«بسمه‌تعالی»

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)

درس بهینه‌سازی خطی — مدرس: دکتر هوشمند

فصل پنجم: مسأله دوگان (Dual Problem)

متناظر با هر LP، یک LP دیگر وجود دارد که مسألهٔ دوگان (Dual Problem) نام دارد.

وقتی از دوگان یک مسأله صحبت می‌کنیم، آن مسأله را مسألهٔ اولیه (Primal Problem) می‌نامیم.

قبل از شرح مسألهٔ دوگان، لازم است دو مسألهٔ زیر را تعریف کنیم:

مسألهٔ Maxسازی نرمال	مسألهٔ Minسازی نرمال
هدف: maxسازی $\max z = c^T x$	هدف: minسازی $\min z = c^T x$
$s.t.$	$s.t.$
قیود: کوچکترمساوی $Ax \leq b$	قیود: بزرگترمساوی $Ax \geq b$
متغیرها: نامنفی $x \geq 0$	متغیرها: نامنفی $x \geq 0$

دوگان یک مسألهٔ ماکزیمم‌سازی نرمال و تفسیر اقتصادی آن

شرکتی میز تحریر، میز و صندلی تولید می‌کند.

منابع \ محصولات	میز تحریر	میز	صندلی
چوب	۸ فوت مربع	۶ فوت مربع	۱ فوت مربع
نقاشی	۴ ساعت	۲ ساعت	۱/۵ ساعت
نجاری	۲ ساعت	۱/۵ ساعت	۰/۵ ساعت
قیمت فروش	۶۰ دلار	۳۰ دلار	۲۰ دلار

در حال حاضر، ۴۸ فوت مربع چوب، ۲۰ ساعت برای نقاشی و ۸ ساعت برای نجاری در دسترس است.

متغیرهای تصمیم:

تعداد میز تحریر تولید شده	: x_1
تعداد میز تولید شده	: x_2
تعداد صندلی تولید شده	: x_3

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$
$$s.t.$$
$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$
$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20$$
$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

یک مسألهٔ ماکزیمم‌سازی نرمال

در مسألهٔ قبل، فرض کنید:

یک خریدار موارد اولیه بخواهد تمام منابع شرکت را بخرد.

مبلغی که خریدار حاضر است برای خرید یک فوت مربع چوب بپردازد	:	y_1
مبلغی که خریدار حاضر است برای خرید یک ساعت نقاشی بپردازد	:	y_2
مبلغی که خریدار حاضر است برای خرید یک ساعت نجاری بپردازد	:	y_3

$$\begin{aligned}
&\min w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 \\
&s.t. \\
&8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60 \\
&6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30 \\
&y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20 \\
&y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

یک مسألهٔ مینیمم‌سازی نرمال

$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$	$\min w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$
$s.t.$	$s.t.$
$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$ y_1	$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60$ x_1
$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20$ y_2	$6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30$ x_2
$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8$ y_3	$y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20$ x_3
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

مسألهٔ اولیه → **مسألهٔ دوگان**

دوگان یک مسألۀ مینیمم‌سازی نرمال و تفسیر اقتصادی آن

شرکتی سه نوع محصول تولید می‌کند.

از محصولات ۱، ۲ و ۳ به ترتیب ۷۰، ۵۰ و ۴۰ واحد سفارش گرفته و باید برآورده کند.

برای تولید محصولات، دو فرآیند را می‌توان به کار برد.

	محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳	هزینه
هربار راه‌اندازی فرآیند ۱	۳	۶	۷	۳۰ دلار
هربار راه‌اندازی فرآیند ۲	۶	۳	۶	۴۰ دلار

شرکت باید تصمیم بگیرد هر فرآیند را چند بار به کار ببرد تا تقاضاها با کمترین هزینه تأمین شود.

متغیرهای تصمیم:

تعداد دفعات راه‌اندازی فرآیند i $(i = 1,2)$	x_i :

$$\begin{aligned}
&\min z = 30x_1 + 40x_2 \\
&s.t. \\
&3x_1 + 6x_2 \geq 70 \\
&6x_1 + 3x_2 \geq 50 \\
&7x_1 + 6x_2 \geq 40 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

یک مسألۀ مینیمم‌سازی نرمال

فرض کنید یک فروشنده به شرکت پیشنهاد زیر را داده است:

«به جای اینکه خودتان محصولات ۱ و ۲ و ۳ را تولید کنید، این محصولات را از ما بخرید و به مشتریانتان تحویل دهید»

قیمتی که فروشنده برای محصول i پیشنهاد میدهد	: y_i

$$\max w = 70y_1 + 50y_2 + 40y_3$$
$$s.t.$$
$$3y_1 + 6y_2 + 7y_3 \leq 30$$
$$6y_1 + 3y_2 + 6y_3 \leq 40$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

یک مسألهٔ ماکزیمم‌سازی نرمال

$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$ $s.t.$ $8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$ $\quad y_1$ $4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20$ $\quad y_2$ $2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8$ $\quad y_3$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$\min w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$ $s.t.$ $8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60$ $\quad x_1$ $6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30$ $\quad x_2$ $y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20$ $\quad x_3$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

مسألهٔ اولیه → مسألهٔ دوگان

$\min z = 30x_1 + 40x_2$ $s.t.$ $3x_1 + 6x_2 \geq 70$ $\quad y_1$ $6x_1 + 3x_2 \geq 50$ $\quad y_2$ $7x_1 + 6x_2 \geq 40$ $\quad y_3$ $x_1, x_2 \geq 0$	$\max w = 70y_1 + 50y_2 + 40y_3$ $s.t.$ $3y_1 + 6y_2 + 7y_3 \leq 30$ $\quad x_1$ $6y_1 + 3y_2 + 6y_3 \leq 40$ $\quad x_2$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

دوگان یک مسألهٔ مینیمم‌سازی نرمال، یک مسألهٔ ماکزیمم‌سازی نرمال است.

دوگان یک مسألهٔ ماکزیمم‌سازی نرمال، یک مسألهٔ مینیمم‌سازی نرمال است.

فرمول‌بندی مسألهٔ دوگان از طریق بازنویسی مسألهٔ اولیه به صورت نرمال

مثال: دوگان مسألهٔ زیر را بنویسید.

