ЛЕКЦІЯ 11
Властивості графів (продовження)

Графи й бінарні відношення

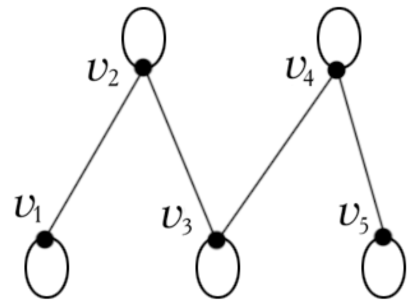
Відношенню R, заданому на множині V взаємно однозначно відповідає орієнтований граф $G(R)$ без кратних ребер з множиною вершин V, у якому ребро (v_i, v_j) існує тільки тоді, коли виконано $v_i R v_j$.

Представимо на графах деякі бінарні відношення.

1. **Рефлексивність.** Відношення R на множині V ***рефлексивне,*** якщо для кожного елемента $v \in V$ справедливе $(v, v) \in R$. На графі це зображається петлею, а матриця суміжності графа з рефлексивними відношеннями містить одиниці на головній діагоналі.

Іншими словами, якщо відношення R рефлексивне, то граф $G(R)$ без кратних ребер має петлі у всіх вершинах.

Приклад. На малюнку показаний приклад графа рефлексивного відношення.



Головна діагональ матриці суміжності $G\left(R\right)$ складається з одиниць.

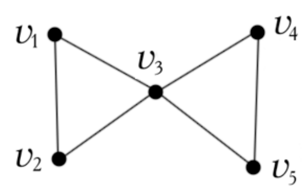
$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} \end{Vmatrix}$$

2. **Антирефлексивність.** Якщо відношення R на множині V ***антирефлексивнк***, то для всіх елементів v множини V справедливе $\left(v, v\right) \notin R$.

Якщо R антирефлексивне, то граф $G\left(R\right)$ без кратних ребер не має петель.

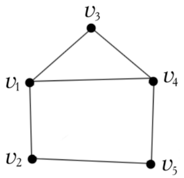
Приклад. На малюнку показаний граф антирефлексивного відношення

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$$



Головна діагональ матриці суміжності $G\left(R\right)$ складається з нулів.

3. **Симетричність.** Відношення R на V називають ***симетричним***, якщо з $\left(v_i, v_j\right) \in R$ випливає $\left(v_j, v_i\right) \in R$ при $v_i \neq v_j$. Матриця суміжності симетричного відношення симетрична щодо головної діагоналі.

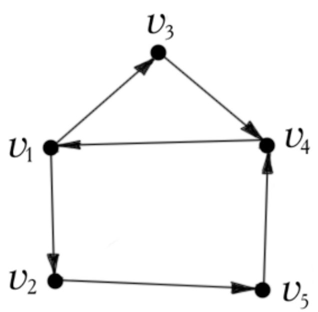


$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\left(v_1, v_2\right) \in R \to \left(v_2, v_1\right) \in R, \left(v_1, v_3\right) \in R \to \left(v_3, v_1\right) \in R,$$
$$\left(v_1, v_4\right) \in R \to \left(v_4, v_1\right) \in R, \left(v_2, v_5\right) \in R \to \left(v_5, v_2\right) \in R,$$
$$\left(v_3, v_4\right) \in R \to \left(v_4, v_3\right) \in R, \left(v_4, v_5\right) \in R \to \left(v_5, v_4\right) \in R.$$

4. **Антисиметричність.** Відношення R на V називають ***антисиметричним***, якщо з $(v_i, v_j) \in R$ випливає $(v_j, v_i) \notin R$ при $v_i \neq v_j$. Матриця суміжності антисиметричного відношення несиметрична щодо головної діагоналі. Антисиметричне відношення завжди представлене орграфом з дугами без повторень.

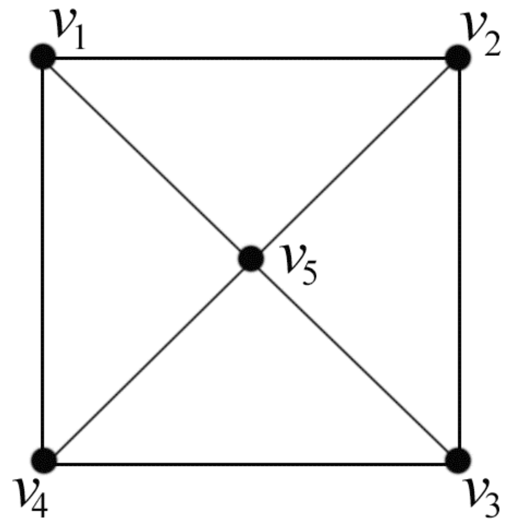
$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$



$$(v_1, v_2) \in R \to (v_2, v_1) \notin R,$$
$$(v_1, v_3) \in R \to (v_3, v_1) \notin R,$$
$$(v_4, v_1) \in R \to (v_1, v_4) \notin R, \ (v_2, v_5) \in R \to (v_5, v_2) \notin R,$$
$$(v_3, v_4) \in R \to (v_4, v_3) \notin R, \ (v_5, v_4) \in R \to (v_4, v_5) \notin R.$$

5. **Транзитивність.** Відношення R на множині V називають ***транзитивним***, якщо з $\left(v_i, v_j\right) \in R$, $\left(v_j, v_k\right) \in R$ випливає $\left(v_i, v_k\right) \in R$ при $v_i, v_j, v_k \in V$ і $v_i \neq v_j, v_j \neq v_k, v_i \neq v_k$. У графі, що задає транзитивне відношення для всякої пари дуг, таких, що кінець першої дуги збігається з початком другий, існує транзитивно замикаюча дуга, що має спільний початок з першою і спільний кінець з другою.

