

Комп'ютерне моделювання

Лекція 1

5.03.13р

Загальна хар-ка моделювання,
методів мод-ня

Модель - прагматичні знання про
об'єкт; для практичного застосування

Об'єкт моделювання - оригінал

Ми завжди користуємось моделями

Щоб описати оригінал потрібно
дуже багато інф-ї.

Важлива простота і адекватність
моделі.

Моделюв. ком. сх.:

- з т.з. логіки функціонування;
- з т.з. швидкості, динамічні
хар-ки;
- з т.з. надійності;
- з т.з. теплових хар-к.

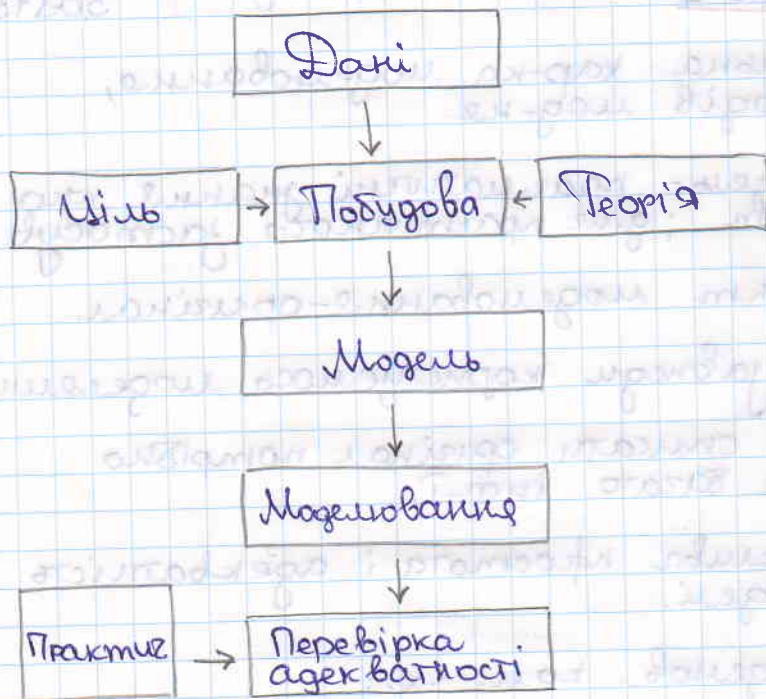
Суттєвий пром. - аналіз моделей

Хар-ки моделей

Цілі моделей:

- проектування систем;
- отримання нових знань, даних,
що не можна отримати
експериментально.

Процес побудови моделі



Будовані моделі є формальними

Класифікація моделей

- 1) розумове моделювання;
- 2) апаратне моделювання;
 1. натурне моделювання (в справжніх формах);
 2. фізичне моделювання (з макетами);
 3. аналогове моделювання (різна природа, різні властивості);
- 3) аналогове моделювання.

3) комп'ютерне моделювання

1. імітаційне моделюв. (комп. імітує роботу реальн. об'єктів);
2. математ. моделюв. (побудова мат. моделі - формули, що описує поведінку об'єкта);
3. семантичне моделювання (створ. штучної мови, опис цієї мовою об'єкта, ситуативне моделювання).
(розвиток наївних мов - які як комп'ютер в дії комп'ютер?)

Лабораторна робота №1

Імітаційне моделювання.

Імітування вх. сигналів - імітація випадкового вх. потоку даних.

Генерація і аналіз випадкових потоків.

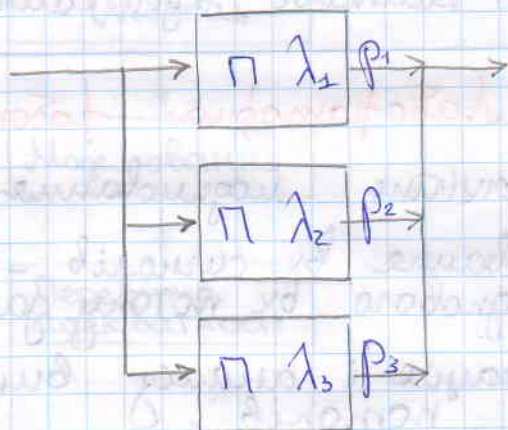
1 година генерує потік, результат → в пам'ять. Аналіз → визнач. парам. потоку (Ідентифікація потік - інтенсивн.).

Відтворення → відтворити такий же потік; порівняння → відтворення адекватне

Стандартні потоки

- Потік Пуассона (повтор.)
- Потік Ерланга (повтор.)
- **Гіперекспоненційний** - потоки пуассона працюють паралельно

λ
 λ_1
 λ_2
 λ_3
 ρ_1
 ρ_2
 ρ_3



$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 1$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

$$\theta = \frac{1}{\lambda_1} \ln 2$$

1 число - визначає, який канал працюватиме; котілі генерують швидкість з якою інтенс, який канал працюватиме

k- к-сть каналів - суцільна
к-сть дітей наших батьків

Лекція 2

12.9.13р.

