ЛЕКЦІЯ 3

Відношення
Операції над відношеннями
Операції об'єднання та перетину сімейств відношень
Додаткові операції над відношеннями
Обернене відношення
Композиція. Властивості композиції

Поняття відношення

Теорія відношень реалізує в математичних термінах на абстрактних множинах реальні зв'язки між реальними множинами.

Відношення між **парою** об'єктів називається **бінарним**.

Бінарне відношення використовується для того, щоб вказати вид зв'язку між парою об'єктів, розглянутих у певному порядку.

При цьому **відношення дає критерій** для **відмінності** одних упорядкованих пар від інших. Для **відповідності** такого **критерія не існує**. У цьому відмінність **відношення** від **відповідності.**

Приклад відповідності

Розглянемо 2 множини: $A=\{a|a-студент\ ФІОТ\}$

$B=\{b|b-марка\ мобілки\}$. Відповідність $q=\langle A,B,Q\rangle$ визначає пари $Q\subseteq A\times B$, але не існує загальної ознаки, за якою ці пари встановлюються.

Приклад відношення

Розглянемо 2 множини: $A=\{батько, мати\}$ і $B=\{син,\ дочка\}$

Розглянемо бінарні відношення $R\subset A\times B$ і $S\subset A\times B$, задані предикатами

1. R=$\{(a,b)|$ “*a має вищий зріст*, ніж b” $\}$.
2. S=$\{(a,b)|$ “а старше, ніж b” $\}$.

$R=\{(син, батько),(мати, дочка)\}$

$S=\{(батько, син),(мати, дочка)\}$

Визначення відношення

Відношенням R множин X і Y називають довільну підмножину $X \times Y$.

Отже відношення R – це множина, елементами якої є упорядковані пари $\left(x, y\right) \in R$.

Множина R ***є підмножиною декартового добутку***
$R \subseteq X \times Y$

Якщо $\left(x, y\right) \in R$, то елемент відношення можна записати як xRy. Говорять, що x і y перебувають у відношенні R, або просто, що x відноситься до y.

Якщо $X = Y$, то відношення є підмножиною $X \times X$. Таке відношення входить до класу ***бінарних відношень*** на X.

Приклад відношень

Приклад.

$X=\{2, 3\}$, $Y=\{3, 4, 5\}$.

$X\times Y= \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3,5)\}$.

$R\subseteq X\times Y$

$R_1=\{(x,y) \mid "x<y"\}$ $\quad R_1=\{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$

$R_2=\{(x,y) \mid "x\geq y"\}$ $\quad R_2=\{(3,3)\}$

$R_3=\{(x,y) \mid "x>y"\}$ $\quad R_3=\{\varnothing\}$

$R_4=\{(x,y) \mid x+y=2n, де\ n=\overline{1,4}\}$ $\quad R_4=\{(2,4)(3,5)\}$

Приклад.

$A=\{2,3,5,7\}$; $B=\{24,25,26\}$;

$A\times B=\{(2,24),(2,25),(2,26),(3,24),(3,25),(3,26),(5,24),(5,25),$
$(5,26),(7,24),(7,25),(7,26)\}$

$R\subseteq A\times B$, $R=\{(a,b) \mid$ "a є дільником b" $\}$,

$R= \{(2,24),(2,26),(3,24),(5,25)\}$

Такі неповні речення (предикати, твердження) можуть задавати критерій відношення:

