степеневих рядів.

9. Ряд Тейлора. Розклад функції в степеневий ряд. Єдиність розкладу. Необхідна та достатня умови розкладу функції в ряд Тейлора. Ряди Маклорена для основних елементарних функцій $e^x, \sin x, \cos x, shx, chx, \ln(1+x)$.

❶ ***Тейлорів ряд.*** Нехай функція $f(x)$ в деякому околі точки $x_0$ має похідні всіх порядків. Степеневий ряд:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

називають *Тейлоровим рядом* функції $f(x)$ із центром у точці $x_0$.

Частковою сумою Тейлорового ряду є *Тейлорів многочлен*:

$$\tilde{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \Leftrightarrow f(x) = \tilde{P}_n(x) + R_n(x),$$

де $R_n(x)$ — залишок ряду.

Якщо функція $f(x)$ є сумою степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, то кажуть, що вона *розвивається* за степенями $(x - x_0)$.

❷ ***Критерій збіжності Тейлорового ряду.*** Тейлорів ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

збігається до функції $f(x)$ в інтервалі збіжності $I$ тоді й лише тоді, коли в цьому інтервалі функція $f(x)$ має похідні всіх порядків та

$$\forall x \in I : \lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

❸ ***Теорема єдиності.*** Якщо функція $f(x)$ розвивається у степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n,$$

в околі точки $x_0$, то це розвинення єдине і одержаний ряд є Тейлоровим рядом функції $f(x)$ із центром у точці $x_0$.

❹ ***Достатня умова збіжності Тейлорового ряду.*** Якщо функція і її похідні будь-якого порядку обмежені в околі точки $x_0$ однією і тією самою сталою $K$, то Тейлорів ряд функції $f(x)$ збігається до функції $f(x)$ для будь-якого $x$ з цього околу.

### 12.7. Тейлорові розвинення деяких елементарних функцій з центром у точці $x = 0$

| | |
|---|---|
| ❶ $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| ❷ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| ❸ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| ❹ $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| ❺ $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$ | $x \in \mathbb{R}$ |

❾ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$

$x \in (-1; 1].$

## 10. Ряди Маклорена для $(1+x)^{\alpha}$, $\arcsin x$, $\operatorname{arc} tg x$.

❻ $(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ...,$

$|x| < 1$

**Докажем формулу (64.7).** Пусть $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

❑ Имеем:

а) $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, $\ldots$, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$, $\ldots$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$, $\ldots$, $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$, $\ldots$;

в) $(1+x)^{\alpha} \sim 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$
$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots;$

г) $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))\cdot(n+1)!}{n!\cdot\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))(\alpha-n)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1$, т. е. составленный для функции $(1+x)^{\alpha}$ ряд сходится в интервале $(-1; 1)$.

Можно показать, что и в данном случае, т. е. при $x \in (-1; 1)$, остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. ■

Ряд (64.7) называется *биномиальным*. Если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то все члены ряда с $(n+1)$-го номера равны 0, так как содержат множитель $\alpha - n = n - n = 0$. В этом случае ряд (64.7) представляет собой известную формулу бинома Ньютона:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}x^n.$$

---

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (64.11)$$

$$\cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \qquad x \in [-1; 1], \quad (64.12)$$

**Докажем формулу (64.12).** Пусть $f(x) = \arcsin x$.



❑ Положив в формуле (64.7) $\alpha = -\frac{1}{2}$ и заменив $x$ на $(-x^2)$, получим равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots, \quad x \in [-1; 1].$$

Тогда

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^x dt + \int_0^x \frac{t^2}{2}\,dt + \int_0^x \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4\,dt + \ldots,$$

или

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots$$

Можно показать, что полученное равенство справедливо при всех $x \in [-1; 1]$. ■

⑩ $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$

$x \in [-1;1]$

**Докажем формулу (64.10).** Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

❑ Положив в формуле (64.7) $\alpha = -1$ и заменив $x$ на $x^2$, получим равенство

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \ldots, \quad x \in (-1;1).$$

Тогда

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x 1\,dt - \int_0^x t^2\,dt + \int_0^x t^4\,dt - \ldots + \int_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt + \ldots,$$

или

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Можно показать, что равенство справедливо и при $x = \pm 1$, т. е. при всех $x \in [-1;1]$. ■

11. Степеневі ряди з комплексними членами. Основні функції комплексної змінної та їх властивості.

