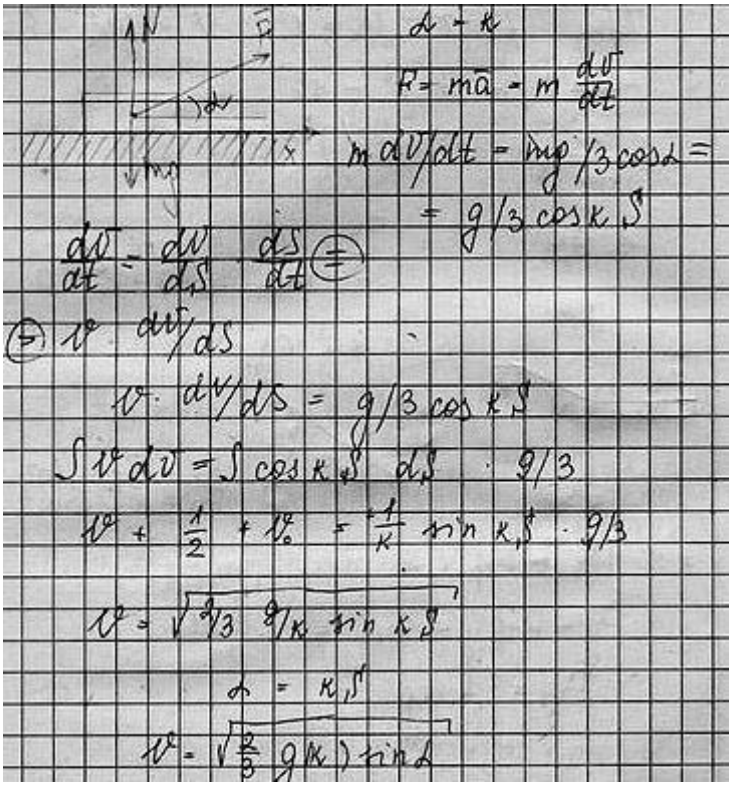
2013

Ответы на билеты по физике 2013

Билет 1

К бруску массы m, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную по модулю силу F = mg/3. В процессе его прямолинейного движения угол α между направлением этой силы и горизонтом меняют по закону α = as, где a - постоянная, s - пройденный бруском путь (из начального положения). Найти скорость бруска как функцию угла α.



$$\alpha = kS$$

$$F = m\vec{a} = m\frac{dv}{dt}$$

$$m\,dv/dt = mg/3\cos\alpha = g/3\cos kS$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS}\cdot\frac{dS}{dt} = v\,dv/dS$$

$$v\cdot dv/dS = g/3\cos kS$$

$$\int v\,dv = \int \cos kS\,dS\cdot g/3$$

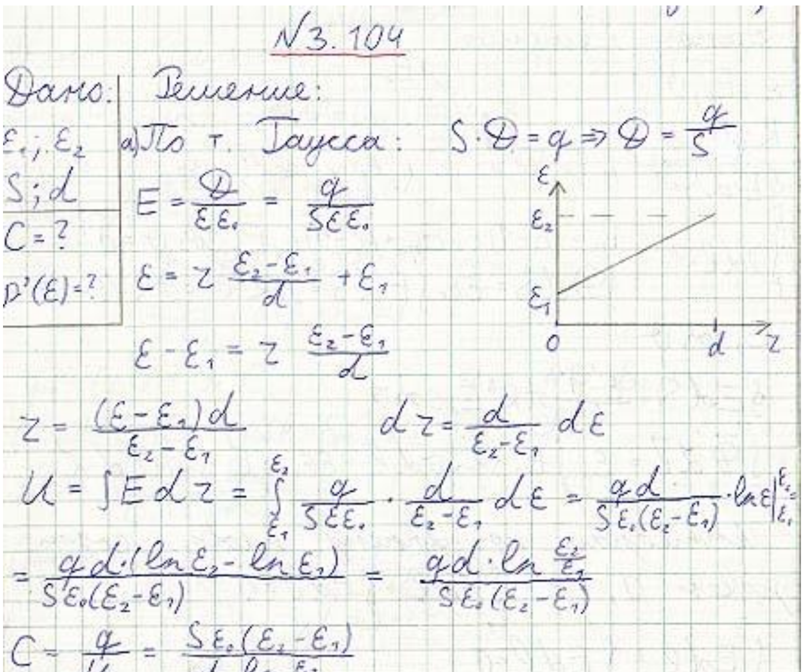
$$v^2\cdot\frac{1}{2} + v_0 = \frac{1}{k}\sin kS\cdot g/3$$

$$v = \sqrt{2/3\; g/k\,\sin kS}$$

$$\alpha = kS$$

$$v = \sqrt{\tfrac{2}{3}\,g/k}\,\sin\alpha$$

Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен изотропным диэлектриком, проницаемость ε которого изменяется в перпендикулярном к обкладкам направлении по линейному закону от ε1 до ε2 , причем ε2 > ε1 . Площадь каждой обкладки S, расстояние между ними d. Найти емкость конденсатора;



№3.104

Дано: $\varepsilon_1;\varepsilon_2$; $S; d$; $C = ?$; $D'(\varepsilon) = ?$

Решение:

а) По т. Гаусса: $S\cdot D = q \Rightarrow D = \frac{q}{S}$

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{S\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon = z\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d} + \varepsilon_1$$

$$\varepsilon - \varepsilon_1 = z\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}$$

$$z = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_1)d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1} \qquad dz = \frac{d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}d\varepsilon$$

$$U = \int E\,dz = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{q}{S\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}d\varepsilon = \frac{qd}{S\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}\cdot\ln\varepsilon\Big|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} =$$

$$= \frac{qd\cdot(\ln\varepsilon_2 - \ln\varepsilon_1)}{S\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)} = \frac{qd\cdot\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{S\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{S\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{d\cdot\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

Енергия магнитного поля

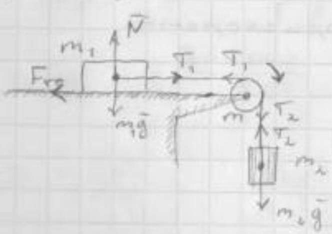
Енергія магнітного поля струму дорівнює енергії, яку повинно витратити джерело струму для утворення струму в колі.

$$\boxed{W_м = \frac{LI^2}{2}.} \qquad (2.9)$$

Билет 2

Ускорение тела м

1.267



$$\begin{cases} m_1 a_1 = T_1 - F_{тр} \\ m_2 a_2 = m_2 g - T_2 \\ (T_2 - T_1) R = J \beta \end{cases}$$

а) $F_{тр} = kN = k m_1 g$

$J = \frac{mR^2}{2}$

$\beta = \frac{a}{R}$

$(T_2 - T_1) R = \frac{mR^2}{2} \frac{a}{R}$

$T_2 - T_1 = \frac{ma}{2}$

$-m_1 a - m_2 a = -T_1 + k m_1 g - m_2 g + T_2$

$T_2 - T_1 = -m_1 a - k m_1 g - m_2 a + m_2 g$

$\frac{ma}{2} + m_1 a + m_2 a = m_2 g - k m_1 g$

$a = \frac{g(m_2 - k m_1)}{\frac{m}{2} + m_1 + m_2}$

Тонкое непроводящее кольцо радиуса R заряжено с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \cos\varphi$, где λ_0 — постоянная, φ — азимутальный угол. Найти модуль вектора напряженности электрического поля:

а) в центре кольца;

№3.12

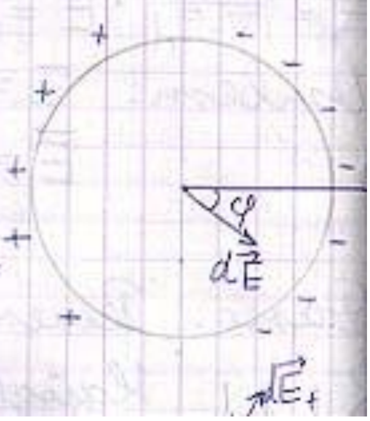
Дано: $\lambda = \lambda_0 \cos(\varphi)$; $dl = R\,d\varphi$

$E = ?$

Решение:

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{R\lambda_0 \cos\varphi\, d\varphi}{R^2} \cdot \cos\varphi =$

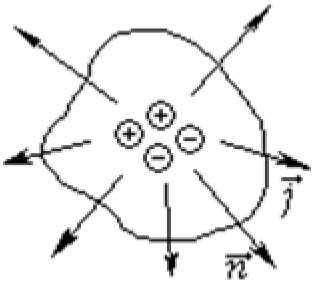
$= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}$



Постоя́нный ток электрический ток, параметры, свойства и направление которого не изменяются (в различных смыслах) со временем.

Уровнение непрерывности.

Закон сохранения заряда утверждает, что в замкнутой системе заряд сохраняется. Если система не замкнута, то заряд может изменяться.



$$-dQ = \int\left(\vec{j},\vec{n}\right)dSdt.$$

$$\frac{dQ}{dt} + \int\left(\vec{j},\vec{n}\right)dS = 0$$

Данное уравнение называется уравнением непрерывности в интегральной форме. Производная по времени связана с временной зависимостью заряда. Данное уравнение считается постулатом. По смыслу – это закон изменения заряда.

Используя понятие объемной плотности заряда и формулу Остроградского-Гаусса

$$Q = \int \rho dV; \quad \oint\left(\vec{j},\vec{n}\right)dS = \int div\vec{j}dV$$

получаем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\ \vec{j} = 0$$

– уравнение непрерывности в дифференциальной форме.

Билет 3

Однородный шар массы m и радиуса R скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Найти:

а) значения коэффициента трения, при которых скольжения не будет;

б) кинетическую энергию шара через t секунд после начала движения.

№252.

