«بسمه‌تعالی»

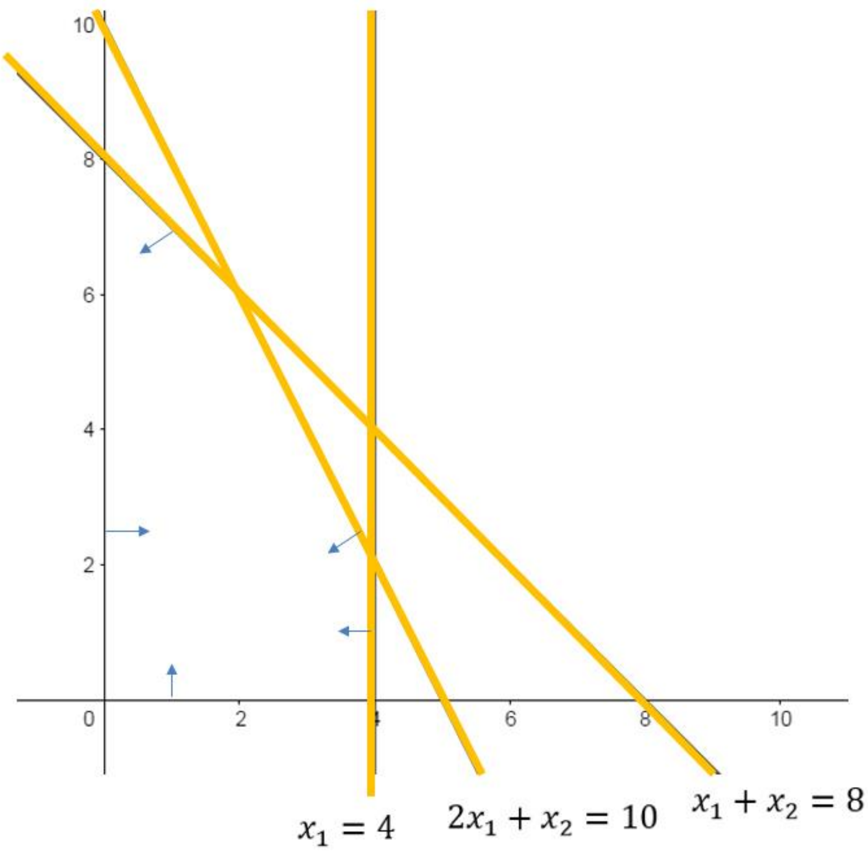
دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)

درس بهینه‌سازی خطی-پاییز ۱۴۰۱ مدرس: دکتر هوشمند

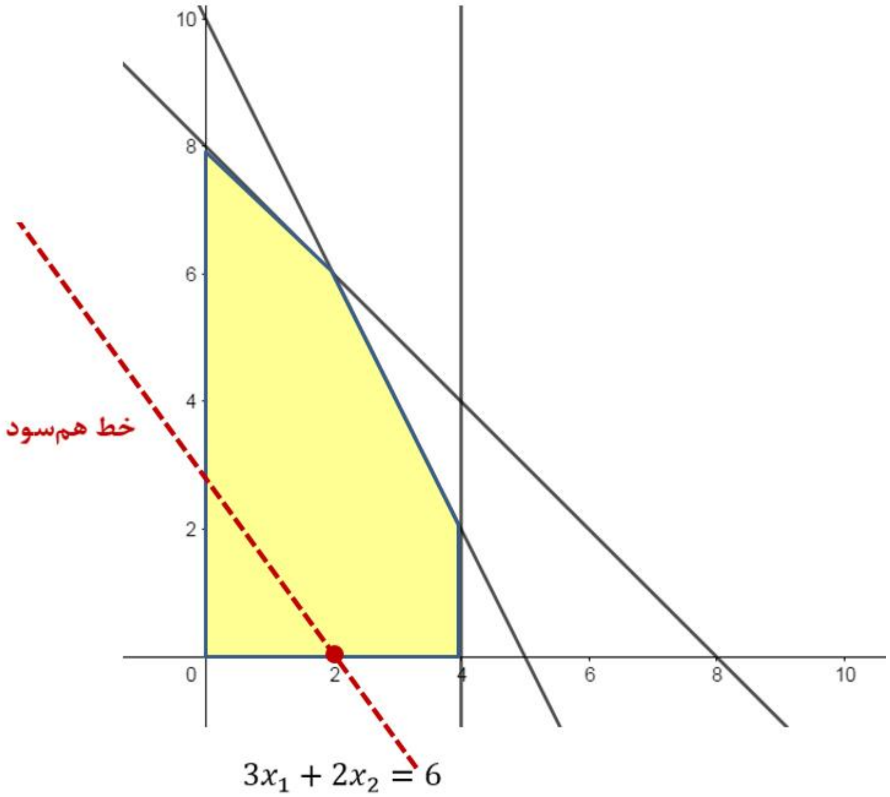
فصل دوم: روش ترسیمی، نقطهٔ گوشه‌ای و جواب شدنی پایه‌ای

روش ترسیمی برای حل مسائل LP دو متغیره

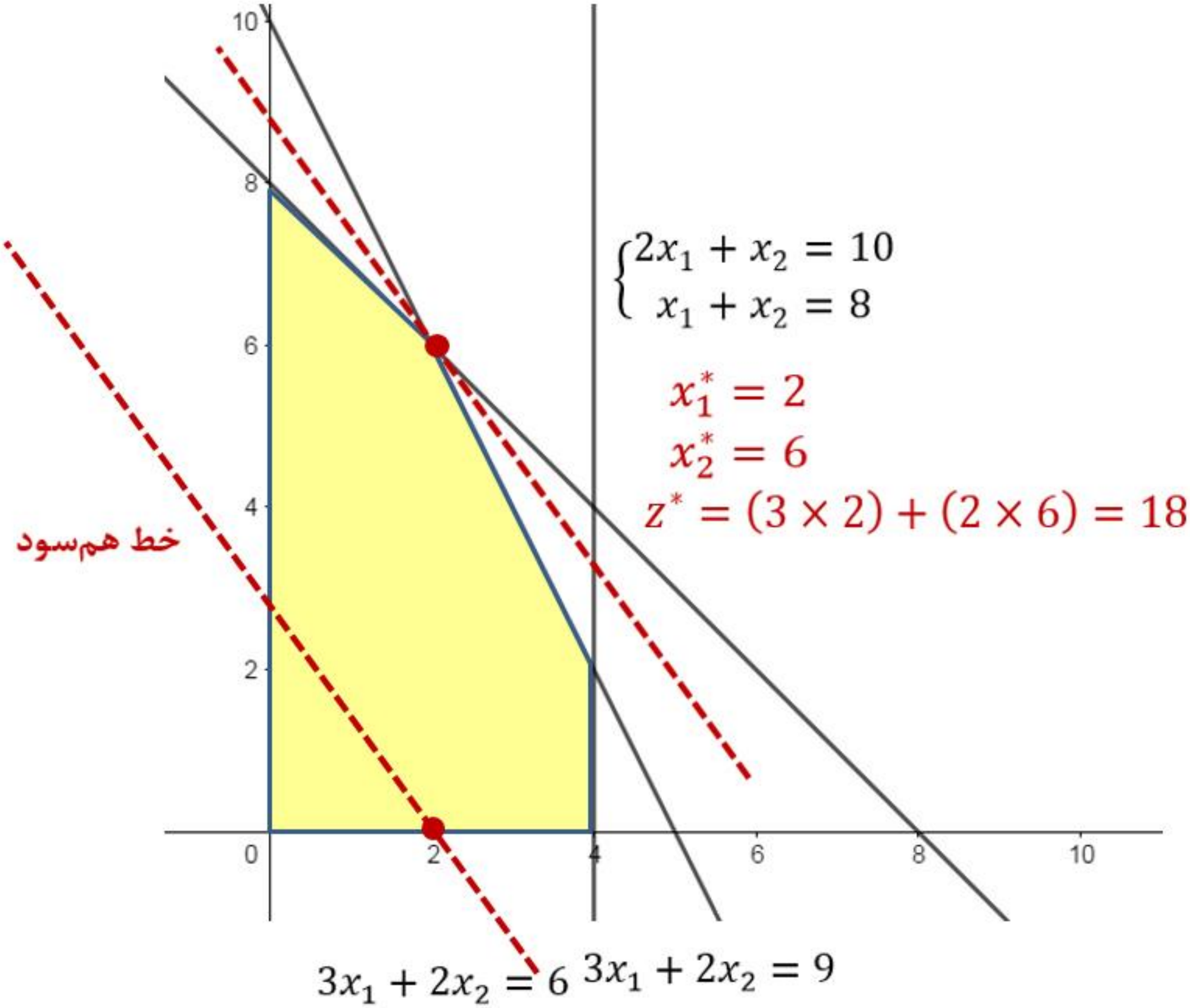
$$
\begin{aligned}
&\max z = 3x_1 + 2x_2 \\
&s.t. \\
&2x_1 + x_2 \leq 10 \\
&x_1 + x_2 \leq 8 \\
&x_1 \leq 4 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



$$\begin{aligned} &\max z = 3x_1 + 2x_2 \\ &s.t. \\ &2x_1 + x_2 \leq 10 \\ &x_1 + x_2 \leq 8 \\ &x_1 \leq 4 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

