ЛЕКЦІЯ 4

Спеціальні властивості відношень
Види відношень
Відношення еквівалентності

Спеціальні властивості відношень

Рефлексивність

Відношення *R* на множині *X* називають *рефлексивним,* якщо для будь-якого $x \in X$ має місце xRx, тобто, кожний елемент $x \in X$ перебуває у відношенні ***R*** до самого себе.

Приклад 1.

Нехай $R_1 \subset A \times A \quad A = \{1, 2, 3\}$

$$R_1 = \{(a, b) | a \le b - \text{на множині натуральних чисел}\},$$

$$R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$$

В цьому відношенні присутні всі елементи типу xR_1x

$$1R_1 1 \equiv (1,1) \in R_1,$$

$$2R_1 2 \equiv (2,2) \in R_1$$

$$3R_1 3 \equiv (3,3) \in R_1$$

Приклад 2. Властивість рефлексивності

Нехай задано відношення $R_2 \subset A \times A$. $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$R_2 = \{(a, b) | a\ i\ b - \textit{мають спільний дільник на множині цілих чисел}\}$$

$$(1,1) \to 1,\ (1,2) \to 1,\ (1,3) \to 1\ (1,4) \to 1$$

$$(2,1) \to 1,\ (2,2) \to 2 \text{і} 1,\ (2,3) \to 1,\ (2,4) \to 1 \text{і} 2$$

$$(3,1) \to 1,\ (3,2) \to 1\ (3,3) \to 1 \text{і} 3,\ (3,4) \to 1$$

$$(4,1) \to 1,\ (4,2) \to 2 \text{і} 1,\ (4,3) \to 1,\ (4,4) \to 1 \text{і} 4$$

$$R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}.$$

В цьому відношенні присутні всі елементи типу xR_2x

$$1R_21 \equiv (1,1) \in R_2,$$
$$2R_22 \equiv (2,2) \in R_2$$
$$3R_23 \equiv (3,3) \in R_2$$
$$4R_24 \equiv (4,4) \in R_2$$

Представлення рефлексивного відношення матрицею

Визначення.

Для рефлексивного відношення всі діагональні елементи *матриці* дорівнюють 1.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$R = \{(a_1,a_1),(a_1,a_2),(a_2,a_1),(a_2,a_2),(a_3,a_3),(a_4,a_1),$$
$$(a_4,a_2)(a_4,a_3),(a_4,a_4),(a_5,a_2),(a_5,a_3),(a_5,a_5)\}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	1			
a_2	1	1			
a_3			1		
a_4	1	1	1	1	
a_5		1	1		1

Представлення рефлексивного відношення графом

Визначення.

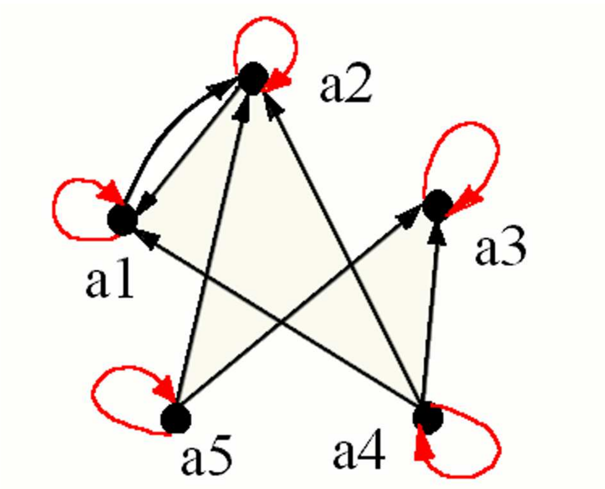
При задаванні відношенння *графом* кожний елемент має петлю – дугу (x, x).

Приклад 4. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$A = \left\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\right\}$

$$R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_1),$$

$$(a_4, a_2)(a_4, a_3), (a_4, a_4), (a_5, a_2), (a_5, a_3), (a_5, a_5)\}$$



Антирефлексивність

Відношення ***R*** на множині ***X*** називають ***антирефлексивним***,

якщо з $x_1 R x_2$ випливає, що $x_1 \neq x_2$.

Приклад 1.