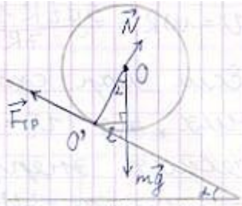
Дано: $m; R$; α

$k = ?$

$E_k(t) = ?$

Решение:

$$\frac{dL}{dt} = M \quad (*)$$



Найдём момент инерции шара относительно оси, проходящей через точку O':

$$I = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$$

Относительно O' отличным от нуля моментом будет обладать только сила тяжести:

$$M = mgl = mgR\sin\alpha$$

Найденные значения подставим в (*):

$$\frac{d\left(\frac{7}{5}mR^2\omega\right)}{dt} = mgR\sin\alpha$$

$$\frac{7}{5}mR^2 d\omega = mgR\sin\alpha\, dt$$

$$\int_0 \frac{7}{5}R\, d\omega = \int_0 g\sin\alpha\, dt$$

$$\frac{7}{5}R\omega = gt\sin\alpha$$

$$\omega = \frac{5gt\sin\alpha}{7R} \Rightarrow \beta = \frac{5g\sin\alpha}{7R} \quad (1)$$

$$v = \omega R = \frac{5gtR\sin\alpha}{7R} = \frac{5gt\sin\alpha}{7}$$

Если шар скатывается без скольжения, то $v_c = v$. Его полная кинетическая энергия $E_k = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$

$$E_k = \frac{1}{2}m\frac{25g^2t^2\sin^2\alpha}{49} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\cdot\frac{25g^2t^2\sin^2\alpha}{49R^2} = \frac{5}{14}mg^2t^2\sin^2\alpha$$

Из (*) при $I = const$ получим

$$I\beta = M \quad (**)$$

Относительно оси, проходящей через O

$$I = \frac{2}{5}mR^2 \quad (2)$$

$$M = F_{тр}\cdot R = kmg\cos\alpha\, R \quad (3)$$

Подставим (1), (2) и (3) в (**):

$\frac{2}{5}mR^2\cdot\frac{5g\sin\alpha}{7R} = Rkmg\cos\alpha$ это равенство выполняется, если шар скатывается без скольжения (в предельном случае)

$$\frac{2}{7}\sin\alpha = k\cos\alpha$$

$$k = \frac{2}{7}tg\alpha$$

Т.к. был рассмотрен предельный случай, то скольжения не будет при всех $k \geq \frac{2}{7}tg\alpha$

Ответ: $k \geq \frac{2}{7}tg\alpha$

$$E_k = \frac{5}{14}mg^2t^2\sin^2\alpha$$

3.19

В точці, яка віддалена від площини, у якій лежать нитки, на відстані x, напруж. поля

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

Поперечні складові в сумі дадуть нуль, тому врахов. лише поздовжню складову

$$E = (E_A + E_B)\cos\theta = 2E_A\cos\theta$$

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{R}\,\frac{1}{R} = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}$$

$$E = 2E_A\cos\theta = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\,\frac{x}{x^2+\frac{l^2}{4}}$$

Для знаходж. максимуму: $\frac{dE}{dx} = 0$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\,\frac{x^2+\frac{l^2}{4} - x(2x)}{\left(x^2+\frac{l^2}{4}\right)^2} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\,\frac{\frac{l^2}{4} - x^2}{\left(x^2+\frac{l^2}{4}\right)^2} = 0$$

$$\frac{l^2}{4} = x^2, \quad x = \pm\frac{l}{2}$$

$$E_{max} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 l}$$

Ток I = 5,0 А течет по тонкому проводнику, изогнутому, как показано на рис. 3.59. Радиус изогнутой части проводника R = 120 мм, угол 2φ = 90°. Найти индукцию магнитного поля в точке О.

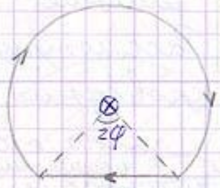
№3.222.

Дано:
$I = 5{,}0\,А$
$R = 0{,}12\,м$
$\varphi = 45°$
$B = ?$

Решение:

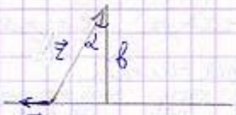
Для части окр.

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int_0^{2\pi-2\varphi} R\,d\alpha = \frac{\mu_0 I(\pi-\varphi)}{2\pi R}$$



Для отрезка:

$$dB_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\,dl}{r^2}\sin\angle(d\vec{l};\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\,dl}{r^2}\cos\alpha$$



$$\cos\alpha\,dl = r\,d\alpha \Rightarrow dl = \frac{r\,d\alpha}{\cos\alpha}$$

$$r = \frac{b}{\cos\alpha} \qquad b = R\cos\varphi$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\varphi}^{\varphi}\frac{d\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot b}\cdot\cos\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R\cos\varphi}\cdot 2\sin\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\,tg\,\varphi$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(\pi - \varphi + tg\,\varphi)$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(\pi - \varphi + tg\,\varphi)$

Билет 4

Заряд q распределен равномерно по объему шара радиуса R. Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, найти потенциал:
а) в центре шара;

№3.38

Дано:
$q;\ R$
$\varphi_0 = ?$
$\varphi(r) = ?$

Решение:

а) $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\,dV}{r}$ $\qquad \rho = \frac{3q}{4\pi R^3}$

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho\int_0^R\frac{4\pi r^2\,dr}{r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^R =$$

$$= \frac{3q}{4\pi R^3\varepsilon_0}\cdot\frac{R^2}{2} = \frac{3q}{8\pi R\varepsilon_0}$$

По круговому витку радиуса R = 100 мм из тонкого провода циркулирует ток I = 1,00 А. Найти магнитную индукцию:
а) в центре витка;
б) на оси витка в точке, отстоящей от его центра на x = 100 мм.

$\boxed{3.219}$

$R = 100\cdot10^{-3}$

$I = 1$

1. $x = 0$
2. $x = 100\cdot10^{-3}$

$$\vec{dB} = \frac{\mu}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot(\vec{dl}\times\vec{r})}{r^3}$$ так как угол между векторами dl и r - прямой $\quad \vec{dl}\times\vec{r} = dl\cdot r \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot dl}{r^2}$

В точке на оси витка вектора dB перепендикулярны плоскостям образованным dl и r. Результирующий вектор B является суммой проекций dB на ось витка

Пусть dB_{II} - проекция dB на ось витка; β - угол между r и осью витка

$$r = \sqrt{R^2 + x^2} \qquad \sin(\beta) = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}} \qquad \sin(\beta) = \frac{dB_{II}}{dB}$$

$$\frac{dB_{II}}{dB} = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}} \qquad dB_{II} = R\cdot\frac{dB}{\sqrt{R^2+x^2}} \qquad dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot dl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot dl}{(R^2+x^2)} \qquad dB_{II} = R\cdot\frac{1}{(R^2+x^2)}\cdot\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot dl}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$B = \int_0^{2\cdot\pi\cdot R} R\cdot\frac{1}{(R^2+x^2)}\cdot\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{\sqrt{R^2+x^2}}\,dl = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2\cdot\pi\cdot R^2\cdot I}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

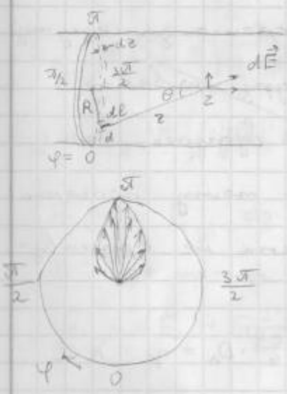
Билет 5

Сила Лоренца — сила, с которой электромагнитное поле согласно классической (неквантовой) электродинамике действует на точечнуюзаряженную частицу. Иногда силой Лоренца называют силу, действующую на движущийся со скоростью $\mathbf{v}$ заряд q лишь со стороны магнитного поля, нередко же полную силу — со стороны электромагнитного поля вообще[1], иначе говоря, со стороны электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{B}$полей. Выражается в СИ как:

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right)$$

Эффе́кт Хо́лла — явление возникновения поперечной разности потенциалов (называемой также **холловским напряжением**) при помещении проводника с постоянным током в магнитное поле. Открыт Эдвином Холлом в 1879 году в тонких пластинках золота.

3.20



$\sigma = \sigma_0 \cos\varphi$

Напрямок сумарного поля буде перпендикулярний осі z, оскільки паралельні її компоненти дають у сумі нуль.

Якщо певну точку перерізу прийняти за т. відліку кута $\varphi = 0$, то сумарний в-р електр. поля буде направл. у напрямку $\varphi = \pi$.

Виділимо кільце товщиною dz

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\sin\theta\cos\varphi$$

$$dq = \sigma\, dS = \sigma_0 \cos\varphi\, R\, d\varphi\, dz$$

$$z = R\,\mathrm{ctg}\,\theta, \quad dz = -\frac{R\,d\theta}{\sin^2\theta}, \quad r = \frac{R}{\sin\theta}$$

$$dE = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_0\cos\varphi\, R\, d\varphi\, R\, d\theta\, \sin^2\theta\, \sin\theta\cos\varphi}{R^2\sin^2\theta} =$$

$$= -\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\cos^2\varphi\, d\varphi\, \sin\theta\, d\theta$$

$$E = -\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\, 4\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta = \frac{\sigma_0}{\pi\varepsilon_0}$$

Локомотив массы m начинает двигаться со станции так, что его скорость меняется по закону v = a*sqrt(s), где a —постоянная, s — пройденный путь. Найти суммарную работу всех сил, действующих на локомотив, за первые t секунд после начала движения.

