ЛЕКЦІЯ 6

Методи розв'язування нелінійних рівнянь

Постановка задачі

Нехай потрібно розв'язати рівняння

$$f(x) = 0,$$

де $f(x)$ – неперервна функція в скінченному або нескінченному інтервалі.

Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені, тобто ті значення x, які перетворюють y у виразі $y = f(x)$ на нуль при x^*, або довести, що кореня немає.

Будь-яке значення $x = x^*$, в якому $f(x)$ набуває значення нуль, називається коренем цього рівняння.

Приклад. Нехай $f(x) = 2x + 2;\quad 2x + 2 = 0;$

$$2x = -2;\quad x = -1;$$

Тоді у виразі $y = 2x + 2$ $y = 0$ при $x = -1$

Отже $x^* = -1$

Завдання полягає у відшуканні такого наближеного значення кореня x_{nb}, яке мало відрізняється від точного значення кореня $x*$, так що виконується нерівність

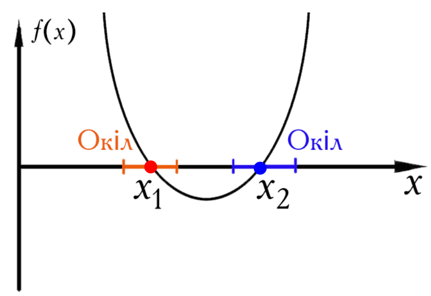
$$\left|x^* - x_{nb}\right| < \varepsilon,$$

де ε – мала додатна величина – припустима помилка, яку ми можемо заздалегідь задати на свій розсуд.

Якщо корінь знайдений з точністю ε, то прийнято писати

$$x^* = x_{nb} \pm \varepsilon \;.$$

Нехай рівняння $f(x) = 0$ має ізольований корінь.



Визначення ізольованого кореня. Корінь рівняння називається ізольованим, якщо існує окіл, у якому цей корінь єдиний.

$$y = ax^2 + bx + c$$

Етапи наближеного розв'язування нелінійних рівнянь

Наближене розв'язування рівняння складається із двох етапів:

1. Відділення кореня, тобто знаходження інтервалів з області визначення функції $f(x)$, у кожному з яких знаходиться тільки один корінь рівняння $f(x)=0$.

2. Уточнення кореня до заданої точності.

Відділення кореня можна проводити ***графічно й аналітично***.

*Існує **два способи графічного відділення** кореня*

Перший спосіб графічного відділення кореня

Для того, щоб графічно відокремити корені рівняння $f\left(x\right)=0$ у **перший спосіб**, необхідно побудувати графік функції $y=f\left(x\right)$. Абсциси точок його перетину з віссю Ox є дійсними коренями рівняння (рис. 1).

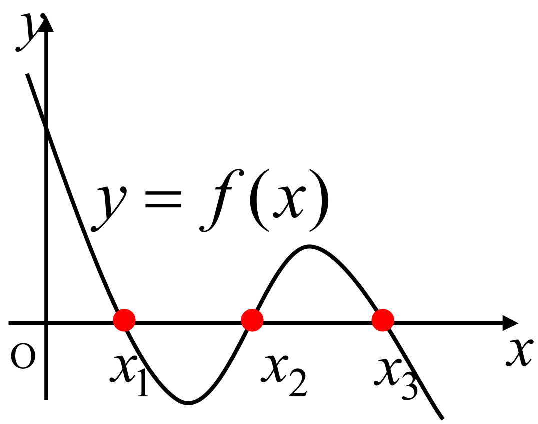


Рис. Графічне відділення кореня (1-й спосіб).

Другий спосіб графічного відділення кореня

Представимо $y = f(x)$ як $y = y_1 - y_2$ де $y_1 = \varphi(x)$ і $y_2 = \psi(x)$. Абсциси точок перетину графіків функцій $y_1 = \varphi(x)$ і $y_2 = \psi(x)$ дасть корені рівняння $\varphi(x) = \psi(x)$, а отже, і вхідного (початкового) рівняння $f(x) = 0$. (Ефективний, якщо функцію можна розділити на доданки)

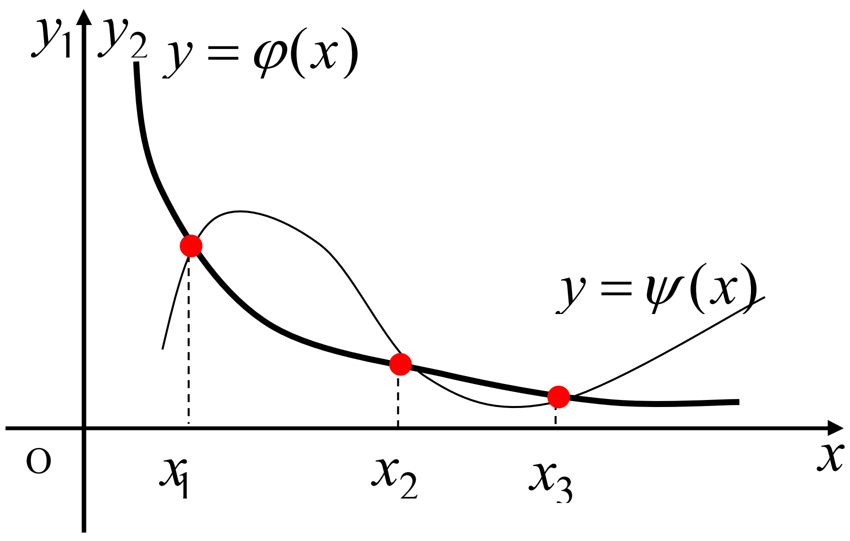


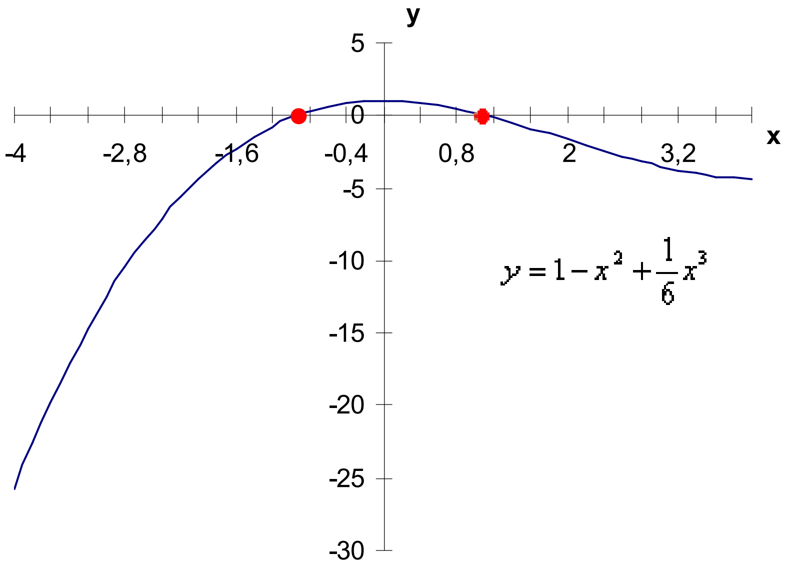
Рис. Графічне відділення кореня (2-ий спосіб)

Приклад. $f(x) = x^2 - 2x$, $x^2 = 2x$, $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 2x$

Приклад 1. Відокремити графічно корінь рівняння $1 - x^2 + \frac{1}{6}x^3 = 0$ у перший спосіб.

Розв'язок. Для розв'язування задачі побудуємо графік функції (рис. 3)

$$y = 1 - x^2 + \frac{1}{6}x^3$$



З рисунка видно, що один з коренів рівняння належить відрізку $[-1,2;-0,8]$, другий – відрізку $[0,8;1,2]$. Оскільки розглянуте рівняння третього степеня, то повинен існувати ще один корінь на інтервалі $(3,2;+\infty)$.

Рис. Графік функції $y = 1 - x^2 + \frac{1}{6}x^3$

Приклад 2. Відокремити графічно корінь рівняння

$$(x-1)^2 - \frac{1}{2}e^x = 0$$ у другий спосіб.

Розв'язок. Перетворимо рівняння до виду $(x-1)^2 = \frac{1}{2}e^x$ й побудуємо графіки функцій $y=(x-1)^2$ і $y=\frac{1}{2}e^x$ (рис. 4).

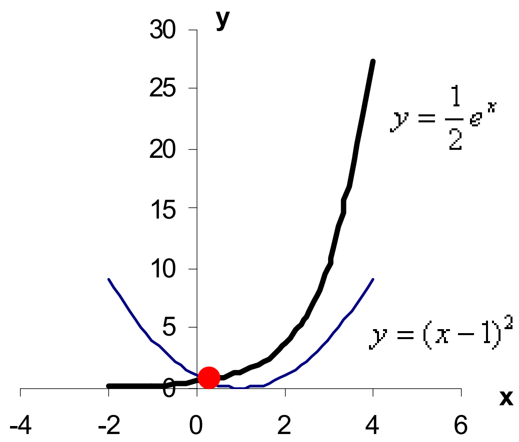


Рис. Графічне відділення кореня

З рисунка видно, що абсциса точки перетину цих графіків належить відрізку $[0;1]$.

Аналітичне відділення кореня

Аналітичне відділення кореня базується на наступних теоремах.

Теорема 1. Про *існування кореня рівняння*

Якщо неперервна функція $f\left(x\right)$ набуває значення різних знаків на кінцях відрізка $\left[a;b\right]$, тобто

$$f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0$$

то усередині цього відрізка існує щонайменше один корінь рівняння $f\left(x\right)=0$,

тобто таке значення x^*, що $f\left(x^*\right)=0$.

