第一章 集合与函数概念

一：集合的含义与表示

1、集合的含义：集合为一些确定的、不同的东西的全体，人们能意识到这些东西，并且能判断一个给定的东西是否属于这个整体。

把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫集合，简称为集。

2、集合的中元素的三个特性：

（1）元素的确定性：集合确定，则一元素是否属于这个集合是确定的：属于或不属于。

（2）元素的互异性：一个给定集合中的元素是唯一的，不可重复的。

（3）元素的无序性:集合中元素的位置是可以改变的，并且改变位置不影响集合

3、集合的表示：{…}

（1）用大写字母表示集合：A={我校的篮球队员},B={1,2,3,4,5}

（2）集合的表示方法：列举法与描述法。

a、列举法：将集合中的元素一一列举出来 {a,b,c……}

b、描述法：

①区间法：将集合中元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合。{x∈R| x-3>2} ,{x| x-3>2}

②语言描述法：例：{不是直角三角形的三角形}

③Venn 图:画出一条封闭的曲线，曲线里面表示集合。

4、集合的分类：

（1）有限集：含有有限个元素的集合

（2）无限集：含有无限个元素的集合

（3）空集：不含任何元素的集合

5、元素与集合的关系：

（1）元素在集合里，则元素属于集合，即：a∈A

（2）元素不在集合里，则元素不属于集合，即：a∉A

◆ 注意：常用数集及其记法：

非负整数集（即自然数集） 记作：N

正整数集 N*或 N+

整数集 Z

有理数集 Q

实数集 R

6、集合间的基本关系

（1）.“包含”关系（1）—子集

定义：如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们说这两个集合有包含关系，称集合 A 是集合 B 的子集。记作：$A\subseteq B$（或 B⊇A）

注意：$A\subseteq B$有两种可能（1）A 是 B 的一部分；

（2）A 与 B 是同一集合。

反之：集合 A 不包含于集合 B,或集合 B 不包含集合 A,记作 $A\not\subseteq B$ 或 $B\not\supseteq A$

（2）．“包含”关系（2）—真子集

如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素 $x\in B$ 且 $x\not\in A$，则集合 A 是集合 B 的真子集

如果 $A\subseteq B$,且 $A\neq B$ 那就说集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$)读作 A 真含与 B

（3）． “相等”关系：A=B

“元素相同则两集合相等”

如果 $A\subseteq B$ 同时 $B\subseteq A$ 那么 A=B

（4）． 不含任何元素的集合叫做空集，记为Φ

规定：空集是任何集合的子集， 空集是任何非空集合的真子集。

（5）集合的性质

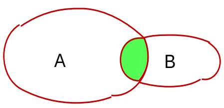
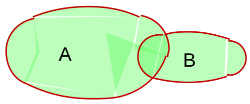
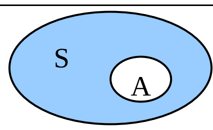
① 任何一个集合是它本身的子集。$A\subseteq A$

②如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$ ，那么 $A\subseteq C$

③如果 $A\subsetneqq B$ 且 $B\subsetneqq C$，那么 $A\subsetneqq C$

④有 n 个元素的集合，含有 2^n 个子集，2^{n-1} 个真子集

7、集合的运算

运算类型	交　集	并　集	补　集
定　义	由所有属于 A 且属于 B 的元素所组成的集合，叫做 A,B 的交集．记作 $A\cap B$（读作‘A 交 B’），即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$，且 $x\in B\}$．	由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A,B 的并集．记作：$A\cup B$（读作‘A 并 B’），即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$，或 $x\in B\}$)．	全集：一般，若一个集合汉语我们所研究问题中这几道的所有元素，我们就称这个集合为全集，记作：U 设 S 是一个集合,A 是 S 的一个子集，由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的补集（或余集）记作 C_SA，$C_SA=\{x\mid x\in S,且x\notin A\}$
韦恩图示	 图1	 图2	
性　质	$A\cap A=A$ $A\cap\Phi=\Phi$ $A\cap B=B\cap A$ $A\cap B\subseteq A$　$A\cap B\subseteq B$	$A\cup A=A$ $A\cup\Phi=A$ $A\cup B=B\cup A$ $A\cup B\supseteq A$ $A\cup B\supseteq B$	$(C_uA)\cap(C_uB)=C_u(A\cup B)$ $(C_uA)\cup(C_uB)=C_u(A\cap B)$ $A\cup(C_uA)=U$ $A\cap(C_uA)=\Phi$．

