جلسه ششم

۲ آذر ۱۴۰۱

مبحث سیمپلکس

معصومه پرداختی

سوال اول) مسئله‌ی زیر را به روش سیمپلکس دوفازی حل کنید.

$$\text{Min } Z = x_1 + 3x_2 - x_3$$

$$\text{s.t} \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 3$$

$$-x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

جواب:

استاندارد سازی:

$$\text{Min } Z = x_1 + 3x_2 - x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t} \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 - e_1 = 3 \\ & -x_1 - 5x_2 + x_3 + s_2 = 4 \\ & -x_1 + x_2 - e_3 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, e_1, s_2, e_3 \geq 0 \end{aligned}$$

مسئله فاز ۱:

$$\text{Min } w = a_1 + a_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t} \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 - e_1 + a_1 = 3 \\ & -x_1 - 5x_2 + x_3 + s_2 = 4 \\ & -x_1 + x_2 - e_3 + a_3 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, e_1, s_2, e_3, a_1, a_3 \geq 0 \end{aligned}$$

	w	x_1	x_2	x_3	e_1	s_2	e_3	a_1	a_3	RHS
w	1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
a_1	0	2	1	3	-1	0	0	1	0	3
s_2	0	-1	-5	1	0	1	0	0	0	4
a_3	0	-1	1	0	0	0	-1	0	1	3

اصلاح جدول:

	w	x_1	x_2	x_3	e_1	s_2	e_3	a_1	a_3	RHS
w	1	1	2	3	-1	0	-1	0	0	6
a_1	0	2	1	3	-1	0	0	1	0	3
s_2	0	-1	-5	1	0	1	0	0	0	4
a_3	0	-1	1	0	0	0	-1	0	1	3

	w	x_1	x_2	x_3	e_1	s_2	e_3	a_1	a_3	RHS
w	1	-1	1	0	0	0	-1	-1	0	3
x_3	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1
s_2	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{16}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	1	$-\frac{1}{3}$	0	3
a_3	0	-1	1	0	0	0	-1	0	1	3

	w	x_1	x_2	x_3	e_1	s_2	e_3	a_1	a_3	RHS
w	1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_3	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
s_2	0	$-\frac{19}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$	19
x_2	0	-1	1	0	0	0	-1	0	1	3

پایان فاز اول

$BV = \{x_3, s_2, x_2\}$ و $NBV = \{x_1, s_1, s_3\}$

$(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (0, 3, 0, 0, 19, 0)$

فاز دوم :

	z	x_1	x_2	x_3	e_1	s_2	e_3	RHS
z	۱	−۱	−۳	+۱	۰	۰	۰	۰
x_3	۰	۱/۳	۰	۱	−۱/۳	۰	۱/۳	۰
s_2	۰	−۷	۰	۰	۱/۳	۱	−۱۳/۳	۱۹
x_2	۰	−۱	۱	۰	۰	۰	−۱	۳

اصلاح جدول :

	z	x_1	x_2	x_3	e_1	s_2	e_3	RHS
z	۱	−۱۳/۳	۰	۰	−۱/۳	۰	۰	۹
x_3	۰	۱/۳	۰	۱	−۱/۳	۰	۱/۳	۰
s_2	۰	−۷	۰	۰	۱/۳	۱	−۱۳/۳	۱۹
x_2	۰	−۱	۱	۰	۰	۰	−۱	۳

$z^* = ۹$

$x_2^* = ۳ \qquad x_3^* = e_1^* = s_2^* = e_3^* = ۰$

سوال دوم) کدام عبارت درباره روش سیمپلکس صحیح نیست؟

۱) بهینه را تعیین می‌کند.

۲) بی‌نهایت یا نشدنی بودن مسأله را نشان می‌دهد.

۳) در هر تکرار، مقدار تابع هدف یا بهبود می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

۴) حداکثر در m تکرار، به جواب بهینه می‌رسد. (m تعداد گره‌هاست.)

جواب: گزینه ۴.

امکان دارد یک نقطه گوشه‌ای، تباهیده باشد و در چند تکرار، در یک نقطه درجا بزنیم.

سؤال سوم: مسئله برنامه ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_5 + x_6$$

$$\text{s.t } 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 \leq 60$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

به چنین مسئله ای که علاوه بر محدودیت های علامت تنها یک قید دارد، مسئله کوله پشتی گفته می شود.

الف) تمام جواب های پایه ای مسئله را بیابید و با مقایسه جواب های شدنی پایه ای، مقدار بهینه را بیابید.

ب) با روش سیمپلکس مسئله را حل کنید.

