

Варіант 1

1. Дослідити на збіжність ряд:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$;
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n \sqrt{n}}{n \sqrt{n}}$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1} + n - 1}$;
- 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!}$;
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$;
- 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}$;
- 7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$;
- 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n (n+1)}$;
- 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \sqrt{n}}$;
- 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n}}{2^n (2n+3)}$.

2. Знайти суму ряду:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}$;
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$;
- 4) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1}$.

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

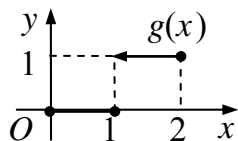
- 1) $\sin^3 x, x_0 = 0$;
- 2) $\frac{9}{20 - x - x^2}, x_0 = 0$;
- 3) $\frac{1}{x}, x_0 = -2$;
- 4) $y(x) : y'' = xy + e^y, y(0) = 0$ (до x^3).

4. Обчислити з точністю $\epsilon = 10^{-3}$:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n^2}$;
- 2) $\int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx$.

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

- 1) $f(x) = g(x), T = 2$;



- 2) $f(x) = \begin{cases} 0, & -p \leq x < 0, \\ x-1, & 0 \leq x \leq p; \end{cases}$
- 3) $f(x) = x^2 + 1, x \in (0; p)$ за косинусами;
- 4) $f(x) = x^2 + 1, x \in (0; p)$ за синусами.

6. Зобразити функцію

$$f(t) = e^{-2|t|}, t \in \mathbb{R}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

- 1) $\sqrt[4]{-1}$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right)$; 3) $(-1 + i\sqrt{3})^{-3i}$.

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 1, |z+1| > 2\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + x, f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L z \operatorname{Re} z dz$, де L :

- 1) $|z| = 2, 0 \leq \arg z \leq \pi$; 2) $[0; 1] \cup [1; 1+i]$.

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

- 1) $\frac{z-2}{2z^3 + z^2 - z}, z_0 = 0$;
- 2) $\frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = 1+2i$; 3) $z \cos \frac{1}{z-2}, z_0 = 2$.

12. Визначити тип особливих точок функції:

- 1) $\frac{e^{9z} - 1}{\sin z - z + \frac{1}{6}z^3}, z_0 = 0$;
- 2) $e^{1/z} \sin \frac{1}{z}$.

13. Обчислити інтеграл:

- 1) $\oint_{|z|=1/2} \frac{dz}{z(z^2+1)}$;
- 2) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^4} dz$;

- 3) $\oint_{|z|=0,2} \frac{3pz - \sin 3pz}{z^2 - \operatorname{sh}^2 p^2 z} dz$;
- 4) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sqrt{3} \sin t}$;

- 5) $\int_{-1}^1 \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$;
- 6) $\int_0^1 \frac{x \sin 3x}{(x^2 + 4)^2} dx$.

14. Знайти зображення оригіналу:

- 1) $t^2 \sin 2t$;
- 2) $\frac{e^{-2t} \cos t}{t}$;
- 3) $\begin{cases} \operatorname{sgn}(t), & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$

15. Розв'язати задачу Коші:

- 1) $y'' + 2y = h(t) + h(t-3), y(0) = 1$;
- 2) $y''' + y = 6e^{-t}, y(0) = 3, y'(0) = 1$;
- 3) $y''' - y = \operatorname{th} t, y(0) = y'(0) = 0$;

- 4) $\begin{cases} x'' = x + 3y + 2, \\ y'' = x - y + 1, \end{cases} \quad x(0) = -1, y(0) = 2.$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \sin x + \int_0^x (x-t)y(t) dt.$$

Варіант 2

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - 3n^2}{100n^2 + n + 1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2 + (-1)^n}{n^3};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n + 1)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{2n + 1}\right)^n; \quad 8) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n + 1}};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + 1)^n}{2^n \sqrt{n}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 2)^n}{n^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n - 2}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (n - 1)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \cos x, x_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$2) \frac{x^2}{\sqrt{4 - 5x}}, x_0 = 0; \quad 3) \frac{1}{x + 3}, x_0 = -2;$$

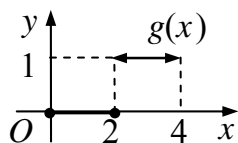
$$4) y(x) : y'' = x^2 y^2 + 1, y(0) = 1 \text{ (до } x^3 \text{)}.$$

4. Обчислити з точністю $\epsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}; \quad 2) \int_0^{0,1} \sin(100x^2) dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 4;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = x^2 + 2, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = x^2 + 2, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \cos t, |t| \leq \pi; f(t) = 0, |t| > \pi$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}}; \quad 2) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2i\right); \quad 3) \operatorname{Arcsin} 4.$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| = 1, |z| < 2\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 + 1, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \bar{z}^2 dz$, де L :

$$1) z = x + ix^2, 0 \leq x \leq 1 + i; \quad 2) [0; 1] \cup [1; 1 + i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{z - 4}{z^4 + z^3 - 2z^2}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z + 1}{z(z - 1)}, z_0 = 2 - 3i; \quad 3) \sin \frac{z}{z - 1}, z_0 = 1.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) z^3 e^{7/z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{\cos z}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-1-i|=5/4} \frac{2dz}{z^2(z-1)}; \quad 2) \int_{|z|=1/2} \frac{2 - z^2}{4z^3} dz;$$

$$3) \int_{|z|=1} \frac{\cos 3z - 1 + \frac{9}{2}z^2}{z^4 \operatorname{sh} \frac{9z}{4}} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 + \sqrt{15} \sin t};$$

$$5) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(x-1) \sin x}{(x^2 + 9)^2} dx; \quad 6) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x - 1}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t^2 \cos 3t; \quad 2) \frac{e^{-2t} \sin t}{t}; \quad 3) \begin{cases} \operatorname{Mg}(t), & 0 \leq t \leq 4, \\ t^2, & t > 4. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 4y = 2(h(t) + h(t - 1)), y(0) = 0;$$

$$2) y''' - y'' = t^2, y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$3) y''' - y'' = \frac{1}{1 + e^t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$\begin{cases} x'' = -x + 3y + 1, \\ y'' = x + y, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 2.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = x - \int_0^x e^{x-t} y(t) dt.$$

Варіант 3

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\cos^2\left(\frac{pn}{2}\right)}{n(n+1)^2};}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\ln \frac{n^2+5}{n^2+4}};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{2n^2+1}{n^2+1}};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\ln^{-2}(2n+1)}{(2n+3)}};$$

$$7) \sum_{n=2}^{\infty} e^{\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{(-1)^{n+1}n}{(6n+5)}};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{(x+2)^n}{n\sqrt[3]{n}}};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+6n-8}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5^n}{10^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+2}}{n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+3}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \ln(1-x-6x^2), x_0=0;$$

$$2) \frac{1}{\sqrt[5]{1+x^2}}, x_0=0; \quad 3) e^x, x_0=1;$$

$$4) y(x): y'' = x^2 - y^2, y(0) = \frac{1}{2} \text{ (до } x^3 \text{)}.$$

4. Обчислити з точністю $\epsilon = 10^{-3}$:

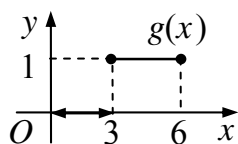
$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{8n^3};$$

$$2) \int_0^1 \cos x^2 dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 6;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -p \leq x < 0, \\ x+2, & 0 \leq x \leq p; \end{cases}$$

$$3) f(x) = x^2 + 3, x \in (0; p) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = x^2 + 3, x \in (0; p) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \sin t, t \in [0; p]; f(t) = 0, t \in [p; 2p]$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{1}; \quad 2) \ln 6; \quad 3) \arcsin(-2).$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| \leq 2, \operatorname{Re} z > 1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = e^x(y \cos y + x \sin y), f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \bar{z} dz$, де L :

$$1) z = x + i \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} + i;$$

$$2) \text{ дуга } \frac{\pi}{2} \text{ з } i \text{ по } \frac{\pi}{2} + i \text{ з } \frac{\pi}{2} \text{ по } i.$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}, z_0=0;$$

$$2) \frac{z+1}{z(z-1)}, z_0=-3-2i; \quad 3) ze^{z/(z-5)}, z_0=5.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + \frac{1}{2}z^2}, z_0=0; \quad 2) \operatorname{tg}^2 z.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z(z^2+4)}; \quad 2) \int_{|z|=3} \frac{e^{1/z} + 1}{z} dz;$$

$$3) \int_{|z|=1/2} \frac{\operatorname{sh} 2pz - 2pz}{z^2 \sin^2 \frac{pz}{3}} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 2\sqrt{6} \sin t};$$

$$5) \int_{-1}^1 \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2} dx;$$

$$6) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x^4+1)^2}.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) (t+1) \sin 2t; \quad 2) \frac{\operatorname{sh} t}{t} e^{-2t}; \quad 3) \begin{cases} \operatorname{Mg}(t), & 0 \leq t \leq 6, \\ t^3, & t > 6. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) 2y'' + y = h(t) - h(t-2), y(0) = 2;$$

$$2) y'' + y' = t^2 + 2t, y(0) = 0, y'(0) = -2;$$

$$3) y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x'' = x + 4y, \\ y'' = 2x - y + 9, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)y(t)dt = x.$$

Варіант 4

1. Дослідити на збіжність ряд:

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{2^n} \operatorname{tg} \frac{3}{2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}}$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{10^n n!}{(2n)!}}$;
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^4 \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n}$; 6) $\sum_{n=3}^{\infty} e^{\frac{\ln^{-2}(4n-7)}{(3n-5)}}$;
- 7) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{(-1)^n}{(\ln \ln n)^2 n \ln n}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}}$;
- 9) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{(x-1)^n}{2^n \sqrt[3]{n}}}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}}$.

2. Знайти суму ряду:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{9}{9n^2 + 21n - 8}}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{5^n - 2^n}{10^n}}$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{4^n (2n-1)}}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{(n+2)x^{n+2}}$.

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

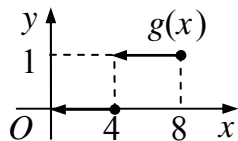
- 1) $2x \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - x, x_0 = 0$; 2) $\frac{1}{2x+5}, x_0 = 3$;
- 3) $\ln(1-x-6x^2), x_0 = 0$;
- 4) $y(x) : y'' = x^3 + y^3, y(0) = \frac{1}{2}$ (до x^3).

4. Обчислити з точністю $\epsilon = 10^{-4}$:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}}$; 2) $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

- 1) $f(x) = g(x), T = 8$;



- 2) $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & -p \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq p; \end{cases}$
- 3) $f(x) = x^2 + 4, x \in (0; p)$ за косинусами;
- 4) $f(x) = x^2 + 4, x \in (0; p)$ за синусами.

6. Зобразити функцію

$f(t) = 2, t \in [-2; -1]; f(t) = 0, t \in [-2; -1]$ інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

- 1) $\sqrt[3]{i}$; 2) $\operatorname{sh}\left(2 + \frac{pi}{4}\right)$; 3) $\operatorname{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3} + 3i}{3}\right)$.

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \leq 1, |z+i| < 1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 - 2y, f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \operatorname{Re} \bar{z} dz$, де L :

- 1) $z = \cos^3 t + i \sin^3 t, t \in [0; \frac{\pi}{2}]$; 2) $[1; 0]$ і $[0; i]$.