二、函数的概念

1. 函数的概念：设 A、B 是非空的数集，如果按照某个确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 f(x)和它对应，那么就称 f：A→B 为从集合 A 到集合 B 的一个函数．记作： y=f(x)，x∈A．
   （1）其中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；
   （2）与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合{f(x)｜ x∈A }叫做函数的值域．
2. 函数的三要素：定义域、值域、对应法则
3. 函数的表示方法：（1）解析法：明确函数的定义域
   （2）图想像：确定函数图像是否连线，函数的图像可以是连续的曲线、直线、折线、离散的点等等。
   （3）列表法：选取的自变量要有代表性，可以反应定义域的特征。

4、函数图象知识归纳

(1)定义：在平面直角坐标系中，以函数 *y=f(x)* ，*(x*∈A)中的 *x* 为横坐标，函数值 *y* 为纵坐标的点 P*(x*，*y)*的集合 C，叫做函数 *y=f(x)*,*(x* ∈A)的图象．C 上每一点的坐标*(x*，*y)*均满足函数关系 *y=f(x)*，反过来，以满足 *y=f(x)*的每一组有序实数对 *x*、*y* 为坐标的点*(x*，*y)*，均在 C 上 ．

(2) 画法

A、描点法： B、图象变换法：平移变换；伸缩变换；对称变换，即平移。

（3）函数图像平移变换的特点：

1）加左减右————————只对 x

2）上减下加————————只对 y

3）函数 y=f(x) 关于 X 轴对称得函数 y=-f(x)

4）函数 y=f(x) 关于 Y 轴对称得函数 y=f(-x)

5）函数 y=f(x) 关于原点对称得函数 y=-f(-x)

6）函数 y=f(x) 将 x 轴下面图像翻到 x 轴上面去，x 轴上面图像不动得函数 y=｜ f(x)｜

7）函数 y=f(x) 先作 x≥0 的图像，然后作关于 y 轴对称的图像得函数 f(|x|)

三、函数的基本性质

1、函数解析式子的求法

（1）、函数的解析式是函数的一种表示方法，要求两个变量之间的函数关系时，一是要求出它们之间的对应法则，二是要求出函数的定义域.

（2）、求函数的解析式的主要方法有：

1）代入法：

2）待定系数法：

3）换元法：

4) 拼凑法：

2．定义域：能使函数式有意义的实数 x 的集合称为函数的定义域。

求函数的定义域时列不等式组的主要依据是：

(1) 分式的分母不等于零；

(2) 偶次方根的被开方数不小于零；

(3) 对数式的真数必须大于零；

(4) 指数、对数式的底必须大于零且不等于 1.

(5) 如果函数是由一些基本函数通过四则运算结合而成的.那么，它的定义域是使各部分都有意义的 x 的值组成的集合.

(6) 指数为零底不可以等于零，

(7) 实际问题中的函数的定义域还要保证实际问题有意义.

3、相同函数的判断方法：①表达式相同（与表示自变量和函数值的字母无关）；②定义域一致 (两点必须同时具备)

4、区间的概念：

（1）区间的分类：开区间、闭区间、半开半闭区间

（2）无穷区间

（3）区间的数轴表示

5、值域 （先考虑其定义域）

（1）观察法：直接观察函数的图像或函数的解析式来求函数的值域；

（2）反表示法：针对分式的类型，把 Y 关于 X 的函数关系式化成 X 关于 Y 的函数关系式，由 X 的范围类似求 Y 的范围。

(3) 配方法：针对二次函数的类型，根据二次函数图像的性质来确定函数的值域，注意定义域的范围。

(4) 代换法（换元法）：作变量代换，针对根式的题型，转化成二次函数的类型。

6. 分段函数

（1）在定义域的不同部分上有不同的解析表达式的函数。

（2）各部分的自变量的取值情况.

（3）分段函数的定义域是各段定义域的交集，值域是各段值域的并集.

