جلسه هشتم

۲۳ آذر ۱۴۰۱

مبحث دوگان

نادیا قنبری

مثال: مسائل زیر را در نظر بگیرید:

مسألهٔ اولیه	مسألهٔ دوگان
$\max z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4$ $s.t.\quad 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \le 12$ $x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 7$ $2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \le 10$ $x_j \ge 0 \quad \forall j = 1,2,3,4$	$\min w = 12y_1 + 7y_2 + 10y_3$ $s.t.\quad 3y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 2$ $y_1 - 3y_2 + y_3 \ge 4$ $y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 3$ $4y_1 + 3y_2 - y_3 \ge 1$ $y_i \ge 0 \quad \forall i = 1,2,3$

اگر $x_1^* = 0$، $x_2^* = 10.4$، $x_3^* = 0$ و $x_4^* = 0.4$ و $z^* = 42$ با استفاده از قضیهٔ مکمل زائد، جواب بهین مسألهٔ دوگان را بیابید.

مثال: مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید.

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 - 8x_5$$
$$s.t.\qquad 8x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 6$$
$$2x_1 + 6x_2 - x_3 + x_5 = 3$$
$$x_j \ge 0 \quad \forall j = 1,2,3,4$$

با استفاده از جواب شدنی $(0, 0, 0, 6, 3)$ و بردار جهت $(0, 0, 1, 4, 1)$ نشان دهید که مسألهٔ فوق بیکران است. دربارهٔ دوگان آن چه می‌توان گفت؟

مثال: LP زیر را در نظر بگیرید:

$$Max\ z = -2x_1 - x_2 + x_3$$
s.t.
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$
$$x_2 + x_3 \geq 2$$
$$x_1 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

سطر صفر جدول بهین به صورت زیر است:

$$z + 4x_1 + e_2 + (M-1)a_2 + (M+2)a_3 = 0$$

ابتدا دوگان مسألهٔ فوق را فرمول‌بندی کنید و سپس به کمک رابطه فوق جواب بهین مسألهٔ دوگان را بیابید.

۳- LP زیر را در نظر بگیرید:

$$Max\ z = -x_1 + 5x_2$$
s.t.
$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \leq 0.5$$
$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \leq 0.5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

سطر صفر جدول بهین به صورت زیر است:

$$z + 0.4s_1 + 1.4s_2 = z^*$$

z^* را برای مسئله فوق به دست آورید.

۴- مسائل زیر را با روش سیمپلکس دوگان حل کنید.

$$Min\ z = 6x_1 + x_2$$
s.t.
$$x_1 + x_2 \geq 5$$
$$2x_1 + x_2 \geq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

۶- LP زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&Max\ z = -3x_1 + x_2 + 2x_3\\
&\text{s.t.}\\
&\qquad x_2 + 2x_3 \le 3\\
&-x_1 \qquad + 3x_3 \le -1\\
&-2x_1 - 3x_2 \qquad \le -2\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

الف) دوگان مسئله را بیابید و نشان دهید دو مسئله، ناحیه شدنی یکسان دارند.

ب) با استفاده از قضیه ضعیف دوگانی نشان دهید مقدار بهین تابع هدف دو مسئله برابر صفر است.

۷- استدلال کنید که چرا گزاره‌ی زیر درست است؟

«اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان، جواب بهین دگرین داشته باشد، دیگری دارای جواب بهین تباهیده است.»

۸- LP زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&Max\ z = 2x_1 + x_2 + x_3\\
&\text{s.t.}\\
&x_1 \qquad + x_3 \le 1\\
&\qquad x_2 + x_3 \le 2\\
&x_1 + x_2 \qquad \le 3\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

