Теореми розкладання

Теорема 3. Перша теорема розкладання. ○

Нехай функція $F(p)$ аналітична в деякому кільці $|p| > R$ і $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$, а її розклад в цьому кільці в ряд Лорана має вигляд

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}.$$

Тоді оригіналом функції $F(p)$ є функція

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} t^n . \bullet$$

Наприклад:

П1. Знайдемо оригінал $f(t)$, якщо $F(p) = \sin\frac{1}{p}$. Маємо розклад

$$\sin\frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3!\,p^3} + \frac{1}{5!\,p^5} - \dots ,$$

тобто $F(p)$ задовольняє умови першої теореми розкладання (теореми 3). Тому

$$f(t) = 1 - \frac{1}{3!}\frac{t^2}{2!} + \frac{1}{5!}\frac{t^4}{4!} - \dots . \square$$

Теорема 4. Друга теорема розкладання. ○

Нехай функція $F(p)$ аналітична в усій комплексній площині, за виключенням скінченного числа ізольованих особливих точок p_1, p_2, …, p_m, розташованих в півплощині $\operatorname{Re} p < \alpha_0$. Якщо $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$ і $F(p)$ абсолютно інтегрована вздовж будь-якої вертикальної прямої $\operatorname{Re} p = \alpha$, $\alpha > \alpha_0$, то $F(p)$ є зображенням функції

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{p=p_k}\left(F(p)e^{pt}\right). \bullet$$

Наслідок 1. ○

Нехай функція $F(p)$ є нескоротний правильний раціональний дріб:

$$F(p) = \frac{A_n(p)}{B_m(p)},$$

де $A_n(p)$ і $B_m(p)$ – многочлени степеня n і m, причому $m > n$, і нехай

$$B_m(p) = (p-p_1)^{m_1}(p-p_2)^{m_2}\dots(p-p_l)^{m_l}, \quad m_1 + m_2 + \dots + m_l = m,$$

тобто p_1, p_2, …, p_l – нулі знаменника $B_m(p)$ кратності m_1, m_2, …, m_l відповідно. Тоді оригінал, що відповідає зображенню $F(p)$ дорівнює

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(m_k-1)!}\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\left((p-p_k)^{m_k}F(p)e^{pt}\right). \bullet$$

Або, обчисливши похідну, отримаємо

Наслідок 2. ○

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_k} \frac{t^{m_k-j}e^{p_k t}}{(m_k-j)!(j-1)!} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}}\left((p-p_k)^{m_k}F(p)\right). \bullet$$

Зокрема,

Наслідок 3. ○

Якщо всі полюси $F(p)$ прості, тобто $B_m(p) = (p - p_1)(p - p_2)...(p - p_m)$, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_n(p_k)}{B'_m(p_k)} e^{p_k t}. \bullet$$

Розв'язок диференціальних рівнянь

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} x`(t) + a_n x(t) = f(t)$$

де a_k *-дійсні* числа.

Потрібно знайти рішення даного диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам

x (0) = x $_0$*, x `(0) = x`* $_0$*, ..., x* $^{(n-1)}$ *(0) = x* $_0^{(n-1)}$

де *x* $_0$*, x* $_{`0}$*, ..., x* $_0^{(n-1)}$ - задані числа.

Будемо припускати, що шукана функція *x (t),* всі її похідні, а також функція *f (t)* є оригіналами.

Нехай $x(t) \leftarrow X(p), f(t) \leftarrow F(p)$. За формулами диференціювання оригіналів

$$x`(t) \leftarrow pX - x_0$$

$$x``(t) \leftarrow p^2 X - px_0 - x`_0$$

...

$$x^{(n-1)}(t) \leftarrow p^{n-1}X - p^{n-2}x_0 - \ldots - x_0^{(n-2)}$$

$$x^{(n)}(t) \leftarrow p^n X - p^{n-1}x_0 - \ldots - x_0^{(n-1)}$$

Перейдемо від даного диференціального рівняння до рівняння в зображеннях

$$p^n X - p^{n-1}x_0 - \ldots - x_0^{(n-1)} + a_1(p^{n-1}X - p^{n-2}x_0 - \ldots - x_0^{(n-2)}) + \ldots +$$

$$+ a_{n-1}(pX - x_0) + a_n X = F$$

Перепишемо його так $Q_n(p)X(p) = F(p) + R_{n-1}(p)$,

Де $Q_n(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n$,

А $R_{n-1}(p) = p^n + \ldots + x_0^{(n-1)} + a_1(p^{n-1} + \ldots + x_0^{(n-2)}) + \ldots + a_{n-1}x_0$

Знаходимо так зване *операторний рішення рівняння*

$$X(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}$$

Знайшовши оригінал *x (t)* за його зображенню *X (p),* ми отримаємо тим самим рішення задачі Коші для вихідного диференціального рівняння.