Тема 4. Елементи лінійної алгебри

14 Лінійні простори. Розмірність та базис лінійного простору. Зв'язок між базисам у скінченовимірному лінійному просторі. Перетворення координат вектора при зміні базиса.

14.1 Лінійні простори.

В різних розділах математики ми часто зустрічаємося з об'єктами, для яких введено операції додавання та множення на число. Наприклад, в геометрії такими об'єктами є вектори. Для них задано операцію суми (як вектор, який з'єднує початок першого вектора з кінцем другого, якщо початок другого вектора співпадає з кінцем першого вектора), та операцію множення на число (як вектор з відповідно пропорційною довжиною, колінеарний та спінаправлений з даним вектором), див. лекцію 6. У множині квадратних матриць порядку n з дійсними елементами також вводяться оперції додавання та множення на число (див. лекцію 1). В математичному аналізі такими об'єктами є, наприклад, функції неперервні на заданому відрізку $[a, b]$, тощо.

У наведених прикладах операції додавання та множення на число виконуються над різними об'єктами. Для того, щоб вивчати всі такі множини об'єктів з одної точки зору, в математиці вводиться поняття абстрактного лінійного простору.

Означення 14.1. Непуста множина V елементів довільної природи називається *лінійним* (*векторним*) *простором*, якщо на цій множині

I. задано операцію додавання елементів, тобто двом довільним елементам x та y з множини V ставиться у відповідність елемент u з множини V, який називається сумою елементів x та y, причому для довільних x, y, $z \in V$ виконуються аксіоми:

1) $x + y = y + x$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) у множині V існує *нульовий елемент* $\mathbf{0}$ такий, що $x + \mathbf{0} = x$, для будь-якого $x \in V$;

4) для кожного елемента $x \in V$ існує *протилежний елемент* $x' \in V$ такий, що $x + x' = \mathbf{0}$;

II. задано операцію множення на число, тобто будь-якому елементу x з множини V та довільному числу λ, ставиться у відповідність елемент $u = \lambda x$ з множини V, який називається добутком елемента x на число λ, причому для довільних x, $y \in V$ та довільних λ, μ виконуються аксіоми:

5) $1 \cdot x = x$;

6) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

8)$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Якщо числа λ, μ, ..., що фігурують в означенні 14.1 беруться з множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, то лінійний простір V називається дійсним лінійним простором. Якщо ці числа беруться з множини комплексних чисел $\mathbb{C}$, то простір V називається комплексним лінійним простором. Далі ми переважно будемо розглядати дійсні лінійні простори. Наведемо декілька прикладів.

Приклад 14.1. Множина натуральних чисел $\mathbb{N}$ не є лінійним простором, оскільки для довільного натурального числа x з $\mathbb{N}$ число λx не належить $\mathbb{N}$, якщо $\lambda \leq 0$.

Приклад 14.2. Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ є лінійним простором, оскільки для довільних x та y з $\mathbb{R}$ визначено елементи $x + y \in \mathbb{R}$ та $\lambda x \in \mathbb{R}$ для $\lambda \in \mathbb{R}$, причому виконуються всі 8 аксіом з означення 14.1.

Приклад 14.3. Важливим прикладом дійсного лінійного простору є множина $\mathbb{R}^n$, елементами якої є впорядковані набори n дійсних чисел: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Цю множину називають *$n$-вимірним векторним простором.* Елементи $\mathbf{a}$ множини $\mathbb{R}^n$ будемо називати векторами, а числа $a_1, a_2, ..., a_n$ — координатами вектора $\mathbf{a}$.

Операції додавання та множення на число $\lambda \in \mathbb{R}$, у множині $\mathbb{R}^n$ задаються відповідно правилами:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n);$$

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n).$$

Очевидно, що ці операції задовольняють всі 8 аксіом означення 14.1.

Випадки $n = 2$ та $n = 3$, тобто $\mathbb{R}^2$ — двовимірний векторний простір, та $\mathbb{R}^3$ — тривимірний векторний простір ми частково розглядали у курсі векторної алгебри (лекції 6–8).

Приклад 14.4. Множина $\mathbb{C}([a, b])$ всіх дійснозначних функцій f, неперервних на відрізку $[a, b]$, є лінійним простором.

Дійсно, для довільних функцій f_1 та f_2 з множини $\mathbb{C}([a, b])$ функція $f_1 + f_2$ є також неперервною на відрізку $[a, b]$, а отже $f_1 + f_2 \in \mathbb{C}([a, b])$, причому для довільних f_1, f_2, f_3, f з множини $\mathbb{C}([a, b])$

1) $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$;

2) $(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3)$;

3) існує функція $f_0 \equiv 0$, яка належить множині $\mathbb{C}([a, b])$ така, що для довільної $f \in \mathbb{C}([a, b])$ виконується рівність $f + f_0 = f$;

4) для кожної функції $f \in \mathbb{C}([a, b])$ існує функція $(-f) \in \mathbb{C}([a, b])$ така, що $f + (-f) = f_0$.

Крім того, для довільного $\lambda \in \mathbb{R}$ та довільної функції $f \in \mathbb{C}([a, b])$ функція (λf) також є неперервною на $[a, b]$, тобто $(\lambda f) \in \mathbb{C}([a, b])$, причому для довільних λ, $\mu \in \mathbb{R}$ справедливі рівності:

5) $1 \cdot f = f$;

6) $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$;

7) $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$;

8) $\lambda(f_1 + f_2) = \lambda f_1 + \lambda f_2$.

Приклад 14.5. Множина всіх дійснозначних функцій f, обмежених на відрізку $[a, b]$ деяким додатним числом c, не є лінійним простором.

Дійсно, для довільних функцій f_1 та f_2 з того, що $|f_1| \leq c$ та $|f_2| \leq c$, не випливає, що $|f_1 + f_2| \leq c$.

Приклад 14.6. Множина всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами фіксованого степеня n не утворює лінійного простору, оскільки сума двох многочленів степеня n може бути многочленом нижчого степеня. А множина всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами до фіксованого степеня n є лінійним простором.

Розглянемо деякі властивості лінійного простору.

Властивість 1. В довільному лінійному просторі V існує єдиний нульовий елемент $\mathbf{0}$, та для кожного елемента x цього простору існує єдиний протилежний елемент x'.

Властивість 2. В довільному лінійному просторі V:

1) нульовий елемент $\mathbf{0}$ дорівнює добутку будь-якого елемента x цього простору на число 0;

2) протилежний елемент x' до елемента x дорівнює добутку елемента x на число -1.

Елементи лінійного простору будь-якої природи називають *векторами.*

14.2 Базис та розмірність лінійного простору.

Перш ніж ввести поняття розмірності лінійного простору, нагадаємо поняття лінійної залежності і незалежності системи векторів, яке було дано у лекції 7. Це поняття дослівно переноситься на загальний лінійний простір.

