بسم الله الرحمن الرحيم

درس «بهینه‌سازی خطی»

استاد درس: دکتر هوشمند

فصل اول (مدل‌سازی)

عمده مطالب این فصل بر اساس فصل سوم کتاب Winston گردآوری شده است.

مدل‌سازی ریاضی (Mathematical modeling)

مراحل مدل‌سازی

تعریف متغیرهای تصمیم (Decision variables)

↓

تعریف تابع هدف(Objective function)

↓

تعریف قیود (Constraints)

↓

بیان محدودیت‌های علامت روی متغیرها (Sign restriction)

مثال (تخصیص زمین کشاورزی)

شخصی قصد دارد در ۴۵ جریب زمین کشاورزی خود گندم و ذرت کشت کند.

او ۴۰ کارگر و ۱۲ تن کود شیمیایی در اختیار دارد.

	کارگر	کود شیمیایی	سود
کشت یک جریب گندم	۳	۲ تن	۲۰۰ دلار
کشت یک جریب ذرت	۲	۴ تن	۳۰۰ دلار

به هر محصول چه مساحتی از زمین اختصاص داده شود به طوری که سود کشاورز ماکزیمم شود؟

مثال (تخصیص زمین کشاورزی)

x_1: زمین اختصاص یافته به گندم

x_2: زمین اختصاص یافته به ذرت

$$\max \quad z = 200x_1 + 300x_2$$
$$s.t.$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 40$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 12$$
$$x_1 + x_2 \leq 45$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

مثال (مسأله شیرینی‌پزی)

یک شیرینی‌پزی کیک شکلاتی و وانیلی تولید می‌کند
او ۱۰۰ عدد تخم‌مرغ و ۸ ساعت زمان پخت در اختیار دارد.

	تخم‌مرغ	زمان پخت	سود
کیک شکلاتی	۴ عدد	۲۰ دقیقه	یک دلار
کیک وانیلی	۱ عدد	۴۰ دقیقه	۰/۵ دلار

برای ماکزیمم‌سازی سود، از هر کیک چه میزان باید تولید کرد؟

مثال (مسأله شیرینی‌پزی)

x_1: میزان تولید کیک شکلاتی

x_2: میزان تولید کیک وانیلی

$$\max \quad z = x_1 + 0.5x_2$$

$$s.t.$$

$$4x_1 + x_2 \leq 100$$

$$20x_1 + 40x_2 \leq 8 \times 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

در قید یا تابع هدف عواملی که با یکدیگر جمع میشوند باید واحد اندازه‌گیری یکسانی داشته باشند. به علاوه، طرفین یک قید باید دارای **واحد اندازه‌گیری یکسان** باشند.

آیا لازم است **شرط صحیح بودن** را روی متغیرها قرار دهیم؟

$$x_1, x_2 \geq 0, Integer$$

مثال (تولید رنگ)

شرکتی با ترکیب دو نوع ماده اولیهٔ M1 و M2 رنگهای داخلی و خارجی را تولید می‌کند.

ماده اولیه	مقدار ماده اولیه مورد نیاز (برحسب تن) برای تولید یک تن رنگ خارجی	مقدار ماده اولیه مورد نیاز (برحسب تن) برای تولید یک تن رنگ داخلی	ماکزیمم ماده اولیه در دسترس در روز (برحسب تن)
M1	۶	۴	۲۴
M2	۱	۲	۶

قیمت فروش هر تن رنگ خارجی و داخلی به ترتیب معادل ۵ هزار دلار و ۴ هزار دلار می‌باشد.

در طول روز حداکثر دو تن رنگ داخلی می‌توان فروخت.

میزان تجاوز تولید رنگ داخلی از تولید رنگ خارجی نباید بیشتر از یک تن باشد.

یک LP برای ماکزیمم‌سازی درآمد ارائه کنید.

---

x_1: میزان تولید رنگ داخلی (تن)　　　x_2: میزان تولید رنگ خارجی (تن)

مثال (تولید رنگ)

ماده اولیه	مقدار ماده اولیه مورد نیاز (برحسب تن) برای تولید یک تن رنگ خارجی	مقدار ماده اولیه مورد نیاز (برحسب تن) برای تولید یک تن رنگ داخلی	ماکزیمم ماده اولیه در دسترس در روز (برحسب تن)
M1	۶	۴	۲۴
M2	۱	۲	۶

x_1: میزان تولید رنگ داخلی (تن)

x_2: میزان تولید رنگ خارجی (تن)

میزان تولید رنگ داخلی نباید کمتر از میزان تولید رنگ خارجی باشد.

میزان استفاده از ماده اولیهٔ M2 باید حداکثر ۶ تن و حداقل ۳ تن باشد.

مثال (تولید رنگ)

ماده اولیه	مقدار ماده اولیه مورد نیاز (برحسب تن) برای تولید یک تن رنگ خارجی	مقدار ماده اولیه مورد نیاز (برحسب تن) برای تولید یک تن رنگ داخلی	ماکزیمم ماده اولیه در دسترس در روز (برحسب تن)
M1	۶	۴	۲۴
M2	۱	۲	۶

x_1: میزان تولید رنگ داخلی (تن)

x_2: میزان تولید رنگ خارجی (تن)

مجموع تولید رنگهای داخلی و خارجی باید حداقل ۳ تن باشد.

میزان تولید رنگ داخلی باید حداقل یک تن بیشتر از میزان تولید رنگ خارجی باشد.

نسبت تولید رنگ داخلی به مجموع رنگ‌های داخلی و خارجی نباید از ۰/۵ تجاوز کند.

تابع خطی

تابع چندمتغیره $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ را یک تابع خطی گوییم هرگاه

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

که در آن، $c_1,c_2,\dots,c_n$ اعداد ثابت هستند.

$f(x_1,x_2)=2x_1+x_2$: خطی

$f(x_1,x_2)=x_1^2x_2$: غیرخطی

قالب کلی یک مدل برنامه‌ریزی خطی

$$min/\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$s.t.$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \begin{matrix} \le \\ \ge \\ = \end{matrix} b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \begin{matrix} \le \\ \ge \\ = \end{matrix} b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \begin{matrix} \le \\ \ge \\ = \end{matrix} b_m$$

$x_1, \dots, x_n$ محدودیت علامت روی متغیرهای

قالب کلی یک مدل برنامه‌ریزی خطی

ضرایب تابع هدف

$$\min/\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$s.t.$

ضرایب تکنولوژیکی

پارامترهای مدل

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \begin{matrix}\le\\ \ge\\ =\end{matrix} b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \begin{matrix}\le\\ \ge\\ =\end{matrix} b_2$$

مقادیر سمت راست

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \begin{matrix}\le\\ \ge\\ =\end{matrix} b_m$$

$x_1, \ldots, x_n$ محدودیت علامت روی متغیرهای

مفروضات یک مدل برنامه‌ریزی خطی

خطی بودن ضابطه تابع هدف و قیود

تقسیم‌پذیری

متغیرها می‌توانند مقادیر اعشاری را نیز بپذیرند

قطعیت

مقدار پارامترهای مسأله به طور قطعی معلوم است.

جواب شدنی و جواب بهین

جواب شدنی (Feasible solution)

جوابی است که در همهٔ قیود مسأله و محدودیت‌های علامت صدق کند.

جواب بهین (Optimal solution)

یک جواب شدنی است که مقدار تابع هدف آن در مقایسه با سایر جواب‌های شدنی مطلوب‌تر باشد.

ناحیه شدنی (Feasible region)

مجموعهٔ همهٔ جواب‌های شدنی را فضای شدنی یا ناحیهٔ شدنی می‌نامیم.