$\min z = 4x_1 + x_2$ $s.t.$ $3x_1 + x_2 \leq 4$ $4x_1 + 3x_2 \geq 6$ $x_1 + 2x_2 \leq 3$ $x_1, x_2 \geq 0$ نرمال‌سازی	$\max w = 4y_1 + 6y_2 + 3y_3$ $s.t.$ $3y_1 + 4y_2 + y_3 \bigcirc 4$ $y_1 + 3y_2 + 2y_3 \bigcirc 1$ $y_1 \bigcirc \quad , y_2 \bigcirc \quad , y_3 \bigcirc$
$\min z = 4x_1 + x_2$ $s.t.$ $-3x_1 - x_2 \geq -4 \qquad y_1'$ $4x_1 + 3x_2 \geq 6 \qquad y_2$ $-x_1 - 2x_2 \geq -3 \qquad y_3'$ $x_1, x_2 \geq 0$ دوگان	$\max w = -4y_1' + 6y_2 - 3y_3'$ $s.t.$ $-3y_1' + 4y_2 - y_3' \leq 4$ $-y_1' + 3y_2 - 2y_3' \leq 1$ $y_1', y_2, y_3' \geq 0$ تغییر متغیر $y_1 = -y_1', y_3 = -y_3'$
	$\max w = 4y_1 + 6y_2 + 3y_3$ $s.t.$ $3y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 4$ $y_1 + 3y_2 + 2y_3 \leq 1$ $y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0$

«قـــــــواعد»

مسألهٔ اولیه	مسألهٔ دوگان
قید در مسألهٔ اولیه به صورت **نامساوی** در وضعیت **نرمال**	**متغیر نظیرش** در مسألهٔ دوگان به صورت **نرمال (نامنفی)**
قید در مسألهٔ اولیه به صورت **نامساوی** در وضعیت **غیرنرمال**	**متغیر نظیرش** در مسألهٔ دوگان به صورت **غیرنرمال (نامثبت)**
متغیر در مسألهٔ اولیه به صورت **نرمال (نامنفی)**	**قید نظیرش** در مسألهٔ دوگان به صورت **نرمال**

مثال: دوگان مسألهٔ زیر را بنویسید.

$\max z = x_1 + 2x_2$ $s.t.$ $2x_1 + x_2 = 5$ $3x_1 - x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$ نرمال‌سازی	$\min w = 5y_1 + 6y_2$ $s.t.$ $2y_1 + 3y_2 \quad 1$ $y_1 - y_2 \quad 2$ $y_1 \quad , y_2$
$\max z = x_1 + 2x_2$ $s.t.$ $2x_1 + x_2 \le 5 \qquad y_1'$ $-2x_1 - x_2 \le -5 \qquad y_1''$ $3x_1 - x_2 \le 6 \qquad y_2$ $x_1, x_2 \ge 0$ دوگان	$\min w = 5y_1' - 5y_1'' + 6y_2$ $s.t.$ $2y_1' - 2y_1'' + 3y_2 \ge 1$ $y_1' - y_1'' - y_2 \ge 2$ $y_1', y_1'', y_2 \ge 0$ تغییر متغیر $y_1 = y_1' - y_1''$
	$\min w = 5y_1 + 6y_2$ $s.t.$ $2y_1 + 3y_2 \ge 1$ $y_1 - y_2 \ge 2$ y_1 آزاد $y_2 \ge 0$

«قـــــواعد»

مسألهٔ اولیه	مسألهٔ دوگان
قید در مسألهٔ اولیه به صورت نامساوی در وضعیت نرمال	متغیر نظیرش در مسألهٔ دوگان به صورت نرمال (نامنفی)
قید در مسألهٔ اولیه به صورت نامساوی در وضعیت غیرنرمال	متغیر نظیرش در مسألهٔ دوگان به صورت غیرنرمال (نامثبت)
قید در مسألهٔ اولیه به صورت تساوی	متغیر نظیرش در مسألهٔ دوگان به صورت آزاد
متغیر در مسألهٔ اولیه به صورت نرمال (نامنفی)	قید نظیرش در مسألهٔ دوگان به صورت نامساوی نرمال

مثال: دوگان مسألهٔ زیر را بنویسید.

$\max z = 3x_1 + x_2$ $s.t.$ $2x_1 + x_2 \le 4$ $3x_1 - x_2 \le 6$ x_1 آزاد $x_2 \ge 0$ نرمال‌سازی	$\min w = 4y_1 + 6y_2$ $s.t.$ $2y_1 + 3y_2 \bigcirc 3$ $y_1 - y_2 \bigcirc 1$ $y_1 \bigcirc, \quad y_2 \bigcirc$
$\max z = 3x_1' - 3x_1'' + x_2$ $s.t.$ $2x_1' - 2x_1'' + x_2 \le 4 \quad y_1$ $3x_1' - 3x_1'' - x_2 \le 6 \quad y_2$ $x_1' \ge 0, x_1'' \ge 0$ $x_2 \ge 0$ دوگان	$\min w = 4y_1 + 6y_2$ $s.t.$ $2y_1 + 3y_2 \ge 3$ $-2y_1 - 3y_2 \ge -3$ $y_1 - y_2 \ge 1$ $y_1, y_2 \ge 0$
	$\min w = 4y_1 + 6y_2$ $s.t.$ $2y_1 + 3y_2 = 3$ $y_1 - y_2 \ge 1$ $y_1, y_2 \ge 0$

«قـــــواعد»

مسألهٔ اولیه	مسألهٔ دوگان
قید در مسألهٔ اولیه به صورت نامساوی در وضعیت نرمال	متغیر نظیرش در مسألهٔ دوگان به صورت نرمال (نامنفی)
قید در مسألهٔ اولیه به صورت نامساوی در وضعیت غیرنرمال	متغیر نظیرش در مسألهٔ دوگان به صورت غیرنرمال (نامثبت)
قید در مسألهٔ اولیه به صورت تساوی	متغیر نظیرش در مسألهٔ دوگان به صورت آزاد
متغیر در مسألهٔ اولیه به صورت نرمال (نامنفی)	قید نظیرش در مسألهٔ دوگان به صورت نامساوی نرمال
متغیر در مسألهٔ اولیه به صورت غیرنرمال و آزاد	قید نظیرش در مسألهٔ دوگان به صورت تساوی
متغیر در مسألهٔ اولیه به صورت غیرنرمال و نامثبت	قید نظیرش در مسألهٔ دوگان به صورت نامساوی غیرنرمال

مثال: دوگان مسألهٔ زیر را بنویسید.

$\min z = 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 7x_4$ $s.t.$ $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 250$ $\quad \boldsymbol{y_1}$ $4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 125$ $\quad \boldsymbol{y_2}$ $x_1 + x_3 - x_4 = 30$ $\quad \boldsymbol{y_3}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ x_4 آزاد	$\max w = 250y_1 + 125y_2 + 30y_3$ $s.t.$ $2y_1 + 4y_2 + y_3 \quad\bigcirc\quad 5$ $\quad \boldsymbol{x_1}$ $3y_1 - 2y_2 \quad\bigcirc\quad 4$ $\quad \boldsymbol{x_2}$ $y_1 + 3y_2 + y_3 \quad\bigcirc\quad 8$ $\quad \boldsymbol{x_3}$ $2y_1 + y_2 - y_3 \quad\bigcirc\quad 7$ $\quad \boldsymbol{x_4}$ $y_1 \bigcirc$ $y_2 \bigcirc$ $y_3 \bigcirc$

$$\max w = 250y_1 + 125y_2 + 30y_3$$
$$s.t.$$
$$2y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 5$$
$$3y_1 - 2y_2 \leq 4$$
$$y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 8$$
$$2y_1 + y_2 - y_3 = 7$$
$$y_1 \leq 0$$
$$y_2 \geq 0$$
y_3 آزاد

مثال: دوگان مسألهٔ زیر را بنویسید.