Означення 14.2. Вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_m$, ... деякого лінійного простору V називаються *лінійно залежними*, якщо існують такі дійсні числа c_1, c_2,...,c_m, ..., хоча б одне з яких не дорівнює нулю, що

$$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + ... + c_m\mathbf{e}_m + ... = \mathbf{0}. \tag{14.1}$$

Якщо рівність (14.1) виконується тільки, коли всі $c_1 = c_2 = ... = c_m = ... = 0$, то система векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_m$, ..., називається *лінійно незалежною.*

Нагадаємо також основні властивості лінійної залежності і незалежності векторів без доведення (доведення див. у лекції 7).

Властивість 1. Якщо серед векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_m$, ..., є нульовий вектор $\mathbf{0}$, то система векторів є лінійно залежною.

Властивість 2. Якщо вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_k$, системи векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_m$, ..., є лінійно залежними, то і всі вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_m$, ..., цієї системи є лінійно залежними.

Властивість 3. Для того, щоб вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_m$, ..., були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб один з них був лінійною комбінацією інших векторів системи.

Означення 14.3. Лінійний простір V називається *n-вимірним*, якщо у ньому є n лінійно незалежних векторів і немає більшого числа лінійно незалежних векторів (позначається V_n). При цьому число n називається *розмірністю* простору. Якщо у лінійному просторі можна знайти будь-яку кількість лінійно незалежних векторів, то простір називається *нескінченовимірним.*

Означення 14.4. Сукупність n лінійно незалежних векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ n-вимірного лінійного простору V_n називається *базисом* цього простору, якщо довільний елемент $\mathbf{a}$ простору є лінійною комбінацією векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, тобто існують дійсні числа c_1, c_2,...,c_n, принаймні одне з яких не дорівнює нулю, такі, що

$$\mathbf{a} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + ... + c_n\mathbf{e}_n. \tag{14.2}$$

При цьому рівність (14.2) називається розкладом вектора $\mathbf{a}$ за базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, а числа c_1, c_2,...,c_n — координатами вектора $\mathbf{a}$ у цьому базисі.

Теорема 14.1. *Кожен вектор* $\mathbf{a}$ *n-вимірного лінійного простору* V_n *може бути єдиним чином представлений у вигляді лінійної комбінації векторів базису* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$.

Доведення. Припустимо, що існує два різних розклади вектора $\mathbf{a}$ за базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ лінійного простору V_n:

$$\mathbf{a} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + ... + c_n\mathbf{e}_n,$$

і

$$\mathbf{a} = c_1'\mathbf{e}_1 + c_2'\mathbf{e}_2 + ... + c_n'\mathbf{e}_n.$$

Тоді

$$(c_1 - c_1')\mathbf{e}_1 + (c_2 - c_2')\mathbf{e}_2 + ... + (c_n - c_n')\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Але вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ є лінійно незалежними, звідки випливає, що $(c_1 - c_1') = 0$, $(c_2 - c_2') = 0$, ..., $(c_n - c_n') = 0$. □

14.3 Зв'язок між базисам у скінченовимірному лінійному просторі.

Розглянемо у n-вимірному лінійному просторі V_n два базиси:

$$\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad ..., \quad \mathbf{e}_n, \tag{14.3}$$

$$\mathbf{e}_1', \quad \mathbf{e}_2', \quad ..., \quad \mathbf{e}_n'. \tag{14.4}$$

Кожен вектор другого базису можна однозначно розкласти за векторами першого базису, тобто існують такі числа τ_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, що

$$\mathbf{e}'_j = \tau_{1j}\mathbf{e}_1 + \tau_{2j}\mathbf{e}_2 + ... + \tau_{nj}\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ij}\mathbf{e}_i, \quad j = \overline{1, n}. \tag{14.5}$$

Отже, стовпець $\begin{pmatrix} \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ ... \\ \tau_{nj} \end{pmatrix}$ є стовпцем координат вектора $\mathbf{e}'_j$ в базисі (14.3). Матриця

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & ... & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & ... & \tau_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & ... & \tau_{nn} \end{pmatrix}, \tag{14.6}$$

стовпці якої є стовпцями координат векторів базису (14.4) у базисі (14.3), називається матрицею переходу від базиса (14.3) до базиса (14.4).

Зв'язок між базисами (14.3) і (14.4) можна записати у вигляді матричної рівності:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ ... \\ \mathbf{e}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & ... & \tau_{n1} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & ... & \tau_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \tau_{1n} & \tau_{2n} & ... & \tau_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ ... \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = T^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ ... \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу від одного базиса до іншого є невиродженою, інакше вектори $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$ були б лінійно залежними, що протирічить означенню базиса.

Будь-яка невироджена квадратна матриця порядку n з дійсними елементами є матрицею переходу від одного базиса n-вимірного лінійного простору V_n до іншого базиса цього простору.

14.4 Перетворення координат вектора при зміні базиса.

Нехай у n-вимірному лінійному просторі V_n задано два базиса (14.3) і (14.4) з матрицею переходу (14.6). Знайдемо зв'язок між координатами довільного вектора у різних базисах. А саме, нехай

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n,$$

і

$$\mathbf{a} = \alpha'_1\mathbf{e}'_1 + \alpha'_2\mathbf{e}'_2 + ... + \alpha'_n\mathbf{e}'_n.$$

Використовуючи співвідношення (14.5), отримаємо

$$\mathbf{a} = \alpha'_1\Big(\sum_{i=1}^{n}\tau_{i1}\mathbf{e}_i\Big) + \alpha'_2\Big(\sum_{i=1}^{n}\tau_{i2}\mathbf{e}_i\Big) + ... + \alpha'_n\Big(\sum_{i=1}^{n}\tau_{in}\mathbf{e}_i\Big) =$$

$$= \alpha'_1\Big(\tau_{11}\mathbf{e}_1 + \tau_{21}\mathbf{e}_2 + ... + \tau_{n1}\mathbf{e}_n\Big) + \alpha'_2\Big(\tau_{12}\mathbf{e}_1 + \tau_{22}\mathbf{e}_2 + ... + \tau_{n2}\mathbf{e}_n\Big) + ...+$$

$$+\alpha'_n\Big(\tau_{1n}\mathbf{e}_1 + \tau_{2n}\mathbf{e}_2 + ... + \tau_{nn}\mathbf{e}_n\Big) =$$

$$= \mathbf{e}_1\Big(\alpha'_1\tau_{11} + \alpha'_2\tau_{12} + ... + \alpha'_n\tau_{1n}\Big) + \mathbf{e}_2\Big(\alpha'_1\tau_{21} + \alpha'_2\tau_{22} + ... + \alpha'_n\tau_{2n}\Big) + ...+$$

$$+\mathbf{e}_n\Big(\alpha'_1\tau_{n1} + \alpha'_2\tau_{n2} + ... + \alpha'_n\tau_{nn}\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\alpha'_1\tau_{i1} + \alpha'_2\tau_{i2} + ... + \alpha'_n\tau_{in}\Big)\mathbf{e}_i.$$

Порівнюючи два розклади вектора $\mathbf{a}$, отримаємо, що

$$\alpha_i = \alpha'_1\tau_{i1} + \alpha'_2\tau_{i2} + ... + \alpha'_n\tau_{in}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким чином,

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ ...\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{12} & ... & \tau_{1n}\\ \tau_{21} & \tau_{22} & ... & \tau_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & ... & \tau_{nn}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\alpha'_1\\ \alpha'_2\\ ...\\ \alpha'_n\end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix}\alpha'_1\\ \alpha'_2\\ ...\\ \alpha'_n\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix}\alpha'_1\\ \alpha'_2\\ ...\\ \alpha'_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{21} & ... & \tau_{n1}\\ \tau_{12} & \tau_{22} & ... & \tau_{n2}\\ ... & ... & ... & ...\\ \tau_{1n} & \tau_{2n} & ... & \tau_{nn}\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ ...\\ \alpha_n\end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ ...\\ \alpha_n\end{pmatrix}.$$

Приклад 14.7. Розглянемо дійсний тривимірний простір з базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Нехай вектори $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ також утворюють базис, причому

$$\begin{cases}\mathbf{e}'_1 = 5\mathbf{e}_1 - 1\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2,\\ \mathbf{e}'_3 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.\end{cases}$$

Нехай в базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ задано вектор $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$. Знайдемо координати вектора $\mathbf{a}$ в базисі $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$.

