

درس بهینه‌سازی خطی	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)	«بسمه تعالیٰ»
مدرس: دکتر هوشمند		
(Sensitivity Analysis) فصل ششم: تحلیل حساسیت		

فرض کنید یک LP را حل کرده‌ایم و جواب بهین آن را به دست آورده‌ایم.

اکنون مقدار برخی از پارامترهای مسئله تغییر کرده است و می‌خواهیم بدانیم که این تغییر چه تأثیری روی جواب بهین ایجاد می‌کند.

تحلیل حساسیت به ما کمک می‌کند بدون آنکه مسئله جدید را مجدداً از ابتدا حل کنیم، جواب بهین را تحت تغییرات به وجود آمده به روزرسانی کنیم.

مسئله زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید BV پایه بهین و x^* جواب بهین باشد:

$$\min \backslash \max z = c^T x$$

s.t.

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

اثر تغییرات زیر را روی جواب بهین بررسی می‌کنیم:

- ۱ تغییر ضریب یک متغیر غیرپایه‌ای در تابع هدف
- ۲ تغییر ضریب یک متغیر پایه‌ای در تابع هدف
- ۳ تغییر سمت راست یک قید
- ۴ تغییر ضرایب تکنولوژیکی یکی از متغیرهای غیرپایه‌ای
- ۵ افزودن یک متغیر جدید
- ۶ افزودن یک قید جدید

فرض کنید مسئله زیر را حل کردهایم و BV پایه بهین است.

$$\min \setminus \max z = c^T x$$

s.t.

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

فرض کنید **جدول بهین مسئله فوق** به صورت زیر باشد:

Z	x_j	RHS
BV	\bar{c}_j	\bar{z}
اعضای BV	\bar{a}_j	\bar{b}

اکنون فرض کنید یکی از تغییرات ۱-۶ روی مسأله صورت گرفته است.

برای یافتن جواب بهین مسأله جدید، ابتدا با توجه به تغییرات صورت گرفته، مؤلفات \bar{c}_j , \bar{a}_j , \bar{z} و \bar{b} را بهروزرسانی می‌کنیم.

$$\bar{c}_j = c_{BV}^T B^{-1} a_j - c_j, \quad \bar{a}_j = B^{-1} a_j, \quad \bar{z} = c_{BV}^T B^{-1} b, \quad \bar{b} = B^{-1} b$$

پس از انجام بهروزرسانی:

- اگر هر دو شرط شدنی بودن (نامنفی بودن مقادیر سمت راست) و بهینگی (نامثبت بودن ضرایب کاهش هزینه در مسأله \min سازی و نامنفی بودن آنها در مسأله \max سازی) کماکان برقرار باشند، جدول بهروزشده جدول بهین مسأله جدید است.
- اگر فقط شرط شدنی بودن به هم خورده باشد، از آنجا به بعد با سیمپلکس دوگان ادامه می‌دهیم.
- اگر فقط شرط بهینگی به هم خورده باشد، از آنجا به بعد با سیمپلکس ادامه می‌دهیم.

مثال مبنای

شرکتی را در نظر بگیرید که میز تحریر، میز و صندلی تولید می‌کند.

قیمت فروش (دلار)	چوب (فوت)	نجاری (ساعت)	نقاشی (ساعت)	
۶۰	۲	۴	۸	میز تحریر
۳۰	۱/۵	۲	۶	میز
۲۰	۰/۵	۱/۵	۱	صندلی
	۸	۲۰	۴۸	موجودی هر منبع

x_1 , x_2 و x_3 را به ترتیب بیانگر میزان تولید میز تحریر، میز و صندلی تعریف می‌کنیم.

برای ماکزیمم‌سازی درآمد، یک LP ارائه می‌کنیم.

صندوقی میز تحریر

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

s.t.

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \quad \text{چوب}$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \quad \text{نجاری}$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \quad \text{نقاشی}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

جدول بهین مسأله اصلی:

B.V	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	0	0	0	10	10	480
S_1	0	0	-2	0	1	2	-1	44
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

تغییر در ضریب تابع هدف یکی از متغیرهای غیرپایه‌ای

$$\times \bar{c}_j = c_{BV}^T B^{-1} a_j - c_j$$

$$\bar{a}_j = B^{-1} a_j$$

$$\bar{z} = c_{BV}^T B^{-1} b$$

$$\bar{b} = B^{-1} b$$

سؤال: اگر قیمت فروش میز به ۳۲ دلار افزایش یابد، جواب بهین مسأله چه تغییری می‌کند؟

$$\text{میز} \quad \text{میز تحریر} \quad \text{صندوقی}$$

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$s.t. \quad 32$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \quad \text{چوب}$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \quad \text{نجاری}$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \quad \text{نقاشی}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\bar{c}_{x_2} = c_{BV}^T B^{-1} a_{x_2} - c_{x_2}$$

$$= [0 \quad 20 \quad 60] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 32$$

$$= 3$$

BV	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	0	0	10	10	10	480
S_1	0	0	-2	0	1	2	-1	44
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

BV	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	3	0	10	10	10	480
S_1	0	0	-2	0	1	2	-1	44
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

سوال: اگر قیمت فروش میز به ۴۰ دلار افزایش یابد، جواب بهین مسأله چه تغییری می‌کند؟

$$\text{max } z = 60x_1 + \cancel{30x_2} + 20x_3$$

میز میز تحریر صندلی

$$s.t. \quad \cancel{40}$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \quad \text{چوب}$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \quad \text{نجاری}$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \quad \text{نقاشی}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\bar{c}_{x_2} = c_{BV}^T B^{-1} a_{x_2} - c_{x_2}$$

$$= [0 \quad 20 \quad 60] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 40$$

$$= -5$$

BV	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_4	RHS
Z	1	0	0	0	10	10	10	280
S_1	0	0	-2	0	1	2	-1	44
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

جدول بهین مسأله اصلی

BV	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_4	RHS
Z	1	0	-5	0	10	10	10	280
S_1	0	0	-2	0	1	2	-1	44
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

جدول به روز شده

جدول بهین مسأله جدید

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	4	0	0	0	1	17	488
s_1	0	$\frac{1}{5}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{17}{5}$
x_3	0	$\frac{1}{5}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{17}{5}$
x_2	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{5}$

