



جلسه دوم

۱۴۰۱ آبان

مجث مدلسازی

نادیا قنبری

یک شرکت نفت از ترکیب دو نوع نفت خام (نوع ۱ و نوع ۲) گازوئیل و نفت حرارتی تولید می‌کند. در حال حاضر ۵۰۰۰ بشکه نفت خام نوع ۱ ۱۰۰۰۰ سطح کیفیت نفت خام نوع ۲ موجود است. سطح کیفیت نفت خام نوع ۱ برابر ۱۰ و سطح کیفیت نفت خام نوع ۲ برابر ۵ است. سطح کیفیت گازوئیل تولید شده باید حداقل ۸ و سطح کیفیت نفت حرارتی تولید شده باید حداقل ۶ باشد. تقاضا برای هر محصول باید توسط تبلیغات ایجاد شود. هر یک دلاری که برای تبلیغ گازوئیل صرف می‌شود ۵ بشکه تقاضا ایجاد می‌کند. و هر یک دلاری که برای تبلیغ نفت حرارتی صرف می‌شود ۱۰ بشکه تقاضا ایجاد می‌کند. هر بشکه گازوئیل و نفت حرارتی به ترتیب به قیمت ۲۵ و ۲۰ دلار به فروش می‌رسند. یک مدل برای ماکسیمم سازی سود ارائه دهید.

\* سوال شماره ۱ \*

$x_{i,1} : \quad x_{i,2} : \quad y_1 : \quad y_2 :$

متغیرهای  
ضم

متغیرهای نفت خام حصری نوع زرده‌بینت حملی (رسوب شبه)  $i=1,2$

بلفعه - بابی نفت حملی حفظ شود

بلفعه - بابی خریداری شود

$$\max z = 2\omega(x_{1,1} + x_{2,1}) + 2\cdot(x_{1,2} + x_{2,2}) - y_1 - y_2$$

s.t.

$$x_{1,1} + x_{1,2} \leq \omega \dots \quad | \quad \text{میزان ریاضی بحث محدودی} \rightarrow$$

$$x_{2,1} + x_{2,2} \leq 10 \dots \quad |$$

$$\frac{10x_{1,2} + \omega x_{2,2}}{x_{1,2} + x_{2,2}} \gg 1 \rightarrow \text{قطع نفت خارجی تولیدکننده}$$

$$\frac{10x_{1,1} + \omega x_{2,1}}{x_{1,1} + x_{2,1}} \gg 1 \rightarrow \text{قطع نفت نفت حملی تولیدکننده}$$

$$x_{1,1} + x_{2,1} = 10y_1 \rightarrow \text{تعاضدی نفت حملی}$$

$$x_{1,2} + x_{2,2} = \omega y_2 \rightarrow \text{تعاضدی خارجی}$$

$$x_{i,1}, x_{i,2} \geq 0 \quad i=1,2$$

$$y_i \geq 0 \quad i=1,2$$

شرکتی یک نوع کالا تولید می‌کند و در طول ماههای ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب با تقاضای ۳۰۰ و ۴۰۰ و ۵۰۰ واحد روبروست. این شرکت برای تولید کالا دو کارگاه ( کارگاه ۱ و کارگاه ۲ ) را در اختیار دارد. تولید یک واحد کالا در کارگاه ۱ به  $\frac{1}{5}$  ساعت و در کارگاه ۲ به ۳ ساعت نیروی کار متخصص نیاز دارد. بعلاوه تولید یک واحد کالا در کارگاه ۱، ۴۰۰ دلار و در کارگاه ۲، ۳۵۰ دلار هزینه در پی دارد. در طول ماه هر کارگاه ۴۲۰ ساعت نیروی متخصص در دسترس دارد. هزینه نگهداری هر واحد کالا در انبار معادل ۱۰۰ دلار است و در آغاز ماه اول شرکت ۲۰۰ واحد کالا در انبار دارد. مدلی ارائه دهید که در آن ضمن مینیمم کردن هزینه‌ها، تقاضای ۳ ماه آینده تأمین گردد.