(прод.)

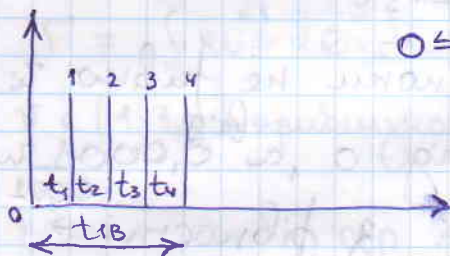
- Потік Еранга k -го порядку з інтенсивн. λ - вибираємо кожну k -ий вел. з інт. $\lambda_i = k\lambda$.

Потрібно генер. мом. часу $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$

$$k=4, \lambda=1,5; 4\lambda=6$$

$$\begin{aligned} z_1 - t_1 &= \frac{1}{6} \ln z_1 && \text{генеруємо події Пуассона} \\ z_2 - t_2 &= \frac{1}{6} \ln z_2 \\ z_3 - t_3 &= \frac{1}{6} \ln z_3 \\ z_4 - t_4 &= \frac{1}{6} \ln z_4 \end{aligned}$$

$$t_{13} = \frac{1}{6} (\ln z_1 + \ln z_2 + \ln z_3 + \ln z_4)$$

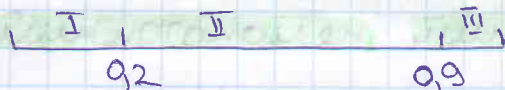


$0 \leq z \leq 1$ - випадкове число вбуд. генератора.

Існують метод Монте-Карло

- Гіперекспоненційний

$0 < \xi < 1$ випадкове



$$t = -\frac{1}{\lambda_i} \ln \xi$$

$0 \leq \xi, z_i \leq 1$ - два фізні числа зі вбуд. генератора

Середній інтервал між подіями, дисперсія потоку; теоретично і практично мають співпадати значення — завдання для генератора потоку

• Дифузійний монотонний

Р-е розподілу; щільності розпод.

$$\frac{t+\xi}{2\sqrt{\xi}} \cdot e^{-\frac{(t-\xi)^2}{2\xi t}}$$

вх. $\xi, \sqrt{\xi}$

1. вип. число $0 \leq r_i \leq 1$

$$2. r_i = \int_0^{t_i} \frac{t+\xi}{2\sqrt{\xi}} \cdot e^{-\frac{(t-\xi)^2}{2\xi t}} dt$$

$t_i \uparrow \rightarrow \int_0^{t_i} \uparrow$ поки не рівно r_i
інтеграл не big 0, а ^{big} 0,0001 _{0,001}

Отримуємо t_i з рівності \rightarrow
наше випадкове число;
рівність з точністю 0,001.

• Дифузійний немонотонний

Р-е розподілу

$$r_i = \int_0^{t_i} \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{(t-\sqrt{t})^2}{2t}} dt$$

$0 \leq \gamma \leq 1$ генеруємо

вх. τ, ν

$t_j \uparrow \rightarrow$ рівність.

• **логарифмічний нормальний**

$$\tau_i = \int_{0.001}^{t_i} \frac{1}{\sigma + \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \ln \xi)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$0 \leq \tau_i \leq 1$; $t_i \uparrow$ - рівність $\rightarrow t_i$

• **потік Рейбуна**

вх. ξ, ν

$$\tau_j = \int_0^{t_j} \frac{\nu}{\xi} \left(\frac{t}{\xi}\right)^{\nu-1} e^{-\left(\frac{t}{\xi}\right)^\nu} dt ; 0 \leq \tau_j \leq 1$$

Сер. інт. : $\tau = \xi \Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)$

$$\Gamma = \int_0^\infty u^{\nu-1} e^{-u} du$$

($\nu \in [1; 1.4]$ приблизно)

↑
теоретично
визначити

практично сер. інт. - сер. арифм.

Аналіз потоку

1. $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{100}$
інтервали між подіями.

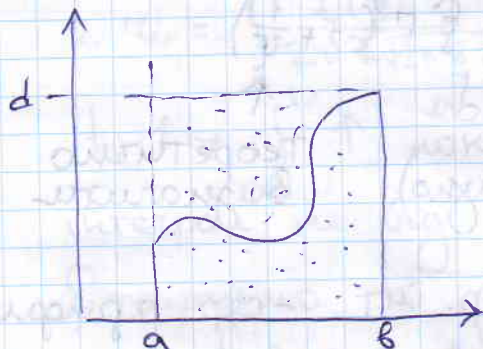
Критерій χ^2 - побуд. історично-частота появи подій
big data.

