3. Синтез комбінаційних схем

3.1. Представлення функції f4 в канонічних формах алгебр Буля, Шеффера, Пірса та Жегалкіна

<u>Алгебра Буля {І, АБО, НЕ}</u>

$$f4_{ДДНФ}= (\overline{X4}\,\overline{X3}\,\overline{X2}X1) \vee (\overline{X4}\,\overline{X3}X2X1) \vee (\overline{X4}X3X2X1) \vee (X4\overline{X3}\,\overline{X2}X1) \vee$$

$$(X4X3\overline{X2}\,\overline{X1}) \vee (X4X3\overline{X2}X1) \vee (X4X3X2\overline{X1}) \vee (X4X3X2X1)$$

$$f4_{ДКНФ}= (\overline{X4} \vee \overline{X3} \vee \overline{X2} \vee \overline{X1}) \cdot (\overline{X4} \vee \overline{X3} \vee X2 \vee \overline{X1}) \cdot (\overline{X4} \vee X3 \vee \overline{X2} \vee \overline{X1}) \cdot (X4 \vee \overline{X3} \vee \overline{X} \vee 2\overline{X1}) \cdot$$

$$\cdot (\overline{X4} \vee X3 \vee \overline{X2} \vee X1) \cdot (X4 \vee \overline{X3} \vee X2 \vee X1) \cdot (\overline{X4} \vee X3 \vee X2 \vee \overline{X1}) \cdot (X4 \vee \overline{X3} \vee X2 \vee \overline{X1}) .$$

<u>Алгебра Шеффера {І–НЕ}</u>

$$f4 = ((X4/X4)/(X3/X3)/(X2/X2)/(X1))/((X4/X4)/(X3/X3)/(X2)/(X1))/$$
$$((X4/X4)/(X3)/(X2)/(X1))/((X4)/(X3/X3)/(X2/X2)/(X1))/((X4)/(X3)/(X2/X2)/$$
$$(X1/X1))/((X4)/(X3)/(X2/X2)/(X1))/((X4)/(X3)/(X2)/(X1/X1))/((X4)/(X3)/(X2)/$$
$$(X1)).$$

<u>Алгебра Пірса {АБО–НЕ}</u>

$$f4 = ((X4 \downarrow X4) \downarrow (X3 \downarrow X3) \downarrow (X2 \downarrow X2) \downarrow (X1 \downarrow X1)) \downarrow ((X4 \downarrow X4) \downarrow (X3 \downarrow X3) \downarrow (X2) \downarrow (X1 \downarrow X1))$$
$$\downarrow ((X4 \downarrow X4) \downarrow (X3) \downarrow (X2 \downarrow X2) \downarrow (X1 \downarrow X1)) \downarrow ((X4) \downarrow (X3 \downarrow X3) \downarrow (X2 \downarrow X2) \downarrow (X1 \downarrow X1))$$
$$\downarrow ((X4 \downarrow X4) \downarrow (X3) \downarrow (X2 \downarrow X2) \downarrow (X1)) \downarrow ((X4) \downarrow (X3 \downarrow X3)) \downarrow (X2) \downarrow (X1)) \downarrow ((X4 \downarrow X4) \downarrow (X3)$$
$$\downarrow (X2) \downarrow (X1 \downarrow X1)) \downarrow ((X4) \downarrow (X3 \downarrow X3) \downarrow (X2) \downarrow ((X1 \downarrow X1).$$

<u>Алгебра Жегалкіна {ВИКЛЮЧНЕ АБО, І, const 1}</u>

$$f4 = (X4 \oplus 1)(X3 \oplus 1)(X2)(X1) \oplus (X4 \oplus 1)(X3)(X2)(X1) \oplus (X4)(X3 \oplus 1)(X2 \oplus 1)(X1) \oplus$$
$$\oplus (X4)(X3)(X2 \oplus 1)(X1 \oplus 1) \oplus (X4)(X3)(X2 \oplus 1)(X1) \oplus (X4)(X3)(X2)(X1) \oplus$$
$$(X4 \oplus 1)(X3 \oplus 1)(X2 \oplus 1)(X1) = X4X3X1 \oplus X3X1 \oplus X1 \oplus X4X3$$

3.2. Визначення належності функції f4 до п'яти передцповних класів

- f(1111) = 1 => функція зберігає одиницю
- f(0000) = 0 => функція зберігає нуль
- f(0011) = f(1100) = 1 => функція не самодвоїста
- f(0011) > f(0100) => функція не монотонна
- функція нелінійна, оскільки її поліном Жегалкіна нелінійний

3.3. Мінімізація функції f4

<u>Метод Квайна-Мак-Класкі</u>

Виходячи з таблиці 2.2, запишемо стовпчик ДДНФ (К0), розподіливши терми за кількістю одиниць. Проведемо попарне склеювання між сусідніми групами та виконаємо поглинання термів (рисунок 4.4).

К0	К1	К2
~~0001 (1)~~	$\boxed{00X1\ (1)}$	$\boxed{11XX\ (1)}$
~~0011 (1)~~	$\boxed{X001\ (1)}$	~~11XX (1)~~
~~0111 (1)~~	$\boxed{0X11\ (1)}$	
~~1001 (1)~~	$\boxed{X111\ (1)}$	
~~1100 (1)~~	$\boxed{1X01\ (1)}$	
~~1101 (1)~~	~~110X (1)~~	
~~1110 (1)~~	~~11X0 (1)~~	
~~1111 (1)~~	~~11X1 (1)~~	
	~~111X (1)~~	

Рисунок 4.4 – Склеювання і поглинання термів

Одержані прості імпліканти запишемо в таблицю покриття (таблиця 4.3).

