Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут”

Елементи лінійної алгебри

Факультет інформатики та обчислювальної техніки

Лекції 1–5

Викладач - к. ф.-м. н., асистент
Руновська Марина Костянтинівна

2012

1 Матриці та дії над ними

1.1 Основні означення.

Означення 1.1. *Матрицею* називається прямокутна таблиця $m \cdot n$ чисел, що містить m рядків та n стовпців:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mj} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриці позначаються великими латинськими літерами: A, B, C,..., та скорочено записуються наступним чином: $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$, або $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$. Числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, називаються елементами матриці A. Елемент a_{ij} знаходиться у i-му рядку та j-му стовпці.

Приклад 1.1. Розглянемо матрицю $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$. Вона має 2 рядки та 3 стовпці. Елемент $a_{21} = 1$ знаходиться у другому рядку та першому стовпці.

Означення 1.2. Матриця називається *нульовою*, якщо всі її елементи дорівнюють нулю. Позначається $O_{m\times n}$.

Приклад 1.2. Нульова матриця розміру 3×2: $O_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Означення 1.3. Матриця називається *квадратною*, якщо кількість стовпців цієї матриці дорівнює кількості її рядків, тобто $m = n$. Квадратну матрицю розміру $n \times n$ називають матрицею порядку n та позначають A_n:

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Числа $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ утворюють *головну діагональ* квадратної матриці A_n, а числа $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{n1}$ утворюють *побічну діагональ* матриці A_n.

Означення 1.4. Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи окрім елементів головної діагоналі дорівнюють нулю.

Приклад 1.3. Діагональна матриця третього порядку:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1,2 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Означення 1.5. Діагональна матриця називається *одиничною*, якщо всі елементи головної діагоналі цієї матриці дорівнюють одиниці.

Одиничні матриці позначають літерами E або I.

Приклад 1.4. Одинична матриця порядку n:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Означення 1.6. Квадратна матриця називається *верхньою трикутною* (*нижньою трикутною*), якщо всі її елементи нижче (вище) головної діагоналі, рівні нулю.

Приклад 1.5. Розглянемо 2 матриці 4-го порядку:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 90 \\ 0 & 0 & 24 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}, \qquad B_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & -5 & 0 \\ 22 & 10 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Матриця A є верхньою трикутною матрицею, а матриця B є нижньою трикутною матрицею.

Означення 1.7. Елемент рядку матриці $A_{m\times n}$ називається крайнім, якщо він відмінний від нуля, а всі елементи цього рядку, які знаходяться зліва від нього, дорівнюють нулю.

Означення 1.8. Матриця $A_{m\times n}$ називається *східчастою*, якщо крайній елемент кожного рядку знаходиться справа від крайнього елемента попереднього рядку.

Приклад 1.6. Східчаста матриця розміру 3×4:

$$A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Елементи $a_{11} = 5$, $a_{23} = -7$, та $a_{34} = 16$, є крайніми елементами 1-го, 2-го та 3-го рядків відповідно.

Означення 1.9. Матриця, яка містить один рядок (стовпець), називається *матрицею-рядком* або вектор-рядком (*матрицею-стовпцем* або вектор-стовпцем).

Приклад 1.7. Матриця A є матрицею-рядком, що містить n елементів, а матриця B є матрицею-стовпцем, що містить m елементів:

$$A_{1\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}, \qquad B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}.$$

1.2 Дії над матрицями.

I. Рівність матриць. (Вводиться тільки для матриць однакового розміру.)

Означення 1.10. Матриці $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ та $B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ називаються рівними між собою, якщо всі відповідні елементи цих матриць рівні між собою, тобто $A = B$, якщо $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

II. Додавання (віднімання) матриць. (Вводиться тільки для матриць однакового розміру.)

Означення 1.11. Сумою (різницею) матриць $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ та $B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ називається матриця $C_{m\times n} = \left(c_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$, кожен елемент якої дорівнює сумі (різниці) відповідних елементів матриць A та B, тобто

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}), \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Позначається: $C = A + B$, $\quad (C = A - B)$.

Приклад 1.8. Нехай задано матриці: $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$, та $B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -1 & -6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Тоді
$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & -3 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}, \qquad A - B = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -1 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

III. Множення матриці на число. (Вводиться для будь-яких матриць.)

Означення 1.12. Добутком матриці $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$, називається матриця $C_{m\times n} = \left(c_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$, кожен елемент якої дорівнює добутку кожного елемента матриці A на число λ, тобто

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Приклад 1.9. Для матриці $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$ та числа $\lambda = 4$:

$$\lambda A = 4A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \\ 40 & 36 \end{pmatrix}.$$

Означення 1.13. Лінійною комбінацією матриць $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ та $B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ називається матриця $\alpha A + \beta B$, де α та β - деякі числа з $\mathbb{R}$.

Означення 1.14. Матриця $-A = (-1) \cdot A$ називається протилежною до матриці A.

Сформулюємо основні властивості операцій додавання матриць та множення матриці на число.

Теорема 1.1. *Для довільних матриць $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$, $C_{m\times n}$, та чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується:*

1) *комутативність додавання матриць:* $A + B = B + A$;
2) *асоціативність додавання матриць:* $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3) $A + O = O + A = A$;
4) $A + (-A) = (-A) + A = O$;
5) $1 \cdot A = A$;
6) *дистрибутивність множення на число щодо додавання матриць:* $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;
7) *дистрибутивність множення матриці на число щодо додавання чисел:* $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
8) *асоціативність множення матриці на число:* $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

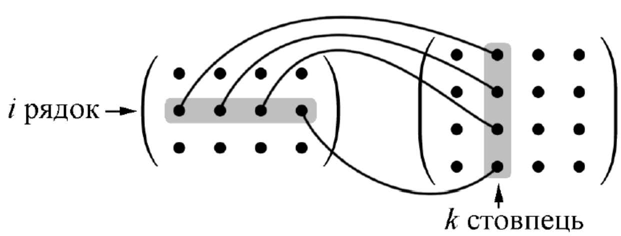
Доведення. Всі властивості операцій додавання матриць та множення на число випливають безпосередньо з означень цих операцій та властивостей операцій додавання дійсних чисел. $\square$

IV. Множення матриць. (Вводиться тільки для *узгоджених* матриць, тобто таких, що число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці.)

Означення 1.15. Добутком матриць $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ та $B_{n\times p} = \left(b_{jk}\right)_{j,k=1}^{n,p}$ називається матриця $C_{m\times p} = \left(c_{ik}\right)_{i,k=1}^{m,p}$, кожен елемент якої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи k-го стовпця матриці B, тобто

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk}, \quad i = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,p}.$$

Схематично це можна проілюструвати наступним чином:



Приклад 1.10. Для матриць $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$, та $B_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} 0\cdot 3 + 1\cdot(-1) & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 2 + 1\cdot 7 & 0\cdot(-1) + 1\cdot(-5) \\ -2\cdot 3 + 3\cdot(-1) & -2\cdot 1 + 3\cdot 0 & -2\cdot 2 + 3\cdot 7 & -2\cdot(-1) + 3\cdot(-5) \\ 10\cdot 3 + 9\cdot(-1) & 10\cdot 1 + 9\cdot 0 & 10\cdot 2 + 9\cdot 7 & 10\cdot(-1) + 9\cdot(-5) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 & -5 \\ -9 & -2 & 17 & -13 \\ 21 & 10 & 83 & -55 \end{pmatrix} = C_{3\times 4}.$$

Сформулюємо основні властивості операції добутку матриць.

