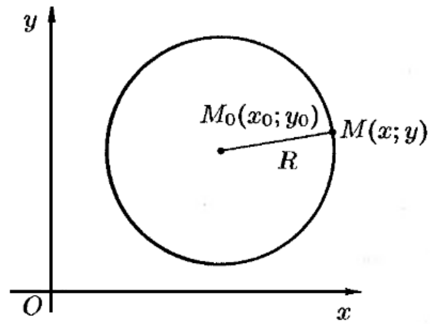
12 Криві другого порядку на площині. Коло, еліпс, гіпербола, парабола.

12.1 Коло, його канонічне рівняння.

Означення 12.1. *Колом* називається геометричне місце точок площини таких, що всі точки знаходяться на однаковій відстані R від фіксованої точки площини, яка називається центром кола.



Нехай на площині задано декартову систему координат Oxy. Складемо рівняння кола. Для цього зафіксуємо точку площини — центр кола $M_0(x_0, y_0)$. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка кола. Із означення випливає, що $|M_0M| = R$, тобто

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R.$$

Звідси отримуємо рівняння

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{12.1}$$

Рівняння (12.1) називається *канонічним рівнянням кола.* Якщо $x_0 = y_0 = 0$, то центр кола знаходиться у початку координат.

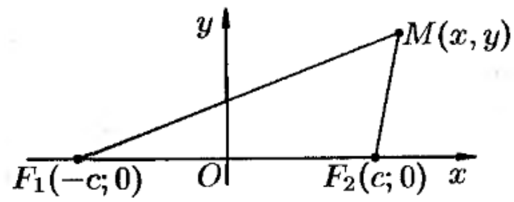
Отже, довільна точка, що належить колу, у деякій декартовій системі координат задовольняє рівняння (12.1).

12.2 Еліпс, його канонічне рівняння.

Означення 12.2. *Еліпсом* називається геометричне місце точок площини таких, що сума відстаней від кожної з них до двох фіксованих точок площини, які називаються *фокусами*, є величиною сталою і більшою за відстань між фокусами.

Канонічне рівняння еліпса. Зафіксуємо дві точки площини — фокуси F_1 і F_2. Розглянемо на площині таку декартову систему координат Oxy, що вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2, а точка O є серединою відрізка F_1F_2. Таким чином, $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$, де c — відоме додатне дійсне число.

Нехай $M(x, y)$ — довільна точка еліпса, та сума відстаней від точки $M(x, y)$ до фокусів дорівнює $2a$, тобто $|MF_1| + |MF_2| = 2a$. Відрізки $|MF_1|$ і $|MF_2|$ називаються *фокальними радіусами*.



Оскільки $|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, то

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

звідки

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

За означенням еліпса $a > c$. Тому, покладаючи $a^2 - c^2 = b^2$, отримаємо рівняння

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

звідки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (12.2)$$

Рівняння (12.2) називається *канонічним рівнянням еліпса.* Зауважимо, що у випадку, коли $a = b$, рівняння (12.2) описує на площині коло з центром у початку координат та радіуса $R = a$.

Отже, довільна точка, що належить еліпсу, у деякій декартовій системі координат задовольняє рівняння (12.2).

Форма та характеристики еліпса. Дослідимо за рівнянням (12.2) форму та розташування еліпса.

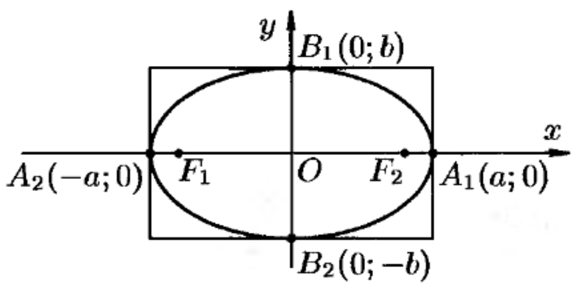
1. Змінні x та y входять у рівняння (12.2) у парних степенях. Тому, якщо точка (x, y) належить еліпсу, то і точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ також належать еліпсу.

Отже, фігура симетрична відносно осей Ox та Oy, а також точки $O(0,0)$, яку називають центром еліпса.

2. Знайдемо точки перетину еліпса з осями координат. Підставивши у рівняння (12.2) $y = 0$, отримаємо, що вісь Ox еліпс перетинає у точках $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$. Поклавши $x = 0$, отримаємо дві точки $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$, в яких еліпс перетинає вісь Oy. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 називають *вершинами* еліпса. Відрізки A_1A_2 та B_1B_2, а також їх довжини $2a$ і $2b$ називають відповідно *великою* та *малою осями* еліпса. Числа a і b називають відповідно *великою* та *малою півосями* еліпса.

3. З рівняння (12.2) також випливає, що $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ і $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$, звідки $-a \leq x \leq a$ і $-b \leq y \leq b$. Тобто всі точки еліпса знаходяться всередині прямокутника, утвореного прямими $x = \pm a$ і $y = \pm b$.

4. Візьмемо на еліпсі точку (x,y) у першій чверті, тобто $x \geq 0$, $y \geq 0$, а тому $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq a$. Оскільки $y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}} < 0$, при $0 < x < a$, то функція монотонно спадає при $0 < x < a$. Аналогічно, оскільки $y'' = -\frac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} < 0$, при $0 < x < a$, то функція є опуклою вгору при $0 < x < a$. Таким чином, еліпс є замкненою овальною кривою. За встановленими характеристиками побудуємо еліпс:



5. Відношення половини відстані між фокусами до більшої півосі $\frac{c}{a}$ називається *ексцентриситетом* еліпса і позначається літерою ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Зауважимо, що $0 < \varepsilon < 1$. Перепишемо ексцентриситет наступним чином:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

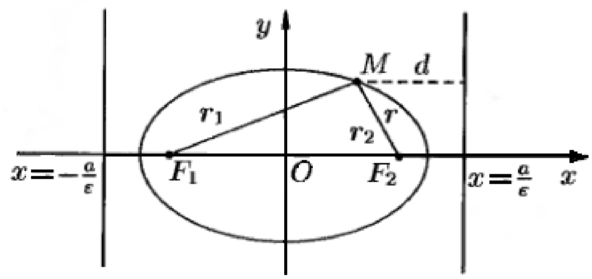
тобто

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Звідси випливає, що чим меншим є ексцентриситет, тим меньше сплющений еліпс.

6. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка еліпса. Розглянемо фокальні радіуси $|MF_1| = r_1$ і $|MF_2| = r_2$. Тоді $r_1 + r_2 = 2a$, і мають місце рівності:

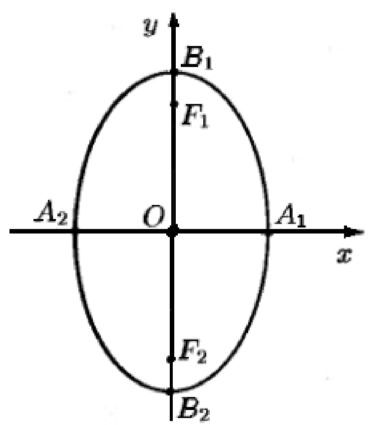
$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$



Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами* еліпса. Значення директрис еліпса міститься у наступній теоремі.

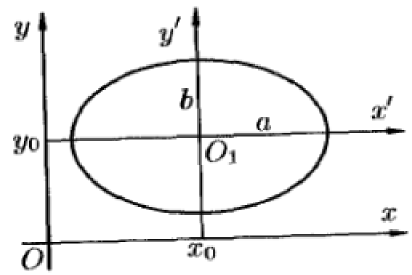
Твердження 12.1. *Якщо r — відстань від довільної точки еліпса до одного з двох фокусів, а d — відстань від цієї ж точки до відповідної цьому фокусу директриси, то відношення $\frac{r}{d}$ є величиною сталою, рівною ексцентриситету.*

7. Якщо $a < b$, то рівняння (12.2) описує еліпс, більша вісь якого $2b$ лежить на осі Oy, а мала вісь $2a$ — на осі Ox. При цьому фокуси знаходяться у точках $F_1(0, c)$ $F_2(0, -c)$, де $c^2 = b^2 - a^2$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$, а директриси мають рівняння $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.



8. Якщо центр еліпса знаходиться у точці $O_1(x_0, y_0)$, то його канонічне рівняння має вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$



При цьому, якщо $a > b$, то фокуси знаходяться у точках $F_1(x_0+c, y_0)$ і $F_2(x_0-c, y_0)$, а директриси задаються рівняннями: $x = x_0 \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

9. Канонічне рівняння еліпса (12.2) можна подати у параметричному вигляді наступним чином:

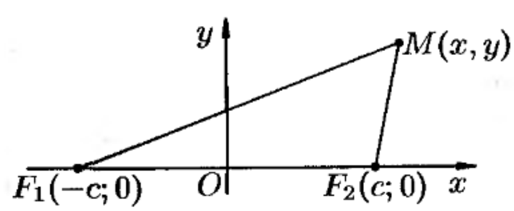
$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

12.3 Гіпербола, її канонічне рівняння.

Означення 12.3. *Гіперболою* називається геометричне місце точок площини таких, що модуль різниці відстаней від кожної з них до двох фіксованих точок площини, які називаються *фокусами*, є величиною сталою і меншою за відстань між фокусами.

Канонічне рівняння гіперболи. Зафіксуємо дві точки площини — фокуси F_1 і F_2. Розглянемо на площині таку декартову систему координат Oxy, що вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2, а точка O є серединою відрізка F_1F_2. Таким чином, $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$, де c — відоме додатне дійсне число.

Нехай $M(x, y)$ — довільна точка гіперболи. За означенням гіперболи модуль різниці відстаней від точки $M(x, y)$ до фокусів є сталою величиною. Позначимо це число $2a$. А саме, $||MF_1| - |MF_2|| = 2a$. Відрізки $|MF_1|$ і $|MF_2|$ називаються *фокальними радіусами*.



Таким чином, $|MF_1| - |MF_2| = \pm 2a$, звідки

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Спростивши це рівняння, отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{12.3}$$

де $b^2 = c^2 - a^2$. Рівняння (12.3) називається *канонічним рівнянням гіперболи.* Отже, довільна точка, що належить гіперболі, у деякій декартовій системі координат задовольняє рівняння (12.3).

Форма та характеристики гіперболи. Дослідимо за рівнянням (12.3) форму та розташування гіперболи.

1. Змінні x та y входять у рівняння (12.3) у парних степенях. Тому, якщо точка (x, y) належить гіперболі, то і точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ також належать гіперболі. Отже, фігура симетрична відносно осей Ox та Oy, а також точки $O(0, 0)$, яку називають центром гіперболи.

2. Знайдемо точки перетину гіперболи з осями координат. Підставивши у рівняння (12.3) $y = 0$, отримаємо, що гіпербола перетинає вісь Ox у точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$. Поклавши $x = 0$, отримаємо рівняння $y^2 = -b^2$, яке не має розв'язків. Отже, гіпербола не перетинає вісь Oy. Точки A_1, A_2 називаються *вершинами* гіперболи.

Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називається *дійсною віссю* гіперболи, а відрізок $B_1B_2 = 2b$ — *уявною віссю* гіперболи. Числа a і b називаються відповідно *дійсною* та *уявною півосями* гіперболи. Прямокутник, утворений осями $2a$ та $2b$ називається головним прямокутником гіперболи.

3. З рівняння (12.3) випливає, що $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$, тобто $|x| \geq a$. Це означає, що всі точки гіперболи розташовані справа від прямої $x = a$ (*права гілка гіперболи*) і зліва від прямої $x = -a$ (*ліва гілка гіперболи*).

4. Візьмемо на гіперболі точку (x, y) у першій чверті, тобто $x \geq 0$, $y \geq 0$, а тому $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \geq a$. Оскільки $y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} > 0$, при $x > a$, то функція монотонно зростає при $x > a$. Аналогічно, оскільки $y'' = -\frac{ab}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} < 0$, при $x > a$, то функція є опуклою вгору при $x > a$.

5. Асимптоти гіперболи. Гіпербола має дві асимптоти. Знайдемо асимптоту до гілки гіперболи, що знаходиться у першій чверті, а потім скористаємося симетрією. Розглянемо точку (x, y) у першій чверті, тобто $x \geq 0$, $y \geq 0$. В цьому випадку $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \geq a$. Тоді асимптота матиме вигляд $y = Kx + B$, де