سوال: اگر Δ میزان تغییر در قیمت فروش میز باشد، به ازای چه مقداری از Δ پایه فعلی بهین می‌ماند؟

$$\begin{aligned} \max z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 && \text{صندوق} \\ \text{s.t.} & 30 + \Delta && \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 &\leq 48 && \text{چوب} \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 &\leq 20 && \text{نجاری} \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 &\leq 8 && \text{نقاشی} \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 && \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_{x_2} &= c_{BV}^T B^{-1} a_{x_2} - c_{x_2} \\ &= [0 \quad 20 \quad 60] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - (30 + \Delta) \\ &= 5 - \Delta \end{aligned}$$

		جدول بهین مسأله اصلی							
		Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
BV		1	0	0	0	0	10	10	480
S_1		0	0	-2	0	1	2	-1	44
x_3		0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1		0	1	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

$$5 - \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 5$$

تغییر در ضریب تابع هدف یکی از متغیرهای پایه‌ای

$$\times \bar{c}_j = c_{BV}^T B^{-1} a_j - c_j$$

$$\bar{a}_j = B^{-1} a_j$$

$$\times \bar{z} = c_{BV}^T B^{-1} b$$

$$\bar{b} = B^{-1} b$$

سوال: اگر قیمت فروش میز تحریر به ۵۸ دلار کاهش یابد، جواب بهین مسأله چه تغییری می‌کند؟

صندوقی میز میز تحریر

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$s.t. \quad 58$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \quad \text{چوب}$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \quad \text{نجاری}$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \quad \text{نقاشی}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

جدول بهین مسأله اصلی

BV	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	0	0	0	10	10	480
S_1	0	0	-2	0	1	2	-1	44
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

$$\bar{c}_{x_2} = c_{BV}^T B^{-1} a_{x_2} - c_{x_2}$$

$$= [0 \quad 20 \quad 58] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 30 = 2.5$$

$$\bar{c}_{S_2} = c_{BV}^T B^{-1} a_{S_2} - c_{S_2}$$

$$=[0 \quad 20 \quad 58] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & \frac{2}{-1} & -4 \\ 0 & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 11$$

$$\bar{c}_{S_3} = c_{BV}^T B^{-1} a_{S_3} - c_{S_3}$$

$$=[0 \quad 20 \quad 58] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & \frac{2}{-1} & -4 \\ 0 & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 7$$

$$\bar{z} = c_{BV}^T B^{-1} b = [0 \quad 20 \quad 58] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & \frac{2}{-1} & -4 \\ 0 & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = 276$$

جدول بهین مسأله جدید

B_V	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
	1	0	2.5	0	0	11	7	276
S_1	0	0	-2	0	1	2	-1	44
x_2	0	0	-2	1	0	2	-4	1
x_1	0	1	0	0	0	1/2	1/2	1

سوال: اگر قیمت فروش میزتحریر به ۱۰۰ دلار افزایش یابد، جواب بهین مسأله چه تغییری می‌کند؟

صندوقی میز میزتحریر

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$s.t. \quad 100$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \quad \text{چوب}$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \quad \text{نجاری}$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \quad \text{نقاشی}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

جدول بهین مسأله اصلی

BV	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
2	1	0	0	0	0	10	10	480
S_1	0	0	-2	0	1	2	-1	44
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

$$\bar{c}_{x_2} = c_{BV}^T B^{-1} a_{x_2} - c_{x_2}$$

$$= [0 \quad 20 \quad 100] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 30 = 55$$

$$\bar{c}_{s_2} = c_{BV}^T B^{-1} a_{s_2} - c_{s_2}$$

$$=[0 \quad 20 \quad 100] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -10$$

$$\bar{c}_{s_3} = c_{BV}^T B^{-1} a_{s_3} - c_{s_3}$$

$$=[0 \quad 20 \quad 100] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 70$$

$$\bar{z} = c_{BV}^T B^{-1} b = [0 \quad 20 \quad 100] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = 360$$

جدول به روز شده

B_V	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
	1	0	55	0	0	-10	70	360
s_1	0	0	-2	0	1	2	-1	44
x_2	0	0	-2	1	0	2	-4	14
x_1	0	1	0	0	0	1	1	4

جدول بهین مسأله جدید

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
$-Z$	1	0	40	0	0	0	0	0..
s_1	0	0	0	-1	1	0	-2	17
s_2	0	0	-1	$\frac{1}{2}$	0	1	-2	4
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	4

سوال: اگر Δ میزان تغییر در قیمت فروش میز تحریر باشد، به ازای چه مقادیری از Δ پایه فعلی بهین می‌ماند؟

$$\begin{array}{l} \text{صندوقی میز تحریر} \\ \max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\ \text{s.t. } 60 + \Delta \end{array}$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \quad \text{چوب}$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \quad \text{نجاری}$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \quad \text{نقاشی}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

BV	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
2	1	0	0	0	0	10	10	480
S_1	0	0	-2	0	1	2	-1	44
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

$$\bar{c}_{x_2} = c_{BV}^T B^{-1} a_{x_2} - c_{x_2}$$

$$= [0 \quad 20 \quad 60 + \Delta] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 30 = 5 + \frac{5}{4}\Delta$$

$$\bar{c}_{s_2} = c_{BV}^T B^{-1} a_{s_2} - c_{s_2}$$

$$=[0 \quad 20 \quad 60 + \Delta] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & \frac{2}{2} & -4 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 10 - \frac{1}{2}\Delta$$

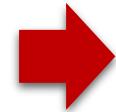
$$\bar{c}_{s_3} = c_{BV}^T B^{-1} a_{s_3} - c_{s_3}$$

$$=[0 \quad 20 \quad 60 + \Delta] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & \frac{2}{2} & -4 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 10 + \frac{3}{2}\Delta$$

$$5 + \frac{5}{4}\Delta \geq 0$$

$$10 - \frac{1}{2}\Delta \geq 0$$

$$10 + \frac{3}{2}\Delta \geq 0$$



$$-4 \leq \Delta \leq 20$$

تغییر در سمت راست یکی از قیود

$$\bar{c}_j = c_{BV}^T B^{-1} a_j - c_j$$

$$\bar{a}_j = B^{-1} a_j$$

✖ $\bar{z} = c_{BV}^T B^{-1} b$

✖ $\bar{b} = B^{-1} b$

سوال: اگر تعداد ساعات نجاری از ۲۰ به ۲۲ افزایش یابد، جواب بهین مسأله چه تغییری می‌کند؟

$$\text{صندوقی میز میزتحریر} \\ \max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

s.t.

