Лекция 6
План лекции.

1. **Определение функции**
1.1. Область определения и область значений функции
1.2. Образ множества и элемента множества, прообраз множества и элемента множества.
2. **Определение отображения**
2.1. Свойство отображения.
2.2. Композиция отображений.
2.3. Сюръективное и инъективное отображения.
2.4. Сюръективная и инъективная функция.
2.5. Биекция или взаимно-однозначное соответствие
3. Способы задания функций
3.1. Табличный
3.2. Аналитический
3.3. Графический
4. **Специальные функции**
4.1. Тождественная функция
4.2. Нижнее округление
4.3. Верхнее округление
4.4. Факториал.
4.5. Бинарная операция
4.6. Конечная и бесконечная последовательности
5. Функция двух переменных
5.1. Матрицы, операции над матрицами
6. Понятие функционала
7. Понятие оператора

Определение функции

Отображение $f: X \to Y$ называется **функцией,** если оно однозначно, т. е. если для любых пар $(x_1, y_1) \in f$ и $(x_2, y_2) \in f$ из $(x_1 = x_2)$ следует $(y_1 = y_2)$.

Также значение y в любой из пар $(x, y) \in f$ называется функцией от x, что записывается в виде $y = f(x)$.

Следовательно, функция – это множество

$$f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

Дадим формальное определение функции.

Отношение f на $X \times Y$ называется ***функцией*** из X в Y и обозначается через $f: X \to Y$, если для каждого $x \in X$ существует единственный элемент $y \in Y$ такой, что $(a, b) \in f$. Если $f: X \to Y$ — функция, и $(a, b) \in f$, то говорят, что $y = f(x)$.

Как видно из определения, символ f используется в двух смыслах:

1. f – это множество, элементами которого являются пары, участвующие в соответствии.
2. $f(x)$ – это обозначение для $y \in Y$, которое соответствует данному $x \in X$.

Множество X называется ***областью определения*** функции f, а множество Y называется ***областью потенциальных значений.***

Если $E \subseteq X$, то множество $f(E) = \{y | f(x) = y$ для некоторого $x \in E\}$ называется ***образом*** множества E. Элемент $f(x)$ называется **образом** элемента x.

Образ всего множества X называется ***областью значений*** функции f. Если $F \subseteq Y$, то множество $f^{-1}(F) = \{x | f(x) \in F\}$ называется ***прообразом*** множества F. Элемент x называется **прообразом** $f(x)$

Функция $f : X \to Y$ называется также ***отображением***; при этом говорят, что f отображает X в Y. Если $(x, y) \in f$, так что $y = f(x)$, то говорят, что элемент x отображается в элемент y.

Свойства отображения

Пусть $A \subseteq X$. Для произвольного $x \in A$ образом x будет множество $Q_X \subseteq Y$. Совокупность всех элементов Y, являющихся образами Q_X для всех $x \in A$, называется образом множества A и обозначается QA. Тогда согласно этому определению

$$QA = \bigcup_{x \in A} Q_X .$$

Свойство 1. Если A_1 и A_2 – подмножества X , то имеет место соотношение:

$$Q(A_1 \cup A_2) = Q(A_1) \cup Q(A_2).$$

Свойство 2. Для взаимно-однозначного отображения справедливо следующее соотношение:

$$Q(A_1 \cap A_2) = Q(A_1) \cap Q(A_2).$$

Свойство 3. Для произвольного отображения справедливо соотношение:

$$Q(A_1 \cap A_2) \subseteq Q(A_1) \cap Q(A_2)$$

Обобщение свойств 1 и 3:

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} QA_i , \quad Q\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} QA_i .$$

Частный случай

Важный частный случай, когда множества X и Y совпадают. Тогда отображение $Q : X \to X$ отображает само в себя и определяется парой $\left(X, Q\right)$, где $Q \subseteq X \times X$ или $Q \subseteq X^2$.

Композиция отображений

Пусть даны отображения $Q : X \to X$ и $G : X \to X$.

Композицией этих отображений называется отображение $Q \otimes G$, определяемое соотношением:

$$Q\left(G_X\right) = \left(Q \otimes G\right)_X.$$

Данное соотношение выражает отображение Q отображения G.