جواب شدنی و جواب بهین

جواب شدنی (Feasible solution)

جوابی است که در همهٔ قیود مسأله و محدودیت‌های علامت صدق کند.

جواب بهین (Optimal solution)

یک جواب شدنی است که مقدار تابع هدف آن در مقایسه با سایر جواب‌های شدنی مطلوب‌تر باشد.

ناحیه شدنی (Feasible region)

مجموعهٔ همهٔ جواب‌های شدنی را فضای شدنی یا ناحیهٔ شدنی می‌نامیم.

جواب شدنی و جواب بهین

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$
$$s.t.$$
$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

کدام جواب شدنی و کدام نشدنی است؟

الف) $x_1 = 0,\ x_2 = 1$

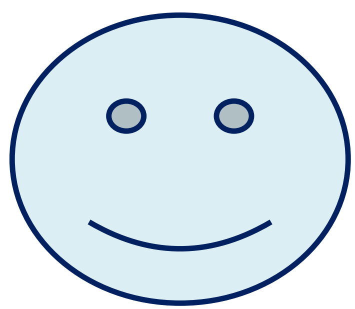
ب) $x_1 = -1,\ x_2 = 0$

ج) $x_1 = 1,\ x_2 = 4$

د) $x_1 = 1,\ x_2 = 1.5$

از بین جواب‌های الف و د کدامیک مطلوب‌تر است؟

بررسی مثال‌های متنوع در زمینه مدل‌سازی



مسأله رژیم غذایی

فردی می‌خواهد برنامه غذایی خود را طوری تنظیم کند که روزانه حداقل ۵۰۰ واحد کالری، ۶ واحد ویتامین، ۱۰ واحد شکر و ۸ واحد چربی به بدنش برسد. او می‌تواند از ۴ ماده غذایی استفاده کند:

	کالری	ویتامین	شکر	چربی	قیمت
یک واحد ماده غذایی ۱	۴۰۰ واحد	۳ واحد	۲ واحد	۲ واحد	۵۰ سنت
یک واحد ماده غذایی ۲	۲۰۰ واحد	۲واحد	۲ واحد	۴ واحد	۲۰ سنت
یک واحد ماده غذایی ۳	۱۵۰ واحد	۰	۴ واحد	۱ واحد	۳۰ سنت
یک واحد ماده غذایی ۴	۵۰۰ واحد	۰	۴ واحد	۵ واحد	۸۰ سنت

یک LP ارائه کنید که فرد بتواند نیازهای غذایی روزانه‌اش را با کمترین هزینه تأمین کند.

x_i: میزان مصرف ماده غذایی i $(i = 1,2,3,4)$

مسأله رژیم غذایی

$$\min z = 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 80x_4$$
$$s.t.$$
$$400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 10$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$x_1^* = 0, x_2^* = 3, x_3^* = 1, x_4^* = 0, z^* = 90$$

مسأله زمان‌بندی کار

شرکت پست به تعدادی کارکنان تمام‌وقت در روزهای مختلف هفته به شرح زیر نیاز دارد:

روز	شنبه (روز ۱)	یکشنبه (روز ۲)	دوشنبه (روز ۳)	سه‌شنبه (روز ۴)	چهارشنبه (روز ۵)	پنجشنبه (روز ۶)	جمعه (روز ۷)
تعداد کارکنان تمام‌وقت مورد نیاز	۱۷	۱۳	۱۵	۱۹	۱۴	۱۶	۱۱

طبق قوانین هر کارمند تمام‌وقت باید **۵ روز متوالی** کار کند و آنگاه دو روز در مرخصی باشد. مثلاً کارمندی که روزهای دوشنبه تا جمعه کار می‌کند، شنبه و یکشنبه در مرخصی است.

یک مدل ارائه کنید که شرکت بتواند نیاز روزانه‌اش را با کمترین تعداد کارمند استخدامی تأمین کند.

x_i : تعداد کارمندانی که در روز iام کار خود را شروع می‌کنند ($i = 1,2, \dots ,7$)

مسأله زمان‌بندی کار

x_i : تعداد کارمندانی که در روز iام کار خود را شروع می‌کنند ($i = 1,2,\dots,7$)

روز	شنبه (روز ۱)	یکشنبه (روز ۲)	دوشنبه (روز ۳)	سه‌شنبه (روز ۴)	چهارشنبه (روز ۵)	پنچشنبه (روز ۶)	جمعه (روز ۷)
تعداد کارکنان تمام‌وقت مورد نیاز	۱۷	۱۳	۱۵	۱۹	۱۴	۱۶	۱۱

$$\min z = x_1 + x_2 + \cdots + x_7$$
$$s.t.$$
$$x_1 + x_7 + x_6 + x_5 + x_4 \ge 17$$
$$x_2 + x_1 + x_7 + x_6 + x_5 \ge 13$$
$$x_3 + x_2 + x_1 + x_7 + x_6 \ge 15$$
$$x_4 + x_3 + x_2 + x_1 + x_7 \ge 19$$
$$x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1 \ge 14$$
$$x_6 + x_5 + x_4 + x_3 + x_2 \ge 16$$
$$x_7 + x_6 + x_5 + x_4 + x_3 \ge 11$$
$$x_i \ge 0, Integer$$

مسأله زمان‌بندی کار

جواب بهین مدل عدد صحیح

x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	x_5^*	x_6^*	x_7^*
4	4	2	6	0	4	3

$$z^* = 23$$

جواب بهین مدل LP

x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	x_5^*	x_6^*	x_7^*
1.3	3.3	2	7.3	0	3.3	5

$$z^* = 22.3$$

گرد کردن جواب بهین مدل LP رو به بالا

x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	x_5^*	x_6^*	x_7^*
2	4	2	8	0	4	5

$$z^* = 25$$

مسأله زمان‌بندی کار

آیا لازم بود در مدل مسأله برای علامت قیود به جای $\geq$ از $=$ استفاده می‌کردیم؟

فرض کنید اگر تعداد کارکنان مشغول به کار در روز i از حداقلِ مورد نیاز بیشتر باشد، به ازای هر نفر نیروی اضافه هزینه c_i واحد تحمیل گردد. فرمول‌بندی را به گونه‌ای تغییر دهید که بتوان هزینه کل را مینیمم کرد.

مسأله زمان‌بندی کار

$$\min z = c_1 (x_1 + x_7 + x_6 + x_5 + x_4 - 17) + c_2(x_2 + x_1 + x_7 + x_6 + x_5 - 13) + c_3(x_3 + x_2 + x_1 + x_7 + x_6 - 15) + c_4(x_4 + x_3 + x_2 + x_1 + x_7 - 19) + c_5(x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1 - 14) + c_6(x_6 + x_5 + x_3 + x_2 - 16) + c_7(x_7 + x_6 + x_5 + x_4 + x_3 - 11)$$

$s.t.$

$$x_1 + x_7 + x_6 + x_5 + x_4 \geq 17$$
$$x_2 + x_1 + x_7 + x_6 + x_5 \geq 13$$
$$x_3 + x_2 + x_1 + x_7 + x_6 \geq 15$$
$$x_4 + x_3 + x_2 + x_1 + x_7 \geq 19$$
$$x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1 \geq 14$$
$$x_6 + x_5 + x_4 + x_3 + x_2 \geq 16$$
$$x_7 + x_6 + x_5 + x_4 + x_3 \geq 11$$
$$x_i \geq 0, Integer$$

مسأله برش

شرکتی که قطعات چوب با طول‌های ۳ و ۵ و ۹ فوتی می‌فروشد باید سفارش‌های زیر را تأمین کند:

نوع قطعه	۳ فوتی	۵ فوتی	۹ فوتی
میزان سفارش	۲۵	۲۰	۱۵

شرکت باید تقاضای مشتریان را با برش دادن قطعات ۱۷ فوتی تأمین کند. یک LP برای مینیمم‌سازی ضایعات بنویسید.

