Лекція 6
Функції і їх властивості

План лекції.

Визначення функції

Функція — математичне поняття, що відображає зв'язок між елементами множин. Можна сказати, що функція — це «закон», по якім кожному елементу однієї множини ставиться у відповідність деякий елемент іншої множини.

Значення y в кожній з пар $(x, y) \in f$ називається функцією від x, що записується у вигляді $y = f(x)$.

Отже, функція – це множина, представлене у вигляді:

$$f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

Відношення f на $X \times Y$ називають ***функцією*** з X в Y і позначають через $f : X \to Y$, якщо для кожного $x \in X$ існує єдиний елемент $y \in Y$ такий, що $(x, y) \in f$.

Якщо $f : X \to Y$ — функція, і $(x, y) \in f$, то говорять, що $y = f(x)$.

Як видно з визначення, символ f використовується у двох змістах:

1. f – це множина, елементами якої є пари, які беруть участь у відношенні.
2. $f(x)$ – це позначення для $y \in Y$, яке відповідає даному $x \in X$.

Область визначення й область значень.
Образ

Якщо задана функція $f : X \to Y$, то множину X називають ***областю визначення*** функції f, а множину Y називають ***областю потенційних значень.***

Образ множини. Образом множини $E \subseteq X$ називають множину всіх значень функції f на всіх елементах множини E. Така множина позначається $f(E)$:

$f(E) = \{f(x) | x \in E\}$ або рівнозначно:

$f(E) = \{y \in Y | (x, y) \in f \text{ } \textit{для деякого } x \in E\}$

Образ елемента.

Елемент $f(x)$ називають **образом** елемента x.

Визначення області значень через образ

Областю значень функції f називають образ усієї множини X.

Прообраз. Відображення

Прообраз множини. Прообразом підмножини $F \subseteq Y$ називають множину всіх елементів $x \in X$, для яких $f(x) \in F$. Прообраз позначається: $f^{-1}(F)$:

$$f^{-1}(F) = \{x | f(x) \in F\}$$

Елемент-прообраз

Елемент x називають **прообразом** $f(x)$

Визначення відображення

Функцію $f : X \to Y$ називають також ***відображенням***; при цьому говорять, що f відображає X в. Y

Отже, *функція* та *відображення* – синоніми.

Однак термін «функція» частіше використовується для того, щоб вказати на відношення між елементами множин, а відображення – для визначення відношення між множинами.

Властивості відображень множини

Властивість 1. Якщо A_1 й A_2 – підмножини X, то образ об'єднання дорівнює об'єднанню образів:

$$f\left(A_1 \cup A_2\right) = f\left(A_1\right) \cup f\left(A_2\right).$$

Властивість 2. Для взаємо-однозначного відображення образ перетину дорівнює перетину образів:

$$f\left(A_1 \cap A_2\right) = f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right).$$

Властивість 3. Для довільного образа відображення перетину входить у перетин образів:

$$f\left(A_1 \cap A_2\right) \subseteq f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right)$$

Узагальнення властивостей 1 і 3:

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f\left(A_i\right), \quad f\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} f\left(A_i\right).$$

Композиція функцій

Композицією двох функцій $f : A \to B$ і $g : B \to C$ називають функцію $h : A \to C$, яка задана співвідношенням

$$h(x) = g\left(f\left(x\right)\right)$$

Інакше кажучи, h являє собою множину пар

$$\left\{(a,c) \middle| (a,b) \in f \ и \ (b,c) \in g \ для\, деякого\, b \in B\right\}$$

Композиція функцій позначається: $f \circ g$.
Нехай $f : A \to B$, $g : B \to C$ і $k : C \to D$

Композиція (як операція над функціями) *асоціативна*, тобто

$$f \circ \left(g \circ k\right) = \left(f \circ g\right) \circ k.$$

Тому в композиції декількох функцій, які ідуть підряд, можна опускати дужки.

Композиція відображень

Нехай дані відображення $Q : X \to X$ і $G : X \to X$.

Композицією цих відображень називають відображення $Q \circ G$, обумовлене співвідношенням:

$$Q(G) = Q \circ G.$$

Дане співвідношення виражає відображення Q відображення G.