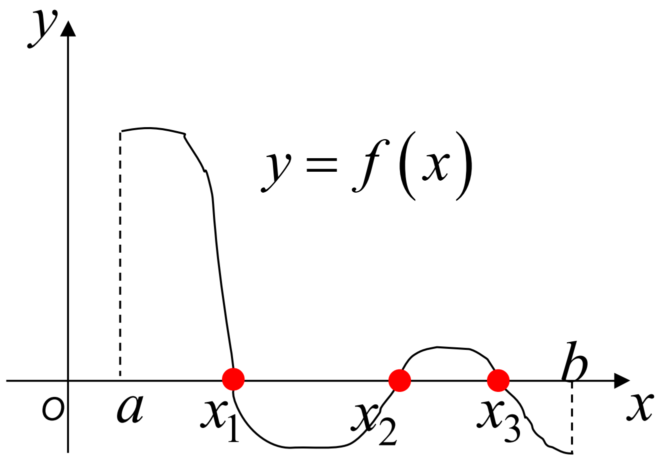


Рис. Існування кореня на відрізку.

Теорема 2. Про існування єдиного кореня

Якщо неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $y = f(x)$ набуває на кінцях відрізка значення різних знаків, а похідна $f'(x)$ зберігає знак усередині відрізка $[a,b]$, то усередині відрізка існує єдиний корінь рівняння $f(x) = 0$ (рис).

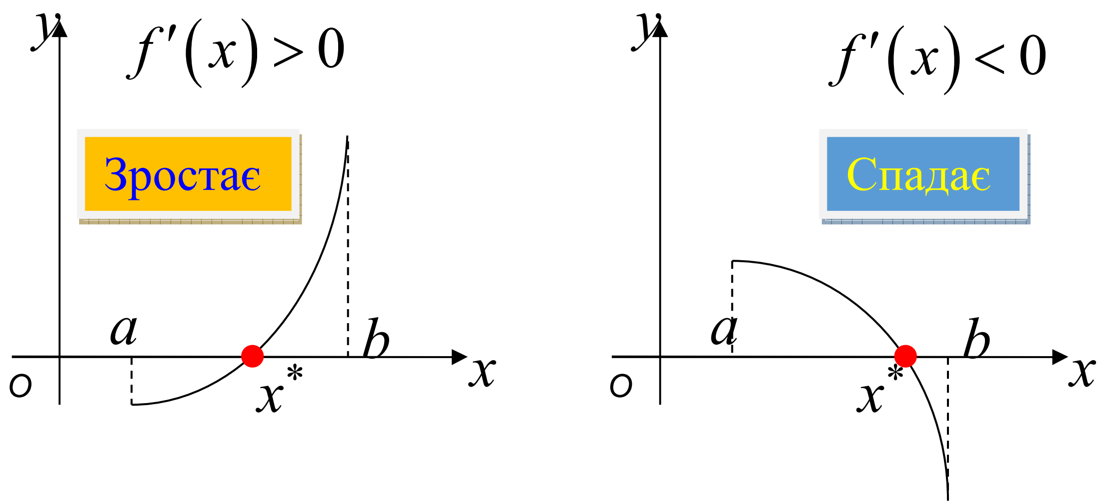
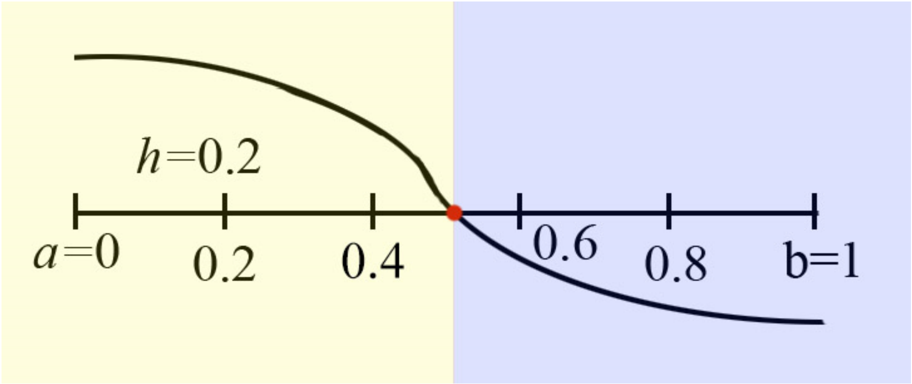


Рис. Існування єдиного кореня на відрізку.

Застосування теорем для відділення кореня

1) Визначаємо граничні точки $x = a$ й $x = b$ з області визначення функції $f\left(x\right)$.

2) Обчислюємо значення $f\left(x\right)$ на $\left[a;b\right]$ через проміжки довільної довжини h до зміни знака при переході від $f\left(x\right)$ до $f\left(x+h\right)$



Приклад 1. Підтвердити аналітично правильність знаходження відрізка ізоляції кореня рівняння $(x-1)^2-\frac{1}{2}e^x=0$.

Розв'язок.

Для відрізка $[0;1]$ маємо:

$$f(0)=(0-1)^2-\frac{1}{2}e^0=0.5;$$

$$f(1)=(1-1)^2-\frac{1}{2}e^1=-\frac{1}{2}e=-1.359.$$

Виходить, $f(0)\cdot f(1)<0$.

Отже, корінь відділений правильно.

Приклад 2.

Відокремити корені рівняння $f\left(x\right) \equiv \ln x + x^2 - 0.5 = 0$.

Розв'язок. Виходячи з області визначення $\ln x \; \left(x > 0\right)$

$f\left(0.1\right) = -2.303 + 0.01 - 0.5 = -2.783$;

$f\left(0.5\right) = -0.693 + 0.25 - 0.5 = -0,943$;

$f\left(1\right) = 0 + 1 - 0,5 = 0,5$

Складемо схему знаків функції

x	0.1	0.5	1
$sign\, f\left(x\right)$	(-)	(-)	(+)

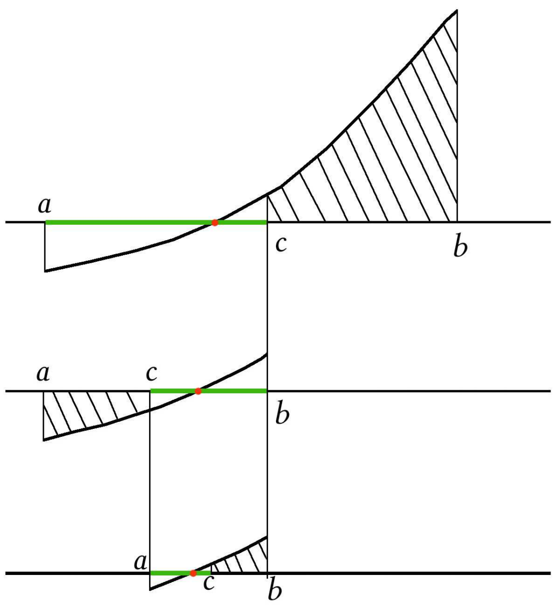
$$f'\left(x\right) = \frac{1}{x} + 2x = \frac{1+2x^2}{x} > 0$$ при $x > 0$,

тобто єдиний корінь належить відрізку $\left[0.5;1\right]$.

Розглянемо деякі методи уточнення кореня.

Метод половинного ділення

Нехай потрібно уточнити єдиний корінь рівняння $f\left(x\right)=0$, що належить відрізку $\left[a;b\right]$ Точка $c=\dfrac{a+b}{2}$ – середина відрізка $\left[a;b\right]$.



Якщо $f\left(c\right)=0$, то корінь знайдений.

А якщо ні, то для подальшого розгляду залишаємо ту з половин $\left[a;c\right]$ або $\left[c;b\right]$, на кінцях якої знаки функції $f\left(x\right)$ різні.

При цьому отримуємо послідовність вкладених відрізків, що містять шуканий корінь.

На кожному кроці довжина відрізка зменшується вдвічі. Метод сходиться завжди.

Умова завершення алгоритму

Умовою закінчення пошуку кореня може бути, наприклад,

$$\left|f\left(x\right)\right| < \varepsilon$$

Це зупинка по функції

Або

$$\frac{\left|b-a\right|}{2^n} < \varepsilon.$$

Це зупинка по довжині інтервалу

де ε – точність, $\left[a;b\right]$ – початковий відрізок, n – число ітерацій.

Алгоритм методу половинного ділення

Вхідні дані: $f(x)$ – функція; ε – необхідна точність;
$a\,,\;b$ – границі заданого інтервалу (границі пошуку кореня).

Результат: x_{nb} – наближений корінь рівняння $f(x)=0$.

Розв'язок:

Step1: $c=\dfrac{a+b}{2}$;

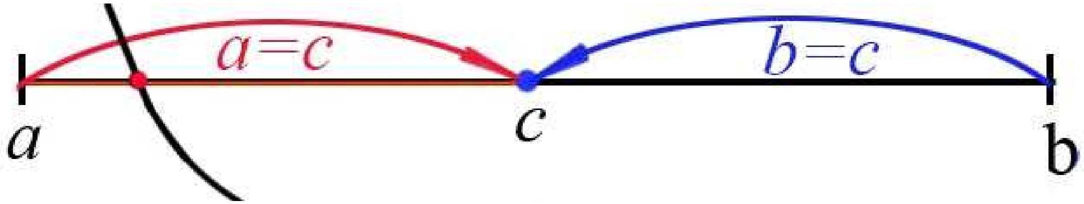
Step2: ***If*** $(f(c)==0)$ { Print; $x_{nb}=c$; Exit}

Step3: ***If*** $(|b-a|\le\varepsilon)$ {Print; $x_{nb}=\dfrac{b+a}{2}$; Exit}

Step4: ***If*** $(f(a)f(c)<0)$ $\{b=c\}$

else $\{a=c\}$

goto **Step1.**



Приклад 1.