طرح برش	تعداد قطعات ۳ فوتی	تعداد قطعات ۵ فوتی	تعداد قطعات ۹ فوتی	میزان ضایعات (برحسب فوت)
۱	۵	۰	۰	۲
۲	۴	۱	۰	۰
۳	۲	۲	۰	۱
۴	۲	۰	۱	۲
۵	۱	۱	۱	۰
۶	۰	۳	۰	۲

طرح برش	تعداد قطعات ۳ فوتی	تعداد قطعات ۵ فوتی	تعداد قطعات ۹ فوتی	میزان ضایعات (برحسب فوت)
۱	۵	۰	۰	۲
۲	۴	۱	۰	۰
۳	۲	۲	۰	۱
۴	۲	۰	۱	۲
۵	۱	۱	۱	۰
۶	۰	۳	۰	۲

x_i : تعداد قطعات ۱۷ فوتی که با طرح i برش زده می‌شوند ($i = 1,2,\ldots,6$)

طرح برش	تعداد قطعات ۳ فوتی	تعداد قطعات ۵ فوتی	تعداد قطعات ۹ فوتی	میزان ضایعات (برحسب فوت)
۱	۵	۰	۰	۲
۲	۴	۱	۰	۰
۳	۲	۲	۰	۱
۴	۲	۰	۱	۲
۵	۱	۱	۱	۰
۶	۰	۳	۰	۲

$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 25$$

$$x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 \geq 20$$

$$x_4 + x_5 \geq 15$$

$$x_1, x_2, \dots, x_6 \geq 0, Integer$$

ضایعات

تعریف اول: تکه‌های زیر ۳ فوت که عملاً قابل استفاده نیست ضایعات است.

تعریف دوم: هر چیزی که اضافه بر تقاضا باقی بماند، ضایعات است.

ضایعات

تعریف اول: تکه‌های زیر ۳ فوت که عملاً قابل استفاده نیست ضایعات است.

تعریف دوم: هر چیزی که اضافه بر تقاضا باقی بماند، ضایعات است.

تابع هدف با تعریف اول:

$$\min z = 2x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_6$$

جواب بهین:

$$x_5^* = 25, x_i^* = 0 \quad \forall i \neq 5$$
$$z^* = 0$$

$$x_5^* = 10000, x_i^* = 0 \quad \forall i \neq 5$$
$$z^* = 0$$

تابع هدف با تعریف دوم:

$$\min z = 17(x_1 + x_2 + \cdots + x_6) - 310$$

مسأله با تعریف دوم:

$$\begin{aligned}
&\min z = 17(x_1 + x_2 + \cdots + x_6) - 310 \\
&s.t. \\
&5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 25 \\
&x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 \geq 20 \\
&x_4 + x_5 \geq 15 \\
&x_1, x_2, \dots, x_6 \geq 0, Integer
\end{aligned}$$

معادل است با:

$$\begin{aligned}
&\min z = x_1 + x_2 + \cdots + x_6 \\
&s.t. \\
&5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 25 \\
&x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 \geq 20 \\
&x_4 + x_5 \geq 15 \\
&x_1, x_2, \dots, x_6 \geq 0, Integer
\end{aligned}$$

چرا تابع هدف مسأله دوم را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد؟

$$\min z = 3 \times (5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 - 25)$$

$$+5 \times (x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 - 20)$$

$$+9 \times (x_4 + x_5 - 15)$$

$$+\left[2x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_6\right]$$

مسألهٔ مخلوط کردن

نفت خام می‌خرد ⬅ با ترکیب آنها بنزین تولید می‌کند ⬅ بنزین را می‌فروشد

	قیمت خرید هر بشکه (دلار)
نفت خام نوع 1	45
نفت خام نوع 2	35
نفت خام نوع 3	25

	قیمت فروش هر بشکه (دلار)
بنزین نوع 1	70
بنزین نوع 2	60
بنزین نوع 3	50

✓ تبدیل یک بشکه نفت خام به یک بشکه بنزین معادل 4 دلار هزینه می‌برد.

	نسبت اکتان	نسبت سولفور
نفت خام نوع 1	12	0.005
نفت خام نوع 2	6	0.02
نفت خام نوع 3	8	0.03

نسبت اکتان در بنزین نوع 1، 2، و 3 باید به ترتیب حداقل برابر با 10، 8 و 6

نسبت سولفور در بنزین نوع 1، 2 و 3 باید به ترتیب حداکثر برابر با 0.01، 0.02 و 0.01

	نیاز روزانه مشتریان (بشکه)
بنزین نوع 1	3000
بنزین نوع 2	2000
بنزین نوع 3	1000

✓ شرکت باید همهٔ تقاضاها را تأمین کند.

✓ شرکت می‌تواند برای افزایش تقاضا تبلیغ کند.

✓ هر دلار تبلیغ برای هر نوع بنزین، تقاضای آن را 10 بشکه افزایش می‌دهد.

✓ شرکت می‌تواند روزانه تا سقف 5000 بشکه از هر نوع نفت خام بخرد.

✓ شرکت می‌تواند روزانه تا سقف 14000 بشکه بنزین تولید کند.

باید در خصوص مخلوط کردن به گونه‌ای تصمیم‌گیری شود که ضمن تأمین تقاضا، سود شرکت ماکزیمم شود.

اندیس

نفت خام $i = 1, 2, 3$

بنزین $j = 1, 2, 3$

متغیر تصمیم

x_{ij} میزان مصرف نفت خام نوع i برای تولید بنزین نوع j (بر حسب تعداد بشکه)

y_j مبلغی که صرف تبلیغ بنزین نوع j می‌شود (بر حسب دلار)

$$\begin{aligned}
Max\ z = {} & 70(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 60(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 50(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \\
& -45\,(x_{11} + x_{12} + x_{13}) - 35(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 25\,(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\
& -4(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{13} + x_{23} + x_{33}) \\
& -(y_1 + y_2 + y_3)
\end{aligned}$$

	قیمت فروش هر بشکه (دلار)
بنزین نوع 1	70
بنزین نوع 2	60
بنزین نوع 3	50

	قیمت خرید هر بشکه (دلار)
نفت خام نوع 1	45
نفت خام نوع 2	35
نفت خام نوع 3	25

شرکت می‌تواند روزانه تا 5000 بشکه از هر نوع نفت خام بخرد:

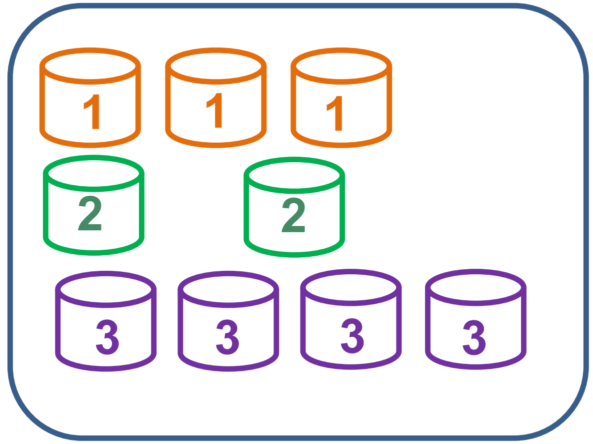
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 5000$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 5000$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 5000$$

