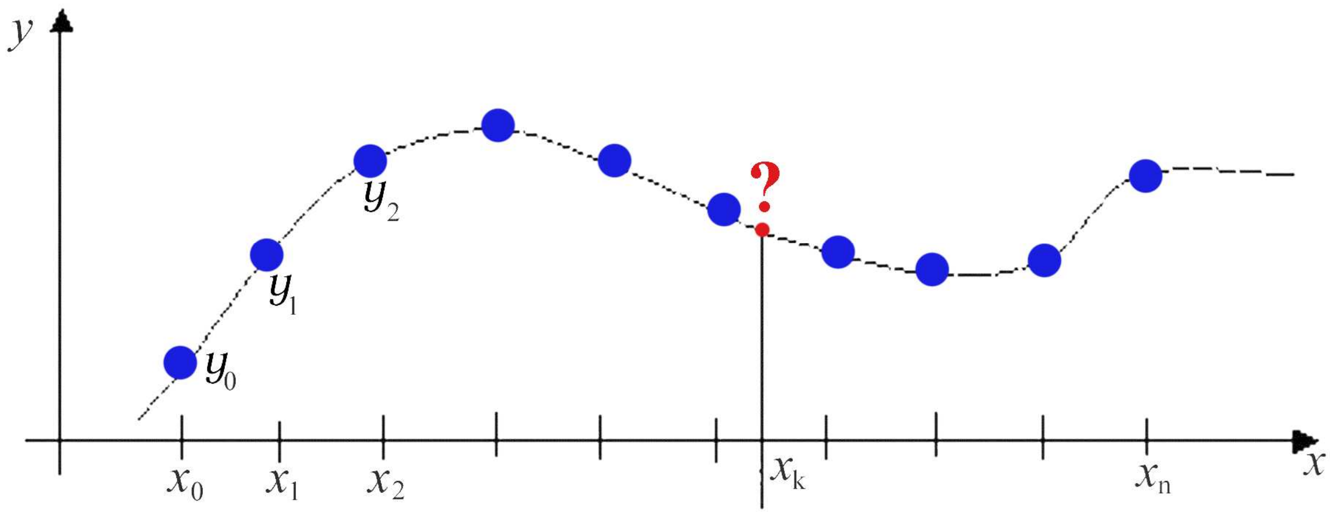
ЛЕКЦІЯ 3

Інтерполяція
та задача інтерполяції

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

Інтерполяція — це наближене знаходження значень функції по її окремих відомих значеннях.



У практичних обчисленнях часто зустрічаються функції, значення яких задані лише в декількох точках відрізка, що можна задати графіком або таблицею

x	x_0	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_k	$\cdots$	y_n

Задача інтерполяції

Функція $f(x)$ задана таблицею значень для деякої скінченної множини $x = \{x_0, \ldots x_i, \ldots, x_n\}$ аргументу x:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n).$$

У загальному вигляді: $y_i = f(x_i),\ \ i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$.

Потрібно визначити значення функції $f(x)$ *при значеннях аргументу* x, відмінних від заданих x_i.

Розв'язування у два етапи.

1. Будують таку функцію $g(x)$, *яка* збігається з $f(x)$ у заданих точках x_i.
2. Застосовують $g(x)$ замість $f(x)$ для значень x, відмінних від заданих x_i.

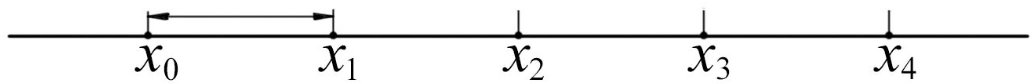
Такий спосіб визначення значень функції називають ***інтерполяцією****.*

Вузли інтерполяції

1. Вузли інтерполяції можуть бути **рівновіддаленими**.

Для рівновіддалених вузлів відстань між вузлами однакова

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 =,\ldots,= x_n - x_{n-1} = h = const,$$



Тоді значення вузла x_{i+1} може бути задане:

- рекурсивно $x_{i+1} = x_i + h$;
- виразом $x_{i+1} = x_0 + (i+1)h,$ де

$h -$ крок, $i = 0,1,\ldots,n-1 -$номер вузла.

$$x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ x_3 = x_0 + 3h,\ldots$$

2. Вузли також можуть бути розташованими довільно (**нерівновіддаленими**):

$$x_1 - x_0 \neq x_2 - x_1 \neq \ldots \neq x_n - x_{n-1}$$

ПІДСУМОК: Визначення задачі інтерполяції

Визначення. *Задачею інтерполяції* називають **спосіб побудови** або **знаходження** такої **функції** $g(x)$, за допомогою якої можна проводити обчислення замість заданої функції $f(x)$.

Схематично задача інтерполяції може бути представлена у вигляді:

$$f(x) \to \{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n} \to g(x)$$

Теоретично існує | Практично доступно | Одержали математично

Геометрична інтерпретація задачі інтерполяції

Геометрично розв'язування задачі означає, що **потрібно знайти криву** $y = g(x)$ деякого певного типу, що проходить через задану систему точок (x_i, y_i), $i = 0,1,\ldots n$.

При цьому криву називають *інтерполяційною кривою* (Рис. 1).

