ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

д.т.н. проф. Новотарський Михайло Анатолійович

http://amodm.pp.ua

Login: student_new

Password: : pbhDcMq3Z

Старостам груп здати списки

СКЛАД КУРСУ

Курс «Дискретна математика» включає наступні розділи:

1. Теорія множин і її застосування
2. Теорія графів
3. Основи комбінаторики

Склад курсу:

1.Лекції: 36 годин
2.Лабораторні роботи: 18 годин
3. Семестрова контрольна робота.
4. Поточні контрольні роботи.

Значення рейтингу кредитного модуля RD	Оцінка ECTS	Традиційна залікова оцінка
95-100	A	Зараховано
85-94	B	
75-84	C	
65-74	D	
60-64	E	
<60	Fx	Незараховано
Заборгованість по лабораторних роботах	F	Недопущений

1. Лабораторні роботи – 3 х (5 теор.+5 пр.)=30
2. Семестрова контрольна – 1х20=20
3. Поточні контрольні роботи 50
4. Лабораторні роботи – самостійно +20 балів

1.ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ

Базові поняття теорії множин створені математиками XIX ст., які працювали над основами математичного аналізу. Основи теорії множин заклав німецький математик Георг Кантор (1845–1918). Йому належить висловлення, яке сьогодні розглядається як інтуїтивне визначення множини: «*Множина – це розмаїття, мислиме як єдине*».

Однак пізніше було виявлено, що таке визначення множини має внутрішнє протиріччя. Прикладом може служити парадокс Рассела, що одержав у популярній літературі назву парадоксу цирульника. Суть його полягає в нерозв'язності питання про те, чи повинен голитися цирульник, який дав обіцянку голити у його селі всіх тих, хто не голиться сам?

1.1. Визначення множини

Множина — сукупність різноманітних об'єктів, що мають певну спільну властивість, яка об'єднує їх у єдине ціле.

Приклади множин: множина студентів, присутніх на лекції, множина парних чисел, множина громадян України.

Зазвичай для множин вводять такі позначення:

1. *Множина* позначається великою літерою будь-якого алфавіту.

Наприклад: A, B, C,…, X, Y,…,Z.

2. *Елемент* множини позначається малою літерою будь-якого алфавіту.

Наприклад: a, b, c,…,x, y,…,z.

Але такі позначення не є обов'язковими !!!!

3. *Приналежність* елемента множині позначається символом

$\in$ - «належить».

Якщо елемент не належить множині, то використовують позначення

$\notin$ - «не належить».

Елемент може належати множині, якщо він є одним з об'єктів цієї множини.

Приклад: Позначення $x \in X$ показує, що елемент x належить множині X, тобто x є одним з елементів множини X.

Позначення $a \notin A$ показує, що елемент a не належить множині A.

Вправа

Нехай

A - множина рослин, що ростуть у парку КПІ,

B – множина квітів,

C - множина дерев.

a) Назвіть два елементи множини *B*, що не є елементами множини *A.*

b) Назвіть два елементи множини *C*, що не є елементами множини A.

Отже $\in$ та $\notin$

1.2.Способи задавання множини

1. ***Явна форма*** - перерахування елементів:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\},$$ (загальна властивість?)

де n — кількість елементів множини.

2. Задавання множини ***предикатом*.**

Задається умова або властивість $P(x)$, якій повинні задовольняти всі елементи x множини. Властивість $P(x)$ називають предикатом. Предикат із сукупності об'єктів виділяє ті, що належать множині. У цьому випадку множину записують у такий спосіб:

$$X = \{x \mid P(x)\}.$$

Читають цей вираз так:

Множина X складається з таких елементів x, що $P(x)$

Приклад 1: Нехай предикат заданий висловлюванням

«x - є парне число».

Тоді множина X складається з таких елементів x, що x є парне число, тобто елементи множини X — парні числа.

$$X = \left\{ x \middle| \text{"}x - \text{є парне число"} \right\}$$

3. Задавання множини ***рекурсивною процедурою.***

Рекурсивна процедура дозволяє визначити наступні елементи множини через попередні.