شرکت می‌تواند روزانه تا سقف 14000 بشکه بنزین تولید کند:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 14000$$

نسبت اکتان در بنزین نوع 1 باید حداقل 10 باشد:

	نسبت اکتان	نسبت سولفور
نفت خام نوع 1	12	0.005
نفت خام نوع 2	6	0.02
نفت خام نوع 3	8	0.03



نسبت اکتان در هر بشکه بنزین 1 $= \frac{(3 \times 12) + (2 \times 6) + (4 \times 8)}{3 + 2 + 4} = 8.8$

$$\frac{12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \geq 10$$

$$\xRightarrow{\text{خطی سازی}} \quad 2x_{11} - 4x_{21} - 2x_{31} \geq 0$$

	نسبت اکتان	نسبت سولفور
نفت خام نوع 1	12	0.005
نفت خام نوع 2	6	0.02
نفت خام نوع 3	8	0.03

نسبت اکتان در بنزین نوع 2 باید حداقل 8 باشد:

$$\frac{12x_{12}+6x_{22}+8x_{32}}{x_{12}+x_{22}+x_{32}} \geq 8 \quad \xRightarrow{\text{خطی سازی}} \quad 4x_{12}-2x_{22} \geq 0$$

نسبت اکتان در بنزین نوع 3 باید حداقل 6 باشد:

$$\frac{12x_{13}+6x_{23}+8x_{33}}{x_{13}+x_{23}+x_{33}} \geq 6 \quad \xRightarrow{\text{خطی سازی}} \quad 6x_{13}+2x_{33} \geq 0$$

نسبت سولفور در بنزین نوع ۱ باید حداکثر 0.01 باشد:

$$\frac{0.005x_{11}+0.02x_{21}+0.03x_{31}}{x_{11}+x_{21}+x_{31}} \leq 0.01 \quad \xRightarrow{\text{خطی سازی}} \quad -0.005x_{11}+0.01x_{21}+0.02x_{31} \leq 0$$

به طور مشابه، قیود مربوط به نسبت سولفور در بنزین نوع ۲ و ۳ را بنویسید.

تأمین تقاضا

	نیاز روزانه مشتریان (بشکه)
بنزین نوع 1	3000
بنزین نوع 2	2000
بنزین نوع 3	1000

$$\underbrace{x_{11} + x_{21} + x_{31}} = \underbrace{3000 + 10y_1}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 2000 + 10y_2$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1000 + 10y_3$$

چرا نمی‌توان در قید فوق به جای = از $\leq$ استفاده کرد؟

چرا نمی‌توان در قید فوق به جای = از $\geq$ استفاده کرد؟

$$Max\ z = 70(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 60(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 50(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

$$-45(x_{11} + x_{12} + x_{13}) - 35(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 25(x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

$$-4(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

$$\boxed{-(y_1 + y_2 + y_3)}$$

محدودیت‌های علامت

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1,2,3, \forall j = 1,2,3$$

$$y_j \geq 0 \quad \forall j = 1,2,3$$

جواب بهین

$$x_{11}^* = 2088.889, \quad x_{12}^* = 2111.111, \quad x_{13}^* = 800$$

$$x_{21}^* = 777.778, \quad x_{22}^* = 4222.222, \quad x_{23}^* = 0$$

$$x_{31}^* = 133.333, \quad x_{32}^* = 3166.667, \quad x_{33}^* = 200$$

$$y_1^* = 0, \quad y_2^* = 750, \quad y_3^* = 0$$

$$z^* = 287750$$

سوال: آیا می‌توان مدل را بدون تعریف متغیر y_j و صرفاً بر اساس متغیرهای x_{ij} نوشت؟

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=3000+10y_1$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=2000+10y_2$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=1000+10y_3$$

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}\geq 3000$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}\geq 2000$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}\geq 1000$$

$$\begin{aligned}Max\, z &= 70(x_{11}+x_{21}+x_{31})+60(x_{12}+x_{22}+x_{32})+50(x_{13}+x_{23}+x_{33})\\&-45(x_{11}+x_{12}+x_{13})-35(x_{21}+x_{22}+x_{23})-25(x_{31}+x_{32}+x_{33})\\&-4(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{13}+x_{23}+x_{33})\\&-(y_1+y_2+y_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Max\, z &= 70(x_{11}+x_{21}+x_{31})+60(x_{12}+x_{22}+x_{32})+50(x_{13}+x_{23}+x_{33})\\&-45(x_{11}+x_{12}+x_{13})-35(x_{21}+x_{22}+x_{23})-25(x_{31}+x_{32}+x_{33})\\&-4(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{13}+x_{23}+x_{33})\\&-\left(\frac{(x_{11}+x_{21}+x_{31}-3000)}{10}+\frac{(x_{12}+x_{22}+x_{32}-2000)}{10}+\frac{(x_{13}+x_{23}+x_{33}-1000)}{10}\right)\end{aligned}$$

مدل‌های چنددوره‌ای

Multi Period Models

Dynamic Models

تصمیم‌گیری برای بیش از یک دورهٔ زمانی انجام می‌شود و تصمیمات یک دوره روی دوره‌های بعد تأثیر می‌گذارد.

یک شرکت تولید قایق باید تصمیم بگیرد طی چهارفصل آینده چه تعداد قایق تولید کند

فصل	تقاضا
1	40
2	60
3	75
4	25

- ✓ تقاضا باید به موقع برآورده شود
- ✓ دو نیروی کار عادی و اضافه‌کاری در اختیار است.
- ✓ هزینهٔ تولید یک قایق با نیروی عادی 400 و با نیروی اضافه کار 450 دلار است
- ✓ با نیروی کار عادی می‌توان در هر فصل حداکثر 40 قایق تولید کرد، اما روی میزان تولید با نیروی اضافه کار محدودیتی وجود ندارد
- ✓ در پایان هر فصل (پس از تولید و پاسخ به تقاضاها) اگر قایقی باقی بماند در انبار نگهداری می‌شود با هزینهٔ 20 دلار به ازای هر قایق
- ✓ در شروع فصل اول، 10 قایق در انبار موجود است.

برای تأمین تقاضا با کمترین هزینه یک مدل بهینه‌سازی ارائه کنید.

اندیس فصل $t = 1, 2, 3, 4$

متغیر تصمیم

تعداد قایق تولید شده با نیروی کار معمولی در فصل t	x_t
تعداد قایق تولید شده با نیروی اضافه‌کار در فصل t	y_t
تعداد قایقی که در پایان فصل t در انبار نگهداری می‌شود.	w_t

$$Min\ z = 400\left(\sum_{t=1}^{4} x_t\right) + 450\left(\sum_{t=1}^{4} y_t\right) + 20\left(\sum_{t=1}^{4} w_t\right)$$

در هر فصل حداکثر 40 قایق می‌توان با نیروی کار عادی تولید کرد:

$$x_t \le 40 \quad \forall t = 1, 2, 3, 4$$

تقاضای هر فصل باید برآورده شود:

فصل	تقاضا
1	40
2	60
3	75
4	25

$$10 + x_1 + y_1 \geq 40$$
$$w_1 + x_2 + y_2 \geq 60$$
$$w_2 + x_3 + y_3 \geq 75$$
$$w_3 + x_4 + y_4 \geq 25$$

نادرست

$$Min\ z = 400\left(\sum_{t=1}^{4} x_t\right) + 450\left(\sum_{t=1}^{4} y_t\right) + 20\left(\sum_{t=1}^{4} w_t\right)$$

تقاضای هر فصل باید برآورده شود:

