МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ТИПОВОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ
"ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ТА ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ"

для студентів електрорадіотехнічних
спеціальностей
усіх форм навчання

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики № I
Протокол № II від 15.06.93

Київ КПІ 1994

Методичні вказівки до типової розрахункової роботи "Теорія функцій комплексної змінної та операційне числення" для студентів електрорадіотехнічних спеціальностей усіх форм навчання / Укл.: О.А.Якубенко, Р.П.Терещенко, І.П.Козюра та ін. - К.: КПІ, 1994. - 108 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки
до типової розрахункової роботи
"Теорія функцій комплексної змінної
та операційне числення"
для студентів електрорадіотехнічних
спеціальностей
усіх форм навчання

Укладачі: Якубенко Олександра Андріївна
Терещенко Раїса Павлівна
Козюра Іван Павлович
Костецький Едуард Олександрович
Коновалова Наталія Романівна
Степанець Ніна Іванівна
Дрозд Вячеслав Володимирович

Відповідальний редактор Н.О.Вірченко

Рецензент Л.П.Пеклова

Редактор Т.О.Суворова
Коректор С.А.Невзгляд

Підп. до друку 14.12.94 Формат 60×84¹/₁₆ Папір друк. №3 Друк офсетний Умовн. друк. арк. 6,29
Умовн. фарбо-відб. 6,40 Облік.-вид. арк. 2,43
Тираж 500 Зам. №4-5751

КПІ. 252056, Київ-56, проспект Перемоги, 37

Фірма «ВІПОЛ»
252151, Київ, вул. Волинська, 60

Методичні вказівки до типової розрахункової роботи "Теорія функцій комплексної змінної та операційне числення" призначені для самостійної роботи студентів електрорадіотехнічних спеціальностей усіх форм навчання. Їх зміст охоплює всі основні питання навчальної програми за названою темою.

Виконуючи роботу, треба спочатку вивчити теоретичний матеріал. Робота виконується в учнівському зошиті з оформленою за встановленим зразком титульною сторінкою (зразок оформлення наведено в кінці методичних вказівок).

Розділ I. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Комплексним числом z називається вираз виду $x+iy$ (алгебраїчна форма комплексного числа), де x та y – довільні дійсні числа, а i – уявна одиниця, що задоволь –

яке умову $i^2=-1$. Числа x та y називаються відповідно дійсною та уявною частинами комплексного числа z і позначаються $x=Re\,z$, $y=Im\,z$.

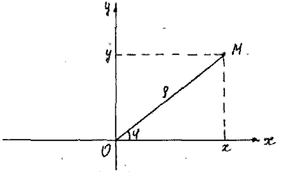
Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі виконуються за формулами:

1. $(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$.
2. $(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$.
3. $(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$.
4. $(x_1+iy_1):(x_2+iy_2)=\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$.

$$(x_2^2+y_2^2\neq 0)$$

Дії ці підкоряються законам, аналогічним законам дій з дійсними числами.

Комплексне число $z=x+iy$ зображується в площині XOY точкою $M(x,y)$ або вектором $\overrightarrow{OM}$, де $O(0,0)$ – початок координат (мал. 1).



Мал. 1

Довжина ρ вектора OM називається модулем комплексного числа і позначається через $|z|$, таким чином $\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

Кут φ, утворений вектором OM з віссю OX, називається аргументом комплексного числа z і позначається $\varphi = Arg\, z$, де $Arg\, z = arg\, z + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \dots)$

$arg\, z$ є головне значення $Arg\, z$, причому $-\pi < arg\, z \le \pi$, $tg\varphi = \frac{y}{x}$.

Довільне комплексне число $z = x+iy \ (z \ne 0)$ можна записати в тригонометричній формі

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \text{де } \rho=|z|,\ \varphi = arg\, z.$$

Правила дій:

1. $\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$;
2. $\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) : \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$;
3. $[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad (n - \text{ціле}, \ge 2)$;
4. $\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$,

$(n - \text{ціле}, \ge 2)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Приклад 1. Знайти всі значення $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$ та побудувати їх.

Розв'язування: число $\sqrt{3} - i$ перепишемо на тригонометричну форму. Знаходимо $\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, $arg(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6}$.

Отже, $\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

2^x

[illegible] формулу (1), знаходимо корені четвертого степеня [illegible] числа:

$$\sqrt[4]{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}\right),$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

[illegible]:

1) $K=0$ $\quad z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{24}\right)\right);$

2) $K=1$ $\quad z_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}\right)\right);$

3) $K=2$ $\quad z_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)\right);$

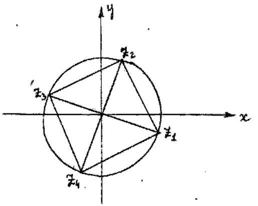
4) $K=3$ $\quad z_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{3\pi}{2}\right)\right).$

[illegible] рис. 2а.

[illegible] $|z_k|=\sqrt[4]{2}$ ($k=1$, 2, 3, 4), звідси випливає, що всі точки лежать на колі з центром у початку координат радіусом $\sqrt[4]{2}$, а аргументи чисел z_2, z_3, z_4 відрізняються від аргумента z_1 відповідно на $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. Таким чином, точки z_1, z_2, z_3, z_4 будуть лежати у вершинах квадрата, вписаного в коло радіусом $\sqrt[4]{2}$ (див. 2).

Довільно комплексне число $z\neq 0$ можна записати в показниковій формі, використовуючи формулу Ейлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$,

$$z=\rho e^{i\varphi},\quad \text{де}\quad \rho=|z|,\quad \varphi=\arg z.$$



Мал. 2

Дії над комплексними числами, заданими в показниковій формі, виконуються за формулами:

1. $\rho_1 e^{i\varphi_1}\,\rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
2. $\rho_1 e^{i\varphi_1} : \rho_2 e^{i\varphi_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
3. $(\rho\, e^{i\varphi})^n = \rho^n\, e^{in\varphi}$
4. $\sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$; $(k=0, 1, 2, \dots, n-1)$

Завдання I. Знайти $Re\, z$ та $Im\, z$, якщо:

I.1. $z=\frac{2-17i}{3}-\frac{2+i}{3+i}$; I.2. $z=\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$;

I.3. $z=\frac{2-i}{i+2}+(i-1)^2$; I.4. $z=\frac{(1+i)(2+i)}{2-i}-\frac{(1-i)(2-i)}{2+i}$;

I.5. $z=(2-i)^2+(1+i)^4-\frac{7-i}{2+i}$ I.6. $z=\frac{2+i}{3i+1}+(2i-1)^2$;

I.7. $z = \dfrac{(2+i)^3 - (2-i)^3}{(2+i)^2 - (2-i)^2}$;

I.8. $z = \dfrac{4+i}{4-i} + \dfrac{4-i}{4+i}$;

I.9. $z = \dfrac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}$;

I.10. $z = \dfrac{2}{-i} + i(1+i)$;

I.11. $z = \dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{i}{2-i}$;

I.12. $z = \dfrac{12}{5i} + \dfrac{i}{1+i}$;

I.13. $z = \dfrac{(1-i)(2-i)}{2+i}$;

I.14. $z = (2+3i)^2 - (2-3i)^2$;

I.15. $z = \dfrac{3}{1+2i} + \dfrac{3}{2-i}$;

I.16. $z = \dfrac{1-i}{1+i} + \dfrac{1+i}{1-i}$;

I.17. $z = \dfrac{5}{1+2i} + \dfrac{5}{2-i}$;

I.18. $z = \dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^5}$

I.19. $z = \dfrac{1-i^3}{(1+i)^3}$;

I.20. $z = \dfrac{1-i}{1+i} + \dfrac{2-2i}{1-2i}$;

I.21. $z = \dfrac{2}{1+i} + \dfrac{i}{2-i}$;

I.22. $z = \dfrac{(1-2i)(2+i)}{i}$;

I.23. $z = \dfrac{1+i^5}{(1-i)^5}$;

I.24. $z = \dfrac{1}{1+i} + \dfrac{i}{2-i}$;

I.25. $z = -\dfrac{5}{i} + i(1-i)$;

I.26. $z = \dfrac{i}{2+i} + \dfrac{2+i}{i}$,

I.27. $z = \dfrac{(1-3i)(3i-2)}{i}$

I.28. $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$;

I.29. $z = \dfrac{1+i}{2i+1}$;

I.30. $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$;

I.31. $z = \dfrac{(2i+3)^2}{i-1} - \dfrac{i}{i+1}$, Завдання 2. **Звести** до тригонометричної і показникової форми, побудувати в комплексній площині:

2.1. $z = \frac{1}{i+1}$;

2.2. $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2.3. $z = (i+1)(i-2)$;

2.4. $z = 1 + \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$;

2.5. $z = 1 + \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$;

2.6. $z = (1+2i)(1-i)$;

2.7. $z = \frac{1-i}{3+i}$

2.8. $z = \frac{1}{i-1}$;

2.9. $z = 2 + i\sin\frac{\pi}{6}$;

2.10. $z = 3 - 2\sqrt{2}\,i$;

2.11. $z = \frac{3+i}{4-i}$;

2.12. $z = 5 + \sqrt{3}\,i$;

2.13. $z = (1-i)(2+i)$;

2.14. $z = -\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}$;

2.15. $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$,

2.16. $z = 4 - 3i$,

2.17. $z = i^2 + \frac{1}{i^2}$;

2.18. $z = i^4 + i^3 + i^2 + i + 1$;

2.19. $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}$

2.20. $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

2.21. $z = \sin\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$;

2.22. $z = \frac{1-i}{1+i}$;

2.23. $z = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$;

2.24. $z = \frac{7+24i}{5}$;

2.25. $z = (2 + i\sqrt{12})^3$;

2.26. $z = -\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}$,

2.27. $z = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$;

2.28. $z = 1 - \sin\alpha + i\cos\alpha$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

2.29. $z = -4 + 4i$;

2.30. $z = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$.

