Основні поняття і позначення

1. Функція-оригінал $f(t), \quad t \in (-\infty;+\infty)$ справджує умови:
   a. $f(t)=0,$ при $t<0$.
   b. Існують сталі $S \geq 0$ та $M \geq 0$ такі, що $|f(t)| < Me^{st}, \quad t>0$
   c. На будь-якому відрізку $[0;T]$ функція може мати лише скінченну кількість точок розриву I-го роду.
2. Зображення оригінала $f(t)$ функція $F(p)$ комплексної змінної $p=s+i\tau$

   $$F(p)=\int_p^{\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

3. Перехід від оригіналу до зображення називають перетворенням Лапласа і позначають двома символами:

   $$f(t) \to F(p), \quad f(t) \doteqdot F(p)$$

4. Функція Хевісайда

   $$\eta(t)=\begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

5. Згортка функцій

   $$f_1(t) * f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$$

6. Теорема Бореля

   $$f_1(t) * f_2(t) \doteqdot F_1(p) \cdot F_2(p)$$

7. Формула Дюамеля

   $$pF_1(p)F_2(p) \to f_1(t) f_2(0) + f_1(t) * f_2'(t)$$

8. Теорема запізнення оригінала

   $$\eta(t-a) f(t-a) \to e^{-pa} F(p), \; a>0$$

9. Друга теорема розвинення

   $$f(t)=\sum_{k=1}^{n} res(e^{p_k t} F(p_k)) \;,$$

   де $p_1, p_2, ..., p_k$ – особливі точки $F(p)$

Застосування операційного числення

I. Розв'язування задачі Коші для лінійних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами зі знаходженням зображення правої частини

За планом:

1. За допомогою перетворення Лапласа переводимо лінійне диференційне рівняння в алгебраїчне відносно зображення
2. Знаходимо з цього алгебраїчного рівняння зображення шуканого оригіналу (так званий операторний розв'язок)
3. За зображенням відтворюємо оригінал (відповідь)

Приклад 1

$y''+2y'+y = \sin t \qquad y(0)=0,\ y'(0) = -1$

$y(t) \to Y(p)$

$y'(t) \to pY(p) - y(0) = pY(p) - 0 = pY(p)$

$y''(t) \to p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p)+1$

$\sin t \to \dfrac{1}{p^2+1}$

маємо операторне рівняння

$p^2 Y(p)+1+2pY(p)+Y(p) = \dfrac{1}{p^2+1}$

$Y(p)(p^2+2p+1) = -1+\dfrac{1}{p^2+1}$

$Y(p) = -\dfrac{1}{(p+1)^2} + \dfrac{1}{(p+1)^2(p^2+1)}$ (операторний розв'язок)

Знайдемо оригінал:

а) $-\dfrac{1}{(p+1)^2} = \left(\dfrac{1}{p+1}\right)' \to -te^{-t}$

застосували теорему диференціювання оригіналу

$F'(p) \to -tf(t)$

У нас $F(p)=\dfrac{1}{p+1} \to e^{-t}$

б) відносно другого доданка застосуємо другу теорему розкладу

$$\frac{1}{(p+1)^2(p^2+1)} = \frac{1}{(p+1)^2(p+i)(p-i)}$$

P_1= -1 полюс II порядку

P_2= -i простий полюс

P_3= i простий полюс

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p^2+1)} = \underset{p=p_1}{res} F(p)e^{pt} + \underset{p=p_2}{res} F(p)e^{pt} + \underset{p=p_3}{res} F(p)e^{pt} =$$

$$= \lim_{p\to -1} \frac{1}{(2-1)!}\cdot\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}}{p^2+1}\right) + \lim_{p\to i}\frac{e^{pt}}{(p+1)^2(p+i)} + \lim_{p\to -i}\frac{e^{pt}}{(p+1)^2(p-i)} =$$

$$= \lim_{p\to -1}\frac{te^{pt}(p^2+1)-e^{pt}\cdot 2p}{(p^2+1)^2} + \frac{e^{it}}{2i(i+1)^2} + \frac{e^{-it}}{-2i(-i+1)^2} = \frac{te^{-t}2+2e^{-t}}{4} + \frac{e^{it}}{2i\cdot 2i} + \frac{e^{-it}}{-2i(-2i)} =$$