У випадку, коли $Q = G$ можливо одержати відображення:

$Q^2 = Q(Q), Q^3 = Q\left(Q^2\right), \ldots, Q_X^m = Q\left(Q_X^{m-1}\right)$.

Якщо $Q^0 = X$ то $Q^0 = Q\left(Q^{-1}\right) = X$.

Оскільки Q^{-1} – зворотне відображення, то

$Q^{-1} = Q\left(Q^{-2}\right), Q^{-2} = Q\left(Q^{-3}\right)$, і т.ін.

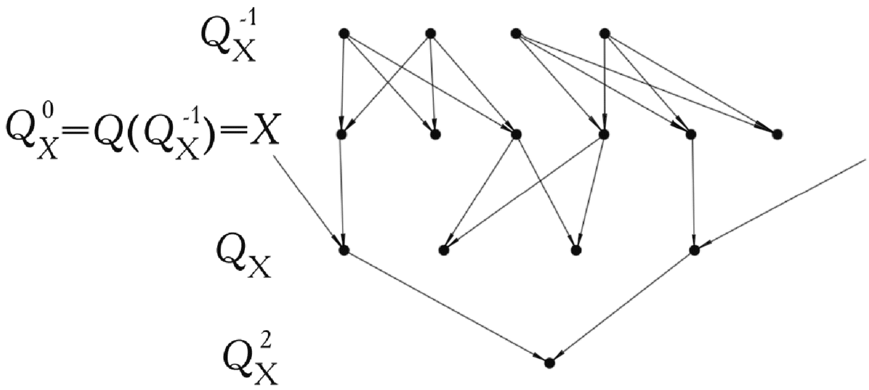
Приклад. Нехай X – множина людей. Для кожної людини x із множини X множину його дітей визначимо як Q_X.

Тоді

Q_X^2 буде представляти множину його онуків,

Q_X^3 - множина його правнуків,

Q_X^{-1} - множина батьків.



Зобразимо множину людей точками, а стрілками представимо відповідності між X, Q_X, Q_X^2 і т.ін. Тоді одержуємо родовід або генеалогічне дерево для даної множини людей.

Ін'єктивні відображення і функції

Відображення множини X в множину Y називають **ін'єктивним,** якщо образ $f(x)$ може мати лише один прообраз x.

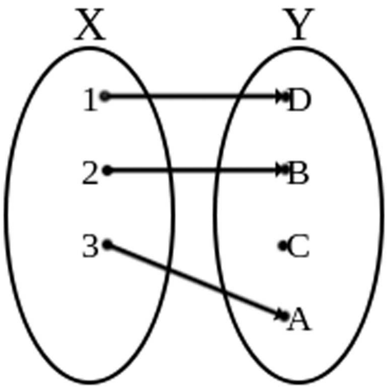
Отже, має місце *одно-однозначна* відповідність.

$$f : X \to Y \qquad f = \{(1, D), (2, B), (3, A)\}$$

При цьому, не всі елементи Y - образи

Визначення.

Функцію $f : X \to Y$ називають ***ін'єктивною***, або ***ін'єкцією***, якщо з $f(x) = f(x')$ випливає $x = x'$.

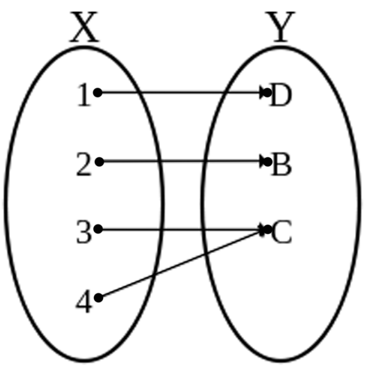


(Вікі) Ін'єкція (ін'єктивне відображення, ін'єктивна функція) — таке співвідношення між елементами двох множин, в якому двом різним елементам першої множини (області визначення) ніколи не співставляється один і той самий елемент другої множини (області значень).

Сюр'єктивні відображення і функції

Відображення множини X в множину Y називають **сюр'єктивним,** якщо кожний елемент із Y має принаймні один прообраз із X.

Отже, має місце багато-однозначне відповідності.