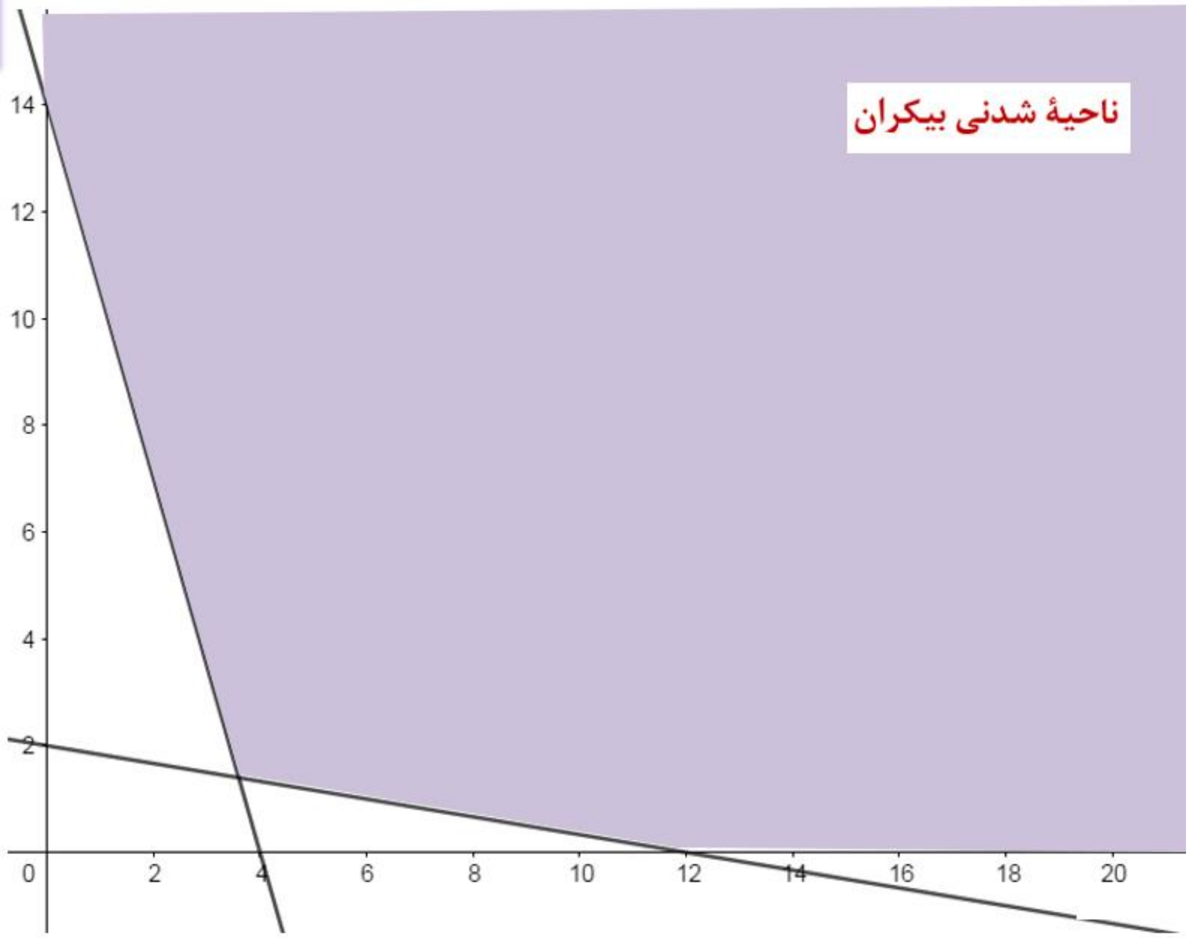


$$z = (3 \times 2) + (2 \times 0) = 6$$
$$3x_1 + 2x_2 = 6$$

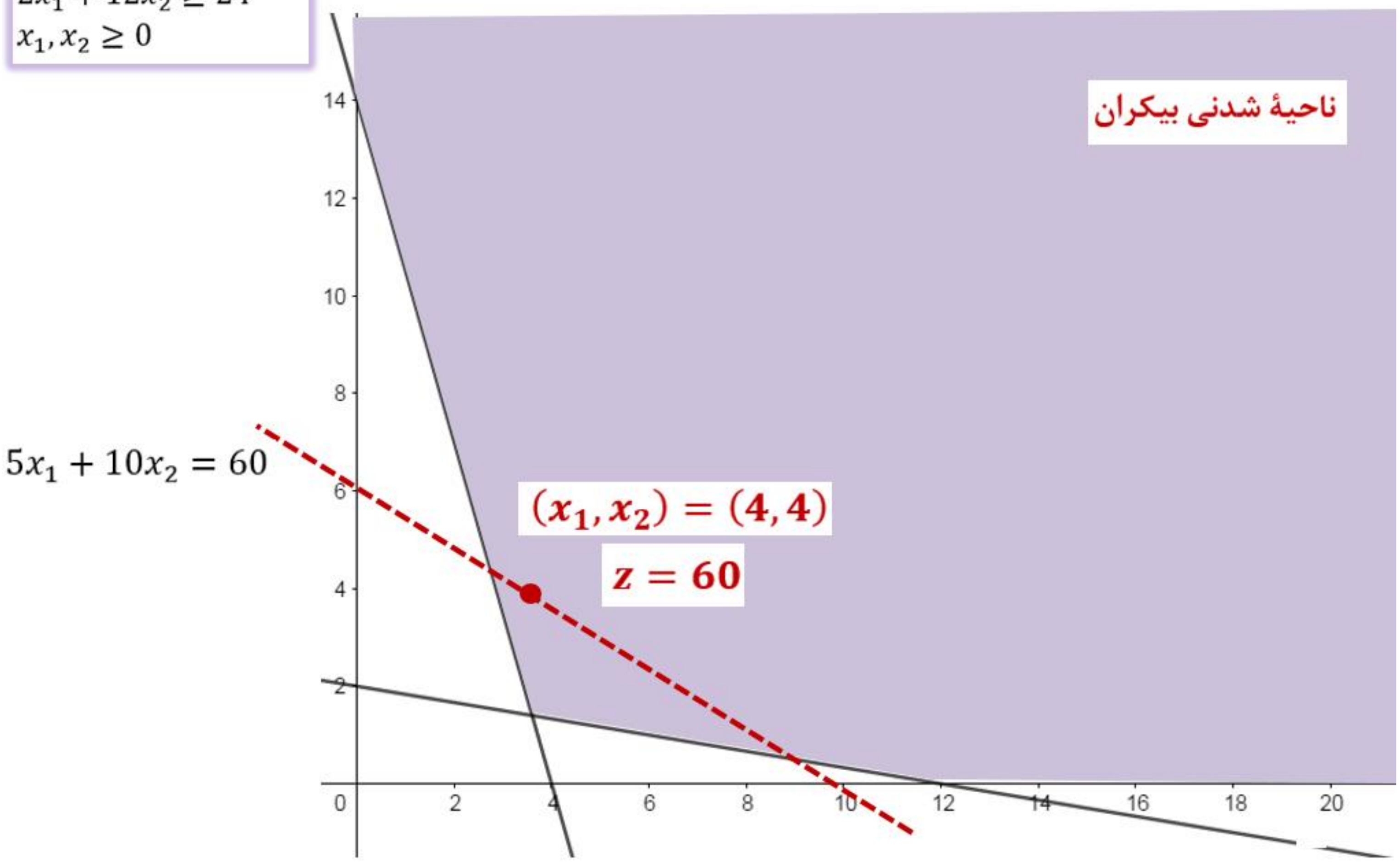


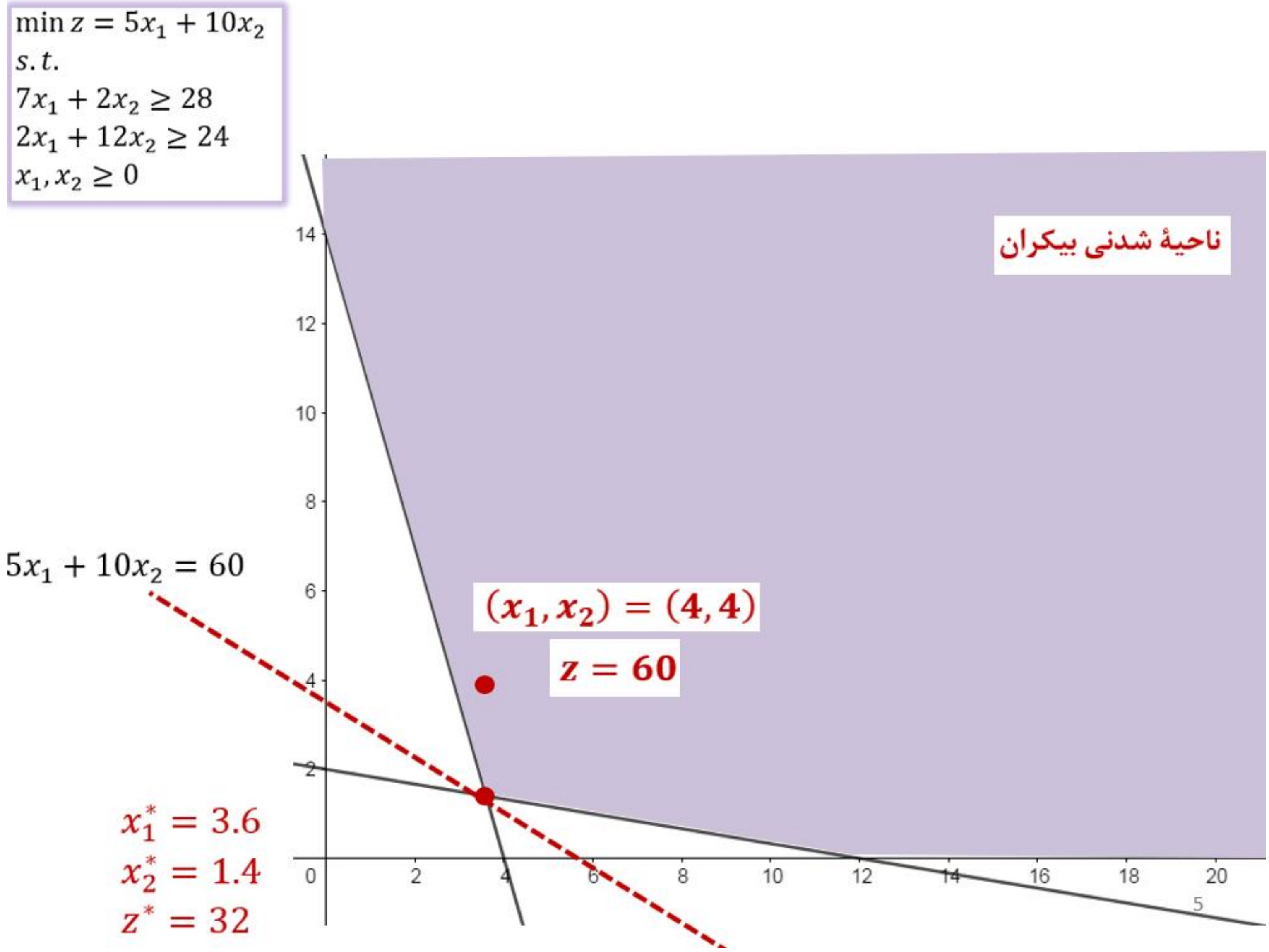
$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$
$x_1^* = 2$
$x_2^* = 6$
$z^* = (3 \times 2) + (2 \times 6) = 18$
خط هم‌سود
$3x_1 + 2x_2 = 6$
$3x_1 + 2x_2 = 9$

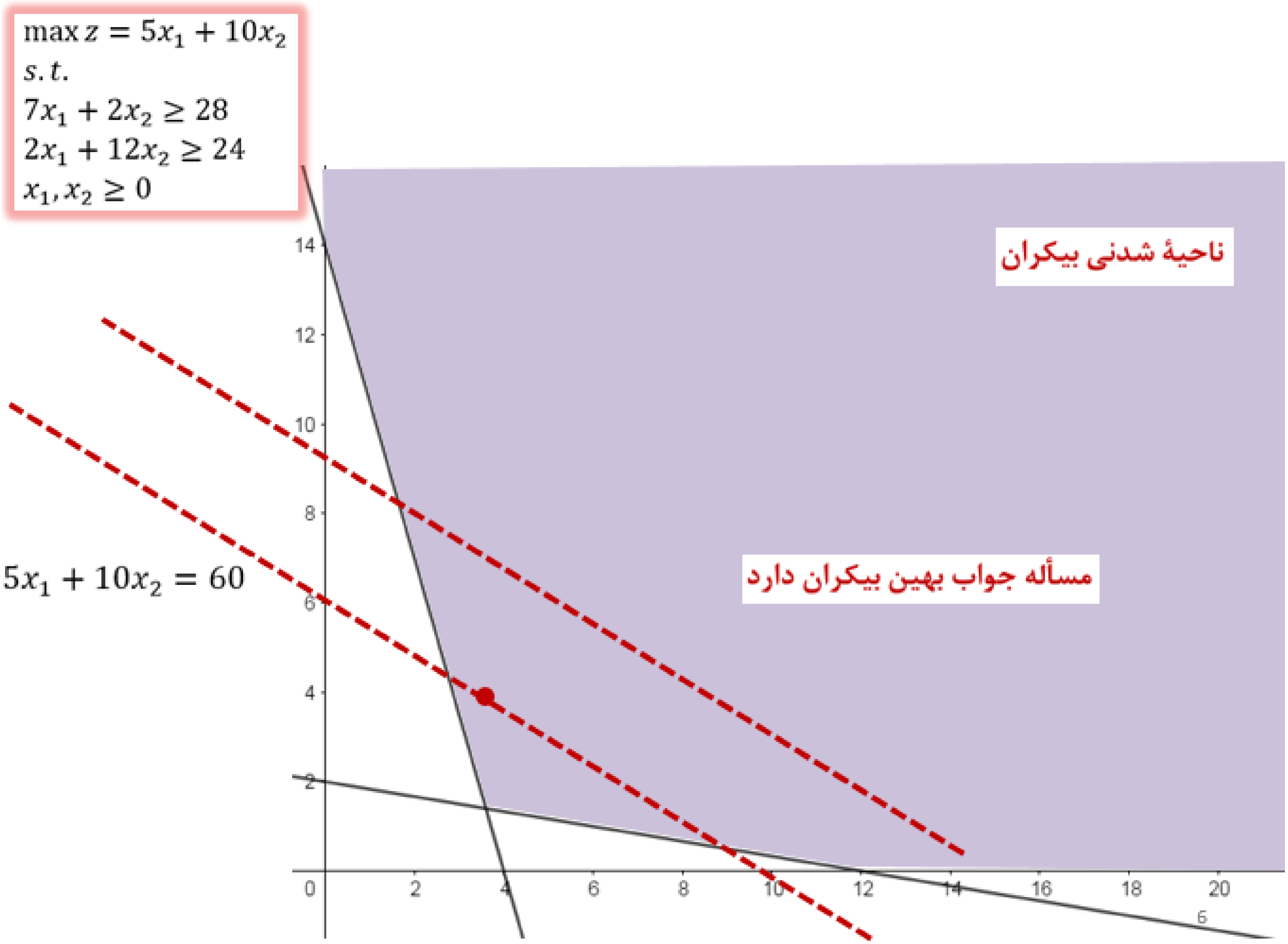
$$
\begin{aligned}
&\min z = 5x_1 + 10x_2 \\
&s.t. \\
&7x_1 + 2x_2 \geq 28 \\
&2x_1 + 12x_2 \geq 24 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
&\min z = 5x_1 + 10x_2 \\
&s.t. \\
&7x_1 + 2x_2 \geq 28 \\
&2x_1 + 12x_2 \geq 24 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



