Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра обчислювальної техніки

# ЗВІТ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №1
# МІНІМІЗАЦІЯ ПЕРЕМИКАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Виконав:
студент групи ІВ-71
Мазан Я. В.
Залікова книжка № ІВ-7109
Перевірив:
Верба О. А.

Київ 2017

## 2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2
## МІНІМІЗАЦІЯ ПЕРЕМИКАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

*Ціль роботи* – вивчення методів мінімізації перемикальних функцій, знаходження операторних форм перемикальних функцій, побудова та дослідження параметрів логічних схем.

### Теоретичні відомості

Функції $f$ і $\Pi$ називаються *еквівалентними*, якщо вони приймають однакові значення на всіх наборах аргументів.

Еквівалентні функції можуть відрізнятися формами представлення і ціною. Під *ціною* перемикальної функції розуміється кількість букв, що входять в її запис.

Проблема мінімізації зводиться до відшукання форми представлення функції з мінімальною ціною. Мінімізація дозволяє спростити схеми, що реалізують перемикальні функції.

В роботі методи мінімізації розглядаються щодо диз'юнктивних форм представлення функцій.

**Метод мінімізації Квайна**

Вихідною формою представлення функції для мінімізації по методу Квайна є досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ).

Метод забезпечує одержання скороченої ДНФ (СДНФ), тобто сукупності всіх простих імплікант.

Метод базується на використанні співвідношення неповного склеювання

$$Ax \vee A\bar{x} = Ax \vee A\bar{x} \vee A$$

і співвідношення поглинання

$$BA(A=A,$$

де $A$ і $B$ – довільні кон’юнктивні терми, $x$ – перемінна.

Етапи мінімізації:

1) запис функції у вихідній формі – ДДНФ;

2) застосування співвідношення склеювання послідовно до конституент одиниці, потім до імплікант $n$-1 рангу, $n$-2 рангу і так далі, поки можливе формування нових імплікант;

3) виконання всіх можливих поглинань, в результаті чого визначаються всі прості імпліканти;

4) побудова таблиці покриття (імплікантної матриці) і знаходження тупікових ДНФ (ТДНФ);

5) вибір мінімальної ДНФ (МДНФ) з числа ТДНФ.

*Табл. 2.1*

*Таблиця істинності*

| $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

*Приклад 2.1.* Виконати мінімізацію функції, заданої табл. 2.1.

Представимо функцію в ДДНФ

$$y = \overline{x}_3\overline{x}_2x_1 \vee \overline{x}_3x_2\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3x_2x_1 \vee x_3\overline{x}_2x_1 \vee x_3x_2\overline{x}_1.$$

Виконавши попарне склеювання конституент одиниці, одержуємо множину імплікант 2-го рангу:

$$\overline{x}_3x_1,\ \overline{x}_2x_1,\ \overline{x}_3x_2,\ x_2\overline{x}_1.$$

Подальше склеювання імплікант неможливе. Тоді функцію можна записати у вигляді

$$y = \overline{x}_3\overline{x}_2x_1 \vee \overline{x}_3x_2\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3x_2x_1 \vee x_3\overline{x}_2x_1 \vee x_3x_2\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3x_1 \vee \overline{x}_2x_1 \vee \overline{x}_3x_2 \vee x_2\overline{x}_1.$$

Після виконання поглинання, одержуємо СДНФ

$$y = \overline{x}_3x_1 \vee \overline{x}_2x_1 \vee \overline{x}_3x_2 \vee x_2\overline{x}_1.$$

Будуємо таблицю покриття (табл. 2.2).

*Табл. 2.2*

*Таблиця покриття функції*

| Імпліканти | Конституенти | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\overline{x_3}\,\overline{x_2}x_1$ | $\overline{x_3}x_2\overline{x_1}$ | $\overline{x_3}x_2x_1$ | $x_3\overline{x_2}x_1$ | $x_3x_2\overline{x_1}$ |
| $\overline{x_3}x_1$ | $\vee$ | | $\vee$ | | |
| $\overline{x_2}x_1$ | $\vee$ | | | $\vee$ | |
| $\overline{x_3}x_2$ | | $\vee$ | $\vee$ | | |
| $x_2\overline{x_1}$ | | $\vee$ | | | $\vee$ |

Знаходимо ядро функції – сукупність імплікант відповідних однократно покритим конституентам. В даному випадку ядро складають імпліканти $\overline{x_2}x_1$ і $x_2\overline{x_1}$.

Як правило, ядро варто доповнити ще декількома імплікантами, для одержання повного покриття всіх конституент вихідної функції. Різні варіанти покриття є тупіковими ДНФ. Серед ТДНФ форма з мінімальною ціною буде мінімальної ДНФ (МДНФ).