Функцію $f: X \to Y$ називають ***сюр'єктивною функцією***, або ***сюр'єкцією***, якщо кожний елемент множини Y є образом хоча б одного елемента множини X, тобто

$$\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$$

(Вікі) Сюр'єкція (сюр'єктивне відображення, сюр'єктивна функція) — співвідношення між двома множинами, в якій з кожним елементом другої множини асоціюється щонайменше один (або більше) елементів першої множини.

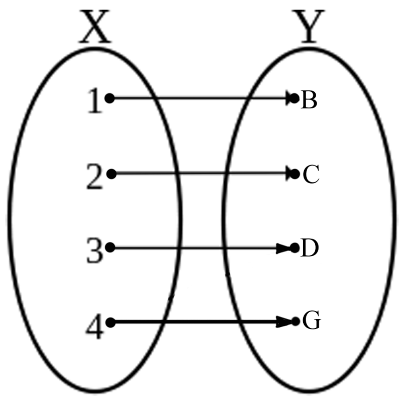
Бієкція

Функцію, яка є одночасно ін'єктивною, і сюр'єктивною, називають ***взаємно однозначною відповідністю***, або ***бієкцією.***

$f: X \to Y$

$f = \{(1, B), (2, C), (3, D), (4, G)\}$

Якщо $X = Y$ і $f : X \to X$ є взаємно однозначною відповідністю, то f називається ***перестановкою*** множини X.



(Вікі) Бієкція- відповідність, яка асоціює один елемент вхідної множини з одним і тільки одним елементом результуючої множини і навпаки, одному елементу результуючої множини співставляється один і лише один елемент вхідної множини.

Способи задавання функцій.

1. Табличний спосіб задавання функції.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	4	9	16	25	36	49	64	81

У даній таблиці стовпці являють собою множину впорядкованих пар:

$$y = f(x) = \{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25),(6,36),(7,49),(8,64),(9,81)\}$$
,

що відповідає визначенню функції, представленому раніше.

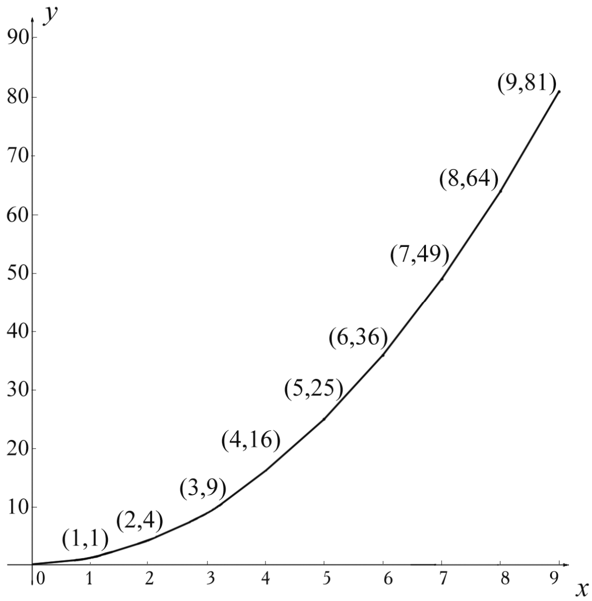
2. Аналітичний спосіб задавання функції

При аналітичному задаванні функція представлена у вигляді формули, тобто математичного виразу, що включає математичні операції, які необхідно виконати над $x \in X$, щоб одержати $y \in Y$:

$$y = f(x) = \left\{(x, y) \in R^2 \middle| y = x^2\right\}$$

3. Графічний спосіб задавання функції.

Якщо $X \subseteq R$ й $Y \subseteq R$, тобто X і Y є підмножинами множини дійсних чисел, то пари $(x, y) \in R^2$ можливо представити у вигляді точок на площині. Повна сукупність точок буде являти собою графік функції.



Питання: Як задати функцію в R^3 ?

Спеціальні функції

1. Тотожна функція.

Нехай $I : X \to X$ визначене співвідношенням $f(x) = x$ для всіх $x \in X$. Функція I називається ***тотожною функцією*** на X**.**

2. Округлення до нижнього цілого

Функція $f : X \to Y$, де X — множина дійсних чисел, а Y — множина цілих чисел, називається ***округленням до нижнього цілого*** й позначається $f(x) = \lfloor x \rfloor$, якщо вона кожному $x \in X$ ставить у відповідність найбільше ціле число, менше або рівне x.

