«بسمه‌تعالی»

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)

درس بهینه‌سازی خطی | مدرس: دکتر هوشمند

فصل سوم: روش سیمپلکس

روش سیمپلکس توسط دانتزیگ در سال ۱۹۴۷ برای حل مسائل LP ارائه شد.

ابتدا این روش را روی یک مثال شرح می‌دهیم و سپس به بررسی منطق پشت گامهای این روش می‌پردازیم.

مثال: مسألهٔ زیر را با روش سیمپلکس حل کنید.

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$
$$s.t.$$
$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$
$$4x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 \leq 20$$
$$2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 8$$
$$x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

جواب: ابتدا مسأله را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$
$$s.t.$$
$$8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48$$
$$4x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 + s_2 = 20$$
$$2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + s_3 = 8$$
$$x_2 + s_4 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

نمایش سطر صفر را برای تابع هدف می‌نویسیم:

$$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$$

جواب شدنی پایه‌ای اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

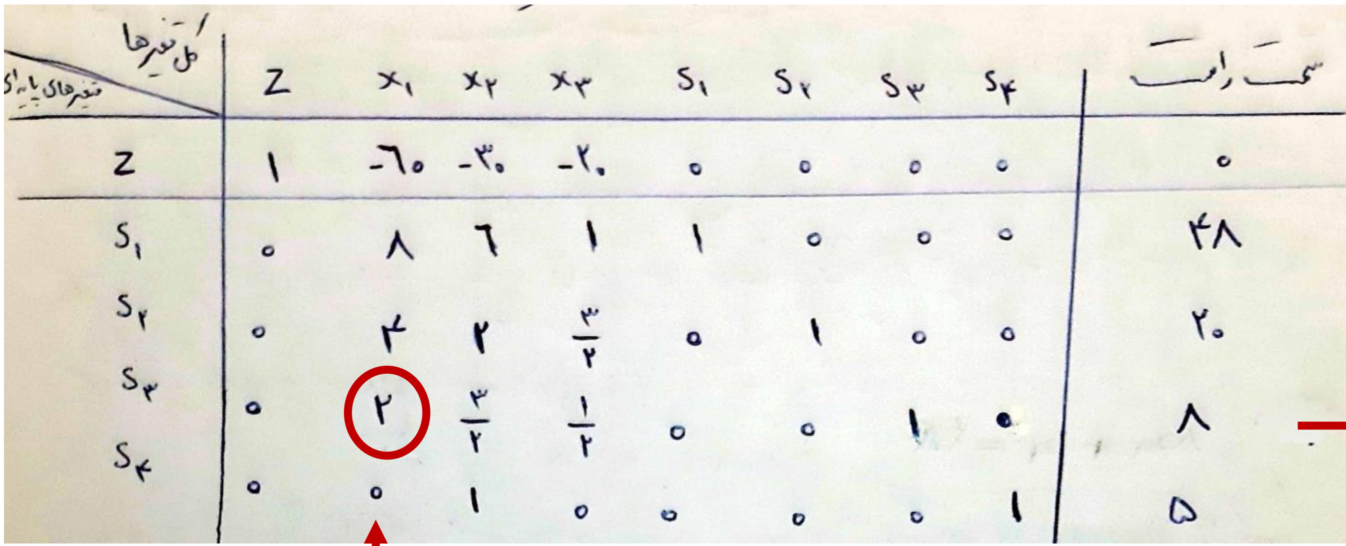
$$BV = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \quad NBV = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, s_1 = 48, \quad s_2 = 20, \quad s_3 = 8, \quad s_4 = 5$$

جدول سیمپلکس متناظر با جواب شدنی پایه‌ای اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48$$
$$4x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 + s_2 = 20$$
$$2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + s_3 = 8$$
$$x_2 + s_4 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$



کل متغیرها / متغیرهای پایه‌ای	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	سمت راست
z	۱	-۶۰	-۳۰	-۲۰	۰	۰	۰	۰	۰
s_1	۰	۸	۶	۱	۱	۰	۰	۰	۴۸
s_2	۰	۴	۲	۳/۲	۰	۱	۰	۰	۲۰
s_3	۰	۲	۳/۲	۱/۲	۰	۰	۱	۰	۸
s_4	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۵

$$\min\left\{\frac{\text{سمت راست}}{\text{عناصر اکیدا مثبت ستون وارد شونده}}\right\} = \min\left\{\frac{48}{8}, \frac{20}{4}, \frac{8}{2}\right\} = \frac{8}{2}$$

آزمون نسبت

جدول سیمپلکس متناظر با جواب شدنی پایه‌ای اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

متغیرهای پایه‌ای / کل متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	سمت راست
Z	۱	-۶۰	-۳۰	-۲۰	۰	۰	۰	۰	۰
S_1	۰	۸	۶	۱	۱	۰	۰	۰	۴۸
S_2	۰	۴	۲	۳/۲	۰	۱	۰	۰	۲۰
S_3	۰	۲	۳/۲	۱/۲	۰	۰	۱	۰	۸
S_4	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۵

متغیرهای پایه‌ای / کل متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	سمت راست
Z	۱	۰	۱۵	-۵	۰	۰	۳۰	۰	۲۴۰
S_1	۰	۰	۰	-۱	۱	۰	-۴	۰	۱۶
S_2	۰	۰	-۱	۱/۲	۰	۱	-۲	۰	۴
x_1	۰	۱	۳/۴	۱/۴	۰	۰	۱/۲	۰	۴
S_4	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۵

متغیرهای پایه‌ای / کل متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	سمت راست
Z	۱	۰	۵	۰	۰	۱۰	۱۰	۰	۲۸۰
S_1	۰	۰	-۲	۰	۱	۲	-۸	۰	۲۴
x_3	۰	۰	-۲	۱	۰	۲	-۴	۰	۸
x_1	۰	۱	۵/۴	۰	۰	-۱/۲	۳/۲	۰	۲
S_4	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۵

$s_1^* = 24, x_3^* = 8, x_1^* = 2, s_4^* = 5,\ z^* = 280$

$x_2^* = s_2^* = s_3^* = 0$

مثال: مسألهٔ زیر را با روش سیمپلکس حل کنید.

$$
\begin{aligned}
&\max z = 3x_1 + 5x_2\\
&s.t. 3x_1 + 2x_2 \le 18\\
&x_1 \le 4\\
&x_2 \le 6\\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

جواب: ابتدا مسأله را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$
\begin{aligned}
&\max z = 3x_1 + 5x_2\\
&s.t.\\
&3x_1 + 2x_2 + s_1 = 18\\
&x_1 + s_2 = 4\\
&x_2 + s_3 = 6\\
&x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

نمایش سطر صفر تابع هدف:

$$z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

جواب شدنی پایه‌ای اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$BV = \{s_1, s_2, s_3\},\ \ NBV = \{x_1, x_2\}$$

$$x_1 = x_2 = 0, s_1 = 18,\ \ s_2 = 4,\ \ s_3 = 6$$

جدول سیمپلکس متناظر با جواب شدنی پایه‌ای اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

کل متغیرها / متغیرهای پایه‌ای	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	سمت راست
Z	۱	-۳	-۵	۰	۰	۰	۰
s_1	۰	۳	۲	۱	۰	۰	۱۸
s_2	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۴
s_3	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۶

متغیرهای پایه \ متغیرها	Z	x۱	x۲	S۱	S۲	S۳	سمت راست
Z	۱	-۳	۰	۰	۰	۵	۳۰
S۱	۰	۳	۰	۱	۰	-۲	۶
S۲	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۴
x۲	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۶

متغیرهای پایه \ متغیرها	Z	x۱	x۲	S۱	S۲	S۳	سمت راست
Z	۱	۰	۰	۱	۰	۳	۳۶
x۱	۰	۱	۰	۱/۳	۰	-۲/۳	۲
S۲	۰	۰	۰	-۱/۳	۱	۲/۳	۲
x۲	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۶

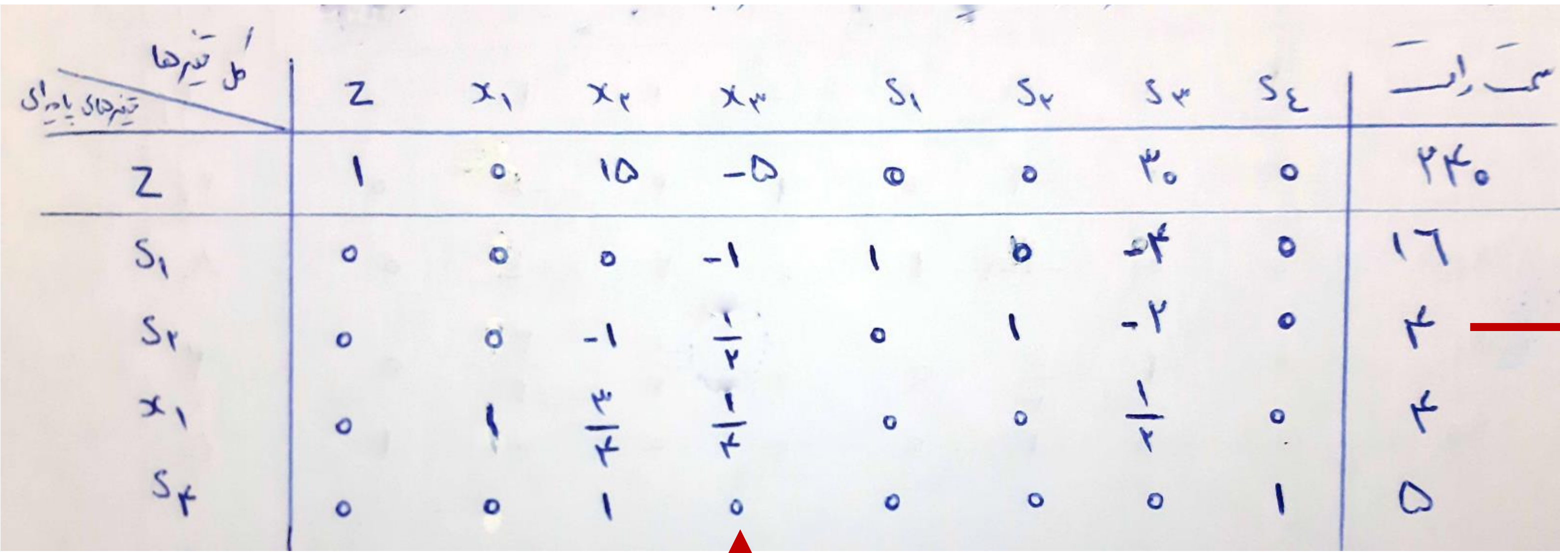
$x_1^* = 2, s_2^* = 2, x_2^* = 6, z^* = 36$