$m \quad v_0 = 0 \quad v = \alpha\sqrt{s}, \; t \quad A - ?$

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \qquad v_0 = 0 \qquad A = \frac{mv^2}{2}$$

$$v^2 = \alpha^2 s \qquad v = \frac{ds}{dt} \qquad s = \int_0^t v\,dt$$

$$v^2 = \alpha^2\int_0^t v\,dt \qquad d(v^2) = \alpha^2 v\,dt$$

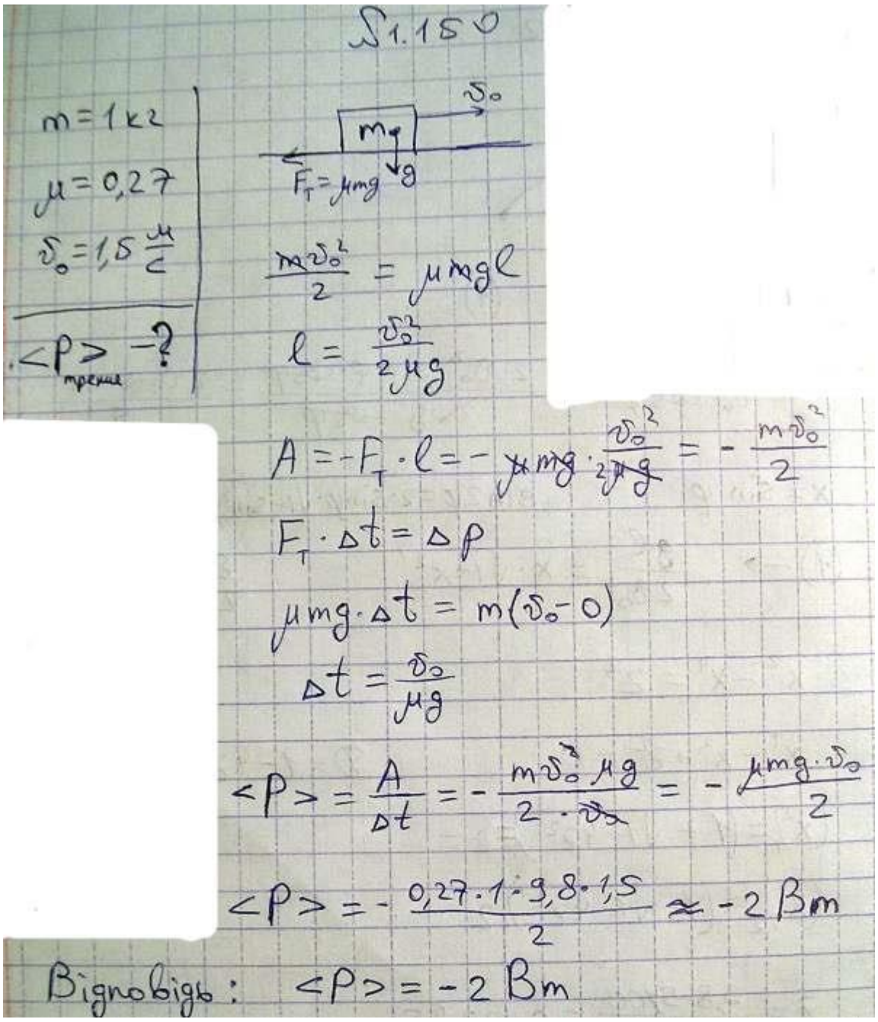
$$2v\,dv = \alpha^2 v\,dt \qquad v = \int_0^t \frac{\alpha^2}{2}\,dt = \frac{\alpha^2}{2}t$$

$$A = \frac{m\alpha^4 t^2}{8}$$

Билет 6

Небольшое тело массы m находится на горизонтальной плоскости в точке O. Телу сообщили горизонтальную скорость v_0. Найти:

а) среднюю мощность, развиваемую силой трения за все время движения, если коэффициент трения k = 0,27, m = 1,0 кг и v_0 = 1,5 м/с;



№1.150

$m = 1$ кг

$\mu = 0{,}27$

$v_0 = 1{,}5\ \frac{м}{с}$

$\langle P \rangle_{трение}$ — ?

$F_T = \mu m g$

$$\frac{m v_0^2}{2} = \mu m g l$$

$$l = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

$$A = -F_T \cdot l = -\mu m g \cdot \frac{v_0^2}{2\mu g} = -\frac{m v_0^2}{2}$$

$$F_T \cdot \Delta t = \Delta p$$

$$\mu m g \cdot \Delta t = m(v_0 - 0)$$

$$\Delta t = \frac{v_0}{\mu g}$$

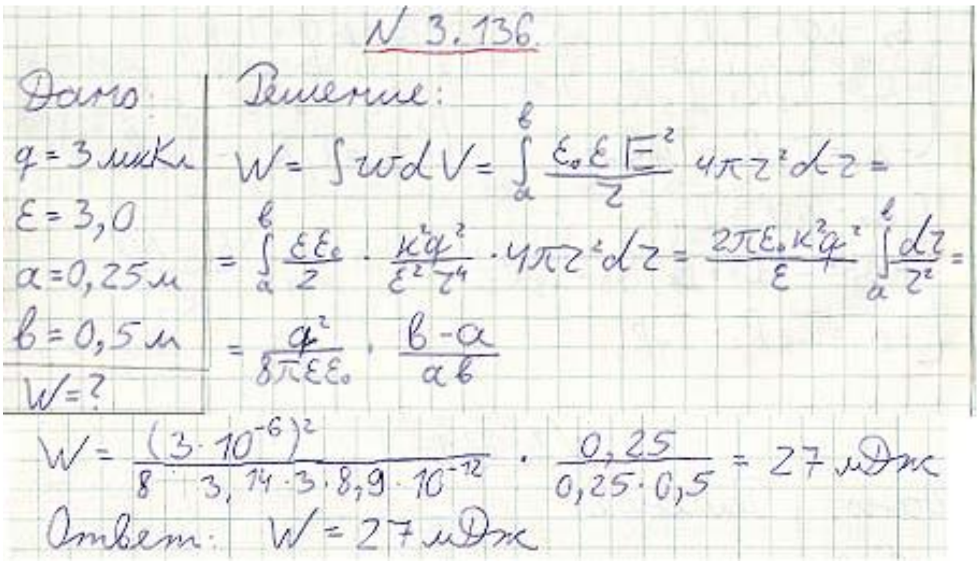
$$\langle P \rangle = \frac{A}{\Delta t} = -\frac{m v_0^2 \mu g}{2 \cdot v_0} = -\frac{\mu m g \cdot v_0}{2}$$

$$\langle P \rangle = -\frac{0{,}27 \cdot 1 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}5}{2} \approx -2\ Вт$$

Відповідь: $\langle P \rangle = -2$ Вт

Находящийся в вакууме тонкий прямой стержень длины 2a заряжен равномерно зарядом q. Найти модуль вектора напряженности электрического поля как функцию расстояния r от центра стержня для точек прямой:

б) на оси стержня вне его.



№ 3.136

Дано:

$q = 3$ мкКл

$\varepsilon = 3{,}0$

$a = 0{,}25$ м

$b = 0{,}5$ м

W = ?

Решение:

$$W = \int w\,dV = \int_a^b \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} 4\pi r^2 dr = \int_a^b \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2} \cdot \frac{k^2 q^2}{\varepsilon^2 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi \varepsilon_0 k^2 q^2}{\varepsilon} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi \varepsilon \varepsilon_0} \cdot \frac{b-a}{ab}$$

$$W = \frac{(3 \cdot 10^{-6})^2}{8 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 8{,}9 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{0{,}25}{0{,}25 \cdot 0{,}5} = 27\ мДж$$

Ответ: $W = 27$ мДж

Билет 7

Неінерціальні системи відліку. Сили інерції.

Закони Ньютона, як відомо, справедливі лише в тих системах відліку, які рухаються одні відносно одних прямолінійно і рівномірно. Такі системи відліку називаються **інерціальними системами відліку**. В таких системах відліку основним рівнянням руху матеріальної точки є рівняння, яке виражає другий закон Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

На практиці часто доводиться мати справу з системами відліку, які рухаються відносно інерціальних систем відліку з прискоренням. Такі системи відліку називаються неінерціальними. Матеріальна точка в**неінерціальній** системі відліку може рухатися прискорено під дією сил, виникнення яких не можна пояснити дією якихось окремих тіл. Ці сили називаються **силами інерції**.

Перший закон Ньютона в неінерціальних системах немає сенсу.

Оскільки в неінерціальних системах відліку крім сил взаємодії існують ще і сили інерції, то третій закон Ньютона настільки спотворюється, що і він втрачає чіткий фізичний зміст. Для сил інерції протидії не існує. Сили інерції зумовлені властивістю тіл зберігати стан спокою або рівномірного прямолінійного руху.
Другий закон Ньютона в неінерціальних системах має вигляд:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in}$$

де $\vec{a}'$ – прискорення тіла, визначене в неінерціальній системі відліку, $\vec{F}_{in}$ – сили інерції.

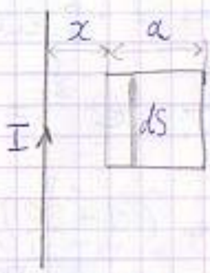
Квадратная рамка со стороной a и длинный прямой провод с током I находятся в одной плоскости, как показано на рис. 3.82. Рамку поступательно перемещают вправо с постоянной скоростью v. Найти э. д. с. индукции в рамке как функцию расстояния x.