Теорема 1.2. *Для довільних матриць A, B, C, та числа $\alpha \in \mathbb{R}$ виконується:*
1) *асоціативність добутку матриць:* $A_{m\times n} \cdot (B_{n\times p} \cdot C_{p\times r}) = (A \cdot B) \cdot C$;
2) *дистрибутивність множення матриць щодо додавання:* $A_{m\times n}(B_{n\times p} + C_{n\times p}) = AB + AC$;
3) *множення на одиничну матрицю:* $A_{m\times n} \cdot E_n = E_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$;
4) *множення на нульову матрицю:* $A_{m\times n} \cdot O_{n\times p} = O_{m\times p}$, $O_{l\times m} \cdot A_{m\times n} = O_{l\times n}$;
5) *асоціативність множення матриць щодо множення на число:* $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$.

Доведення. Всі властивості безпосередньо випливають з означення операції множення матриць. □

Означення 1.16. Матриці A та B називаються *комутуючими* або *переставними*, якщо $AB = BA$.

Зауваження 1.1. В загальному випадку $AB \neq BA$.

Приклад 1.11. Нехай задано матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, та $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

звідки випливає, що $AB \neq BA$.

Зауваження 1.2. З того, що $AB = O$ не випливає, що $A = O$ або $B = O$. Зокрема, з того, що $A^2 = A \cdot A = O$ не обов'язково $A = O$.

Приклад 1.12. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, маємо $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$.

V. Піднесення до степеню. (Вводиться тільки для квадратних матриць.)

Означення 1.17. Натуральним степенем k квадратної матриці A називається квадратна матриця A^k, яка задається співвідношенням

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k}.$$

Для $k = 0$ вважають $A_n^0 = E_n$.

Означення 1.18. Нехай є многочлен $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ та квадратна матриця A. Многочленом p від матриці A називається матриця $p(A)$, яка задається співвідношенням

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A_{n-1} + ... + a_1 A + a_0 E,$$

де E — одинична матриця того ж самого порядку, що і матриця A.

VI. Транспонування. (Вводиться для будь-яких матриць.)

Означення 1.19. Транспонування — перехід від матриці $A = A_{m\times n}$ до матриці $A^T = (A^T)_{n\times m}$, при якому рядки та стовпці матриці міняються місцями зі збереженням порядку, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

При цьому, матриця A^T називається *транспонованою* до матриці A.

Приклад 1.13. До матриці $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$ транспонованою буде матриця

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 10 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Сформулюємо властивості операції транспонування.

Теорема 1.3. *Для довільних матриць A, B та числа $\alpha \in \mathbb{R}$ виконується:*

1) $\left(A^T\right)^T = A$;

2) $\left(A_{m\times n} + B_{m\times n}\right)^T = A^T + B^T$;

3) $\left(\alpha A\right)^T = \alpha A^T$;

4) $\left(A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}\right)^T = B^T \cdot A^T$;

Доведення. Всі властивості операції транспонування випливають безпосередньо з означення операції транспонування. □

Означення 1.20. Квадратна матриця A називається *симетричною*, якщо $A^T = A$, і *кососиметричною*, якщо $A^T = -A$.

1.3 Елементарні перетворення матриць.

Означення 1.21. *Елементарними перетвореннями* матриці $A_{m\times n}$ є:
— перестановка місцями двох рядків (стовпців);
— множення всіх елементів деякого рядка (стовпця) на число відмінне від нуля;
— додавання до елементів деякого рядка (стовпця) елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число.

Означення 1.22. Матриці $A_{m\times n}$ та $B_{m\times n}$ називаються *еквівалентними*, якщо одна з них може бути отримана з іншої за допомогою елементарних перетворень. Позначається: $A \sim B$.

За допомогою елементарних перетворень будь-яку матрицю можна звести до східчастого вигляду.

Приклад 1.14. Зведемо матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ до східчастого вигляду. Отже

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \Big| \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(-3) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \leftarrow + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Визначники

2.1 Визначники 1-го, 2-го та 3-го порядку.

Будь-якій квадратній матриці $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ можна поставити у відповідність число, що називається її *визначником* або *детермінантом* та позначається $\det A$, ΔA, Δ або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Означення 2.1. *Визначником 1-го порядку* матриці $A_1 = (a_{11})$ називається число $\det A = a_{11}$.

Означення 2.2. *Визначником 2-го порядку* матриці $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Приклад 2.1. Обчислимо визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$.

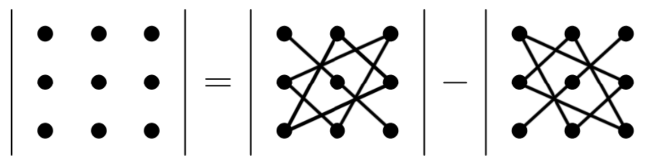
Означення 2.3. *Визначником 3-го порядку* матриці $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}. \quad (2.1)$$

Методи обчислення визначників 3-го порядку.

1) Правило трикутників (Саррюса): зі знаком "+" у формулі (2.1) беруться добуток елементів головної діагоналі та два добутки елементів, які знаходяться у вершинах трикутників з основами, паралельними головній діагоналі; зі знаком "−" у формулі (2.1) беруться добуток елементів побічної діагоналі та два добутки елементів, які знаходяться у вершинах трикутників з основами, паралельними побічній діагоналі. Схематично це можна проілюструвати наступним чином:



2) Правило "дописування стовпців" полягає у дописуванні справа від визначника 1-го та 2-го стовпців зі збереженням порядку. Зі знаком "+" у формулі (2.1) беруться добутки елементів головної діагоналі та паралельних їй; зі знаком "−" у формулі (2.1) беруться добутки елементів побічної діагоналі та паралельних їй.

Приклад 2.2. Обчислимо визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 0.$$

2.2 Поняття визначника n-го порядку.

Перейдемо до введення поняття визначника n-го порядку.

Означення 2.4. *Перестановкою* з n натуральних чисел $(1, 2, 3, ..., n)$ називається довільна впорядкована множина цих чисел. Позначається $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$.

Загальна кількість перестановок з n натуральних чисел: $n!$.

Приклад 2.3. Нехай є множина $(1, 2, 3)$. Всі можливі перестановки множини $(1, 2, 3)$:

$$(1, 2, 3), \quad (1, 3, 2), \quad (2, 1, 3), \quad (2, 3, 1), \quad (3, 1, 2), \quad (3, 2, 1).$$

Означення 2.5. Пара чисел (i, j) у перестановці $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ називається інверсією, якщо $i > j$.

Виберемо з перестановки $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ всі можливі пари зі збереженням порядку. Кількість всіх пар: $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Позначимо через J — кількість всіх інверсій серед вибраних пар.

Приклад 2.4. Нехай є перестановка $(1, 4, 3, 2)$. Всі можливі пари: $(1, 4)$, $(1, 3)$, $(1, 2)$, $(4, 3)$, $(4, 2)$, $(3, 2)$. Серед них є лише 3 інверсії: $(4, 3)$, $(4, 2)$, $(3, 2)$, тобто $J = 3$.