Нехай задане відношення $R \subset A \times A \quad A = \{1,2,3,4\}$

$$R_1 = \{(a,b) \mid a < b - \text{на множині цілих чисел}\}$$

$$R_1 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

В цьому відношенні всі елементи типу $(x,x) \notin R_1$

$$(1,1) \notin R_1, (2,2) \notin R_1, (3,3) \notin R_1, (4,4) \notin R_1,$$

якщо з $x_1 R x_2$ випливає, що $x_1 \neq x_2$.

$$1R_1 2 \equiv (1,2) \in R_1 \to 1 \neq 2 \qquad 2R_1 3 \equiv (2,3) \in R_1 \to 2 \neq 3$$

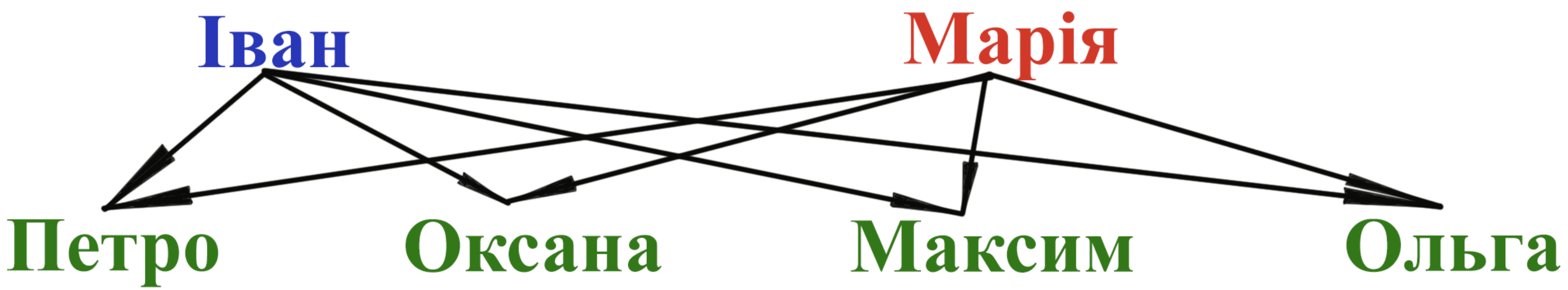
$$1R_1 3 \equiv (1,3) \in R_1 \to 1 \neq 3 \qquad 2R_1 4 \equiv (2,4) \in R_1 \to 2 \neq 4$$

$$1R_1 4 \equiv (1,4) \in R_1 \to 1 \neq 4 \qquad 3R_1 4 \equiv (3,4) \in R_1 \to 3 \neq 4$$

Приклад 2: з $x_1 R x_2$ випливає, що $x_1 \neq x_2$.

Нехай задано відношення $R_2 \subset A \times A$.

$$A = \{\text{Іван}, \text{Марія}, \text{Петро}, \text{Оксана}, \text{Максим}, \text{Ольга}\}.$$



$$R_2 = \{(a,b) \mid a \text{ є сином } b \text{ на множині людей.}\}$$

$$R_2 = \{(\text{Петро},\text{Іван}),(\text{Петро},\text{Марія}),(\text{Максим},\text{Іван}),(\text{Максим},\text{Марія})\}$$

$$(\text{Петро},\text{Іван}) \in R_2 \rightarrow \text{Петро} \neq \text{Іван}$$

$$(\text{Максим},\text{Іван}) \in R_2 \rightarrow \text{Максим} \neq \text{Іван}$$

$$(\text{Петро},\text{Марія}) \in R_2 \rightarrow \text{Петро} \neq \text{Марія}$$

$$(\text{Максим},\text{Марія}) \in R_2 \rightarrow \text{Максим} \neq \text{Марія}$$

Представлення антирефлексивного відношення матрицею

Визначення.

Для антирефлексивного відношення всі діагональні елементи *матриці* дорівнюють 0.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \left\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\right\}$$

$$R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_4, a_1), (a_4, a_2)(a_4, a_3), (a_5, a_2), (a_5, a_3)\}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	0	1			
a_2	1	0			
a_3			0		
a_4	1	1	1	0	
a_5		1	1		0