№3.294

Дано: $a;\ I;\ v$; $\mathcal{E}(x) = ?$

Решение: Найдем $\Phi(x)$

$$d\Phi = B\,dS = \underbrace{\frac{\mu_0 I}{2\pi z}}_{\text{индукция прямого тока}} a\,dz$$

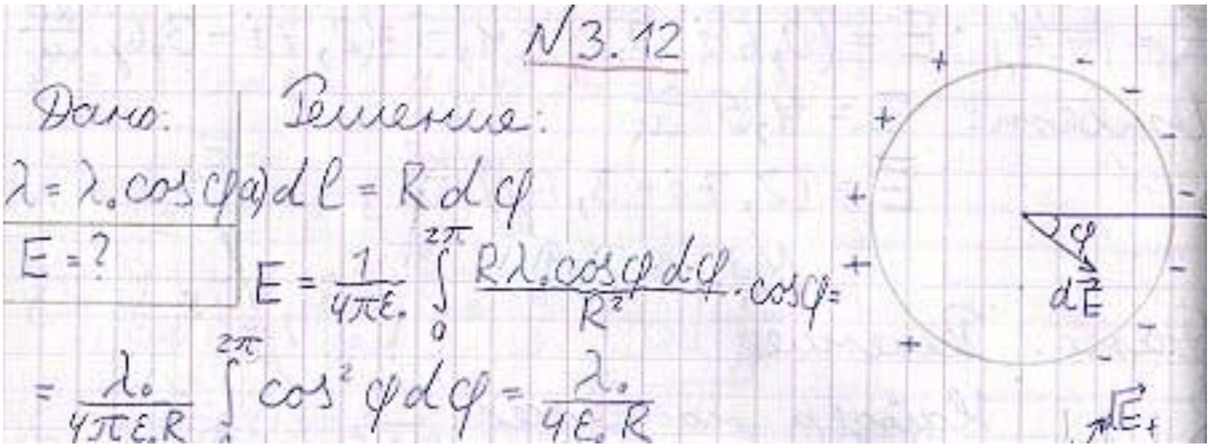


$$\Phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_x^{x+a}\frac{dz}{z} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\frac{x+a}{x}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\cdot\frac{x}{x+a}\cdot\frac{x-x-a}{x^2}\cdot v = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi x(x+a)}$$

Ответ: $\mathcal{E} = \dfrac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi x(x+a)}$

Тонкое непроводящее кольцо радиуса R заряжено с линейной плотностью λ = λ0 cos φ, где λ0 — постоянная, φ — азимутальный угол. Найти модуль вектора напряженности электрического
поля:
а) в центре кольца;


№3.12

Дано: | Решение:

$\lambda = \lambda_0 \cos(\varphi)$ $dl = R\,d\varphi$

$E = ?$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{R\lambda_0\cos\varphi\,d\varphi}{R^2}\cdot\cos\varphi =$$

$$= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}$$

Билет 8

Енергія електричного поля

Електричне поле викликає переміщення вільних зарядів і може виконувати роботу, а це значить, що воно має енергію.
Енергія електричного поля W задається формулою

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}dV,$$

де інтегрування проводиться по всьому простору [1].
Відповідно, густина енергії електричного поля задається формулою

$$w = \frac{1}{8\pi}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$$

Енергія електричного поля системи заряджених провідників із зарядами q_i дорівнює

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i,$$

де φ_i — потенціали провідників.

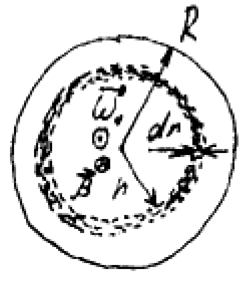
Однородный диск радиуса R раскрутили до угловой скорости ω и осторожно положили на горизонтальную поверхность. Сколько времени диск будет вращаться на поверхности, если коэффициент трения равен k? Давление диска на поверхность считать равномерным.

$\vec{\omega}_0$

R

k

$t - ?$



$\omega = \omega_0 + \beta t$ т.к $\vec{\omega} = 0$, то

$\vec{\omega}_0 = -\vec{\beta} t \Rightarrow t = \left|\frac{\vec{\omega}_0}{\vec{\beta}_0}\right|$

$|\vec{\beta} I| = |\vec{M}| \Rightarrow |\vec{\beta}| = \frac{|\vec{M}|}{I}$

$I = \frac{mR^2}{2}$ $\quad \rho = \frac{m}{\pi R^2}$

Агибалов ИС-04

$\vec{M}_i = \rho g k \cdot r$ $\quad \vec{M}_i^r = 2\pi r^2 \rho g k$

$\vec{M} = \sum_{i}^{r} \vec{M}_i = \sum^{r} \vec{M}_i^r = \int_0^R \vec{M}_i^r \, dr = 2\pi \rho g k \frac{R^3}{3} = \frac{2gkmR}{3}$

$\beta = \frac{|\vec{M}|}{I} = \frac{\frac{2gkmR}{3}}{\frac{mR^2}{2}} = \frac{4gk}{3R}$ $\quad t = \left|\frac{\vec{\omega}_0}{\vec{\beta}_0}\right| = \frac{3R\omega_0}{4gk}$

Ответ: $t = \frac{3R\vec{\omega}_0}{4gk}$

Билет 9

Теорема о циркуляции вектора B

По определению циркуляцией вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру l называется интеграл $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$, знак которого зависит от направления обхода контура.

Циркуляция вектора $\vec{B}$ по любому замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i .$$

Шар радиуса R имеет положительный заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r до его центра по закону ρ = ρ0 (1 — r/R), где ρ0 — постоянная. Полагая диэлектрическую проницаемость шара и окружающего пространства равной единице, найти:
а) модуль вектора напряженности электрического поля внутри и вне шара как функцию расстояния r;
б) максимальное значение напряженности Емакс и соответствующее ему значение расстояния rm.

$\boxed{3.25}$

R

$\rho = \rho_0 \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)$

$\rho_0 = \text{const}$

$\varepsilon = 1$

1. Применим теорему Гаусса для сферы радиуса r (r < R)

$$\int E\,dS = \frac{q(r)}{\varepsilon_0} \qquad E \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}$$

$$q(r) = \int_V \rho\,dV \qquad dV = V(r + dr) - V(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (r + dr)^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 4 \cdot \pi \cdot dr \cdot r^2 + 4 \cdot \pi \cdot dr^2 \cdot r + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot dr^3$$

$$q(r) = \int_0^r \left(4 \cdot \pi \cdot dr \cdot r^2\right) \left[\rho_0 \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)\right] dr = \frac{1}{3} \cdot r^3 \cdot \frac{(4 \cdot R - 3 \cdot r)}{R} \cdot \pi \cdot \rho_0$$

$$E \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{3} \cdot r^3 \cdot \frac{(4 \cdot R - 3 \cdot r)}{R} \cdot \pi \cdot \rho_0 \qquad E = \frac{-1}{12} \cdot r \cdot (3 \cdot r - 4 \cdot R) \cdot \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 \cdot R} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot r}{4 \cdot R}\right) \cdot \frac{\rho_0 \cdot r}{\varepsilon_0}$$

2. Для для сферы радиуса r (r > R) весь заряд сконцентрирован внутри шара R

$$q(R) = \frac{1}{3} \cdot R^3 \cdot \frac{(4 \cdot R - 3 \cdot R)}{R} \cdot \pi \cdot \rho_0 = \frac{1}{3} \cdot R^3 \cdot \pi \cdot \rho_0$$

$$E \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{q(r)}{\varepsilon_0} \qquad E \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{\frac{1}{3} \cdot R^3 \cdot \pi \cdot \rho_0}{\varepsilon_0} \qquad E(r) = \frac{1}{12} \cdot R^3 \cdot \frac{\rho_0}{r^2 \cdot \varepsilon_0}$$

2. $$0 = \frac{d}{dr} \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot r}{4 \cdot R}\right) \cdot \frac{\rho_0 \cdot r}{\varepsilon_0} \rightarrow 0 = \frac{-1}{4 \cdot R} \cdot \rho_0 \cdot \frac{r}{\varepsilon_0} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{r}{R}\right) \cdot \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \qquad r = \frac{2}{3} \cdot R$$

$$E_{max} = \frac{1}{3} \cdot \left[1 - \frac{3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot R\right)}{4 \cdot R}\right] \cdot \frac{\rho_0 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot R\right)}{\varepsilon_0} \qquad E_{max} = \frac{1}{9} \cdot \rho_0 \cdot \frac{R}{\varepsilon_0}$$

Билет 10

В вакууме, а также в любом веществе, в котором можно пренебречь поляризацией либо скоростью её изменения, током смещения J_D (с точностью до универсального постоянного коэффициента) называется[3] поток вектора быстроты изменения электрического поля $\partial \mathbf{E}/\partial t$ через некоторую поверхность[4] s:

$$J_D = \varepsilon_0 \int_s \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{ds}$$ (СИ)

$$J_D = \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{ds}$$ (СГС)

В диэлектриках (и во всех веществах, где нельзя пренебречь изменением поляризации) используется следующее определение:

$$J_D = \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{ds}$$ (СИ)

$$J_D = \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{ds}$$ (СГС),

где **D** — вектор электрической индукции (исторически вектор **D** назывался электрическим смещением, отсюда и название «ток смещения»)

Соответственно, **плотностью тока смещения** в вакууме называется величина

$$\mathbf{j_D} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$ (СИ)

$$\mathbf{j_D} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$ (СГС)

а в диэлектриках — величина

$$\mathbf{j_D} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$ (СИ)

$$\mathbf{j_D} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$ (СГС)

В некоторых книгах плотность тока смещения называется просто «током смещения».

Уравне́ния Ма́ксвелла — система уравнений в дифференциальной или интегральной форме, описывающих электромагнитное поле и его связь с электрическими зарядами и токами в вакууме и сплошных средах. Вместе с выражением для силы Лоренца, задающим меру воздействия электромагнитного поля на заряженные частицы, образуют полную систему уравнений классической электродинамики, называемую иногда уравнениями Максвелла — Лоренца. Уравнения, сформулированные Джеймсом Клерком Максвеллом на основе накопленных к середине XIX века экспериментальных результатов, сыграли ключевую роль в развитии представлений теоретической физики и оказали сильное, зачастую решающее, влияние не только на все области физики, непосредственно связанные с электромагнетизмом, но и на многие возникшие впоследствии фундаментальные теории, предмет которых не сводился к электромагнетизму (одним из ярчайших примеров здесь может служить специальная теория относительности).