Для цього запишемо матрицю переходу T від базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ до базиса $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$, та знайдемо обернену до неї:

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix}.$$

Нехай $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{e}'_1 + \beta\mathbf{e}'_2 + \gamma\mathbf{e}'_3$, де α, β, γ — координати вектора $\mathbf{a}$ в базисі $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$. Тоді

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 6 \\ -27 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $\mathbf{a} = -13\mathbf{e}'_1 + 6\mathbf{e}'_2 - 27\mathbf{e}'_3$.

15 Лінійні оператори. Матриця лінійного оператора в заданому базисі лінійного простору. Власні числа та власні вектори лінійного оператора

15.1 Поняття лінійного оператора.

Розглянемо два лінійних простори V_n та V_m розмірностей n та m відповідно.

Означення 15.1. *Оператором*, що діє з лінійного простору V_n у лінійний простір V_m, будемо називати відображення $\mathcal{A}$: $V_n \to V_m$, яке кожному елементу $\mathbf{x}$ простору V_n ставить у відповідність деякий елемент $\mathbf{y}$ простору V_m. При цьому будемо використовувати позначення $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$.

Означення 15.2. Оператор $\mathcal{A}$, що діє з V_n у V_m, називається *лінійним*, якщо для будь-яких векторів $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ простору V_n, і довільного $\lambda \in \mathbb{R}$ виконуються співвідношення:

1) $\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{A}\mathbf{y}$, (адитивність оператора);
2) $\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathcal{A}\mathbf{x}$, (однорідність оператора).

Означення 15.3. Якщо простір V_m є простором дійсних чисел $\mathbb{R}$, то лінійний оператор $\mathcal{A}$ називається лінійним функціоналом.

Вектор $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ називається *образом* вектора $\mathbf{x}$, а сам вектор $\mathbf{x}$ — *прообразом* вектора $\mathbf{y}$.

Дії над лінійними операторами. *Сумою* двох лінійних операторів $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$, що діють з V_n у V_m, називається оператор $(\mathcal{A}+\mathcal{B})$, що задається рівністю:

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{x}, \quad \forall\mathbf{x} \in V_n.$$

Добутком оператора $\mathcal{A}$, що діє з V_n у V_m, *на число* λ називається оператор $(\lambda\mathcal{A})$, який задається рівністю:

$$(\lambda\mathcal{A})\mathbf{x} = \lambda(\mathcal{A}\mathbf{x}), \quad \forall\mathbf{x} \in V_n.$$

Нульовим називається оператор $\mathcal{O}$, який відображає всі елементи простору V_n у нульовий елемент $\mathbf{0}$ простору V_m, тобто

$$\mathcal{O}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in V_n.$$

Для кожного лінійного оператора $\mathcal{A}$, що діє з V_n у V_m, можна задати протилежний оператор $(-\mathcal{A})$ за правилом $(-\mathcal{A}) = (-1) \cdot \mathcal{A}$.

Легко перевірити, що **множина всіх лінійних операторів**, що діють з V_n у V_m, з визначеними вище операціями додавання та множення на скаляр та вибраними нульовим і протилежним операторами, **утворює лінійний простір**.

Якщо простори V_n і V_m співпадають, то оператор $\mathcal{A}$ відображає V_n в себе. Саме такі оператори будемо розглядати далі.

Оператор $\mathcal{E}$, що діє з V_n у V_n, називається *тотожнім* або *одиничним*, якщо він відображає кожний елемент простору V_n у себе, тобто

$$\mathcal{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V_n.$$

Добутком лінійних операторів $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$, що діють з V_n у V_n, називається оператор $(\mathcal{AB})$, який визначається рівністю:

$$(\mathcal{AB})\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V_n.$$

Легко перевірити, що оператор $(\mathcal{AB})$ є лінійним.

Матриця лінійного оператора в заданому базисі лінійного простору. Зафіксуємо у лінійному просторі V_n базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$. Нехай $\mathbf{x}$ — довільний елемент простору V_n, причому $\mathbf{x}$ має розклад у базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n.$$

Розглянемо лінійний оператор $\mathcal{A}$, що діє з V_n у V_n. В силу лінійності оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} = x_1\mathcal{A}\mathbf{e}_1 + x_2\mathcal{A}\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathcal{A}\mathbf{e}_n.$$

Оскільки вектори $\mathcal{A}\mathbf{e}_1$, $\mathcal{A}\mathbf{e}_2$, ..., $\mathcal{A}\mathbf{e}_n$ є також векторами з V_n, то кожен з них можна розкласти за базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$. Нехай

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_j = a_{1j}\mathbf{e}_1 + a_{2j}\mathbf{e}_2 + ... + a_{nj}\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i, \quad j = \overline{1, n},$$

де a_{ij}, — відповідні коефіцієнти, $i, j = \overline{1, n}$. Тоді

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} = x_1(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + ... + a_{n1}\mathbf{e}_n) + x_2(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + ... + a_{n2}\mathbf{e}_n) + ...+$$

$$+x_n(a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + ... + a_{nn}\mathbf{e}_n) =$$

$$= \mathbf{e}_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n) + \mathbf{e}_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n) + ...+$$

$$+\mathbf{e}_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n).$$

З іншого боку, вектор $\mathbf{y}$ має у базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ координати $(y_1, y_2, ..., y_n)$, тобто

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + ... + y_n\mathbf{e}_n.$$

Тому

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ ... \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називається матрицею оператора $\mathcal{A}$ в базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, а ранг цієї матриці — рангом оператора $\mathcal{A}$.

Таким чином, кожному лінійному оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця A в заданому базисі, і навпаки, кожній квадратній матриці A n-го порядку відповідає єдиний лінійний оператор $\mathcal{A}$, що діє з V_n у V_n, матрицею якого є матриця A.

Зв'язок між вектором $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ та його образом $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$ можна подати у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

або скорочено

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}.$$

Приклад 15.1. Нехай у просторі $\mathbb{R}^3$ задано базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, і лінійний оператор матрицею $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. Знайдемо образ $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ вектора $\mathbf{x} = 4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ за встановленою формулою

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} = 10\mathbf{e}_1 - 13\mathbf{e}_2 - 18\mathbf{e}_3$.