$x_3^* = s_1^* = s_3^* = 0$

چه منطقی پشت آزمون نسبت است؟

متغیرهای پایه‌ای \ کل متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	سمت راست
Z	۱	-۶۰	-۳۰	-۲۰	۰	۰	۰	۰	۰
s_1	۰	۸	۶	۱	۱	۰	۰	۰	۴۸
s_2	۰	۴	۲	$\frac{۳}{۲}$	۰	۱	۰	۰	۲۰
s_3	۰	۲	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۱	۰	۸
s_4	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۵

$8x_1 + s_1 = 48 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 48 - 8x_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \leq \frac{48}{8}$ $4x_1 + s_2 = 20 \quad \Rightarrow \quad s_2 = 20 - 4x_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \leq \frac{20}{4}$ $2x_1 + s_3 = 8 \quad \Rightarrow \quad s_3 = 8 - 2x_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \leq \frac{8}{2}$ $0x_1 + s_4 = 5 \quad \Rightarrow \quad s_4 = 5 \quad \Rightarrow$ محدودیتی روی x_1 نداریم	$\boldsymbol{x_1 \leq \frac{8}{2}}$



کل متغیرها / متغیرهای پایه‌ای	Z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	$S_۴$	سمت راست
Z	۱	۰	۱۵	-۵	۰	۰	۳۰	۰	۲۴۰
$S_۱$	۰	۰	۰	-۱	۱	۰	-۴	۰	۱۶
$S_۲$	۰	۰	-۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱	-۲	۰	۴
$x_۱$	۰	۱	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	۴
$S_۴$	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۵

$-x_3 + s_1 = 16 \Rightarrow \quad s_1 = 16 + x_3 \geq 0 \Rightarrow$ محدودیتی روی x_3 نداریم

$$\frac{1}{2}x_3 + s_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad s_2 = 4 - \frac{1}{2}x_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 \leq \frac{4}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{4}x_3 + x_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4 - \frac{1}{4}x_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 \leq \frac{4}{\frac{1}{4}}$$

$0x_3 + s_4 = 5 \quad \Rightarrow \quad s_4 = 5 \quad \Rightarrow$ محدودیتی روی x_3 نداریم

$$\boldsymbol{x_3 \leq \frac{4}{\frac{1}{2}}}$$

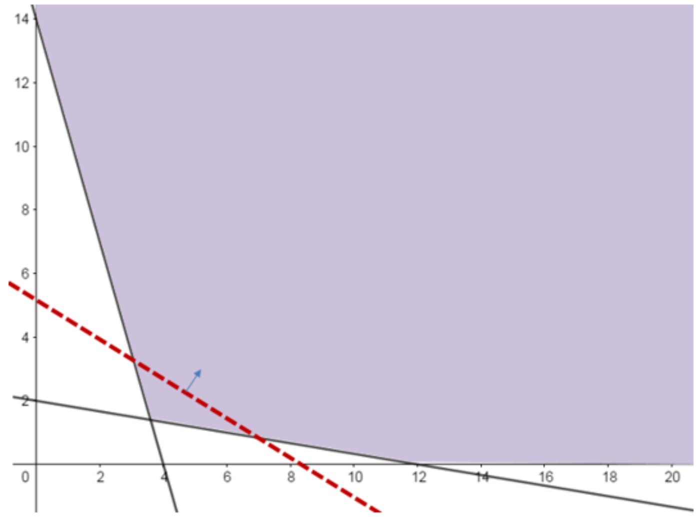
نکته: اگر آزمون نسبت برای چند متغیر برابر شود،یکی از آنها را به دلخواه برای خروج انتخاب می‌کنیم.

نکته: در شروع الگوریتم سیمپلکس، به دلیل آنکه مسأله استاندارد است، سمت راست جدول مثبت است و آزمون نسبت نیز تضمین می‌کند که از یک تکرار به تکرار بعدی، مقادیر سمت راست منفی نشود. پس **اگر در حین پیاده‌سازی الگوریتم، سمت راست جدولتان منفی شد، بدانید که یا در آزمون نسبت و یا در عملیات سطری مقدماتی اشتباه کرده‌اید.** **(منظور سمت راست متغیرهای پایه‌ای است نه سمت راست سطر صفر)**

نکته: در یک مسألهٔ Maxسازی (Minسازی)، هرکدام از متغیرهای غیرپایه‌ای که ضریبشان در سطر صفر منفی (مثبت) باشد، می‌توانند برای ورود به پایه انتخاب شوند. این انتخاب تضمین می‌کند که مقدار تابع هدف از یک جدول به جدول بعدی بدتر نشود.
البته الگوریتم سیمپلکس متغیری را وارد پایه می‌کند که منفی‌ترین (مثبت‌ترین) ضریب را در سطر صفر داشته باشد. این فقط یک فرض احتمالی برای بیشترین افزایش (کاهش) در مقدار تابع هدف است.

نکته: مقدار متغیری که وارد پایه می‌شود، در جدول بعدی دقیقاً برابر با آزمون نسبت است.

نکته: ضریب متغیرها را در سطر صفر Reduced cost می‌نامند. Reduced cost برای یک متغیر بیانگر آن است که اگر آن متغیر وارد پایه شود و مقدار یک بگیرد، مقدار تابع هدف چقدر کاهش می‌یابد.



بررسی حالات خاص در الگوریتم سیمپلکس

جواب بهین بیکران

فرض کنید که در یکی از تکرارهای الگوریــتم سیمپلکس با وضعیتی برخورد کنیم که متغیری غیرپایه-ای با ضریب کاهش هزینهٔ اکیداً مثبت (در مسألهٔ Min سازی) یا اکیداً منفی (در مسألهٔ Max سازی) برای ورود به پایه انتخاب شود اما طبق آزمون نسبت نتوان متغیری را برای خروج از پایه انتخاب کرد، یعنی همهٔ عناصر ستون وارد شوند، منفی یا صفر باشند.

در این صورت، نتیجه می‌گیریم که محدودیتی روی مقدار متغیر ورودی وجود ندارد و این متغیر می‌توان هر مقدار مثبت دلخواهی را اختیار کند.

این وضعیت در مسألهٔ Max سازی منجر به افزایش نامحدود تابع هدف و در مسألهٔ Minسازی منجر به کاهش نامحدود تابع هدف می‌شود و بنابراین، نتیجه می‌شود که:

مسأله جواب بهین بیکران دارد.

مثال: مسألهٔ زیر را با روش سیمپلکس حل کنید.

$$\begin{aligned}
&\max z = 36x_1 + 30x_2 - 3x_3 - 4x_4\\
&s.t.\\
&x_1 + x_2 - x_3 \le 5\\
&6x_1 + 5x_2 - x_4 \le 10\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}$$

جواب: ابتدا مسأله را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
&\max z = 36x_1 + 30x_2 - 3x_3 - 4x_4\\
&s.t.\\
&x_1 + x_2 - x_3 + s_1 = 5\\
&6x_1 + 5x_2 - x_4 + s_2 = 10\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2 \ge 0
\end{aligned}$$

نمایش سطر صفر تابع هدف:

$$z - 36x_1 - 30x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$$

جواب شدنی پایه‌ای اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$BV = \{s_1, s_2\},\ \ NBV = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$
$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,\ s_1 = 5,\ \ s_2 = 10$$

جدول سیمپلکس متناظر با جواب شدنی پایه‌ای اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

متغیرهای پایه‌ای \ متغیرها	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	سمت راست
z	۱	-۳۶	-۳۰	۳	۴	۰	۰	۰
s_1	۰	۱	۱	-۱	۰	۱	۰	۵
s_2	۰	۶	۵	۰	-۱	۰	۱	۱۰

متغیرهای پایه‌ای / کل متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	سمت راست
Z	1	0	0	3	-2	0	6	60
S_1	0	0	$\frac{1}{6}$	-1	$\frac{1}{6}$	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{10}{3}$
x_1	0	1	$\frac{5}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{3}$

متغیرهای پایه‌ای / کل متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	سمت راست
Z	1	0	2	-9	0	12	4	100
x_4	0	0	1	-6	1	6	-1	20
x_1	0	1	1	-1	0	1	0	5

متغیر x_3 پتانسیل افزایش مقدار تابع هدف را دارد. از سوی دیگر، می‌توان هر مقدار مثبت به اندازهٔ دلخواه بزرگی را اختیار کند. **پس مسأله جواب بهین بیکران دارد.**

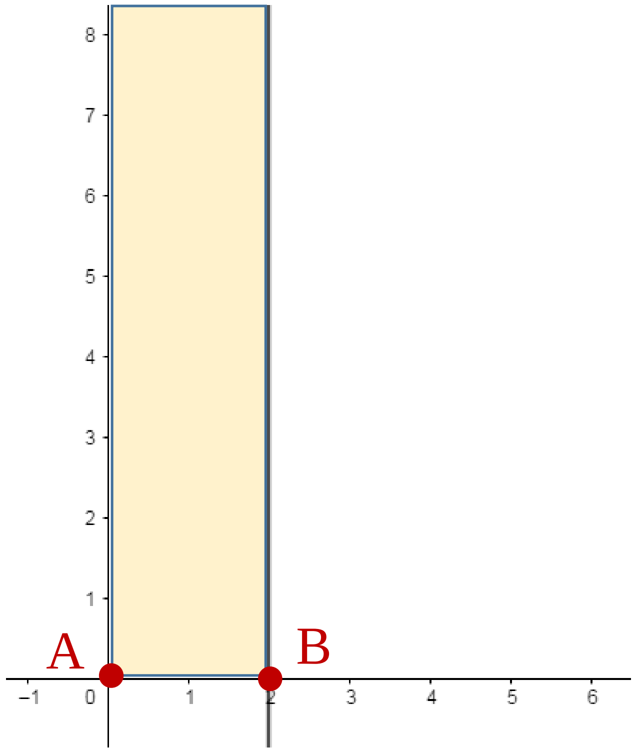
نکته: اگر در طول الگوریتم سیمپلکس به جدولی برسیم که در آن متغیری غیرپایه‌ای با ضریب کاهش هزینهٔ اکیداً منفی (در مسألهٔ Maxسازی) یا ضریب کاهش هزینهٔ اکیداً مثبت (در مسألهٔ Minسازی) وجود داشته باشد و همهٔ مؤلفات در ستون نظیر این متغیر منفی یا صفر باشند، می‌توان نتیجه گرفت که مسأله جواب بهین بیکران دارد.