Означення 2.6. *Визначником n-го порядку* матриці $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... a_{n\alpha_n},$$

де сума береться по всім можливим перестановкам з елементів множини $(1, 2, 3, ..., n)$, а J — кількість інверсій у відповідній перестановці.

Зауваження 2.1. Сума містить $n!$ доданків і складається з добутків елементів матриці, взятих по одному з кожного рядка та кожного стовпця.

Означення 2.7. *Мінором* деякого елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, що отримується з даного визначника шляхом викреслювання рядка та стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}. Позначається: M_{ij}.

Означення 2.8. *Алгебраїчним доповненням* до елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається його мінор, взятий за знаком "$+$", якщо число $(i + j)$ – парне, і зі знаком "$-$", якщо число $(i + j)$ – непарне. Позначається: A_{ij}. Таким чином,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Приклад 2.5. Знайдемо мінор та алгебраїчне доповнення до елемента $a_{31} = 7$ визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. Отже,

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -2, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = -2.$$

Означення 2.9. Квадратна матриця A називається *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$. Якщо $\det A = 0$, то матриця A називається *виродженою*.

Теорема 2.1 (**Лапласа про розклад визначника за рядком або стовпцем**). *Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) на відповідні їм алгебраїчні доповнення, тобто*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{ij}A_{ij} + ... + a_{in}A_{in}, \quad i = \overline{1, n},$$

або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{ij}A_{ij} + ... + a_{nj}A_{nj}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Доведення. Для наочності доведемо теорему на прикладі визначника 3-го порядку, вибравши для розкладу 3-ій рядок (для інших рядків (стопців) аналогічно). За означенням

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} =$$

$$= a_{31}(a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22}) - a_{32}(a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{13}) + a_{33}(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) =$$

$$= a_{31} \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33},$$

звідки отримаємо справедливість твердження. □

Для визначника порядку n теорема Лапласа може бути доведена за допомогою методу математичної індукції.

2.3 Властивості визначників.

1) Визначник не змінюється при транспонуванні, тобто $\det(A^T) = \det A$, або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. За означенням

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

де J — кількість інверсій у перестановці $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Розглянемо визначник транспонованої матриці:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} (-1)^{J'} a_{\beta_1 1} a_{\beta_2 2} \dots a_{\beta_n n},$$

де J' — кількість інверсій у перестановці $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Переставимо елементи добутку $a_{\beta_1 1} a_{\beta_2 2} \dots a_{\beta_n n}$ так, щоб індекси рядків $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ стояли у порядку зростання: $(1, 2, \dots, n)$. Тоді індекси стовпців утворять перестановку з елементів множини

$(1, 2, ..., n)$. Таким чином, у правій частині останнього виразу можна брати суму по всім можливим перестановкам $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ індексів стовпців $(1, 2, ..., n)$. Звідси випливає, що визначники рівні. $\square$

Властивість 1) говорить про те, що рядки і стовпці визначника є рівноправними.

2) Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. Нехай в i-му рядку визначника матриці A всі елементи дорівнюють нулю, тобто $a_{ij} = 0$, $j = \overline{1, n}$. Тоді за означенням

$$\det A = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... a_{i\alpha_i} ... a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... \cdot 0 \cdot ... a_{n\alpha_n} = 0,$$

де J — кількість інверсій у перестановці $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. $\square$

3) При перестановці двох рядків (стовпців) місцями визначник змінює знак, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & ... & \mathbf{a_{ij}} & ... & \mathbf{a_{in}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{k1}} & \mathbf{a_{k2}} & ... & \mathbf{a_{kj}} & ... & \mathbf{a_{kn}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{k1}} & \mathbf{a_{k2}} & ... & \mathbf{a_{kj}} & ... & \mathbf{a_{kn}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & ... & \mathbf{a_{ij}} & ... & \mathbf{a_{in}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. За означенням

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & ... & \mathbf{a_{ij}} & ... & \mathbf{a_{in}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{k1}} & \mathbf{a_{k2}} & ... & \mathbf{a_{kj}} & ... & \mathbf{a_{kn}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_i,...,\alpha_k,...,\alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... a_{i\alpha_i} ... a_{k\alpha_k} ... a_{n\alpha_n},$$

де J — кількість інверсій у перестановці $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_k, ..., \alpha_n)$, а

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{k1}} & \mathbf{a_{k2}} & ... & \mathbf{a_{kj}} & ... & \mathbf{a_{kn}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & ... & \mathbf{a_{ij}} & ... & \mathbf{a_{in}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,...,\alpha_i,...,\alpha_n)} (-1)^{J'} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... a_{k\alpha_k} ... a_{i\alpha_i} ... a_{n\alpha_n},$$

де J' — кількість інверсій у перестановці $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n)$. Очевидно, обидві суми складаються з однакових добутків елементів визначника. Помітимо, що перестановки $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_k, ..., \alpha_n)$ та $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n)$ відрізняються лише інверсією 2-х елементів i та k. Таким чином, кількість інверсій J та J' у обох перестановках має різну парність. Звідси випливає справедливість властивості 3). □

4) Якщо визначник має 2 однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & ... & \mathbf{a_{ij}} & ... & \mathbf{a_{in}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & ... & \mathbf{a_{ij}} & ... & \mathbf{a_{in}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. Нехай визначник матриці A має 2 однакових рядки: i-ий та j-ий. Переставимо місцями i-й та j-ий рядки. Тоді за властивістю 3) $\det A = -\det A$, звідки випливає, що $\det A = 0$. □

5) Спільний множник деякого рядка (стовпця) визначника можна винести за знак визначника, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{c \cdot a_{i1}} & \mathbf{c \cdot a_{i2}} & \dots & \mathbf{c \cdot a_{ij}} & \dots & \mathbf{c \cdot a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \mathbf{c} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{ij}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Нехай кожен елемент i-го рядка визначника матриці A має спільний множник c. Тоді за означенням

$$\det A = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots c \cdot a_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n} =$$

$$= c \cdot \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n},$$

що і доводить властивість 5). □

6) Визначник, який містить 2 пропорційних рядки (стовпця), дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{ij}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{ca_{i1}} & \mathbf{ca_{i2}} & \dots & \mathbf{ca_{ij}} & \dots & \mathbf{ca_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. Безпосередньо випливає з властивостей 4) та 5). □

7) Визначник трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів, тобто

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & \mathbf{a_{33}} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \mathbf{a_{nn}} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn}.$$

Доведення. Згідно з теоремою Лапласа поступово розкладаючи визначник за 1-им стовпцем і тим самим понижуючи його порядок, отримаємо

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & \mathbf{a_{33}} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \mathbf{a_{nn}} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{a_{22}} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & \mathbf{a_{33}} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \mathbf{a_{nn}} \end{vmatrix} = ... = a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn},$$