\* سوال شماره ۲

$x_t$  : تعداد طالی تولید شده در ماه اردیبهشت  $t = 1, 2, 3$

$y_t$  : تعداد طالی تولید شده در ماه خرداد  $t = 1, 2, 3$

$z_t$  : تعداد طالی لیزر شده سپتامبر  $t = 1, 2, 3$

$$\min z = \frac{f_{100}(x_1 + x_2 + x_3)}{\text{هزینه تولید در ماه اردیبهشت}} + \frac{4\omega(y_1 + y_2 + y_3)}{\text{هزینه تولید در ماه خرداد}} + \frac{100(z_1 + z_2 + z_3)}{\text{هزینه نیاز طالی ماه سپتامبر}}$$

s.t.

$$z_1 = 100 + x_1 + y_1 - f_{100}$$

$$z_2 = z_1 + x_2 + y_2 - f_{100}$$

$$z_3 = z_2 + x_3 + y_3 - f_{100}$$

بنابراین ماه دیگر را باز است

$$100x_t \leq f_{100} \quad t = 1, 2, 3 \quad \begin{matrix} \text{هزینه} \\ \text{تولید} \\ \text{در} \\ \text{ماه} \\ \text{ماه} \end{matrix}$$

$$4y_t \leq f_{100} \quad t = 1, 2, 3$$

$$x_t, y_t, z_t \geq 0$$

شرکتی سه نوع محصول تولید می‌کند. فعالیت او با خرید ماده خام اولیه به قیمت ۲۵ دلار به ازای هر پوند شروع می‌شود. با پردازش هر پوند ماده خام ۳ پوند محصول نوع ۱ و ۱ پوند محصول نوع ۲ تولید می‌شود. که پردازش یک پوند ماده خام به یک دلار هزینه و ۲ ساعت نیروی کار مخصوص نیاز دارد. هر پوند محصول نوع ۱ می‌تواند به یکی از روش‌های زیر مورد استفاده قرار گیرد:

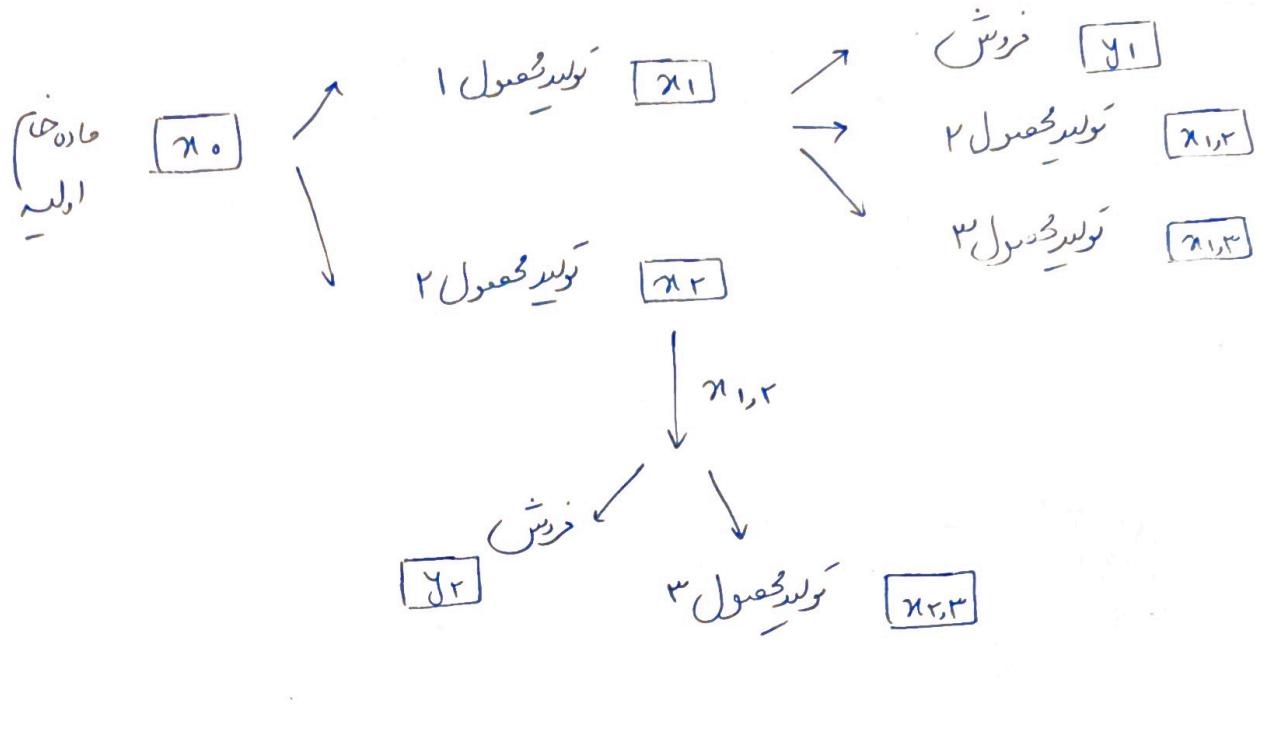
- ۱- به قیمت ۱۰ دلار به ازای هر واحد فروخته شود.
- ۲- به یک پوند محصول نوع ۲ تبدیل شود که این امر به ۲ ساعت نیروی کار و ۱ دلار هزینه نیاز دارد.
- ۳- به یک پوند محصول نوع ۳ تبدیل شود که این امر به ۳ ساعت نیروی کار و ۲ دلار هزینه نیاز دارد.