مثال: در مراحل حل یک LP با هدف Maxسازی به جدول زیر رسیده‌ایم. اگرچه x_1 می‌تواند وارد پایه شود، اما از همین جدول می‌توان نتیجه گرفت که مسأله جواب بهین بیکران دارد. چرا؟

متغیرهای پایه‌ای \ متغیرها	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	سمت راست
Z	۱	-۳	-۲	۰	۰	۰
s_1	۰	۱	-۱	۱	۰	۳
s_2	۰	۲	۰	۰	۱	۴

برای روشن شدن بحث مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\max z = 10x_1 + x_2$$
$$s.t.$$
$$x_1 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



متناظر با نقطه A

BV	z	x_1	x_2	s_1	RHS
z	1	-10	-1	0	0
s_1	0	1	0	1	2

متناظر با نقطه B

BV	z	x_1	x_2	s_1	RHS
z	1	0	-1	10	20
x_1	0	1	0	1	2

تباهیدگی

یک LP استاندارد با m قید و n متغیر با ناحیهٔ شدنی $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

قبلاً توضیح دادیم که:

نقطهٔ گوشه‌ای p را تباهیده گوییم اگر از آن بیش از n ابرصفحه گذشته باشد.

به طور معادل، یک جواب شدنی پایه‌ای را تباهیده گوییم اگر مقدار حداقل یکی از متغیرهای متعلق به پایه برابر با صفر باشد.

مسأله‌ای که حداقل یک جواب شدنی پایه‌ای (نقطه گوشه‌ای) تباهیده داشته باشد، تبهگن نام دارد.

پس جدولی که حداقل یکی از مقادیر سمت راست آن صفر باشد، متناظر با یک جواب شدنی پایه‌ای تباهیده است.

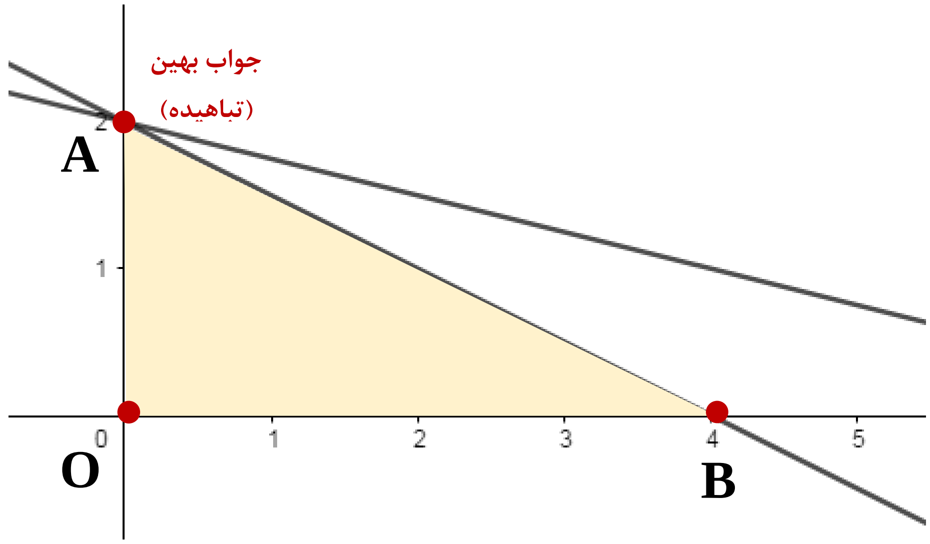
چه موقع با یک جدول تباهیده مواجه می‌شویم؟

۱- ممکن است در مسألهٔ اصلی (پس از استانداردسازی)، حداقل یکی از مقادیر سمت راست صفر باشد که در این صورت اولین جدول تباهیده خواهد بود.

۲- ممکن است تباهیدگی در جدولهای میانی پیش بیاید. در واقع، اگر در آزمون نسبت، نسبت مینیمم یکتا نباشد، ما به دلخواه متغیر خارج شونده را تعیین می‌کنیم. در این صورت، جدول بعدی تباهیده خواهد شد.

مثال: LP زیر را با روش سیمپلکس حل و وضعیت تباهیدگی را در آن تحلیل کنید.

$$\min z = -3x_1 - 9x_2$$
$$s.t.$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



جواب: ابتدا مسأله را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$\min z = -3x_1 - 9x_2$$
$$s.t.$$
$$x_1 + 4x_2 + s_1 = 8$$
$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

نمایش سطر صفر تابع هدف:

$$z + 3x_1 + 9x_2 = 0$$

جواب شدنی پایه‌ای اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$BV = \{s_1, s_2\},\ \ NBV = \{x_1, x_2\}$$
$$x_1 = x_2 = 0,\ s_1 = 8,\ \ s_2 = 4$$

(متناظر با نقطهٔ O)
آزمون نسبت یکتا نیست و لذا جدول بعدی تباهیده خواهد شد.

BV \ متغیرها	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	۱	۳	۹	۰	۰	۰
s_1	۰	۱	۴	۱	۰	۸
s_2	۰	۱	۲	۰	۱	۴

(متناظر با نقطهٔ A)
برندهٔ آزمون نسبت صفر است پس در جدول بعدی در همین نقطهٔ گوشه‌ای فعلی می‌مانیم.

BV \ متغیرها	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	۱	$\frac{3}{4}$	۰	$\frac{-9}{4}$	۰	۱۸-
x_2	۰	$\frac{1}{4}$	۱	$\frac{1}{4}$	۰	۲
s_2	۰	$\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	۱	۰

(متناظر با نقطهٔ A)

BV \ متغیرها	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	۱	۰	۰	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	۱۸-
x_2	۰	۰	۱	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۲
x_1	۰	۱	۰	۱-	۲	۰

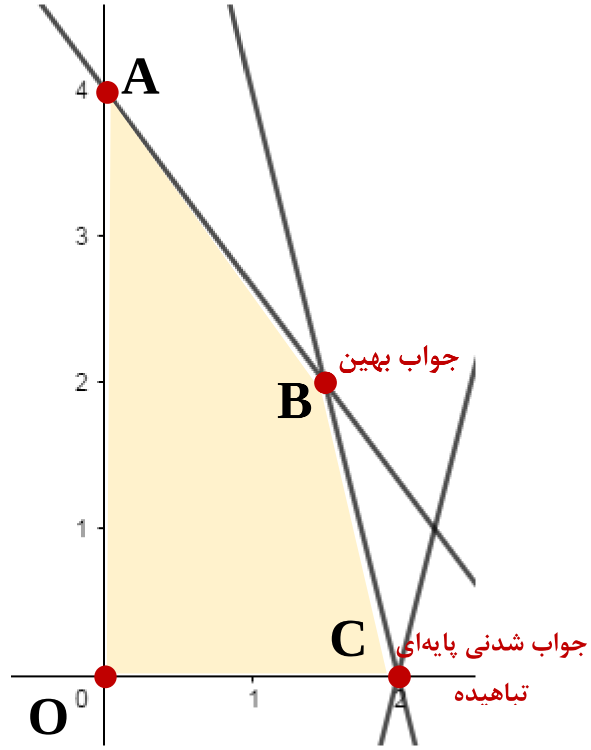
جدول دوم و سوم هر دو متناظر یک نقطهٔ گوشه‌ای یکسان هستند

$$(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0,2,0,0)$$

یعنی ما از جدول دوم به جدول سوم رفته‌ایم اما پیشرفتی در مقدار تابع هدف نداشته‌ایم.

مثال: LP زیر را با روش سیمپلکس حل و تحلیل کنید که تباهیدگی چگونه ایجاد و برطرف می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&\min z = -2x_1 - x_2 \\
&s.t. \\
&4x_1 + 3x_2 \le 12 \\
&4x_1 + x_2 \le 8 \\
&4x_1 - x_2 \le 8 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



جواب: ابتدا مسأله را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$
\begin{aligned}
&\min z = -2x_1 - x_2 \\
&s.t. \\
&4x_1 + 3x_2 + s_1 = 12 \\
&4x_1 + x_2 + s_2 = 8 \\
&4x_1 - x_2 + s_3 = 8 \\
&x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \ \ge 0
\end{aligned}
$$

نمایش سطر صفر تابع هدف:

$$z + 2x_1 + x_2 = 0$$

جواب شدنی پایه‌ای اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$BV = \{s_1, s_2, s_3\},\ \ NBV = \{x_1, x_2\}$$
$$x_1 = x_2 = 0,\ s_1 = 12,\ \ s_2 = 8, s_3 = 8$$

(متناظر با نقطهٔ O)

آزمون نسبت یکتا نیست و لذا جدول بعدی تباهیده خواهد شد.