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

- 1) $\frac{2z-16}{z^4 + 2z^3 - 8z^2}, z_0 = 0$;
- 2) $\frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = -2+i$;

- 3) $z \sin \frac{pz}{z-a}, z_0 = a$.

12. Визначити тип особливих точок функції:

- 1) $\frac{\cos 7z - 1}{\operatorname{sh} z - z - \frac{1}{6}z^3}, z_0 = 0$; 2) $ze^{1/z}$.

13. Обчислити інтеграл:

- 1) $\int_{|z|=1} \frac{2 + \sin z}{z(z+2i)} dz$; 2) $\int_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1 - \cos z} dz$;
- 3) $\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} 3z - 1 - \frac{9}{2}z^2}{z^4 \sin \frac{9z}{8}} dz$; 4) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{6 + \sqrt{35} \sin t}$;
- 5) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+10)}$; 6) $\int_{-1}^1 \frac{x^2 \cos x}{(x^2+1)^2} dx$.

14. Знайти зображення оригіналу:

- 1) $(t-1) \cos 2t$; 2) $\frac{\operatorname{sh} t}{t} e^{-3t}$; 3) $\int_0^8 g(t) dt, t > 8$.

15. Розв'язати задачу Коші:

- 1) $y'' + y = h(t) + h(t-2), y(0) = y'(0) = 0$;
- 2) $y'' - y = \cos 3t, y(0) = 1, y'(0) = 1$;
- 3) $y'' - 2y' + 2y = 2e^t \cos t, y(0) = y'(0) = 0$;
- 4) $\begin{cases} x'' = x + 2y + 1, \\ y'' = 4x - y, \end{cases} x(0) = 0, y(0) = 1$.

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \cos x + \int_0^x (x-t)y(t) dt.$$

Варіант 5

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$\begin{aligned} 1) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{\frac{1}{n}}}{(2n-1)^{\frac{1}{n}}}}; \quad 2) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n-\ln n}}; \\ 3) e^{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \arctg \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}}; \quad 4) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3n+5} \frac{1}{2^n}}; \\ 5) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}}; \quad 6) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{-2}(5n+2)}{(3n+4)}}; \\ 7) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^3}{n^4 - n^2 + 1}}; \quad 8) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n(n+1)}}; \\ 9) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^3}}; \quad 10) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{2n}}{2n}}. \end{aligned}$$

2. Знайти суму ряду:

$$\begin{aligned} 1) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}}; \quad 2) e^{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}}; \\ 3) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}}; \quad 4) e^{\sum_{n=0}^{\infty} (5n+4)x^n}. \end{aligned}$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

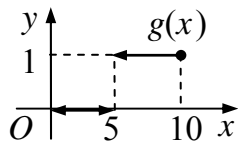
$$\begin{aligned} 1) \frac{\operatorname{sh} 2x}{x} - 2, x_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{(x-3)^2}, x_0 = 1; \\ 3) \ln(x^2 + 4x + 3), x_0 = 0; \\ 4) y(x) : y'' = x + y^2, y(0) = -1 \text{ (до } x^3). \end{aligned}$$

4. Обчислити з точністю $\epsilon = 10^{-3}$:

$$\begin{aligned} 1) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n^3(n+1)}}; \quad 2) \int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx. \end{aligned}$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 10;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -p \leq x < 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq p; \end{cases}$$

$$3) f(x) = x^2 + 5, x \in (0; p) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = x^2 + 5, x \in (0; p) \text{ за синусами}.$$

$$6. \text{Зобразити функцію}$$

$$f(t) = e^{-t}, t \in [0; \infty); f(t) = -e^t, t < 0$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{1}; \quad 2) \operatorname{ch}\left(2 + \frac{pi}{2}\right); \quad 3) \operatorname{Arcsin} 3i.$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| < 1, |z-i| \leq 1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = (e^x + e^{-x}) \cos y, f(0) = 2$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L z \operatorname{Im} \bar{z} dz$, де L :

$$1) z = 3 \cos t + i 2 \sin t, t \in [0; \frac{\pi}{2}];$$

$$2) \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1, 3 \leq x \leq 2i.$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = -2+i; \quad 3) z \cos \frac{pz}{z-a}, z_0 = a.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\operatorname{sh} 6z - 6z}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{1}{2}z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{e^z - 1}{z^3(z+1)^2}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z|=1/2} \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{z \operatorname{sh}^2 4iz} dz; \quad 2) \oint_{|z-3|=1/2} \frac{e^z - 1}{\sin z} dz;$$

$$3) \int_{|z|=1/3} \frac{1-2z+4z^3}{2z^2} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{7+4\sqrt{3} \sin t};$$

$$5) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(x+1) \cos x}{x^4 + 5x^2 + 6} dx; \quad 6) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t); \quad 2) \frac{\operatorname{ch} t}{t} e^{-2t}; \quad 3) \begin{cases} \operatorname{sg}(t), & 0 \leq t \leq 10, \\ 2t^4, & t > 10. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 3y = 2h(t) - h(t-1), y(0) = 3;$$

$$2) y''' + y'' + y = 7e^{2t}, y(0) = 1, y'(0) = 4;$$

$$3) y''' - y = \operatorname{th}^2 t, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x'' = 2x + 5y, \\ y'' = x - 2y + 2, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{t-x} y(t) dt.$$

Варіант 6

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) e^{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^2+1}}}; \quad 2) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg\left(\frac{1+(-1)^n}{2}n\right)}{n^3+2}};$$

$$3) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)^2}{n^5+\ln^4 n}}; \quad 4) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n}};$$

$$5) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n n^3}; \quad 6) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{-2}(n\sqrt{5}+2)}{2n+1}};$$

$$7) e^{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}}; \quad 8) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3}}};$$

$$9) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n n^2}}; \quad 10) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-28n-45}}; \quad 2) e^{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+5^n}{15^n}};$$

$$3) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)}; \quad 4) e^{\sum_{n=0}^{\infty} (5n+3)x^{n+1}}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{7}{12+x-x^2}, x_0=0; \quad 2) \sin \frac{px}{4}, x_0=2;$$

$$3) \ln(x^2+2x+2), x_0=-1;$$

$$4) y(x): y'' = x + x^2 + y^2, y(0)=1 \text{ (до } x^3 \text{)}.$$

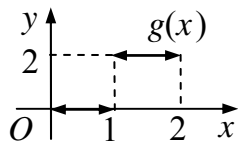
4. Обчислити з точністю $\epsilon = 10^{-4}$:

$$1) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}; \quad 2) \int_0^1 \ln\left(1+\frac{x}{5}\right) \frac{dx}{x}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T=2;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 2x+3, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = (x-\pi)^2, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = (x-\pi)^2, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 2 \sin 3t, |t| \leq 2\pi; f(t) = 0, |t| > 2\pi$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}}; \quad 2) \operatorname{Ln}(1+i); \quad 3) \operatorname{Arcctg}\left(\frac{4+3i}{5}\right).$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| \leq 2, |z-i| > 2\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{x^2+y^2}, f(1) = 1+i.$$

10. Обчислити інтеграл $\int_L z \bar{z} dz$, де L :

$$1) y = 1-2x, i \in \frac{1}{2}; \quad 2) [0;1] \text{ и } [1;1+i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}, z_0=0;$$

$$2) \frac{z-1}{z(z+1)}, z_0=2-i; \quad 3) \sin \frac{5z}{z-2i}, z_0=2i.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\operatorname{ch} 5z-1}{e^z-1-\frac{1}{z}}, z_0=0; \quad 2) \frac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-3/2|=2} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z} dz; \quad 2) \int_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2} dz;$$

$$3) \int_{|z|=2/5} \frac{e^{4z}-\cos 7z}{z \operatorname{sh} 2pz} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4 \sin t};$$

$$5) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin \frac{x}{2}}{(x^2+1)(x^2+9)} dx; \quad 6) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(x^2+9)^{-2} dx}{x^2+4}.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t^2 \operatorname{sh} 2t; \quad 2) \frac{\cos 2t - \cos 3t}{t} e^{4t}; \quad 3) \int_0^{\infty} g(t) dt, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad t > 2.$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + y = h(t) + h(t-2), y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) y'' + y' - 2y = -2(t+1), y(0) = y'(0) = 1;$$

$$3) y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch} t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = -2x + 5y + 1, \\ y' = x + 2y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 2.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x^3(x-1) = \int_0^x \sin(x-t)y(t) dt.$$

Варіант 7

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{2n-1}{10^3 n+3}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{n(2+\cos np)}{2n^2-1}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\arctg \frac{5}{n}}{n!}};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\ln^{-2}(n\sqrt{3}+1)}{(n\sqrt{2}+1)}};$$

$$7) \sum_{n=3}^{\infty} e^{\frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{(x+3)^n}{n\sqrt{n}}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{n^3+1}{3^n(x-2)^n}}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{3}{9n^2+3n-2}}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{5^n-3^n}{15^n}};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} e^{\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n-1)}}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} e^{(8n+5)x^{n+2}}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}, x_0 = 0;$$

$$2) \sin^2 x, x_0 = \frac{\pi}{4}; \quad 3) \ln(5x+3), x_0 = \frac{2}{5};$$

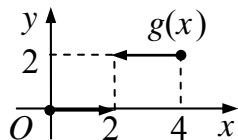
$$4) y(x) : y\ddot{y} = 2\cos x - xy^2, y(0) = 1 \text{ (до } x^3).$$

4. Обчислити з точністю $\epsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n}; \quad 2) \int_0^{1.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 4;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 3-x, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = -(x-\pi)^2, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = -(x-\pi)^2, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 2 - |t|, |t| \leq 2; f(t) = 0, |t| > 2$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{-1}; \quad 2) \sin\left(\frac{\pi}{3} + i\right); \quad 3) \operatorname{Arccos} 2i.$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1-i| \leq 1, \operatorname{Im} z > 1, \operatorname{Re} z \leq 1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = e^{-y} \sin x + y, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L (\bar{z} - i) dz$, де L :

$$1) y = 3x - 3, 1 \in \mathbb{R} - 3i; \quad 2) [0; i] \cup [i; i+1].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z-1}{z(z+1)}, z_0 = -1+2i;$$

$$3) \sin \frac{3z-i}{3z+i}, z_0 = -\frac{i}{3}.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) z \sin \frac{6}{z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{(z+\pi) \sin \frac{\pi}{2} z}{z \sin^2 z}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-1|=3} \frac{ze^z dz}{\sin z}; \quad 2) \oint_{|z|=1/5} \frac{e^{8z} \operatorname{ch} 4z}{z \sin 4\pi z} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=1} \frac{3z^4-2z^3+5}{z^4} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-3\sin t};$$

$$5) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2} dx; \quad 6) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{x^4+10x^2+9}.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t^2 \sin 2t \operatorname{sh} 3t; \quad 2) \frac{1-\cos t}{t}; \quad 3) \begin{cases} \operatorname{Mg}(t), & 0 \leq t \leq 4, \\ 2t^2, & t > 4. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y\ddot{y} + 2y\dot{y} = h(t) - h(t-2), y(0) = y\dot{y}(0) = 0;$$

$$2) y\ddot{y} - 9y = \sin t - \cos t, y(0) = -3, y\dot{y}(0) = 2;$$

$$3) y\ddot{y} - y\dot{y} = \frac{e^t}{1+e^t}, y(0) = y\dot{y}(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x\ddot{y} = 3x + y, \\ y\ddot{y} = -5x - 3y + 2, \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^x + \int_0^x y(t) dt.$$

Варіант 8

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} \sin \frac{1}{n}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3 - 3n}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \cos n}{3^n + \sin n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5} \right)^{n^2}; \quad 6) \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \ln(n-3)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \sqrt[4]{2n+3}}; \quad 8) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n n}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n \sqrt[3]{n+1}}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 7n - 12}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+1};$$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (8n+5)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \ln(1+x-6x^2), x_0 = 0;$$

$$2) \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}, x_0 = 3; \quad 3) \sin^2 x, x_0 = -1;$$

$$4) y(x) : y'' = e^x - y^2, y(0) = 0 \text{ (до } x^3 \text{)}.$$

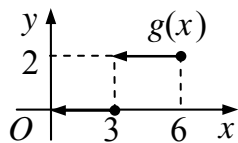
4. Обчислити з точністю $\epsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{4^n}; \quad 2) \int_0^{0.2} e^{-3x^2} dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 6;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} mx - 2, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = x^2 - 1, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = x^2 - 1, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \cos t, t \in [0; \pi]; f(t) = 0, t \in [\pi; 2\pi]$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{-i}; \quad 2) \cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right); \quad 3) \operatorname{Arcsin} 2i.$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1+i| \leq 1, \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z \leq -1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = e^x \cos y, f(0) = 1+i$.