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$



$$\left(v_1, v_5\right) \in R, \left(v_5, v_2\right) \in R \to \left(v_1, v_2\right) \in R;$$
$$\left(v_1, v_5\right) \in R, \left(v_5, v_4\right) \in R \to \left(v_1, v_4\right) \in R;$$
$$\left(v_3, v_5\right) \in R, \left(v_5, v_4\right) \in R \to \left(v_3, v_4\right) \in R;$$
$$\left(v_2, v_5\right) \in R, \left(v_5, v_3\right) \in R \to \left(v_2, v_3\right) \in R.$$

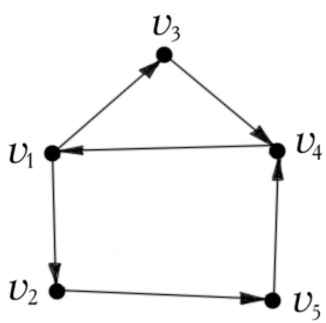
...

$$\left(v_1, v_2\right) \in R, \left(v_2, v_5\right) \in R \to \left(v_1, v_5\right) \in R.$$
$$\left(v_5, v_1\right) \in R, \left(v_1, v_2\right) \in R \to \left(v_5, v_2\right) \in R.$$

...

Відношення R на множині вершин $V = \left\{v_1, v_2, ..., v_5\right\}$ транзитивне, оскільки для довільного ребра в графі виконується умова транзитивності.

6. **Антитранзитивність.** Відношення R на множині V називають ***антитранзитивним***, якщо з $\left(v_i, v_j\right) \in R$, $\left(v_j, v_k\right) \in R$ випливає $\left(v_i, v_k\right) \notin R$ при $v_i, v_j, v_k \in V$ і $v_i \neq v_j, v_j \neq v_k, v_i \neq v_k$. У графі, що задає антитранзитивне відношення для всякої пари дуг, таких, що кінець першої дуги збігається з початком другої, не існує транзитивно замикаючої дуги, яка має спільний початок з першою і спільний кінець з другою.



$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\left(v_1, v_3\right) \in R, \left(v_3, v_4\right) \in R \to \left(v_1, v_4\right) \notin R;$$
$$\left(v_4, v_1\right) \in R, \left(v_1, v_3\right) \in R \to \left(v_4, v_3\right) \notin R;$$
$$\left(v_3, v_4\right) \in R, \left(v_4, v_1\right) \in R \to \left(v_3, v_1\right) \notin R;$$
$$\left(v_4, v_1\right) \in R, \left(v_1, v_2\right) \in R \to \left(v_4, v_2\right) \notin R;$$
$$\left(v_2, v_5\right) \in R, \left(v_5, v_4\right) \in R \to \left(v_2, v_4\right) \notin R;$$
$$\left(v_5, v_4\right) \in R, \left(v_4, v_1\right) \in R \to \left(v_5, v_1\right) \notin R;$$
$$\left(v_1, v_2\right) \in R, \left(v_2, v_5\right) \in R \to \left(v_1, v_5\right) \notin R$$

Відношення R на множині вершин $V = \left\{v_1, v_2, ..., v_5\right\}$ антитранзитивне, оскільки для довільних пар ребер виконується умова антитранзитивності.

Зв'язок між операціями над графами і операціями над відношеннями

1. Нехай $\overline{R}$ – доповнення відношення R на V:

$$\overline{R} = U \setminus R,$$

де U – універсальне (повне) відношення $U = V \times V$, тобто відношення, яке має місце між будь-якою парою елементів з V.

2. Граф $G\left(\overline{R}\right)$ є доповненням графа $G(R)$ (до повного орграфа K з множиною вершин V і множиною ребер

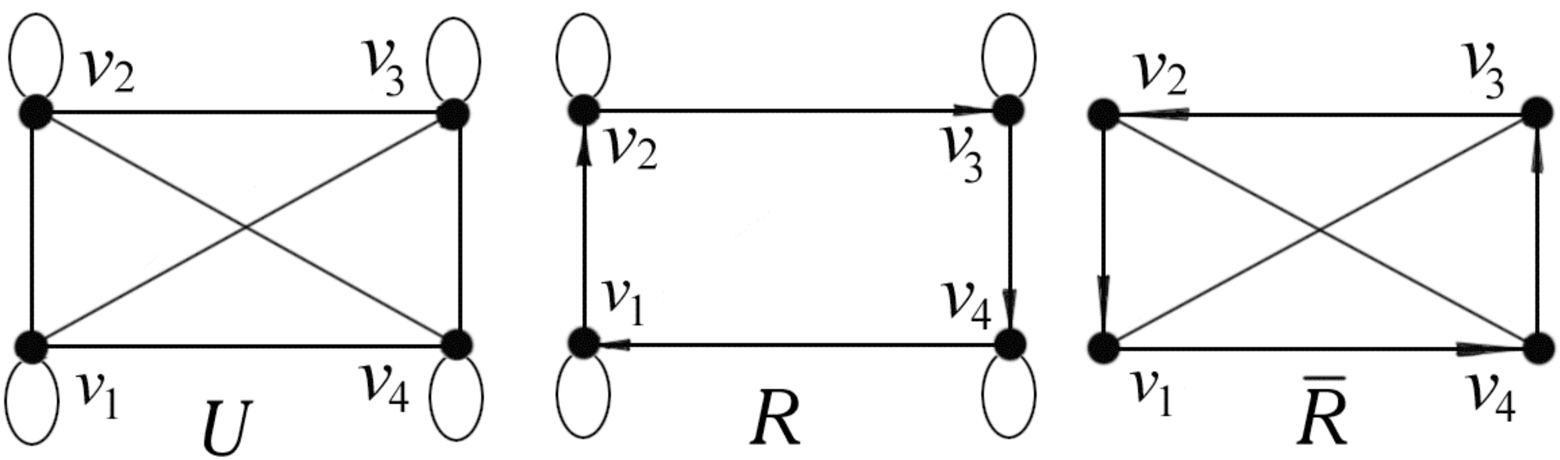
$$E\left(K\right) = V \times V).$$

Приклад. Нехай $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.

