1. *Що таке стохастичне випробування і простір його елементарних наслідків?*

Стохастичними називають випробування, наслідки яких (події) є недетермінованими (результат яких неможливо передбачити до проведення експерименту), але який можна повторити в незалежний спосіб будь-яке число разів.
Простір елементарних подій — множина всіх можливих наслідків стохастичного експерименту. Множина Ω утворює простір елементарних подій, якщо ці наслідки є взаємовиключні і наслідком одного випробування є тільки одна подія.

2. *Дайте означення події. Які події називаються достовірними, неможливими, випадковими?*

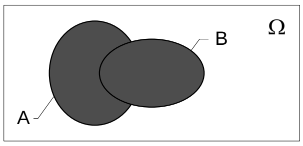
Подія – конкретний результат випробування.
Достовірна подія – подія, яка в результаті досліду завжди настає.
Неможлива подія – подія, яка в результаті досліду статися не може.
Випадкова подія – подія, яка при заданих умовах може як відбутись, так і не відбутись, при чому існує визначена ймовірність p ($0 \le p \le 1$) того, що вона відбудеться при заданих умовах.

3. *Наведіть приклади стохастичних випробувань і подій, що відбуваються в цих випробуваннях.*

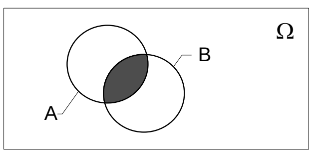
Приклад1. Випробування – підкидання монети. Елементарні події – випадання орла або цифри.
Приклад2. Випробування – підкидання шестигранного кубика. Елементарні події – випадання сторони шестигранного кубика, що містить цифру 1,2,3,4,5 або 6.

4. *Дайте означення суми, добутку і різниці двох подій, а також геометричну ілюстрацію цих операцій.*

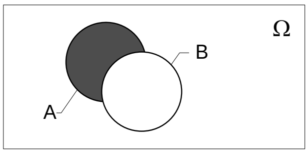
Подія C називається **сумою** (об’єднанням) подій A і B та позначається $C=A\cup B$, якщо вона складається з усіх елементарних подій, які входять до складу A або B (або до A та B одночасно). При цьому, якщо елементарна подія ω входить до A та B, то до C вона входить лише один раз.



Подія C називається **добутком** (перетином) подій A і B та позначається $C=A\cap B$ (або $C=A*B$), якщо вона містить у собі елементарні події, що входять до A і B одночасно.



Подія C називається **різницею** подій A і B та позначається $C = A\setminus B$, якщо C містить в собі ті й тільки ті елементарні події, які входять до складу A та не входять до складу B.



5. *Що таке сумісні і несумісні події? Наведіть приклади сумісних і несумісних подій.*

Події A і B називаються **несумісними**, якщо вони не мають спільних елементарних подій (тобто не можуть відбутися внаслідок одного випробування).
Дві події називаються **сумісними**, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої.

Сумісні події: «Випадання парного числа на гральному кубику та випадання числа кратного трьом».
Несумісні події: «Випадання орла під час підкидання монетки та випадання числа».

6. *Дайте означення повної групи несумісних подій. Що таке протилежні події?*

Повною групою подій у теорії ймовірності називається система випадкових подій така, що в результаті проведеного випадкового експерименту неодмінно станеться одне і тільки одне з них.

Протилежними називають дві єдино можливі події, що складають повну групу

$$P(A) + P(not(A)) = 1$$

7. *Поясніть зміст рівноможливих подій.*

Події називають рівноможливими, якщо ні одна з них не є об'єктивно більш можлива, ніж інша. Наприклад при киданні монети випадання герба чи числа - події рівноможливі.

8. *Що таке класична імовірнісна схема? Дайте класичне означення ймовірності події. В яких випадках неможливе застосування класичної формули підрахунку ймовірності події ?*

Класична імовірнісна схема

Нехай Ω складається зі скінченної кількості елементарних рівноможливих подій n. Припишемо кожній події ймовірність 1/n. Сума цих ймовірностей – 1.

Ймовірність події A дорівнює відношенню числа випадків, що сприяють події A, до числа всіх можливих випадків, тобто $P(A) = m / n$, де n – потужність множини елементарних наслідків стохастичного випробування, а m - число елементарних наслідків, що сприяють події A.

$$0 < P(A) < 1.$$

Дану формулу не можливо використовувати для випадку коли елементарні наслідки випробування не є рівноможливими або якщо простір елементарних подій Ω є нескінченним.

9. *Що таке відносна частота появи події та її стійкість? Поясніть зміст статистичного означення ймовірності події.*

На практиці часто доводиться мати справу із статистичною ймовірністю. Її часто називають відносною частотою появи події і позначають

$$W(A) = m / n ,$$

де m - кількість випробувань, в яких подія A з'явилась, n - загальна кількість випробувань.
Стійкість відносної появи події полягає в тому, що при досить великому n, $W(A) \sim P(A)$.