що і доводить властивість 7). □

8) Якщо елементи деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник можна розкласти на суму двох визначників, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{b_{i1}} + \mathbf{c_{i1}} & \mathbf{b_{i2}} + \mathbf{c_{i2}} & ... & \mathbf{b_{in}} + \mathbf{c_{in}} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{b_{i1}} & \mathbf{b_{i2}} & ... & \mathbf{b_{in}} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{c_{i1}} & \mathbf{c_{i2}} & ... & \mathbf{c_{in}} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Нехай кожен елемент i-го рядка визначника матриці A дорівнює сумі двох доданків, тобто $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, $j = \overline{1, n}$. Тоді за означенням

$$\det A = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... a_{i\alpha_i} ... a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... (b_{i\alpha_i} + c_{i\alpha_i}) ... a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... b_{i\alpha_i} ... a_{n\alpha_n} + \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... c_{i\alpha_i} ... a_{n\alpha_n},$$

звідки випливає справедливість властивості 8). □

9) Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{k1}} & \mathbf{a_{k2}} & \dots & \mathbf{a_{kj}} & \dots & \mathbf{a_{kn}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{k1}+ca_{i1}} & \mathbf{a_{k2}+ca_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{kj}+ca_{ij}} & \dots & \mathbf{a_{kn}+ca_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Безпосередньо випливає з властивостей 8) та 6). □

10) Теорема Біне-Коші. Визначник добутку квадратних матриць дорівнює добутку їх визначників, тобто

$$\det(A_n \cdot B_n) = \det A_n \cdot \det B_n.$$

11) Теорема анулювання. Сума добутків елементів рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0, \quad i \neq j.$$

Доведення. Нехай $i \neq j$. Помітимо, що сума $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$ є розкладом визначника

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{il}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{j1}} & \mathbf{a_{j2}} & \dots & \mathbf{a_{jl}} & \dots & \mathbf{a_{jn}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

за j-им рядком, причому кожен елемент j-го рядку дорівнює відповідному елементу i-го рядку, тобто $a_{jl} = a_{il}$, $l = \overline{1,n}$. Отже, визначник містить два однакових рядки, і за властивістю 4), дорівнює нулю. □

Зауважимо, що більшість властивостей визначників можна також довести, використовуючи теорему Лапласа.

3 Обернена матриця. Матричні рівняння. Ранг матриці

3.1 Обернена матриця.

Означення 3.1. Матриця A^{-1} називаються *оберненою* до квадратної матриці A, якщо $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Зауваження 3.1. Матриця A^{-1} має той самий порядок, що і матриця A.

Теорема 3.1 (**про єдиність оберненої матриці**). *Якщо до матриці A існує обернена матриця, то вона єдина.*

Доведення. Доведемо від супротивного. Нехай до матриці A існує дві обернені матриці A_1^{-1} та A_2^{-1}, причому $A_1^{-1} \neq A_2^{-1}$. Тоді

$$A_1^{-1} = A_1^{-1} \cdot E = A_1^{-1} \cdot A \cdot A_2^{-1} = E \cdot A_2^{-1} = A_2^{-1}.$$

Отримане протиріччя доводить теорему. □

Означення 3.2. Матрицею, *приєднаною* до матриці $A_n = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, називається матриця

$$A^* = \Big(A_{ij}\Big)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} матриці A, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Теорема 3.2 (**критерій існування оберненої матриці**). *Матриця A має обернену тоді і тільки тоді, коли вона невироджена* $(\det A \neq 0)$. *При цьому*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*. \tag{3.1}$$

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай матриця A має обернену. Тоді $A \cdot A^{-1} = E$. Звідси $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$. Звідси випливає, що $\det A \neq 0$ та $\det A^{-1} \neq 0$. Таким чином, матриця A є невиродженою.

Доведемо достатність. Нехай матриця A є невиродженою, тобто $\det A \neq 0$. Покажемо, що матриця $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$ є оберненою до матриці A.

Дійсно,

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A \cdot A^* = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 & ... & 0 \\ 0 & \det A & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \det A \end{pmatrix} = E.$$

Остання рівність випливає з теореми Лапласа про розклад визначника за рядком або стовпцем та теореми анулювання (властивість 11) визначників.

Аналогічно перевіряємо, що

$$A^{-1} \cdot A = E.$$

Теорему доведено. □

Приклад 3.1. Знайдемо обернену матрицю до матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Обчислюємо визначник матриці $\det A = 3 \neq 0$. Таким чином, A^{-1} існує. Обчислюємо окремо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Підставляємо отримані значення у формулу (3.1):

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 4 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Властивості оберненої матриці:

1) $\mathbf{E^{-1} = E}$;

Доведення. Випливає з того, що $E \cdot E = E$. □

2) $\det \mathbf{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\det \mathbf{A}}$;

Доведення. Оскільки матриця A^{-1} — обернена до матриці A, то $A^{-1} \cdot A = E$. Тому з властивості 10) визначників випливає, що $\det(A^{-1} \cdot A) = \det(A^{-1}) \cdot \det A$, а з іншого боку, $\det E = 1$. Тому $\det(A^{-1}) \cdot \det A = 1$, звідки $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$. □

3) $\mathbf{(A^{-1})^{-1} = A}$;

Доведення. Ця властивість випливає з того, що $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$. □

4) $\mathbf{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$;

Доведення. Дійсно, $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = (A \cdot A^{-1}) = E$, і навпаки $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = (B \cdot B^{-1}) = E$. Тому матриця $B^{-1} \cdot A^{-1}$ — обернена до матриці $A \cdot B$. □

5) $\mathbf{(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}}$.

Доведення. Дійсно, $(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = E^T = E$, і навпаки $A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = E^T = E$. □

3.2 Матричні рівняння.

1) Розглянемо рівняння відносно невідомої матриці $X = X_{m \times n}$:

$$\mathbf{AX = B}, \tag{3.2}$$

де $A = A_{m \times m}$ та $B = B_{m \times n}$ — відомі матриці. Якщо матриця A є невиродженою ($\det A \neq 0$), то помноживши рівняння (3.2) зліва на матрицю A^{-1}, отримаємо

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

звідки

$$\mathbf{X} = \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{B}.$$

2) Розглянемо рівняння відносно невідомої матриці $X = X_{m\times n}$:

$$\mathbf{XA} = \mathbf{B}, \tag{3.3}$$

де $A = A_{n\times n}$ та $B = B_{m\times n}$ — відомі матриці. Якщо матриця A є невиродженою ($\det A \neq 0$), то помноживши рівняння (3.3) справа на матрицю A^{-1}, отримаємо

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1},$$

звідки

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A^{-1}}.$$

3) Розглянемо рівняння відносно невідомої матриці $X = X_{m\times n}$:

$$\mathbf{AXB} = \mathbf{C}, \tag{3.4}$$

де $A = A_{m\times m}$, $B = B_{n\times n}$ та $C = C_{m\times n}$— відомі матриці. Якщо матриці A та B є невиродженими ($\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$), то помноживши рівняння (3.4) зліва на матрицю A^{-1} та справа на матрицю B^{-1} отримаємо

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1},$$

звідки

$$\mathbf{X} = \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B^{-1}}.$$

Рівняння (3.2) — (3.4) називаються *матричними рівняннями.*

3.3 Ранг матриці.

Розглянемо матрицю

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mj} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Виділимо в ній k рядків та k стовпців.

Означення 3.3. *Мінором* порядку k матриці $A_{m\times n}$ називається будь-який визначник k-го порядку, що складається з елементів матриці, які стоять на перетині виділених k рядків та k стовпців.

Матриця розміру $m \times n$ має всього $C_m^k \cdot C_n^k = \frac{m!}{k!(m-k!)} \cdot \frac{n!}{k!(n-k!)}$ мінорів k-го порядку.