（4）常用的分段函数有取整函数、符号函数、含绝对值的函数

7．映射

一般地，设 A、B 是两个非空的集合，如果按某一个确定的对应法则 f，使对于集合 A 中的任意一个元素 x，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，

那么就称对应 f：A→B 为从集合 A 到集合 B 的一个映射。记作“f（对应关系）：A（原象）→B（象）”

对于映射 f：A→B 来说，则应满足：

(1)集合 A 中的每一个元素，在集合 B 中都有象，并且象是唯一的；

(2)集合 A 中不同的元素，在集合 B 中对应的象可以是同一个；

(3)不要求集合 B 中的每一个元素在集合 A 中都有原象。

注意：映射是针对自然界中的所有事物而言的，而函数仅仅是针对数字来说的。所以函数是映射，而映射不一定的函数

8、函数的单调性(局部性质)及最值

（1）、增减函数

（1）设函数 y=f(x)的定义域为 I，如果对于定义域 I 内的某个区间 D 内的任意两个自变量 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 f(x)在区间 D 上是增函数.区间 D 称为 y=f(x)的单调增区间.

（2）如果对于区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $f(x)$在这个区间上是减函数.区间 D 称为 y=f(x)的单调减区间.

注意：函数的单调性是函数的局部性质；函数的单调性还有单调不增，和单调不减两种

（2）、 图象的特点

如果函数 $y=f(x)$在某个区间是增函数或减函数，那么说函数 $y=f(x)$在这一区间上具有(严格的)单调性，在单调区间上增函数的图象从左到右是上升的，减函数的图象从左到右是下降的.

（3）、函数单调区间与单调性的判定方法

(A) 定义法：

① 任取 x_1，x_2∈D，且 $x_1<x_2$；

② 作差 $f(x_1)-f(x_2)$；

③ 变形（通常是因式分解和配方）；

④ 定号（即判断差 $f(x_1)-f(x_2)$的正负）；

⑤ 下结论（指出函数 f(x)在给定的区间 D 上的单调性）.

(B)图象法(从图象上看升降)

(C)复合函数的单调性

复合函数：如果 y=f(u)(u∈M),u=g(x)(x∈A),则 y=f[g(x)]=F(x)(x∈A)称为 f、g 的复合函数。

复合函数 $f[g(x)]$的单调性与构成它的函数 $u=g(x)$，$y=f(u)$的单调性密切相关，其规律：“同增异减”

注意：函数的单调区间只能是其定义域的子区间 ,不能把单调性相同的区间和在一起写成其并集.

9：函数的奇偶性（整体性质）

（1）、偶函数

一般地，对于函数 f(x)的定义域内的任意一个 x，都有 f(－x)=f(x)，那么 f(x)就叫做偶函数.

（2）、奇函数

一般地，对于函数 f(x)的定义域内的任意一个 x，都有 f(－x)=—f(x)，那么 f(x)就叫做奇函数.

（3）、具有奇偶性的函数的图象的特征

偶函数的图象关于 y 轴对称；奇函数的图象关于原点对称.

利用定义判断函数奇偶性的步骤：

a、首先确定函数的定义域，并判断其是否关于原点对称；若是不对称，则是非奇非偶的函数；若对称，则进行下面判断；

b、确定 f(－x)与 f(x)的关系；

c、作出相应结论：若 f(－x) = f(x) 或 f(－x)－f(x) = 0，则 f(x)是偶函数；

若 f(－x) =－f(x) 或 f(－x)＋f(x) = 0，则 f(x)是奇函数.

（4）利用奇偶函数的四则运算以及复合函数的奇偶性

a、在公共定义域内，偶函数的加减乘除仍为偶函数；

奇函数的加减仍为奇函数；

奇数个奇函数的乘除认为奇函数；

偶数个奇函数的乘除为偶函数；

一奇一偶的乘积是奇函数；

a、复合函数的奇偶性：一个为偶就为偶，两个为奇才为奇。

注意：函数定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的必要条件. 首先看函数的定义域是否关于原点对称，若不对称则函数是非奇非偶函数.若对称，

(1)再根据定义判定；

(2)由 $f(-x)$±f(x)=0 或 f(x) / f(-x)=±1 来判定；

(3)利用定理，或借助函数的图象判定 .