Для розглянутої функції, існують дві рівноцінні ТДНФ:

$$y = \overline{x_3}x_1 \vee \overline{x_2}x_1 \vee \overline{x_3}x_2 \vee x_2\overline{x_1};$$

$$y = \overline{x_2}x_1 \vee \overline{x_3}x_2 \vee x_2\overline{x_1}.$$

В якості МДНФ вибираємо, наприклад,

$$y = \overline{x_3}x_1 \vee \overline{x_2}x_1 \vee \overline{x_3}x_2 \vee x_2\overline{x_1}.$$

## Метод мінімізації Квайна - Мак-Класки

Метод Квайна-Мак-Класки є модифікацією методу Квайна. Він ґрунтується на співвідношеннях неповного склеювання і поглинання, як і метод Квайна. Особливістю методу є використання цифрової форми запису перемикальних функцій. В цьому випадку зменшується число символів для представлення термів і число операцій в процесі мінімізації, що робить метод зручним при програмній реалізації.

Етапи мінімізації

1. Для функції виписують комплекс 0-кубів ($K^0$). Набори упорядковуються по кількості одиниць.

2. Шляхом склеювання формують 1-куби, 2-куби і т.д., поки можливе склеювання. Кожен куб упорядковується аналогічно 0-кубу. При цьому в одну групу повинні входити куби, що мають не тільки однакове число одиниць, але й залежать від тих самих змінних.

3 Шляхом поглинання формується покриття Z, що відповідає скороченій ДНФ.

4 Будується матриця покрить, з якої визначають усі ТДНФ.

5 Серед ТДНФ відшукується МДНФ.

*Приклад 2.2.* Методом Квайна – Мак-Класки виконати мінімізацію функції, заданої табл. 2.3.

*Табл. 2.3*

*Таблиця істинності*

| $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Виходячи з таблиці істинності функції, записуємо конституенти, поєднуючи їх у групи по кількості одиниць ($К^0$). Виконуючи склеювання, формуємо куби $К^1$ і $К^2$. Після виконання поглинань, одержуємо Z-покриття (рис. 2.2). Будуємо таблицю покриття (табл. 2.4).

В даному випадку всі імпліканти входять в ядро функції. Отже, МДНФ має вигляд

$$y = \overline{x_3} x_2 \vee x_3 \overline{x_2} \vee \overline{x_1}.$$

**Метод невизначених коефіцієнтів**

Будь-яку функцію можна представити у вигляді диз'юнкції всіх конституент і всіх можливих імплікант, помножених на відповідний коефіцієнт, що може приймати значення 0 чи 1. (Метод може бути використаний у будь-якій алгебрі перемикальних функцій. Перетерплюють зміни тільки вихідні канонічні форми запису функцій і системи рівнянь для перебування коефіцієнтів).

Наприклад, при $n$=2 можна записати

$$y = k_2^1 x_2 \vee k_2^0 \overline{x_2} \vee k_1^1 x_1 \vee k_1^0 \overline{x_1} \vee k_{21}^{00} \overline{x_2}\,\overline{x_1} \vee k_{21}^{01} \overline{x_2} x_1 \vee k_{21}^{10} x_2 \overline{x_1} \vee k_{21}^{11} x_2 x_1 .$$

Кожна функція визначається своїм набором значень коефіцієнтів. Для пошуку значень коефіцієнтів необхідно вирішити систему рівнянь:

$$y(0,0) = k_2^0 \vee k_1^0 \vee k_{21}^{00};$$

$$y(0,1) = k_2^0 \vee k_1^1 \vee k_{21}^{01};$$

$$y(1,0) = k_2^1 \vee k_1^0 \vee k_{21}^{10};$$

$$y(1,1) = k_2^1 \vee k_1^0 \vee k_{21}^{11}.$$

Всі ненульові коефіцієнти після процедури поглинань визначають сукупність простих імплікант, тобто дозволяють побудувати скорочену ДНФ. Мінімізацію зручно виконувати за допомогою спеціальної таблиці, що після знаходження простих імплікант розглядається як таблиця покриття. За допомогою таблиці знаходять ТДНФ, а потім визначають МДНФ.

Етапи мінімізації

1. Складання таблиці коефіцієнтів.
2. Викреслювання нульових коефіцієнтів.
3. Виділення простих імплікант.
4. Знаходження покриття, що відповідають ТДНФ.
5. Вибір МДНФ.

*Приклад 2.3.* Виконати мінімізацію функції, заданої табл. 2.5.