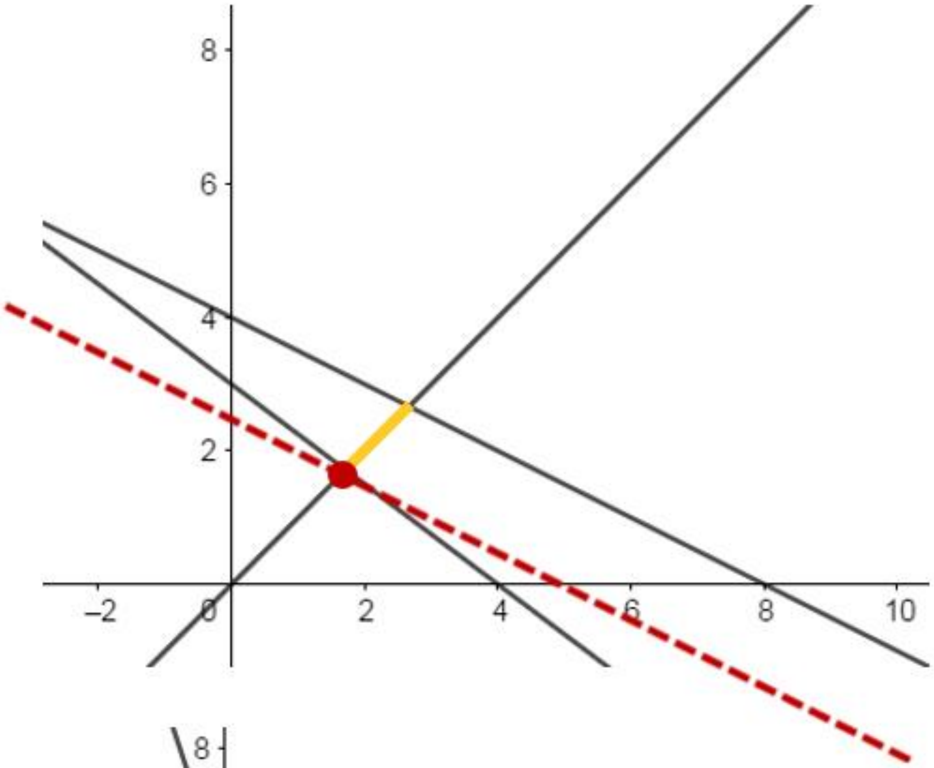

$\min z = 5x_1 + 10x_2$
$s.t.$
$7x_1 + 2x_2 \geq 28$
$2x_1 + 12x_2 \geq 24$
$x_1, x_2 \geq 0$
ناحیهٔ شدنی بیکران
$5x_1 + 10x_2 = 60$
$(x_1, x_2) = (4, 4)$
$z = 60$
$x_1^* = 3.6$
$x_2^* = 1.4$
$z^* = 32$


max z = 5x1 + 10x2
s.t.
7x1 + 2x2 ≥ 28
2x1 + 12x2 ≥ 24
x1, x2 ≥ 0
ناحیهٔ شدنی بیکران
5x1 + 10x2 = 60
مسأله جواب بهین بیکران دارد
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
2
4
6
8
10
12
14

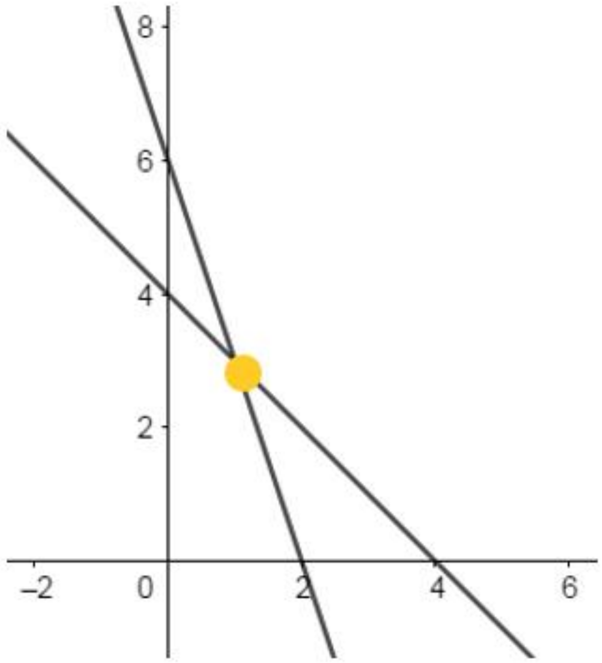
$$\begin{aligned}&\min z = x_1 + 2x_2\\ &s.t.\\ &x_1 + 2x_2 \le 8\\ &3x_1 + 4x_2 \ge 12\\ &x_1 - x_2 = 0\\ &x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{(x_1, x_2) = (2, 2)}$$

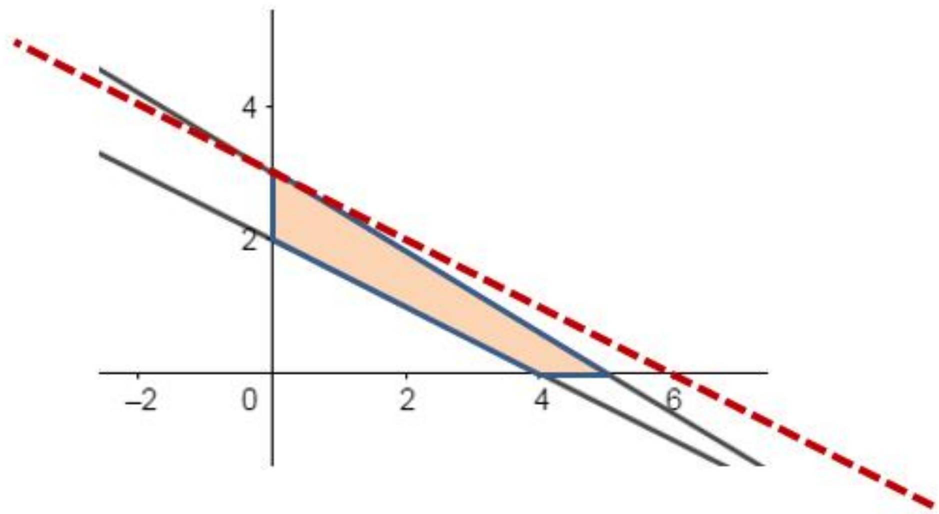
$$x_1 + 2x_2 = 6$$

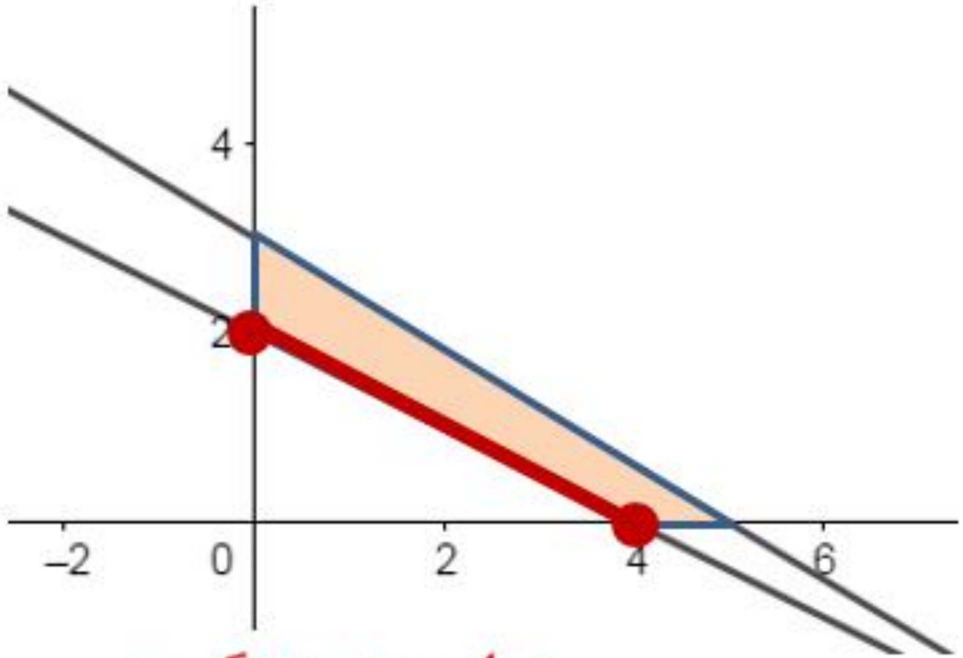


$$\begin{aligned}&\min z = x_1 + x_2\\ &s.t.\\ &6x_1 + 2x_2 = 12\\ &x_1 + x_2 = 4\\ &x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$



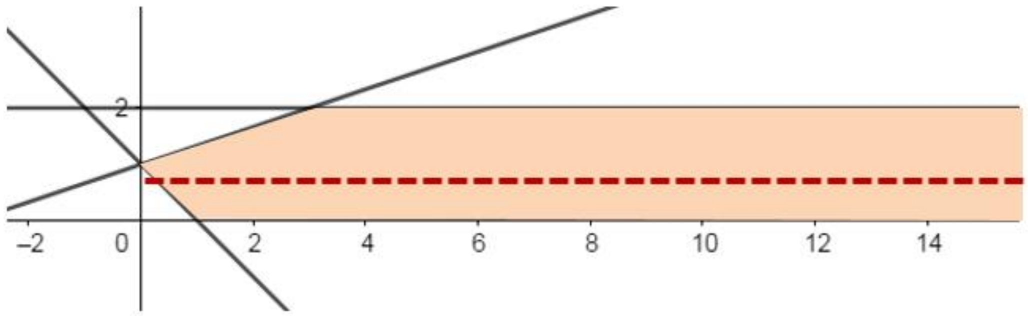
$$\min z = 10x_1 + 20x_2$$
$$s.t.$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$
$$5x_1 + 10x_2 \geq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

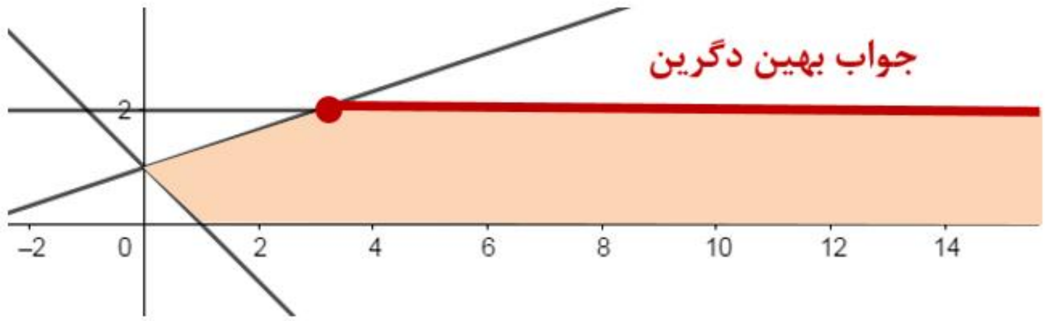




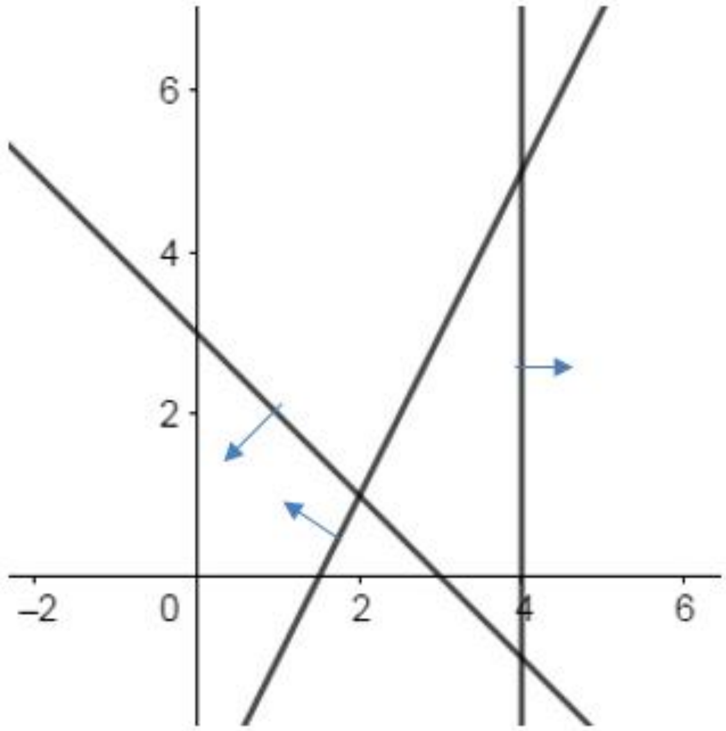
جواب بهین دگرین

$$\begin{aligned}&\max z = x_2\\&s.t.\\&x_1 + x_2 \geq 1\\&-x_1 + 3x_2 \leq 3\\&x_2 \leq 2\\&x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$





$$\begin{aligned}&\min z = 2x_1 + 3x_2\\&s.t.\\&x_1 + x_2 \le 3\\&2x_1 - x_2 \le 3\\&x_1 \ge 4\\&x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$



مسأله نشدنی

در تعیین جواب بهین یک LP چهار حالت امکان‌پذیر است:

۱- LP **جواب بهین منحصر به فرد** دارد.

