ЛЕКЦІЯ 7

КОМБІНАТОРИКА

КОМБІНАТОРИКА

Вступ в комбінаторику

Термін «***комбінаторика***» походить від латинського слова «combina», що в перекладі українською означає – «поєднувати», «з'єднувати».

Термін «***комбінаторика***» був застосований у математиці вперше Лейбницем, який в 1666 році опублікував свою працю «Міркування про комбінаторне мистецтво».

Готфрид Вільгельм фон Лейбниц

німецький філософ, математик, юрист, дипломат

Комбінаторика сьогодні

Комбінаторика або комбінаторний аналіз або комбінаторна математика — це галузь математики, яка вивчає **способи побудови підмножин** деякої скінченної множини, причому таких, які відповідають заданим обмеженням.

Згадані підмножини часто називають **комбінаторними конфігураціями** або **вибірками**.

Комбінаторні методи лежать в основі розв'язку багатьох задач теорії ймовірностей і її додатків.

Комбінаторика вивчає такі види задач:

1. Підрахунок числа комбінаторних конфігурацій.

2. Знаходження умов існування комбінаторної конфігурації.

3. Розробка алгоритмів побудови комбінаторних конфігурацій.

4. Розв'язок оптимізаційних задач (екстремальних комбінаторних задач).

Проблема підрахунку кількості комбінаторних конфігурацій часто використовується в програмних засобах. Такі задачі є предметом вивчення *рахункової комбінаторики.*

Основні поняття комбінаторики

У комбінаториці прийнято говорити про множину, вказуючи кількість її елементів. Наприклад, якщо є множина

$$A = \left\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\right\},$$

яка складається з n елементів, то в цьому випадку її називають n**-множиною *A*.**

Визначення підмножини

Нагадаємо, що множину B називають *підмножиною* множини A и позначають $B \subset A$, якщо всі елементи множини B є також елементами множини *A*.

Визначення мультимножини

Якщо множина C має кілька екземплярів одного і того самого елемента, то таку множину називають **мультимножиною**.

Вибірка

Вибіркою **називають довільну мультимножину**, елементи якої вибираються з елементів множини A, тобто таку множину, яка, у загальному випадку, **може містити кілька екземплярів одного і того самого елемента** множини A.

$\{a, b, c, e, f\}$ 5-множина A

$\{a,a,b,b\}$ $\{a,c,e,e\}$ $\{b,c,f,f\}$ Приклади 4-вибірок

Обсяг вибірки. Кількість елементів r у вибірці (таку вибірку називають також r-вибіркою) визначають як її ***обсяг***.

Інший зміст поняття «вибірка»

Поняття «вибірка» використовується також для позначення **самого процесу відбору** елементів підмножини з початкової множини.

Упорядкована вибірка

Вибірку називають *впорядкованою,* якщо порядок слідування елементів в ній заданий. Дві впорядковані вибірки, які різняться лише порядком проходження елементів, вважаються різними.

Визначення. Нехай $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ – множина з n елементів. Упорядкованою вибіркою обсягом r з $n-$множини A називають будь-яку впорядковану підмножину з r її елементів.

$$\{a,b,c,d\}$$

$$\{a,b,c\}\{b,a,c\}\{c,b,a\}\{b,c,a\}$$

Упорядковані 3-вибірки з 4-множини

Упорядковані вибірки відрізняються порядком слідування одних і тих самих елементів.

Неупорядкована вибірка

Якщо порядок слідування елементів не є істотним, то таку вибірку називають *неупорядкованою.*

$$\{a,b,c,d\}$$

$$\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}$$

Приклад неупорядкованої вибірки
3-вибірки з 4-множини

Неупорядковані вибірки відрізняються елементами, а не порядком їх слідування.

