«بسمه‌تعالی»

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)

درس بهینه‌سازی خطی مدرس: دکتر هوشمند

فصل چهارم: مباحث تکمیلی در خصوص الگوریتم سیمپلکس

دور در الگوریتم سیمپلکس

- ✓ در هر تکرار از الگوریتم سیمپلکس، متغیری که پتانسیل بهبود تابع هدف را دارد، برای ورود به پایه انتخاب می‌کنیم. اگر برندهٔ آزمون نسبت صفر نباشد، قطعاً متغیر وارد شونده، مقداری اکیداً مثبت را در جدول بعدی اختیار خواهد کرد و در نتیجه مقدار تابع هدف از این جدول به جدول بعدی اکیداً بهبود می‌یابد.
- ✓ پس نتیجه می‌گیریم که اگر مسأله تباهیده نباشد، در الگوریتم سیمپلکس همواره از یک نقطهٔ گوشه‌ای به یک نقطهٔ گوشه‌ای دیگر با Z اکیداً بهتر می‌رویم و چون تعداد نقاط گوشه‌ای متناهی است، الگوریتم سیمپلکس در تعداد متناهی تکرار متوقف می‌شود.
- ✓ اما اگر مسأله تباهیده باشد، وقتی متغیری را که پتانسیل بهبود تابع هدف را دارد، برای ورود انتخاب می‌کنیم، ممکن است برندهٔ آزمون نسبت صفر شود. در این صورت، متغیر وارد شونده، در جدول بعدی مقدار صفر را اختیار خواهد کرد. در نتیجه نقطهٔ گوشه‌ای متناظر با جدول بعدی عیناً مشابه با نقطهٔ گوشه‌ای جدول فعلی است و تابع هدف از جدول قبلی به جدول بعدی بدون تغییر می‌ماند. در این حالت اصطلاحاً می‌گوییم «در همان نقطهٔ گوشه‌ای در جا زده‌ایم»

✓ لذا، در مسائل تباهیده این امکان وجود دارد (البته با احتمال کم) که در یک نقطهٔ گوشه‌ای غیربهینه توقف کنیم و دنباله‌ای از جواب‌های شدنی پایه‌ای متناظر با آن را به صورت

$$BV_1, BV_2, \dots, BV_k$$

که $BV_1 = BV_k$ ملاقات کنیم و این دنباله دوباره و دوباره تکرار شود و برای همیشه بین پایه‌های فوق بدون آنکه بهبودی در تابع هدف رخ دهد، دور بزنیم.

چنین حالتی را اصطلاحاً **«در دور افتادن»** می‌گوییم.

مثال: در مسألهٔ زیر الگوریتم سیمپلکس در دور می‌افتد.

$$\min z = \frac{-3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4$$

$$s.t.$$

$$\frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \le 0$$

$$\frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 \le 0$$

$$x_3 \le 1$$

$$x_i \ge 0 \quad \forall i = 1,2,3,4$$

BV \ متغیرها	Z	x۱	x۲	x۳	x۴	S۱	S۲	S۳	RHS
Z	۱	۳/۴	-۲۰	۱/۲	-۶	۰	۰	۰	۰
S۱	۰	۱/۴	-۸	-۱	۹	۱	۰	۰	۰
S۲	۰	۱/۲	-۱۲	-۱/۲	۳	۰	۱	۰	۰
S۳	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

BV \ متغیرها	Z	x۱	x۲	x۳	x۴	S۱	S۲	S۳	RHS
Z	۱	۰	۴	۷/۲	-۳۳	-۳	۰	۰	۰
x۱	۰	۱	-۳۲	-۴	۳۶	۴	۰	۰	۰
S۲	۰	۰	۴	۳/۲	-۱۵	-۲	۱	۰	۰
S۳	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

BV \ متغیرها	Z	x۱	x۲	x۳	x۴	S۱	S۲	S۳	RHS
Z	۱	۰	۰	۲	-۱۸	-۱	-۱	۰	۰
x۱	۰	۱	۰	۸	-۸۴	-۱۲	۸	۰	۰
x۲	۰	۰	۱	۳/۸	-۱۵/۴	-۱/۲	۱/۴	۰	۰
S۳	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

