

Задача типа 1

Определить основные характеристики стационарного информационного потока с заданным распределением по некоторым известным параметрам распределения:

Характеристики	Равномерный	Экспоненц. Пуассона	Эрланга	Гиперэкспоненц.	Вырожденный
Mt	$\frac{b}{2}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{k}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	a
Dt	$\frac{b^2}{12}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{k}{\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} \left(1 + \frac{(1-2\wp)^2}{2\wp(1-\wp)} \right)$	0
$\lambda = \frac{1}{Mt}$	$\frac{2}{b}$	α	$\frac{\alpha}{k}$	α	$\frac{1}{a}$
$g = \frac{Dt}{Mt^2}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{k}$	$1 + \frac{(1-2\wp)^2}{2\wp(1-\wp)}$ $\wp_{1,2} = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2g+2}}$	0

Выпишем формулы

$$M_t = \int_0^{\infty} t f(t) dt$$

$$D_t = \int_0^{\infty} (t - M_t)^2 f(t) dt$$

$$\lambda = \frac{1}{M_t} \quad g = \frac{D_t}{M_t^2}$$

Пример.

Поток Эрланга пятого порядка с $Mt = 0.01$ с.

1) $Mt = 0.01$ [с]

2) $\lambda = 1/Mt = 100$ [1/с]

$$\lambda = \alpha/k \quad (k=5) \Rightarrow \alpha = 5 \cdot 100 = 500 \text{ [1/с]}$$

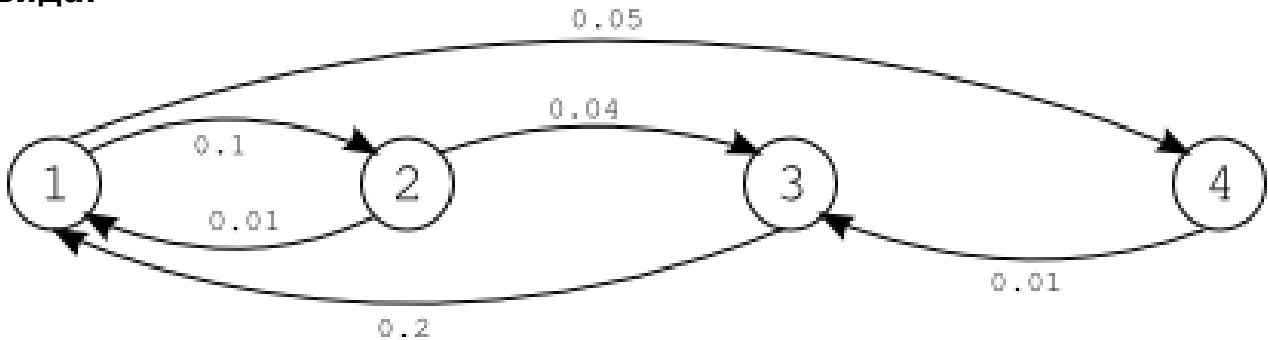
3) $Dt = \frac{k}{\alpha^2} = 5/250000 = 1/50000$

4) $g = 1/k = 1/5$ (данную формулу нужно вывести)

$$g = \frac{D_t}{M_t^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{100}\right)^2} = \frac{10000}{50000} = \frac{1}{5}$$

Задача типа 2

Определить основные характеристики однородной марковской цепи, заданной отмеченным графом-диаграммой следующего вида:



Доопределим граф, приняв за условие, что $\sum_j P_j = 1$ где j — номер выходной дуги.