هر پوند محصول نوع ۲ می‌تواند به یکی از روش‌های زیر مورد استفاده قرار گیرد:

- ۱- به قیمت ۲۰ دلار به ازای هر واحد فروخته شود.
- ۲- به  $8/0$  پوند محصول نوع ۳ تبدیل شود که این امر به ۱ ساعت نیروی کار و  $5/0$  دلار هزینه نیاز دارد.

محصول نوع ۳ نیز به قیمت ۳۰ دلار به ازای هر واحد به فروش می‌رسد. بیشترن میزان قابل فروش هر یک از محصولات ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب  $5000$  و  $5000$  و  $3000$  واحد است. و حداقل  $25000$  ساعت نیروی کار در اختیار داریم. یک مدل برای ماکسیمم سازی سود ارائه دهید.

## \* سوال شمارہ ۳۵ \*



$$\max_2 = \frac{y_1 - x_{1,r} - rx_{1,r} + ry_r - \left(\frac{1}{r} \times \frac{1}{\lambda}\right)x_{r,r}}{r \text{ جمل}} + \frac{r \cdot (x_{1,r} + x_{r,r}) - r\omega x_0 - x_0}{r \text{ جمل}} = \underline{\underline{ab / \text{جمل}}}$$

s.t.

$$x_0 = x_1 \rightarrow \text{برلزش} \text{ هر یوند ماره خم } 3 \text{ یوند مصطل ای رده} \\ x_0 = x_2 \rightarrow \text{برلزش} \text{ هر یوند ماره خم } 3 \text{ یوند مصطل ای رده} \rightarrow \text{برلزش} \text{ هر یوند مصطل ای رده}$$

$$x_1 = y_1 + x_{1,r} + x_{1,t} \quad | \quad \rightsquigarrow \text{تسویقی} \\ x_r + x_{1,r} = y_r + \underbrace{x_{2,r}}_{|} \quad |$$

$$\begin{aligned} y_1 &\leq \omega \dots \\ y_2 &\leq \omega \dots \\ x_{1,3} + x_{2,3} &\leq 3 \dots \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{محدوده خودسری} \\ \text{محدوده خودسری} \end{array} \right\}$$