BV \ متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	۱	-۱/۴	۰	۰	۳	۲	-۳	۰	۰
x_3	۰	۱/۸	۰	۱	-۲۱/۲	-۳/۲	۱	۰	۰
x_2	۰	-۳/۶۴	۱	۰	۳/۱۶	۱/۱۶	-۱/۸	۰	۰
s_3	۰	-۱/۸	۰	۰	۲۱/۲	۳/۲	-۱	۱	۱

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

BV \ متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	۱	-۱/۲	-۱۶	۰	۰	۱	-۱	۰	۰
x_3	۰	-۵/۲	۵۶	۱	۰	۲	-۶	۰	۰
x_4	۰	-۱/۴	۱۶/۳	۰	۱	۱/۳	-۲/۳	۰	۰
s_3	۰	۵/۲	-۵۶	۰	۰	-۲	۶	۱	۱

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

BV \ متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	۱	۷/۴	-۴۴	-۱/۲	۰	۰	۲	۰	۰
s_1	۰	-۵/۴	۲۸	۱/۲	۰	۱	-۳	۰	۰
x_4	۰	۱/۶	-۴	-۱/۶	۱	۰	۱/۳	۰	۰
s_3	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

متغیرها / BV	Z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	RHS
Z	۱	۳/۴	۲۰-	۱/۲	۶-	۰	۰	۰	۰
$S_۱$	۰	۱/۴	۸-	۱-	۹	۱	۰	۰	۰
$S_۲$	۰	۱/۲	۱۲-	۱/۲-	۳	۰	۱	۰	۰
$S_۳$	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

همهٔ جدول‌ها متناظر با نقطهٔ گوشه‌ای $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ هستند و روی پایه‌های زیر دور زده‌ایم:

$$\boxed{BV_1 = \{s_1, s_2, s_3\}} \rightarrow BV_2 = \{x_1, s_2, s_3\} \rightarrow$$
$$BV_3 = \{x_1, x_2, s_3\} \rightarrow BV_4 = \{x_3, x_2, s_3\} \rightarrow$$
$$BV_5 = \{x_3, x_4, s_3\} \rightarrow BV_6 = \{s_1, x_4, s_3\} \rightarrow$$
$$\boxed{BV_1 = \{s_1, s_2, s_3\}}$$

قاعدهٔ بلاند همگرایی الگوریتم سیمپلکس را با اطمینان از اینکه هیچ پایه‌ای تکرار نخواهد شد، تضمین می‌کند.

قاعدهٔ بلاند برای انتخاب متغیرهای ورودی و خروجی

متغیرها را به صورت یک دنبالهٔ مرتب نامگذاری می‌کنیم مثلاً $x_1, x_2, \dots, x_n$

هنگام انتخاب متغیر وارد شونده، از بین همهٔ متغیرهایی که کاندید ورود هستند (یعنی ضریب کاهش هزینهٔ آنها منفی (در مسألهٔ ماکزیمم‌سازی) یا مثبت (در مسألهٔ مینیمم‌سازی) است)، **متغیری که کوچکترین اندیس را دارد** انتخاب می‌کنیم.

هنگام انتخاب متغیر خارج‌شونده، از بین تمام متغیرهای کاندید خروجی (یعنی متغیرهای متناظر با مینیمم نسبت) آن **متغیری که کوچکترین اندیس را دارد**، انتخاب می‌کنیم.

مثال: قاعدهٔ بلاند را روی مثال قبل به کار می‌بریم.

$$
\begin{aligned}
&\min z = \frac{-3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4\\
&s.t.\\
&\frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 + s_1 = 0\\
&\frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 + s_2 = 0\\
&x_3 + s_3 = 1\\
&x_i \ge 0 \quad \forall i = 1,2,3,4\\
&s_1, s_2, s_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

متغیرهای s_1 و s_2 و s_3 را به ترتیب x_5 و x_6 و x_7 می‌نامیم.

