

«بسمه تعالی»  
«تمرینات سری دوم»

۱. LP زیر را به صورت استاندارد فرمول بندی کنید.

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 14 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\geq 12 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_3 &\leq -3 \\ x_1 \text{ و } x_2 &\text{ آزاد} \\ x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

۲. LP های زیر را با روش ترسیمی حل کنید و جواب هایتان را با نتایج LINDO مقایسه کنید.

الف)  $\text{Max } z = -x_1 + 3x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ x_1 \text{ و } x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ب)  $\text{Max } z = 10x_1 + 25x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \\ 2x_1 + 10x_2 &\geq 20 \\ 5x_1 + 5x_2 &\geq 30 \\ x_1 \text{ و } x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ج)  $\text{Max } z = 5x_1 + 4x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1 \text{ و } x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

د)  $\text{Min } z = x_1 - x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_2 - x_1 &\geq 3 \\ x_1 \text{ و } x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ه)  $\text{Min } z = 3x_1 + 5x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 36 \\ 3x_1 + 5x_2 &\geq 45 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\text{ آزاد} \end{aligned}$$

$$\text{و) Min } z = 2x_1 + x_2$$

s.t.

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$x_1$  و  $x_2$  آزاد

۳. ناحیه شدنی متناظر با تابع هدف زیر را رسم کنید:

$$\text{Min } Z = \text{Max}\{3x_1 \text{ و } x_1 + 1\}$$

$$\text{max } z = x_1$$

s.t.

$$-x_1 + 4x_2 \leq 0$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 \geq 0$$

$x_2$  آزاد

۴. الف) مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را با روش ترسیمی حل کنید.

ب) قیود زائد را مشخص نمایید.

۵- مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید و با استفاده از روش ترسیمی دو نقطه‌ی رأسی بهین دگرین را پیدا کنید.

$$\text{Max } z = 2x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 9$$

$$x_1 \text{ و } x_2 \geq 0$$

۶- نقاط رأسی ناحیه شدنی متناظر با نامعادلات زیر را بیابید.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6$$

$$x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } x_3 \geq 0$$

۷- آیا در LP دو متغیره وجود نقطه‌ی رأسی تباهیده به مفهوم وجود محدودیت زائد است؟ مثال بزنید.

۸- LP با قیود زیر چند نقطه‌ی گوشه‌ای دارد؟

$$|x_i| \leq 4$$

$$x_i \geq 2$$

$$x_1 = x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

برای  $i=1,2$

۹- LP زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 \text{ و } x_2 \geq 0$$

الف) خط هم سود آن را با روش گرادیان بیابید

ب) جواب بهین را بیابید. و مشخص کنید جواب بهین از چه نوعی است.

۱۰- LP دارای جواب بهین منحصر به فرد است کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

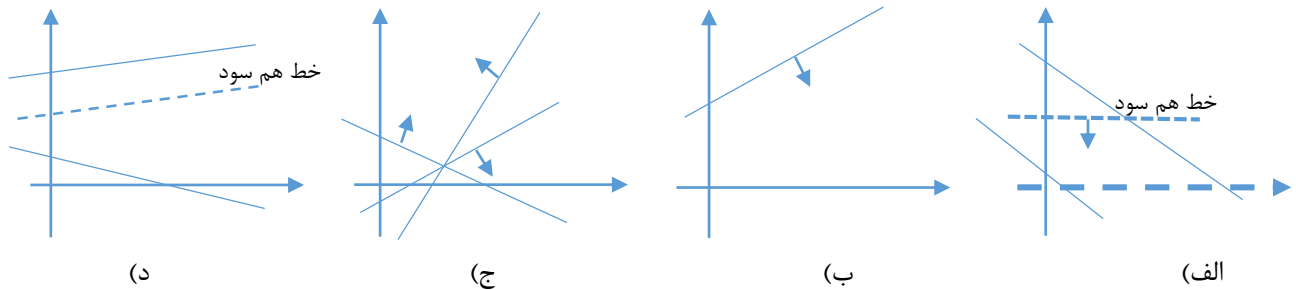
الف) خط هم سود نمی تواند با قیود موازی باشد.

ب) جواب بهین قطعاً روی گوشه (های) ناحیه شدنی است.

ج) ناحیه ی شدنی نمی تواند بیکران باشد.

د) جواب بهین الزاماً متناظر با یک جواب شدنی پایه ای است.

۱۱- مشخص کنید هر کدام از اشکال زیر چه نوع جوابهای بهینی را می توانند اختیار کنند:



۱۲- درباره ی درستی یا نادرستی گزاره های زیر استدلال کاملی ارائه دهید.

الف) اگر مسأله ای دارای جواب بهین بی کران باشد، تعداد نقاط بهینه، بی نهایت نقطه می باشد.

