جلسه نهم

۳۰ آذر ۱۴۰۱

تحلیل حساسیت

نادیا قنبری

3- جدول ابتدایی و نهایی یک مسئله ماکزیمم‌سازی را به صورت زیر در نظر بگیرید که در آن s_1، s_2 و s_3 متغیرهای کمکی قیود $\leq$ هستند.

کل متغیرها / BV	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
z	1	-3	-2	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	2	1	1	0	0	430
s_2	0	3	0	2	0	1	0	460
s_3	0	1	4	0	0	0	1	420

کل متغیرها / BV	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
z	1	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	0	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
s_3	0	2	0	0	-2	1	1	20

فرض کنید ضریب x_1 در محدودیت دوم از 3 به $3-\Delta$ تغییر کند. تعیین کنید Δ چقدر بایستی باشد تا x_1 یک متغیر واردشونده گردد؟ (جواب: $\Delta \geq 2$)

سوال ۳ بانک سوالات

$$\bar{C}_{x_1} = \underbrace{C_{Br}^{T}}_{[1\ 2\ 0]}\ \underbrace{B^{-1} a_{x_1}}_{\bar{a}_{x_1}} - C_{x_1}$$

$$\bar{a}_{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3-\Delta \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{C}_{x_1} = [1\ 2\ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 3-\Delta \\ 1 \end{bmatrix} - 3$$

باید باشد $\bar{C}_{x_1} \leq 0 \Rightarrow 1+6-2\Delta-3 \leq 0 \Rightarrow$

$$-3+7-2\Delta \leq 0 \Rightarrow$$

$$2\Delta \geq 4$$

$$\boxed{\Delta \geq 2}$$

سوال ۲ :

LP زیر و جدول بهین آن را در نظر بگیرید و با استفاده از تحلیل حساسیت، محدوده مقادیر ضریب x_1 در تابع هدف را طوری بیابید که پایه فعلی بهین بماند.

$$\begin{aligned} \max z = \ & 3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ s.t. \ & x_1 + x_2 + x_3 \le 50 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 15 \\ & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \ \ge 0 \end{aligned}$$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	RHS
z	1	0	0	1	0	80
e_2	-3	0	0	1	1	15
x_3	0	0	1	1	0	40
x_2	1	1	0	0	0	10

سوال ۳ : در سوال قبل اگر ضریب X3 در تابع هدف از ۱ به ۱۰ افزایش یابد جواب بهین چه تغییری می کند؟

سوال ۴ : در همین مسئله دامنه تغییرات سمت راست قید اول را به گونه ای بیابید که پایه فعلی شدنی و بهین باقی بماند.

سؤال ۲

$C_{Br}^{T} B^{-1} a_{x_1} - 3 = 1$: در حال حاضر داریم

$$\bar{C}_{x_1} = \underbrace{C_{Br}^{T} B^{-1} a_{x_1} - 3}_{=1} - \Delta$$

$$\Rightarrow \bar{C}_{x_1} = 1 - \Delta \xrightarrow[\text{سازی}]{\text{max مسئله}} 1 - \Delta \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Delta \leqslant 1$$

$$\Rightarrow C_{x_1} \leqslant 4$$

سؤال ۳

x_3 متغیر پایه ای است:

$$* \quad \bar{c}_{x_1} = \underline{c_{Br}^{T} B^{-1}}\, a_{x_1} - c_{x_1}$$

$$= c_{Br} B^{-1} a_{x_1}$$

$$= c_{Br}\, \bar{a}_{x_1}$$

$$(0, 10, 4)\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \Rightarrow \bar{c}_{x_1} = 4 - 3 = \boxed{1}$$

$$* \quad \bar{c}_{s_1} = \underline{c_{Br} B^{-1} a_{s_1}} - c_{s_1}$$

$$= \bar{a}_{s_1}$$

$$= (0, 10, 4)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \boxed{10}$$

نقطه پایه فعلی بهینه است

$$\bar{z} = c_{Br} B^{-1} b = c_{Br} \bar{b}$$

$$= (0 \quad 10 \quad 4)\begin{bmatrix} 15 \\ 40 \\ 10 \end{bmatrix} = \boxed{440}$$

سوال ۴

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50+\Delta \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15+\Delta \\ 40+\Delta \\ 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \left.\begin{matrix} 15+\Delta \geq 0 \\ 40+\Delta \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta \geq -15$$

روش محاسبه B^{-1} → استفاده مستقیم از B

از جدول استفاده کنیم ←

در شکل اولیه : $s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ ستون اول I $\xrightarrow{\bar{a}\,=} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ منفی ستون دوم I $\xrightarrow{\bar{a}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$a_3 = ?$

$$B^{-1}.B = I \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $x = -2$

$y = -1$

$z = 1$

۵) LP زیر و جدول بهینه‌ی آن را داریم:

$$\max z = 4x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 = 6$$

$$x_1 - x_2 \geq 3$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

BV \ all	z	x_1	x_2	e_2	s_3	a_1	a_2	RHS
z	1	0	0	0	$7/3$	$M-2/3$	M	$58/3$
x_2	0	0	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	$2/3$
x_1	0	1	0	0	$2/3$	$-1/3$	0	$14/3$
e_2	0	0	0	1	1	-1	-1	1