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \quad \text{چوب}$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \quad \text{نجاری}$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \quad \text{نقاشی}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 22 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{z} = c_{BV}^T B^{-1} b = [0 \quad 20 \quad 60] \begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = 300$$

جدول بهین مسأله اصلی

BV	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_4	RHS
Z	1	0	0	0	0	10	10	280
S_1	0	0	-2	0	1	2	-1	44
x_3	0	0	-2	1	0	2	-2	8
x_1	0	1	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

جدول بهین مسأله جدید

BV	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
2	1	0	0	0	10	10		300
S_1	0	0	-2	0	1	2	-1	28
x_2	0	0	-2	1	0	2	-4	12
x_1	0	1	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1

سوال: اگر تعداد ساعات نجاری از ۲۰ به ۳۰ افزایش یابد، جواب بهین مسأله چه تغییری می‌کند؟

$$\text{میز میز تحریر} \quad \text{صندوقی}$$

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

s.t.

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \quad \text{چوب}$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \quad \text{نجاری}$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \quad \text{نقاشی}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 28 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{z} = c_{BV}^T B^{-1} b = [0 \quad 20 \quad 60] \begin{bmatrix} 44 \\ 28 \\ -3 \end{bmatrix} = 380$$

جدول بهین مسأله اصلی

BV	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_4	RHS
Z	1	0	0	0	0	10	10	280
S_1	0	0	-2	0	1	2	-1	44
x_3	0	0	-2	1	0	2	-2	8
x_1	0	1	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

جدول به روز شده

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	0	0	0	1	1	1	380
s_1	0	0	-2	0	1	2	-1	44
x_2	0	0	-2	1	0	2	-4	28
x_1	0	1	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-3

↑

جدول بهین مسأله جدید

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	2	3	0	0	0	4	320
s_1	0	1	3	0	1	0	-2	32
x_2	0	1	3	1	0	0	2	17
s_2	0	-2	$-\frac{5}{2}$	0	0	1	-3	7

سوال: فرض کنید میزان تغییر در ساعات نجاری باشد. برای چه مقداری از Δ پایه فعلی بهین می‌ماند؟

$$\text{صندوقی میز میز تحریر} \\ \max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

s.t.

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \quad \text{چوب}$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \quad \text{نجاری}$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \quad \text{نقاشی}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 + \Delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 + 2\Delta \\ 8 + 2\Delta \\ 2 - \frac{1}{2}\Delta \end{bmatrix}$$

$$24 + 2\Delta \geq 0$$

$$8 + 2\Delta \geq 0 \Rightarrow -4 \leq \Delta \leq 4$$

$$2 - \frac{1}{2}\Delta \geq 0$$

جدول بهین مسأله اصلی

BV	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	0	0	0	10	10	480
S_1	0	0	-2	0	1	2	-1	24
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

تغییر ضرایب تکنولوژیکی یک متغیر غیرپایه‌ای

- ✖ $\bar{c}_j = c_{BV}^T B^{-1} a_j - c_j$
- ✖ $\bar{a}_j = B^{-1} a_j$
- $\bar{z} = c_{BV}^T B^{-1} b$
- $\bar{b} = B^{-1} b$

سوال: اگر قیمت فروش میز به ۴۳ دلار افزایش یابد و با فناوری جدید، تولید هر میز نیاز به ۵ فوت چوب، ۲ ساعت نجاری و ۲ ساعت نقاشی داشته باشد، جواب بهین مسأله چه تغییری خواهد کرد؟

$$\begin{array}{l} \text{منابع} \\ \text{منابع} \\ \text{منابع} \end{array}$$

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

s.t.

$$8x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 48 \quad \text{چوب}$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \quad \text{نجاری}$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \quad \text{نقاشی}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

جدول بهین مسأله اصلی

BV	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	0	0	0	10	10	480
S_1	0	0	-2	0	1	2	-8	44
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

$$\bar{c}_{x_2} = c_{BV}^T B^{-1} a_{x_2} - c_{x_2}$$

$$= [0 \quad 20 \quad 60] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & \frac{2}{4} & -4 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 43 = -3$$

$$\bar{a}_{x_2} = B^{-1}a_{x_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

جدول به روز شده

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_4	RHS
Z	1	0	-3	0	0	1	1	280
s_1	0	0	-7	0	1	2	-1	44
x_3	0	0	-4	1	0	2	-2	1
x_1	0	1	2	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

جدول بهین مسئله جدید

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_4	RHS
Z	1	$\frac{x}{2}$	0	0	0	$\frac{3x}{2}$	$\frac{29}{2}$	283
s_1	0	$\frac{\sqrt{x}}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-11}{2}$	31
x_3	0	2	0	1	0	-1	1	12
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1

افزودن یک متغیر جدید

سوال: فرض کنید شرکت تولید یک کمد را در دست بررسی دارد. هر کمد ۲۵ دلار به فروش می‌رسد و برای تولید آن ۵ فوت چوب، یک ساعت نجاری و یک ساعت نقاشی نیاز است. آیا شرکت باید کمد تولید کند؟

مسئله اصلی	مسئله جدید
صندلی میز میزتحریر $\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$ <i>s.t.</i> $8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$ چوب $4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20$ نجاری $2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8$ نقاشی $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	کمد صندلی میز میزتحریر $\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 25x_4$ <i>s.t.</i> $8x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 48$ چوب $4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + x_4 \leq 20$ نجاری $2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + x_4 \leq 8$ نقاشی $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

جدول بهین مسئله اصلی

BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	0	0	0	0	1	1	1	280
s_1	0	0	-2	0	1	2	-1		44
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4		8
x_1	0	1	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$		2

$$\bar{a}_{x_4} = B^{-1}a_{x_4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_{x_4} = c_{BV}^T B^{-1} a_{x_4} - c_{x_4} = [0 \quad 20 \quad 60] \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - 25 = -5$$