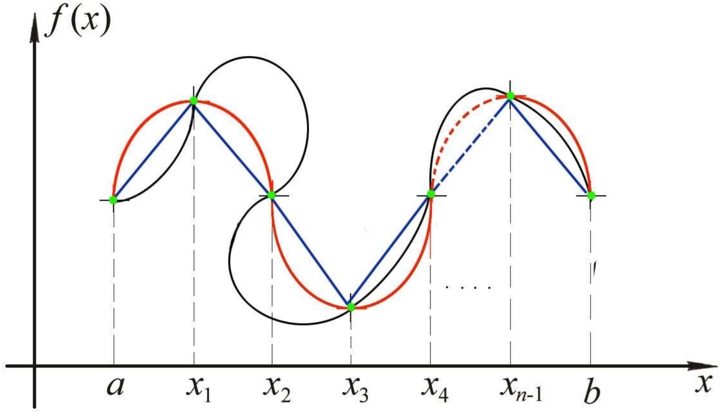


Рис.1. Інтерполяційна крива

У такій загальній постановці задача може мати нескінченну множину розв'язків.

Де використовується інтерполяція

Інтерполяцію функцій використовують у наступних випадках:

- **заміна** функції, що складно обчислюється, іншою, легко обчислюваною;

- **наближене відновлення функції** на всій області задавання за значеннями її в окремих точках або по інших відомих величинах;

- **одержання** згладжуючих функцій;

- наближеного **знаходження граничних значень** функцій;

- у задачах **прискорення збіжності** послідовностей і рядів, в інших питаннях.

Формальна постановка задачі інтерполяції

Нехай на деякому відрізку $[a,b]$ задані $n+1$ різних точок $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_k \neq x_j$ при $j \neq k, 0 \leq k \leq n$, $0 \leq j \leq n$ і значення деякої функції $f\left(x\right)$ в цих точках

$$f\left(x_0\right) = y_0, f\left(x_1\right) = y_1, f\left(x_2\right) = y_2, \ldots, f\left(x_n\right) = y_n, \text{ або}$$

$$f\left(x_i\right) = y_i, \; i = 0,1,\ldots,n$$

Завдання полягає в тому, щоб побудувати функцію $g\left(x, a_0, a_1, \ldots, a_n\right)$ таку, що

$$g\left(x, a_0, a_1, \ldots, a_n\right) = f\left(x\right).$$

Цю умову називають *умовою інтерполяції.*

Інтерполяція алгебраїчними многочленами

Алгебраїчна інтерполяція полягає в тому, що в якості інтерполяційної функції $g(x, a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *беруть* многочлен (поліном) *степеня не вище за* n *.*

$$g(x, a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

При цьому умова інтерполяції $g(x, a_0, a_1, \ldots, a_n) = f(x)$ *має вигляд*

$$f(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n$$

Теорема
про існування й єдиність алгебраїчного многочлена

Інтерполяційний многочлен

$$g\left(x, a_0, a_1, \ldots, a_n\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

який задовольняє умову

$$f\left(x_i\right) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n, \text{ де } 0 \le i \le n$$

по заданій функції

$$g\left(x, a_0, a_1, \ldots, a_n\right) = f\left(x\right)$$

має степінь не нижче n і є єдиним.

Доведення. Використовуючи умову

$$f\left(x_i\right) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n, \text{ де } 0 \le i \le n$$

одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів a_i:

$$
\begin{cases}
a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + ... + a_mx_0^n = y_0, \\
a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + ... + a_mx_1^n = y_1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + ... + a_mx_n^n = y_n.
\end{cases}
$$

або

$$
\begin{pmatrix}
1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n
\end{pmatrix}
$$

Отримана система рівнянь

$$f\left(x_i\right) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_n x_i^n, \text{ де } i = 0, ..., n$$

однозначно розв'язна (тобто розв'язок існує і він єдиний), тому що за умовою x_i, $i = 0, 1, ..., n$ різні. Отже, у цьому випадку визначник системи відмінний від нуля

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

Таким чином, коефіцієнти $a_0, a_1, ..., a_n,$

що отримуємо у результаті розв'язування даної системи, визначають єдиний інтерполяційний многочлен, степінь якого не нижче n, побудований на $(n+1)$ різних точках.

Приклад побудови інтерполяційного многочлена

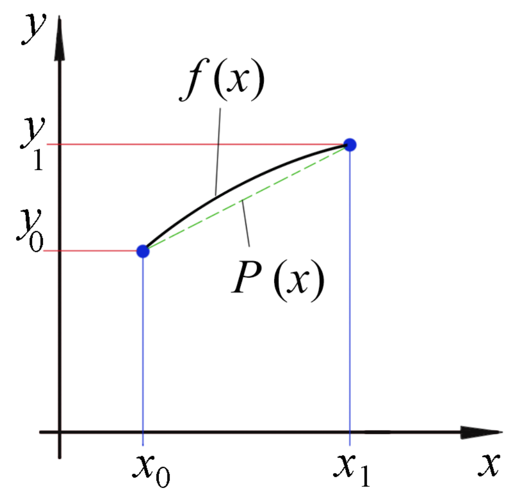
Приклад. Нехай відомі значення функції $f(x)$ у вузлах x_0, x_1, тобто

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1).$$

Побудувати інтерполяційний многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1 x,$$

що співпадає зі значеннями $f(x)$ у вузлах x_0, x_1.