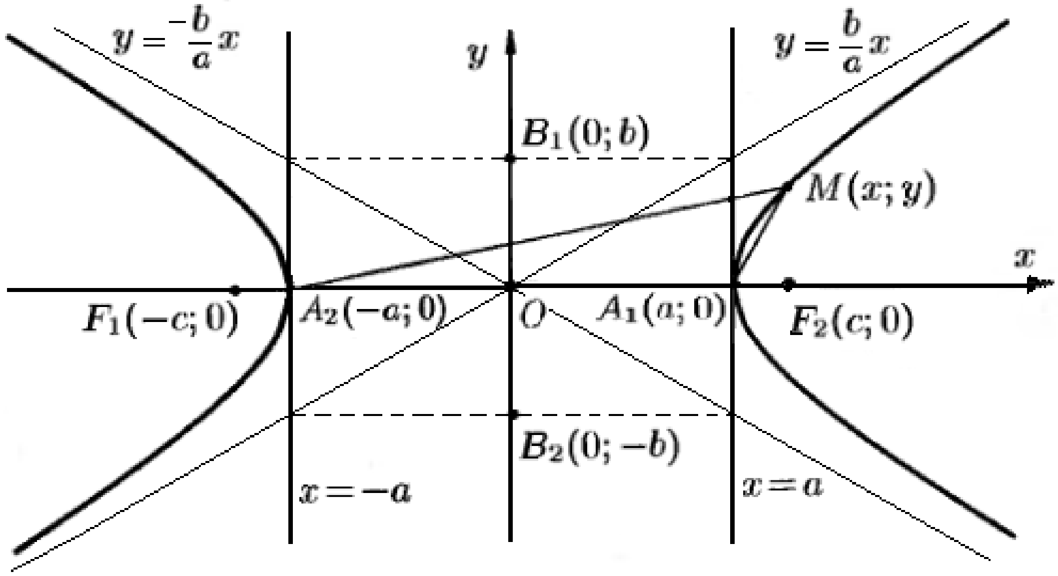
$$K = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a},$$

$$B = \lim_{x\to+\infty}(y(x) - Kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right) =$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)} = \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty} \frac{b^2}{\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)} = 0.$$

Отже, пряма $y = \frac{b}{a}x$ є асимптотою функції $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \geq a$. Тому в силу симетрії асимптотами гіперболи є прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$.

За встановленими характеристиками побудуємо гілку гіперболи, що знаходиться у першій чверті, та скористаємося симетрією:



6. У випадку, коли $b = a$, тобто гіпербола описується рівнянням

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

гіпербола називається *рівнобічною*. Рівнобічна гіпербола має асимптоти, які є бісектрисами координатних кутів: $y = \pm x$.

7. Відношення половини відстані між фокусами до більшої півосі $\frac{c}{a}$ називається *ексцентриситетом* гіперболи і позначається літерою ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Зауважимо, що для гіперболи $\varepsilon > 1$, оскільки $c > a$. Ексцентриситет характеризує форму гіперболи. Дійсно, оскільки

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1},$$

то чим менше ексцентриситет гіперболи, тим менше відношення півосей гіперболи $\frac{b}{a}$, і тим більше розтягнутий її головний прямокутник.

У рівнобічної гіперболи $\varepsilon = \sqrt{2}$.

8. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка гіперболи. Розглянемо фокальні радіуси $|MF_1| = r_1$ і $|MF_2| = r_2$. Для точок правої гілки гіперболи вони мають вигляд:

$$r_1' = a + \varepsilon x, \quad r_2' = -a + \varepsilon x.$$

Для точок лівої гілки гіперболи фокальні радіуси задаються формулами

$$r_1'' = -a - \varepsilon x, \quad r_2'' = a - \varepsilon x.$$

відповідно.

Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами* гіперболи. Оскільки у гіперболи $\varepsilon > 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} < a$, тобто її директриси розташовані між початком координат та вершинами $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$.

Значення директрис гіперболи міститься у наступній теоремі.

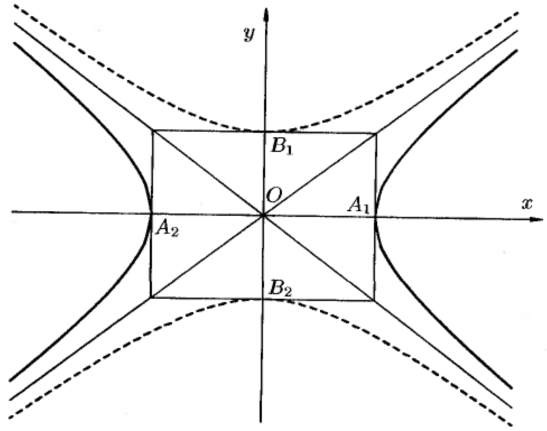
Твердження 12.2. *Якщо r — відстань від довільної точки гіперболи до одного з двох фокусів, а d — відстань від цієї ж точки до відповідної цьому фокусу директриси, то відношення $\frac{r}{d}$ є величиною сталою, рівною ексцентриситету гіперболи.*

9. Крива, що задається рівнянням

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

також є гіперболою. Дійсна вісь $2b$ цієї гіперболи розташована на осі Oy, а уявна $2a$ — на осі Ox. Очевидно, що гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ та $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ мають однакові асимптоти.

Гіпербола $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ називається *спряженою* до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. На малюнку нижче спряжена гіпербола зображена пунктиром.



10. Канонічне рівняння гіперболи (12.3) можна подати у параметричному вигляді наступним чином:

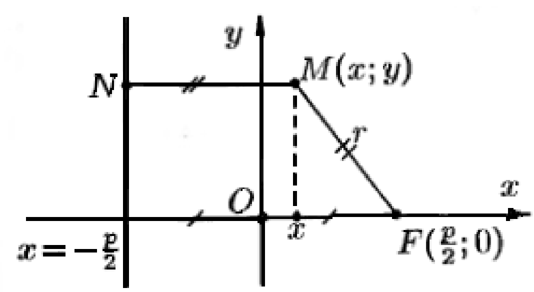
$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t. \end{cases}$$

12.4 Парабола, її канонічне рівняння.

Означення 12.4. *Параболою* називається геометричне місце точок площини, кожна з яких рівновіддалена від фіксованої точки площини, що називається *фокусом*, та фіксованої прямої, яка називається *директрисою*.

Відстань від фокуса до директриси параболи називається параметром параболи і позначається p ($p>0$).

Зафіксуємо на площині фокус F та пряму — D — директрису параболи. Виберемо на площині декаротову систему координат так, щоб вісь Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисі D у напрямку від директриси до фокуса. Початок координат помістимо у середині перпендикуляра, опущеного з фокуса на директрису. У вибраній системі координат $F(\frac{p}{2}, 0)$, а директриса D має рівняння $x = -\frac{p}{2}$.



Нехай $M(x, y)$ — довільна точка параболи. Знайдемо окремо відстань $|FM|$:

$$|FM| = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}.$$

Відрізок $|FM|$ називається *фокальним радіусом* точки M. Позначимо через N — основу перпендикуляра з точки M на директрису. Тоді

$$|MN| = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2 + (y - y)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Таким чином, оскільки за означенням $|FM| = |MN|$, то

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Піднісши останню рівність до квадрату та спростивши її, отримаємо рівняння:

$$y^2 = 2px,$$

яке називається *канонічним рівнянням параболи.*

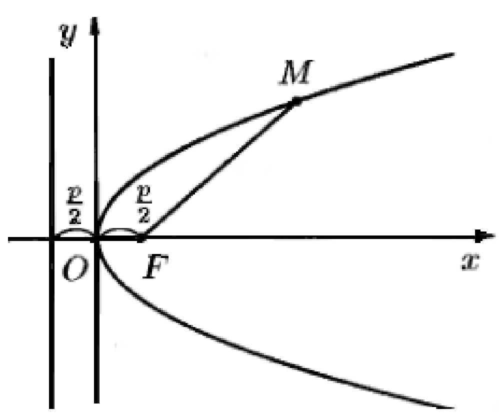
Форма та характеристики параболи. Дослідимо за канонічним рівнянням форму та розташування параболи.