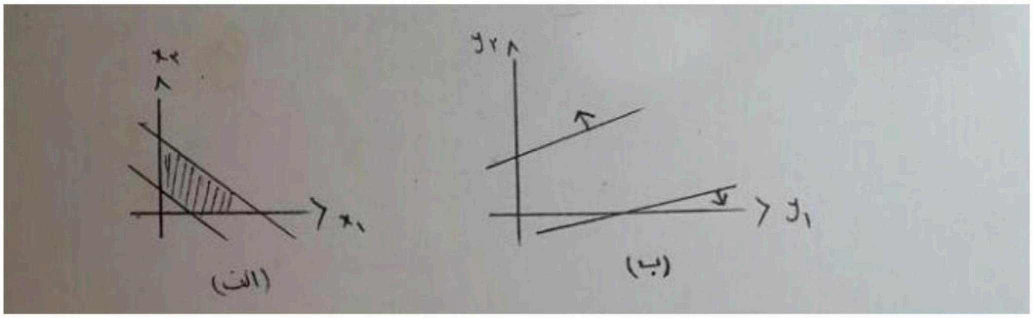
در جواب بهین مسألهٔ فوق، مجموعهٔ متغیرهای پایه‌ای به صورت $BV = \{x_1, x_2, x_3\}$ است. با توجه به آنکه

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

الف) جواب بهین مسألهٔ اولیه (مقدار متغیرهای $x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3$ و مقدار بهین تابع هدف) را تعیین کنید.

ب) دوگان مسألهٔ فوق را فرمول‌بندی کنید و بدون حل مستقیم مسألهٔ دوگان، جواب بهین آن (مقدار متغیرها و تابع هدف) را محاسبه نمایید.

۱۱- ناحیه شدنی یک LP در شکل (الف) رسم شده‌است. آیا ناحیه شدنی دوگان آن می‌تواند به صورت شکل (ب) باشد؟ توضیح دهید.



۱۲- جواب دوگان مسئله زیر چه حالت خاصی است؟

$Min\ z = 4x_1 - 7x_2 + 9x_3$

s.t.

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$, x_3 آزاد

۱۴-فرض کنید که یک جواب بهین برای مسألهٔ زیر به صورت $(x_1, x_2, x_3) = (1,1,0)$ باشد. متغیرهای دوگان y_1, y_2 در جواب بهین مسألهٔ دوگان چه مقداری دارند؟ راهنمایی: از قضیهٔ مکمل زائد استفاده کنید.

$\min z = x_1 + x_2 + c_3 x_3$

$s.t.$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$

$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ و b یک بردار m تایی است ثابت کنید دقیقاً یکی از دو دستگاه زیر شدنی است :

۱	۲
$Ax = b$	$A^T y \geq 0$
$x \geq 0$	$b^T y < 0$

مثال ۱:

$$x_1^* = 0$$
$$x_2^* = 10.4$$
$$x_3^* = 0$$
$$x_4^* = 0.4$$
$$z^* = 42$$

$$\xrightarrow[\text{مساله اولیه}]{\text{جاگذاری در}}$$ قید دوم non-binding $\Rightarrow \boxed{y_2^* = 0}$

$x_2^*, x_4^* \neq 0 \Rightarrow$ قیود ۲ و ۴ دوگان binding

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1^* - 3y_2^* + y_3^* = 4 \\ 4y_1^* + 3y_2^* - y_3^* = 1 \end{cases} \xrightarrow{y_2^* = 0 \text{ جاگذاری}} \begin{cases} y_1^* + y_3^* = 4 \\ 4y_1^* - y_3^* = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y_1^* = 1 \\ y_3^* = 3 \end{matrix}} \Rightarrow w^* = 12(1) + 7(0) + 10(3) = \boxed{42}$$

مثال ۲:

نقطه شروع: $(3, 6, 0, 0, 0)$ — بردار جهت $= (1, 4, 1, 0, 0)$

با شروع از نقطه‌ی شروع یاد شده و با طول گام مثبت α در جهت بردار یاد شده به نقطه‌ی $(3, 6, 0, 0, 0) + \alpha (1, 4, 1, 0, 0)$ می‌رسیم که همچنان در داخل ناحیه شدنی است. از طرفی:

به ازای نقطه‌ی $(3, 6, 0, 0, 0)$: $z = -80$

به ازای $(3, 6, 0, 0, 0) + \alpha (1, 4, 1, 0, 0)$: $z = -80 - 37\alpha$

$\Leftarrow$ در ناحیه شدنی نقاطی هست که z آنها به هر اندازه دلخواهی کوچک است.

