ЗАО “Нижегородская Лаборатория Программных Технологий”

603600, *Нижний Новгород, ГСП*-900, *ул. Тургенева д.* 24, *тел.*(8312) 36-75-77, 36-84-54; *факс* (8312) 38-02-06

Согласовано

________________________ М.А. Антонец

________________________ Л.В.Нестеренко

Education

Распознавание планарности и укладка графа на плоскости

Автор____________________________

Соавторы ________________________

Рецензент(ы) ______________________

Редактор __________________________

Нормоконтролер ____________________

07.03.00

Нижний Новгород

1999 г

Оглавление

Основные определения и факты

Основным в теории графов является, естественно, понятие графа. Однако вопросы, рассматриваемые в этой теории, ее приложения и сами графы очень разнообразны. Поэтому попытка дать исчерпывающе общее определение графа приводит к громоздким формулировкам, и в конкретных случаях пользуются более частными определениями, выделяющими определенный класс графов, к которым рассматриваемый вопрос имеет непосредственное отношение. Так, в зависимости от обстоятельств, рассматривают графы конечные, бесконечные, ориентированные, неориентированные, мультиграфы, графы с петлями или без таковых. В некоторых случаях граф обобщается до гиперграфа.

Понятие *планарности* графа обычно вводят для класса так называемых *обыкновенных графов*, хотя его можно распространить и на другие классы. Под обыкновенным графом понимают пару множеств (V, E), где V – произвольное конечное множество, элементы которого называются *вершинами* (или узлами), а E – множество неупорядоченных пар элементов множества V, т. е. пар вида (a, b), где a, b – два разных элемента множества V. Пара (a, b) называется *ребром* графа, а вершины a, b –*концами* этого ребра.

Понятие обыкновенного графа можно отождествить с понятием *симметричного антирефлексивного бинарного* отношения на множестве вершин. Любой такой граф можно задать, перечислив элементы множеств V и E. Граф с n вершинами и m ребрами иногда называют (n, m)-графом.

Напомним некоторые определения из теории графов (см., например, [1]).

- *Цепью* в обыкновенном графе называют последовательность $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ его вершин, в которой каждая пара (a_i, a_{i+1}) при $i = 1, 2, \dots, k - 1$ является ребром графа. Говорят, что цепь α *связывает* ее конечные вершины a_1, a_k.
- Цепь $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ называется *циклом*, если в ней $a_1 = a_k$.
- Граф называется *связным*, если любая пара его вершин связана цепью.
- Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$.
- Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$, *порожденным множеством вершин* V', если $V' \subseteq V$, и $E' = E \cap (V' \times V')$.
- *Компонентой связности* графа называется максимальное по включению подмножество его вершин, в котором каждые две вершины связаны цепью. Компонентой связности называют также и подграф, порожденный таким множеством вершин.
- Граф называется *лесом*, если в нем нет циклов.
- Граф называется *деревом*, если он связен и в нем нет циклов.
- Граф называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на два подмножества, называемых *долями* так, что концы каждого ребра принадлежат разным долям.

- Вершина графа называется *точкой сочленения*, если удаление ее из графа вместе с инцидентными ей ребрами увеличивает число компонент связности.
- *Блоком* в графе называется максимальное по включению подмножество его вершин, не содержащее точек сочленения. Блоком называется также и подграф, порожденный таким множеством вершин.
- *Остовным деревом* графа $G = (V, E)$ называется любой его подграф $G = (V, E')$, являющийся деревом.

Графы принято изображать в виде рисунков, на которых разным вершинам соответствуют разные точки, а ребрам – непрерывные линии без самопересечений, соединяющие их. Часто стремятся изображать ребра не произвольными непрерывными линиями, а отрезками прямых или ломаными. Изображение графа на плоскости называется его *плоской укладкой*, если линии, изображающие ребра, не имеют общих точек кроме, возможно, точек, изображающих концы ребер. Граф называется *планарным*, если он допускает плоскую укладку (см. Рис 1). Часто вместо слов "плоская укладка" говорят "плоский граф", имея в виду не только сам планарный граф, но и его конкретную плоскую укладку.

Наряду с укладками графа на плоскости рассматривают укладки в трехмерном пространстве или на других геометрических многообразиях, например, на сфере, на торе, на сфере с несколькими ручками и т. д.