ймов. знаходж. в кожному інтервалі

Метод МонтеКарло

$$\int_a^b f(x) dx$$

ξ - у % к-сть точок під прямою.



$$d(b-a) = S$$

$$I = S \cdot \xi$$

генеруємо

$$x \in [a, b], \\ y \in [0, d]$$

Критерій максимуму правдоподібності

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$

заданий закон розподілу
 $f(t, \xi_1, \xi_2)$

Пішов. того, що подія відбул. з час t_j
 $f(t_j, \xi_1 \xi_2) \cdot \Delta t$

$$W = \prod_{j=1}^n f(t_j, \xi_1 \xi_2) \Delta t -$$

Пішов. того, що з'явиться задана сукупність подій у віднов. такі моменти часу

Потреба підібрати $\xi_1 \xi_2$

технічно:

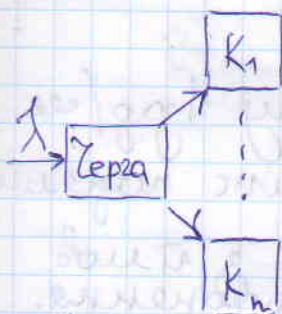
$$\max_{\xi_1, \xi_2} \prod_{j=1}^n f(t_j, \xi_1 \xi_2)$$

Лекція 3

13.9.13р.

Система масового обслуговування

СМО - мат. модель о.



$\frac{1}{\mu}$; μ (-інтенсивн. на виході)

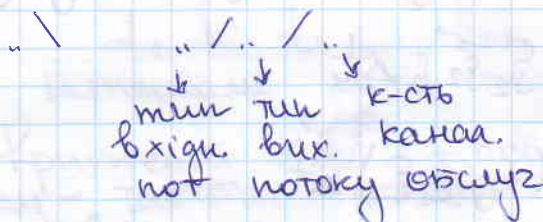
$$\lambda < \mu$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

- загрузка СМО

λ -вх. потік

Системи



- M - потік пуассонівський
- G - потік довільний
- D - рівномірний регулярний

M/M/1 - без повернення - розш.

$P_0 = 1 - \rho$ - ймовірність того, що черга пуста

$P_n = \rho^n \cdot P_0 = \rho^n (1 - \rho)$ - ймов. того, що в черзі n запитів

$P_{>n} = \rho^{n+1}$ - ймов., що в черзі > n запитів

$m(n) = \frac{1}{1 - \rho}$ - середня довжина черги

Задача

Трив. розв. в середньому 1 год/сек.
M потік, 125с - інтенс. між подіями

Визнач довж. черги, щоб з ймов. 0,99 не сталося чергування.

$$\mu = 1; \frac{1}{\mu} = 1 \text{ pag./cex.}$$

$$\lambda = 1,25 = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1,25} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$p_0 = 1 - p = 0$$

$$p_{n+1} = p^{n+1} = 0,8^{n+1} = 0,09001$$

$$p = \frac{1}{\mu} = \frac{0,8}{1} = 0,8$$

$$\ln_{0,8} 0,8^{n+1} = \ln_{0,8} 0,09001$$

$$n+1 = \frac{\log_{0,8} 0,09001}{\log_{0,8} 0,8} = \frac{\log_{0,8} 0,01}{1} \approx 4,16 \approx 5$$

$$\lambda = \frac{1}{1,25} = 0,8; \mu = 1 \quad \mu > \lambda$$

$$0,01 = p^n \cdot p; \quad p = \frac{1}{\mu} = 0,8$$

$$p^n = \frac{0,01}{0,8} = 0,0125$$

$$0,8^n = 0,0125 \Rightarrow n \approx 19$$

$$m = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{0,8}{0,2} = \frac{8}{2} = 4$$

Bignobigio : 19

$$m(t) = t_{02} + t_{05}$$

t_{02} - сер. час обслугов. в черзі

$m(t)$ - сер. час обслугов.

t_{05} - обробки

Якщо є 1 канал обслуг:

$$m(t) = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad \text{— сер. час знаходиться в системі}$$

Час реакції сис-ми - час знаходження в сис-мі.

Сис-ма

$M/M/k$

$\frac{1}{\mu}$ - час обробки заявки

$$m(t) = \frac{1}{k\mu - \lambda} \quad \text{— час обробки черги}$$

Задача

M , 2400 на добу; в сер. маш. обслуг. 30 хв; 15 хв. іде; 15 хв лікує

4-ств автом. в парку?

Сер. час текання на швидку 0,5 год.

$$\lambda = 100 \text{ н/год}$$

$$m(t) = \frac{1}{k\mu - \lambda} = \frac{1}{4} \text{ год} \quad \mu_1 = 2 \text{ н/год}$$

$$\frac{1}{k \cdot 2 - 100} = \frac{1}{4}, \quad 4 = 2k - 100,$$

$$2k = 104 \quad k = 52 \quad \mu_k = 104$$

$$m(n) = \frac{n}{\mu - \lambda} = \frac{100}{104 - 100} = \frac{100}{4} = 25$$

Відповідь: 52 машини

Задача

На роботу роздрук. 2400 машин,
вх. потік М. Жуасона.

1 апарат роздрук. 1 маш. за 40 хв.