Представлення антирефлексивного відношення графом

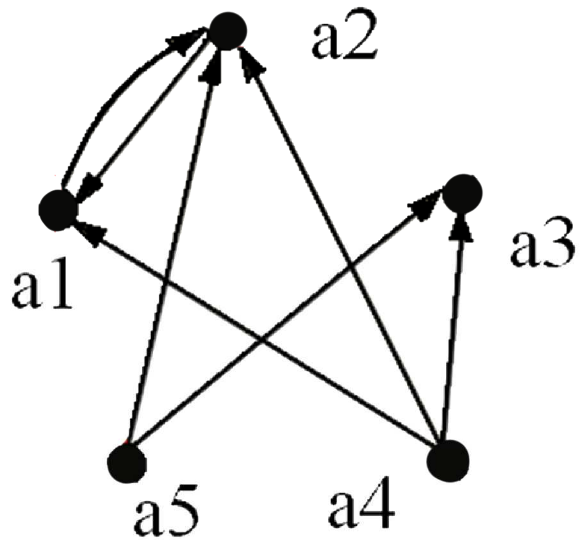
Визначення.

При задаванні відношення *графом* жодна з **вершина не має петлі** – немає дуг виду ***(x_i, x_i).***

Приклад 4. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_4, a_1), (a_4, a_2)(a_4, a_3), (a_5, a_2), (a_5, a_3)\}$$



Симетричність

Нехай задане відношення $R \subseteq X \times X$

Відношення ***R*** на множині ***X*** називається ***симетричним***, якщо для пари $(x_1,x_2) \in R$ з $x_1 R x_2$ випливає $x_2 R x_1$

(інакше кажучи, для будь-якої пари відношення ***R*** виконується або в обидва боки, або не виконується взагалі).

Приклад 1.

Нехай задане відношення $R \subset A \times A$ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R_1 = \{(a,b) | a \neq b - \text{на множині цілих чисел}\}$$

$$R_1 = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(2,3),(3,2),(4,2),(2,4),(3,4)(4,3)\}$$

$$(1,2) \in R_1 \to (2,1) \in R_1 \quad (2,3) \in R_1 \to (3,2) \in R_1$$

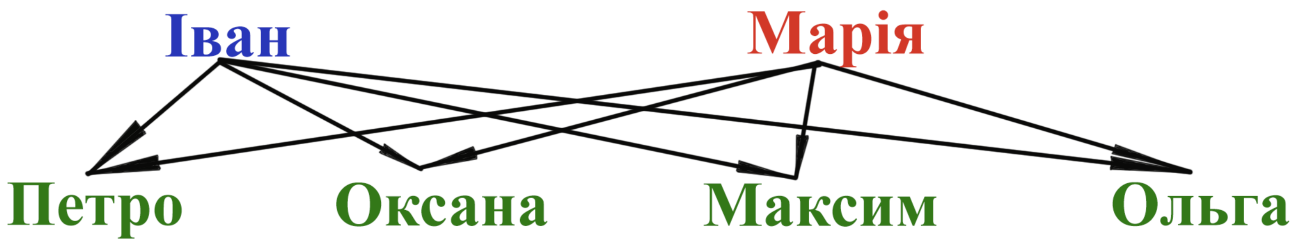
$$(1,3) \in R_1 \to (3,1) \in R_1 \quad (2,4) \in R_1 \to (4,2) \in R_1$$

$$(1,4) \in R_1 \to (4,1) \in R_1 \quad (3,4) \in R_1 \to (4,3) \in R_1$$

Приклад 2: з $x_1 R x_2$ випливає $x_2 R x_1$

Нехай задано відношення $R_2 \subset A \times A$.

$A = \{\text{Іван}, \text{Марія}, \text{Петро}, \text{Оксана}, \text{Максим}, \text{Ольга}\}$.



$R_2 = \{(a,b) \mid a \text{ є родичем } b\}$

$(\text{Петро}, \text{Іван}) \in R_2 \rightarrow (\text{Іван}, \text{Петро}) \in R_2$

$(\text{Максим}, \text{Іван}) \in R_2 \rightarrow (\text{Іван}, \text{Максим}) \in R_2$

$(\text{Петро}, \text{Марія}) \in R_2 \rightarrow (\text{Марія}, \text{Петро}) \in R_2$

$(\text{Максим}, \text{Марія}) \in R_2 \rightarrow (\text{Марія}, \text{Максим}) \in R_2$

$(\text{Петро}, \text{Ольга}) \in R_2 \rightarrow (\text{Ольга}, \text{Петро}) \in R_2$

$(\text{Максим}, \text{Оксана}) \in R_2 \rightarrow (\text{Максим}, \text{Оксана}) \in R_2$

Представлення симетричного відношення матрицею

Визначення.