- x відбувається раніше (або пізніше), ніж y, $x \prec y$

- X входить (або строго входить) в Y, $X \subseteq Y, X \subset Y$

- x паралельне (або перпендикулярне) до y, $x \| y$, $x \perp y$

- x дорівнює (або еквівалентне) y, $x = y$, $x \equiv y$

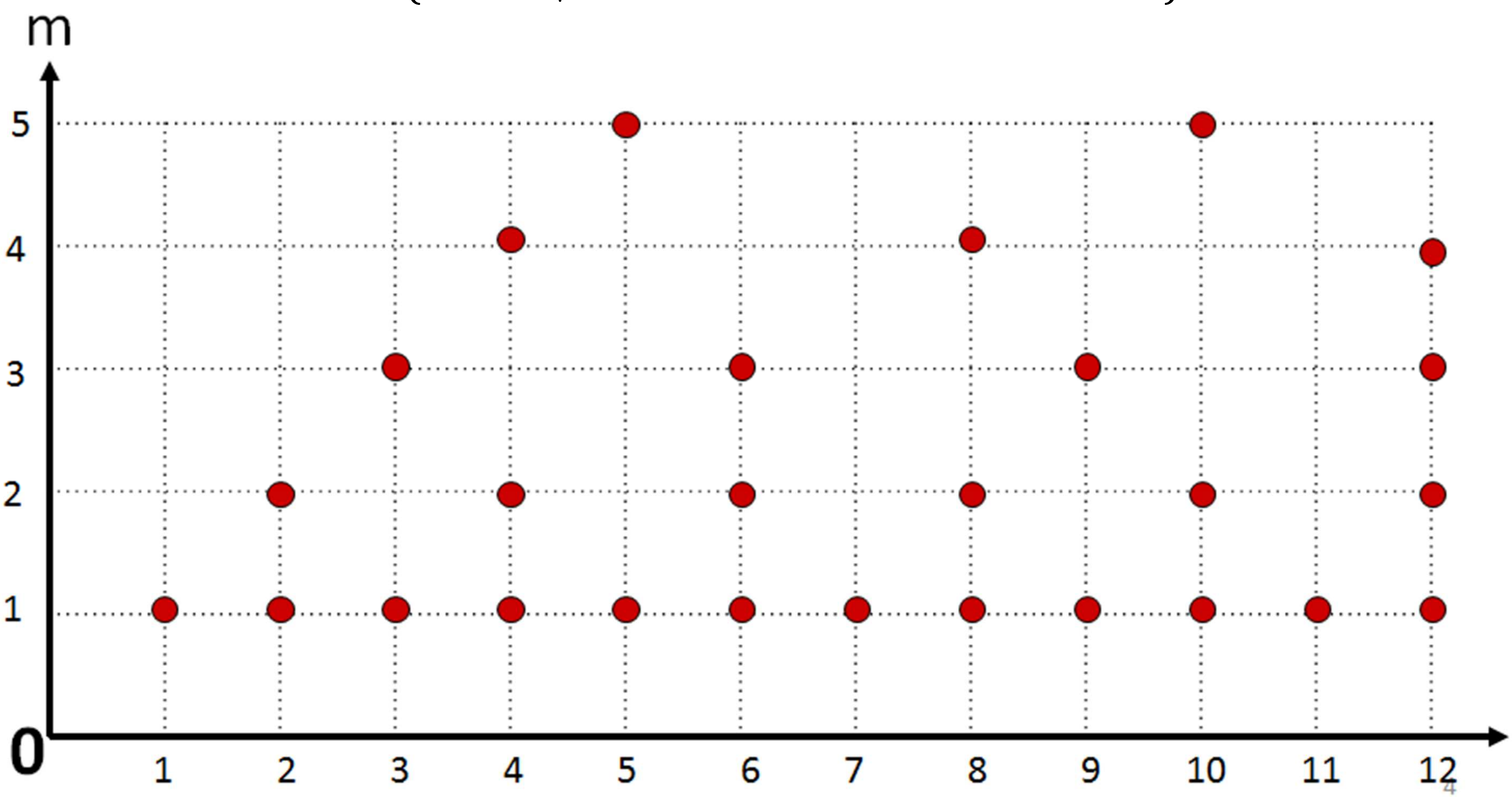
- x є братом y, "x *брат* y"

- x зв'язаний (електрично або у інший спосіб) з y і т. ін.