فصل	تقاضا
1	40
2	60
3	75
4	25

$$10 + x_1 + y_1 = 40 + w_1$$

$$w_1 + x_2 + y_2 = 60 + w_2$$

$$w_2 + x_3 + y_3 = 75 + w_3$$

$$w_3 + x_4 + y_4 = 25 + w_4$$

$$x_t, y_t, w_t \geq 0 \qquad \forall t = 1, 2, 3, 4$$

جواب بهین

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 40, \qquad x_4^* = 25$$

$$y_1^* = 0, \quad y_2^* = 10, \quad y_3^* = 35, \quad y_4^* = 0$$

$$w_1^* = 10, \quad w_2^* = 0, \quad w_3^* = 0, \quad w_4^* = 0$$

$$z^* = 78450$$

فصل	تقاضا
1	40
2	60
3	75
4	25

سوال: آیا ممکن است در جواب بهین تعداد تولید با نیروی کار معمولی در یک فصل کمتر از 40 باشد ودر آن فصل از نیروی اضافه‌کار استفاده شود؟

$$Min\, z = 400\left(\sum_{t=1}^{4} x_t\right) + 450\left(\sum_{t=1}^{4} y_t\right) + 20\left(\sum_{t=1}^{4} w_t\right)$$

قرار دادن شرط روی موجودی نهایی انبار:

$$w_4 = 0$$

$$w_4 \geq 10$$

یک شرکت موتورسیکلت‌سازی قصد دارد اکنون برنامهٔ تولید را برای 4 دورهٔ آینده تعیین کند.

دوره	تقاضا
1	40
2	70
3	50
4	20

✓ تقاضا باید به موقع برآورده شود

4 نوع هزینه

1- هزینهٔ تولید هر موتورسیکلت: 400 دلار

2- هزینهٔ انبارداری از یک دوره تا دورهٔ بعد: 100 دلار

3- هزینهٔ هر واحد افزایش تولید از یک دوره به دورهٔ بعد: 700 دلار

4- هر واحد کاهش تولید از یک دوره به دورهٔ بعد: 600 دلار

✓ در دورهٔ قبل از دورهٔ اول، 50 موتورسیکلت تولید شده است

✓ موجودی انبار در ابتدای دورهٔ اول، برابر با صفر است.

✓ هدف تأمین به موقع تقاضاست به طوری که هزینهٔ کل مینیمم شود.

$t = 1, 2, 3, 4$

تعداد تولید موتورسیکلت در دورهٔ t	x_t
موجودی انبار در پایان دورهٔ t	y_t
میزان افزایش تولید از دورهٔ $t-1$ تا دورهٔ t	w'_t
میزان کاهش تولید از دورهٔ $t-1$ تا دورهٔ t	w''_t

$$Min\ z = 400\sum_{t=1}^{4} x_t + 100\sum_{t=1}^{4} y_t + 700\sum_{t=1}^{4} w'_t + 600\sum_{t=1}^{4} w''_t$$

دوره	تقاضا
1	40
2	70
3	50
4	20

$$0 + x_1 = 40 + y_1$$

$$y_1 + x_2 = 70 + y_2$$

$$y_2 + x_3 = 50 + y_3$$

$$y_3 + x_4 = 20 + y_4$$

$$x_1 - 50 \geq 0 \Rightarrow w_1' = x_1 - 50 \;\; and \;\; w_1'' = 0$$

$$x_1 - 50 \leq 0 \Rightarrow w_1' = 0 \;\; and \;\; w_1'' = -(x_1 - 50)$$

$$\boxed{x_1 - 50 = w_1' - w_1''}$$

$70 - 50$

$30 - 10$

$20 - 0$

$30 - 50$

$0 - 20$

$10 - 30$

$$Min\ z = 400\sum_{t=1}^{4} x_t + 100\sum_{t=1}^{4} y_t + 700\sum_{t=1}^{4} w_t' + 600\sum_{t=1}^{4} w_t''$$

محاسبهٔ افزایش و کاهش تولید

$$x_1 - 50 = w'_1 - w''_1$$

$$x_2 - x_1 = w'_2 - w''_2$$

$$x_3 - x_2 = w'_3 - w''_3$$

$$x_4 - x_3 = w'_4 - w''_4$$

محدودیت‌های علامت

$$x_t, y_t, w'_t, w''_t \geq 0$$

جواب بهین

$$x_1^* = 55, \quad x_2^* = 55, \quad x_3^* = 50, \quad x_4^* = 50, \quad z^* = 95000$$

دوره	تقاضا
1	40
2	70
3	50
4	20

سوال: فرض کنید شرکت موظف به تأمین به موقع تقاضا نباشد و بتواند تأمین تقاضا را حداکثر تا پایان دورهٔ چهارم به تعویق بیندازد اما به ازای هر دوره تأخیر در تأمین تقاضا، جریمه‌ای معادل ۱۱۰ دلار برای هر موتورسیکلت تحمیل گردد. مدل قبل را با توجه به شرایط جدید اصلاح و مدل جدید را با نرم‌افزار *LINDO* حل کنید.

مسألهٔ مالی چند دوره‌ای

فردی 100000 دلار سرمایه دارد و می‌خواهد راهکار سرمایه‌گذاری‌اش را برای سه سال آینده تعیین کند.

شرکت	سال 0	سال 1	سال 2	سال 3
A	$-x_A$ دلار	$+0.5x_A$ دلار	$+x_A$ دلار	0 دلار
B	0 دلار	$-x_B$ دلار	$+0.5x_B$ دلار	$+x_B$ دلار
C	$-x_C$ دلار	$+1.2x_C$ دلار	0 دلار	0 دلار
D	$-x_D$ دلار	0 دلار	0 دلار	$1.9x_D$ دلار
E	0 دلار	0 دلار	$-x_E$ دلار	$1.5x_E$ دلار

- ✓ فرد نمی‌خواهد بیشتر از 75000 دلار در هر شرکت سرمایه‌گذاری کند.
- ✓ فرد می‌تواند پولش را در بانک قرار دهد که سود بانک در هر سال معادل 8 درصد است.
- ✓ در هر سال سرمایهٔ بازگشتی می‌تواند بلافاصله مجدداً سرمایه‌گذاری شود.
- ✓ فرد نمی‌تواند برای سرمایه‌گذاری، پول قرض بگیرد، لذا میزان پرداختی در هر سال حداکثر به اندازهٔ پول نقد موجود است.

اندیس

شرکت $j = A, B, C, D, E$

سال $t = 0, 1, 2$

متغیر تصمیم

x_j میزان سرمایه‌گذاری در شرکت j

y_t میزان سرمایه‌گذاری در بانک در سال t

حداکثر 75000 دلار می‌توان در هر شرکت سرمایه‌گذاری کرد:

$$x_j \leq 75000 \quad \forall j = A, B, C, D, E$$

شرکت	سال 0	سال 1	سال 2	سال 3
A	$-x_A$ دلار	$+0.5x_A$ دلار	$+x_A$ دلار	0 دلار
B	0 دلار	$-x_B$ دلار	$+0.5x_B$ دلار	$+x_B$ دلار
C	$-x_C$ دلار	$+1.2x_C$ دلار	0 دلار	0 دلار
D	$-x_D$ دلار	0 دلار	0 دلار	$1.9x_D$ دلار
E	0 دلار	0 دلار	$-x_E$ دلار	$1.5x_E$ دلار

