لگاریتمی بیشتر است.

پس $\nexists\, \varepsilon > 0$ که $n\log n \in \Omega(n^{1+\varepsilon})$

بنابراین از قضیه اصلی نمی‌توان استفاده کرد.

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + n\log n$$

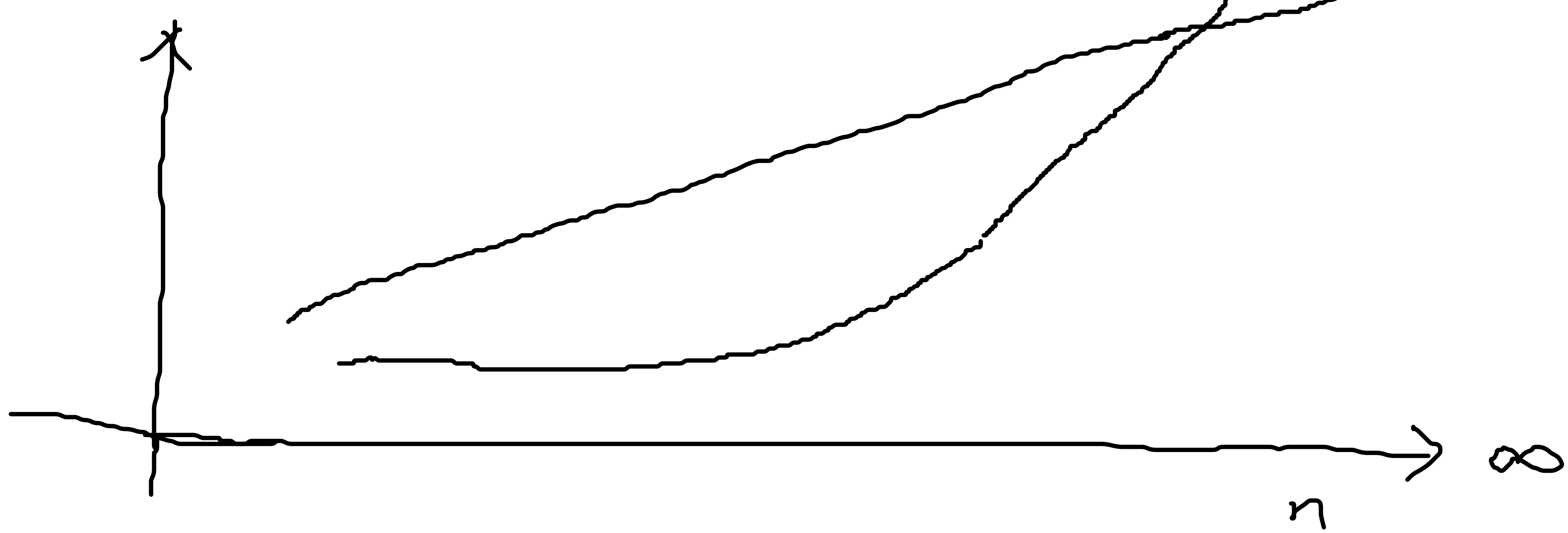
$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

این رابطه را هم نمی‌شود با قضیه اصلی حل کرد.

چون رابطه‌ای را با قضیه اصلی می‌توان حل کرد که

$a$ تا فراخوانی بازگشتی با سایز مساوی $\frac{n}{b}$ دارد.

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$



برخی حالات که قضیه اصلی پوشش نمی‌دهد با تعمیم قضیه اصلی پوشش داده می‌شود:

* تعمیم حالت دوم قضیه اصلی:

اگر $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b^a} \cdot (\log n)^K\right)$ ، $K \geq 0$ عدد صحیح

آنگاه $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b^a} \cdot (\log n)^{K+1}\right)$

حالا رابطه $T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + n\log n$ با این تعمیم حل می‌شود:

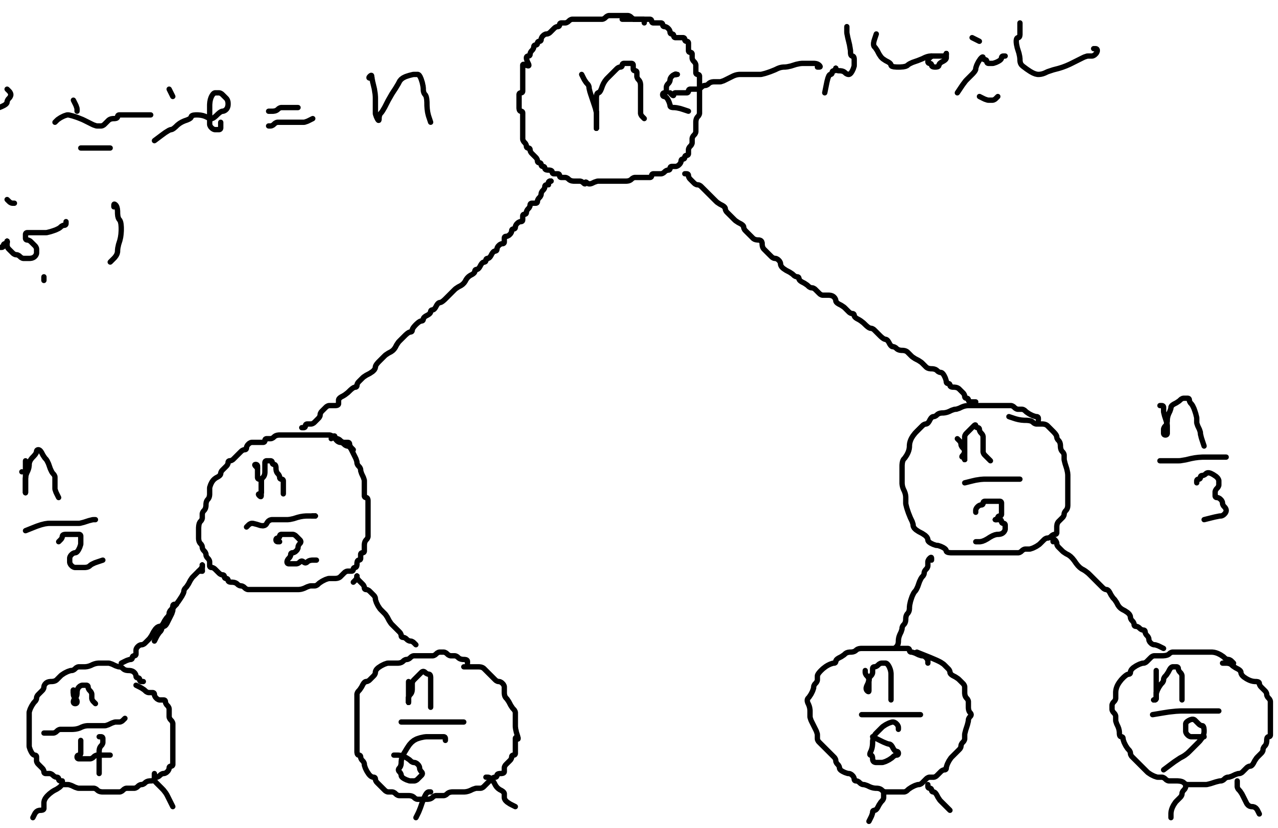
$f(n) = n\lg n \in \Theta\left(n^{\log_4^4} \cdot \log n^1\right)$