Завдання 3. Знайти всі значення коренів та побудувати їх.

3.1 $\sqrt[4]{16i}$;	3.2 $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$;	3.3. $\sqrt[4]{1+i}$;
3.4 $\sqrt[4]{-i}$;	3.5. $\sqrt[3]{-1}$;	3.6. $\sqrt[4]{2}$;
3.7. $\sqrt[5]{4}$;	3.8. $\sqrt[3]{-1+i}$,	3.9. $\sqrt[4]{-16i}$;
3.10. $\sqrt[4]{-2+i}$;	3.11. $\sqrt[3]{i-1}$;	3.12. $\sqrt[7]{3+2i}$,
3.13. $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$;	3.14 $\sqrt[5]{2i}$;	3.15. $\sqrt[5]{4-4\sqrt{3}i}$;
3.16. $\sqrt[3]{5}$;	3.17 $\sqrt[3]{-9}$;	3.18. $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$;
3.19. $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$;	3.20 $\sqrt[3]{-1-i}$;	3.21. $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$;
3.22. $\sqrt[3]{8}$;	3.23. $\sqrt[3]{i}$;	3.24 $\sqrt[3]{1-i}$;
3.25 $\sqrt[3]{-2+2i}$,	3.26 $\sqrt[4]{-81}$;	3.27 $\sqrt[4]{-4}$;
3.28 $\sqrt[5]{5}$,	3.29. $\sqrt[6]{-1}$,	3.30. $\sqrt[5]{1-i}$.

Завдання 4. Побудувати лінії і області, які задані такими співвідношеннями:

4.1. $|z+i|>|z-i|$;

4.2. $1\le|z+1|\le 2$, $\frac{\pi}{2}<\arg z<\pi$;

4.3. $|z+2i|=|z|$;

4.4. $|z+2|>|z|$,

4.5. $3\le|z+2i|<4$,

4.6. $|1+z|=|z+i|$,

4.7. $|z-1+i|\le 2$;

4.8. $|z|>2+\operatorname{Im} z$,

4.9. $|z+i|=|z-i|$;

4.10. $|z|>|z+1|$;

4.11. $-\operatorname{Re} z+|z|\le 0$;

4.12. $\frac{\pi}{4}\le\arg(z+1-i)\le\frac{3\pi}{4}$;

4.13. $1\le|z+2+i|\le 2$;

4.14. $\frac{\pi}{3}<\arg(z-i)<\frac{\pi}{2}$;

4.15. $|z-i|+|z+i|=4$;

4.16. $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)<-\frac{1}{2}$;

4.17. $\operatorname{Im}\frac{z-1+i}{z-3i}=0$;

4.18. $|z-1|^2+|z+1|^2=5$

4.19. $\operatorname{Im} z^2>2$;

4.20. $\operatorname{Re}\frac{z-i}{z-1}=0$;

4.21. $\operatorname{Im}\frac{z-i}{z-1}=0$;

4.22. $\operatorname{Im} z-1=|z|$;

4.23. $\operatorname{Im}\frac{z+i}{z+1}=0$;

4.24. $|z+1|+|z-1|\le 3$;

4.25. $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\ge 1$;

4.26. $0<\operatorname{Re} iz<1$, $|z+1|\ge 1$;

4.27. $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z<1$, $|z-1|<1$;

4.28. $|2z-3|\le 1$,

4.29. $|z-i|-|z+i|>2$,

4.30. $\arg\frac{z-1}{z+1}=0$,

4.31. $|z-1|<|z-i|$.

[illegible] II. [illegible]

[illegible] e^z, $\sin z$ та $\cos z$ визначаються степеневими [illegible]

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$ причому e^z –

[illegible] $2\pi i$, тобто

$$e^{z + 2k\pi i} = e^z.$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$ причому

[illegible] $\sin z$ [illegible] $\cos z$ періодичні з дійсним періодом 2π.

[illegible] такі формули [illegible]:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

[illegible] $tg\, z$ та $ctg\, z$ [illegible] такими рівнос-[illegible]

$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

[illegible]

$$sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z}, \quad cth\, z = \frac{ch\, z}{sh\, z}$$

Логарифмічна функція $Ln\, z$, де $z \neq 0$, визначається як функція, обернена показниковій, причому

$$Ln\, z = \ln|z| + i\, Arg\, z = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i.$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Ця функція є багатозначною. Головним значенням вважається $\ln z = \ln|z| + i \arg z$.

Обернені тригонометричні функції $Arcsin\, z$, $Arccos\, z$, $Arctg\, z$ є багатозначними і виражаються через логарифмічні функції

$$Arcsin\, z = -i\, Ln\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right),$$

$$Arccos\, z = -i\, Ln\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$Arctg\, z = -\frac{i}{2}\, Ln\, \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Загальна степенева функція $W = z^a$, де $a = \alpha + i\beta$, визначається співвідношенням

$$z^a = e^{a\, Ln\, z}.$$

Завдання 1. Обчислити значення функцій

1.1. $\cos 2i$, 1.2. $\sin 3i$,

1.3. $\sin iy,\ y \in R$; 1.4. $ch\, iy,\ y \in R$, 1.5. $\operatorname{tg} 2i$;

1.6. $\operatorname{ctg}(1-i)$;

1.7. $\sin(1+2i)$;

1.8. $\operatorname{sh} iy,\ y \in R$;

1.9. $\operatorname{tg}(2-i)$;

1.10. $\operatorname{ctg}(1+i)$;

1.11. $\operatorname{sh}(i-2)$;

1.12. $\cos(3+4i)$;

1.13. $\operatorname{ch}(-i)$;

1.14. $\cos(2i+1)$;

1.15. $\sin^2 i$;

1.16. $\cos(1-i)$;

1.17. $\sin(3i+4)$;

1.18. $\operatorname{sh}(2+i)$;

1.19. $\operatorname{tg}(1-i)$;

1.20. $\operatorname{tg}^2(2i)$;

1.21. $\sin^{10} i$;

1.22. $\cos(1-i)$;

1.23. $\operatorname{ctg}^2(1+i)$;

1.24. $\sin \frac{i}{2}$;

1.25. $\cos(3i-1)$;

1.26. $\operatorname{ch}(1-i)$;

1.27. $\operatorname{sh}(3i-4)$;

1.28. $\sin^2(2+i)$;

1.29. $\cos(1-4i)$;

1.30. $\operatorname{ctg}(1+2i)$.

<u>Завдання 2</u>. Обчислити значення функції

2.1. $\ln(-2)$; $\operatorname{Ln}(-2)$;

2.2. $\ln i$; $\operatorname{Ln} i$;

2.3. $\ln(2+3i)$;

2.4. $\operatorname{Ln}(1+i)$;

2.5. i^i;

2.6. i^{i+1};

2.7. 2^i;

2.8. $e^{-2+\frac{\pi i}{3}}$;

2.9. $\ln(4i-3)$, $\operatorname{Ln}(4i-3)$;

2.10. 3^i;

2.11. $(i+1)^{i}$;

2.12. $\ln(-1)$; $\mathrm{Ln}(-1)$;

2.13. $e^{2+\pi i}$;

2.14. $\ln(i^2-1)$; $\mathrm{Ln}(i^2-1)$;

2.15. $\ln(i+1)^2$;

2.16. $\mathrm{Ln}(3i+4)^2$;

2.17. $2^{(i+1)^{10}}$,

2.18. $(1-i)^{i}$,

2.19. i^{2i-1};

2.20. $i^{\ln i}$;

2.21. $(\ln i)^{i}$;

2.22. $(1-2i)^{i+1}$;

2.23. $\mathrm{Ln}(ei)$;

2.24. $(\pi i)^{i}$;

2.25. $(1-i)^{10i}$,

2.26. $\mathrm{Ln}(1+i)^{10}$;

2.27. $\mathrm{Ln}\,2^{i}$;

2.28. $(-2)^{5i}$;

2.29. $(i+1)^{2i}$

2.30. $(3i-4)^{i}$.