Матриця симетричного відношення є симетричною відносно головної діагоналі

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \left\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\right\}$$

$$R = \left\{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_1, a_4), (a_4, a_1)(a_3, a_4), (a_4, a_3), (a_3, a_5), (a_5, a_3)\right\}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	x	1		1	
a_2	1	x			
a_3			x	1	1
a_4	1	0	1	x	
a_5		0	1		x

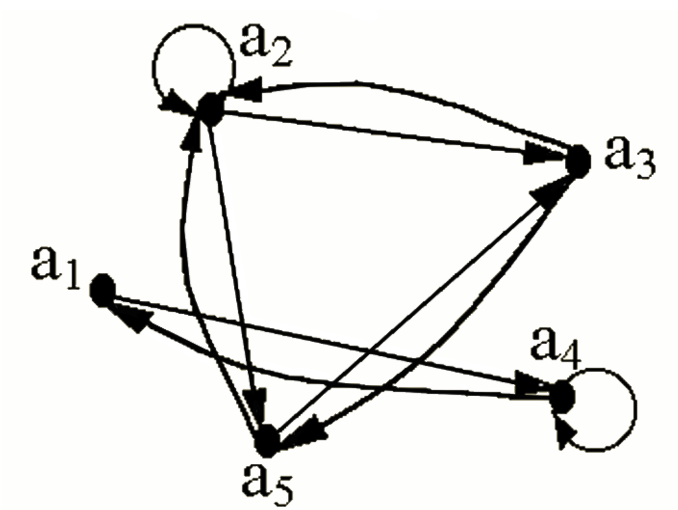
Представлення симетричного відношення графом

Визначення

У графі для кожної дуги з x_i в x_k **існує протилежно спрямована дуга** з x_k в x_i.

Нехай задане відношення $R \subset A \times A$. $A = (1,2,3,4,5)$

$$R = \{(a_1, a_4), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_2, a_5), (a_3, a_5), (a_3, a_2),$$
$$(a_4, a_4), (a_4, a_1), (a_5, a_2), (a_5, a_3)\}$$



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1				1	
a_2		1	1		1
a_3		1			1
a_4	1			1	
a_5		1	1		

Антисиметричність

Нехай задане відношення $R \subseteq X \times X$

Відношення ***R*** називається ***антисиметричним***, якщо з x_1Rx_2 і x_2Rx_1 випливає, що $x_1=x_2$.

Антисиметричність не є оберненою до симетричності.

Приклад 1.

Нехай $R_1 \subset A \times A,\ \ A = \{1,2,3\}$

$$R_1 = \{(a,b) | a \le b - на\ множині\ натуральних\ чисел\},$$

$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$$

В цьому відношенні з aR_1b і bR_1a випливає, що $a = b$.

$$(1,1) \in R_1 \to (1,1) \in R_1, \qquad (1,2) \in R_1 \to (2,1) \notin R_1$$

$$(2,2) \in R_1 \to (2,2) \in R_1, \qquad (1,3) \in R_1 \to (3,1) \notin R_1$$

$$(3,3) \in R_1 \to (3,3) \in R_1, \qquad (2,3) \in R_1 \to (3,2) \notin R_1$$

Приклад 2. з x_1Rx_2 і x_2Rx_1 випливає, що $x_1=x_2$.

Нехай задано відношення $R_2 \subset A \times A$. $A = \{1,2,3,4\}$.

$$R_2 = \{(a,b) | a \text{ є дільником } b \text{ на множині дійсних чисел}\}$$

$$(1,1) \to 1,\ (1,2) \to 1,\ (1,3) \to 1\ (1,4) \to 1,$$

$$(2,2) \to 2,\quad (2,4) \to 2,$$

$$(3,3) \to 3, (4,4) \to 4.$$

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}.$$

В цьому відношенні з aR_1b і bR_1a випливає, що $a = b$.

$$(1,1) \in R_2 \to (1,1) \in R_2, \qquad (1,2) \in R_2 \to (2,1) \notin R_2$$

$$(2,2) \in R_2 \to (2,2) \in R_2, \qquad (1,3) \in R_2 \to (3,1) \notin R_2$$

$$(3,3) \in R_2 \to (3,3) \in R_2, \qquad (2,4) \in R_2 \to (4,2) \notin R_2$$

$$(4,4) \in R_2 \to (4,4) \in R_2$$

Представлення антисиметричного відношення матрицею

Визначення.