Скільки потрібно апаратів, щоб
1 машина знахд. в порту
в сер. 1 год?

$$m(t) = \frac{1}{k\mu - \lambda} = 1 \text{ год}$$

$$\lambda = 100 \text{ м/год} \quad \mu_1 = 1,5 \text{ м./год}$$

$k\mu_1 - ?$

$$k = 100 / 1,5 \approx 68 \text{ машин}$$

Відповідь: 68 машини

Теорема ліній?

яка встан віднош ліній. середн.
довгос терм

$m(t)$ - сер. час перебув. в системі

$$m(n) = \lambda(m(t))$$

Розм ситуацію: вх. потік M ;
потік обслуз. - довільний, где
якою відомо:

• сер. час обслуз. $\bar{t} = \frac{1}{\mu}$

• дисперсія D часу обслуз.

$$D = \sigma^2 = \int_0^{\infty} f(t) \left(t - \frac{1}{\mu}\right)^2 dt$$

$f(t)$ - гр-я щільності часу
обслузов.

1. визначити мат. очікув.

2. визначити D

використ. формули

Галатка - Хінгена (где дов. потік.)

I. Сер. довгос. терм

$$m(n) = \frac{1}{1-\rho} \left[\rho - \frac{1}{2} \rho^2 (1 - \mu^2 \sigma^2) \right]$$

II Сергас текання в сергі

$$m(t) = \frac{1}{\mu(1-p)} [2 - p(1 - \mu^2 t^2)]$$

Задача

Тас обслуз. автом. 30 сек.

Тас обслуз. людською дов. (м) 30 сек

Відвідувач з'яв. в сер. кожні 45 с.

Сер. довгос. терм. для авт? люд?.

$$m(n) = \frac{1}{1-p} [p - \frac{1}{2} p^2 (1 - \mu^2 t^2)]$$

$$\mu_a = 2 \text{ л/хв.} \quad \mu_n = 2 \text{ л/хв.}$$

$$\lambda = \frac{4}{3} \text{ л/хв.}$$

$$\frac{1 - \frac{3}{4}}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{-1}{3}} = -\frac{3}{4}$$

$$\rho_a = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \rho_n$$

$$m(n)_a =$$

$$m_n = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{\frac{4}{3}}{2 - \frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$$

$\sigma^2 = 0$ - регулярн. потік, немає відх. від сер.

$$m(n)_a = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} (1 - 4 \cdot 0) \right] =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3}} \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{9} \right] = 3 \left[\frac{6-2}{9} \right] = 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3} \approx 1,33$$

$$\text{Відповідь: } m(n)_a = 1,33$$

$m(n)_n = 2$
автомат ефективніше.

Zagaza

Ha bxiq Π - M notik jagaz $\lambda = 1z / ak$
 Pakmurno zagazi globx munib.

$$I_m - 0,7 = P_I ; \text{fozb. za } 0,5c$$

$$II_m - 0,3 = P_{II} ; \text{fozb. za } 1,2c$$

$$m(t) - ?$$

$$\mu_I = 2z/c$$

$$\mu_{II} = 0,83z/c$$

$$\mu = 0,7\mu_I + 0,3\mu_{II} = 1,4 + 0,249 = 1,65z/c$$

$$\rho = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{1,65} = 0,606$$

$$m(t) = \frac{1}{3,3(1-0,606)} (2 - 0,606(1 - 1,65^2 \cdot D)) =$$

$$! D = (1-\tau)^2 p_1 + (1-\tau)^2 p_2 =$$

$$\tau_c = 0,7 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 1,2 = 0,71(c) \quad \mu = \frac{1}{\tau_c}$$

$$\mu = \frac{1}{\tau_c} = \frac{1}{0,71} = 1,41$$

$$D = p_1 (1-\tau_c)^2 + p_2 (1-\tau_c)^2 = 0,081$$

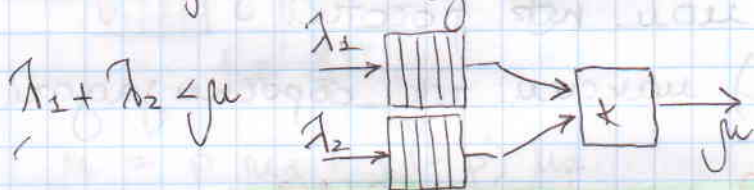
$$\rho = 0,71$$

$$m(t) = 3,2c - \text{Bignobige:}$$

Піоритетні сери

Висносний пріоритет - експр.,
включає на вибір загарі з
сері.

Абсол. пріоритет - включає на
перерив. той загарі, що
виконується (з меншим пріор.)



Піорі сер. час обслуз. в сері
(пріор. $\lambda_1 >$ пріор. λ_2)

$$m_1(t) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu(\mu - \lambda_1)}$$

$$m_2(t) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_1 - \lambda_2)}$$

Нагромадження СМО

Критерії ефект. СМО

- коеф. завант. пристрою (каналу)

ρ - середня

- середня довж. сери

$m(n)$

• часові хар-ки:

а) сер. час перебув. задати в сист.

б) дисперсія сер. часу перебув. задати в сист.

в) час реакції системи - час від появи задати до мом. роз. роботи.

