

3. Синтез комбінаторних схем

3.1. Представлення функції f_4 в канонічних формах алгебр Буля, Шеффера, Пірса та Жезалкіна

Алгебра Буля {/, АБО, НЕ}

$$f4_{\text{ДДНФ}} = (\overline{X4} \overline{X3} \overline{X2} X1) \vee (\overline{X4} \overline{X3} X2 X1) \vee (\overline{X4} X3 X2 X1) \vee (X4 \overline{X3} \overline{X2} X1) \vee \\ (X4 X3 \overline{X2} \overline{X1}) \vee (X4 X3 \overline{X2} X1) \vee (X4 X3 X2 \overline{X1}) \vee (X4 X3 X2 X1)$$

$$f_{4DKH\Phi} = (\bar{X}4v\bar{X}3v\bar{X}2v\bar{X}1) \cdot (\bar{X}4v\bar{X}3vX2v\bar{X}1) \cdot (\bar{X}4vX3v\bar{X}2v\bar{X}1) \cdot (X4v\bar{X}3v\bar{X}v2\bar{X}1) \cdot$$

$$\cdot (\bar{X}4vX3v\bar{X}2vX1) \cdot (X4v\bar{X}3vX2vX1) \cdot (\bar{X}4vX3vX2v\bar{X}1) \cdot (X4v\bar{X}3vX2v\bar{X}1).$$

Алгебра Шеффера $\{I-HE\}$

$$f_4 = ((X_4/X_4)/(X_3/X_3)/(X_2/X_2)/(X_1)) / ((X_4/X_4)/(X_3/X_3)/(X_2)/(X_1)) /$$

$$((X_4/X_4)/(X_3)/(X_2)/(X_1)) / ((X_4)/(X_3/X_3)/(X_2/X_2)/(X_1)) / ((X_4)/(X_3)/(X_2/X_2)/$$

$$(X_1/X_1)) / ((X_4)/(X_3)/(X_2/X_2)/(X_1)) / ((X_4)/(X_3)/(X_2)/(X_1/X_1)) / ((X_4)/(X_3)/(X_2)/$$

$$(X_1))$$

Алгебра Пирса {АБО-НЕ}

$$f_4 = ((X_4 \downarrow X_4) \downarrow (X_3 \downarrow X_3) \downarrow (X_2 \downarrow X_2) \downarrow (X_1 \downarrow X_1)) \downarrow ((X_4 \downarrow X_4) \downarrow (X_3 \downarrow X_3) \downarrow (X_2) \downarrow (X_1 \downarrow X_1)) \\ \downarrow ((X_4 \downarrow X_4) \downarrow (X_3) \downarrow (X_2 \downarrow X_2) \downarrow (X_1 \downarrow X_1)) \downarrow ((X_4) \downarrow (X_3 \downarrow X_3) \downarrow (X_2 \downarrow X_2) \downarrow (X_1 \downarrow X_1)) \\ \downarrow ((X_4 \downarrow X_4) \downarrow (X_3) \downarrow (X_2 \downarrow X_2) \downarrow (X_1)) \downarrow ((X_4) \downarrow (X_3 \downarrow X_3)) \downarrow (X_2) \downarrow (X_1)) \downarrow ((X_4 \downarrow X_4) \downarrow (X_3) \\ \downarrow (X_2) \downarrow (X_1 \downarrow X_1)) \downarrow ((X_4) \downarrow (X_3 \downarrow X_3) \downarrow (X_2) \downarrow (X_1 \downarrow X_1)).$$

Алгебра Жезалкіна {ВИКЛЮЧНЕ АБО, 1, const 1}

$$f_4 = (x_4 \oplus 1) (x_3 \oplus 1) (x_2 | x_1) \oplus (x_4 \oplus 1) (x_3 | (x_2 | x_1) \oplus (x_4 | (x_3 \oplus 1) (x_2 \oplus 1) (x_1) \oplus (x_4 | (x_3 | (x_2 \oplus 1) (x_1 \oplus 1) \oplus (x_4 | (x_3 | (x_2 \oplus 1) (x_1) \oplus (x_4 | (x_3 | (x_2 | x_1) \oplus (x_4 \oplus 1) (x_3 \oplus 1) (x_2 \oplus 1) (x_1) = x_4 x_3 x_1 \oplus x_3 x_1 \oplus x_1 \oplus x_4 x_3$$

3.2. Визначення належності функції f_4 до п'яти передцповних класів

- $f(1111) = 1 \Rightarrow$ функція зберігає одиницю
- $f(0000) = 0 \Rightarrow$ функція зберігає нуль
- $f(0011) = f(1100) = 1 \Rightarrow$ функція не самодвоїста
- $f(0011) > f(0100) \Rightarrow$ функція не монотонна
- функція нелінійна, оскільки її поліном Жегалкіна нелінійний

3.3. Мінімізація функції f_4

Метод Квайна–Мак–Класкі

Виходячи з таблиці 2.2, запишемо стовпчик ДДНФ (K_0), розподіливши терми за кількістю одиниць. Проведемо попарне склеювання між сусідніми групами та виконаємо поглинання термів (рисунок 4.4).