В случае, когда $Q = G$ возможно получить отображения:

$Q_X^2 = Q\left(Q_X\right)$,

$Q_X^3 = Q\left(Q_X^2\right)$ и т. д.

В общем случае при $m \geq 2$ получаем выражение $Q_X^m = Q\left(Q_X^{m-1}\right)$.

Введем соотношение $Q_X^0 = X$ и получим соотношение для отрицательных m:

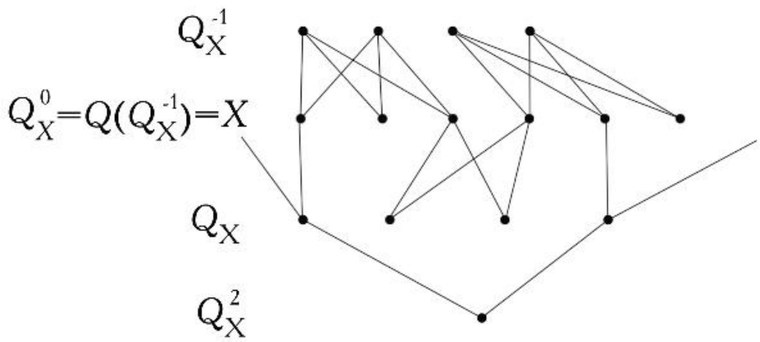
$$Q_X^0 = Q\left(Q_X^{-1}\right) = Q\left(Q \times Q^{-1}\right)_X = X.$$

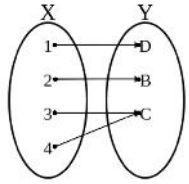
Поскольку Q_X^{-1} – обратное отображение, то

$Q_X^{-2} = Q\left(Q_X^{-1}\right)$,

$Q_X^{-3} = Q\left(Q_X^{-2}\right)$, и т. д.

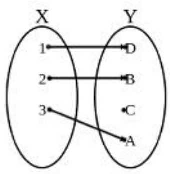
Пример. Пусть X – множество людей. Для каждого человека x из множества X множество его детей определим как Q_X. Тогда Q_X^2 будет представлять множество его внуков, Q_X^3 – множество его правнуков, а Q_X^{-1} – множество родителей. Изобразив множество людей точками, а стрелками представив соответствия между X, Q_X, Q_X^2 и т. д., получаем родословную или генеалогическое дерево для данного множества людей.





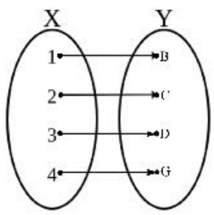
Отображение множества X в множество Y называется **сюръективным,** если каждый элемент из Y имеет по крайней мере один прообраз из X. Следовательно, имеет место одно-многозначное и много-однозначное соответствия.

Функция называется ***отображением «на»,*** или ***сюръективной функцией***, или ***сюръекцией***, если для каждого $y \in Y$ существует некоторое $x \in X$ такое, что $f\left(x\right) = y$.



Отображение множества X в множество Y называется **инъективным,** если каждый образ $f\left(x\right)$ обладает ровно одним прообразом x. Следовательно, имеет место одно-однозначное соответствие.

Функция $f : X \to Y$ называется ***инъективной***, или ***инъекцией***, если из $f\left(x\right) = f\left(x'\right)$ следует $x = x'$.



Функция, которая является одновременно и инъективной, и сюръективной, называется ***взаимно-однозначным соответствием***, или ***биекцией.*** Если $X = Y$ и $f : X \to Y$ является взаимно-однозначным соответствием, то f называется ***перестановкой*** множества X.

Способы задания функций.

1. Табличный способ задания функции

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f\left(x\right)$	1	4	9	16	25	36	49	64	81

В данной таблице столбцы представляют собой множество упорядоченных пар: $y = f\left(x\right) = \left\{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25),(6,36),(7,49),(8,64),(9,81)\right\}$, что соответствует определению функции, представленному ранее.