2) максим. час обробки задати.

Класифікація СМО

I. СМО без терм

II. Класичні СМО (з термом)

III. СМО з обмеж. часом чекання (міняючого періоду часу задати втрачає актуальність)

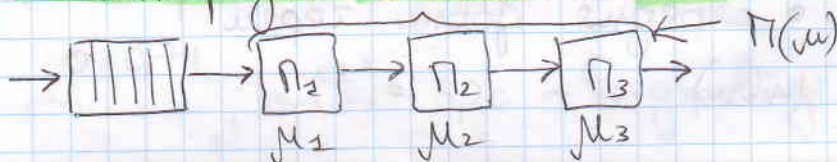
Об'єкти моделей:

1) к-сть процесорів

2) сер. час обслугов.

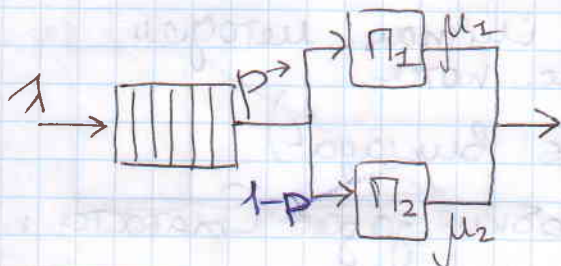
3) дисципл. обслуговув.

Багатофазні системи СМО



$$\mu_3 = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{\mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_3} \quad (3 \text{ пропуски})$$

$$\mu_2 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}; \quad \mu_4 = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 \mu_4 + \mu_1 \mu_2 \mu_4}$$



$$\mu = p \mu_1 + (1-p) \mu_2$$

Дисципліни обслуговування

= без переривання обслуговування

1. FIFO

2. LIFO (наліть-стек)

3. SF (с-ли в яких обслз.)

в першу чергу ті, які мають
найменший час обслз.)

4. LF (в першу чергу з найдовш. час. обсл.)

5.

Лабораторна робота №2

Модельово імітац. методом
вх. Плас. потік

1-вх (задає викида?)

Потік обробки задає Статиста:

- рекурсивний
- Пласонівський
- інтерекспоненційний (порядок ≤ 5)
- нормальний
- рівномірний

Порядок набору може типів
обслуговування задає Статиста

- FIFO (LIFO)

= RM (рекурсивний) - підібрати
оптимальний напрям. роботи

Задає умову др-е

$$f = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + \dots$$

k - коеф. значимості
крит. еф

x_1 - сер. час знач. жар. в сист.

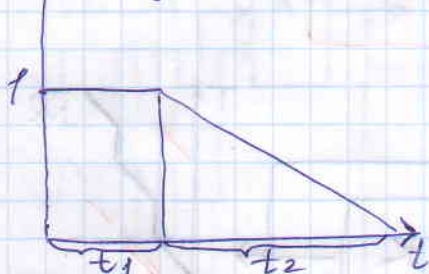
x_2 - Д часу - " -

x_3 - час реакції системи на появу
жароги

x_4 - в одному к-сті обробе жароги до
заг. кіль-сті жароги, які прийшли

X₅ - суцарна оцінка актуальності
об'єктивних даних.

актуальність

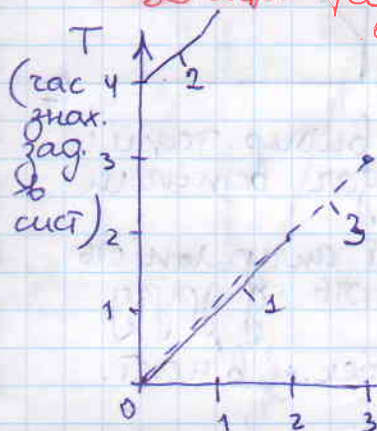


Тенеруємо 1000 годоз (мзг.гас)
Вввакс. є min 2 системи ✓ #-ств-?

→ μ, λ виводило пар-ри ефективності
заг. знач. цілової функції.

! Максимуми і з функцією !!!

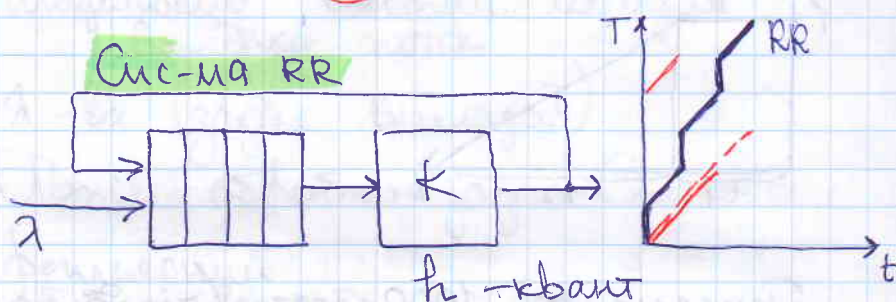
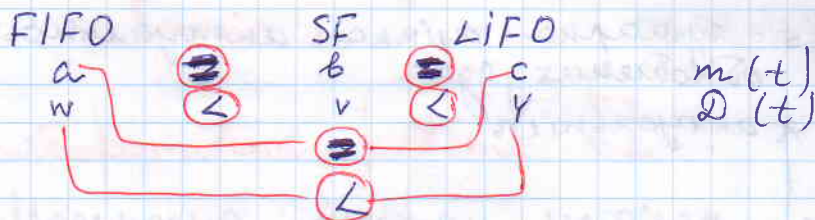
Diap. tozv. konkr jagori