1. Матриця антисиметричного відношення може мати одиниці на головній діагоналі.
2. Відсутня симетрія відносно головної діагоналі.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$R = \{(a_1, a_1), (a_2, a_1), (a_4, a_4)(a_4, a_1)(a_3, a_4), (a_3, a_5)\}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1				
a_2	1	x			
a_3			x	1	1
a_4	1			1	
a_5					x

Представлення антисиметричного відношення графом

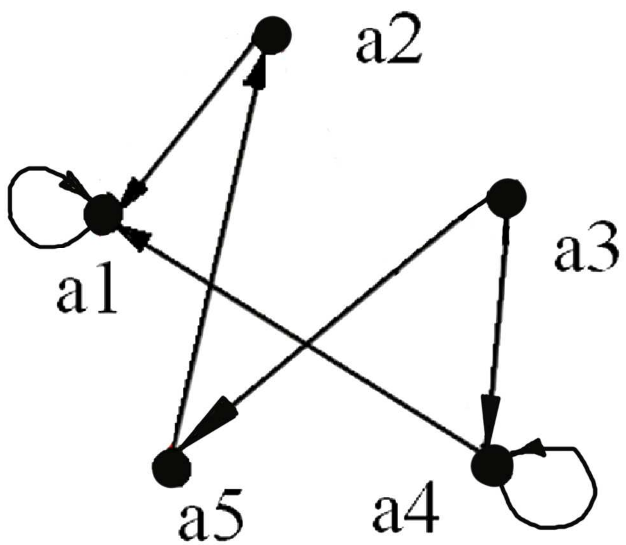
Визначення

У графі для кожної дуги з x_i в x_k не **існує протилежно спрямованої дуги** з x_k в x_i.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \left\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\right\}$$

$$R = \left\{(a_1, a_1), (a_2, a_1), \left(a_4, a_4\right)\left(a_4, a_1\right)\left(a_3, a_4\right), \left(a_3, a_5\right)\right\}$$



Асиметричність

Відношення R називається ***асиметричним***,

якщо для пари $(x_1, x_2) \in R$ з $x_1 R x_2$ випливає, що не виконується $x_2 R x_1$

(інакше кажучи, для будь-якої пари відношення R виконується або в одну сторону, або не виконується взагалі).

Приклад 1.

$$A = \{1,2,3,4\} \quad R_1 = \{(a,b) \mid a > b - \text{на множині цілих чисел}\}$$

$$R_1 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$

$$(2,1) \in R_1 \to (1,2) \notin R_1$$

$$(3,1) \in R_1 \to (1,3) \notin R_1$$

$$(3,2) \in R_1 \to (2,3) \notin R_1$$

$$(4,1) \in R_1 \to (1,4) \notin R_1$$

$$(4,2) \in R_1 \to (2,4) \notin R_1$$

$$(1,1) \notin R_1, (2,2) \notin R_1, (3,3) \notin R_1, (4,4) \notin R_1$$

Приклад 2. З пари x_1Rx_2 випливає, що не виконується x_2Rx_1

$$R_2 = \{(a,b) | a\ є\ сином\ b\ \ на\ множині\ людей.\}$$

$$(1,1) \to 1,\ (1,2) \to 1,\ (1,3) \to 1\ (1,4) \to 1,$$

$$(2,2) \to 2,\quad (2,4) \to 2,$$

$$(3,3) \to 3, (4,4) \to 4.$$

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}.$$

В цьому відношенні з aR_1b і bR_1a випливає, що $a = b$.

$$(1,1) \in R_2 \to (1,1) \in R_2, \qquad (1,2) \in R_2 \to (2,1) \notin R_2$$

$$(2,2) \in R_2 \to (2,2) \in R_2, \qquad (1,3) \in R_2 \to (3,1) \notin R_2$$

$$(3,3) \in R_2 \to (3,3) \in R_2, \qquad (2,4) \in R_2 \to (4,2) \notin R_2$$

$$(4,4) \in R_2 \to (4,4) \in R_2$$

Представлення асиметричного відношення матрицею

Визначення.