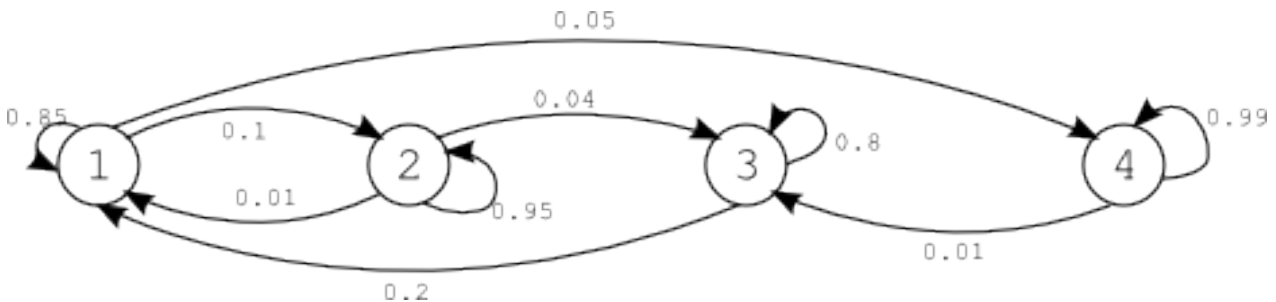
$$P_{11} = 1 - P_{12} - P_{14} = 1 - 0.05 - 0.1 = 0.85$$

$$P_{22} = 1 - P_{21} - P_{23} = 1 - 0.01 - 0.04 = 0.95$$

$$P_{33} = 1 - P_{31} = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P_{44} = 1 - P_{43} = 1 - 0.01 = 0.99$$

В результате получим:



Запишем систему уравнений для определения вероятности нахождения системы в определенном состоянии:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

$$P_1 = 0.85 \cdot P_1 + 0.01 \cdot P_2 + 0.2 \cdot P_3$$

$$P_2 = 0.95 \cdot P_2 + 0.1 \cdot P_1$$

$$P_3 = 0.8 \cdot P_3 + 0.04 \cdot P_2 + 0.01 \cdot P_4$$

--- вычеркиваем

$$P_4 = 0.99 \cdot P_4 + 0.05 \cdot P_1$$

Выразим все через P_1

$$P_1 + 2 \cdot P_1 + (13/20) \cdot P_1 + 5 \cdot P_1 = 1$$

$$P_2 = 2 \cdot P_1$$

$$P_3 = P_1 \cdot (13/20)$$

$$P_4 = 5 \cdot P_1$$

Тогда:

$$P_1 = 20/173$$

$$P_2 = 2 \cdot P_1 = 40/173$$

$$P_3 = (13/20) \cdot P_1 = 13/173$$

$$P_4 = 5 \cdot P_1 = 100/173$$

Проверка:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 20/173 + 40/173 + 13/173 + 100/173 = 1$$

Задача типа 3

Определить основные характеристики марковской и полумарковской моделей FIFO-системы по заданным параметрам входного и выходного информационного потоков:

4 основных характеристики СМО (Формулы для FIFO):

Марковская	Полумарковская
$N_s = \frac{\rho}{1-\rho}$	$N_s = \rho + \frac{\rho^2(1+g)}{2(1-\rho)}$
$D_n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$	Не нужно, тк лишком сложные вычисления
$T_s = \frac{1}{\lambda} N_s$	$T_s = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho(1+g)}{2\mu(1-\rho)}$
$T_w(\hat{t}_s) = \hat{t}_s + T_Q$	

Вспомогательные формулы

$$T_Q = \frac{1}{\mu} N_s \quad T_w\left(\hat{t}_s = \frac{1}{\mu}\right) = T_s \quad T_{ex}^{cp} = \frac{1}{\lambda} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad \mu = \frac{1}{T_{обс}^{cp}}$$

Пример.

Условие:

Марковская модель

$$\lambda = 20 \text{ соб./с}$$

$$tz = 0.18 \text{ с}$$

$$\rho = 0.9$$

Решение:

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{20}{0.9} = \frac{200}{9}$$

$$1) N_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.9}{1-0.9} = 9$$

$$2) D_n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{0.9}{(1-0.9)^2} = 90$$

$$3) T_s = \frac{1}{\lambda} N_s = \frac{1}{20} * 9 = \frac{9}{20}$$

$$4) T_Q = \frac{1}{\mu} N_s = \frac{9}{200} * 9 = \frac{81}{200}$$

$$T_w = \hat{t}_s + T_Q = \frac{9}{50} + \frac{81}{200} = \frac{36+81}{200} = \frac{117}{200}$$

Задача типа 4

Определить основные характеристики FIFO- и PS- систем и построить график зависимости $T_w(t_s)$ времени ответа систем на конкретное задание по заданным параметрам входного и выходного информационных потоков:

Формулы аналогичны в задаче типа 3.