Гранью плоского графа называется замыкание максимального по включению множества точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена непрерывной кривой без самопересечений, не имеющей общих точек с ребрами графа.

Очевидно, что каждая точка плоскости, не являющаяся вершиной плоского графа или внутренней точкой какого-либо из его ребер, принадлежит какой-то одной грани плоского графа; каждая внутренняя точка любого из ребер принадлежит ровно двум граням; вершина плоского графа может принадлежать любому числу граней. Одна из гранейявляется бесконечной, ее называют *внешней*, остальные грани конечны.

Границей грани называется множество вершин и ребер, точки которых принадлежат этой грани.

Приведем некоторые очевидные утверждения о планарных графах.

- Всякий подграф планарного графа планарен.
- Граф планарен тогда и только тогда, когда каждая его компонента связности является планарным графом.
- Граф планарен тогда и только тогда, когда каждый его блок является планарным графом.
- Граф планарен тогда и только тогда, когда он укладывается на сфере.
- Всякий граф укладывается в трехмерном пространстве.
- Всякий плоский граф имеет единственную неограниченную грань. Такая грань называется внешней, а остальные, если они есть – внутренними.

- Всякую внутреннюю грань можно превратить во внешнюю с помощью стереографической проекции.
- Всякий планарный граф допускает такую плоскую укладку, при которой любая заранее выбранная вершина оказывается на его внешней грани.

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА (1758 г). Для любого связного плоского графа с n вершинами, m ребрами и f гранями справедливо соотношение $n - m + f = 2$ (формула Эйлера).

Набросок доказательства: выбираем произвольное остовное дерево исходного плоского графа. Число ребер этого дерева $m_1 = n - 1$, а число граней $f_1 = 1$. Формула Эйлера для него, очевидно, справедлива. Далее, добавление любого ребра из исходного графа увеличивает число ребер и число граней на 1, при этом соотношение Эйлера не нарушается.

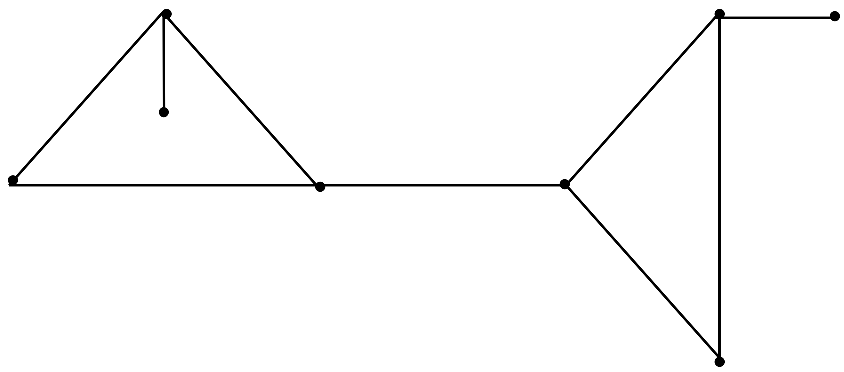

Рис 1. Укладка планарного графа $n = 8$, $m = 9$, $f = 3$

Из теоремы Эйлера следует, что число граней в любой плоской укладке данного планарного (n, m)-графа одно и то же: $f = m - n + 2$.

Для связного планарного (n, m)-графа с $n \geq 3$ вершинами справедливо неравенство $m \leq 3n - 6$.

Действительно, если граф не является трехвершинным деревом, каждая грань ограничена не менее, чем тремя ребрами, следовательно, обходя все грани по их периметрам, мы пройдем $p \geq 3f$ ребер. С другой стороны, каждое ребро будет пройдено дважды и, следовательно, $p = 2m$, поэтому $3f \leq 2m$. Из этого неравенства и формулы Эйлера легко получить требуемое неравенство.

Полный пятивершинный граф K_5 (см. Рис 2.) не планарен, так как для него $n = 5$, $m = 10$ и, следовательно, неравенство $m \leq 3n - 6$ не выполняется.

Полный двудольный граф K_{33}, содержащий по три вершины в каждой доле, также не планарен. Действительно, $n = 6$, $m = 9$, поэтому если бы он был планарным, то в любой его плоской укладке в соответствии с формулой Эйлера было бы $f = m - n + 2 = 5$ граней. Но K_{33} – двудольный, поэтому не имеет циклов нечетной длины, следовательно, каждая грань любой его плоской укладки была бы ограничена не менее чем четырьмя ребрами и было бы $4f \leq 2m$, что в нашем случае, очевидно, не выполняется.