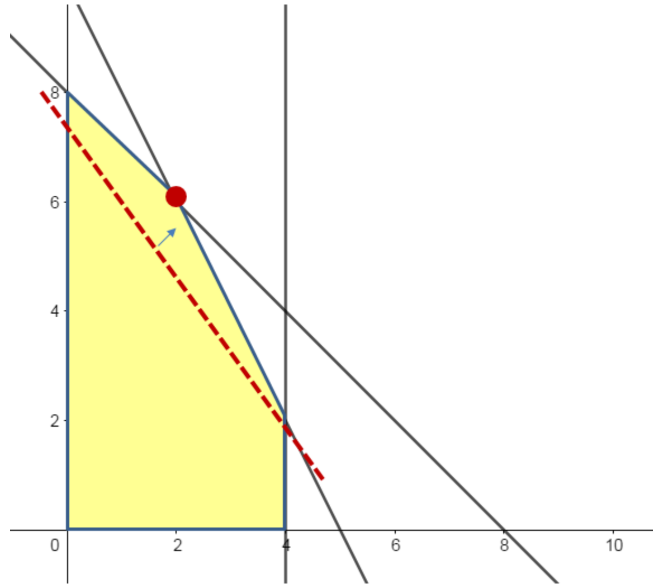
۲- LP **نشدنی** است.

۳- LP **جواب بهین بیکران** دارد.

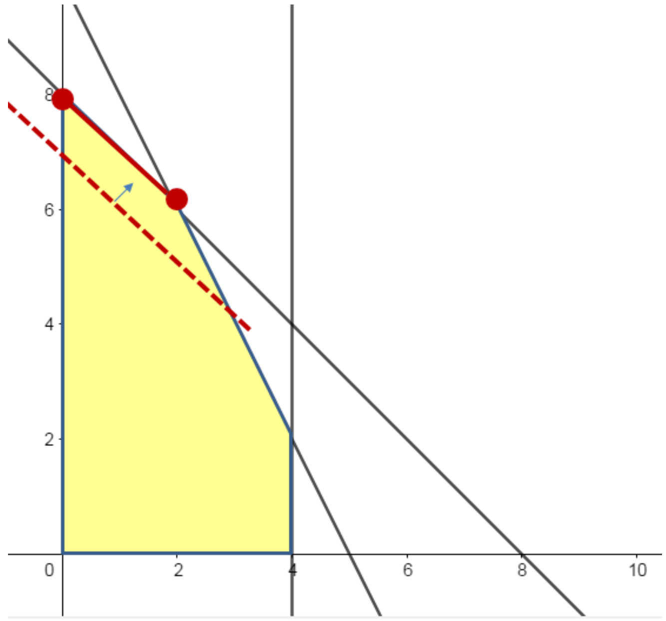
۴- LP **جوابهای بهین دگرین** دارد.

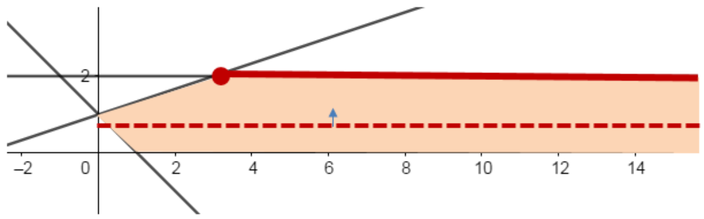
یعنی در ناحیهٔ شدنی، نقاطی با مقدار Z به اندازهٔ دلخواه بزرگ (در مسألهٔ ماکزیمم‌سازی) یا نقاطی با Z به اندازهٔ دلخواه کوچک (در مسألهٔ مینیمم‌سازی) وجود دارد.

در تعیین جواب بهین یک LP چهار حالت امکان‌پذیر است:

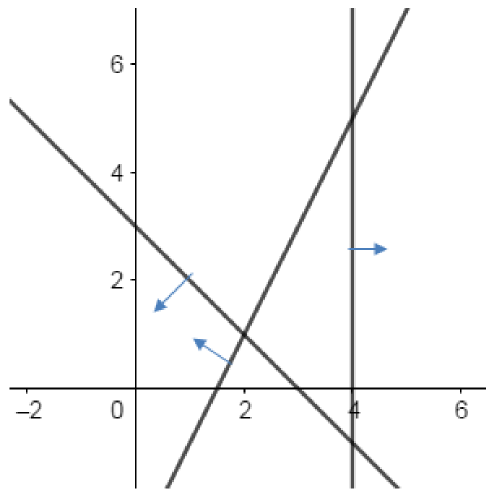


LP **جواب بهین منحصر به فرد** دارد.

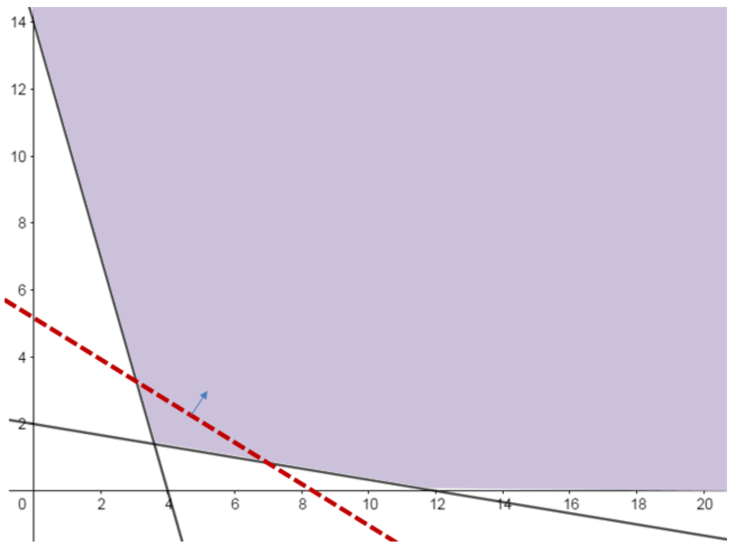




LP **جوابهای بهین دگرین** دارد.



LP **نشدنی** است.

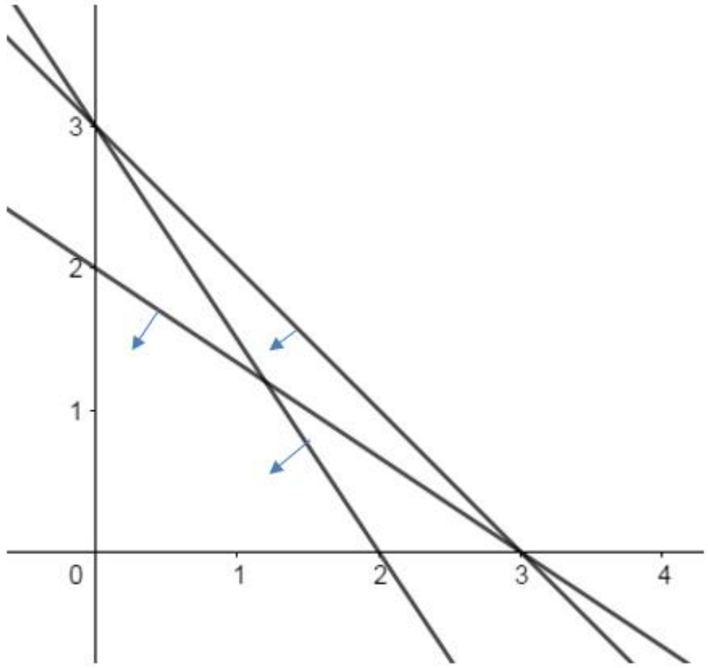


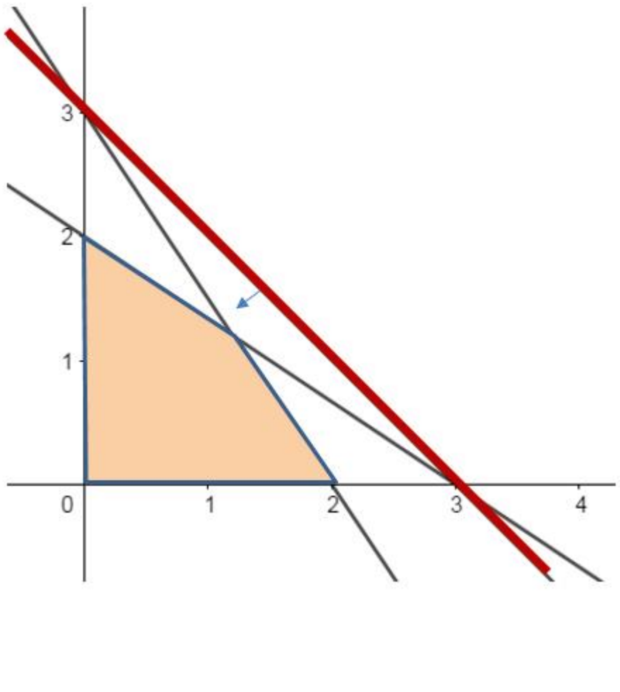
LP **جواب بهین بیکران** دارد.

قید زائد (Redundant constraint)

قیدی است که با حذف آن ناحیهٔ شدنی تغییر نمی‌کند.

$$\begin{aligned} &\max z = x_1 + 2x_2 \\ &s.t. \\ &2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ &3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &x_1 + x_2 \leq 3 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$





قید نافذ (binding constraint)

قیدی است که جواب بهین روی آن قرار می‌گیرد.

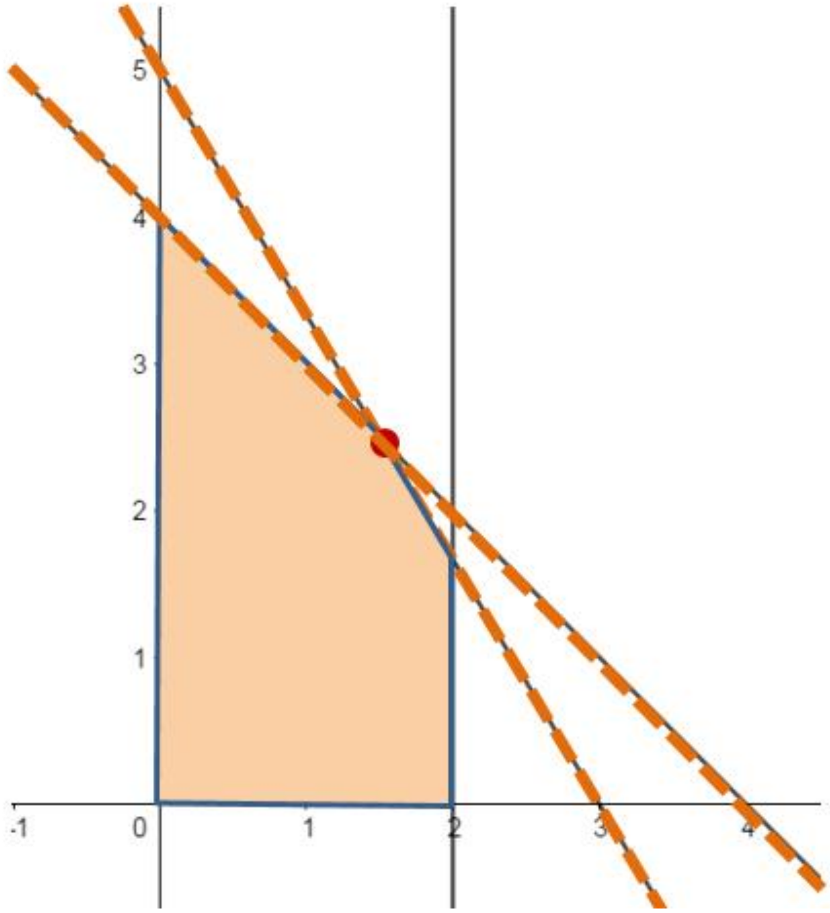
به عبارت دیگر، قید نافذ قیدی است که وقتی جواب بهین را در آن جایگذاری می‌کنیم، سمت چپ و راست قید با هم برابر می‌شوند.