Пример.

Условие:

Марковская модель

$$\lambda = 20 \text{ соб./с}$$

$$t_z = 0.18 \text{ с}$$

$$\rho = 0.9$$

Решение:

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{20}{0.9} = \frac{200}{9} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{9}{200}$$

$$1) N_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.9}{1-0.9} = 9$$

$$2) D_n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{0.9}{(1-0.9)^2} = 90$$

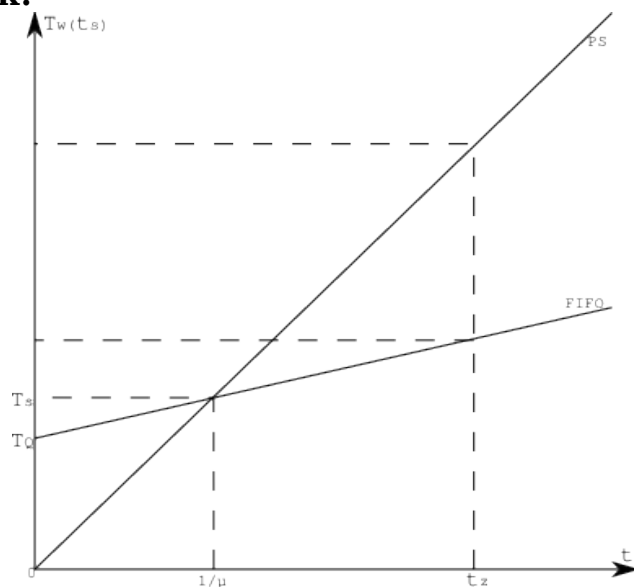
$$3) T_s = \frac{1}{\lambda} N_s = \frac{1}{20} * 9 = \frac{9}{20}$$

$$4) T_Q = \frac{1}{\mu} N_s = \frac{9}{200} * 9 = \frac{81}{200}$$

$$T_w^{FIFO}(\hat{t}_s) = \hat{t}_s + T_Q = \hat{t}_s + \frac{81}{200}$$

$$T_w^{PS} = \frac{\hat{t}_s}{1-\rho} = \frac{\hat{t}_s}{1-0.9} = 10 \hat{t}_s$$

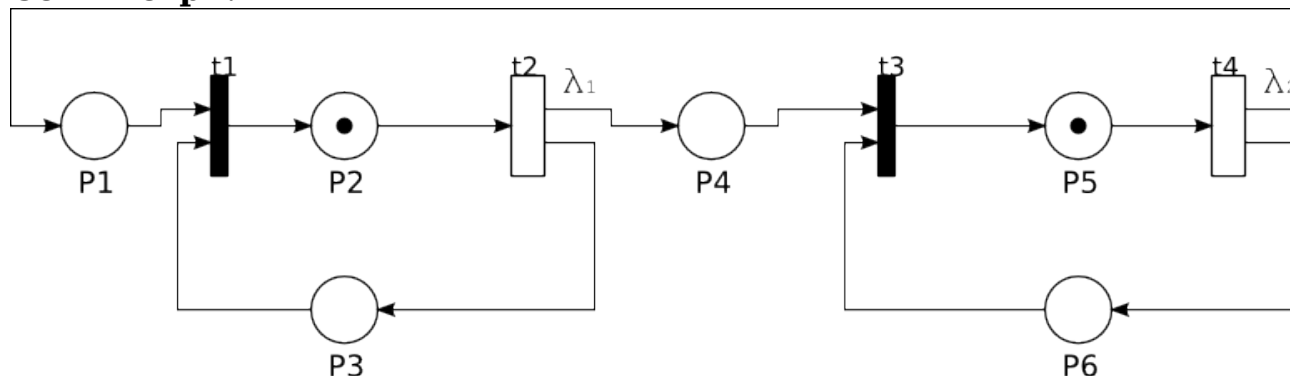
Построим график:



Задача типа 5

Для сети Петри, заданной графом следующего вида, построить дерево достижимости и определить конкретные формализованные свойства, которыми обладает данная сеть Петри.