ج) آیا می توانید راه حل ساده تری برای حل مسئله کوله پشتی ارائه کنید؟

جواب :

الف) ابتدا مسئله را استاندارد سازی می‌کنیم:

$$\text{Max } z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_5 + x_6$$

$$\text{s.t} \quad 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 + s_1 = 60$$

$$x_i, s_1 \geq 0 \quad \forall i$$

با توجه به مسئله، باید یک متغیر پایه‌ای و ۶ متغیر غیرپایه‌ای داشته باشیم. حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم:

(۱) $BV = \{x_1\}$, $NBV = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, s_1\}$

$$3x_1 = 60 \rightarrow x_1 = 20 \Rightarrow z^* = 2x_1 = 2 \times 20 = 40$$

(۲) $BV = \{x_2\}$ $NBV = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, s_1\}$

$$6x_2 = 60 \rightarrow x_2 = 10 \Rightarrow z^* = x_2 = 10$$

(۳) $BV = \{x_3\}$ $NBV = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, s_1\}$

$$3x_3 = 60 \rightarrow x_3 = 20 \Rightarrow z^* = 4x_3 = 4 \times 20 = 80$$

(۴) $BV = \{x_4\}$ $NBV = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, s_1\}$

$$2x_4 = 60 \rightarrow x_4 = 30 \Rightarrow z^* = 0$$

(۵) $BV = \{x_5\}$ $NBV = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, s_1\}$

$$3x_5 = 60 \rightarrow x_5 = 20 \Rightarrow z^* = 5x_5 = 5 \times 20 = 100$$

(۶) $BV = \{x_6\}$ $NBV = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_1\}$

$$4x_6 = 60 \rightarrow x_6 = 15 \Rightarrow z^* = x_6 = 15$$

(۷) $BV = \{s_1\}$ $NBV = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$$s_1^* = 60 \Rightarrow z^* = 0$$

با بررسی تمام متغیرها، می‌بینیم که جواب بهین برابر است با ۱۰۰ و $x_5^* = 20$.

ب) سطر صفر: $Z - 2x_1 - x_2 - 4x_3 - 5x_5 - x_6 = 0$

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	RHS
Z	1	-2	-1	-4	0	-5	-1	0	0
s_1	0	3	6	3	2	3	4	1	60 →
						↑			

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	RHS
Z	1	3	9	1	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{17}{3}$	$\frac{5}{3}$	100
x_3	0	1	2	1	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	20

$x_3^* = 20$

$Z^* = 100$

ج) نسبت ضریب هر متغیر در تابع هدف به ضریب آن در قید را بدست می‌آوریم. به متغیری که بزرگترین نسبت را دارد، بیشترین مقدار را می‌دهیم و باقی متغیرها را برابر با صفر قرار می‌دهیم.

$x_1 : \frac{2}{3}$ $\quad x_2 : \frac{1}{6}$ $\quad x_3 : \frac{4}{3}$ $\quad x_5 : \frac{5}{3}$ $\quad x_6 : \frac{1}{4}$

بیشترین مقداری که متغیر x_5 می‌تواند بگیرد برابر است با $\frac{60}{3} = 20$.

در نتیجه $Z^* = 5 \times 20 = 100$.

Scanned with CamScanner

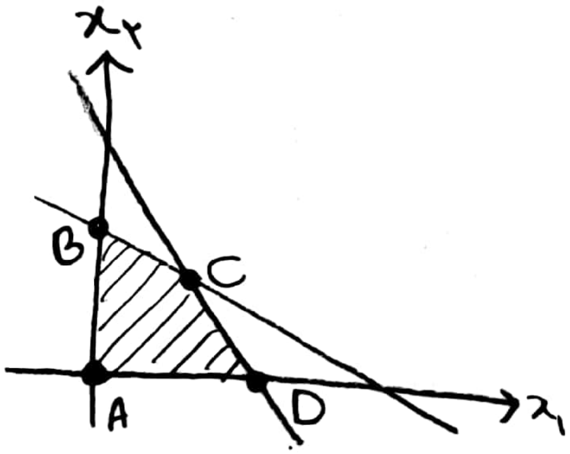
سؤال چهارم) فرض کنید جواب شدنی پایه ای بهینه یک LP تبهگن است. اگر در سطر صفر جدول بهینه، متغیر غیر پایه ای با ضریب صفر وجود داشته باشد، نشان دهید یکی از حالت های زیر، برقرار خواهد بود:

حالت ۱: مسئله بیش از یک جواب بهینه دارد.

حالت ۲: مسئله جواب بهینه منحصر به فرد دارد.

جواب: اگر هنگام وارد کردن متغیر غیر پایه‌ای که در سطر صفر، ضریب صفر دارد، به پایه، برنده آزمون نسبت صفر شده، در همان نقطه باقی می‌مانیم و مسئله جواب بهین منحصر به فرد دارد.
اما اگر برنده‌ی آزمون نسبت صفر نشده متغیر غیر پایه‌ای با ضریب صفر در سطر صفر، وارد پایه می‌شود و جواب بهین دیگری خواهیم داشت.