Методом половинного ділення зробити шість ітерацій уточнення кореня рівняння $f(x) \equiv x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$, що належить відрізку [0;1].

n	a	c	b	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$
1	0	.5	1	-1	-1.19	1
2	0.5	0.75	1	-1.19	-0.59	1
3	0.75	0.875	1	-0.59	0.05	1
4	0.75	0.812	0.875	-0.59	0.304	0.05
5	0.75	0.781	0.812	-0.59	-0.456	0.304
6	0.781	0.797	0.812	-0.456	-0.380	0.304

Після шести ітерацій корінь локалізований на відрізку $[0.797; 0.812]$.

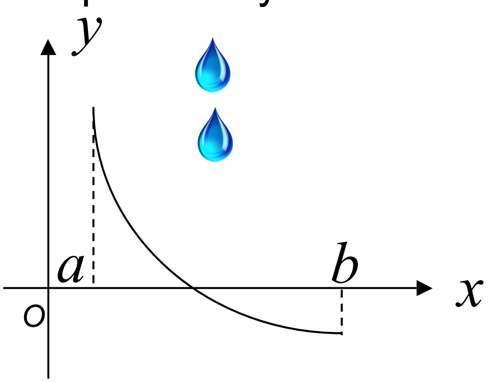
Метод пропорційних частин (метод хорд)

Нехай на відрізку $[a,b]$ функція неперервна, набуває на кінцях відрізка значення різних знаків, а похідна $f'(x)$ зберігає знак. Залежно від знака другої похідної можливі випадки розташування кривих, які показані на рисунку

$f(a)>0, f(b)<0, f'(x)<0$

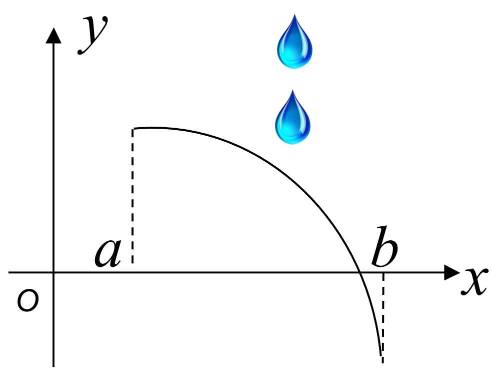
$f''(x)>0$

крива випукла вниз



$f''(x)<0$

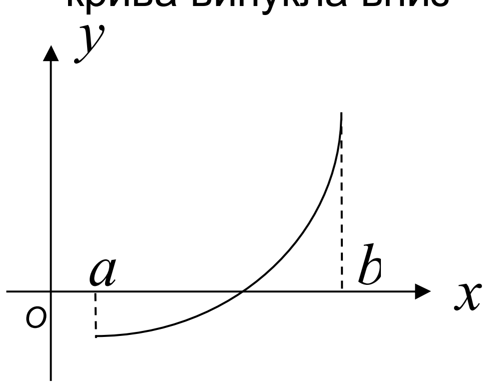
крива випукла вверх



$f(a)<0, f(b)>0, f'(x)>0$

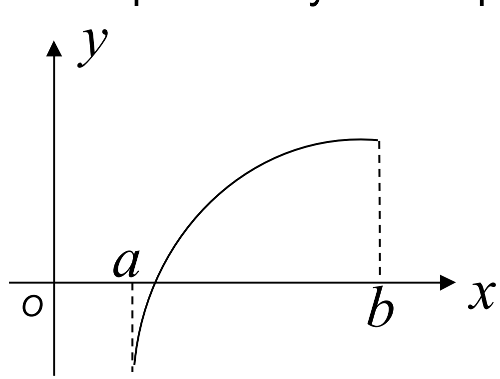
$f''(x)>0$

крива випукла вниз



$f''(x)<0$

крива випукла вверх



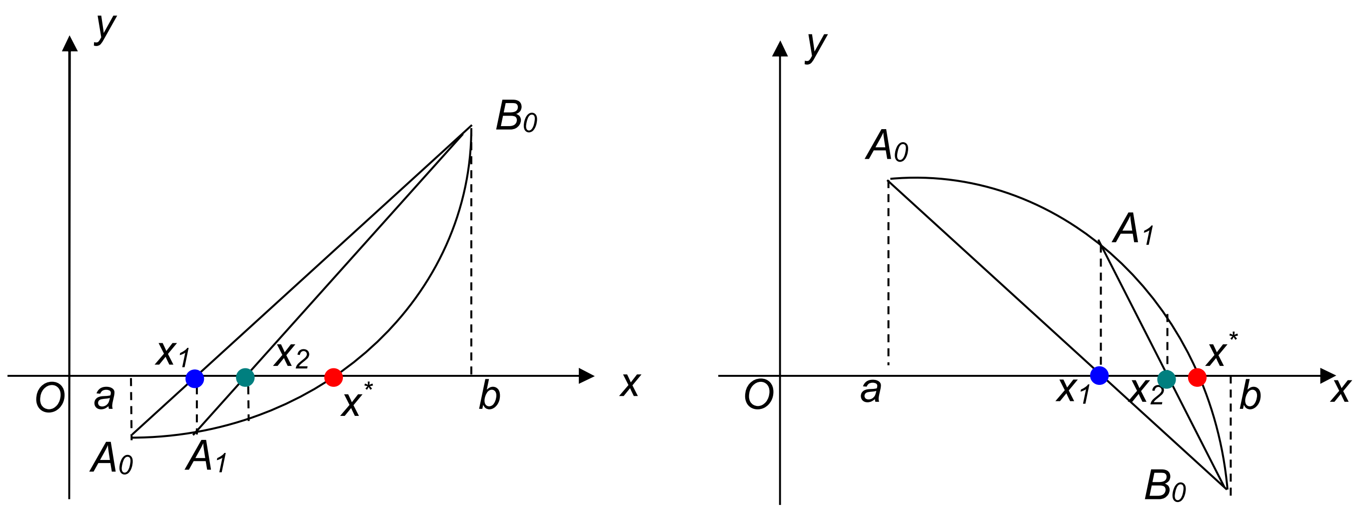
Властивості

1) $f(a)f(b)<0$
2) $sign(f'(x))=const$
3) $sign(f''(x))=const$

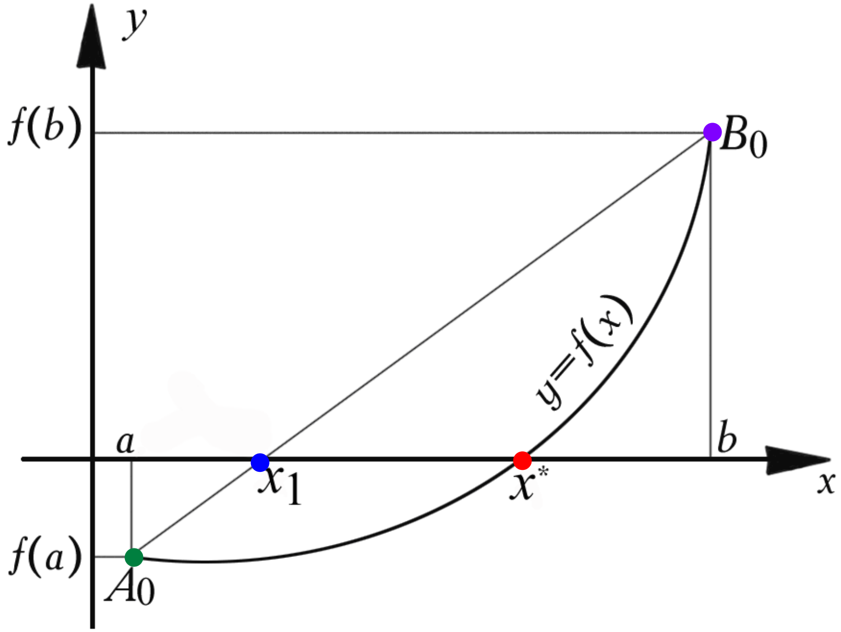
1. **Випадок, коли $f'(x)$ й $f''(x)$ мають однакові знаки**

$f(a) < 0, f(b) > 0,$
$f'(x) > 0, \; f''(x) > 0$

$f(a) > 0, f(b) < 0,$
$f'(x) < 0, \; f''(x) < 0$



Хорда проходить через точки $A_0(a, f(a))$ й $B_0(b, f(b))$. Шуканий корінь рівняння (точка x^*) нам невідомий, замість нього візьмемо точку x_1 перетину хорди A_0B_0 з віссю абсцис. Це й буде наближене значення кореня.



