Лекция № 2

Преобразования на плоскости (2D) и в пространстве (3D). Их активные преобразования.

Метод преобразования координат

Был введен в XVII веке франц. математиками Ферма и Декарт

В соврем. комп. графике этот метод исп.

1) каждая точка на экране имеет свои коорд.

2) коорд исп. для описания объектов

3) при исп. вычислений по комп. графике часто возникает необход. преобр. одной сист. коорд. в другую

Каждой точке M ставится в соотв. множество чисел $(m_1, m_2, \dots m_N)$ – её коорд.

Если $n = 2$, то в КГ (комп. графике) мы получаем 2D сист. координат, если $n = 3$ – 3х мерная СК.

$M(m_1^*, m_2^*, \dots m_n^*)$ – в другой сист. коорд.

Можно записать уравнение перехода в другую сист. координат

$m_1^* = f_1(m_1, m_2, \dots m_N)$

$m_2^* = f_2(m_1, m_2, \dots m_N)$

$\vdots$

$m_N^* = f_N(m_1, m_2, \dots m_N)$

F_1 ~~в ф.~~ – ф-ия пересчета ~~в~~ коорд. в N-мерной системе.

Обратная задача

$m_1 = F_1(m_1^*, m_2^*, \dots m_N^*)$

F_i – ф-ия обратного пересчета в n-мерной системе

Если размерность СК совпадает ($n = N$), то такое преобр. назыв. однозначным, если нет – неоднозн.

Если ф-ии f_i и F_i являются линейными и $n = N$, то то такие преобр. назыв. аффинными

Линейное преобр. – F_1 – если ф-ию

$f_i = a_{1i} m_1 + a_{2i} m_2 + \dots a_{ni} m_i + a_{ni+1}$

Аналогично F-линейное преобр, если

$F_i = b_{1i} m_1^* + b_{2i} m_2^* + \dots b_{ni} m_i^* + b_{ni+1}^*$

$$\underbrace{(m_1^* \, m_2^* \dots m_n^*)}_{M^*} = \underbrace{(m_1 \cdot m_2 \dots m_n)}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \, a_{12} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \, a_{n2} \dots a_{nn} \\ a_{n+1} \, a_{n+1} \dots a_{n\,n+1} \end{pmatrix}}_{A}$$

Линейные преобр. в матр. виде можно представить в виде

$M^* = M \cdot A$, 1 2

M^* – результирующая координата

M – исходные –//–

A – матрица преобразования

$$\begin{pmatrix} m_1^* \\ m_2^* \\ \vdots \\ m_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots \\ a_{12} & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$M^* = AM$ – запись по столбцам

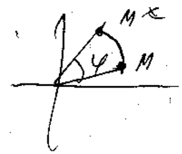
2D преобразования

Любое преобр. на плоскости (и в простр.) можно представить как последовательность N простейших преобразований:

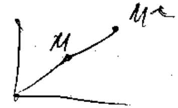
1) поворот
2) растяжение
3) отражение
4) перенос

Есть соотв. матрицы (матр поворота

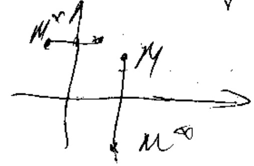
Поворот



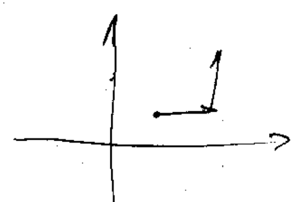
Растяжение



Отражения относительно одной оси и относ. другой



Переноса



Преобр. поворот, растяж. и отражение выполняются в одной СК.
Для переноса надо +1.

Для однозн. описания преобр. исп. метод однородных коорд.
В основе этого метода лежит предст. о том, что каждая т. в n-мерном простр. может быть построена как точка n+1 простр.

~~Матрица вращения~~

~~A или R~~

$$A \to R = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$A \to D$ – растяжение

$$= \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

α – коэф растяж по оси Ox
β –//– Oy

$x^* = \alpha x$
$y^* = \beta y$

Матрица растяжения

$$M_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_x = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Матрица переноса

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{vmatrix} \qquad x^* = x + \lambda, \quad y^* = y + \mu$$

$A = A_1 \cdot A_2 \to A_i$

3D преобразование

Преобр. в простр. описываются также с пом. лин. преобр.

$$(x^*, y^*, z^*, 1) = (x, y, z, 1) \cdot A$$
$$\vdots$$
$$(x^*_n, y^*_n, z^*_n, 1) = (x_n, y_n, z_n, 1) \cdot A$$

$A \to R, D, П, T$

$$R_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R_y = \begin{vmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R_z = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{отн } XY = M_z = M_{xy} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \end{array}$$

$$M_{yz} = M_x = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_{zx} = M_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Для лаб

$A = R_x R_y$ – вращение относительно осей x и y

$$R_{x,y} = \begin{vmatrix} \cos\omega & \sin\varphi \cdot \sin\omega & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & 0 & 0 \\ \sin\omega & -\sin\varphi \sin\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\varphi \quad \psi$

Удаление невидимых граней поверхност

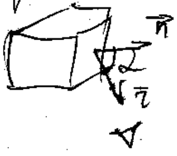
Один из кратчайших (самых) — алгоритм отсечения нелицевых граней.