قیدی که نافذ نباشد، **غیرنافذ (non-binding constraint)** نام دارد.

$$
\begin{aligned}
&\max z = 4x_1 + 3x_2 \\
&s.t. \\
&x_1 + x_2 \le 4 \\
&5x_1 + 3x_2 \le 15 \\
&x_1 \le 2 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{x_1^* = 1.5}$$

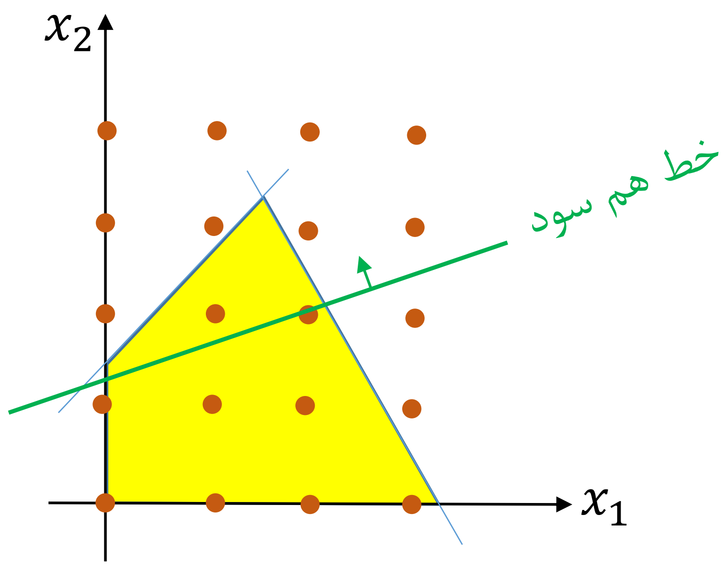
$$\boldsymbol{x_2^* = 2.5}$$



مثال: ناحیه شدنی یک مسأله ماکزیمم‌سازی با رنگ زرد در شکل زیر مشخص شده و خط هم سود و جهت بهبود دهنده تابع هدف ترسیم شده است. جواب بهین مسأله را در دو حالت تعیین نمایید.

حالت اول: x_1 و x_2 متغیرهای پیوسته هستند.

حالت دوم: x_1 و x_2 متغیرهای عددصحیح هستند.



ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$

یک ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = k \right\}$$

نیم فضا

ابرصفحهٔ $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = k \right\} = H$ فضای

$\mathbb{R}^n$ را به دو قسمت تقسیم می‌کند و زیرفضاها به صورت زیر ایجاد می‌شوند:

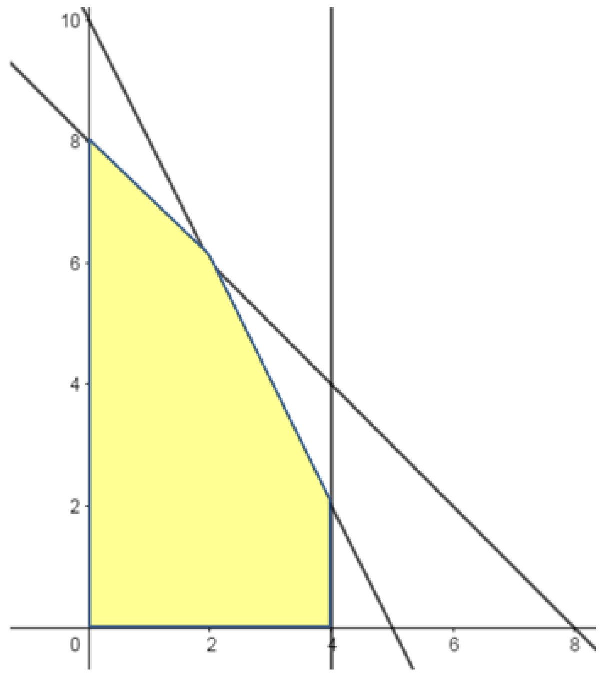
$$H^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq k \right\}$$

$$H^- = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq k \right\}$$

ناحیهٔ شدنی یک LP به صورت اشتراک تعداد متناهی ابرصفحه و نیم‌فضاست.

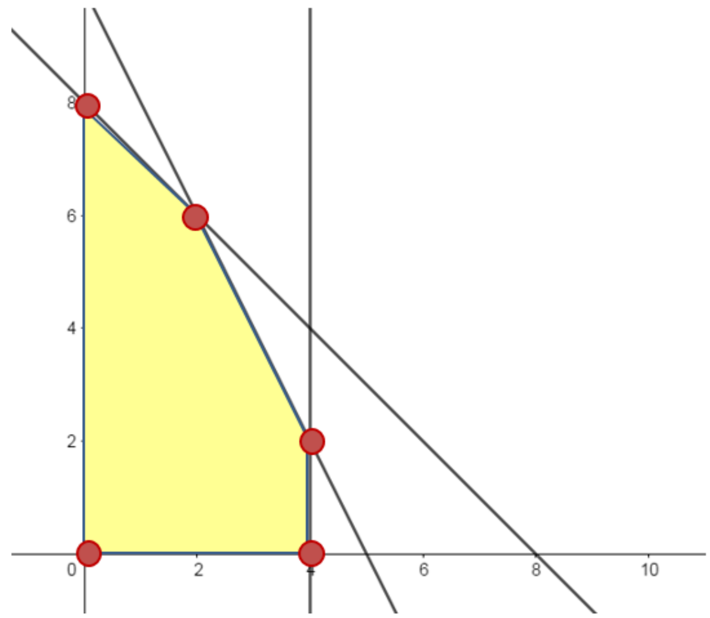
لذا به صورت یک چندوجهی محدب است.

$$\begin{aligned} &\max z = 3x_1 + 2x_2 \\ &s.t. \\ &2x_1 + x_2 \le 10 \\ &x_1 + x_2 \le 8 \\ &x_1 \le 4 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



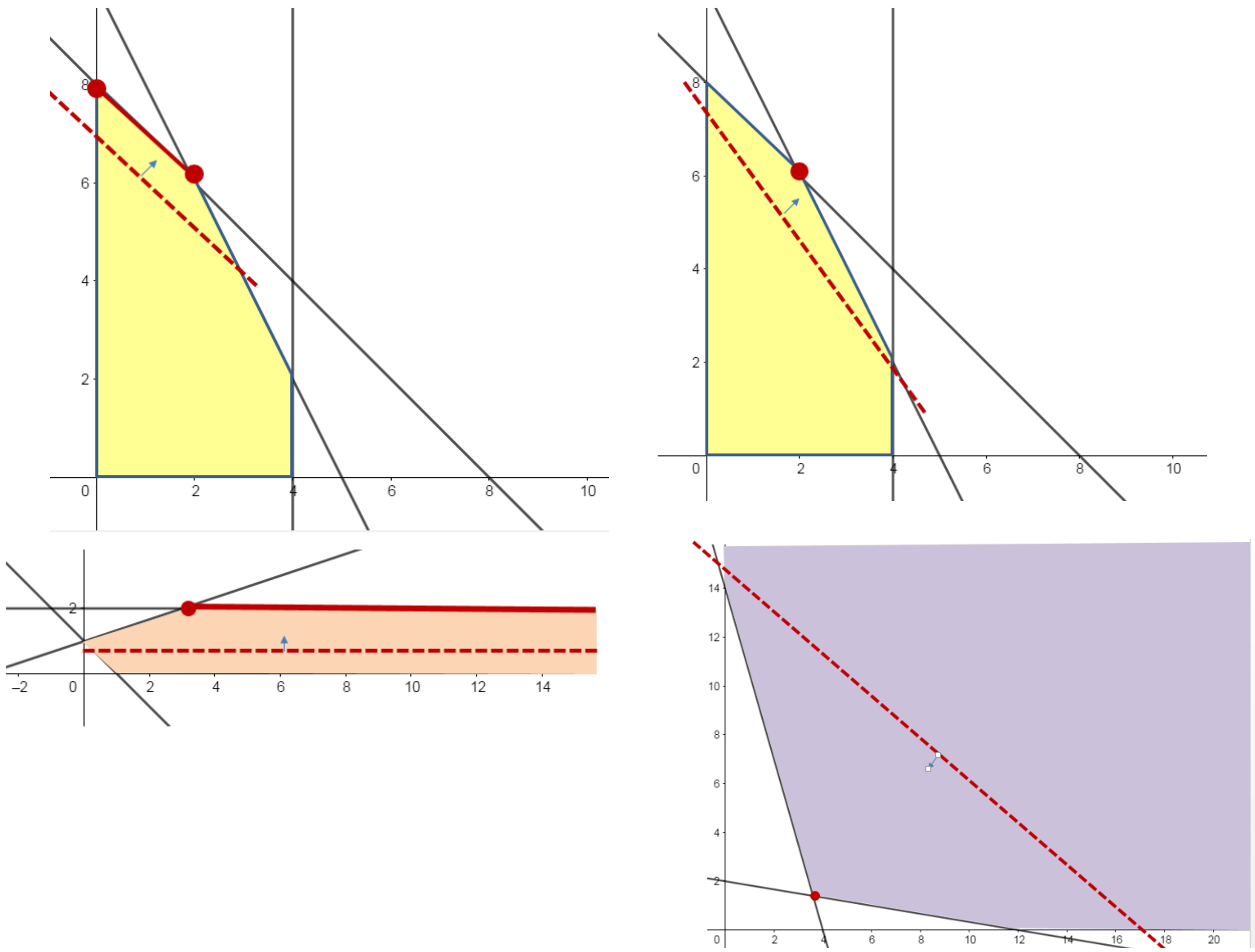
نقطهٔ گوشه‌ای

در مدل برنامه‌ریزی خطی n متغیره، نقطه‌ای از ناحیهٔ شدنی که از برخورد n ابرصفحهٔ مستقل خطی حاصل شده باشد، نقطهٔ گوشه‌ای (رأسی) نام دارد.



قضیه:

یک LP با متغیرهای نامنفی را در نظر بگیرید. اگر این LP دارای جواب بهین متناهی باشد (یعنی وضعیت‌های نشدنی و بیکرانی رخ ندهد) آنگاه **حداقل یک نقطهٔ گوشه‌ای وجود دارد که بهین است.**



یک ایده برای یافتن جواب بهین آن است که جواب بهین را در بین نقاط گوشه‌ای جستجو کنیم. در واقع با فرض آنکه بدانیم مسأله دارای جواب بهین متناهی است، می‌توانیم همهٔ نقاط گوشه‌ای را شناسایی و مقدار تابع هدف را به ازای آنها حساب کنیم. نقطهٔ گوشه‌ای با بهترین مقدار تابع هدف، متناظر با جواب بهین مسأله است.

به منظور بکارگیری ایدهٔ فوق، در ادامه به شرح جواب شدنی پایه‌ای (Basic Feasible Solution) و ارتباط آن با نقطهٔ گوشه‌ای می‌پردازیم.

چگونه یک LP را به صورت استاندارد بنویسیم؟

$$\begin{aligned}
&min\backslash max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&s.t. \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \begin{matrix} \leq \\ \geq \\ = \end{matrix} b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \begin{matrix} \leq \\ \geq \\ = \end{matrix} b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \begin{matrix} \leq \\ \geq \\ = \end{matrix} b_m
\end{aligned}$$

همراه با محدودیت‌های علامت روی $x_1, x_2, \dots, x_n$

شرط اول: همهٔ متغیرهای مسأله باید نامنفی باشند.

اگر متغیر x_j نامثبت باشد ($x_j \leq 0$) از تغییر متغیر $x_j = -x_j'$ استفاده می‌کنیم که $x_j' \geq 0$.

اگر متغیر x_j آزاد باشد، از تغییر متغیر $x_j = x_j' - x_j''$ استفاده می‌کنیم که $x_j', x_j'' \geq 0$.

شرط دوم: مقادیر سمت راست باید نامنفی باشند.

شرط سوم: قیود باید به صورت تساوی باشند.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

قید فوق را با قید زیر جایگزین می‌کنیم:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + s_i = b_i$$

متغیر کمبود
Slack variable

همچنین، محدودیت $s_i \geq 0$ را به محدودیت‌های علامت اضافه می‌کنیم.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$

قید فوق را با قید زیر جایگزین می‌کنیم:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - e_i = b_i$$

متغیر مازاد
Excess variable

همچنین، محدودیت $e_i \geq 0$ را به محدودیت‌های علامت اضافه می‌کنیم.