В аналітичній геометрії виводиться формула, що задає рівняння прямої, що проходить через дві точки з координатами (x_a, y_a) й (x_b, y_b):

$$\frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y - y_a}{y_b - y_a}.$$

Нехай $(x_a, y_a) = (a, f(a))$,

$$(x_b, y_b) = (b, f(b))$$

Тоді рівняння хорди A_0B_0 запишеться у вигляді:

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$(x - a)[f(b) - f(a)] = [y - f(a)](b - a)$$

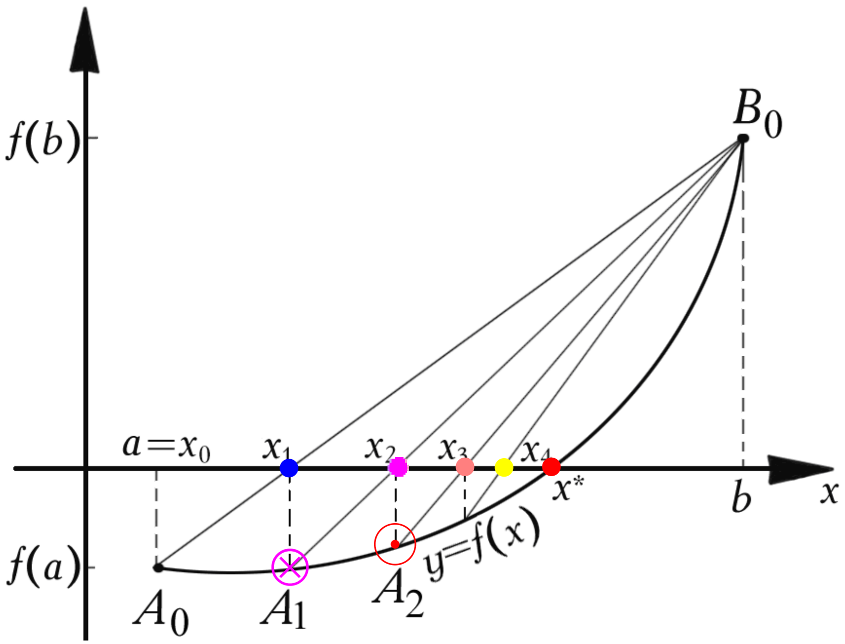
Знайдемо значення $x = x_1$, для якого $y = 0$:

$$(x_1 - a)[f(b) - f(a)] = -f(a)(b - a)$$

Тепер корінь перебуває на відрізку $[x_1, b]$

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}$$

Застосуємо метод хорд до відрізка $[x_1; b]$.



Проведемо хорду, яка з'єднує точки

$$A_1(x_1, f(x_1)) \text{ і } B_0(b, f(b)),$$

і знайдемо x_2 – точку перетину хорди A_1B_0 з віссю

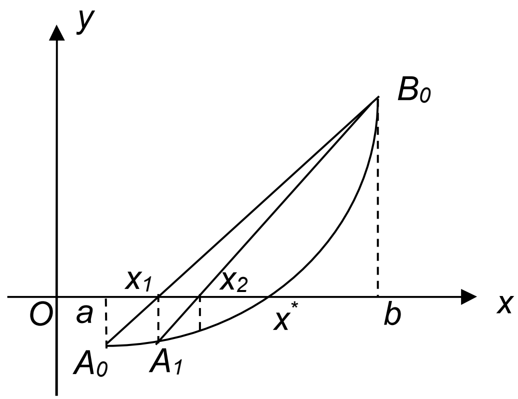
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

Продовжуючи цей процес, знаходимо:

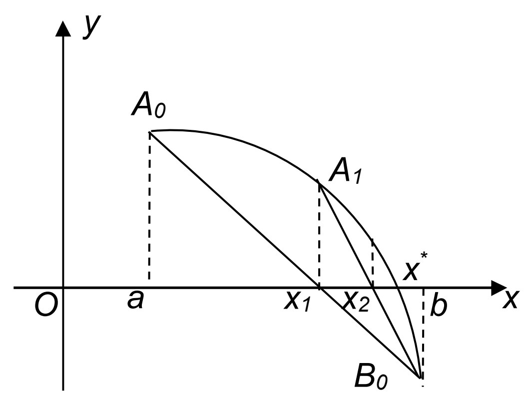
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(b - x_2)}{f(b) - f(x_2)}.$$

Рекурентна формула обчислення наближень до кореня

$f(a)<0, f(b)>0,$
$f'(x)>0,\ f''(x)>0$



$f(a)>0, f(b)<0,$
$f'(x)<0,\ f''(x)<0$



Одержуємо рекурентну формулу обчислення наближень до кореня

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}.$$

Кінець *b* відрізка $[a,b]$ нерухомий, а кінець *a* переміщається.

Таким чином, одержуємо розрахункові формули методу хорд: $B_0 \equiv f(b)-$ нер.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)};\ x_0=a.\ f'(x)>0\ \ f''(x)>0 \text{ або } f'(x)<0\ \ f''(x)<0$$

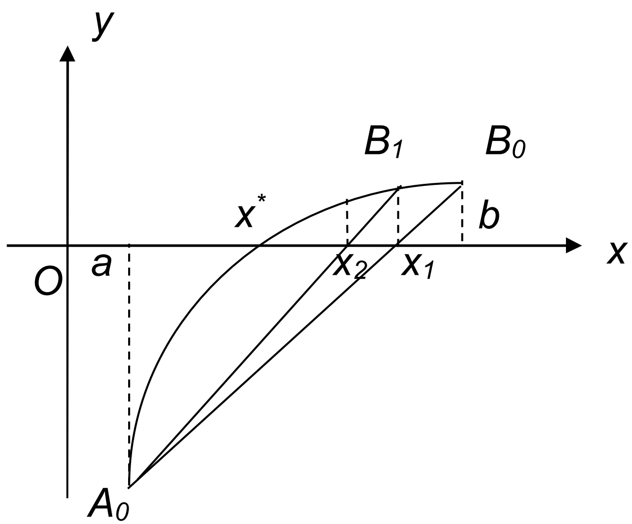
Обчислення чергових наближень до точного кореня рівняння триває доти, поки не досягнемо заданої точності, тобто повинна виконуватися умова:

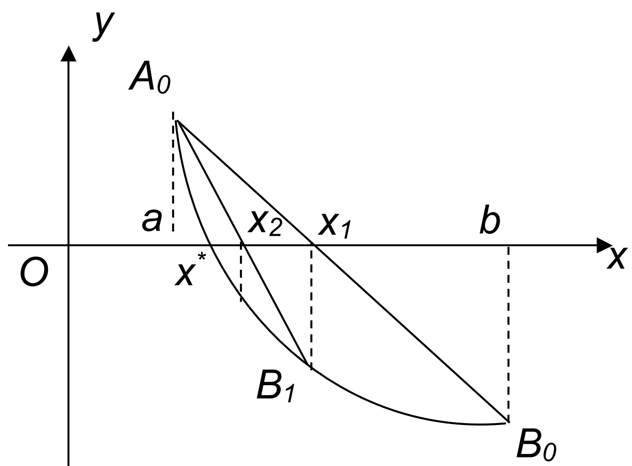
$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$, де ε – задана точність.

2. Випадок, коли $f'(x)$ й $f''(x)$ мають різні знаки

$f(a) < 0, f(b) > 0,$
$f'(x) > 0, \ f''(x) < 0$

$f(a) > 0, f(b) < 0,$
$f'(x) < 0, \ f''(x) > 0$

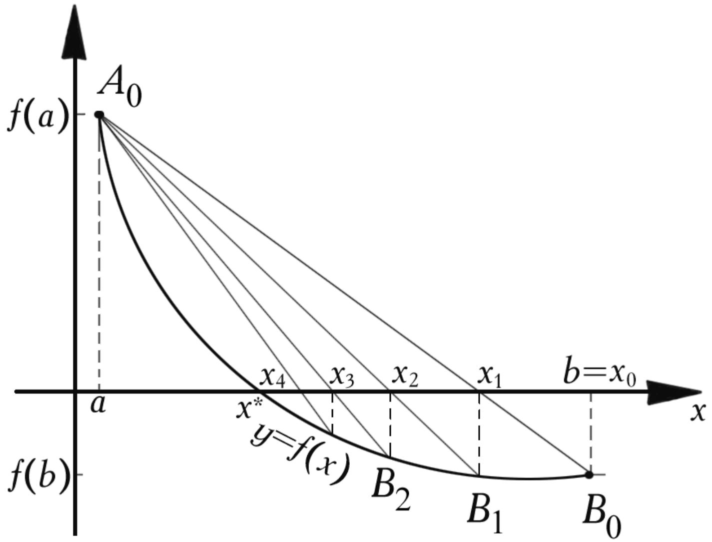




1. **З'єднаємо точки** $A_0(a, f(a))$ й $B_0(b, f(b))$ хордою A_0B_0.

2. Точку перетину хорди з віссю Ox будемо вважати **першим наближенням кореня**.

3. У цьому випадку **нерухомим кінцем** відрізка буде точка A_0.



$$\frac{y-y_b}{y_a-y_b}=\frac{x-x_b}{x_a-x_b}\Rightarrow$$

$$(x_b, y_b)=(b, f(b)) \quad (x_a, y_a)=(a, f(a))$$

Рівняння хорди A_0B_0:

$$\frac{y-f(b)}{f(a)-f(b)}=\frac{x-b}{a-b}.$$

$$x=b+\frac{\left[y-f(b)\right](a-b)}{\left[f(a)-f(b)\right]}$$

Звідси знайдемо x_1, вважаючи, що $y=0$:

При $Sign\left(f'(x)\right)\neq Sign\left(f''(x)\right)$ $\quad x_1=b-\dfrac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$

Порівняйте:

При $Sign\left(f'(x)\right)=Sign\left(f''(x)\right)$ $\quad x_1=a-\dfrac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$

Тепер корінь рівняння $x^* \in [a; x_1]$. Знайдемо $(x_1, f(x_1)) = B_1$ Застосовуючи метод хорд до цього відрізка, одержимо:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - a)}{f(x_1) - f(a)}.$$

Продовжуючи і т.д., одержимо:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}.$$

Розрахункові формули методу: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}, x_0 = b$.

Умова закінчення обчислень: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

ПІДСУМОК.