Розв'язок. Запишемо систему відносно a_0 й a_1

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 &= y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 &= y_1. \end{aligned} \quad \text{або} \quad \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо дану систему методом виключення:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 = y_1. \end{cases}$$

1. $a_0 = y_0 - a_1 x_0,$ визначаємо a_0 з рівн.1

2. $y_0 - a_1 x_0 + a_1 x_1 = y_1$, підставляємо a_0 в рівн. 2

3. $a_1 \left(x_1 - x_0 \right) = y_1 - y_0,$ зводимо подібні члени

4. $a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$ визначаємо значення a_1

5. $a_0 = y_0 - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0$, визначимо a_0, підставивши знач. a_1 в рівн.1

6. $a_0 = \dfrac{y_0 \left(x_1 - x_0 \right) - x_0 \left(y_1 - y_0 \right)}{x_1 - x_0}$, приводимо до спільного знаменника.

7. $a_0 = \dfrac{y_0 x_1 - \cancel{y_0 x_0} - x_0 y_1 + \cancel{x_0 y_0}}{x_1 - x_0}$ розкриваємо дужки

8. $a_0 = \dfrac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0}$ визначаємо значення a_0

Будуємо інтерполяційний многочлен, підставивши у вираз

$$P(x) = a_0 + a_1 x,$$

значення коефіцієнтів a_0 і a_1

$$P(x) = a_0 + a_1 x = \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0} + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x.$$

Висновок. Для довільної функції, заданої в точках

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1)$$

існує інтерполяційний поліном

$P(x) = \dfrac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0} + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x$, який збігається зі значеннями функції $f(x)$ в точках y_0 і y_1

Перетворимо отриманий поліном

$$P(x) = \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0} + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x,$$

у такий спосіб

$$P(x) = \frac{y_0 x_1}{x_1 - x_0} - \frac{y_1 x_0}{x_1 - x_0} + \frac{y_1 x}{x_1 - x_0} - \frac{y_0 x}{x_1 - x_0} =$$

$$= \frac{y_0 (x_1 - x)}{x_1 - x_0} + \frac{y_1 (x - x_0)}{x_1 - x_0} =$$

$$= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

Інтерполяційний многочлен Лагранжа для нерівновіддалених вузлів

Постановка задачі. Нехай для функції $y = f(x)$ задані значення $y_i = f(x_i)$ в нерівновіддалених $(n+1)$ вузлах інтерполяції

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n).$$

Потрібно побудувати многочлен $L_n(x)$ степеню не вище n, що приймає в заданих вузлах x_i, $i = 0,1,\ldots,n$ значення, які збігаються зі значеннями функції $f(x)$

$$L_n(x_i) = y_i, \ i = 0,1,2,\ldots,n.$$

Інтерполяційний поліном Лагранжа для нерівновіддалених вузлів має вигляд:

$$\cancel{(x-x_i)}$$

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}y_i$$ або

$$\cancel{(x_i-x_i)}$$

$L_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} l_i y_i$, де l_i - це лагранжевий коефіцієнт при y_i.

$$l_i=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

Чисельник – добуток різниць $\prod\limits_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}(x-x_j)$.

Знаменник – добуток різниць $\prod\limits_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}(x_i-x_j)$

У загальному вигляді:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Многочлен називають *інтерполяційним многочленом Лагранжа* для нерівновіддалених вузлів.

Приклад. Нехай $n = 3$. Тоді лагранжеві коефіцієнти:

$$l_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}, l_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$l_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)}, l_3 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$L_3 = l_0 y_0 + l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3$$

Приклад. Дано функцію $Y = f(X)$, де $Y = \{y_i\}_{i=0}^{3} = \{12, 6, 6, 24\}$,

$X = \{x_i\}_{i=0}^{3} = \{1, 2, 4, 5\}$. Розв'язок.

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3.$$

$$L_2(x) = \frac{12}{(-1)(-3)(-4)}(x-2)(x-4)(x-5) + \frac{6}{1(-2)(-3)}(x-1)(x-4)(x-5) +$$

$$+ \frac{6}{3 \cdot 2(-1)}(x-1)(x-2)(x-5) + \frac{24}{4 \cdot 3 \cdot 1}(x-1)(x-2)(x-4) =$$

$$= -(x-2)(x-4)(x-5) + (x-1)(x-4))(x-5) -$$

$$-(x-1)(x-2)(x-5) + 2(x-1)(x-2)(x-4) =$$

$$-x^3 + 11x^2 - 38x + 40 + x^3 - 10x^2 + 29x - 20 - x^3 + 8x^2 - 17x + 10 +$$

$$+2x^3 - 14x^2 + 28x - 16 = x^3 - 5x^2 + 2x + 14$$

Скорочена форма запису многочлена

Введемо допоміжний многочлен $w_{n+1}(x)$ степеня $n+1$:

$$w_{n+1}(x) = (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot \ldots \cdot (x - x_{j-1})\cdot(x - x_j)\cdot(x - x_{j+1})\cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})\cdot(x - x_n)$$

$$w_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

Приклад:

$$w_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$w_4(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$w_5(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$w_6(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

....