$\Leftarrow$ مساله دارای جواب بیکران است $\Leftarrow$ مساله دوگان نشدنی است.

مثال ۳:

$$\max z = -2x_1 - x_2 + x_3$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 3 \quad \longrightarrow \quad y_1$$

$$x_2 + x_3 \geqslant 2 \quad \longrightarrow \quad y_2$$

$$x_1 + x_3 = 1 \quad \longrightarrow \quad y_3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

$$\min w = 3y_1 + 2y_2 + y_3$$

s.t.

$$y_1 + y_3 \geqslant -2$$

$$y_1 + y_2 \geqslant -1$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \geqslant 1$$

$$y_1 \geqslant 0$$

$$y_2 \leqslant 0$$

$$y_3 \ \text{free}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1^* &= \bar{C}_{s_1} = 0 \\ y_2^* &= -\bar{C}_{e_2} = -1 \\ y_3^* &= 2 \end{aligned}}$$

۳

$$Z^* = Z + 0/4\, s_1 + 1/4\, s_2$$

$$y_1^* = 0/4 = \bar{C}\, s_1$$

$$y_2^* = 1/4 = \bar{C}\, s_2$$

تابع هدف مسئله دوگان : $\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 \xrightarrow[\text{بجسن}]{\text{جایگذاری}} \boxed{z^* = 0/9}$

۴

$$\min Z = ۶x_۱ + x_۲$$

s.t.

$$x_۱ + x_۲ \geq ۵$$
$$۲x_۱ + x_۲ \geq ۸$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

$$\xrightarrow[\times(-۱)]{\text{استاندارد}}$$

$$\min Z = ۶x_۱ + x_۲$$

s.t.

$$-x_۱ - x_۲ + e_۱ = -۵$$
$$-۲x_۱ - x_۲ + e_۲ = -۸$$
$$x_۱, x_۲, e_۱, e_۲ \geq ۰$$

	Z	$x_۱$	$x_۲$	$e_۱$	$e_۲$	RHS
Z	۱	−۶	−۱	۰	۰	۰
$e_۱$	۰	−۱	−۱	۱	۰	−۵
$e_۲$	۰	−۲	−۱	۰	۱	−۸

	Z	$x_۱$	$x_۲$	$e_۱$	$e_۱$	RHS
Z	۱	−۴	۰	۰	−۱	۸
$e_۱$	۰	۱	۰	+۱	−۱	۳
$x_۲$	۰	۲	۱	۰	−۱	۸

$$e_۱^* = ۳$$
$$x_۲^* = ۸$$
$$z^* = ۸$$

۴

$$\max z = -3x_1 + x_2 + 2x_3$$

s.t.

$$x_2 + 2x_3 \leq 3 \longrightarrow y_1$$

$$-x_1 + 3x_3 \leq -1 \longrightarrow y_2$$

$$-2x_1 - 3x_2 \leq -2 \longrightarrow y_3$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3$$

Dual $\rightarrow$ $\min w = 3y_1 - y_2 - 2y_3$

s.t.

$$-y_2 - 2y_3 \geq -3$$

$$y_1 - 3y_3 \geq 1$$

$$2y_1 + 3y_2 \geq 2$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1,2,3$$

الف) دو مسئله ناحیه شدنی ندارند

ب) $Z \leq W$ (به ازای یک جواب شدنی دلخواه برای مسئله Primal و مسئله Dual)

از طرفی $Z = -W \Rightarrow Z^* = -W^* \Rightarrow Z^* = W^* = 0$

۷ - برای اینکه مسئله اولیه ج بهینه دگرین داشته باشد می‌بایست ضریب سطر صفر حداقل یکی از متغیرهای غیرپایه‌ای ۰ باشند.

$$\bar{C}_{s_i} = 0 \Rightarrow y_i^* = 0$$

$$\bar{C}_{e_i} = 0 \Rightarrow y_i^* = 0$$

نیز اگر ضریب کاهش هزینه یک متغیر در سطر صفر، ۰ باشد، یک متغیر در مسئله ی دوگان ۰ خواهد شد

$$\bar{C}_{x_i} = 0 \Rightarrow \underbrace{C_{BV}^T B^{-1}}_{\text{بردار متغیر دوگان}} a_{x_i} - C_{x_i} = 0$$

⇐ قید متناظر با متغیری که در سطر ۰ ضریب ۰ دارد، binding است ⇐ متغیر دوگان نظیر آن در مسئله دوگان مقدار ۰ دارد.

