جلسه هفتم

۱۶ آذر ۱۴۰۱

مبحث جبر سیمپلکس

معصومه پرداختی

سوال اول) توضیح دهید که کدامیک از مدل های زیر را می توان به صورت یک LP بازنویسی کرد؟

$$\begin{aligned}
\text{Min } & Z = |2x_1 - 3x_2| \\
\text{s.t } & 4x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 0.5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Max } & |2x_1 - 3x_2| \\
\text{s.t } & 4x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 0.5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

جواب :

داریم :

$$|2x_1 - 3x_2| = \max\{-2x_1+3x_2 \;,\; 2x_1-3x_2\}$$

قرار می‌دهیم:

$$w = |2x_1 - 3x_2|$$

پس مسئله مینیمم‌سازی را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم :

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= w \\ \text{s.t } \; 4x_1+x_2 &\leq 4 \\ 2x_1-x_2 &\leq 0.5 \\ w &= \max\{-2x_1+3x_2 \;,\; 2x_1-3x_2\} \\ x_1, x_2, w &\geq 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \text{Min } Z &= w \\ \text{s.t } \; 4x_1+x_2 &\leq 4 \\ 2x_1-x_2 &\leq 0.5 \\ w &\geq -2x_1+3x_2 \\ w &\geq 2x_1-3x_2 \\ x_1, x_2, w &\geq 0 \end{aligned}$$

در حالت مینیمم‌سازی، این مسئله عیناً معادل مسئله اصلی است. (چرا؟)

Scanned with CamScanner

اما اگر در مسئله ماکسیمم سازی هم به همین صورت عمل کنیم و فقط دو قید بزرگتر مساوی به مدل اضافه کنیم، آنگاه به دلیل ماکسیمم سازی تابع هدف، مسئله به سمت بیکرانی می رود. در این حالت، مدل ما مشابه مدل اصلی عمل نمی کند.

روش درست:

$$\text{Max } Z = |12x_1 - 3x_2|$$
$$\text{s.t } \quad 4x_1 + x_2 \leq 4$$
$$2x_1 - x_2 \leq 0.5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

می گیریم:

$$w = |12x_1 - 3x_2| = \max\{-2x_1 + 3x_2 \,,\, 2x_1 + 3x_2\}$$

در اینصورت داریم:

$$\text{Max } Z = w$$
$$\text{s.t } \quad 4x_1 + x_2 \leq 4$$
$$2x_1 - x_2 \leq 0.5$$
$$w \geq -2x_1 + 3x_2$$
$$w \geq 2x_1 + 3x_2$$
$$w \leq -2x_1 + 3x_2 \quad \text{or} \quad w \geq 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1, x_2, w \geq 0$$

که قید or به وسیله دو متغیر باینری، به صورت خطی نوشته می شود.

سؤال دوم) مسئله مینیمم سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\text{Min } & Z = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{s.t } & x_1 + 4x_2 + x_3 \leq b_1 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 \geq b_2 \\
& x_1 , x_2 , x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

جدول بهینه آن به صورت زیر است:

	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	RHS
Z	-3	-1	0	0	-1	a
s_1	-1	b	0	1	1	4
x_3	2	c	1	0	-1	2

الف) B^{-1} و $C_{BV}^{T} B^{-1}$ را بدست آورید.

ب) مقادیر b_2 و b_1 و c و b و a را بدست آورید.

جواب :

الف) روش اول : ماتریس B را از طریق مدل داده شده بدست می آوریم وسپس وارون می کنیم.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

روش دوم : به جدول نگاه می کنیم. می دانیم اگر همه‌ی قید ها از نوع $\leq$ باشند و در جدول فقط متغیر های S وجود داشته باشند، ستون های متعلق به S ها در جدول بهین برابر با ستون های B^{-1} است. حال در این سؤال، چون متغیر e_2 داریم، ستون دوم B^{-1} برابر است با منفی ستون متعلق به e_2.

در نتیجه داریم:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال $c_{BV} B^{-1}$ را بدست می‌آوریم:

$$c_{BV} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c_{BV}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ب)

$$\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \bar{a}_{x_2} = B^{-1} a_{x_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = 3 \\ c = 1 \end{matrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} b \rightarrow b = B \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$a = \bar{z} = c_{BV}^T B^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$$

سوال ۳) مدل LP زیر و معادلات بدست آمده از جدول نهایی آن به صورت زیر است.