LIFO

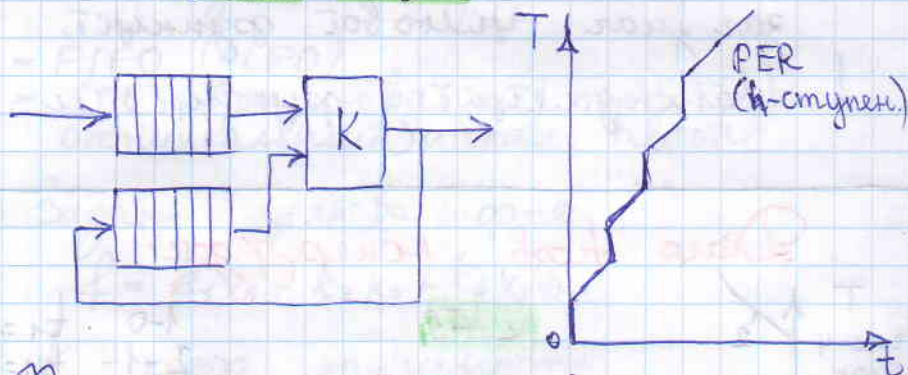
1-0	$t_1 = 2$
2-1	$t_1 = 1$
3-2	$t_1 = 3$

(час
розв.
конкр.
зад.)



зменшувати знач. h , щоб досягти макс. ефект. системи.

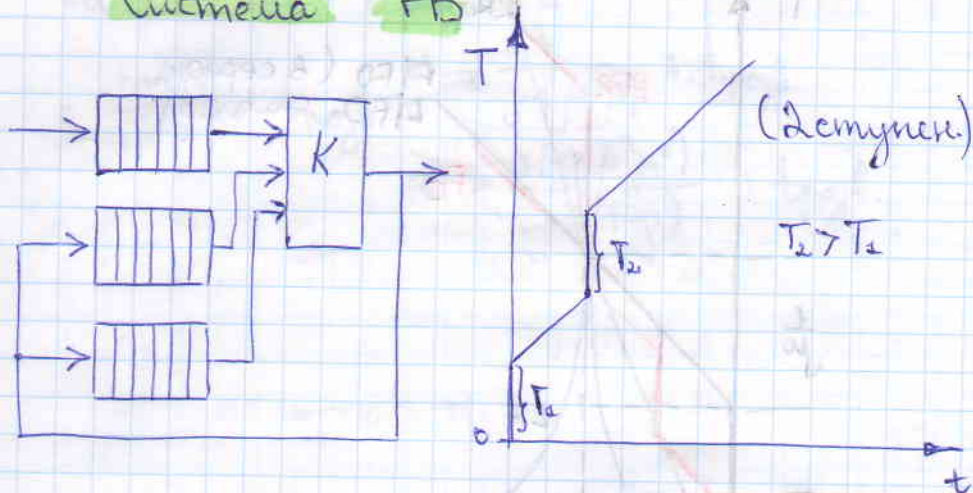
С-ма PER



Квант часу обробки видир. таким чином, щоб більш. задан. витрати обробились.

Якщо з не обробилась \rightarrow її актуальність знизилась і вони стають з групи чергу (Internet) час тех. внаслід. черги все більший.

Система FB

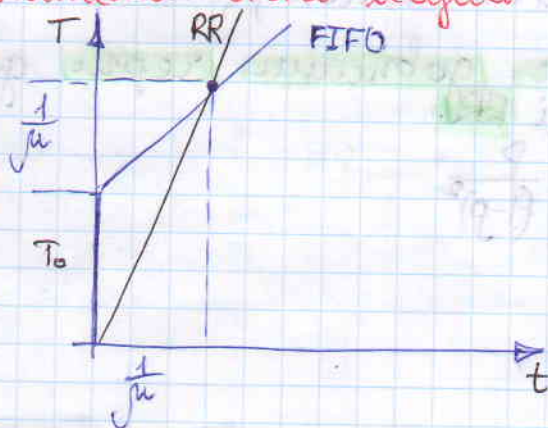


В другій черзі заг. в. з середнім пріоритетом приходить на К і виконується еквів. квант часу, і переходить в наступний пріоритет. Чергу і якщо виходить з останньої черги → то задача виконується до кінця (не залежно від кванту часу).

Лекція 6

1.10.13р.