Между двумя большими параллельными пластинами, отстоящими друг от друга на расстояние d, находится равномерно распределенный объемный заряд. Разность потенциалов пластин равна Δφ. При каком значении объемной плотности ρ заряда напряженность поля вблизи одной из пластин будет равна нулю? Какова будет при этом напряженность поля у другой пластины?

№3.52

Дано:
d; $\Delta\varphi$
$E_1 = 0$

$\rho = ?$
$E_2 = ?$

Решение:

По т. Гаусса: $E\Delta S = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Т.к. пластины большие, то потоком через бок. поверхн. можно пренебречь. Тогда:

$\Delta S = \pi R^2 \cdot 2$

$q = \pi R^2 d \cdot \rho$

$$2E\pi R^2 = \frac{\pi R^2 \rho d}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

$\rho = \frac{2E\varepsilon_0}{d}$, где $E = \frac{\Delta\varphi}{d}$ – напряж. м/д пластинами

$$\rho = \frac{2\varepsilon_0 \Delta\varphi}{d^2}$$

Если у одной обкладки напряж. равна 0, то у другой она усилится в 2 раза (как вект. сумма). Из (1):

$E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$, значит $E_2 = 2E = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}$

Ответ: $\rho = \frac{2\varepsilon_0\Delta\varphi}{d^2}$; $E_2 = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}$

Билет 11

По круглому однородному прямому проводу, радиус сечения которого R, течет постоянный ток плотности j. Найти вектор индукции магнитного поля этого тока в точке, положение которой относительно оси провода определяется радиус-вектором r. Магнитную проницаемость всюду считать равной единице.

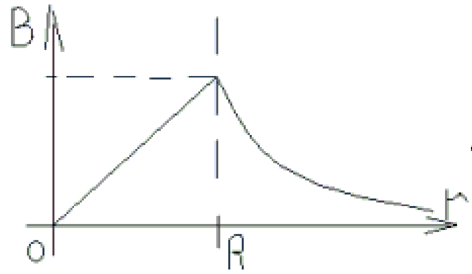
3.233 По однородному прямому проводу ,радиус сечения которого R,течет постоянный ток плотности j.Найти индукцию маг.поля тока в точке ,полож.кот.относ. оси провода…

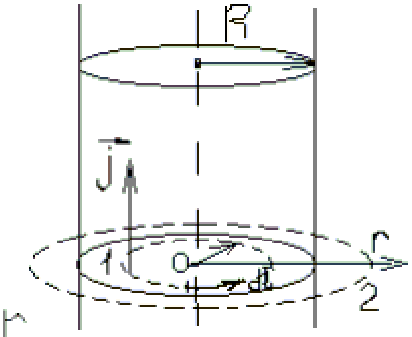
Дано:

R , **j** $\quad \oint_r \mathbf{B}d\mathbf{l} = \mu_0 \iint \mathbf{j}d\mathbf{S}$

B(r)-? $\quad$ 1. r < R : $B_1 2\pi r = \mu_0 \mathbf{j} \pi r^2$, $B_1 = \mu_0 \mathbf{j} r/2$

2. r > R : $B_2 2\pi r = \mu_0 \mathbf{j} \pi R^2$, $B_2 = \mu_0 \mathbf{j} R^2/2r$





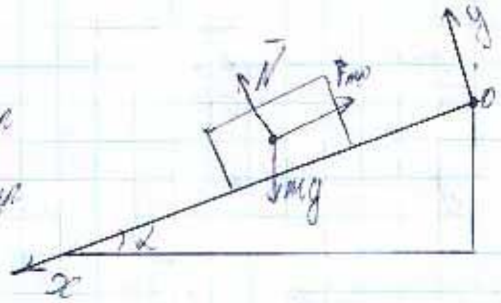
Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения зависит от пройденного пути x по закону k = ax, где a — постоянная. Найти путь, пройденный бруском до остановки, и максимальную скорость его на этом пути.

Дано: α, $k = \gamma x$, $v = const$; S - ?

$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр}$

по x: $ma = mg\sin\alpha - F_{тр}$

по y: $N - mg\cos\alpha = 0$



$ma = mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha$

$a = g\sin\alpha - kg\cos\alpha = g(\sin\alpha - \gamma x\cos\alpha)$

$a = \frac{dv}{dt}$; $dv = (g\sin\alpha - g\gamma x\cos\alpha)dt$, где $dt = \frac{dx}{v}$

$\int_0^v v\,dv = \int_0^x g(\sin\alpha - \gamma x\cos\alpha)dx$

$\frac{v^2}{2} = g\sin\alpha \cdot x - \frac{g\gamma\cos\alpha}{2}x^2$

В момент остановки $v = 0 \Rightarrow g\sin\alpha\, x = \frac{g\gamma\cos\alpha\, x^2}{2}$

$2\sin\alpha - \gamma\cos\alpha\, x = 0 \Rightarrow x = \frac{2\sin\alpha}{\gamma\cos\alpha} = \boxed{\frac{2}{\gamma}\operatorname{tg}\alpha}$

Билет 12

1.151

$k = \alpha \sqrt{s}$ $\quad k = \alpha \cdot s$

$F_x = m a_x$

$-kmg = m a_x = m \lambda v_x \frac{dv_x}{dx}$

$v_x\, dv_x = -kg\, dx = -\alpha g x\, dx$

$$\int_{v_0}^{v} v_x\, dx = -\alpha g \int_0^x x\, dx$$

$v^2 - v_0^2 = -\alpha g x^2$

$v^2 = v_0^2 - \alpha g x^2$

$P = \vec{F}\vec{v} = -m\alpha x g \sqrt{v_0^2 - \alpha g x^2}$

Для знаходження макс. потужності,

$$\frac{d}{dx} \sqrt{v_0^2 x^2 - \alpha g x^4} = 0$$

$$\frac{2v_0^2 x - 4\alpha g x^3}{\sqrt{v_0^2 x^2 - \alpha g x^4}} = 0$$

$$2x\,(v_0^2 - 2\alpha g x^2) = 0 \Rightarrow x = \frac{v_0}{\sqrt{2\alpha g}}$$

$$P_{max} = -m\alpha \frac{v_0}{\sqrt{2\alpha g}}\, g \sqrt{v_0^2 - \frac{\alpha g\, v_0^2}{2\alpha g}} =$$

$$= -\frac{1}{2} m v_0^2 \sqrt{\alpha g}$$

Пространство заполнено зарядом с объемной плотностью $\rho = \rho_0 e^{-\alpha r^3}$, где ρ_0 и α — положительные константы, r — расстояние от центра данной системы. Найти модуль вектора напряженности электрического поля как функцию r. Исследовать полученное выражение при малых и больших r, т. е. при $\alpha r^3 \ll 1$ и $\alpha r^3 \gg 1$.

Решение: $\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = Q$

$$Q = \int_{V_1} \rho\, dV = \int_0^r \rho_0 e^{-\alpha r^3} 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{3} 4\pi\rho_0 \int_0^r e^{-\alpha r^3} d(r^3) = -\frac{4}{3}\pi\rho_0 \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha r^3}\Big|_0^r =$$

$$= \frac{4\pi\rho_0}{3\alpha}\left(1 - e^{-\alpha r^3}\right)$$

$$\underbrace{D \cdot 4\pi r^2}_{N} = \underbrace{\frac{4\pi\rho_0}{3\alpha}\left(1 - e^{-\alpha r^3}\right)}_{Q}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{3\alpha\varepsilon_0 r^2}\left(1 - e^{-\alpha r^3}\right)$$

а) $\alpha r^3 \ll 1$ $\quad E \approx \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}$

б) $\alpha r^3 \gg 1$ $\quad E \approx \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 \alpha r^2}$

Ответ: $E = \frac{\rho_0}{3\alpha\varepsilon_0 r^2}\left(1 - e^{-\alpha r^3}\right)$

Парамагнетизм

В парамагнетике обменные силы не действуют, и магнитные моменты отдельных атомов направлены хаотически в разные стороны. При помещении парамагнетика во внешнее магнитное поле $\vec{B}_{внеш}$ магнитным моментам атомов энергетически выгодно быть ориентированными по полю. С другой стороны, тепловое движение препятствует ориентации $\vec{p}_{m\,ат}$ вдоль линий $\vec{B}_{внеш}$, разориентируя их (и увеличивая энтропию среды). Поэтому магнитные моменты атомов лишь частично (и очень слабо) ориентированы по полю, вследствие чего степень этой ориентации χ мала.

Диамагнетизм

Для некоторых веществ сумма орбитальных и собственных магнитных моментов всех составляющих атом частиц равна нулю:

$\vec{p}_{m\,ат} = \sum(\vec{p}_{m\,орб} + \vec{p}_{m\,собст}) = 0$, т.е. атомные магнитные моменты, способные ориентироваться по внешнему магнитному полю, отсутствуют.

Но каждый электрон вращается вокруг атомного ядра и образует маленький волчок, гироскоп, на который во внешнем магнитном поле действует момент сил $\vec{M} = \left[\vec{p}_{m\,орб}, \vec{B}_{внеш}\right]$.

Такой гироскоп совершает прецессию сларморовой частотой прецессии:

$$\omega_л = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{eB_{внеш}}{2m_c}.$$

Это дополнительное вращение создает дополнительный молекулярный ток и дополнительный нескомпенсированный магнитный момент $\vec{p}_{m\,л}$, ориентированный против поля $\vec{B}_{[illegible]}$. Поэтому эффект ларморовой прецессии магнитных моментов молекулярных токов $\vec{p}_{m\,орб}$ во внешнем магнитном поле ослабляет это поле $\chi < 0$. Этот эффект имеется, естественно, у всех веществ, но он очень мал, и в ферро- и парамагнитных средах перекрывается выстраиванием ненулевых магнитных моментов атомов по полю. Заметен он только в диамагнетиках, где $\vec{p}_{m\,ат} = 0$.