K_0	K_1	K_2
0001 (1)	00X1 (1)	11XX (1)
0011 (1)	X001 (1)	11XX (1)
0111 (1)	0X11 (1)	
1001 (1)	X111 (1)	
1100 (1)	1X01 (1)	
1101 (1)	110X (1)	
1110 (1)	11X0 (1)	
1111 (1)	11X1 (1)	
	111X (1)	

Рисунок 4.4 – Склеювання і поглинання термів

Одержані прості імпліканти запишемо в таблицю покриття (таблиця 4.3).

Таблиця 4.3 – Таблиця покриття

	0001(F1)	0011(F1)	0111(F1)	1001(F1)	1100(F1)	1101(F1)	1110(F1)	1111(F1)
00X1 (1)	+	+						
X001 (1)	+			+				
0X11 (1)		+	+					
X111 (1)			+					+
1X01 (1)				+		+		
11XX (1)					+	+	+	+

В ядро функції входять ті терми, без яких неможливо покрити хоча б одну імпліканту.

Ядро = {X001; 00X1; 11XX}

В МДНФ входять всі терми ядра, а також ті терми, що забезпечують покриття всієї функції з мінімальною ціною.

$$f_{4\text{МДНФ}} = (\bar{X}3\bar{X}2X1) \vee (\bar{X}4X2X1) \vee (X4X3)$$

Метод невизначених коефіцієнтів

Ідея цього методу полягає у відкушанні ненульових коефіцієнтів при кожній імпліканті. Метод виконується у декілька етапів:

1. Рівняння для знаходження коефіцієнтів представляється у вигляді таблиці (таблиця 4.4).
2. Виконується відкреслення нульових рядків.
3. Викреслюються вже знайдені нульові коефіцієнти на залишившихся рядках.
4. Імпліканти, що залишилися, поглинають імпліканти справа від них.

Таблиця 4.4 – Метод невизначених коефіцієнтів

x_4	x_3	x_2	x_1	x_4x_3	x_4x_2	x_4x_1	x_3x_2	x_3x_1	x_2x_1	$x_4x_3x_2$	$x_4x_3x_1$	$x_4x_2x_1$	$x_3x_2x_1$	$x_4x_3x_2x_1$	f_4
0	0	0	0	00	00	00	00	00	00	000	000	000	000	0000	0
0	0	0	1	00	00	01	00	01	01	000	001	001	001	0001	1
0	0	1	0	00	01	00	01	00	10	001	000	010	010	0010	0
0	0	1	1	00	01	01	01	01	11	001	001	011	011	0011	1
0	1	0	0	01	00	00	10	10	00	010	010	000	100	0100	0
0	1	0	1	01	00	01	10	11	01	010	011	001	101	0101	0
0	1	1	0	01	01	00	11	10	10	011	010	010	110	0110	0
0	1	1	1	01	01	01	11	11	11	011	011	011	111	0111	1
1	0	0	0	10	10	10	00	00	00	100	100	100	000	1000	0
1	0	0	1	10	10	11	00	01	01	100	101	101	001	1001	1
1	0	1	0	10	11	10	01	00	10	101	100	110	010	1010	0
1	0	1	1	10	11	11	01	01	11	101	101	111	011	1011	0
1	1	0	0	11	10	10	10	10	00	110	110	100	100	1100	1
1	1	0	1	11	10	11	10	11	01	110	111	101	101	1101	1
1	1	1	0	11	11	10	11	10	10	111	110	110	110	1110	1
1	1	1	1	11	11	11	11	11	11	111	111	111	111	1111	1

В ядро функції входять ті терми, без яких неможливо покрити хоча б одну імпліканту.

Ядро = {X001; 00X1; 11XX}

В МДНФ входять всі терми ядра, а також ті терми, що забезпечують покриття всієї функції з мінімальною ціною.

$f_{4\text{МДНФ}} = (\bar{X}3\bar{X}2X1) \vee (\bar{X}4X2X1) \vee (X4X3)$

Метод діаграм Вейча

Метод діаграм Вейча – це графічний метод, призначений для ручної мінімізації. Його наочність зберігається за невеликої кількості аргументів.

Кожна клітинка відповідає конституанті. Кожний прямокутник, що містить 2^k елементів, відповідає імпліканті. Прямокутник максимального розміру відповідає простій імпліканті (рисунки 4.5).