سؤال پنجم) فرض کنید شکل زیر، ناحیه شدنی یک مسأله برنامه ریزی خطی با هدف $Max\ Z = 5x_1 + 9x_2$ را نشان می دهد. در این صورت:



۱) جدول سیمپلکس متناظر با گوشه A، جواب بهینه را نشان می دهد.

۲) ضریب x_2 در سطر تابع هدف جدول سیمپلکس نقطه ی A، مثبت است.

۳) در سطر تابع هدف جدول سیمپلکس نقطه A، ضریب x_1 منفی است.

۴) در سطر تابع هدف جدول سیمپلکس نقطه A، ضریب x_1 مثبت است.

جواب :

گزینه ۱ نادرست است. زیرا مسئله ماکسیمم سازی است و همه‌ی نقاط شدنی، بهینه‌تر از A هستند.

گزینه ۲ نادرست است. زیرا همانطور که در شکل مشخص است، هنگامی که در نقطه A هستیم، متغیر x_2 امکان افزایش دارد و می‌تواند Z را بهبود دهد. در نتیجه ضریب x_2 در سطر صفر منفی است.

گزینه ۴ نادرست است. (دقیقاً مانند گزینه قبل)

گزینه صحیح، گزینه ۳ می‌باشد.

سؤال ششم) جدول زیر در یکی از تکرارهای الگوریتم سیمپلکس برای یک مسئله بدست آمده است.

با فرض اینکه همه ی متغیر ها نامنفی هستند، واضح است که جدول فعلی برای هیچ یک از حالات Min سازی و Max سازی بهینه نیست.

الف) متغیرها را به دو دسته پایه ای و غیر پایه ای تقسیم و مقدار فعلی آن ها را تعیین کنید.

ب) با ورود کدام متغیرهای غیر پایه ای به داخل پایه، تغییری در Z حاصل نمی شود؟

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	RHS
Z	۱	۰	-۵	۰	۴	-۱	-۱۰	۰	۰	۶۲۰
x_8	۰	۰	۳	۰	-۲	-۳	-۱	۵	۱	۱۲
x_3	۰	۰	۱	۱	۳	۱	۰	۳	۰	۶
x_1	۰	۱	-۱	۰	۰	۶	-۴	۰	۰	۰

جواب :

الف)

$BV = \{x_8, x_3, x_1\}$

$NBV = \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}$

$x_8 = 12 \quad , \quad x_3 = 6 \quad , \quad x_1 = 0$

$x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$

ب) باید به دنبال متغیر غیر پایه ای با ضریب صفر در سطر صفر بگردیم.

متغیر x_7 در سطر صفر، ضریب صفر دارد. همچنین هنگام ورود به پایه، برنده ی آزمون نسبت برابر با صفر می شود. پس در همین نقطه می مانیم و مقدار تابع هدف تغییر نمی کند.

جداول داده شده جداول نهایی فاز اول برای تابع هدف $Min\ z = x_1 + x_2 + x_3$ هستند . درباره جواب بهین هر یک از موارد بحث کنید و در صورت وجود جواب بهین را بدست آورید .

الف)

basic	x_1	x_2	x_3	a_1	a_2	rhs
$-z'$	0	0	0	1	1	0
	3	0	1	−1	2	0
	2	1	0	0	1	5

basic	x_1	x_2	x_3	a_1	a_2	rhs
$-z'$	0	1	2	0	0	−1
	0	1	−2	−3	1	1
	1	3	4	1	0	3

basic	x_1	x_2	x_3	a_1	a_2	rhs
$-z'$	0	0	0	3	0	0
	1	2	12	1	0	3
	0	0	0	−2	1	0

جواب :

الف) در این جدول ، متغیرهای x_2 و x_3 متغیرهای پایه‌ای هستند. پس a_1 و a_2 هردو از پایه خارج شده و مقدار z' برابر با صفر است. در نتیجه مسئله شدنی است.

برای بدست آوردن جواب بهینه باید وارد فاز دوم شویم :

سطر صفر : $z - x_1 - x_2 - x_3 = 0$

	x_1	x_2	x_3	RHS
z	-1	-1	-1	0
x_3	3	0	1	0
x_2	2	1	0	5

اصلاح جدول :

	x_1	x_2	x_3	RHS
z	4	0	0	5
x_3	3	0	1	0
x_2	2	1	0	5

$z^* = 5$

$x_2^* = 5 \quad x_1^* = x_3^* = 0$

* اگر x_1 را وارد پایه کنیم ، چون برنده آزمون نسبت صفر است ، در همین نقطه می‌مانیم.

ب) در این جدول a_2 در پایه مانده و RHS صفر نشده است. پس مسئله نشدنی است.