مثال: LP زیر را به صورت استاندارد بنویسید.

$$\max z = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3$$
$$s.t.$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$
$$x_1 + 9x_2 - 7x_3 \leq -50$$
$$-5x_1 - 3x_2 = -20$$
$$x_1 \leq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \text{ آزاد}$$

x_1 را با $-x_1'$ جایگزین می‌کنیم. x_3 را با $x_3' - x_3''$ جایگزین می‌کنیم.

$$\max z = -3x_1' - 3x_2 + 7x_3' - 7x_3''$$
$$s.t.$$
$$-x_1' + x_2 + x_3' - x_3'' \leq 4$$
$$-x_1' + 9x_2 - 7x_3' + 7x_3'' \leq -50$$
$$5x_1' - 3x_2 = -20$$
$$x_1', x_2, x_3', x_3'' \geq 0$$

طرفین قیود دوم و سوم را در علامت منفی ضرب می‌کنیم.

$$\max z = -3x_1' - 3x_2 + 7x_3' - 7x_3''$$
$$s.t.$$
$$-x_1' + x_2 + x_3' - x_3'' \leq 4$$
$$x_1' - 9x_2 + 7x_3' - 7x_3'' \geq 50$$
$$-5x_1' + 3x_2 = 20$$
$$x_1', x_2, x_3', x_3'' \geq 0$$

قیود را به صورت تساوی می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
&\max z = -3x_1' - 3x_2 + 7x_3' - 7x_3'' \\
&s.t. \\
&-x_1' + x_2 + x_3' - x_3'' + s_1 = 4 \\
&x_1' - 9x_2 + 7x_3' - 7x_3'' - e_2 = 50 \\
&-5x_1' + 3x_2 = 20 \\
&x_1', x_2, x_3', x_3'', s_1, e_2 \geq 0
\end{aligned}$$

بنابراین، یک LP استاندارد به صورت زیر است که در آن مقادیر سمت راست مثبت هستند.

$$\begin{aligned}
&min\backslash max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&s.t. \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
&x_1, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}$$

که نمایش ماتریسی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&min\backslash max\ z = c^T x \\
&s.t. \quad Ax = b \\
&\qquad\ \ x \geq 0
\end{aligned}$$

که

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

جواب پایه‌ای (Basic solution)

یک LP استاندارد با m قید و n متغیر را در نظر بگیرید که ناحیهٔ شدنی آن به صورت $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ است و A یک ماتریس $m \times n$ است.

فرض کنید $n \geq m$ و سطرهای A مستقل خطی باشند.

اگر در دستگاه $Ax = b$، $n - m$ متغیر را صفر قرار دهیم و دستگاه را برای m متغیر باقیمانده حل کنیم، اگر جواب آن موجود و منحصر به فرد باشد، به این جواب، **جواب پایه‌ای** می‌گوییم.

در یک جواب پایه‌ای متغیرها به دو دسته تقسیم می‌شوند:

متغیرهای پایه‌ای (Basic variable)- به اختصار BV – تعداد برابر با m

متغیرهای غیرپایه‌ای (Non-basic variable)- به اختصار NBV – تعداد برابر با $n - m$

متغیرهای غیرپایه‌ای را برابر با صفر قرار می‌دهیم و دستگاه را برای متغیرهای پایه‌ای حل می‌کنیم. اگر جواب موجود و منحصر به فرد باشد، به آن، جواب پایه‌ای می‌گوییم.

مثال: دستگاه $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

آیا $BV = \{x_2, x_3\}$ و $NBV = \{x_1\}$ متناظر با یک جواب پایه‌ای است؟

با قرار دادن $x_1 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} x_2 = 3 \\ -x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x_2 = 3, x_3 = -1}_{\boxed{\text{منحصر به فرد}}}$$

پس $(x_1, x_2, x_3) = (0,3,-1)$ یک جواب پایه‌ای است.

جواب شدنی پایه‌ای (Basic feasible solution)

یک LP استاندارد با m قید و n متغیر را در نظر بگیرید که ناحیهٔ شدنی آن به صورت $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ است. یک جواب پایه‌ای برای دستگاه $Ax = b$ که در محدودیت‌های علامت $x \geq 0$ صدق کند را جواب شدنی پایه‌ای می‌نامیم.

مثال: دستگاه $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

آیا $BV = \{x_2, x_3\}$ و $NBV = \{x_1\}$ متناظر با یک جواب شدنی پایه‌ای است؟

جواب: با قرار دادن $x_1 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} x_2 = 3 \\ -x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x_2 = 3, x_3 = -1 \quad \boxed{\text{منحصر به فرد}}$$

$(x_1, x_2, x_3) = (0,3,-1)$ یک جواب پایه‌ای است. اما شدنی پایه‌ای نیست.

آیا $BV = \{x_1, x_2\}$ و $NBV = \{x_3\}$ متناظر با یک جواب شدنی پایه‌ای است؟

جواب: با قرار دادن $x_3 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = 1, x_2 = 2 \quad \boxed{\text{منحصر به فرد}}$$

پس $(x_1, x_2, x_3) = (1,2,0)$ یک جواب شدنی پایه‌ای است.

مثال: دستگاه
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_2 + x_4 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$
را در نظر بگیرید و همهٔ جواب‌های شدنی پایه‌ای آن را بیابید.

جواب:

$BV = \{x_1, x_2\}, NBV = \{x_3, x_4\}$ $x_3 = 0, x_4 = 0$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ x_2 = 3 \end{cases}$	$(0,3,0,0)$	شدنی پایه‌ای
$BV = \{x_1, x_3\}, NBV = \{x_2, x_4\}$ $x_2 = 0, x_4 = 0$	$\begin{cases} x_1 + x_3 = 6 \\ 0 = 3 \end{cases}$		جواب شدنی پایه‌ای نداریم.
$BV = \{x_1, x_4\}, NBV = \{x_2, x_3\}$ $x_2 = 0, x_3 = 0$	$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 6 \\ x_4 = 3 \end{cases}$	$(0,0,0,3)$	شدنی پایه‌ای
$BV = \{x_2, x_3\}, NBV = \{x_1, x_4\}$ $x_1 = 0, x_4 = 0$	$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 = 3 \end{cases}$	$(0,3,0,0)$	شدنی پایه‌ای
$BV = \{x_2, x_4\}, NBV = \{x_1, x_3\}$ $x_1 = 0, x_3 = 0$	$\begin{cases} 2x_2 + 2x_4 = 6 \\ x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$		شدنی پایه‌ای نیست
$BV = \{x_3, x_4\}, NBV = \{x_1, x_2\}$ $x_1 = 0, x_2 = 0$	$\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_4 = 3 \end{cases}$	$(0,0,0,3)$	شدنی پایه‌ای

تذکر: یک LP استاندارد با m قید و n متغیر را در نظر بگیرید که ناحیهٔ شدنی آن به صورت $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ است. این مسأله حداکثر $\binom{n}{m}$ جواب شدنی پایه‌ای دارد.

ارتباط بین جواب‌های شدنی پایه‌ای و نقاط گوشه‌ای (خیلی مهم)

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که مجموعهٔ جواب‌های شدنی پایه‌ای و مجموعهٔ نقاط گوشه‌ای معادلند.

قضیه: LP زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد و $n \geq m$ و سطرهای A مستقل خطی باشند.

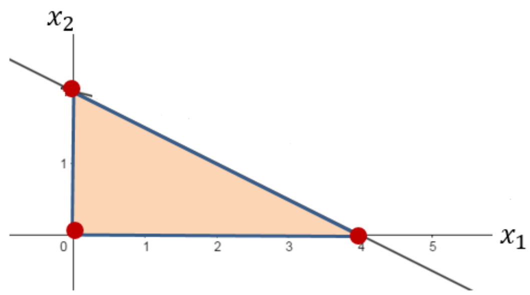
$$\begin{aligned} & min\backslash max\; z = c^T x \\ & s.t. \quad Ax = b \\ & \qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

الف) اگر $\hat{x}$ یک نقطهٔ گوشه‌ای برای ناحیهٔ شدنی مسألهٔ فوق باشد، آنگاه $\hat{x}$ یک جواب شدنی پایه‌ای برای دستگاه $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ است.

ب) اگر $\hat{x}$ یک جواب شدنی پایه‌ای برای دستگاه $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ باشد، آنگاه $\hat{x}$ یک نقطهٔ گوشه‌ای برای ناحیهٔ شدنی مسأله است.

مثال: مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید.

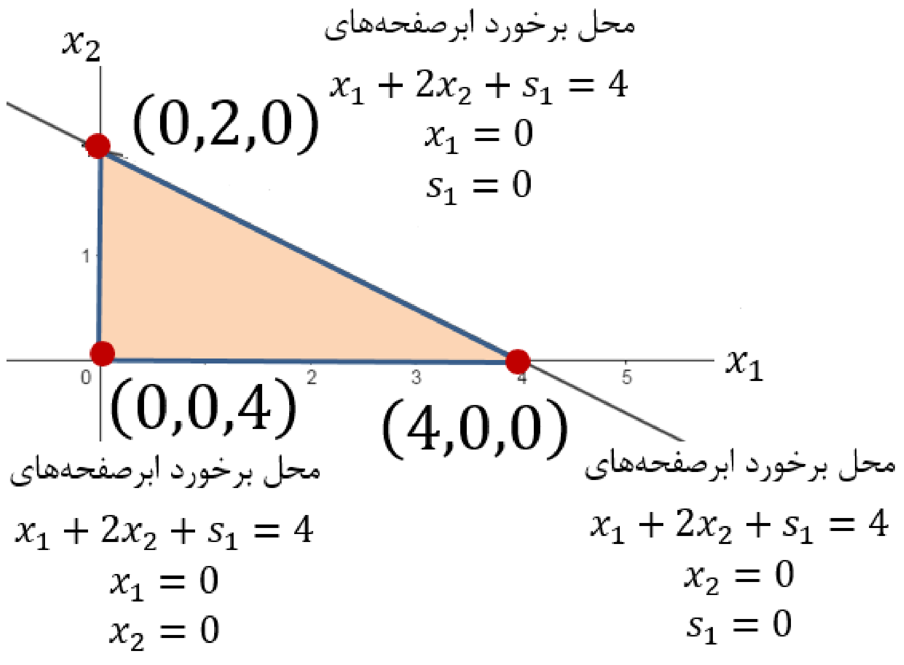
$$
\begin{aligned}
&\max z = 3x_1 + 9x_2\\
&s.t.\\
&x_1 + 2x_2 \le 4\\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



برای یافتن جواب‌های شدنی پایه‌ای لازم است مسأله را استاندارد کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\max z = 3x_1 + 9x_2\\
&s.t.\\
&x_1 + 2x_2 + s_1 = 4\\
&x_1, x_2, s_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

BV	***NBV***	**جواب شدنی پایه‌ای**	**محل برخورد ابرصفحه‌های مستقلِ**
$\{s_1\}$	$\{x_1, x_2\}$	$(x_1, x_2, s_1) = (0,0,4)$	$x_1 + 2x_2 + s_1 = 4,\ \ x_1 = 0,\ \ x_2 = 0$
$\{x_1\}$	$\{x_2, s_1\}$	$(x_1, x_2, s_1) = (4,0,0)$	$x_1 + 2x_2 + s_1 = 4,\ \ x_2 = 0,\ \ s_1 = 0$
$\{x_2\}$	$\{x_1, s_1\}$	$(x_1, x_2, s_1) = (0,2,0)$	$x_1 + 2x_2 + s_1 = 4,\ \ x_1 = 0,\ \ s_1 = 0$

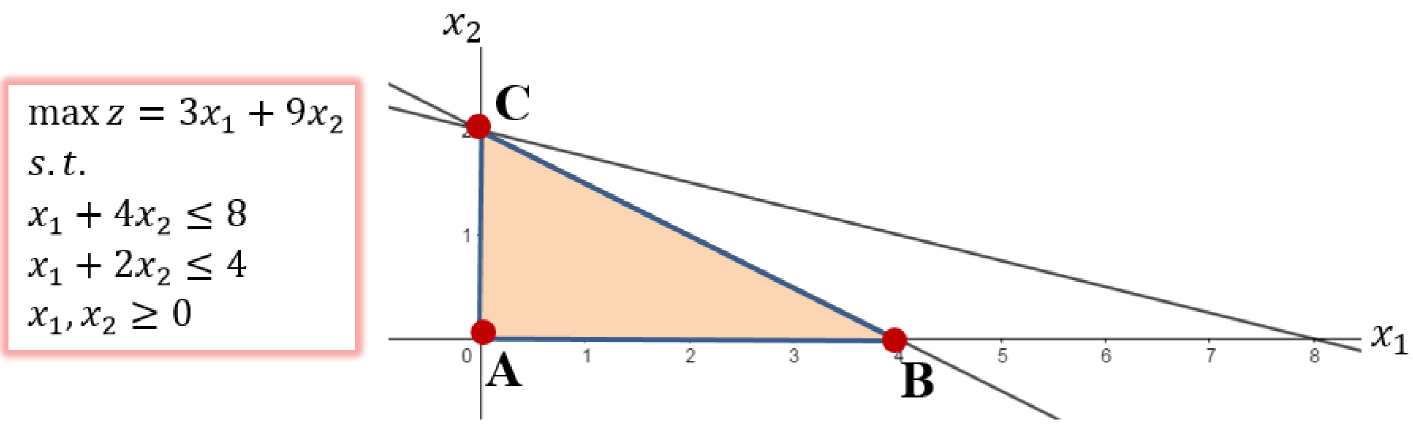


نقطهٔ گوشه‌ای تباهیده (Degenerate extreme point)

یک LP استاندارد با m قید و n متغیر را در نظر بگیرید که ناحیهٔ شدنی آن به صورت $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ است.