Приклад: Множину натуральних чисел $N = \{1, 2, 3, ...\}$ можна задати в такий спосіб:

$N = \{i$ | якщо ціле $i \in N$ то $i + 1 \in N$, $i \geq 1$ }

Приклад 2. Задати множину

A={x| $x \in$ *N*, x - дільник числа 20}.

Розв'язок.

A={ x| $x \in$ *N*, x - дільник числа 20 } = {1, 2, 4, 5, 10, 20};

1.3. Визначення підмножини

Нехай кожний елемент множини має не одну властивість, а деякий набір властивостей. Однак для приналежності елемента до даної множини достатньо того, щоб тільки одна властивість із даного набору була спільною для всіх елементів.

У той же час ніщо не заважає нам згрупувати елементи за будь-якою іншою властивістю. У такий спосіб ми можемо утворювати **підмножини** даної множини, тобто сукупність елементів, що відрізняються від інших елементів даної множини за деякою властивістю.

Множина A є підмножиною множини X, якщо кожний елемент множини A є елементом множини X, тобто якщо $x \in A$ то $x \in X$.

Зокрема, будь-яка множина є підмножиною самої себе.

Для запису співвідношення множини й підмножини використовують позначення:

$\subseteq$ — «входить в»;

$\subset$ — «строго входить в».

$A \subseteq X$ — множина A входить у множину X. При цьому не виключається випадок, коли всі елементи множини A й множини X збігаються.

$B \subset X$ — множина B строго входить у множину X. У цьому випадку підкреслюється той факт, що в множині X обов'язково існують елементи, що не належать множині B.

Приклад 3.

$$X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \quad A = \{3,7,9\}.$$

1. $3 \in A$, $3 \in X$.
2. $7 \in A$, $7 \in X$.
3. $9 \in A$, $9 \in X$.

Однак, $0 \notin A$, $0 \in X$. Тому $A \subset X$.

Введемо наступні позначення, які полегшують запис співвідношень, пов'язаних з підмножинами:

$\forall$ — символ називають квантором загальності (лат. quantum-скільки), він означає: «будь-який», «довільний», «кожний», « для всіх…», « для кожного…»;

$\exists$ — символ називають квантором існування, він означає «існує…» або «знайдеться…»

$\rightarrow$ — квантор наслідку (імплікації), що означає «спричиняє», «якщо..., то ...»;

$\leftrightarrow$ — квантор еквівалентності (у змісті «те ж саме, що»).

Приклад 4: $A = B \leftrightarrow \forall a \in A \; \exists \; a \in B$

$$A = \{a, b, c\} \rightarrow a \in A$$

1.4.Визначення рівності множин

Множина X дорівнює множині Y у випадку, якщо будь-який елемент a належить множині X $\left(a \in X\right)$ тоді й тільки тоді, коли $a \in Y$.

Теорема. $X = Y$ тоді й тільки тоді, коли $X \subseteq Y$ й $Y \subseteq X$.

Приклад 5. $X = \left\{a, b, c, d\right\}$, $Y = \left\{c, a, b, d\right\}$. Будь-який елемент, що належить множині X, належить множині Y. Отже, $X = Y$.

У той же час $X \subseteq Y$ і $Y \subseteq X$. Отже, $X = Y$.

1.5.Визначення порожньої множини

Порожня множина — це множина, яка не містить елементів.

Позначення порожньої множини: $\varnothing$ або $\{\ \}$.

Властивість 1. *Порожня множина є підмножиною будь-якої множини, включаючи й порожню множину.*

$\forall A(\varnothing \subseteq A)$, для всіх A порожня множина є підмножиною.

$\varnothing \subseteq \varnothing$ — порожня множина є підмножиною самої себе.

Властивість 2.

Жодна множина не є елементом порожньої множини. Інакше кажучи, $\forall A(A \notin \varnothing)$ і, зокрема, $\varnothing \notin \varnothing$.

Вправа

Чи є множина, що складається з числа 0, порожньою множиною?

1.6.Визначення універсальної множини

Визначення. **Універсальна множина** U — це множина, властивістю якої є те, що всі розглянуті множини є її підмножинами.

Властивості.