Матриця асиметричного відношення не містить одиничних елементів, симетричних відносно головної діагоналі.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \left\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\right\}$$

$$R = \left\{(a_2, a_1)(a_4, a_1)(a_3, a_4), (a_3, a_5), (a_2, a_5)\right\}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1					
a_2	1	x			1
a_3			x	1	1
a_4	1				
a_5					x

Представлення асиметричного відношення графом

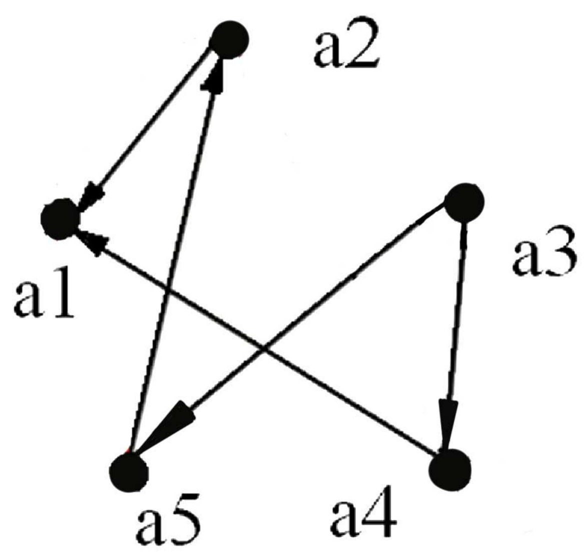
Визначення

У графі для кожної дуги з x_i в x_k не **існує протилежно спрямованої дуги** з x_k в x_i.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$R = \{(a_2, a_1), (a_4, a_1)(a_3, a_4), (a_3, a_5), (a_5, a_2)\}$$



Граф без петель

Транзитивність

Нехай задане відношення $R \subseteq X \times X$

Відношення $\boldsymbol{R}$ називають ***транзитивним***, якщо для будь-яких x_1, x_2, x_3 з $x_1 R x_2$ і $x_2 R x_3$ випливає $x_1 R x_3$.

Приклад.

$$R_1 = \{(a,b) | a \le b - на\ множині\ натуральних\ чисел\}$$

$$R_1 = \{(a,b) | a < b - на\ множині\ натуральних\ чисел\}$$

Задавання *графом*

У графі, що задає транзитивне відношення $\boldsymbol{R}$, для всякої пари дуг таких, що кінець першої збігається з початком другої, існує третя дуга, що має початок в спільній вершині з першою і кінець у спільній вершині з другою.

Антитранзитивність

Відношення R називають ***антитранзитивним***, якщо для будь-яких x_1, x_2, x_3 з x_1Rx_2 і x_2Rx_3 випливає, що x_1Rx_3 не виконується.

Приклад.

$$R_1 = \left\{ (a,b) \middle| a \text{ є наступним роком за } b \text{ на множині років} \right\}$$

$$R_1 = \left\{ (a,b) \middle| a \text{ є батьком } b \text{ на множині людей} \right\}$$

Приклад визначення властивостей відношення

Нехай $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Нехай $R \subseteq X \times X$ визначене у вигляді

$$R = \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\beta),(\alpha,\delta),(\beta,\alpha),(\delta,\alpha),(\delta,\delta),(\gamma,\delta),(\gamma,\gamma)\}.$$

1. R не є рефлексивним, оскільки $\beta \in X$, але $(\beta,\beta) \notin R$.
2. R не є симетричним, оскільки $(\gamma,\delta) \in R$, але $(\delta,\gamma) \notin R$.
3. R не є антисиметричним, оскільки $(\alpha,\beta) \in R$ й $(\beta,\alpha) \in R$, але $\alpha \neq \beta$.
4. R не є транзитивним, оскільки $(\beta,\alpha) \in R$, $(\alpha,\delta) \in R$, але $(\beta,\delta) \notin R$.

Види відношень

1. Відношення еквівалентності

Елементи називають еквівалентними, якщо довільний з них може бути замінений іншим.

У цьому випадку говорять, що дані елементи перебувають у відношенні еквівалентності.

Властивості відношення еквівалентності

Відношення R на множині X є **відношенням еквівалентності,** якщо воно

рефлексивне,

симетричне,

транзитивне.

У чому проявляються властивості еквівалентності?

