Обратные тригонометрические функции

Обра́тные тригонометри́ческие фу́нкции — математические функции, являющиеся обратными к тригонометрическим функциям. К обратным тригонометрическим функциям обычно относят шесть функций:

- **аркси́нус** (обозначение: arcsin)
- **аркко́синус** (обозначение: arccos)
- **аркта́нгенс** (обозначение: arctg; в иностранной литературе arctan)
- **арккота́нгенс** (обозначение: arcctg; в иностранной литературе arccotan)
- **арксе́канс** (обозначение: arcsec)
- **арккосе́канс** (обозначение: arccosec; в иностранной литературе arccsc)

Название обратной тригонометрической функции образуется от названия соответствующей ей тригонометрической функции добавлением приставки «арк-» (от лат. *arc* — дуга). Это связано с тем, что геометрически значение обратной тригонометрической функции можно связать с длиной дуги единичной окружности (или углом, стягивающим эту дугу), соответствующей тому или иному отрезку. Изредка в иностранной литературе пользуются обозначениями типа $\sin^{-1}$ для арксинуса и т.п.; это считается неоправданным, так как возможна путаница с возведением функции в степень −1.

Основное соотношение Править

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

/math>

Функция arccos Править

Файл:Arccos function.png

Арккосинусом числа *m* называется такой угол *x*, для которого $\cos x = m, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi, |m| \leqslant 1.$

Функция $y = \arccos x$ непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой. Функция $y = \arccos x$ является строго убывающей.

- $\cos(\arccos x) = x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1,$
- $\arccos(\cos y) = y$ при $0 \leqslant y \leqslant \pi.$
- $D(\arccos x) = [-1; 1],$ (область определения),
- $E(\arccos x) = [0; \pi].$ (область значений).

Свойства функции arccos Править

- $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ (функция центрально-симметрична относительно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- $\arccos x > 0$ при njkbjhvjjhc
- $\arccos x = 0$ при $x = 1.$
- $\arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$

- $\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$

Получение функции arccos Править

Дана функция $y = \cos x$. На всей своей области определения она является кусочно-монотонной, и, значит, обратное соответствие $y = \arccos x$ функцией не является. Поэтому мы рассмотрим отрезок, на котором она строго возрастает и принимает все свои значения — $[0; \pi]$. На этом отрезке $y = \cos x$ строго монотонно убывает и принимает все свои значения только один раз, а значит, на отрезке $[0; \pi]$ существует обратная функция $y = \arccos x$, график которой симметричен графику $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ относительно прямой $y = x$.

Функция arctg Править

Файл:Arctg.png

Арктангенсом числа *m* называется такой угол *x*, для которого $\operatorname{tg} x = m, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$

Функций $y = \operatorname{arctg} x$ непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является строго возрастающей.

- $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ при $x \in \mathbb{R}$,
- $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y) = y$ при $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$,
- $D(\operatorname{arctg} x) \in \mathbb{R}$,
- $E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Свойства функции arctg Править

- $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ (функция нечётная).
- $\operatorname{arctg} x > 0$ при $x > 0$.
- $\operatorname{arctg} x = 0$ при $x = 0$.
- $\operatorname{arctg} x < 0$ при $x < 0$.
- $\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geqslant 0 \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & 0 \leqslant x \end{cases}$
- $\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}, x > 0 \\ \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \pi, & 0 \leqslant x \end{cases}$

Получение функции arctg Править

Дана функция $y = \operatorname{tg} x$. На всей своей области определения она является кусочно-монотонной, и, значит, обратное соответствие $y = \operatorname{arctg} x$ функцией не является. Поэтому рассмотрим отрезок, на котором она строго возрастает и принимает все свои значения только один раз — $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На этом отрезке $y = \operatorname{tg} x$ строго монотонно возрастает и принимает все свои значения только один раз, следовательно, на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ существует обратная функция $y = \operatorname{arctg} x$, график которой симметричен графику $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ относительно прямой $y = x$.

Функция arcctg Править

Арккотангенсом числа *m* называется такой угол *x*, для которого $\operatorname{ctg} x = m, \qquad 0 < x\pi.$

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ является строго убывающей.

