3. Синтез комбінаційних схем

3.1. Представлення функції f4 в канонічних формах алгебр Буля, Шеффера, Пірса та Жегалкіна

<u>Алгебра Буля {І, АБО, НЕ}</u>

$$f4_{ДДНФ}= (\overline{X4}\,\overline{X3}\,\overline{X2}X1) \vee (\overline{X4}X3\overline{X2}X1) \vee (\overline{X4}X3X2\overline{X1}) \vee (X4\overline{X3}\,\overline{X2}X1) \vee (X4\overline{X3}X2\overline{X1}) \vee$$

$$(X4X3\overline{X2}\,\overline{X1}) \vee (X4X3\overline{X2}X1) \vee (X4X3X2X1)$$

$$f4_{ДКНФ}= (X4 \vee X3 \vee X2 \vee X1) \cdot (X4 \vee X3 \vee \overline{X2} \vee X1) \cdot (X4 \vee X3 \vee \overline{X2} \vee \overline{X1}) \cdot (X4 \vee \overline{X3} \vee X2 \vee X1) \cdot$$

$$(X4 \vee \overline{X3} \vee \overline{X2} \vee X1) \cdot (\overline{X4} \vee X3 \vee X2 \vee X1) \cdot (\overline{X4} \vee X3 \vee \overline{X2} \vee \overline{X1}) \cdot (\overline{X4} \vee \overline{X3} \vee \overline{X2} \vee \overline{X1})$$

<u>Алгебра Шеффера {І–НЕ}</u>

$$f4 = ((X4/X4)/(X3/X3)/(X2/X2)/X1)/((X4/X4)/X3/(X2/X2)/X1)/$$
$$((X4/X4)/X3/X2/(X1/X1))/(X4/(X3/X3)/(X2/X2)/X1)/$$
$$(X4/(X3/X3)/X2/(X1/X1))/(X4/X/(X2/X2)/(X1/X1))/$$
$$(X4/X3/(X2/X2)/X1)/(X4/X3/X2/X1)$$

<u>Алгебра Пірса {АБО–НЕ}</u>

$$f4 = ((X4\downarrow X4)\downarrow (X3\downarrow X3)\downarrow (X2\downarrow X2) \downarrow X1) \downarrow ((X4\downarrow X4)\downarrow X3\downarrow (X2\downarrow X2)$$
$$\downarrow (X1\downarrow X1))\downarrow ((X4\downarrow X4)\downarrow X3\downarrow X2\downarrow X1)\downarrow (X4\downarrow (X3\downarrow X3)\downarrow (X2\downarrow X2)\downarrow X1)$$
$$\downarrow ((X4\downarrow (X3\downarrow X3)\downarrow X2\downarrow X1)\downarrow (X4\downarrow X3\downarrow (X2\downarrow X2) \downarrow (X1\downarrow X1))\downarrow (X4\downarrow X3\downarrow (X2\downarrow X2)\downarrow X1)$$
$$\downarrow (X4\downarrow X3\downarrow X2\downarrow X1)$$

<u>Алгебра Жегалкіна {ВИКЛЮЧНЕ АБО, І, const 1}</u>

$$f4 = (X4\oplus 1)(X3\oplus 1)(X2\oplus 1)X1\oplus (X4\oplus 1)X3\ (X2\oplus 1)X1\oplus (X4\oplus 1)X3X2X1\oplus$$
$$X4(X3\oplus 1)(X2\oplus 1)X1\oplus X4(X3\oplus 1)X2(X1\oplus 1) \oplus X4X3(X2\oplus 1)(X1\oplus 1)\oplus$$
$$X4X3(X2\oplus 1)X1\oplus X4X3X2(X1\oplus 1) =$$
$$X1\oplus X2X1\oplus X4X1\oplus X4X3\oplus X4X2\oplus X3X2X1\oplus X4X2X1\oplus X4X3X1$$

3.2. Визначення належності функції f4 до п'яти передцповних класів

- f(1111) = 1 => функція зберігає одиницю
- f(0000) = 0 => функція зберігає нуль
- f(0011) = f(1100) = 1 => функція не самодвоїста
- f(0011) > f(0100) => функція не монотонна
- функція нелінійна, оскільки її поліном Жегалкіна нелінійний

3.3. Мінімізація функції f4

<u>Метод Квайна–Мак–Класкі</u>

Виходячи з таблиці 2.2, запишемо стовпчик ДДНФ (К0), розподіливши терми за кількістю одиниць. Проведемо попарне склеювання між сусідніми групами та виконаємо поглинання термів (рисунок 4.4).

К0	К1	К2
~~0001(1)~~	~~0X01(1)~~	~~XX01(1)~~
~~0101(1)~~	~~X001(1)~~	$\boxed{XX01(1)}$
~~0111(1)~~	~~01X1(1)~~	~~X1X1(1)~~
~~1001(1)~~	~~X101(1)~~	$\boxed{X1X1(1)}$
$\boxed{1010(1)}$	~~X111(1)~~	
~~1100(1)~~	~~1X01(1)~~	
~~1101(1)~~	$\boxed{110X(1)}$	
~~1111(1)~~	~~11X1(1)~~	

Рисунок 4.4 Склеювання і поглинання термів

Одержані прості імпліканти запишемо в таблицю покриття (таблиця 4.3).