Отже, якщо $f'(x)\cdot f''(x) > 0$, наближене значення кореня знаходять за формулою:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\left(b - x_n\right)}{f(b) - f(x_n)};x_0 = a.$$ Нерухома точка b.

Якщо $f'(x)\cdot f''(x) < 0$ – то за формулою:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\left(x_n - a\right)}{f(x_n) - f(a)},x_0 = b.$$ Нерухома точка a.

$$f'\left(a\right)\cdot f'\left(b\right) > 0 \Rightarrow b$$

Піктограма: $a \Leftarrow f'\left(a\right)\cdot f'\left(b\right) < 0$

$$a < \ldots > b$$

Практичний вибір тієї або іншої формули здійснюють, користуючись наступним **правилом**: **нерухомим кінцем** відрізка є той, для якого **знак функції збігається зі знаком другої похідної**.

Оцінка точності наближення

Оцінка точності наближення за методом хорд визначається з виразу:

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{\left|f\left(x_n\right)\right|}{m_1},$$

де $\left|f'\left(x_n\right)\right| \ge m_1$ при $a \le x_n \le b$.

У випадку, коли необхідно оцінити абсолютну погрішність по двох наступних наближеннях:

$$\left|x^* - x_n\right| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}\left|x_n - x_{n-1}\right| \qquad (9)$$

де m_1 й M_1 – відповідно найменше й найбільше значення модуля похідної $f'(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Якщо відрізок $[a,b]$ настільки вузький, що має місце нерівність

$$M_1 \le 2m_1,$$

то з формули $\left|x^* - x_n\right| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}\left|x_n - x_{n-1}\right|$ одержуємо:

$$\left|x^* - x_n\right| \le \left|x_n - x_{n-1}\right|.$$

Таким чином, у цьому випадку, як тільки буде виявлено, що

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon,$$

де ε – задана гранична абсолютна погрішність, то гарантовано, що

$$\left|x^* - x_n\right| < \varepsilon.$$

Приклад 4. Вибрати формулу для розв'язування рівняння $(x-1)\ln(x)-1=0$, якщо відрізок ізоляції кореня [2;3].

Розв'язок. Тут

$f(x)=(x-1)\ln(x)-1$; $f(2)=(2-1)0.69-1=-0.31$; $f(3)=(3-1)1.1-1=1.2$

$f'(x)=\ln(x)+\dfrac{x-1}{x}$; $f'(2)=0.69+0.5=1.19$; $f'(3)=1.1+0.75=1.85$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$. $f''(2)=0.5+0.25=0.75$; $f''(3)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}=0.33$

Друга похідна в цьому прикладі додатна на відрізку ізоляції кореня [2;3]: $f''(x)>0$

$b=3$ $f(3)>0$, $f''(3)>0$ то $f(b)\cdot f''(x)>0$.

Нерухома точка – це точка, у якій знак функції збігається зі знаком її другої похідної.

Тому для уточнення кореня вибираємо:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)},\quad x_0=a$$

Приклад 2. Знайти додатний корінь рівняння

$$f\left(x\right) \equiv x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2 = 0$$

з точністю до 0.002.

Розв'язок.

Етап 1. Спочатку відокремлюємо корінь. Оскільки

$$f\left(1\right) = -0.6 < 0 \text{ і } f\left(1.5\right) = 1.43 > 0,$$

то шуканий корінь x^* лежить на відрізку $\left[1;1.5\right]$.

Етап 2. Обчислюємо першу і другу похідні:

$$f'\left(x\right) = 3x^2 - 0.4x - 0.2$$

$$f''\left(x\right) = 6x - 0.4$$

$f'(1) = 3 - 0.4 - 0.2 = 2.4 \quad f'(1.5) = 3 * 1.5^2 - 0.4 * 1.5 - 0.2 = 5.95 \quad f'(x) > 0$

$f''(1) = 6 - 0.4 = 5.6; \quad f''(1.5) = 9 - 0.4 = 8.6; \quad f''(x) > 0$

Оскілки $f'(x) f''(x) > 0$, то нерухомою є точка b

Це теоретичний спосіб вибору нерухомої точки.

Етап 3. Практичний спосіб вибору нерухомої точки.

$a = 1,\ f\left(1\right) = -0.6 < 0,\ f''\left(1\right) = 5.6 > 0$ - не підходить

$b = 1.5\ f\left(1.5\right) = 1.43 > 0;\ f''\left(1.5\right) = 8.6 > 0$- підходить

***Нерухома точка** – це точка, у якій знак функції збігається зі знаком її другої похідної.*

У цьому випадку – це точка $\left(b, f\left(b\right)\right)$.

Етап 4. Тому для обчислення послідовних наближень застосуємо формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\left(b - x_n\right)}{f(b) - f(x_n)}, \quad x_0 = a$$

$a=1;\ \ b=1.5;\quad x_0=a;\ f(1)=-0.6;\ f(1.5)=1.425$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)(b-x_0)}{f(b)-f(x_0)}=1-\frac{-0.6(1.5-1)}{1.425+0.6}=1+0.15=1.15$$

$f(x_1)=f(1.15)=-0.173;$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)(b-x_1)}{f(b)-f(x_1)}=1.15+\frac{0.173(1.5-1.15)}{1.425+0.173}=1.15+0.040=1.190;$$

$f(x_2)=f(1.190)=-0.036;$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)(b-x_2)}{f(b)-f(x_2)}=1.190+\frac{0.036(1.5-1.190)}{1.425+0.036}=1.190+0.008=1.198$$

$f(x_3)=f_3(1.198)=-0.0072.$

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)(b-x_3)}{f(b)-f(x_3)}=1.198+\frac{0.0072(1.5-1.198)}{1.425+0.0072}=1.198+0.0015=1.1995$$

$f(x_4)=f(1.1995)-0.0018.$

Етап 5. Обчислюємо погрішність методу:

$f'(x) = 3x^2 - 0.4x - 0.2$

При $x_4 < x < b$, тобто при $x_4 < x < 1.5$ маємо

$\left|f'(x_4)\right| \geq 3 \cdot 1.1995^2 - 0.4 \cdot 1.1995 - 0.2 = 3.63 = m_1$

$\left|f'(b)\right| \geq 3 \cdot 1.5^2 - 0.4 \cdot 1.5 - 0.2 = 5.95 = M_1,$

$M_1 < 2m_1$ Тому можемо застосувати оцінку

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon$$

Одержуємо оцінку: $\left|1.198 - 1.1995\right| < 0.0015.$

Оцінка через значення функції:

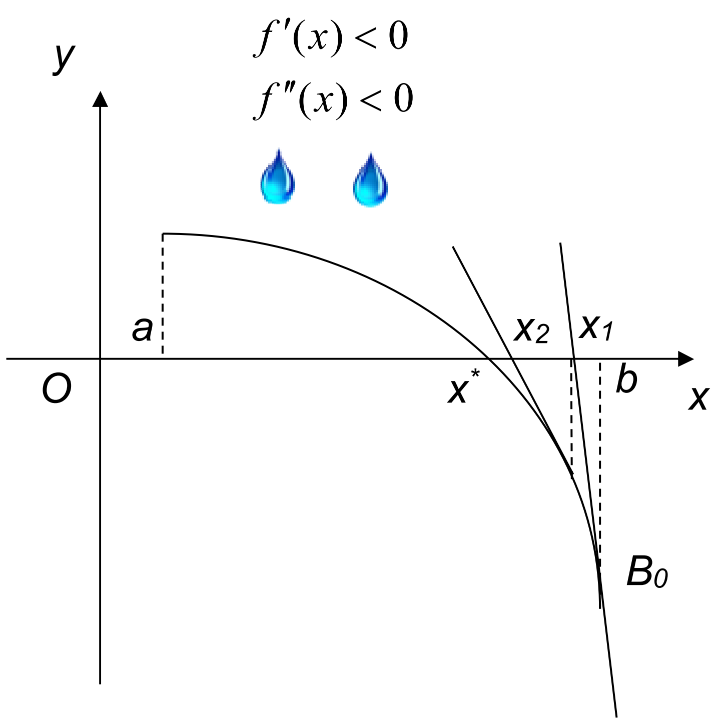
$$\left|x_n - x^*\right| \leq \frac{\left|f(x_n)\right|}{\left|f'(x_n)\right|}$$

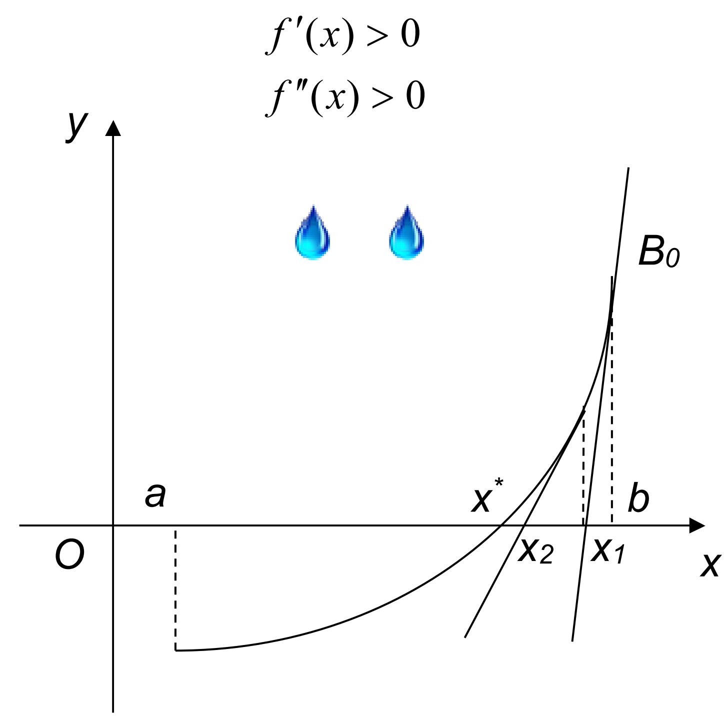
то можна прийняти: $0 < x^* - x_3 < \dfrac{0.0018}{3.63} \approx 0.0005.$