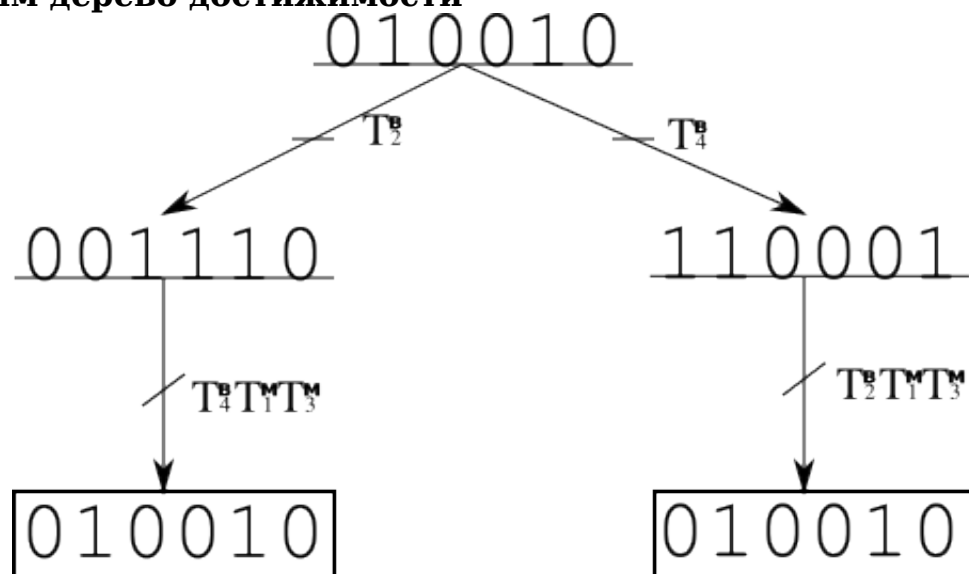
Сеть Петри:



Определим начальную маркировку сети

$M_0 = 010010$

Построим дерево достижимости



Определим основные свойства

1) Безопасность СП. Во всех достижимых маркировках все элементы вектора $M_i \leq 1$, следовательно сеть безопасна.

2) Ограниченность СП. Так как сеть безопасна и $M_i \leq 1$, то сеть также и ограничена и $N = 1$.

3) Строгая сохраняемость СП. Сеть Петри не строго-сохраняемая,

так как $\sum_{i=1}^n m_i^1 \neq \sum_{i=1}^n m_i^0$

4) Сохраняемость относительно вектора взвешивания. $W = (1, 2, 1, 1, 2, 1)$. Сеть Петри сохраняемая относительно вектора взвешивания W . $\sum_{i=1}^n \omega_i = 4$

5) Активность(пассивность) СП. Данная сеть Петри активна, так как не имеет терминальных маркировок.

6) Конфликтность СП. Данная сеть Петри не конфликтна, так как на протяжении работы сети не встречаются конфликты разрешенных переходов.

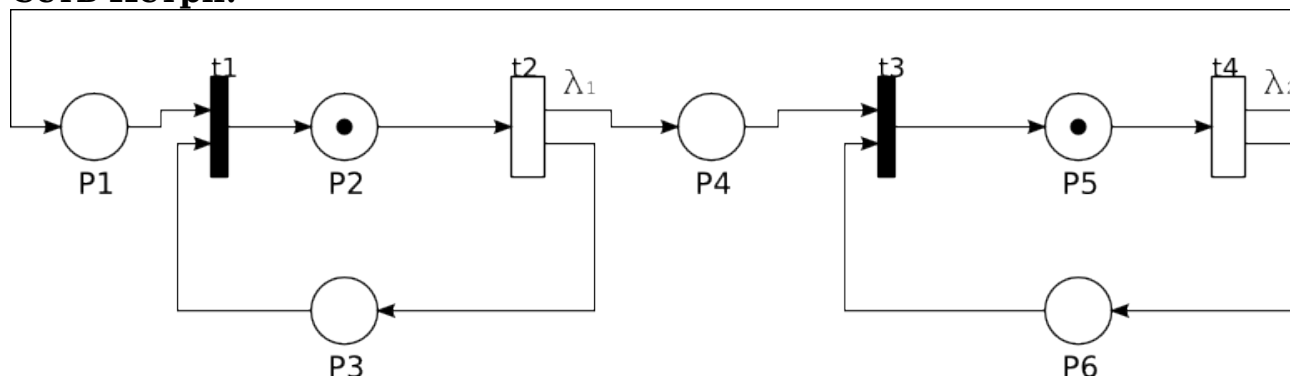
7) Достижимость в СП. Для определения достижимости определенной маркировки в СП необходимо задать эту маркировку.