На прикладі $w_3(x)$ обчислимо похідну $w_3'(x)$,

Застосовуючи послідовно вираз для обчислення похідної добутку функцій: $z' = (uv)' = u'v + uv'$.

Приклад. $w_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

$w_3'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)((x - x_1) + (x - x_2))$,

оскільки $((x - x_1)(x - x_2))' = (x - x_2) + (x - x_1)$

$$w_3'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)$$

$$w_3'(x) = \sum_{i=0}^{2} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} (x - x_j) \Rightarrow w_{n+1}'(x) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} (x - x_j)$$

$$w_3'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)$$

Похідна цього многочлена в точці $x = x_i$ дорівнює:

$$w_3'(x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2);$$

$$w_3'(x_1) = (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)$$

$$w_3'(x_2) = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$w_{n+1}'(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)$$

$$w_{n+1}'(x_i) = \prod_{j=0, i \neq j}^{n} (x_i - x_j),$$

Отже $w'_{n+1}(x_i) = \prod_{j=0, i\neq j}^{n} (x_i - x_j)$

$$w_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \Rightarrow \frac{w_{n+1}(x)}{x - x_i} = \prod_{j=0, i\neq j}^{n} (x - x_j)$$

Підставимо $w_{n+1}(x)$ й $w'_{n+1}(x_i)$ у поліном Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Тоді одержимо скорочений запис полінома Лагранжа !!!!!!

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{w_{n+1}(x)}{(x - x_i)\, w'_{n+1}(x_i)} y_i = w_{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x - x_i)\, w'_{n+1}(x_i)}$$

Приклад 2. Для функції, заданої таблично, обчислити за допомогою многочлена Лагранжа значення функції в заданій точці $x^* = 2,20$, відмінній від вузлової.

i	0	1	2	3
x_i	2,10	2,67	3,01	3,82
y_i	122,23	123,45	120,02	119,65

Розв'язання

Розв'язання представимо у вигляді послідовності етапів

Етап 1. Будуємо многочлен Лагранжа з урахуванням заданого числа вузлів, $n = 3$: $L_3 = l_0 y_0 + l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3$

$(l_0 y_0)$
$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} y_0 +$$

$(l_1 y_1)$
$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 +$$

$(l_2 y_2)$
$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 +$$

$(l_3 y_3)$
$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3.$$

Етап 2. Обчислимо значення функції в заданій точці $x^* = 2,20$:

i	0	1	2	3
x_i	2,10	2,67	3,01	3,82
y_i	122,23	123,45	120,02	119,65

$$
\begin{aligned}
&f(2,20) \approx L_3(2,20) = \\
&= \frac{(2,20-2,67)(2,20-3,01)(2,20-3,82)}{(2,10-2,67)(2,10-3,01)(2,10-3,82)} 122,23 \\
&+ \frac{(2,20-2,10)(2,20-3,01)(2,20-3,82)}{(2,67-2,10)(2,67-3,01)(2,67-3,82)} 123,45 + \\
&+ \frac{(2,20-2,10)(2,20-2,67)(2,20-3,82)}{(3,01-2,10)(3,01-2,67)(3,01-3,82)} 120,02 + \\
&+ \frac{(2,20-2,10)(2,20-2,67)(2,20-3,01)}{(3,82-2,10)(3,82-2,67)(3,82-3,01)} 119,65 \simeq 122,56.
\end{aligned}
$$

Приклад 3. Для тієї ж функції, заданої таблично, обчислити за допомогою скороченого запису многочлена Лагранжа значення функції в заданій точці $x^* = 2{,}20$, відмінній від вузлової.

i	0	1	2	3
x_i	2,10	2,67	3,01	3,82
y_i	122,23	123,45	120,02	119,65

Розв'язання

Розв'язання також представимо у вигляді послідовності етапів

Етап 1. Будуємо скорочений запис многочлена Лагранжа з урахуванням заданого числа вузлів, $n = 3$:

$$L_3(x) = w_4(x) \sum_{i=0}^{3} \frac{y_i}{(x - x_i)\, w_4'(x_i)} =$$

$$= w_4(x) \cdot \left(\frac{y_0}{(x - x_0)\, w_4'(x_0)} + \frac{y_1}{(x - x_1)\, w_4'(x_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{y_2}{(x - x_2)\, w_4'(x_2)} + \frac{y_3}{(x - x_3)\, w_4'(x_3)} \right)$$

$$w_4(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$w_4'(x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)$$

$$w_4'(x_1) = (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)$$

$$w_4'(x_2) = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)$$

$$w_4'(x_3) = (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

Етап 2. Обчислимо значення полінома $w_4(x)$ при $x^* = 2{,}20$ й табличних значеннях x_i :