10. Обчислити інтеграл $\oint_L \frac{dz}{z}$, де L :

$$1) z = x + i(x-1), 1 \leq x \leq 2+i; \quad 2) [1; 2] \cup [2; 2+i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z-1}{z(z+1)}, z_0 = -2-3i; \quad 3) z \cos \frac{3z}{z-1}, z_0 = 1.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{e^z-1}{\sin z - z + \frac{1}{6}z^3}, z_0 = 0; \quad 2) z^2 \sin \frac{3}{z}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-3/2|=2} \frac{2z(z-1)}{\sin z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=3} \frac{1 - \sin \frac{1}{z}}{z} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0.1} \frac{\operatorname{ch} z - \cos 3z}{z^2 \sin 5\pi z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{8 - 3\sqrt{7} \sin t};$$

$$5) \int_{-1}^1 \frac{(x^3-2)\cos \frac{x}{2}}{(x^2+1)^2} dx; \quad 6) \int_{-1}^1 \frac{(x^2+4)^{-2} dx}{x^2+9}.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t \sin 2t \operatorname{sh} t; \quad 2) \frac{1 - \operatorname{ch} t}{t} e^{-t}; \quad 3) \begin{cases} \operatorname{Mg}(t), & 0 \leq t \leq 6, \\ t^3, & t > 6. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 3y' = h(t-1), y(0) = 0, y'(0) = 4;$$

$$2) y'' + 2y' = 2 + e^t, y(0) = 1, y'(0) = 2;$$

$$3) y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t+1}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} mx'' = -3x - 4y + 1, \\ my'' = 2x + 3y, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 2.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x \sin 2(x-t) y(t) dt.$$

Варіант 9

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n + 2} \operatorname{tg} \frac{1}{n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \cos^2 6n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{p}{4n}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n - 1) \ln(2n)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{p}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n^2 + n}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n + 1}};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} 5^{nx} \operatorname{arctg} \frac{7^{-nx} x}{x - 1}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + 5)^{2n-1}}{4^n (2n - 1)}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n + 1)};$$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (7n + 5)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) (x - 1) \sin 5x, x_0 = 0;$$

$$2) \frac{1}{\sqrt{4 + x}}, x_0 = -3; \quad 3) \ln(3x - 4), x_0 = 2;$$

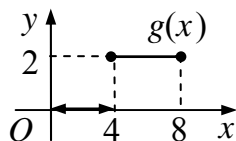
$$4) y(x) : y'' = x + y + y^2, y(0) = 1 \text{ (до } x^3 \text{)}.$$

4. Обчислити з точністю $\epsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n - 1)^2 (2n + 1)^2}; \quad 2) \int_0^{0.2} \sin(25x^2) dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 8;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -p \leq x < 0, \\ 4x - 3, & 0 \leq x \leq p; \end{cases}$$

$$3) f(x) = x^2 - 2, x \in (0; p) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = x^2 - 2, x \in (0; p) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \operatorname{sgn}(t - 1) - \operatorname{sgn}(t - 2), t \in \mathbb{R}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{-16}; \quad 2) \operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i); \quad 3) \operatorname{sh}\left(1 - \frac{pi}{2}\right).$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 - i| \leq 2, \operatorname{Re} z \leq 3, \operatorname{Im} z < 1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = -\frac{y}{(x + 1)^2 + y^2}, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L (\bar{z}^2 - z) dz$, де L :

$$1) z = x + ix, 0 \leq x \leq 1 + i; \quad 2) [0; 1] \cup [1; 1 + i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{9z - 162}{2z^3 + 9z^2 - 81z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z + 3}{z^2 - 1}, z_0 = 2 + i; \quad 3) z \sin \frac{z}{z - 1}, z_0 = 1.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\sin z^2 - z^2}{\cos z - 1 + \frac{1}{2}z^2}, z_0 = 0; \quad 2) z \cos \frac{1}{z}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \int_{|z-1/4|=1/3} \frac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z} dz; \quad 2) \int_{|z|=0.5} \frac{e^{2z^2} - 1}{z^3} dz;$$

$$3) \int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh} 3z - \sin 3z}{z^3 \operatorname{sh} 2z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{9 - 4\sqrt{5} \sin t};$$

$$5) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(x^2 - x) \sin x}{x^4 + 9x^2 + 20} dx; \quad 6) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 3)^2}.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t \operatorname{ch} 2t \cos 4t; \quad 2) \frac{\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 4t}{t}; \quad 3) \begin{cases} \operatorname{Mg}(t), & 0 \leq t \leq 8, \\ t^4, & t > 8. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 3y = h(t) - 2h(t - 1) + 2h(t - 2), \\ y(0) = 1;$$

$$2) 2y'' - y' = \sin 3t, y(0) = 2, y'(0) = 1;$$

$$3) y'' + y' = \frac{e^{2t}}{3 + e^t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x'' = -2x + 6y + 1, \\ y'' = 2x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \cos x + \int_0^x y(t) dt.$$

Варіант 10

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n^2 + 3n}}{\sqrt{n^2 - n}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n^2 - 1)}{n!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(2n)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{p}{6n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{\sqrt{n}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2 - 5n)4^n}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 14n - 48}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{16^n (2n+1)};$$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (7n+5)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{\operatorname{ch} 3x - 1}{x}, x_0 = 0;$$

$$2) \cos x, x_0 = \frac{p}{4}; \quad 3) \frac{x+7}{x^2 + 5x + 4}, x_0 = 1;$$

$$4) y(x) : y'' = x^2 + y^2, y(0) = 1 \text{ (до } x^3 \text{)}.$$

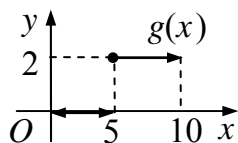
4. Обчислити з точністю $\epsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!!}; \quad 2) \int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 10;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 5-x, & -p \leq x \leq p, \\ 0, & 0 < x \leq p; \end{cases}$$

$$3) f(x) = x^2 - 3, x \in (0; p) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = x^2 - 3, x \in (0; p) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \operatorname{sgn} t, |t| \leq 3; f(t) = 0, |t| > 3$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{3}i}{32}}; \quad 2) \operatorname{sh} \left(1 + \frac{pi}{2}\right); \quad 3) (-1-i)^{4i}.$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1-i| \leq 1, 0 \leq \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z < 2\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

$$\operatorname{Im} f(z) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 2.$$

10. Обчислити інтеграл $\int_L \operatorname{Im} e^z dz$, де L :

$$1) y = x, 0 \leq x \leq 1+i; \quad 2) [0; i] \cup [i; 1+i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{5z-100}{z^4 + 5z^3 - 50z^2}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z+3}{z^2-1}, z_0 = 3-i;$$

$$3) (z-3) \cos p \frac{z-3}{z}, z_0 = 0.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{sh} z - z - \frac{1}{6}z^3}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{e^z + 1}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \int_{|z-1/2|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin pz} dz; \quad 2) \int_{|z|=1/3} \frac{1-2z^2}{z^3} dz;$$

$$3) \int_{|z|=0,05} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16pz} dz; \quad 4) \int_0^{2p} \frac{dt}{4 - \sqrt{7} \sin t};$$

$$5) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 17} dx; \quad 6) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(x^2 + 3)^{-2}}{x^2 + 2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t \operatorname{ch} t; \quad 2) \frac{\cos 2t - \cos 4t}{t} e^{-3t}; \quad 3) \begin{cases} \operatorname{sgn}(t), & 0 \leq t \leq 10, \\ t^5, & t > 10. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' - y = -2h(t) - \frac{1}{2}h(t-5), y(0) = 0;$$

$$2) y'' + 2y' = \sin \frac{t}{2}, y(0) = -2, y'(0) = 4;$$

$$3) y'' - 2y' = \frac{e^t}{\operatorname{ch} t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$\begin{cases} x'' = 2x + 3y + 1, \\ y'' = 4x - 2y, \end{cases} \quad x(0) = -1, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x^2 = \int_0^x e^{x-t} y(t) dt.$$

Варіант 11

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right); \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arccos \frac{(-1)^n n}{n+1}}{n^2 + 2}; \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \arctg \frac{p}{4\sqrt{n}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}; \\ 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \ln n}; \\ 7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{p}{n^2}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)}{n(n+1)}; \\ 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \sqrt[4]{n}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}. \end{aligned}$$

2. Знайти суму ряду:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2 - 24n - 5}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{20^n}; \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (2n-1)x^{n+2}. \end{aligned}$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

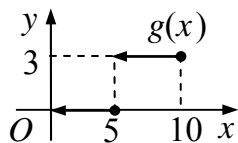
$$\begin{aligned} 1) \frac{6}{8+2x-x^2}, x_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{\sqrt{x-1}}, x_0 = 2; \\ 3) \sin^2 2x, x_0 = 0; \\ 4) y(x) : y'' = x^2 y^2 + \sin x, y(0) = \frac{1}{2} \text{ (до } x^3). \end{aligned}$$

4. Обчислити з точністю $\epsilon = 10^{-3}$:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!!}; \quad 2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}. \end{aligned}$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

1) $f(x) = g(x), T = 10$;



2) $f(x) = \begin{cases} 0, & -p \leq x < 0, \\ 3x-1, & 0 \leq x \leq p; \end{cases}$

3) $f(x) = x^2 - 4, x \in (0; p)$ за косинусами;

4) $f(x) = x^2 - 4, x \in (0; p)$ за синусами.

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \sin t, |t| \leq \frac{p}{2}; f(t) = 0, |t| > \frac{p}{2}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

1) $\sqrt[3]{8}$; 2) $\operatorname{ch}(1 - pi)$; 3) $\operatorname{Arcsin} i$.

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| < 2, 0 < \operatorname{Re} z \leq 1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = e^{-y} \cos x, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L z \operatorname{Re} z dz$, де L :

1) $z = 3 \cos t + i 2 \sin t, 3 \leq t \leq 2\pi$; 2) $[1; 0]$ і $[0; -i]$.

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

1) $\frac{11z - 242}{2z^3 + 11z^2 - 121z}, z_0 = 0$;

2) $\frac{z+3}{z^2-1}, z_0 = -2+3i$;

3) $z^2 \sin p \frac{z+1}{z}, z_0 = 0$.