<u>Завдання 3</u>. Обчислити

3.1. $\mathrm{Arcsin}\,3$;

3.2. $\mathrm{Arcsin}\,3i$;

3.3. $\mathrm{Arccos}\,2i$;

3.4. $\mathrm{Arcsin}\,2i$;

3.5. $\mathrm{Arctg}\,i$;

3.6. $\mathrm{Arctg}\,i$;

3.7. $\mathrm{Arcsin}\,i$;

3.8. $\mathrm{Arcsin}\,(2-i)$;

3.9. $\mathrm{Arcsin}\,(i-1)^4$;

3.10. $\mathrm{Arccos}\,(i-1)$;

3.11. $\mathrm{Arctg}\,(i+1)$;

3.12. $\mathrm{Arctg}\,(i-1)$;

3.13. $\mathrm{Arcsin}\,(i^2+i-1)$;

3.14. $\mathrm{Arccos}\,5i$,

3.15. $\operatorname{Arccos}(2+2i)$;

3.16. $\operatorname{Arctg}(1-2i)$;

3.17. $\operatorname{Arctg}(i^4-i)$;

3.18. $\operatorname{Arcsin}(5i-3)$;

3.19. $\operatorname{Arccos}(-i)$;

3.20. $\operatorname{Arctg}(-i)$;

3.21. $\operatorname{Arctg}(-i)$;

3.22. $\operatorname{Arcsin}(-3i)$;

3.23. $\operatorname{Arccos}(-3i)$;

3.24. $\operatorname{Arctg}(i+2)$;

3.25. $\operatorname{Arctg}(i+2)$;

3.26. $\operatorname{Arcsin}\frac{2}{i}$;

3.27. $\operatorname{Arccos}\frac{1-i}{1+i}$;

3.28. $\operatorname{Arctg}\frac{i}{i+1}$;

3.29. $\operatorname{Arctg}\frac{1}{i}$;

3.30. $\operatorname{Arcsin}\frac{2+i}{i}$.

РОЗДІЛ III. АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ, ЇХ ЗВ"ЯЗОК З ГАРМОНІЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Функція $W=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ називається <u>аналітичною в точці</u> $z\in\mathcal{D}$, якщо вона диференційовна як в самій точці z, так і в деякій її околиці.

Функція $f(z)$ називається аналітичною в області $\mathcal{D}$, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області.

Для будь-якої диференційовної функції $f(z)$ маємо необхідні і достатні умови

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}$$

які називаються умовами Коші – Рімана.

Функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ є розв"язками рівняння

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$ і називаються гармонічними

функціями.

Якщо відома одна із функцій u і v, то можна, використовуючи умови **Коші – Рімана**, відновити другу.

Приклад 1. Знайти функцію

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$ за відомою дійсною

частиною

$$Re\ f(z) = u = ch\,x\ \cos y.$$

Розв'язування. Для того щоб знайти $f(z)$, знайдемо $Im\,f(z)$. Для цього скористаємось умовами Коші – **Рімана**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

З першого рівняння, підставивши u, маємо

$$\frac{\partial v}{\partial y} = sh\,x\cos y.$$

Проінтегруємо цей вираз по y:

$$v = \int sh\,x\cos y\,dy = sh\,x\,\sin y + \varphi(x).$$

Оскільки при інтегруванні по y ми вважали x сталим, то постійна інтегрування теж залежить від x. Тому ми її записали у вигляді $\varphi(x)$. Таким чином, задача буде розв'язана, якщо знайдемо $\varphi(x)$. Для її знаходження скористаємось другою умовою Коші – **Рімана. Знайдемо** $\frac{\partial u}{\partial y}$ і $\frac{\partial v}{\partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -ch\,x\,\sin y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = ch\,x\,\sin y + \varphi'(x).$$

[illegible] $ch\,x \sin y = ch\,x \cdot \sin y + \varphi'(x)$,

$$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = C$$

[illegible] $v = sh\,x \sin y + C$,

[illegible] $f(z)$ [illegible]:

$$f(z) = ch\,x \cos y + i\,(sh\,x \sin y + C) =$$

$$= ch\,x \cos y + i\,sh\,x \sin y + Ci = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\cos y +$$

$$+ i\,\frac{e^x - e^{-x}}{2}\sin y + Ci = \frac{e^x}{2}(\cos y + i \sin y) +$$

$$+ \frac{e^{-x}}{2}(\cos y - i \sin y) + Ci = \frac{e^x}{2}e^{iy} + \frac{e^{-x}}{2}e^{-iy} + Ci =$$

$$= Ci + \frac{1}{2}\left(e^{x+iy} + e^{-(x+iy)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) + Ci =$$

$$= ch\,z + Ci.$$

[illegible] $f(z) = ch\,z + Ci$.

[illegible] 1. [illegible] $f(z)$ [illegible].

1. $f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$;
2. $f(z) = (x^2 + y^2) - 2xyi$;
3. $f(z) = e^{-y}\cos x + i\,e^{-y}\sin x$,
4. $f(z) = e^x \cos y - i\,e^x \sin y$,
5. $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i\,(3x^2y - y^3)$,
6. $f(z) = x(x^2 + y^2) + iy\,(x^2 + y^2)$,

I.7. $f(z) = (x^2 - y^2 - 2x) + i\,2y(x-1)$,

I.8. $f(z) = (x^2 - y^2 + 2x) + i(4xy + 2y)$,

I.9. $f(z) = (4xy - y) - i(2x^2 - x - 2y^2)$,

I.10. $f(z) = (3x^2y + 2x) + i(3xy^2 + 2y)$,

I.11. $f(z) = (x^2 - y^2 - y) + i(2xy + x)$;

I.12. $f(z) = (4x \sin y + \cos x) + i(\cos x - 4\cos y)$,

I.13. $f(z) = \sin x \, \mathrm{ch}\, y + i \cos x \, \mathrm{sh}\, y$,

I.14. $f(z) = \sin(x - iy)$;

I.15. $f(z) = -2\cos x \, \mathrm{ch}\, y - i\,2\,\mathrm{sh}\, y \sin x$;

I.16. $f(z) = \cos(x - iy)$,

I.17. $f(z) = \cos(3x + y)\,\mathrm{ch}(3y - x) + i \sin(3x + y)\,\mathrm{sh}(3y - x)$;

I.18. $f(z) = \mathrm{ch}\, x \, \mathrm{ch}\, y - i\,\mathrm{sh}\, x \, \mathrm{sh}\, y$;

I.19. $f(z) = \mathrm{sh}\, x \cos y + i \sin y \, \mathrm{ch}\, x$;

I.20. $f(z) = e^{x^2 + y^2} \cos 2xy - i\, e^{x^2 + y^2} \sin 2xy$;

I.21. $f(z) = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy + i\, e^{x^2 - y^2} \sin 2xy$;

I.22. $f(z) = (2x^3 - 3y^2x) + i(6x^2y - y^3)$;

I.23. $f(z) = (2x^2 - 2y^2 - 3x) + i(4yx + 3y)$;

I.24. $f(z) = z^2 - \mathrm{Re}\, z$;

I.25. $f(z) = \mathrm{ch}\, z$;

I.26. $f(z) = z - 3\bar{z} + 1$,

I.27. $f(z) = \mathrm{sh}\, z$,

I.28. $f(z) = z\bar{z} + \mathrm{Re}(i\bar{z})$;

I.29. $f(z) = \sin z$; I.30. $f(z) = 2z + i\,\mathrm{Im}$

Завдання 2. Знайти функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо відома її дійсна $\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)$ або уявна частина $\operatorname{Im} f(z)=v(x,y)$.

2.1. $u(x,y)=e^{x}\cos y$;	2.2. $v(x,y)=e^{-y}\sin x$;
2.3. $u(x,y)=3x+2y+1$,	2.4. $v(x,y)=2x-y+4$;
2.5. $u(x,y)=e^{y}\cos x$,	2.6. $v(x,y)=e^{-x}\cos y$,
2.7. $u(x,y)=\operatorname{sh} x\cdot\cos y$;	2.8. $v(x,y)=-\operatorname{sh} x\,\sin y$;
2.9. $u(x,y)=\cos x\cdot\operatorname{ch} y$,	2.10. $v(x,y)=\sin x\cdot\operatorname{sh} y$,
2.11. $u(x,y)=2^{-x}\cos(y\ln 2)$;	2.12. $v(x,y)=x^2-6xy-y^2$;
2.13. $u(x,y)=-x^2+4xy+y^2$,	2.14. $v(x,y)=2x^3-6xy^2$;
2.15. $u(x,y)=x^3+3x^2y-3xy^2-y^3$,	2.16. $v(x,y)=x^3-3xy^2+2y$;
2.17. $u(x,y)=6x^2y-2y^3$;	2.18. $v(x,y)=y^3+6xy^2-3x^2y-2x^3$;
2.19. $u(x,y)=3x^2y-y^3+4x$;	2.20. $v(x,y)=x^2-y^2+3y$;
2.21. $u(x,y)=x^2-y^2+5x$;	2.22. $v(x,y)=2^{y}\cos(x\ln 2)$;
2.23. $u(x,y)=3^{x}\sin(y\ln 3)$;	2.24. $v(x,y)=2^{y}\sin(x\ln 2)$,
2.25. $u(x,y)=2y^2-2x^2+x$;	2.26. $v(x,y)=3^{-y}\cos(x\ln 3)$;
2.27. $u(x,y)=y^2-x^2+2xy-y$;	2.28. $v(x,y)=-\operatorname{sh} 2y\,\sin(2x+1)$;
2.29. $u(x,y)=y^2-x^2$;	2.30. $v(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