8) Покрываемость в СП. Для определения покрываемости определенной маркировки в СП необходимо задать эту маркировку.

Задача типа 6

Для сети Петри, заданной графом следующего вида, построить дерево достижимости и определить структуру однородной марковской цепи, порождаемой в данной сети Петри при многократном выполнении заданий.

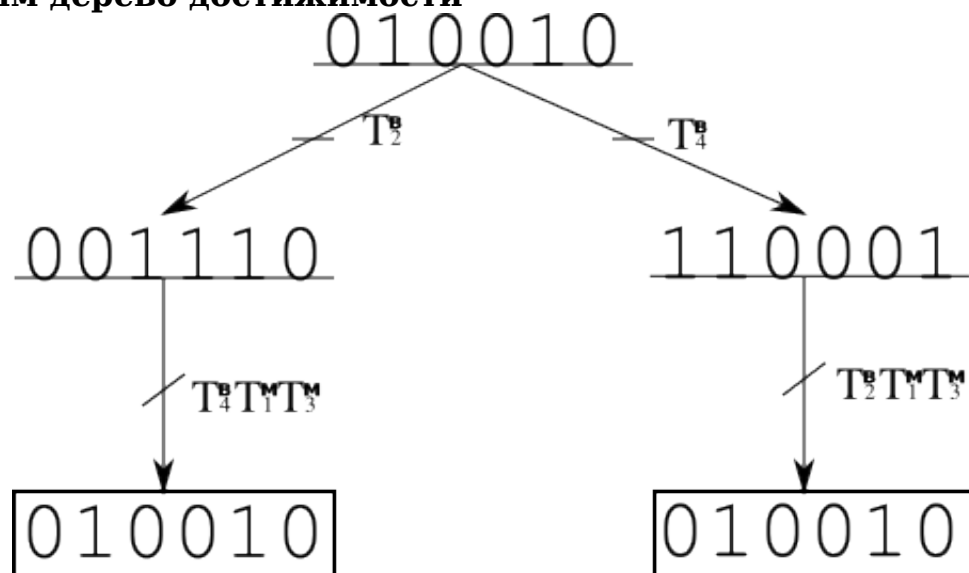
Сеть Петри:



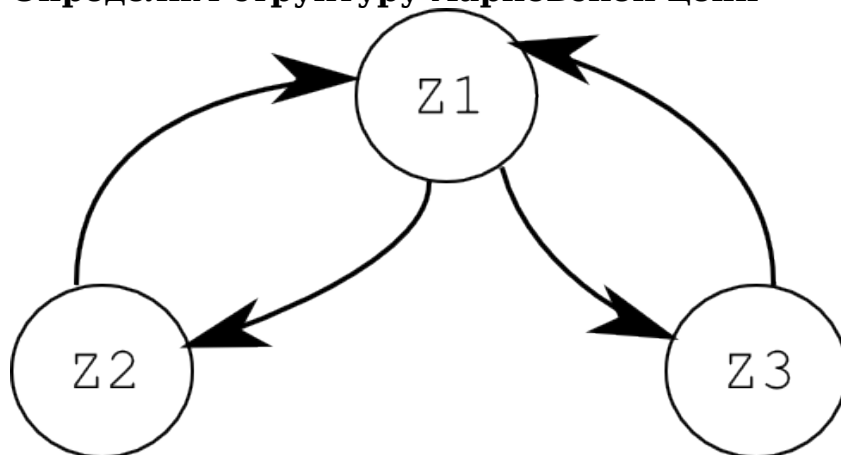
Определим начальную маркировку сети

$M_0 = 010010$

Построим дерево достижимости



Определим структуру марковской цепи



Z1 - 010010

Z2 - 001110

Z3 - 110001