3. Синтез комбінаційних схем

3.1. Представлення функції f4 в канонічних формах алгебр Буля, Шеффера, Пірса та Жегалкіна

<u>Алгебра Буля {І, АБО, НЕ}</u>

$$f4_{ДДНФ}=(\overline{X4}\,\overline{X3}\,\overline{X2}X1)v(\overline{X4}\,\overline{X3}X2\overline{X1})v(\overline{X4}\,\overline{X3}X2X1)v(\overline{X4}X3\overline{X2}X1)v(\overline{X4}X3X2X1)v(X4\overline{X3}\,\overline{X2}\,\overline{X1})$$

$$v(X4\overline{X3}\,\overline{X2}X1)v(X4\overline{X3}X2\overline{X1})v(X4\overline{X3}X2X1)v(X4X3\overline{X2}\,\overline{X1})v(X4X3\overline{X2}X1)v\ (X4X3X2X1)$$

$$f4_{ДКНФ}= (X4vX3vX2v\overline{X4}) \cdot (\overline{X4}vX3vX2v\overline{X1}) \cdot (\overline{X4}vX3v\overline{X2}v\overline{X1}) \cdot (\overline{X4}v\overline{X3}v\overline{X2}v\overline{X1})$$

<u>Алгебра Шеффера {І–НЕ}</u>

f4 = ((X4/X4)/(X3/X3)/(X2/X2)/X1)/((X4/X4)/(X3/X3)/(X2)/(X1/X1))/
((X4/X4)/(X3/X3)/(X2)/(X1))/((X4/X4)/(X3)/(X2/X2)/(X1))/((X4)/(X3/X3)
/(X2/X2)/(X1/X1))/((X4)/(X3/X3)/(X2/X2)/(X1/X1))/((X4)/(X3/X3)(X2/X2)/(X
1))/((X4)/(X3/X3)/(X2)/(X1/X1))/((X4)/(X3/X3)/(X2)/(X1))/((X4)/(X3)/(X2/X2)/
(X1/X1))/((X4)/(X3)/(X2/X2)/(X1))/((X4)/(X3)/(X2)/(X1)).

<u>Алгебра Пірса {АБО–НЕ}</u>

f4 = ((X4)↓(X3)↓(X2)↓(X1↓X1)) ↓((X4↓X4) ↓(X3) ↓(X2) ↓(X1↓X1)) ↓((X4↓X4)↓(X3)
↓(X2↓X2)↓(X1↓X1)) ↓((X4↓X4) ↓(X3↓X3) ↓(X2↓X2) ↓(X1↓X1))

<u>Алгебра Жегалкіна {ВИКЛЮЧНЕ АБО, І, const 1}</u>

f4 = ((X4⊕1)(X3⊕1)(X2⊕1)(X1))⊕((X4⊕1)(X3⊕1)(X2)(X1⊕1)⊕((X4⊕1)
(X3⊕1)(X2)(X1))⊕((X4⊕1)(X3)(X2⊕1)(X1))⊕((X4⊕1)(X3)(X2)(X1))⊕((X4)(X3⊕1)
(X2⊕1)(X1⊕1))⊕((X4)(X3⊕1)(X2)(X1⊕1))⊕((X4)(X3⊕1)(X2)(X1))⊕((X4)(X3)
(X2⊕1)(X1⊕1))⊕((X4)(X3)(X2⊕1)(X1))⊕((X4)(X3)(X2)(X1)) =
(X3X2X1)⊕(X4X1)⊕(X4X2)⊕(X2X1)⊕(X4)⊕(X2)⊕(X1)

3.2. Визначення належності функції f4 до п'яти передцповних класів

- f(1111) = 1 => функція зберігає одиницю
- f(0000) = 0 => функція зберігає нуль
- f(0011) = f(1100) = 1 => функція не самодвоїста
- f(0011) > f(0100) => функція не монотонна
- функція нелінійна, оскільки її поліном Жегалкіна нелінійний

3.3. Мінімізація функції f4

<u>Метод Квайна–Мак–Класкі</u>

Виходячи з таблиці 2.2, запишемо стовпчик ДДНФ (К0), розподіливши терми за кількістю одиниць. Проведемо попарне склеювання між сусідніми групами та виконаємо поглинання термів (рисунок 4.4)

K0	K1	K2	K3
~~0001 (1)~~	~~00X1 (1)~~	~~0XX1 (1)~~	~~XXX1 (1)~~
~~0010 (1)~~	~~0X01 (1)~~	~~X0X1 (1)~~	~~XXX1 (1)~~
~~0011 (1)~~	~~X001 (1)~~	~~0XX1 (1)~~	$\boxed{\text{XXX1 (1)}}$
~~0101 (1)~~	~~001X (1)~~	~~XX01 (1)~~	
~~0111 (1)~~	~~X010 (1)~~	~~X0X1 (1)~~	
~~1000 (1)~~	~~0X11 (1)~~	~~XX01 (1)~~	
~~1001 (1)~~	~~X011 (1)~~	~~X01X (1)~~	
~~1010 (1)~~	~~01X1 (1)~~	$\boxed{\text{X01X (1)}}$	
~~1011 (1)~~	~~X101 (1)~~	~~XX11 (1)~~	
~~1100 (1)~~	~~X111 (1)~~	~~XX11 (1)~~	
~~1101 (1)~~	~~100X (1)~~	~~X1X1 (1)~~	
~~1111 (1)~~	~~10X0 (1)~~	~~X1X1 (1)~~	
	~~1X00 (1)~~	$\boxed{\text{10XX (1)}}$	
	~~10X1 (1)~~	~~1X0X (1)~~	
	~~1X01 (1)~~	~~10XX (1)~~	
	~~101X (1)~~	$\boxed{\text{1X0X (1)}}$	
	~~1X11 (1)~~	~~1XX1 (1)~~	
	~~110X (1)~~	~~1XX1 (1)~~	
	~~11X1 (1)~~		

Рисунок 4.4 – Склеювання і поглинання термів

Одержані прості імпліканти запишемо в таблицю покриття (таблиця 4.3).