← در مسئله اولیه (با ج دگرین) ضریب کاهش هزینه متغیرهای BV و حداقل یک متغیر NBV ۰ است ⇐ حداقل m+1 متغیر در مسئله اولیه ضریب کاهش هزینه ۰ دارند
⇐ حداقل m+1 متغیر در مسئله دوگان مقدار ۰ دارند و از طرفی مسئله دوگان m+n متغیر دارد ⇐ حداقل یک متغیر پایه‌ای آن ۰ است ⇐ مسئله دوگان تباهیده است.

BV NBV

۸

(الف) $\bar{b} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} = x_1^* \\ = x_2^* \\ = x_3^* \end{matrix}$

$S_1^* = S_2^* = S_3^* = 0 \quad \Rightarrow \quad z^* = 2(1) + 2 + 0 = 4$

متغیرهای غیرپایه‌ای

(ب)

$$\min w = y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & y_1 + y_3 \geq 2 \\ & y_2 + y_3 \geq 1 \\ & y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$y^* = C_{BV}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w^* = 1 + 3(1) = 4$$

۱۱

خیر، درست نیست زیرا مسئله الف نشدنی دوگان آن است ⇐ پس جواب بهین متناهی ندارد

⇐ طبق قضایای تئوری دوگانی مسئله دوگان نیز نشدنی بوده و جواب بهین متناهی ندارد

در حالیکه شکل ب یک مسئله نشدنی را نشان می‌دهد.

۱۲

$$\max w = 4y_1$$

$$\text{s.t.} \quad y_1 \leqslant 4$$

$$2y_1 \leqslant -7$$

$$4y_1 = 9 \Rightarrow y_1 = \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{قید دوم}} 2y_1 \leqslant -7$$

$$y_1 \geqslant 0 \qquad \Rightarrow y_1 \leqslant -3.5 \quad \times$$

⇐ مسئله دوگان نشدنی است ⇐ مسئله اولیه یا نشدنی است یا بیکران

$$\max w = 2y_1$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{array}{lll} y_1 - y_2 \leqslant 1 & \longrightarrow x_1 & x_1^* = 1 \\ y_1 + y_2 \leqslant 1 & \longrightarrow x_2 & x_2^* = 1 \\ 2y_1 + y_2 \leqslant C_3 & \longrightarrow x_3 & x_3^* = 0 \\ y_1, y_2 \ \text{free} & & \end{array}$$

⇐ قیدای اول و دوم دوگان binding (نافذ) هستند

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 - y_2 = 1 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1 = 1 \ , \ y_2 = 0$$

دستگاه اول $\rightarrow$ $\max z = 0^T x$ $\quad$ s.t. $Ax = b$, $x \geq 0$ $\xrightarrow{\text{Dual}}$ $\min w = b^T y$ $\quad$ s.t. $A^T y \geq 0$, y free

* دستگاه اول شدنی $\Rightarrow z^* = 0 \xrightarrow{\text{قضیه قوی دوگانگی}} w^* = 0 \Rightarrow \underline{b^T y = 0}$

اما در دستگاه دوم داریم: $b^T y > 0 \Rightarrow$ دستگاه دوم شدنی نیست

* دستگاه اول نشدنی $\Rightarrow$ مسئله اولیه نشدنی $\Rightarrow$ مسئله دوگان بیکران یا نشدنی است

از طرفی $y = 0$ در مسئله دوگان صدق می‌کند $\Rightarrow$ مسئله دوگان نشدنی نمی‌باشد

$\Rightarrow$ حتماً بیکران است یعنی در ناحیه شدنی مسئله دوگان y ای داریم که $b^T y$ را به حد دلخواه کوچک نمایند $\Rightarrow$ دستگاه دوم شدنی است ■