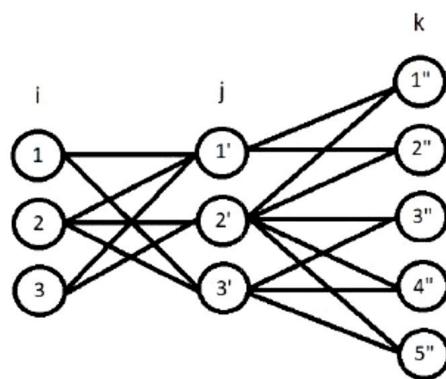
$$2x_0 + 2x_{1,2} + 3x_{1,3} + \frac{1}{\lambda} x_{2,2} \leq 2\omega \dots \quad \text{حدود ساخت نیروی طار}$$

all variables  $\gamma_0$

## سوال شماره ۴

### سطح متوسط و سخت

۵. شرکتی سه کارگاه دارد که در شبکه زیر با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ نشان داده شده‌اند. این شرکت ۵ مشتری دارد که با "۱، ۲، ۳، ۴، ۵" نمایش داده شده‌اند و تقاضای آن‌ها به ترتیب برابر با ۱۰۰، ۲۰۰، ۱۵۰، ۵۰ و ۳۰۰ واحد کالا است و باید حتماً برآورده شود. رئوس ۱'، ۲' و ۳' نقاط انتقال هستند و لازم است کالاهای از طریق این نقاط به مشتریان ارسال شوند. ظرفیت تولید هر کارگاه ۴۰۰ واحد کالا است و برای هر کمان (j,i) هزینه انتقال هر واحد کالا از کارگاه i به نقطه انتقال j با  $c_{ij}$  نشان داده می‌شود. همچنین برای کمان (j,k) هزینه انتقال یک واحد کالا از نقطه انتقال j به مشتری k با پارامتر  $d_{jk}$  نشان داده می‌شود. شرکت باید تصمیم بگیرد چگونه کالاهای را به مشتریان انتقال دهد به طوری که ضمن برآورده شدن تقاضا، هزینه ارسال مینیمم شود.



## \* سوال شماره ۴ \*

$x_{ij} :=$  سریال حادی ارسالی از طریق اسکال ز /

$y_{j,k} :=$  سریال حادی ارسالی از نص اسکال ز به شتری ک /

$$E_1 = \{(1,1'), (1,3'), (2,1'), (2,2'), (2,3'), (3,1'), (3,2')\}$$

عن دی ز

$$E_r = \{(1,1''), (1,2''), (2,1''), (2,2''), (2,3''), (2,4''), (2,5''), (3,1''), (3,2''), (3,3'')\}$$

عن دی ز

$$\min z = \sum_{(i,j) \in E_1} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{(j,k) \in E_r} d_{j,k} y_{j,k}$$

s.t.

$$\sum_{(i,j) \in E_1} x_{i,j} \leq t_{ii} \quad \forall i = 1, 2, 3$$

طریق تولید خود را حدسز  
و محدود است .

$$\sum_{(i,j) \in E_1} x_{i,j} = \sum_{(j,k) \in E_r} y_{j,k} \quad \forall j = 1', 2', 3'$$

سریال حادی ارسالی از ز به ز به با سریال حادی تسلیم شده از ز به ک برآورده (سارل)

$$\sum_{(j,k) \in E_r} y_{j,k} = D_k \quad \forall k = 1'', \dots, \omega''$$

مسنونه اضافی شتریان

$$x_{i,j} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E_1$$

$$y_{j,k} \geq 0 \quad \forall (j,k) \in E_r$$

شرکتی دو نوع موتور کولر تولید می‌کند. طبق قرارداد موتورها باید طی ۴ ماه از سال مطابق جدول زیر تحويل داده شوند.