12. Визначити тип особливих точок функції:

1) $\frac{e^{5z} - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{1}{2}z^2}, z_0 = 0$; 2) $\operatorname{ctg} pz$.

13. Обчислити інтеграл:

1) $\oint_{|z-3|=1} \frac{\sin 3z + 2}{z^2(z-p)} dz$; 2) $\oint_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{2z^4} dz$;

3) $\oint_{|z|=1} \frac{6z - \sin 6z}{z^2 \operatorname{sh}^2 2z} dz$; 4) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5} \sin t}$;

5) $\int_{-\Gamma}^{\Gamma} \frac{x \sin 2x - \sin x}{(x^2 + 4)^2} dx$; 6) $\int_{-\Gamma}^{\Gamma} \frac{(x^2 + 1)^{-2}}{x^2 + 9} dx$.

14. Знайти зображення оригіналу:

1) $t^2 \cos 3t$; 2) $\frac{1 - e^{3t}}{t} e^{-3t}$; 3) $\int_0^{\infty} g(t) dt, 0 \leq t \leq 10$, $\int_0^{\infty} t^5 dt, t > 10$.

15. Розв'язати задачу Коші:

1) $y'' + y = h(t) + 2h\left(t - \frac{p}{2}\right), y(0) = 0$;

2) $y'' + y = \operatorname{sh} t, y(0) = 2, y'(0) = 1$;

3) $y'' - y = \frac{1}{1 + \operatorname{ch} t}, y(0) = y'(0) = 0$;

4) $\begin{cases} x'' = x + 2y, \\ y'' = 2x + y + 1, \end{cases} x(0) = 0, y(0) = 5$.

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^x - 2 \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt.$$

Варіант 12

1. Дослідити на збіжність ряд:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[n]{e} - 1)$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 n}{n^3 + 5}$;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^3}$;
 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$; 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^{-1}(n+1)}{(2n-1)}$;
 7) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+5)}{3^n}$;
 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{\sqrt[5]{n+1}}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}$.

2. Знайти суму ряду:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 84n - 13}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{21^n}$;
 3) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2 - n}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} (-n+1)x^n$.

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

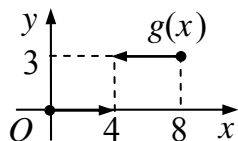
- 1) $-\ln(x^2 + 4x + 5), x_0 = -2$;
 2) $e^{-2x^2}, x_0 = 0$; 3) $\frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}, x_0 = 0$;
 4) $y(x) : y'' = 2y^2 + ye^x, y(0) = \frac{1}{3}$ (до x^3).

4. Обчислити з точністю $\epsilon = 10^{-4}$:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{9}\right)^n$; 2) $\int_0^{0.2} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$.

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

- 1) $f(x) = g(x), T = 8$;



- 2) $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$
 3) $f(x) = x^2 - 5, x \in (0; \pi)$ за косинусами;
 4) $f(x) = x^2 - 5, x \in (0; \pi)$ за синусами.

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

- 1) $\sqrt[3]{8i}$; 2) $\operatorname{Ln}(1 + \sqrt{3}i)$; 3) $\operatorname{Arctg}(i - 1)$.

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{J} \mid |z - i| \leq 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = y - 2xy, f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \bar{z}^2 dz$, де L :

- 1) $z = t + it^2, 0 \leq t \leq 1 + i$; 2) $[0; 1]$ і $[1; 1 + i]$.

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

1) $\frac{6z - 144}{z^4 + 6z^3 - 72z^2}, z_0 = 0$;

2) $\frac{z + 3}{z^2 - 1}, z_0 = -2 - 2i$;

3) $z \cos \frac{z}{z + 2i}, z_0 = -2i$.

12. Визначити тип особливих точок функції:

1) $\frac{\sin 4z - 4z}{e^z - 1 - z}, z_0 = 0$; 2) $\frac{\sin pz}{(z - 1)^3}$.

13. Обчислити інтеграл:

1) $\oint_{|z-1/2|=1} \frac{e^z + 1}{z(z-1)} dz$; 2) $\oint_{|z|=1} \frac{z^3 - 3z^2 + 1}{2z^4} dz$;

3) $\oint_{|z|=2} \frac{\cos 4z - 1 + 8z^2}{z^4 \operatorname{sh} \frac{4z}{3}} dz$; 4) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - 2\sqrt{2} \sin t}$;

5) $\int_{-1}^1 \frac{x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx$; 6) $\int_{-1}^1 \frac{\cos 5x dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)}$.

14. Знайти зображення оригіналу:

1) $t^2 \sin 5t$; 2) $\frac{e^t - t - 1}{t}$; 3) $\begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 8, \\ t^2, & t > 8. \end{cases}$

15. Розв'язати задачу Коші:

1) $y'' - 2y' + y = h(t) - h(t-1),$

$y(0) = y'(0) = 0$;

2) $y'' + 4y' + 29y = e^{-2t}, y(0) = 0, y'(0) = 1$;

3) $y'' + y' = \frac{1}{1 + e^t}, y(0) = y'(0) = 0$;

4) $\begin{cases} x'' = 2x - 2y, \\ y'' = -4x, \end{cases} \quad x(0) = 3, y(0) = 1.$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\sin x = \int_0^x \cos(x-t)y(t) dt.$$

Варіант 13

1. Дослідити на збіжність ряд:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{n+1}{n+2}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \ln n}{n^2 - 3}$;
 3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} \sin \frac{1}{n-1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$;
 5) $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^2 \left(\frac{3n+2}{4n-1} \right)^n$; 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^{-1}(3n+1)}{(2n-3)}$;
 7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{3n-1}$;
 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} (x+5)^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}$.

2. Знайти суму ряду:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n - 3^n}{21^n}$;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} (n-1)x^n$.

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

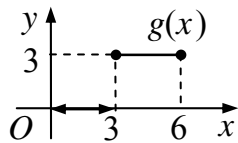
- 1) $\ln(1-x-12x^2), x_0 = 0$;
 2) $\sin x, x_0 = 1$; 3) $\frac{x^2}{x-1}, x_0 = 0$;
 4) $y(x) : y\ddot{y} = e^{3x} + 2xy^2, y(0) = 1$ (до x^3).

4. Обчислити з точністю $\epsilon = 10^{-3}$:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{7^n}$; 2) $\int_0^{0.4} \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) \frac{dx}{x}$.

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

- 1) $f(x) = g(x), T = 6$;



- 2) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi - x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$
 3) $f(x) = x(x - \pi), x \in (0; \pi)$ за косинусами;
 4) $f(x) = x(x - \pi), x \in (0; \pi)$ за синусами.

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \cos at, |t| \leq \frac{\pi}{a}; f(t) = 0, |t| > \frac{\pi}{a}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

- 1) $\sqrt[4]{16}$; 2) $\operatorname{Ln}(-1+i)$; 3) $\operatorname{Arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right)$.

8. Зобразити на комплексній площині область: $\{z \mid |z-i| \leq 2, 0 < \operatorname{Im} z < 2\}$.

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = x^2 - y^2 + 2x, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \operatorname{Re} \sin z dz$, де L :

- 1) $z = \frac{\pi}{2} + it, \frac{\pi}{2} \in \frac{\pi}{2} + i$; 2) $[0; i]$ і $\frac{\pi}{2} + i \in \frac{\pi}{2} + i$.

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

- 1) $\frac{13z - 338}{2z^3 + 12z^2 - 169z}, z_0 = 0$;
 2) $\frac{z}{z^2 + 1}, z_0 = 2 + i$; 3) $\cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}, z_0 = 2$.

12. Визначити тип особливих точок функції:

- 1) $z^4 \cos \frac{5}{z^2}, z_0 = 0$; 2) $\frac{1}{\sin z^2}$.

13. Обчислити інтеграл:

- 1) $\int_{|z|=1} \frac{e^{zi} + 2}{\sin 3zi} dz$; 2) $\int_{|z|=1/3} \frac{4z^5 - 1}{z^6} dz$;

- 3) $\int_{|z|=6} \frac{\operatorname{sh} pz - pz}{z^2 \sin^2 \frac{pz}{6}} dz$; 4) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - 2\sqrt{3} \sin t}$;

- 5) $\int_{-1}^1 \frac{(x^2 + 1)dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$; 6) $\int_{-1}^1 \frac{x^2 \sin x dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$.

14. Знайти зображення оригіналу:

- 1) $(t-1) \sin 3t$; 2) $\int_0^t \frac{\sin 2t}{t} dt$; 3) $\int_0^{\operatorname{Mg}(t)} 2t^3 dt, 0 \leq t \leq 6, t > 6$.

15. Розв'язати задачу Коші:

- 1) $y\ddot{y} + 2y = 3h(t) - h(t-2), y(0) = 3$;

- 2) $y\ddot{y} - 3y\ddot{y} + 2y = e^t, y(0) = 1, y\ddot{y}(0) = 0$;

- 3) $y\ddot{y} - 4y\ddot{y} + 4y = \frac{2e^{3t}}{\operatorname{ch}^2 2t}, y(0) = y\ddot{y}(0) = 0$;

- 4) $\begin{cases} x\ddot{y} = -x - 2y + 1, \\ y\ddot{y} = -\frac{3}{2}x + y, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0$.

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \operatorname{sh} x - \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)y(t)dt.$$

Варіант 14

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - n); 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3(2 + \sin \frac{\pi n}{2})};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg \frac{n+3}{n^2+5}}{\sqrt[3]{n}+2}; 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!};$$

$$5) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}; 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2 n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n^2}; 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{e^{n/\cos x}}; 10) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} (x-2)^n.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 35n - 6}; 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 8^n}{24^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}; 4) \sum_{n=0}^{\infty} (5n+4)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) (3 + e^{-x})^2, x_0 = 0;$$

$$2) \ln(5x+3), x_0 = 1; 3) \frac{1}{2x+4}, x_0 = 1;$$

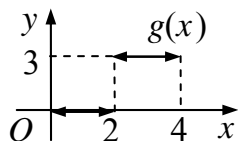
$$4) y(x) : y'' = x + e^y, y(0) = 0 \text{ (до } x^3 \text{)}.$$

4. Обчислити з точністю $\epsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{1}{7}\right)^n; 2) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 4;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 5x+1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = x(\pi - x), x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = x(\pi - x), x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \frac{1}{2} \sin 2t, |t| \leq \pi; f(t) = 0, |t| > \pi$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{-\frac{1-\sqrt{3}i}{32}}; 2) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2i\right); 3) \operatorname{Arctg}(i+1).$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| > 1, -\frac{\pi}{4} \leq \arg z < 0\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 - 2x + 1, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\oint_L \frac{dz}{z}$, де L :

$$1) z = \cos t + i \sin t, i \in \mathbb{R} - 1; 2) [i; 0] \cup [0; -1].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z}{z^2+1}, z_0 = 1-2i; 3) \sin \frac{z+i}{z-i}, z_0 = i.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\cos 3z-1}{\sin z-z+\frac{1}{6}z^3}, z_0 = 0; 2) \frac{\sin 3z-3\sin z}{z(\sin z-z)}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z + 1}{z^2 - \pi^2} dz; 2) \oint_{|z|=1} \frac{e^{2z} - z}{z^2} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} 4z - 8z^2 - 1}{z^4 \sin \frac{8z}{3}} dz; 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - \sqrt{2} \sin t};$$

$$5) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{(x^2+5)^2} dx; 6) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) (t+2)\sin 3t; 2) \frac{e^{-4t}\cos 2t}{t}; 3) \begin{cases} \operatorname{Mg}(t), & 0 \leq t \leq 4, \\ t^2, & t > 4. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + y = 2h(t-2) - h(t-1), y(0) = 0;$$

$$2) 2y''' + 3y'' + y = 3e^t, y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$3) y''' - 4y = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 2t}, y(0) = 0 = y'(0) = 0;$$

$$\begin{cases} x'' = 3x + 5y + 2, \\ y'' = 3x + y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 2.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\operatorname{sh} x = \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)y(t)dt.$$