Билет 13

Кинетическая энергия вращательного движения — энергия тела, связанная с его вращением.
Основные кинематические характеристики вращательного движения тела — его угловая скорость (ω) и угловое ускорение. Основные динамические характеристики вращательного движения — момент импульса относительно оси вращения z:

$$K_z = I_z\omega$$

и кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}I_z\omega^2$$

где I_z — момент инерции тела относительно оси вращения.
Похожий пример можно найти при рассмотрении вращающейся молекулы с главными осями инерции I_1, I_2 и I_3. Вращательная энергия такой молекулы задана выражением

$$H^{\text{rot}} = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2),$$

где ω_1, ω_2, и ω_3 — главные компоненты угловой скорости.
В общем случае, энергия при вращении с угловой скоростью $\vec{\omega}$ находится по формуле:

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot I\cdot\vec{\omega}$$

, где I — тензор инерции.

3.37

$$\varphi = \alpha(xy - z^2)$$

$$M(2,\ 1,\ -3), \quad \bar{a} = \bar{i} + 3\bar{k}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -(\alpha y\,\vec{i} + \alpha x\,\vec{j} - 2\alpha z\,\vec{k})$$

$$Пр_{\bar{a}}\vec{E} = |\vec{E}|\cos\theta = |\bar{E}|\frac{(\bar{E}\cdot\bar{a})}{|\bar{E}||\bar{a}|} = \frac{(\bar{E}\cdot\bar{a})}{|\bar{a}|}$$

$$Пр_{\bar{a}}\bar{E} = \frac{-\alpha y + \cancel{3\alpha x} + 0 + 2\alpha z\,3}{\sqrt{1+9}} = \frac{\alpha(6z - y)}{\sqrt{10}}$$

$$Пр_{\bar{a}}\vec{E}\Big|_M = \frac{\alpha(6\cdot(-3) - 1)}{\sqrt{10}} = -\frac{19\alpha}{\sqrt{10}}$$

По круговому витку радиуса R = 100 мм из тонкого провода циркулирует ток I = 1,00 А. Найти магнитную индукцию:
а) в центре витка;
б) на оси витка в точке, отстоящей от его центра на x = 100 мм.

$\boxed{3.219}$

$R = 100\cdot10^{-3}$

$I = 1$

1. $x = 0$
2. $x = 100\cdot10^{-3}$

$$\vec{dB} = \frac{\mu}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot\left(\vec{dl}\times\vec{r}\right)}{r^3}$$ так как угол между векторами dl и r - прямой $$\vec{dl}\times\vec{r} = dl\cdot r \qquad dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot dl}{r^2}$$

В точке на оси витка вектора dB перепендикулярны плоскостям образованным dl и r. Результирующий вектор B является суммой проекций dB на ось витка

Пусть dB_{II} - проекция dB на ось витка; β - угол между r и осью витка

$$r = \sqrt{R^2 + x^2} \qquad \sin(\beta) = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \qquad \sin(\beta) = \frac{dB_{II}}{dB}$$

$$\frac{dB_{II}}{dB} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \qquad dB_{II} = R\cdot\frac{dB}{\sqrt{R^2 + x^2}} \qquad dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot dl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot dl}{\left(R^2 + x^2\right)} \qquad dB_{II} = R\cdot\frac{1}{\left(R^2 + x^2\right)}\cdot\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot dl}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$B = \int_0^{2\cdot\pi\cdot R} R\cdot\frac{1}{\left(R^2 + x^2\right)}\cdot\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{\sqrt{R^2 + x^2}}\,dl = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2\cdot\pi\cdot R^2\cdot I}{\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Билет 14

Кинетической энергией системы называют сумму кинетических энергий всех тел, входящих в систему. Для определённой таким образом величины справедливо утверждение:
Изменение кинетической энергии системы равно работе всех внутренних и внешних сил, действующих на тела системы.

Доказательство теоремы

Рассмотрим систему материальных точек с массами m_i, скоростями $\vec{v}_i$ и кинетическими энергиями $T_i = \frac{1}{2}m_i{v_i}^2$. Для малого изменения кинетической энергии (дифференциала), происходящего в течение некоторого малого промежутка времени dt, будет выполняться

$$dT_i = m_i\vec{v}_i d\vec{v}_i = m_i\vec{v}_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}dt.$$

Учитывая, что $\frac{d\vec{v}_i}{dt}$ представляет собой ускорение *i*-ой точки $\vec{a}_i$, а $\vec{v}_i dt$ — перемещение той же точки $d\vec{s}_i$ за время dt, полученное выражение можно записать в виде:

$$dT_i = m_i\vec{a}_i d\vec{s}_i.$$

Используя второй закон Ньютона и обозначая равнодействующую всех сил, действующих на точку, как F_i, получаем

$$dT_i = \vec{F}_i d\vec{s}_i,$$

а затем в соответствии с определением работы dA_i

$$dT_i = dA_i.$$

Суммирование всех уравнений такого вида, записанных для каждой из материальных точек, приводит к формуле для изменения полной кинетической энергии системы:

$$dT = \sum_i dA_i.$$

Данное равенство выражает утверждение теоремы об изменении кинетической энергии системы в дифференциальном виде.

Проинтегрировав обе части полученного равенства по произвольно взятому промежутку времени между некоторыми t_1 и t_2, получим выражение теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T_2 - T_1 = \sum_i A_i,$$

где T_1 и T_2 — значения кинетической энергии системы в моменты времени t_1 и t_2 соответственно. Необходимо подчеркнуть, что здесь, в отличие от случаев теоремы об изменении количества движения системы и теоремы о движении центра масс системы, учитывается действие не только внешних, но внутренних сил.

Найти емкость сферического конденсатора с радиусами обкладок R_1 и $R_2 > R_1$, который заполнен изотропным диэлектриком с проницаемостью, изменяющейся по закону $\varepsilon = a/r$, где a — постоянная, r — расстояние от центра конденсатора.

№3.105

Дано:
$R_1; R_2 > R_1$
$\varepsilon = \frac{a}{r}$
$C = ?$

Решение:

По т. Гаусса:

$$4\pi r^2 D = q \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q\, r}{4\pi r^2 a \varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi r a \varepsilon_0}$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E\,dr = \frac{q}{4\pi a\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{q}{4\pi a\varepsilon_0}\cdot \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi a\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

Ответ: $C = \dfrac{4\pi a\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$

По П-образному проводнику, расположенному в горизонтальной плоскости, может скользить без трения перемычка AB (рис. 3.89). Последняя имеет длину l, массу m и сопротивление R. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, направленном вертикально. В момент t = 0 на перемычку начали действовать постоянной горизонтальной силой F, и перемычка начала перемещаться поступательно вправо. Найти зависимость от времени t скорости перемычки. Индуктивность контура и сопротивление П-образного проводника пренебрежимо малы.

Решение:

Помимо приложенной силы на перемычку действует и сила Ампера:

$$F_A = I\cdot B\cdot l$$

Уравнение Кирхгоффа для цепи:

$$\varepsilon_\Phi = I\cdot R$$

$$\frac{-d\Phi}{dt} = I\cdot R$$

$$\left(B\cdot l\cdot\frac{d}{dt}x\right) = -I\cdot R$$

$$I = -\left(\frac{B\cdot l}{R}\cdot\frac{d}{dt}x\right)$$

Второй закон Ньютона, записанный для перемычки:

$$m\cdot\frac{dV}{dt} = F + F_A$$

$$m\cdot\frac{dV}{dt} = F - I\cdot B\cdot l$$

$$m\cdot\frac{dV}{dt} = F - \frac{B\cdot l}{R}\cdot\frac{d}{dt}x\cdot B\cdot l$$

$$m\cdot\frac{dV}{dt} = F - \frac{B\cdot l}{R}\cdot V\cdot B\cdot l$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{F}{m} - \frac{B^2\cdot l^2}{m\cdot R}\cdot V$$

$$\frac{dV}{\frac{F}{m} - \frac{B^2\cdot l^2}{m\cdot R}\cdot V} = dt$$

$$\int_0^V \frac{1}{\frac{F}{m} - \frac{B^2\cdot l^2}{m\cdot R}\cdot V}\,dV = \int_0^t 1\,dt$$

$$V(t) = \frac{F\cdot R}{B^2\cdot l^2}\cdot\left(1 - \exp\left(-\frac{B^2\cdot l^2}{m\cdot R}\cdot t\right)\right)$$

Билет 15

Общая формулировка: Поток вектора напряжённости электрического поля через любую произвольно выбранную замкнутую поверхность пропорционален заключённому внутри этой поверхности электрическому заряду.

СГС	СИ
$\Phi_{\mathbf{E}} = 4\pi Q,$	$\Phi_{\mathbf{E}} = \frac{Q}{\varepsilon_0},$

где

$$\Phi_{\mathbf{E}} \equiv \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

— поток вектора напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность S.
Q — полный заряд, содержащийся в объёме, который ограничивает поверхность S.
ε_0 — электрическая постоянная.
Данное выражение представляет собой теорему Гаусса в интегральной форме.
Замечание: поток вектора напряжённости через поверхность не зависит от распределения заряда (расположения зарядов) внутри поверхности.

В дифференциальной форме теорема Гаусса выражается следующим образом:

СГС	СИ
$\operatorname{div} \mathbf{E} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho,$	$\operatorname{div} \mathbf{E} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$

Здесь ρ — объёмная плотность заряда (в случае присутствия среды — суммарная плотность свободных и связанных зарядов), а ∇ — оператор набла.
Теорема Гаусса может быть доказана как теорема в электростатике исходя из закона Кулона (см. ниже).
Формула однако также верна в электродинамике, хотя в ней она чаще всего не выступает в качестве доказываемой теоремы, а выступает в качестве постулируемого уравнения (в этом смысле и контексте ее логичнее называть *законом Гаусса*[2].