Вибірки з повтореннями й без повторень

Вибірки з повтореннями – це вибірки, які припускають повторення елементів

$$\{a,b,c,d\}$$

$$\{a,a,b\}\{b,b,c\}\{c,c,d\}\{d,d,a\}$$

Приклад 3-вибірок з повтореннями з 4-множини

Вибірки без повторень – це вибірки, які не допускають повторення елементів

$$\{a,b,c,d\}$$

$$\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{a,c,b\}\{a,c,d\}$$

Загальноприйняті назви вибірок

1. (n,k)-вибірка або розміщення

Набір елементів $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ з множини $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ називають вибіркою обсягом k з n елементів або, інакше, (n,k)-вибіркою.

2. Сполука (комбінація)

Вибірки, у яких не враховуються порядок запису елементів і які відрізняються між собою хоча б одним елементом, називають *сполуками або комбінаціями.*

3. Перестановка

Вибірки, у які складаються з одних і тих самих елементів і які відрізняються тільки порядком їх слідування, називають *перестановками.*

Основні правила комбінаторики

Розглянемо два основні правила, які використовують при розв'язуванні комбінаторних задач.

1. Правило суми

Якщо елементи множини A можна вибрати n способами, а елементи множини B можна вибрати m способами, то за умови, що $A \cap B = \varnothing$, загальне число вибірок становить $n + m$.

Приклад 1. *Квитки на концерт «Океану Ельзи» купили 15 студентів, а на лекції присутні 20 студентів. Скільки всього студентів у групі, якщо концерт та лекція відбуваються одночасно?*

Розв'язок. *Позначимо через* X *множину студентів, які були присутні на лекції, а через* Y *- множину студентів, які відвідали концерт. Оскільки* $n = \left|X\right| = 20$, $m = \left|Y\right| = 15$ *і* $X \cap Y = \varnothing$, *то за правилом суми:* $m + n = 20 + 15 = 35$

2. Правило добутку

Кількість способів вибору елементів множини $A \times B$ дорівнює $n \cdot m$.

Приклад. *Космонавт, що працює на орбітальній станції, може зв'язатися із центром керування двома способами: за допомогою **радіозв'язку** і передачі повідомлення **космічним човником.***

*У той же час працівники центру керування польотом можуть подзвонити рідним космонавта **по провідному телефону, по мобільному телефону, послати їм лист поштою, послати електронний лист, подзвонити по Skype, послати sms, подзвонити по Viber.***

Скількома способами може потрапити інформація від космонавта його рідним?

Розв'язок. $|m| = 2,\ |n| = 7$

Використовуючи правило множення, одержуємо $m \cdot n = 2 \cdot 7 = 14$.

3.Правило включень і виключень

Для двох множин

Нехай A і B - скінченні множини. Визначимо, чому дорівнює потужність $|A \cup B|$ якщо відомі потужності $|A|$ і $|B|$.

Дотримуючись визначення операції об'єднання:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Пояснення. Сума $|A| + |B|$ включає всі елементи множини A й множини B. При цьому, загальні елементи множин A і B, а їх буде $|A \cap B|$, включаються в суму двічі. Тому для одержання суми об’єднання необхідно відняти один набір спільних елементів

Тому $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Для трьох множин

$$|A\cup B\cup C| = |A\cup(B\cup C)| = |A| + |B\cup C| - |A\cap(B\cup C)| =$$

Застосували правило включень і виключень для множин A і $(B\cup C)$

$$= |A| + |B| + |C| - |B\cap C| - |A\cap(B\cup C)| =$$

Застосували правило включень і виключень для множин $(B\cup C)$

$$= |A| + |B| + |C| - |B\cap C| - |(A\cap B)\cup(A\cap C)| =$$

Застосували дистрибутивний закон

$$= |A| + |B| + |C| - |B\cap C| - \left(|A\cap B| + |A\cap C| - |(A\cap B)\cap(A\cap C)|\right) =$$

Правило включень і виключень для множин $(A\cap B)$ і $(A\cap C)$

$$= |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

Розкрили дужки

Правило включень і виключень

Для n множин.

Нехай $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ *- деякі множини.*

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| - \sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i \cap A_j\right| +$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \ldots + (-1)^{n-1}\sum_{1\le i<j<k<\ldots<l\le n}\left|A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_l\right|$$

Правило підрахунку за даною формулою полягає в послідовному виконанні **операцій додавання і віднімання**, які чергуються між собою.