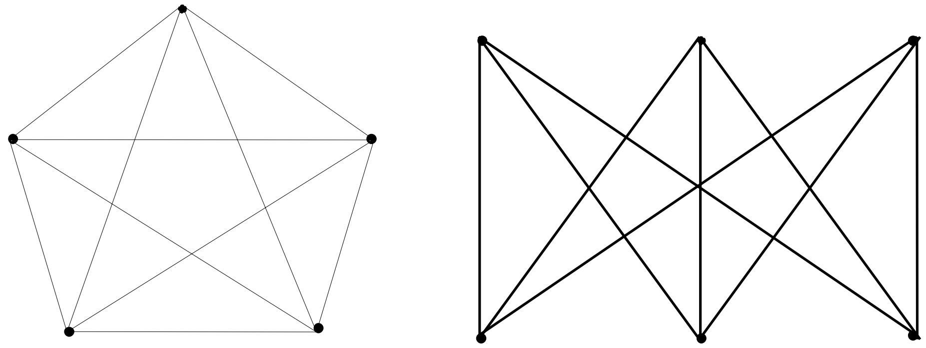

Рис 2. Основные непланарные графы K5 и K33

Распознавание планарности и построение граней

Проблему распознавания планарности графа независимо друг от друга решили Л.С.Понтрягин (1927 г.) и К.Куратовский (1930 г.), доказавшие, что граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 и K_{33}.

Этот критерий мог бы служить основой для алгоритма распознавания планарности, однако впоследствии были разработаны не опирающиеся на него более быстрые алгоритмы, которые не только распознают свойство планарности, но и строят плоскую укладку графа. Дж. Хопкрофт и Р.Е.Тарьян впервые показали, что планарность может быть распознана за время $O(n)$. Описание их алгоритма см. в [2], известен и другой алгоритм, также требующий линейного времени [3]. Эти алгоритмы основаны на использовании специально организованных структур данных, содержат много деталей и требуют непростых доказательств.

Построение плоской укладки графа разобьем на два этапа. На первом этапе мы определим, какие ребра и в каком порядке составляют границы граней, эту информацию будем называть *схемой укладки*. В следующем пункте мы рассмотрим способы вычисления координат вершин на плоскости, реализующих конкретную укладку.

Мы опишем алгоритм, применимый к любому *двусвязному* графу (т.е. связному и без точек сочленения), представленный в работе [4]. Если данный граф планарен, то алгоритм построит набор циклов, ограничивающих грани одной из возможных укладок, не вычисляя координаты вершин. В противном случае алгоритм установит, что данный граф не является планарным. Работа начинается с укладки некоторого цикла, уложенный цикл считается частичной укладкой, затем по некоторым правилам находится еще не уложенный путь, находится грань, в которой выбранный путь может быть уложен, и происходит фактическая его укладка. Основная забота при выполнении алгоритма заключается в том, чтобы очередной выбор пути и грани не оказались неудачными с точки зрения доведения алгоритма до его завершения.

Введем некоторые определения, необходимые для описания алгоритма.

Пусть $G = (V, E)$ – некоторый граф, $G' = (V', E')$ – его подграф ($V' \subset V$, $E' \subset E$), E'' – множество ребер из $E \setminus E'$, у которых один конец принадлежит V', а другой $V \setminus V'$ и, наконец, E''' – множество ребер из $E \setminus E'$, у которых оба конца принадлежат V'.

Рассмотрим граф $G'' = (V \setminus V', E \setminus E' \setminus E'' \setminus E''')$, полученный из G удалением G' вместе с ребрами, инцидентными вершинам из V'.

Компоненты связности графа G'', дополненные ребрами из E'', а также ребра из E''', будем называть *сегментами* графа G относительно подграфа G'. Ребра из E'' будем называть *контактными* ребрами (они соединяют вершины из V' с упомянутыми выше компонентами связности).

Укладку подграфа G' называют *G-допустимой*, если она является частичной укладкой некоторой укладки графа G.