ج) در این جدول، x_1 و a_2 متغیرهای پایه‌ای هستند که a_2 مقدار صفر گرفته است. همچنین در سطر نظیر a_2 همه‌ی متغیرهای غیر پایه‌ای غیرمصنوعی مقدار صفر گرفته اند. پس قید نظیر سطر a_2 زائد است. آن را حذف می‌کنیم و جدول مرحله دوم را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

سطر صفر: $Z - x_1 - x_2 - x_3 = 0$

	x_1	x_2	x_3	RHS
Z	-1	-1	-1	0
x_1	1	2	12	3

اصلاح جدول:

	x_1	x_2	x_3	RHS
Z	0	1	-11	3
x_1	1	2	12	3 →

	x_1	x_2	x_3	RHS
Z	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{5}{6}$	0	$\frac{1}{4}$
x_3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{4}$

$Z^* = \frac{1}{4}$

$x_3^* = \frac{1}{4}$

$x_1^* = x_2^* = 0$

سوال هشتم)

آیا می‌توان برداری را که در یک تکرار روش سیمپلکس وارد پایه شده، در تکرار بعد بلافاصله از پایه خارج کرد؟ این اتفاق چه زمانی امکان‌پذیر و چه زمانی ناممکن است؟

جواب:

فرض می‌کنیم در تکرار فعلی، x_j وارد پایه می‌شود و در تکرار بعدی، x_k می‌خواهد وارد پایه شود.

	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	RHS
x_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0			y_{1k}			$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$			
x_j	0	$\cdots$	1		0			y_{jk}			$\bar{b}_j$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$			
x_m	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0			y_{mk}			$\bar{b}_m$

اگر $y_{jk} \leq 0 \Rightarrow x_j$ خارج نمی‌شود.

اگر $y_{jk} > 0$ و مینیمم نسبت برابر با $\dfrac{\bar{b}_j}{y_{jk}}$ شود، در این صورت x_j دوباره خارج می‌شود.

سؤال نهم) نشان دهید در روش سیمپلکس یک متغیر زاید، در صورت خروج از پایه، نمی‌تواند در تکرار بعدی وارد پایه شود.

جواب:

فرض می‌کنیم مسئله مینیمم سازی باشد. متغیر x_j وقتی از پایه خارج می‌شود به مینیمم نسبت برابر با

$\frac{\bar{b}_j}{y_{jk}}$ می‌شود.

	x_1	…	x_j	…	x_m	x_{m+1}	…	x_k	…	x_n	RHS
Z	c_1	…	c_j	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n	
x_1			0					y_{1k}			$\bar{b}_1$
⋮			⋮					⋮			⋮
x_j			1					y_{jk}			$\bar{b}_j$
⋮			⋮					⋮			⋮
x_m			0					y_{mk}			$\bar{b}_m$

فرض می‌کنیم x_k وارد پایه شود. پس $c_k>0$. در جدول بعدی c'_j را محاسبه می‌کنیم:

$$c'_j = c_j - \frac{1}{y_{jk}} \times c_k$$

چون در جدول قبل، x_j در پایه بوده، پس $c_j=0$. از طرفی $c_k>0$ و $y_{jk}>0$. پس:

$$c'_j = -\frac{1}{y_{jk}} \times c_k < 0$$

پس x_j نمی‌تواند وارد پایه شود.

سوال دهم) جدول زیر، جدول بهینه یک مسئله ماکسیمم سازی را نشان می دهد. تحت شرایط زیر کدام گزینه مسئله دارای حالت خاص جواب بهینه دیگر، تباهیدگی، ناحیه شدنی نامحدود است؟

الف) $f \neq 0$, $e = 0$ و $c < 0$ و $b \geq 0$ و $a \neq 0$

ب) $f \neq 0$, $e = 0$ و $c < 0$ و $b \leq 0$ و $a = 0$

ج) $f \neq 0$, $e \neq 0$, $c \leq 0$ و $b > 0$, $a = 0$

د) $f \neq 0$, $e \neq 0$ و $c \leq 0$ و $b \geq 0$ و $a = 0$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	۱	۰	۰	a	۳	۲	
x_2	۰	۰	۱	b	۱	۰	e
x_1	۰	۱	۰	c	۲	۴	f

جواب :

گزینه ب صحیح است.

اگر $c=0$ ، آنگاه مسئله تباهیده است.

حال اگر $a = 0$ باشد، متغیر غیرپایه‌ای با ضریب صفر داریم. برای اینکه در نقطه‌ی فعلی نمانیم، نباید برنده آزمون نسبت برابر با صفر شود. پس باید $b>0$ باشد. در اینصورت جواب بهین دگرین خواهیم داشت.

همچنین اگر $c<0$ باشد، آزمون نسبت برقرار نمی‌شود. پس شعاع بهین دگرین داریم و ناحیه شدنی نامحدود است.