Звідси випливає назва: **правило включень і виключень.**

Приклад. Обчислення за правилом включень і виключень

Нехай дані множини

$$A=\{1,2,3,4,9\},\ B=\{3,4,5,6,9\} \text{ і } C=\{5,6,7,8,9\}.$$

Обчислити 1) $|A \cup B|$ 2) $|B \cup C|$ 3) $|A \cup C|$ 4) $|A \cup B \cup C|$.

Розв'язок. $A \cup B \cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

1) $A \cap B=\{3,4,9\},\ |A \cap B|=3.$

Тому $|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|=5+5-3=7$

2) $B \cap C=\{5,6,9\},\ |B \cap C|=3.$

Тому $|B \cup C|=|B|+|C|-|B \cap C|=5+5-3=7$

3) $A \cap C=,\ |A \cap C|=1.$

Тому $|A \cup C|=|A|+|C|=5+5-1=9$

4) $(A \cap B \cap C)=\{9\},\quad |A \cap B \cap C|=1$

$$|A \cup B \cup C|=|A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|+|A \cap B \cap C|=$$

$$|A \cup B \cup C|=5+5+5-3-1-3+1=9$$

Розміщення з повтореннями (з поверненнями)

Упорядковану (n,k)-вибірку, у якій елементи можуть повторюватися, називають (n,k)-розміщенням з повтореннями.

Іншими словами, розміщеннями з повтореннями з n елементів по k називають упорядковані вибірки довжини k, складені з n елементів множини X.

Кількість розміщень з повтореннями з n елементів по k дорівнює кількості елементів декартового добутку X^k n-елементної множини, позначають $\widehat{A}_n^k$ і обчислюють в такий спосіб:

$$\widehat{A}_n^k = n^k$$

Приклад. Нехай дано алфавіт із трьох букв $X=\{a,b,c\}$. Тоді всі розміщення з повтореннями з цих трьох букв по два $\widehat{A}_3^2 = 3^2$ утворюють підмножини:

$$X\times X=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)\}$$

Приклад. *У нашім розпорядженні є склад з комп'ютерами чотирьох типів: 1,2,3,4. Поставлена задача комп'ютеризувати 3 лабораторії, шляхом передачі їм по одному комп'ютеру довільного типу.*

Скількома способами можна виконати цю задачу?

Розв’язок. *Кожний спосіб оснащення – це вибірка з повтореннями*$(4,3)$*, тобто* $\widehat{A}_4^3 = 4^3 = 64$

Приведемо всі можливі способи оснащення кожної із трьох лабораторій одним із чотирьох типів комп'ютерів:

$$\{1,1,1\},\{1,1,2\},\{1,1,3\},\{1,1,4\},\{1,2,1\},\{1,2,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\}$$

$$\{1,3,1\},\{1,3,2\},\{1,3,3\},\{1,3,4\},\{1,4,1\},\{1,4,2\},\{1,4,3\},\{1,4,4\},$$

$$\{2,1,1\},\{2,1,2\},\{2,1,3\},\{2,1,4\},\{2,2,1\},\{2,2,2\},\{2,2,3\},\{2,2,4\},$$

$$\{2,3,1\},\{2,3,2\},\{2,3,4\},\{2,3,4\},\{2,4,1\},\{2,4,2\},\{2,4,3\},\{2,4,4\},$$

$$\{3,1,1\},\{3,1,2\},\{3,1,3\},\{3,1,4\},\{3,2,1\},\{3,2,2\},\{3,2,3\},\{3,2,4\},$$

$$\{3,3,1\},\{3,3,2\},\{3,3,3\},\{3,3,4\},\{3,4,1\},\{3,4,2\},\{3,4,3\},\{3,4,4\},$$

$$\{4,1,1\},\{4,1,2\},\{4,1,3\},\{4,1,4\},\{4,2,1\},\{4,2,2\},\{4,2,3\},\{4,2,4\},$$

$$\{4,3,1\},\{4,3,2\},\{4,3,3\},\{4,3,4\},\{4,4,1\},\{4,4,2\},\{4,4,3\},\{4,4,4\}$$

Розміщення формуються послідовним рахунком в системі числення з основою 4.