Метод Ньютона (метод дотичних)

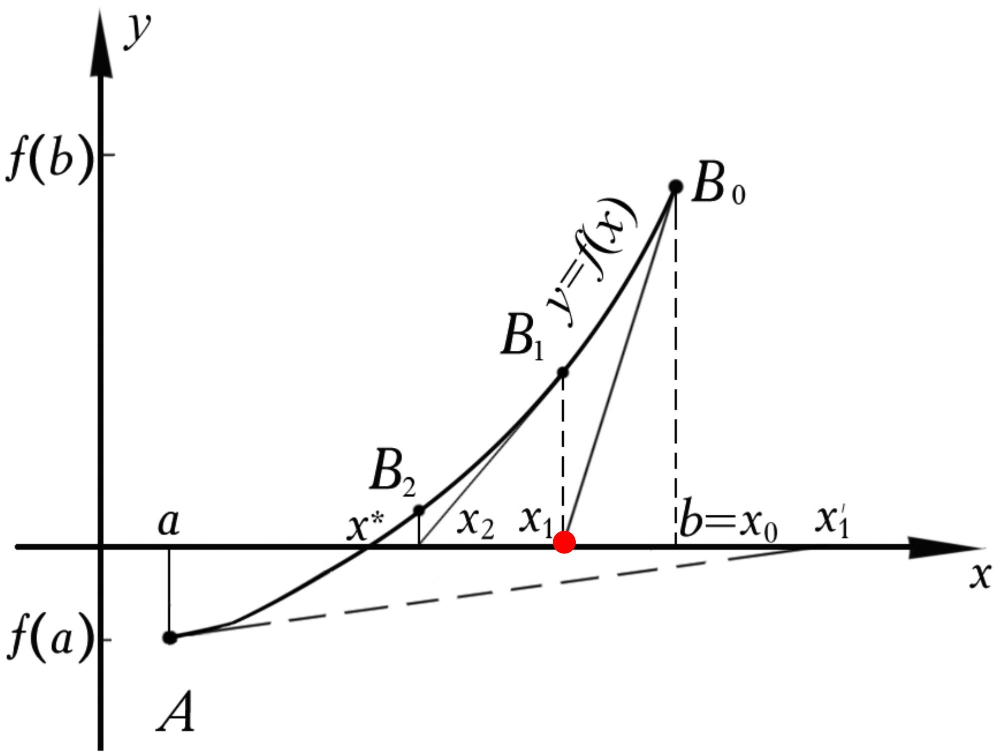
Нехай корінь x^* рівняння $f\left(x\right) = 0$ відділений на відрізку$\left[a;b\right]$, причому $f'\left(x\right)$ й $f''\left(x\right)$ неперервні й зберігають свій знак при $a \le x \le b$.

Розглянемо випадок, коли $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, тобто $f'(x)$ й $f''(x)$ мають однакові знаки. Тоді можливі два випадки побудови кривої на відрізку $\left[a,b\right]$.





Пошук кореня на відрізку $[a,b]$



Проведемо дотичну до кривої $y = f(x)$ в точці

$$B_0(b, f(b)).$$

У курсі алгебри виводиться рівняння дотичної.

Рівняння дотичної в точці B_0 має вигляд

$$f'(b) = y - f(b)/(x - b).$$

У якості чергового наближення до кореня рівняння беремо точку перетину дотичної з віссю Ox. Вважаючи $y = 0$ у рівнянні дотичної, знайдемо: $f'(b) = 0 - f(b)/(x_1 - b)$

$$(x_1 - b) = -f(b)/f'(b) \Rightarrow \quad x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$ Тепер $x^* \in [a; x_1]$.

Пошук кореня на відрізку $[a, x_i]$

Застосовуючи метод ще раз для відрізка $[a; x_1]$, одержимо:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Для загального випадку одержуємо рекурентну формулу обчислення наближень до кореня:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

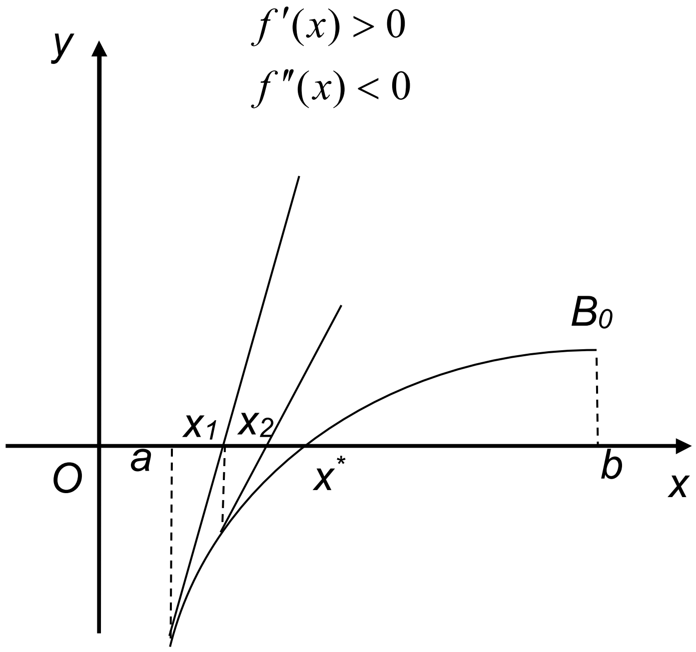
Зверніть увагу, що в цьому випадку як **початкове наближення до кореня** вибираємо **точку** $x_0 = b$.

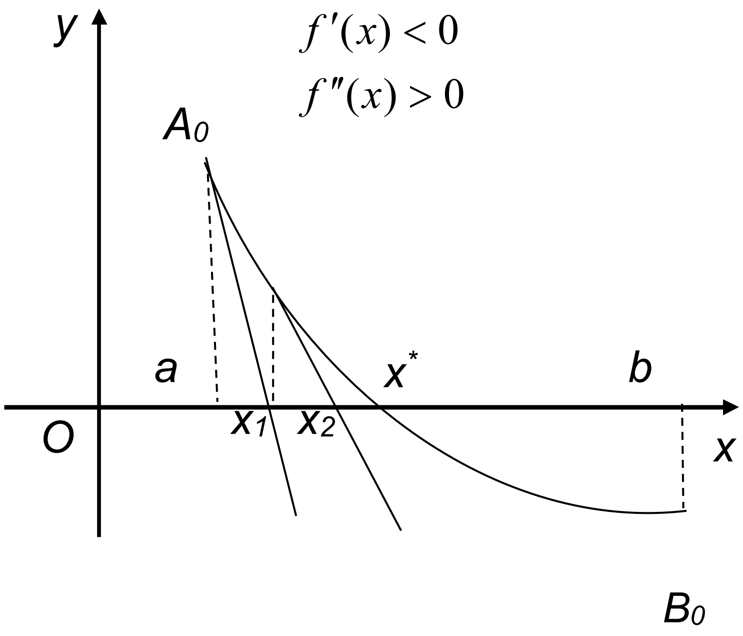
Наближення до кореня відбувається із правої сторони, тому одержуємо наближене значення кореня з надлишком.

Для методу хорд навпаки, наближення відбувається зліва. Тому наближене значення одержуємо з недостачею.

Розглянемо випадок, коли $f'(x) \cdot f''(x) < 0$

У цьому випадку $f'(x)$ й $f''(x)$ мають різні знаки. При цьому можливі два випадки побудови кривої на відрізку $[a,b]$.





Пошук кореня на відрізку $[a,b]$ при $f'(x)\cdot f''(x)<0$

Якщо знову провести дотичну до кривої в точці B_0, то вона перетне вісь Ox у точці, що не належить відрізку $[a,b]$. Тому проведемо дотичну в точці $A_0(a,f(a))$.

Її рівняння $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

Знаходимо x_1, вважаючи $y=0$: $x_1=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$.

Корінь $x^* \in [x_1;b]$.

Застосовуючи метод ще раз для відрізка $[x_1;b]$, одержимо:

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Одержуємо рекурентну формулу обчислення наближень до кореня, аналогічну першому випадку:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ Початкове наближення – точка $x_0=a$.

Підсумок. Розглянуто два випадки:

Теоретичний підхід.

1. За x_0 беремо кінець b відрізка$[a,b]$,

$$f'(x) \cdot f''(x) > 0 \quad \Rightarrow > b$$

2. За x_0 беремо початок a відрізка $[a,b]$.

$$f'(x) \cdot f''(x) < 0 \quad \Rightarrow a <$$

Практичний підхід.

При виборі початкового наближення кореня можна керуватися **правилом**:

за початкову точку слід вибрати той кінець відрізка $[a,b]$, у якому знак функції збігається зі знаком другої похідної.

Умова закінчення обчислювального процесу:

$$\left|x_{n-1} - x_n\right| < \varepsilon,$$

де ε – задана точність. Тоді $x^* = x_n \pm \varepsilon$.

Приклад 4. Обчислити методом Ньютона від'ємний корінь рівняння $f(x) \equiv x^4 - 3x^2 - 75x - 10000 = 0$ з точністю $\varepsilon = 0.01$.