BV \ متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	۱	۳/۴	-۲۰	۱/۲	-۶	۰	۰	۰	۰
x_5	۰	۱/۴	-۸	-۱	۹	۱	۰	۰	۰
x_6	۰	۱/۲	-۱۲	-۱/۲	۳	۰	۱	۰	۰
x_7	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱

BV \ متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	۱	۰	۴	۷/۲	-۳۳	-۳	۰	۰	۰
x_1	۰	۱	-۳۲	-۴	۳۶	۴	۰	۰	۰
x_6	۰	۰	۴	۳/۲	-۱۵	-۲	۱	۰	۰
x_7	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱

BV \ متغیرها	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	۱	۰	۰	۲	-۱۸	-۱	-۱	۰	۰
x_1	۰	۱	۰	۸	-۸۴	-۱۲	۸	۰	۰
x_2	۰	۰	۱	۳/۸	-۱۵/۴	-۱/۲	۱/۴	۰	۰
x_7	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱

BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	1	$-\frac{1}{4}$	0	0	3	2	-3	0	0
x_3	0	$\frac{1}{8}$	0	1	$-\frac{21}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	0
x_2	0	$-\frac{3}{64}$	1	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	0
x_7	0	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{21}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	1	1

BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	1	$-\frac{1}{2}$	-16	0	0	1	-1	0	0
x_3	0	$-\frac{5}{2}$	56	1	0	2	-6	0	0
x_4	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{16}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0
x_7	0	$\frac{5}{2}$	-56	0	0	-2	6	1	1

BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	1	$\frac{7}{4}$	-44	$-\frac{1}{2}$	0	0	2	0	0
x_5	0	$-\frac{5}{4}$	28	$\frac{1}{2}$	0	1	-3	0	0
x_4	0	$\frac{1}{6}$	-4	$-\frac{1}{6}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0
x_7	0	0	0	1	0	0	0	1	1

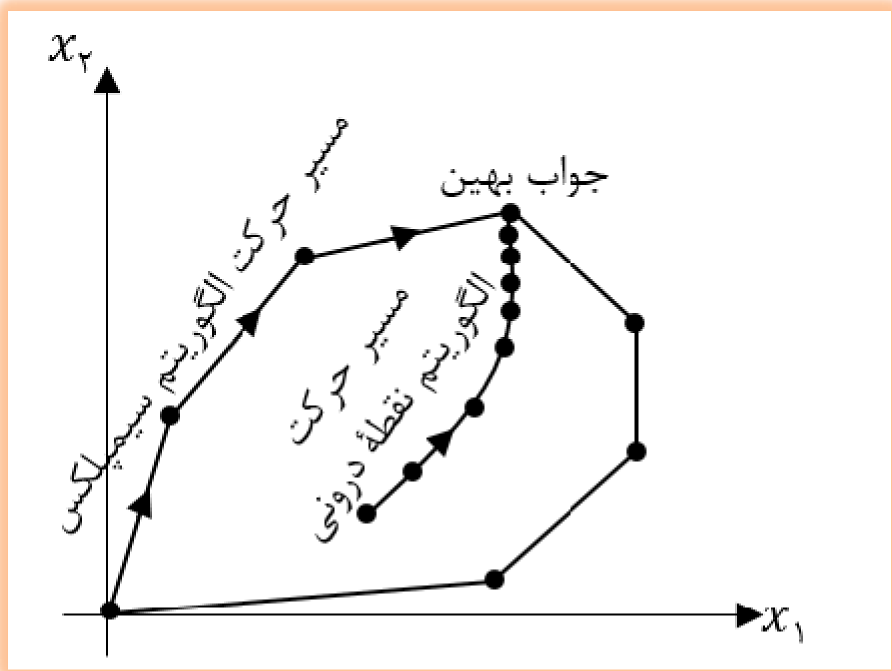
BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	۱	۰	-۲	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{-۲۱}{۲}$	۰	$\frac{-۳}{۲}$	۰	۰
x_5	۰	۰	-۲	$\frac{-۳}{۴}$	$\frac{۱۵}{۲}$	۱	$\frac{-۱}{۲}$	۰	۰
x_1	۰	۱	-۲۴	-۱	۶	۰	۲	۰	۰
x_7	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱

BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	۱	۰	-۲	۰	$\frac{-۲۱}{۲}$	۰	$\frac{-۳}{۲}$	$\frac{-۵}{۴}$	$\frac{-۵}{۴}$
x_5	۰	۰	-۲	۰	$\frac{۱۵}{۲}$	۱	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$
x_1	۰	۱	-۲۴	۰	۶	۰	۲	۱	۱
x_3	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱

جدول فوق متناظر با جواب بهین است.