Розміщення без повторень (без повернень)

У ряді задач необхідно визначити число вибірок довжини k з n елементів даної множини без повторення елементів.

Якщо елементи впорядкованої $\left(n,k\right)$*-вибірки попарно різні, то їх називають* $\left(n,k\right)$-розміщенням без повторень *або просто* $\left(n,k\right)$-розміщенням.

Кількість таких розміщень без повторень позначається A_n^k **.**

Вивід формули визначення кількості розміщень без повторень (без повернень)

Кожне (n,k)*-розміщення без повтореннь є впорядкованою послідовністю довжини* k*, елементи якої попарно різні і вибираються із множини з* n *елементами.*

Тоді **перший елемент** цієї послідовності **може бути обраний** n **способами**, після кожного вибору першого елемента послідовності **другий елемент може бути обраний** $(n-1)$ **способами** і т.д., k**-й елемент вибирається** $n-(k-1)$ **способом**:

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)).$$

$$A_n^k = n \cdot \left(n-1\right) \cdot \left(n-2\right) \cdot \ldots \cdot \left(n - \left(k-1\right)\right).$$

Перетворимо цю формулу, помноживши та поділивши її на добуток чисел $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left(n-k\right)$:

$$A_n^k = \frac{n \cdot \left(n-1\right) \cdot \ldots \cdot \left(n - \left(n-k\right)\right) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(n-k\right)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left(n-k\right)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left(n-k\right) \cdot \left(n - \left(n-k\right)\right) \cdot \ldots \cdot \left(n-1\right) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left(n-k\right)} =$$

$$= \frac{n!}{\left(n-k\right)!}$$

Окремі випадки виразів для розміщень без повторень (без повернень):

1. При $k = 0$ одержуємо $A_n^0 = \dfrac{n!}{\left(n-0\right)!} = 1$.

2. При $k = n$ одержуємо $A_n^n = \dfrac{n!}{\left(n-n\right)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$

3. При $k > n$ A_n^k =0.

Приклад задачі на розміщення

Приклад.

Скількома способами можна розподілити 20 студентів на 5 комп'ютерів, за умови, що один студент може бути розподілений тільки на один комп'ютер?

Розв'язок.

Обчислимо розміщення без повторень, оскільки студент може бути розподілений тільки на один комп'ютер:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Для нашого випадку $n = 20, k = 5$: $A_{20}^5 = \frac{20!}{15!} = 1\,860\,480$

Перестановки без повторень

Розглянемо задачу упорядкування n-елементної множини A (формування впорядкованої вибірки довжини n, складеної з n-елементної множини). Отримані при цьому вибірки будуть відрізнятися лише порядком слідування елементів.

Такі вибірки називають *перестановками без повторень із n елементів.*

Число перестановок без повторень із n елементів позначається P_n. До перестановок без повторень можна прийти, вважаючи, що здійснюється розміщення без повторень із n елементів по n.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Нагадаємо, що $0! = 1$. Таким чином, перестановки без повторень – це окремий випадок розміщень без повторень (див. вище).

Приклади на перестановки без повторень

Приклад. Скільки існує послідовностей перевірки контрольних робіт трьох студентів?

$$P_3 = 3! = 6.$$

Ці послідовності мають вигляд:

$$\left(1,2,3\right),\left(2,3,1\right),\left(3,1,2\right),\left(2,1,3\right),\left(1,3,2\right),\left(3,2,1\right).$$

Приклад. Скільки існує можливих послідовностей відвідування туристом п'яти різних країн?

$P_n = n!$ При $n = 5$ одержуємо $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Перестановки з повтореннями

При визначенні **перестановок без повторень** ми розглядали ситуацію, коли у початковій n-множині A всі елементи унікальні.