1.Будь-який об'єкт, яка б не була його природа, є елементом універсальної множини:

$$\forall x\left(x \in U\right).$$

2.Універсальна множина містить сама себе в якості одного з елементів:

$$U \in U.$$

3.Будь-яка множина є підмножиною універсальної множини:

$$\forall A\left(A \subseteq U\right)$$

4. Універсальна множина є власною підмножиною:

$$U \subseteq U.$$

Прикладний характер універсальної множини

1. Універсальна множина не є множиною всіх множин.
2. Універсальна множина є єдиною для певної чітко окресленої загальної ознаки її елементів.
3. Універсальна множина має прикладний характер

Приклад 6.

Універсальна множина в теорії чисел — множина цілих чисел.

Приклад 7.

Універсальна множина в математичному аналізі — множина дійсних чисел.

Висновок

Множина U, незважаючи на те, що названа універсальною, не може бути однозначно визначена, якщо не названа предметна область, тобто не зазначена властивість об'єктів, за якою дана множина формується.

1.7. Скінченні й нескінченні множини

Скінченна множина — це множина, кількість елементів якої скінченна, тобто, існує невід'ємне ціле число *k*, яке дорівнює кількості елементів цієї множини.

Приклад 8. Скінченна множина

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

У цій множині $k = 10$

Нескінченна множина — це множина, яка включає нескінченну кількість елементів. Якщо невід'ємно цілого числа не існує *k*, то множина називається нескінченною.

Приклад 9. Нескінченна множина

$$B = \{b \mid b - \text{ціле число}\}$$

Для цієї множини не існує цілого невід'ємного числа *k*.

Зліченні та незліченні множини

Зліченна множина — це множина, у якій для будь-якого натурального числа n знайдеться підмножина з n елементів.
Зліченна множина — це нескінченна множина, елементи якої можливо пронумерувати натуральними числами.

Нескінченна множина — це множина, у якій знайдеться зліченна підмножина.

Нескінченна множина — множина, що включає нескінченну кількість елементів.

Приклад 10. Приклади нескінченних множин, до яких входять зліченні множини

Множини натуральних чисел N, цілих чисел Z.
Множини раціональних чисел Q і дійсних чисел R.
Множина комплексних чисел C

Злічення множина — нескінченна множина, елементи якої можливо пронумерувати натуральними числами.

Злічення множина — нескінченна множина X, у якій існує взаємо-однозначна відповідність $X \leftrightarrow N$, де N позначає множину всіх натуральних чисел.

Злічення множина — це множина, потужність якої визначена натуральним числом.

Злічення множина є «найменшою» нескінченною множиною, тобто в будь-якій нескінченній множині знайдеться злічення підмножина.

Властивість 1. Будь-яка підмножина зліченної множини скінченна.

Властивість 2. Множина всіх скінченних підмножин зліченної множини злічення.

Приклад 11. нескінченної зліченної множини

Множина зірок, які злічені та занесені до зіркового каталогу.

Незліченна множина — така нескінченна множина, яка не є зліченною.

Таким чином, будь-яка множина є або скінченною, або зліченною, або незліченною.

Незліченна множина – нескінченна множина, потужність якої більша, ніж потужність зліченної множини. Як показав Г. Кантор, множина дійсних (і навіть ірраціональних) чисел є незліченною. Множина всіх підмножин натурального ряду чисел також незліченна.

n*-множина* — це множина, що складається з n елементів.

Потужність множини

Потужність множини визначається як кількість елементів множини.

Потужність множини X позначається $|X|$, $\#X$ або $\mathrm{card}(X)$.

Якщо | A | = | B |, то множини A и B називають ***рівнопотужними.***

Для потужностей, як і у випадку скінченних множин, є поняття: «дорівнює», «більше», «менше». Тобто для будь-яких множин A і B можливо тільки одне із трьох:

1. $|A|=|B|$, або A й B рівнопотужні;
2. $|A|>|B|$, або A потужніше за B, тобто A містить підмножину, рівнопотужну до B, але A й B не рівнопотужні;
3. $|A|<|B|$, або B потужніше за A — у цьому випадку B містить підмножину, рівнопотужну до A, але A й B не рівнопотужні.