Этот алг. исп

1) только для выпуклых многогранников

Метод заключается в определении угла между нормалью к каждой грани и направлением на наблюдателя

Если α-острый то грань считается видимой и рисуется, если тупой - не



Во многих случаях наблюдатель на оси z

Для опред. видимости грани, если наблюдатель на оси z, то

$n_z = dX1 \cdot dY2 - dX2 \cdot dY1$, где

$dX_1 = X2 - X1$

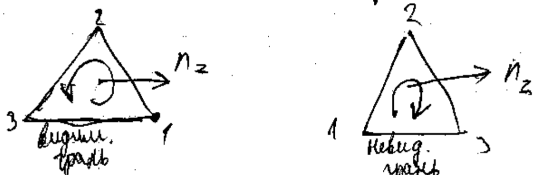
$dY1 = Y_2 - Y1$

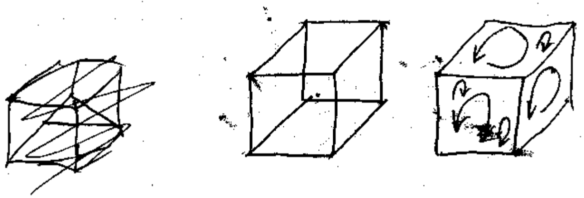
$dX_2 = X_3 - X_2$

$dY_2 = Y_3 - Y_2$

$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ точки вершин граней

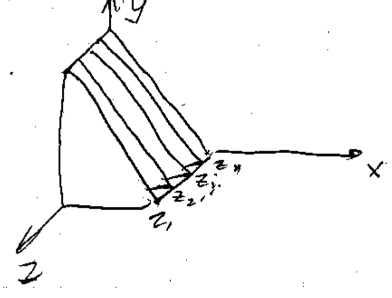
Если $n_z > 0$ — видим



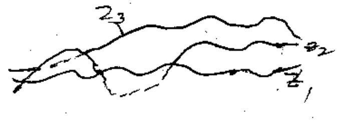


Метод плавающего горизонта

3-х мерный объект рассекается плоскостями, параллельными одной из коорд. плоскостей в порядке по возрастанию



от наблюдателя. Строятся линии пересечения: если выше предыдущей — рисуем, ниже — нет. Если ниже всей плоскости XY - наоборот



Лекция №3

$S = Q * A$

результирующая матр. коорд. — исходная матр. — преобразований

$A = A_1 * A_2 * \dots$

$Q^{-1}S = \underbrace{Q^{-1}Q}_{E} * A$

$A = Q^{-1}S$

$$\begin{array}{c|cccc|}
\text{поворот} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\
 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\
\text{растяжение} & \lambda & \mu & \gamma & 1 \\
\end{array}$$

множитель

Пример 1

Задан треугольник с коорд

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Каким-то образом получили треугольник

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

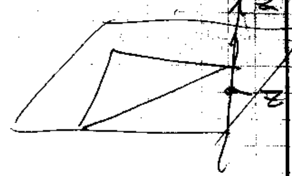
Найти A - матрицу преобразования

$\cancel{A}$ $A = Q^{-1} \cdot S$

$$Q^{-1} = [Q_{ij}]^T = \frac{[(-1)^{i+j} \cdot \det Q_{ij}]^T}{\det Q}$$

$\det =$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$\det = 2 + 3 + 2 - 6 - 2 - 1 = -2$

$Q_{11} = 1$ $\quad Q_{12} = 1$ $\quad Q_{13} = -4$

$Q_{21} = 0$ $\quad Q_{22} = -2$ $\quad Q_{23} = 2$

$Q_{31} = -1$ $\quad Q_{32} = 1$ $\quad Q_{33} = 0$

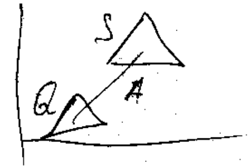
$\cancel{D_{13}}$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