1. Властивість **рефлексивності** проявляється в тому, що кожний елемент еквівалентний самому собі або $x \equiv x$.

2. Висловлювання про те, що два елементи є еквівалентними, не вимагає уточнення, який з елементів розглядається першим, а який – другим, тобто має місце $x \equiv y \to y \equiv x$ – властивість **симетричності.**

3. Два елементи, які еквівалентні третьому, також є еквівалентними між собою, або має місце $x \equiv y$ і $y \equiv z \to x \equiv z$ – властивість **транзитивності.**

Позначення відношень еквівалентності

Як загальний символ відношення еквівалентності використовується символ «$\equiv$ » (іноді символ «$\sim$ »).

Для окремих відношень еквівалентності використовуються інші символи:

«=» – для позначення рівності;

«$\|$ » – для позначення паралельності;

«$\leftrightarrow$ » або «$\rightleftarrows$ » – для позначення логічної еквівалентності.

Приклад. Розглянемо приклади множин еквівалентності
$R_1 = \{(a,b) | a\, еквівалентне\, b\, на\ множині\ чисел\}$.

Нехай задане відношення $R_1 \subseteq X \times X$ на множині $X = \{1,2,3\}$.

$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}.$$

Визначимо його властивості:

1. Рефлексивність:

Кожний елемент еквівалентний самому собі: $1R_1 1, 2R_1 2, 3R_1 3$.

2. Симетричність:

з $1R_1 2$ випливає, що $2R_1 1$,

з $1R_1 3$ випливає, що $3R_1 1$,

з $2R_1 3$ випливає, що $3R_1 2$.

3. Транзитивність:

Якщо $1R_1 2$ і $2R_1 3$, то $1R_1 3$. Якщо $1R_1 3$ і $3R_1 2$, то $1R_1 2$.
Якщо $2R_1 1$ і $1R_1 3$, то $2R_1 3$. Якщо $2R_1 3$ і $3R_1 1$, то $2R_1 1$.
Якщо $3R_1 1$ і $1R_1 2$, то $3R_1 2$. Якщо $3R_1 2$ і $2R_1 1$, то $3R_1 1$.

Приклад

Нехай задане відношення $R_2 \subseteq X \times X$

$$R_2 = \{(a,b) \mid a\ вчиться\ в\ одній\ групі\ з\ b\ на\ множині\ студентів\}$$

Нехай $X = \{Иван, Ольга, Максим\}$

$$R_2 = \{(Иван, Ольга), (Иван, Максим), (Иван, Иван),$$
$$(Ольга, Иван), (Ольга, Ольга), (Ольга, Максим)$$
$$(Максим, Иван), (Максим, Ольга), (Максим, Максим)\}$$

Рефлексивність: «Іван вчиться в одній групі із самим собою»

Симетричність: «Іван вчиться в одній групі з Ольгою»$\equiv$ «Ольга вчиться в одній групі з Іваном».

Транзитивність: «Іван вчиться в одній групі з Ольгою » і «Ольга вчиться в одній групі з Максимом» $\rightarrow$ «Іван вчиться в одній групі з Максимом»

Отже, відношення R_2 є еквівалентним.

Класи еквівалентності

Відношення еквівалентності R на множині A **розбиває** його **на підмножини**, елементи яких еквівалентні один одному й не еквівалентні елементам інших підмножин.

Визначення*.* Підмножини, що не перетинаються, на які розбивається множина A відношенням еквівалентності R, називають **класами еквівалентності**.

Класами еквівалентності називають підмножини, що не перетинаються, які отримані в результаті розбиття множини A відношенням еквівалентності R

Визначення*.* Множину класів еквівалентності множини A відносно R називають фактор-**множиною і** позначають $[A]_R$.

Приклад

Нехай множина A — це набір різнокольорових повітряних кульок.

1. Відношення R_1 задамо умовою:

$(a,b) \in R$ якщо «a одного кольору з b»

Одержимо класи еквівалентності з кульок одного кольору.

2. Відношення R_2 задамо умовою:

$(a,b) \in R$ якщо «a одного розміру з b»

Одержимо класи еквівалентності з кульок одного розміру

3. Відношення R_3 задамо умовою:

$(a,b) \in R$ якщо «a однакової форми з b»

Одержимо класи еквівалентності з кульок однакової форми.