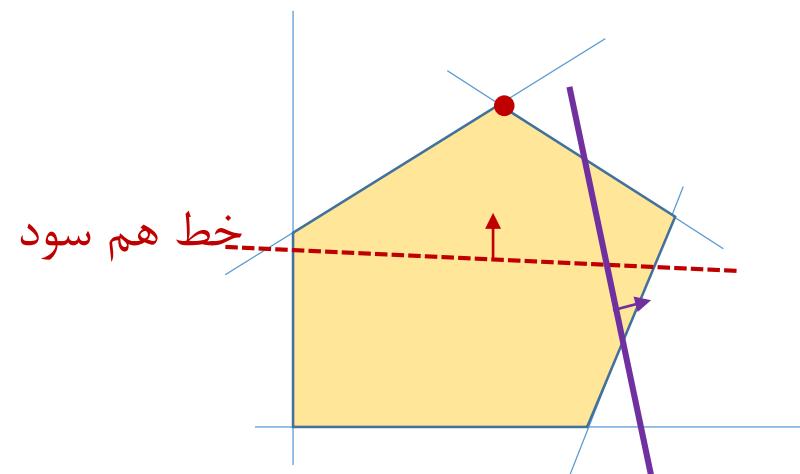
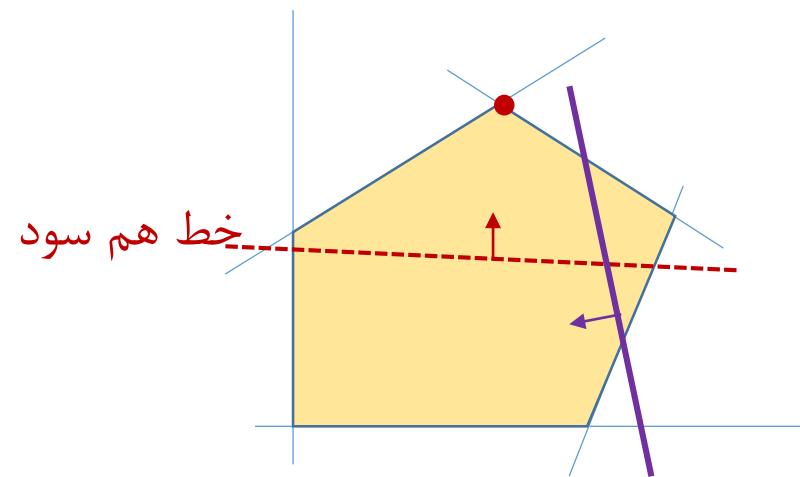
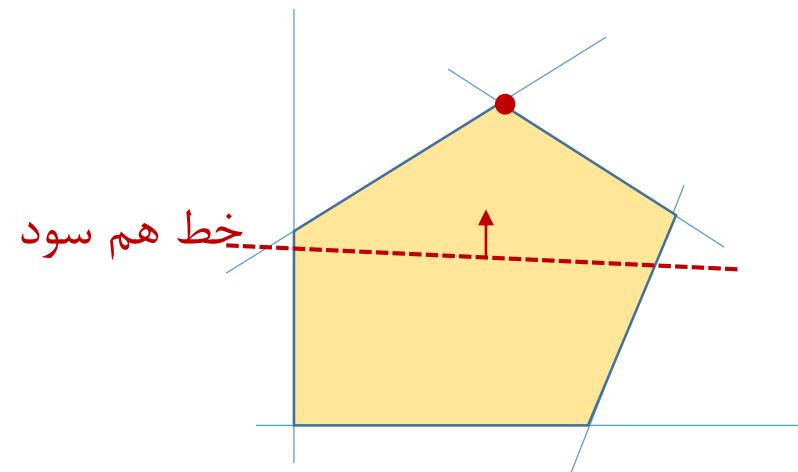
جدول به روز شده

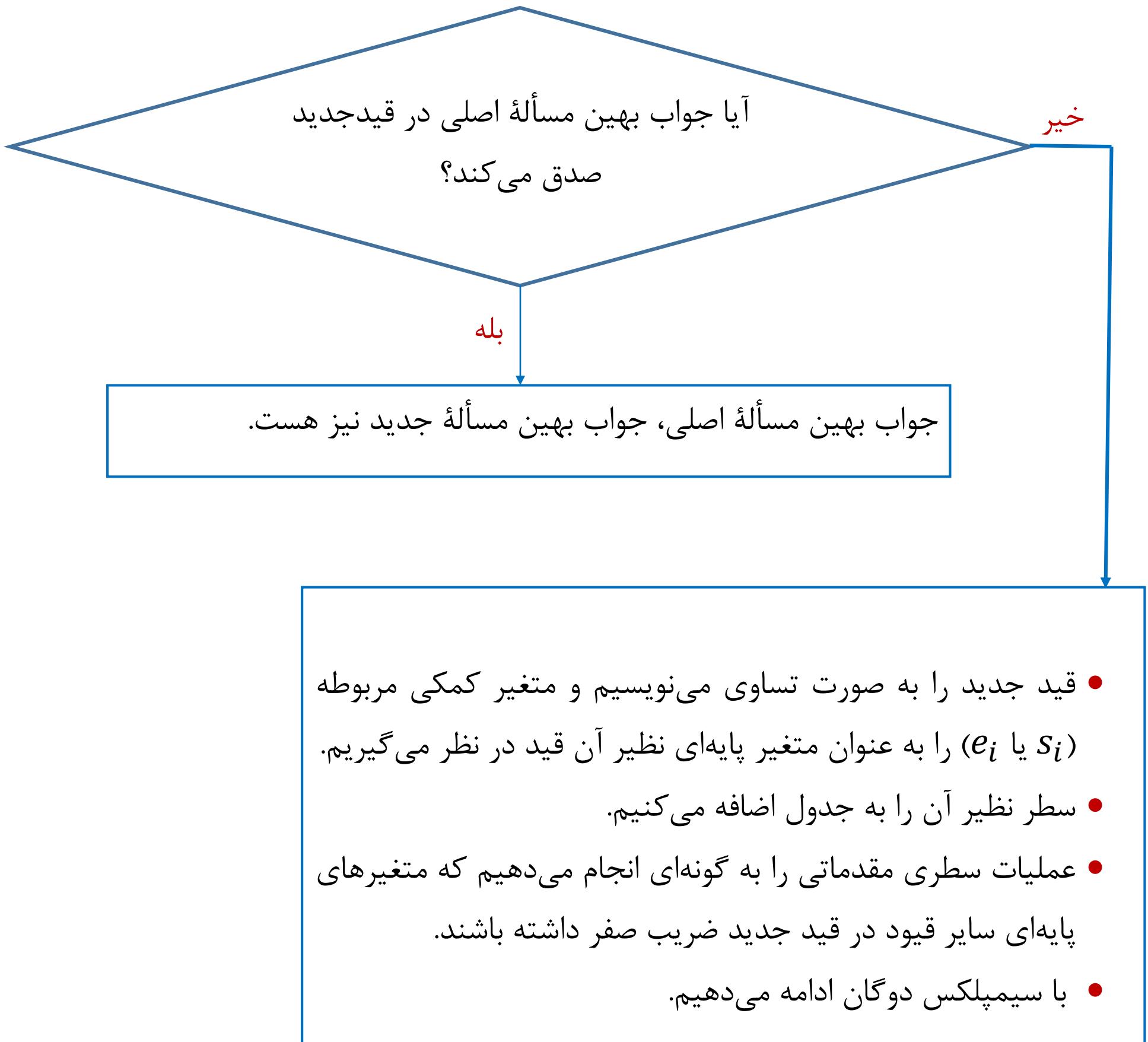
BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	0	0	0	-8	0	1	1	280
s_1	0	0	-2	0	-1	1	2	-1	44
x_3	0	0	-2	1	-8	0	2	-4	8
x_1	0	1	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2 →