پرداختی = موجودی

سال صفر

$$100000 = \underbrace{x_A + x_C + x_D}_{} + y_0$$

سال اول

$$\underbrace{1.08y_0 + 0.5x_A + 1.2x_C}_{} = x_B + y_1$$

سال دوم

$$\underbrace{1.08y_1 + x_A + 0.5x_B}_{} = x_E + y_2$$

تابع هدف

$$Max\, z = 1.08y_2 + x_B + 1.9x_D + 1.5x_E$$

$$x_j, y_t \geq 0$$

سوال: اگر بانک نداشتیم، مدل چه تغییری می‌کرد؟

میزان پول نقدی که در سال t پس‌انداز می‌کنیم $\qquad y_t$

$$100000 = x_A + x_C + x_D + y_0$$

$$y_0 + 0.5x_A + 1.2x_C = x_B + y_1$$

$$y_1 + x_A + 0.5x_B = x_E + y_2$$

$$Max\ z = y_2 + x_B + 1.9x_D + 1.5x_E$$

سال 3	سال 2	سال 1	سال 0	شرکت
0 دلار	$+x_A$ دلار	$+0.5x_A$ دلار	$-x_A$ دلار	A
$+x_B$ دلار	$+0.5x_B$ دلار	$-x_B$ دلار	0 دلار	B
0 دلار	0 دلار	$+1.2x_C$ دلار	$-x_C$ دلار	C
$1.9x_D$ دلار	0 دلار	0 دلار	$-x_D$ دلار	D
$1.5x_E$ دلار	$-x_E$ دلار	0 دلار	0 دلار	E

سوال: چرا تابع هدف را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت؟

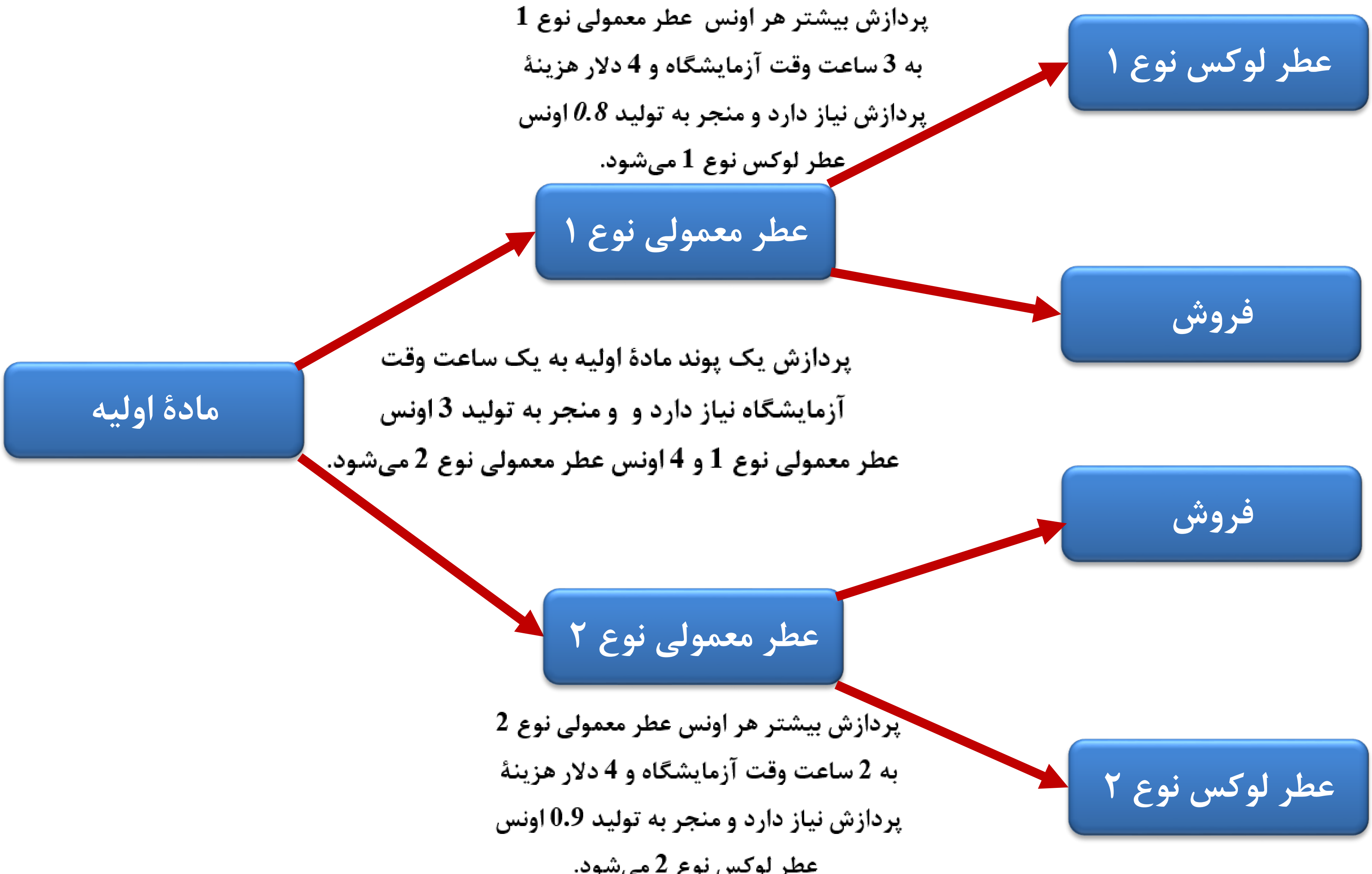
$$Max\ z = 100000 + 0.5x_A + 0.5x_B + 0.2x_C + 0.9x_D + 0.5x_E$$
$$+0.08y_0 + 0.08y_1 + 0.08y_2$$

$$Max\ z = 1.08y_2 + x_B + 1.9x_D + 1.5x_E$$
$$100000 = x_A + x_C + x_D + y_0$$
$$1.08y_0 + 0.5x_A + 1.2x_C = x_B + y_1$$
$$1.08y_1 + x_A + 0.5x_B = x_E + y_2$$

```
        1)          218500.0

VARIABLE                VALUE
      Y2              0.000000
      XB          30000.000000
      XD          40000.000000
      XE          75000.000000
      XA          60000.000000
      XC              0.000000
      Y0              0.000000
      Y1              0.000000
```

مسألهٔ فرآیند تولید



قیمت خرید هر پوند مادهٔ اولیه: ۳ دلار

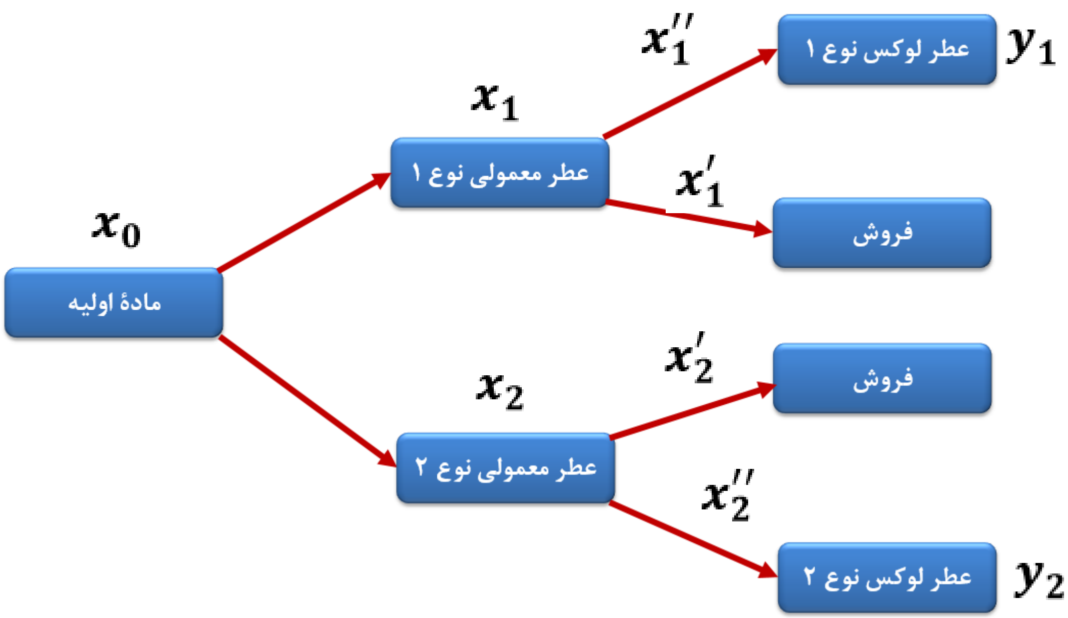
	عطر معمولی نوع ۱	عطر معمولی نوع ۲	عطر لوکس نوع ۱	عطر لوکس نوع ۲
قیمت فروش	۷ دلار	۶ دلار	۱۸ دلار	۱۴ دلار