10. *В якому випадку застосовується геометричний підхід до обчислення ймовірностей, в чому полягає геометрична ймовірність?*

Геометричний підхід до розв'язання задач застосовується тоді, коли множину елементарних подій можна задати графічно (лінія, фігура на площині, тіло у просторі) та їх кількість – нескінченна. Тоді ймовірність такої події обчислюється відношення мір (довжин відрізків, площ фігур, об'ємів тіл відповідно).

$$P(A) = l_A/l_\Omega = S_A/S_\Omega = V_A/V_\Omega$$

11. *Сформулюйте теореми додавання ймовірностей для несумісних і сумісних подій*

Нехай події $A_1...A_n$ попарно сумісні. Тоді $P(A_1 U ... U A_n) = \sum_{i=1} P(Ai) + (-1)^{n-1} P(A_1...A_n)$.

Якщо несумісні: $P(A) = \sum_{i=1} P(Ai)$.

12. *Дайте означення умовної ймовірності події. Які події називаються залежними і незалежними?*

Умóвна ймовíрність — ймовірність однієї події за умови, що інша подія вже відбулася.
Подія A і B називаються **незалежними** в даному випробуванні, якщо ймовірність однієї з них не залежить від того, відбувалася чи не відбулася інша подія. У противному випадку події A і B – **залежні**.

13. *Сформулюйте теореми множення ймовірностей для незалежних і залежних подій.*

Теорема об умножении вероятностей. Вероятность произведения независимых событий A и B вычисляется по формуле:

$$P(AB) = P(A) * P(B)$$

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при *условии*, что первое имело место.

$$P(AB) = P(A) * P(B|A)$$

14. Запишіть формулу для обчислення ймовірності появи принаймні однієї з незалежних в сукупності подій.

Нехай A = { *поява принаймні однієї з незалежних в сукупності подій* }. $\overline{A}$ = { *поява принаймні однієї з незалежних в сукупності подій* }.

Тоді $\overline{A} = \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k$, $P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1) \ldots P(\overline{A}_n)$, $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

15. Які події називаються гіпотезами? Запишіть формулу повної ймовірності.

Нехай подія A може відбутися тільки разом з однією із попарно несумісних подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$, які утворюють повну групу несумісних подій. Оскільки наперед не відомо, з якою з подій H_i відбудеться подія A, то події H_i називають гіпотезами. Тоді має місце формула повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)$$

16. Запишіть формулу Бейєса і поясніть її зміст.

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) * P(A/H_i)}{P(A)}$$

Формула Байєса дозволяє переоцінити ймовірність гіпотез після проведення випробування. (можно дописать еще что-нибудь из 12-15)

17.Що таке повторні незалежні випробування? Запишіть формулу Бернуллі і вкажіть умови її застосування.

Розглянемо деяке стохастичне випробування, яке в однакових умовах проводиться n раз, причому при кожному його повторенні певна подія A може відбутися з однією і тією самою ймовірністю p або не відбутися з ймовірністю $q = 1 - p$. Такі випробування, в яких ймовірність того чи іншого результату не залежить від результату інших, називають повторними незалежними випробуваннями, або схемою Бернуллі. Ймовірність $P_n(k)$ того, що в n випробуваннях подія A відбудеться k раз, обчислюється за формулою:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

18. Як знайти найбільш імовірне число появ події в схемі Бернуллі?

Те значення k, для якого ймовірність $P_n(k)$ максимальна, знаходиться:

- Якщо $np - q$ – ціле, то $k1 = np - q$, $k2 = np + p$.
- Якщо $np - q$ – не ціле, то $np - q < k < np + p$.

19. Сформулюйте локальну теорему Муавра-Лапласа. Назвіть основні її властивості.

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях з ймовірністю появи події A рівній p ($0<p<1$) подія A наступить рівно k разів (байдуже в якій послідовності) визначається за наближеною формулою

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$$

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гауса,

$x = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{npq}}$ – аргумент функції Гауса;

Властивості функції Гауса:

1) Функція Гауса є парною
2) φ(x) = 0, при |x| >= 4.

20. Сформулюйте інтегральну теорему Муавра-Лапласа. Запишіть функцію Лапласа й назвіть її основні властивості.

Ймовірність, що в n незалежних випробуваннях подія A з імовірністю появи p (0<p<1) настане не менше k_1 разів і не більше k_2 (незалежно від послідовності появи) наближено визначається залежністю

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$ де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad x = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{npq}}$$

Властивості функції Лапласа:

1) вона є непарною
2) для всіх аргументів більших за п'ять вона рівна 0,5, менше -5 – -0,5.

21.Які умови застосування і зміст формули Пуассона?

Якщо ймовірність настання події в кожному випробуванні постійна і мала, а число незалежних випробувань досить велике, то ймовірність настання події рівно *m* раз наближено дорівнює

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \quad \lambda = np.$$