*Табл. 2.5*

*Таблиця істинності*

| $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Складаємо таблицю коефіцієнтів (табл. 2.6). Викреслюємо в таблиці коефіцієнти, що знаходяться в рядках з нульовим значенням функції. Викреслені коефіцієнти мають нульові значення. Далі викреслюємо вже знайдені нульові коефіцієнти в інших рядках таблиці. Коефіцієнти, що залишилися, поглинають у рядку праворуч від себе всі інші коефіцієнти, в індекси яких входять індекси даного коефіцієнта. Наприклад, $k_{32}^{01}$ поглинає $k_{321}^{010}$. (Поглинені коефіцієнти в табл. 2.6 відзначені зірочкою). Коефіцієнти, що залишилися, $\{k_{32}^{01}, k_{32}^{10}, k_{31}^{01}, k_{31}^{10}, k_{21}^{01}, k_{21}^{10}\}$ визначають СДНФ.

$$y = \overline{x_3} x_2 \vee x_3 \overline{x_2} \vee \overline{x_3} x_1 \vee x_3 \overline{x_1} \vee \overline{x_2} x_1 \vee x_2 \overline{x_1}.$$

Враховуємо в таблиці тільки ненульові коефіцієнти і розглядаємо її як таблицю покриття функції. Знаходимо дві ТДНФ, що містять по три імпліканти. Вони відповідають множині коефіцієнтів $\{k_{32}^{01}, k_{31}^{10}, k_{21}^{01}\}$ і $\{k_{32}^{10}, k_{31}^{01}, k_{21}^{10}\}$. Інші ТДНФ складаються з чотирьох імплікант.

*Табл. 2.6*

*Таблиця коефіцієнтів*

| $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | Коефіцієнти | | | | | | | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $\cancel{k_3^0}$ | $\cancel{k_2^0}$ | $\cancel{k_1^0}$ | $\cancel{k_{32}^{00}}$ | $\cancel{k_{31}^{00}}$ | $\cancel{k_{21}^{00}}$ | $\cancel{k_{321}^{000}}$ | 0 |
| 0 | 0 | 1 | $\cancel{k_3^0}$ | $\cancel{k_2^0}$ | $\cancel{k_1^1}$ | $\cancel{k_{32}^{00}}$ | $k_{31}^{01}$ | $\cancel{k_{21}^{01}}$ | $k_{321}^{001\,*}$ | 1 |
| 0 | 1 | 0 | $\cancel{k_3^0}$ | $\cancel{k_2^1}$ | $\cancel{k_1^0}$ | $k_{32}^{01}$ | $\cancel{k_{31}^{00}}$ | $k_{21}^{10}$ | $k_{321}^{010\,*}$ | 1 |
| 0 | 1 | 1 | $\cancel{k_3^0}$ | $\cancel{k_2^1}$ | $\cancel{k_1^1}$ | $k_{32}^{01}$ | $k_{31}^{01}$ | $k_{21}^{11}$ | $k_{321}^{011\,*}$ | 1 |
| 1 | 0 | 0 | $\cancel{k_3^1}$ | $\cancel{k_2^0}$ | $\cancel{k_1^0}$ | $k_{32}^{10}$ | $k_{31}^{10}$ | $\cancel{k_{21}^{00}}$ | $k_{321}^{100\,*}$ | 1 |
| 1 | 0 | 1 | $\cancel{k_3^1}$ | $\cancel{k_2^0}$ | $\cancel{k_1^1}$ | $k_{32}^{10}$ | $\cancel{k_{31}^{11}}$ | $k_{21}^{01}$ | $k_{321}^{101\,*}$ | 1 |
| 1 | 1 | 0 | $\cancel{k_3^1}$ | $\cancel{k_2^1}$ | $\cancel{k_1^0}$ | $\cancel{k_{32}^{11}}$ | $k_{31}^{10}$ | $k_{21}^{10}$ | $k_{321}^{110\,*}$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | $\cancel{k_3^1}$ | $\cancel{k_2^1}$ | $\cancel{k_1^1}$ | $\cancel{k_{32}^{11}}$ | $\cancel{k_{31}^{11}}$ | $\cancel{k_{21}^{11}}$ | $\cancel{k_{321}^{111}}$ | 0 |

В якості МДНФ, наприклад, вибираємо

$$y = x_3 \overline{x_2} \vee \overline{x_3} x_1 \vee x_2 \overline{x_1}.$$

## Графічний метод мінімізації функцій

Існують два різновиди таблиць, що забезпечують одержання МДНФ, минаючи етапи формування скороченої і тупікової ДНФ.

На рис. 2.2 представлені діаграми Вейча і Карно для функцій 2, 3 і 4-х аргументів. Номера наборів показані всередині кліток.