Приклад 3.2. У матриці $A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ є 12 мінорів 1-го порядку, наприклад $M_1^{'} = |11|$, $M_1^{''} = |4|$, і т.д. Серед 18 мінорів 2-го порядку цієї матриці є, наприклад, такі мінори:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix},$$

та інші. Мінорів 3-го порядку у матриці 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{vmatrix}.$$

Означення 3.4. *Рангом* матриці $A_{m\times n}$ називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля. Позначається: r, $r(A)$ або $rang(A)$.

Означення 3.5. Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається *базисним.*

У матриці може бути декілька базисних мінорів.

Приклад 3.3. Знайдемо ранг матриці $A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. У матриці A існує мінор, наприклад $|2| \neq 0$. Звідси випливає, що $r(A) \geq 1$. У матриці є мінор 2-го порядку $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$. Звідси випливає, що $r(A) \geq 2$. Але всі мінори 3-го порядку матриці A дорівнюють нулю. Таким чином, $r(A) = 2$.

Властивості ранга матриці:

1) $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$, де $\min(m, n)$ — найменше з чисел m та n;

2) $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли всі елементи матриці A дорівнюють нулю.

3) Для квадратної матриці порядку n, $r(A) = n$ тоді і тільки тоді, коли матриця A є невиродженою.

4) При транспонуванні матриці її ранг не змінюється.

5) Якщо викреслити з матриці нульовий рядок (стовпець), її ранг не зміниться.

6) Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях матриці.

7) Ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків.

Методи обчислення ранга матриці.

I) Метод обвідних мінорів полягає у обчисленні мінорів матриці, які вибираються певним чином.

Означення 3.6. *Обвідним* мінором до мінора порядку k матриці $A_{m\times n}$ називається мінор $(k+1)$-го порядку цієї матриці, який цілком містить даний мінор порядку k.

1 крок. Якщо матриця нульова, то $r(A) = 0$, інакше $r(A) \geq 1$, і переходимо до наступного кроку.

2 крок. Знаходимо у матриці мінор 2-го порядку M_2, відмінний від нуля. Якщо такого мінора немає, то $r(A) = 1$, і пошук припиняємо. Інакше $r(A) \geq 2$, і переходимо до наступного кроку.

3 крок. Обчислюємо всі мінори 3-го порядку, обвідні до M_2. Якщо серед них немає мінорів відмінних від нуля, то $r(A) = 2$, і пошук припиняємо. Інакше, існує мінор M_3 не рівний нулю. В цьому випадку $r(A) \geq 3$, і процедуру продовжуємо.

Продовжуємо процедуру.

k крок. Нехай знайдено мінор $(k-1)$-го порядку M_{k-1}, відмінний від нуля, тобто $r(A) \geq k-1$. Обчислимо всі мінори k-го порядку, обвідні до M_{k-1}. Якщо серед них немає мінорів відмінних від нуля, то $r(A) = k-1$. Інакше існує мінор M_k, відмінний від нуля, а отже $r(A) \geq k$, і процедуру пошуку продовжуємо.

Приклад 3.4. Знайдемо ранг матриці $A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ методом обвідних мінорів. Очевидно, у матриці є мінор 2-го порядку, відмінний від нуля:

$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$. До цього мінора у матриці є 2 обвідних мінори 3-го порядку. Обчислюємо їх:

$$M_3' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3'' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки обидва мінори рівні нулю, то $r(A) = 2$.

II) Метод елементарних перетворень полягає у зведенні матриці до східчастого вигляду шляхом елементарних перетворень. Тоді ранг матриці дорівнює кількості ненульових рядків.

Приклад 3.5. Знайдемо ранг матриці $A_{3\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ шляхом елементарних перетворень:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1)\cdot(-2) \\ \leftarrow + \quad \quad \Big| \\ \quad \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} : 2 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

звідки випливає, що $r(A) = 2$.

4 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

4.1 Основні означення.

Означення 4.1. *Системою лінійних алгебраїчних рівнянь* (СЛАР), що містить m рівнянь та n невідомих, називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

де числа a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, називаються коефіцієнтами системи, числа b_i, $i = \overline{1, m}$, — вільними членами.

Означення 4.2. Система (4.1) називається *квадратною*, якщо $m = n$.

Означення 4.3. Система (4.1) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, тобто $b_1 = b_2 = ...b_m = 0$. В протилежному випадку система називається *неоднорідною*.

Систему (4.1) зручно записувати у компактній матричній формі:

$$AX = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матриця A називається основною матрицею системи, B — стовпцем вільних членів, X — вектор-стовпцем невідомих.

Означення 4.4. Квадратна система називається *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Означення 4.5. *Розширеною матрицею* системи (4.1) (позначається $\overline{A}$ або $(A|B)$) називається основна матриця A системи, доповнена стовпцем вільних членів B:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Означення 4.6. *Розв'язком* системи (4.1) називається n значень невідомих $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, ..., $x_n = c_n$, при підстановці яких всі рівняння системи перетворюються у вірні рівності. Будь-який розв'язок системи можна записати у вигляді вектор-стовпця: $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Означення 4.7. Система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Означення 4.8. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має більше одного розв'язку. В останньому випадку кожен її розв'язок називається *частинним розв'язком*. Сукупність частинних розв'язків системи називається *загальним розв'язком* цієї системи.

Розв'язати систему — означає з'ясувати сумісна вона чи ні, і якщо система сумісна, знайти її загальний розв'язок.

Означення 4.9. Дві системи називаються *еквівалентними*, якщо вони мають один і той самий загальний розв'язок. Іншими словами, системи еквівалентні, якщо кожний розв'язок однієї з них є розв'язком іншої, і навпаки.

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови сумісності СЛАР.

Теорема 4.1 (Кронекера-Капеллі). *Система лінійних алгебраїчних рівнянь* (4.1) *сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу основної матриці системи, тобто* $r(A) = r(\overline{A})$.

При цьому, якщо $r(A) = r(\overline{A}) = n$, *то система* (4.1) *має єдиний розв'язок. Якщо* $r(A) = r(\overline{A}) < n$, *то система* (4.1) *має безліч розв'язків.*

Доведення. Необхідність. Нехай СЛАР (4.1) сумісна. Покажемо, що $r(A) = r(\overline{A})$.

Позначимо $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}$ — розв'язок СЛАР (4.1). Тоді

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + ... + a_{1n}c_n = b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + ... + a_{2n}c_n = b_2, \\ ... \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + ... + a_{mn}c_n = b_m. \end{cases}$$

Розглянемо розширену матрицю СЛАР (4.1) та застосуємо до неї елементарні перетворення, а саме віднімемо від останнього стовпця розширеної матриці всі стовпці основної матриці, помножені на коефіцієнти $c_1, c_2, ..., c_n$, відповідно:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 - (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + ... + a_{1n}c_n) \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 - (a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + ... + a_{2n}c_n) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m - (a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + ... + a_{mn}c_n) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином, з властивостей рангу матриці випливає, що $r(A) = r(\overline{A})$.