Розв'язок. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 75x - 10000$

Етап 1. Вважаючи у лівій частині $x = 0, -10, -100, \ldots,$ одержимо

$$f(0) = -10000\ , \quad f(10) = -1050, \quad f(100) \approx +10^8.$$

Отже, шуканий корінь x^* перебуває в інтервалі

$$10 < x^* < 100.$$

Етап 2. Звузимо знайдений інтервал. Оскільки $f(10) = -1050, f(11) = 3453,$ то $10 < x^* < 11.$

Етап 3. Одержимо вираз для першої й другої похідної функції $f(x)$:

$$f(x) \equiv x^4 - 3x^2 - 75x - 10000:$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x - 75;$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6$$

Етап 4. Визначимо знаки функції, її першої і другої похідної на кінцях відрізка [10,11]

$$f(10) = -1050 < 0, \quad f''(10) = 1200 - 6 = 1194 > 0$$

$$f(11) = 3453 > 0, \quad f''(11) = 12 \cdot 121 - 6 = 1446 > 0$$

На кінці відрізка [10,11] у точці $x_0 = 11$ знаки $f(11) > 0$ і $f''(11) > 0$;

Приймемо за початкове наближення $b = x_0 = 11$. Послідовні наближення $x_n \left(n = 1, 2, ...\right)$ обчислюємо за наступною схемою:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ , де } x_1 = b - \frac{f\left(b\right)}{f'\left(b\right)}$$

n	x_n	$f\left(x_n\right)$	$f'\left(x_n\right)$	$\left\|x_{n+1} - x_n\right\|$	
0	11	3453	5183		
1	10.3	164.3	4234	0.7	$0.7 > \varepsilon$
2	10.262	4.33	4186	0.038	$0.3 > \varepsilon$
3	10.261	0.15	4184	0.001	$0.001 < \varepsilon$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)} \text{ ;}$$

$$\left|10.261 - 10.262\right| = \left|0.001\right| < \varepsilon$$

оскільки $\varepsilon = 0.01$ за умовою

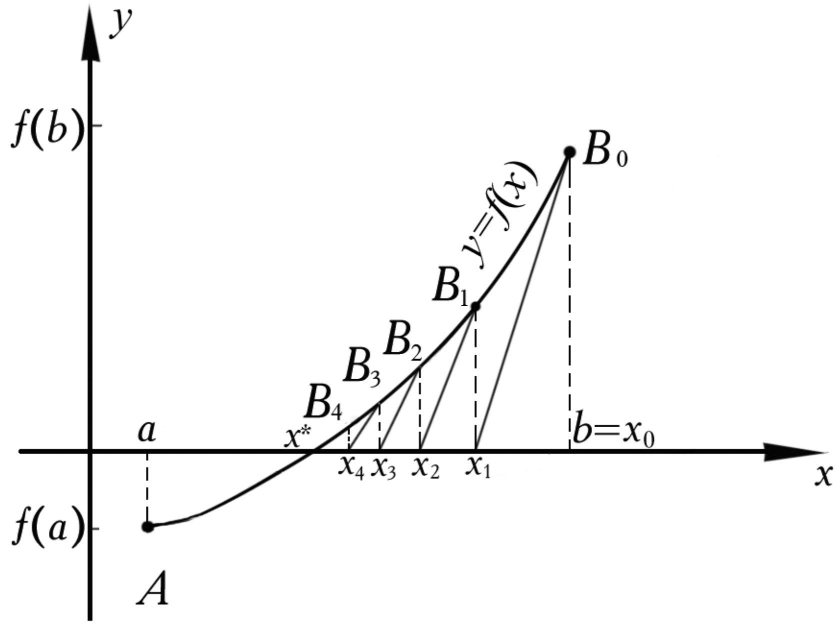
Видозмінений метод Ньютона

Якщо функція має невелику кривизну, то похідна $f'(x)$ мало змінюється на відрізку $[a;b]$, то у формулі $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ покладемо $f'(x_n) \approx f'(x_0)$.

Звідси для кореня x^* рівняння $f(x) = 0$ одержуємо послідовні наближення

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

Геометрично цей спосіб означає, що ми заміняємо дотичні в точках $B_n[x_n, f(x_n)]$ прямими, паралельними дотичній до кривої $y = f(x)$, у її фіксованій точці $B_0[x_0, f(x_0)]$.



Формула $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_0\right)}$ $\left(n = 0,1,\ldots\right)$ позбавляє від необхідності обчислювати щоразу значення похідної $f'\left(x_n\right)$. Тому формула досить корисна, якщо для обчислення $f'\left(x\right)$ потрібні великі витрати часу.

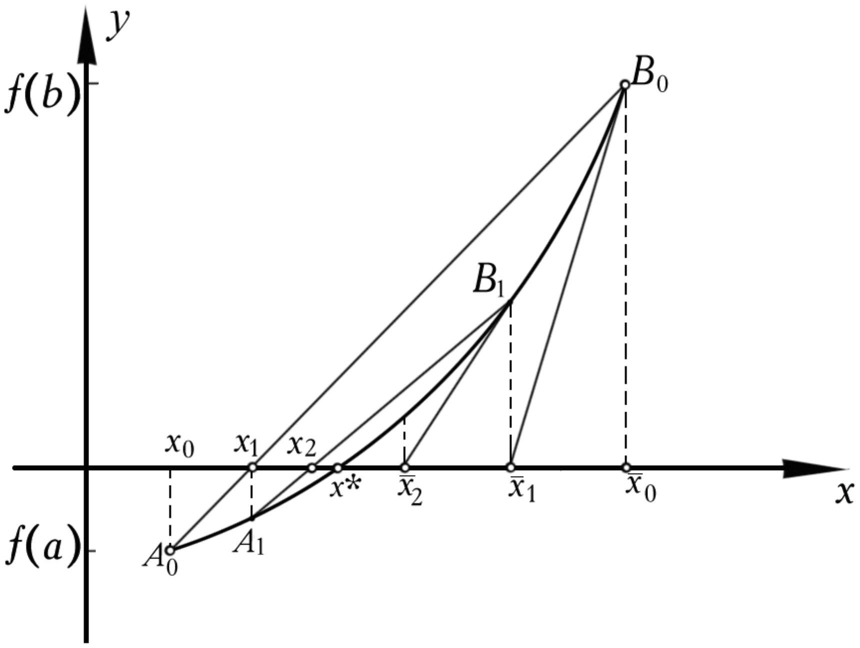
Комбінований метод

Нехай на відрізку $[a,b]$

1. $f(a)f(b) < 0$,
2. $sign(f'(x)) = const$,
3. $sign(f''(x)) = const$.

З'єднаємо метод хорд і метод дотичних.

Одержуємо метод, на кожному етапі якого знаходимо:



а) значення з недостачею,
б) значення з надлишком
точного кореня x^* рівняння $f(x) = 0$.

Теоретично тут можливі чотири випадки:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ f'(x) > 0; f''(x) > 0 \\ 2.\ f'(x) < 0; f''(x) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x)\cdot f''(x) > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 3.\ f'(x) < 0; f''(x) > 0 \\ 4.\ f'(x) > 0; f''(x) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x)\cdot f''(x) < 0$$

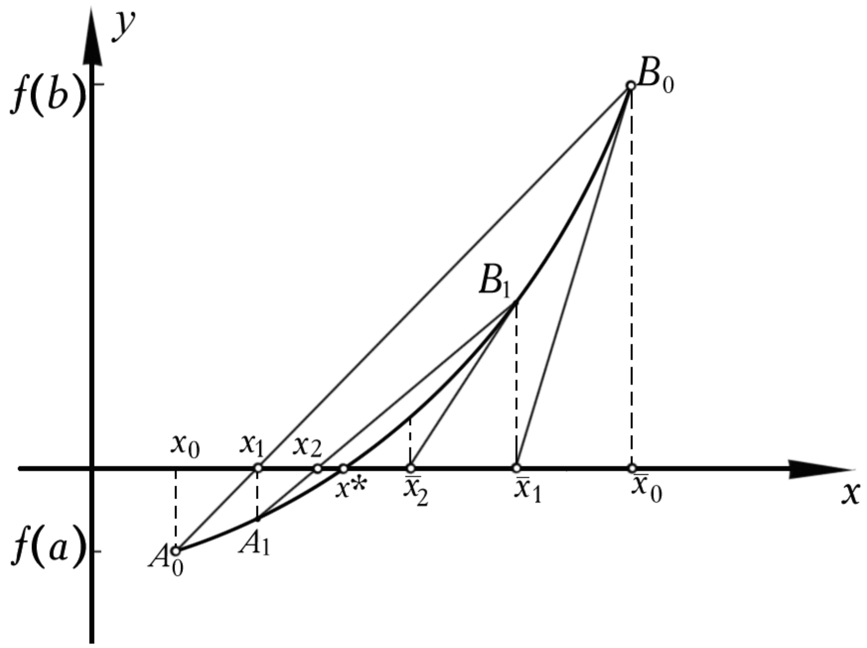
Розглянемо випадок: $f(a)f(b) < 0$, $f'(x) > 0; f''(x) > 0$

Інші випадки можна звести до даного, увівши заміну в рівняння $f(x) = 0$:

1) $-f(x) = 0$.

2) $\pm f(-z) = 0$, де $z = -x$.

Отже, нехай $f'(x) > 0$ і $f''(x) > 0$ при $a \le x \le b$.