روش نقطهٔ درونی (Interior point method)

- ✓ روش‌های نقطهٔ درونی دستهٔ دیگری از روش‌ها برای حل مسائل LP می‌باشند.
- ✓ برخلاف روش سیمپلکس که روی نقاط گوشه‌ای ناحیهٔ شدنی به جستجو می‌پردازد، روش نقطهٔ درونی جستجو را از داخل ناحیهٔ شدنی شروع می‌کند و سرانجام، به نقطهٔ گوشه‌ای بهینه همگرا می‌شود.
- ✓ این روش از یک نقطه درون ناحیهٔ شدنی شروع می‌کند و در راستای یک جهت بهبوددهنده با طول گام مناسب حرکت می‌کند و به نقطهٔ دیگری درون ناحیهٔ شدنی می‌رود. در حرکت از یک جواب به جواب بعدی، جهت جستجو و طول گام باید به گونه‌ای انتخاب شوند که جواب جدید کماکان درون ناحیهٔ شدنی باشد و نیز مقدار تابع هدف آن نسبت به جواب قبلی بهبود یابد.



پیچیدگی الگوریتم سیمپلکس

مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید A ماتریس $m \times n$ باشد و $Rank(A) = m$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \min \text{ or } \max z = c^T x \\ s.t. \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}}$$

تعداد جواب‌های شدنی پایه‌ای حداکثر برابر است با:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\ (n-m)!}$$

اگر $n \geq 2m$ داریم:

$$\frac{n!}{m!\ (n-m)!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots (n-m+1)}{m \times (m-1) \times \dots \times 1} \geq 2^m$$

پس تعداد نقاط گوشه‌ای یک LP می‌تواند از مرتبهٔ نمایی باشد.

$Klee$ و $Minty$ مثال‌های زیر را ارائه کردند که در آنها روش سیمپلکس همهٔ نقاط گوشه‌ای را ملاقات می‌کند تا به جواب بهین برسد:

مثال‌های $Klee$ و $Minty$	
$\max z = x_1 + x_2$ $s.t.$ $x_1 \leq 1$ $2x_1 + x_2 \leq 3$ $x_1, x_2 \geq 0$	$\max z = x_1 + x_2 + x_3$ $s.t.$ $x_1 \leq 1$ $2x_1 + x_2 \leq 3$ $2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 9$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

لذا، پیچیدگی الگوریتم سیمپلکس از مرتبهٔ نمایی است.

البته به صورت تجربی ملاحظه شده که روش سیمپلکس عموماً همهٔ نقاط گوشه‌ای را ملاقات نمی‌کند و غالباً در کمتر از $3m$ تکرار به جواب بهین می‌رسد.

در مقابل، نسخه‌های متفاوتی از روش نقطهٔ درونی ارائه شده که تعداد تکرارهای آنها از مرتبهٔ چندجمله‌ای است.

تعداد تکرارهای روش سیمپلکس	$>$	تعداد تکرارهای روش نقطهٔ درونی
محاسبات لازم در هر تکرار از روش سیمپلکس	$<$	محاسبات لازم در هر تکرار از روش نقطهٔ درونی