Таблиця 4.3 – Таблиця покриття

	0001(F1)	0010(F1)	0011(F1)	0101(F1)	0111(F1)	1000(F1)	1001(F1)	1010(F1)	1011(F1)	1100(F1)	1101(F1)	1111(F1)
X01X (1)		+						+				
10XX (1)												
1X0X (1)						+				+		
XXX1 (1)	+		+	+	+		+		+		+	+

В ядро функції входять ті терми, без яких неможливо покрити хоча б одну імпліканту.
Ядро = {X01X; 1X0X; XXX1}
В МДНФ входять всі терми ядра, а також ті терми, що забезпечують покриття всієї функції з мінімальною ціною.
$f_{4МНДФ} = (\overline{X}3X2) \vee (X4\overline{X}2) \vee (X1)$

Метод невизначених коефіцієнтів

Ідея цього методу полягає у відкушанні ненульових коефіцієнтів при кожній імпліканті. Метод виконується у декілька етапів:

1. Рівняння для знаходження коефіцієнтів представляється у вигляді таблиці (таблиця 4.4).
2. Виконується відкреслення нульових рядків.
3. Викреслюються вже знайдені нульові коефіцієнти на залишившихся рядках.
4. Імпліканти, що залишилися, поглинають імпліканти справа від них.

Таблиця 4.4 – Метод невизначених коефіцієнтів

x_4	x_3	x_2	x_1	x_4x_3	x_4x_2	x_4x_1	x_3x_2	x_3x_1	x_2x_1	$x_4x_3x_2$	$x_4x_3x_1$	$x_4x_2x_1$	$x_3x_2x_1$	$x_4x_3x_2x_1$	f_4
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~000~~	~~000~~	~~000~~	~~000~~	~~0000~~	~~0~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	1	~~00~~	~~00~~	~~01~~	~~00~~	~~01~~	~~01~~	~~000~~	~~001~~	~~001~~	~~001~~	~~0001~~	1
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~00~~	~~01~~	~~00~~	01	~~00~~	~~10~~	~~001~~	~~000~~	~~010~~	~~010~~	~~0010~~	1
~~0~~	~~0~~	~~1~~	1	~~00~~	~~01~~	~~01~~	01	~~01~~	~~11~~	~~001~~	~~001~~	~~011~~	~~011~~	~~0011~~	1
~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~01~~	~~00~~	~~00~~	~~10~~	~~10~~	~~00~~	~~010~~	~~010~~	~~000~~	~~100~~	~~0100~~	~~0~~
~~0~~	~~1~~	~~0~~	1	~~01~~	~~00~~	~~01~~	10	~~11~~	~~01~~	~~010~~	~~011~~	~~001~~	~~101~~	~~0101~~	1
~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~01~~	~~01~~	~~00~~	~~11~~	~~10~~	~~10~~	~~011~~	~~010~~	~~010~~	~~110~~	~~0110~~	~~0~~
~~0~~	~~1~~	~~1~~	1	~~01~~	~~01~~	~~01~~	~~11~~	~~11~~	~~11~~	~~011~~	~~011~~	~~011~~	~~111~~	~~0111~~	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~10~~	10	~~10~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~100~~	~~100~~	~~100~~	~~000~~	~~1000~~	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~	1	~~10~~	10	~~11~~	00	~~01~~	~~01~~	~~100~~	~~101~~	~~101~~	~~001~~	~~1001~~	1
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~10~~	~~11~~	~~10~~	01	~~00~~	~~10~~	~~101~~	~~100~~	~~110~~	~~010~~	~~1010~~	1
~~1~~	~~0~~	~~1~~	1	~~10~~	~~11~~	~~11~~	01	~~01~~	~~11~~	~~101~~	~~101~~	~~111~~	~~011~~	~~1011~~	1
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~11~~	10	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~00~~	~~110~~	~~110~~	~~100~~	~~100~~	~~1100~~	1
~~1~~	~~1~~	~~0~~	1	~~11~~	10	~~11~~	~~10~~	~~11~~	~~01~~	~~110~~	~~111~~	~~101~~	~~101~~	~~1101~~	1
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~11~~	~~11~~	~~10~~	~~11~~	~~10~~	~~10~~	~~111~~	~~110~~	~~110~~	~~110~~	~~1110~~	~~0~~
~~1~~	~~1~~	~~1~~	1	~~11~~	~~11~~	~~11~~	~~11~~	~~11~~	~~11~~	~~111~~	~~111~~	~~111~~	~~111~~	~~1111~~	1

В ядро функції входять ті терми, без яких неможливо покрити хоча б одну імпліканту.
Ядро = {X01X; 1X0X; XXX1}
В МДНФ входять всі терми ядра, а також ті терми, що забезпечують покриття всієї функції з мінімальною ціною.
$f_{4МНДФ} = (\overline{X3}X2) \vee (X4\overline{X2}) \vee (X1)$

Метод діаграм Вейча

Метод діаграм Вейча – це графічний метод, призначений для ручної мінімізації. Його наочність зберігається за невеликої кількості аргументів.
Кожна клітинка відповідає конституанті. Кожний прямокутник, що містить 2^{*} елементів, відповідає імпліканті. Прямокутник максимального розміру відповідає простій імпліканті (рисунок 4.5).