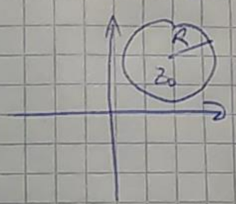
Степеневі ряди з комплексними членами

Озн. $\sum c_n (z-z_0)^n$, де коефіцієнти $c_n$: $c_n = a_n + i b_n$;

$a_n, b_n$ - дійсні числа.

$z = x + iy$ - комплексна змінна

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$$




$|z - z_0| < R$.

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < R^2$;

В комплексній площині елементарні ф-ї

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad R = \infty;$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos z = \sum_{0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \quad R = \infty$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

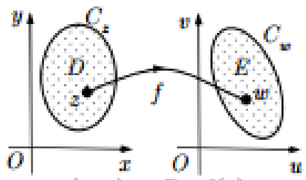
$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k; \\ -i, & n = 4k-1; \\ -1, & n = 4k-2; \\ i, & n = 4k-3; \end{cases}$$

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \ldots$$

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^2}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)}\right) +$$

$$+ i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right).$$

## 13.1. Основні поняття про функції комплексної змінної

| | |
|---|---|
| ❶ ***Область.*** Зв'язну відкриту множину точок комплексної площини називають *областю*. | Область називають *однозв'язною*, якщо її межа є зв'язною множиною, інакше область називають *багатозв'язною*. |
| ❷ ***Відкритий круг*** радіусом $R$ з центром у точці $z_0$ | $\lvert z - z_0 \rvert < R$ |
| ❸ ***Межа множини.*** Точку $z$ називають ***межовою*** точкою множини $D$, якщо будь-який її окіл містить як точки, які належать множині $D$, так і точки, які їй не належать. | Сукупність межових точок множини називають ***межею*** множини $D$ і позначають $\partial D$. |
| ❹ ***Комплексна функція.*** Якщо кожному комплексному числу $z$, що належить області $D$, відповідає одне або кілька комплексних чисел $w \in E$, то кажуть, що в області $D$ означено *комплексну функцію* $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $w \in E, z = x + iy \in D \subset \mathbb{C}$ |   $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ |
| Якщо кожному $z$ відповідає одне значення $w$, то функцію називають *однозначною*, інакше — *багатозначною*. | |
| ❺ ***Границя функції.*** Комплексне число $A$ називають *границею функції* $w = f(z)$ в точці $z_0$ (коли $z \to z_0$), якщо для будь-якого $\varepsilon$-околу точки $A$ можна вказати проколений $\delta$-окіл точки $z_0$, такий що, коли $z \in U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$, то $f(z) \in U_\varepsilon(A)$ і позначають $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.* | ❻ ***Неперервність функції.*** Нехай функція $w = f(z)$ означена в точці $z = z_0$ і в деякому її околі. Функцію $w = f(z)$ називають *неперервною в точці* $z_0$, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Функція $f(z)$ *неперервна в області* $D$, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області. |