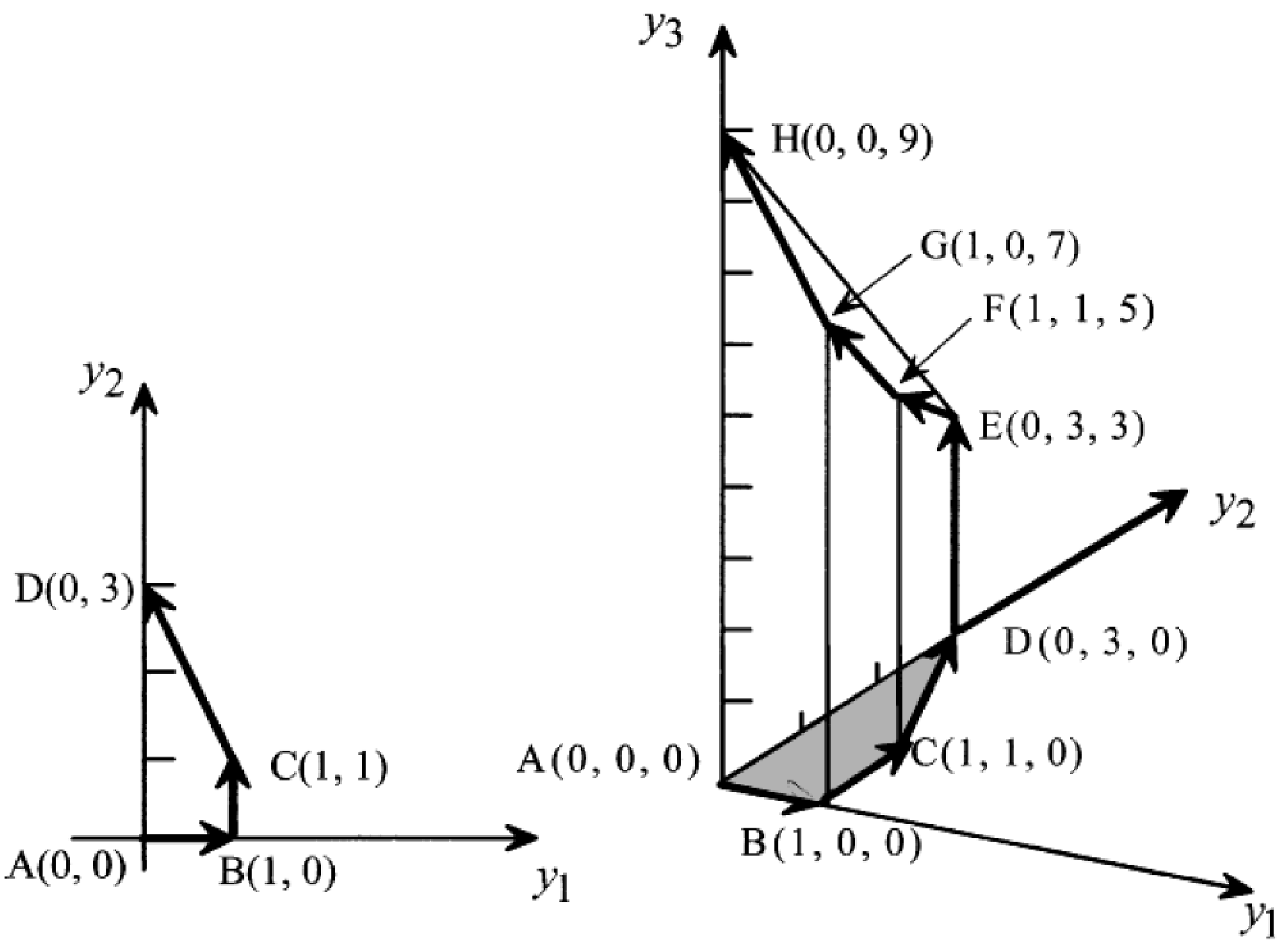
جزئیات بیشتر در خصوص مثال‌های *Klee* و *Minty*

Klee و Minty مسائلی را با n قید تساوی و $2n$ متغیر نامنفی تعریف کردند که در آن الگوریتم سیمپلکس $2^n - 1$ تکرار را انجام می‌دهد و همه نقاط گوشه‌ای را ملاقات می‌کند.

قالب کلی این مسائل به صورت زیر است که θ یک پارامتر بزرگ‌تر از ۲ است.

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{j=1}^{n} y_j \\ \text{subject to} & y_1 \le 1 \\ & y_j + 2\sum_{k=1}^{j-1} y_k \le \theta^{j-1} \quad \text{for } j = 2, \dots, n \\ & y_1, \dots, y_n \ge 0. \end{array}$$

شکل‌های زیر ناحیه شدنی مسأله فوق و ترتیب ملاقات گوشه‌ها در الگوریتم سیمپلکس را برای $n = 2,3$ و به ازای $\theta = 3$ نشان می‌دهند.



(a) Case for $n = 2$ (b) Case for $n = 3$

جبر الگوریتم سیمپلکس

یک LP استاندارد را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\min \text{ or } \max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&s.t. \\
&\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
&\qquad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
\end{aligned} \tag{1}$$

تعریف می‌کنیم:

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \underbrace{a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}}_{\text{ستون متناظر با ضرایب متغیر } x_j}$$

فرم ماتریسی LP:

$$\begin{aligned}
&\min \text{ or } \max z = c^T x \\
&s.t. \\
&Ax = b \\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

BV / کل متغیرها	z	x_j	RHS
z		$\bar{c}_j$	$\bar{z}$
متغیر پایه‌ای قید اول			
متغیر پایه‌ای قید دوم		$\bar{a}_j$	$\bar{b}$
⋮			
متغیر پایه‌ای قید mاُم			

مجموعهٔ BV در جدول فوق به صورت زیر است:

$$BV = \left\{\text{متغیر پایه‌ای قید اول},\ \text{متغیر پایه‌ای قید دوم},\ \ldots,\ \text{متغیر پایه‌ای قید } m \text{ ام}\right\}$$

در هر جدول سیمپلکس تنها با دانستن اعضای BV می‌توان همهٔ مؤلفات جدول را حساب کرد.