Рассмотрим некоторую G-допустимую укладку подграфа G' и некоторый сегмент S графа G относительно G'. Через $F(G', S)$ обозначим множество граней рассматриваемой частичной укладки, в каждой из которых можно уложить сегмент S. Представленный ниже алгоритм находит последовательность $G_1, G_2,...$ плоских графов таких, что $G_i \subset G_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Если G планарен, то, как мы увидим ниже, каждый построенный граф G_i будет G-допустимым и алгоритм завершит работу, построив на $(m - n + 1)$-ом шаге очередной плоский граф G_{m-n+1}, являющийся плоской укладкой исходного графа G.

Если G не планарен, то алгоритм остановится, обнаружив на некотором шаге i плоский граф G_i и сегмент S относительно G_i, для которых $F(G_i, S)$ пусто.

Очевидно, необходимым условием того, чтобы G_i был G-допустимым, является непустота множества $F(G_i, S)$ для каждого сегмента относительно G_i.

Алгоритм построения граней

1. В качестве G_1 выбрать произвольный цикл C в графе G, уложить его вершины так, чтобы получился многоугольник, сформировать две грани – внутреннюю и внешнюю. Набор из полученных двух граней принять за частичную укладку графа G, положить $i = 1$.

Если текущая частичная укладка содержит все ребра графа G, то укладка графа построена, в противном случае перейти к следующему пункту.

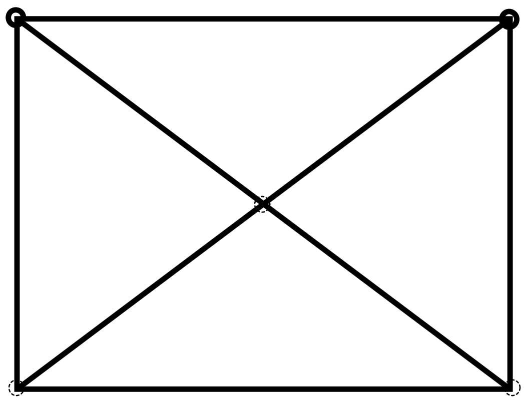

Рис. 3. Частичная укладка планарного графа, изображенного на рис. 4b

3. Построить сегменты $S_1, S_2,..., S_k$ относительно G_i (k – число построенных сегментов), построить для них множества $F(G_i, S_1), F(G_i, S_2),..., F(G_i, S_k)$.

4. Выполнить в зависимости от условий один из следующих трех пунктов.

   a) Если для некоторого $j \in \{1, 2, ..., k\}$ окажется $F(G_i, S_j) = \varnothing$, то граф не планарен (рис.4*a*).

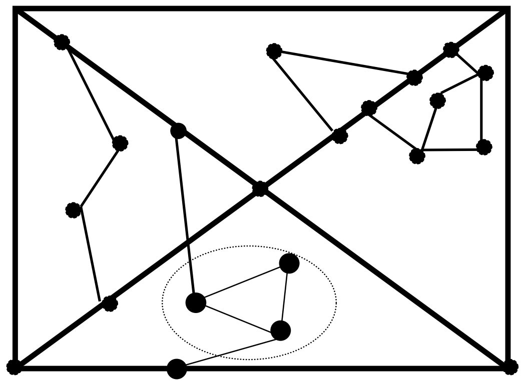

Рис 4 a. Один из сегментов не имеет допустимой грани

   b) Если для некоторого $j \in \{1, 2, ..., k\}$ окажется, что $F(G_i, S_j)$ состоит из единственной грани F, то в S_j выбрать произвольную простую цепь Z, начинающуюся и заканчивающуюся контактным ребром (рис.4*b*).

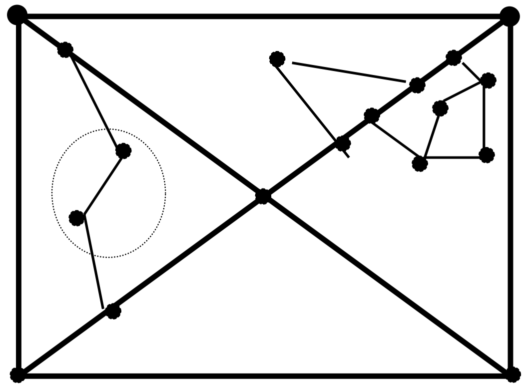

Рис 4 b. Один из сегментов имеет единственную допустимую грань

   c) Если для всех $j \in \{1, 2, ..., k\}$ окажется, что $F(G_i, S_j)$ состоит не менее, чем из двух граней, то выбрать произвольное $j \in \{1, 2, ..., k\}$, в $F(G_i, S_j)$ выбрать произвольную грань F, в S_j выбрать произвольную простую цепь Z, начинающуюся и заканчивающуюся контактными ребрами (рис.4*c*).