الف) دوگان و جواب بهینه‌ی آن را بیابید

ب) دامنه‌ی تغییرات b_3 چیست؟ اگر $b_3 = 11$ جواب بهینه چه خواهد شد؟

سوال ۵

$$\min w = 6y_1 + 3y_2 + 10y_3$$

$$\text{s.t.} \quad y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4$$

$$2y_1 - y_2 + y_3 \geq 1$$

$$y_1 \ \text{free}$$

$$y_2 \leq 0$$

$$y_3 \geq 0$$

از جدول بهینه داریم:

$$y_1^* = \bar{c}\, a_1 = -\frac{2}{3}$$

$$y_2^* = \bar{c}\, e_2 = 0$$

$$y_3^* = \bar{c}\, s_3 = \frac{7}{3}$$

$$b_3 = 10 \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} b = B^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 10+\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - \frac{\Delta}{3} \\ \frac{14}{3} + \frac{2\Delta}{3} \\ 1+\Delta \end{bmatrix}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{\Delta}{3} \geq 0 \Rightarrow 2 - \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 2$$

$$14 + 2\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -7$$

$$1 + \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \Delta \leq 2$$

b فعلی = ۱۰ و b جدید = ۱۱ ⟵ در بازه مجاز ⟸ پایه بهینه باقی می‌ماند

سوال ۶ :

Changing Objective Function Coefficient of Nonbasic Variable

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad 8x_1 + 6x_2 + x_3 &\le 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 &\le 20 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 &\le 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$z = 280, BV = \{s_1 = 24, x_3 = 8, x_1 = 2\}$$

$$\min w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 &\ge 60 \\ 6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 &\ge 30 \\ y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 &\ge 20 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

x_2 is a non-basic variable, for what values of c_2 the current basis remain optimal?

سوال ۶

$S_1 = 24 \Rightarrow y_1 = 0$

$x_3 = 8 \Rightarrow$ قید سوم دوگان ناتند است

$x_1 = 2 \Rightarrow$ قید اول " " "

$$\Rightarrow \quad 4y_2 + \cancel{2y_3} = 60$$

$$\left(\frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 = 20\right) \times -4$$

$$\downarrow$$

$$-6y_2 - \cancel{2y_3} = -80 \quad \Rightarrow \quad -2y_2 = -20 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{y_2 = 10}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_3 = 10}$$

$$y = (0, 10, 10)$$

$$\longrightarrow \quad 6y_1 + 2y_2 + 1.5\,y_3 \geq c_2 \quad \xrightarrow{\text{جایگزاری}}$$

$$35 \geq c_2 \quad \checkmark$$

سوال ۷ :

Changing the column of non-basic variable

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$
$$\text{s.t.} \quad 8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48$$
$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \le 20$$
$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \le 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

$z = 280, BV = \{s_1 = 24, x_3 = 8, x_1 = 2\}$

$$\min w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$$
$$\text{s.t.} \quad 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \ge 60$$
$$6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \ge 30$$
$$y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \ge 20$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

x_2 is a non-basic variable.

$$c_2 = 30 \rightarrow 43 \,.\, a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

does the current basis remain optimal?

سوال ۷

$$c_2 = 30 \longrightarrow 43$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

باید داشته باشیم:

$$5y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 43$$

اما با جایگذاری $y = (0, 10, 10)$ و $40 < 43$

$\Leftarrow$ پایه فعلی دیگر بهین نمی باشد.

سوال ۸ :

Adding a New Activity

$$\begin{aligned} \max z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \le 20 \\ & 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \le 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

$$z = 280, BV = \{s_1 = 24, x_3 = 8, x_1 = 2\}$$

$$\begin{aligned} \min w &= 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \ge 60 \\ & 6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \ge 30 \\ & y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \ge 20 \\ & y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

x_4 is a new variable,

$$c_4 = 15 \text{ , } a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

does the current basis remain optimal?

سوال ۸

$c_4 = 15 \quad , \quad a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\max z = \text{------} + 15x_4$$

s.t.

$$\begin{aligned} \text{------} &+ x_4 \leq 48 \\ &+ x_4 \leq 20 \\ &+ x_4 \leq 8 \end{aligned}$$

دوگان $\downarrow$

$$\min w = \text{------}$$

s.t.

محدودیت‌های دیگر

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 15$$

$\xrightarrow{\text{جاگ}}$ $0 + 10 + 10 = 20 > 15$

$\Leftarrow$ پایه فعلی بهین باقی می‌ماند