$\max z = 5x_1 + 2x_2$ $s.t.$ $x_1 - 6x_2 \geq 2$ $\boldsymbol{y_1}$ $5x_1 + 7x_2 = -4$ $\boldsymbol{y_2}$ $x_1 \leq 0$ $x_2 \geq 0$	$\min w = 2y_1 - 4y_2$ $s.t.$ $y_1 + 5y_2 \quad 5$ $\boldsymbol{x_1}$ $-6y_1 + 7y_2 \quad 2$ $\boldsymbol{x_2}$ y_1 y_2

$$\min w = 2y_1 - 4y_2$$
$$s.t.$$
$$y_1 + 5y_2 \leq 5$$
$$-6y_1 + 7y_2 \geq 2$$
$$y_1 \leq 0$$
y_2 آزاد

مثال: دوگان مسألهٔ زیر را بنویسید.

<table>
<tr>
<td>

$\min z = -2x_1 + 3x_2 + 5x_3$
$s.t.$
$-2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 5 \quad \boldsymbol{y_1}$
$2x_1 + x_3 = 4 \quad \boldsymbol{y_2}$
$2x_2 + x_3 - 2x_4 = 6 \quad \boldsymbol{y_3}$
$x_1 \leq 0$
$x_2, x_3 \geq 0$
x_4 آزاد

</td>
<td>

$\max w = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$
$s.t.$
$-2y_1 + 2y_2 \bigcirc -2 \quad \boldsymbol{x_1}$
$y_1 + 2y_3 \bigcirc 3 \quad \boldsymbol{x_2}$
$3y_1 + y_2 + y_3 \bigcirc 5 \quad \boldsymbol{x_3}$
$y_1 - 2y_3 \bigcirc 0 \quad \boldsymbol{x_4}$
$y_1 \bigcirc$
$y_2 \bigcirc$
$y_3 \bigcirc$

</td>
</tr>
</table>

$\max w = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$

$s.t.$

$-2y_1 + 2y_2 \geq -2$

$y_1 + 2y_3 \leq 3$

$3y_1 + y_2 + y_3 \leq 5$

$y_1 - 2y_3 = 0$

$y_1 \geq 0$

y_2 آزاد

y_3 آزاد

مثال: دوگان مسألهٔ زیر را بنویسید.

$\max z = u$ $s.t.$ $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq u$ $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ $x_j \geq 0$ u آزاد	
$\max z = u$ $s.t.$ $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - u \geq 0 \quad \boldsymbol{y_1}$ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \quad \boldsymbol{y_2}$ $x_j \geq 0$ u آزاد	$\min w = y_2$ $s.t.$ $a_1y_1 + y_2 \bigcirc 0 \quad \boldsymbol{x_1}$ $a_2y_1 + y_2 \bigcirc 0 \quad \boldsymbol{x_2}$ $\vdots$ $a_ny_1 + y_2 \bigcirc 0 \quad \boldsymbol{x_n}$ $-y_1 \bigcirc 1 \quad \boldsymbol{u}$ $y_1 \bigcirc$ $y_2 \bigcirc$

$$
\begin{aligned}
&\min w = y_2 \\
&s.t. \\
&a_1 y_1 + y_2 \geq 0 \\
&a_2 y_1 + y_2 \geq 0 \\
&\vdots \\
&a_n y_1 + y_2 \geq 0 \\
&-y_1 = 1 \\
\\
&y_1 \leq 0 \\
&y_2 \quad \text{آزاد}
\end{aligned}
$$

روابط بین مسألهٔ اولیه و مسألهٔ دوگان

قضیه: دوگان مسألهٔ دوگان، همان مسألهٔ اولیه است.

قضیهٔ ضعیف دوگانی: فرض کنید $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$ یک جواب شدنی دلخواه برای مسألهٔ اولیه و $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_m \end{pmatrix}$ یک جواب شدنی دلخواه برای مسألهٔ دوگان باشد. آنگاه

الف) اگر مسألهٔ اولیه Minسازی و مسألهٔ دوگان Maxسازی باشد، آنگاه

مقدار تابع هدف مسألهٔ اولیه به ازای $\bar{x}$ $\quad \geq \quad$ مقدار تابع هدف مسألهٔ دوگان به ازای $\bar{y}$

ب) اگر مسألهٔ اولیه Maxسازی و مسألهٔ دوگان Minسازی باشد، آنگاه

مقدار تابع هدف مسألهٔ دوگان به ازای $\bar{y}$ $\quad \geq \quad$ مقدار تابع هدف مسألهٔ اولیه به ازای $\bar{x}$

مثال:

«مسألهٔ دوگان»	«مسألهٔ اولیه»
$\min w = 4y_1 + 6y_2$ $s.t.$ $2y_1 + 3y_2 = 3$ $y_1 - y_2 \geq 1$ $y_1, y_2 \geq 0$	$\max z = 3x_1 + x_2$ $s.t.$ $2x_1 + x_2 \leq 4$ $3x_1 - x_2 \leq 6$ x_1 آزاد $x_2 \geq 0$
یک جواب شدنی دلخواه برای مسألهٔ دوگان: $\bar{y} = \left(\frac{3}{2}, 0\right), \quad \bar{w} = 6$	**یک جواب شدنی دلخواه برای مسألهٔ اولیه:** $\bar{x} = (1,1), \quad \bar{z} = 4$

$$\bar{z} \leq \bar{w}$$

اثبات قضیهٔ ضعیف دوگانی:

بدون از دست رفتن کلیت، قضیه را برای حالتی که مسألهٔ اولیه Maxسازی نرمال و مسألهٔ دوگان Minسازی نرمال است، ثابت می‌کنیم.

«مسألهٔ اولیه»	«مسألهٔ دوگان»
$\max z = c^T x$ $s.t.$ $Ax \le b$ $x \ge 0$	$\min w = b^T y$ $s.t.$ $A^T y \ge c$ $y \ge 0$

فرض: $\bar{x}$ یک جواب شدنی دلخواه برای مسألهٔ اولیه و $\bar{y}$ یک جواب شدنی دلخواه برای مسألهٔ دوگان باشد.

حکم : $c^T\bar{x} \le b^T\bar{y}$

$\bar{x}$ برای مسألهٔ اولیه شدنی است:

$$A\bar{x} \le b \quad (1)$$
$$\bar{x} \ge 0$$

$\bar{y}$ برای مسألهٔ دوگان شدنی است:

$$A^T\bar{y} \ge c \quad (2)$$
$$\bar{y} \ge 0$$

طرفین رابطهٔ (1) را در $\bar{y}^T$ و طرفین رابطهٔ (2) را در $\bar{x}^T$ ضرب می‌کنیم:

$$\bar{y}^T A\bar{x} \le \bar{y}^T b = b^T \bar{y}$$
$$\bar{x}^T A^T \bar{y} \ge \bar{x}^T c = c^T \bar{x}$$

$$c^T \bar{x} \le \bar{x}^T A^T \bar{y} \le b^T \bar{y}$$

پس حکم برقرار است.