BV \ متغیرها	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	۱	۲	۱	۰	۰	۰	۰
S_1	۰	۴	۳	۱	۰	۰	۱۲
S_2	۰	۴	۱	۰	۱	۰	۸
S_3	۰	۴	-۱	۰	۰	۱	۸

(متناظر با نقطهٔ C)

برندهٔ آزمون نسبت صفر نیست. جدول بعدی متناظر با یک نقطهٔ گوشه‌ای جدید است.

BV \ متغیرها	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۰	-۴
S_1	۰	۰	۲	۱	-۱	۰	۴
x_1	۰	۱	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	۲
S_3	۰	۰	-۲	۰	-۱	۱	۰

(متناظر با نقطهٔ B)

BV \ متغیرها	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	۱	۰	۰	$-\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	۰	-۵
x_2	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۲
x_1	۰	۱	۰	$-\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	۰	$\frac{۳}{۲}$
S_3	۰	۰	۰	۱	-۲	۱	۴

مثال‌های قبل نشان می‌دهند که اگر جواب شدنی پایه‌ای نظیر یک جدول تباهیده باشد، تباهیدگی ممکن است در جدول بعدی رفع شود و یا ممکن است جدول بعدی نیز تباهیده باشد.

جواب بهین دگرین

فرض کنید در جدول نهایی (جدول بهین) ضریب **کاهش هزینهٔ یکی از متغیرهای غیرپایه‌ای (مثلاً x_j) صفر باشد** که به این معنی است که اگر این متغیر وارد پایه شود، صفر واحد تغییر در تابع هدف ایجاد می‌کند (به عبارت دیگر تغییری ایجاد نمی‌کند). پس مقدار تابع هدف در جدول بعدی نیز برابر با z^* خواهد بود.

مثال: جدول بهین مسألهٔ زیر داده شده است. برای آن چهار جواب بهین گوشه‌ای بیابید.

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$
$$s.t.$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 \leq 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

پس از حل مسألهٔ فوق با روش سیمپلکس، **جدول بهینه** به صورت زیر به دست می‌آید که متناظر با نقطهٔ گوشه‌ای بهینهٔ $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s_1^*, s_2^*, s_3^*) = \left(0,0,\frac{10}{3},0,5,1\right)$ و $z^* = 10$ است.

متغیرهای غیرپایه‌ای با

ضریب کاهش هزینهٔ صفر

BV / متغیرها	Z	x۱	x۲	x۳	S۱	S۲	S۳	RHS
Z	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱۰
x۳	۰	۱/۳	۲/۳	۱	۱/۳	۰	۰	۱۰/۳
S۲	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۵
S۳	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱

با ورود متغیر غیرپایه‌ای x_2 (که ضریب کاهش هزینهٔ صفر دارد)، به جدول زیر می‌رسیم که متناظر با نقطهٔ گوشه‌ای بهینهٔ $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s_1^*, s_2^*, s_3^*) = (0,5,0,0,0,1)$ و $z^* = 10$ است:

BV / متغیرها	Z	x۱	x۲	x۳	S۱	S۲	S۳	RHS
Z	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱۰
x۳	۰	-۱/۳	۰	۱	۱/۳	-۲/۳	۰	۰
x۲	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۵
S۳	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱

با ورود متغیر غیرپایه‌ای x_1 (که ضریب کاهش هزینهٔ صفر دارد)، به جدول زیر می‌رسیم که متناظر با نقطهٔ گوشه‌ای بهینهٔ $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s_1^*, s_2^*, s_3^*) = \left(1,4,\frac{1}{3},0,0,0\right)$ و $z^* = 10$ است:

BV / متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	0	0	0	1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	10
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_2	0	0	1	0	0	1	-1	4
x_1	0	1	0	0	0	0	1	1

با ورود متغیر غیرپایه‌ای s_2 (که ضریب کاهش هزینهٔ صفر دارد)، به جدول زیر می‌رسیم که متناظر با نقطهٔ گوشه‌ای بهینهٔ $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s_1^*, s_2^*, s_3^*) = (1,0,3,0,4,0)$ و $z^* = 10$ است:

BV / متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	0	0	0	1	0	0	10
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	3
s_2	0	0	1	0	0	1	-1	4
x_1	0	1	0	0	0	0	1	1

قضیه: مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\min z = c^T x$$
$$s.t. \qquad Ax = b$$
$$\qquad\quad x \geq 0$$

فرض کنید $\hat{x}^*$ و $\bar{x}^*$ دو جواب بهینه با مقدار هدف z^* برای مسألهٔ فوق باشند. آنگاه هر ترکیب خطی محدب از $\hat{x}^*$ و $\bar{x}^*$ نیز یک جواب بهین برای مسأله است.

اثبات: باید نشان دهیم به ازای هر $0 < \lambda < 1$، بردار $\lambda\hat{x}^* + (1-\lambda)\bar{x}^*$ نیز بهین است.

پس دو مورد را باید ثابت کنیم:

۱- $\lambda\hat{x}^* + (1-\lambda)\bar{x}^*$ یک جواب شدنی برای مسأله است (در قیود صدق می‌کند)

۲- مقدار تابع هدف مسأله به ازای جواب $\lambda\hat{x}^* + (1-\lambda)\bar{x}^*$ برابر با z^* است.

مورد اول به وضوح برقرار است. زیرا $\hat{x}^*$ و $\bar{x}^*$ داخل ناحیهٔ شدنی هستند و می‌دانیم ناحیهٔ شدنی LP یک مجموعهٔ محدب است. پس هر ترکیب خطی محدب از $\hat{x}^*$ و $\bar{x}^*$ داخل ناحیهٔ شدنی خواهد بود.

برای مورد دوم، می‌دانیم که $c^T\hat{x}^* = z^*$ و $c^T\bar{x}^* = z^*$ پس مقدار تابع هدف به ازای جواب $\lambda\hat{x}^* + (1-\lambda)\bar{x}^*$ برابر است با:

$$c^T\left(\lambda\hat{x}^* + (1-\lambda)\bar{x}^*\right) = \lambda c^T\hat{x}^* + (1-\lambda)c^T\bar{x}^* = \lambda z^* + (1-\lambda)z^* = z^*$$

حالت کلی‌تر قضیه قبل:

قضیه: مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید:

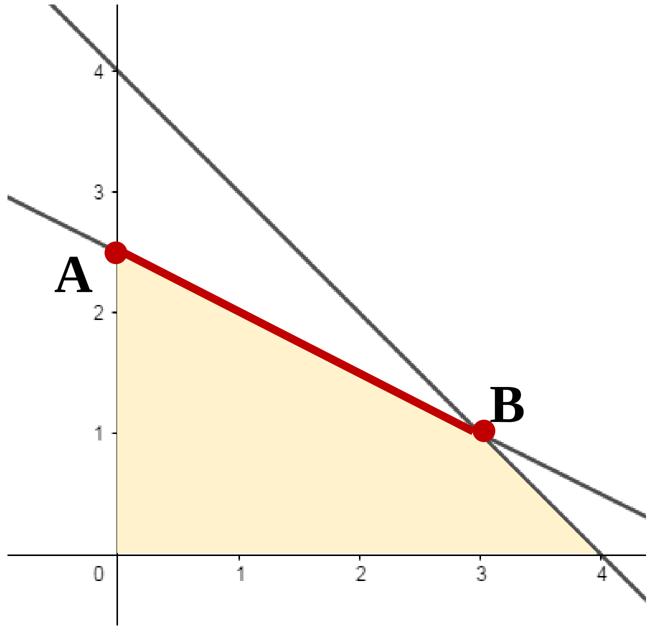
$$
\begin{aligned}
\min z &= c^T x \\
s.t. \qquad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

فرض کنید $x^{*(1)}$ و ... و $x^{*(k)}$، k جواب بهینه با مقدار هدف z^* برای مسألهٔ فوق باشند. آنگاه هر ترکیب خطی محدب از $x^{*(1)}$ و ... و $x^{*(k)}$ نیز یک جواب بهین برای مسأله است. به عبارت دیگر هر نقطه $\lambda_1 x^{*(1)} + \cdots + \lambda_k x^{*(k)}$ که $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ و $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ نیز جواب بهین برای مسأله است.

اثبات: مشابه قبل اثبات کنید.

مثال: همهٔ جواب‌های بهین مسألهٔ زیر را یک بار با روش ترسیمی و بار دیگر با روش سیمپلکس بیابید.

$$\max z = 2x_1 + 4x_2$$
$$s.t.$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$\text{A:} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \quad \text{B:} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z^* = 10$$

$$\text{مجموعهٔ همهٔ جوابهای بهین} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} : \ 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

جدول بهین در روش سیمپلکس به صورت زیر است:

BV	Z	$\boxed{x_1}$	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	1	$\boxed{0}$	0	2	0	10
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
S_2	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

متناظر با نقطهٔ گوشه‌ای A

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ s_1^* \\ s_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

متغیرها / BV	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	۱	۰	۰	۲	۰	۱۰
x_2	۰	۰	۱	۱	-۱	۱
x_1	۰	۱	۰	-۱	۲	۳

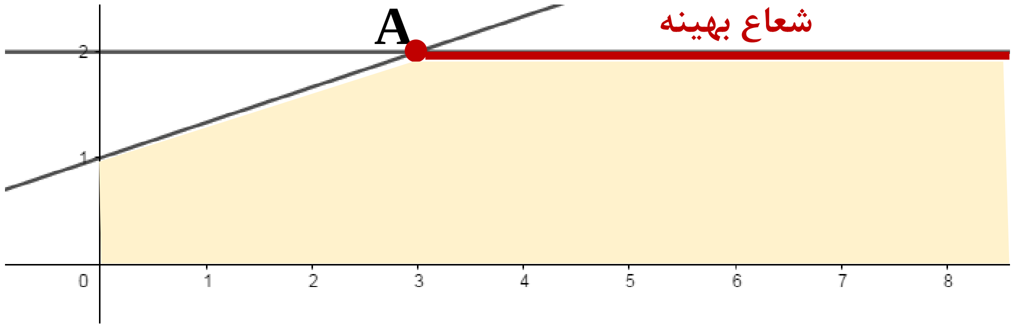
متناظر با نقطهٔ گوشه‌ای B

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ s_1^* \\ s_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

جدول سیمپلکس نقاط بهین گوشه‌ای A و B می‌دهد.