Розділ IV. Інтегрування функцій комплексної змінної

Якщо на площині задана гладка чи кусково-гладка орієнтована крива L кінцевої довжини і в точках цієї кривої задана неперервна комплекснозначна функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, то інтегралом $\int\limits_L f(z)\,dz$ називається

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n} f(\xi_j)(z_j-z_{j-1})$, де $z_0=a$, $z_n=b$ – відповідно комплексні координати початку і кінця кривої L, а z_j, $j=1,2,\dots,n-1$, – комплексні координати проміжних точок на кривій L, розміщених в порядку зростання їх дугових координат, рахуючи від точки z_0. Під ξ_j розуміємо будь-яку точку тієї дуги кривої L, кінці якої є z_{j-1} та z_j. При $n\to\infty$, припускаємо, що всі величини $|z_j-z_{j-1}|\to 0$. Якщо припустити, що крива L розміщена в області $\mathfrak{D}$, в якій задана функція $f(z)$, то точки $a=z_0$ і $z_n=b$ можна з"єднати нескінченною множиною гладких чи кусково-гладких кривих, які лежать в $\mathfrak{D}$.

Тоді $\int\limits_L f(z)\,dz$ буде функцією кривої L, тобто для різних кривих він буде мати різні значення. Однак, якщо функція $f(z)$ є задана однозначна аналітична в $\mathfrak{D}$, а область $\mathfrak{D}$ однозв"язна, то інтеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ залежить тільки від координат початкової і кінцевої точок кривої L, тобто

$$\int\limits_L f(z)\,dz=\int\limits_a^b f(z)\,dz. \qquad (1)$$

це є наслідком такої теореми.

6^x

Т е о р е м а Коші.

Якщо L_0 є проста замкнута гладка чи кусково-гладка крива, а $f(z)$ є однозначна аналітична функція всередині і на кривій L_0, то $\int_{L_0} f(z)dz = 0$, в якому б напрямку не відбувався обхід кривої L_0.

Якщо границя області $\mathcal{D}$ складається з декількох простих замкнених гладких чи кусково-гладких кривих L_k, де $k = 1, 2, \dots, n$, розміщених таким чином, що крива L містить всередині себе всі останні, які при цьому попарно не перетинаються і не лежать одна всередині другої, то для такої області, в допущенні, що $f(z)$ аналітична всередині $\mathcal{D}$ і на границі L, слідує формула

$$\int_L f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{L_k} f(z)dz \,, \tag{2}$$

де всі криві обходяться в одному і тому ж напрямку, тобто всі або по ходу або проти ходу годинникової стрілки. При цьому обхід вважається в додатному напрямку, якщо він збігається з напрямком найкоротшого повороту осі до збігу з віссю OY.

Застосуємо формулу (2) до функції $\frac{f(z)}{z-z_0}$, де $f(z)$ – аналітична в $\bar{\mathcal{D}}$, $z_0 \in \mathcal{D}$ та виберемо ще одну криву L_{n+1} у вигляді кола $|z-z_0| < \delta$, де $\delta > 0$ і як завгодно мале, ми одержуємо:

$$\int_L \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{L_k} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz + i\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\theta})\,d\theta \quad (z-z_0=\rho e^{i\theta}).$$

Звідси при $\rho \to 0$ одержуємо

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{L_k}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz. \tag{3}$$

Тут обхід усіх кривих проводиться в додатному напрямку.

Якщо внутрішні криві L_k відсутні, то з (3) одержуємо:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz. \tag{4}$$

Це *інтегральна формула Коші*.

Із формули (4) одержуємо

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz,\quad n=0,1,2,\dots \tag{5}$$

Обчислення інтегралів від функцій комплексної змінної

1. Обчислення $\int f(z)\,dz$, де $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ неперервна комплекснозначна функція у всіх точках кривої L – гладкої або кусково-гладкої, зводиться до обчислення криволінійних інтегралів:

$$\int\limits_L f(z)\,dz=\int\limits_L \big(u(x,y)+iv(x,y)\big)\big(dx+i\,dy\big)=$$
$$=\int\limits_L u(x,y)\,dx-v(x,y)\,dy+i\int\limits_L v(x,y)\,dx+u(x,y)\,dy. \tag{I}$$

Якщо крива L задана параметричними рівняннями $x=x(t), y=y(t)$, де $t_0 \le t \le T$, то, підставивши під знак (2) інтеграла замість x, y функції $x(t)$, $y(t)$, а замість dx, dy – диференціали цих функцій, можна звести обчислення криволінійних інтегралів в (I) до обчислення означених інтегралів зі змінною інтегрування t, з нижньою границею t_0 і верхньою границею T. З другого боку, параметричні рівняння (2) рівносильні рівнянню в комплексній формі:

$z=z(t), \ t_0 \le t \le T$, де $z(t)=x(t)+iy(t)$. Тоді $dz=z'(t)\,dt$ і інтеграл можна обчислити, користуючись формулою

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{t_0} f(z(t))\cdot z'(t)\,dt.$$

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int_L (z+\operatorname{Re} z)\,dz,$$

де L – відрізок, що з"єднує точки $z_1=3i$ та $z_2=1-i$.

Розв"язування. Числу $z_1=3i$ відповідає точка A (0; 3), числу $z_2=1-i$ відповідає точка B (I; -I). Рівняння прямої, яка проходить через точки A та B, має вигляд $y=-4x+3$. Запишемо рівняння в параметричній формі, наприклад, так

$$x=t, \ y=3-4t, \qquad \text{де} \quad 0 \le t \le 1,$$

і в комплексній формі

$$z=t+(3-4t)i, \quad 0 \le t \le 1,$$

тоді $dz=(1-4i)\,dt$ і

$$\int_L (\bar{z} + \operatorname{Re} z)\,dz = \int_0^1 \big(t + (3-4t)i + t\big)(1-4i)\,dt = (1-4i)\int_0^1 \big(2t + (3-4t)i\big)\,dt =$$

$$= (1-4i)\big(t^2 + (3t-2t^2)i\big)\Big|_0^1 = (1-4i)(1-i) = 5(1-i).$$

2. При обчисленні інтегралів по замкненому контуру можна використати теорему Коші (I), інтегральну формулу Коші (4) та формулу (5).

Приклад I. Обчислити інтеграл

$$\int_L \frac{e^z\,dz}{z(z-2i)},$$

де L – коло радіуса 2 з центром в точці $3i$. Функція $f(z) = \frac{e^z}{z}$ всередині кола, обмеженого колом, аналітична, тому, використовуючи інтегральну формулу Коші (4), одержимо

$$\int_L \frac{e^z}{z(z-2i)}\,dz = \int_L \frac{f(z)}{z-2i}\,dz = 2\pi i \cdot f(2i) = 2\pi i\,\frac{e^{2i}}{2i} =$$

$$= \pi(\cos 2 + i\sin 2).$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$\int_L \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz,$$

де L – замкнений контур, однократно обігаючий точку i.

Застосуємо формулу (5) до функції

7*

$f(z) = \cos z$;

$$\int\limits_L \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\cdot\frac{d^2(\cos z)}{dz^2}\bigg|_{z=i} = -\pi i \cos i = -\pi i \operatorname{ch} 1.$$

Розрахункові завдання

Завдання I. Обчислити інтеграл $\int\limits_L f(z)dz$ по лініях, що з'єднують точки $z_1 = 0$ та $z_2 = 1+i$

1) по прямій;
2) по параболі $y = x^2$;
3) по ламаній $z_1 z_2 z_3$, де $z_3 = 1$ (завдання I–15); $z_3 = i$ (завдання 16–30).