Приклад: $\lfloor 2{,}3 \rfloor = 2$; $\lfloor 3{,}899 \rfloor = 3$;

$\lfloor 10 \rfloor = 10$; $\lfloor -11{,}1 \rfloor = -12$; $\lfloor -11234 \rfloor = -11234$;

3. Округлення до верхнього цілого

Функцію $f : F \to B$ називають ***округленням до верхнього цілого*** й позначають $f(x) = \lceil x \rceil$, якщо вона кожному $x \in X$ ставить у відповідність найменше ціле число, більше або рівне x.

Приклад: $\lceil 11{,}1 \rceil = 12$; $\lceil 45{,}4 \rceil = 46$; $\lceil -145{,}4 \rceil = -145$;

$\lceil 22 \rceil = 12$; $\lceil -45 \rceil = -45$

4. Факторіал

Нехай X і Y збігаються із множиною ненегативних цілих чисел. ***Факторіалом*** назвемо функцію $f : X \to Y$, позначувану через $f\left(n\right) = n!$ і обумовлену наступними співвідношеннями:

0!=1

1!=1

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$

5. Бінарна операція

Нехай X, Y, Z — трійка непустих множин. **Бінарною операцією** або **двомісною операцією** у парі $\left(x, y\right)$, $x \in X$ і $y \in Y$ зі значенням в $z \in Z$ називають функцію $b : P \to Z$, де $P \subset X \times Y$.

Бінарна операція позначається знаком дії, який ставиться зазвичай між операндами.

Нехай • – довільна операція. Тоді існують види записів:

1. Інфіксна форма запису: $x \bullet y$
2. Префіксна (польський запис): $\bullet xy$
3. Постфіксна(зворотний польський запис): $xy \bullet$

Приклад: «+», «-», «· » – бінарні операції на множині раціональних чисел.

Послідовність

Визначення. Нехай дана множина $X = \left\{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n\right\}$ довільної природи. Усяке відображення $f : N \to X$ множини натуральних чисел N у множину X називають **послідовністю** (елементів множини X).

Образ натурального числа i, а саме, елемент $x_i = f\left(i\right)$, називають i**-м членом** або **елементом послідовності**, а порядковий номер члена послідовності – її індексом.

Позначення

Послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ записують у вигляді

$\left(x_i\right)_{i=1}^{\infty}$, іноді $\left\{x_i\right\}_{i=1}^{\infty}$.

Для скінченних послідовностей: $\left(x_i\right)_{i=1}^{n}$ або $\left\{x_i\right\}_{i=1}^{n}$

Сума елементів послідовності: $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Функція двох змінних

Визначення. Якщо **кожній парі** $\left(x, y\right)$ елементів деякої множини $D = X \times Y$ **відповідає єдиний елемент** $z \in Z$, а **кожному елементу** z

відповідає хоча б одна пара (x, y), то ми говоримо, що z є функція двох незалежні змінні x і y, визначена в D.

Функція двох змінних $f: D \to Z$ є відображенням декартового добутку $D = X \times Y$ в множину Z.

Формальне визначення функції двох змінних має такий вид:

$$f = \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z \,|\, z = f(x, y)\}.$$

Матриця

Нехай є дві скінченні множини:

$$M = \{1, 2, ..., m\} \text{ і } N = \{1, 2, ..., n\},$$

де m і n — натуральні числа.

Функція

$$A: M \times N \to D$$

представляє матрицю розміру $m \times n$ *, або масив* $m \times n$ *(*m *на* n *)*
Множина D — це, як правило, множина дійсних, комплексних, раціональних або цілих чисел.

Елементи D називають ***скалярами.***

Таким чином, для кожного $i, 1 < i < m$, і кожного $j, 1 < j < n$, є елемент $A(i, j) \in D$, який перебуває в i-му рядку і j-му стовпці відповідної прямокутної таблиці.

Елемент матриці $A(i, j)$ *представляє собою образ* елемента області визначення (i, j) і скорочено позначається через $A_{i,j}$. Отже, $m \times n$ матриця A зображується прямокутною таблицею, де образи впорядкованих пар $(i, j) \in \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\}$ можуть бути представлені в такому виді:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

Матриця A містить m рядків і n стовпців і є матрицею розміру $m \times n$. Скорочено матрицю записують $A = \left[A_{ij} \right]$ або $A = \left[a_{ij} \right]$.