$$w_4(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$

$$= (2.20 - 2.10)(2.20 - 2.67)(2.20 - 3.01)(2.20 - 3.82) = -0{,}0617$$

$$w_4'(x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) =$$

$$(2.10 - 2.67)(2.10 - 3.01)(2.10 - 3.82) = -0.8921$$

$$w_4'(x_1) = (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) =$$

$$(2.67 - 2.10)(2.67 - 3.01)(2.67 - 3.82) = 0.2229$$

$$w_4'(x_2) = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) =$$

$$(3.01 - 2.1)(3.01 - 2.67)(3.01 - 3.82) = -0.2506$$

$$w_4'(x_3) = (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) =$$

$$(3.82 - 2.10)(3.82 - 2.67)(3.82 - 3.01) = 1.6022$$

Етап 3. Підставимо обчислені значення

$w_4(2.20) = -0.0617, w_4'(2.10) = -0.8921, w_4'(2.67) = 0.2229,$
$w_4'(3.01) = -0.2506,\ w_4'(3.82) = 1.6022$

у початковий вираз

$$L_3(x) = w_4(x)\sum_{i=0}^{3}\frac{y_i}{(x-x_i)\,w_4'(x_i)} =$$

$$= w_4(x)\cdot\left(\frac{y_0}{(x-x_0)\,w_4'(x_0)} + \frac{y_1}{(x-x_1)\,w_4'(x_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{y_2}{(x-x_2)\,w_4'(x_2)} + \frac{y_3}{(x-x_3)\,w_4'(x_3)}\right)$$

$$L_3(2.20) = -0.0617\cdot\left(-\frac{122.23}{(2.20-2.10)\,0.8921} + \frac{123.45}{(2.20-2.67)\,0.2229} - \right.$$

$$\left. - \frac{120.02}{(2.20-3.01)\,0.2506} + \frac{119.65}{(2.20-3.82)\,1.6022}\right) = 122.56$$

Похибка многочлена Лагранжа

Похибка многочлена. При заміні функції $f(x)$ многочленом $L_n(x)$ виникає *похибка* $R_n(x)=f(x)-L_n(x)$, названа також *залишковим членом інтерполяційної формули*

$$f(x)=L_n(x)+R_n(x).$$

Теорема про похибку. Похибка інтерполяційного многочлена Лагранжа для довільно заданих вузлів визначається формулою

$$R_n(x)=\frac{w_{n+1}(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$ де

$$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)..(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})..(x-x_n).$$

У силу невизначеності точки ξ визначити точно $R_n(x)$ не можна, тому при проведенні обчислень знаходять тільки наближені оцінки погрішностей інтерполяції.

Оцінка похибки многочлена

Оцінка похибки інтерполяції многочленом Лагранжа в деякій довільній фіксованій точці x^* з відрізка $[a,b]$, $x^* \in \left[a,b\right]$ визначається формулою

$$\left|R_n\right| = \left|f\left(x^*\right) - L_n\left(x^*\right)\right| \le \frac{\left|w_{n+1}\left(x^*\right)\right|}{\left(n+1\right)!} M_{n+1},$$

$$M_{n+1} = \max\left|f^{\left(n+1\right)}\left(x\right)\right| \text{ на } \left[a,b\right].$$

Оцінка максимальної похибки інтерполяції на всьому відрізку [*a*, *b*], тобто в будь-якій точці $x \in \left[a,b\right]$ має вигляд

$$\left|R_n\right| = \left|f\left(x\right) - L_n\left(x\right)\right| \le \frac{M_{n+1}}{\left(n+1\right)!}\left|w_{n+1}\left(x\right)\right|,$$

на відрізку $[a, b]$.

Приклад 3. Нехай потрібно визначити, з якою точністю можна обчислити значення функції $y = \sqrt{x}$ в точці $x^* = 112$ за допомогою інтерполяційної формули Лагранжа, якщо задані вузли $x_0 = 100, x_1 = 118,\ x_2 = 138$.

$$y_0 = \sqrt{100}; y_1 = \sqrt{118}; y_2 = \sqrt{138}$$

Розв'язок. Оскільки потрібно обчислити похибку в одній точці $x^* = 112$, то застосовуємо формулу.

$$\left|R_n\right| = \left|f\left(x^*\right) - L_n\left(x^*\right)\right| \le \frac{M_{n+1}}{\left(n+1\right)!}\left|w_{n+1}\left(x^*\right)\right|,$$

$$M_{n+1} = \max\left|f^{\left(n+1\right)}\left(x\right)\right| \text{ на } \left[a,b\right].$$

$$\left|R_2\right| = \left|f\left(x^*\right) - L_n\left(x^*\right)\right| \le \frac{M_3}{3!}\left|w_3\left(x^*\right)\right|,\ M_3 = \max\left|f'''\left(x\right)\right|$$

Хід обчислень розіб'ємо на етапи:

Етап 1. Визначимо значення M_3:

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}};\ y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}};\ y''' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}},\ \text{тоді}$$

$$M_3 = \max\left|y'''\right| = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{100^5}} = \frac{3}{8}\cdot 10^{-5}\ \text{при}\ 100 \le x \le 138.$$