Приклад 15.2. З'ясувати, який із заданих операторів, що діють з $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, є лінійним: $\mathcal{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$; $\mathcal{B}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 - 4x_3 \\ 8x_3 + 11 \\ -x_2 \end{pmatrix}$. Для лінійного оператора записати матрицю в базисі $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Нехай $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ та $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ — два вектори з $\mathbb{R}^3$. Розглянемо спочатку оператор $\mathcal{A}$ і перевіримо для нього умови 1) і 2) означення 15.2.

Оскільки

$$\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 3(x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) \\ 4(x_1 + y_1) \\ (x_3 + y_3) - (x_2 + y_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y_1 - 2y_2 + y_3 \\ 4y_1 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{A}\mathbf{y},$$

то оператор $\mathcal{A}$ є адитивним. Перевіримо його на однорідність. Нехай $\lambda \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3\lambda x_1 - 2\lambda x_2 + \lambda x_3 \\ 4\lambda x_1 \\ \lambda x_3 - \lambda x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix} = \lambda\mathcal{A}\mathbf{x}.$$

Таким чином, оператор $\mathcal{A}$ є однорідним, а отже, є лінійним. Запишемо його матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{B}$ не є лінійним, оскільки

$$\mathcal{B}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)^2 - 4(x_3 + y_3) \\ 8(x_3 + y_3) + 11 \\ -(x_2 + y_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 - 4x_3 \\ 8x_3 + 11 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + y_2^2 - 4y_3 \\ 8y_3 + 11 \\ -y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2y_2 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \mathcal{B}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{y}.$$

Перетворення матриці лінійного оператора при переході до нового базиса. Нехай є n-вимірний лінійний простір V_n, і задано лінійний оператор $\mathcal{A}$, що діє з V_n у V_n. Розглянемо два базиса простору V_n: $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, та $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$

Наступна теорема дає зв'язок між матрицями одного і того ж самого оператора $\mathcal{A}$ у різних базисах.

Теорема 15.1. *Матриці A і A' лінійного оператора $\mathcal{A}$ у базисах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ та $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$ відповідно, зв'язані співвідношенням:*

$$A' = T^{-1}AT,$$

де T — матриця переходу від базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ до базиса $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$.

Доведення. Розглянемо довільний вектор $\mathbf{x}$ простору V_n та його образ $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$. Нехай в базисах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ та $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$ вектори $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ мають відповідно розклади:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{x} = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + ... + x'_n\mathbf{e}'_n$$

та

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + ... + y_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{y} = y'_1\mathbf{e}'_1 + y'_2\mathbf{e}'_2 + ... + y'_n\mathbf{e}'_n.$$

Запишемо співвідношення $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ у матричній формі у базисах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ та $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$ відповідно:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix},$$

тобто $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, та

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ ... \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & ... & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & ... & a'_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a'_{n1} & a'_{n2} & ... & a'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix},$$

тобто $\mathbf{y}' = A'\mathbf{x}'$. Тут матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{і} \quad A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & ... & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & ... & a'_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a'_{n1} & a'_{n2} & ... & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

є матрицями оператора $\mathcal{A}$ в базисах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ і $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$ відповідно.

Оскільки T — матриця переходу від базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ до базиса $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$, то

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x}'.$$

Домножаючи цю рівність на матрицю A зліва, отримаємо

$$A\mathbf{x} = AT\mathbf{x}',$$

звідки
$$\mathbf{y} = AT\mathbf{x}'.$$
Але $\mathbf{y} = T\mathbf{y}'$, з чого випливає, що
$$T\mathbf{y}' = AT\mathbf{x}'.$$
Таким чином,
$$\mathbf{y}' = T^{-1}AT\mathbf{x}'.$$
Порівнюючи рівності $\mathbf{y}' = T^{-1}AT\mathbf{x}'$ та $\mathbf{y}' = A'\mathbf{x}'$, бачимо, що
$$A' = T^{-1}AT.$$
Теорему доведено. □

Зауважимо, що зі співвідношення $A' = T^{-1}AT$ можна виразити матрицю A: $A = TA'T^{-1}$.

З теореми 15.1 випливає, що у різних базисах матриця лінійного оператора має різний вигляд. Найбільш простою є матриця діагонального вигляду.

Матриці A' і A, зв'язані співвідношенням $A' = T^{-1}AT$, називаються *подібними*. Дві властивості подібних матриць містить наступний наслідок.

Наслідок 15.1. $r(A) = (A')$, *та* $\det A = \det A'$, *тобто подібні матриці мають однакові ранги та однакові визначники.*

Доведення. З рівності $A' = T^{-1}AT$ випливає, що $\det A' = \det T^{-1} \cdot \det A \cdot \det T$. А оскільки $\det T^{-1} \cdot \det T = 1$, то $\det A' = \det A$, і $r(A) = (A')$. □

Приклад 15.3. Матриця лінійного оператора $\mathcal{A}$, що діє з $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, в базисі $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ має вигляд:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Знайти матрицю A' цього оператора в базисі $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

Запишемо матрицю T переходу від базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ до базиса $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо

$$T^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Тоді шукана матриця A' лінійного оператора $\mathcal{A}$ в базисі $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ має вигляд:

$$A' = T^{-1}AT = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{46}{3} & -\frac{29}{3} & 9 \\ -\frac{61}{3} & -\frac{26}{3} & 10 \\ -\frac{160}{3} & -\frac{80}{3} & 28 \end{pmatrix}.$$

15.2 Власні числа та власні вектори лінійного оператора.

Нехай є n-вимірний лінійний простір V_n, і задано лінійний оператор $\mathcal{A}$, що діє з V_n у V_n.

Означення 15.4. Вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ називається *власним вектором* лінійного оператора $\mathcal{A}$, якщо існує таке число λ, що

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}. \tag{15.1}$$

При цьому число λ називається *власним числом* оператора $\mathcal{A}$ (матриці A).

З означення випливає, що власний вектор під дією оператора $\mathcal{A}$ переходить у вектор, колінеарний до себе.

Приклад 15.4. Показати, що вектор $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$ є власним вектором лінійного оператора з матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, що відповідає власному значенню $\lambda = -1$.

Вектор $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$, заданий в базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, можна записати у вигляді вектор-стовпця $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Тоді

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{x}.$$

Перепишемо рівність (15.1) у матричній формі $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, або

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ ..., \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0, \end{cases}$$

тобто

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

де E — одинична матриця порядку n.

Відомо (див. лекцію 5), що однорідна система має ненульові розв'язки тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи менше n, тобто визначник основної матриці системи дорівнює нулю. Таким чином, отримали умову

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \qquad (15.2)$$

Ця умова є необхідною і достатньою умовою того, що λ є власним числом матриці A.

Визначник $\det(A - \lambda E)$ є многочленом n-го степеня відносно λ. Він називається *характеристичним многочленом* оператора $\mathcal{A}$ (матриці A), а рівняння (15.2) *характеристичним рівнянням* оператора $\mathcal{A}$ (матриці A). Підкреслимо, що корені характеристичного рівняння (15.2), взагалі кажучи, є комплексними числами.