Наочність методів зберігається при невеликій кількості аргументів.

Кожна клітинка відповідає конституенті. Прямокутник, що містить $2^k$ клітинок ($k$=1,...,$n$-1), відповідає імпліканті.

Обґрунтуванням графічного методу мінімізації є той факт, що поруч розташовані клітинки відповідають наборам аргументів, що відрізняється значенням однієї змінної і, таким чином, склеюються по Квайну. Чим більше клітинок містить прямокутник, тим менше букв входить у представлення імпліканти. Імпліканта містить тільки ті змінні, котрі приймають однакові значення для всіх клітинок прямокутника.

Етапи мінімізації

1. Заповнення діаграми Вейча чи карти Карно. Значення функцій записують в клітинки, що відповідають номерам наборів.

2. Об'єднання одиниць в прямокутники з максимально можливою кількістю клітинок. Число клітинок повинне дорівнювати $2^k$, наприклад 1,2,4,8, 16… При цьому кожна одиниця повинна входити як мінімум в один прямокутник.

*3. Визначення МДНФ. Сукупності простих імплікант, що входять у МДНФ, відповідає мінімальна множина прямокутників, що покривають всі одиниці.*

*Приклад 2.4.* Одержати МДНФ функцій трьох аргументів (табл. 2.7).

Виходячи з діаграм Вейча на рис. 2.5, записуємо МДНФ функцій:

$$y_1 = x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3x_2 \vee \bar{x}_2x_1;$$

$$y_2 = x_3 \vee x_2x_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1;$$

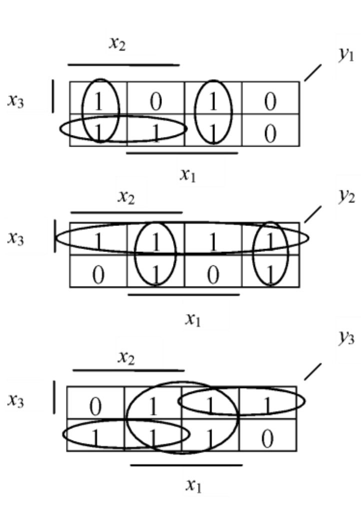
$$y_3 = x_1 \vee \bar{x}_3x_2 \vee x_3\bar{x}_2.$$

Графічний метод призначений для ручної мінімізації при невеликих $n$. При цьому відшукання імплікант не формалізованим, і успіх мінімізації цілком визначається кваліфікацією оператора.

*Табл. 2.7*

*Таблиця істинності*

| $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1<br>1 | 1<br>1 | 0<br>1 | 1<br>0 | 1<br>1 | 0<br>1 |

**Хід роботи**

1. Номер залікової книжки - 7109 = $101111000101_2$. $h_9 = 1$; $h_8 = 1$; $h_7 = 1$; $h_6 = 0$; $h_5 = 0$; $h_4 = 0$; $h_3 = 1$; $h_2 = 0$; $h_1 = 1$;

*Таблиця істинності*

| $x_4$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

2.1. Мінімізація $f_1$ методом Квайна.

ДДНФ функції: $y = \underline{x_4} \cdot \underline{x_3} \cdot \underline{x_2} \cdot \underline{x_1} \vee \underline{x_4} \cdot \underline{x_3} \cdot \underline{x_2} \cdot x_1 \vee \underline{x_4} \cdot \underline{x_3} x_2 x_1 \vee$

$\vee\ \underline{x_4} x_3 \underline{x_2} x_1 \vee x_4 \underline{x_3} \cdot \underline{x_2} x_1 \vee x_4 \underline{x_3} x_2 \underline{x_1} \vee x_4 \underline{x_3} x_2 x_1 \vee x_4 x_3 \underline{x_2} x_1 \vee x_4 x_3 x_2 \underline{x_1}$

| Конституенти одиниці | Імпліканти 3-го рангу | Імпліканти 2-го рангу |
|---|---|---|
| $\overline{x}_4 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_1$ | $\overline{x}_4 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_2$ | $\overline{x}_2 \cdot x_1$ |
| $\cancel{\overline{x}_4 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_1}$ | $\cancel{\overline{x}_4 \cdot \overline{x}_2 x_1}$ | $\overline{x}_3 x_1$ |
| $\cancel{\overline{x}_4 \cdot \overline{x}_3 x_2 x_1}$ | $\cancel{\overline{x}_3 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_1}$ | |
| $\cancel{\overline{x}_4 x_3 \overline{x}_2 x_1}$ | $\cancel{\overline{x}_4 \cdot \overline{x}_3 x_1}$ | |
| $\cancel{x_4 \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_2 x_1}$ | $\cancel{\overline{x}_3 x_2 x_1}$ | |
| $\cancel{x_4 \overline{x}_3 x_2 \overline{x}_1}$ | $\cancel{x_3 \overline{x}_2 x_1}$ | |
| $\cancel{x_4 \overline{x}_3 x_2 x_1}$ | $\cancel{x_4 \overline{x}_3 x_2}$ | |
| $\cancel{x_4 x_3 \overline{x}_2 x_1}$ | $x_4 x_2 \overline{x}_1$ | |
| $x_4 x_3 x_2 \overline{x}_1$ | $\cancel{x_4 \overline{x}_3 x_1}$ | |