Приклад 12. $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b,c\}, |A|=|B|$

Булеан

Множину всіх підмножин множини *M* називають ***булеаном*** і позначають 2^M

$$2^M = \left\{ A \middle| A \subseteq M \right\}.$$

Приклад 13. Дано множину $M = \{0,1\}$

Тоді булеан $2^M = \left\{\varnothing, 0, 1, \{0,1\}\right\}$

Приклад 14. Дано множину $K = \{1,2,3\}$

Тоді булеан $2^K = \left\{\varnothing, 1, 2, 3 \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\right\}$

Приклад 15. Дано множину $N = \{1, 2, \{1,2\}\}$

Тоді булеан:

$$2^N = \left\{\{\varnothing\}, \{1\}, \{2\}, \left\{\{1,2\}\right\}, \{1,2\}, \left\{1, \{1,2\}\right\}, \left\{2, \{1,2\}\right\}, \left\{1, 2, \{1,2\}\right\}\right\}$$

Кількість елементів булеана (потужність булеана)

Потужність белеана – це кількість можливих підмножин породжуючої булеан множини M

Нехай дано скінченну множину M з кількістю елементів n.

Отже, потужність множини $\left|M\right| = n$.

Тоді потужність булеана $\left|2^M\right|$ дорівнює $2^n = 2^{|M|}$.

Звідси $\left|2^M\right| = 2^{|M|}$.

Приклад 16.

$M = \{0,1,2\}$, $\left|M\right| = 3$,

$2^M = \{\varnothing, 0, 1, 2, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$, $\left|2^M\right| = 2^{|M|} = 2^3 = 8$

Вправа на побудову булеана

Множина ручок, які належать студенту складається з однієї авторучки, двох шарикових ручок та двох гелевих. Визначте булеан цієї множини.

Розв’язок

Породжуюча булеан множина: $S=\left\{a,\left\{b_1,b_2\right\},\left\{g_1,g_2\right\}\right\}$

Тоді

$$2^S=\left\{\varnothing,a,\left\{b_1,b_2\right\},\left\{g_1,g_2\right\},\left\{a,\left\{b_1,b_2\right\}\right\},\left\{a,\left\{g_1,g_2\right\}\right\},\left\{\left\{b_1,b_2\right\},\left\{g_1,g_2\right\}\right\},\left\{a,\left\{b_1,b_2\right\},\left\{g_1,g_2\right\}\right\}\right\}$$

1 2 3 4 5 6 7 8

Вправа на визначення потужності булеана

Нехай M – множина студентів вашої групи.

Яка потужність булеана вашої групи?

Розв’язок

Нехай $\left|M\right|=30$. Тоді $\left|2^M\right|=2^{\left|M\right|}=2^{30}=1\,073\,741\,824$

2. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

Операції над множинами дозволяють будувати нові множини, використовуючи вже існуючі.

2.1. Об'єднання

Об'єднанням множин X і Y називають множину, яка складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній із множин X, Y, тобто належать X або належать Y.

Визначення об'єднання множин X і Y може бути записане в такий спосіб:

$$a \in X \cup Y \leftrightarrow a \in X \text{ або } a \in Y$$

«те ж саме, що…»

У літературі часто використовують також таке визначення:

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ або } x \in Y\}$$

«складається з таких елементів x, що…»

Приклад 17. Об'єднання множин

$X = \{1,2,3,4,5\}$,$Y = \{2, 5,8,9\}$, $X \cup Y = \{1,2,3,4,5,8,9\}$

Об'єднання множин у загальному випадку визначається в такий спосіб:

Нехай $I = \{1,2,3,...,n\}$ та $i \in I$. Тоді

$$\bigcup_{i \in I} X_i = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup ... \cup X_n = \{x \mid \text{існує } i \in I \text{ таке, що } x \in X_i\}.$$

Приклад 18. $I = \{1,2,3\}$

$X_1 = \{1,2,3\}$, $X_2 = \{3,4,5\}$, $X_3 = \{5,6,7\}$

$$\bigcup_{i \in I} X_i = X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

2.2. Перетин

Перетином множин X і Y називають множину, яка складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать як множині X, так і множині Y. Перетин множин X і Y позначають так:

$X \cap Y$ «перетин X і Y ».