$$U=\{(v_1,v_1),(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_1,v_4),(v_2,v_1),(v_2,v_2),(v_2,v_3),(v_2,v_4),$$
$$(v_3,v_1),(v_3,v_2),(v_3,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_1),(v_4,v_2),(v_4,v_3),(v_4,v_4)\}$$

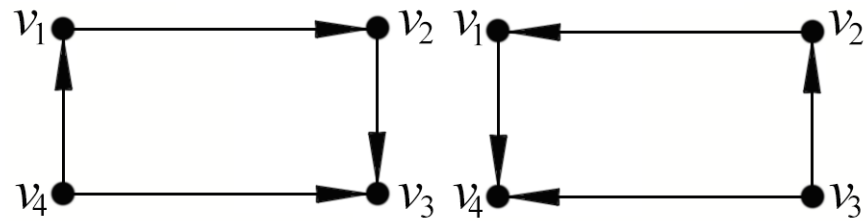
$$R=\{(v_1,v_1),(v_1,v_2),(v_2,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_1),(v_4,v_4)\}$$

$$\overline{R}=\{(v_1,v_3),(v_1,v_4),(v_2,v_1),(v_2,v_4),(v_3,v_1),(v_3,v_2),(v_4,v_2),(v_4,v_3)\}$$



3. Граф зворотного відношення $G\left(R^{-1}\right)$ відрізняється від графа $G\left(R\right)$ тим, що напрямки всіх ребер замінені на зворотні.

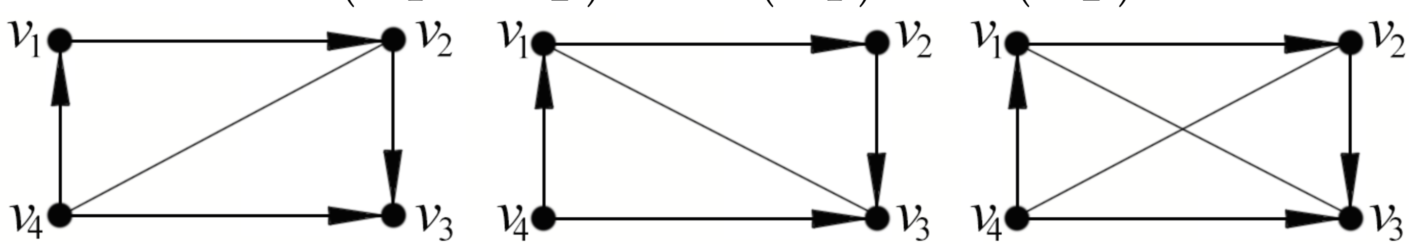
R R^{-1}



$$R=\left\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_4,v_1),(v_4,v_3)\right\};\ R^{-1}=\left\{(v_2,v_1),(v_3,v_2),(v_1,v_4),(v_3,v_4)\right\}$$

4. Граф об'єднання двох відносин, заданих на V, $G\left(R_1 \cup R_2\right)$ є графом об'єднання двох графів $G\left(R_1\right)$ і $G\left(R_2\right)$:

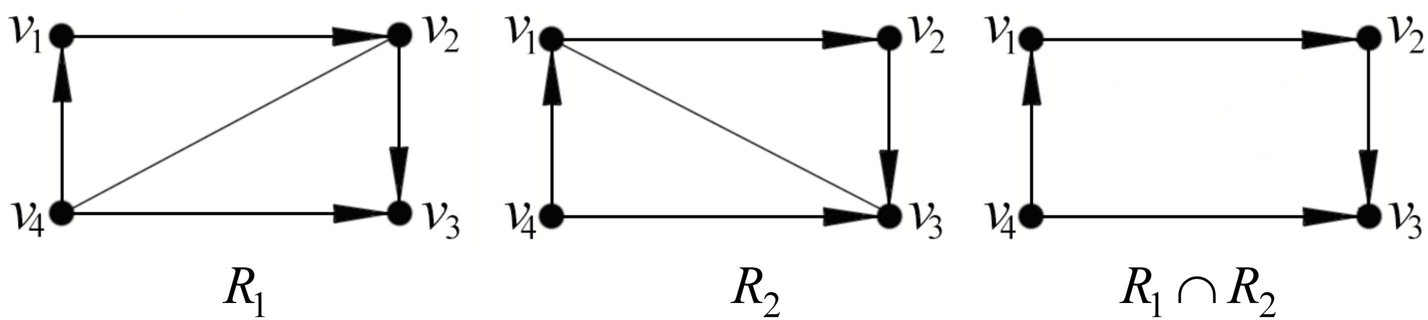
$$G\left(R_1 \cup R_2\right) = G\left(R_1\right) \cup G\left(R_2\right).$$



R_1 R_2 $R_1 \cup R_2$

5. Граф перетину відношень $R_1 \cap R_2$ на V $G(R_1 \cap R_2)$ є графом перетинання двох графів $G(R_1)$ і $G(R_2)$:

$$G(R_1 \cap R_2) = G(R_1) \cap G(R_2).$$

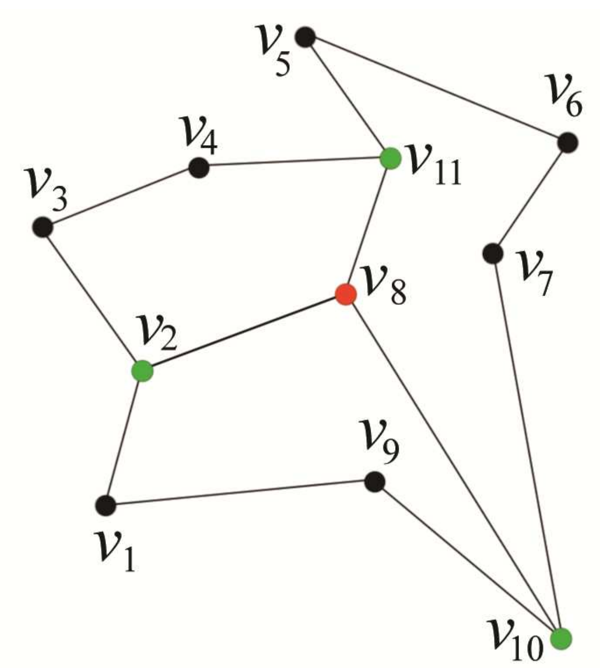


Багатозначні відображення

Пряме відображення першого порядку вершини v_i – це множина таких вершин v_j графа $G(V,E)$, для яких існує дуга (v_i, v_j), тобто

$$\Gamma^+(v_i) = \left\{ v_j \middle| (v_i, v_j) \in E, i, j = 1, 2, \ldots, n \right\},$$

де $n = |V|$ – кількість вершин графа

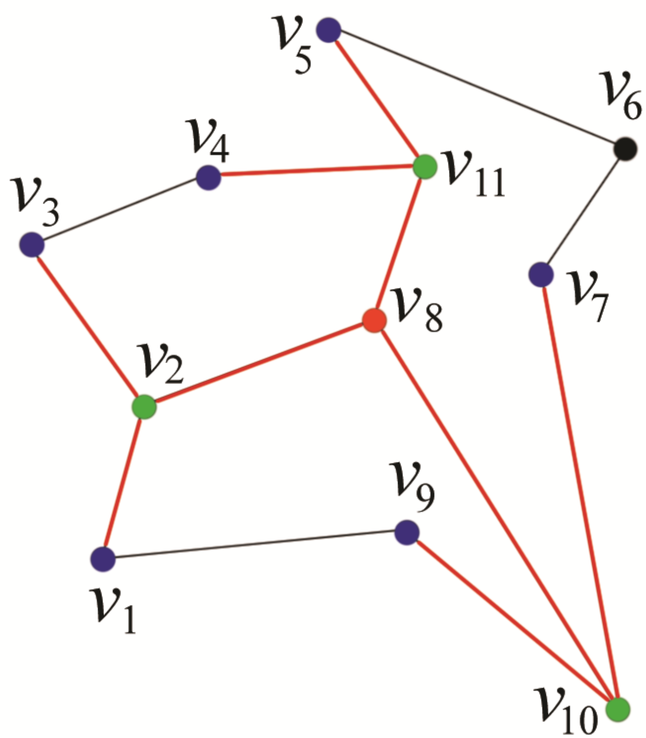


$i = 8 \quad v_i = v_8$

$$\Gamma^+(v_8) = \{v_2, v_{11}, v_{10}\}$$

Пряме відображення другого порядку вершини v_i – це пряме відображення від прямого відображення першого порядку

$$\Gamma^{+2}\left(v_i\right) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+1}\left(v_i\right)\right).$$



$$i = 8, \quad v_i = v_8$$

$$\Gamma^{+}\left(v_8\right) = \left\{v_2, v_{11}, v_{10}\right\}$$

$$\Gamma^{+2}\left(v_8\right) = \left\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_7, v_9\right\}$$

Аналогічно можна записати відображення 3-го порядку

$$\Gamma^{+3}\left(v_i\right) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+2}\left(v_i\right)\right) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+}\left(\Gamma^{+1}\left(v_i\right)\right)\right),$$

Відображення для 4-го порядку

$$\Gamma^{+4}\left(v_i\right) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+3}\left(v_i\right)\right) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+}\left(\Gamma^{+}\left(\Gamma^{+1}\left(v_i\right)\right)\right)\right),$$

і т.д., для p-го порядку.

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

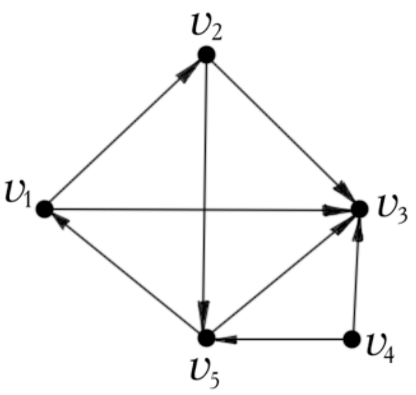
$$\Gamma^{+p}\left(v_i\right) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+(p-1)}\left(v_i\right)\right)$$

Приклад. Знайдемо прямі багатозначні відображення для графа, показаного на малюнку:

$$\Gamma^{+1}(v_1) = \{v_2, v_3\},$$
$$\Gamma^{+2}(v_1) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+}(v_1)\right) = \Gamma^{+}(v_2, v_3) = \{v_3, v_5\},$$
$$\Gamma^{+3}(v_1) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+2}(v_1)\right) = \Gamma^{+}(v_3, v_5) = \{v_3, v_1\},$$
$$\Gamma^{+4}(v_1) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+3}(v_1)\right) = \Gamma^{+}(v_3, v_1) = \{v_2, v_3\}.$$

Далі легко помітити, що

$$\Gamma^{+1}(v_1) = \Gamma^{+4}(v_1) = \Gamma^{+7}(v_1)\ldots.$$
$$\Gamma^{+2}(v_1) = \Gamma^{+5}(v_1) = \Gamma^{+8}(v_1)\ldots.$$
$$\Gamma^{+3}(v_1) = \Gamma^{+6}(v_1) = \Gamma^{+9}(v_1)\ldots.$$



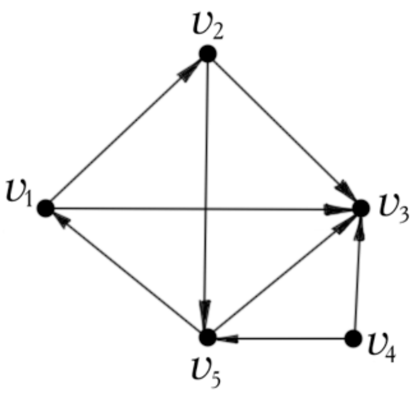
Аналогічно знаходимо відображення для інших вершин графа.