Варіант 15

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^2}{25n^2+10n}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{n^3}} \sin \frac{2+(-1)^n}{6} \pi;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1}{\sqrt{n+3}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3^n (n+1)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n+1}^{2n+1}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln^2(2n)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n n \sqrt{n}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n n (x-1)^{2n}}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2+3n-20}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n-3^n}{24^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n(2n-1)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (7n+4)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{\sin x}{x} - 1, x_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x_0 = 2;$$

$$3) \ln(5x+3), x_0 = 1;$$

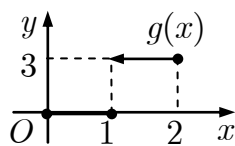
$$4) y(x): y' = y \cos x + 2 \cos y, y(0) = 0 \text{ (до } x^3 \text{)}.$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}; \quad 2) \int_0^{0,3} e^{-2x^2} dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 2;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 1-4x, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 2x^2 + 1, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = 2x^2 + 1, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 3, t \in [0; 2]; f(t) = 0, t \notin [0; 2]$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функцій:

$$1) \sqrt[3]{-8}; \quad 2) \sin \frac{\pi}{2} - 5i; \quad 3) (-1 - i\sqrt{3})^{-3i}.$$

8. Зобразити множину точок

$$z \in \mathbb{C} \mid |z-1-i| < 1, |\arg z| \leq \frac{\pi}{4}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = 3x^2y - y^3 - y, f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L |e^z| dz$, де L :

$$1) y = 1 - x, i \rightarrow 1; \quad 2) [i; 0] \cup [0; 1].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{15z-450}{2z^3+15z^2-225z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z}{z^2+1}, z_0 = -3+i; \quad 3) \sin \frac{z}{z-3}, z_0 = 3.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{\cos z - 1 + \frac{1}{2}z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-1|=3/2} \frac{\ln(z+2)}{\sin z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0,9} \frac{e^{3z} - 1 - 3z}{\operatorname{sh}^2 \pi z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{6 - 4\sqrt{2} \sin t};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}; \quad 6) \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t); \quad 2) \frac{e^{-3t} \sin 2t}{t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 2, \\ t, & t > 2. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' - 3y' + 2y = \eta(t-2) - \eta(t-3),$$

$$y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) y'' - 2y' - 3y = 2t, y(0) = y'(0) = 1;$$

$$3) y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = \frac{5}{2}x - y + 2, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t} y(t) dt.$$

Варіант 16

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n + 1};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3 + 1}{n^2 + n + 2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+1}^{n/2}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^{-2}(n+1)}{2n+3};$$

$$7) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln \ln n) \ln n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^3 \sqrt{n}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 42n - 40}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n + \frac{1}{n} x^{2n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (-n-2)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{7}{12 - x - x^2}, x_0 = 0;$$

$$2) \ln(5x + 3), x_0 = 1; \quad 3) \sin^3 x, x_0 = 0;$$

$$4) y(x) : y' = x^2 + 2y^2, y(0) = \frac{1}{5} \text{ (до } x^3 \text{)}.$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n!}; \quad 2) \int_0^{0,4} \sin \frac{5x}{2} dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 2; \quad \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ 1 \text{ } \overleftarrow{\hspace{1cm}} \text{ } g(x) \\ \downarrow \\ O \quad 1 \quad 2 \quad x \end{array}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 3x^2 + 1, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = 3x^2 + 1, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 2 - t, t \in [0; 2]; f(t) = 0, t \notin [0; 2]$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{-8i}; 2) \operatorname{sh} 3 + \frac{\pi i}{6}; 3) \operatorname{Arcsin}(i^2 + i - 1).$$

8. Зобразити множину точок

$$z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2, -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z-1) \leq \frac{\pi}{4}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = 2xy + y, f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \arg e^z dz$, де L :

$$1) y = 2x + 2, -1 \rightarrow 2i; 2) [-1; 0] \cup [0; 2i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{8z - 256}{z^4 + 8z^3 - 128z^2}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z}{z^2 + 1}, z_0 = -3 - 2i; 3) z \exp \frac{1}{z-2}, z_0 = 2.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\operatorname{ch} 2z - 1}{\operatorname{sh} z - z - \frac{1}{6}z^3}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{e^z - 1}{\sin \pi z}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z + 2}{z^2 - 4\pi^2} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1} \frac{z^2 e^{1/z^2} - 1}{z} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0,5} \frac{e^{6z} - \cos 8z}{z \operatorname{sh} 4z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{8 - 2\sqrt{15} \sin t};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 5}{x^4 + 5x^2 + 6} dx; \quad 6) \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + \frac{1}{4}} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t^2 \cos 4t; \quad 2) \frac{\operatorname{sh} t}{t} e^{-3t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 2, \\ 3t, & t > 2. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 4y' + 4y = 2(\eta(t) - \eta(t-1)),$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$2) y'' + 4y = \sin 2t, y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$3) y'' + y' = \frac{e^t}{1 + e^t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 2y + 1, \\ y' = 2x + 3, \end{cases} x(0) = -1, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \sin x + 2 \int_0^x e^{x-t} y(t) dt.$$

Варіант 17

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin \frac{\pi n}{2}}{n^2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^3}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n + 1)(2n)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}; \quad 6) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n-1)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1) \frac{3}{2}^n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2 + n}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{3^n \sqrt{2n+1}}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 - 8n - 15}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 4^n}{15^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) x^{n-1}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) x^2 \sqrt{4-3x}, x_0 = 0;$$

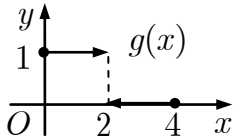
$$2) \frac{1}{x}, x_0 = -2; \quad 3) \cos^3 2x, x_0 = 0;$$

$$4) y(x) : y' = x^2 + xy + y^2, y(0) = \frac{1}{2}.$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(2n)!}; \quad 2) \int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 4;$$


$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 4 - 2x, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 4x^2 + 1, x \in (0; \pi) \text{ çà êî ñëí òñàì è};$$

$$4) f(x) = 4x^2 + 1, x \in (0; \pi) \text{ çà ñëí òñàì è}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = e^{-t}, |t| \leq 2; f(t) = 0, |t| > 2$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{-\frac{1}{16}}; \quad 2) \operatorname{ch} 1 + \frac{\pi i}{3}; \quad 3) \operatorname{Arctg} \frac{3i-2\sqrt{3}}{7}.$$

8. Зобразити множину точок

$$z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, \arg(z+i) > \frac{\pi}{4}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = 3x^2y - y^3, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L (\bar{z} - i) dz$, де L :

$$1) z = t + 2it, 0 \rightarrow 1 + 2i; \quad 2) [0; 2i] \cup [2i; 1 + 2i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{z+2}{-2z^3 + z^2 + z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{4z+8}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -2 + 2i; \quad 3) e^{z/(z-3)}, z_0 = 3.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{e^{z^2}}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{1}{2}z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \operatorname{th} z.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z+1|=1/2} \frac{\operatorname{tg} z}{4z^2 + \pi z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1/3} \frac{1 - 2z^4 + 3z^5}{z^4} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=1} \frac{e^{7z} - \operatorname{ch} 5z}{z \sin 2iz} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3} \sin t - 2};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}; \quad 6) \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t \sin 2t \operatorname{sh} 3t; \quad 2) \frac{\operatorname{ch} t}{t} e^{-2t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 4, \\ t^2, & t > 4. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' - 7y' + 10y = \eta(t-1) - \eta(t-2),$$

$$y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) 2y'' + 5y' = 29 \cos t, y(0) = -1, y'(0) = 0;$$

$$3) y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{(t+1)^2}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 2x + 8y + 1, \\ y' = 3x + 4y, \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = 1 + \frac{1}{6} \int_0^x (x-t)^3 y(t) dt.$$

Варіант 18

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - n + 1}{n^5}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{3}}{3^n + 2}; \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3}{n^3 + 1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n}; \\ 5) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n \sqrt{\ln(3n-1)}}; \\ 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n^2 + 1}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}; \\ 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n+1}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 (x+5)^{2n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

2. Знайти суму ряду:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 21n - 10}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 5^n}{10^n}; \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)x^n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (2n-1)x^{n+1}. \end{aligned}$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$\begin{aligned} 1) \ln(1 + 2x - 8x^2), x_0 = 0; \\ 2) \frac{x^3}{2+x}, x_0 = 0; \quad 3) \frac{1}{x+3}, x_0 = -2; \\ 4) y(x) : y' = e^{\sin x} + x, y(0) = 0 \text{ (â } x^3). \end{aligned}$$

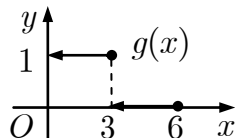
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!n!}; \quad 2) \int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 6;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 2x^2 - 1, x \in (0; \pi) \text{ çà êî ñèí òñàì è;}$$

$$4) f(x) = 2x^2 - 1, x \in (0; \pi) \text{ çà ñèí òñàì è.}$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 5, t \in [1; 3]; f(t) = 0, t \notin [1; 3]$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}; 2) \operatorname{Ln}(-1 - i); 3) \operatorname{Arccos}(2 + 2i).$$

8. Зобразити множину точок

$$z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - 1| \leq 2, \operatorname{Im} z \geq 0, \operatorname{Re} z < 1.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = e^x(x \cos y - y \sin y)$, $f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \bar{z}^2 dz$, де L :

$$1) z = 2 \cos t + i \sin t, 2 \rightarrow i;$$

$$2) [2; 2 + i] \cup [2 + i; i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{z+4}{2z^2 + z^3 - z^4}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{4z+8}{(z-1)(z+3)}, z_0 = 1 - 3i; \quad 3) \sin \frac{2z}{z-4}, z_0 = 4.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) ze^{4/z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{\sin z}{z^3(1 - \cos z)}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z+3/2|=1} \frac{\cos^2 z + 3}{2z^2 + \pi z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=3} \frac{z^2 + \cos z}{z^3} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0,5} \frac{\operatorname{ch} 3z - \cos 4iz}{z^2 \sin 5z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{15} \sin t - 4};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + 3)dx}{(x^2 - 10x + 29)^2}; \quad 6) \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 16)(x^2 + 9)}.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t \sin 2t; 2) \frac{\cos 2t - \cos 3t}{t} e^{4t}; 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 6, \\ t^3, & t > 6. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) 4y' + 2y = \eta(t) - \eta(t-1), y(0) = 2;$$

$$2) y'' + y' + y = t^2 + t, y(0) = 1, y'(0) = -3;$$

$$3) 2y'' - y' = \frac{e^t}{1 + e^{t/2}}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 2x + 2y + 2, \\ y' = 4y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt.$$