Етап 2. Обчислимо многочлен

$$w_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$w_3(x^*) = \left|(112-100)(112-118)(112-138)\right| =$$

$$= \left|12\cdot(-6)\cdot(-26)\right| = 117$$

Етап 3. Обчислимо оцінку

$$\left|R_2\right| \le \frac{M_3}{3!}\left|w_3(x^*)\right|,\quad \left|R_2\right| \le \frac{3}{8}\cdot 10^{-5}\cdot\frac{1}{3!}\cdot 117 \approx 1{,}17\cdot 10^{-3}.$$

Інтерполяційний многочлен Лагранжа для рівновіддалених вузлів

Теорема про існування многочлена Лагранжа для рівновіддалених вузлів

Нехай задані рівновіддалені вузли інтерполяції $x_{i+1} - x_i = h = const, \;\; i = 0,1,\ldots,n-1$, і задані значення

$$y_0 = f\left(x_0\right), y_1 = f\left(x_1\right), \; y_2 = f\left(x_2\right), \ldots, y_n = f\left(x_n\right)$$

функції $f\left(x\right)$ в цих вузлах. Тоді існує многочлен Лагранжа

$$L_n\left(m\right) = \sum_{i=0}^{n} \left(-1\right)^{n-i} \frac{\prod\limits_{i \neq j, j=0}^{n} \left(m - j\right)}{i!(n-i)!} y_i \text{, де } m = \frac{x - x_0}{h}$$

або в скороченій формі

$$L_n\left(m\right) = \frac{1}{n!} v_{n+1}\left(m\right) \sum_{i=0}^{n} \left(-1\right)^{n-i} \frac{C_n^i}{m - i} y_i \text{, де } m = \frac{x - x_0}{h}$$

Обидва многочлена мають степінь не вище n і приймають у вузлах $x_i,\ i=0,1,\ldots,n$ значення y_i,

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_{i+1} - x_i = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$$

$$L_n\left(x_i\right) = y_i, i = 0,1,2,\ldots,n\ .$$

Доведення. Оскільки за умовою вузли рівновіддалені,

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_{i+1} - x_i = \ldots = x_n - x_{n-1} = h,$$

то $x_{i+1} = x_i + h = x_0 + \left(i+1\right)h,\ i = 0,1,\ldots,n-1.$

Оскільки, за умовою: $m = \left(x - x_0\right)/h$

$x - x_0 = mh$:

$$x - x_1 = x - \left(x_0 + h\right) = x - x_0 - h = mh - h = h\left(m-1\right),$$

$$x - x_2 = x - \left(x_0 + 2h\right) = x - x_0 - 2h = mh - 2h = h\left(m-2\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x - x_n = x - \left(x_0 + nh\right) = x - x_0 - nh = mh - nh = h\left(m-n\right),$$

В загальному випадку: $x - x_i = \left(x - x_0\right) - ih = h\left(m - i\right),\ i = 0,1,\ldots,n$

Для фіксованих точок: $x_i = x_{i-1} + h = x_0 + ih,$

$$x_i - x_0 = x_0 + ih - x_0 = ih,$$

$$x_i - x_1 = x_0 + ih - x_0 - h = h(i-1),$$

....

$$x_i - x_{i-1} = x_0 + ih - x_0 - (i-1)h = h,$$

$$x_i - x_{i+1} = x_0 + ih - x_0 - (i+1)h = -h$$

....

$$x_i - x_n = x_0 + ih - x_0 - nh = -h\left(n - i\right).$$

Тут всього n рядків
i – тий рядок відсутній.
Числові значення перших i рядків додатні, а решта – від'ємні.

$$\frac{\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\ldots\left(x - x_{i-1}\right)\left(x - x_{i+1}\right)\ldots\left(x - x_n\right)}{\left(x_i - x_0\right)\left(x_i - x_1\right)\ldots\left(x_i - x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i+1}\right)\ldots\left(x_i - x_n\right)}$$

Використовуючи значення отриманих співмножників, запишемо лагранжевий коефіцієнт:

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(i-1))(m-(i+1))\ldots(m-n)}{i(i-1)\ldots1\cdot(-1)(-2)\ldots(-(n-i))}=$$

$$=\frac{\prod\limits_{j\neq i,j=0}^{n}(m-j)}{(-1)^{n-i}\,i!(n-i)!},$$

Тоді многочлен Лагранжа набуде вигляду:

$$L_n(m)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{\prod\limits_{i\neq j,j=0}^{n}(m-j)}{i!(n-i)!}y_i\,.$$

ПІДСУМОК. Многочлен Лагранжа для нерівновіддалених вузлів:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i y_i$, де l_i - це коефіцієнт Лагранжа при y_i.

$$l_i=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

Многочлен Лагранжа для рівновіддалених вузлів:

$$L_n(m)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{\prod\limits_{i\neq j, j=1}^{n}(m-j)}{i!(n-i)!}y_i, \text{ де } m=\frac{x-x_0}{h}$$

$$L_n(m)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-(i-1))(m-(i+1))\dots(m-n)}{i!(n-i)!}y_i$$

Одержання скороченої формули многочлена Лагранжа для рівновіддалених вузлів

Для одержання формули

$$L_n(m) = \frac{1}{n!} v_{n+1}(m) \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{C_n^i}{m-i} \cdot y_i \,,$$