بنابراین $T(n) \in \Theta(n^{\log_4 4} \cdot \log^{1+1} n)$

$\in \Theta(n \cdot \log^2 n)$

/روش درخت بازگشت Recursion Tree

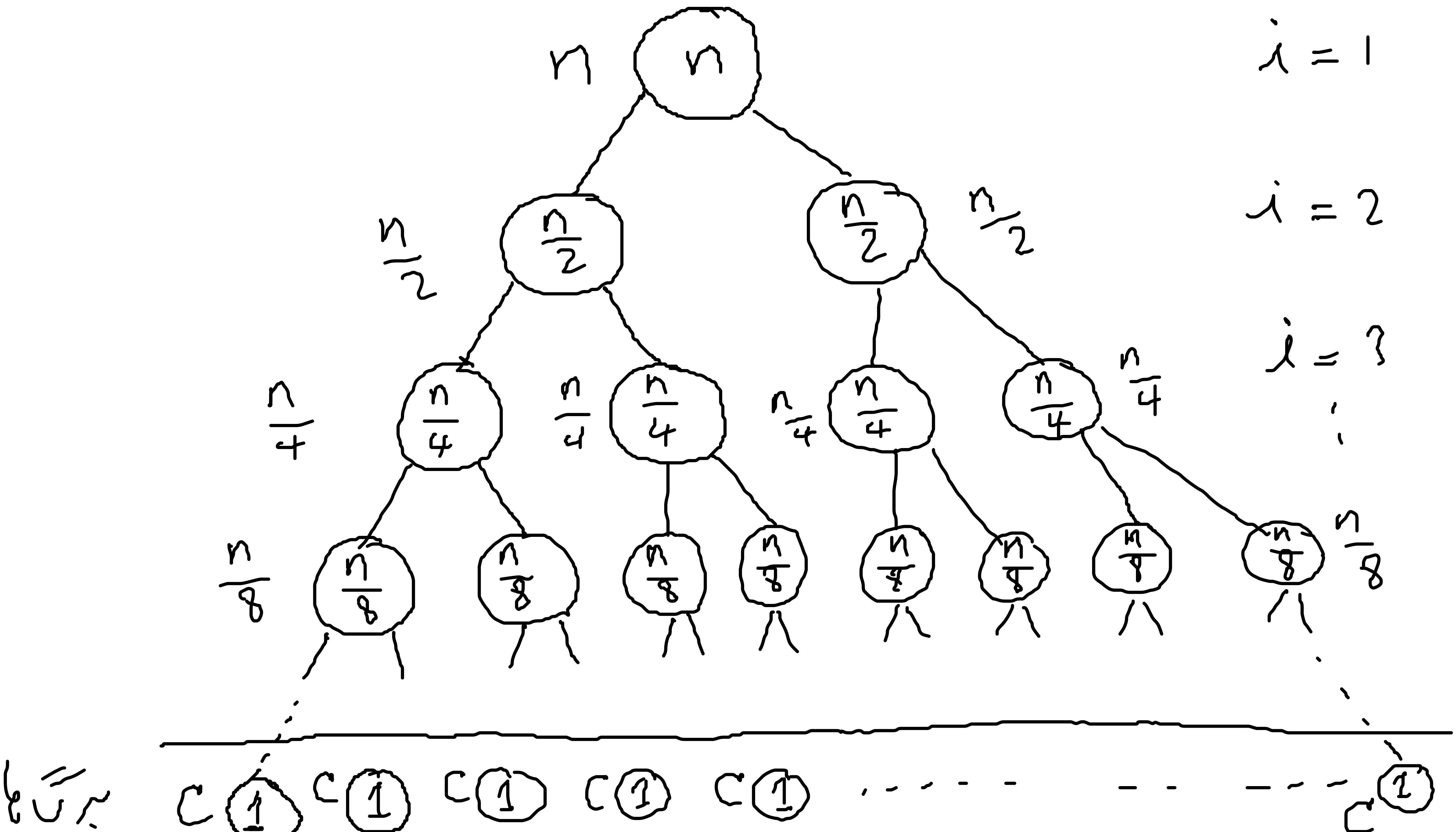
$T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{3}) + n$



مثال)

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$T(1) = c$



$T(n) =$ هزینه گره های غیربرگ + هزینه برگ ها

هزینه سطح $i$ ام

$n$ — $i = 1$

$\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ — $i = 2$

$4 \times \frac{n}{4} = n$ — $i = 3$

$\vdots$

تعداد سطح ها = ?

محاسبه تعداد سطح ها

سایز لایه $\dfrac{n}{2^{i-1}} = 1$ سایز ها در برگ

$\Rightarrow i - 1 = \log_2 n \rightarrow i = \log_2 n + 1$

شماره سطح برگ

$\log_2 n =$ شماره سطح یک سطح بالاتر از برگ

$\log_2 n =$ پس تعداد سطح ها به جز برگ ها

هزینه هر سطر × تعداد سطرها = هزینه گره ها غیر برگ

$$= \log_2 n \times n$$

$$= n \log_2 n$$

محاسبه هزینه برگ ها :

تعداد گره ها در سطر i ام $\quad 2^{i-1}$

تعداد برگ ها $= 2^{i-1} = 2^{(\log_2 n + 1) - 1} = n$

هزینه یک برگ × تعداد برگ‌ها = هزینه برگ‌ها

$$= n \times c$$

$$= c \cdot n$$

$T(n) =$ هزینه برگ‌ها + هزینه سطح‌ها

$$= c \cdot n + n \cdot \lg n$$

$$\in \Theta(n \lg n)$$