1. У рівняння $y^2 = 2px$ змінна y входить у парній степені, звідки випливає, що парабола симетрична відносно осі Ox. Вісь Ox є *віссю симетрії* параболи.

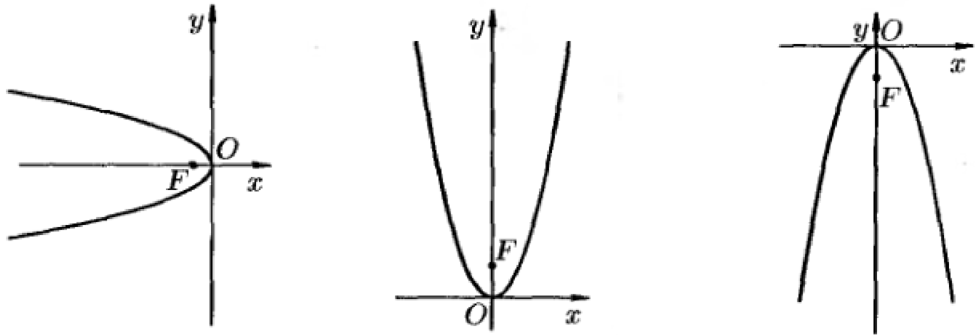
2. Оскільки $p > 0$, то $x \geq 0$, звідки випливає, що парабола розташована справа від осі Oy.

3. При $x = 0$ маємо $y = 0$, тобто парабола проходить через початок координат. Точка $O(0, 0)$ називається *вершиною параболи.*

4. При збільшенні значень змінної x модуль y також зростає. Зобразимо параболу на малюнку:

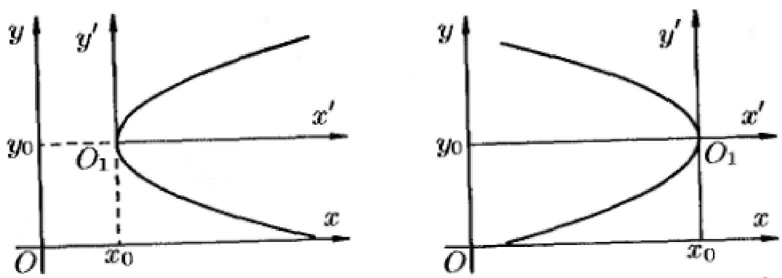


Рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ $(p > 0)$ також описують параболи:

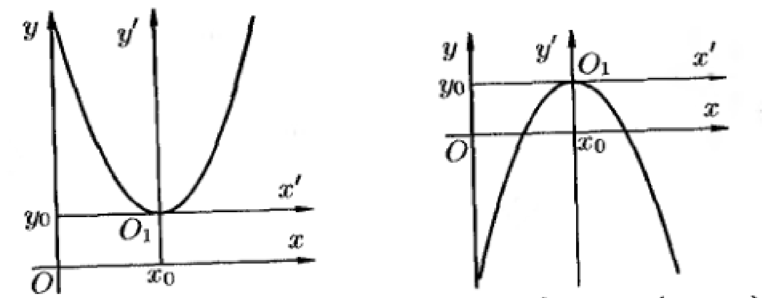


$y^2 = -2px$ $\quad$ $x^2 = 2py$ $\quad$ $x^2 = -2py$

Нижче схематично зображено параболи з вершинами у точці $O_1(x_0, y_0)$.



$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ $\quad$ $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$



$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ $\quad$ $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$

12.5 Загальне рівняння кривої другого порядку.

Означення 12.5. *Кривою другого порядку* на площині називається сукупність точок (геометричне місце точок), які в деякій декартовій системі координат Oxy задовольняють алгебраїчне рівняння другого порядку:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{12.4}$$

де A, B, C, D, E, F — дійсні числа, причому принаймні одне з чисел A, B, C не дорівнює нулю.

Насправді, рівняння (12.4) задає на площині еліпс, гіперболу або параболу. Детальне пояснення цього факту дає наступна теорема.

Теорема 12.1. *Загальне рівняння* (12.4) *кривої другого порядку, задане у декартовій системі координат Oxy, за допомогою перетворення системи координат можна звести до одного з наступних виглядів:*
I. $\widehat{A}x_2^2 + \widehat{C}y_2^2 + \widehat{F} = 0, \quad \widehat{A} \cdot \widehat{C} \neq 0;$
II. $\widehat{C}y_2^2 + 2\widehat{D}x_2 = 0, \quad \widehat{C} \cdot \widehat{D} \neq 0,$ *або* $\widehat{A}x_2^2 + 2\widehat{E}y_2 = 0, \quad \widehat{A} \cdot \widehat{E} \neq 0;$
III. $\widehat{A}x_2^2 + \widehat{F} = 0, \quad \widehat{A} \neq 0,$ *або* $\widehat{C}y_2^2 + \widehat{F} = 0, \quad \widehat{C} \neq 0,$
де x_2 і y_2 — змінні у новій декартовій системі координат Ox_2y_2.

Доведення. Покажемо, що в деякій декартовій системі координат задана крива другого порядку задається одним з трьох рівнянь.

Якщо у рівнянні (12.4) $B \neq 0$, то спочатку перейдемо від декартової системи координат Oxy до декартової системи координат Ox_1y_1, у якій задана крива буде описуватися рівнянням другого порядку, що не містить доданка з множником xy. Для цього знайдемо кут α, на який потрібно повернути навколо точки $O(0,0)$ осі координат Ox, Oy (див. пункт 9.2). Покладемо

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{cases}$$

Підставляючи ці координати замість змінних x та y у рівняння (12.4), отримаємо:

$$A(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha)^2 + 2B(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha)(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha) + C(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha)^2 +$$

$$+2D(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha) + 2E(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha) + F = 0.$$

Збираючи подібні доданки, бачимо, що коефіцієнт при x_1y_1 дорівнює

$$(-2A + 2C)\sin\alpha\cos\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Отже, нехай кут α такий, що

$$(-2A + 2C)\sin\alpha\cos\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0.$$

Враховуючи, що $B \neq 0$, останнє рівняння еквівалентне наступному:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{A - C}{2B}.$$

Таким чином, при повороті осей Ox, Oy на кут α, ми отримаємо нову декартову систему координат Ox_1y_1, у якій задана крива другого порядку буде описуватися рівнянням:

$$\widehat{A}x_1^2 + \widehat{C}y_1^2 + 2\widehat{D}x_1 + 2\widehat{E}y_1 + F = 0, \qquad (12.5)$$

де $\widehat{A} = (A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)$, $\widehat{C} = (A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)$, $\widehat{D} = D\cos\alpha + E\sin\alpha$, $\widehat{E} = -D\sin\alpha + E\cos\alpha$.