Графік відношення подільності

$$R \subset N \times N$$

$$R = \left\{ (n, m) \middle| \text{"}n \text{ ділиться націло на } m\text{"} \right\}$$

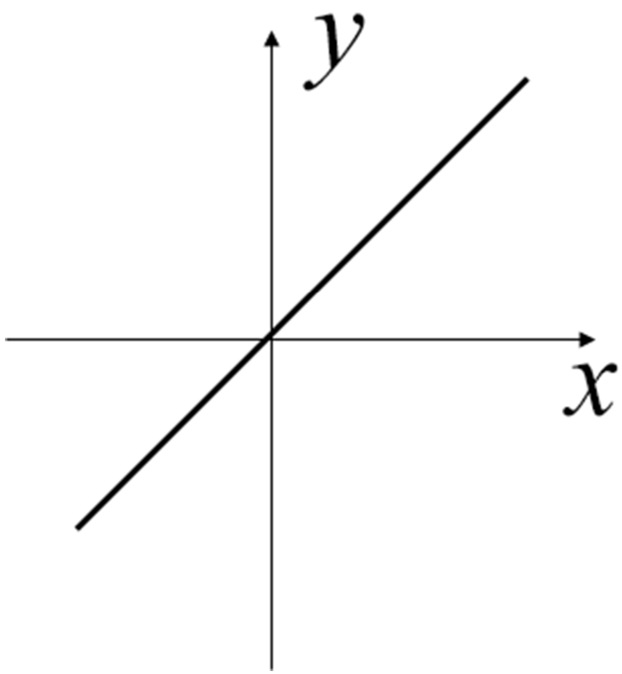


$$R = \left\{ (1,1), (2,1), (2,2), \dots, (12,3), (12,4) \right\}$$

Графік відношення рівності

$$D \subset R \times R$$

R— ***множина*** **дійсних чисел**



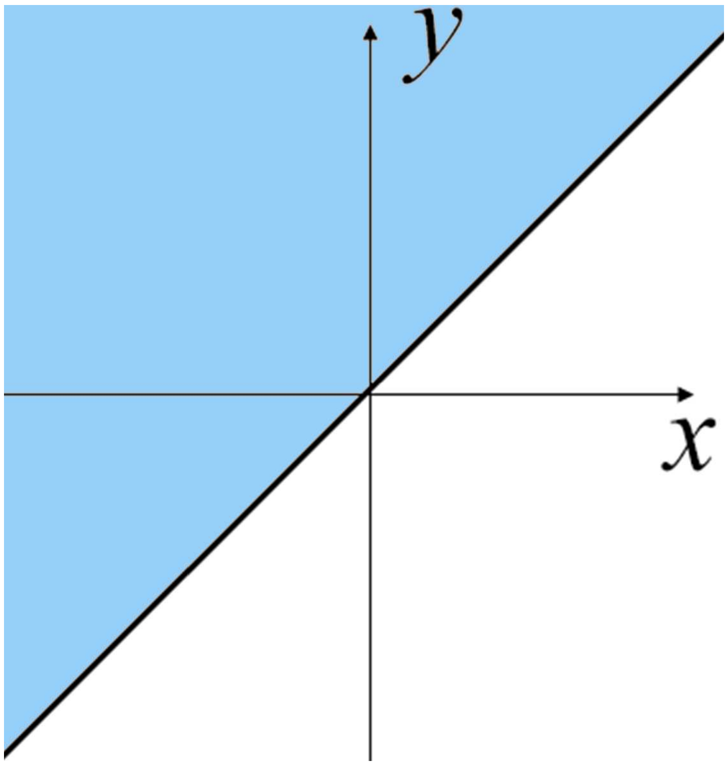
$$D = \left\{ \left(x, y \right) \middle| x = y \right\}$$

$$D = \left\{ \left(-100, -100 \right), \ldots, \left(-10, -10 \right), \ldots, \left(0, 0 \right), \ldots, \left(1, 1 \right), \ldots \right\}$$