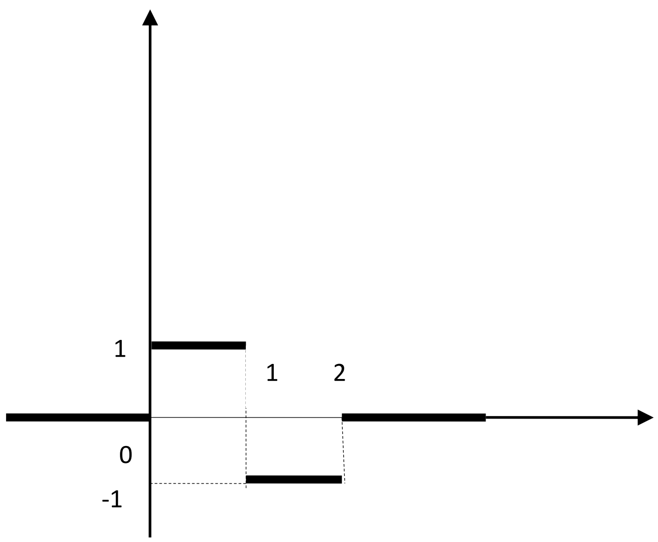
$$= \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t$$

тому розв'язком лінійного диферційного рівняння є функція:

$$y(t) = -te^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t = \frac{1}{2}(e^{-t} - te^{-t} - \cos t)$$

Приклад 2

y''(t) + y(t)= f(t),   де f(t) задана графічно, y(0)=y'(0)=0



Розв'язання

$y(t) \to Y(p)$

$y''(t) \to p^2Y(p)-py(o)-y'(0)=p^2Y(p)$

$f(t)=\eta(t) - \eta(t-1)-\eta(t-1)+\eta(t-2)=$

$=\eta(t)-2\eta(t-1)+\eta(t-2) \to \frac{1}{p} - \frac{2}{p}e^{-p} + \frac{1}{p}e^{-2p}$

Маємо операторне рівняння

$P^2Y(p)+Y(p)=\frac{1}{p} - \frac{2}{p}e^{-p} + \frac{1}{p}e^{-2p}$

$Y(p)=\frac{1}{p(p^2+1)} - \frac{2e^{-p}}{p(p^2+1)} + \frac{1}{p(p^2+1)}e^{-2p}$

це розв'язок в операторному вигляді,

знайдемо оригінал:

а) $F(p) = \frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{A}{P} + \frac{Mp+N}{p^2+1} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} \to$

$\to \eta(t)-\cos t\cdot\eta(t) = (1-\cos t)\eta(t)=2\sin^2\frac{t}{2}\eta(t)$

б) наявність множника e^{-pa} вказує на можливість застосування теореми загаювання (русский термин - запаздывания):

$e^{-pa}F(p) \to f(t-a)\cdot\eta(t-a)$

тому

$\frac{2}{p(p^2+1)}e^{-p} \to 4\sin^2\frac{t-1}{2}\cdot\eta(t-1)$

$\frac{1}{p(p^2+1)}e^{-2p} \to 2\sin^2\frac{t-2}{2}\cdot\eta(t-2)$

Відповідь:

$y(t) = 2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\eta(t) - 4\sin^2\frac{t-1}{2}\cdot\eta(t-1) + 2\sin^2\frac{t-2}{2}\cdot\eta(t-2)$

Зауваження: функція y(t) буде задовольняти рівняння в усіх точках, де вона неперервна.