Розглянемо три випадки:

I. $\widehat{A} \cdot \widehat{C} \neq 0$. Тоді, виділяючи повні квадрати у рівнянні (12.5), отримаємо

$$\widehat{A}\Big(x_1 + \frac{\widehat{D}}{\widehat{A}}\Big)^2 + \widehat{C}\Big(y_1 + \frac{\widehat{E}}{\widehat{C}}\Big)^2 + \Big(F - \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{A}} - \frac{\widehat{E}^2}{\widehat{C}}\Big) = 0.$$

Тому перенесемо паралельно початок координат $O_1(0,0)$ системи координат Ox_1y_1 у точку $\widehat{O}\Big(-\frac{\widehat{D}}{\widehat{A}}, -\frac{\widehat{E}}{\widehat{C}}\Big)$ координатної площини Oxy.

При цьому рівняння заданої кривої другого порядку прийме вигляд:

$$\widehat{A}x_2^2 + \widehat{C}y_2^2 + \widehat{F} = 0, \quad \widehat{A} \cdot \widehat{C} \neq 0,$$

де $\widehat{F} = F - \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{A}} - \frac{\widehat{E}^2}{\widehat{C}}$, і нові координати виражаються через старі наступним чином:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{\widehat{D}}{\widehat{A}}, \\ y_2 = y_1 + \frac{\widehat{E}}{\widehat{C}}. \end{cases}$$

II. Нехай $\widehat{C} \cdot \widehat{D} \neq 0$ (аналогічно, $\widehat{A} \cdot \widehat{E} \neq 0$). В цьому випадку рівняння (12.5) набуває вигляду:

$$\widehat{C}\Big(y_1 + \frac{\widehat{E}}{\widehat{C}}\Big)^2 + 2\widehat{D}\Big(x_1 + \frac{F - \frac{\widehat{E}^2}{\widehat{C}}}{2\widehat{D}}\Big) = 0.$$

Паралельним переносом осей координат у точку $\widehat{O}\Big(-\frac{\widehat{E}}{\widehat{C}}, \frac{\frac{\widehat{E}^2}{\widehat{C}} - F}{2\widehat{D}}\Big)$ координатної площини Oxy, отримаємо у новій системі координат рівняння заданої кривої:

$$\widehat{C}y_2^2 + 2\widehat{D}x_2 = 0,$$

причому
$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{F - \frac{\widehat{E}^2}{\widehat{C}}}{2\widehat{D}}, \\ y_2 = y_1 + \frac{\widehat{E}}{\widehat{C}}. \end{cases}$$

III. $\widehat{A} \neq 0$ (аналогічно, $\widehat{C} \neq 0$). В цьому випадку, виділивши повний квадрат у рівнянні (12.5), отримаємо:

$$\widehat{A}\Big(x_1 + \frac{\widehat{D}}{\widehat{A}}\Big)^2 + \Big(F - \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{A}}\Big) = 0.$$

Паралельним переносом початку координат системи Ox_1y_1 у точку $\widehat{O}\Big(-\frac{\widehat{D}}{\widehat{A}}, 0\Big)$, отримаємо рівняння заданої кривої у новій системі координат:

$$\widehat{A}x_2^2 + \widehat{F} = 0,$$

де $\widehat{F} = F - \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{A}}$. При цьому
$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{\widehat{D}}{\widehat{A}}, \\ y_2 = y_1. \end{cases}$$

Таким чином, теорему доведено. □

Рівняння I, II, III, наведені у теоремі 12.1, називаються найпростішими рівняннями кривих другого порядку.

Класифікація кривих другого порядку. Відповідно до теореми 12.1 рівняння (12.4) задає у деякій декартовій системі координат одну з наступних 9 ліній:

I.
1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — еліпс
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ — уявний еліпс
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ — дві уявні прямі, що перетинаються
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — гіпербола
5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ — пара прямих, що перетинаються

II.
6. $x^2 = 2py$ — парабола

III.
7. $x^2 = a^2$ — пара паралельних прямих

8. $x^2 = -a^2$ — пара уявних паралельних прямих

9. $x^2 = 0$ — дві прямі, що співпадають

13 Поверхні другого порядку

13.1 Загальне рівняння поверхні другого порядку.

Означення 13.1. *Поверхнею другого порядку* називається сукупність точок (геометричне місце точок) простору, які в деякій декартовій системі координат $Oxyz$ задовольняють алгебраїчне рівняння другого порядку:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0, \quad (13.1)$$

де a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44} — дійсні числа, причому принаймні одне з чисел a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} не дорівнює нулю.

Теорема 13.1. *Загальне рівняння* (13.1) *поверхні другого порядку, задане у декартовій системі координат $Oxyz$, за допомогою перетворення системи координат можна звести до одного з наступних виглядів:*
I. $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \lambda = 0, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \neq 0;$
II. $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2a'_{34} z_1 = 0, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot a'_{34} \neq 0;$
III. $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda = 0, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0;$
IV. $\lambda_1 x_1^2 + a'_{24} y_1 = 0, \quad \lambda_1 \cdot a'_{24} \neq 0;$
V. $\lambda_1 x_1^2 + \lambda = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,$
де x_1, y_1, z_1 — змінні у новій декартовій системі координат $Ox_1y_1z_1$, а λ_1, λ_2, λ_3, λ, a'_{34}, a'_{24} — нові коефіцієнти.

Рівняння I – V, наведені у теоремі 13.1, називаються найпростішими рівняннями поверхонь другого порядку.

Класифікація поверхонь другого порядку. Відповідно до теореми 13.1 рівняння (13.1) задає у деякій декартовій системі координат одну з наступних 17 поверхонь:

I.
1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ — еліпсоїд
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ — уявний еліпсоїд
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — однопорожнинний гіперболоїд
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ — двопорожнинний гіперболоїд
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ — конус

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ — уявний конус

II.

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ — еліптичний параболоїд
8. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ — гіперболічний параболоїд

III.