Графік відношення нерівності

$$D \subset R \times R$$

R— *множина* дійсних чисел



$$D_{\leq} = \left\{ \left(x, y \right) \middle| x \leq y \right\}$$

$$D = \left\{ \left(-100, -99 \right), \ldots, \left(-10, -9 \right), \ldots, \left(0, 0 \right), \ldots, \left(1, 2 \right), \ldots \right\}$$

Область визначення й множина значень

Область визначення відношення R на X і Y – це множина всіх $x \in X$ таких, що для деяких $y \in Y$ маємо $(x, y) \in R$.

Інакше кажучи, область визначення R це множина всіх перших координат упорядкованих пар з R.

Множина значень відношення R на X і Y – це множина всіх $y \in Y$ таких, що для деяких $x \in X$ маємо $(x, y) \in R$.

Інакше кажучи, множина значень R – це множина всіх других координат упорядкованих пар з R.

Приклад

Нехай $R = X \times Y$.

Область визначення – множина X

Множина значень – множина Y.

Способи задавання бінарних відношень

1. Задавання явно або предикатом

Бінарне відношення можна задати:

А. Явно, перерахувавши всі пари, які до нього входять (якщо відношення складається з скінченної кількості пар)

Б. Предикатом, вказавши загальну властивість пар, що належать цьому відношенню (згадайте способи задавання множин).

Приклад явного задавання.

Нехай дана множина $X = \{p, r, s, q\}$.

Задамо відношення $R \subseteq X \times X$ перерахуванням пар

$$R = \{(p, r), (s, q), (r, p), (p, p), (s, r), (p, s)\}$$

Приклад задавання предикатом.

Нехай дано N – множина натуральних чисел.

Задамо відношення, вказавши загальну властивість пар, що належать відношенню:

$$R_1 = \{(n, m) \in N \times N \mid n \text{ є дільником } m\}$$

2. Задавання графом

Спосіб задавання бінарного відношення за допомогою графа.

Нехай $R \subset X \times X$. $X = \{x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n\}$

1. Елементи множини X – точки на площині (їх називають вершинами графа).

2. Точки x_i, x_j з'єднані стрілкою $\rightarrow$ від x_i до x_j тоді й тільки тоді, коли $(x_i, x_j) \in R$.

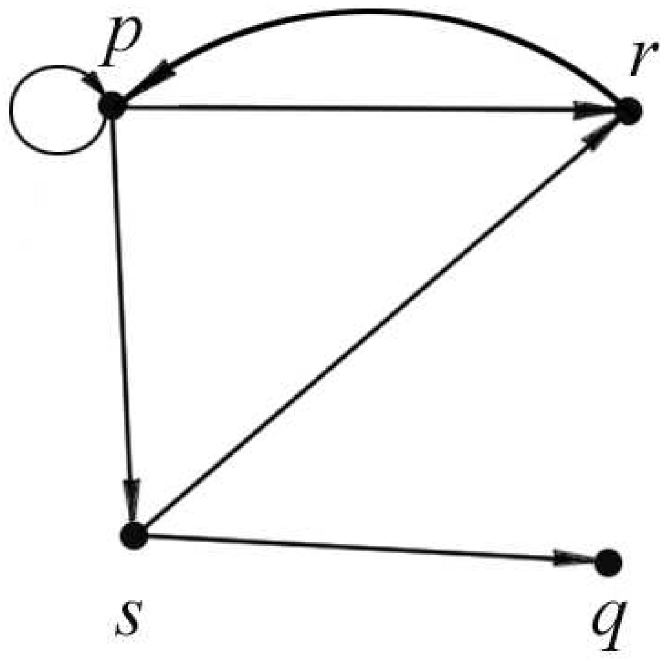
3. Якщо одночасно $(x_i, x_j) \in R$ та $(x_j, x_i) \in R$ то точки x_i і x_j з'єднують двома лінями зі стрілками: $\rightleftarrows$, двонаправленою лінією: $\leftrightarrow$, або лінією без стрілок: —.