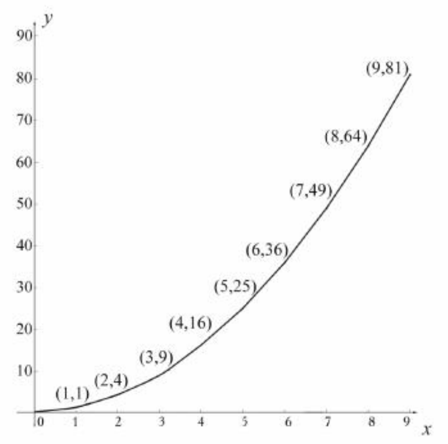
2. Аналитический способ задания функции

При аналитическом задании функция представлена в виде формулы, т. е. математического выражения, включающего математические операции, которые необходимо выполнить над $x \in X$, чтобы получить $y \in Y$:

$$y = f(x) = \left\{ (x, y) \in R^2 \middle| y = x^2 \right\}.$$

2. Графический способ задания функции

Если $X \subseteq R$ и $Y \subseteq R$, т. е. X и Y являются подмножествами множества вещественных чисел, то пары $(x, y) \in R^2$ возможно представить в виде точек на плоскости. Полная совокупность точек будет представлять собой график функции.



Специальные функции

Пусть $I : X \rightarrow X$ определено соотношением $f(x) = x$ для всех $x \in X$. Функция I называется ***тождественной функцией*** на X**.**

Функция $f : X \rightarrow Y$, где X — множество действительных чисел, а Y — множество целых чисел, называется ***нижним округлением*** и обозначается $f(x) = \lfloor x \rfloor$, если она каждому $x \in X$ ставит в соответствие наибольшее целое число, меньшее или равное x.

Функция $f : F \rightarrow B$ называется ***верхним округлением*** и обозначается $f(x) = \lceil x \rceil$, если она каждому $x \in X$ ставит в соответствие наименьшее целое число, большее или равное x.

Пусть A и B совпадают со множеством неотрицательных целых чисел. ***Факториалом*** назовем функцию $f : X \rightarrow Y$, обозначаемую через $f(n) = n!$ и определяемую следующими соотношениями:

0!=1

1!=1

$2! = 1 \cdot 2 = 2$
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$

Бинарная операция

Пусть X, Y, Z — тройка непустых множеств. **Бинарной операцией** или **двуме́стной опера́цией** в паре (x, y), $x \in X$ и $y \in Y$ со значением в $z \in Z$ называется функция $b : P \to Z$, где $P \subset X \times Y$.

Бинарная операция обозначается знаком действия, который ставится обычно между операндами.

Пусть $\bullet$ – произвольная операция. Тогда существуют виды записей:

1. Инфиксная форма записи: $x \bullet y$
2. Префиксная (польская запись): $\bullet xy$
3. Постфиксная (обратная польская запись): $xy \bullet$

Пример: «+», «-», «·» – бинарные операции на множестве рациональных чисел.

Последовательность

Определение. Пусть дано множество $X = \{x_1, ..., x_i, ..., x_n\}$ произвольной природы. Всякое отображение $f : N \to X$ множества натуральных чисел N в множество X называется **последовательностью** (элементов множества X).

Образ натурального числа i, а именно, элемент $x_i = f(i)$, называется i**-м членом** или **элементом последовательности**, а порядковый номер члена последовательности – её индексом.

Обозначения

Последовательность $x_1, x_2, ..., x_i, ...$ записывают в виде $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, иногда $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Для конечных последовательностей: $(x_i)_{i=1}^{n}$ или $\{x_i\}_{i=1}^{n}$

Сумма элементов последовательности: $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Функция двух переменных.

Пусть дана функция $f : X \to Y$ в которой значение множество X представлено декартовым произведением $X = A \times B$. Такая функция называется функцией двух переменных A и B и обозначается $f(a, b)$, где $a \in A$ и $b \in B$.

Формальное определение функции двух переменных имеет такой вид:

$$f = \left\{ \left(a,b,y \right) \in A \times B \times Y \middle| y = f\left(a,b \right) \right\}.$$

Матрица

Пусть есть два конечных множества $M = \{1,2,...,m\}$ и $N = \{1,2,...,n\}$, где m и n – натуральные числа.

Назовем матрицей размера $m \times n$, или ***массивом*** $m \times n$ (m на n) функцию:

$$A : M \times N \to D,$$

где D – это, как правило, множество действительных, комплексных, рациональных или целых чисел.