- $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ при $x \in \mathbb{R}$,
- $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} y) = y$ при $0 < y < \pi$,
- $D(\operatorname{arcctg} x) = (-\infty; \infty)$,
- $E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi)$.

Свойства функции arcctg Править

- $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$ (график функции центрально-симметричен относительно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- $\operatorname{arcctg} x > 0$ при любых x.

- $\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geqslant 0 \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & 0 \leqslant x \end{cases}$

Получение функции arcctg ✏Править

Дана функция $y = \operatorname{ctg} x$. На всей своей области определения она является кусочно-монотонной, и, значит, обратное соответствие $y = \operatorname{arcctg} x$ функцией не является. Поэтому рассмотрим отрезок, на котором она строго возрастает и принимает все свои значения только один раз — $(0; \pi)$. На этом отрезке $y = \operatorname{ctg} x$ строго возрастает и принимает все свои значения только один раз, следовательно, на интервале $(0; \pi)$ существует обратная функция $y = \operatorname{arcctg} x$, график которой симметричен графику $y = \operatorname{ctg} x$ на отрезке $(0; \pi)$ относительно прямой $y = x$.

Функция arcsec ✏Править

Функция arccosec ✏Править

Производные от обратных тригонометрических функций ✏Править

- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
- $(\arccos x)' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$
- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

Интегралы от обратных тригонометрических функций ✏Править

Неопределённые интегралы ✏Править

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C,$$

$$\int \operatorname{arcctg} x \, dx = x \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C,$$

$$\int \operatorname{arcsec} x \, dx = x \operatorname{arcsec} x - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C,$$

$$\int \operatorname{arccosec} x \, dx = x \operatorname{arccosec} x + \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C.$$

Разложение в бесконечные ряды ✏Править

$$\arcsin z = z + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^3}{3} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{z^5}{5} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{z^7}{7} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)}; \qquad |z| \le 1.$$

$$\arccos z = \frac{\pi}{2} - \arcsin z =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(z + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^3}{3} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{z^5}{5} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{z^7}{7} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)}; \qquad |z| \le 1.$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}; \qquad |z| \le 1 \qquad z \neq i, -i.$$

$$\operatorname{arcctg} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} z = \\ = \frac{\pi}{2} - (z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots) = \\ = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}; \qquad |z| \le 1 \qquad z \neq i, -i.$$

$$\operatorname{arcsec} z = \arccos\left(z^{-1}\right) = \\ = \frac{\pi}{2} - (z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^{-3}}{3} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)\frac{z^{-5}}{5} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)\frac{z^{-7}}{7} + \cdots) = \\ = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{z^{-(2n+1)}}{(2n+1)}; \qquad |z| \ge 1.$$

$$\operatorname{arccosec} z = \arcsin\left(z^{-1}\right) = \\ = z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^{-3}}{3} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)\frac{z^{-5}}{5} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)\frac{z^{-7}}{7} + \cdots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{z^{-(2n+1)}}{2n+1}; \qquad |z| \ge 1.$$

Для арктангенса используется также более быстро сходящийся ряд, открытый Леонардом Эйлером:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{2kx^2}{(2k+1)(1+x^2)}$$

(член в сумме при *n*= 0 принимается равным 1).

См. также Править

- Тригонометрические функции
- Обратные гиперболические функции

Эта статья является заготовкой. Вы можете помочь проекту, добавив сюда новый материал.

pl:Funkcje odwrotne do trygonometrycznych

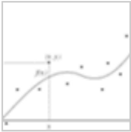
Категории: Заготовки | Тригонометрия | Специальные функции | Элементарные функции | Добавить категорию

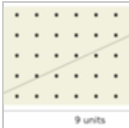
Языки: English | Deutsch | Italiano | Português | 中文

Изображения

72 ФОТО НА ЭТОЙ ВИКИ

Добавить Фото





Смотреть все фотографии >

Последние действия в вики

Сложение
отредактировал Корсар94 3 дня назад

Метод наименьших квадратов
отредактировал Анонимный участник 4 дня назад

Натуральное число
отредактировал Анонимный участник 6 дней назад

Вектор (алгебра)
отредактировал Анонимный участник

Подробнее >

Викия-сеть

Случайная вики