II. Розв'язування задачі Коші без знаходження зображення правої частини

<u>Приклад 3</u>

$y''(t) = \frac{1}{1+t^2}$ $y(0)=y'(0)=0$

<u>Розв'язання</u>

Нехай $\frac{1}{1+t^2} \to F(p)$ (де F(p) -деяке невідоме зображення)

Тоді операторне рівняння має вигляд:

$p^2 Y(p)=F(p)$

$Y(p)=\frac{1}{p^2}F(p)$ – операторний розв'язок

Операторний розв'язок отримали у вигляді добутку двох зображень, за теоремою Бореля маємо:

$G(p)\cdot F(p) \to g(t)*f(t)$

У нас $G(p)= \frac{1}{p^2} \to t$, $F(p) \to \frac{1}{1+t^2}$, тому

$Y(p)=\frac{1}{p^2}\cdot F(p)=G(p)\cdot F(p)\to g(t)*f(t)=$

$$=\int_0^t g(t-\tau)\,f(\tau)d\tau = t*\frac{1}{1+t^2} = \int_0^t (t-\tau)\cdot \frac{1}{1+\tau^2}d\tau = t\int_o^t \frac{d\tau}{1+\tau^2}-$$

$$-\int_0^t \frac{\tau d\tau}{1+\tau^2} = t\,arctg\,\tau \,/_0^t - \frac{1}{2}\ln(1+\tau^2)\,/_0^t = t\,arctg\,t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) = y(t)$$

Відповідь: $y(t)=arctg\,t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$

<u>Зауваження</u>

1. Вимога задання початкових умов в точці t = 0 не є істотною, так як лінійною заміною змінної $y = \tau + t_0$ (τ -нова змінна) задача Коші при $t = t_0 \neq 0$ зводиться до задачі Коші з початковими умовами в точці $\tau = 0$.

2. Аналогічно, заміною шуканої функції задачу з ненульовими початковими умовами можна звести до задачі з нульовими початковими умовами.

Наприклад, якщо початкові умови $y(0)=y_0$ $y'(0)=y_1$

то при заміні функції y(t) на z(t), де $z(t) = y(t) - y_0 - y_1 t$

отримаємо: $z(0) = 0$

$z'(0) = y'(t) - y_1 /_{t=0} = 0$

3. Якщо початкові умови y_0, y_1, y_2, y_{n-1} вважати не заданими, а довільними сталими, то y(t) буде не розв'язком задачі Коші, а загальним розв'язком диференційного рівняння.

III.<u>Розв'язуння систем лінійних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.</u>

Системи лінійних диференційних рівнянь розв'язуються аналогічно, відмінність полягає в тому, що отримуємо систему операторних рівнянь.

<u>Приклад 4</u>

$$\begin{cases} x'=x+3y \\ y'=x-y \end{cases} \qquad \begin{matrix} x=x(t) \\ y=y(t) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \text{Початкові умови:} \\ x(0)=1, \quad y(0)=0 \end{matrix}$$

<u>Розв'язання</u>

$x(t) \to X(p) \qquad x'(t) \to pX(p)-x(0)=pX(p)-1$

$y(t) \to Y(p) \qquad y'(t) \to pY(p)-y(0)=pY(p)$

Система операторних рівнянь:

$$\begin{cases} pX(p)-1=X(p)+3Y(p) \\ pY(p)=X(p)-Y(p) \end{cases}$$

перепишемо систему:

$$\begin{cases} (p-1)X-3Y=1 & X=\dfrac{\Delta x}{\Delta} \\ X-(p+1)Y=0 & Y=\dfrac{\Delta y}{\Delta} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -3 \\ 1 & -(p+1) \end{vmatrix} = -(p^2-1)+3 = -(p^2-4)$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -(p+1) \end{vmatrix} = -(p+1)$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} p-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$X=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{p+1}{p^2-4}=\frac{p}{p^2-4}+\frac{1}{p^2-4}\rightarrow ch2t+\frac{1}{2}sh2t$

$Y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{1}{p^2-4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2-4}\rightarrow \frac{1}{2}sh2t$

Відповідь: $\begin{cases} x(t)=ch2t+\frac{1}{2}sh2t \\ y(t)=\frac{1}{2}sh2t \end{cases}$

IV. Розв'язування інтегральних рівнянь Вольтера I та II роду

Інтегральним рівнянням називається рівняння, що містить шукану функцію під знаком інтеграла.