| Конституенти одиниці | Імпліканти 3-го рангу | Імпліканти 2-го рангу |
|---|---|---|
| $\underline{x_4} \cdot \underline{x_3} \cdot \underline{x_2} \cdot \underline{x_1}$ | $\underline{x_4} \cdot \underline{x_3} \cdot \underline{x_2}$ | $\underline{x_2} \cdot x_1$ |
| $\underline{x_4} \cdot \underline{x_3} \cdot \underline{x_2} \cdot x_1$ | $\cancel{\underline{x_4} \cdot \underline{x_2} x_1}$ | $\underline{x_3} x_1$ |
| $\underline{x_4} \cdot \underline{x_3} x_2 x_1$ | $\underline{x_3} \cdot \underline{x_2} \cdot x_1$ | |
| $\underline{x_4} x_3 \underline{x_2} x_1$ | $\underline{x_4} \cdot \underline{x_3} x_1$ | |
| $x_4 \underline{x_3} \cdot \underline{x_2} x_1$ | $\underline{x_3} x_2 x_1$ | |

| | | |
|---|---|---|
| $x_4\underline{x_3}x_2\underline{x_1}$ | $x_3\underline{x_2}x_1$ | |
| $x_4\underline{x_3}x_2x_1$ | $x_4\underline{x_3}x_2$ | |
| $x_4x_3\underline{x_2}x_1$ | $x_4x_2\underline{x_1}$ | |
| $x_4x_3x_2\underline{x_1}$ | $x_4\underline{x_3}x_1$ | |

Отримання імплікант 1-го роду неможливе. Перекреслення - конституенти, які зникають після поглинання.

СДНФ функції: $x_4x_3x_2\underline{x_1} \vee \underline{x_4} \cdot \underline{x_3} \cdot \underline{x_2} \vee x_4x_2\underline{x_1} \vee \underline{x_2} \cdot x_1 \vee \underline{x_3}x_1$

Таблиця покриття:

| Імпліканти→ Конституенти↓ | $x_4x_3x_2\underline{x_1}$ | $\underline{x_4} \cdot \underline{x_3} \cdot \underline{x_2}$ | $x_4x_2\underline{x_1}$ | $\underline{x_2} \cdot x_1$ | $\underline{x_3}x_1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\underline{x_4} \cdot \underline{x_3} \cdot \underline{x_2} \cdot \underline{x_1}$ | | ⊕ | | | |
| $\underline{x_4} \cdot \underline{x_3} \cdot \underline{x_2} \cdot x_1$ | | + | | + | + |
| $\underline{x_4} \cdot \underline{x_3}x_2x_1$ | | | | | ⊕ |
| $\underline{x_4}x_3\underline{x_2}x_1$ | | | | ⊕ | |
| $x_4\underline{x_3} \cdot \underline{x_2}x_1$ | | | | + | + |
| $x_4\underline{x_3}x_2\underline{x_1}$ | | | ⊕ | | |
| $x_4\underline{x_3}x_2x_1$ | | | | | ⊕ |
| $x_4x_3\underline{x_2}x_1$ | | | | ⊕ | |

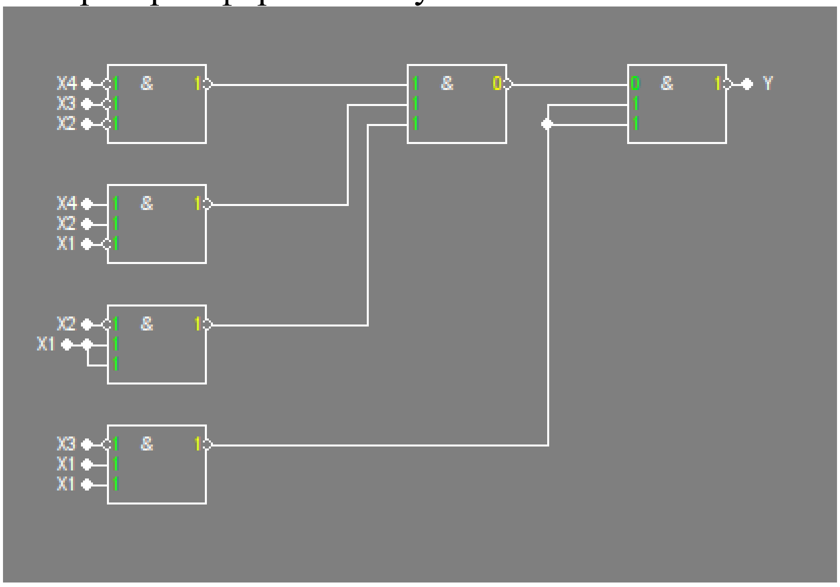
| $x_4x_3x_2\underline{x_1}$ | + | | + | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Ядро | Ядро | Ядро | Ядро |