مجموعهٔ همهٔ جوابهای بهین $= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} :\ 0 \le \lambda \le 1 \right\}$

مثال: همهٔ جواب‌های بهین مسألهٔ زیر را یک بار با روش ترسیمی و بار دیگر با روش سیمپلکس بیابید.



$$\max z = x_2$$
$$s.t.$$
$$-x_1 + 3x_2 \le 3$$
$$x_2 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$
$$\text{A}: \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad , \quad z^* = 2$$

مجموعهٔ همهٔ جوابهای بهین $= \left\{ \begin{pmatrix} 3+\lambda \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda \ge 0 \right\}$

جدول بهین در روش سیمپلکس به صورت زیر است:

متناظر با نقطهٔ گوشه‌ای A

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ s_1^* \\ s_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

متغیرها / BV	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	۱	۰	۰	$\boxed{۰}$	۱	۲
x_2	۰	۰	۱	۰	۱	۲
x_1	۰	۱	۰	-۱	۳	۳

یک متغیر غیرپایه‌ای با ضریب کاهش هزینهٔ صفر برای ورود داریم اما متغیر خروجی نداریم. پس شعاع بهینه داریم.

متغیر s_1 برای ورود انتخاب شده اما همهٔ مؤلفات ستون آن منفی و صفر هستند. این بدین معنی است که متغیر s_1 می‌تواند هر مقدار دلخواهی را بگیرد بدون آنکه مقدار سایر متغیرهای داخل پایه منفی گردد.

$$s_2 = 0$$
$$x_2 + 0s_1 = 2 \implies x_2 = 2$$
$$x_1 - s_1 = 3 \implies x_1 = 3 + s_1$$

با دادن مقدار دلخواه و مثبت r به متغیر s_1 به جواب بهین زیر می‌رسیم:

$$B = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ s_1^* \\ s_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+r \\ 2 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$$

مجموعهٔ همهٔ جوابهای بهین $= \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \geq 0 \right\}$

برای شروع الگوریتم سیمپلکس، به ازای هر قید به یک متغیر پایه‌ای نیاز داریم. این متغیر باید در آن قید ضریب یک و در سایر قیود ضریب صفر داشته باشد.

۱- اگر پس از مثبت کردن سمت راست LP، همهٔ قیود به صورت $\leq$ باشند، برای استانداردسازی، متغیر کمبود s_i به قیود اضافه و به عنوان پایهٔ اولیه در نظر گرفته می‌شوند.

۲- اما اگر قیود به صورت $\geq$ یا $=$ باشند، برای تشکیل پایهٔ اولیه لازم است از روش Mبزرگ یا دوفازی استفاده گردد.

روش M بزرگ

متغیر مصنوعی (Artificial variable)

فرض کنید قید iاُم مسأله به صورت $\geq$ باشد:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq \underbrace{b_i}_{\text{نامنفی}}$$

قید فوق به صورت زیر استاندارد می‌شود:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - e_i = b_i$$

متغیر مصنوعی a_i را به این سطر اضافه می‌کنیم:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - e_i + \boldsymbol{a_i} = b_i$$

اگر قید iاُم مسأله به صورت $=$ باشد:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \underbrace{b_i}_{\text{نامنفی}}$$

متغیر مصنوعی a_i را به این سطر اضافه می‌کنیم:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + \boldsymbol{a_i} = b_i$$

$\boldsymbol{a_i \geq 0}$ را نیز به محدودیت‌های علامت اضافه می‌کنیم.

اضافه کردن متغیر مصنوعی به محدودیت‌ها باعث بزرگ شدن ناحیهٔ شدنی می‌شود. به طوری که برخی از نقاط که برای مسألهٔ اصلی نشدنی هستند برای مسألهٔ جدید شدنی خواهند شد.

مثلاً قید زیر را در نظر بگیرید:

جواب $x_1 = 1$، $x_2 = 0$ و $e_1 = 0$ برای این قید که قید مسألهٔ اصلی است نشدنی است.

$$3x_1 - 2x_2 - e_1 = 10$$

اما همین جواب به کمک $a_1 = 7$ برای قید دوم شدنی است.

$$3x_1 - 2x_2 - e_1 + a_1 = 10$$

پس برای تشکیل پایهٔ اولیه از متغیرهای مصنوعی استفاده می‌کنیم، اما برای آنکه روند الگوریتم سیمپلکس را به سمت یافتن **جواب‌های شدنی برای مسألهٔ اصلی** سوق دهیم، لازم است مقدار متغیرهای مصنوعی را در تابع هدف جریمه کنیم به طوری که الگوریتم به سمت صفر کردن مقدار متغیرهای مصنوعی پیش برود.

بنابراین با فرض آنکه M یک عدد مثبت و به اندازهٔ کافی بزرگ است، یک عبارت جریمه به صورت زیر به تابع هدف مسألهٔ جدید اضافه می‌کنیم:

عبارت جریمه در مسألهٔ Minسازی	Ma_i
عبارت جریمه در مسألهٔ Maxسازی	$-Ma_i$

مسألهٔ جدید را با روش سیمپلکس حل می‌کنیم. اگر در جواب بهین آن همهٔ متغیرهای مصنوعی مقدار صفر اختیار کنند، همان جواب برای مسألهٔ اصلی نیز بهین است. در غیر این صورت، مسألهٔ اصلی نشدن است.

مثال: مسألهٔ زیر را با روش M بزرگ حل کنید.

<table>
<tr>
<td>$\min z = 2x_1 + 3x_2$
$s.t.$
$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 4$
$x_1 + 3x_2 \geq 20$
$x_1 + x_2 = 10$
$x_1, x_2 \geq 0$</td>
<td>$\min z = 2x_1 + 3x_2$
$s.t.$
$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + s_1 = 4$
$x_1 + 3x_2 - e_2 = 20$
$x_1 + x_2 = 10$
$x_1, x_2, s_1, e_2 \geq 0$

مسألهٔ استاندارد
(مسألهٔ اصلی)</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>$\min z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3$
$s.t.$
$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + s_1 = 4$
$x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 20$
$x_1 + x_2 + a_3 = 10$
$x_1, x_2, s_1, e_2, a_2, a_3 \geq 0$

مسألهٔ جدید</td>
</tr>
</table>

مسألهٔ جدید را حل می‌کنیم.

نمایش سطر صفر تابع هدف مسألهٔ جدید:

$$z - 2x_1 - 3x_2 - Ma_2 - Ma_3 = 0$$

BV / متغیرها	Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
Z	۱	-۲	-۳	۰	۰	-M	-M	۰
s_1	۰	۱/۲	۱/۴	۱	۰	۰	۰	۴
a_2	۰	۱	۳	۰	-۱	۱	۰	۲۰
a_3	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱۰

اصلاح جدول را یادتان نرود...

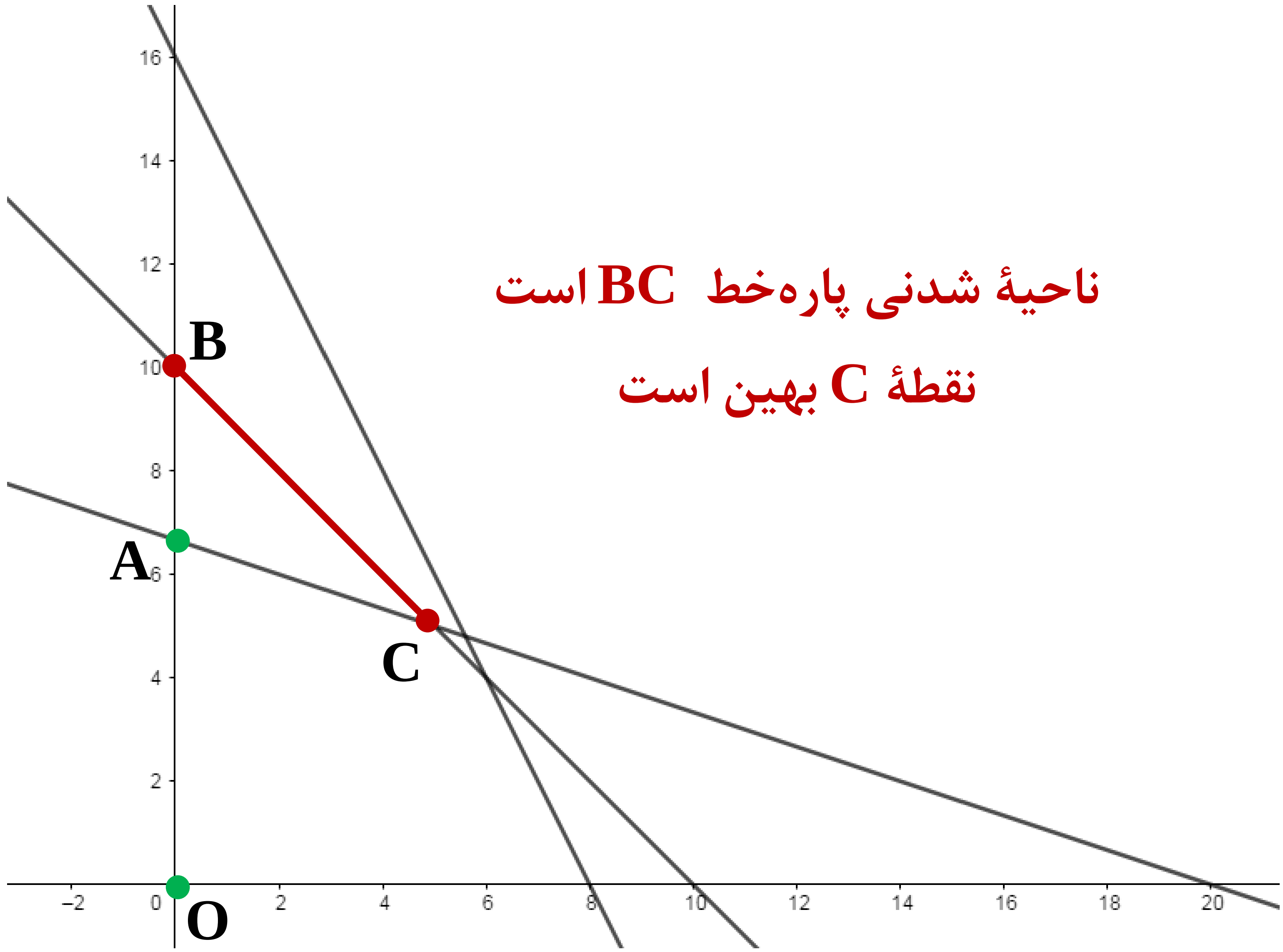
BV / متغیرها	Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
Z	۱	-۲+۲M	-۳+۴M	۰	-M	۰	۰	۳۰M
s_1	۰	۱/۲	۱/۴	۱	۰	۰	۰	۴
a_2	۰	۱	۳	۰	-۱	۱	۰	۲۰
a_3	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱۰

BV \ متغیرها	Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
Z	1	$\frac{-3+2M}{3}$	0	0	$\frac{M-3}{3}$	$\frac{3-4M}{3}$	0	$\frac{10M+60}{3}$
s_1	0	$\frac{5}{12}$	0	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{-1}{12}$	0	$\frac{7}{3}$
x_2	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$
a_3	0	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$

BV \ متغیرها	Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
Z	1	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1-2M}{2}$	$\frac{3-2M}{2}$	25
s_1	0	0	0	1	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-5}{8}$	$\frac{1}{4}$
x_2	0	0	1	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	5
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5

چون در جواب بهین مسألهٔ جدید همهٔ متغیرهای مصنوعی مقدار صفر گرفته‌اند، این جواب برای مسألهٔ اصلی نیز بهین است.

$$x_1^* = 5, x_2^* = 5, s_1^* = \frac{1}{4}, e_2^* = 0, z^* = 25$$


ناحیۀ شدنی پاره‌خط BC است
نقطۀ C بهین است
B
A
C
O
16
14
12
10
8
6
4
2
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

مثال: مسألهٔ زیر را با روش سیمپلکس حل کنید.

$\min z = 2x_1 + 3x_2$ $s.t.$ $2x_1 + x_2 \le 1$ $x_1 + 3x_2 \ge 36$ $x_1, x_2 \ge 0$	$\min z = 2x_1 + 3x_2$ $s.t.$ $2x_1 + x_2 + s_1 = 1$ $x_1 + 3x_2 - e_2 = 36$ $x_1, x_2, s_1, e_2 \ge 0$ **مسألهٔ استاندارد** **(مسألهٔ اصلی)**
	$\min z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2$ $s.t.$ $2x_1 + x_2 + s_1 = 1$ $x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 36$ $x_1, x_2, s_1, e_2, a_2 \ge 0$ **مسألهٔ جدید**

نمایش سطر صفر تابع هدف مسألهٔ جدید:

$$z - 2x_1 - 3x_2 - Ma_2 = 0$$

BV \ متغیرها	z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	RHS
z	۱	-۲	-۳	۰	۰	-M	۰
s_1	۰	۲	۱	۱	۰	۰	۱
a_2	۰	۱	۳	۰	-۱	۱	۳۶

اصلاح جدول را یادتان نرود...

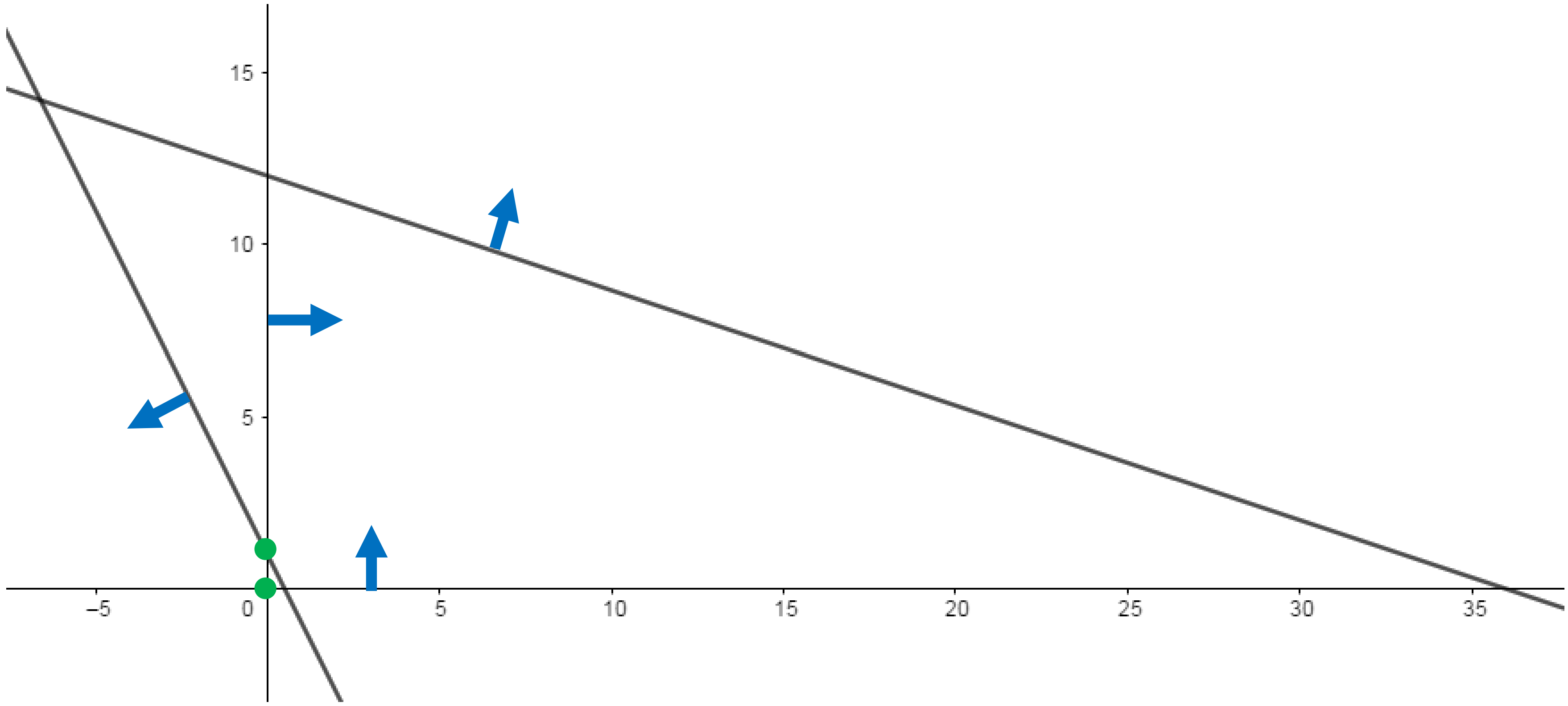
BV \ متغیرها	z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	RHS
z	۱	M-۲	۳M-۳	۰	-M	۰	۳۶M
s_1	۰	۲	۱	۱	۰	۰	۱
a_2	۰	۱	۳	۰	-۱	۱	۳۶

BV \ متغیرها	z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	RHS
z	۱	-۵M+۴	۰	-۳M+۳	-M	۰	۳+۳۳M
x_2	۰	۲	۱	۱	۰	۰	۱
a_2	۰	-۵	۰	-۳	-۱	۱	۳۳

جواب فوق بیانگر جواب بهین مسألهٔ جدید است که در آن

$$x_2^* = 1, a_2^* = 33, x_1^* = s_1^* = e_2^* = 0, , z^* = 3 + 33M$$

چون $a_2^* > 0$ پس **مسألهٔ اصلی نشدنی است.**


15
10
5
−5
0
5
10
15
20
25
30
35

مثال: مسألة زیر را با روش سیمپلکس حل کنید.

$\max z = x_3 + x_2$ $s.t.$ $x_1 + x_2 \leq 1$ $x_2 \geq 2$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$\max z = x_3 + x_2$ $s.t.$ $x_1 + x_2 + s_1 = 1$ $x_2 - e_2 = 2$ $x_1, x_2, x_3, s_1, e_2 \geq 0$ **مسألهٔ استاندارد (مسألهٔ اصلی)**
	$\max z = x_3 + x_2 - Ma_2$ $s.t.$ $x_1 + x_2 + s_1 = 1$ $x_2 - e_2 + a_2 = 2$ $x_1, x_2, x_3, s_1, e_2, a_2 \geq 0$ **مسألهٔ جدید**

نمایش سطر صفر تابع هدف مسألهٔ جدید:

$$z - x_3 - x_2 + Ma_2 = 0$$

BV \ متغیرها	z	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	RHS
z	1	0	-1	-1	0	0	M	0
s_1	0	1	1	0	1	0	0	1
a_2	0	0	1	0	0	-1	1	2

اصلاح جدول را یادتان نرود...

BV \ متغیرها	z	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	RHS
z	1	0	$-M-1$	-1	0	M	0	$-2M$
s_1	0	1	1	0	1	0	0	1
a_2	0	0	1	0	0	-1	1	2

BV \ متغیرها	z	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	RHS
z	1	$M+1$	0	-1	$M+1$	M	0	$-M+1$
x_2	0	1	1	0	1	0	0	1
a_2	0	-1	0	0	-1	-1	1	1

جواب فوق بیانگر بیکرانی مسألهٔ جدید است اما چون $a_2^* > 0$ پس **مسألهٔ اصلی نشدنی است.**

دقت کنید که اگر $a_2^* = 0$ بود، نتیجه می‌گیریم که مسألهٔ اصلی هم بیکران است.