Элементы D называются ***скалярами.***

Таким образом, для каждого $i, 1 < i < m$, и каждого j, $1 < j < n$, имеется элемент $A(i, j) \in D$, который находится в i-й строке и j-м столбце соответствующей прямоугольной таблицы.

Образ $A(i, j)$ элемента области определения (i, j) сокращенно обозначается через $A_{i,j}$. Следовательно, $m \times n$ матрица A изображается прямоугольной таблицей, где образы упорядоченных пар $(i, j) \in \{1,2,...,m\} \times \{1,2,...,n\}$ могут быть представлены в таком виде:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

Матрица A содержит m строк и n столбцов и является матрицей размера $m \times n$. Сокращенно матрицу записывают $A = \left[A_{ij} \right]$ или $A = \left[a_{ij} \right]$.

Значение a_{ij} называется ***компонентой***, или ***элементом*** матрицы А.

Виды матриц

1. ***Матрица-столбец.*** Матрица размера $m \times 1$ называется ***матрицей-столбцом или вектором-столбцом.***

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

2. ***Матрица-строка.*** Матрица размера $1 \times n$ называется ***матрицей-строкой или вектором-строкой.***

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Если A — матрица-строка или матрица-столбец, то индекс строки или, соответственно, столбца, обычно опускают.

3. ***Квадратичная матрица.*** Если в матрице число строк и число столбцов совпадает $m = n = k$, она называется ***квадратной матрицей.***

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}$$

4. **Диагональная матрица.** Это квадратичная матрица, в которой все элементы, кроме диагональных, нулевые.

$$\forall (i \neq j) \Rightarrow A_{ij} = 0 . \qquad A = diag(A_1, A_2, ..., A_k).$$

5. **Единичная матрица.** Это диагональная матрица с единичными элементами на диагонали.

$$\begin{cases} \forall (i \neq j) \Rightarrow A_{ij} = 0, \\ \forall (i = j) \Rightarrow A_{ij} = 1 \end{cases} \qquad A = diag(1,1,...,1)$$

Операции над матрицами

Равенство матриц

Две матрицы $A = [A_{ij}]$ и $B = [B_{ij}]$ размера $m \times n$ ***равны***, если равны их соответствующие элементы; т. е. $A = B$ тогда и только тогда, когда $A_{ij} = B_{ij}$ для всех $i, 1 < j < m$, и всех $j, 1 < j < n$.

Умножение матрицы на скаляр

Если d — скаляр, а $A = [A_{ij}]$ — матрица $m \times n$, то dA есть матрица $D = [D_{ij}]$ размера $m \times n$, где $D_{ij} = dA_{ij}$, т. е. каждая компонента есть произведение соответствующей компоненты A на d . Произведение числа d и матрицы A называется ***умножением матрицы на скаляр.***

Сумма и разность матриц

Складывать и вычитать можно только матрицы одного размера !!

Сумма

Если $A = [A_{ij}]$ и $B = [B_{ij}]$ — $m \times n$-матрицы, тогда $A + B$ есть $m \times n$ матрица $C = [C_{ij}]$, где $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$, другими словами, матрицы складываются покомпонентно. Матрица C называется ***суммой матриц*** A и B**.**

Разность

Разность двух матриц определим через их сумму.

Запись $A - B$ означает $A + (-1) \cdot B$.

Следовательно, если $A=\left[A_{ij}\right]$ и $B=\left[B_{ij}\right]$ — $m\times n$-матрицы, тогда $A-B$ есть $m\times n$ матрица $C=\left[C_{ij}\right]$, где $C_{ij}=A_{ij}-B_{ij}$.

Произведение матриц

1. **Умножение матрицы на матрицу-столбец**

Матрица должна быть слева, а матрица-столбец - справа:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 + \ldots A_{1n}B_n \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 + \ldots A_{2n}B_n \\ \vdots \\ A_{m1}B_1 + A_{m2}B_2 + \ldots A_{mn}B_n \end{bmatrix}$$

2. **Умножение матрицы-строки на матрицу**.