де $v_{n+1}(m) = m(m-1)\ldots(m-i)\ldots(m-n)$

Запишемо многочлен $w_{n+1}(x)$ і використовуємо заміну $x - x_0 = mh$:

$$w_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots$$

$$\ldots(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n) =$$

$$= h^{n+1} m(m-1)(m-2)\ldots(m-n) = w_{n+1}(m) = h^{n+1} v_{n+1}(m)$$

Запишемо похідну $w'_{n+1}(x_i)$

$$w'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots$$

$$\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n) =$$

$$h^n i(i-1)(i-2)\ldots1(-1)(-2)\ldots(-(n-i)) =$$

$$= h^n(-1)^{n-i} i!(n-i)! = w'_{n+1}(i) = h^n v'_{n+1}(i)$$

Розглянемо спрощений многочлен Лагранжа для нерівновіддалених вузлів:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{w_{n+1}(x)}{(x - x_i) w'_{n+1}(x_i)} y_i$$

Підставимо значення поліномів $w_{n+1}(x)$ і $w'_{n+1}(x)$ у формулу для коефіцієнта:

$$\frac{w_{n+1}(x)}{(x - x_i) w'_{n+1}(x_i)}.$$

$$\frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_i)\,w'_{n+1}(x_i)}$$

$$x-x_i = x-(x_0+ih) = (x-x_0)-ih = mh-ih = h(m-i),\ i=0,1,\ldots,n$$

Очевидно, що $\dfrac{(x-x_0)\ldots(x-x_i)\ldots(x-x_n)}{(x-x_i)} = \dfrac{h^{n+1}m\ldots(m-i)\ldots(m-n)}{h(m-i)}$

Тому $\dfrac{w_{n+1}(x)}{x-x_i} = \dfrac{w_{n+1}(x)}{h(m-i)} = \dfrac{h^{n+1}v_{n+1}(m)}{h(m-i)}$,

де $v_{n+1}(m) = m\ldots(m-i)\ldots(m-n)$

$$w'_{n+1}(x) = w'_{n+1}(m) = h^n(-1)^{n-i}\,i!(n-i)! = h^n v'_{n+1}(m)$$

Тоді коефіцієнт Лагранжа набуде вигляду

$$\frac{w_{n+1}(m)}{(m-i)w'_{n+1}(m)} = \frac{h^{n+1}v_{n+1}(m)}{h^{n+1}(m-i)v'_{n+1}(m)} =$$

$$\frac{(-1)^{n-i}v_{n+1}(m)}{(m-i)\,i!(n-i)!} = \frac{1}{n!}v_{n+1}(m)\frac{(-1)^{n-i}C_n^i}{m-i},\ i = 0,1,2,\ldots,n,$$

де, $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ – сполука з n по i. Тому $\dfrac{1}{i!(n-i)!} = \dfrac{C_n^i}{n!}$

Визначення. Сполуками з n різних елементів по i елементів називають комбінації, які складені з даних n елементів по i елементів і відрізняються хоча б одним елементом

Усі сполуки з множини $\{a,b,c,d,e\}$ по два —

$$ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$$

Отже, скорочена формула полінома Лагранжа для рівновіддалених вузлів:

$$L_n(m) = \frac{1}{n!} v_{n+1}(m) \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{C_n^i}{m-i} \cdot y_i$$

$$L(m) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!}\left[(-1)^n \frac{C_n^0}{m} y_0 + (-1)^{n-1} \frac{C_n^1}{m-1} y_1 + \ldots + (-1)^{n-n} \frac{C_n^n}{m-n} y_n\right],$$

де $C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1,\ C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n,$

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2},\ C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\ldots$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1!}{0!} = 1$$

Приклад 4. Для функції $f(x) = e^x$, заданої таблично, обчислити за допомогою многочлена Лагранжа для рівновіддалених вузлів значення функції в заданій точці $x^* = 0,022$.

i	0	1	2	3	4
x_i	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04
$f(x_i)$	1,0000	1,0101	1,0202	1,0305	1,0408

Розв'язання

Застосуємо скорочену формулу многочлена Лагранжа для рівновіддалених вузлів:

$$L_n(x) = L_n(m) = \frac{1}{n!} v_{n+1}(m) \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{C_n^i}{m-i} y_i$$

Етап 1. Знайдемо значення m, що відповідає *x* =0,022. Вузли рівновіддалені із кроком *h* = 0.01. Зробимо лінійну заміну $x - x_0 = mh$,

тоді m буде мати значення $m = \dfrac{x^* - x_0}{h} = \dfrac{0,022 - 0}{0,01} = 2,2$.