«نتایج قضیهٔ ضعیف دوگانی»

نتیجهٔ اول: اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان، جواب بهین بیکران داشته باشد، دیگری نشدنی است.

اثبات: بدون از دست رفتن کلیت، مسائل اولیه و دوگان را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

«مسألهٔ دوگان»	«مسألهٔ اولیه»
$\min w = b^T y$ $s.t.$ $A^T y \geq c$ $y \geq 0$	$\max z = c^T x$ $s.t.$ $Ax \leq b$ $x \geq 0$

فرض: مسألهٔ اولیه جواب بهین بیکران دارد. $z \to +\infty$

حکم: مسألهٔ دوگان نشدنی است.

به برهان خلف، فرض می‌کنیم مسألهٔ دوگان شدنی باشد. پس حداقل یک جواب $\bar{y}$ وجود دارد که در قیود مسألهٔ دوگان صدق می‌کند.

طبق قضیهٔ دوگانی ضعیف **به ازای هر جواب شدنی x** برای مسألهٔ اولیه داریم:

$$c^T x \leq b^T \bar{y}$$

تناقض با $z \to +\infty$

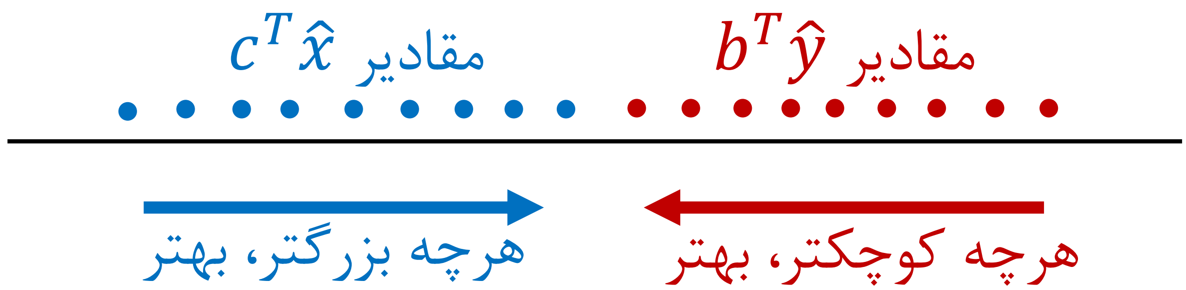
نتیجهٔ دوم: فرض کنید $\overline{x}$ یک جواب شدنی برای مسألهٔ اولیه و $\overline{y}$ یک جواب شدنی برای مسألهٔ دوگان باشد و داشته باشیم:

مقدار تابع هدف مسألهٔ دوگان به ازای $\overline{y}$ = مقدار تابع هدف مسألهٔ اولیه به ازای $\overline{x}$

آنگاه $\overline{x}$ جواب بهین مسألهٔ اولیه و $\overline{y}$ جواب بهین مسألهٔ دوگان است.

مسائل اولیه و دوگان را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

«مسألهٔ دوگان»	«مسألهٔ اولیه»
$\min w = b^T y$ $s.t.$ $A^T y \geq c$ $y \geq 0$	$\max z = c^T x$ $s.t.$ $Ax \leq b$ $x \geq 0$



نتیجهٔ دوم: **فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب شدنی برای مسألهٔ اولیه و $\bar{y}$ یک جواب شدنی برای مسألهٔ دوگان باشد و داشته باشیم:**

مقدار تابع هدف مسألهٔ دوگان به ازای $\bar{y}$ = مقدار تابع هدف مسألهٔ اولیه به ازای $\bar{x}$

آنگاه $\bar{x}$ جواب بهین مسألهٔ اولیه و $\bar{y}$ جواب بهین مسألهٔ دوگان است.

اثبات: بدون از دست رفتن کلیت، مسائل اولیه و دوگان را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

«مسألهٔ دوگان»	«مسألهٔ اولیه»
$\min w = b^T y$ $s.t.$ $A^T y \geq c$ $y \geq 0$	$\max z = c^T x$ $s.t.$ $Ax \leq b$ $x \geq 0$

با توجه به قضیهٔ ضعیف دوگانی، به ازای هر جواب شدنی x از مسألهٔ اولیه داریم:

$$c^T x \leq \boldsymbol{b^T \bar{y}}$$

و چون $\bar{x}$ یک جواب شدنی است که $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$ پس $\bar{x}$ جواب بهین برای مسألهٔ اولیه است.

به طور مشابه، با توجه به قضیه ضعیف دوگان، به ازای هر جواب شدنی y از مسألهٔ دوگان داریم:

$$c^T \bar{x} \leq b^T y$$

و چون $\bar{y}$ یک جواب شدنی است که $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$ پس $\bar{y}$ جواب بهین برای مسألهٔ دوگان است.

قضیهٔ قوی دوگانی

اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان جواب بهین داشته باشد، آنگاه هردو مسأله جواب بهین دارند. به علاوه اگر z^* مقدار بهین تابع هدف مسألهٔ اولیه و w^* مقدار بهین تابع هدف مسألهٔ دوگان باشد، داریم $z^* = w^*$.

به خصوص، اگر BV **پایهٔ بهین مسألهٔ اولیه** و B ماتریس پایه باشد، آنگاه $y^{*T} = c_{BV}^T B^{-1}$ جواب بهین مسألهٔ دوگان است.

اثبات: باید نشان دهیم $y^{*T} = c_{BV}^T B^{-1}$ برای مسألهٔ دوگان بهین است. پس ابتدا باید نشان دهیم $y^{*T} = c_{BV}^T B^{-1}$ برای مسألهٔ دوگان شدنی است.

بدون از دست رفتن کلیت، مسائل اولیه و دوگان را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

«مسألهٔ اولیه»	«مسألهٔ دوگان»
$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ $s.t.$ $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2$ $\vdots$ $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m$ $x_j \ge 0 \quad \forall j = 1,2,\dots,n$	$\min w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$ $s.t.$ $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1$ $a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2$ $\vdots$ $a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n$ $y_i \ge 0 \quad \forall i = 1,2,\dots,m$

$$\boxed{y^T a_{x_j} - c_{x_j} \ge 0}$$

فرم استاندارد مسألهٔ اولیه:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$s.t.$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + s_2 = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + s_m = b_m$$
$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1,2,\dots,n$$
$$s_i \geq 0 \quad \forall i = 1,\dots,m$$

چون BV پایهٔ بهین مسألهٔ اولیه است، پس ضریب کاهش هزینهٔ همهٔ متغیرها نامنفی است.

$$\boldsymbol{\bar{c}_{x_j} \geq 0} \quad \Rightarrow \quad c_{BV}^TB^{-1}a_{x_j} - c_{x_j} \geq 0 \xRightarrow{y^{*T}=c_{BV}^TB^{-1}} y^{*T}a_{x_j} - c_{x_j} \geq 0$$

$$\boldsymbol{\bar{c}_{s_i} \geq 0} \quad \Rightarrow \quad c_{BV}^TB^{-1}a_{s_i} - c_{s_i} \geq 0 \xRightarrow{y^{*T}=c_{BV}^TB^{-1}} y^{*T}a_{s_i} \geq 0 \quad \Rightarrow y_i^* \geq 0$$

پس $y^{*T} = c_{BV}^TB^{-1}$ برای مسألهٔ دوگان شدنی است.