Математичні моделі обслуговування

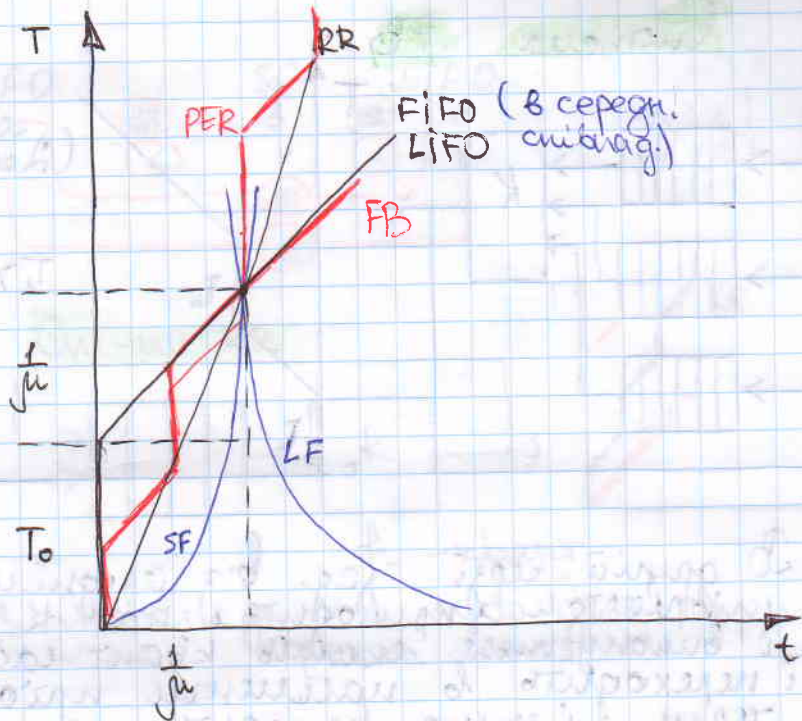


LIFO-?

LF-?

SF-?

RR-?



Визначення середніх значень

- **сер. довж. черги** (M ; заг. потік-Паладека-Хінгена);
- **сер. час перебування в черзі** (M ; Паладека-Хінгена);
- **висновки довжини черги для FIFO і RR.**

$$L(n) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$t_{\text{aver}} = t_{\text{or}} + t_{\text{poz.}} =$$

$$= \frac{n(n)}{\mu} + t_{\text{poz.}} \xrightarrow{M} \frac{1}{\mu(\mu-1)} + t_{\text{poz.}}$$

$$\xrightarrow{G} \frac{\rho(1+\delta^2\mu^2)}{2\mu(1-\rho)} + t_{\text{poz.}}$$

Задание!

$M: \mu = 20; p = 0,85$

Зад. по зб. задану $t = 1,2c$; $h = 0,05c$

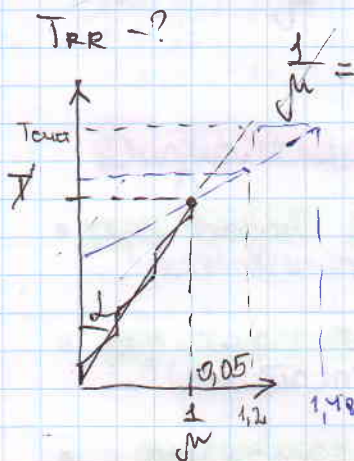
Значит: зад. знахожне в сист. где
FIFO; где RR; T-?

$$T = t_{\text{oc.}} + t_{\text{poz.}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \lambda = 20 \cdot 0,85 = 17$$

$$T_{\text{FIFO}} = t_{\text{сист. FIFO}} = \frac{17}{20(20-17)} + 1,2c = 0,28 + 1,2 = 1,48c$$

$T_{\text{RR}} - ?$

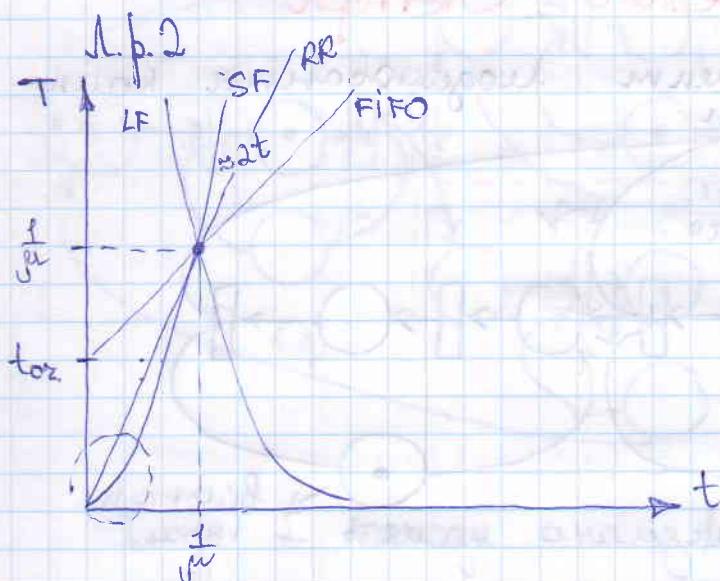


$$\frac{1}{\mu} = n \cdot h, \quad n = \frac{1}{\mu \cdot h} = \frac{1}{20 \cdot 0,05} = 1$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\mu} + t_{\text{oc}}} = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\mu} + \mu(n-1)}$$