Варіант 19

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{n/3}}{n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \cos \frac{\pi n}{2} \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7 + 5}}; \\ 3) \sum_{n=3}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}; \\ 5) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{\ln^n n}; \quad 6) \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}; \\ 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)}{\ln(n+4)}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}; \\ 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2n^2}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}. \end{aligned}$$

2. Знайти суму ряду:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}; \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)x^{n+2}. \end{aligned}$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$\begin{aligned} 1) 2x \sin^2 \frac{x}{2}, x_0 = 0; \\ 2) e^x, x_0 = 1; \quad 3) \ln(1 - 4x^2), x_0 = 0; \\ 4) y(x) : y' = xy - y^2, y(0) = \frac{1}{5} \text{ (äî } x^3). \end{aligned}$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n n!}; \quad 2) \int_0^{0.4} \frac{1 - e^{-x/2}}{x} dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$\begin{aligned} 1) f(x) = g(x), T = 8; \\ 2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 6x - 5, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases} \\ 3) f(x) = 3x^2 - 1, x \in (0; \pi) \text{ çà êî ñëí òñàì è; } \\ 4) f(x) = 3x^2 - 1, x \in (0; \pi) \text{ çà ñëí òñàì è. } \end{aligned}$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 3 - 3|t|, |t| \leq 1; f(t) = 0, |t| > 1$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{\frac{1}{8}}; \quad 2) \sin \frac{\pi}{6} - 3i; \quad 3) \operatorname{Arccos}(-5).$$

8. Зобразити множину точок

$$z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z - i| < 2, \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z > 1.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = 2xy + 2x, f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L z \bar{z} dz$, де L :

$$1) z = 4 \cos t + i \sin t, 4 \rightarrow i; \quad 2) [4; 0] \cup [0; i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$\begin{aligned} 1) \frac{3z + 18}{-2z^3 + 3z^2 + 9z}, z_0 = 0; \\ 2) \frac{4z + 8}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -3 - i; \\ 3) \sin \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}, z_0 = 2. \end{aligned}$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\sin z^3 - z^3}{e^z - 1 - z}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{e^{1/z}}{(e^z - 1)(1 - z)^3}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$\begin{aligned} 1) \oint_{|z+1|=2} \frac{\sin^2 z - 3}{z^2 + 2\pi z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1/2} \frac{z^4 - 3z^2 + 5}{z^3} dz; \\ 3) \oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} 3z - \sin 3z}{z^3 \operatorname{sh} iz}; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6} \sin t - 5}; \\ 5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + 6x^2 + 5)^2}; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx. \end{aligned}$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t(e^{-t} + \operatorname{ch} t); \quad 2) \frac{1 - \cos t}{t} e^t; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 8, \\ 2t^4, & t > 8. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$\begin{aligned} 1) y' + 2y = 2\eta(t) - \eta(t-1), y(0) = 3; \\ 2) y'' + 4y = 8 \sin 2t, y(0) = 3, y'(0) = -1; \\ 3) y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 t}, y(0) = y'(0) = 0; \end{aligned}$$

$$4) \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4x + y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = x - \int_0^x (x-t)y(t)dt.$$

Варіант 20

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin \frac{n\pi}{4}}{n^2} \operatorname{ctg} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos \frac{\pi}{n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[n]{n^2}}{(n+1)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}^{n^2}; \quad 6) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt[n]{n^3}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n^3 \sqrt[n]{n}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n(n-1)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (4n+3)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) (x-1) \operatorname{sh} x, x_0 = 0;$$

$$2) \frac{1}{2x+5}, x_0 = 3; \quad 3) \frac{5x-5}{x^2-x-6}, x_0 = 0;$$

$$4) y(x) : y' = 2x + y^2 + e^x, y(0) = 1.$$

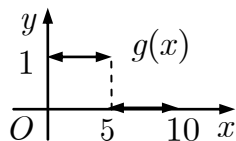
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n n!}; \quad 2) \int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 10;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 7-3x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 4x^2 - 1, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами}(\cos);$$

$$4) f(x) = 4x^2 - 1, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}(\sin).$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 4, |t| \leq 1; f(t) = 0, |t| > 1$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{\frac{2}{8}}; \quad 2) \cos \frac{\pi}{3} + 3i; \quad 3) \operatorname{Arcsin} \frac{2}{i}.$$

8. Зобразити множину точок

$$z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Re} z \geq 1, \arg z < \frac{\pi}{4}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = 1 - e^x \sin y, f(0) = 1 + i$

10. Обчислити інтеграл $\int_L (\bar{z} + 1) dz$, де L :

$$1) z = t - \sin t, 0 \rightarrow \pi; \quad 2) [0; \pi] \cup [\pi; \pi + i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{2z+16}{8z^3+2z^3-z^4}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{4z+8}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -2 + i;$$

$$3) \exp \left(\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2} \right), z_0 = 1.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + \frac{1}{6}z^3}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{z^2} + z \sin \frac{1}{z^2}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z|=1/4} \frac{\ln(e+z)}{z \sin z + \frac{\pi}{4}} dz; \quad 2) \oint_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{z^4} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0,5} \frac{e^{5z} - 1 - \sin 5z}{z^2 \operatorname{sh} 5z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{35} \sin t - 6};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 7x^2 + 12}; \quad 6) \int_0^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) (t^2 - t) \cos t; \quad 2) \frac{1 - \operatorname{ch} t}{t} e^{-t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 10, \\ t^5, & t > 10. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 2y' = \eta(t-2), y(0) = 1, y'(0) = 0;$$

$$2) y'' - y' - 6y = 2, y(0) = 1, y'(0) = 0;$$

$$3) y'' - y' = \frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = x - 2y + 1, \\ y' = -3x, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = 1 + x + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt.$$

Варіант 21

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{n^{100} + 1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt[4]{n^3}(\sqrt[3]{n}-1)}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{3n}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^{-2}(n+1)}{(n+5)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n n^2}; \quad 10) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+2)\ln(n+2)}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 35n - 6}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (5n+4)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{5}{6+x-x^2}, x_0 = 0;$$

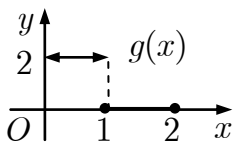
$$2) \cos \frac{2x^3}{3}, x_0 = 0; \quad 3) \frac{1}{(x-3)^2}, x_0 = 1;$$

$$4) y(x) : y' = x \sin x - y^2, y(0) = 1 \text{ (â } x^3).$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}; \quad 2) \int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 2;$$


$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 1 - 2x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà êî ñèí óñàì è};$$

$$4) f(x) = 1 - 2x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà ñèí óñàì è}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \cos 2t, |t| \leq \frac{\pi}{2}; f(t) = 0, |t| > \frac{\pi}{2}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{\frac{1}{16}}; \quad 2) \operatorname{Ln}(1-i); \quad 3) (-\sqrt{3} + i)^{-6i}.$$

8. Зобразити множину точок

$$z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1, -1 < \operatorname{Im} z \leq 1, 0 < \operatorname{Re} z \leq 2.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = (e^x - e^{-x}) \sin y$, $f(0) = 2$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L (z + \bar{z}) dz$, де L :

$$1) z = t + i(2-t), 2i \rightarrow 2; 2) [0; 2i] \cup [2i; 2+2i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{5z+50}{-2z^3+5z^2+25z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{4z-8}{(z+1)(z-3)}, z_0 = -1-2i;$$

$$3) ze^{\pi/(z-a)^2}, z_0 = a.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{e^{7z}-1}{\cos z - 1 + \frac{1}{2}z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{z^2(z^2-4)^{-2}}{\cos(z-2)}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z|=\pi/2} \frac{z^2+z+3}{(\pi+z)\sin z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=3} \frac{\cos z^2-1}{z^4} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=2} \frac{\sin 3z-3z}{z^2 \operatorname{sh}^2 iz} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{3} \sin t - 7};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2} dx; \quad 6) \int_0^{\infty} \frac{x \sin \frac{x}{2}}{x^2+4} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t^2 \sin 5t; 2) \frac{\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 4t}{t} e^{-2t}; 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 2, \\ t, & t > 2. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 3y = \eta(t) - \eta(t-4), y(0) = y'(0);$$

$$2) y'' + 4y = 4e^{2t} + 4t^2, y(0) = 1, y'(0) = 2;$$

$$3) y'' + 2y' + y = \frac{te^{-t}}{t+1}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 3y + 2, \\ y' = x + 2y, \end{cases} x(0) = -1, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \operatorname{sh} x + \int_0^x (x-t)y(t) dt.$$

Варіант 22

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n} \sin \frac{1}{n+1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^8 + n}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \cdot 3^n}{(2n+1)^n}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+7)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3}{\ln(n+1)};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n n^2}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} x^n; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (-2n+1)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) x\sqrt[3]{27-2x}, x_0 = 0;$$

$$2) \frac{2}{1-3x^2}, x_0 = 0; \quad 3) \sin \frac{\pi x}{4}, x_0 = 2;$$

$$4) y(x) : y' = 2x^2 - xy, y(0) = 1 \text{ (âî } x^3).$$

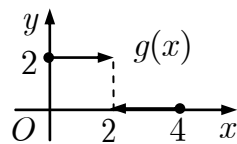
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{3^n (n+1)}; \quad 2) \int_0^{0.4} e^{-3x^2/4} dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 4;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 6x - 2, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 2 - 3x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà êî ñëí óñàì è;}$$

$$4) f(x) = 2 - 3x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà ñëí óñàì è.}$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 6 - 2|t|, |t| \leq 3; f(t) = 0, |t| > 3$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}; \quad 2) \operatorname{sh} 1 - \frac{\pi i}{3}; \quad 3) (1 - i\sqrt{3})^{3i}.$$

8. Зобразити множину точок

$$z \in \mathbb{C} \mid |z-1| > 1, -1 \leq \operatorname{Im} z < 0, 0 \leq \operatorname{Re} z < 3.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

$$\operatorname{Im} f(z) = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 1 + i.$$

10. Обчислити інтеграл $\int_L |z| dz$, де L :

$$1) z = 2 \cos t + 2i \sin t, 2 \rightarrow -2i;$$

$$2) [2; 0] \cup [0; -2i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{3z + 36}{18z^2 + 3z^3 - z^4}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{4z - 8}{(z+1)(z-3)}, z_0 = 3 + i;$$

$$3) ze^{\pi z/(z-\pi)}, z_0 = \pi.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\sin 6z - 6z}{\operatorname{sh} z - z - \frac{1}{6}z^3}, z_0 = 0; \quad 2) z^3 \sin \frac{2}{z}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z|=1} \frac{z^3 - i}{(z-\pi) \sin 2z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1/2} \frac{2 + z^3 - 5z^4}{z^5} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=2} \frac{\cos 2z - 1 + 2z^2}{z^4 \operatorname{sh} \frac{\pi z}{3}} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 \sin t + 5};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^5}; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2 - x + 1)^2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) (t+1) \sin 5t; \quad 2) \frac{1 - e^{3t}}{t} e^{-3t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 4, \\ t^2, & t > 4. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y' + 4y = \eta(t) + 4\eta(t-1), y(0) = 0;$$

$$2) y'' + 4y' + 4y = t^3 e^{2t}, y(0) = 1, y'(0) = 2;$$

$$3) y'' - y' = \frac{e^{2t}}{2 + e^t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = x + 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = 1 + 2 \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt.$$