Зворотне відображення першого порядку вершини v_i – це множина таких вершин v_j графа $G(V,E)$, для яких існує дуга (v_j, v_i), тобто

$$\Gamma^{-}(v_i) = \left\{ v_j \middle| (v_j, v_i) \in E, i, j = 1, 2, \ldots, n \right\},$$

де $n = |V|$ – кількість вершин графа

Зворотне відображення другого й наступних порядків вершини v_i – це зворотне відображення від зворотного відображення попереднього порядку



$$\Gamma^{-2}(v_i) = \Gamma^{-}\left(\Gamma^{-1}(v_i)\right).$$

$$\Gamma^{-3}(v_i) = \Gamma^{-}\left(\Gamma^{-2}(v_i)\right) = \Gamma^{-}\left(\Gamma^{-}\left(\Gamma^{-1}(v_i)\right)\right)$$

....

$$\Gamma^{-p}(v_i) = \Gamma^{-}\left(\Gamma^{-(p-1)}(v_i)\right)$$

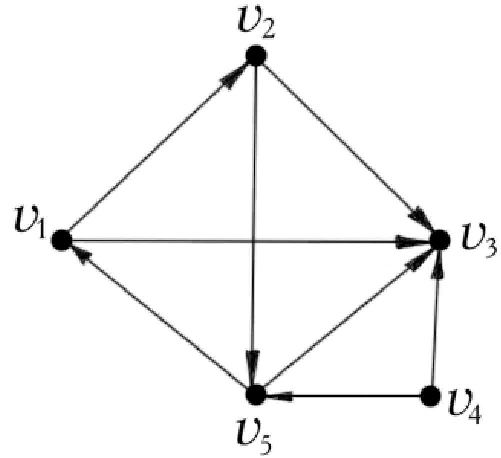
Приклад. Знайдемо зворотні багатозначні відображення для графа, показаного на рисунку :

$$\Gamma^{-}(v_1)=\{v_5\},$$

$$\Gamma^{-2}(v_1)=\Gamma^{-}\left(\Gamma^{-1}(v_1)\right)=\Gamma^{-}(v_5)=\{v_2,v_4\},$$

$$\Gamma^{-3}(v_1)=\Gamma^{-}\left(\Gamma^{-2}(v_1)\right)=\Gamma^{-}(v_2,v_4)=\{v_1\},$$

$$\Gamma^{-4}(v_1)=\Gamma^{-}\left(\Gamma^{-3}(v_1)\right)=\Gamma^{-}(v_1)=\{v_5\}$$ і т.д.



Відображення множини вершин

Якщо розглянуте раніше відображення застосовується одночасно до всіх вершин графа, то воно може бути отримане з виразу:

$$\Gamma^{+}\left(V\right)=\bigcup_{v\in V}\Gamma^{+}\left(v\right).$$

Якщо $V=\left\{V_1,V_2,...,V_n\right\}$, то справедливі

співвідношення:

$$\Gamma^{+}\left(\bigcup_{i=1}^{n}V_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}\Gamma^{+}\left(V\right)_i$$

Визначення графа і його властивостей з використанням відображень

Граф. Говорять, що граф $G\left(V,\Gamma\right)$ заданий однозначно, якщо задані:

1. Непуста множина V.
2. Відображення $\Gamma : V \to V$.

Пари вершин v_i і v_j з'єднують ребром за умови, що $v_j \in \Gamma^+\left(v_i\right)$.

Підграф. Підграфом графа $G\left(V,\Gamma\right)$ називають граф виду $G\left(A,\Gamma_A\right)$, де $A \subset V$, а відображення Γ_A визначене в такий спосіб:

$$\Gamma_A^+\left(v\right) = \Gamma^+\left(v\right) \cap A,$$

Тобто, відображеня Γ_A включає тільки ті вершини, що входять в множину A

Компонента зв'язності графа

Компонента зв'язності – **деяка множина вершин графа,** у якій між довільними двома вершинами **існує шлях** з однієї в іншу, і не існує жодного шляху з вершини цієї множини у вершину не з цієї множини.

Компонента зв'язності – це граф, породжений деякою множиною C_v, де C_v – множина, що включає вершину v і усі ті вершини графа, які можуть бути з'єднані з нею ланцюгом.

Теорема про розбиття графа. Різні компоненти графа $G\left(V,\Gamma\right)$ утворюють розбиття множини V, тобто

1. $C_v \neq \varnothing$,
2. $v_i, v_j \in V, C_{v_i} \neq C_{v_j} \Rightarrow C_{v_i} \cap C_{v_j} = \varnothing$,
3. $\bigcup C_v = V$.

Теорема про зв'язний граф. Граф є зв'язним графом тоді й тільки тоді, коли він складається з одного компонента зв’язності.

Між будь-якою парою вершин зв'язного графа існує як мінімум один шлях.

Досяжні і контрдосяжні вершини

Визначення. Вершину w графа D (або орграфа) називають **досяжною** з вершини v, якщо $w = v$, або існує шлях з v у w (маршрут від v у w).

Визначення. Вершину w графа D (або орграфа) називають **контрдосяжною** з вершини v, якщо існує шлях з w у v (маршрут від w у v).

Матриця досяжності

Матрицею досяжності називається матриця $n \times n$ $R = \left(r_{ij} \right), i, j = 1, 2, ..., n$, де n – число вершин графа, а кожний елемент визначається в такий спосіб:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } v_j \text{ досяжна з } v_i, \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Множина досяжних вершин $R\left(v_i \right)$ графа G. Множина $R\left(v_i \right)$ вершин, досяжних із заданої вершини v_i, складається з таких елементів v_j, для яких елемент r_{ij} в матриці досяжності дорівнює 1.