مقدار z به ازای پایهٔ BV:

مقدار تابع هدف مسألهٔ اولیه به ازای پایهٔ BV

مقدار تابع هدف مسألهٔ دوگان به ازای $y^{*T} = c_{BV}^TB^{-1}$

$$z^* = c_{BV}^TB^{-1}b$$
$$w^* = c_{BV}^TB^{-1}b$$

طبق قضیهٔ ضعیف دوگانی جواب $y^{*T} = c_{BV}^TB^{-1}$ بهین مسألهٔ دوگان است.

جمع‌بندی:

برای مسائل اولیه و دوگان حالات زیر امکان‌پذیر است:

اولیه	دوگان
بهین	بهین
نشدنی	نشدنی
بیکران	نشدنی
نشدنی	بیکران

مثال برای حالت نشدنی-نشدنی:

مسألهٔ دوگان	مسألهٔ اولیه
$\min w = -y_1 + y_2$ $s.t.$ $y_1 \geq 0$ $-y_2 \geq 1$ $y_1, y_2 \geq 0$	$\max z = x_2$ $s.t.$ $x_1 \leq -1$ $-x_2 \leq 1$ $x_1, x_2 \geq 0$

جواب بهین مسألهٔ دوگان در کدام قسمت از جدول بهین مسألهٔ اولیه ظاهر می‌شود؟

بردار متغیرهای دوگان به صورت زیر است:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{متغیر دوگان نظیر قید اول} \\ \\ \\ \rightarrow \text{متغیر دوگان نظیر قید } m\text{ام} \end{matrix}$$

و ثابت کردیم:

$$y_i^* = \text{مؤلفهٔ } i \text{ اُم بردار } c_{BV}^T B^{-1}$$

اگر قید iام مسألهٔ اولیه به صورت کوچکتر مساوی باشد

$$\bar{c}_{s_i} = c_{BV}^T B^{-1} a_{s_i} - c_{s_i} = \text{مؤلفهٔ } i \text{ اُم بردار } c_{BV}^T B^{-1} = y_i^*$$

اگر قید iام مسألهٔ اولیه به صورت بزرگتر مساوی باشد

$$\bar{c}_{e_i} = c_{BV}^T B^{-1} a_{e_i} - c_{e_i} = -\left(\text{مؤلفهٔ } i \text{ اُم بردار } c_{BV}^T B^{-1}\right) = -y_i^*$$

اگر قید i ام مسألهٔ اولیه به صورت تساوی باشد

$$\bar{c}_{a_i} = c_{BV}^T B^{-1} a_{a_i} - c_{a_i} = \left(\text{مؤلفهٔ } i \text{ اُم بردار } c_{BV}^T B^{-1}\right) \mp M = y_i^* \mp M$$

مثال:

مسألهٔ اولیه	مسألهٔ دوگان
$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ $s.t.$ $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15$ $2x_2 - x_3 \geq 5$ $2x_1 + x_2 - 5x_3 = 10$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$\min w = 15y_1 + 5y_2 + 10y_3$ $s.t.$ $y_1 + 2y_3 \geq 3$ $3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2$ $2y_1 - y_2 - 5y_3 \geq 5$ $y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3$ آزاد

جدول بهین مسألهٔ اولیه:

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
Z	1	0	0	0	$\frac{51}{23}$	$\frac{58}{23}$	$M-\frac{58}{23}$	$M+\frac{9}{23}$	$\frac{565}{23}$
x_3	0	0	0	1	$\frac{4}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{-5}{23}$	$\frac{-2}{23}$	$\frac{15}{23}$
x_2	0	0	1	0	$\frac{2}{23}$	$\frac{-9}{23}$	$\frac{9}{23}$	$\frac{-1}{23}$	$\frac{65}{23}$
x_1	0	1	0	0	$\frac{9}{23}$	$\frac{17}{23}$	$\frac{-17}{23}$	$\frac{120}{23}$	$\frac{20}{23}$

مقدار بهینهٔ متغیرهای y_i را بیابید.

$$y_1^* = \bar{c}_{s_1} = \frac{51}{23}$$

$$y_2^* = -\bar{c}_{e_2} = \frac{-58}{23}$$

$$y_3^* = \bar{c}_{a_3}\left(M \text{ با حذف عبارت شامل }\right) = \frac{9}{23}$$

$$w^* = \frac{565}{23}$$

اصل ناظر (supervisor's principle) برای زوج (x^*, y^*)

با توجه به قضیه دوگانی قوی و نتیجه دوم قضیه دوگانی ضعیف، گزاره زیر برقرار است:

اگر x^* **جواب شدنی** برای مسأله اولیه و y^* **جواب شدنی** برای مسأله دوگان باشد، آنگاه x^* برای مسأله اولیه و y^* برای مسأله دوگان **بهینه** است، اگر و تنها اگر داشته باشیم:

مقدار تابع هدف مسألهٔ دوگان به ازای y^* = مقدار تابع هدف مسألهٔ اولیه به ازای x^*

قضیه زیر اصل ناظر را به طور معادل به شیوه دیگری بیان می‌کند:

قضیهٔ مکمل زائد (Complementary Slackness Theorem)

مسائل اولیه و دوگان را به صورت زیر در نظر بگیرید:

مسأله دوگان	مسأله اولیه
$\max w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ $s.t.$ $\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \le c_j \quad \forall j = 1, \dots, n$ $y_i \ge 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$	$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $s.t.$ $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \ge b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$ $x_j \ge 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$

اگر x^* **جواب شدنی** برای مسأله اولیه و y^* **جواب شدنی** برای مسأله دوگان باشد، آنگاه x^* برای مسأله اولیه و y^* برای مسأله دوگان **بهینه** است، اگر و تنها اگر داشته باشیم:

یعنی تفاضل سمت چپ و راست هر قید مسأله اولیه ضربدر متغیر دوگان نظیرش صفر باشد.	$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j^* - b_i\right) y_i^* = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$
یعنی تفاضل سمت چپ و راست هر قید مسأله دوگان ضربدر متغیر دوگان نظیرش صفر باشد.	$\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i^*\right) x_j^* = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$

دو شرط فوق را بعضاً به کمک متغیرهای کمکی به صورت زیر نیز بیان می‌کنند:

$$e_i^* y_i^* = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$
$$s_j'^* x_j^* = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

مثال برای روشن شدن بحث:

مسألۀ اولیه	مسألۀ دوگان
$\min z = 2x_1 + 3x_2$ $s.t.$ $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 4 \quad \rightarrow y_1$ $x_1 + 3x_2 \geq 20 \quad \rightarrow y_2$ $x_1 + x_2 = 10 \quad \rightarrow y_3$ $x_1, x_2 \geq 0$	$\max w = 4y_1 + 20y_2 + 10y_3$ $s.t.$ $\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 \leq 2 \quad \rightarrow x_1$ $\frac{1}{4}y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 3 \quad \rightarrow x_2$ $y_1 \leq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3$ آزاد