جدول بهین مسأله جدید

B_V	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	S_3	RHS
$\frac{Z}{S_1}$	1	0	$\frac{-10}{2}$	0	0	0	$\frac{10}{2}$	$\frac{30}{2}$	29.
S_1	0	1	$\frac{-10}{2}$	0	0	1	$\frac{10}{2}$	$\frac{-10}{2}$	27
x_3	0	2	$\frac{-1}{2}$	1	0	0	1	-1	13
x_4	0	1	$\frac{0}{2}$	0	1	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

افزودن یک قید جدید





سوال: اگر قید $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$ به مسئله اضافه شود، جواب بهین چه تغییری می‌کند؟

صندوقی میز میز تحریر

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

s.t.

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \quad \text{چوب}$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \quad \text{نجاری}$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \quad \text{نقاشی}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

<i>BV</i>	<i>Z</i>	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
<i>Z</i>	1	0	0	0	0	10	10	480
S_1	0	0	-2	0	1	2	-1	24
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

$$x_1^* = 2, x_2^* = 0, x_3^* = 8, s_1^* = 24, s_2^* = 0, s_3^* = 0$$

جواب بهین مسئله اصلی در قید جدید صدق می‌کند.

پس همین جواب برای مسئله جدید نیز بهین است.

سوال: اگر قید $x_2 \geq 1$ به مسأله اضافه شود، جواب بهین چه تغییری می‌کند؟

صندوقی میز میز تحریر

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

s.t.

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \quad \text{چوب}$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \quad \text{نجاری}$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \quad \text{نقاشی}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

<i>BV</i>	<i>Z</i>	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_4	RHS
<i>Z</i>	1	0	0	0	0	10	10	480
S_1	0	0	-2	0	1	2	-1	44
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{2}$	2

جواب بهین فعلی در این قید صدق نمی‌کند.

$$x_2 - e_4 = 1$$

$$\Rightarrow -x_2 + e_4 = -1$$

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_F	RHS
Z	1	0	0	0	0	10	10	0	γ_A
s_1	0	0	-2	0	1	2	-1	0	γ_E
x_2	0	0	-2	1	0	2	-4	0	1
x_1	0	1	$\frac{5}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	γ
e_F	0	0	-1	0	0	0	0	1	-1

یادتان نرود که چک کنید جدول نیاز به اصلاح دارد یا خیر.

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_F	RHS
Z	1	0	0	0	0	10	10	0	γ_A
s_1	0	0	0	0	1	2	-1	-2	γ_E
x_2	0	0	0	1	0	2	-4	-2	10
x_1	0	1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$
x_3	0	0	1	0	0	0	0	-1	1

سوال: اگر قید $x_1 + x_2 \geq 12$ به مسئله اضافه شود، جواب بهین چه تغییری می‌کند؟

صندوقی میز میزتحریر

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

s.t.

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \quad \text{چوب}$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \quad \text{نجاری}$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \quad \text{نقاشی}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

BV	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_4	RHS
2	1	0	0	0	0	10	10	480
S_1	0	0	-2	0	1	2	-1	44
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

جواب بهین فعلی در این قید صدق نمی‌کند.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - e_4 &= 12 \\ \Rightarrow -x_1 - x_2 + e_4 &= -12 \end{aligned}$$

مقدمه ای

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_F	RHS
Z	1	0	0	0	0	10	10	0	480
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	48
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	0	8
x_1	0	1	$\frac{0}{4}$	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	2
e_F	0	-1	-1	0	0	0	0	1	-12

یادتان نرود که چک کنید جدول نیاز به اصلاح دارد یا خیر.

مقدمه ای

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_F	RHS
Z	1	0	0	0	0	10	10	0	480
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	48
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	0	8
x_1	0	1	$\frac{0}{4}$	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	2
e_F	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	-10 →



BV

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_F	RHS
Z	1	0	10	0	0	0	0	+	1.
s_1	0	0	-1	0	1	0	-1	+	
x_2	0	0	-1	1	0	0	2	+	-17
x_1	0	1	1	0	0	0	2	+	-32 →
s_2	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	-2	-1	12
									2.