Значення a_{ij} називають ***компонентом***, або ***елементом*** матриці А.

Види матриць

1. ***Матриця-стовпець.*** Матрицю розміру $m \times 1$ називають матрицею-***стовпцем або вектором-стовпцем***

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

2.***Матриця-рядок***. Матрицю розміру $1 \times n$ називають матрицею-рядком або ***вектором-рядком.***

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Якщо A — матриця-рядок або матриця-стовпець, то індекс рядка або, відповідно, стовпця, звичайно опускають.

3. ***Квадратична матриця.*** Якщо в матриці кількість рядків і кількість стовпців збігається: $m = n = k$, то її називають ***квадратною матрицею.***

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}$$

4. ***Діагональна матриця.*** Це квадратична матриця, усі елементи якої, крім діагональних, нульові.

$$\forall (i \neq j) \Rightarrow A_{ij} = 0. \qquad A = diag(A_1, A_2, ..., A_k).$$

5. ***Одинична матриця.*** Це діагональна матриця з одиничними елементами на діагоналі.

$$\begin{cases} \forall (i \neq j) \Rightarrow A_{ij} = 0, \\ \forall (i = j) \Rightarrow A_{ij} = 1 \end{cases} \qquad A = diag(1,1,...,1)$$

Операції над матрицями

Рівність матриць

Дві матриці $A = \left[A_{ij} \right]$ і $B = \left[B_{ij} \right]$ розміру $m \times n$ ***рівні***, якщо рівні їхні відповідні елементи; тобто $A = B$ тоді й тільки тоді, коли $A_{ij} = B_{ij}$ для всіх $i, 1 < j < m,$ і всіх $j, 1 < j < n$.

Множення матриці на скаляр

Якщо d — скаляр, а $A=\left[A_{ij}\right]$ — матриця $m\times n,$ то dA- це матриця $D=\left[D_{ij}\right]$ розміром $m\times n$, де $D_{ij}=dA_{ij}$, тобто кожний компонент є добуток відповідного компонента A на d . Добуток числа d й матриці A називають ***множенням матриці на скаляр.***

Сума і різниця матриць

Додавати і віднімати можна тільки матриці одного розміру !!

Сума

Якщо $A=\left[A_{ij}\right]$ і $B=\left[B_{ij}\right]$ — $m\times n$-матриці, тоді $A+B$ є $m\times n$ матрицею $C=\left[C_{ij}\right]$, де $C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$, інакше кажучи, матриці додаються ***покомпонентно***. Матрицю C називають ***сумою матриць*** A і B.

Різниця

Різницю двох матриць визначимо через їх суму.

Запис $A-B$ означає $A+\left(-1\right)\cdot B$.

Отже, якщо $A=\left[A_{ij}\right]$ й $B=\left[B_{ij}\right]$ — $m\times n$-матриці, тоді $A-B$ є $m\times n$-матриця $C=\left[C_{ij}\right]$, де $C_{ij}=A_{ij}-B_{ij}$.

Добуток матриць

1. **Множення матриці на матрицю-стовпець**

Матриця повинна бути ліворуч, а матриця-стовпець – праворуч:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 + \ldots A_{1n}B_n \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 + \ldots A_{2n}B_n \\ \vdots \\ A_{m1}B_1 + A_{m2}B_2 + \ldots A_{mn}B_n \end{bmatrix}$$

2. **Множення матриці-рядка на матрицю**

Матриця-рядок повинна бути ліворуч, а матриця-праворуч:

$$\left[A_1\ A_2 \ldots A_m\right] \times \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m1} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^{m} A_k B_{k1} \quad \sum_{k=1}^{m} A_k B_{k2} \ \ldots \ \sum_{k=1}^{m} A_k B_{kn}\right]$$

Б) Нехай A матриця $m \times p : A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{mp} \end{bmatrix}$

Нехай B матриця $p \times n$: $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & B_{p3} & \cdots & B_{pn} \end{bmatrix}$

Тоді добутком матриць A і B називається матриця $C = \left[C_{ij} \right]$ розміром $m \times n$, де C_{ij} - це скалярний добуток i-го рядка матриці A на j-й стовпець матриці B. $C=AB$

$$C_{i,j} = \begin{bmatrix} A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} & \cdots & A_{ip} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ B_{3j} \\ \vdots \\ B_{pj} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj} .$$

Транспонована матриця

Нехай A — матриця $m \times n$.