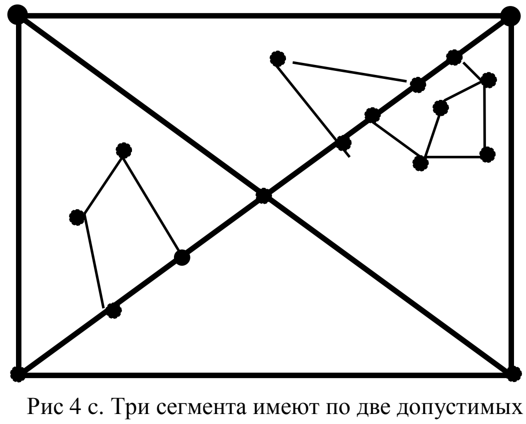

Рис 4 c. Три сегмента имеют по две допустимых грани

5. В качестве G_{i+1} взять G_i с добавленной цепью Z и уложить Z в грань F, разбивая F на две грани. Тем самым получить укладку графа G_{i+1}, являющуюся новой частичной укладкой графа G.

Увеличить i на 1 и перейти к пункту 2.

Для обоснования алгоритма достаточно показать, что на любом графе он закончит работу через конечное число шагов и, если исходный граф G планарен, то на протяжении всех его шагов частичная укладка остается G-допустимой.

Конечность алгоритма очевидна ввиду того, что при каждом выполнении пункта 4 число уложенных ребер увеличивается.

Остановимся на G-допустимости. Очевидно, что после выполнения пункта 1 построенная частичная укладка G-допустима.

Предположим, что при некотором значении i частичная укладка подграфа G_i является G-допустимой, т. е. она является частью некоторой укладки G^ графа G.

Рассмотрим сегмент S и грань F, полученные на шаге 4b или 4c при построении укладки графа G_{i+1}. Если имел место случай 4b, то очевидно, что построенная на шаге 5 укладка графа G_{i+1} будет частью укладки G^.

Допустим, что имел место случай 4c, и при этом сегмент S размещается не в грани F укладки G^, а в какой либо другой грани F'. (Заметим, что в этом случае контактные точки сегмента S расположены на общем участке границы между гранями F и F'). Так как G *двусвязен*, то каждый сегмент относительно G_i имеет по крайней мере два контактных ребра и, следовательно, может быть нарисован в любой из двух граней F и F'. Тогда каждый сегмент, имеющий точки контакта на общем участке границы этих граней, может быть перерисован в "противоположной" грани, то есть перенесен из F в F', если он был расположен в F, или из F' в F, если он был расположен в F'. Но тогда вместо G^ мы получим другую укладку, частью которой является построенная алгоритмом укладка графа G_{i+1} и, следовательно, построенная алгоритмом укладка является G-допустимой.

Укладка планарного графа на плоскости с помощью механических моделей

Одним из способов плоской укладки графа является так называемый силовой метод [5], который заключается в том, что граф рассматривается как упругая механическая система. Вершины графа соответствуют точкам системы, ребра – упругим силовым связям (пружинкам) между точками. Одна из граней графа объявляется внешней, ее вершины размещаются в вершинах произвольного выпуклого многоугольника, положения остальных вершин определяются из условия равновесия механической системы, соответствующего минимуму потенциальной энергии.

Схема вычислений получается наиболее простой, если силовые связи подчиняются закону Гука: сила натяжения пружины пропорциональна ее длине (коэффициент пропорциональности называется жесткостью пружины). В этом случае потенциальная энергия системы представляет собой положительно определенную квадратичную функцию

$$W = \frac{1}{2}\sum_{(p_i, p_j)\in E} w_{ij} d^2(p_i, p_j).$$

Здесь E – множество ребер графа;

$d^2(p_i, p_j)$ – квадрат расстояния между вершинами графа p_i, p_j, декартовы координаты которых (x_i, y_i) и (x_j, y_j). $d^2(p_i, p_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$;

w_{ij} – произвольные положительные веса этих ребер (в частности, можно взять все веса равными 1).

Переменными, от которых зависит функция W, являются координаты вершин графа, не принадлежащих внешней грани.