ارديبهشت	فروردين	اسفند	بهمن	مدل
۱۱۰۰	۱۰۰۰	۷۰۰	۸۰۰	A
۱۴۰۰	۱۴۰۰	۱۲۰۰	۱۰۰۰	B

- ۱ - هزینه تولید هر واحد مدل A برابر ۱۰ و هر عدد مدل B برابر ۶ واحد است. که به علت افزایش حقوق و دستمزد از اول فروردین ماه هزینه تولید هر واحد ۱۰ درصد افزایش می‌یابد.
- ۲ - هزینه نگهداری هر عدد موتور مدل A برابر با ۱۸ و هر موتور نوع B برابر با ۱۳ واحد در ماه است.
- ۳ - موجودی موتور از دو مدل در اول بهمن ماه صفر است.
- ۴ - شرکت در نظر دارد در آخر اردیبهشت ۴۵۰ عدد موتور مدل A و ۳۰۰ عدد موتور مدل B تولید کند.
- ۵ - حداکثر طرفیت نگهداری موتور در انبار ۳۳۰۰ عدد در هر ماه است و ابعاد هر دو مدل یکسان است.
- ۶ - مدت زمان مونتاژ هر عدد موتور مدل A معادل  $\frac{1}{3}$  ساعت و هر موتور مدل B معادل  $\frac{1}{9}$  ساعت است. با توجه به عدم امکان اخراج نیروی انسانی حداقل ۲۲۴۰ نفر-ساعت نیروی کار در اختیار است که در زمان افزایش حجم کار این ظرفیت قابل افزایش تا ۲۵۶۰ ساعت می‌باشد. یک مدل برای مینیمم کردن هزینه‌های شرکت ارائه کنید.

\* سوال شماره ۰ \*

$x_{A,t}$  :

سالهای تولید محدودیت نفع  $t_{00} \leq A \leq t_{04}$

$x_{B,t}$  :

" "  $B$  " " "

$t = 1, 2, 3, 4$

$y_{A,t}$  :

محبوبی اسپار در پیان  $t_{00}$  از محدودیت  $A$

$y_{B,t}$  :

$B$  " " " "

$$\min z = 1.0(x_{A,1} + x_{A,2}) + 4(x_{B,1} + x_{B,2}) + 11(x_{A,3} + x_{A,4})$$

$$+ 7.7(x_{B,3} + x_{B,4}) + 18 \sum_{t=1}^4 y_{A,t} + 14 \sum_{t=1}^4 y_{B,t}$$

s.t.

$$y_{A,4} = t\omega_0$$

$$y_{B,4} = v_0$$

حد محدودیت از اراده هشت

$$y_{A,t} + y_{B,t} \leq 33 \quad \forall t = 1, \dots, 4$$

حد محدودیت اسپار

$$22\omega_0 \leq 1.3x_{A,t} + 1.9x_{B,t} \leq 2\omega_7 \quad \forall t = 1, \dots, 4$$

حد محدودیت ساخت خوار

$$x_{A,1} = 1 \dots + y_{A,1}$$

$$x_{A,2} + y_{A,1} = v_0 + y_{A,2}$$

$$x_{A,3} + y_{A,2} = 1 \dots + y_{A,3}$$

$$x_{A,4} + y_{A,3} = 11 \dots + y_{A,4}$$

$$x_{B,1} = 1 \dots + y_{B,1}$$

$$x_{B,2} + y_{B,1} = 11 \dots + y_{B,2}$$

$$x_{B,3} + y_{B,2} = 14 \dots + y_{B,3}$$

$$x_{B,4} + y_{B,3} = 14 \dots + y_{B,4}$$

ارسات تولید، محبوبی اسپار، تاها نهایی

محدودیت  $A$

ارسات تولید، محبوبی اسپار، تاها نهایی

محدودیت  $B$

all variables  $y_0, \dots, y_4$

## سوال شماره ۶

### وینستون

یک شرکت باید تقاضاهای زیر را در به موقع برآورده کند:

بازه زمانی اول : ۳۰ واحد کالا

بازه زمانی دوم : ۲۰ واحد کالا

بازه زمانی سوم : ۴۰ واحد کالا

در هر بازه زمانی می‌تواند تا ۲۷ واحد را با نیروی کار عادی و ۴۰ دلار به ازای هر واحد تولید کند. هم چنین در هر بازه زمانی می‌تواند تولید نامحدودی از کالاها را با نیروی کار اضافی به ازای هر واحد ۶۰ دلار داشته باشد. از کل محصولات تولیدی ۲۰ درصد نامناسب هستند و نمی‌توانند برای تأین تقاضاً مورد استفاده قرار بگیرند. همچنین در پایان هر بازه زمانی ۱۰ درصد کالاهای فاسد شده و نمی‌توانند تقاضای دوره بعدی را فراهم کنند. بعد از تأمین تقاضاً به ازای هر واحد کالای موجود در انبار ۱۵ دلار مالیات باید پرداخت گردد. با فرض اینکه موجودی انبار تا قبل از بازه زمانی اول صفر باشد، یک مدل برای مینیمم سازی هزینه‌ها ارائه دهید.