۴۰۰۰ پوند مادهٔ اولیه و ۶۰۰۰ ساعت وقت آزمایشگاه در اختیار داریم.

یک *LP* برای تعیین استراتژی تولید با هدف ماکزیمم‌سازی سود ارائه کنید.

متغیرهای تصمیم

x_0	میزان مصرف مادهٔ اولیه (برحسب پوند)
x_1 x_2	میزان تولید عطر معمولی نوع 1 (برحسب اونس) میزان تولید عطر معمولی نوع 2 (برحسب اونس)
x'_1 x'_2	میزان فروش عطر معمولی نوع 1 (بر حسب اونس) میزان فروش عطر معمولی نوع 2 (برحسب اونس)
x''_1 x''_2	میزان عطر معمولی نوع 1 که برای پردازش بیشتر مصرف می‌شود (برحسب اونس) میزان عطر معمولی نوع 2 که برای پردازش بیشتر مصرف می‌شود (برحسب اونس)
y_1 y_2	میزان تولید و فروش عطر لوکس نوع 1 (برحسب اونس) میزان تولید و فروش عطر لوکس نوع 2 (بر حسب اونس)



x_0	میزان مصرف مادهٔ اولیه (برحسب پوند)
x_1 x_2	میزان تولید عطر معمولی نوع 1 (برحسب اونس) میزان تولید عطر معمولی نوع 2 (برحسب اونس)
x_1' x_2'	میزان فروش عطر معمولی نوع 1 (بر حسب اونس) میزان فروش عطر معمولی نوع 2 (برحسب اونس)
x_1'' x_2''	میزان عطر معمولی نوع 1 که برای پردازش بیشتر مصرف می‌شود (برحسب اونس) میزان عطر معمولی نوع 2 که برای پردازش بیشتر مصرف می‌شود (برحسب اونس)
y_1 y_2	میزان تولید و فروش عطر لوکس نوع 1 (برحسب اونس) میزان تولید و فروش عطر لوکس نوع 2 (بر حسب اونس)

قیمت خرید هر پوند مادهٔ اولیه: 3 دلار

پردازش بیشتر هر اونس عطر معمولی نوع 1 به 4 دلار هزینهٔ پردازش نیاز دارد

پردازش بیشتر هر اونس عطر معمولی نوع 2 به 4 دلار هزینهٔ پردازش نیاز دارد

	عطر معمولی نوع 1	عطر معمولی نوع 2	عطر لوکس نوع 1	عطر لوکس نوع 2
قیمت فروش	7 دلار	6 دلار	18 دلار	14 دلار

$$Max\ z = \underbrace{7x_1' + 6x_2'} + \underbrace{18y_1 + 14y_2} - \underbrace{3x_0} - \underbrace{4x_1'' - 4x_2''}$$

میزان مصرف مادهٔ اولیه (برحسب پوند)	x_0
میزان تولید عطر معمولی نوع 1 (برحسب اونس) میزان تولید عطر معمولی نوع 2 (برحسب اونس)	x_1 x_2
میزان فروش عطر معمولی نوع 1 (بر حسب اونس) میزان فروش عطر معمولی نوع 2 (برحسب اونس)	x'_1 x'_2
میزان عطر معمولی نوع 1 که برای پردازش بیشتر مصرف می‌شود (برحسب اونس) میزان عطر معمولی نوع 2 که برای پردازش بیشتر مصرف می‌شود (برحسب اونس)	x''_1 x''_2
میزان تولید و فروش عطر لوکس نوع 1 (برحسب اونس) میزان تولید و فروش عطر لوکس نوع 2 (بر حسب اونس)	y_1 y_2

4000 پوند مادهٔ اولیه در دسترس است:

$$x_0 \leq 4000$$

6000 ساعت وقت آزمایشگاه در دسترس است:

1- پردازش یک پوند مادهٔ اولیه به یک ساعت وقت آزمایشگاه نیاز دارد.
2- پردازش بیشتر هر اونس عطر معمولی نوع 1 به 3 ساعت وقت آزمایشگاه نیاز دارد.
3- پردازش بیشتر هر اونس عطر معمولی نوع 2 به 2 ساعت وقت آزمایشگاه نیاز دارد.

$$x_0 + 3x''_1 + 2x''_2 \leq 6000$$

x_0	میزان مصرف مادهٔ اولیه (برحسب پوند)
x_1 x_2	میزان تولید عطر معمولی نوع 1 (برحسب اونس) میزان تولید عطر معمولی نوع 2 (برحسب اونس)
x'_1 x'_2	میزان فروش عطر معمولی نوع 1 (بر حسب اونس) میزان فروش عطر معمولی نوع 2 (برحسب اونس)
x''_1 x''_2	میزان عطر معمولی نوع 1 که برای پردازش بیشتر مصرف می‌شود (برحسب اونس) میزان عطر معمولی نوع 2 که برای پردازش بیشتر مصرف می‌شود (برحسب اونس)
y_1 y_2	میزان تولید و فروش عطر لوکس نوع 1 (برحسب اونس) میزان تولید و فروش عطر لوکس نوع 2 (بر حسب اونس)

پردازش یک پوند مادهٔ اولیه منجر به تولید 3 اونس عطر معمولی نوع 1 و 4 اونس عطر معمولی نوع 2 می‌شود.

اونس عطر معمولی نوع 1 / پوند مادهٔ اولیه

$$\frac{3}{1} = \frac{?}{x_0} \Rightarrow x_1 = 3x_0$$

اونس عطر معمولی نوع 2 / پوند مادهٔ اولیه

$$\frac{4}{1} = \frac{?}{x_0} \Rightarrow x_2 = 4x_0$$

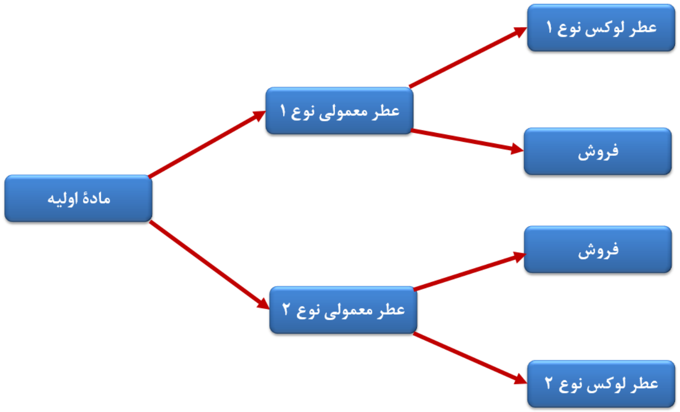
x_0	میزان مصرف مادهٔ اولیه (برحسب پوند)
x_1 x_2	میزان تولید عطر معمولی نوع 1 (برحسب اونس) میزان تولید عطر معمولی نوع 2 (برحسب اونس)
x'_1 x'_2	میزان فروش عطر معمولی نوع 1 (بر حسب اونس) میزان فروش عطر معمولی نوع 2 (برحسب اونس)
x''_1 x''_2	میزان عطر معمولی نوع 1 که برای پردازش بیشتر مصرف می‌شود (برحسب اونس) میزان عطر معمولی نوع 2 که برای پردازش بیشتر مصرف می‌شود (برحسب اونس)
y_1 y_2	میزان تولید و فروش عطر لوکس نوع 1 (برحسب اونس) میزان تولید و فروش عطر لوکس نوع 2 (بر حسب اونس)