Усі *діагональні елементи* r_{ii} в матриці R дорівнюють 1, оскільки кожна вершина досяжна з себе самої зі шляхом довжиною 0.

Відображення і досяжність

Пряме відображення 1-го порядку $\Gamma^{+1}\left(v_i\right)$ – це множина таких вершин v_j, які досяжні з v_i з використанням шляхів довжиною 1.

Пряме відображення 2-го порядку – це множина $\Gamma^{+}\left(\Gamma^{+1}\left(v_i\right)\right)=\Gamma^{+2}\left(v_i\right)$, яка складається з вершин, досяжних з v_i з використанням шляхів довжиною 2.

Пряме відображення р-го порядку – це множина $\Gamma^{+p}\left(v_i\right)$, яка складається з вершин, досяжних із v_i за допомогою шляхів довжини p.

Визначення множини досяжності через відображення

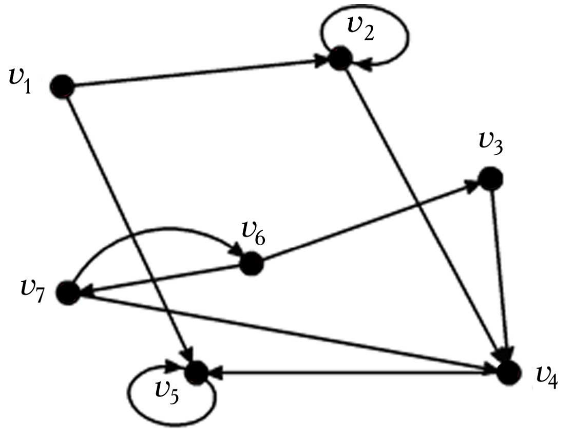
Будь-яка вершина графа G, яка досяжна з v_i, повинна бути досяжна з використанням шляху (або шляхів) довжиною 0 або 1, або 2, ..., або p. Тоді множина вершин, досяжних з вершини v_i, можна представити у вигляді

$$R\left(v_i\right) = \left\{v_i\right\} \cup \Gamma^{+1}\left(v_i\right) \cup \Gamma^{+2}\left(v_i\right) \cup \ldots \cup \Gamma^{+p}\left(v_i\right).$$

Побудова матриці досяжності

Будуємо матрицю по рядках.

1. Знаходимо досяжні множини $R\left(v_i\right)$ для всіх вершин $v_i \in V$.
2. Для $i-$го рядка $r_{ij} = 1$, якщо $v_j \in R\left(v_i\right)$, а якщо ж $v_j \notin R\left(v_i\right)$, то $r_{ij} = 0$.



а

$\mathbf{C} =$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	0	1	0	0	1	0	0
v_2	0	1	0	1	0	0	0
v_3	0	0	0	1	0	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0	0
v_5	0	0	0	0	1	0	0
v_6	0	0	1	0	0	0	1
v_7	0	0	0	1	0	1	0

б

$\mathbf{R} =$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	1	1	0	1	1	0	0
v_2	0	1	0	1	1	0	0
v_3	0	0	1	1	1	0	0
v_4	0	0	0	1	1	0	0
v_5	0	0	0	0	1	0	0
v_6	0	0	1	1	1	1	1
v_7	0	0	1	1	1	1	1

в

$\mathbf{Q} =$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	1	0	0	0	0	0	0
v_2	1	1	0	0	0	0	0
v_3	0	0	1	0	0	1	1
v_4	1	1	1	1	0	1	1
v_5	1	1	1	1	1	1	1
v_6	0	0	0	0	0	1	1
v_7	0	0	0	0	0	1	1

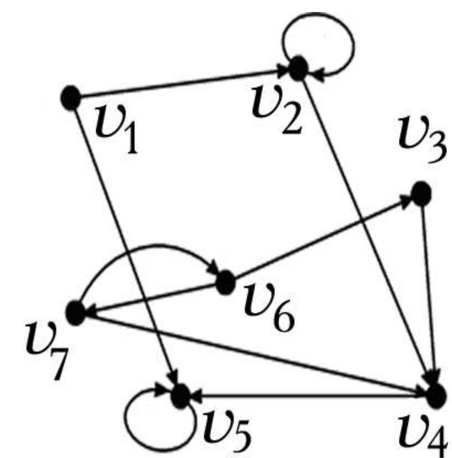
г

Рисунок. Досяжність у графі: а – граф; б – матриця суміжності; в – матриця досяжності; г – матриця контрдосяжності.

Множини досяжностей знаходять у такий спосіб:

$$R(v_1) = \{v_1\} \cup \Gamma^{+1}(v_1) \cup \Gamma^{+2}(v_1) \cup \Gamma^{+3}(v_1) =$$
$$= \{v_1\} \cup \{v_2, v_5\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$$

$$R(v_2) = \{v_2\} \cup \Gamma^{+1}(v_2) \cup \Gamma^{+2}(v_2) =$$
$$= \{v_2\} \cup \{v_2, v_4\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} = \{v_2, v_4, v_5\}$$



$$R(v_3) = \{v_3\} \cup \Gamma^{+1}(v_3) \cup \Gamma^{+2}(v_3) \cup \Gamma^{+3}(v_3) =$$
$$= \{v_3\} \cup \{v_4\} \cup \{v_5\} \cup \{v_5\} = \{v_3, v_4, v_5\}$$

$$R(v_4) = \{v_2\} \cup \Gamma^{+1}(v_2) \cup \Gamma^{+2}(v_2) =$$
$$= \{v_4\} \cup \{v_5\} \cup \{v_5\} = \{v_4, v_5\}$$

$$R(v_5) = \{v_5\} \cup \Gamma^{+1}(v_5) = \{v_5\} \cup \{v_5\} = \{v_5\}$$

$$R(v_6) = \{v_6\} \cup \{v_3, v_7\} \cup \{v_4, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \cup \ldots$$
$$\cup \{v_4, v_5, v_6\} = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\},$$

$$R(v_7) = \{v_7\} \cup \{v_4, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}.$$

