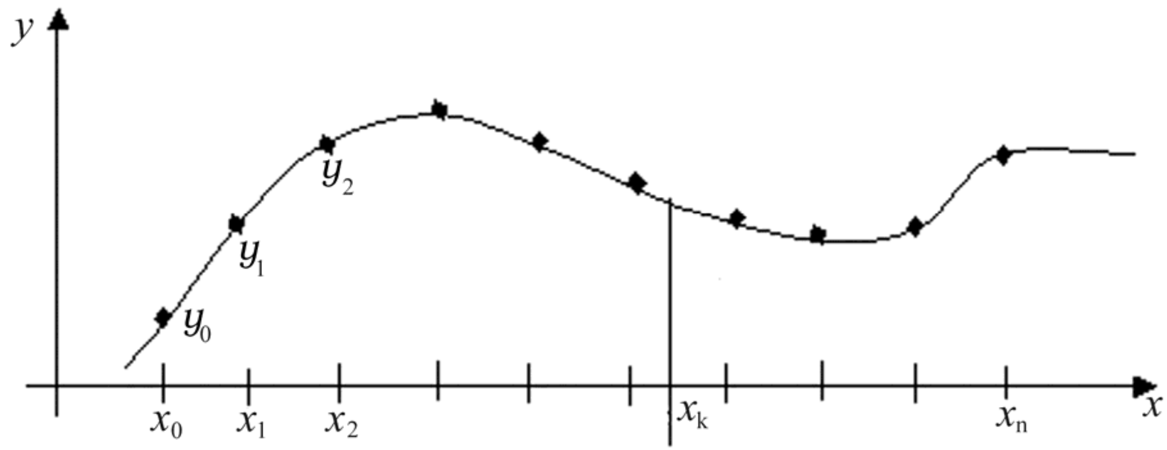
ЛЕКЦИЯ 6

Интерполирование и задача интерполирования

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

Интерполирование — это приближенное нахождение значений функции по ее отдельным известным значениям.



В практических вычислениях часто встречаются функции, значения которых заданы лишь в нескольких точках отрезка, что можно задать графиком или таблицей

x	x_0	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_k	$\cdots$	y_n

Задача интерполирования

Дана функция $f(x)$, заданная таблицей значений для некоторого конечного множества x_i аргумента x:

$$y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n).$$

В общем виде: $y_i = f(x_i),\ \ i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Требуется определить значения функции $f(x)$ *при значениях аргумента* x*,* отличных от заданных x_i*.*

Решение в два этапа.

1. Строят функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ в заданных точках x_i,
2. Применяют $g(x)$ вместо $f(x)$ для значений x, отличных от заданных x_i*.*

Такой способ определения значений функции называется **интерполированием***.*

Узлы интерполяции

1. Узлы интерполяции могут быть **равноотстоящими**.

Для равноотстоящих узлов расстояние между узлами одинаково

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 =, \ldots, = x_n - x_{n-1} = h = const,$$

Тогда правило определения значения узла x_{i+1} может быть задано:

- рекурсивно $x_{i+1} = x_i + h$;
- выражением $x_{i+1} = x_0 + \left(i+1\right)h,$ где

$h -$ шаг, $i = 0,1,\ldots,n-1 -$номер узла.

2. Узлы также могут быть произвольно расположенными:

$$x_1 - x_0 \neq x_2 - x_1 \neq \ldots \neq x_n - x_{n-1}$$

Определение задачи интерполирования

Определение. *Задачей интерполирования* называется **способ построения или нахождения** такой **функции** $g(x)$, с помощью которой можно с той или иной степенью точности проводить вычисления вместо заданной функции $f(x)$, т. е. восполнять значения функции $f(x)$.

Схематично задача интерполирования может быть представлена в виде:

$$f(x) \to \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n} \to g(x)$$

Геометрическая интерпретация задачи интерполирования

Геометрически решение задачи означает, что **нужно найти кривую** $y = g(x)$ некоторого определенного типа, проходящую через заданную систему точек (x_i, y_i), $i = 0,1,\ldots n$. При этом кривая называется *интерполяционной кривой* (Рис. 1).