I.1. $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$;	I.2. $f(z) = \bar{z}\cdot\mathrm{Re}\,z$;
I.3. $f(z) = \mathrm{Re}\,(z^2+1)$;	I.4. $f(z) = \mathrm{Re}\,(z^3+i)$;
I.5. $f(z) = \bar{z}\cdot z^2$,	I.6. $f(z) = \bar{z}^2$;
I.7. $f(z) = (i\,\mathrm{Re}\,z)^2$;	I.8. $f(z) = \mathrm{Re}\,z + \mathrm{Im}\,z$;
I.9. $f(z) = \lvert z\rvert^2$;	I.10. $f(z) = \mathrm{Re}\,(\bar{z}^3+i)$;
I.11. $f(z) = \bar{z} + \mathrm{Re}\,\bar{z}$;	I.12. $f(z) = z + \mathrm{Re}\,(z+1)$;
I.13. $f(z) = \mathrm{Re}\,(z^2+\bar{z}^2)$,	I.14. $f(z) = \bar{z}^2\,\mathrm{Re}\,z$;
I.15. $f(z) = \bar{z} + 1 - i$;	I.16. $f(z) = z\cdot\mathrm{Im}\,z$;
I.17. $f(z) = \bar{z}\,\mathrm{Im}\,z$;	I.18. $f(z) = \mathrm{Im}\,(z^2+i)$;
I.19. $f(z) = \mathrm{Im}\,(z^3+1)$;	I.20. $f(z) = z\cdot\bar{z}^2$;
I.21. $f(z) = \bar{z}^3$,	I.22. $f(z) = (i\,\mathrm{Im}\,\bar{z})^2$,
I.23. $f(z) = \bar{z} + \mathrm{Im}\,\bar{z}$;	I.24. $f(z) = \mathrm{Im}\,(\bar{z}^3+1)$,
I.25. $f(z) = \bar{z}^2\cdot\mathrm{Im}\,z$;	I.26. $f(z) = \mathrm{Im}\,(z^2+\bar{z}^2)$;

1.27. $f(z)=z+\operatorname{Im}(z+i)$; 1.28. $f(z)=z^2\operatorname{Im} z$;

1.29. $f(z)=(1-i)\bar{z}$; 1.30. $f(z)=\operatorname{Im}(z\cdot|z|^2)$.

Завдання 2.

Обчислити $\oint\limits_C f(z)dz$, де $f(z)$ задані в завданні 1, по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

Завдання 3.

Обчислити $\int\limits_C f(z)dz$, де C – коло радіуса R з центром у точці z_c, за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних від аналітичної функції.

3.1. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z-i)}$, $R=2$, $z_c=0$;

3.2. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z+i}$, $\begin{cases} R=3, & z_c=1; \\ R=1, & z_c=i; \end{cases}$

3.3 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+9}$, $\begin{cases} R=2, & z_c=2i, \\ R=2, & z_c=-2i, \\ R=2, & z_c=0; \end{cases}$

3.4. $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-i)^2}$, $\begin{cases} R=3, & z_c=0, \\ R=1/2, & z_c=0; \end{cases}$

3.5. $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+2)^4}$, $R=2$, $z_c=-1$;

3.6. $f(z)=\dfrac{e^z}{z(1-z)^2}$, $\begin{cases} R<2, & z_c=2, \\ R=2, & z_c=-1, \end{cases}$

3.7. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^3(z-1)}$, $\begin{cases} R=2, & z_c=2, \\ R=2, & z_c=-2; \end{cases}$

3.8. $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-2i)^2}$, $\begin{cases} R=3, & z_c=0 \\ R=1, & z_c=0, \end{cases}$

3.9. $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2-1)}$, $\begin{cases} R<2, & z_c=2, \\ R>2, & z_c=-2, \\ R<1, & z_c=0; \end{cases}$

8-4-5751

3.10. $f(z)=\frac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)}, \quad \begin{cases} R=2, & z_c=0, \\ R=1, & z_c=i; \end{cases}$

3.11. $f(z)=\frac{1}{(z^2+4)^2}, \quad \begin{cases} R=2, & z_c=2i, \\ R=2, & z_c=0; \end{cases}$

3.12. $f(z)=\frac{z\,e^z}{(z-a)^3}, \quad R=a, \quad z_c=a,$

3.13. $f(z)=\frac{\sin z}{(z+i)^3}, \quad R=3, \quad z_c=-i;$

3.14. $f(z)=\frac{1}{z^2+1}, \quad \begin{cases} R=2, & z_c=0, \\ R=2, & z_c=-2i; \end{cases}$

3.15. $f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}, \quad R=2, \quad z_c=0;$

3.16. $f(z)=\frac{\cos z}{z^2-\pi^2}, \quad R=4, \quad z_c=0,$

3.17. $f(z)=\frac{1}{(1+z)(z-1)^3}, \quad \begin{cases} R=1, & z_c=-1, \\ R=1, & z_c=1; \end{cases}$

3.18. $f(z)=\frac{\cos z}{(z-i)^3}, \quad R=1, \quad z_c=i;$

3.19. $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}, \quad \begin{cases} R=2, & z_c=2i, \\ R=2, & z_c=-2i, \\ R<1, & z_c=0; \end{cases}$

3.20. $f(z)=\frac{e^z}{z(1-z)^3}, \quad \begin{cases} R<\frac{1}{2}, & z_c=0, \\ R<\frac{1}{2}, & z_c=1; \end{cases}$

3.21. $f(z)=\frac{z^2}{(z-i)^3}, \quad R=1, \quad z_c=i,$

3.22. $f(z)=\frac{1}{z^3(z+1)}, \quad \begin{cases} R<1, & z_c=0, \\ R<1, & z_c=-1; \end{cases}$

3.23. $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+1)}$, $R=3$, $z_0=0$;

3.24. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z(z+1)}$, $\begin{cases} R<1, & z_0=0, \\ R<1, & z_0=-1; \end{cases}$

3.25. $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-1)}$, $R=2$, $z_0=0$;

3.26. $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$, $\begin{cases} R=1, & z_0=0, \\ R=1, & z_0=2; \end{cases}$

3.27. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+16}$, $\begin{cases} R=2, & z_0=3i, \\ R=2, & z_0=-3i; \end{cases}$

3.28. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z+i}$, $R=3$, $z_0=-i$;

3.29. $f(z)=\dfrac{z^2}{z-3i}$, $\begin{cases} R=1, & z_0=0, \\ R=4, & z_0=0; \end{cases}$

3.30. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+16)^2}$, $\begin{cases} R=2, & z_0=3i, \\ R=2, & z_0=-3i. \end{cases}$

Завдання 4.

Застосувати формулу Ньютона – Лейбніца для обчислення інтеграла $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$, попередньо показавши, що функція $f(z)$ є аналітичною в однозв"язній області, яка містить точки z_1 та z_2.

4.1. $f(z)=z^2$; $z_1=0$, $z_2=2+i$;

4.2. $f(z)=e^z$; $z_1=0$, $z_2=1+\frac{\pi}{2}i$;

4.3. $f(z)=\sin z$; $z_1=0$, $z_2=\pi i$;

4.4. $f(z)=z$; $z_1=2-i$, $z_2=1+i$,

4.6. $f(z)=e^{z}$, $z_1=0$, $z_2=-2+\frac{\pi}{2}i$;

4.7. $f(z)=\cos z$, $z_1=0$, $z_2=\pi i$;

4.8. $f(z)=z+1$; $z_1=1+i$, $z_2=3+i$;

4.9. $f(z)=z^{*}$; $z_1=0$, $z_2=1+i$;

4.10. $f(z)=e^{2z}$, $z_1=0$, $z_2=1+\pi i$;

4.11. $f(z)=\sin 2z$, $z_1=0$, $z_2=\frac{\pi}{2}i$;

4.12. $f(z)=z-i$, $z_1=2$, $z_2=2+i$;

4.13. $f(z)=\cos 2z$; $z_1=0$, $z_2=\frac{\pi}{2}i$;

4.14. $f(z)=z^2+z$, $z_1=0$, $z_2=3(1+i)$;

4.15. $f(z)=\frac{1}{z}$; $z_1=1$, $z_2=i$;

4.16. $f(z)=\operatorname{sh} z$; $z_1=0$, $z_2=\pi i$;

4.17. $f(z)=2z+1$; $z_1=1+i$, $z_2=-1+i$;

4.18. $f(z)=e^{-2z}$; $z_1=0$, $z_2=-1+\frac{3}{2}\pi i$;

4.19. $f(z)=\operatorname{Im} iz$; $z_1=0$, $z_2=1$;

4.20. $f(z)=z^3-z^2+1$, $z_1=0$, $z_2=6i$;

4.21. $f(z)=\cos iz$; $z_1=0$, $z_2=\pi$;

4.22. $f(z)=(1+i)z$; $z_1=1$, $z_2=1+i$;

4.23. $f(z)=e^{-iz}$; $z_1=0$, $z_2=\pi$;

4.23. $f(z)=3z^2+z$, $z_1=0$, $z_2=-1+i$;

4.24. $f(z)=\frac{1}{z}$; $z_1=1$, $z_2=\pi i$;

4.25. $f(z)=e^{iz}$; $z_1=0$, $z_2=1+i$;

4.26. $f(z)=iz+1$; $z_1=-1+i$, $z_2=2+4i$;

4.27. $f(z)=\sin z$, $z_1=\frac{\pi}{2}$, $z_2=1+\pi i$;

4.28. $f(z)=z^2+iz+1$; $z_1=0$, $z_2=3i$;

4.29. $f(z)=\cos z$, $z_1=\pi$, $z_2=-1+\frac{\pi}{2}i$;

4.30. $f(z)=e^{-iz}$; $z_1=\pi$, $z_2=\pi i$.

Розділ У. РЯДИ ЛОРАНА. ОСОБЛИВІ ТОЧКИ

Степеневим рядом називається функціональний ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots \qquad (1)$$

де a_n – комплексні числа, коефіцієнти степеневого ряду, z_0 – довільне фіксоване комплексне число.

Питання про область збіжності степеневого ряду розв"язує теорема Коші – Адамара.