Достатність. Нехай для СЛАР (4.1) $r(A) = r(\overline{A}) = r$. Тоді і основна і розширена матриця мають спільний базисний мінор порядку r (і в цей мінор не входить останній стовпчик розширеної матриці). Тоді кожен елемент останнього стовпчика розширеної матриці дорівнює сумі відповідних елементів базисних стовпчиків матриці, помножених на деякі коефіцієнти. Останнє твердження є насправді окремою теоремою, яка називається *теоремою про базисний мінор* (приймемо цей факт без доведення). Отже, існують дійсні числа $c_1, c_2, ..., c_n$, такі, що

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + ... + a_{1n}c_n = b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + ... + a_{2n}c_n = b_2, \\ ... \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + ... + a_{mn}c_n = b_m. \end{cases}.$$

Звідси випливає, що СЛАР (4.1) — сумісна. □

Алгоритм дослідження СЛАР на сумісність та визначеність

1) Знаходимо $r(A)$ та $r(\overline{A})$. Якщо $r(A) \neq r(\overline{A})$, то СЛАР несумісна. Якщо $r(A) = r(\overline{A})$, то СЛАР сумісна і переходимо до наступного кроку.

2) Якщо $r(A) = r(\overline{A}) = n$, то система визначена. Якщо $r(A) = r(\overline{A}) < n$, то система невизначена.

4.2 Методи розв'язання квадратних невироджених СЛАР.

Розглянемо *квадратну невироджену* СЛАР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{4.2}$$

причому $\det A \neq 0$.

I.) Матричний метод.

Запишемо СЛАР (4.2) матричній формі:

$$AX = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\Delta = \det A \neq 0$, то з останнього рівняння випливає, що

$$X = A^{-1}B. \tag{4.3}$$

II.) Формули Крамера.

Оскільки $\Delta = \det A \neq 0$, то з (4.3) випливає, що $X = A^{-1}B$. Розпишемо останню рівність:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + ... + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + ... + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ ... \\ \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + ... + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Але $(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + ... + A_{n1}b_n)$ — розклад визначника

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

за елементами 1-го стовпця. Зауважимо, що визначник Δ_1 отримується з визначника системи Δ шляхом заміни першого стовпця стовпцем вільних членів. Таким чином,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Аналогічно, $(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + ... + A_{n2}b_n)$ — розклад визначника

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

за елементами 2-го стовпця. Зауважимо, що визначник Δ_2 отримується з визначника системи Δ шляхом заміни другого стовпця стовпцем вільних членів. Таким чином,

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

І т.д.

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{4.4}$$

де визначник Δ_i, $i = \overline{1, n}$, отримується з визначника системи Δ шляхом заміни i-го стовпця стовпцем вільних членів.

Формули (4.4) називаються *формулами Крамера.*

Приклад 4.1. Розв'язати СЛАР за формулами Крамера: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = \qquad -5. \end{cases}$

Обчислюємо визначник основної матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Обчислюємо визначники Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -5 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -4.$$

Таким чином,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Дослідження квадратної СЛАР на сумісність та визначеність за формулами Крамера

1. Якщо $\Delta \neq 0$, то система сумісна та визначена, тобто має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами (4.4).

2. Якщо $\Delta = 0$, і існує принаймні одне $\Delta_i \neq 0$, то система несумісна.

3. Якщо $\Delta = 0$, і всі $\Delta_i = 0$, то система або сумісна і невизначена, або несумісна.

III.) Метод Гаусса полягає у послідовному виключенні невідомих і складається з 2-х кроків. Розглянемо квадратну невироджену СЛАР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

1 крок. *Прямий хід методу Гаусса.* Випишемо розширену матрицю системи:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

На цьому кроці будемо зводити розширену матрицю системи до східчастого вигляду шляхом елементарних перетворень над рядками матриці. А саме, поставимо на перше місце рівняння, у якого коефіцієнт при невідомій x_1 не дорівнює нулю. Якщо серед коефіцієнтів a_{11}, a_{21}, ... , a_{n1} є одиниця, то поставимо відповідне рівняння на місце першого.

До елементів другого рядка додамо елементи першого рядка помножені на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$. До елементів третього рядка додамо елементи першого рядка помножені на $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$. І т.д. До елементів n-го рядка додамо відповідні елементи першого рядка, помножені на $\left(-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\right)$.

Таким чином, розширена матриця системи $\overline{A}$ еквівалентна наступній

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & ... & a'_{2n} & b'_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & a'_{n2} & ... & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right),$$

де a'_{ij}, та b'_i, $i = \overline{2,n}$, $j = \overline{2,n}$ — нові коефіцієнти системи.

Далі переписуємо перший рядок без змін і повторюємо проведені міркування для останніх $(n-1)$ рядків. Потім процедуру повторюємо для останніх $(n-2)$ рядків, і т.д., поки не зведемо матрицю $\overline{A}$ до східчастого вигляду.

Оскільки система квадратна і невироджена, то $r(A) = r(\overline{A}) = n$. Тому в результаті елементарних перетворень отримаємо східчасту матрицю наступного вигляду:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & ... & \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{b}_1 \\ 0 & \widetilde{a}_{22} & ... & \widetilde{a}_{2n} & \widetilde{b}_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \widetilde{a}_{nn} & \widetilde{b}_n \end{array}\right),$$

де $\widetilde{a}_{ij}$, та $\widetilde{b}_i$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ — нові коефіцієнти системи.

2 крок. ***Зворотній хід методу Гаусса*** полягає у послідовному знаходженні значень невідомих x_1, x_2, ..., x_n, піднімаючись від останнього рівняння системи до першого. А саме, запишемо перетворену систему:

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{11}x_1 + \widetilde{a}_{12}x_2 + ... + \widetilde{a}_{1(n-1)}x_{n-1} + \widetilde{a}_{1n}x_n = \widetilde{b}_1, \\ \qquad \widetilde{a}_{22}x_2 + ... + \widetilde{a}_{2(n-1)}x_{n-1} + \widetilde{a}_{2n}x_n = \widetilde{b}_2, \\ \qquad ... \\ \qquad \widetilde{a}_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + \widetilde{a}_{(n-1)n}x_n = \widetilde{b}_{n-1}, \\ \qquad \widetilde{a}_{nn}x_n = \widetilde{b}_n. \end{cases}$$

Знаходимо з останнього рівняння значення змінної x_n:

$$x_n = \frac{\widetilde{b}_n}{\widetilde{a}_{nn}}.$$

Підставляємо значення x_n у передостаннє рівняння та знаходимо з нього значення x_{n-1}:

$$x_{n-1} = \frac{\widetilde{b}_{n-1} - \widetilde{a}_{(n-1)n} \cdot \frac{\widetilde{b}_n}{\widetilde{a}_{nn}}}{\widetilde{a}_{(n-1)(n-1)}},$$

і т.д.