1. ~~10~~185

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$$

$$\left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v}\right) = -\frac{k}{m}t$$

$$t = \frac{m}{k}\,\frac{v_0 - v}{v_0 v}$$

Знайдемо сталу k:

$$m\frac{v\,dv}{dS} = -kv^2 \quad \left(dt = \frac{dS}{v}\right)$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\int_0^h dS$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{k}{m}h$$

$$k = \frac{m}{h}\ln\frac{v_0}{v}$$

Остаточно

$$t = \quad t = \frac{h(v_0 - v)}{v_0 v \ln\frac{v_0}{v}}$$

Билет 16

Электрическое поле в диэлектрике. Рассмотрим плоский однородный диэлектрический слой, расположенный между двумя разноименно заряженными плоскостями (рис. 2.5). Пусть напряженность электрического поля, которое создается этими плоскостями в вакууме, равна $E_0 = \sigma / \varepsilon_0$,

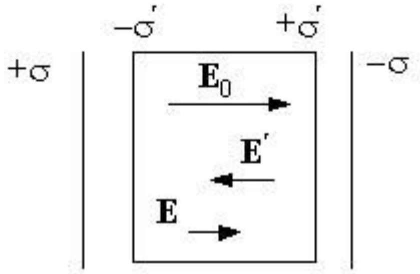


Рис. 2.5

где σ - поверхностная плотность зарядов на пластинах (эти заряды называют свободными). Под действием поля диэлектрик поляризуется, и на его гранях появляются поляризационные или связанные заряды. Эти заряды создают в диэлектрике электрическое поле E', которое направлено против внешнего поля E_0.

$$E' = \sigma' / \varepsilon_0,$$

где σ' - поверхностная плотность связанных зарядов. Результирующее поле внутри диэлектрика

$$E = E_0 - E' = (\sigma - \sigma') / \varepsilon_0.$$

Поверхностная плотность связанных зарядов σ' меньше плотности σ свободных зарядов, и не все поле E_0 компенсируется полем диэлектрика: часть линий напряженности проходит сквозь диэлектрик, другая часть обрывается на связанных зарядах (рис. 2.5). Вне диэлектрика $\mathbf{E} = \mathbf{E_0}$. Следовательно, в результате поляризации поле внутри диэлектрика оказывается слабее, чем внешнее $E = (\sigma - \chi\varepsilon_0 E) / \varepsilon_0$. Таким образом,

$$E = \sigma / \varepsilon_0 (1 + \chi) = \sigma / \varepsilon_0 \varepsilon = E_0 / \varepsilon,$$

где $(1 + \chi) = \varepsilon$ - *диэлектрическая проницаемость* среды. Из формулы видно, что диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз напряженность поля в вакууме больше напряженности поля в диэлектрике. Для вакуума $\varepsilon = 1$, для диэлектриков $\varepsilon > 1$.

1.86

$k = \gamma x$

$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр}$

$Ox:\ ma = mg\sin\alpha - F_{тр}$

$Oy:\ N - mg\cos\alpha = 0$

$ma = mg\sin\alpha - \gamma x mg\cos\alpha$

$a = g(\sin\alpha - \gamma x\cos\alpha)$

$a = \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad dt = \frac{dx}{v}$

$v\frac{dv}{dx} = g(\sin\alpha - \gamma x\cos\alpha)$

$\int_0^v v\,dv = g\int_0^x (\sin\alpha - \gamma x\cos\alpha)\,dx$

$v^2 = 2g(\sin\alpha\, x - \gamma\frac{x^2}{2}\cos\alpha)$

Зупинка $v = 0 \Rightarrow$

$2x\sin\alpha - \gamma x^2\cos\alpha = 0$

$\gamma x\cos\alpha = 2\sin\alpha$

$x = \frac{2\sin\alpha}{\gamma\cos\alpha} = \frac{2}{\gamma}\operatorname{tg}\alpha$

$v_{max}^2 = g(2\sin\alpha\frac{2}{\gamma}\operatorname{tg}\alpha - \gamma\cos^2\alpha\frac{4}{\gamma^2}\operatorname{tg}^2\alpha)$

$v_{max} = \sqrt{\frac{g\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\gamma}}$

Знайдено макс. швидкість

$\frac{d}{dx}(x\sin\alpha - \frac{x^2}{2}\gamma\cos\alpha) = 0$

$\sin\alpha - x\gamma\cos\alpha = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\gamma}\operatorname{tg}\alpha$

$v_{max}^2 = g(2\sin\alpha\frac{1}{\gamma}\operatorname{tg}\alpha - \gamma\cos\alpha\frac{1}{\gamma^2}\operatorname{tg}^2\alpha)$

$v_{max} = \sqrt{\frac{g\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\gamma}}$.

3.170

Струм, що протікає у цьому колі через опір, становить

$I = \frac{U_0 - u}{R}$, де u — поточне значення напруги на конденсаторі.

З іншого боку $I = \frac{dq}{dt}$

На конденсаторі $dq = C\,du$

$$C\frac{du}{dt} = \frac{U_0 - u}{R}$$

$$\int_0^u \frac{du}{U_0 - u} = \frac{1}{RC}\int_0^\tau dt$$

$$-\ln(U_0 - U) + \ln U_0 = \frac{\tau}{RC}$$

$$\tau = -RC\ln\left(1 - \frac{u}{U_0}\right)$$

Билет 17

3.156

$R = \rho\frac{l}{S}$

Виділимо дві концентричні сфери радіусів r і $r+dr$.

Опір між ними сферами dR:

$$dR = \rho\frac{r+dr-r}{S(r)} = \rho\frac{dr}{4\pi r^2}$$

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{\rho\,dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$. при $b \to \infty$ $R = \frac{\rho}{4\pi}$

Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота ϕ по закону ω = ω0 - aϕ, где ω0 и a — положительные постоянные. В момент времени t = 0 угол ϕ = 0. Найти зависимости от времени:
а) угла поворота; б) угловой скорости.

1.49

$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

$\omega = \omega_0 + a\varphi$

$\omega_0, a > 0 = const$

$t = 0, \ \varphi = 0$

$\frac{d\omega}{dt} = -a\frac{d\varphi}{dt} = -a\omega$

$\varphi(t) - ?$

$\omega(t) - ?$

$\int \frac{d\omega}{\omega} = -\int a\,dt$

$\ln\omega = -at + C$

при $t = 0$ $C = \ln\omega_0$

$\ln\omega - \ln\omega_0 = -at$

$\ln\frac{\omega_0}{\omega} = at$

$\frac{\omega_0}{\omega} = e^{-at}$

$\omega = \omega_0\, e^{-at}$

$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

$\varphi = \int \omega(t)\,dt$ $\qquad x = -at$

$\varphi = \int \omega_0 e^{-at}\, d(-at)$

$\varphi = -\frac{\omega_0}{a} e^{-at} + C$

$0 = -\frac{\omega_0}{a} + C \Rightarrow \frac{\omega_0}{a}$

$\varphi = -\frac{\omega_0}{a}\cdot e^{-at} + \frac{\omega_0}{a}$

$\varphi = \frac{\omega_0}{a}(1 - e^{-at})$

Билет 18

Однородному цилиндру сообщают начальный импульс, в результате чего он начинает катиться без скольжения вверх по наклонной плоскости со скоростью v0=3,00 м/с. Плоскость образует с горизонтом угол α=20,0°.

б) На какую высоту h поднимется цилиндр?

1.192

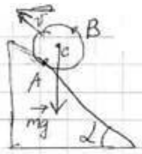
Дано:

$v_0 = 3$ м/с

$\alpha = 20^\circ$

а) t - ?

б) h - ?



$$p(t) = m\vec{v_0} + m\vec{g}t$$

$$v = v_0 + v_0 - gt\sin\alpha + v_0 - gt\sin\alpha =$$

$$= 3v_0 - 2gt\sin\alpha.$$

а) В момент остановки

$$w_c t = v \qquad 3v_0 - 2gt = 0 \qquad F_{тр} = \frac{m w_c}{2}$$

$$t = \frac{v}{w_c} \qquad t = \frac{3v_0}{2g\sin\alpha} \qquad mg\sin\alpha - F_{тр} = mW$$

$$mg\sin\alpha = \frac{3}{2} m w_c$$

$$W_c = \frac{2}{3} g\sin\alpha$$

$$t = \frac{9}{2\cdot 9{,}8\cdot\sin 20^\circ} = 1{,}34 с \qquad t = \frac{3v_0}{2g\sin\alpha}$$

б) $mgh = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$ $\qquad \boxed{v_c = \omega R}$ без скольжения

$$mgh = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mR^2}{2}\cdot\frac{\omega^2}{2} =$$

$$= \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mv_c^2}{4} = \frac{3}{4}\frac{v_c^2}{g}$$

$$h = \frac{3v^2}{4g} = 0{,}69 м.$$

Ответ: $t = 1{,}34$ с, $h = 0{,}69$ м.