ب) در مسأله ای زیر اگر نقطه بهینه موجود باشد، نقطه ی رأسی بهینه هم موجود است.

$$\text{Min } z = c^T x$$

s.t.

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

ج) اگر ناحیه شدنی بی کران باشد، جواب مسأله هم بی کران است.

د) اگر جواب مسأله بی کران باشد، ناحیه شدنی مسأله نیز بی کران است.

۱۳- در یک مسأله LP با تغییر تابع هدف از Max به Min مقدار تابع هدف تغییر نکرده است. در این صورت:

الف) ناحیه شدنی نامحدود است.

ب) ناحیه شدنی حتماً یک خط است.

ج) ناحیه شدنی می تواند یک نقطه یا یک خط باشد.

د) ناحیه شدنی یک نقطه می باشد.

۱۴- برای چه مقادیری از C مسأله زیر دارای جواب دگرین است؟

$$\text{Max } Z = 2x_1 + Cx_2$$

s.t.

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \text{ و } x_2 \geq 0$$

۱۵- مسأله زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t.} \\ Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

- الف) اگر یک محدودیت جدید به مسأله اضافه شود، ناحیه شدنی و مقدار بهین تابع هدف مسأله فوق چه تغییری می‌کند؟  
ب) اگر یک متغیر جدید به مسأله اضافه شود، ناحیه شدنی و مقدار بهین تابع هدف مسأله فوق چه تغییری می‌کند؟  
ج) اگر یکی از محدودیت‌های مسأله حذف شود، ناحیه شدنی و مقدار بهین تابع هدف مسأله فوق چه تغییری می‌کند؟

۱۶- جواب بهین مسأله زیر را با ذکر همه‌ی جواب‌های شدنی پایه‌ای بیابید.

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 \\ \text{s.t.} \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

۱۷- جواب بهین مسأله زیر را با ذکر همه‌ی جواب‌های شدنی پایه‌ای بیابید.

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

۱۸- مسأله زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t.} \\ Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

- الف) اگر سمت راست یکی از قیود مسأله فوق یک واحد افزایش یابد، ناحیه شدنی و مقدار بهین تابع هدف چه تغییری می‌کند؟  
ب) اگر سمت راست یکی از قیود مسأله فوق یک واحد کاهش یابد، ناحیه شدنی و مقدار بهین تابع هدف چه تغییری می‌کند؟  
۱۹- دستگاه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

الف) آیا نقطه  $(1, 0, 0, 0)$  و  $(2, 0, 0, 0)$  پایه‌ای است؟ چرا؟

ب) تمام جواب‌های شدنی پایه‌ای را بدست آورید و در هر کدام مجموعه متغیرهای پایه‌ای و غیرپایه‌ای را معلوم کنید.

ج) یک جواب شدنی برای این دستگاه بیابید که پایه‌ای نباشد.

د) با توجه به جواب‌های شدنی پایه‌ای که در قسمت ب بدست آوردید، جواب بهین را با هدف  $\text{Min } z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4$  بیابید.

۲۰- مساله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 5x_2$$

s.t.

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$4x_1 + 8x_2 \leq 32$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

در صورتیکه بخواهیم از منبع اول حداقل به اندازه ی منبع دوم استفاده شود جواب بهین چه قدر است؟

۲۱- قیود زیر را در نظر بگیرید:

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

تابع هدف را طوری تعیین کنید که الف) نقطه (۲,۵) یکی از نقاط بهین باشد. ب) مسئله جواب بیکران داشته باشد.

۲۲- مساله زیر را در نظر بگیرید :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2$$

$$\text{s.t. } -x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 4$$

الف) ناحیه شدنی را رسم کنید و نشان دهید مساله جواب بهین بیکران دارد . ب) قیدی به مساله اضافه کنید تا جواب بهین نقطه (۴ و ۲) باشد . ج) قیود مساله را طوری تغییر دهید که جواب بهین مساله هم در حالت مینیمم سازی هم در حالت ماکزیمم سازی یکسان شود .

۲۳- آیا مساله زیر جواب بهین دارد ؟

$$\text{Max } Z = 2x + 3y$$

$$\text{s.t. } x + y \leq 2$$

$$4x + 6y \leq 9$$

$$x, y \geq 0$$

الف) نقاط رأسی و نقاط رأسی دگرین را مشخص کنید . ب) یک جهت دور شونده برای مساله بیابید . ج) آیا مساله دارای جهت رأسی دور شونده نیز هست ؟

۲۴- مساله زیر را در قالب یک مدل خطی بازنویسی کنید و با استفاده از روش ترسیمی جواب بهین آن را بیابید.

$$\min z = \max(2x_1 - 10, -4x_1 + 5)$$

$$0 \leq x_1 \leq 4$$