جدول بهینه را بدست آورید.

$$\text{Max } Z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3$$

$$\text{s.t.} \quad -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20$$

$$12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$Z + a x_3 + b S_1 = 100$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 + S_1 = 20$$

$$16x_1 - 2x_3 - 4S_1 + S_2 = 10$$

جواب :

ابتدا جدول متناظر با معادلات فوق را تشکیل می دهیم :

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	۱	۰	۰	a	b	۰	۱۰۰
x_2	۰	۱-	۱	۳	۱	۰	۲۰
s_2	۰	۱۶	۰	۲-	۴-	۱	۱۰

حال مجهولات موجود در جدول را بدست می آوریم :

$$a = \bar{c}_{x_3} = c_{BV}^{T} B^{-1} a_{x_3} - c_{x_3}$$

$$b = \bar{c}_{s_1} = c_{BV}^{T} B^{-1} a_{s_1} - c_{s_1}$$

B^{-1} برابر است با ستون های زیر متغیرهای کمبود. پس :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

متغیرهای پایه ای x_2 و s_1 هستند. پس :

$$c_{BV}^{T} = \begin{bmatrix} c_{x_2} & c_{s_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}$$

پس داریم :

$$a = \bar{c}_{x_3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} - 14 = 2$$

$$b = \bar{c}_{s_2} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 5$$

با جایگذاری مقادیر $a = 2$ و $b = 5$ ، جدول بهینه بدست می آید.

سوال چهارم) مسئله زیر را با الگوریتم سیمپلکس با شروع از جواب شدنی پایه ای $(x_1, x_2) = (4, 0)$ حل کنید.

$$\text{Max} \quad Z = -x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t} \quad & 3x_1 + 4x_2 = 12 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

جواب: ابتدا مسئله را به صورت استاندارد می‌نویسیم :

$$\text{Max} \quad Z = -x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t} \quad 3x_1 + 4x_2 = 12$$

$$2x_1 - x_2 + S_2 = 12$$

$$x_1 , x_2 , S_2 \geq 0$$

	Z	x_1	x_2	S_2	RHS
Z	1	0	$\boxed{}$	0	-4
x_1	0	1		0	4
S_2	0	0		1	4

$$\longrightarrow -x_1 + 2x_2 = -4 + 2(0) = -4$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_{x_2} = c_{BV}^T B^{-1} a_{x_2} - c_{x_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} - (2) = -\frac{10}{3}$$

$$\bar{a}_{x_2} = B^{-1} a_{x_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

	Z	$x_۱$	$x_۲$	$S_۲$	RHS
Z	۱	۰	$-\frac{۱۰}{۳}$	۰	-۴
$x_۱$	۰	۱	$\frac{۴}{۳}$	۰	۴ →
$S_۲$	۰	۰	$-\frac{۱۱}{۳}$	۱	۴
			↑		

	Z	$x_۱$	$x_۲$	$S_۲$	RHS
Z	۱	$\frac{۵}{۲}$	۰	۰	۶
$x_۲$	۰	$\frac{۳}{۴}$	۱	۰	۳
$S_۲$	۰	$\frac{۱۱}{۴}$	۰	۱	۱۵

$Z^* = ۱۵$

$x_۱^* = ۰$ $\quad x_۲^* = ۳$

سؤال پنجم) نشان دهید چگونه فاز ۱ روش سیمپلکس را می‌توان برای حل n معادله n مجهول به کار برد.

حالت‌های زیر را بررسی کنید:

الف) بدون جواب

ب) بیشمار جواب

ج) جواب منحصر به فرد.

جواب :

الف) برای حل دستگاه، به سمت چپ هر معادله، یک a_i اضافه می‌کنیم. مانند مسئله فاز 1، تابع هدف را برابر با $\text{Min} \sum_{i=1}^{n} a_i$ قرار می‌دهیم و معادله‌ها را به عنوان قید در مدل می‌نویسیم.

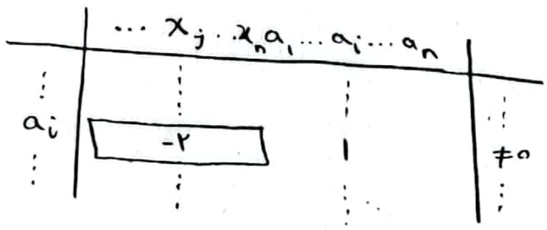
حال فرض کنید یک a_i با مقدار مخالف صفر در جدول نهایی وجود دارد.

دو حالت بوجود می‌آید:

۱) اگر دستگاه معادلات این شرط را داشته باشد که $x_i \geq 0$، آنگاه مطمئن هستیم که دستگاه جواب ندارد.

۲) اگر x_i ها متغیر آزاد باشند، یعنی بتوانند مقادیر منفی بگیرند، باید جدول را بررسی کنیم.

برای مثال فرض کنید یک a_i با مقدار مخالف صفر در پایه وجود دارد.