Однак існують ситуації, коли *множина може містити деяку кількість однотипних елементів*.

Визначення. Число різних перестановок, які можна побудувати з n елементів, серед яких k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу,…, k_m елементів m-го типу, дорівнює:

$$P\left(k_1, k_2, \ldots, k_m\right) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Приклад для перестановок з повтореннями

Приклад. Скільки різних слів можна побудувати шляхом перестановки букв у слові «лаваш»?

Розв'язок. Слово «лаваш» включає по одному екземпляру букв «л», «в» і «ш», а також два екземпляри букви «а». Загальна кількість букв у слові дорівнює 5.

Використовуючи формулу $P\left(k_1, k_2, \ldots, k_m\right) = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$

одержимо $P(1,1,1,2) = \dfrac{5!}{1!1!1!2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Приклад. Скільки слів з 8 букв можна побудувати з букв «а» і «б» за умови, що кількість букв «а» у цих словах не повинне перевищувати 3?

Розв'язок. Зазначеним умовам будуть задовольняти слова, які

- не мають ні однієї букви «а», $P(0,8)$,
- мають одну букву «а», $P(1,7)$,
- мають дві букви «а», $P(2,6)$,
- мають три букви «а», $P(3,5)$.

Тоді загальна кількість слів рівно:

$$P(0,8)+P(1,7)+P(2,6)+P(3,5)=$$

$$=\frac{8!}{0!8!}+\frac{8!}{1!7!}+\frac{8!}{2!6!}+\frac{8!}{3!5!}=1+8+28+56=93$$

Сполуки (комбінації) без повторень

Сполуками без повторень з n елементів по k називають одмінні одна від одної хоча б одним елементом вибірки довжини k, складені з елементів n-множини.

Кількість сполук без повторень з n елементів по k, позначуване як C_n^k, визначають виходячи з числа розміщень без повторень A_n^k з урахуванням того, що різних неупорядкованих вибірок (підмножин вихідної множини) буде менше в число раз, яке дорівнює перестаноці без повторень з k елементів P_k:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}.$$

Приклад. Визначити кількість трьохелементних підмножин множини, яка складається з чотирьох елементів.

Розв'язок. Перераховуємо всі трьохелементні підмножини множини $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$:

$$\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_1, a_2, a_4\}$$

Їх кількість можна одержати, обчисливши кількість сполук з 4-х по 3.

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{24}{6} = 4$$

Приклад. Збірна команда університету по волейболу нараховує 15 людей. Скільки варіантів повинен розглянути тренер перед грою, щоб заявити список гравців на гру, за умови що в грі повинні брати участь тільки 6 гравців?

Розв'язок.

Число гравців волейбольної команди дорівнює 6. Виходить, число всіх можливих варіантів – це число різних підмножин, що складаються з шести елементів в множині з 15 елементів. Отже, використовуючи формулу

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

$$C_{15}^6 = \frac{15!}{6!(15-6)!} = \frac{15!}{6!9!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11 = 5005$$

Сполуки (комбінації) з повтореннями

Визначення. Якщо кожному елементу деякої скінченної множини поставлене у відповідність ціле ненегативне число — кратність даного елемента, то говорять, що задана ***сполука з повтореннями***.

Суму k кратностей усіх елементів називають порядком сполуки.

Сполуку з повтореннями k-го порядку, що складена з множини, яка містить n елементів, називають також комбінацією з повторенням з n елементів по k.

Якщо $k_1, k_2, ..., k_n$ — кратності елементів $a_1, a_2, ..., a_n$, то по визначенню $k_1 + k_2 + ... + k_n$ є порядок комбінації

$$\overbrace{a_1 a_1 a_1 \ldots a_1}^{k_1} \overbrace{a_2 a_2 a_2 \ldots a_2}^{k_2} \ldots \overbrace{a_n a_n a_n \ldots a_n}^{k_n}$$

Теорема. Кількість вибірок з повтореннями з n елементів по k виражають формулою

$$\widehat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{\left(n+k-1\right)!}{k!\left(n-1\right)!}$$