BV

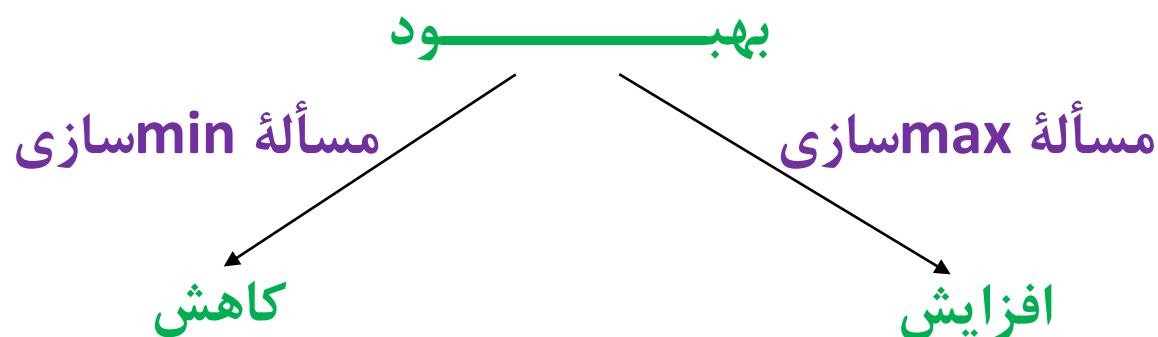
	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_F	RHS
Z	1	0	0	10	0	0	0	+	-28.
s_1	0	0	0	-1	1	0	-1	0	17
x_2	0	0	1	-1	0	0	-2	-2	32
x_1	0	1	0	1	0	0	2	2	-2. →
s_2	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	-2	-2	27

اضافه کردن قید $x_1 + x_2 \geq 12$ مسئله را نشدنی می‌کند.

قیمت سایه (Shadow price)

- ✓ متناظر با هر قید مسئله، یک قیمت سایه نظیر می‌شود.
- ✓ قیمت سایه یک قید بیانگر ارزش اقتصادی منبع متناظر با آن قید است و برای مدیران اهمیت دارد.

✓ **قیمت سایه قید \bar{A}^m** بیانگر آن است که اگر **مقدار سمت راست** این قید به میزان **یک واحد افزایش** یابد، **چه میزان بهبود** در مقدار بهین تابع هدف حاصل می‌گردد.



ارتباط قیمت سایه با متغیر دوگان

فرض کنید BV پایه بهین مسئله باشد. اگر یک واحد افزایش سمت راست قید i^* پایه بهین را تغییر ندهد و به عبارت بهتر در دامنه مجاز باشد، آنگاه می‌توان گفت:

$$\underbrace{\begin{array}{l} \text{مقدار بهین تابع هدف مسئله جدید بعد از اضافه} \\ \text{کردن یک واحد به سمت راست قید } i^* \end{array}}_{z^* \text{ جدید}} = c_{BV}^T B^{-1} b_{\text{جدید}}$$

$$= c_{BV}^T B^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{i-1} \\ \textcolor{red}{b_i + 1} \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$= c_{BV}^T B^{-1} \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= z^*_{\text{قبلی}} + y_i^*$$

مقدار بهین متغیر دوگان نظیر قید i^*

پس اگر یک واحد افزایش سمت راست قید t^* پایه بهین را تغییر ندهد و به عبارت بهتر

در دامنه مجاز باشد، می‌توان گفت:

$$= \begin{cases} \mathbf{y}_i^* & \text{اگر مسئله max سازی باشد} \\ -\mathbf{y}_i^* & \text{اگر مسئله min سازی باشد} \end{cases}$$

نکته: اگر جواب بهین مسئله اولیه تباهیده باشد، رابطه فوق لزوماً درست نیست و در حالت تبهگنی باید در تعیین قیمتهای سایه محاط بود. مثال بعد را ببینید.

مثال: مسئله اولیه و جدول بهین آن را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	0	0	1	0	1	
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{2}$
x_1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$
s_2	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

جواب بهین مسئله اولیه یک نقطه تباهیده است. بنابراین، ممکن است مسئله دوگان جواب بهین دگرین داشته باشد.

با توجه به سطر صفر جدول فوق جواب بهین مسئله دوگان به صورت زیر است:

$$y_1^* = \bar{c}_{s_1} = 1 \quad y_2^* = \bar{c}_{s_2} = 0 \quad y_3^* = \bar{c}_{s_3} = 1 \quad w^* = 16$$

مسئله دوگان و جدول بهین آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min w &= 12y_1 + 10y_2 + 4y_3 \\ \text{s.t.} \\ 4y_1 + 4y_2 + y_3 &\geq 5 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 &\geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

	w	y ₁	y ₂	y ₃	e' ₁	e' ₂	RHS
BV	-w	1	0	0	0	-2	-2
y ₁	0	1	0	0	-1/2	1/2	1/2
y ₃	0	0	-2	1	1	-2	1

جواب دگرین

	w	y ₁	y ₂	y ₃	e' ₁	e' ₂	RHS
BV	-w	1	0	0	0	-2	-2
y ₂	0	0	1/2	1	0	-1/2	1/2
y ₃	0	0	4/2	0	1	1/2	1/2

برای آشنایی با شیوه تعیین قیمت سایه در مسائل تباہیده به مقاله زیر مراجعه کنید:

Computing shadow prices/costs of degenerate LP problems with reduced simplex table

- پس زمانی که مسئله اولیه جواب بهین تبھگن دارد، در محاسبه قیمت‌های سایه و تفسیر اقتصادی آنها باید احتیاط کرد.
- از اینجا به بعد، حالاتی را در نظر می‌گیریم که جواب بهین مسئله اولیه غیرتابه‌یده است.

مثال: شرکتی چهار نوع محصول می‌فروشد.

تولید حداقل 400 واحد از محصول 4 ضروری است.

روی هم رفته باید 950 واحد محصول تولید شود.

موجودی منابع	محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳	محصول ۴	
4600 واحد	2 واحد	3 واحد	4 واحد	7 واحد	مواد اولیه
5000 ساعت	3 ساعت	4 ساعت	5 ساعت	6 ساعت	ساعت کار
-	4 دلار	6 دلار	7 دلار	8 دلار	قیمت فروش

($i = 1, 2, 3, 4$) x_i : تعداد تولید محصول i

$$\max z = 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 950 \quad \text{میزان کل تولید}$$

$$x_4 \geq 400$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \leq 4600 \quad \text{ماده اولیه}$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5000 \quad \text{ساعت کار}$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$$

اطلاعات زیر از حل مسأله با نرمافزار حاصل شده است.