فرض کنید $\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$ برای مسأله اولیه و $\begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{pmatrix}$ برای مسأله دوگان شدنی باشند. $\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{pmatrix}$ به ترتیب برای مسألۀ اولیه و دوگان، جواب بهین هستند اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\left(4 - \frac{1}{2}x_1^* - \frac{1}{4}x_2^*\right) \times y_1^* = \mathbf{0}$$

$$(x_1^* + 3x_2^* - 20) \times y_2^* = \mathbf{0}$$

$$\left(2 - \frac{1}{2}y_1^* - y_2^* - y_3^*\right) x_1^* = \mathbf{0}$$

$$\left(3 - \frac{1}{4}y_1^* - 3y_2^* - y_3^*\right) x_2^* = \mathbf{0}$$

جواب‌های $\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ به ترتیب برای اولیه و دوگان شدنی هستند و نیز در شرایط مکمل زائد صدق می‌کنند پس بهینه هستند.

اثبات قضیه مکمل زائد:

مسائل اولیه و دوگان را به صورت زیر در نظر بگیرید:

مسأله اولیه	مسأله دوگان
$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $s.t.$ $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$ $x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$	$\max w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ $s.t.$ $\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \leq c_j \quad \forall j = 1, \dots, n$ $y_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$

فرض کنید x^* و y^* به ترتیب **جواب‌های شدنی** برای مسائل اولیه و دوگان باشند. x^* برای مسأله اولیه و y^* برای مسأله دوگان **بهینه** است، اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$c^T x^* = b^T y^*$$

با توجه به آنکه $y^{*T} A x^* = x^{*T} A^T y^*$، رابطه فوق معادل است با

$$\Leftrightarrow \qquad c^T x^* + y^{*T} A x^* = b^T y^* + x^{*T} A^T y^*$$

$$\Leftrightarrow \qquad y^{*T} A x^* - y^{*T} b + x^{*T} c - x^{*T} A^T y^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \underbrace{y^{*T}}_{\geq 0} \underbrace{(A x^* - b)}_{\geq 0} + \underbrace{x^{*T}}_{\geq 0} \underbrace{(c - A^T y^*)}_{\geq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y^{*T}(A x^* - b) = 0 \quad and \quad x^{*T}(c - A^T y^*) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j^* - b_i \right) y_i^* = 0 \ \ \forall i = 1, \dots, m \qquad and \qquad \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i^* \right) x_j^* = 0 \ \ \forall j = 1, \dots, n$$

نتایج قضیه مکمل زائد

اگر یک قید nonbinding باشد، مقدار بهین متغیر دوگان متناظر با آن برابر با صفر است.

اگر مقدار بهین متغیر دوگان متناظر با یک قید، ناصفر باشد، آن قید binding است.

تمرین: مسائل اولیه و دوگان را به صورت زیر در نظر بگیرید:

مسأله دوگان	مسأله اولیه
$\max w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ $s.t.$ $\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \le c_j \quad \forall j = 1, \dots, n$ $y_i \ge 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$	$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $s.t.$ $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \ge b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$ $x_j \ge 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$

یک جواب شدنی پایه‌ای دلخواه (نه لزوماً بهینه) را در نظر بگیرید و فرض کنید BV پایه متناظر با آن باشد و فرض کنید $y^T = c_{BV}^T B^{-1}$. آیا می‌توان گفت به ازای این جواب همواره روابط زیر برقرار است؟

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j - b_i\right) y_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i\right) x_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

قضیه مهم:

بردارهای x^* و y^* به ترتیب برای مسائل اولیه و دوگان بهینه هستند اگر و تنها اگر سه شرط زیر برقرار باشند:

۱- x^* برای مسأله اولیه شدنی باشد (در قیود مسأله اولیه صدق کند).

۲- y^* برای مسأله دوگان شدنی باشد (در قیود مسأله دوگان صدق کند).

۳- x^* و y^* در شرایط مکمل زائد صدق کنند.

روش سیمپلکس دوگان

هر جواب شدنی پایه‌ای بهینه برای مسأله اولیه دارای دو شرط زیر است:

شرط شدنی بودن: مقدار متغیرهای پایه‌ای باید نامنفی باشد

شرط بهینگی: ضرایب کاهش هزینه در مسألهٔ Minسازی نامثبت و در مسألهٔ Maxسازی نامنفی

الگوریتم سیمپلکس از یک **جواب شدنی پایه‌ای** شروع می‌کند و به سمت بهینگی پیش می‌رود به طوری **شدنی بودن حفظ شود** (سمت راست منفی نشود).

از یک تکرار به تکرار بعد، مقدار تابع هدف بهبود می‌یابد و الگوریتم زمانی خاتمه می‌یابد که شرط **بهینگی** برقرار شود.

الگوریتم سیمپلکس دوگان از یک **جواب پایه‌ای که شرط بهینگی را دارد ولی شرط شدنی بودن را ندارد** (برخی متغیرها مقدار منفی گرفته‌اند) شروع می‌کند و به سمت شدنی کردن جواب (نامنفی کردن مقادیر سمت راست) پیش می‌رود به طوری که **شرط بهینگی حفظ شود.**

و الگوریتم زمانی خاتمه می‌یابد که **شرط شدنی** بودن نیز برقرار شود.

مثال: مسألهٔ زیر را با روش **سیمپلکس دوگان** حل کنید.

$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ $s.t.$ $x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ استاندارد	$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ $s.t.$ $x_1 + 2x_2 + x_3 - \boldsymbol{e_1} = 3$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 - \boldsymbol{e_2} = 4$ $x_1, x_2, x_3, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2} \geq 0$
دقت کنید که شرط بهینگی برای سطر صفر این مسأله برقرار است.	$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ $s.t.$ $-x_1 - 2x_2 - x_3 + \boldsymbol{e_1} = -3$ $-2x_1 + x_2 - 3x_3 + \boldsymbol{e_2} = -4$ $x_1, x_2, x_3, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2} \geq 0$

$$BV = \{e_1, e_2\}$$

BV	z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	RHS
z	۱	-۲	-۳	-۴	۰	۰	۰
e_1	۰	-۱	-۲	-۱	۱	۰	-۳
e_2	۰	-۲	۱	-۳	۰	۱	-۴

$$\boxed{\min\left\{\left|\frac{-2}{-2}\right|, \left|\frac{-4}{-3}\right|\right\}}$$

پس برای تعیین **متغیر ورودی**، باید سطر صفر بر **عناصر اکیداً منفی سطر خارج‌شونده** تقسیم گردد و روی **قدر مطلق** این مقادیر **مینیمم** گرفته شود.