Приклад 4.2. Розв'язати СЛАР методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = \quad -5. \end{cases}$ Поміняємо у системі перше та друге рівняння місцями:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 - 4x_2 = \quad -5, \end{cases}$$

випишемо розширену матрицю системи та приведемо її до східчастого вигляду елементарними перетвореннями над рядками матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&2&-1\\2&-3&1&-7\\1&-4&0&-5\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(-2)\cdot(-1)\\ \leftarrow + \qquad \mid\\ \qquad \leftarrow +\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&4&2&-1\\0&-11&-3&-5\\0&-8&-2&-4\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ :(-2)\end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&4&2&-1\\0&-11&-3&-5\\0&4&1&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&4&2&-1\\0&4&1&2\\0&-11&-3&-5\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot 3\\ \leftarrow +\end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&4&2&-1\\0&4&1&2\\0&1&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&4&2&-1\\0&1&0&1\\0&4&1&2\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot(-4)\\ \leftarrow +\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&4&2&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&-2\end{array}\right).$$

Випишемо перетворену систему:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ \qquad\quad x_2 \qquad\quad\ = 1, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = -2, \end{cases}$$

звідки $x_3 = -2$, $x_2 = 1$, $x_1 = -1$.

5 Метод розв'язання довільних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Однорідні системи

5.1 Метод Гаусса розв'язання довільних СЛАР.

Метод Гаусса є найбільш універсальним методом розвязання СЛАР. Він дозволяє одночасно дослідити довільну СЛАР на сумісність та визначеність, і у разі сумісності системи, знайти її загальний розв'язок. Цей метод полягає у послідовному виключенні невідомих з рівнянь системи.

Розглянемо загальну СЛАР, що містить m рівнянь та n невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Прямий хід методу Гаусса. Випишемо розширену матрицю системи:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

На цьому кроці будемо зводити розширену матрицю системи до східчастого вигляду шляхом елементарних перетворень над рядками матриці. А саме, поставимо на перше місце рівняння, у якого коефіцієнт при невідомій x_1 не дорівнює нулю. Якщо серед коефіцієнтів a_{11}, a_{21}, ... , a_{m1} є одиниця, то поставимо відповідне рівняння на місце першого.

Далі застосуємо до всіх m рядків розширеної матриці наступний алгоритм. До елементів другого рядка додамо елементи першого рядка помножені на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$. До елементів третього рядка додамо елементи першого рядка помножені на $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$. І т.д. До елементів m-го рядка додамо відповідні елементи першого рядка, помножені на $\left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}\right)$.

Таким чином, розширена матриця системи $\overline{A}$ еквівалентна наступній

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & ... & a'_{2n} & b'_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & a'_{m2} & ... & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right),$$

де a'_{ij}, та b'_i, $i = \overline{2, m}$, $j = \overline{2, n}$ — нові коефіцієнти системи.

Далі переписуємо перший рядок без змін і повторюємо алгоритм для останніх $(m-1)$ рядків. Потім описаний алгоритм застосовуємо до останніх $(m-2)$ рядків, і т.д. поки не зведемо матрицю $\overline{A}$ до східчастого вигляду.

Зауважимо, що якщо в результаті елементарних перетворень у розширеної матриці утвориться принаймні один рядок вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & ... & 0 & \widehat{b}_l \end{array}\right),$$

де $\widehat{b}_l \neq 0$, то СЛАР є несумісною.

Припустимо, що система сумісна, і ранг її основної матриці дорівнює r, тобто $r(A) = r(\overline{A}) = r \leq n$. Тоді в результаті елементарних перетворень отримаємо східчасту матрицю:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & ... & \widetilde{a}_{1r} & ... & \widetilde{a}_{1(n-1)} & \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{b}_1 \\ 0 & \widetilde{a}_{22} & ... & \widetilde{a}_{2r} & ... & \widetilde{a}_{2(n-1)} & \widetilde{a}_{2n} & \widetilde{b}_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \widetilde{a}_{rr} & ... & \widetilde{a}_{r(n-1)} & \widetilde{a}_{rn} & \widetilde{b}_r \end{array}\right),$$

де $\widetilde{a}_{ij}$, та $\widetilde{b}_i$, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, n}$ — нові коефіцієнти системи.

Зауважимо, що оскільки $r(A) = r(\overline{A}) = r$, то r рядків та r стовпців цієї матриці утворюють базисний мінор. Не обмежуючи загальності можна вважати, що перші r рядків та r стовпців розширеної матриці утворюють базисний мінор.

Невідомі, коефіцієнти яких входять до базисного мінору, називаються *головними* або *базисними* (їх r штук), а інші $(n-r)$ невідомих називаються *вільними*.

Запишемо перетворену систему:

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{11}x_1 + \widetilde{a}_{12}x_2 + ... + \widetilde{a}_{1r}x_r + ... + \widetilde{a}_{1(n-1)}x_{n-1} + \widetilde{a}_{1n}x_n = \widetilde{b}_1, \\ \qquad \widetilde{a}_{22}x_2 + ... + \widetilde{a}_{2r}x_r + ... + \widetilde{a}_{2(n-1)}x_{n-1} + \widetilde{a}_{2n}x_n = \widetilde{b}_2, \\ \qquad\qquad ... \\ \qquad\qquad\qquad \widetilde{a}_{rr}x_r + ... + \widetilde{a}_{r(n-1)}x_{n-1} + \widetilde{a}_{rn}x_n = \widetilde{b}_r. \end{cases}$$

Підкреслимо, що у випадку, коли $r = n$ після прямого ходу методу Гаусса систему можна розв'язати матричним методом або за формулами Крамера.

Зворотній хід методу Гаусса полягає у послідовному відшуканні всіх невідомих системи, підіймаючись від останнього рівняння системи до першого. А саме, залишаємо головні невідомі $(x_1, x_2, ..., x_r)$ системи у лівих частинах рівнянь, а вільні невідомі $(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n)$ переносимо у праві частини рівнянь системи:

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{11}x_1 + \widetilde{a}_{12}x_2 + ... + \widetilde{a}_{1r}x_r = \widetilde{b}_1 - \widetilde{a}_{1(r+1)}x_{r+1} - ... - \widetilde{a}_{1(n-1)}x_{n-1} - \widetilde{a}_{1n}x_n, \\ \qquad\quad \widetilde{a}_{22}x_2 + ... + \widetilde{a}_{2r}x_r = \widetilde{b}_2 - \widetilde{a}_{2(r+1)}x_{r+1} - ... - \widetilde{a}_{2(n-1)}x_{n-1} - \widetilde{a}_{2n}x_n, \\ \qquad\quad ... \\ \qquad\qquad\qquad \widetilde{a}_{rr}x_r = \widetilde{b}_r - \widetilde{a}_{r(r+1)}x_{r+1} ... - \widetilde{a}_{r(n-1)}x_{n-1} - \widetilde{a}_{rn}x_n. \end{cases}$$

Далі, з останнього рівняння виражаємо значення x_r через вільні невідомі $(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n)$. Підставляємо у передостаннє рівняння і знаходимо з нього значення x_{r-1} через вільні невідомі. Продовжуючи цей алгоритм знаходимо всі невідомі системи $x_r, x_{r-1}, ..., x_2, x_1$.

Задаючи вільним невідомим довільні значення, отримаємо незліченну множину розв'язків системи.