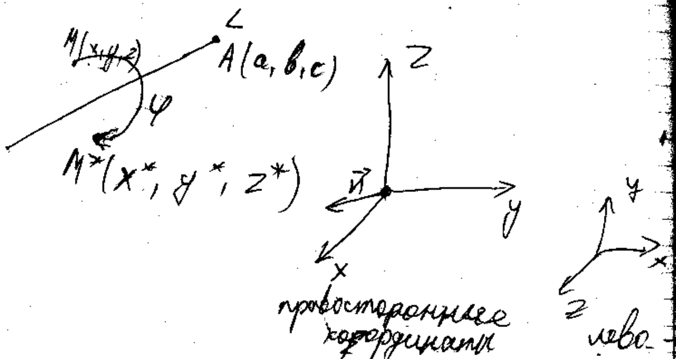
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \\ 0 & 2 & \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_i^* = 2 \cdot x$

$y_i^* = 2y + 1$



Пример 2 (преобразование в простран



~~d=~~

Напишем уравнение вращения точки M относительно прямой L с направляющим вектором

$\vec{n}(p, m, n)$

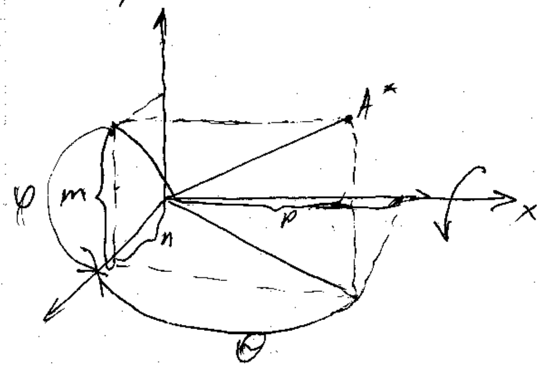
$d = \sqrt{m^2+n^2}$

1. Перенос (перенос точки в начало коорд)
2. Совместим L с осью
3. Выполним поворот вокруг оси
4. Выполним преобразование в обратном порядке.

1. $T_{(-a,-b,-c)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & -c & 1 \end{bmatrix}$

2. Совмещаем с осью z

Для совмещения прямой проходящей через центр сделаем 2 преобразования:
- повернем относительно оси X на угол φ (совместим с плоскостью)
- повернем относ. оси Oy



$\cos\varphi = \frac{n}{d}$

$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{d} & \frac{n}{d} & 0 \\ 0 & -\frac{m}{d} & \frac{n}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(p, m, n) \cdot R_x(\varphi) = (p, 0, d, 1)$

$\cos\Theta = d$

$\sin\Theta = p$

$(p, m, n) \cdot R_x(\varphi) = (p, 0, d, 1)$

$$R_y(-\Theta) = \begin{pmatrix} d & 0 & p & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -p & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(p, 0, d, 1) \cdot R_y(\Theta) = (0, 0, p^2 + d^2, 1)$$

$$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin\psi & 0 & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

поворот прямой, совмещенной с осью z

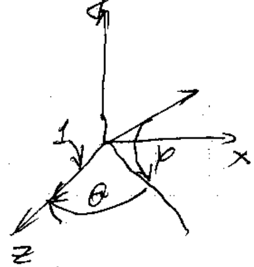
$\cancel{R_y(\Theta)}$

$\cancel{R_x(-\varphi)}$

$\cancel{T(a, b, c)} =$

$$A = T(-a, -b, -c) \cdot R_x(\varphi) \cdot R_y(-\Theta) \cdot R_z(\psi) \cdot R_y(\Theta) \cdot R_x(-\varphi) \cdot T(a, b, c)$$

На мод. работе: совместить единичную прямую с осью (числа заранее =)



$A(p, n, m)$

$p^2 = 0,5$

$n^2 = 0,25$

$m^2 = 0,25$

$d = \sqrt{0,5}$

$p^2 + m^2 + n^2 = 1$

$$\sin\varphi = \frac{n}{d} = \frac{\sqrt{0,25}}{\sqrt{0,5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{m}{d} = \frac{\sqrt{0,25}}{\sqrt{0,5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(p, m, n) \cdot R_x(\varphi) = (\sqrt{0,5}, \sqrt{0,25}, \sqrt{0,25}, 1) * ($$

$$= (\sqrt{0,5}, 0, \sqrt{0,5}, 1)$$

Вращаем на угол $-\Theta$

$\sin\theta = p = \sqrt{0{,}5}$

$\cos\theta = d = \sqrt{0{,}5}$

$$R_y(-\theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{0{,}5}, & 0, & \sqrt{0{,}5}, & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{0{,}5} & 0 \\ -\sqrt{0{,}5} & 0 & \sqrt{0{,}5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\sqrt{0{,}5}, 0, \sqrt{0{,}5}, \quad) \cdot R_y(-\theta) = (0, 0, 0{,}5 + 0{,}5, 1)$$

$$= (0, 0, 1, 1)$$

CreateByVova