Матрица-строка должна быть слева, а матрица-справа:

$$\left[A_1\ A_2 \ldots A_m\right] \times \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m1} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^{m} A_k B_{k1} \quad \sum_{k=1}^{m} A_k B_{k2} \ \ldots \ \sum_{k=1}^{m} A_k B_{kn} \right]$$

Б) Пусть A матрица $m\times p$: $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{mp} \end{bmatrix}$

Пусть B матрица $p\times n$: $B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & B_{p3} & \cdots & B_{pn} \end{bmatrix}$

Тогда произведением матриц A и B называется матрица $C=\left[C_{ij}\right]$ размера $m\times n$, где C_{ij} – это скалярное произведение i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B. $C=AB$

$$C_{i,j} = \left[A_{i1} \quad A_{i2} \quad A_{i3} \quad \cdots \quad A_{ip}\right] \bullet \begin{bmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ B_{3j} \\ \vdots \\ B_{pj} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj} .$$

Транспонированная матрица

Пусть A — матрица $m \times n$.

Ее ***транспонированной матрицей*** называется матрица A^t размера $n \times m$ такая, что

$$A^t_{ij} = A_{ji},$$

где A_{ij} — элемент i-ой строки и j-го столбца матрицы A.

Симметричная матрица

Если A — матрица $n \times n$ и $A_{ij} = A_{ji}$ для всех $1 \le i,\ j \le n$, то матрица A называется ***симметричной.*** Иными словами, матрица A симметрична тогда и только тогда, когда $A = A^t$.

Матричное представление отношения

Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$ и $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_n\}$, и пусть R – отношение на $A \times B$.

Матричным представлением R называется матрица $M = [M_{ij}]$ размера $m \times n$, определенная соотношениями

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R, \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

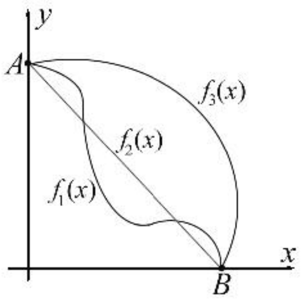
Пусть M – матрица размера $n \times n$, в каждой строке и в каждом столбце которой только один элемент равен 1, а все остальные равны 0. Такая матрица M называется ***матрицей перестановок.***

Понятие о функционала

Понятие функционала является более широким, чем понятие функции.

Когда мы говорим об отображении $f : X \to Y$ как о функции с вещественными значениями, мы не накладываем на характер элементов множества X каких-либо ограничений. В простейших задачах множество X, как и множество Y, представляет собой множества вещественных чисел. Каждая пара $(x, y) \in f$ ставит в соответствие одному вещественному числу x другое вещественной число y. Однако для практики важным является случай, когда множество X представляет собой множество функций, а множество Y – множество вещественных чисел. Этот случай приводит к понятию функционала.

Представим себе некоторый набор кривых (траекторий) $y = f_i(x)$, соединяющих фиксированные точки А и В, как показано на рисунке.



Пусть по каждой из этих траекторий может происходить свободное перемещение точки. Обозначим через t время, которое требуется на перемещение из точки A в точку B. Это время очевидно зависит от характера траектории AB, т. е. от вида функции $f_i(x)$.

Обозначим через $F(x)$ множество из n различных функций, изображающих траекторию AB,

$$F(x) = \{f_1(x), f_2(x), ..., f_i(x), ..., f_n(x)\},$$

а через T – множество вещественных чисел $t \in T$, определяющих время перемещения точки, то зависимость времени движения от вида функции может быть записана как отображение.

Функционал – это отображение J, которое имеет такое формальное представление:

$$J : F(x) \to T,$$

или $J = \{((f(x), t) | f(x) \in F(x), t \in T, t = J[f(x)])\}$.

Понятие оператора. Оператор представляет более общее понятие по сравнению с функционалом.

Оператором называется отображение

$$L : X \to Y,$$

где множества X и Y являются множествами функций с элементами $x(t) \in X$ и $y(t) \in Y$.

Отсюда следует, что элементами множества L являются пары $(x(t), y(t))$, а оператор L преобразует функцию

$$y(t) = L[x(t)],$$

Таким образом, оператор устанавливает соответствие между двумя множествами функций, так, что каждой функции из одного множества соответствует функция из другого множества.

Пример. Обозначим через p оператор дифференцирования. Тогда связь между производной $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$ и функцией $f(x)$ может быть представлена в операторном виде $f'(x) = p[f(x)]$.