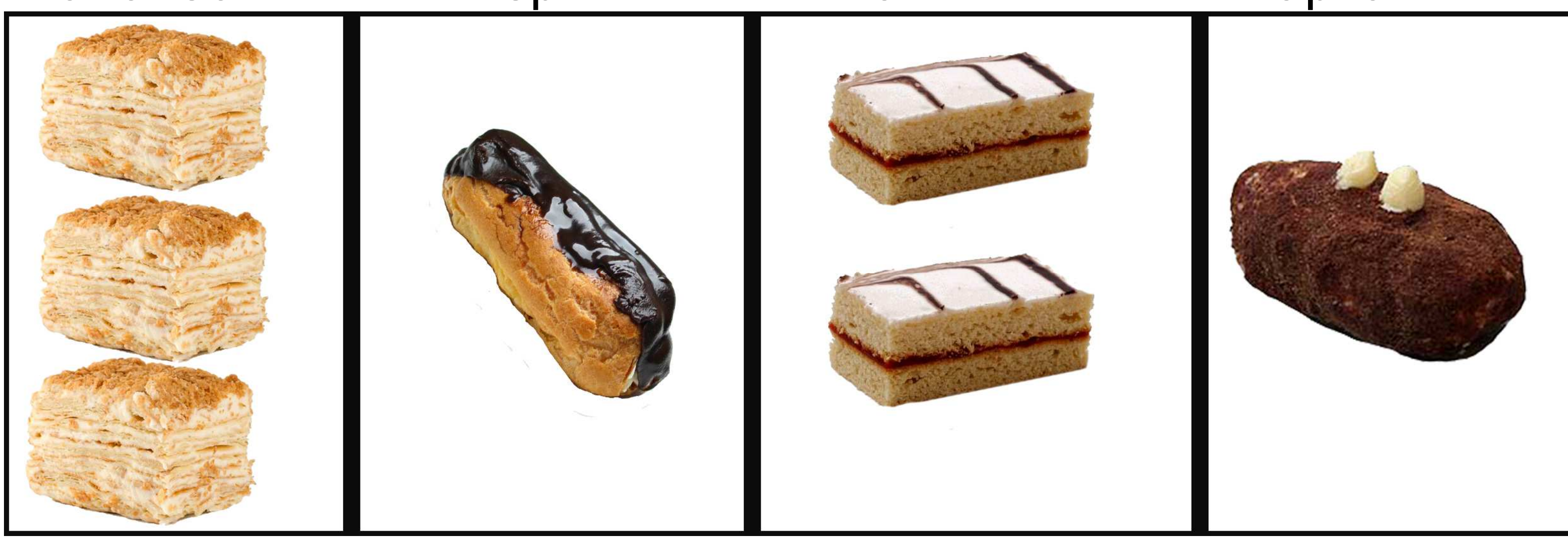
Позначимо сполуки з повтореннями з n елементів по k як $\widehat{C}_n^k$.

Приклад. У кондитерському магазині продавалися 4 сорти тістечок: наполеони, еклери, бісквітні і картопля. Скількома способами можна купити 7 тістечок?

Розв'язок. Покладемо тістечка в коробку, а щоб вони не переплуталися, розділимо їх картонними роздільниками. Потрібно 3 роздільника. Позначення: 0 (картонки-роздільники) і 1 — тістечка. Зразкова покупка: 1110101101 — три наполеона, 1 еклер, 2 бісквітних і 1 картопля.

Отже два класи об'єктів: клас 1-(7 штук) і клас 0-(3 штуки) — покупка — 10 об'єктів.

Наполеони Еклери Бісквітні Картоплі



111 0 1 0 11 0 1

Задача зводиться до вибору місць для 7 тістечок (або для 3 роздільників) серед 10 об'єктів.

Приклад. *Скількома способами 12 кульок можна розподілити по 3 урнах?*

Розв'язок.

Представимо, що три урни–це одна коробка із двома простінками. Тоді одержуємо два типи об'єктів:

Тип перший: кульки(12 штук)- кульку позначимо 1

Тип другої: простінки (2 штуки) – простінок позначимо 0.