بدین منظور، متناظر با BV ، بردار c_{BV} و ماتریس B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_{BV} = \begin{bmatrix} \text{ضریب اولین متغیر پایه‌ای در تابع هدف مسألهٔ استاندارد1} \\ \text{ضریب دومین متغیر پایه‌ای در تابع هدف مسألهٔ استاندارد1} \\ \vdots \\ \text{ضریب } m \text{امین متغیر پایه‌ای در تابع هدف مسألهٔ استاندارد1} \end{bmatrix}$$

$$B = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \text{ستون نظیر اولین متغیر پایه‌ای در ماتریس قیود مسألهٔ استاندارد1} & \text{ستون نظیر دومین متغیر پایه‌ای در ماتریس قیود مسألهٔ استاندارد1} & \cdots & \text{ستون نظیر m امین متغیر پایه‌ای درماتریس قیودمسألهٔ استاندارد1} \end{array} \right]$$

و روابط زیر را به کار می‌بریم:

$\bar{a}_j = B^{-1} a_j$
$\bar{b} = B^{-1} b$
$\bar{c}_j = c_{BV}^T B^{-1} a_j - c_j$
$\bar{z} = c_{BV}^T B^{-1} b$

این روابط را به خاطر بسپارید.

مثال: مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید و جدول متناظر با پایهٔ $\boldsymbol{BV = \{s_1, x_2, s_3\}}$ را تشکیل دهید.

$\max z = 3x_1 + 5x_2$ $s.t.$ $x_1 \le 4$ $x_2 \le 6$ $3x_1 + 2x_2 \le 18$ $x_1, x_2 \ge 0$	**استاندارد** $\Rightarrow$	$\max z = 3x_1 + 5x_2$ $s.t.$ $x_1 + s_1 = 4$ $x_2 + s_2 = 6$ $3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$ $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \ge 0$

باید جدول زیر را تکمیل کنیم:

BV \ کل متغیرها	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**RHS**
z	1	$\bar{c}_{x_1}$	$\bar{c}_{x_2}$	$\bar{c}_{s_1}$	$\bar{c}_{s_2}$	$\bar{c}_{s_3}$	$\bar{z}$
s_1	0						
x_2	0	$\bar{a}_{x_1}$	$\bar{a}_{x_2}$	$\bar{a}_{s_1}$	$\bar{a}_{s_2}$	$\bar{a}_{s_3}$	$\bar{b}$
s_3	0						

داریم:

$$c_{BV} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BV = \{s_1, x_2, s_3\}$$

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$
$$s.t.$$
$$x_1 + s_1 = 4$$
$$x_2 + s_2 = 6$$
$$3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

$$c_{BV} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

پس داریم:

$$\bar{a}_{x_1} = B^{-1}a_{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_{x_2} = B^{-1}a_{x_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ نیازی به محاسبه نبود

$$\bar{a}_{s_1} = B^{-1}a_{s_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ نیازی به محاسبه نبود

$$\bar{a}_{s_2} = B^{-1}a_{s_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_{s_3} = B^{-1}a_{s_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ نیازی به محاسبه نبود

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$
$$s.t.$$
$$x_1 + s_1 = 4$$
$$x_2 + s_2 = 6$$
$$3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

$$c_{BV} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_{x_1} = c_{BV}^T B^{-1} a_{x_1} - c_{x_1} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 = -3$$

$$\bar{c}_{x_2} = c_{BV}^T B^{-1} a_{x_2} - c_{x_2} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 5 = 0$$ نیازی به محاسبه نبود

$$\bar{c}_{s_1} = c_{BV}^T B^{-1} a_{s_1} - c_{s_1} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$ نیازی به محاسبه نبود

$$\bar{c}_{s_2} = c_{BV}^T B^{-1} a_{s_2} - c_{s_2} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 0 = 5$$

$$\bar{c}_{s_3} = c_{BV}^T B^{-1} a_{s_3} - c_{s_3} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 0$$ نیازی به محاسبه نبود

$$\bar{z} = c_{BV}^T B^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 30$$