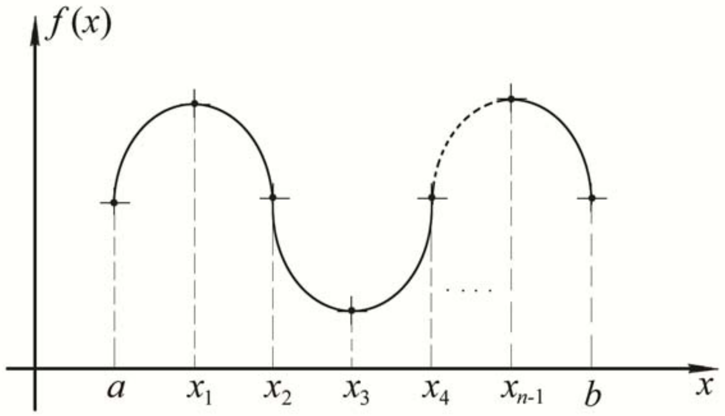


Рис.1. Интерполяционная кривая

В такой общей постановке задача может иметь бесчисленное множество решений.

Где используется интерполирование

Интерполирование функций используется в следующих случаях:

- **замена сложно вычисляемой** функции другой, легко вычислимой;

- **приближенное восстановление функции** на всей области задания по значениям ее в отдельных точках или по другим известным величинам;

- **получение сглаживающих** функций;

- приближенного **нахождения предельных значений** функций;

- в задачах **ускорения сходимости** последовательностей и рядов и в других вопросах.

Формальная постановка задачи интерполирования

Пусть на некотором отрезке $[a,b]$ заданы $n+1$ различных точек $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_k \neq x_j$ при $j \neq k$, $0 \le k \le n$, $0 \le j \le n$ и значения некоторой функции $f(x)$ в этих точках

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \ldots, f(x_n) = y_n,$$ или

$$f(x_i) = y_i,\ i = 0,1,\ldots,n$$

Задача состоит в том, чтобы построить функцию $g(x, a_0, a_1, \ldots, a_n)$ такую, что

$$g(x, a_0, a_1, \ldots, a_n) = f(x).$$

Это условие называется *условием интерполяции.*

При практических вычислениях чаще всего в качестве g принимается показательная a^x, степенная x^a или тригонометрическая функция $\sin ax$.

Интерполирование алгебраическими многочленами

Алгебраическая интерполяция заключается в том, что в качестве интерполирующей функции $g\left(x, a_0, a_1, \ldots, a_n\right)$ *принимается многочлен* (*полином*) *степени не выше* n.

$$g\left(x, a_0, a_1, \ldots, a_n\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

При этом условие интерполяции $g\left(x, a_0, a_1, \ldots, a_n\right) = f\left(x\right)$ *имеет вид*

$$f\left(x_i\right) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n$$

Теорема о существовании и единственности алгебраического многочлена

Интерполяционный многочлен

$$g\left(x, a_0, a_1, \ldots, a_n\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

удовлетворяющий условию

$$f\left(x_i\right) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n$$

по заданной функции

$$g\left(x, a_0, a_1, \ldots, a_n\right) = f\left(x\right)$$

имеет степень не ниже n и является единственным.

Доказательство. Используя условие

$$f\left(x_i\right) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n$$

получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_i:

$$
\begin{cases}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_m x_0^n = y_0, \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_m x_1^n = y_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_m x_n^n = y_n.
\end{cases}
$$

или

$$
\begin{pmatrix}
1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n
\end{pmatrix}
$$

Полученная система уравнений

$$f\left(x_i\right) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_n x_i^n,\ \ i = 0,...,n$$

однозначно разрешима (т. е. решение существует и единственно), так как по условию $x_i,\ i = 0,1,...,n$ различны. Следовательно, в этом случае определитель системы отличен от нуля

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

Таким образом, коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$,

получающиеся в результате решения данной системы, определяют единственный интерполяционный многочлен, построенный по $(n+1)$-й различной точке и имеющий степень не ниже n.

Пример построения интерполяционного многочлена

Пример. Пусть известны значения функции $f\left(x\right)$ в узлах x_0, x_1, т. е.

$$y_0 = f\left(x_0\right),\ y_1 = f\left(x_1\right).$$

Построить интерполяционный многочлен

$$P\left(x\right) = a_0 + a_1 x,$$

совпадающий со значениями $f\left(x\right)$ в узлах x_0, x_1.

Решение. Запишем систему относительно a_0 и a_1

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 &= y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 &= y_1. \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Решим данную систему методом исключения:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 = y_1. \end{cases}$$

1. $a_0 = y_0 - a_1 x_0,$ определяем a_0 из урав.1

2. $y_0 - a_1 x_0 + a_1 x_1 = y_1$, подставляем a_0 в урав. 2

3. $a_1 \left(x_1 - x_0 \right) = y_1 - y_0,$ сводим подобные члены

4. $a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$ определяем значение a_1

5. $a_0 = y_0 - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0,$ подставляем значение a_1 в урав. 1

6. $a_0 = \dfrac{y_0 \left(x_1 - x_0 \right) - x_0 \left(y_1 - y_0 \right)}{x_1 - x_0}$, приводим к общему знаменат.