Визначення перетину множин X і Y може бути записане в такий спосіб:

$$x \in X \cap Y \leftrightarrow x \in X \text{ і } x \in Y$$

«те ж саме, що…»

Часто використовується також визначення:

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ і } x \in Y\}.$$

«складається з таких елементів x, що…»

Приклад 19.

$$X = \{1,2,3,4,5\} \text{ , } Y = \{2,5,8,9\}, \; X \cap Y = \{2,5\} \text{ .}$$

Перетин множин у загальному випадку визначається в такий спосіб:

Нехай $I = \{1, 2, 3, ..., n\}$. $i \in I$ Тоді

$$\bigcap_{i \in I} X_i = X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap ... \cap X_n = \{x \mid x \in X_i \ \ \forall i \in I\}$$

Вправа

Найстарший математик серед шахістів і найстарший шахіст серед математиків – це та сама людина або (можливо) різні?

Кращий математик серед шахістів і кращий шахіст серед математиків – це та сама людина або (можливо) різні?

2.3. Різниця

Різницею множин X і Y називають множину, яка складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать X, але не належать Y.

Різниця множин X і Y позначається $X \setminus Y$ або $X - Y$.

Визначення різниці множин X і Y може бути записане так:

$$x \in X \setminus Y \leftrightarrow x \in X \text{ і } x \notin Y$$

«те ж саме, що…»

Різницю можна також визначити в такий спосіб:

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ і } x \notin Y\}.$$

«складається з таких елементів x, що…»

Приклад 20.

Якщо $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ та $Y = \{2, 4, 6, 7\}$, то $X \setminus Y = \{1, 3, 5\}$, $Y \setminus X = \{6, 7\}$.

2.4. Симетрична різниця

Симетричною різницею множин X і Y називають множину, яка складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать окремо множині X та множині Y.

Симетрична різниця множин X і Y визначається виразом

$$X \Delta Y = \left(X \setminus Y \right) \cup \left(Y \setminus X \right)$$

Симетричну різницю можна також визначити в такий спосіб

$$X \Delta Y = \left\{ x \middle| x \in X \setminus Y \; або \; x \in Y \setminus X \right\}$$

«складається з таких елементів x, що…»

Приклад 21 Нехай $X = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ і $Y = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Тоді $X \setminus Y = \{1, 7\}$, $Y - X = \{3, 5\}$, $X \Delta Y = \{1, 3, 5, 7\}$.

2.5. Доповнення

Доповнення множини X, позначуване як $\overline{X}$, визначається як множина елементів універсальної множини, що не належать множині X.

Отже,

$$\overline{X} = U \setminus X = \{x \mid x \in U \text{ і } x \notin X\}$$

«складається з таких елементів x, що…»

Множина $\overline{X}$ читається як НЕ X і включає всі елементи універсальної множини, що не ввійшли в множину X.

Часто використовуваним еквівалентним позначенням множини $\overline{X}$ є позначення $\neg X$. Отже $\overline{X} = \neg X$.

Приклад 22.

Нехай $U = \{x | x \in N\}$

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Тоді $\overline{X} = \{x | x \in N \setminus X\}$

3. ДІАГРАМИ ВЕННА-ЕЙЛЕРА

Діаграми Венна-Ейлера – інструмент, що дозволяє зображати множини й операції над ними. На рис. 2.1 наведена діаграма Венна для множини A, яка зображена внутрішньою частиною кола. Зовнішня частина кола зображає $\bar{A}$.

На рис. 2.2 наведена діаграма Венна для двох множин: X і Y. Кожна множина зображена колом, і кола перетинаються. На рис.2.2 видно 4 області: 1 – область універсальної множини, 2 – область, що належить тільки множині X, 3 – область, що належить спільно множинам X і Y, 4 – область, що належить тільки множині Y.