BV / متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	RH
Z	۱	۰	-۴	-۱	۰	-۱	۴
e_1	۰	۰	-۵/۲	۱/۲	۱	-۱/۲	-۱
x_1	۰	۱	-۱/۲	۳/۲	۰	-۱/۲	۲

$$\min\left\{\left|\frac{-4}{-\frac{5}{2}}\right|, \left|\frac{-1}{-\frac{1}{2}}\right|\right\}$$

BV / متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	RHS
Z	۱	۰	۰	-۹/۵	-۸/۵	-۱/۵	۲۸/۵
x_2	۰	۰	۱	-۱/۵	-۲/۵	۱/۵	۲/۵
x_1	۰	۱	۰	۷/۵	-۱/۵	-۲/۵	۱۱/۵

شرط شدنی بودن نیز برقرار است. پس این جدول جواب بهین را نشان می‌دهد.

$$x_1^* = \frac{11}{5},\ x_2^* = \frac{2}{5}, x_3^* = e_1^* = e_2^* = 0, z^* = \frac{28}{5}$$

مثال: مسألهٔ زیر را با روش **سیمپلکس دوگان** حل کنید.

$\max z = -12x_1 - 5x_2$ $s.t.$ $4x_1 + 2x_2 \geq 80$ $2x_1 + 3x_2 \geq 90$ $x_1, x_2 \geq 0$	$\max z = -12x_1 - 5x_2$ $s.t.$ $4x_1 + 2x_2 - e_1 = 80$ $2x_1 + 3x_2 - e_2 = 90$ $x_1, x_2, x_3, e_1, e_2 \geq 0$
	$\max z = -12x_1 - 5x_2$ $s.t.$ $-4x_1 - 2x_2 + e_1 = -80$ $-2x_1 - 3x_2 + e_2 = -90$ $x_1, x_2, x_3, e_1, e_2 \geq 0$

استاندارد

$$BV = \{e_1, e_2\}$$

BV / متغیرها	Z	x۱	x۲	e۱	e۲	RHS
Z	۱	۱۲	۵	۰	۰	۰
e۱	۰	-۴	-۲	۱	۰	-۸۰
e۲	۰	-۲	-۳	۰	۱	-۹۰

$$\min\left\{\left|\frac{12}{-2}\right|, \left|\frac{5}{-3}\right|\right\}$$

BV	Z	x_1	x_2	e_1	e_2	RHS
Z	1	$\frac{26}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$	-150
e_1	0	$\frac{-8}{3}$	0	1	$\frac{-2}{3}$	-20
x_2	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{-1}{3}$	30

$$\min\left\{\left|\frac{\frac{26}{3}}{\frac{-8}{3}}\right|, \left|\frac{\frac{5}{3}}{\frac{-2}{3}}\right|\right\}$$

BV	Z	x_1	x_2	e_1	e_2	RHS
Z	1	2	0	$\frac{5}{2}$	0	-200
e_2	0	4	0	$\frac{-3}{2}$	1	30
x_2	0	2	1	$\frac{-1}{2}$	0	40

شرط شدنی بودن نیز برقرار است. پس این جدول جواب بهین را نشان می‌دهد.

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = 40, e_1^* = 0, = e_2^* = 30, z^* = -200$$

در مثال اول که **Min**سازی بود، تغییرات تابع هدف از یک جدول به جدول بعدی:

$$\mathbf{0 \rightarrow 4 \rightarrow \frac{28}{5}}$$

در مثال دوم که **Max**سازی بود، تغییرات تابع هدف از یک جدول به جدول بعدی:

$$\mathbf{0 \rightarrow -150 \rightarrow -200}$$

پس سیمپلکس دوگان از یک جواب فوق بهین شروع می‌کند و همین‌طور که به سمت شدنی کردن جواب پیش می‌رود، در حالت minسازی مقدار تابع هدف افزایش و در حالت maxسازی مقدار تابع هدف کاهش می‌یابد.

چرا به این روش، «سیمپلکس دوگان» می‌گویند؟

زیرا حل یک مسأله با روش سیمپلکس دوگان، معادل با آن است که مسألهٔ دوگان آن را با روش سیمپلکس حل کنیم.

این موضوع را روی مثال زیر بررسی می‌کنیم:

مثال: یک بار مسألهٔ زیر را با سیمپلکس دوگان و بار دیگر دوگان آن را با سیمپلکس حل می‌کنیم.

مسألهٔ دوگان	مسألهٔ اولیه
$\max w = 2y_1 + y_2$ $s.t.$ $y_1 + y_2 \leq 0$ $y_1 - y_2 \leq 1$ $y_1 \geq 0$ $y_2 \leq 0$	$\min z = x_2$ $s.t.$ $x_1 + x_2 \geq 2$ $x_1 - x_2 \leq 1$ $x_1, x_2 \geq 0$

حل مسألهٔ اولیه با سیمپلکس دوگان

استاندارد	مسألهٔ اولیه
$\min z = x_2$ $s.t.$ $x_1 + x_2 - \boldsymbol{e_1} = 2$ $x_1 - x_2 + \boldsymbol{s_2} = 1$ $x_1, x_2, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{s_2} \geq 0$	$\min z = x_2$ $s.t.$ $x_1 + x_2 \geq 2$ $x_1 - x_2 \leq 1$ $x_1, x_2 \geq 0$

قید اول را به صورت $\boldsymbol{-x_1 - x_2 + e_1 = -2}$ می‌نویسیم و متغیرهای $\{e_1, s_2\}$ را در پایه قرار می‌دهیم.

متغیرها / BV	Z	x_1	x_2	e_1	s_2	RHS
Z	۱	۰	-۱	۰	۰	۰
e_1	۰	-۱	-۱	۱	۰	-۲
s_2	۰	۱	-۱	۰	۱	۱

متغیرها / BV	Z	x_1	x_2	e_1	s_2	RHS
Z	۱	۰	-۱	۰	۰	۰
x_1	۰	۱	۱	-۱	۰	۲
s_2	۰	۰	-۲	۱	۱	-۱

متغیرها / BV	Z	x_1	x_2	e_1	s_2	RHS
Z	۱	۰	۰	-۱/۲	-۱/۲	۱/۲
x_1	۰	۱	۰	-۱/۲	۱/۲	۳/۲
x_2	۰	۰	۱	-۱/۲	-۱/۲	۱/۲

حل مسألهٔ دوگان با سیمپلکس

مسألهٔ دوگان	استاندارد
$\max w = 2y_1 + y_2$ $s.t.$ $y_1 + y_2 \le 0$ $y_1 - y_2 \le 1$ $y_1 \ge 0$ $y_2 \le 0$	$\max w = 2y_1 - \boldsymbol{y'_2}$ $s.t.$ $y_1 - \boldsymbol{y'_2} + \boldsymbol{s'_1} = 0$ $y_1 + \boldsymbol{y'_2} + \boldsymbol{s'_2} = 1$ $y_1 \ge 0$ $\boldsymbol{y'_2} \ge 0$ $\boldsymbol{s'_1, s'_2 \ge 0}$