10、函数最值及性质的应用

（1）、函数的最值

a 利用二次函数的性质（配方法）求函数的最大（小）值

b 利用图象求函数的最大（小）值

c 利用函数单调性的判断函数的最大（小）值：

如果函数 y=f(x)在区间[a,b]上单调递增,在区间[b,c]上单调递减则函数 y=f(x)在 x=b 处有最大值 f(b)；

如果函数 y=f(x)在区间[a,b]上单调递减,在区间[b,c]上单调递增则函数 y=f(x)在 x=b 处有最小值 f(b)；

（2）、函数的奇偶性与单调性

奇函数在关于原点对称的区间上有相同的单调性；

偶函数在关于原点对称的区间上有相反的单调性。

（3）、判断含糊单调性时也可以用作商法，过程与作差法类似，区别在于作差法是与 0 作比较，作商法是与 1 作比较。

（4）、绝对值函数求最值，先分段，再通过各段的单调性，或图像求最值。

（5）、在判断函数的奇偶性时候，若已知是奇函数可以直接用 f(0)=0，但是 f(0)=0 并不一定可以判断函数为奇函数。（高一阶段可以利用奇函数 f(0)=0）。

第二章 基本初等函数

一、指数函数

（一）指数

1、 指数与指数幂的运算：

复习初中整数指数幂的运算性质：

$a^m * a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(a*b)^n = a^n b^n$

2、根式的概念：一般地，若 $x^n = a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 n>1，且 $n \in N^*$.

当 n 是奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数。此时，a 的 n 次方根用符号 表示。

当 n 为偶数时，正数的 n 次方根有两个，这两个数互为相反数。此时正数 a 的正的 n 次方根用符号 表示，负的 n 的次方根用符号 表示。正的 n 次方根与负的 n 次方根可以合并成 （a>0）。

注意：负数没有偶次方根；0 的任何次方根都是 0，记作 $\sqrt[n]{0} = 0$。

当 n 是奇数时，$\sqrt[n]{a^n} = a$，当 n 是偶数时，$\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，这里 n 叫做根指数，a 叫做被开方数。

3、 分数指数幂

正数的分数指数幂的

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in N^*,n>1)$， $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0,m,n\in N^*,n>1)$

0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义

4、 有理数指数米的运算性质

（1） $a^r \bullet a^r=a^{r+s}$ $(a>0,r,s\in R)$；

（2） $(a^r)^s=a^{rs}$ $(a>0,r,s\in R)$；

（3） $(ab)^r=a^r a^s$ $(a>0,r,s\in R)$．

5、无理数指数幂

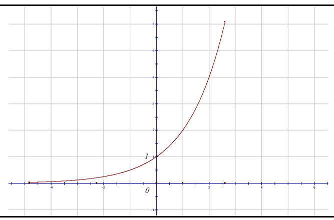
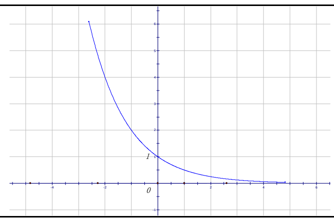
一般的，无理数指数幂 a^a（a>0,a 是无理数）是一个确定的实数。有理数指数幂的运算性质同样使用于无理数指数幂。

（二）、指数函数的性质及其特点

1、指数函数的概念：一般地，函数 $y=a^x(a>0,且a\neq 1)$ 叫做指数函数，其中 x 是自变量，函数的定义域为 R.

注意：指数函数的底数的取值范围，底数不能是负数、零和 1．为什么？

2、指数函数的图象和性质

a>1	0<a<1
	
定义域 R	定义域 R
值域 y＞0	值域 y＞0
在 R 上单调递增	在 R 上单调递减
非奇非偶函数	非奇非偶函数
函数图象都过定点（0，1）	函数图象都过定点（0，1）

注意：利用函数的单调性，结合图象还可以看出：

（1）在[a，b]上，值域是$[f(a),f(b)]$或$[f(b),f(a)]$；

（2）若 $x\neq 0$，则 $f(x)\neq 1$； $f(x)$ 取遍所有正数当且仅当 $x\in R$；

（3）对于指数函数 $f(x)=a^x(a>0且a\neq 1)$，总有 $f(1)=a$；

（4）当 a>1 时，若 $X_1<X_2$,则有 $f(X_1)<f(X_2)$。

二、对数函数

（一）对数

1．对数的概念：一般地，如果 $a^x=N$ $(a>0,a\neq 1)$，那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数，