Етап 2. Використовуємо многочлен Лагранжа

$$L_n(m) = \frac{1}{n!} v_{n+1}(m) \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{C_n^i}{m - i} y_i$$

при знайденому значенні m:

$$L_4(2,2) = \frac{1}{4!} v_5(2,2) \sum_{i=0}^{4} (-1)^{4-i} \frac{C_4^i}{(2,2 - i)} y_i,$$

Підставимо у формулу вираз для кількості комбінацій C_4^i

$$L_4(2,2) = v_5(2,2) \sum_{i=0}^{4} (-1)^{4-i} \frac{y_i}{(2,2 - i)\, i!\, (4 - i)!}$$

Етап 3. Обчислюємо значення $v_5\left(2,2\right)$

$$v_5\left(2,2\right)=\left(2,2-0\right)\left(2,2-1\right)\left(2,2-2\right)\left(2,2-3\right)\left(2,2-4\right)\approx 0,76032$$

Етап 4. Обчислюємо $\dfrac{1}{\left(2,2-i\right)i!\left(4-i\right)!}$ для $i=0,1,2,3,4$

$$i=0\rightarrow \frac{1}{\left(2,2-0\right)4!}\approx 0,01894;$$

$$i=1\rightarrow \frac{1}{\left(2,2-1\right)\cdot 1\cdot 3!}\approx 0,13889;$$

$$i=2\rightarrow \frac{1}{\left(2,2-2\right)\cdot 2!\cdot 2!}\approx 1,25;$$

$$i=3\rightarrow \frac{1}{\left(2,2-3\right)\cdot 3!\cdot 1}\approx -0,20833;$$

$$i=4\rightarrow \frac{1}{\left(2,2-4\right)4!}\approx -0,02315.$$

Остаточно маємо

$$L_4\left(2,2\right) = 0,76032 \cdot \Bigg(\left(-1\right)^4 \cdot 0,01894 \cdot y_0 + \left(-1\right)^3 \cdot 0,13889 \cdot y_1 +$$

$$+\left(-1\right)^2 \cdot 1,25 \cdot y^2 - \left(-1\right)^1 \cdot 0,20833 y_3 - \left(-1\right)^0 \cdot 0,02315 y_4 \Bigg)\Bigg)$$

$$f\left(2,2\right) \approx L_4\left(2,2\right) = 0,76032 \cdot \big(0,01894 \cdot 1,0000 - 0,13889 \cdot 1,0101 +$$

$$+1,25 \cdot 1,0202 + 0,20833 \cdot 1,0305 - 0,02315 \cdot 1,0408\big) \approx 1,0222.$$

Похибка інтерполяційного многочлена Лагранжа для рівновіддалених вузлів

Похибка інтерполяційного многочлена Лагранжа для рівновіддалених вузлів визначається формулою

$$R_n(x) = \frac{w_{n+1}(m)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = h^{n+1} \frac{v_{n+1}(m)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

де $v_{n+1}(m) = m(m-1)(m-2)...(m-n), \quad \xi \in [a,b].$

У зв'язку із проблемами визначення точки ξ для визначення похибки використовують наближені оцінки.

Оцінка похибки. Оцінка похибки інтерполяції многочленом Лагранжа для рівновіддалених вузлів у деякій довільній фіксованій точці x^* з відрізка [a, b], $x \in [a,b]$ визначається формулою

$$\left|R_n\right| = \left|f\left(x^*\right) - L_n\left(x^*\right)\right| \le h^{n+1}\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|v_{n+1}(m)\right|,$$

де $M_{n+1} = \max\left|f^{(n+1)}\right|$ на $[a,b]$.

Оцінка максимальної похибки.

Оцінка максимальної похибки інтерполяції на всьому відрізку $[a,\ b]$, тобто в будь-якій точці $x \in \left[a,b\right]$ має вигляд

$$\left|R_n\right| = \left|f\left(x\right) - L_n\left(x\right)\right| \le h^{n+1}\frac{M_{n+1}}{\left(n+1\right)!}\left|v_{n+1}\left(m\right)\right|,$$

де на відрізку $\left[a,b\right]$

Обернена інтерполяція

Поряд із задачею інтерполяції в технічних застосуваннях ставиться задача оберненої інтерполяції.

Нехай відома залежність $y = f(x)$, у точках x_i, $i = 0,1,\ldots,n$, тобто відомі $y_i = f(x_i)$.

Ця інформація еквівалентна тому, що відомі значення $x_i = g(y_i)$ – оберненої функції.

За умови допустимості інтерполяції по змінній y можна замінити обернену функцію $g(y)$ інтерполяційним многочленом $L_n(y_i) = x_i$, $i = 0,1,\ldots,n$.

Приклад 5.

Потрібно відновити форму вхідного сигналу $x(t)$

Зв'язок миттєвих значень вхідного сигналу $x(t)$ й вихідного сигналу $y(t)$ визначається нелінійною динамічною характеристикою $y = \varphi(x)$.

Задачу розв'язати методом зворотної інтерполяції.

x	-0.9	-0.3	0.3	0.9
$y = \varphi(x)$	0.31623	0.83666	1.14017	1.37840

Розв'язок.

Будуємо многочлен Лагранжа третього порядку

$$L_3(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)}x_0 + $$
$$+ \frac{(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)}x_1 + $$
$$+ \frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)(y_2-y_3)}x_2 + $$
$$+ \frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_0)(y_3-y_1)(y_3-y_2)}x_3.$$

Підставляючи табличні значення, одержуємо

$$L_3(y) = -0.00638y^3 + 1.01572y^2 + 0.01232y - 0.9976.$$

Таким чином, форма вхідного сигналу

$$x(y) = -0.9976 - 0.01232y + 1.01572y^2 - 0.00638y^3$$