## 13.2. Основні елементарні функції комплексної змінної

| | |
|---|---|
| ❶ ***Показникова*** функція | $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ |
| ❷ ***Тригонометричні*** функції | |
| ① $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$;<br>② $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$; | ③ $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$;<br>④ $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ |
| ❸ ***Гіперболічні*** функції | |
| ① $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$;<br>② $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$; | ③ $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$;<br>④ $\operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$ |
| ❹ ***Логарифмічна*** функція* | $\operatorname{Ln} z = \ln\lvert z\rvert + i\operatorname{Arg} z$<br>$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k i$,<br>$\arg z \in (-\pi; \pi], k \in \mathbb{Z}$ |
| ❺ ***Головне*** значення логарифма | $\ln z = \ln\lvert z\rvert + i\arg z$ |
| ❻ ***Узагальнені показникова*** і ***степенева*** функції | $a^z = e^{z\operatorname{Ln} a}, a \neq 0, \quad z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ |
| ❼ ***Арксинус*** | $\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$ |
| ❽ ***Арккосинус*** | $\operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ |
| ❾ ***Арктангенс*** | $\operatorname{Arctg} z = -\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{i - z}{i + z}$ |
| ❿ ***Арккотангенс*** | $\operatorname{Arcctg} z = \dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{z - i}{z + i}$ |
| ⓫ ***Ареасинус*** | $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$ |
| ⓬ ***Ареакосинус*** | $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ |
| ⓭ ***Ареатангенс*** | $\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1 + z}{1 - z}$ |
| ⓮ ***Ареакотангенс*** | $\operatorname{Arcth} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{z + 1}{z - 1}$ |

## 13.3. Властивості основних елементарних функцій

| | | |
|---|---|---|
| ❶ ***Властивості показникової функції**** | | |
| ① $\lvert e^z\rvert = e^x, \operatorname{Arg} e^z = y + 2\pi k$; | ② $e^{z+2\pi k i} = e^z, k \in \mathbb{Z}$;<br>③ $e^{2\pi i} = 1, e^{\pi i} = -1, e^{\pm\pi i/2} = \pm i$ | |
| ❷ Властивості логарифмічної функції | | |
| ① $\operatorname{Re}\operatorname{Ln} z = \ln\lvert z\rvert, \operatorname{Im}\operatorname{Ln} z = \operatorname{Arg} z$; | ② $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi k i, k \in \mathbb{Z}$ | |
| ❸ ***Властивості тригонометричних функцій**** | | |
| ① $\operatorname{Re}\sin z = \sin x \operatorname{ch} y$,<br>$\operatorname{Im}\sin z = \cos x \operatorname{sh} y$;<br>② $\operatorname{Re}\cos z = \cos x \operatorname{ch} y$,<br>$\operatorname{Im}\cos z = -\sin x \operatorname{sh} y$; | ③ $\cos(z + 2\pi k) = \cos z$;<br>④ $\sin(z + 2\pi k) = \sin z$;<br>⑤ $\operatorname{tg}(z + \pi k) = \operatorname{tg} z$;<br>⑥ $\operatorname{ctg}(z + \pi k) = \operatorname{ctg} z$ | $k \in \mathbb{Z}$ |
| ❹ ***Властивості гіперболічних функцій*** | | |
| ① $\operatorname{Re}\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y$,<br>$\operatorname{Im}\operatorname{sh} z = \operatorname{ch} x \sin y$;<br>② $\operatorname{Re}\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y$,<br>$\operatorname{Im}\operatorname{ch} z = -\operatorname{sh} x \sin y$; | ③ $\operatorname{ch}(z + 2\pi k i) = \operatorname{ch} z$;<br>④ $\operatorname{sh}(z + 2\pi k i) = \operatorname{sh} z$;<br>⑤ $\operatorname{th}(z + \pi k i) = \operatorname{th} z$;<br>⑥ $\operatorname{cth}(z + \pi k i) = \operatorname{cth} z$ | $k \in \mathbb{Z}$ |
| ❺ ***Співвідношення*** між тригонометричними і гіперболічними функціями | | |
| ① $\cos iz = \operatorname{ch} z, \operatorname{ch} iz = \cos z$;<br>② $\sin iz = i\operatorname{sh} z, \operatorname{sh} iz = i\sin z$; | ③ $\operatorname{tg} iz = i\operatorname{th} z, \operatorname{th} iz = i\operatorname{tg} z$;<br>④ $\operatorname{ctg} iz = -i\operatorname{cth} z, \operatorname{cth} iz = -i\operatorname{ctg} z$ | |