4. Якщо $(x_j, x_j) \in R$, то в точці x_j зображують петлю.

Приклад задавання відношення графом

На рисунку зображено граф бінарного відношення

$$R = \{(p,r),(s,q),(r,p),(p,p),(s,r),(p,s)\}.$$



3. Задавання за допомогою булевих матриць

Нехай $R \subseteq X \times Y$, де

$$X = \left\{ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n \right\}; \; Y = \left\{ y_1, y_2, y_3, \ldots, y_j, \ldots, y_m \right\}.$$

Тоді відношення R у вигляді матриці – це таблиця з n рядками і m стовпцями.

$$\left|X\right| = n \;, \; \left|Y\right| = m$$

1. В перший стовпець виписані елементи множини X,
2. В перший рядок виписані елементи множини Y.
3. На перетині рядка елемента x_i й стовпця елемента y_j записують 1, якщо пари $\left(x_i, y_j\right) \in R$, і 0 – якщо $\left(x_i, y_j\right) \notin R$.

Таку таблицю називають **булевою матрицею відношення**

Приклад задавання відношення матрицею

Нехай дана множина $X = \{p, q, r, s\}$ і відношення $R_1 \subset X \times X$, задане перерахуванням

$$R_1 = \{(p, r), (s, q), (r, p), (p, p), (s, r), (p, s)\}$$

Булева матриця даного відношення має вигляд:

R_1	*p*	*q*	*r*	*s*
p	1	0	1	1
q	0	0	0	0
r	1	0	0	0
s	0	1	1	0

$X = \{p, q, r, s\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ $R_2 \subset X \times Y$

$$R_2 = \{(p, \mathrm{a}), (s, \mathrm{b}), (r, \mathrm{d}), (\mathrm{q}, \mathrm{d}), (r, a)\}$$

R_2	*a*	*b*	*c*	*d*
p	1	0	0	0
q	0	0	0	1
r	1	0	0	1
s	0	1	0	0

Зріз (перетин) відношення R через елемент

Нехай $R \subseteq X \times Y$, де

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n\};\ Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_j, \dots, y_m\}.$$

R - довільне бінарне відношення між елементами множин X і Y.
Розглянемо довільний елемент x_i множини X

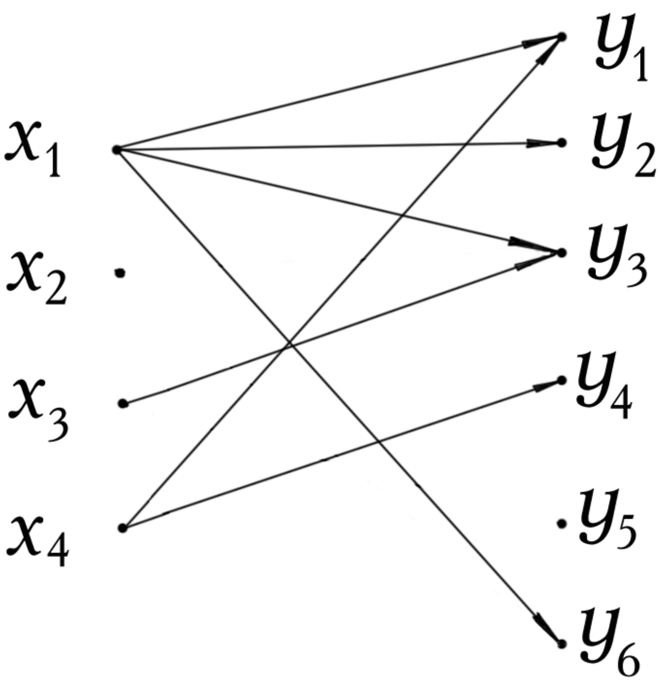
Множину тих елементів, з якими елемент x_i перебуває у відношенні R, називають* зрізом (перетином) *відношення R через елемент x_i і позначають $R(x_i)$.