Вважаємо $x_0 = a;\ \bar{x}_0 = b,\ (n = 0,1,2,\ldots)$

$$\bar{x}_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = \bar{x}_0 - \frac{f(\bar{x}_0)}{f'(\bar{x}_0)},$$ (метод дотичних)

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)} = x_0 - \frac{f(x_0)(\bar{x}_0 - x_0)}{f(\bar{x}_0) - f(x_0)};$$ (метод хорд)

$$\overline{x}_2 = \overline{x}_1 - \frac{f\left(\overline{x}_1\right)}{f'\left(\overline{x}_1\right)}, \left(n = 0,1,2,\ldots\right).$$ (метод дотичних)

$$x_2 = x_1 - \frac{f\left(x_1\right)}{f\left(\overline{x}_1\right) - f\left(x_1\right)}\left(\overline{x}_1 - x_1\right);$$ (метод хорд)

$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{f\left(\overline{x}_n\right)}{f'\left(\overline{x}_n\right)}, \left(n = 0,1,2,\ldots\right).$$ (метод дотичних)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f\left(\overline{x}_n\right) - f\left(x_n\right)}\left(\overline{x}_n - x_n\right);$$ (метод хорд)

Справедлива нерівність: $x_n < x^* < \overline{x}_n$.

Звідси $0 < x^* - x_n < \overline{x}_n - x_n$.

Нехай ε – припустима погрішність x_{nb}, тоді процес зближення припиняється при $\overline{x}_n - x_n < \varepsilon$. По закінченні процесу за значення кореня x^*: $\overline{x}^* = 1/2\left(x_n + \overline{x}_n\right)$.

Приклад 5. Обчислити з точністю до 0.0005 єдиний додатний корінь рівняння

$$f\left(x\right) \equiv x^5 - x - 0.2 = 0.$$

Розв'язок.

Етап 1. Відокремлюючи корені, знаходимо

$$f\left(1\right) < 0 \text{ й } f\left(1.1\right) > 0 \;\; a = 1, \;\; b = 1.1$$

Етап 2. Визначаємо, що ізольований корінь розміщений на відрізку $\left[1{,}1.1\right]$.

Етап 3. Обчислюємо першу й другу похідну

$$f'\left(x\right) = 5x^4 - 1, \;\; f'\left(x\right) > 0.$$

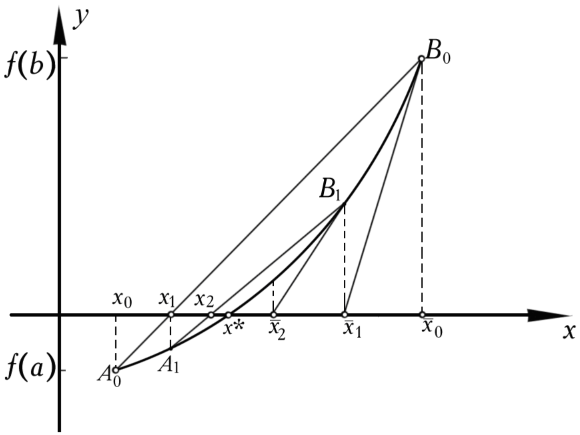
$$f''\left(x\right) = 20x^3, \;\; f''\left(x\right) > 0.$$

Оскільки $b = 1.1$; $f\left(b\right) > 0$; $f''\left(b\right) > 0$ приймемо $x_0 = a$ й $\overline{x}_0 = b$.

Виходячи з попередніх розрахунків, $x_0 = 1$ і $\overline{x}_0 = 1.1$.

Обчислимо значення функції й похідної у точці x_0.

$$f\left(x_0\right) = f\left(1\right) = -0.2;$$
$$f\left(\overline{x}_0\right) = f\left(1.1\right) = 0.3105;$$
$$f'\left(\overline{x}_0\right) = f'\left(1.1\right) = 6.3205.$$



$$\overline{x}_1 = \overline{x}_0 - \frac{f\left(\overline{x}_0\right)}{f'\left(\overline{x}_0\right)} = 1.1 - \frac{0.3105}{6.3205} = 1.051$$ (метод дотичних)

$$x_1 = x_0 - \frac{f\left(x_0\right)\left(\overline{x}_0 - x_0\right)}{f\left(\overline{x}_0\right) - f\left(x_0\right)} = 1 - \frac{-0.2\left(1.1 - 1\right)}{0.3105 + 0.2} = 1.039;$$

Через те, що $\overline{x}_1 - x_1 = 1.051 - 1.039 = 0.012$, то точність недостатня.

Знаходимо наступну пару наближень:

$$\overline{x}_2 = \overline{x}_1 - \frac{f\left(\overline{x}_1\right)}{f'\left(\overline{x}_1\right)} = 1.051 - \frac{0.0313}{5.1005} \approx 1.04487$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f\left(x_1\right)\left(\overline{x}_1 - x_1\right)}{f\left(\overline{x}_1\right) - f\left(x_1\right)} = 1.039 + \frac{0.012 \cdot 0.0282}{0.0595} \approx 1.04469$$

.

Тут $\overline{x}_2 - x_2 = 0.00018$, тобто потрібний ступінь точності досягнутий.

Можна покласти

$$\overline{x}^* = \frac{1}{2}\left(1.04469 + 1.04487\right) = 1.04478 \approx 1.045$$

Метод ітерації

Нехай дане рівняння $f\left(x\right)=0$ й відрізок $\left[a;b\right]$, функція $f\left(x\right)$ задовольняє умовам:

- $f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0,$ тобто $f\left(x\right)=0$ має різні знаки на кінцях відрізка,
- $f'\left(x\right)\neq 0$ на $\left[a;b\right]$.

Замінимо рівняння $f\left(x\right)=0$ рівносильним йому рівнянням

$$x=\varphi\left(x\right)$$

Вибираючи довільне значення $x_0\in\left[a;b\right]$, обчислимо

$$x_1=\varphi\left(x_0\right),\ x_2=\varphi\left(x_1\right),\ x_{n+1}=\varphi\left(x_n\right),\ \ n=0,1,\ldots.$$

Процес сходиться до кореня, якщо виконані умови теореми про збіжність (достатні умови збіжності).

Теорема про збіжність ітераційного процесу

Якщо функція $\varphi(x)$:

1. визначена й диференційована на $[a,b]$,
2. $\varphi(x) \in [a,b]$.

Тоді, якщо існує правильний дріб q, такий, що

$$\left|\varphi'(x)\right| \le q < 1 \text{ при } x \in (a,b),$$

то процес ітерації сходиться незалежно від початкового наближення $x_0 \in [a,b]$

і граничне значення $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ є єдиним коренем рівняння $x = \varphi(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Приведемо **один зі способів рівносильного перетворення рівняння** $f(x) = 0$ до виду $x = \varphi(x)$.

Побудуємо функцію:

$$\varphi(x) = \lambda \cdot f(x) + x,$$

$$r = \max\left(\left|f'(a)\right|, \left|f'(b)\right|\right).$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{r} < \lambda < 0, \text{ якщо } f'(x) > 0, \\ 0 < \lambda < \dfrac{1}{r}, \text{ якщо } f'(x) < 0, \end{cases}$$

Тоді процес ітерації

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \ n = 0,1,\ldots.$$

сходиться до кореня x^* при кожному $x_0 \in [a;b]$.

Швидкість збіжності оцінюється так:

$$\left|x^* - x\right| \le \frac{m}{1-q} q^n,$$

$$m = \left|x_0 - \varphi\left(x_0\right)\right|,\ q = \lambda \cdot r + 1$$

або

$$q = \max\left|\varphi'\left(x\right)\right|,\ x \in \left[a;b\right].$$

Умови закінчення ітераційного процесу:

$$\begin{cases} \Delta x_n = \left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon, \\ \left|f\left(x_n\right) - f\left(x_{n-1}\right)\right| < \varepsilon, \end{cases}$$

або

$$\frac{1-q}{q} \Delta x_n < \varepsilon,$$

де ε – необхідна точність.

Приклад 3.

Знайти методом ітерацій корінь рівняння

$$f\left(x\right) = 4x - 5\ln\left(x\right) - 5 = 0,$$

який належить відрізку $\left[0,25;0.75\right]$.

Розв'язок.

Виберемо $x_0 = 0.5$

Обчислимо значення функції і її похідної:

Етап 1.

$$f\left(a\right) = 1 - 5\ln\left(0.25\right) - 5 = 1 + 5\cdot 1.3863 - 5 > 0,$$

$$f\left(b\right) = 3 - 5\ln\left(0.75\right) - 5 = 3 + 5\cdot(0.2877 - 1) < 0,$$

$f'\left(x\right) = 4 - \dfrac{5}{x} < 0$ на відрізку $\left[0,25;0.75\right]$,

$$f'\left(0.25\right) = -16,\ f'\left(0.75\right) = -\frac{8}{3}.$$

Етап 2. Згідно формули $0 < \lambda < \frac{1}{r}$, якщо $f'\left(x\right) < 0$,

обчислимо λ: $r = 16$, $0 < \lambda < \frac{1}{16}$, візьмемо $\lambda = 0.05$.

Етап 3. Використовуючи вираз $\varphi\left(x\right) = \lambda \cdot f\left(x\right) + x$, запишемо

$$\varphi\left(x\right) = 0.2x - 0.25\ln\left(x\right) - 0.25 + x = 1.2x - 0.25\left(1 + \ln\left(x\right)\right)$$

Етап 4. Звідси одержуємо рекомендовану формулу за методом ітерацій:

$$x_{n+1} = 1.2x_n - 0.25\left(1 + \ln\left(x_n\right)\right), \; n = 0,1,2,.....$$

Використовуючи цю формулу, зробимо обчислення:

$$x_1 = 1.2x_0 - 0.25\left(1 + \ln\left(x_0\right)\right) = 0.525$$