BV	w	y_1	y'_2	s'_1	s'_2	RHS
w	۱	-۲	۱	۰	۰	۰
s'_1	۰	۱	-۱	۱	۰	۰
s'_2	۰	۱	۱	۰	۱	۱

BV \ متغیرها	W	y_1	y'_2	S'_1	S'_2	RHS
W	۱	۰	-۱	۲	۰	۰
y_1	۰	۱	-۱	۱	۰	۰
S'_2	۰	۰	۲	-۱	۱	۱

BV \ متغیرها	W	y_1	y'_2	S'_1	S'_2	RHS
W	۱	۰	۰	۳/۲	۱/۲	۱/۲
y_1	۰	۱	۰	۱/۲	۱/۲	۱/۲
y'_2	۰	۰	۱	-۱/۲	۱/۲	۱/۲

جداول حل مسألهٔ اولیه با «سیمپلکس دوگان»

BV \ متغیرها	z	x_1	x_2	e_1	s_2	RHS
z	۱	۰	-۱	۰	۰	۰
e_1	۰	-۱	-۱	۱	۰	-۲
s_2	۰	۱	-۱	۰	۱	۱

BV \ متغیرها	z	x_1	x_2	e_1	s_2	RHS
z	۱	۰	-۱	۰	۰	۰
x_1	۰	۱	۱	-۱	۰	۲
s_2	۰	۰	-۲	۱	۱	-۱

BV \ متغیرها	z	x_1	x_2	e_1	s_2	RHS
z	۱	۰	۰	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
x_1	۰	۱	۰	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$
x_2	۰	۰	۱	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

جداول حل مسألهٔ دوگان با «سیمپلکس»

BV	w	y_1	y'_2	s'_1	s'_2	RHS
w	۱	-۲	۱	۰	۰	۰
s'_1	۰	۱	-۱	۱	۰	۰
s'_2	۰	۱	۱	۰	۱	۱

BV \ متغیرها	w	y_1	y'_2	s'_1	s'_2	RHS
w	۱	۰	-۱	۲	۰	۰
y_1	۰	۱	-۱	۱	۰	۰
s'_2	۰	۰	۲	-۱	۱	۱

BV \ متغیرها	w	y_1	y'_2	s'_1	s'_2	RHS
w	۱	۰	۰	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
y_1	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
y'_2	۰	۰	۱	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

در روش سیمپلکس دوگان، اگر متغیری برای خروج از پایه انتخاب شود، اما متغیری برای ورود به پایه وجود نداشته باشد، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

مسألهٔ دوگان بیکران است و لذا، مسألهٔ اولیه نشدنی است.

یکی از کاربردهای مهم روش سیمپلکس دوگان، در تحلیل حساسیت است.

فرض کنید مسألهٔ اولیه نشدنی باشد. دربارهٔ دوگان آن چه می‌توان گفت؟

دوگان یا نشدنی است یا بیکران.

پس کافی است چک کنیم مسألهٔ دوگان شدنی است یا خیر. اگر شدنی باشد قطعاً بیکران است.

	اولیه نشدنی	اولیه شدنی
دوگان شدنی	قطعاً دوگان بیکران است.	قطعاً هر دو مسأله جواب بهین دارند.
دوگان نشدنی	هر دو نشدنی هستند.	قطعاً اولیه بیکران است.

بررسی چند مثال

مثال: مسائل زیر را در نظر بگیرید:

مسألهٔ اولیه	مسألهٔ دوگان
$\max z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4$ $s.t. \quad 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \le 12$ $x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 7$ $2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \le 10$ $x_j \ge 0 \quad \forall j = 1,2,3,4$	$\min w = 12y_1 + 7y_2 + 10y_3$ $s.t. \quad 3y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 2$ $y_1 - 3y_2 + y_3 \ge 4$ $y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 3$ $4y_1 + 3y_2 - y_3 \ge 1$ $y_i \ge 0 \quad \forall i = 1,2,3$

اگر $x_1^* = 0$، $x_2^* = 10.4$، $x_3^* = 0$ و $x_4^* = 0.4$ و $z^* = 42$ با استفاده از قضیهٔ مکمل زائد، جواب بهین مسألهٔ دوگان را بیابید.

با جایگذاری جواب x^* در مسألهٔ اولیه به این نتیجه می‌رسیم که قید دوم مسألهٔ اولیه non-binding است. پس داریم:

$$y_2^* = 0$$

با توجه به آنکه $x_2^* \neq 0$ و $x_4^* \neq 0$، پس قیود دوم و چهارم دوگان binding هستند. پس داریم:

$$\begin{aligned} y_1^* - 3y_2^* + y_3^* &= 4 \\ 4y_1^* + 3y_2^* - y_3^* &= 1 \end{aligned} \quad \xrightarrow{y_2^* = 0} \quad \begin{aligned} y_1^* + y_3^* &= 4 \\ 4y_1^* - y_3^* &= 1 \end{aligned}$$

پس داریم:

$$y_1^* = 1, y_3^* = 3$$

مثال: مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید.

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 - 8x_5$$
$$s.t. \quad 8x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 6$$
$$2x_1 + 6x_2 - x_3 + x_5 = 3$$
$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1,2,3,4$$

با استفاده از جواب شدنی $(0,0,0,6,3)$ و بردار جهت $(0,0,1,4,1)$ نشان دهید که مسألهٔ فوق بیکران است. دربارهٔ دوگان آن چه می‌توان گفت؟

جواب: اگر از نقطهٔ $(0,0,0,6,3)$ شروع کنیم و با طول گام مثبت α در جهت بردار $(0,0,1,4,1)$ حرکت کنیم، بردار $(0,0,0,6,3) + \alpha(0,0,1,4,1)$ کماکان داخل ناحیهٔ شدنی قرار دارد.

از طرف دیگر داریم:

مقدار z	نقطه
-80	$(0,0,0,6,3)$
$-80 - 37\alpha$	$(0,0,0,6,3) + \alpha(0,0,1,4,1)$

پس داخل ناحیهٔ شدنی نقاطی با z به هر اندازهٔ دلخواه کوچک وجود دارد. پس مسألهٔ اولیه بیکران و دوگان آن، نشدنی است.

مثال: LP زیر را در نظر بگیرید:

$$Max\ z = -2x_1 - x_2 + x_3$$
$$\text{s.t.}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$
$$x_2 + x_3 \geq 2$$
$$x_1 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

سطر صفر جدول بهین به صورت زیر است:

$$z + 4x_1 + e_2 + (M-1)a_2 + (M+2)a_3 = 0$$

ابتدا دوگان مسألهٔ فوق را فرمول‌بندی کنید و سپس به کمک رابطه فوق جواب بهین مسألهٔ دوگان را بیابید.

جواب:

$$Min\ w = 3y_1 + 2y_2 + y_3$$
$$\text{s.t.}$$
$$y_1 + y_3 \geq -2$$
$$y_1 + y_2 \geq -1$$
$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 1$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \leq 0, \quad y_3 \text{ آزاد}$$

$$\boldsymbol{y_1^* = \bar{c}_{s_1} = 0}$$
$$\boldsymbol{y_2^* = -\bar{c}_{e_2} = -1}$$
$$\boldsymbol{y_3^* = 2}$$