اگر بیشتر از n ابرصفحه از یک نقطه گوشه‌ای عبور کند، به آن نقطه گوشه‌ای، نقطه گوشه‌ای تباهیده می‌گوییم.

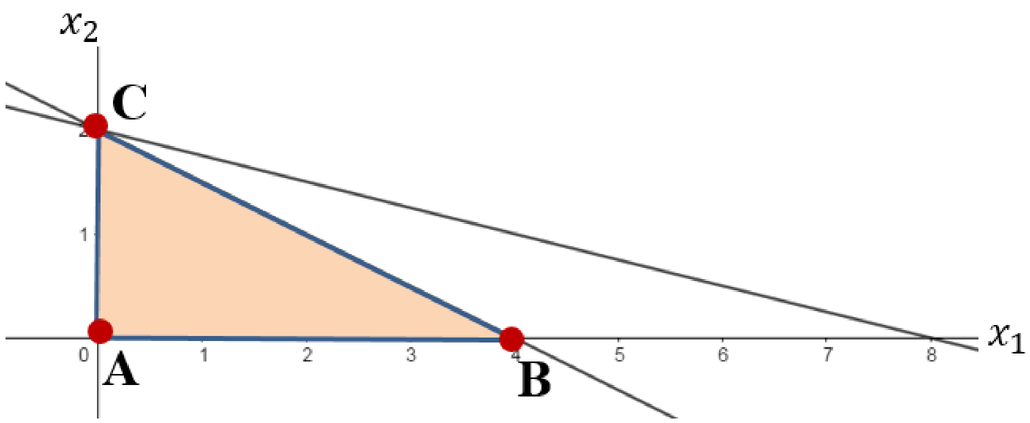
به عنوان مثال در LP دو متغیره زیر، C یک نقطه گوشه‌ای است اما از آن سه معادله گذشته است. لذا، نقطه گوشه‌ای A تباهیده است.



یک LP را که حداقل یک نقطه گوشه‌ای تباهیده داشته باشد، **LP تباهیده** می‌نامیم.

مثال: مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}&\max z = 3x_1 + 9x_2\\ &s.t.\\ &x_1 + 4x_2 \leq 8\\ &x_1 + 2x_2 \leq 4\\ &x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$



برای یافتن جواب‌های شدنی پایه‌ای لازم است مسأله را استاندارد کنیم:

$$\begin{aligned}&\max z = 3x_1 + 9x_2\\ &s.t.\\ &x_1 + 4x_2 + s_1 = 8\\ &x_1 + 2x_2 + s_2 = 4\\ &x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0\end{aligned}$$

محل برخورد ابرصفحه‌های مستقلِ	نقطهٔ گوشه‌ای	جواب شدنی پایه‌ای (x_1, x_2, s_1, s_2)	NBV	BV
$x_1 + 4x_2 + s_1 = 8$ $x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$ $x_1 = 0$ $x_2 = 0$	A	$(0,0,8,4)$	$\{x_1, x_2\}$	$\{s_1, s_2\}$
$x_1 + 4x_2 + s_1 = 8$ $x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$ $x_2 = 0$ $s_2 = 0$	B	$(4,0,4,0)$	$\{x_2, s_2\}$	$\{x_1, s_1\}$
$x_1 + 4x_2 + s_1 = 8$ $x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$ $s_1 = 0$ $s_2 = 0$ $x_1 = 0$ بیشتر از ۴ تا	C	$(0,2,0,0)$	$\{s_1, s_2\}$	$\{x_1, x_2\}$
مشابه ردیف فوق	C	$(0,2,0,0)$	$\{x_1, s_2\}$	$\{s_1, x_2\}$
مشابه ردیف فوق	C	$(0,2,0,0)$	$\{x_1, s_1\}$	$\{s_2, x_2\}$

جواب شدنی پایه‌ای تباهیده

یک LP استاندارد با m قید و n متغیر را در نظر بگیرید که ناحیهٔ شدنی آن به صورت $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ است.

گفتیم که اگر بیشتر از n ابرصفحه از یک نقطه گوشه‌ای عبور کند، به آن نقطه گوشه‌ای، نقطه گوشه‌ای تباهیده می‌گوییم.

به طور معادل، یک جواب شدنی پایه‌ای را تباهیده گوییم اگر مقدار حداقل یکی از متغیرهای متعلق به پایه برابر با صفر باشد.

مسأله‌ای را که حداقل یک جواب شدنی پایه‌ای (نقطه گوشه‌ای) تباهیده داشته باشد، تبهگن می‌نامیم.

نتایج مثال‌های فوق

هر جواب شدنی پایه‌ای با یک نقطهٔ گوشه‌ای منحصر به فرد نظیر می‌شود.

یک نقطهٔ گوشه‌ای اگر تباهیده نباشد، با یک انتخاب منحصر به فرد از BV و NBV متناظر می‌شود.

یک نقطهٔ گوشه‌ای اگر تباهیده باشد، ممکن است با چند انتخاب BV و NBV نظیر گردد.

قبلاً گفتیم که اگر یک LP جواب بهین متناهی داشته باشد، حتماً یک نقطهٔ گوشه‌ای وجود دارد که بهین است.

اکنون با توجه به قضیهٔ قبل نتیجه می‌گیریم که اگر یک LP جواب بهین متناهی داشته باشد، حتماً یک جواب شدنی پایه‌ای وجود دارد که بهین است.

پس برای یافتن جواب بهین، می‌توان جستجو را فقط روی جواب‌های شدنی پایه‌ای انجام داد.

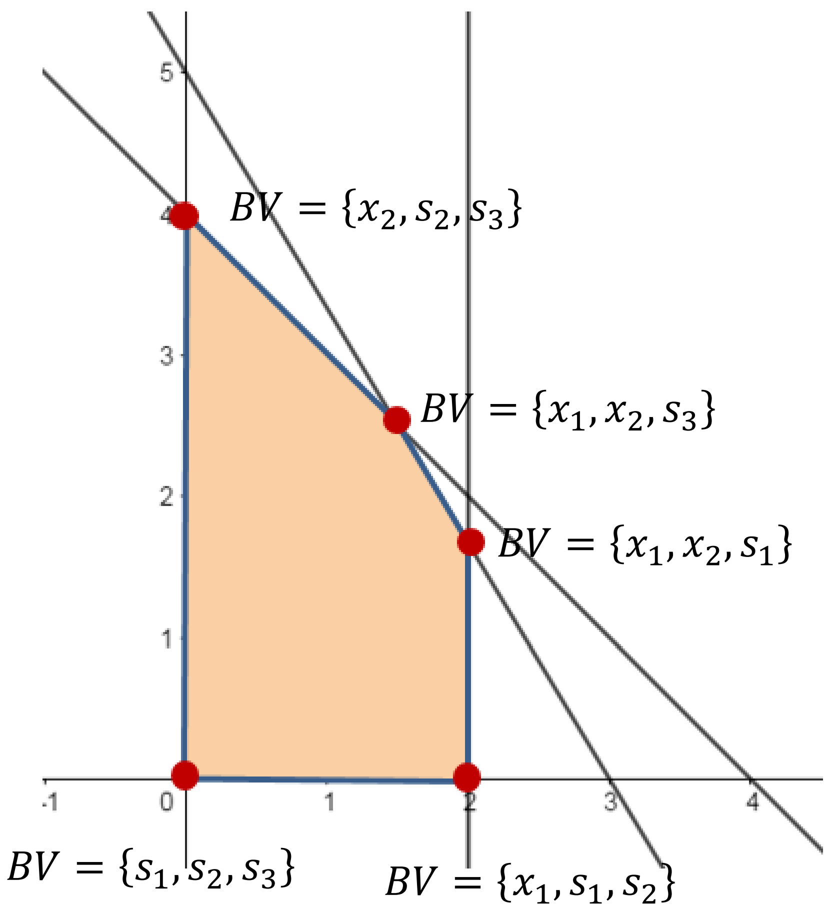
جواب‌های شدنی پایه‌ای مجاور

فرض کنید p یک جواب شدنی پایه‌ای باشد و BV_p مجموعهٔ متغیرهای پایه‌ای و NBV_p مجموعهٔ متغیرهای غیرپایه‌ای باشد.

فرض کنید q یک جواب شدنی پایه‌ای باشد و BV_q مجموعهٔ متغیرهای پایه‌ای و NBV_q مجموعهٔ متغیرهای غیرپایه‌ای باشد.

دو جواب شدنی پایه‌ای p و q را مجاور گوییم اگر BV_p و BV_q تنها در یک عضو با هم متفاوت باشند، به عبارت دیگر دارای $m-1$ متغیر پایه‌ای مشترک باشند.

$$\begin{aligned}
&\max z = 4x_1 + 3x_2\\
&s.t.\\
&x_1 + x_2 \leq 4\\
&5x_1 + 3x_2 \leq 15\\
&x_1 \leq 2\\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$



ایدهٔ اصلی در الگوریتم سیمپلکس

- قبلاً دیدیم که اگر یک مسألهٔ LP دارای حداقل یک جواب بهین باشد (یعنی نشدنی یا بیکران نباشد) آنگاه حتماً یک نقطهٔ گوشه‌ای وجود دارد که بهینه است.
- از طرف دیگر، دیدیم که مجموعهٔ نقاط گوشه‌ای و مجموعهٔ جواب‌های شدنی پایه‌ای با یکدیگر معادلند.
- پس می‌توان نتیجه گرفت که اگر یک LP دارای حداقل یک جواب بهین باشد (یعنی مسأله نشدنی یا بیکران نباشد) آنگاه حتماً یک جواب شدنی پایه‌ای وجود دارد که بهین است.
- بنابراین برای حل یک LP می‌توانیم فقط روی جواب‌های شدنی پایه‌ای متمرکز شویم. روش سیمپلکس از این ویژگی استفاده می‌کند. این روش با یک جواب شدنی پایه‌ی شروع می‌کند و جواب شدنی پایه‌ای مجاور آن را با هدف بهبود مقدار تابع هدف ملاقات می‌کند و در هر تکرار، از جواب شدنی پایه‌ای فعلی با هدف بهبود دادن مقدار تابع هدف، به جواب شدنی پایه‌ای مجاور حرکت می‌کند و این روند ادامه دارد تا زمانی که به یک جواب شدنی پایه‌ای برسد که مقدار تابع هدفش از سایر جواب‌های شدنی پایه‌ای مجاورش بهتر باشد. این جواب، همان جواب بهین مسأله خواهد بود.

تمرین: ثابت کنید ناحیهٔ شدنی یک LP، یک مجموعهٔ محدب است.

کافی است نشان دهید:

۱- ناحیهٔ شدنی متناظر با هر قید، مجموعه‌ای محدب است

۲- اشتراک چند مجموعهٔ محدب نیز مجموعه‌ای محدب است.

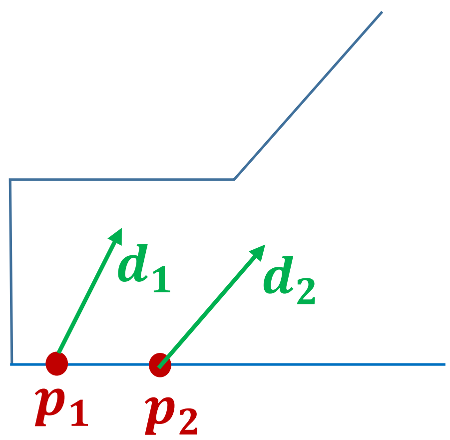
بررسی دقیق‌تر قضایایی که قبل‌تر مطرح شد:

جهت دورشونده (Recession direction)

فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}^n$ و p نقطه‌ای متعلق به S باشد. بردار $d \neq 0$ را یک جهت دورشونده برای نقطه p گوییم هرگاه

$$\forall \lambda \geq 0 \quad p + \lambda d \in S$$

به عنوان مثال، در شکل زیر d_2 برای نقطه p_2 جهت دورشونده است اما d_1 برای نقطه p_1 جهت دورشونده نیست.

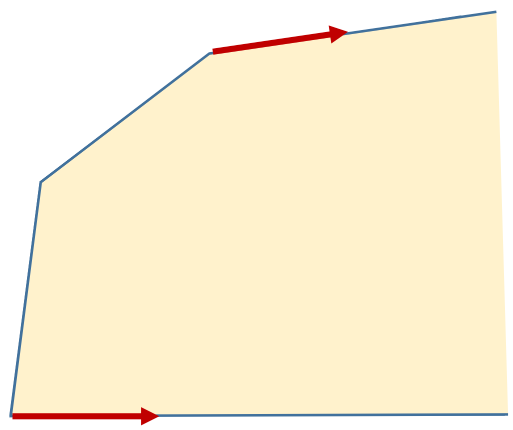


اگر S مجموعه بسته و محدب باشد و $d \neq 0$ یک جهت دورشونده برای یک نقطه دلخواه $p \in S$ باشد، آنگاه d یک جهت دورشونده برای تمام نقاط S است.