$$= \frac{0,05}{0,05 + \frac{0,15}{3}} = \frac{0,05}{0,05 + 0,28} = 0,15$$

$$t_{\text{сист. RR}} = \frac{1,2}{\text{tg } \alpha} = \frac{1,2}{0,15} = 8$$



- $t_{0.5}$ М, Палазка-Хінгелен, $\rightarrow \frac{1}{\mu}$ (μ -відомо)
- для SF нахил частини графіка з коэф. $2t$
- RAND - нічого крайого, ніже середні знач. ми не отримаємо; нічого не можна говорити про t, T .
- один вх. потік \rightarrow обробка кільк. способами з варіантом

Якщо відомо довж. черги m , то має час очікув. в черзі

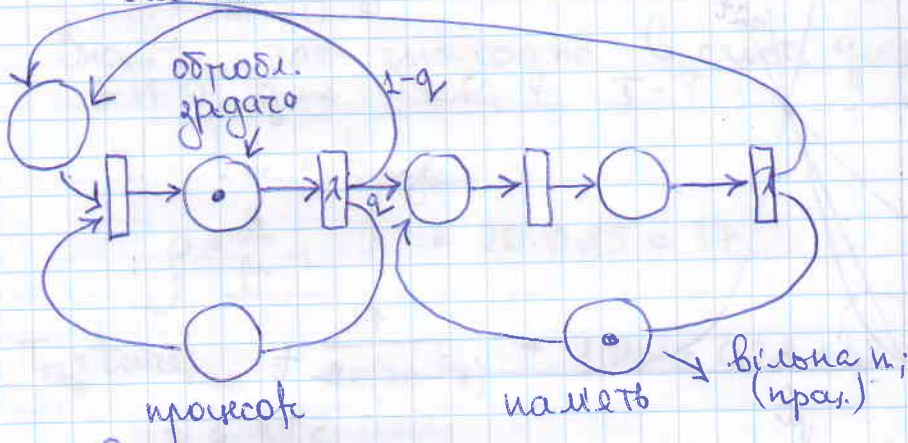
$$m(t) = \frac{m}{\mu}$$

Мімов. того, що сист. перебуває в черзі час t_f

$$P_{t_f} = 1 - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} e^{-\mu \cdot t_f} \cdot (\mu \cdot t_f)^j \approx \frac{1}{2} \cdot \Phi\left(\frac{t_f - \frac{m}{\mu}}{\sqrt{\frac{m}{\mu}}}\right)$$

Мережі Петрі

інструмент моделювання комп. системи



Вважаємо, що потік запитів не змінюється (маємо 2 запити)

q - вив.

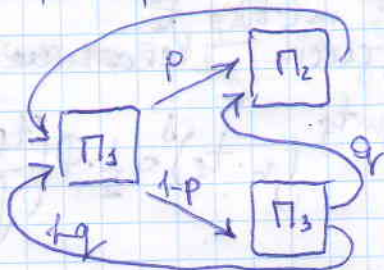
1 - часовий перехід-фіксований

Лекція 8

10.10.13р

Задача

Зарядити:



4 запити в мережі Петрі.

Згідно з П - FIFO

2 Аналітичний аналіз м.л.

Глобулова дерева досяжності

Маркер стану

$\langle 0, 1, 0 - 0, 0, 1 - 0, 1, 0 \rangle$

Граф Маркова

Лаб 4/3

Меренса Петрі \rightarrow затвердження!

Статист. модел.

Лаб. 4

На комп. - дерево досяжності -
граф Маркова
(за природою неперервний)

Сума 1 - зайнятості процесу.

On

M1

$P_{11}P < 2,1,1,0 - 0,0,1,1 - 0,1,1,0 > M1$

$\swarrow P_{11}P$

$\searrow P_{3,1}P$

$P_{3,1}P$

$< 2,0,1,1 - 1,0,1,1 - 0,1,1,0 > < 2,0,1,1 - 0,0,1,1 - 0,1,1,0 > < 2,1,1,0 - 0,1,1,0 > < 2,1,1,0 - 0,1,1,0 >$

M2

$< 2,1,1,0 - 0,1,1,0 >$

$< 3,1,1,0$

M5

$P_{11}P < 0,1,0 - 1,1,0 - 0,1,1,0 > M4$
 $P_{11}P < 0,1,0 - 0,1,0 - 1,1,0 > M3$
 $P_{11}P < 0,1,0 - 0,1,0 - 0,1,1,0 > M8$
 $P_{11}P < 0,1,0 - 0,1,0 - 0,1,1,0 > M1$
 $P_{11}P < 0,1,0 - 0,1,0 - 0,1,1,0 > M6$
 $P_{11}P < 0,1,0 - 0,1,0 - 0,1,1,0 > M7$