Нехай дано степеневий ряд (I) і нехай $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$

а) при $\lambda = 0$ ряд (I) збігається абсолютно в усій комплексній області;

б) при $\lambda = \pm\infty$ він збігається тільки в точці $z = z_0$ і розбігається в усіх інших точках;

в) при $0 < \lambda < +\infty$ ряд збігається абсолютно в крузі $|z - z_0| < \frac{1}{\lambda}$ і розбігається зовні цього круга.

Круг радіуса $R = \frac{1}{\lambda}$ з центром у точці z_0, в середині якого степеневий ряд (I) збігається абсолютно, а зовні розбігається, називається кругом збіжності степеневого ряду, а число $R = \frac{1}{\lambda}$ – радіусом збіжності.

Отже, кожний степеневий ряд має свій круг і радіус збіжності, що обчислюється за формулою

$$R = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \ .$$

В точках кола збіжності степеневий ряд може в одних точках збігатися, в інших розбігатися.

Структура області збіжності степеневого ряду визначається теоремою Абеля. Якщо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_o)^n$ збігається в точці $z_1 \neq z_0$, то він абсолютно збігається в крузі $|z - z_o| < |z_1 - z_o|$, причому збіжність буде рівномірною в кожному замкненому крузі, що цілком міститься всередині круга збіжності цього ряду.

Приклад I. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{2^n(n+1)} .$$

Загальний член ряду $\quad \omega_n = \dfrac{(z+2i)^n}{2^n(n+1)}$.

Тому

$$\left|\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}\right| = \frac{|z+2i|^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)} \frac{2^n(n+1)}{|z+2i|^n} =$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \frac{|z+2i|}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{w_{n+1}}{\omega_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{|z+2i|}{2} = \frac{|z+2i|}{2}$$

Ряд збігається в крузі.

Приклад 2. Знайти круг і радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+i)^n} (z-i)^n .$$

Загальний член ряду

$$\omega_n = \frac{1}{n^2(1+i)^n}(z-i)^n,$$

тому $\left|\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}\right| = \frac{|z-i|^{n+1}}{(n+1)^2|1+i|^{n+1}} \cdot \frac{n^2|1+i|^n}{|z-i|^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\left|\frac{z-i}{1+i}\right| \to \frac{|z-i|}{\sqrt{2}}$,

коли $n \to \infty$.

За ознакою Даламбера степеневий ряд збігатиметься, якщо

$$\frac{|z-i|}{\sqrt{2}} < 1 \qquad \text{або} \quad |z-i| < \sqrt{2},$$

тобто в середині круга радіуса $\sqrt{2}$ з центром в точці i.

Завдання I.

Знайти область збіжності рядів

I.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-i)^n z^n}$

I.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} z^n$

I.3. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$

I.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(z+1)^n}{\sqrt[n]{3n-1}}$

I.5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-2)^n}{(2n+1)4^n}$

I.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 z^n}{n!}$

I.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(1+2i)^n}{(4-3i)^n}(z-3+i)^n + \frac{n(1+i)^n}{(z-3+i)^n}\right)$

I.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,2^{-n}}{(z-2-i)^n}$

I.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}$

I.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}+in\right)(z+1+i)^n$

I.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{2^n}$

I.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n(z-2+i)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+in)(z-2+i)^n$

I.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(1-i)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}} (z-1)^n$

I.14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^n}{3^n(n+1)} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{(z+1-i)^n}$

I.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$

I.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n$

I.17. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{(n+1)(n+2)} (z+1)^n$

I.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$

I.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\cos in}$

I.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n(z+1)^n}$

I.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{(z-i)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$

I.22. $-\frac{i}{2(z-i)} + \frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(2i)^n}$

I.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{(z+1)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}$

I.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n^2 z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot 2^n}$

I.25. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot z^n$

I.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{(z+2i)^n}$

I.27. $\sum_{n=1}^{\infty} e^n (iz)^{-n}$

I.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (z-i)^n$

I.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n (z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$

I.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 z^n}{(2n)!}$

Узагальненням степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ упорядкованого за цілими невід"ємними степенями $z-z_0$ і ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{-n}$, упорядкованого за цілими недодатними степенями $z-z_0$, буде ряд виду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \tag{1}$$

що називається рядом Лорана. Числа a_n називаються коефіцієнтами ряду. Ряд Лорана треба розуміти як суму двох радів

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}; \tag{2}$$

перший з них називається правильною частиною ряду Лорана, другий – головною частиною цього ряду.

Ряд Лорана збіжний у точці z тоді і тільки тоді, коли в цій точці збігаються обидва ряди (2).

Припустивши, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ збігається в крузі $|z-z_0|<R$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ в області $|z-z_0|>R_1=\frac{1}{r}$ і якщо при цьому $R_1<R$, то ряд Лорана збігатиметься в області

$$R_1<|z-z_0|<R. \tag{3}$$

Область (3) є, взагалі кажучи, деяке кругове кільце, що може вироджитись в круг $|z-z_0|<R$ (при $R_1=0$ і $R<\infty$) з виключеною точкою $z=0$; в усю комплексну площину з виключеною точкою $z=z_0$ (при $R_1=0$ і $R=\infty$); у зовнішню частину круга $|z-z_0|\le R_1$ (при $R_1>0$ і $R=\infty$).

Отже, областю збіжності ряду Лорана (І) є кругове кільце, сума ряду – функція, аналітична в ньому.

Кожну функцію $f(z)$, однозначну і аналітичну в круговому кільці, можна подати в цьому кільці збіжним рядом Лорана

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k.$$

Коефіцієнти a_k цього ряду визначаються за формулою

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

де Γ_ρ – коло радіуса ρ з центром у точці z_0, $R_1<\rho<R$.

Розглянемо два різні розклади в ряд Лорана однієї і тієї ж функції:

I. $\frac{2}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{3(1-\frac{z}{3})} - \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^n}{3^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$, якщо $1<|z|<3$;

2. $\frac{2}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-\frac{3}{z})} - \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n-1}{z^{n+1}}$, коли $3<|z|<\infty$

Цей факт не суперечить теоремі про единість розкладу аналітичної функції в степеневий ряд, оскільки одержані розклади мають місце для різних кругових кілець.

Завдання 2.

Розвинути в ряд Лорана функції (в заданій області)

2.1. $z^4 \cos\frac{1}{z}$ $\qquad z=0$

2.2. $\frac{1+\cos z}{z^4}$ $\qquad z=0$

2.3. $\frac{1}{(z+2)(1+z^2)}$ $\qquad (1<|z|<4)$

2.4. $\frac{1}{z^2+2z-8}$ $\qquad (1<|z+2|<4)$

2.5. $\frac{z^2-z+3}{z^2-3z+2}$ $\qquad (|z|<1)$

2.6. $\frac{\sin z}{z^2}$ $\qquad z=0$

2.7. $\frac{e^z}{z^3}$, $\quad z=0$

2.8. $\frac{\sin^2 z}{z}$, $\quad z=0$

2.9. $\frac{e^z}{z-1}$, $\quad z=0$

2.10. $z^4 e^{\frac{1}{z}}$ $\quad z=0$

2.11. $\frac{1}{z}\sin^2\frac{1}{z}$, $\quad z=0$

2.12. $\frac{e^{2z}-1}{z}$, $\quad z=0$

2.13. $\frac{1-e^{-z}}{z^3}$, $\quad z=0$

2.14. $\frac{1}{z^2+z}$, $(0<|z|<1)$

2.15. $\frac{z+4}{z^2+3z+2}$, $(1<|z|<2)$

2.16. $\frac{4}{z^2-1}$, $(1<|z+2|<3)$

2.17. $\frac{1}{z^2+2z+8}$, $(1<|z+2|<4)$

2.18. $\frac{z+2}{z^2-4z+3}$, $(2<|z-1|<\infty)$

2.19. $\frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$, $(1<|z|<2)$

2.20. $\frac{1}{z^2+z}$, $(1<|z|<+\infty)$

2.21. $\frac{z^2-z+3}{z^2-3z+2}$, $(1<|z|<2)$

2.22. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$, $(3<|z|<+\infty)$

2.23. $\frac{1}{(z+2)(1+z^2)}$, $(4<|z|<\infty)$

2.24. $\frac{2z-3}{z^2-3z+2}$, $(0<|z-1|<1)$

2.25. $\frac{1}{(z^2-4)^2}$, $(4<|z+2|<+\infty)$

2.26. $\frac{2z+1}{z^2+z-2}$, $(1<|z|<2)$

2.27. $\frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$, $(2<|z|<+\infty)$

2.28. $e^{z+\frac{1}{z}}$, $(0<|z|<\infty)$

2.29. $\sin z\cdot\sin\frac{1}{z}$, $(0<|z|<\infty)$

2.30. $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $(1<|z|<2)$

Розділ УІ. ЛИШКИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Якщо функція $f(z)$ аналітична в кільці $0<|z-a|<\rho$, то точка a є або ізольованою особливою точкою однозначного характеру даної функції, або точкою аналітичності; сама ж функція зображається в кільці збіжним рядом Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-a)^n.$$

Інтегральним лишком однозначної аналітичної функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці a називається коефіцієнт при $\frac{1}{z-a}$ у її розкладі в ряд Лорана в околі цієї точки.