7. $a_0 = \dfrac{y_0 x_1 - y_0 x_0 - x_0 y_1 + x_0 y_0}{x_1 - x_0}$ раскрываем скобки

8. $a_0 = \dfrac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0}$ определяем значение a_0

Строим интерполяционный многочлен, подставив в выражение

$$P(x) = a_0 + a_1 x,$$

значения коэффициентов a_0 и a_1

$$P(x) = a_0 + a_1 x = \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0} + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x.$$

Вывод. Для произвольной функции, заданной в точках

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1)$$

существует интерполяционный полином

$P(x) = \dfrac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0} + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x$, который совпадает со значениями функции $f(x)$ в точках y_0 и y_1

Преобразуем полученный полином

$$P\left(x\right)=\frac{y_0x_1-y_1x_0}{x_1-x_0}+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}x,$$

следующим образом

$$P\left(x\right)=\frac{y_0x_1}{x_1-x_0}-\frac{y_1x_0}{x_1-x_0}+\frac{y_1x}{x_1-x_0}-\frac{y_0x}{x_1-x_0}=$$

$$=\frac{y_0\left(x_1-x\right)}{x_1-x_0}+\frac{y_1\left(x-x_0\right)}{x_1-x_0}=$$

$$=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа для неравноотстоящих узлов

Постановка задачи. Пусть для функции $y = f(x)$ заданы значения $y_i = f(x_i)$ в неравноотстоящих $(n+1)$ узлах интерполяции,

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1),\, y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n).$$

Требуется построить многочлен $L_n(x)$ степени не выше n, и принимающий в заданных узлах x_i, $i = 0,1,\ldots,n$ значения, совпадающие со значениями функции $f(x)$,

$$L_n(x_i) = y_i,\; i = 0,1,2,\ldots,n.$$

Интерполяционный полином Лагранжа для неравноотстоящих узлов имеет вид:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}y_i$$

или

$L_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} l_i y_i$, где l_i - это лагранжевый коэффициет при y_i .

$$l_i=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

Числитель – произведение разностей $\prod\limits_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}(x-x_j)$.

Знаменатель – произведение разностей $\prod\limits_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}(x_i-x_j)$

В сокращенной форме:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right]$$

Многочлен называется *интерполяционным многочленом Лагранжа* для неравноотстоящих узлов.

Пример. Пусть $n = 3$. Тогда лагранжевы коэффициенты:

$$l_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}, l_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$l_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)}, l_3 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_1)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$L_3 = l_0 y_0 + l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3$$

Сокращенная форма записи многочлена

Введем вспомогательный многочлен $w_{n+1}(x)$ степени $n+1$:

$$w_{n+1}(x) = (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot \ldots \cdot(x - x_{i-1})\cdot(x - x_i)\cdot(x - x_{i+1})$$
$$\ldots\cdot(x - x_{n-1})\cdot(x - x_n)$$

Пример:

$$w_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$w_4(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$w_5(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$w_6(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

….

На примере $w_3(x)$ вычислим производную $w_3'(x)$, Применяя последовательно выражение для вычисления производной произведения функций:

$$z' = \left(uv\right)' = u'v + uv'.$$

Пример. $w_3\left(x\right) = \left(x - x_0\right)\left[\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\right]$

$$w_3'\left(x\right) = \left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) + \left(x - x_0\right)\left[\left(x - x_1\right) + \left(x - x_2\right)\right]$$

$$w_3'\left(x\right) = \left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) + \left(x - x_0\right)\left(x - x_2\right) + \left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)$$

$w_3'\left(x\right) = \sum_{i=0}^{2}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2}\left(x - x_j\right)$ Обобщив полученные выражения,

запишем: $w_{n+1}\left(x\right) = \prod_{i=0}^{n}\left(x - x_i\right),$

$$w_{n+1}'\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}\left(x - x_j\right)$$

Производная этого многочлена в точке $x = x_i$ равна:

$w_3'(x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$; $w_3'(x_1) = (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)$

$$w_3'(x_2) = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$w_{n+1}'(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)$$

Подставим $w_{n+1}(x)$ и $w_{n+1}'(x_i)$ в полином Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Тогда получим сокращенную запись полинома Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{w_{n+1}(x)}{(x - x_i)\, w_{n+1}'(x_i)} y_i = w_{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x - x_i)\, w_{n+1}'(x_i)}$$

Пример 2. Для функции, заданной таблично, вычислить с помощью многочлена Лагранжа значение функции в заданной точке $x^* = 2,20$, отличной от узловой.

i	0	1	2	3
x_i	2,10	2,67	3,01	3,82
y_i	122,23	123,45	120,02	119,65

Решение.