Якщо бінарне відношення R представлене за допомогою графа, то $R(x_i)$ складається з тих вершин множини Y, у які з вершини x_i йде стрілка.

Відношення через елемент – це множина, яка може містити **кілька елементів, один елемент і жодного елемента (бути порожньою).**

Приклад задавання зрізу відношення R через елемент x_i

Нехай дані множини $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ і $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ та відношення $R \subset X \times Y$, яке задане графом.



Зріз відношення R через елемент x_1:

$R(x_1) = \{y_1, y_2, y_3, y_6\}$

Зріз відношення R через x_2:

$R(x_2) = \{\varnothing\}$

Зріз відношення R через x_3:

$R(x_3) = y_3$

Зріз відношення R через x_4:

$R(x_4) = \{y_1, y_4\}$

Операції над відношеннями

Оскільки бінарні відношення представляють множини (пар), то до них застосовні поняття рівності, включення, а також операції об'єднання, перетину і доповнення.

Для двох бінарних відношень R і S визначимо такі операції:

Включення $R \subset S$ розуміють таким чином, що будь-яка впорядкована пара елементів, яка належить відношенню R, належить і відношенню S.

Приклад включення.

$X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $R \subset X \times Y$, $S = X \times Y$,

$S = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$,

$R = \{(1,a),(2,a),(3,a)\}$,

$R \subset S$ оскільки $(1,a) \in R$ і $(1,a) \in S$, $(2,a) \in R$ і $(2,a) \in S$, $(3,a) \in R$ і $(3,a) \in S$

Рівність $R = S$ означає, що відношення R і S складаються з тих самих упорядкованих пар.

Приклади рівності.

$X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c\}$, $R \subset X \times Y$, $S \subset X \times Y$,

$S = \{(1,a),(2,a),(3,a)\}$,

$R = \{(1,a),(2,a),(3,a)\}$,

$R = S$ оскільки $(1,a) \in R$ і $(1,a) \in S$, $(2,a) \in R$ і $(2,a) \in S$, $(3,a) \in R$ і $(3,a) \in S$, а також $|R| = |S|$.

$X = \{Іван, Василь, Петро\}$, $Y = \{Марія, Оксана, Світлана\}$

$|R| = |S|$, $R \subset X \times Y$, $S \subset X \times Y$

$S = \{(Іван, Марія),(Петро, Оксана),(Василь, Світлана)\}$,

$R = \{(Іван, Марія),(Петро, Оксана),(Василь, Світлана)\}$.

Тоді $R = S$

Об'єднання $R \cup S$ відношень R і S складається з упорядкованих пар, що належать хоча б одному із цих відношень.

Приклади об'єднання.

$X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c\}$, $R \subset X \times Y$, $S \subset X \times Y$,

$S = \{(1,a),(1,b),(1,c)\}$,

$R = \{(1,a),(2,a),(3,a)\}$,

$R \cup S = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(3,a)\}$

$X = \{Іван, Василь, Петро\}$, $Y = \{Марія, Оксана, Світлана\}$

$S = \{(Іван, Марія),(Петро, Оксана)\}$,

$R = \{(Іван, Марія),(Василь, Світлана)\}$.

Тоді

$R \cup S = \{(Іван, Марія),(Петро, Оксана),(Василь, Світлана)\}$

Перетин $R \cap S$ відношень R і S є новим відношенням, що складається з упорядкованих, які належать одночасно обом відношенням.

Приклади перетину.