Покажемо, що характеристичний многочлен лінійного оператора $\mathcal{A}$ не залежить від вибору базиса. Дійсно, нехай A — матриця лінійного оператора $\mathcal{A}$ в базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, а A' — матриця лінійного оператора $\mathcal{A}$ в новому базисі $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ...,

$\mathbf{e}'_n$. Нехай T — матриця переходу від базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ до базиса $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$. Розглянемо характеристичний многочлен:

$$\det(A'-\lambda E) = \det(T^{-1}\cdot A\cdot T-\lambda E) = \det(T^{-1}\cdot A\cdot T-\lambda T^{-1}ET) = \det(T^{-1}(A-\lambda E)T) =$$

$$= \det(T^{-1}) \cdot \det(A-\lambda E) \cdot \det(T) = \det(T^{-1}T) \cdot \det(A-\lambda E) = \det(A-\lambda E),$$

звідки

$$\det(A'-\lambda E) = \det(A-\lambda E),$$

що й треба було довести.

Як зазначалося вище, в різних базисах матриця лінійного оператора $\mathcal{A}$ має різний вигляд. Найбільш простою є діагональна матриця. Наступна теорема визначає базис, в якому матриця лінійного оператора має діагональний вигляд.

Теорема 15.2. *Для того, щоб матриця A лінійного оператора $\mathcal{A}$ була діагональною, необхідно і достатньо, щоб базисні вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ були власними векторами цього оператора.*

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай базисні вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ є власними векторами оператора $\mathcal{A}$. Тоді $\mathcal{A}\mathbf{e}_k = \lambda_k\mathbf{e}_k$, $k = \overline{1,n}$. Тому матриця A лінійного оператора $\mathcal{A}$ має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Доведемо достатність. Нехай матриця A лінійного оператора $\mathcal{A}$ у заданому базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ є діагональною. Тоді $\mathcal{A}\mathbf{e}_k = \lambda_k\mathbf{e}_k$, $k = \overline{1,n}$, звідки випливає, що $\mathbf{e}_k$, $k = \overline{1,n}$, — власні вектори оператора $\mathcal{A}$. □

Не для кожного лінійного оператора (квадратної матриці) існує базис, в якому матриця оператора є діагональною, оскільки власних векторів у оператора може бути менше ніж n. Розглянемо два важливі випадки, для яких це твердження справедливе.

Теорема 15.3. *Якщо власні значення λ_1, λ_2, ..., λ_n оператора $\mathcal{A}$ різні, то відповідні їм власні вектори є лінійно незалежними.*

Доведення. Доведемо теорему використовуючи метод математичної індукції. Для $n = 1$ твердження очевидне. Нехай теорема справедлива для $n = k$. Покажемо справедливість теореми для $n = k+1$. Припустимо супротивне, тобто $k+1$ власних векторів матриці є лінійно залежними. Тоді існують такі дійсні числа α_1, α_2, ..., α_{k+1}, що

$$\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{0}, \tag{15.3}$$

причому принаймні одне з α_1, α_2, ..., α_{k+1} не дорівнює нулю. З рівності (15.3) випливає, що

$$\alpha_1\mathcal{A}\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathcal{A}\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_{k+1}\mathcal{A}\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{0},$$

звідки

$$\alpha_1\lambda_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{0}.$$

Віднімемо від останньої рівності рівність (15.3), помножену на λ_{k+1}:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{e}_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{e}_k = \mathbf{0}.$$

Але, оскільки всі власні значення λ_1, λ_2, ..., λ_{k+1} — різні, а k власних векторів матриці є лінійно незалежними за припущенням, то отримали протиріччя. $\square$

Теорема 15.4. *Якщо матриця A лінійного оператора $\mathcal{A}$ є симетричною, тобто $A^T = A$, то всі його власні числа дійсні, і він має n лінійно незалежних власних векторів.*

Таким чином, з теорем 15.3 та 15.4 випливає, що **матриця A лінійного оператора $\mathcal{A}$ може бути зведена до діагонального вигляду** (в базисі із власних векторів оператора $\mathcal{A}$) принаймні у двох випадках:

1) якщо характеристичний многочлен оператора $\mathcal{A}$ **має n різних коренів**;

2) якщо матриця A лінійного оператора $\mathcal{A}$ **є симетричною**.

Розглянемо приклади.

Приклад 15.5. Знайти власні числа і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти відповідну діагональну матрицю до матриці A.

Знайдемо спочатку власні числа матриці A. Для цього складемо характеристичне рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння еквівалентне наступному

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0.$$

Звідси знаходимо два власних значення матриці A: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$.

Знайдемо власні вектори, що відповідають власним значенням матриці A. Нехай спочатку $\lambda_1 = 1$. Будемо шукати вектор $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ такий, що $A\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x}$, тобто

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Отже, отримаємо однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

ФСР цієї однорідної СЛАР складається з одного вектора $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Візьмемо, наприклад, $t = 1$. Таким чином, власним вектором матриці A, який відповідає числу $\lambda_1 = 1$, є вектор $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо власний вектор матриці A, який відповідає числу $\lambda_2 = 6$, тобто такий вектор $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, що $A\mathbf{x} = 6 \cdot \mathbf{x}$. Остання рівність еквівалентна тому, що

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Звідси отримаємо однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

ФСР цієї системи складається з одного вектора $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2s \\ 3s \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$. Покладемо, наприклад, $s = 1$. Тоді власним вектором матриці A, який відповідає числу $\lambda_2 = 6$, є вектор $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Зведемо матрицю A до діагонального вигляду. Оскільки власними числами матриці A є числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$, то діагональною матрицею, яка подібна до матриці A, є матриця

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

При цьому, матриця

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

стовпцями якої є стовпці координат власних векторів $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, є матрицею, яка приводить матрицю A до діагонального вигляду. Зробимо перевірку:

$$T^{-1}AT = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = A'.$$

16 Евклідів простір. Базис у евклідовому просторі. Ортонормовані базиси евклідового простору. Ортогональний оператор

16.1 Поняття евклідового простору.

Означення 16.1. Будемо казати, що у деякому дійсному просторі V задано *скалярний добуток*, якщо довільній парі елементів $\mathbf{x}\,\mathbf{y} \in V$ поставлено у відповідність дійсне число (позначатимемо його $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$), яке задовольняє наступні властивості:

1) $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
2) $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, де λ — довільне дійсне число;
3) $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$;
4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, для всіх $\mathbf{x} \in V$, і $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Означення 16.2. Дійсний лінійний простір, в якому введено скалярний добуток, називається *евклідовим*. Будемо позначати евклідів простір літерою E.

Приклад 16.1. Розглянемо лінійний простір всіх дійснозначних неперервних на інтервалі (a, b) функцій. Довільній парі функцій $\mathbf{f}$ і $\mathbf{g}$ з цієї множини поставимо у відповідність число

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_a^b \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} dx.$$

Неважко перевірити, що так задана відповідність визначає скалярний добуток для елементів простору.