Приклад 5.1. Розв'язати СЛАР методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$

Переставимо місцями перше та друге рівняння системи, випишемо розширену матрицю системи та зведемо її до східчастого вигляду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-7) \\ \leftarrow + \\ \quad\leftarrow + \\ \qquad\leftarrow + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1)\cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \quad\leftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Звідси випливає, що $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 4 = n$. Таким чином, дана СЛАР є сумісною та невизначеною. Оберемо у якості головних змінних (x_1, x_2). Дійсно, відповідний мінор $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Випишемо перетворену систему та знайдемо її загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Перенесемо у праві частини рівнянь вільні змінні (x_3, x_4):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 + 5x_3, \\ x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

Звідси $x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4$, та $x_1 = 2 + 5x_3 + x_2 = -1 - 8x_3 + 5x_4$. Тоді загальний розв'язок системи: $X_{\text{з.р.}} = \begin{pmatrix} -1 - 8x_3 + 5x_4 \\ -3 - 13x_3 + 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Якщо покласти, наприклад, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то отримаємо частинний розв'язок: $X_{\text{ч.р.}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5.2 Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нагадаємо, що *однорідною* називається СЛАР (4.1), у якої всі вільні члени дорівнюють нулю, тобто СЛАР вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Однорідна система (5.1) завжди є сумісною, оскільки у такої системи $r(A) = r(\overline{A})$. Однорідна система завжди має принаймні один розв'язок: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, який називається *нульовим* або *тривіальним* розв'язком системи.

Виникає питання: при яких умовах однорідна система має також і ненульові розв'язки? Наступна теорема дає відповідь на це питання.

Теорема 5.1. *Для того, щоб однорідна СЛАР мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці $r(A)$ був меньший за число невідомих n, тобто $r(A) < n$.*

Доведення. Безпосередньо випливає з теореми 4.1. □

Розв'язати однорідну СЛАР означає — знайти її загальний розв'язок, або переконатися, що вона має лише нульовий розв'язок.

Позначимо розв'язок $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$,..., $x_n = k_n$, однорідної системи (5.1) у вигляді вектор-стовпця $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ... \\ k_n \end{pmatrix}$.

Розв'язки однорідної СЛАР мають наступні властивості:

1) Якщо $\mathbf{e}$ — розв'язок однорідної СЛАР, то $\lambda \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \lambda k_1 \\ \lambda k_2 \\ ... \\ \lambda k_n \end{pmatrix}$ теж є розв'язком цієї СЛАР, де λ — довільне дійсне число.

2) Якщо $\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ... \\ k_n \end{pmatrix}$ та $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ ... \\ l_n \end{pmatrix}$ — розв'язки однорідної СЛАР, то для довільних $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, вектор-стовпець

$$c_1\mathbf{e_1} + c_2\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} c_1k_1 \\ c_1k_2 \\ ... \\ c_1k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2l_1 \\ c_2l_2 \\ ... \\ c_2l_n \end{pmatrix}$$

також є розв'язком цієї СЛАР.

З цих властивостей випливає, що довільна лінійна комбінація розв'язків однорідної системи є її розв'язком.

Означення 5.1. Система розв'язків однорідної СЛАР $\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ ... \\ k_{1n} \end{pmatrix}$, $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ ... \\ k_{2n} \end{pmatrix}$,..., $\mathbf{e_s} = \begin{pmatrix} k_{s1} \\ k_{s2} \\ ... \\ k_{sn} \end{pmatrix}$, називається лінійно незалежною, якщо матриця

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & ... & k_{s1} \\ k_{12} & k_{22} & ... & k_{s2} \\ ... & ... & ... & ... \\ k_{1n} & k_{2n} & ... & k_{sn} \end{pmatrix}$$

має ранг s.

Означення 5.2. Система лінійно незалежних розв'язків $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$,...,$\mathbf{e_s}$, однорідної СЛАР (5.1), називається *фундаментальною системою розвязків* (ФСР) цієї СЛАР, якщо будь-який її розв'язок X є лінійною комбінацією розв'язків $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$,...,$\mathbf{e_s}$, тобто $X = c_1\mathbf{e_1} + c_2\mathbf{e_2} + ... + c_s\mathbf{e_s}$, де c_1, c_2, ..., c_s — довільні дійсні числа.

Розглянемо теорему про загальний розв'язок однорідної СЛАР.

Теорема 5.2. *Якщо ранг $r = r(A)$ основної матриці однорідної СЛАР (5.1) є меншим за число невідомих n, тобто $r < n$, то будь-яка фундаментальна система розв'язків цієї СЛАР складається з $(n - r)$ розв'язків $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, ..., $\mathbf{e_{n-r}}$, причому загальний розв'язок цієї системи є лінійною комбінацією цих розв'язків:*

$$X_{з.о.} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = c_1\mathbf{e_1} + c_2\mathbf{e_2} + ... + c_{n-r}\mathbf{e_{n-r}},$$

c_1, c_2, ..., c_{n-r} — довільні дійсні числа.

Наслідок 5.1. *Загальний розв'язок $X_{з.н.}$ неоднорідної СЛАР (4.1), що складається з m рівнянь з n невідомих, дорівнює сумі загального розв'язку $X_{з.о.}$ відповідної їй однорідної системи (5.1) та довільного частинного розв'язку $X_{ч.н.}$ неоднорідної СЛАР (4.1):*

$$X_{з.н.} = X_{з.о.} + X_{ч.н.}$$

Доведення. Дійсно, нехай

$$X_{\text{з.о.}} = c_1 \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ ... \\ k_{1n} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ ... \\ k_{2n} \end{pmatrix} + ... + c_{n-r} \begin{pmatrix} k_{(n-r)1} \\ k_{(n-r)2} \\ ... \\ k_{(n-r)n} \end{pmatrix}$$

— загальний розв'язок однорідної СЛАР (5.1), що відповідає неоднорідній СЛАР (4.1). Нехай $X_{\text{ч.н.}} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ ... \\ w_n \end{pmatrix}$ — частинний розв'язок неоднорідної СЛАР (4.1). Підставимо замість кожної змінної x_i у систему (4.1) значення $(c_i k_{11} + c_2 k_{2i} + ... + c_{n-r} k_{(n-r)i} + w_i)$, $i = \overline{1, n}$. Легко бачити, що кожне рівняння системи (4.1) перетвориться на вірну рівність, що і доводить наслідок 5.1. □

Однорідні СЛАР як правило розв'язують методом Гаусса. Інші методи для однорідних СЛАР є неефективними. Для квадратних однорідних СЛАР, обчислюючи визначник системи Δ, можна з'ясувати чи є однорідна СЛАР визначною (випадок $\Delta \neq 0$), чи вона є невизначеною (випадок $\Delta = 0$). У випадку, коли квадратна однорідна СЛАР є невизначеною, знайти її загальний розв'язок можна лише методом Гаусса.

Приклад 5.2. Розв'язати однорідну СЛАР: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

Випишемо основну матрицю системи і зведемо її до східчастого вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3)\cdot(-4) \\ \leftarrow + \quad | \\ \quad | \leftarrow + \\ \leftarrow + \quad \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-3)\cdot 2 \\ \leftarrow + \quad | \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $r(A) = 2$, тобто система має безліч розв'язків.

Запишемо перетворену систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ \qquad -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4x_3 + 3x_4, \\ \qquad x_2 = -6x_3 + 5x_4, \end{cases}$$

тобто загальний розв'язок системи:

$$X_{\text{з.о.}} = \begin{pmatrix} 8x_3 - 7x_4 \\ -6x_3 + 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4.$$

Надаючи вільним змінним x_3 та x_4 різні дійсні значення отримаємо різні частинні розв'язки однорідної системи.

Вектор-стовпці $\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ складають фундаментальну систему розв'язків (ФСР) даної СЛАР.