ضرایب / BV	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	۱	-۳	۰	۰	۵	۰	۳۰
S_1	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۴
x_2	۰	۰	۱	۰	۱	۰	٦
S_3	۰	۳	۰	۰	-۲	۱	٦

مثال: مسألهٔ زیر و جدول داده شده را در نظر بگیرید و مجهولات جدول را محاسبه کنید.

$$\max z = 2x_1 - x_2 + x_3$$
$$s.t.$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 6$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

BV	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	1	0	g	h	2	0	k
x_1	0	1	a	c	1	0	e
s_2	0	0	b	d	1	1	f

$$BV = \{x_1, s_2\}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad c_{BV} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{a}}_{x_2} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_{x_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g} = \bar{\boldsymbol{c}}_{x_2} = \boldsymbol{c}_{BV}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_{x_2} - \boldsymbol{c}_{x_2} = [\mathbf{2} \quad \mathbf{0}]\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix} - (-\mathbf{1}) = \mathbf{3}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{a}}_{x_3} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_{x_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{h} = \bar{\boldsymbol{c}}_{x_3} = \boldsymbol{c}_{BV}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_{x_3} - \boldsymbol{c}_{x_3} = [\mathbf{2} \quad \mathbf{0}]\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} - \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{f} \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{10} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k} = \bar{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{c}_{BV}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = [\mathbf{2} \quad \mathbf{0}]\begin{bmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{10} \end{bmatrix} = \mathbf{12}$$

مثال: یک LP را با هدف $\max z = 2x_1 - 3x_2$ و با دو قید در نظر بگیرید. فرض کنید قیود از نوع $\leq$ و s_1 و s_2 متغیرهای کمبود باشند. مجهولات جدول زیر را حساب کنید.

BV	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	1	b	1	f	g	6
s_1	0	c	0	1	$\frac{1}{5}$	4
x_1	0	d	e	0	2	a

s_1 و x_1 داخل پایه هستند. پس داریم:

$$f = 0, \quad b = 0, \; c = 0\,, \quad d = 1$$

$$\bar{c}_{x_2} = 1 \;\Rightarrow\; c_{BV}^{T} B^{-1} a_{x_2} - c_{x_2} = 1 \;\Rightarrow\; c_{BV}^{T} \bar{a}_{x_2} - c_{x_2} = 1$$

$$\Rightarrow \; [0 \quad 2] \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} - (-3) = 1 \;\Rightarrow\; e = -1$$

$$g = \bar{c}_{s_2} = c_{BV}^{T} B^{-1} a_{s_2} - c_{s_2} = c_{BV}^{T} \bar{a}_{s_2} - c_{s_2} = [0 \quad 2] \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 2 \end{bmatrix} - 0 = 4$$

$$\bar{z} = c_{BV}^{T} B^{-1} b \;\Rightarrow\; \bar{z} = c_{BV}^{T} \bar{b} \;\Rightarrow\; 6 = [0 \quad 2] \begin{bmatrix} 4 \\ a \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; a = 3$$

در هر جدول، ماتریس B^{-1} متناظر با پایهٔ فعلی را در کدام قسمت جدول می‌توان دید؟

$$
\begin{aligned}
&\max z = 36x_1 + 30x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\
&s.t. \\
&x_1 + x_2 - x_3 + s_1 = 5 \\
&6x_1 + 5x_2 - x_4 + s_2 = 10 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

جدول اولیه

متغیرهای پایه‌ای / کل متغیرها	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	سمت راست
Z	۱	-۳۶	-۳۰	۳	۴	۰	۰	۰
s_1	۰	۱	۱	-۱	۰	۱	۰	۵
s_2	۰	۶	۵	۰	-۱	۰	۱	۱۰

جدول متناظر با پایه

$BV = \{x_4, x_1\}$

متغیرهای پایه‌ای / کل متغیرها	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	سمت راست
Z	۱	۰	۲	-۹	۰	۱۲	۴	۱۰۰
x_4	۰	۰	۱	-۶	۱	۶	-۱	۲۰
x_1	۰	۱	۱	-۱	۰	۱	۰	۵

$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$
B = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]
$$