Решение представим в виде последовательности этапов

Этап 1. Строим многочлен Лагранжа с учетом заданного числа узлов, $n = 3$:

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} y_0 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3.$$

Этап 2. Вычислим значение функции в заданной точке $x^* = 2,20$:

i	0	1	2	3
x_i	2,10	2,67	3,01	3,82
y_i	122,23	123,45	120,02	119,65

$$
\begin{aligned}
&f(2{,}20) \approx L_3(2{,}20) = \\
&= \frac{(2{,}20-2{,}67)(2{,}20-3{,}01)(2{,}20-3{,}82)}{(2{,}10-2{,}67)(2{,}10-3{,}01)(2{,}10-3{,}82)}122{,}23 \\
&+ \frac{(2{,}20-2{,}10)(2{,}20-3{,}01)(2{,}20-3{,}82)}{(2{,}67-2{,}10)(2{,}67-3{,}01)(2{,}67-3{,}82)}123{,}45 + \\
&+ \frac{(2{,}20-2{,}10)(2{,}20-2{,}67)(2{,}20-3{,}82)}{(3{,}01-2{,}10)(3{,}01-2{,}67)(3{,}01-3{,}82)}120{,}02 + \\
&+ \frac{(2{,}20-2{,}10)(2{,}20-2{,}67)(2{,}20-3{,}01)}{(3{,}82-2{,}10)(3{,}82-2{,}67)(3{,}82-3{,}01)}119{,}65 \simeq 122{,}56.
\end{aligned}
$$

Пример 3. Для той же функции, заданной таблично, вычислить с помощью сокращенной записи многочлена Лагранжа значение функции в заданной точке $x^* = 2,20$, отличной от узловой.

i	0	1	2	3
x_i	2,10	2,67	3,01	3,82
y_i	122,23	123,45	120,02	119,65

Решение.

Решение также представим в виде последовательности этапов

Этап 1. Строим сокращенную запись многочлена Лагранжа с учетом заданного числа узлов, $n = 3$:

$$L_3(x) = w_4(x)\sum_{i=0}^{3}\frac{y_i}{(x-x_i)w_4'(x_i)} =$$

$$= w_4(x)\cdot\left(\frac{y_0}{(x-x_0)w_4'(x_0)} + \frac{y_1}{(x-x_1)w_4'(x_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{y_2}{(x-x_2)w_4'(x_2)} + \frac{y_3}{(x-x_3)w_4'(x_3)}\right)$$

$$w_4(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$w_4'(x_0) = (x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)$$

$$w_4'(x_1) = (x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)$$

$$w_4'(x_2) = (x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)$$

$$w_4'(x_3) = (x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

Этап 2. Вычислим значения полинома $w_4(x)$ при $x^* = 2,20$ и табличных значениях x_i :

$$w_4(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$
$$= (2.20 - 2.10)(2.20 - 2.67)(2.20 - 3.01)(2.20 - 3.82) = -0,0617$$

$$w_4'(x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) =$$
$$(2.10 - 2.67)(2.10 - 3.01)(2.10 - 3.82) = -0.8921$$
$$w_4'(x_1) = (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) =$$
$$(2.67 - 2.10)(2.67 - 3.01)(2.67 - 3.82) = 0.2229$$
$$w_4'(x_2) = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) =$$
$$(3.01 - 2.1)(3.01 - 2.67)(3.01 - 3.82) = -0.2506$$
$$w_4'(x_3) = (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) =$$
$$(3.82 - 2.10)(3.82 - 2.67)(3.82 - 3.01) = 1.6022$$

Этап 3. Подставим вычисленные значения
$w_4\left(2.20\right) = -0.0617,\ w_4'\left(2.10\right) = -0.8921,\ w_4'\left(2.67\right) = 0.2229,$
$w_4'\left(3.01\right) = -0.2506,\ w_4'\left(3.82\right) = 1.6022$
в исходное выражение

$$L_3\left(x\right) = w_4\left(x\right)\sum_{i=0}^{3}\frac{y_i}{\left(x - x_i\right)w_4'\left(x_i\right)} =$$

$$= w_4\left(x\right)\cdot\left(\frac{y_0}{\left(x - x_0\right)w_4'\left(x_0\right)} + \frac{y_1}{\left(x - x_1\right)w_4'\left(x_1\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{y_2}{\left(x - x_2\right)w_4'\left(x_2\right)} + \frac{y_3}{\left(x - x_3\right)w_4'\left(x_3\right)}\right)$$

$$L_3\left(2.20\right) = -0.0617\cdot\left(-\frac{122.23}{\left(2.20 - 2.10\right)0.8921} + \frac{123.45}{\left(2.20 - 2.67\right)0.2229} - \right.$$

$$\left. - \frac{120.02}{\left(2.20 - 3.01\right)0.2506} + \frac{119.65}{\left(2.20 - 3.82\right)1.6022}\right) = 122.56$$