Як ми бачимо без імпліканти $x_4x_3x_2\underline{x_1}$ можна обійтись. Конституенти $x_4x_3x_2\underline{x_1}$, $x_4\underline{x_3} \cdot \underline{x_2}x_1$, $\underline{x_4} \cdot \underline{x_3} \cdot \underline{x_2} \cdot x_1$ покривають усі інмпліканти з ядра, тому існує лише одна ТДНФ, яка і буде МДНФ.

МДНФ $= \underline{x_4} \cdot \underline{x_3} \cdot \underline{x_2} \vee x_4x_2\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \cdot x_1 \vee \overline{x_3}x_1$ – реалізувати через 3І-НЕ

$$\overline{x_4}\,\overline{x_3}\,\overline{x_2} \vee x_4x_2\overline{x_1} \vee \overline{x_2}x_1 \vee \overline{x_3}x_1 = \overline{\overline{\left(\overline{x_4}\,\overline{x_3}\,\overline{x_2}\right)}\cdot\overline{\left(x_4x_2\overline{x_1}\right)}\cdot\overline{\left(\overline{x_2}x_1\right)}\cdot\overline{\left(\overline{x_3}x_1\right)}} = \overline{\left[\overline{\left(\overline{x_4}\,\overline{x_3}\,\overline{x_2}\right)}\cdot\overline{\left(x_4x_2\overline{x_1}\right)}\cdot\overline{\left(\overline{x_2}x_1x_1\right)}\right]\cdot\overline{\left(\overline{x_3}x_1x_1\right)}}$$

- операторна форма запису




2. Мінімізація $f_2$ методом Квайна-Мак-Класкі.

| $x_4$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $f_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$K^0 = \left\{\begin{matrix} \cancel{0000} \\ --- \\ \cancel{0010} \\ \cancel{0100} \\ --- \\ \cancel{0110} \\ \cancel{1010} \\ \cancel{1100} \\ --- \\ \cancel{1011} \\ \cancel{1110} \\ --- \\ 1111 \end{matrix}\right\}, K^1 = \left\{\begin{matrix} \cancel{X100} \\ \cancel{X110} \\ \cancel{X010} \\ --- \\ \cancel{1X10} \\ \cancel{1X11} \\ \cancel{0X00} \\ \cancel{0X10} \\ --- \\ \cancel{00X0} \\ \cancel{01X0} \\ \cancel{11X0} \\ --- \\ \cancel{101X} \\ \cancel{111X} \end{matrix}\right\}, K^2 = \left\{\begin{matrix} X1X0 \\ XX10 \\ 1X1X \\ 0XX0 \end{matrix}\right\}, Z = \left\{\begin{matrix} 1111 \\ X1X0 \\ XX10 \\ 1X1X \\ 0XX0 \end{matrix}\right\}$$

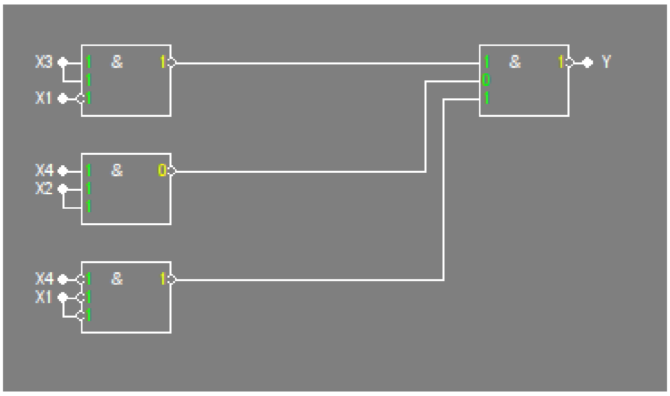
СДНФ = $x_4x_3x_2x_1 \vee x_3\overline{x_1} \vee x_2\overline{x_1} \vee x_4x_2 \vee \overline{x_4}\cdot\overline{x_1}$

| Імпліканти | Конституенти | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0000 | 0010 | 0100 | 0110 | 1010 | 1100 | 1011 | 1110 | 1111 |
| 1111 | | | | | | | | | + |
| X1X0 | | | + | + | | + | | + | |
| XX10 | | + | | + | + | | | + | |
| 1X1X | | | | | + | | + | + | + |
| 0XX0 | + | + | + | + | | | | | |

Ядро: X1X0 ( $x_3\overline{x_1}$ ),1X1X ( $x_4x_2$ ),0XX0 ( $\overline{x_4}\cdot\overline{x_1}$ ).