	0001	0101	0111	1001	1010	1100	1101	1111
1010					+			
110X						+	+	
XX01	+	+		+			+	
X1X1		+	+				+	+

Таблиця 4.3 Таблиця покриття

В ядро функції входять ті терми, без яких неможливо покрити хоча б одну імпліканту.

Ядро = {X1X1; XX01; 101X; 1010}

В МДНФ входять всі терми ядра, а також ті терми, що забезпечують покриття всієї функції з мінімальною ціною.

$f_{4МНДФ}= (X4\overline{X3}X2\overline{X1})$ v $(X4X3\overline{X2})$ v $(\overline{X2}X1)$ v $(X3X1)$

<u>Метод невизначених коефіцієнтів</u>

Ідея цього методу полягає у відкушанні ненульових коефіцієнтів при кожній імпліканті. Метод виконується у декілька етапів:

1. Рівняння для знаходження коефіцієнтів представляється у вигляді таблиці (таблиця 4.4).
2. Виконується відкреслення нульових рядків.
3. Викреслюються вже знайдені нульові коефіцієнти на залишившихся рядках.
4. Імпліканти, що залишилися, поглинають імпліканти справа від них.

x_4	x_3	x_2	x_1	x_4x_3	x_4x_2	x_4x_1	x_3x_2	x_3x_1	x_2x_1	$x_4x_3x_2$	$x_4x_3x_1$	$x_4x_2x_1$	$x_3x_2x_1$	$x_4x_3x_2x_1$	f_4
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~000~~	~~000~~	~~000~~	~~000~~	~~0000~~	~~0~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~00~~	~~00~~	~~01~~	~~00~~	01	01	~~000~~	001	~~001~~	~~001~~	~~0001~~	1
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~00~~	~~01~~	~~00~~	~~01~~	~~00~~	~~10~~	~~001~~	~~000~~	~~010~~	~~010~~	~~0010~~	~~0~~
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~00~~	~~01~~	~~01~~	~~01~~	~~01~~	~~11~~	~~001~~	~~001~~	~~011~~	~~011~~	~~0011~~	~~0~~
~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~01~~	~~00~~	~~00~~	~~10~~	~~10~~	~~00~~	~~010~~	~~010~~	~~000~~	~~100~~	~~0100~~	~~0~~
~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~01~~	~~00~~	~~01~~	~~10~~	11	01	~~010~~	~~011~~	~~001~~	~~101~~	~~0101~~	1
~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~01~~	~~01~~	~~00~~	~~11~~	~~10~~	~~10~~	~~011~~	~~010~~	~~010~~	~~110~~	~~0110~~	~~0~~
~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~01~~	~~01~~	~~01~~	~~11~~	11	~~11~~	~~011~~	~~011~~	011	~~111~~	~~0111~~	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~100~~	~~100~~	~~100~~	~~000~~	~~1000~~	~~0~~
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~10~~	~~10~~	~~11~~	~~00~~	~~01~~	01	~~100~~	~~101~~	~~101~~	~~001~~	~~1001~~	1
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~10~~	~~11~~	~~10~~	~~01~~	~~00~~	~~10~~	~~101~~	~~100~~	~~110~~	~~010~~	1010	1
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~10~~	~~11~~	~~11~~	~~01~~	~~01~~	~~11~~	~~101~~	~~101~~	~~111~~	~~011~~	~~1011~~	~~0~~
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~11~~	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~00~~	110	~~110~~	~~100~~	~~100~~	~~1100~~	1
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~11~~	~~10~~	~~11~~	~~10~~	11	01	110	~~111~~	~~101~~	~~101~~	~~1101~~	1
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~11~~	~~11~~	~~10~~	~~11~~	~~10~~	~~10~~	~~111~~	~~110~~	~~110~~	~~110~~	~~1110~~	~~0~~
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~11~~	~~11~~	~~11~~	~~11~~	11	~~11~~	~~111~~	~~111~~	~~111~~	~~111~~	~~1111~~	1

Таблиця 4.4 Метод невизначених коефіцієнтів

В ядро функції входять ті терми, без яких неможливо покрити хоча б одну імпліканту.

Ядро = { $X4\overline{X3}X2\overline{X1}$; $X4X3\overline{X2}$; $\overline{X2}X1$; $X3X1$ }

В МДНФ входять всі терми ядра, а також ті терми, що забезпечують покриття всієї функції з мінімальною ціною.

$f_{4МНДФ}$= $(X4\overline{X3}X2\overline{X1}) \vee (X4X3\overline{X2}) \vee (\overline{X2}X1) \vee (X3X1)$

Метод діаграм Вейча

Метод діаграм Вейча – це графічний метод, призначений для ручної мінімізації. Його наочність зберігається за невеликої кількості аргументів.

Кожна клітинка відповідає конституанті. Кожний прямокутник, що містить 2^k елементів, відповідає імпліканті. Прямокутник максимального розміру відповідає простій імпліканті (рисунок 4.5).