\* مُسْطَل سَمَاءِ \*

$$R_t := \frac{1}{\text{سالانه طالعی تولید شده در دوره}} \quad |$$

$$q_t := \frac{1}{\text{طالعی تولید شده در دوره}} \quad | \quad t = 1, 2, 3$$

$$Z_t := \frac{1}{t_0 \text{ (سالانه میانگین)}} \quad | \quad |$$

$$\begin{aligned} \min Z &= f_0 (R_1 + R_2 + R_3) + r_0 (q_1 + q_2 + q_3) \\ &+ \omega (z_1 + z_2 + z_3) \end{aligned}$$

s.t.

$$Z_1 = 0.1 R_1 + 0.1 q_1 - r_0$$

$$Z_2 = 0.1 R_2 + 0.1 q_2 + 0.1 Z_1 - r_0$$

$$Z_3 = 0.1 R_3 + 0.1 q_3 + 0.1 Z_2 - r_0$$

{ اساطیر و دلایل زبانی

$$R_1 \leq 2V$$

$$R_2 \leq 2V$$

$$R_3 \leq 2V$$

دستورات زبانی حمله هر سه ۲V طبقه طالعی  
تولیدی ردد.

$$R_t, q_t, Z_t \geq 0 \quad t = 1, 2, 3$$

فردی سرمایه‌گذاری در سه پروژه را در دست بررسی دارد. اگر فرد به طور کامل در پروژه سرمایه‌گذاری کند، پرداختی‌ها بر حسب میلیون دلار به شرح جدول زیر خواهد بود:

مثلا برای پروژه ۱ اکنون باید ۳ میلیون دلار پرداخت شود که منجر به دریافت  $5/5$  میلیون دلار سود در سه سال بعد می‌گردد.

TABLE 44

Time (Years)	Cash Flow		
	Project 1	Project 2	Project 3
0	-3	-2	-2
.5	-1	-.5	-2
1	+1.8	1.5	-1.8
1.5	1.4	1.5	1
2	1.8	1.5	1
2.5	1.8	.2	1
3	5.5	-1	6

او اکنون ۲ میلیون دلار پول نقد دارد و در هر دوره زمانی  $0$  و  $1/5$  و  $1$  و  $2/5$  و  $2$  سال بعد در صورت تمایل می‌تواند تا دو میلیون دلار با نرخ بهره  $6$  ماهه  $3/5$  درصد، پول قرض بگیرد. به باقی‌مانده پول سودی با بهره  $3$  درصد تعلق می‌گیرد. برای مثال اگر در ماه صفر بعد از قرض و سرمایه‌گذاری یک میلیون دلار داشته باشد، در زمان  $5/0$  معادل  $30000$  دلار سود دریافت می‌کند. هدف ماکسیمم کردن نقدینگی بعد از جریان‌های نقدی زمان  $3$  است. چه استراتژی‌ای برای رسیدن به این هدف مناسب است؟ توجه کنید که می‌توان در کسری از یک پروژه نیز سرمایه‌گذاری کرد. مثلا اگر در نصف پروژه  $3$  سرمایه‌گذاری شود، باید در زمان  $0$  و  $5/0$ ، یک دلار پرداخت گردد.