Погрешность многочлена Лагранжа

Погрешность многочлена. При замене функции $f(x)$ многочленом $L_n(x)$ возникает *погрешность* $R_n(x)=f(x)-L_n(x)$, называемая также *остаточным членом интерполяционной формулы,*

$$f(x)=L_n(x)+R_n(x).$$

***Теорема* о погрешности.** Погрешность интерполяционного многочлена Лагранжа для произвольно заданных узлов определяется формулой

$$R_n(x)=\frac{w_{n+1}(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$ где

$$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)..(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})..(x-x_n).$$

В силу неопределенности точки ξ определить точно $R_n(x)$ нельзя, поэтому при проведении вычислений находятся только приближенные оценки погрешностей интерполирования.

Оценка погрешности многочлена

Оценка погрешности интерполяции многочленом Лагранжа в некоторой произвольной фиксированной точке x^* из отрезка $[a,b]$, $x^* \in \left[a,b\right]$ определяется формулой

$$\left|R_n\right| = \left|f\left(x^*\right) - L_n\left(x^*\right)\right| \le \frac{C_{n+1}}{\left(n+1\right)!}\left|w_{n+1}\left(x^*\right)\right|,$$

$$C_{n+1} = \max\left|f^{\left(n+1\right)}\left(x\right)\right| \text{ на } \left[a,b\right].$$

Оценка максимальной погрешности интерполирования на всем отрезке [*a*, *b*], т. е. в любой точке $x \in \left[a,b\right]$ имеет вид

$$\left|R_n\right| = \left|f\left(x\right) - L_n\left(x\right)\right| \le \frac{C_{n+1}}{\left(n+1\right)!}M_n,\ M_n = \max\left|w_{n+1}\left(x\right)\right| =$$

$$= \max\left|\left(x - x_0\right)...\left(x - x_{i-1}\right)\left(x - x_i\right)\left(x - x_{i+1}\right)...\left(x - x_n\right)\right|$$

на отрезке $[a, b]$.

Пример 3. Пусть требуется определить, с какой точностью можно вычислить значение функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x^* = 112$ с помощью интерполяционной формулы Лагранжа, если заданы узлы $x_0 = 100$, $x_1 = 118$, $x_2 = 138$.

Решение. Поскольку требуется вычислить погрешность в одной точке $x^* = 112$, то применяем формулу.

$$\left|R_n\right| = \left|f\left(x^*\right) - L_n\left(x^*\right)\right| \le \frac{C_{n+1}}{\left(n+1\right)!}\left|w_{n+1}\left(x^*\right)\right|,$$

$$C_{n+1} = \max\left|f^{\left(n+1\right)}\left(x\right)\right| \text{ на } \left[a,b\right].$$

$$\left|R_2\right| = \left|f\left(x^*\right) - L_n\left(x^*\right)\right| \le \frac{C_3}{3!}\left|w_3\left(x^*\right)\right|,\ C_3 = \max\left|f'''\left(x\right)\right|$$

Этап 1. Определим значение C_3:

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}};\ y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}};\ y''' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$, тогда

$$C_3 = \max\left|y'''\right| = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{100^5}} = \frac{3}{8}\cdot 10^{-5}$$ при $100 \le x \le 138$.

Этап 2. Вычислим многочлен

$$w_3\left(x\right) = \left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

$$w_3\left(x^*\right) = \left|\left(112 - 100\right)\left(112 - 118\right)\left(112 - 138\right)\right| =$$

$$= \left|12\cdot\left(-6\right)\cdot\left(-26\right)\right| = 117$$

Этап 3. Вычислим оценку

$$\left|R_2\right| \le \frac{C_3}{3!}\left|w_3\left(x^*\right)\right|, \quad \left|R_2\right| \le \frac{3}{8}\cdot 10^{-5}\cdot\frac{1}{3!}\cdot 117 \approx 1{,}17\cdot 10^{-3}.$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов

Теорема о существовании многочлена Лагранжа для равноотстоящих узлов

Пусть заданы равноотстоящие узлы интерполирования

$$x_{i+1} - x_i = h = const, \quad i = 0, 1, ..., n-1,$$

и заданы значения

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), ..., y_n = f(x_n)$$

функции $f(x)$ в этих узлах. Тогда существует

$$L_n(x) = L_n(x_0 + mh) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{\prod\limits_{i \neq j, j=0}^{n} (m-j)}{i!(n-i)!} y_i \,,$$

или в сокращенной форме

$$L_n(x) = L_n(x_0 + mh) = \frac{1}{n!} v_{n+1}(m) \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{C_n^i}{m-i} y_i$$

Оба многочлена имеют степень не выше n и принимают в узлах x_i, $i = 0,1,...,n$ значения y_i,

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_{i+1} - x_i = ... = x_n - x_{n-1} = h$$

$$L_n(x_i) = y_i, i = 0,1,2,...,n \ .$$

Доказательство. Поскольку по условию узлы равноотстоящие,

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_{i+1} - x_i = ... = x_n - x_{n-1} = h,$$

то

$$x_i = x_{i-1} + h = x_0 + ih, \ i = 1,...,n.$$

Поскольку $L_n\left(x\right) = L_n\left(x_0 + mh\right)$ то $x - x_0 = mh$:

$$x - x_1 = x - \left(x_0 + h\right) = \left(x - x_0\right) - h = mh - h = h\left(m - 1\right),$$

$$x - x_2 = x - \left(x_0 + 2h\right) = \left(x - x_0\right) - 2h = mh - 2h = h\left(m - 2\right)$$

………………………………………………………

$$x - x_n = x - \left(x_0 + nh\right) = \left(x - x_0\right) - nh = mh - nh = h\left(m - n\right)$$

Для фиксированных точек: $x_i = x_{i-1} + h = x_0 + ih,$

$$x_i - x_0 = \left(x_0 + ih\right) - x_0 = ih,`$$

$$x_i - x_1 = x_0 + ih - x_0 - h = ih - h = h(i-1),$$

………………………………………………………

$$x_i - x_{i-1} = \left(x_0 + ih\right) - \left(x_0 + (i-1)h\right) = ih - \left(i - 1\right)h = h,$$

$$x_i - x_{i+1} = \left(x_0 + ih\right) - \left(x_0 + (i+1)h\right) = ih - \left(i + 1\right)h = -h$$

$$x_i - x_{i+2} = \left(x_0 + ih\right) - \left(x_0 - (i+2)h\right) = ih - (i+2)h = -2h$$

………………………………………………………

$$x_i - x_n = x_0 + ih - x_0 - nh = -h\left(n - i\right).$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

$$l_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{h(m-1) \cdot h(m-2)}{-h \cdot (-2h)} = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

$$l_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{mh \cdot h(m-2)}{h \cdot (-2h)} = -\frac{m(m-2)}{2}$$

$$l_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{mh \cdot h(m-1)}{2h \cdot h} = \frac{m(m-1)}{2}$$

$$L_2(x) = L_2(x_0 + mh) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^{n-i} \frac{\prod_{i \neq j, j=0}^{2} (m - j)}{i!(n-i)!} y_i$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

Используя значения полученных сомножителей, запишем лагранжевый коэффициент:

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-i+1)(m-i-1)\ldots(m-n)}{i(i-1)\ldots1(-1)(-2)\ldots(-(n-i))}=$$

$$=\frac{\prod\limits_{j\neq i,j=0}^{n}(m-j)}{(-1)^{n-i}\,i!(n-i)!},$$

Тогда многочлен Лагранжа примет вид:

$$L_n(x)=L_n(x_0+mh)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{\prod\limits_{i\neq j,j=0}^{n}(m-j)}{i!(n-i)!}y_i.$$

Для получения упрощенной формулы используем уже полученную упрощенную формулу для неравноотстоящих

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_i)w'_{n+1}(x_i)} y_i = w_{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x-x_i)w'_{n+1}(x_i)}$$

Она будет иметь вид:

$$L_n(x) = L_n(x_0+mh) = \frac{1}{n!} v_{n+1}(m) \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{C_n^i}{m-i} y_i$$

1. Для получения этой формулы запишем полином $w_{n+1}(x)$ заменив в нем x на x_0+mh исходя из замены $x-x_0=mh$.
2. Эту же замену выполним в полиноме $\frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_i)w'_{n+1}(x_i)}$ $w'_{n+1}(x)$.