Розглянемо найпростіші інтегральні рівняння Вольтера типу згортки

I роду: $\int_0^t k(t-\tau)y(\tau)d\tau = f(t)$

II роду: $y(t)+\int_0^t k(t-\tau)y(\tau)d\tau = f(t)$

де y(t) – шукана функція

f(t) – відома функція

k(t–τ) – відома функція, яка називається ядром і залежить від різниці аргументів.

Якщо функції k(t-), f(t) є функціями - оригіналами, то за допомогою операційного числення можна знайти розв'язок інтегрального рівняння.

Нехай $y(t)\rightarrow Y(p)$

$f(t)\rightarrow F(p)$

$k(t-\tau)\rightarrow K(p)$

тоді в операторній формі перше рівняння має вигляд

$K(p)\cdot Y(p) = F(p)$

$Y(p) = \frac{F(p)}{K(p)}\rightarrow y(t)$

Друге рівняння: $Y(p)+K(p)\cdot Y(p) = F(p)$

$$Y(p)=\frac{F(p)}{1+K(p)}\to y(t)$$

В обох випадках скористалися теоремою Бореля про зображення згортки двох функцій.

Приклад 5

$y(x) = \sin x+\int_0^x (x-t)y(t)dt$ інтегральне рівняння II роду

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p^2}\cdot Y(p)$$

$$Y(p) =\frac{p^2}{(p^2+1)(p^2-1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{p^2-1}+\frac{1}{p^2+1})\to\frac{1}{2}(shx+\sin x), x>0$$

Відповідь: $y(x)= \frac{1}{2}(shx+\sin x), x>0$

Приклад 6

$\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau=\sin t$ інтегральне рівняння I роду

cost*y(t) = sint

$$\frac{p}{p^2+1}\cdot Y(p) =\frac{1}{p^2+1}$$

$$Y(p)=\frac{1}{p}\to 1$$

Відповідь: y(t)=1, t> 0

Структура короткочасної модульної контрольної роботи ККР – 3

1. Знайти перетворення Лапласа для функції - оригіналу
2. Знайти оригінал за даним зображенням Лапласа
3. Розв’язати лінійне диференційне рівняння операторним методом
   (45 хвилин)

Структура модульної контрольної роботи МКР – 3

1. Знайти перетворення Лапласа для функції - оригіналу
2. Знайти оригінал за даним зображенням Лапласа
3. Розв’язати задачу Коші для лінійного диференційного рівняння операторним методом

4. Розв’язати задачу Коші для лінійного диференційного рівняння за допомогою формули Дюамеля
5. Розв’язати інтегральне рівняння типу згортки операторним методом

(90 хвилин)

Наприклад:

1. $f(t)=\sin^2 3t\cdot e^{2t}=\frac{1-\cos 6t}{2}\cdot e^{2t}\to\frac{1}{2}(\frac{1}{p-2}-\frac{p-2}{(p-2)^2+36})$

2. $F(p)=\frac{p}{p^2-2p+5}=\frac{p-1+1}{(p-1)^2+4}=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+\frac{1}{(p-1)^2+4}\to e^t\cos 2t+\frac{1}{2}e^t\sin 2t$

3. $y''+9y=\eta(t-5)$

$y(0)=y'(0)=0$

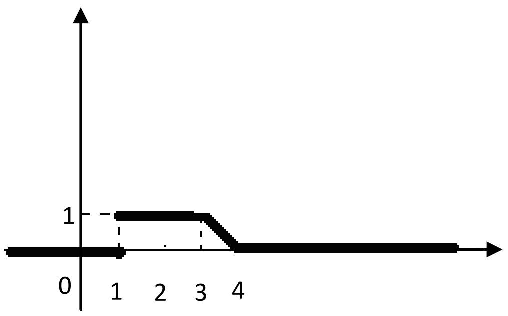
$p^2Y(p)+9Y(p)=\frac{1}{p}e^{-5p}$

$Y(p)=\frac{1}{p(p^2+9)}\cdot e^{-5p}=\frac{1}{9}e^{-5p}(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+9})$

так як $\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+9}\to 1-\cos 3t=2\sin^2\frac{3t}{2}$