جواب بهین مسأله اولیه:

$$x_2^* = 400 \quad x_3^* = 150 \quad x_4^* = 400 \quad s_4^* = 250 \quad z^* = 6650$$
$$x_1^* = e_2^* = s_3^* = 0$$

جواب بهین مسأله دوگان:

$$y_1^* = 3 \quad y_2^* = -2 \quad y_3^* = 1 \quad y_4^* = 0 \quad w^* = 6650$$

دامنه مجاز تغییرات سمت راست قیود مسأله اصلی به طوری که پایه فعلی بهین بماند:

$-100 \leq \Delta b_1 \leq 50$ یعنی اگر سمت راست قید ۱، در محدوده ۸۵۰ تا ۱۰۰۰ تغییر کند، پایه فعلی بهین می‌ماند.

$$-125 \leq \Delta b_2 \leq 37.5$$

$$-150 \leq \Delta b_3 \leq 250$$

$$-250 \leq \Delta b_4$$

سوال: آیا جواب بهین مسأله اولیه تباهیده است؟

تعداد قیود=۴

تعداد متغیرها با مقدار اکیداً مثبت=۴

سوال: قیمت سایه هر قید را تعیین کنید.

جواب بهین مسئله دوگان:

$$y_1^* = 3 \quad y_2^* = -2 \quad y_3^* = 1 \quad y_4^* = 0 \quad w^* = 6650$$

یک واحد افزایش در دامنه مجاز همه قیود است، پس:

$$\begin{array}{ll} \text{قیمت سایه قید اول} & = 3 \\ \text{قیمت سایه قید دوم} & = -2 \\ \text{قیمت سایه قید سوم} & = 1 \\ \text{قیمت سایه قید چهارم} & = 0 \end{array}$$

سوال: فرض کنید روی هم رفته 980 واحد محصول باید تولید شود. با استفاده از قیمت سایه، مقدار جدید Z بهین را حساب کنید.

این مقدار در دامنه مجاز است

افزایش در تابع هدف

$$\frac{3}{1} = \frac{?}{30}$$

افزایش در سمت راست

$$z^*_{\text{جدید}} = z^*_{\text{قبلی}} + 90 = 6650 + 90$$

سوال: فرض کنید 4500 واحد ماده اولیه در دسترس است. با استفاده از قیمت سایه، مقدار جدید Z بهین را حساب کنید.

این مقدار در دامنه مجاز است $\Delta b_3 = -100$

افزایش در تابع هدف	$\frac{1}{1} = \frac{?}{-100}$	افزایش در سمت راست	$Z^*_{\text{جدید}} = Z^*_{\text{قبلی}} - 100 = 6650 - 100$
--------------------	--------------------------------	--------------------	------------------------------------------------------------

سوال: حداقل تا چه میزان مقرن به صرفه است که شرکت برای خرید یک واحد ماده اولیه اضافی پرداخت کند؟

$$1 = \text{قیمت سایه قید سوم}$$

پس به ازای هر یک واحد افزایشی که در مقدار ماده اولیه ایجاد کنیم، مقدار تابع هدف یک دلار بهبود (افزایش) می‌یابد.

پس شرکت حاضر است تا سقف یک دلار برای خرید یک واحد ماده اولیه اضافی پرداخت کند.

سوال: قیمت سایه قید چهارم را تفسیر کنید و بگویید تا چه میزان مقرون به صرفه است که شرکت برای هر ساعت اضافه کاری پرداخت کند؟

$$= \text{قیمت سایه قید چهارم}$$

پس به ازای یک واحد افزایشی که در ساعات کار ایجاد کنیم، هیچ بهبودی در مقدار تابع هدف ایجاد نمی‌شود. پس شرکت حاضر نیست هیچ مبلغی بابت اضافه کاری بپردازد.

از ساعت کاری موجود، 250 ساعت اضافه مانده پس هزینه کردن برای ساعت کاری اضافه‌تر، توجیه اقتصادی ندارد.

$$s_4^* = 250$$

$$s_4^* \times y_4^* = 0$$

مثال: شرکتی چهار نوع محصول می‌فروشد.

تولید حداقل 400 واحد از محصول 4 ضروری است.

روی هم رفته باید 950 واحد محصول تولید شود.

تا سقف 4600 واحد ماده اولیه را می‌توان به قیمت هر واحد 4 دلار خرید.

تا سقف 5000 ساعت کار را می‌توان به قیمت هر ساعت 6 دلار خرید

محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳	محصول ۴	
2 واحد	3 واحد	4 واحد	7 واحد	مواد اولیه
3 ساعت	4 ساعت	5 ساعت	6 ساعت	ساعت کار
30 دلار	42 دلار	53 دلار	72 دلار	قیمت فروش

x_i : تعداد تولید محصول i ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$\max z = 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \quad \text{سود}$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 950 \quad \text{میزان کل تولید}$$

$$x_4 \geq 400$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \leq 4600 \quad \text{ماده اولیه}$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5000 \quad \text{ساعت کار}$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$$

اطلاعات زیر از حل مسأله با نرمافزار حاصل شده است.

جواب بهین مسأله اولیه:

$$\begin{array}{lllll} x_2^* = 400 & x_3^* = 150 & x_4^* = 400 & s_4^* = 250 & z^* = 6650 \\ x_1^* = e_2^* = s_3^* = 0 \end{array}$$

جواب بهین مسأله دوگان:

$$y_1^* = 3 \quad y_2^* = -2 \quad y_3^* = 1 \quad y_4^* = 0 \quad w^* = 6650$$

دامنه مجاز تغییرات سمت راست قیود مسأله اصلی به طوری که پایه فعلی بهین بماند:

$$\begin{aligned} -100 &\leq \Delta b_1 \leq 50 \\ -125 &\leq \Delta b_2 \leq 37.5 \\ -150 &\leq \Delta b_3 \leq 250 \\ -250 &\leq \Delta b_4 \end{aligned}$$

سوال: آیا جواب بهین مسأله اولیه تباهیده است؟

تعداد قیود=4

تعداد متغیرها با مقدار اکیداً مثبت=4

سوال: قیمت سایه هر قید را تعیین کنید.