روش دو فازی

۱- بازنویسی مسأله به صورت استاندارد

۲- تشکیل مسألهٔ فاز ۱ به این صورت که به هر قید (در صورت نیاز) متغیر مصنوعی اضافه می‌شود و تابع هدف، مینیمم‌سازی مجموع متغیرهای مصنوعی تعریف می‌شود

$$(\min w = a_1 + a_2 + \cdots)$$

۳- حل مسألهٔ فاز ۱ با روش سیمپلکس

حالت اول

$$w^* > 0$$

نتیجه می‌گیریم مسألهٔ اصلی نشدنی است

حالت دوم

$$w^* = 0$$

به یک جواب شدنی پایه‌ای اولیه برای مسألهٔ اصلی رسیده‌ایم. لذا، وارد فاز ۲ می‌شویم و با شروع از این جواب، الگوریتم سیمپلکس را روی مسألهٔ اصلی اجرا می‌کنیم.

مثال: مسألهٔ زیر را با روش سیمپلکس دو فازی حل کنید.

$\begin{aligned}&\min z = 2x_1 + 3x_2\\ &s.t.\\ &\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \le 4\\ &x_1 + 3x_2 \ge 20\\ &x_1 + x_2 = 10\\ &x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$	$\begin{aligned}&\min z = 2x_1 + 3x_2\\ &s.t.\\ &\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + s_1 = 4\\ &x_1 + 3x_2 - e_2 = 20\\ &x_1 + x_2 = 10\\ &x_1, x_2, s_1, e_2 \ge 0\end{aligned}$ **مسألهٔ استاندارد** **(مسألهٔ اصلی)**
	$\begin{aligned}&\min w = a_2 + a_3\\ &s.t.\\ &\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + s_1 = 4\\ &x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 20\\ &x_1 + x_2 + a_3 = 10\\ &x_1, x_2, s_1, e_2, a_2, a_3 \ge 0\end{aligned}$ **مسألهٔ فاز ۱**

ابتدا مسألهٔ فاز ۱ را با روش سیمپلکس حل می‌کنیم.

نمایش سطر صفر مسألهٔ فاز ۱:

$$w - a_2 - a_3 = 0$$

متغیرها / BV	W	x_1	x_2	S_1	e_2	a_2	a_3	RHS
W	۱	۰	۰	۰	۰	۱-	۱-	۰
S_1	۰	۱/۲	۱/۴	۱	۰	۰	۰	۴
a_2	۰	۱	۳	۰	۱-	۱	۰	۲۰
a_3	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱۰

اصلاح جدول را یادتان نرود...

متغیرها / BV	W	x_1	x_2	S_1	e_2	a_2	a_3	RHS
W	۱	۲	۴	۰	۱-	۰	۰	۳۰
S_1	۰	۱/۲	۱/۴	۱	۰	۰	۰	۴
a_2	۰	۱	۳	۰	۱-	۱	۰	۲۰
a_3	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱۰

BV \ متغیرها	w	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
w	1	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{10}{3}$
s_1	0	$\frac{5}{12}$	0	1	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{7}{3}$
x_2	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$
a_3	0	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$

BV \ متغیرها	w	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
w	1	0	0	0	0	-1	-1	0
s_1	0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$
x_2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5

پایان فاز اول

همهٔ متغیرهای مصنوعی صفر شده‌اند و جواب زیر یک جواب شدنی پایه‌ای اولیه برای مسألهٔ اصلی است:

$$BV = \{s_1, x_2, x_1\}, NBV = \{e_2\}$$

$$(x_1, x_2, s_1, e_2) = \left(5, 5, \frac{1}{4}, 0\right)$$

آغاز فاز دوم

ستون‌های نظیر متغیرهای مصنوعی را حذف می‌کنیم و سطر صفر مسألهٔ اصلی را در جدول بهین مسألهٔ فاز ۱ وارد می‌کنیم.

$$z - 2x_1 - 3x_2 = 0$$

BV	$\cancel{w}\ z$	x_1	x_2	s_1	e_2	$\cancel{a_2}$	$\cancel{a_3}$	RHS
$\cancel{w}\ z$	1	$\cancel{0}\ -2$	$\cancel{0}\ -3$	0	0	$\cancel{-1}$	$\cancel{-1}$	0
s_1	0	0	0	1	$\frac{-1}{8}$	$\cancel{\frac{1}{8}}$	$\cancel{\frac{-5}{8}}$	$\frac{1}{4}$
x_2	0	0	1	0	$\frac{-1}{2}$	$\cancel{\frac{1}{2}}$	$\cancel{\frac{-1}{2}}$	5
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\cancel{\frac{-1}{2}}$	$\cancel{\frac{1}{2}}$	5

BV / متغیرها	Z	x_1	x_2	s_1	e_2	RHS
Z	۱	-۲	-۳	۰	۰	۰
s_1	۰	۰	۰	۱	-۱/۸	۱/۴
x_2	۰	۰	۱	۰	-۱/۲	۵
x_1	۰	۱	۰	۰	۱/۲	۵

اصلاح جدول را یادتان نرود...

BV / متغیرها	Z	x_1	x_2	s_1	e_2	RHS
Z	۱	۰	۰	۰	-۱/۲	۲۵
s_1	۰	۰	۰	۱	-۱/۸	۱/۴
x_2	۰	۰	۱	۰	-۱/۲	۵
x_1	۰	۱	۰	۰	۱/۲	۵

چون متغیری برای ورود وجود ندارد، پس جدول فوق برای مسألهٔ اصلی بهین است. پس داریم:

$$(x_1^*, x_2^*, s_1^*, e_2^*) = \left(5, 5, \frac{1}{4}, 0\right), \quad z^* = 25$$

مثال: مسألهٔ زیر را با روش سیمپلکس دو فازی حل کنید.

$\max z = -3x_1 + 3x_2 - x_3$ $s.t.$ $x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 5$ $-3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 4$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$\max z = -3x_1 + 3x_2 - x_3$ $s.t.$ $x_1 + 3x_2 - 2x_3 - e_1 = 5$ $-3x_1 - 2x_2 + x_3 + s_2 = 4$ $x_1, x_2, x_3, e_1, s_2 \geq 0$ **مسألهٔ استاندارد (مسألهٔ اصلی)**
	$\min w = a_1$ $s.t.$ $x_1 + 3x_2 - 2x_3 - e_1 + a_1 = 5$ $-3x_1 - 2x_2 + x_3 + s_2 = 4$ $x_1, x_2, x_3, e_1, s_2, a_1 \geq 0$ **مسألهٔ فاز ۱**

ابتدا مسألهٔ فاز ۱ را با روش سیمپلکس حل می‌کنیم.

نمایش سطر صفر مسألهٔ فاز ۱:

$$w - a_1 = 0$$

ضرایب / BV	w	x_1	x_2	x_3	e_1	s_2	a_1	RHS
w	1	0	0	0	0	0	-1	0
a_1	0	1	3	-2	-1	0	1	5
s_2	0	-3	-2	1	0	1	0	4

اصلاح جدول را یادتان نرود...

ضرایب / BV	w	x_1	x_2	x_3	e_1	s_2	a_1	RHS
w	1	1	3	-2	-1	0	0	5
a_1	0	1	3	-2	-1	0	1	5
s_2	0	-3	-2	1	0	1	0	4

ضرایب / BV	w	x_1	x_2	x_3	e_1	s_2	a_1	RHS
w	1	0	0	0	0	0	-1	0
x_2	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
s_2	0	$\frac{-7}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{22}{3}$

پایان فاز اول

همهٔ متغیرهای مصنوعی صفر شده‌اند و جواب زیر یک جواب شدنی پایه‌ای اولیه برای مسألهٔ اصلی است:

$$\boldsymbol{BV = \{s_2, x_2\},\ NBV = \{x_1, x_3, e_1\}}$$

$$\boldsymbol{(x_1, x_2, x_3, e_1, s_2) = \left(0, \frac{5}{3}, 0, 0, \frac{22}{3}\right)}$$

آغاز فاز دوم

ستون‌های نظیر متغیرهای مصنوعی را حذف می‌کنیم و سطر صفر مسألهٔ اصلی را در جدول بهین مسألهٔ فاز ۱ وارد می‌کنیم.

$$z + 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

BV	~~w~~ z	x۱	x۲	x۳	e۱	s۲	~~a۱~~	RHS
~~w~~ z	۱	~~۰~~ 3	~~۰~~ −3	~~۰~~ 1	۰	۰	~~-۱~~	۰
x۲	۰	۱/۳	۱	-۲/۳	-۱/۳	۰	~~۱/۳~~	۵/۳
s۲	۰	-۷/۳	۰	-۱/۳	-۲/۳	۱	~~۲/۳~~	۲۲/۳

BV \ متغیرها	z	x_1	x_2	x_3	e_1	s_2	RHS
Z	1	3	$\boxed{-3}$	1	0	0	0
x_2	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
s_2	0	$\frac{-7}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{2}$	1	$\frac{22}{3}$

اصلاح جدول را یادتان نرود...

BV \ متغیرها	z	x_1	x_2	x_3	e_1	s_2	RHS
Z	1	4	0	-1	-1	0	5
x_2	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
s_2	0	$\frac{-7}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{2}$	1	$\frac{22}{2}$

جدول فوق نشان می‌دهد که مسألهٔ اصلی بیکران است.

مثال: مسألهٔ زیر را با روش سیمپلکس دو فازی حل کنید.