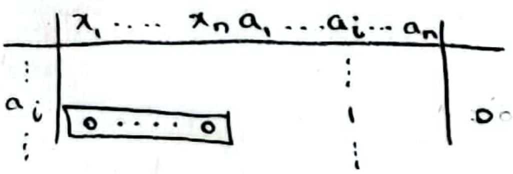


برای مثال فرض کنید x_j با ضریب الزاماً منفی (مثلاً ۲-) در سطر a_i وجود دارد.

در این حالت، چون x_i ها می‌توانند مقدار منفی هم بگیرند، a_i را از پایه خارج کرده و x_j را وارد می‌کنیم.

ولی اگر همه‌ی عناصر $\boxed{}$ صفر باشند، مطمئن هستیم جواب نداریم.

ب) فرض کنید $a_i = 0$ در پایه وجود دارد و ضریب تمام متغیرهای غیرپایه‌ای غیرمصنوعی در سطر مربوط به a_i برابر با صفر است. (حالت وجود قید زائد در فاز ۱)



در این صورت قید متناظر با a_i زائد بوده و می‌توانیم آن را حذف کنیم.

پس بیشمار جواب خواهیم داشت.

ج) اگر در جدول بهینه فاز ۱ همه‌ی a_i ها از پایه خارج شده باشند، جواب بهینه منحصر به فرد داریم.

سؤال ششم) جدول پایانی فاز یک در روش دوفازی برای حل یک مسئله مینیمم سازی استاندارد را در نظر بگیرید و فرض کنید در این جدول، هیچ متغیر مصنوعی در پایه نیست. در اینصورت با ذکر دلیل بگویید که در این جدول ضریب کاهش هزینه متناظر با متغیر های مصنوعی برابر با چه مقداری است؟

جواب :

تابع هدف در فاز ۱ روش دوفازی به صورت زیر است :

$$\text{Min} \quad w = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

پس ضریب x_i ها در تابع هدف برابر است با ۰ . درنتیجه $C_{Bv} = 0$.

حال ضریب یکی از متغیرهای مصنوعی، مثلاً a_i را در جدول پایانی بدست می‌آوریم :

$$\bar{C}_{a_i} = \underbrace{C_{Bv}^T}_{0} B^{-1} a_{a_i} - C_{a_i} = 0 - C_{a_i} = 0 - 1 = -1$$

پس ضریب همه‌ی متغیرهای مصنوعی برابر است با ۱- .

سوال هفتم) جدول سیمپلکس زیر را برای یک مسئله بهینه سازی (که محدودیت‌ها از نوع $\leq$ هستند و متغیرهای ۳ تا ۵ کمکی هستند) در نظر بگیرید.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	۰	a	۰	b	۰	f
	۱	۲-	۰	۱	۰	c
	۰	۱-	۱	۲	۰	d
	۰	۰	۰	۳	۱	e

فرض کنید $a<0$ و $b\geq 0$ و $c, d, e \geq 0$.

الف) B و B^{-1} را پیدا کنید.

ب) آیا جدول بهینه است؟ جدول آغازین را نیز بیابید.

اکنون فرض کنید $a \geq 0$ و $b \ngeq 0$ و $c, d, e \geq 0$.

ج) آیا جدول بهینه است؟

د) با فرض $a=3$ و $f=-8$ یک جواب شدنی با $Z=-200$ بدست آورید.

جواب:

ابتدا متغیرهای پایه ای را پیدا می‌کنیم و در جدول می‌نویسیم.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	0	a	0	b	0	f
x_1	1	-2	0	1	0	c
x_3	0	-1	1	2	0	d
x_5	0	0	0	3	1	e

الف) ستون های زیر متغیر کمکی، B^{-1} را نشان می‌دهند. پس:

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&2&0\\0&3&1\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}-2&1&0\\1&0&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$$

ب) چون مسئله مینیمم سازی است، ضرایب متغیرهای غیرپایه ای مثبت باید باشند، پس جدول بهین است.