جواب بهین مسأله دوگان:

$$y_1^* = 3 \quad y_2^* = -2 \quad y_3^* = 1 \quad y_4^* = 0 \quad w^* = 6650$$

یک واحد افزایش در دامنه مجاز همه قیود است، پس:

$$\begin{array}{ll} \text{قیمت سایه قید اول} & = 3 \\ \text{قیمت سایه قید دوم} & = -2 \\ \text{قیمت سایه قید سوم} & = 1 \\ \text{قیمت سایه قید چهارم} & = 0 \end{array}$$

سوال: حداکثر تا چه میزان مقرون به صرفه است که شرکت برای خرید یک واحد ماده اولیه اضافی بپردازد؟

$$\text{قیمت سایه قید سوم} = 1$$

پس خرید یک واحد ماده اولیه اضافه سود شرکت را یک دلار افزایش می‌دهد
پس تا سقف $5 = 4 + 1$ دلار می‌توان برای خرید ماده اولیه اضافه پرداخت کرد.

سوال: حداکثر تا چه میزان مقرن به صرفه است که شرکت برای خرید هر ساعت اضافه کاری بپردازد؟

$$= 0 \quad \text{قیمت سایه قید چهارم}$$

هیچ مبلغی نباید صرف اضافه کاری شود.

مثال: شرکتی باید 1000 واحد از یک محصول تولید کند. شرکت 4 کارخانه دارد. باید حداقل 400 محسول در کارخانه 3 تولید شود.

کارخانه	هزینه تولید یک واحد محصول (دلار)	ساعت کار مورد نیاز برای تولید یک واحد	مواد اولیه مورد نیاز برای تولید یک واحد
۱	15	2	3
۲	10	3	4
۳	9	4	5
۴	7	5	6
موجودی هر منبع	-	3300	4000

x_i : تعداد محصول تولید شده در کارخانه i ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$\min z = 15x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000 \quad \text{میزان کل تولید}$$

$$x_3 \geq 400$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \leq 3300 \quad \text{ساعت کار}$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 4000 \quad \text{ماده اولیه}$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$$

اطلاعات زیر از حل مسأله با نرمافزار حاصل شده است.

جواب بهین مسأله اولیه:

$$x_1^* = 400 \quad x_2^* = 200 \quad x_3^* = 400 \quad s_3^* = 300 \quad z^* = 11600$$
$$x_4^* = e_2^* = s_4^* = 0$$

جواب بهین مسأله دوگان:

$$y_1^* = 30 \quad y_2^* = 4 \quad y_3^* = 0 \quad y_4^* = -5 \quad w^* = 11600$$

دامنه مجاز تغییرات سمت راست قیود مسأله اصلی به طوری که پایه فعلی بهین بماند:

$$-100 \leq \Delta b_1 \leq 66.667$$

$$-400 \leq \Delta b_2 \leq 100$$

$$-300 \leq \Delta b_3$$

$$-200 \leq \Delta b_4 \leq 300$$

سوال: آیا جواب بهین مسأله اولیه تباهیده است؟

تعداد قیود=4

تعداد متغیرها با مقدار اکیداً مثبت=4

سوال: قیمت سایه هر قید را تعیین کنید.

جواب بهین مسأله دوگان:

$$y_1^* = 30 \quad y_2^* = 4 \quad y_3^* = 0 \quad y_4^* = -5 \quad w^* = 11600$$

یک واحد افزایش در دامنه مجاز همه قیود است، پس:

$$\text{قیمت سایه قید اول} = -30$$

$$\text{قیمت سایه قید دوم} = -4$$

$$\text{قیمت سایه قید سوم} = 0$$

$$\text{قیمت سایه قید چهارم} = 5$$

سوال: فرض کنید 4100 واحد ماده اولیه در دسترس است. با استفاده از قیمت سایه، مقدار جدید Z بهین را حساب کنید.

این مقدار در دامنه مجاز است

کاهش در تابع هدف

$$\frac{5}{1} = ?$$

افزایش در سمت راست

$$\frac{1}{100}$$

$$z^*_{\text{جدید}} = z^*_{\text{قبلی}} - 500 = 11600 - 500$$

سوال: فرض کنید دقیقاً 950 واحد محصول باید تولید شود. با استفاده از قیمت سایه، مقدار جدید Z بهین را حساب کنید.

این مقدار در دامنه مجاز است $\Delta b_1 = -50$

کاهش در تابع هدف	-30	$=$	$?$	
افزایش در سمت راست	1	-50		$Z^*_{\text{جدید}} = Z^*_{\text{قبلی}} - 1500$ $= 11600 - 1500$

سوال: بیشترین مبلغی که مقرون به صرفه است شرکت برای استفاده از ساعات کار اضافی پرداخت کند، چقدر است؟

$0 = \text{قیمت سایه قید سوم}$

هیچ پرداختی بابت ساعت کاری اضافه مقرون به صرفه نیست.

سوال: بیشترین مبلغی که مقرون به صرفه است شرکت برای خرید یک واحد ماده اولیه اضافی پرداخت کند، چقدر است؟

$5 = \text{قیمت سایه قید چهارم}$

تا سقف ۵ دلار

سوال: یک مشتری جدید می‌خواهد ۲۰ محصول به قیمت هر واحد ۲۵ دلار سفارش دهد. آیا شرکت باید تقاضایش را بپذیرد؟

$$\Delta b_1 = 20$$

کاهش در تابع هدف
افزایش در سمت راست

$$\frac{-30}{1} = \frac{?}{20}$$

$$\begin{aligned} z^*_{\text{جديد}} &= z^*_{\text{قبلی}} + 600 \\ &= 11600 + 600 \end{aligned}$$

تولید 20 محصول جدید هزینه را به میزان 600 دلار افزایش می‌دهد.

در حالی که مشتری می‌خواهد بابت این 20 واحد فقط 500 دلار پرداخت کند.

پس مقرر نبوده و صرفه نیست.