

جلسہ پنجم

۲۵ آبان ۱۴۰۱

مبحث سیمپلکس

معصومه پرداختی

سوال اول) مسئله زیر را به روش M بزرگ حل کنید.

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

$$\text{S.t } x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

جواب :

استاندارد سازی :

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

$$\text{s.t } x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 - e_1 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, e_1 \geq 0$$

مسئله جدید :

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - Ma_1 - Ma_2$$

$$\text{s.t } x_1 + x_2 + x_3 + a_1 = 7$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 - e_1 + a_2 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, e_1, a_1, a_2 \geq 0$$

تفاسی سطر صفر :

$$Z - 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + Ma_1 + Ma_2 = 0$$

	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	a_2	RHS
Z	1	-2	-3	5	0	M	M	0
a_1	0	1	1	1	0	1	0	7
a_2	0	2	-5	1	-1	0	1	10

اطلاع جدول :

	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	a_2	RHS
Z	1	$-2-3M$	$-3+5M$	$5-M$	$0+M$	0	0	$-17M$
a_1	0	1	1	1	0	1	0	7
a_2	0	(2) ↑	-5	1	-1	0	1	10 →

	z	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	a_2	RHS
z	1	0	$-1 - \frac{V}{F}M$	$7 - \frac{1}{F}M$	$-1 - \frac{1}{F}M$	0	$1 + \frac{V}{F}M$	$10 - 2M$
a_1	0	0	$\left(\frac{V}{F}\right)$	$\frac{1}{F}$	$\frac{1}{F}$	1	$-\frac{1}{F}$	2 →
x_1	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{F}$	$-\frac{1}{F}$	0	$\frac{1}{F}$	3

↑

	z	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	a_2	RHS
z	1	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{2} + M$	$M - \frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_1	0	1	0	$< \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

جواب دیکھئے:

$$z^* = 10\frac{1}{2}$$

$$x_1^* = \frac{3}{2}$$

$$x_2^* = \frac{3}{2}$$

$$x_3^* = 0$$

سؤال درآ : فرض کنید جدول زیر برای یک مسئله s عاظم سازی داده شده باشد.^۱ شرایطی روی مجهولات C و a_1 و a_2 و a_3 قرار دهید که جعلیات زیر درست باشد.^۱

(a) جواب مفعی بکشد باشد.^۱

(b) جواب مفعی، بکشد درین باشد.^۱

(c) با فرض اینکه $b > 0$ ، LP بی‌سیران باشد.^۱

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	1	$-C$	γ	0	0	0	10
x_3	0	-1	a_1	1	0	0	Σ
x_4	0	a_2	$-\Sigma$	0	1	0	1
x_5	0	a_3	γ	0	0	1	b

جواب:

۹) چون مسئله بالسهم سازی است، جواب مطلوبه دستی بجسته است.

همه ی ضرایب ماهس هزینه سطر صفر، نامنفی باشند. پس باید:

$$-C \geq 0 \rightarrow C \leq 0$$

همچنین باید $b \geq 0$. چون b برابر است با مقدار متغیر یایه x_5 .

a_1 و a_2 و a_3 هر مقدار دخواهی می توانند باشند.

۱۰) برای اشبه جواب دستی داشته بالسهم، باید ضرایب ماهس هزینه مطلوبه از متغیر

های غیر یایه x_1 ، برابر یا صفر باشند. در نتیجه باید $C = 0$ باشد.

همچنین باید $b \neq 0$. زیرا در آن صورت برنده آزمون نسبت صفر می شود و در این حالت در جای نمی آید.

۱۱) برای بسیار سخت، باید متغیر ورودی داشته بالسهم ولی متغیر خروجی نداشته

بالسهم. پس باید:

$$-C < 0 \rightarrow C > 0$$

$$a_2, a_3 \leq 0$$

سوال سوم) جدول زیر را به متناظر با یک مسئله S منبج سازی است
 و متغیرهای S_1 و S_2 و S_3 متغیرهای کمبود متناظر با مقدار اول و دوم
 سوم هستند، در نظر بگیرید.

	z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
z	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	-2
S_1	0	0	2	1	-1	0	2
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
S_3	0	0	2	0	-1	1	0

ا) چه شرطی دلسه باسد تا جواب متناظر با جدول بعدی غیربانه باسد؟

ب) چه شرطی ری و برقرار باسد تا در جدول بعدی لغا جان نقطه گوشه ای

(0, 0, 2, 0, 0) = $(S_1, S_2, S_3, x_1, x_2)$ را نشان دهد؟

جواب :

ا) اگر 40×1 باشد، از قون نسبت برابر با صفر نخواهد شد و در جدول بعدی تباهی از بین می رود.

در این حالت x_2 وارد می شود و S_1 از پایه خارج می شود.

با انجام عملیات سطری مقدماتی، در جدول بعدی طرف راست S_2 برابر با 25×10 می شود. پس جواب پایه ای حاصل، تباهی نیست.