Минимум функции ищется из условий равенства нулю ее производных:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = \sum_{p_j \in V(p_i)} w_{ij}(x_i - x_j) = 0\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial y_i} = \sum_{p_j \in V(p_i)} w_{ij}(y_i - y_j) = 0\,.$$

Здесь $p_i \in V$ – вершина, не принадлежащая внешней грани графа,

$V(p_i)$ – окрестность вершины p_i, т.е. множество смежных с p_i вершин.

Ниже используются также обозначения

$V^{in}(p_i)$ – множество вершин из $V(p_i)$, не принадлежащих внешней грани,

$V^{out}(p_i)$ – множество вершин из $V(p_i)$, принадлежащих внешней грани.

После несложных преобразований эти системы можно записать в виде:

$$xi \sum_{p_j \in V(p_i)} w_{ij} - \sum_{p_j \in V^{in}(p_i)} w_{ij}\, x_j = \sum_{p_j \in V^{out}(p_i)} w_{ij}\, x_j, \qquad yi \sum_{p_j \in V(p_i)} w_{ij} - \sum_{p_j \in V^{in}(p_i)} w_{ij}\, y_j = \sum_{p_j \in V^{out}(p_i)} w_{ij}\, y_j.$$

Заметим, во-первых, что системы уравнений для определения неизвестных абсцисс и ординат независимы друг от друга, а во-вторых, что матрицы этих систем одинаковы и различие между системами определяется их правыми частями.

Развитием метода линейной силовой укладки является нелинейный силовой метод [6]. В этом случае граф также рассматривается как механическая система и укладка связного графа обеспечивается уравновешиванием сил притяжения и отталкивания, зависящих от расстояния между вершинами d : для всех пар вершин действует сила отталкивания $R(d)$, монотонно убывающая с ростом d, для всех пар смежных вершин действует сила притяжения $A(d)$, монотонно возрастающая с ростом d. Простейшие монотонные функции – степенные: $R(d) = r \cdot d^{-p}$, $A(d) = a \cdot d^q$, где p, q – натуральные показатели степени, определяющие характер зависимости сил от расстояния; r, a – произвольные положительные коэффициенты. Для дальнейшего удобно выразить их через p, q и единую масштабную константу c, положив $r = c^q$, $a = c^{-p}$. Если рассмотреть граф с двумя смежными вершинами и записать условие равновесия $R(d) = A(d)$, то получим $c^q d^{-p} = c^{-p} d^q$, откуда $d = c$. Это означает, что укладка графа K_2 представляет собой отрезок длины c. Легко также видеть, что укладка графа K_3 представляет собой правильный треугольник со стороной c.

Случай, когда силы отталкивания и притяжения характеризуются числами p, q, будем называть (*Rp, Aq*)-моделью сил.

Более подробно рассматриваются четыре модели:

(R1, A1) $R = \frac{c}{d}$ $A = \frac{d}{c}$

(R1, A2) $R = \frac{c^2}{d}$ $A = \frac{d^2}{c}$ модель Рейнгольда и Фрухтермана (1991).

(R2, A1) $R = \frac{c}{d^2}$ $A = \frac{d}{c^2}$ модель Кулона (отталкивание) и Гука (линейная упругость).

(R2, A2) $R = \frac{c^2}{d^2}$ $A = \frac{d^2}{c^2}$

Для каждой из четырех моделей потенциальная энергия $W = W_R + W_A$, где W_R – потенциальная энергия сил отталкивания, W_A – потенциальная энергия сил притяжения. Для различных моделей имеем:

(R1, A1) $W_R = -c \sum_{i \neq j} \ln \frac{d_{ij}}{c}$ $W_A = \frac{1}{2c} \sum_{(i,j) \in E} d_{ij}^2$

(R1, A2) $W_R = -c^2 \sum_{i \neq j} \ln \frac{d_{ij}}{c}$ $W_A = \frac{1}{3c} \sum_{(i,j) \in E} d_{ij}^3$

(R2, A1) $W_R = c \sum_{i \neq j} \frac{1}{d_{ij}}$ $W_A = \frac{1}{2c^2} \sum_{(i,j) \in E} d_{ij}^2$

(R2, A2) $W_R = c^2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{d_{ij}}$ $W_A = \frac{1}{3c^2} \sum_{(i,j) \in E} d_{ij}^3$

Здесь всюду $d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$ – расстояние между вершинами графа, E – множество ребер графа.