Варіант 23

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \ln \frac{n}{n+2}; \quad 2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^{-2/3} n}{n^2 \ln^{1/3} n+1}; \\ 3) \sum_{n=2}^{\infty} \exp \frac{\sqrt{n}}{n^2-1} - 1; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)! 4^n}; \\ 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} \frac{n+1}{4^n}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1) \ln n}; \\ 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)}{5n(n+1)}; \\ 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n^{n+1}}. \end{aligned}$$

2. Знайти суму ряду:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 + 12n - 35}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^n}; \\ 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (-2n-1)x^{n+1}. \end{aligned}$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$\begin{aligned} 1) \ln(1+x-12x^2), x_0 = 0; \\ 2) \frac{1}{5x+3}, x_0 = \frac{2}{5}; \quad 3) e^{3x^2}, x_0 = 0; \\ 4) y(x) : y' = x - y^2, y(0) = \frac{1}{2} \text{ (â } x^3). \end{aligned}$$

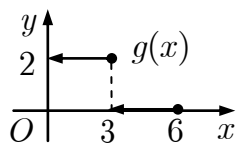
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n (2n+1)}; \quad 2) \int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 6;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 4-9x, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 2 + 3x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà êî ñëí óñàì è;}$$

$$4) f(x) = 2 + 3x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà ñëí óñàì è.}$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \operatorname{sgn} t - \operatorname{sgn}(t-3), t \in \mathbb{R}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}; \quad 2) \operatorname{ch} 2 - \frac{\pi i}{6}; \quad 3) \operatorname{Arccos} \frac{1-i}{1+i}.$$

8. Зобразити множину точок

$$z \in \mathbb{C} \mid |z+i| < 1, -\frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq -\frac{\pi}{4}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = e^{-y} \cos x + x, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \operatorname{Im} z^2 dz$, де L :

$$1) z = t + i(1-t), i \rightarrow 1; \quad 2) [i; 0] \cup [0; 1].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{7z+98}{-2z^3+7z^2+49z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{4z-8}{(z+1)(z-3)}, z_0 = 2-2i;$$

$$3) z \sin \pi \frac{z+2}{z}, z_0 = 0.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) z \sin \frac{3}{z^3}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{\cos \frac{\pi}{2} z}{z^4 - 1}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-1|=2} \frac{z(z+\pi)}{\sin 2z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1} \frac{ze^{1/z} - z - 1}{z^3} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=5} \frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{z^2 \sin^2 \frac{z}{3}} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 \sin t + 5};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + 12x^2 + 20)^2}; \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t \sin t \operatorname{sh} 5t; \quad 2) \frac{e^t - t - 1}{t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 6, \\ t^3, & t > 6. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) 2y' + 3y = \eta(t) - 2\eta(t-3), y(0) = 0;$$

$$2) y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}, y(0) = 2, y'(0) = 6;$$

$$3) y'' - y = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2x + 3y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^x + 2 \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt.$$

Варіант 24

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right); \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \arctg \sqrt{n^2 - 1}}{\pi \sqrt{n^2 - 1}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{3n-1}{4n+2}^{2n}; \quad 6) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3) \ln^2 n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos \frac{2}{\sqrt{n}}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^n}{(2n+1)^n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{x^n}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 21n - 10}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^n + \frac{(-1)^n}{n}\right) x^n; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (-2n+2) x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{\sin 3x}{x} - \cos 3x, x_0 = 0;$$

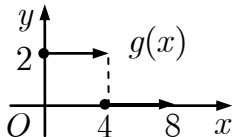
$$2) \ln(3x+8), x_0 = -2; \quad 3) \frac{x-3}{x^2+5x+6}, x_0 = 0;$$

$$4) y(x): y' = xe^x + 2y^2, y(0) = 0 \text{ (â } x^3).$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2} + \pi n}{n^4}; \quad 2) \int_0^{0.4} \cos \frac{5x}{2} dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 8;$$


$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - 3, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 3 - 2x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà êî ñëí òñàì è;}$$

$$4) f(x) = 3 - 2x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà ñëí òñàì è.}$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = e^{-3|t|}, t \in \mathbb{R}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}; \quad 2) 1^{2i}; \quad 3) \cos \frac{\pi}{2} - i.$$

8. Зобразити множину точок

$$z \in \mathbb{C} \mid |z-i| \leq 1, -\frac{\pi}{2} < \arg(z-i) < \frac{\pi}{4}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = e^{-y} \sin x, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L (\bar{z} + i) dz$, де L :

$$1) z = t + i(4-2t), 4i \rightarrow 2; \quad 2) [4i; 0] \cup [0; 2].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{4z-8}{(z+1)(z-3)}, z_0 = -2-i;$$

$$3) z \cos \pi \frac{z+3}{z-1}, z_0 = 1.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\cos 5z-1}{\operatorname{ch} z-1-\frac{1}{2}z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{\sin \pi z}{(z^3-1)^2}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z|=2} \frac{z^2 + \sin z + 2}{z^2 + \pi z} dz \quad 2) \oint_{|z|=2} z^2 \sin \frac{i}{z^2} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} 2z-1-2z^2}{z^4 \sin \frac{2\pi z}{3}} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sqrt{7} \sin t + 8};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2} dx; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x) \sin x}{x^4+10x^2+9} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t \operatorname{ch} 2t \cos t; \quad 2) \int_0^t \frac{\sin 3\tau}{\tau} d\tau; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 8, \\ t^4, & t > 8. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y' + y = \eta(t-2) - 2\eta(t-3), y(0) = 0;$$

$$2) y'' + 4y = 3 \sin t + 10 \cos 3t, \\ y(0) = -2, y'(0) = 3;$$

$$3) y'' + y' = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = -2x + y + 2, \\ y' = 3x, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x^2 + x = \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt.$$

Варіант 25

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{1+n^2}-2n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2n+1}}{n \cdot 3 + \sin \frac{n\pi}{4}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{2n+1}}{\sqrt{n}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3^n (n+1)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n+3} \cdot n^2; \quad 6) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\frac{n}{3} - 1 \ln^2 \frac{n}{2}};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}+1};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3+n}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n(x+3)^n}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2-3n-2}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n+5^n}{20^n};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-2)(2n-1)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (-2n-2)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, x_0 = 0;$$

$$2) \operatorname{ch} 2x^3, x_0 = 0; \quad 3) \frac{1}{\sqrt{x+4}}, x_0 = -3;$$

$$4) y(x) : y' = xy + x^2 + y^2, y(0) = 1 \text{ (â } x^3 \text{)}.$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)^n}; \quad 2) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 10; \quad \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ 2 \text{ } \overleftarrow{\hspace{1cm}} \text{ } g(x) \\ \downarrow \\ O \quad 5 \quad 10 \text{ } x \end{array}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 10x-3, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 3 + 2x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà êî ñëí òñàì è;}$$

$$4) f(x) = 3 + 2x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà ñëí òñàì è.}$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \cos 3t, |t| \leq \frac{\pi}{3}; f(t) = 0, |t| > \frac{\pi}{3}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{-128 + 128\sqrt{3}i}; 2) \sin \frac{\pi}{3} - 2i; 3) \operatorname{Arctg}(i+2).$$

8. Зобразити множину точок

$$z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} < 2, \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z > -1.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}, f(0) = 1.$$

10. Обчислити інтеграл $\int_L (z^2 - |z|^2) dz$, де L :

$$1) z = \cos t + 2i \sin t, 1 \rightarrow -1; 2) [1; -1].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{2z}{z^2+4}, z_0 = -1-3i; 3) z^2 \sin \frac{z+3}{z}, z_0 = 0.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\operatorname{sh} 4z - 4z}{e^z - 1 - z}, z_0 = 0; 2) \frac{\sin^3 z}{z(1 - \cos z)}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-3/2|=1} \frac{z(z+\pi)dz}{(z-\pi)\sin 3z}; 2) \oint_{|z|=1/2} \frac{z^4+2z^2+3}{2z^6} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0,4} \frac{e^{2z}-1-2z}{z \operatorname{sh}^2 2\pi z} dz; 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{5} \sin t + 9};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+10}{(x^2+4)^2} dx; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4+10x^2+9} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t^2 \sin 4t; 2) \frac{e^{-3t} \cos 2t}{t}; 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 10, \\ t^5, & t > 10. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 4y = \eta(t) - \eta(t-2\pi), y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t} \cos 3t,$$

$$y(0) = 5, y'(0) = 1;$$

$$3) y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{1+t^2}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 4x + 3, \\ y' = x + 2y, \end{cases} x(0) = -1, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x^2 e^x = \int_0^x e^{2(x-t)} y(t) dt.$$

Варіант 26

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\sqrt{n^3+1}-n)}{\sqrt{n^5+1}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos \frac{2\pi}{3n}}{\sqrt[4]{n^4-1}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n+n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+3}}{(2n^2+1)^{n/3}}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5) \ln n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+5}};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^4}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^{2n}}{n}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2-5n-6}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n-4^n}{20^n};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (6n+5)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{5}{6-x-x^2}, x_0=0; \quad 2) \frac{1}{\sqrt{x-1}}, x_0=2;$$

$$3) \ln(1+2x^2), x_0=0;$$

$$4) y(x): y' = xy + e^x, y(0) = 0 \text{ (âî } x^3).$$

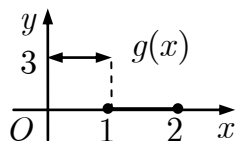
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^n}; \quad 2) \int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 2;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{4}, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 4 - x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà êî ñèí òñàì è;}$$

$$4) f(x) = 4 - x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà ñèí òñàì è.}$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 2, |t| \leq 2; f(t) = 0, |t| > 2$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{27}; \quad 2) \cos \frac{\pi}{6} - i; \quad 3) (1 + i\sqrt{3})^{-3i}.$$

8. Зобразити множину точок

$$z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} \leq 2, \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > -1.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + x, f(1) = 2.$$

10. Обчислити інтеграл $\int_L \bar{z} dz$, де L :

$$1) |z - i| = 1; \quad 2) [0; i] \cup [i; 1 + i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{5z + 100}{50z^2 + 5z^3 - z^4}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{2z}{z^2 + 4}, z_0 = -3 + 2i; \quad 3) z \sin \frac{z^2 - 2z}{(z-1)^2}, z_0 = 1.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\operatorname{ch} 3z - 1}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}, z_0 = 0; \quad 2) z \sin \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-3/2|=2} \frac{\sin z}{z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1} \frac{e^{iz} - 1}{z^3} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0.3} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{7} \sin t + 4};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^4}; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 1) \cos x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) (t^2 - 3) \operatorname{sh} t; \quad 2) \frac{\operatorname{ch} t}{t} e^{-2t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 2, \\ 2t, & t > 2. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + y = \eta(t) + 3\eta(t-2), y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) y'' + 3y' - 10y = 47 \cos 3t - \sin 3t, \\ y(0) = 3, y'(0) = -1;$$

$$3) y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{\operatorname{ch}^2 t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = y + 3, \\ y' = x + 2, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x \cos x = \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt.$$

Варіант 27

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} \operatorname{tg} \frac{3}{n+2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+2}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{1/n} - 1^2; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \frac{n}{3n-1}^{2n}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(2n^2+3) \ln n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+5)}{3^n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3^n}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+5)(x+2)^{2n}}{(2n+9)^5}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2+8n-15}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n+3^n}{21^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos^{n+1} x}{n+1}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (6n+5)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \sqrt[4]{16-5x}, x_0 = 0;$$