Означення 16.3. *Довжиною* вектора $\mathbf{x}$ евклідового простору E називається число $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

Означення 16.4. *Кутом між векторами* $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ евклідового простору E називається кут φ такий, що

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}.$$

Означення 16.5. Вектори $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ евклідового простору E називаються *ортогональними*, якщо $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Довільний n-вимірний лінійний простір можна зробити евклідовим простором. Для цього на ньому потрібно задати скалярний добуток. Розглянемо у лінійному просторі V_n базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, і для двох довільних векторів $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n$ та $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + ... + y_n\mathbf{e}_n$ з простору V_n покладемо:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

Неважко перевірити, що для числа $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, заданого таким чином, виконуються всі 4 аксіоми означення 16.1. Дійсно,

1) $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = y_1x_1 + y_2x_2 + ... + y_nx_n = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$;

2) для довільного дійсного λ: $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\lambda x_1)y_1 + (\lambda x_2)y_2 + ... + (\lambda x_n)y_n = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;

3) для довільних $\mathbf{x}_1 = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ та $\mathbf{x}_2 = (x''_1, x''_2, ..., x''_n) \in V_n$, та $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in V_n$ виконується рівність

$$(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (x'_1 + x''_1)y_1 + (x'_2 + x''_2)y_2 + ... + (x'_n + x''_n)y_n =$$

$$= (x'_1y_1 + x'_2y_2 + ... + x'_ny_n) + (x''_1y_1 + x''_2y_2 + ... + x''_ny_n) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y});$$

4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq 0$, і, очевидно, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Отже, ми показали, що **довільний n-вимірний лінійний простір є евклідовим простором** відносно введеного скалярного добутку.

16.2 Ортонормований базис.

У лекції 14 було введено поняття базиса n-вимірного лінійного простору. Зрозуміло, що у лінійному просторі може бути нескінчена кількість різних базисів. Найбільш зручними для застосування є так звані ортонормовані базиси.

Означення 16.6. Будемо говорити, що n лінійно незалежних векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ n-вимірного евклідового простору E_n утворюють *ортогональний базис*, якщо вони є попарно ортогональними, тобто $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$.

Будемо говорити, що n лінійно незалежних векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ n-вимірного евклідового простору E_n утворюють *ортонормований базис*, якщо вони попарно ортогональні і довжина кожного з них дорівнює одиниці, тобто

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Для того, щоб дане нами означення 16.6 було коректним необхідно показати, що вектори з цього означення дійсно утворюють базис, тобто є лінійно незалежними. Покажемо це, тобто покажемо, що рівність

$$\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

можлива тільки для $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Для цього помножимо цю рівність скалярно на вектор $\mathbf{e}_1$:

$$\alpha_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \alpha_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + ... + \alpha_n(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) = 0,$$

звідки за означенням отримаємо $\alpha_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \alpha_2 \cdot 0 + ... + \alpha_n \cdot 0 = 0$, а отже $\alpha_1 = 0$. Аналогічно можна показати, що $\alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = 0$. Таким чином, вектори з означення 16.6 дійсно є лінійно незалежними.

Приклад 16.2. На площині $\mathbb{R}^2$ ортонормованим є, наприклад, базис $\overrightarrow{i} = (1, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1)$. У просторі $\mathbb{R}^3$ ортонормованим є, наприклад, базис $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$.

Теорема 16.1. *У будь-якому n-вимірному евклідовому просторі E_n існує ортонормований базис.*

Доведення. Покажемо, що із довільного базису евклідового простору E_n можна зробити ортогональний базис. Нехай у n-вимірному евклідовому просторі E_n задано n лінійно незалежних векторів $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$. За цими векторами побудуємо ортогональний базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$. Ця процедура називається *ортогоналізацією Грама-Шмідта.*

Покладемо

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1.$$

Вектор $\mathbf{e}_2$ шукатимемо у вигляді $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2 + \alpha\mathbf{e}_1$, підбираючи число α так, щоб виконувалася умова $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2 + \alpha\mathbf{e}_1) = 0$. Звідси $\alpha = -\frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}$. Таким чином, покладемо

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1.$$

Вектор $\mathbf{e}_3$ шукатимемо у вигляді $\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_3 + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2$, підбираючи числа α_1 і α_2 так, щоб виконувалися умови $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_3 + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2) = 0$, і $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) =$

$(\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_3+\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2) = 0$. Звідси отримаємо, що $\alpha_1 = -\frac{(\mathbf{f}_3,\mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)}$, а $\alpha_2 = -\frac{(\mathbf{f}_3,\mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)}$. Таким чином,

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_3 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)}\mathbf{e}_2.$$

Продовжуючи процедуру, припустимо, що попарно ортогональні вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_{k-1}$, $k \leq n$, побудовано. Шукатимемо вектор $\mathbf{e}_k$ у вигляді $\mathbf{e}_k = f_k + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_{k-1}\mathbf{e}_{k-1}$ так, щоб виконувалися умови: $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_k) = 0$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_k) = 0$, ..., $(\mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_k) = 0$. З цих умов знаходимо коефіцієнти: $\alpha_1 = -\frac{(\mathbf{f}_k,\mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)}$, $\alpha_2 = -\frac{(\mathbf{f}_k,\mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)}$, ..., $\alpha_{k-1} = -\frac{(\mathbf{f}_k,\mathbf{e}_{k-1})}{(\mathbf{e}_{k-1},\mathbf{e}_{k-1})}$. Таким чином,

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{f}_k - \frac{(\mathbf{f}_k, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 - \frac{(\mathbf{f}_k, \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)}\mathbf{e}_2 - ... - \frac{(\mathbf{f}_k, \mathbf{e}_{k-1})}{(\mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_{k-1})}\mathbf{e}_{k-1}.$$

При цьому, неважко помітити, що побудований вектор $\mathbf{e}_k$ відмінний від нуля, оскільки вектори $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$ є лінійно незалежними.

Процедуру слід продовжувати доти, доки ми не отримаємо n ортогональних векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$.

Для того, щоб з ортогонального базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ зробити ортонормований базис, достатньо кожен вектор базису поділити на його довжину. Таким чином, ортонормованим буде базис $\mathbf{e}'_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|}$, $\mathbf{e}'_2 = \frac{\mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_2|}$, ..., $\mathbf{e}'_n = \frac{\mathbf{e}_n}{|\mathbf{e}_n|}$. □

Очевидно, ортонормованих базисів у евклідовому просторі E_n багато. Тільки на будь-яких n лінійно незалежних векторах $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$ можна побудувати $n!$ ортонормованих базисів, в залежності від порядку розташування векторів у базисі.

Доведення теореми 16.1 визначає алгоритм ортогоналізації векторів. Розглянемо приклад.

Приклад 16.3. У просторі $\mathbb{R}^3$ задано три некомпланарних вектори $\mathbf{f}_1 = \Big(1, 2, -1\Big)$, $\mathbf{f}_2 = \Big(0, -3, 1\Big)$ та $\mathbf{f}_3 = \Big(2, 4, -3\Big)$. Побудувати за цією системою векторів ортонормований базис.