Приклади розміщення:

11111011101111-$\{5,3,4\}$

10110111111111-$\{1,2,9\}$

11101110111111-$\{3,3,6\}$

$$\widehat{C}_n^k = \widehat{C}_{12}^3 = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(12+3-1)!}{3!(12-1)!} = \frac{14!}{3!11!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14}{6} = 364$$

Приклади для комбінацій з повтореннями

Приклад. Нехай дана множина $A = \{a, b, c, d\}$. Тоді підмножини комбінацій з повтореннями $\widehat{C}_4^2$ включають:

$$\{a,a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,b\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,c\},\{c,d\},\{d,d\}$$

Їхня кількість

$$\widehat{C}_n^k = \widehat{C}_4^2 = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(4+2-1)!}{2!(4-1)!} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

Розбиття множини на підмножини

Нехай дана n-множина A. Говорять, що множина A розбита на k підмножин A_i, де$\left(1,2,\ldots,k\right)$, якщо:

1. $A_i \neq \varnothing, \ \ i \in \left\{1,2,\ldots,k\right\}$;
2. $A_i \cap A_j = \varnothing, \ i,j \in \left\{1,2,\ldots,k\right\}$;
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = A$.

Позначимо число елементів у підмножині A_i через $n\left(A_i\right) = n_i$ Очевидно, що $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

Кількість розбиттів множини на підмножини позначимо

$$C\left(n;n_1,n_2,\ldots,n_k\right).$$

Визначимо кількість розбиттів

Кількість способів вибору елементів підмножини A_1, дорівнює кількості сполук $C_n^{n_1}$.

Кількість способів вибору елементів підмножини A_2 дорівнює кількості сполук $C_{n-n_1}^{n_2}$.

Кількість способів вибору цих двох підмножин дорівнює $C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2}$ і так далі.

Таким чином, кількість вибору всіх розбиттів дорівнює

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!\left(n-n_1\right)!} \cdot \frac{\left(n-1\right)!}{n_2!\left(n-n_1-n_2\right)!} \cdot \ldots \cdot \frac{\left(n-n_1-\ldots-n_{k-1}\right)!}{n_k!\left(n-n_1-\ldots-n_{k-1}\right)!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_{k!}}.$$

Порівняємо даний вираз з формулою для перестановок з повтореннями. Можна зробити висновок, що **явище розбиття множини на підмножини** й **перестановки з повтореннями** – це та сама комбінаторна дія з різною інтерпретацією.

Тотожності для сполук

Основна формула для кількості сполук

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

дозволяє одержати ряд простих тотожностей. Розглянемо деякі з них.

Теорема 1. $C_n^r = C_n^{n-r}$

Доведення. $C_n^{n-r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\big(n-(n-r)\big)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = C_n^r$.

Теорема 2. $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$.

Доведення.

$C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1} =$

$$= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!\big(n-1-(r-1)\big)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)(n-r-1)!} =$$

$$= \frac{(n-r)(n-1)! + r(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!} = \frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r$$

Теорема 3. $C_n^i C_i^r = C_n^r C_{n-r}^{i-r}$

Доведення.

$$C_n^i \cdot C_i^r =$$

$$= \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{i!}{r!(i-r)!} = \frac{n!}{r!(i-r)!(n-i)!} =$$

$$= \frac{n!(n-r)!}{r!(i-r)!(n-i)!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r!)}{(i-r)!(n-i)!} = C_n^r \cdot C_{n-r}^{i-r}$$

Теорема 5. Біном Ньютона: $\left(x+y\right)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r y^{n-r}$ **.**

Наслідок 1: $\sum_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n$**.**

Наслідок 2: $\sum_{r=0}^{n} \left(-1\right)^r C_n^r = 0$**.**

Теорема 6. $\sum_{r=0}^{n} r C_n^r = n 2^{n-1}$

Теорема 7. $C_{n+r}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i \cdot C_r^{k-i}$