9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — еліптичний циліндр
10. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ — уявний еліптичний циліндр
11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ — дві уявні площини, що перетинаються
12. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ — гіперболічний циліндр
13. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ — дві площини, що перетинаються

IV.

14. $y^2=2px$ — параболічний циліндр

V.

15. $x^2=a^2$, $a\neq 0$, — дві паралельні площини
16. $x^2=-a^2$, $a\neq 0$, — дві уявні паралельні площини
17. $x^2=0$ — дві площини, які співпадають

13.2 Характеристики та форма основних поверхонь другого порядку.

Розглянемо основні поверхні другого порядку, задані канонічними рівняннями, та побудуємо їх. Для цього будемо застосовувати *метод перерізів*, який полягає у дослідженні форми поверхні шляхом дослідження геометричних властивостей перерізів поверхні координатними площинами, та площинами їм паралельними.

Еліпсоїд. *Еліпсоїдом* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{13.2}$$

Дослідимо вид цієї поверхні. Змінні x, y z входять у рівняння (13.2) у парних степенях. Тому, якщо точка (x,y,z) належить еліпсоїду, то і точки $(\pm x,\pm y,\pm z)$ також належать еліпсоїду. Отже, поверхня симетрична відносно координатних осей та координатних площин. Точку $O(0,0,0)$ називають центром еліпсоїда.

Знайдемо точки перетину еліпсоїда з осями координат. Підставивши у рівняння (13.2) $x = 0$, $y = 0$, отримаємо, що еліпсоїд перетинає вісь Oz у точках $(0, 0, -c)$, $(0, 0, c)$. Аналогічно, вісь Ox еліпсоїд перетинає у точках $(-a, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, а вісь Oy — у точках $(0, -b, 0)$, $(0, b, 0)$. Ці 6 точок перетину еліпсоїда з осями координат називаються вершинами еліпсоїда.

З рівняння (13.2) також випливає, що $\frac{x^2}{a^2} \le 1$ і $\frac{y^2}{b^2} \le 1$, $\frac{z^2}{c^2} \le 1$ звідки $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$, і $-c \le z \le c$. Таким чином, всі точки еліпсоїда знаходяться всередині прямого паралелепіпеда, утвореного площинами $x = \pm a$ і $y = \pm b$, $z = \pm c$.

Розглянемо переріз поверхні (13.2) площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі має вигляд:

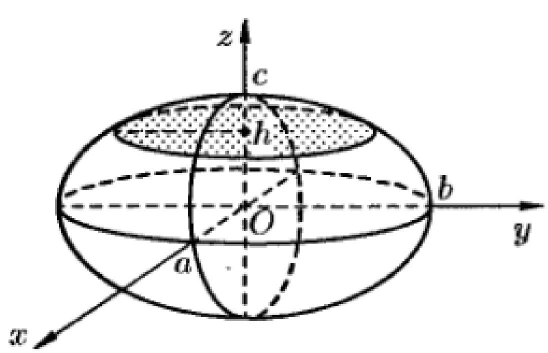
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases} \tag{13.3}$$

Якщо $|h| > c$, $c > 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$, тобто не існує точок перетину поверхні (13.2) з площинами $z = h$. Якщо $|h| = c$, тобто $h = \pm c$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, і лінія перетину вироджується у дві точки $(0, 0, -c)$, $(0, 0, c)$. Якщо $|h| < c$, то рівняння лінії (13.3) еквівалентне наступному:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

тобто лінією перерізу є еліпс з півосями $a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ і $b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$.

Аналогічні лінії ми отримаємо у перерізі еліпсоїда з площинами $x = const$, $y = const$.



Величини a, b, і c називаються *півосями* еліпсоїда. Якщо всі вони різні, то еліпсоїд називається трьохосевим еліпсоїдом. Якщо будь-які два з цих чисел рівні між собою, то еліпсоїд називається еліпсоїдом обертання. Якщо $a = b = c$, то рівняння (13.2) задає *сферу* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Однопорожнинний гіперболоїд. *Однопорожнинним гіперболоїдом* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{13.4}$$

Дослідимо вид цієї поверхні. Змінні x, y z входять у рівняння (13.4) у парних степенях. Тому, якщо точка (x, y, z) належить цій поверхні, то і точки $(\pm x, \pm y, \pm z)$ також належать цій поверхні. Отже, поверхня симетрична відносно координатних осей Ox, Oy, Oz, та координатних площин. Точка $O(0, 0, 0)$ називається центром однопорожнинного гіперболоїда.

Точками перетину однопорожнинного гіперболоїда з осями координат є точки $(-a, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, і $(0, -b, 0)$, $(0, b, 0)$. Ці точки називаються вершинами однопорожнинного гіперболоїда.

Розглянемо переріз поверхні площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Ця лінія для довільного числа h є еліпсом з півосями $a_1 = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ і $b_1 = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$. Очевидно, півосі a_1 і b_1 досягають найменшого значення при $h = 0$. При збільшенні $|h|$ півосі a_1 і b_1 будуть збільшуватися.

Розглянемо переріз поверхні площиною $x = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі задається системою рівняннь

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}, \\ x = h. \end{cases}$$

Таким чином, на площині $x = h$ ця лінія є гіперболою. Якщо $|h| < a$, то дійсною віссю гіперболи є вісь Oy, а уявною віссю є вісь Oz. В цьому випадку канонічне рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

Якщо ж $|h| > a$, то дійсною віссю гіперболи є вісь Oz, а уявною віссю є вісь Oy. В цьому випадку канонічне рівняння гіперболи має вигляд

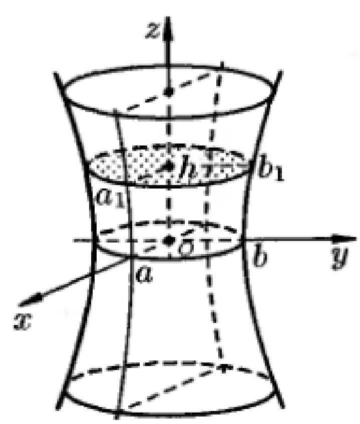
$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}\right)^2} = 1.$$

При $|h| = a$, у перерізі маємо дві прямі, що перетинаються у початку координат: $\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$ та $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$.

Аналогічний результат отримаємо, якщо розглянемо переріз поверхні площиною $y = h = const$, де h — довільне дійсне число, а саме

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

Побудуємо поверхню.



Можно довести, що через будь-яку точку однопорожнинного гіперболоїда проходять дві прямі, що перетинаються.

Двопорожнинний гіперболоїд. *Двопорожнинним гіперболоїдом* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{13.5}$$

Дослідимо вид цієї поверхні. Змінні x, y z входять у рівняння (13.5) у парних степенях. Тому, якщо точка (x, y, z) належить цій поверхні, то і точки $(\pm x, \pm y, \pm z)$ також належать цій поверхні. Отже, поверхня симетрична відносно координатних осей Ox, Oy, Oz, та координатних площин, а також точки $O(0, 0, 0)$, яку називають центром двопорожнинного гіперболоїда.