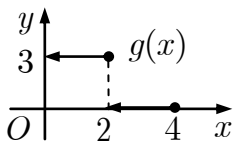
$$2) \sin^2 2x, x_0 = 0; \quad 3) \frac{1}{x^2-4x+3}, x_0 = -2;$$

$$4) y(x) : y' = ye^x, y(0) = 1 \text{ (âî } x^3 \text{)}.$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2} + \pi n}{5n^3+1}; \quad 2) \int_0^{2.5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 4;$$


$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{x}{5} - 2, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 3 - 4x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà êî ñèí òñàì è};$$

$$4) f(x) = 3 - 4x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà ñèí òñàì è}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \sin |t|, |t| \leq \frac{\pi}{2}; f(t) = 0, |t| > \frac{\pi}{2}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{\frac{1}{256}}; \quad 2) i^{3i}; \quad 3) \operatorname{sh} 1 - \frac{\pi i}{2}.$$

8. Зобразити множину точок

$$z \in \mathbb{C} \mid 1 < z\bar{z} < 2, \operatorname{Re} z > 0, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = x^2 - y^2 - x, f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L z \operatorname{Re} \bar{z} dz$, де L :

$$1) z = t + i \sin t, 0 \rightarrow \pi; \quad 2) [0; \pi].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{11z+242}{2z^3-11z^2-121z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{2z}{z^2+4}, z_0 = 2+3i; \quad 3) z \cos \frac{1}{z-3}, z_0 = 3.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{e^{z^4}-1}{\cos z-1+\frac{1}{2}z^2}, z_0 = 0; \quad 2) e^{1/z} \frac{\sin 3z^2}{z(z^3+1)}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-\pi|=1} \frac{(z^2+\pi)^2}{i \sin z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1/3} \frac{1-z^4+3z^6}{2z^3} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0.5} \frac{e^{5z}-\operatorname{ch} 6z}{z \sin \pi z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5} \sin t + 3};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+18x^3+45)^2}; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+1) \sin x}{x^4+5x^2+4} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) (t-2) \sin 4t; \quad 2) \frac{1-\cos 2t}{t} e^{-t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 4, \\ t^2, & t > 4. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 3y' = \eta(t-2), y(0) = 4, y'(0) = 0;$$

$$2) y'' + y' - 2y = e^{-t}, y(0) = -1, y'(0) = 0;$$

$$3) y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{\operatorname{ch}^2 t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = x + 3y + 3, \\ y' = x - y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)y(t)dt.$$

Варіант 28

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2^{-n}}{n^5 + 3n^2 + 1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2 + (-1)^n)}{\ln(1 + n)};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}; \quad 4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1} \sqrt{n^2 + 5}}{(n-1)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{n+1}{n}^{n^2}; \quad 6) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n+1}{5n^2 \ln(n-2)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln 1 + \frac{1}{n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+7)^n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n^3}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{5^n (x+4)^n}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 56n - 33}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n - 3^n}{21^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{tg}^n x}{n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n+2}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{7}{12 - x - x^2}, x_0 = 0;$$

$$2) e^{-2x^2}, x_0 = 0; \quad 3) \sin 2x, x_0 = 2;$$

$$4) y(x) : y' = 2 \cos x + xy, y(0) = 0 \text{ (â } x^3 \text{)}.$$

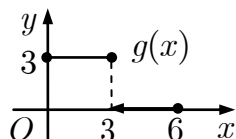
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^4(n+3)}; \quad 2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 6;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 2x - 11, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 3 + 4x^2, x \in (0; \pi) \text{ сà êî ñëí óñàì è};$$

$$4) f(x) = 3 + 4x^2, x \in (0; \pi) \text{ сà ñëí óñàì è}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 4 - 2|t|, |t| \leq 2; f(t) = 0, |t| > 2$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{-128 - 128\sqrt{3}i}; 2) \operatorname{sh} 2 - \pi i; 3) \operatorname{Arctg} \frac{3\sqrt{3} + 8i}{7}.$$

8. Зобразити множину точок

$$z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1, \arg z \leq \frac{\pi}{4}, \arg(z - 1) > \frac{\pi}{4}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = -2xy - 2y, f(0) = i$

10. Обчислити інтеграл $\int_L z \bar{z} dz$, де L :

$$1) z = t + 2it, 0 \rightarrow 1 + 2i; 2) [0; 1] \cup [1; 1 + 2i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{6z + 144}{72z^2 + 6z^3 - z^4}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{2z}{z^2 + 4}, z_0 = 3 + 2i; 3) z \sin \pi \frac{z-1}{z-2}, z_0 = 2.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\sin z^4 - z^4}{\operatorname{sh} z - z - \frac{1}{6}z^3}, z_0 = 0; 2) \frac{\cos \pi z}{(4z^2 - 1)(z^2 + 1)}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z \cos z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=2} z^3 \cos \frac{2i}{z} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0,2} \frac{\operatorname{ch} 2z - \cos 2z}{z^2 \sin 8z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{2} \sin t + 3};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + 7x^2 + 12} dx; \quad 6) \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x - \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t(e^{-t} + \operatorname{sh} t); 2) \frac{1 - \operatorname{ch} t}{t} e^{-t}; 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 6, \\ 3t^3, & t > 6. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 4y = 2\eta(t - 2) - \eta(t - 1),$$

$$y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) y'' - 2y' = e^t(t^2 + t - 3), y(0) = y'(0) = 2;$$

$$3) y'' - 4y = \operatorname{th}^2 2t, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = -x + 3y + 2, \\ y' = x + y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^{-x} + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 y(t) dt.$$

Варіант 29

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\ln^2 n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(-1)^n}{\sqrt{n(2+n^2)}};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt[3]{n}}{3^n + 2};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n+2}}{5^n}; \quad 6) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{\frac{3}{2}n^2 + 2 \ln \frac{n}{2}};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2+1}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 - 12n - 35}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 8^n}{24^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)x^{n+1}}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) (2 - e^x)^2, x_0 = 0;$$

$$2) 2^{-x^2}, x_0 = 0; \quad 3) \ln(5x+3), x_0 = 1;$$

$$4) y(x) : y' = x^2 + e^y, y(0) = 0 \text{ (âî } x^3).$$

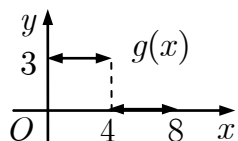
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{(n^3+1)^2}; \quad 2) \int_0^{0.5} e^{-3x^2/25} dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 8;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 3 - 8x, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 4 - 3x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà êî ñëí õñàì è;}$$

$$4) f(x) = 4 - 3x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà ñëí õñàì è.}$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = e^{-5t}, t \geq 0; f(t) = 0, t < 0$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{\frac{i}{27}}; \quad 2) (-i)^{5i}; \quad 3) \operatorname{Arccos}(-3i).$$

8. Зобразити множину точок

$$z \in \mathbb{C} \mid |z-i| < 1, \arg z \geq \frac{\pi}{4}, \arg(z+1-i) \leq \frac{\pi}{4}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = 2xy - 2y, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L (2\bar{z} + 3)dz$, де L :

$$1) z = t + i \cos t, i \rightarrow \frac{\pi}{2}; \quad 2) [i; 0] \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{13z + 388}{2z^3 - 13z^2 - 169z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{2z}{z^2 - 4}, z_0 = -1 + 3i;$$

$$3) z \cos \frac{z}{z-5}, z_0 = 5.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) z \cos \frac{2}{z^3}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{\sin 3z}{z(1 - \cos z)}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-\pi i|=2} \frac{\cos^2 z}{z \sin z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1/3} \frac{e^z - \sin z}{z^2} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} iz - \sin iz}{z^2 \operatorname{sh} \frac{z}{3}} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{3} \sin t + 4};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 10x + 29)^2}; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + x) \sin x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) (t-4) \sin 3t; \quad 2) \frac{1-e^{4t}}{t} e^{-4t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 8, \\ 3t^4, & t > 8. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 9y = \eta(t-3), y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) y'' + y = 2 \cos t, y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$3) y'' + 2y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 3y, \\ y' = 3x + 1, \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t) e^{x-t} y(t) dt.$$

Варіант 30

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=0}^{\infty} (3n+2) \sin \frac{1}{n+1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2 \sin^2 n}; \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2 \sqrt[3]{n}+5}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}; \\ 5) \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \frac{n-2}{2n+1}^{3n}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1) \ln n}; \\ 7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right); \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n}; \\ 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{2^n}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x-3)^n}{(n^4+1)^2}. \end{aligned}$$

2. Знайти суму ряду:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2+7n-12}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n-3^n}{24^n}; \\ 3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n(n-1)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)x^n. \end{aligned}$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$\begin{aligned} 1) (x-1) \operatorname{ch} x, x_0 = 0; \\ 2) \frac{1}{x+5}, x_0 = 2; \quad 3) 3^{x^3}, x_0 = 0; \\ 4) y(x) : y' = x^2 + y, y(0) = 1 \text{ (âî } x^3). \end{aligned}$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+n^4}; \quad 2) \int_0^1 \sin x^3 dx.$$

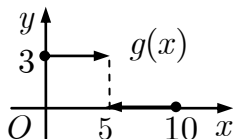
5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$\begin{aligned} 1) f(x) = g(x), T = 10; \\ 2) f(x) = \begin{cases} 7x-1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases} \\ 3) f(x) = 4 + 3x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà êî ñëí òñàì è; } \\ 4) f(x) = 4 + 3x^2, x \in (0; \pi) \text{ çà ñëí òñàì è. } \end{aligned}$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 2 \operatorname{sgn} t, |t| \leq 3; f(t) = 0, |t| > 3$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.



7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{256}; \quad 2) (-1)^{4i}; \quad 3) \operatorname{Arcsin} 4.$$

8. Зобразити множину точок

$$z \in \mathbb{C} \mid |z-2-i| \geq 1, 1 \leq \operatorname{Re} z < 3, 0 < \operatorname{Im} z \leq 3.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 - x, f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L (z^2 - |z|^2) dz$, де L :

$$1) z = t + 2it, 0 \rightarrow 1 + 2i; \quad 2) [0; 1] \cup [1; -2i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$\begin{aligned} 1) \frac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}, z_0 = 0; \\ 2) \frac{2z}{z^2-4}, z_0 = 2+2i; \quad 3) ze^{z/(z-4)}, z_0 = 4. \end{aligned}$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\cos \frac{1}{2} z^4}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{1}{2} z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{2z - \sin 2z}{z^2(z^2+1)}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$\begin{aligned} 1) \oint_{|z-3/2|=2} \frac{z^3 + \sin 2z}{(z-\pi) \sin \frac{z}{2}} dz; \quad 2) \oint_{|z|=3} \frac{2z^3 + 3z^2 - 2}{2z^5} dz; \\ 3) \oint_{|z|=0,3} \frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{2} \sin t + 5}; \\ 5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+11)^2} dx; \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+x) \cos x}{x^4+13x^2+36} dx. \end{aligned}$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t); \quad 2) \frac{e^t - t - 1}{t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 10, \\ 5t^5, & t > 10. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 2y' = \eta(t-1), y(0) = y'(0) = 1;$$

$$2) y'' - y = 4 \sin t + 5 \cos 2t,$$

$$y(0) = -1, y'(0) = -2;$$

$$3) y'' + y' = \frac{1}{(1+e^t)^2}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = x - y, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = x + 2 \int_0^x [(x-t) - \sin(x-t)] y(t) dt.$$