$X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c\}$, $R \subset X \times Y$, $S \subset X \times Y$,

$S = \{(1,a),(1,b),(1,c)\}$,

$R = \{(1,a),(2,a),(3,a)\}$,

$R \cap S = \{(1,a)\}$

$X = \{Іван, Василь, Петро\}$, $Y = \{Марія, Оксана, Світлана\}$

$R \subset X \times Y$, $S \subset X \times Y$

$S = \{(Іван, Марія),(Петро, Оксана),(Василь, Світлана)\}$,

$R = \{(Іван, Марія),(Василь, Світлана)\}$.

Тоді $R \cap S = \{(Іван, Марія),(Василь, Світлана)\}$

Різниця $R-S$ відношень R і S є множиною впорядкованих пар, що належать відношенню R і не належать відношенню S.

Приклади різниці.

$X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c\}$, $R\subset X\times Y$, $S\subset X\times Y$,

$S=\{(1,a),(1,b),(1,c)\}$,

$R=\{(1,a),(2,a),(3,a)\}$,

$R-S=\{(2,a),(3,a)\}$

$X=\{Іван, Василь, Петро\}$, $Y=\{Марія, Оксана, Світлана\}$

$R\subset X\times Y$, $S\subset X\times Y$

$S=\{(Іван, Марія),(Василь, Світлана)\}$,

$R=\{(Іван, Марія),(Петро, Оксана),(Василь, Світлана)\}$.

Тоді $R-S=\{(Петро, Оксана)\}$

Доповнення. Якщо R – бінарне відношення між елементами множин X і Y, то його **доповненням** $\overline{R}$ (відносно $X \times Y$) називають різницю $(X \times Y) - R$

Приклади доповнення

$X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c\}$, $R \subset X \times Y$,

$X \times Y = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$,

$R = \{(1,a),(2,a),(3,a)\}$

$\overline{R} = \{(1,b),(1,c),(2,b),(2,c),(3,b),(3,c)\}$,

$X = \{Іван, Василь\}$, $Y = \{Марія, Оксана\}$

$X \times Y = \{(Іван, Марія),(Іван, Оксана),(Василь, Марія),(Василь, Оксана)\}$

$R = \{(Іван, Марія),(Василь, Марія)\}$,

$\overline{R} = \{(Іван, Оксана),(Василь, Оксана)\}$.

Операції об'єднання та перетину довільних сімейств відношень

Якщо $\left(R_i\right)_{i\in I}$ – сімейство відношень, то **об'єднання цього сімейства** є відношення $\bigcup\limits_{i\in I} R_i$, що складається з упорядкованих пар, які належать хоча б одному з відношень R_i.

Перетин сімейства $\left(R_i\right)_{i\in I}$ – це відношення $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$, що складається з упорядкованих пар, які належать одночасно усім відношенням R_i.

Додаткові операції

Для відношень задають деякі **додаткові операції**, які пов'язані з їх специфічною структурою, яка проявляється в тому, що **всі елементи відношень є упорядкованими парами**. Розглянемо дві такі операції.

1. Обернене відношення

Якщо в кожній упорядкованій парі, яка належить відношенню R, поміняти місцями перший і другий компонент, то одержимо нове відношення, яке називають **оберненим** до відношення R і позначають через R^{-1}. **Наприклад**, для відношення R

$$R = \{(p,r),(s,q),(r,p),(p,p),(s,r),(p,s)\}$$

обернене відношення R^{-1} має вигляд:

$$R^{-1} = \{(r,p),(q,s),(p,r),(p,p),(r,s),(s,p)\}$$

Представлення R^{-1} графом, матрицею та предикатом

Граф. Граф відношення R^{-1} одержують із графа відношення R шляхом переорієнтації всіх стрілок.

Матриця. Відношення R задане за допомогою булевої матриці перетворюємо у відношення R^{-1} міняючи місцями рядки і стовпці.