Положение равновесия "механической" системы соответствует минимуму потенциальной энергии, для поиска которого можно, например, применить метод, основанный на вычислении ее градиента. Для различных моделей сил отталкивания и притяжения имеем следующие выражения производных потенциальной энергии:

(R1, A1)

$$\frac{\partial W_R}{\partial y_i} = c\sum_{j\neq i}\frac{x_j - x_i}{d_{ij}^2} \qquad \frac{\partial W_A}{\partial x_i} = -\frac{1}{c}\sum_{j\in V(i)}\left(x_j - x_i\right),$$

$$\frac{\partial W_R}{\partial y_i} = c\sum_{j\neq i}\frac{y_j - y_i}{d_{ij}^2}\,, \qquad \frac{\partial W_A}{\partial y_i} = -\frac{1}{c}\sum_{j\in V(i)}\left(y_j - y_i\right).$$

(R1, A2)

$$\frac{\partial W_R}{\partial x_i} = c^2\sum_{j\neq i}\frac{x_j - x_i}{d_{ij}^2}, \qquad \frac{\partial W_A}{\partial x_i} = -\frac{1}{c}\sum_{j\in V(i)} d_{ij}\cdot\left(x_j - x_i\right),$$

$$\frac{\partial W_R}{\partial y_i} = c^2\sum_{j\neq i}\frac{y_j - y_i}{d_{ij}^2}\,, \qquad \frac{\partial W_A}{\partial y_i} = -\frac{1}{c}\sum_{j\in V(i)} d_{ij}\cdot\left(y_j - y_i\right).$$

(R2, A1)

$$\frac{\partial W_R}{\partial x_i} = c\sum_{j\neq i}\frac{x_j - x_i}{d_{ij}^3}, \qquad \frac{\partial W_A}{\partial x_i} = -\frac{1}{c^2}\sum_{j\in V(i)}\left(x_j - x_i\right),$$

$$\frac{\partial W_R}{\partial y_i} = c\sum_{j\neq i}\frac{y_j - y_i}{d_{ij}^3} \qquad \frac{\partial W_A}{\partial y_i} = -\frac{1}{c^2}\sum_{j\in V(i)}\left(y_j - y_i\right).$$

(R2, A2)

$$\frac{\partial W_R}{\partial y_i} = c^2\sum_{j\neq i}\frac{y_j - y_i}{d_{ij}^3}, \qquad \frac{\partial W_A}{\partial x_i} = -\frac{1}{c^2}\sum_{j\in V(i)} d_{ij}\cdot\left(x_j - x_i\right),$$

$$\frac{\partial W_R}{\partial y_i} = c^2\sum_{j\neq i}\frac{y_j - y_i}{d_{ij}^3}\,, \qquad \frac{\partial W_A}{\partial y_i} = -\frac{1}{c^2}\sum_{j\in V(i)} d_{ij}\cdot\left(y_j - y_i\right).$$

Здесь всюду $V(i)$ – множество вершин, смежных с вершиной i .

Заметим, что в отличие от линейной силовой укладки, при которой координаты вершин внешней грани надо назначать принудительно, для нелинейной силовой укладки этого не требуется, так что трудную графовую задачу о гранях можно не решать (и вообще укладываемый граф не обязан быть планарным). Однако нелинейный метод имеет свои трудности: система уравнений равновесия $\frac{\partial W}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial W}{\partial y_i} = 0$ нелинейна, а если искать минимум потенциальной энергии градиентным методом, то надо подбирать "хорошие" начальные условия и обеспечивать сходимость итерационного процесса.

Алфавитный указатель

Литература

[1]. Лекции по теории графов (Емеличев В.А. и др.). М.: Наука, 1990.

[2]. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980.

[3]. Lucker G.S., Booth K.S. Testing for the consecutive ones property, interval graphs and graph planarity using PQ-tree algorithms // J of Comp. and Sys. Sciences, 13, P. 355–379 (1976).

[4]. Demoucron G., Malgrange Y., Pertuiset R. Graphes planaires: reconnaissance et construction de representations planaires topologiques // Rev. Francaise Recherche Operationelle, 8, P. 33– 47, 1964.

[5]. Тетельбаум А.Я. Силовое размещение планарного графа // Изв. АН СССР, Техн. киберн., 1988, №3.

[6]. Fruchterman T.J., Reingold E.T. Graph drawing by force-directed placement // Software – Practice and Experience, v.21, 1991, № 11.