Скористаємося процедурою ортогоналізації Грама-Шмідта. Покладемо

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 = \Big(1, 2, -1\Big).$$

Обчислюємо $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1\cdot1+2\cdot2+(-1)\cdot(-1) = 6$, та $(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1) = 0\cdot1+(-3)\cdot2+1\cdot(-1) = -7$. Тому покладемо

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 = \Big(0, -3, 1\Big) + \frac{7}{6}\Big(1, 2, -1\Big) = \Big(\frac{7}{6}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\Big).$$

Обчислюємо $(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)=\frac{49}{36}+\frac{4}{9}+\frac{1}{36}=\frac{11}{6}$, $(\mathbf{f}_3,\mathbf{e}_1)=2\cdot1+4\cdot2+(-3)\cdot(-1)=13$, $(\mathbf{f}_3,\mathbf{e}_2)=2\cdot\frac{7}{6}-4\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$. Тому

$$\mathbf{e}_3=\mathbf{f}_3-\frac{(\mathbf{f}_3,\mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1-\frac{(\mathbf{f}_3,\mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)}\mathbf{e}_2=$$

$$=\Big(2,4,-3\Big)-\frac{13}{6}\Big(1,2,-1\Big)-\frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{6}}\Big(\frac{7}{6},-\frac{2}{3},-\frac{1}{6}\Big)=\Big(-\frac{3}{11},-\frac{3}{11},-\frac{9}{11}\Big).$$

Таким чином, вектори

$$\mathbf{e}_1=\Big(1,2,-1\Big),\quad \mathbf{e}_2=\Big(\frac{7}{6},-\frac{2}{3},-\frac{1}{6}\Big),\quad \mathbf{e}_3=\Big(-\frac{3}{11},-\frac{3}{11},-\frac{9}{11}\Big)$$

утворюють ортогональний базис. Зробимо з нього ортонормований базис. Оскільки $|\mathbf{e}_1|=\sqrt{6}$, $|\mathbf{e}_2|=\sqrt{\frac{11}{6}}$, $|\mathbf{e}_3|=\frac{3}{\sqrt{11}}$, то ортонормованим базисом буде система трьох векторів:

$$\mathbf{e}'_1=\Big(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\Big),\ \mathbf{e}'_2=\Big(\frac{7}{\sqrt{66}},-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}},-\frac{1}{\sqrt{66}}\Big),\ \mathbf{e}'_3=\Big(-\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{3}{\sqrt{11}}\Big).$$

Координати вектора в ортонормованому базисі евклідового простору. Знайдемо координати довільного вектора $\mathbf{x}$ евклідового простору E_n у ортонормованому базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$. Нехай $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+...+x_n\mathbf{e}_n$. Помноживши цю рівність скалярно на вектор $\mathbf{e}_1$, отримаємо

$$(\mathbf{x},\mathbf{e}_1)=x_1(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)+x_2(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)+...+x_n(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1)=x_1.$$

Аналогічно, отримаємо, що $x_2=(\mathbf{x},\mathbf{e}_2)$, ..., $x_n=(\mathbf{x},\mathbf{e}_n)$, тобто **координати вектора в ортонормованому базисі дорівнюють скалярним добуткам цього вектора на відповідні базисні вектори**.

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови того, коли базис є ортонормований. Наведемо її без доведення.

Теорема 16.2. *Базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ n-вимірного евклідового простору E_n тоді і тільки тоді є ортонормованим, коли для довільних двох векторів $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+...+x_n\mathbf{e}_n$ та $\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2+...+y_n\mathbf{e}_n$ цього простору скалярний добуток $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ задається формулою*

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n.$$

.

16.3 Ортогональний оператор.

Означення 16.7. Квадратна матриця A називається *ортогональною*, якщо $A^{-1} = A^T$, тобто $AA^T = E$.

З означення випливає, ортогональна матриця є невиродженою, і крім того, $\det A^2 = 1$, тобто $\det A = \pm 1$.

Теорема 16.3. *Квадратна матриця A є ортогональною тоді і тільки тоді, коли сума квадратів всіх елементів її довільного рядка дорівнює одиниці, а сума добутків відповідних елементів двох довільних різних рядків дорівнює нулю.*

Доведення. Випливає безпосередньо з означення, оскільки для довільної квадратної матриці A рівність $AA^T = E$, тобто рівність

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix},$$

справджується тоді і тільки тоді, коли

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + ... + a_{in}^2 = 1, \quad i = \overline{1, n},$$

і

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + ... + a_{in}a_{jn} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

□

Означення 16.8. Лінійний оператор, що діє з евклідового простору E_n у евклідів простір E_n, називається *ортогональним*, якщо йому відповідає ортогональна матриця.

Теорема 16.4. *Матриця переходу T від ортонормованого базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ евклідового простору E_n у будь-який інший ортонормований базис $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, ..., $\mathbf{e}_n'$ цього простору є ортогональною, тобто $T^T = T^{-1}$.*

Доведення. Дійсно, нехай матриця

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & ... & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & ... & \tau_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & ... & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

є матрицею переходу від ортонормованого базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ евклідового простору E_n у інший ортонормований базис $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$ простору E_n. Тоді

$$\mathbf{e}'_j = \tau_{1j}\mathbf{e}_1 + \tau_{2j}\mathbf{e}_2 + ... + \tau_{nj}\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ij}\mathbf{e}_i, \quad j = \overline{1,n}.$$

За означенням ортонормованого базиса

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad \text{і} \quad (\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}'_l) = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

Тому

$$1 = (\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}'_k) = (\tau_{1k}\mathbf{e}_1 + \tau_{2k}\mathbf{e}_2 + ... + \tau_{nk}\mathbf{e}_n, \tau_{1k}\mathbf{e}_1 + \tau_{2k}\mathbf{e}_2 + ... + \tau_{nk}\mathbf{e}_n) =$$

$$= \tau_{1k}^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \tau_{2k}^2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + ... + \tau_{nk}^2(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) = \tau_{1k}^2 + \tau_{2k}^2 + ... + \tau_{nk}^2, \quad k = \overline{1,n}.$$

і

$$0 = (\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}'_l) = (\tau_{1k}\mathbf{e}_1 + \tau_{2k}\mathbf{e}_2 + ... + \tau_{nk}\mathbf{e}_n, \tau_{1l}\mathbf{e}_1 + \tau_{2l}\mathbf{e}_2 + ... + \tau_{nl}\mathbf{e}_n) =$$

$$= \tau_{1k}\tau_{1l}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \tau_{2k}\tau_{2l}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + ... + \tau_{nk}\tau_{nl}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) = \tau_{1k}\tau_{1l} + \tau_{2k}\tau_{2l} + ... + \tau_{nk}\tau_{nl}, \ \ k, l = \overline{1,n}.$$

Звідси за теоремою 16.3 матриця T є ортогональною. □

Приклад 16.4. Матриця лінійного оператора $\mathcal{A}$ повороту довільного вектора у просторі $\mathbb{R}^2$ на кут φ

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

є ортогональною матрицею.

17 Квадратичні форми. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду. Знаковизначені квадратичні форми

17.1 Поняття квадратичні форми.

Нехай задано n-вимірний евклідів простір E_n з ортонормованим базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$.

Означення 17.1. *Квадратичною формою* від n змінних $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається сума, кожен член якої є або квадратом однієї зі змінних, або добутком двох різних змінних, помножених на деякі дійсні коефіцієнти, тобто

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{17.1}$$

a_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$ — деякі дійсні числа.