Визначення класу еквівалентності

Нехай $a_i \in A$ – *елемент множини* $A=\{a_1,a_2,...,a_i,...,a_n\}$ і R — відношення еквівалентності на $A \times A$.
Тоді $[a_i]$ позначає множину $\{x | xRa_i\} = \{x | (x,a_i) \in R\}$, яку називають ***класом еквівалентності***, що містить a_i. Символ $[A]_R$ позначає множину всіх класів еквівалентності множини A по відношенню R. Таким чином,

$[A]_R$ *- фактор-множина*

Приклад. Нехай $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ і дано відношення еквівалентності:

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(1,4),\\ (2,1),(2,4),(3,5),(5,3),(4,1),(4,2)\}.$$

Класи еквівалентності по відношенню R були отримані шляхом визначення класу еквівалентності кожного елемента множини A:

$\left[1\right] = \left\{x \middle| \left(x,1\right) \in R\right\} = \left\{x \middle| xR1\right\} = \left\{1,2,4\right\}$ де

$1 \in \left[1\right]$, оскільки $\left(1,1\right) \in R$,

$2 \in \left[1\right]$ оскільки $\left(2,1\right) \in R$,

$4 \in \left[1\right]$ оскільки $\left(4,1\right) \in R$.

Так само одержуємо

$\left[2\right] = \left\{x \middle| \left(x,2\right) \in R\right\} = \left\{x \middle| xR2\right\} = \left\{2,1,4\right\}$

$\left[3\right] = \left\{x \middle| \left(x,3\right) \in R\right\} = \left\{x \middle| xR3\right\} = \left\{3,5\right\}$

$\left[4\right] = \left\{x \middle| \left(x,4\right) \in R\right\} = \left\{x \middle| xR4\right\} = \left\{4,1,2\right\}$

$\left[5\right] = \left\{x \middle| \left(x,5\right) \in R\right\} = \left\{x \middle| xR5\right\} = \left\{5,3\right\}$

$\left[6\right] = \left\{x \middle| \left(x,6\right) \in R\right\} = \left\{x \middle| xR6\right\} = \left\{6\right\}$

Приклад. Нехай Q – множина раціональних чисел.

Розіб'ємо Q на класи еквівалентності, для яких a/b – раціональний дріб, де $a \in Z$, $b \in N$.

Будь-який дріб c/d буде віднесений до одного класу еквівалентності з a/b тоді й тільки тоді, коли $ad = bc$.

(Наприклад: $2/4 \sim 3/6$, $2/6 \sim 3/9$).

Властивості такого відношення.

1. **Рефлексивність.** Для будь-якого дробу a/b виконується рівність $ab = ba$. Отже, $a/bRa/b$.

2. **Симетричність.** Якщо $a/bRc/d$, то $ad=bc$, у той же час $bc = ad$. Звідси $c/d\,Ra/b$.

3. **Транзитивність.** Нехай $a/bRc/d$ і $c/dRm/n$. Доведемо, що $a/bRm/n$, тобто $an = bm$. Дійсно, оскільки $a/bRc/d$, то $ad = bc$ і $c/dRm/n$, те $cn = dm$. Домножимо першу рівність на n, а другу на b, одержимо $and = bcn$ і $bcn = bmd$. В обох рівностях присутнє bcn. Тому $and = bmd$ або $an = bm$.

Завдання 1

Нехай приміщення лабораторії складається із трьох кімнат. Усього співробітників у лабораторії – 8.

Множина всіх співробітників: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$

Множина співробітників в 1-й кімнаті: $X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$

Множина співробітників в 2-й кімнаті: $X_2 = \{x_4\}$

Множина співробітників в 3-й кімнаті: $X_1 = \{x_5, x_6, x_7, x_8\}$

$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$

Питання 1.

Записати матрицю відношення R, заданого предикатом:

$R = \{(x, y) \,|\, "x \;\; працює \;\; в \;\; одній \;\; кімнаті \;\; з \;\; y"\}$

ВІДПОВІДЬ НА ЗАПИТАННЯ 1

Відношення

$$R=\{(x,y)\mid \text{"}x \ \textit{працює в одній кімнаті з} \ y\text{"}\}$$

Представлене матрицею

$$\begin{pmatrix} R & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Питання 2

Визначите властивості відношення R і його вид