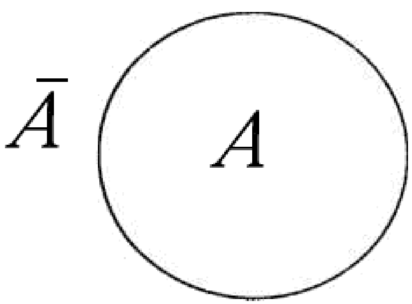


Рис. 2.1

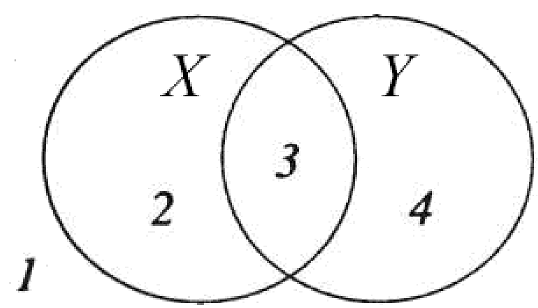
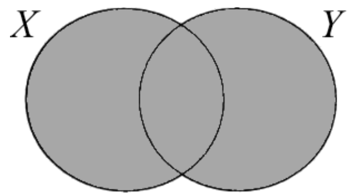
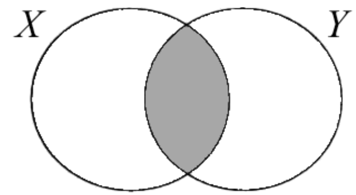


Рис. 2.2

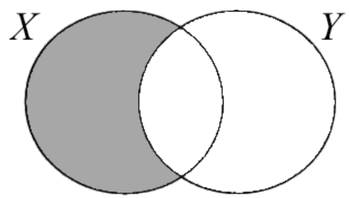
Ілюстрації операцій над множинами.



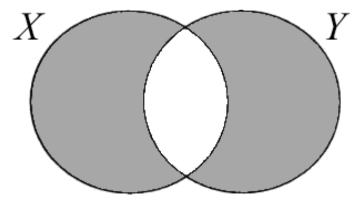
$X \cup Y$



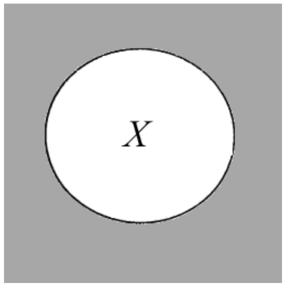
$X \cap Y$



$X \setminus Y$



$X \Delta Y$



$\bar{X}$

4.ТОТОЖНОСТІ АЛГЕБРИ МНОЖИН

Тотожності алгебри множин, можуть бути перевірені шляхом формального доведення або на діаграмах Венна.

Таблиця 1

1. Комутативність об'єднання $X \cup Y = Y \cup X$	1. Комутативність перетину $X \cap Y = Y \cap X$
2. Асоціативність об'єднання $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$	2. Асоціативність перетину $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$
3. Дистрибутивність об'єднання відносно перетину $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$	3. Дистрибутивність перетину відносно об'єднання $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

4. Закони дії з порожніми і універсальними множинами $X \cup \varnothing = X$ $X \cup \overline{X} = U$; $X \cup \neg X = U$ $X \cup U = U$	4. Закони дії з порожніми і універсальними множинами $X \cap U = X$ $X \cap \overline{X} = \varnothing$; $X \cap \neg X = \varnothing$ $X \cap \varnothing = \varnothing$
5.Закон ідемпотентності об'єднання Термін **ідемпотентність** означає властивість математичного об'єкта, яке проявляється в тому, що повторна дія над об'єктом *не змінює* його $X \cup X = X$	5. Закон ідемпотентності перетину $X \cap X = X$
6. Закон де Моргана $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ $\neg(X \cup Y) = \neg X \cap \neg Y$	6. Закон де Моргана $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ $\neg(X \cap Y) = \neg X \cup \neg Y$

7. Закон поглинання $X \cup (X \cap Y) = X$	7. Закон поглинання $X \cap (X \cup Y) = X$
8. Закон склеювання $(X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) = X$ $(X \cap Y) \cup (X \cap \neg Y) = X$	8. Закон склеювання $(X \cup Y) \cap (X \cup \bar{Y}) = X$ $(X \cup Y) \cap (X \cup \neg Y) = X$
9. Закон Порецького $X \cup (\bar{X} \cap Y) = X \cup Y$ $X \cup (\neg X \cap Y) = X \cup Y$	9. Закон Порецького $X \cap (\bar{X} \cup Y) = X \cap Y$ $X \cap (\neg X \cup Y) = X \cap Y$
10. Закон подвійного доповнення $\bar{\bar{X}} = X \quad \neg\neg X = X$	