Очевидно, двопорожнинний гіперболоїд перетинає тільки вісь Oz у точках $(0, 0, -c)$, $(0, 0, c)$. Ці точки називаються вершинами двопорожнинного гіперболоїда.

Розглянемо переріз поверхні площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h. \end{cases}$$

Звідси випливає, що при $|h| < c$, площини $z = h$ не перетинають поверхню. При $|h| = c$, тобто $h = \pm c$, лінія перетину вироджується у дві точки $(0, 0, -c)$, $(0, 0, c)$. При $|h| > c$ лінією перетину поверхні з площиною $z = h$ є еліпс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}=1,$$

причому чим більше $|h|$, тим більші його півосі.

Розглянемо переріз поверхні площиною $x = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі задається системою рівняннь

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{a^2}, \\ x=h. \end{cases}$$

Таким чином, на площині $x = h$ ця лінія є гіперболою з дійсною віссю Oz, і уявною віссю Oy. Канонічне рівняння цієї гіперболи має вигляд

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

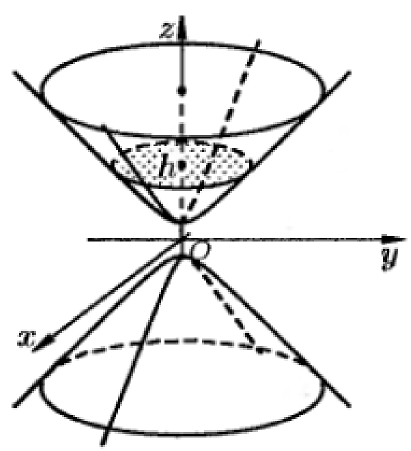
Аналогічно, розглянемо переріз поверхні площиною $y = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі задається системою рівняннь

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{h^2}{b^2}, \\ x = h. \end{cases}$$

Таким чином, на площині $y = h$ ця лінія є гіперболою з дійсною віссю Oz, і уявною віссю Ox. Канонічне рівняння цієї гіперболи має вигляд

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1.$$

Побудуємо поверхню.



Конус. *Конусом* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{13.6}$$

Дослідимо вид цієї поверхні. Змінні x, y z входять у рівняння (13.6) у парних степенях. Тому, якщо точка (x, y, z) належить цій поверхні, то і точки $(\pm x, \pm y, \pm z)$

також належать цій поверхні. Отже, поверхня симетрична відносно координатних осей Ox, Oy, Oz, координатних площин, а також точки $O(0,0,0)$. Точка $O(0,0,0)$ називається вершиною конуса.

Розглянемо переріз поверхні площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

Якщо $h = 0$, то переріз поверхні (13.6) площиною $z = h$ складається з однієї точки $O(0,0,0)$. При $h \neq 0$ у перерізі поверхні (13.6) площиною $z = h$ буде еліпс

$$\frac{x^2}{\left(\frac{ah}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bh}{c}\right)^2} = 1,$$

півосі якого збільшуються при збільшенні $|h|$.

Розглянемо переріз поверхні (13.6) площиною $x = 0$:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Таким чином, у перерізі — дві прямі, що перетинаються у початку координат

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0.$$

Аналогічно, у перерізі поверхні площиною $y = 0$ є лінія

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

що складається з двох прямих

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0.$$

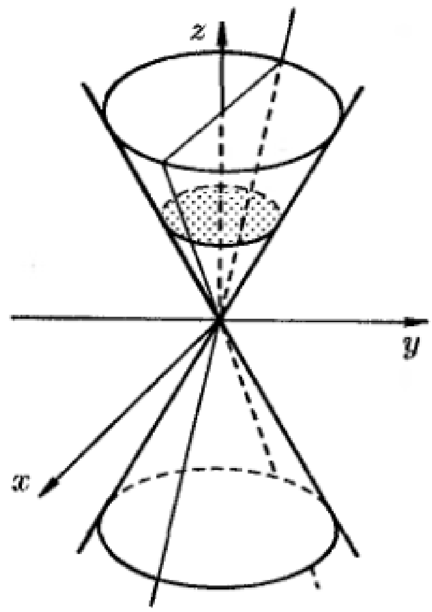
Перерізом поверхні (13.6) площиною $x = h$, $h \neq 0$, є гіпербола

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{a^2}.$$

Перерізом поверхні (13.6) площиною $y = h$, $h \neq 0$, є гіпербола

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2}.$$

Побудуємо поверхню.



Еліптичний параболоїд. *Еліптичним параболоїдом* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{13.7}$$

Очевидно, поверхня симетрична відносно координатних площин Oxz і Oyz, та відносно осі Oz. Вісь Oz є віссю симетрії параболоїда.

Розглянемо переріз поверхні (13.7) площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h, \\ z = h. \end{cases}$$

Якщо $h < 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$, тобто не існує точок перетину поверхні (13.7) з площиною $z = h$. Таким чином, поверхня розташована у верхньому півпросторі $z \geq 0$. Якщо $h = 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, і лінія перетину вироджується у точку $(0, 0, 0)$. Точка

$(0, 0, 0)$ називається вершиною параболоїда. Якщо $h > 0$, то перерізом поверхні з площиною $z = h$ є еліпс

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2} = 1,$$

півосі якого збільшуються зі збільшенням h.

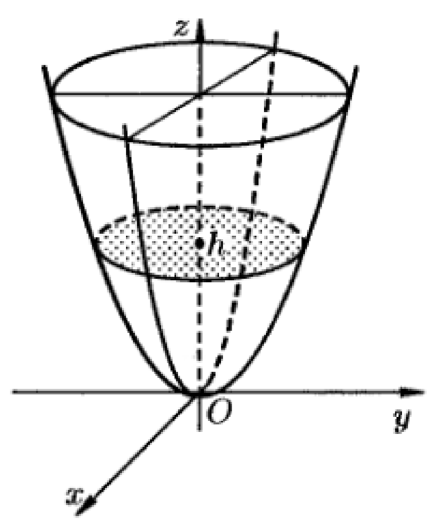
У перерізі поверхні (13.7) площиною $x = h = const$, отримаємо параболу:

$$y^2 = b^2\Big(z - \frac{h^2}{a^2}\Big).$$

У перерізі поверхні (13.7) площиною $y = h = const$, отримаємо параболу:

$$x^2 = a^2\Big(z - \frac{h^2}{b^2}\Big).$$

Побудуємо поверхню.