Матриця контрдосяжності

Матриця контрдосяжності – це матриця $n \times n$ $\mathbf{Q} = (q_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, де n – число вершин графа, визначається в такий спосіб:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо з вершини } v_j \text{ може бути досягнута вершина } v_i, \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Контрдосяжною множиною $Q(v_i)$ називають множину вершин, з яких можна досягти вершину v_i. Контрдосяжну множину $Q(v_i)$ визначають з виразу:

$$Q(v_i) = \{v_i\} \cup \Gamma^{-1}(v_i) \cup \Gamma^{-2}(v_i) \cup \dots \cup \Gamma^{-p}(v_i).$$

Співвідношення між матрицями досяжності і контрдосяжності

Визначення. **Матриця контрдосяжності** дорівнює транспонованій матриці досяжності $Q = R^T$.

Дане співвідношення походить з визначення матриць, оскільки стовпець v_i матриці Q збігається з рядком v_i матриці R.

Слід зазначити, що оскільки всі елементи матриць R і Q дорівнюють 1 або 0, те кожний рядок можна зберігати у двійковій формі, заощаджуючи витрати пам'яті комп’ютера. Матриці R і Q зручні для обробки на комп’ютері, тому що з обчислювальної точки зору основними операціями є швидкодіючі логічні операції.

Числа, що характеризують граф

Цикломатичне число

Цикломатичним числом графа $G = (V, E)$ називається число

$$m = N - n + p,$$

де $N = |E|$ – число ребер графа,

$n = |V|$ – число вершин графа,

p – число компонентів зв’язності графа.

Для зв'язного графа $m = N - n + 1$.

Теорема. Цикломатичне число графа дорівнює найбільшій кількості незалежних циклів.

Цикли в графі

Циклом називають шлях, у якім перша й остання вершини збігаються.

Довжина циклу – число складових його *ребер*.

Простий цикл – це цикл без повторюваних ребер.

Елементарний цикл – це простий цикл без повторюваних вершин.

Наслідок

Петля – елементарний цикл.

Вектор-цикл, незалежні цикли

Поставимо у відповідність циклу μ графа G деякий вектор.

Для цього додамо кожному ребру графа довільну орієнтацію.

Якщо цикл μ проходить через ребро e_k, де $1 \le k \le N$, у напрямку його орієнтації r_k раз і в протилежному напрямку s_k раз, то вважаємо $c^k = r_k - s_k$.

Вектор $\mathbf{c} = \left(c^1, c^2, c^3, \ldots, c^k, \ldots, c^N\right)$ називають **вектором-циклом**, відповідним до циклу μ.

Цикли μ_1 й μ_2 називають **незалежними**, якщо відповідні їм вектори $\mathbf{c}_1 = \left(c_1^1, c_1^2, c_1^3, \ldots, c_1^k, \ldots, c_1^N\right)$ і $\mathbf{c}_2 = \left(c_2^1, c_2^2, c_2^3, \ldots, c_2^k, \ldots, c_2^N\right)$ лінійно незалежні.

Властивості циклів

1. Зв'язний граф G не має циклів тоді й тільки тоді, коли цикломатичне число $m = 0$. Такий граф є деревом.

2. Зв'язний граф G має єдиний цикл тоді й тільки тоді, коли цикломатичне число $m = 1$.

Визначення цикломатичного числа

Цикломатичне число зв'язного графа можна визначити як число ребер, яке потрібно вилучити, щоб граф став деревом.

Визначення лінійної незалежності векторів-циклів.

З курсу лінійної алгебри випливає, що вектори $\mathbf{c}_1 = \left(c_1^1, c_1^2, c_1^3, \ldots, c_1^k, \ldots, c_1^N\right)$ й $\mathbf{c}_2 = \left(c_2^1, c_2^2, c_2^3, \ldots, c_2^k, \ldots, c_2^N\right)$ можна представити як вектори в просторі R^N. Нехай α – деяка змінна $\alpha \in R$. Тоді

$\alpha\mathbf{c}_1 = \left(\alpha c_1^1, \alpha c_1^2, \alpha c_1^3, \ldots, \alpha c_1^k, \ldots, \alpha c_1^N\right)$ і

$\alpha\mathbf{c}_2 = \left(\alpha c_2^1, \alpha c_2^2, \alpha c_2^3, \ldots, \alpha c_2^k, \ldots, \alpha c_2^N\right)$.

$$\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 = \left(c_1^1 + c_2^1, c_1^2 + c_2^2, c_1^3 + c_2^3, \ldots, c_1^k + c_2^k, \ldots, c_1^N + c_2^N\right).$$

Деяку множину $E \subset R^N$ називають векторним підпростором, коли

1. $\alpha \in R$, $\mathbf{c} \in E \Rightarrow \alpha\mathbf{c} \in E$.
2. $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in E \Rightarrow \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \in E$.

Говорять, що вектори $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \ldots.\mathbf{c}_i$ з R^N лінійно незалежні, якщо

$$\alpha_1\mathbf{c}_1 + \alpha_2\mathbf{c}_2 + \ldots + \alpha_i\mathbf{c}_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_i = 0.$$

Навпаки, якщо при $\alpha_1\mathbf{c}_1 + \alpha_2\mathbf{c}_2 + \ldots + \alpha_i\mathbf{c}_i = 0$ деякі α_i одночасно не дорівнюють нулю, то говорять, що дані вектори лінійно залежні.