به طور خاص، ناحیهٔ شدنی LP بسته و محدب است. پس نکته فوق برای آن برقرار است.

جهت دورشونده رأسی (**Extreme direction**)

جهت دورشونده d را جهت دورشونده رأسی برای مجموعه S گوییم هرگاه نتوان آن را به صورت ترکیب خطی نامنفی دو جهت دورشونده متمایز دیگر از مجموعه S نوشت.



قضیه نمایش (Representation theorem)

فرض کنید ناحیه شدنی یک LP یک چندوجهی به صورت زیر باشد:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

فرض کنید S ناتهی باشد و فرض کنید $P_1, \dots, P_K$ مجموعه نقاط رأسی و $d_1, \dots, d_R$ مجموعه جهت‌های دورشونده رأسی (در صورت وجود) باشند.

در این صورت $P \in S$ است اگر وتنها اگر بتوان P را به صورت ترکیب خطی محدب از نقاط گوشه‌ای به اضافه ترکیب خطی نامنفی از جهت‌های دورشونده رأسی نوشت، یعنی

$$P = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k P_k + \sum_{r=1}^{R} \mu_r d_r$$

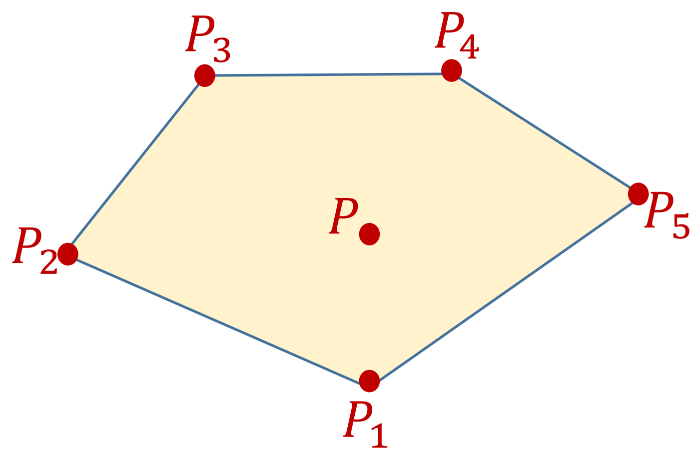
به طوری که

$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, K$$

$$\mu_r \geq 0 \quad \forall r = 1, \dots, R$$

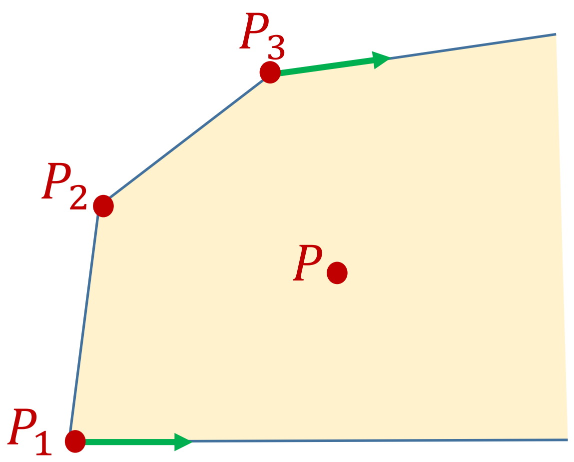
چند مثال برای واضح شدن قضیه نمایش



$$P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 + \lambda_5 P_5$$

که

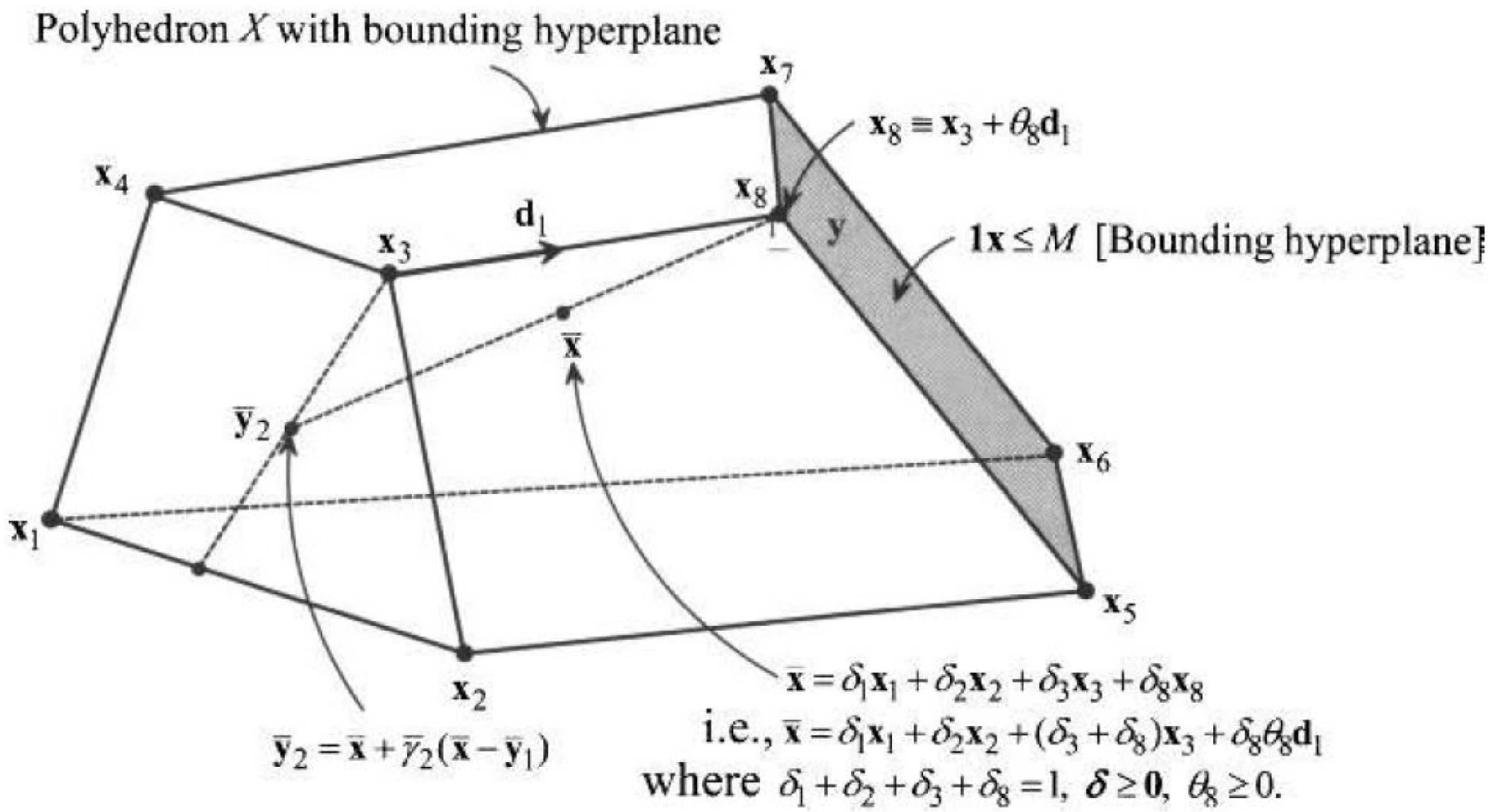
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$



$$P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2$$

که

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$
$$\mu_1, \mu_2 \geq 0$$



Polyhedron X with bounding hyperplane
$\mathbf{x}_7$
$\mathbf{x}_8 \equiv \mathbf{x}_3 + \theta_8 \mathbf{d}_1$
$\mathbf{x}_4$
$\mathbf{x}_8$
$\mathbf{d}_1$
$\mathbf{y}$
$\mathbf{1x} \le M$ [Bounding hyperplane]
$\mathbf{x}_3$
$\bar{\mathbf{x}}$
$\bar{\mathbf{y}}_2$
$\mathbf{x}_6$
$\mathbf{x}_1$
$\mathbf{x}_5$
$\mathbf{x}_2$
$\bar{\mathbf{x}} = \delta_1 \mathbf{x}_1 + \delta_2 \mathbf{x}_2 + \delta_3 \mathbf{x}_3 + \delta_8 \mathbf{x}_8$
i.e., $\bar{\mathbf{x}} = \delta_1 \mathbf{x}_1 + \delta_2 \mathbf{x}_2 + (\delta_3 + \delta_8) \mathbf{x}_3 + \delta_8 \theta_8 \mathbf{d}_1$
where $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_8 = 1$, $\boldsymbol{\delta} \ge \mathbf{0}$, $\theta_8 \ge 0$.
$\bar{\mathbf{y}}_2 = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\gamma}_2 (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}_1)$

قضیه: اگر یک مسأله LP دارای حداقل یک جواب بهین باشد (یعی مسأله نشدنی یا بیکران نباشد)، آنگاه حداقل یک نقطه گوشه‌ای وجود دارد که بهین است.

اثبات: بدون از دست رفتن کلیت مسأله LP را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\max z = c^T x$$
$$s.t.$$
$$Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

فرض کنید x^* جواب بهین مسأله باشد. به علاوه، فرض کنید $P_1, \dots, P_K$ مجموعه نقاط رأسی و $d_1, \dots, d_R$ مجموعه جهت‌های دورشونده رأسی (در صورت وجود) باشند. اگر نقطه رأسی $P \in \{P_1, \dots, P_K\}$ وجود داشته باشد به طوری که $c^T x^* = c^T P$ که حکم برقرار است. پس به برهان خلف، فرض می‌کنیم:

$$c^T P_k < c^T x^* \quad \forall k = 1,2, \dots, K \qquad \mathbf{(1)}$$

طبق قضیه نمایش داریم:

$$x^* = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k P_k + \sum_{r=1}^{R} \mu_r d_r$$

به طوری که

$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \ge 0 \quad \forall k = 1, \dots, K$$
$$\mu_r \ge 0 \quad \forall r = 1, \dots, R$$

پس داریم:

$$c^T x^* = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k c^T P_k + \sum_{r=1}^{R} \mu_r c^T d_r$$

چون x^* بهینه است، به ازای هر $r = 1, \dots, R$ داریم $c^T d_r \leq 0$ و بنابراین

$$\sum_{r=1}^{R} \mu_r c^T d_r \leq 0$$

از دو رابطه اخیر نتیجه می‌شود که:

$$c^T x^* \leq \sum_{k=1}^{K} \lambda_k c^T P_k$$

اما با توجه به رابطه (1) داریم:

$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k c^T P_k < c^T x^*$$

که تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

کتاب بازارا صفحه ۹۹:

Correspondence Between Basic Feasible Solutions and Extreme Points

We shall now show that the collection of basic feasible solutions and the collection of extreme points are equivalent. In other words, a point is a basic feasible solution if and only if it is an extreme point. Since a linear programming problem having a finite optimal value has an optimal solution at an extreme point, an optimal basic feasible solution can always be found for such a problem.

Consider the following problem:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \mathbf{cx} \\ \text{subject to} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

where $\mathbf{A}$ is an $m \times n$ matrix with rank m. Let $\mathbf{x}$ be an extreme point of the feasible region. We shall show that $\mathbf{x}$ is also a basic feasible solution of the system $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

By the definition given in Section 2.6, there are some n linearly independent defining hyperplanes binding at $\mathbf{x}$. Since $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ provides m linearly independent binding hyperplanes, there must be some $p = n - m$ additional binding defining hyperplanes from the nonnegativity constraints that together with $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ provide n linearly independent defining hyperplanes binding at $\mathbf{x}$. Denoting these p additional hyperplanes by $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, we therefore conclude that the system $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ has $\mathbf{x}$ as the unique solution. Now, let $\mathbf{N}$ represent the columns of the variables $\mathbf{x}_N$ in $\mathbf{A}$, and let $\mathbf{B}$ be the remaining columns of $\mathbf{A}$ with $\mathbf{x}_B$ as the associated variables. Since $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ can be written as $\mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N = \mathbf{b}$, this means that $\mathbf{B}$ is $m \times m$ and invertible, and moreover, $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, since $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N)$ is a feasible solution. Therefore, $\mathbf{x}$ is a basic feasible solution.

Conversely, suppose that $\mathbf{x}$ is a basic feasible solution of the system $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. We want to show that $\mathbf{x}$ is an extreme point. By definition, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N)$ where correspondingly $\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{N})$ such that $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ and $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$. But this means that the n hyperplanes $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ are binding at $\mathbf{x}$ and are moreover linearly independent, since $\mathbf{B}^{-1}$ exists. Hence, by the definition in Section 2.6, $\mathbf{x}$ is an extreme point. Therefore, we have shown that every basic feasible solution is an extreme point and vice versa. Exercise 3.15 asks the reader to construct an alternative proof for this characterization.