

1. Числові ряди. Загальні поняття: означення числового ряду, частинної суми; збіжні та розбіжні числові ряди, необхідна ознака збіжності, наслідок. Геометричний та гармонічний ряд. Властивості збіжних числових рядів.

Означення. Нехай дана деяка нескінченна послідовність чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. Формально складений із цих чисел вираз

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

називається нескінченним рядом, а ці числа - членами ряду.

Замість нескінченного підсумовування, користуючись знаком суми, часто пишуть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Означення. N -ою частковою сумою ряду називається скінчена сума всіх членів ряду до n -ого члена включно, тобто сума

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Зокрема,

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots$$

Означення. Числовий ряд називається збіжним, якщо існує скінчена границя послідовності його часткових сум

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Число S в цьому випадку називають сумою ряду й пишуть $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i + \dots$

Якщо границя дорівнює нескінченності або не існує, то кажуть, що ряд розбігається.

Теорема 1.1 (необхідна ознака збіжності ряду). Якщо ряд $\sum a_n$ збігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

► Якщо S — сума заданого ряду, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n-1} + a_n) = S; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S.$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0. \blacktriangleleft$$

Наслідок (достатня умова розбіжності ряду). Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum a_n$ розбігається.

Геометричний ряд

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad a \neq 0,$$

$\{aq^{n-1}\}$ — геометрична прогресія.

Часткова сума геометричного ряду

$$S_n = \begin{cases} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases}$$

Гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

③ геометричний ряд	$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} - \begin{cases} \text{збіжний,} & q < 1, \\ \text{розбіжний,} & q \geq 1 \end{cases}$
④ гармонічний ряд	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{розбіжний}$

Властивість 1. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ й $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються, то збігається й ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, причому для їхніх сум виконане

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A + B$$

Властивість 2. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то збігається й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$,

причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Властивість 3. Переставляння, відкидання або приєднання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність (розбіжність).

2. Додатні числові ряди. Ознаки порівняння, наслідок. Ознаки Даламбера та Коші збіжності числових рядів. Наслідки. Обчислення границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$

Означення 4. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається додатним, якщо $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.2 (ознака порівняння у формі нерівності). Нехай задано ряди $\sum a_n$ та $\sum b_n$ з невід'ємними членами і для всіх n виконано нерівність

$$0 \leq a_n \leq b_n.$$

Тоді:

- 1) зі збіжності ряду $\sum b_n$ випливає збіжність ряду $\sum a_n$;
- 2) з розбіжності ряду $\sum a_n$ випливає розбіжність ряду $\sum b_n$.

Теорема 2.3 (гранична ознака порівняння). Нехай задано два ряди $\sum a_n$ та $\sum b_n$ з додатними членами. Якщо існує скінченна, відмінна від нуля,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \notin \{0, \infty\},$$

то ряди $\sum a_n$ та $\sum b_n$ одночасно збігаються або одночасно розбігаються.

Зауваження. Для порівняння зручно використовувати "еталонні ряди". Наприклад, можна використати ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^{n-1}$, який збігається, при $|q| < 1$ і розбігається, при $|q| \geq 1$.

Ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ називається рядом Діріхле (або узагальненим гармонічним рядом). Цей ряд збігається, якщо $p > 1$, і розбігається, якщо $p \leq 1$.

Теорема 3. [Ознака Даламбера.] Нехай задано додатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n > 0$. Якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при $l < 1$ ряд збігається, при $l > 1$ ряд розбігається.

Зауваження. Якщо $l = 1$, то необхідно проводити додаткові дослідження. Наприклад, можна спробувати застосувати ознаку порівняння.

Теорема 4. [Радикальна ознака Коші.] Нехай задано додатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \geq 0$. Якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то при $l < 1$ ряд збігається, при $l > 1$ ряд розбігається.

Зауваження. 1) При $l = 1$ потрібні додаткові дослідження. 2) При дослідженні на збіжність за допомогою радикальної ознаки Коші інколи виникає потреба у використанні відомої границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

Покладемо $N > a^2$ and $n > 2N$

Потім $a^n / n! = (a^2)^{n/2} / n!$

і $n! > \{ N \leq k \leq n \} k > N^{(n/2)}$.

тому $a^n / n! < (a^2 / N)^{(n/2)} \rightarrow 0$

3. Інтегральна ознака збіжності додатного числового ряду. Збіжність узагальненого гармонічного ряду.

Теорема 5. [Інтегральна ознака Коші-Маклорена.] Нехай задано додатний числовий ряд: $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ та для деякого фіксованого $k \in \mathbb{N}$ існує функція $f(x)$, визначена при $x \in [k; \infty)$, яка задовольняє умови:

- 1) $f(x) > 0$ при $x \in [k; \infty)$;
- 2) $f(x)$ неперервна при $x \in [k; \infty)$;
- 3) $f(x)$ монотонно спадає при $x \in [k; \infty)$;
- 4) $f(n) = u_n$ для $k \leq n \in \mathbb{N}$.

Якщо невласний інтеграл $\int_k^{\infty} f(x)dx$ збігається, то заданий ряд збігається. Якщо ж цей невласний інтеграл розбігається, то і заданий ряд розбігається.

Наслідок 1. Похибка $R_n = S - S_n$ після замінювання суми збіжного ряду $\sum a_n$, його частковою сумою S_n не перевищує $\int_n^{+\infty} f(x)dx$.

$$0 < R_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx$$

Наслідок 2. *Узагальнений гармонічний* ряд Діріхле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \text{збігається,} & \alpha > 1, \\ \text{розбігається,} & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Зауваження. Для порівняння зручно використовувати "еталонні ряди". Наприклад,

Ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ називається рядом Діріхле (або узагальненим гармонічним рядом). Цей ряд збігається, якщо $p > 1$, і розбігається, якщо $p \leq 1$