Якщо, наприклад, $\alpha_1 \neq 0$, то можна записати

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{c}_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\mathbf{c}_3 + \ldots + \frac{\alpha_i}{\alpha_1}\mathbf{c}_i = -\mathbf{c}_1.$$

У цьому випадку вектор $\mathbf{c}_1$ лінійно виражений через вектори $\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \ldots, \mathbf{c}_i$.

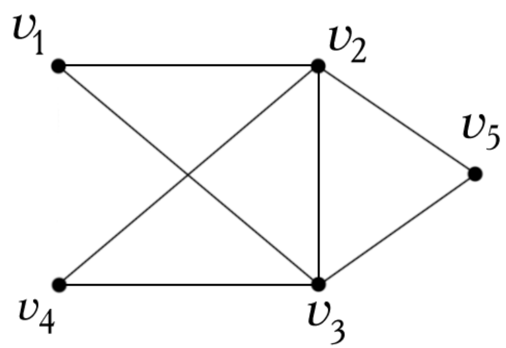
Для визначення факту лінійної залежності векторів необхідно розв'язати систему

$$\alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + ... + \alpha_i \mathbf{c}_i =$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_1^2 \\ \vdots \\ c_1^N \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} c_2^1 \\ c_2^2 \\ \vdots \\ c_2^N \end{pmatrix} + ... + \alpha_i \begin{pmatrix} c_i^1 \\ c_i^2 \\ \vdots \\ c_i^N \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \alpha_1 c_1^1 + \alpha_2 c_2^1 + ... + \alpha_i c_i^1 = 0, \\ \alpha_1 c_1^2 + \alpha_2 c_2^2 + ... + \alpha_i c_i^2 = 0, \\ ... \\ \alpha_1 c_1^N + \alpha_2 c_2^N + ... + \alpha_i c_i^N = 0. \end{cases}$$

Приклад. Визначимо цикломатичне число графа, показаного на малюнку.



У розглянутому графі число вершин $n = 5$, число ребер $N = 7$.
Оскільки граф є зв'язним, то число компонентів зв’язності $p = 1$.

Таким чином, $m = N - n + p = 7 - 5 + 1 = 3$.

Число внутрішньої стійкості

Нехай дано граф $G\left(V,\Gamma\right)$. Множину $S \subset V$ називають внутрішньо стійким, якщо ніякі дві вершини, що входять в S, не є суміжними. Іншими словами сформулюємо цю умову, використовуючи відображення першого порядку:

$$\Gamma^{+}\left(S\right) \cap S = \varnothing.$$

Якщо позначити через Φ сімейство всіх внутрішньо стійких множин графа, то для нього будуть справедливі співвідношення:

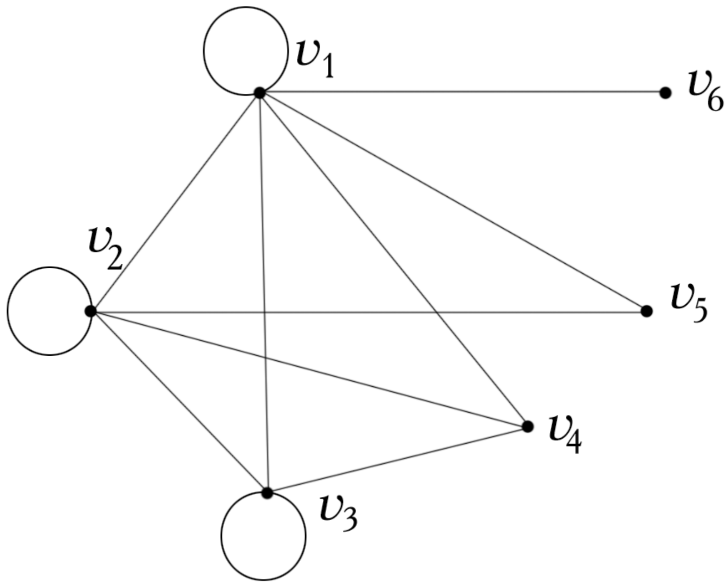
1. $\varnothing \in \Phi$, $S \in \Phi$.
2. Якщо $A \subset S$, то $A \in \Phi$.

Визначення. Числом *внутрішньої стійкості* графа G є величина, яку визначають з виразу:

$$a = \max_{S \in \Phi} \left|S\right|.$$

Визначення $S \subset V$ *називають множиною внутрішньої стійкості, якщо всі вершини з* S *не суміжні між собою. Потужність найбільшої множини внутрішньої стійкості називають числом внутрішньої стійкості.*

Приклад. Знайдемо числа внутрішньої й стійкості графа.



Найбільша множина внутрішньої стійкості для нашого графа має вигляд $S = \left\{v_4, v_5, v_6\right\}$ (при додаванні будь-яких інших вершин будемо одержувати суміжні вершини). Відповідно, *число внутрішньої стійкості* графа G рівно $a = 3$.

Число зовнішньої стійкості

Нехай даний граф $G\left(V,\Gamma\right)$. Говорять, що множина $T \subset V$ зовні стійка, якщо для кожної вершини $v \notin T$ маємо $\Gamma^{+}\left(v\right) \cap T \neq \varnothing$, інакше кажучи $V \setminus T \subset \Gamma^{-1}\left(T\right)$.

Якщо Ψ – сімейство всіх зовні стійких множин графа, то для нього слушні такі співвідношення:

1. $T \in \Psi$.

2. Якщо $T \subset A$, то $A \in \Psi$.

Визначення

Число *зовнішньої стійкості* b графа G є величина, яку одержують з виразу:

$$b = \min_{T \in \Psi} \left|T\right|.$$

Зовні стійка множина – множина вершин T таких, що будь-яка вершина графа або належить T або суміжна з вершиною з T.

Приклад. Для представленого графа найменша множина зовнішньої стійкості має вигляд $T = \{v_1\}$ (тому що будь-яка інша вершина (не приналежна T) з'єднана з вершиною v_1 з T).

Число зовнішньої стійкості графа G рівно $b = 1$.