عطر معمولی نوع 1 تولید شده، یا به فروش می‌رسد یا پردازش بیشتر می‌شود:

$$x_1 = x'_1 + x''_1$$

عطر معمولی نوع 2 تولید شده، یا به فروش می‌رسد یا پردازش بیشتر می‌شود:

$$x_2 = x'_2 + x''_2$$



میزان مصرف مادهٔ اولیه (برحسب پوند)	x_0
میزان تولید عطر معمولی نوع 1 (برحسب اونس) میزان تولید عطر معمولی نوع 2 (برحسب اونس)	x_1 x_2
میزان فروش عطر معمولی نوع 1 (بر حسب اونس) میزان فروش عطر معمولی نوع 2 (برحسب اونس)	x_1' x_2'
میزان عطر معمولی نوع 1 که برای پردازش بیشتر مصرف می‌شود (برحسب اونس) میزان عطر معمولی نوع 2 که برای پردازش بیشتر مصرف می‌شود (برحسب اونس)	x_1'' x_2''
میزان تولید و فروش عطر لوکس نوع 1 (برحسب اونس) میزان تولید و فروش عطر لوکس نوع 2 (بر حسب اونس)	y_1 y_2

پردازش بیشتر هر اونس عطر معمولی نوع 1 منجر به تولید *0.8* اونس عطر لوکس نوع 1 می‌شود.

اونس عطر لوکس نوع 1

اونس عطر معمولی نوع 1

$$\frac{0.8}{1} = \frac{?}{x_1''} \Rightarrow y_1 = 0.8x_1''$$

پردازش بیشتر هر اونس عطر معمولی نوع 2 منجر به تولید 0.9 اونس عطر لوکس نوع 2 می‌شود.

عطر لوکس نوع 2

عطر معمولی نوع 2

$$\frac{0.9}{1} = \frac{?}{x_2''} \Rightarrow y_2 = 0.9x_2''$$

میزان مصرف مادهٔ اولیه (برحسب پوند)	x_0
میزان تولید عطر معمولی نوع 1 (برحسب اونس) میزان تولید عطر معمولی نوع 2 (برحسب اونس)	x_1 x_2
میزان فروش عطر معمولی نوع 1 (بر حسب اونس) میزان فروش عطر معمولی نوع 2 (برحسب اونس)	x'_1 x'_2
میزان عطر معمولی نوع 1 که برای پردازش بیشتر مصرف می‌شود (برحسب اونس) میزان عطر معمولی نوع 2 که برای پردازش بیشتر مصرف می‌شود (برحسب اونس)	x''_1 x''_2
میزان تولید و فروش عطر لوکس نوع 1 (برحسب اونس) میزان تولید و فروش عطر لوکس نوع 2 (بر حسب اونس)	y_1 y_2

محدودیت علامت: $x_0, x_1, x_2, x'_1, x'_2, x''_1, x''_2, y_1, y_2 \geq 0$

جواب بهین:

$$x_0 = 4000$$

$$x_1 = 12000$$

$$x_2 = 16000$$

$$x'_1 = 12000, \quad x''_1 = 0, \quad y_1 = 0$$

$$x'_2 = 15000, \quad x''_2 = 1000, \quad y_2 = 900$$

$$Max\, z = 7x_1' + 6x_2' + 18y_1 + 14y_2 - 3x_0 - 4x_1'' - 4x_2''$$

$s.t.$

$$x_0 \leq 4000$$
$$x_0 + 3x_1'' + 2x_2'' \leq 4000$$
$$x_1 = 3x_0$$
$$x_2 = 4x_0$$
$$x_1 = x_1' + x_1''$$
$$x_2 = x_2' + x_2''$$
$$y_1 = 0.8x_1''$$
$$y_2 = 0.9x_2''$$
$$x_0, x_1, x_2, x_1', x_2', x_1'', x_2'', y_1, y_2 \geq 0$$

سوال: فرض کنید یک پوند مادهٔ اولیه را یا برای تولید عطر معمولی نوع 1 یا برای تولید عطر معمولی نوع 2 می‌توان استفاده کرد به طوری که اگر یک پوند مادهٔ اولیه برای تولید عطر معمولی نوع 1 پردازش شود، منجر به تولید 3 اونس عطر معمولی نوع 1 می‌گردد و اگر یک پوند مادهٔ اولیه برای تولید عطر معمولی نوع 2 پردازش شود، منجر به تولید 4 اونس عطر معمولی نوع 2 می‌شود. در این صورت، چه تغییراتی در فرمول‌بندی لازم است؟

میزان مصرف مادهٔ اولیه (برحسب پوند)	x_0
میزان مادهٔ اولیه‌ای که برای تولید عطر معمولی نوع 1 مصرف می‌شود (برحسب اونس)	$x_{0,1}$
میزان مادهٔ اولیه‌ای که برای تولید عطر معمولی نوع 2 مصرف می‌شود (برحسب اونس)	$x_{0,2}$
میزان تولید عطر معمولی نوع 1 (برحسب اونس)	x_1
میزان تولید عطر معمولی نوع 2 (برحسب اونس)	x_2
میزان فروش عطر معمولی نوع 1 (بر حسب اونس)	x'_1
میزان فروش عطر معمولی نوع 2 (برحسب اونس)	x'_2
میزان عطر معمولی نوع 1 که پردازش بیشتر می‌شود (برحسب اونس)	x''_1
میزان عطر معمولی نوع 2 که پردازش بیشتر می‌شود (برحسب اونس)	x''_2
میزان تولید و فروش عطر لوکس نوع 1 (برحسب اونس)	y_1
میزان تولید و فروش عطر لوکس نوع 2 (بر حسب اونس)	y_2

$$Max\ z = 7x_1' + 6x_2' + 18y_1 + 14y_2 - 3x_0 - 4x_1'' - 4x_2''$$

$s.t.$

$$x_0 \leq 4000$$

$$x_0 + 3x_1'' + 2x_2'' \leq 4000$$

$$x_1 = 3x_0$$

$$x_2 = 4x_0$$

$$x_2 = 4x_{0,2}$$

$$x_1 = 3x_{0,1}$$

$$x_0 = x_{0,1} + x_{0,2}$$

$$x_1 = x_1' + x_1''$$

$$x_2 = x_2' + x_2''$$

$$y_1 = 0.8x_1''$$

$$y_2 = 0.9x_2''$$

$$x_0, x_1, x_2, x_1', x_2', x_1'', x_2'', y_1, y_2 \geq 0$$

آشنایی با پکیج pyomo برای حل مدل‌های بهینه‌سازی

ممنون از توجه شما

خسته نباشید