\* سُلْطَان\*

$$x_i : \begin{cases} \text{خیز لازم برای این سهارینه را بخواهد} \\ \text{نیز} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3$$

$$y_j : \begin{cases} \text{منابع مول باید مانده باشند} \\ \text{منابع} \end{cases} \quad j = 0, 0\omega, 1, 1\omega, 2, 2\omega$$

$$w_j : \begin{cases} \text{بعل - منابع} \\ \text{منابع} \end{cases}$$

$$\max Z = \omega_1 \omega x_1 - x_2 + 7x_3 + 11.3 y_{r, \omega} - 11.3 \omega w_{r, \omega}$$

s.t.

$$* y_0 = 2 - 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + w_0 \quad t=0 \text{ نتیجه ندارد}$$

$$* y_{1\omega} = 11.3 y_0 - 11.3 \omega w_0 - x_1 - 1\omega x_2 - 2x_3 + w_{1\omega} \quad t=1\omega \text{ نتیجه}$$

$$* y_{2\omega} = 11.3 y_{1\omega} - 11.3 \omega w_{1\omega} + 11x_1 + 11\omega x_2 - 11x_3 + w_{2\omega}$$

$$* y_r = 11.3 y_{2\omega} - 11.3 \omega w_{2\omega} + 11x_1 + 11\omega x_2 + x_3 + w_r$$

$$* y_{r, \omega} = 11.3 y_r - 11.3 \omega w_r + 11x_1 + 11\omega x_2 + x_3 + w_{r, \omega}$$

$$w_j \leq 2 \quad \forall j = 0, \dots, 2\omega$$

$$x_i \leq 1 \quad \forall i$$

$$x_i, y_j, w_j \geq 0$$

یک شرکت انواع مختلف نفت ( نوع ۱ و ۲ و ۳ ) را ترکیب و انواع مختلف بنزین ( نوع ۱ و ۲ و ۳ ) را تولید می‌کند. در این خصوص می‌تواند سه فرایند را مورد بررسی قرار دهد:

- ۱- در یک ساعت استفاده از فرایند ۱، دو بشکه نفت خام نوع ۱ و ۳ بشکه نفت خام نوع ۲ ترکیب می‌شوند و ۲ بشکه بنزین نوع ۱ و ۲ بشکه بنزین نوع ۲ تولید می‌گردد.
- ۲- در یک ساعت استفاده از فرایند ۲، یک بشکه نفت خام نوع ۱ و ۳ بشکه نفت خام نوع ۲ ترکیب می‌شوند و ۳ بشکه بنزین نوع ۲ تولید می‌گردد.
- ۳- در یک ساعت استفاده از فرایند ۳، دو بشکه نفت خام نوع ۱ و ۳ بشکه نفت خام نوع ۲ ترکیب می‌شوند و ۲ بشکه بنزین نوع ۳ تولید می‌گردد.

یک ساعت بکارگیری فرآیند ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب هزینه‌ای معادل ۵ و ۴ و ۱ واحد در بر دارد. هر هفته می‌توان تا ۲۰۰ بشکه نفت خام نوع ۱ را با قیمت ۲ واحد به ازای هر بشکه و همچنین تا ۳۰۰ بشکه نفت خام نوع ۲ را با قیمت ۳ واحد به ازای هر بشکه خریداری کرد. به علاوه هر بشکه از بنزین نوع ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب به قیمت ۹ و ۱۰ و ۲۴ واحد به فروش می‌رسند. ئر طول هفته نیز حداقل ۱۰۰ ساعت زمان در دسترس است. یک مدل برای ماکسیمم سازی سود ارائه دهید.

\* سوال سهاره

$x_i$ : تعداد هدایات بین شهری زلیند  $i$   $i=1, 2, 3$

$$\max z = \frac{9(2x_1) + 10(2x_1 + 3x_2) + 24(2x_3)}{\text{خوش شنیدن } 1} -$$

$$\frac{(5x_1 + 4x_2 + x_3) + 2(2x_1 + x_2 + 2x_3) + 3(3x_1 + 3x_2 + 4x_3)}{\text{خرنده راه اندازی زلیند } 1} -$$

حدود خردمند ۱

نوع ۲

حدود سمت

$$\text{s.t. } 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 200$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 300$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3$$