ب) اگر 40×1 باشد، از قون نسبت برابر با صفر می شود. در نتیجه، S_2

خارج شده و x_2 وارد می شود. اما مقدار x_2 همان صفر باقی می ماند.

چون مقدار سمت راست x_2 برابر با صفر است، پس در عملیات

سطری مقدماتی، سمت راست سایر مقفیر هارا تغییر نمی دهد.

پس نقطه توقف ای تغییر نمی کند.

سوال چهارم) یک LP با هدف ماکسیم سازی در نظر بگیرید

به جدول بهین آن به صورت زیر است. آیا این مسئله دارای

میان جواب بهین بوده ای دین است؟ در استیوارت شفاع بهین

رابطه

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
Z	1	0	0	0	2	2
x_1	0	1	0	-1	1	2
x_2	0	0	1	-2	3	4

جواب: x_3 شرط ورود به پای را دارد، اما متغیر خارج سونده

ندارد. پس مساله شعاع بهینه دیرین دارد.

$$x_5 = 0$$

$$x_1 - x_3 = 2 \rightarrow x_1 = 2 + x_3$$

$$x_2 - 2x_3 = 3 \rightarrow x_2 = 3 + 2x_3$$

$$x_3 = r \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+r \\ 3+2r \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2+r \\ 3+2r \\ r \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} r \\ 2r \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r=1} AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{مجموعه جواب های بهینه} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \geq 0 \right\}$$

سؤال پنجم) درباره درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر، بحث کنید.

۱۹) در روش سیمپلِس، اندرست نسبتاً بی‌اناست، جواب‌دهی پایه‌ای

بدست آمده بعد از عمل محوری تباهیه خواهد شد.

۲۰) در روش سیمپلِس، بعد از هر محوری، نقطه نوسه‌ای جدید بدست

خواهد آمد.

۲۱) در الگوریتم سیمپلِس، اندربرنده از هر نسبت، مغز باسد، مقدار تابع

هدف، طی این محوری بدون تفسیر باقی خواهد ماند.

جواب :

(a) درست۔ چونکہ یک صفیر را بہ دلخواہ از پائے خارج می‌کنیم و صفیر
دُسر کے از پائے خارج نشود، ^۱حین عملیات سطری مقدماًتی، برابر با
صفیر خواهد شد.

(b) نادرست۔ اگر تباہی زنی ^۱رفع نشود رخ داده باشد، در یک نقطه
کوشی ای می‌مانیم.

(c) درست۔ وقتی بزنده از قون نسبت صفیر باشد، مقدار سرعت راست
تغیر وارد شد به جدول، برابر با صفیر می‌شود. در این حالت، طی
عملیات سطری مقدماًتی، مقداره مقادیر سرعت راست با ضربی
از صفیر جمع می‌شوند، پس تفسیر نمی‌گردد.

سوال ششم) مسئله $\max z = C^T x$ را در نظر بگیرید.
 $s.t \quad Ax = b$
 $x \geq 0$

A یک ماتریس $m \times n$ است و سطرهاى A مستقل خطی هستند و $m < n$.

الف) اگر ضریب کاهش هزینه متغیر غیر پایه ای x در یک جدول سیفلیس

برابر با -7 باشد و آزمون نسبت برای ورودی x به پایه برابر با

3 باشد، در صورت ورود x به پایه، مقدار تابع هدف چه میزان تغییر خواهد کرد؟

ب) آیا رایج جواب شذنی با دقیقاً m مؤلفه مثبت در نظر بگیرید.

آیا x لزوماً یک نقطه رأسی است؟

ج) آیا ممکن است یک جواب بهینه، بیشتر از m متغیر اندام مثبت

داشته باشد؟

جواب:

۹) این نسبت کاهش هزینه تغییر x برابر با ۷ - است، یعنی

به ازای هر واحد افزایش x ، مقدار تابع هدف ۷ واحد افزایش

می یابد.

حال وقتی مقدار آزمون نسبت برای ورود x برابر ۳ شده است،

یعنی x حداقل می تواند مقدار ۳ بگیرد. پس مقدار نسبت راست x

برابر با ۳ خواهد شد. در نتیجه تابع هدف $3 \times 7 = 21$ واحد افزایش

می یابد.

(b) خیر؛ ممکن است این جواب پایه‌ای نباشد.

مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1$$

در اینجا دو قید داریم. قدری دهیم:

$$BV = \{x_1, x_4\}$$

$$NBV = \{x_2, x_3\} \Rightarrow x_2 = x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{بسیار جواب}$$

پس در این دستگاه، نقطه $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ شدنی است چون در قیدها

موردی نمی‌آید، اما پایه‌ای نیست، چون مختصراً به فرد نیست.

C، بله، امکان دارد جواب بهینه غیر گوشه‌ای (در حالت دگرزنی)

بسیار از m مقدار الیگت داشته باشد.