Таблиця 4.3 – Таблиця покриття

	0001(F1)	0011(F1)	0111(F1)	1001(F1)	1100(F1)	1101(F1)	1110(F1)	1111(F1)
00X1 (1)	+	+						
X001 (1)	+			+				
0X11 (1)		+	+					
X111 (1)			+					+
1X01 (1)				+		+		
11XX (1)					+	+	+	+

В ядро функції входять ті терми, без яких неможливо покрити хоча б одну імпліканту.

Ядро = {X001; 00X1; 11XX}

В МДНФ входять всі терми ядра, а також ті терми, що забезпечують покриття всієї функції з мінімальною ціною.

$f_{4МНДФ} = (\overline{X3}\,\overline{X2}X1) \vee (\overline{X4}X2X1) \vee (X4X3)$

Метод невизначених коефіцієнтів

Ідея цього методу полягає у відкушанні ненульових коефіцієнтів при кожній імпліканті. Метод виконується у декілька етапів:

1. Рівняння для знаходження коефіцієнтів представляється у вигляді таблиці (таблиця 4.4).
2. Виконується відкреслення нульових рядків.
3. Викреслюються вже знайдені нульові коефіцієнти на залишившихся рядках.
4. Імпліканти, що залишилися, поглинають імпліканти справа від них.

Таблиця 4.4 – Метод невизначених коефіцієнтів

x_4	x_3	x_2	x_1	x_4x_3	x_4x_2	x_4x_1	x_3x_2	x_3x_1	x_2x_1	$x_4x_3x_2$	$x_4x_3x_1$	$x_4x_2x_1$	$x_3x_2x_1$	$x_4x_3x_2x_1$	f_4
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~000~~	~~000~~	~~000~~	~~000~~	~~0000~~	~~0~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~00~~	~~00~~	~~01~~	~~00~~	~~01~~	~~01~~	~~000~~	001	~~001~~	001	~~0001~~	1
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~00~~	~~01~~	~~00~~	~~01~~	~~00~~	~~10~~	~~001~~	~~000~~	~~010~~	~~010~~	~~0010~~	~~0~~
0	0	1	1	~~00~~	~~01~~	~~01~~	~~01~~	~~01~~	~~11~~	~~001~~	001	011	~~011~~	~~0011~~	1
~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~01~~	~~00~~	~~00~~	~~10~~	~~10~~	~~00~~	~~010~~	~~010~~	~~000~~	~~100~~	~~0100~~	~~0~~
~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~01~~	~~00~~	~~01~~	~~10~~	~~11~~	~~01~~	~~010~~	~~011~~	~~001~~	~~101~~	~~0101~~	~~0~~
~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~01~~	~~01~~	~~00~~	~~11~~	~~10~~	~~10~~	~~011~~	~~010~~	~~010~~	~~110~~	~~0110~~	~~0~~
~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~01~~	~~01~~	~~01~~	~~11~~	~~11~~	~~11~~	~~011~~	~~011~~	011	111	~~0111~~	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~100~~	~~100~~	~~100~~	~~000~~	~~1000~~	~~0~~
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~10~~	~~10~~	~~11~~	~~00~~	~~01~~	~~01~~	~~100~~	~~101~~	101	001	~~1001~~	1
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~10~~	~~11~~	~~10~~	~~01~~	~~00~~	~~10~~	~~101~~	~~100~~	~~110~~	~~010~~	~~1010~~	~~0~~
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~10~~	~~11~~	~~11~~	~~01~~	~~01~~	~~11~~	~~101~~	~~101~~	~~111~~	~~011~~	~~1011~~	~~0~~
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	11	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~00~~	~~110~~	~~110~~	~~100~~	~~100~~	~~1100~~	1
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	11	~~10~~	~~11~~	~~10~~	~~11~~	~~01~~	~~110~~	~~111~~	101	~~101~~	~~1101~~	1
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	11	~~11~~	~~10~~	~~11~~	~~10~~	~~10~~	~~111~~	~~110~~	~~110~~	~~110~~	~~1110~~	1
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	11	~~11~~	~~11~~	~~11~~	~~11~~	~~11~~	~~111~~	~~111~~	~~111~~	111	~~1111~~	1

В ядро функції входять ті терми, без яких неможливо покрити хоча б одну імпліканту.

Ядро = {X001; 00X1; 11XX}

В МДНФ входять всі терми ядра, а також ті терми, що забезпечують покриття всієї функції з мінімальною ціною.

$f_{4МНДФ}= (\overline{X}3\overline{X}2X1)$ v $(\overline{X}4X2X1)$ v $(X4X3)$

Метод діаграм Вейча

Метод діаграм Вейча – це графічний метод, призначений для ручної мінімізації. Його наочність зберігається за невеликої кількості аргументів.

Кожна клітинка відповідає конституанті. Кожний прямокутник, що містить 2^k елементів, відповідає імпліканті. Прямокутник максимального розміру відповідає простій імпліканті (рисунок 4.5).