$\max z = -2x_1 - 3x_2$ $s.t.$ $x_1 + x_2 \geq 1$ $x_1 - x_2 \geq 1$ $x_1 \geq 1$ $x_1, x_2 \geq 0$	$\max z = -2x_1 - 3x_2$ $s.t.$ $x_1 + x_2 - e_1 = 1$ $x_1 - x_2 - e_2 = 1$ $x_1 - e_3 = 1$ $x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0$ **مسألهٔ استاندارد** **(مسألهٔ اصلی)**
	$\min w = a_1 + a_2 + a_3$ $s.t.$ $x_1 + x_2 - e_1 + a_1 = 1$ $x_1 - x_2 - e_2 + a_2 = 1$ $x_1 - e_3 + a_3 = 1$ $x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, a_1, a_2, a_3 \geq 0$ **مسألهٔ فاز ۱**

ابتدا مسألهٔ فاز ۱ را با روش سیمپلکس حل می‌کنیم.

نمایش سطر صفر مسألهٔ فاز ۱:

$$w - a_1 - a_2 - a_3 = 0$$

متغیرها / BV	W	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	RHS
W	۱	۰	۰	۰	۰	۰	-۱	-۱	-۱	۰
a_1	۰	۱	۱	-۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱
a_2	۰	۱	-۱	۰	-۱	۰	۰	۱	۰	۱
a_3	۰	۱	۰	۰	۰	-۱	۰	۰	۱	۱

اصلاح جدول را یادتان نرود...

متغیرها / BV	W	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	RHS
W	۱	۳	۰	-۱	-۱	-۱	۰	۰	۰	۳
a_1	۰	۱	۱	-۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱
a_2	۰	۱	-۱	۰	-۱	۰	۰	۱	۰	۱
a_3	۰	۱	۰	۰	۰	-۱	۰	۰	۱	۱

متغیرها / BV	W	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	RHS
W	۱	۰	۳	-۱	۲	-۱	۰	-۳	۰	۰
a_1	۰	۰	۲	-۱	۱	۰	۱	-۱	۰	۰
x_1	۰	۱	-۱	۰	-۱	۰	۰	۱	۰	۱
a_3	۰	۰	۱	۰	۱	-۱	۰	-۱	۱	۰

متغیرها / BV	w	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	RHS
w	1	0	0	-1	-1	2	0	0	-3	0
a_1	0	0	0	-1	-1	2	1	1	-2	0
x_1	0	1	0	0	0	-1	0	0	1	1
x_2	0	0	1	0	1	-1	0	-1	1	0

متغیرها / BV	w	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	RHS
w	1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
e_3	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0
x_1	0	1	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
x_2	0	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	0

پایان فاز اول

همهٔ متغیرهای مصنوعی صفر شده‌اند و جواب زیر یک جواب شدنی پایه‌ای اولیه برای مسألهٔ اصلی است:

$$BV = \{e_3, x_1, x_2\}, NBV = \{e_1, e_2\}$$

$$(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3) = (1, 0, 0, 0, 0)$$

آغاز فاز دوم

ستون‌های نظیر متغیرهای مصنوعی را حذف می‌کنیم و سطر صفر مسألهٔ اصلی را در جدول بهین مسألهٔ فاز ۱ وارد می‌کنیم.

$$z + 2x_1 + 3x_2 = 0$$

BV	Z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	RHS
Z	۱	۲	۳	۰	۰	۰	۰
e_3	۰	۰	۰	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۱	۰
x_1	۰	۱	۰	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	۱
x_2	۰	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۰

اصلاح جدول را یادتان نرود...

BV	Z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	RHS
Z	۱	۰	۰	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	-۲
e_3	۰	۰	۰	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۱	۰
x_1	۰	۱	۰	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	۱
x_2	۰	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۰

BV \ متغیرها	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	RHS
z	۱	۰	۱	۲	۰	۰	-۲
e_3	۰	۰	۱	-۱	۰	۱	۰
x_1	۰	۱	۱	-۱	۰	۰	۱
e_2	۰	۰	۲	-۱	۱	۰	۰

چون متغیری برای ورود وجود ندارد، پس جدول فوق برای مسألهٔ اصلی بهین است. پس داریم:

$$(x_1^*, x_2^*, e_1^*, e_2^*, e_3^*) = (1, 0, 0, 0, 0), \quad z^* = -2$$

مثال: مسألهٔ زیر را با روش سیمپلکس دو فازی حل کنید.

$\min z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$ $s.t.$ $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ $2x_2 + 3x_3 = 10$ $x_3 \leq 2$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$\min z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$ $s.t.$ $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ $2x_2 + 3x_3 = 10$ $x_3 + s_4 = 2$ $x_1, x_2, x_3, s_4 \geq 0$ **مسألهٔ استاندارد** **(مسألهٔ اصلی)**
	$\min w = a_1 + a_2 + a_3$ $s.t.$ $x_1 + x_2 + x_3 + a_1 = 6$ $-x_1 + x_2 + 2x_3 + a_2 = 4$ $2x_2 + 3x_3 + a_3 = 10$ $x_3 + s_4 = 2$ $x_1, x_2, x_3, s_4, a_1, a_2, a_3 \geq 0$ **مسألهٔ فاز ۱**

ابتدا مسألهٔ فاز ۱ را با روش سیمپلکس حل می‌کنیم.

نمایش سطر صفر مسألهٔ فاز ۱:

$$w - a_1 - a_2 - a_3 = 0$$

BV	w	x_1	x_2	x_3	S_4	a_1	a_2	a_3	RHS
w	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
a_1	0	1	1	1	0	1	0	0	6
a_2	0	-1	1	2	0	0	1	0	4
a_3	0	0	2	3	0	0	0	0	10
S_4	0	0	0	1	1	0	0	1	2

اصلاح جدول را یادتان نرود...

BV	Z	x_1	x_2	x_3	S_4	a_1	a_2	a_3	RHS
w	1	0	4	6	0	0	0	0	20
a_1	0	1	1	1	0	1	0	0	6
a_2	0	-1	1	2	0	0	1	0	4
a_3	0	0	2	3	0	0	0	1	10
S_4	0	0	0	1	1	0	0	0	2

BV	w	x_1	x_2	x_3	S_4	a_1	a_2	a_3	RHS
w	1	0	4	0	-6	0	0	0	8
a_1	0	1	1	0	-1	1	0	0	4
a_2	0	-1	1	0	-2	0	1	0	0
a_3	0	0	2	0	-3	0	0	1	4
x_3	0	0	0	1	1	0	0	0	2

متغیرها / BV	w	x_1	x_2	x_3	s_4	a_1	a_2	a_3	RHS
w	1	4	0	0	2	0	-4	0	8
a_1	0	2	0	0	1	1	-1	0	4
x_2	0	-1	1	0	-2	0	1	0	0
a_3	0	2	0	0	1	0	-2	1	4
x_3	0	0	0	1	1	0	0	0	2

متغیرها / BV	w	x_1	x_2	x_3	s_4	a_1	a_2	a_3	RHS
w	1	0	0	0	0	-2	-2	0	0
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	2
x_2	0	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
a_3	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0
x_3	0	0	0	1	1	0	0	0	2

پایان فاز اول

داریم $w^* = 0$ به عبارت دیگر مقدار همهٔ متغیرهای مصنوعی صفر شده‌اند اما متغیر مصنوعی a_3 هنوز در پایه حضور دارد.

در سطر نظیر a_3 ضریب همهٔ متغیرهای غیرپایه‌ای و غیرمصنوعی صفر است پس قید نظیر سطر a_3 زائد است (قید سوم مسأله)

BV	w	x_1	x_2	x_3	s_4	a_1	a_2	a_3	RHS
w	1	0	0	0	0	-2	-2	0	0
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	2
x_2	0	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
a_3	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0
x_3	0	0	0	1	1	0	0	0	2

قید سوم را حذف می‌کنیم و جدول فاز دوم را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

آغاز فاز دوم

ستون‌های نظیر متغیرهای مصنوعی را حذف می‌کنیم و سطر صفر مسألهٔ اصلی را در جدول بهین مسألهٔ فاز ۱ وارد می‌کنیم.

$$z + x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$

BV \ متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	s_4	RHS
Z	۱	۱	-۲	۳	۰	۰
x_1	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲
x_2	۰	۰	۱	۰	$\frac{-۳}{۲}$	۲
x_3	۰	۰	۰	۱	۱	۲

اصلاح جدول را یادتان نرود...

BV \ متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	s_4	RHS
Z	۱	۰	۰	۰	$\frac{-۱۳}{۲}$	-۴
x_1	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲
x_2	۰	۰	۱	۰	$\frac{-۳}{۲}$	۲
x_3	۰	۰	۰	۱	۱	۲

چون متغیری برای ورود وجود ندارد، پس جدول فوق برای مسألهٔ اصلی بهین است. پس داریم:

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s_4^*) = (2, 2, 2, 0), \quad z^* = -4$$

مثال: فرض کنید در پایان فاز اول از روش دوفازی به جدول زیر با $w^* = 0$ رسیده‌ایم اما هنوز یک متغیر مصنوعی با مقدار صفر در پایه وجود دارد. قبل از ورود به فاز دوم لازم است هیچ متغیر مصنوعی در پایه حضور نداشته باشد. چگونه می‌توان این ویژگی را برقرار کرد؟

BV / متغیرها	w	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	a_3	RHS
w	1	0	0	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	0	0	-3	0
a_1	0	0	0	-1	-1	1	1	-2	0
x_1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
x_2	0	0	1	0	1	0	-1	1	0

BV / متغیرها	w	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	a_3	RHS
w	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
e_2	0	0	0	1	1	-1	-1	2	0
x_1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
x_2	0	0	1	-1	0	1	0	-1	0

اکنون می‌توان وارد فاز دوم شد و ستونهای متغیرهای مصنوعی را حذف و سطر صفر مسألهٔ اصلی را در جدول وارد نمود.

سوال: آیا مسألهٔ فاز ۱ ممکن است نشدنی شود؟

سوال: آیا مسألهٔ فاز ۱ ممکن است جواب بهین بیکران داشته باشد؟