$y(t)=\frac{2}{9}\sin^2\frac{3(t-5)}{2}\eta(t-5)$

4. Знайти зображення графічно заданої функції f(t)



$f(t)=\eta(t-1)-\eta(t-3)+(-t+4)\eta(t-3)-(-t+4)\eta(t-4)=$

$=\eta(t-1)-(t-3)\eta(t-3)-(t-4)\eta(t-4)\to$

$\to\frac{1}{p}e^{-p}-\frac{1}{p^2}e^{-3p}-\frac{1}{p^2}e^{-4p}$

Зразок розв'язання варіанту модульної контрольної роботи «Операційне числення».

1. Знайти зображення функції

$$f(t) = e^{4(t-5)}\cos(t-5)\eta(t-5)$$

2. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{3p}{p^2-4}$$

3. Розв'язати задачу Коші операційним методом

$$y'' + 2y' + y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

4. Користуючись формулою Дюамеля, знайти розв'язок рівняння

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(t) + \int_0^t e^{t-\tau} y(\tau)\,d\tau = \cos 2t$$

Задача 1. Розв'язання.

Як відомо $\cos t \to \frac{p}{p^2+1}$, тобто $\cos t \cdot \eta(t) \to \frac{p}{p^2+1}$. В силу теореми зміщення маємо: $e^{4t}\cos t \cdot \eta(t) \to \frac{p-4}{(p-4)^2+1}$, а за теоремою запізнення отримуємо $e^{4(t-5)}\cos(t-5)\cdot\eta(t-5) \to \frac{p-4}{(p-4)^2+1}\cdot e^{-5p}$.

Відповідь: $F(p) = \frac{p-4}{(p-4)^2+1}\cdot e^{-5p}$.

Задача 2. Розв'язання.

Відомо, що $\frac{p}{p^2-4} \to ch2t$, отже, в силу властивості лінійності, $\frac{3p}{p^2-4} \to 3ch2t$.

Відповідь: $F(p) = \frac{3p}{p^2-4}$.

Задача 3. Розв’язання.

Права частина рівняння $f(t)$ є кусково-неперервною функцією. Запишемо її аналітичний вираз:

$f(t)=\eta(t)-\eta(t-1)$. Користуючись властивістю лінійності та теоремою запізнення, отримуємо її зображення $f(t)\to\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-p}$.

Нехай $y(t)\to Y(p)$. Тоді $y'(t)\to pY(p)$, $y''(t)\to p^2Y(p)$.

Складемо операторне рівняння $p^2Y(p)+2pY(p)+Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-p}$, звідки $Y(p)=\frac{1}{p(p+1)^2}-\frac{1}{p(p+1)^2}e^{-p}$. Знайдемо оригінал отриманого зображення. За таблицею зображень маємо: $\frac{1}{p+1}\to e^{-t}$. За теоремою диференціювання зображення отримаємо $\left(\frac{1}{p+1}\right)'\to -te^{-t}\Rightarrow -\frac{1}{(p+1)^2}\to -te^{-t}\Rightarrow\frac{1}{(p+1)^2}\to te^{-t}$. За теоремою інтегрування оригіналу:

$\frac{1}{p(p+1)^2}\to\int_0^t\tau e^{-\tau}d\tau=1-e^{-t}-te^{-t}$. Отже $\frac{1}{p(p+1)^2}\to\left(1-e^{-t}-te^{-t}\right)\eta(t)$. Враховуючи теорему запізнення, знаходимо $\frac{1}{p(p+1)^2}e^{-p}\to\left(1-e^{-(t-1)}-(t-1)e^{-(t-1)}\right)\eta(t-1)$.

Відповідь: $y(t)=\left(1-e^{-t}-te^{-t}\right)\eta(t)-\left(1-e^{-(t-1)}-(t-1)e^{-(t-1)}\right)\eta(t-1)$.

Задача 4. Розв’язання.

Спочатку знаходимо розв’язок $y_1(t)$ допоміжного рівняння $y''-2y'+y=1$ при початкових умовах $y(0)=y'(0)=0$.