Імпліканти з ядра «покривають» усі конституенти, тому МДНФ складатиметься тільки з імплікант з ядра.

МДНФ = $x_3\overline{x_1} \vee x_4x_2 \vee \overline{x_4}\cdot\overline{x_1}$ - реалізувати через 3І-НЕ




$$x_3\overline{x_1} \vee x_4x_2 \vee \overline{x_4}\cdot\overline{x_1} = \overline{\left(\overline{x_3\overline{x_1}}\right)\cdot\left(\overline{x_4x_2}\right)\cdot\left(\overline{\overline{x_4}\cdot\overline{x_1}}\right)} = \overline{\left(\overline{x_3x_3\overline{x_1}}\right)\cdot\left(\overline{x_4x_2x_2}\right)\cdot\left(\overline{\overline{x_4}\cdot\overline{x_1}\,\overline{x_1}}\right)}$$ - операторна форма запису для 3І-НЕ

## 3. Мінімізація $f_3$ методом невизначених коефіцієнтів.

| $x_4$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_4x_3$ | $x_4x_2$ | $x_4x_1$ | $x_3x_2$ | $x_3x_1$ | $x_2x_1$ | $x_4x_3x_2$ | $x_4x_3x_1$ | $x_4x_2x_1$ | $x_3x_2x_1$ | $x_4x_3x_2x_1$ | $f_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 000 | 000 | 000 | 000 | 0000 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 00 | 00 | 01 | 00 | 01 | 01 | 000 | 001 | 001 | 001 | 0001 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 00 | 01 | 00 | 01 | 00 | 10 | 001 | 000 | 010 | 010 | 0010 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 00 | 01 | 01 | 01 | 01 | 11 | 001 | 001 | 011 | 011 | 0011 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 01 | 00 | 00 | 10 | 10 | 00 | 010 | 010 | 000 | 100 | 0100 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 01 | 00 | 01 | 10 | 11 | 01 | 010 | 011 | 001 | 101 | 0101 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 01 | 01 | 00 | 11 | 10 | 10 | 011 | 010 | 010 | 110 | 0110 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 01 | 01 | 01 | 11 | 11 | 11 | 011 | 011 | 011 | 111 | 0111 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 10 | 10 | 10 | 00 | 00 | 00 | 100 | 100 | 100 | 000 | 1000 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 10 | 10 | 11 | 00 | 01 | 01 | 100 | 101 | 101 | 001 | 1001 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 10 | 11 | 10 | 01 | 00 | 10 | 101 | 100 | 110 | 010 | 1010 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 10 | 11 | 11 | 01 | 01 | 11 | 101 | 101 | 111 | 011 | 1011 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 11 | 10 | 10 | 10 | 10 | 00 | 110 | 110 | 100 | 100 | 1100 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 11 | 10 | 11 | 10 | 11 | 01 | 110 | 111 | 101 | 101 | 1101 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 11 | 11 | 10 | 11 | 10 | 10 | 111 | 110 | 110 | 110 | 1110 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 111 | 111 | 111 | 111 | 1111 | 1 |