ІІ-4-575І

Якщо функція $f(z)$ аналітична в околі нескінченно віддаленої точки, то лишком її в цій точці називатимемо коефіцієнт при $\frac{1}{z}$ в її розкладі в ряд Лорана, але з протилежним знаком:

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -C_1 = -\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz .$$

Якщо a є усувна особлива точка функції $f(z)$, то в її лорановому розкладі коефіцієнти $a_n = 0$ для $n = -1, -2, \dots$ Тому лишок функції відносно усувної особливої точки дорівнює нулю. Цей результат ми дістали б, коли б обчислили лишок безпосередньо за формулою $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)dz$. Справді, якщо a – усувна особлива точка функції $f(z)$, то ця функція для $z \neq a$ дорівнює сумі степеневого ряду $\sum_0^{\infty} C_n(z-a)^n$. Нехай сума цього ряду $\varphi(z)$. Функція $\varphi(z)$ аналітична в крузі $|z-a| < R$, де R – радіус збіжності ряду, і за інтегральною теоремою Коші

$$\int_L f(z)dz = 0.$$

Оскільки $f(z) = \varphi(z)$, для $z \in L_\rho$, $\rho < R$, то

$$\int_{L_\rho} f(z)dz = \int_{L_\rho} \varphi(z)dz = 0.$$

Якщо a – полюс чи істотна особлива точка, то лишок функції $f(z)$ відносно такої точки, взагалі кажучи, відмінний від нуля і обчислювати його можна за формулою

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)dz .$$

У тому ж випадку, коли a – полюс, його можна знайти іншим способом.

Нехай a – простий полюс функції $f(z)$. Тоді розклад функції $f(z)$ в околі точки a матиме вигляд

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

звідси $$(z-a)f(z)=c_{-1}+(z-a)\sum_{0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

тому

$$\operatorname*{res}_{z=a}f(z)=c_{-1}=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Наприклад,

$$\operatorname*{res}_{z=1}\frac{2z}{(z-1)(3z+1)}=\lim_{z\to 1}\frac{2z}{3z+1}=\frac{1}{2}.$$

Лишок функції особливо просто обчислюється у випадку простого полюса, коли функція має вид частки двох функцій, аналітичних в околі точки a: $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причому

$$\varphi(a)\neq 0,\ \psi(a)=0,\ \psi'(a)\neq 0.$$

З того, що $\psi(a)=0,\ \psi'(a)\neq 0$, випливає, що a – простий нуль функції $\psi(z)$, а отже простий полюс функції $f(z)$ $(\varphi(a)\neq 0)$

Далі матимемо

$$\operatorname*{res}_{z=a}f(z)=\operatorname*{res}_{z=a}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=$$

$$= \lim_{z \to a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} .$$

Наприклад,

$$\operatorname*{res}_{z=0} ctg z = \operatorname*{res}_{z=0} \frac{\cos z}{\sin z} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{(\sin z)'} = 1$$

Якщо ж a – полюс порядка n , то лоранове розвинення функції в околі точки a $(z \neq a)$ матиме вигляд

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

звідки

$$(z-a)^n f(z) = c_{-n} + c_{-(n-1)}(z-a) + \dots +$$

$$+ c_{-1}(z-a)^{n-1} + (z-a)^n \sum_{0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Після $(n-1)$ – кратного диференціювання матимемо

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} = (n-1)! c_{-1} + \dots$$

Отже,

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-a)^n f(z) \right].$$

Наприклад,

$$\underset{z=1}{res}\frac{2z-1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{1!}\lim \frac{d}{dz}\left(\frac{2z-1}{z+2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{2(z+2)-(2z-1)}{(z+2)^2} = \frac{5}{9}.$$

В істотно особливій точці лишок функції знаходять, розкладаючи її в ряд Лорана та беручи коефіцієнт при $(z-a)^{-1}$.

Якщо $f(z)$ – аналітична функція в області $\mathcal{D}$ і L – кусково-гладкий контур, який цілком лежить в $\mathcal{D}$ і не містить в середині особливих точок, то за інтегральною теоремою Коші інтеграл від функції $f(z)$ по L дорівнює нулеві. Коли ж всередині L міститься скінченне число ізольованих особливих точок функції $f(z)$, то значення інтеграла обчислюватимемо згідно з основною теоремою про лишки.

Інтеграл від функції по контуру області, в якій вона аналітична, за винятком скінченної кількості ізольованих особливих точок, дорівнює добуткові $2\pi i$ на суму лишків в усіх цих особливих точках:

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=a_k}{Res} f(z).$$

Приклад. Обчислити інтеграл $J = \int\limits_{|z|=4}\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2}dz$.

Розв"язування.

Функція $f(z)=\frac{1}{z-2}e^{1/z-1}$ має в крузі дві особливі точки: $z=1$ і $z=2$.

Отже, $\mathcal{J} = 2\pi i \left(\underset{z=1}{\operatorname{res}} f(z) + \underset{z=2}{\operatorname{res}} f(z) \right)$.

Оскільки

$$e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n}, \quad \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} =$$

$$= -\sum_{0}^{\infty} (z-1)^n,$$

то $\underset{z=1}{\operatorname{res}} f(z) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!} = -(e-1) = 1-e$

$$\underset{z=2}{\operatorname{res}} f(z) = e^{\frac{1}{z-1}} \Big|_{z=2} = e \qquad \mathcal{J} = 2\pi i.$$

Значення теореми про лишки в тому, що вона приводить обчислення величин диференціальних лишків $f(z)$ в її особливих точках. Останні обчислюються значно простіше, особливо для полюсів.

Завдання I.

Знайти особливі точки, визначивши їх характер.

I.I. $\frac{1}{1-\sin z}$

I.2. $\frac{z^2}{\cos z-1}$

I.3. $\frac{1-\sin z}{\cos z}$

I.4. $\frac{z-\pi}{\sin^2 z}$

I.5. $\frac{1}{\cos z-\frac{1}{2}}$

I.6. $z^2 \sin\frac{1}{z}$

I.7. $(z-1)\cos\frac{1}{(z-1)^2}$

I.8. $tg^2 2z$

I.9. $\frac{1}{z^3(z^2+4)^2}$

I.10. $z^2 e^{\frac{1}{z}}$

I.11. $\frac{1}{z-\sin z}$

I.12. $\frac{1}{\cos z-1+\frac{z^2}{2}}$

I.13. $\frac{1}{e^{-z}+z-1}$

I.14. $\frac{2z+3}{(z+1)^3(z^2-3z+2)^2}$

I.15. $\frac{\sin z-3\cos^2 z}{z(z^2+9)^2}$

I.16. $\frac{1}{z}e^{\frac{z+1}{z}}$

I.17. $\frac{1+\cos\pi z}{(3z^2+z-2)^2}$

I.18. $\frac{1}{2+z^2-2\,ch\,z}$

I.19. $\frac{1-\cos z}{z^2}$

I.20. $e^{\frac{1}{z+2}}$

I.21. $\cos\frac{1}{z}$

1.22. $\frac{\operatorname{sh} z}{z-\operatorname{sh} z}$

1.23. $\frac{1}{e^{-z}-1}$

1.24. $\frac{z}{z^6+2z^5+z^4}$

1.25. $\frac{z^2}{\cos z-1}$

1.26. $\frac{1-\sin z}{\cos z}$

1.27. $\sin\frac{\pi}{z+1}$

1.28. $e^{-\frac{1}{z^2}}$

1.29. $\operatorname{ch}\frac{1}{z}$

1.30. $\frac{1}{z^3(2-\cos z)}$

Завдання 2.

Обчислити лишки.

2.1. $f(z)=\frac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\sin z}$

2.2. $f(z)=\frac{\sin z^2}{(z^3-\frac{\pi}{4}z^2)}$

2.3. $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}$

2.4. $f(z)=\cos\frac{1}{z}+z^3$

2.5. $f(z)=\frac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}$

2.6. $f(z)=\dfrac{e^{z}}{(z+1)^{3}(z-2)}$

2.7. $f(z)=e^{\frac{z^{2}+1}{z}}$

2.8. $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^{3}(z+2)^{2}}$

2.9. $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+i)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2}}$

2.10. $f(z)=e^{z^{2}+\frac{1}{z^{2}}}$

2.11. $f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}$

2.12. $f(z)=z^{3}e^{\frac{1}{z}}$

2.13. $f(z)=e^{\frac{1}{z^{2}}}\cos z$, $\operatorname{res} f(0)$-?

2.14. $f(z)=\dfrac{z^{2}}{\operatorname{ch} z-1-\frac{z^{2}}{2}}$, $\operatorname{res} f(0)$-?