Нехай $y_1(t)\to Y_1(p)$. Тоді $y_1'(t)\to pY_1(p)$, $y_1''(t)\to p^2Y_1(p)$. Оскільки $1\to\frac{1}{p}$, то маємо операторне рівняння: $p^2Y_1(p)-2pY_1(p)+Y_1(p)=\frac{1}{p}$, з якого знаходимо

$Y_1(p)=\frac{1}{p(p-1)^2}$.

За отриманим зображенням знаходимо оригінал. Це можна зробити різними способами.

Спосіб перший. За теоремою розвинення

$$y_1(t) = \underset{p=0}{res}\, y_1(t)e^{pt} + \underset{p=1}{res}\, y_1(t)e^{pt} = \lim_{p\to 0}\frac{e^{pt}p}{p(p-1)^2} + \lim_{p\to 1}\left(\frac{e^{pt}(p-1)^2}{p(p-1)^2}\right)' =$$

$$= 1 + \lim_{p\to 1}\frac{te^{pt}p - e^{pt}}{p^2}\; y_1'(t) = -e^t + e^t + te^t = te^t$$

$$te^t \to \frac{1}{p(p-1)^2} \to 1 + te^t - e^t$$

$$\frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$y(t) = \int_0^t \frac{e^\tau}{1+\tau^2}(t-\tau)e^{t-\tau}d\tau = e^t\int_0^t \frac{t-\tau}{1+\tau^2}d\tau = e^t\left(t\cdot arctgt - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right).$$

$$y(t) = \int_0^t \frac{e^\tau}{1+\tau^2}(t-\tau)e^{t-\tau}d\tau = e^t\int_0^t = e^t\left(t\cdot arctgt - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right)$$

$$y(t) = e^t\left(t\cdot arctgt - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right)$$

$$\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau = e^t * y(t)$$

Другий спосіб.

З таблиці зображень маємо: $te^t \to \dfrac{1}{(p-1)^2}$. За теоремою інтегрування оригіналу отримуємо

$$\frac{1}{p(p-1)^2} \to \int_0^t \tau e^\tau d\tau = 1 + te^t - e^t.$$

Третій спосіб.

Розкладемо правильний раціональний дріб в суму простих дробів, тобто

$$\frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}.$$

З таблиці зображень отримуємо $\dfrac{1}{p(p-1)^2} \to 1 + te^t - e^t$. Отже $y_1(t) = 1 + te^t - e^t$.

Знаходимо $y_1'(t) = -e^t + e^t + te^t = te^t$. За формулою Дюамеля, маємо: $y(t) = \int\limits_0^t f(\tau) y_1'(\tau) d\tau$.

Отже, $y(t) = \int\limits_0^t \frac{e^\tau}{1+\tau^2}(t-\tau)e^{t-\tau} d\tau = e^t \int\limits_0^t \frac{t-\tau}{1+\tau^2} d\tau = e^t \left(t \cdot arctgt - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) \right)$.

Відповідь: $y(t) = e^t \left(t \cdot arctgt - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) \right)$.

Задача 5. Розв'язання.

Зауважимо, що $\to \frac{Y(p)}{p-1} Y(p) \ \cos 2t \to \frac{p}{p^2+4} \ \ Y(p) = \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{p^2+4}$
$y(t) = \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t$

є згорткою функцій e^t та $y(t)$.

Нехай $y(t) \to Y(p)$. З таблиці зображень маємо: $e^t \to \frac{1}{p-1}$, $\cos 2t \to \frac{p}{p^2+4}$, а з теореми Бореля випливає, що $e^t * y(t) \to \frac{Y(p)}{p-1}$. В силу викладеного, операторне рівняння має вид:

$Y(p) + \frac{Y(p)}{p-1} = \frac{p}{p^2+4}$, а його розв'язок $Y(p) = \frac{p-1}{p^2+4}$ можна подати у вигляді

$Y(p) = \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{p^2+4}$. З таблиці зображень знаходимо оригінал

$y(t) = \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t$.

Відповідь: $y(t) = \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t$.