Матриця $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ називається матрицею квадратичної форми, а її ранг — рангом квадратичної форми $L(x_1, x_2, ..., x_n)$. Якщо матриця A є невиродженою, то і квадратична форма називається невиродженою.

Оскільки $a_{ij} = a_{ji}$, для всіх $i, j = \overline{1, n}$, то звідси випливає, що матриця A довільної квадратичної форми є симетричною, тобто $A^T = A$.

Квадратичну форму (17.1) зручно записувати у матричному вигляді:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T A X,$$

де $X = (x_1 \quad x_2 \quad ... \quad x_n)^T$ — вектор-стовпець змінних, або у вигляді скалярного добутку:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = (AX, X) = (X, A^T X) = (X, AX).$$

Приклад 17.1. Квадратичній формі $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 12x_1x_2 - 10x_1x_3 + x_2^2 - 3x_3^2$ відповідає матриця $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

17.2 Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

Означення 17.2. Квадратична форма від n змінних $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *канонічною*, якщо $a_{ij} = 0$, для всіх $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, тобто

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2.$$

З означення випливає, що матриця A канонічної квадратичної форми є діагональною.

Теорема 17.1. *Будь-яку квадратичну форму $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ шляхом лінійного перетворення координат можна звести до канонічного вигляду:*

$$L(y_1, y_2, ..., y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2,$$

де $y_1, y_2, ..., y_n$ — змінні у новому базисі, а λ_1, λ_2, ..., λ_n — власні числа матриці A квадратичної форми $L(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Доведення. Розглянемо квадратичну форму $L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ з матрицею A, задану у деякому ортонормованому базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$.

Оскільки A є симетричною матрицею, то її власні числа є дійсними, і вона має n лінійно незалежних власних векторів, причому вектори, які відповідають різним власним значенням є ортогональними. Крім того, в базисі, який складається з ортонормованих власних векторів матриці A, вона приймає діагональний вигляд.

Виберемо в якості нового базису базис $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$, який складається із ортонормованих власних векторів матриці A.

Нехай T — матриця переходу від базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ до базису $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$. Оскільки обидва базиси є ортонормованими, то за теоремою 16.4 матриця T є ортогональною, тобто $T^{-1} = T^T$.

Розглянемо лінійне перетворення координат $X = TY$, де $X = (x_1 \;\; x_2 \;\; ... \;\; x_n)^T$, $Y = (y_1 \;\; y_2 \;\; ... \;\; y_n)^T$. Тоді

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \Big(ATY, TY\Big) = \Big(T^T ATY, Y\Big) = \Big(T^{-1}ATY, Y\Big) = \Big(A'Y, Y\Big),$$

де

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що якщо подіяти на змінні, що входять до квадратичної форми, невиродженим лінійним перетворенням, то квадратична форма з матрицею A переходить в квадратичну форму з матрицею $A' = T^{-1}AT$, причому, ранг квадратичної форми зберігається.

Оскільки вектори $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, ..., $\mathbf{e}_n'$ утворюють ортонормований базис, то

$$\Big(A'Y, Y\Big) = \Big(y_1\lambda_1\mathbf{e}_1' + y_2\lambda_2\mathbf{e}_2' + ... + y_n\lambda_n\mathbf{e}_n'; y_1\mathbf{e}_1' + y_2\mathbf{e}_2' + ... + y_n\mathbf{e}_n'\Big) =$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2,$$

тобто в базисі $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, ..., $\mathbf{e}_n'$ квадратична форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ буде мати канонічний вигляд. □

Канонічний вигляд $L(y_1, y_2, ..., y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$ квадратичної форми визначається однозначно з точністю до нумерації змінних. Це означає, що, якщо при зведенні квадратичної форми до канонічного вигляду занумеровати власні числа та відповідні їм власні вектори іншим чином, то кількість додатних і від'ємних коефіцієнтів не зміниться. В цьому полягає *закон інерції квадратичної форми.*

Приклад 17.2. Звести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$L(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2.$$

Матриця A цієї квадратичної форми має вигляд: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Характеристичне рівняння матриці A

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

має два корені $\lambda_1 = 2$ і $\lambda_2 = -3$.

Якщо у матриці перетворення T власні вектори розташовувати у порядку, який відповідає нумерації власних значень матриці A, то канонічний вигляд квадратичної форми буде

$$L(y_1, y_2) = 2y_1^2 - 3y_2^2.$$

Знайдемо власні вектори $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ матриці A. Розглянемо спочатку власне число $\lambda_1 = 2$, і складемо систему

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2 \\ 2 & -2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Ця однорідна система має загальний розв'язок $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2s \\ s \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$. Нехай $s = 1$. Тоді власним вектором матриці A, який відповідає числу $\lambda_1 = 2$, є вектор $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Оскільки $|\mathbf{x}_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, то нормованим власним вектором є вектор $\mathbf{x}'_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Розглянемо тепер власне число $\lambda_2 = -3$, і складемо систему

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2 \\ 2 & -2+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Ця однорідна система має загальний розв'язок $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} s \\ -2s \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$. Нехай $s = 1$. Тоді власним вектором матриці A, який відповідає числу $\lambda_2 = -3$, є вектор $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Оскільки $|\mathbf{x}_1| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, то нормованим власним вектором є вектор $\mathbf{x}'_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Отже, матриця

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

є ортогональною і приводить матрицю A квадратичної форми до діагонального вигляду. Оскільки

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

то

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Випишемо перетворення координат, яке зводить матрицю A квадратичної форми до діагонального вигляду:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

17.3 Знаковизначені квадратичні форми.

Означення 17.3. Квадратична форма від n змінних $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *додатно (від'ємно) визначеною* , якщо при довільних значеннях змінних x_1, x_2,...,x_n, одночасно не рівних нулю, $L(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ ($L(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$).

Приклад 17.3. Квадратична форма $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+4x_2^2+9x_3^2$ є додатно визначеною, а квадратична форма $L(x_1, x_2) = -x_1^2-x_2^2$ є відємно визначеною. Квадратична форма $L(x_1, x_2) = x_1x_2$ є знакозмінною, оскільки при різних значеннях змінних x_1 і x_2 може набувати як додатні так і від'ємні значення.

Наведемо дві теореми, які дозволяють досліджувати квадратичні форми на знакосталість.

Теорема 17.2. *Для того, щоб квадратична форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ була додатньо (від'ємно) визначеною, необхідно і достатньо, щоб всі власні числа матриці A цієї квадратичної форми були додатними (від'ємними).*

Теорема 17.3 (**Критерій Сільвестра**). *Для того, щоб квадратична форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ була додатньо (від'ємно) визначеною, необхідно і достатньо, щоб всі головні мінори матриці A цієї квадратичної форми були додатними (знаки мінорів чергувалися, починаючи зі знака "-"), тобто*

$$\Delta_1 = a_{11} > 0(< 0), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0(> 0), \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0(< 0), ...$$

Приклад 17.4. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність: $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2$.

Випишемо матрицю квадратичної форми: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Обчислюємо

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Звідси за критерієм Сільвестра квадратична форма $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ є дадатно визначеною.