Предикат. Нехай $R \subseteq X \times Y$ є відношенням на $X \times Y$. Тоді відношення R^{-1} на $Y \times X$ визначають у такий спосіб:

$$R^{-1} = \left\{ \left(y, x\right) \middle| \left(x, y\right) \in R \right\}.$$

Інакше кажучи, $\left(y, x\right) \in R^{-1}$ тоді й тільки тоді, коли $\left(x, y\right) \in R$ або, що рівнозначно, $yR^{-1}x$ тоді й тільки тоді, коли xRy.

Відношення R^{-1} називають ***оберненим відношенням*** до даного відношення R.

Приклад

Нехай $R = \left\{ \left(1, r \right), \left(1, s \right), \left(3, s \right) \right\}$,
тоді $R^{-1} = \left\{ \left(r, 1 \right), \left(s, 1 \right), \left(s, 3 \right) \right\}$.

Нехай R={$\left(a, b \right) \middle| b$ є чоловіком a}, тоді R^{-1}={$\left(b, a \right) \middle| a$ є дружиною b}

Нехай
R = {$\left(a, b \right) \middle| b$ є родичем a}, тоді $R = R^{-1}$

Нехай
R — відношення $\left\{ \left(a, b \right) \middle| a^2 + b^2 = 4 \right\}$, тоді також $R^{-1} = R$.

Теорема про двічі обернене відношення.

Обернене відношення від оберненого відношення дорівнює прямому відношенню, тобто $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$.

Доведення.

Нехай існують дві множини: X та Y.

На декартовому добутку цих множин задано відношення $R \subset X \times Y$.

Припустимо, що $\left(x, y\right) \in \left(R^{-1}\right)^{-1}$. Тоді у відповідності з означенням оберненого відношення $\left(y, x\right) \in R^{-1}$.

Знову застосуємо означення оберненого відношення: $\left(x, y\right) \in R$.

Отже $\left(x, y\right) \in \left(R^{-1}\right)^{-1} \Leftrightarrow \left(x, y\right) \in R$

Композиція відношень (множення відношень)

Розглянемо 3 множини: X, Y та Z

Нехай $R \subseteq X \times Y$ — відношення на $X \times Y$,

а $S \subseteq Y \times Z$ — відношення на $Y \times Z$.

Композицією відношень S і R називають відношення

$$T \subseteq X \times Z,$$

визначене в такий спосіб:

$T = \{ \left(x, z\right) \Big|$ існує такий елемент $y \in Y$, що $\left(x, y\right) \in R$ і $\left(y, z\right) \in S$ }.

Цю множину позначають $T = S \circ R$.

Приклад

Нехай $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b\}$ і $Z = \{\alpha,\beta,\lambda,\mu\}$.

Також задані відношення
$R \subset X \times Y$ та $S \subset Y \times Z$

$R = \{(1,a),(2,b),(3,b)\}$,
$S = \{(a,\alpha),(a,\beta),(b,\lambda),(b,\mu)\}$,
Тоді $S \circ R = \{(1,\alpha),(1,\beta),(2,\lambda),(2,\mu),(3,\lambda),(3,\mu)\}$
оскільки
з $(1,a) \in R$ і $(a,\alpha) \in S$ випливає, що $(1,\alpha) \in S \circ R$,
з $(1,a) \in R$ і $(a,\beta) \in S$ випливає, що $(1,\beta) \in S \circ R$,
…..
з $(3,b) \in R$ і $(b,\mu) \in S$ випливає, що $(3,\mu) \in S \circ R$.

Властивості композиції відношень

Розглянемо композиції відношень за умови, що X,Y і Z — множини і якщо
$R \subseteq X \times Y$,
$S \subseteq Y \times Z$ і
$T \subseteq Z \times D$
тоді

Асоціативність: $R \circ \left(S \circ T \right) = \left(R \circ S \right) \circ T$.

Обернена композиція: $\left(R \circ S\right)^{-1} = \left(S^{-1}\right) \circ \left(R^{-1}\right)$