برای پیدا کردن جدول اولیه، باید b، a_{x_i}، C_{x_i} را پیدا کنیم.

$$\bar{b}=B^{-1}b\rightarrow b=B\bar{b}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\1&0&0\\-3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\d\\e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2c+d\\c\\-3c+e\end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_{x_1}=B^{-1}a_{x_1}\rightarrow a_{x_1}=B\bar{a}_{x_1}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\1&0&0\\-3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\-3\end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_{x_2}=B^{-1}a_{x_2}\rightarrow a_{x_2}=B\bar{a}_{x_2}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\1&0&0\\-3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\\6\end{bmatrix}$$

چون x_3 و x_4 و x_5 متغیرهای کمکی قیدهای اول و دوم و سوم هستند، پس:

$$a_{x_3}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad a_{x_4}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad a_{x_5}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن C_{BV}^T از متغیرهای کمبود (x_3 و x_4 و x_5) استفاده می‌کنیم.

$$\bar{c}_{x_3} = C_{BV}^T \bar{a}_{x_3} - \cancel{c_{x_3}} \rightarrow 0 = [x \ \ y \ \ z] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\bar{c}_{x_4} = C_{BV}^T \bar{a}_{x_4} \rightarrow b = [x \ \ y \ \ z] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 2y + 3z = b$$

$$\bar{c}_{x_5} = C_{BV}^T \bar{a}_{x_5} \rightarrow 0 = [x \ \ y \ \ z] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow z = 0$$

$$x + 2y + 3z = b \xrightarrow[z=0]{y=0} x = b \Rightarrow \boxed{C_{BV}^T = (b, 0, 0)}$$

$$c_{x_2} = C_{BV}^T \underbrace{B^{-1} a_{x_2}}_{\bar{a}_{x_2}} - \bar{c}_{x_2} \rightarrow c_{x_2} = [b \ \ 0 \ \ 0] \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - a = -2b - a$$

$$c_{x_1} = C_{BV}^T \bar{a}_{x_1} - \bar{c}_{x_1} = [b \ \ 0 \ \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} - 0 = b$$

ضریب متغیرهای کمبود در جدول اولیه برابر با صفر است.

$$c_{x_3} = c_{x_4} = c_{x_5} = 0$$

پس جدول اولیه به صورت زیر است:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	$-b$	$a+2b$	0	0	0	0
x_3	-2	3	1	0	0	$-2c+d$
x_4	1	-2	0	1	0	c
x_5	-3	6	0	0	1	$-3c+e$

ج) اگر $a > 0$ آنگاه x_2 می‌تواند وارد پایه شود. اما چون آزمون نسبت قابل انجام نیست، پس جواب بیکران است.

اگر $a = 0$، شعاع بهینه دیگری داریم.

د) اگر $a=3$ باشد، متغیر x_3 برای ورود به پایه انتخاب می‌شود و چون مسئله بی‌کران است، x_2 می‌تواند هر مقدار دلخواهی بگیرد.

فرض کنید x_2 مقدار w را بگیرد، طبق تقریب ضریب کاهش هزینه، تابع هدف $3w$ واحد کاهش می‌یابد. پس:

$$-200 = -8 - 3w \rightarrow 3w = 192 \rightarrow w = 64$$

پس اگر مقدار متغیر x_2 برابر با ۶۴ باشد و بقیه‌ی متغیرها، همان مقدار موجود در جدول را بگیرند، $Z=-200$ می‌شود.

$x_1 = c$ و $x_2 = 64$ و $x_3 = d$ و $x_4 = x_5 = 0$

$Z = -200$

سؤال اول) دوگان مسئله زیر را بنویسید.

$$\text{Max } Z = 4x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 \leq 5 && \rightarrow \quad y_1 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 7 && \rightarrow \quad y_2 \\
& 2x_1 + x_3 \geq 6 && \rightarrow \quad y_3 \\
& x_1 + x_3 = 4 && \rightarrow \quad y_4 \\
& x_1 \geq 0 \text{ و } x_2, x_3 \text{ آزاد}
\end{aligned}$$

جواب :

مسئله max سازی	مسئله min سازی
قید $\leq$	متغیر نامنفی
قید $\geq$	متغیر نامثبت
قید $=$	متغیر آزاد
متغیر نامثبت	قید $\leq$
متغیر نامنفی	قید $\geq$
متغیر آزاد	قید $=$

$$\begin{aligned}
\text{Min } w &= 5y_1 + 7y_2 + 6y_3 + 4y_4 \\
\text{s.t } \quad & y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 \bigcirc 4 \\
& y_1 + y_2 \bigcirc -1 \\
& y_3 + y_4 \bigcirc 2 \\
& y_1 \bigcirc 0 \\
& y_2 \bigcirc 0 \\
& y_3 \bigcirc 0 \\
& y_4 \ \text{آزاد}
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
\text{Min } w &= 5y_1 + 7y_2 + 6y_3 + 4y_4 \\
\text{s.t } \quad & y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 \geq 4 \\
& y_1 + y_2 = -1 \\
& y_3 + y_4 = 2 \\
& y_1 \geq 0 \\
& y_2 \geq 0 \\
& y_3 \leq 0 \\
& y_4 \ \text{آزاد}
\end{aligned}$$