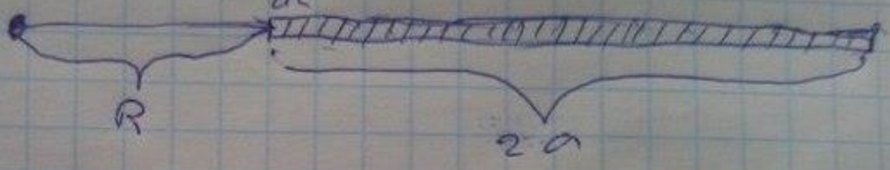
№

Дано:

$r = 2a$

λ, R

E - ?



$$\lambda = \frac{q}{r}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\int dE = \int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad q = \lambda 2a$$

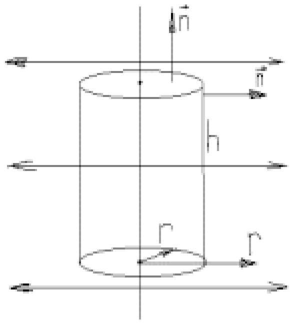
$$\int_0^E dE = \int_R^{R+2a}\frac{\lambda\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{R+2a}\frac{dr}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2a}{R^2+2Ra}$$

№

Билет 19

Имеется бесконечно длинная прямая нить, заряженная равномерно с линейной плотностью λ = 0,40 мкКл/м. Вычислить разность потенциалов точек 1 и 2, если точка 2 находится в η = 2,0 раза дальше от нити, чем точка 1.

3.31 Бесконечно длинная прямая нить заряжена равномерно с линейной плотностью λ=0.40. Вычислить разность потенциалов точек 1и 2 если т.2 находится дальше от нити чем т.1.



Дано:

λ , $r_2/r_1 = \eta$ | $\square \mathbf{E}d\mathbf{S}=1/\varepsilon_0\cdot\int\lambda dl$ $\square$ $E2\pi rh=\lambda h/\varepsilon_0$

$\Delta\varphi$ –? | $E=\lambda/2\pi\varepsilon_0 r$ $\square \mathbf{E}d\mathbf{l}=0$

$\varphi_1-\varphi_2=\int E(r)\,dr=\lambda/2\pi\varepsilon_0\ln(r_2/r_1)=\lambda/2\pi\varepsilon_0\ln(\eta)$

Ответ: $\Delta\varphi=\lambda/2\pi\varepsilon_0\ln(\eta)$.

Вертикально расположенный однородный стержень массы M и длины l может вращаться вокруг своего верхнего конца. В нижний конец стержня попала, застряв, горизонтально летевшая пуля массы m, в результате чего стержень отклонился на угол α. Считая m << M, найти:

а) скорость летевшей пули;

Решение:

Закон сохранения момента импульса относительно точки подвеса в момент попадания пули:

$$m\cdot V_0\cdot L = m\cdot L^2\cdot\omega + J_0\cdot\omega$$

$$m\cdot V_0\cdot L = m\cdot L^2\cdot\omega + \frac{M\cdot L^2}{3}\cdot\omega$$

$$\omega = \frac{m\cdot V_0}{m\cdot L + \frac{M\cdot L}{3}}$$

После этого стержень поднимается в потенциальном поле силы тяжести. Закон сохранения энергии:

$$\left(m\cdot L^2 + \frac{M\cdot L^2}{3}\right)\cdot\frac{\omega^2}{2} = \left[M\cdot g\cdot\frac{L}{2}\cdot(1-\cos(\alpha))\right] + m\cdot L\cdot g\cdot(1-\cos(\alpha))$$

$$\left(m\cdot L^2 + \frac{M\cdot L^2}{3}\right)\cdot\frac{(m\cdot V_0)^2}{2\cdot\left(m\cdot L + \frac{M\cdot L}{3}\right)^2} = \left[M\cdot\frac{L}{2}\cdot(1-\cos(\alpha))\right] + m\cdot L\cdot(1-\cos(\alpha))$$

$$V_0 = \frac{\left[g\cdot L\cdot(1-\cos(\alpha))\cdot\left(5\cdot M\cdot m + M^2 + 6\cdot m^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{m\cdot\sqrt{3}}$$

$$V_0 = \frac{M}{m}\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{3}\cdot g\cdot L} \qquad (m<<M)$$

Билет 20

Пространство заполнено зарядом с объемной плотностью $\rho = \rho_0 e^{-\alpha r^3}$, где ρ_0 и α — положительные константы, r — расстояние от центра данной системы. Найти модуль вектора напряженности электрического поля как функцию r. Исследовать полученное выражение при малых и больших r, т. е. при $\alpha r^3 \ll 1$ и $\alpha r^3 \gg 1$.

Решение: $\oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = Q$

$$Q = \int_{V_1} \rho\, dV = \int_0^r \rho_0 e^{-\alpha r^3} 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{3} 4\pi\rho_0 \int_0^r e^{-\alpha r^3} d(r^3) = -\frac{4}{3}\pi\rho_0 \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha r^3}\Big|_0^r =$$

$$= \frac{4\pi\rho_0}{3\alpha}\left(1 - e^{-\alpha r^3}\right)$$

$$\underbrace{D \cdot 4\pi r^2}_{N} = \underbrace{\frac{4\pi\rho_0}{3\alpha}\left(1 - e^{-\alpha r^3}\right)}_{Q}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{3\alpha\varepsilon_0 r^2}\left(1 - e^{-\alpha r^3}\right)$$

а) $\alpha r^3 \ll 1$ $\qquad E \approx \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}$

б) $\alpha r^3 \gg 1$ $\qquad E \approx \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 \alpha r^2}$

Ответ: $E = \frac{\rho_0}{3\alpha\varepsilon_0 r^2}\left(1 - e^{-\alpha r^3}\right)$

Найти индукцию магнитного поля в точке O контура с током I, который показан:

б) на рис. 3.60, б; радиус a и сторона b известны.

б) $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 + \vec{B}_5$

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{l}_2 \uparrow\uparrow \vec{r}_2 \\ d\vec{l}_5 \uparrow\downarrow \vec{r}_5 \end{array}\right\} B_2, B_5 = 0 \quad ; \quad \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4$$

$$\vec{B}_1 \uparrow\uparrow \vec{B}_3 \uparrow\uparrow \vec{B}_4 \to B = B_1 + B_3 + B_4$$

$$B = \frac{3}{4}\frac{\mu_0 I}{2a} + \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\left[\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2\right] = \underline{\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{3\pi}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{b}\right)}$$

Ответ: а) $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{2\pi - 4}{a} + \frac{4}{b}\right)$

б) $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{3\pi}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{b}\right)$

Катер массы m движется по озеру со скоростью v_0. В момент t = 0 выключили его двигатель. Считая силу сопротивления воды движению катера пропорциональной его скорости F = —rv, найти:

а) время движения катера с выключенным двигателем;

б) скорость катера в зависимости от пути, пройденного с выключенным двигателем, а также полный путь до остановки;

в) среднюю скорость катера за время, в течение которого его начальная скорость уменьшится в η раз.

Задача № 1.100

После выключения двигателя катер движется только под действием силы сопротивления воды $\vec{F}=-r\vec{v}$. Поэтому уравнение его движения в скалярном виде:

$$F=ma \Rightarrow -rv=ma \Rightarrow m\frac{dv}{dt}=-rv \Rightarrow \frac{dv}{dt}=-\left(\frac{r}{m}\right)v.$$

Интегрируя это выражение находим зависимость $v(t)$:

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=\int_0^t-\left(\frac{r}{m}\right)dt \Rightarrow \ln v\Big|_{v_0}^{v}=-\left(\frac{r}{m}\right)t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln v-\ln v_0=-\left(\frac{r}{m}\right)t \Rightarrow \ln\frac{v}{v_0}=-\left(\frac{r}{m}\right)t \Rightarrow v=v_0e^{-\frac{r}{m}t}$$

Т.к. конечная скорость $v=0$, то $0=v_0e^{-\frac{r}{m}t}$, значит $e^{-\frac{r}{m}t}=0$. Это возможно при $t\to\infty$. Следовательно время движения катера с выключенным мотором очень велико. Интегрируя выражение для v, имеем:

$$S=\int_0^t v\,dt=\int_0^t v_0e^{-\frac{r}{m}t}dt=-\left(\frac{m}{r}\right)v_0\left(e^{-\frac{r}{m}t}-1\right)=$$

$$=v_0\left(\frac{m}{r}\right)\left(1-e^{-\frac{r}{m}t}\right) \Rightarrow \frac{Sr}{m}=v_0-\underbrace{v_0e^{-\frac{r}{m}t}}_{v}=v_0-v \Rightarrow$$

$v=v_0-\frac{Sr}{m}$ - зависимость скорости от пути, пройденного с выключенным двигателем. Полный путь до остановки получим приравняв $v=0$.

$$0=v_0-\frac{Sr}{m} \Rightarrow v_0=\frac{S_{пол}r}{m} \Rightarrow S_{пол}=\frac{v_0m}{r}.$$

Средняя скорость за время, в течение которого скорость падает от v_0 до $\frac{v_0}{\eta}$ по определению: $\langle v\rangle=\frac{S}{t}$. Найдем S и t.

$v=v_0-\frac{Sr}{m}$, при $v=\frac{v_0}{\eta}$ получим: $\frac{v_0}{\eta}=v_0-\frac{Sr}{m} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_0(1-\eta)=-\frac{\eta Sr}{m} \Rightarrow v_0(\eta-1)=\frac{\eta Sr}{m} \Rightarrow S=\frac{v_0m(\eta-1)}{\eta r}.$$

$v=v_0e^{-\frac{r}{m}t}$, при $v=\frac{v_0}{\eta}$ имеем: $\frac{v_0}{\eta}=v_0e^{-\frac{r}{m}t} \Rightarrow$

$$\frac{1}{\eta}=e^{-\frac{r}{m}t} \Rightarrow -\frac{r}{m}t=\ln\left(\frac{1}{\eta}\right) \Rightarrow \ln\eta=\frac{r}{m}t \Rightarrow t=\frac{\ln\eta\, m}{r}$$

Значит

$$\langle v\rangle=\frac{S}{t}=\frac{\frac{v_0m(\eta-1)}{\eta r}}{\frac{\ln\eta\, m}{r}}=\frac{v_0m(\eta-1)r}{\eta r\ln\eta\, m}=v_0\frac{(\eta-1)}{\eta\ln\eta}.$$