- покриває

- ядро

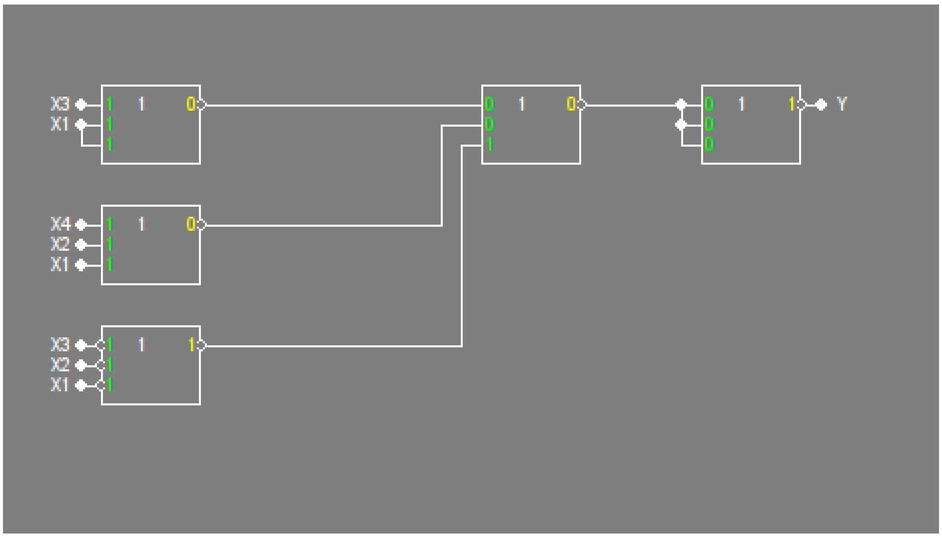
Ядром є імпліканти $\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_1, \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1$ . Ними не покривається лише остання конституента одиниці

ТДНФ$_1$ = $\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 \vee x_4 x_3 x_1$ ; ТДНФ$_2$ = $\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 \vee x_3 x_2 x_1$

Так, як обидві ТДНФ рівні за ціною, то виберемо МДНФ = ТДНФ$_2$ =

$= \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 \vee x_3 x_2 x_1$ - задати в операторному представленні ЗАБО-НЕ

$\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 \vee x_3 x_2 x_1 = \overline{\overline{\overline{(x_3 \vee x_1 \vee x_1)} \vee \overline{(x_4 \vee x_2 \vee x_1)} \vee \overline{(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1)}}}$ - операторне представлення функції.




4. Мінімізація $f_4$ методом діаграм Вейча.

| $x_4$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $f_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

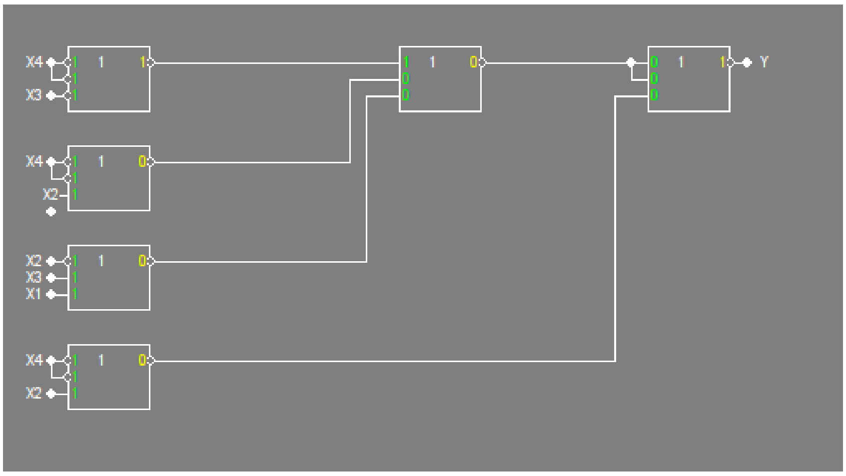
| | X3 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| X4 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| X4 | 1 | 1 | 0 | 1 | X2 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | X2 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| | | X1 | X1 | | |

МДНФ = $x_4x_3 \vee x_4\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_4\bar{x}_2$ - реалізувати через 3АБО-НЕ

$$x_4x_3 \vee x_4\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_4\bar{x}_2 = x_4x_3x_3 \vee x_4x_4\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_4x_4\bar{x}_2 = ((\overline{\bar{x}_4 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3}) \vee (\overline{\bar{x}_4 \vee \bar{x}_4 \vee x_2}) \vee$$

$$\vee (\overline{\bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_3})) \vee ((\overline{\bar{x}_4 \vee \bar{x}_4 \vee x_2}) \vee (\overline{\bar{x}_4 \vee \bar{x}_4 \vee x_2}) \vee (\overline{\bar{x}_4 \vee \bar{x}_4 \vee x_2})) \vee ((\overline{\bar{x}_4 \vee \bar{x}_4 \vee x_2}) \vee (\overline{\bar{x}_4 \vee \bar{x}_4 \vee x_2}) \vee$$

$\vee (\overline{\bar{x}_4 \vee \bar{x}_4 \vee x_2}))$ - операторне представлення функції




**Висновок:**

Під час виконання даної лабораторної роботи я навчився виконувати мінімізацію перемикальних функцій декількома способами: методом Квайна, Квайна-МакКласкі, методом невизначених коефіцієнтів та методом діаграм Вейча. Мінімізація перемикальних функцій дозволяє не тільки значно спростити схему, але й зменшити витрати коштів на конструювання схеми та збільшити її швидкодію.