Гіперболічний параболоїд. *Гіперболічним параболоїдом* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{13.8}$$

Розглянемо переріз поверхні (13.8) площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = h, \\ z = h. \end{cases}$$

При цьому, якщо $h > 0$, то перерізом поверхні з площиною $z = h$ є гіпербола

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2} = 1,$$

у якої дійсною віссю є вісь Ox, а уявною віссю є вісь Oy. Якщо $h < 0$, то перерізом є гіпербола

$$\frac{y^2}{(b\sqrt{-h})^2} - \frac{x^2}{(a\sqrt{-h})^2} = 1,$$

у якої дійсною віссю є вісь Oy, а уявною віссю є вісь Ox . Якщо $h = 0$, то у перерізі — дві прямі, що перетинаються у початку координат:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

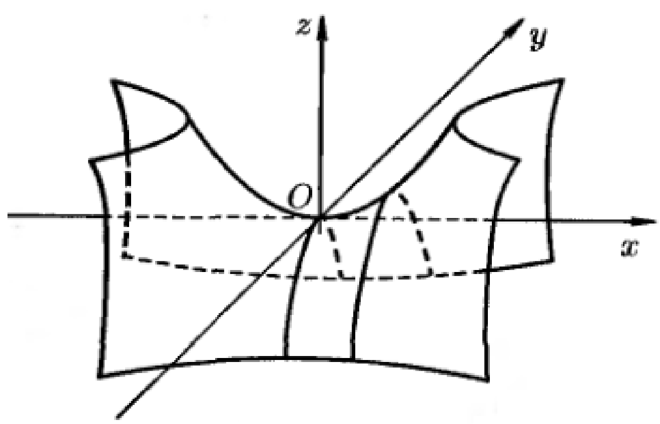
Перерізом поверхні (13.8) площиною $x = h = const$, є парабола

$$y^2 = -b^2\Big(z - \frac{h^2}{a^2}\Big).$$

Перерізом поверхні (13.8) площиною $y = h = const$, також є парабола

$$x^2 = a^2\Big(z + \frac{h^2}{b^2}\Big).$$

Використовуючи встановлені характеристики, схематично побудуємо поверхню.



Еліптичний циліндр. *Еліптичним циліндром* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{13.9}$$

Дослідимо вид цієї поверхні. Змінні x і y входять у рівняння (13.9) у парних степенях, а змінна z взагалі відсутня. Це означає, що поверхня симетрична відносно координатних площин. Крім того, з рівнянння (13.9) випливає, що $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$, а змінна z може приймати будь-які значення.

Розглянемо переріз поверхні (13.9) площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді для будь-якого h у перерізі отримаємо еліпс

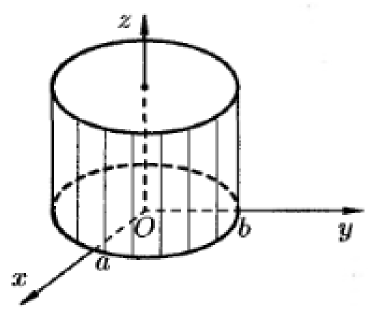
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

з півосями a та b, які не залежать від значення h.

Перерізом поверхні (13.9) площиною $x = h = const$, будуть дві прямі $y = \pm b\sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}$, якщо $|h| \le a$, і пуста множина, якщо $|h| > a$.

Аналогічно, перерізом поверхні (13.9) площиною $y = h = const$, є дві прямі $x = \pm a\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}$, якщо $|h| \le b$, і пуста множина, якщо $|h| > b$.

Таким чином, поверхня має вигляд:



Гіперболічний циліндр. *Гіперболічним циліндром* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{13.10}$$

Дослідимо вид цієї поверхні. Змінні x і y входять у рівняння (13.10) у парних степенях, а змінна z взагалі відсутня. Це означає, що поверхня симетрична відносно координатних площин. Крім того, з рівнянння (13.10) випливає, що $|x| \ge a$, $|y| \ge b$, а змінна z може приймати будь-які значення.

Розглянемо переріз поверхні (13.10) площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді для будь-якого h у перерізі отримаємо гіперболу

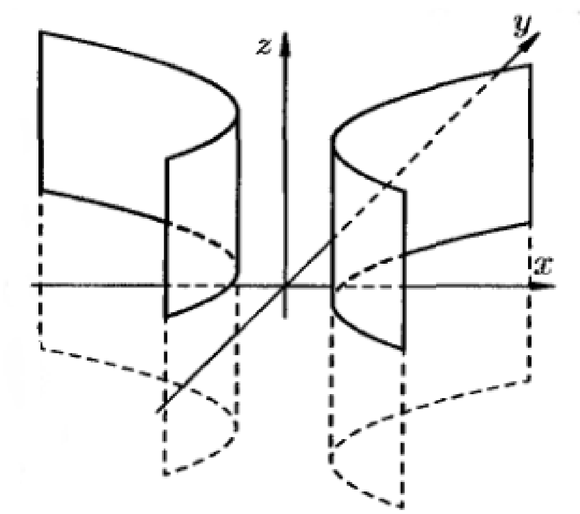
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

дійсна та уявна осі якої a та b не залежать від значення h.

Перерізом поверхні (13.10) площиною $x = h = const$, будуть дві прямі $y = \pm b\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}$, якщо $|h| \geq a$, і пуста множина, якщо $|h| < a$.

Аналогічно, перерізом поверхні (13.10) площиною $y = h = const$, є дві прямі $x = \pm a\sqrt{\frac{h^2}{b^2} + 1}$, для будь-якого дійсного h.

Отже, поверхня схематично зображається наступним чином:



Параболічний циліндр. *Параболічним циліндром* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$y^2 = 2px. \tag{13.11}$$

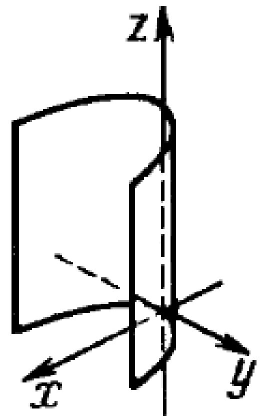
Поверхня симетрична відносно координатних площин Oxz і Oxy.

Нехай $p > 0$. Звідси випливає, що $x \geq 0$. Розглянемо переріз поверхні (13.11) площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді для будь-якого h у перерізі отримаємо параболу

$$y^2 = 2px.$$

Перерізом поверхні (13.11) площиною $x = h = const \geq 0$, є дві паралельні осі Oz прямі: $y = \pm\sqrt{2ph}$.

Перерізом поверхні (13.11) площиною $y = h = const$, для будь-якого дійсного h є паралельна осі Oz пряма: $x = \frac{h^2}{2p}$.


z
x
y