Її ***транспонованою матрицею*** називають матриця A^t розміром $n \times m$ таку, що

$$A_{ij}^t = A_{ji},$$

де A_{ij} — елемент i-го рядка і j-го стовпця матриці A.

Симетрична матриця

Якщо A — матриця $n \times n$ і $A_{ij} = A_{ji}$ для всіх $1 \le i,\ j \le n,$ то матрицю A називають ***симетричною.*** Іншими словами, матриця A симетрична тоді й тільки тоді, коли $A = A^t$.

Матричне представлення відношень

Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$ і $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_n\}$, і нехай R — відношення на $A \times B$.

Матричним представленням R називають матрицю $M=\left[M_{ij}\right]$ розміром $m\times n$, елементи якої визначають із співвідношення

$$M_{ij}=\begin{cases}1, & \left(a_i,b_j\right)\in R,\\ 0, & \left(a_i,b_j\right)\notin R.\end{cases}$$

Нехай M — матриця розміром $n\times n$, у кожному рядку і у кожному стовпці якої тільки один елемент, який дорівнює 1, а всі інші дорівнюють 0. Таку матрицю M називають ***матрицею перестановок.***

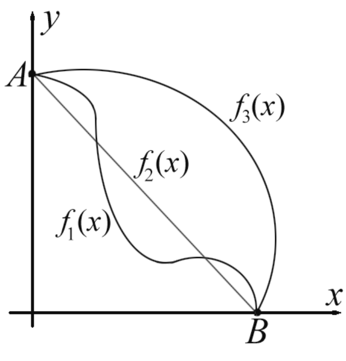
Поняття функціонала

Поняття функціонала є більш широким, ніж поняття функції.

Коли ми говоримо про відображення $f: X\to Y$ як про функцію з дійсними значеннями, ми не накладаємо на характер елементів множини X яких-небудь обмежень.

У найпростіших задачах множина *X*, як і множина Y, являють собою множини дійсних чисел. Кожна пара $\left(x,y\right)\in f$ ставить у відповідність одному дійсному числу x інше дійсне число y. Однак для практики важливим є випадок, коли множина X являє собою множину функцій, а множина Y – множина дійсних чисел. Цей випадок приводить до поняття функціонала.

Уявимо собі деякий набір кривих (траєкторій) $y=f_i\left(x\right)$, що з'єднують фіксовані точки А и В, як показано на рисунку.



Нехай по кожній із цих траєкторій може відбуватися вільне переміщення точки. Позначимо через t час, який потрібно на переміщення із точки A в точку B. Цей час очевидний залежить від характеру траєкторії AB, тобто від виду функції $f_i\left(x\right)$.

Позначимо через $F\left(x\right)$ множину з n різних функцій, що зображують траєкторію AB,

$$F(x)=\{f_1(x), f_2(x),..., f_i(x),..., f_n(x)\},$$

а через T множину дійсних чисел $t \in T$, що визначають час переміщення точки, то залежність часу руху від виду функції може бути записана як відображення.

Функціонал – це відображення J, що має таке формальне представлення:

$$J : F(x) \to T,$$

або $J=\{(f(x),t) | f(x) \in F(x), t \in T, t = J[f(x)]\}$.

Оператор

Поняття оператора. Оператор представляє більш загальне поняття в порівнянні з функціоналом.

Оператором називається відображення

$$L : X \to Y,$$

де множини X і Y є множинами функцій з елементами $x(t) \in X$ й $y(t) \in Y$.

Звідси випливає, що елементами множини L є пари$(x(t), y(t))$, а оператор L перетворить функцію

$$y(t)=L[x(t)],$$

Таким чином, оператор встановлює відповідність між двома множинами функцій, так, що кожній функції з одного множини відповідає функція з іншої множини.

Приклад. Позначимо через p оператор диференціювання. Тоді зв'язок між похідною $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$ і функцією $f(x)$ може бути представлений в операторному вигляді:

$$f'(x)=p[f(x)].$$