Используем обозначение $x - x_0 = mh$:

$$w_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots$$
$$\ldots(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n) =$$
$$= h^{n+1}m(m-1)(m-2)\ldots(m-n) = w_{n+1}(m) = h^{n+1}v_{n+1}(m)$$

$$w'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots$$
$$\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n) =$$
$$h^{n+1}i(i-1)(i-2)\ldots1(-1)(-2)\ldots(-(n-i)) =$$
$$= h^{n+1}(-1)^{n-i}\,i!(n-i)! = w'_{n+1}(i) = h^{n+1}v'_{n+1}(i)$$

Подставим значения полиномов $w_{n+1}(x)$ и $w'_{n+1}(x)$ в формулу упрощенного лагранжева коэффициета для неравноотстоящих узлов:

Поскольку $\dfrac{w_{n+1}(x)}{x-x_i} = \dfrac{w_{n+1}(m)}{m-i} = \dfrac{h^{n+1}v_{n+1}(m)}{m-i}$ и

$$w'_{n+1}(x) = w'_{n+1}(m) = h^{n+1}(-1)^{n-i}\, i!(n-i)! = h^{n+1}v'_{n+1}(m)$$

Тогда лагранжевый коэффициент примет вид

$$\frac{w_{n+1}(m)}{(m-i)w'_{n+1}(m)} = \frac{h^{n+1}v_{n+1}(m)}{h^{n+1}(m-i)v'_{n+1}(m)} =$$

$$\frac{(-1)^{n-i}\, v_{n+1}(m)}{(m-i)i!(n-i)!} = \frac{1}{n!}v_{n+1}(m)\frac{(-1)^{n-i}\, C_n^i}{m-i},\ i = 0,1,2,\dots,n,$$

где, $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ – сочетание из n по i .

Определение. Сочетаниями из n различных элементов по i элементов называются комбинации, которые составлены из данных n элементов по i элементов и отличаются хотя бы одним элементом

Все сочетания из множества $\left\{ a, b, c, d, e \right\}$ по два —
$ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$

Отсюда формула полинома Лагранжа

$$L_n\left(x\right) = L_n\left(x_0 + mh\right) = \frac{1}{n!} v_{n+1}\left(m\right) \sum_{i=0}^{n} \left(-1\right)^{n-i} \frac{C_n^i}{m-i} y_i$$

Пример 4. Для функции $f\left(x\right) = e^x$, заданной таблично, вычислить с помощью многочлена Лагранжа для равноотстоящих узлов значение функции в заданной точке $x^* = 0,022$.

i	0	1	2	3	4
x_i	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04
$f\left(x_i\right)$	1,0000	1,0101	1,0202	1,0305	1,0408

Решение.

Этап 1. Найдем значение m, соответствующее x =0,022. Узлы равноотстоящие с шагом $h = 0.01$.

Сделаем линейную замену $x - x_0 = mh$,

тогда x будет соответствовать значение

$$m = \frac{x^* - x_0}{h} = \frac{0,022 - 0}{0,01} = 2,2.$$

Этап 2. Используем многочлен Лагранжа

$$L_n\left(x\right) = L_n\left(x_0 + mh\right) = \frac{1}{n!} v_{n+1}\left(m\right) \sum_{i=0}^{n} \left(-1\right)^{n-i} \frac{C_n^i}{m - i} y_i$$

при найденном значении m:

$$L_4\left(2,2\right) = \frac{1}{4!} v_5\left(2,2\right) \sum_{i=0}^{4} \left(-1\right)^{4-i} \frac{C_4^i}{\left(2,2 - i\right)} y_i,$$

Подставим в формулу выражение для количества сочетаний C_4^i

$$L_4\left(2{,}2\right) = v_5\left(2{,}2\right)\sum_{i=0}^{4}\left(-1\right)^{4-i}\frac{y_i}{\left(2{,}2-i\right)i!\left(4-i\right)!}$$

Этап 3. Вычисляем значения $v_5\left(2{,}2\right)$

$$v_5\left(2{,}2\right) =$$
$$= \left(2{,}2-0\right)\left(2{,}2-1\right)\left(2{,}2-2\right)\left(2{,}2-3\right)\left(2{,}2-4\right) \approx 0{,}76032$$