记作： $x=\log_a N$ （a— 底数， N— 真数， $\log_a N$— 对数式）

说明：① 注意底数的限制$a>0$，且$a\neq 1$；

② $a^x=N\Leftrightarrow \log_a N=x$；

③ 注意对数的书写格式：$\log_a N$

两个重要对数：

① 常用对数：以 10 为底的对数$\lg N$；

② 自然对数：以无理数$e=2.71828\cdots$为底的对数的对数$\ln N$．

（二）对数的运算性质

如果$a>0$，且$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，那么：

① $\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$；

② $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

③ $\log_a M^n=n\log_a M \quad (n\in R)$．

注意：换底公式

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$（$a>0$，且$a\neq 1$；$c>0$，且$c\neq 1$；$b>0$）．

利用换底公式推导下面的结论

（1）$\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$；（2）$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$．

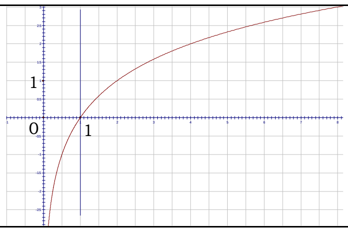
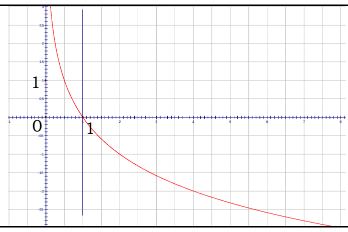
（二）对数函数

1、对数函数的概念：函数$y=\log_a x(a>0$，且$a\neq 1)$叫做对数函数，其中x是自变量，函数的定义域是（0，+∞）．

注意：① 对数函数的定义与指数函数类似，都是形式定义，注意辨别。如：$y=2\log_2 x$，$y=\log_5 \dfrac{x}{5}$ 都不是对数函数，而只能称其为对数型函数．

② 对数函数对底数的限制：$(a>0$，且$a\neq 1)$．

2、对数函数的性质：

a>1	0<a<1
	
定义域 x＞0	定义域 x＞0
值域为 R	值域为 R
在 R 上递增	在 R 上递减
函数图象都过定点(1,0)	函数图象都过定点（1，0）

三、幂函数

1、幂函数定义：一般地，形如$y=x^{\alpha}$ $(a\in R)$的函数称为幂函数，其中α为常数．

2、幂函数性质归纳．

（1）所有的幂函数在（0，+∞）都有定义并且图象都过点（1，1）；

（2）$\alpha>0$时，幂函数的图象通过原点，并且在区间$[0,+\infty)$上是增函数．特别地，当$\alpha>1$时，幂函数的图象下凸；当$0<\alpha<1$时，幂函数的图象上凸；

（3）$\alpha<0$时，幂函数的图象在区间$(0,+\infty)$上是减函数．在第一象限内，当x从右边趋向原点时，图象在y轴右方无限地逼近y轴正半轴，当x趋于$+\infty$时，图象在x轴上方无限地逼近x轴正半轴．

第三章 函数的应用

方程的根与函数的零点

1、函数零点的概念：对于函数 ，把使成立的实数叫做函数的零点。

2、函数零点的意义：函数 的零点就是方程 实数根，亦即函数 的图象与 轴交点的横坐标。即：方程有实数根，函数的图象与坐标轴有交点，函数有零点．

3、函数零点的求法：

（1）（代数法）求方程 的实数根；

（2）（几何法）对于不能用求根公式的方程，可以将它与函数的图象联系起来，并利用函数的性质找出零点．

4、二次函数的零点：

（1）△＞0，方程 有两不等实根，二次函数的图象与 轴有两个交点，二次函数有两个零点．

（2）△＝0，方程 有两相等实根（二重根），二次函数的图象与 轴有一个交点，二次函数有一个二重零点或二阶零点．

（3）△＜0，方程 无实根，二次函数的图象与 轴无交点，二次函数无零点．