Этап 4. Вычисляем $\dfrac{1}{\left(2{,}2-i\right)i!\left(n-i\right)!}$ для $i = 0{,}1{,}2{,}3{,}4$

$$i = 0 \to \frac{1}{\left(2{,}2-0\right)4!} \approx 0{,}01894; \quad i \to 1 \to \frac{1}{\left(2{,}2-1\right)\cdot 1\cdot 3!} \approx 0{,}13889;$$

$$i = 2 \to \frac{1}{\left(2{,}2-2\right)\cdot 2!\cdot 2!} \approx 1{,}25$$

$$i = 3 \to \frac{1}{\left(2,2 - 3\right) \cdot 3! \cdot 1} \approx -0,20833;$$

$$i = 4 \to \frac{1}{\left(2,2 - 4\right) 4!} \approx -0,02315.$$

Окончательно имеем

$$L_4\left(2,2\right) = 0,76032 + \left(\left(-1\right)^4 \cdot 0,01894 \cdot y_0 + \left(-1\right)^3 \cdot 0,13889 \cdot y_1 + \right.$$
$$\left. + \left(-1\right)^2 \cdot 1,25 \cdot y^2 - \left(-1\right)^1 \cdot 0,20833 y_3 - \left(-1\right)^0 \cdot 0,02315 y_4 \right)$$

$$f\left(2,2\right) = L_4\left(2,2\right) = 0,76032 \cdot \left(0,01894 \cdot 1,0000 - 0,13889 \cdot 1,0101 + \right.$$
$$\left. +1,25 \cdot 1,0202 + 0,20833 \cdot 1,0305 - 0,02315 \cdot 1,0408\right) \approx 1,0222.$$

Погрешность интерполяционного многочлена Лагранжа для равноотстоящих узлов

Погрешность интерполяционного многочлена Лагранжа для равноотстоящих узлов определяется формулой

$$R_n(x) = \frac{w_{n+1}(m)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = h^{n+1} \frac{v_{n+1}(m)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

где $v_{n+1}(m) = m(m-1)(m-2)...(m-n), \quad \xi \in [a,b].$

В связи с проблемами определения точки ξ для определения погрешности используют приближенные оценки.

Оценка погрешности. Оценка погрешности интерполяции многочленом Лагранжа для равноотстоящих узлов в некоторой произвольной фиксированной точке x^* из отрезка [a, b], $x \in [a, b]$ определяется формулой

$$\left|R_n\right| = \left|f\left(x^*\right) - L_n\left(x^*\right)\right| \le h^{n+1}\frac{C_{n+1}}{\left(n+1\right)!}\left|v_{n+1}\left(m\right)\right|,$$

где $C_{n+1} = \max\left|f^{\left(n+1\right)}\right|$ на $\left[a, b\right]$.

Оценка максимальной погрешности. Оценка максимальной погрешности интерполирования на всем отрезке $[a,\ b]$, т. е. в любой точке $x \in \left[a, b\right]$ имеет вид

$$\left|R_n\right| = \left|f\left(x\right) - L_n\left(x\right)\right| \le h^{n+1}\frac{C_{n+1}}{\left(n+1\right)!}M_n,$$

где на отрезке $\left[a, b\right]$

$$M_n = \max\left|v_{n+1}\left(m\right)\right| = \max\left|m\left(m-1\right)\left(m-2\right)\ldots\left(m-n\right)\right|$$

Обратная интерполяция

Наряду с задачей интерполяции в технических приложениях ставится задача обратного интерполирования.

Пусть известна зависимость $y = f(x)$, в точках x_i, $i = 0,1,\dots,n$, т. е. известны $y_i = f(x_i)$.

Эта информация эквивалентна тому, что известны значения $x_i = g(y_i)$ – обратной функции.

При условии допустимости интерполяции по переменной y можно заменить обратную функцию $g(y)$ интерполирующим многочленом $L_n(y_i) = x_i$, $i = 0,1,\dots,n$.

Пример 5.

Требуется восстановить форму входного сигнала $x(t)$

Связь мгновенных значений входного сигнала $x(t)$ и выходного сигнала $y(t)$ определяется нелинейной динамической характеристикой $y = \varphi(x)$.

Задачу решить методом обратного интерполирования.

x	-0.9	-0.3	0.3	0.9
$y = \varphi(x)$	0.31623	0.83666	1.14017	1.37840

Решение.

Этап 1.

Строим многочлен Лагранжа третьего порядка

$$L_3(y)=\frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)}x_0+$$
$$+\frac{(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)}x_1+$$
$$+\frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)(y_2-y_3)}x_2+$$
$$+\frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_0)(y_3-y_1)(y_3-y_2)}x_3.$$

Подставляя табличные значения, получаем

$$L_3(y)=-0.00638y^3+1.01572y^2+0.01232y-0.9976.$$

Таким образом, форма входного сигнала

$$x(y)=-0.9976-0.1232y+1.01572y^2-0.00638y^3$$