2.15. $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$

2.16. $f(z)=z^{2}\sin\dfrac{1}{z+1}$

2.17. $f(z)=\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^{2}-\frac{\pi}{4}z}$

2.18. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z-i}$

2.19. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^{2}-1)(z+3)}$

2.20. $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^{3}(z-3)}$

2.21. $f(z)=\dfrac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{1+z^4}$

2.22. $f(z)=\dfrac{e^{z}}{z^2(z-1)}$

2.23. $f(z)=\dfrac{ch\,z}{(z^2+1)(z-3)}$

2.24. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$

2.25. $f(z)=\dfrac{(1-ch\,z)\,sh\,z}{(1-\cos z)\sin^2 z}$, $res f(0)$ - ?

2.26. $f(z)=z^3\sin\frac{1}{z^2}$

2.27. $f(z)=\dfrac{\sin 2z-2z}{(1-\cos z)^2}$, $res f(0)$ - ?

2.28. $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$

2.29. $f(z)=\dfrac{\sin 3z-3\sin z}{(\sin z-z)\sin z}$, $res f(0)$ - ?

2.30. $f(z)=e^{z}\sin\frac{1}{z^2}$

Завдання 3.

З допомогою лишків обчислити (контурні) інтеграли.

3.1. $\int\limits_C \dfrac{e^{z}dz}{z^2(z^2-9)}$, $C:\ |z|=1$

3.2. $\int\limits_C \dfrac{\sin z}{(z+1)^3}dz$, $C:\ |z|=2$

3.3. $\int\limits_C z^2\sin\frac{1}{z}dz$, $C:\ |z|=\frac{1}{2}$

3.4. $\int\limits_C (z+1)e^{\frac{1}{z}}dz$, $C:\ |z|=\frac{1}{3}$

3.5. $\int\limits_C \frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}\,dz$ $\quad C:\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

3.6. $\int\limits_C \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}\,dz$ $\quad C:\ |z-i|=3$

3.7. $\int\limits_C \frac{dz}{z^5+z^3}$, $\quad C:\ |z|=3$

3.8. $\int\limits_C \frac{z\,dz}{1-\cos z}$, $\quad C:\ |z|=5$

3.9. $\int\limits_C \frac{e^z}{z^3(z^2-1)}\,dz$, $\quad C:\ |z|=3$

3.10. $\int\limits_C \left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz$, $C:\ |z|=\frac{1}{3}$

3.11. $\int\limits_C z^n e^{\frac{1}{3z}}$, $\quad C:\ |z|=4$

3.12. $\int\limits_C \frac{z+1}{z^2+2z-3}\,dz$, $\quad C.\ x^2+y^2=16$

3.13. $\int\limits_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, $\quad C:\ |z|=4$

3.14. $\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3}$, $\quad C.\ |z|=1{,}5$

3.15. $\int\limits_C \frac{dz}{z^5+z^3}$, $\quad C:\ |z|=2$

3.16. $\int\limits_C \frac{dz}{1+z^4}$, $\quad C.\ |z+1|=1$

3.17. $\int\limits_C \frac{dz}{1+z^4}$, $\quad C;\ x^2+y^2=2x$

3.18. $\int\limits_C \frac{\sin\pi z}{z^2-z}\,dz$, $\quad C:\ |z|=\sqrt{2}$

3.19. $\int\limits_C \frac{z\,dz}{(z-1)^2(z+2)}$, $\quad C.\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$

13*

3.20. $\oint\limits_C \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\,dz$, $\quad C: |z|=2$

3.21. $\oint\limits_C \operatorname{tg} z\,dz$, $\quad C: |z|=2$

3.22. $\oint\limits_C \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}\,dz$, $\quad C: \frac{x^2}{4}+y^2=1$

3.23. $\oint\limits_C \frac{e^z\,dz}{z^2(z^2-9)}$, $\quad C: |z|=4$

3.24. $\oint\limits_C \frac{z^3\,dz}{1+2z^4}$, $\quad C: |z|=\frac{1}{2}$

3.25. $\oint\limits_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, $\quad C: |z-2|=\frac{1}{2}$

3.26. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$, $\quad C: |z|=2$

3.27. $\oint\limits_C \frac{\operatorname{tg} z}{z-1}\,dz$, $\quad C$. ромб з вершинами: $z_1=2,\ z_2=i,\ z_3=-2,\ z_4=-i$

3.28. $\oint\limits_C \frac{\cos\frac{\pi}{2}z}{(z-1)(z+3)^2}\,dz$, $\quad C: |z-1|=5$

3.29. $\oint\limits_C \frac{\sin z}{z^2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}\,dz$, $\quad C: |z+i|=\frac{3}{2}$

3.30. $\oint\limits_C \frac{z\,e^{2z}\,dz}{z^4+8z^2-9}$, $\quad C: |z+i\sqrt{2}|=2$

Розділ VII. КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Нехай $\mathcal{D}$ – деяка однозв"язна область (множина) точок комплексної площини Z ($z=x+iy$ або $z=\rho e^{i\varphi}$, де $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$, $\rho=|z|$, $\varphi=\arg z$), на якій визначена аналітична функція $w=f(z)$ ($w=u+iv$ або $w=\gamma e^{i\theta}$, де $u=\operatorname{Re} w$, $v=\operatorname{Im} z$, $\gamma=|w|$, $\theta=\arg w$), тобто існує $f'(z)$ для всіх $z\in\mathcal{D}$

Функція $w = f(z)$ відображає область $\mathcal{D}$ на деяку область $\mathcal{D}_1$, розміщену на комплексній w – площині.

Відображення може бути однозначним і багатозначним. Якщо $w_1 = f(z_1)$; $w_2 = f(z_2)$ і для будь-яких $z_1 \neq z_2$ з області $\mathcal{D}$ має місце нерівність $w_1 \neq w_2$, то функцію $w = f(z)$ називають однолистою і вона виконує взаємно однозначне відображення областей $\mathcal{D}$ і $\mathcal{D}_1$.

Наприклад:

I) $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ однолиста в будь-якій області $\mathcal{D}$, якщо $ad - bc \neq 0$. Дійсно, маємо

$$w_2 - w_1 = \frac{(ad-bc)(z_2 - z_1)}{(cz_1+d)(cz_2+d)} .$$

Звідки очевидно $w_2 \neq w_1$, якщо $z_2 \neq z_1$.

2) $w = z^2$.

$$w_2 - w_1 = (z_2 - z_1)(z_2 + z_1) .$$

Ця функція однолиста в будь-якій області $\mathcal{D}$, що не містить точок $z_2 = -z_1$.

Якщо $w = f(z)$ однолиста в області $\mathcal{D}$, то вона відображає цю область на $\mathcal{D}_1$ з таким же порядком зв"язності, тобто границі $\mathcal{D}$ і $\mathcal{D}_1$ складаються з однакової кількості ліній, які їх обмежують.

Відображення аналітичними однолистими в області $\mathcal{D}$ функціями звуться конформними. Це означає:

I) постійність лінійного масштабу відображення в кожній фіксованій точці області $\mathcal{D}$;

2) рівність кутів і їх орієнтація, тобто, якщо криві ℓ_1 і ℓ_2 в $\mathcal{D}$ виходять з точки z_0 і утворюють додатний чи від"ємний кут α,

то їх образи L_1 і L_2 при відображенні виходять з точки $W_0 = f(z_0)$ в $\mathcal{D}_1$ і кут між ними теж α. Ця властивість може не мати місця хіба що в тих точках, де $f'(z) = 0$.

Приклад I.

За допомогою функції $W = 2z + 1$ знайти відображення кола $x^2 + y^2 = 1$ (це область $\mathcal{D}$) на площину W.

Розв"язування: $z = x + iy$.

Тоді $W = 2(x + iy) + 1 = (2x + 1) + 2yi$.

$$\begin{cases} u = 2x + 1 \\ v = 2y \end{cases}$$

Із системи знаходимо

$$x = \frac{u-1}{2}, \quad y = \frac{v}{2}.$$

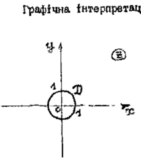
Підставимо в рівняння кола ($\mathcal{D}$):

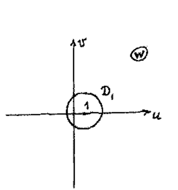
$$\left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 = 1.$$

Звідси отримуємо область $\mathcal{D}_1$ (коло):

$$(u-1)^2 + v^2 = 4.$$

Графічна інтерпретація:





Приклад 2.

Знайти відображення області $\mathcal{D}$: $y > x+1$ функцією
$$W = \frac{z+1}{z-1}.$$

Розв"язування:

Спочатку знайдемо образ лінії $y = x+1$. За цієї умови

$$W = 1 + \frac{2}{z-1} = 1 + \frac{2}{x+iy-1} = 1 + \frac{2}{(x-1)+i(x+1)} =$$

$$= 1 + 2\frac{(x-1)-i(x+1)}{(x-1)^2+(x+1)^2} = 1 + \frac{(x-1)-i(x+1)}{x^2+1},$$

звідки

$$W - 1 = \frac{x-1}{x^2+1} - i\,\frac{x+1}{x^2+1}.$$

Якщо $W = u + iv$, *то маємо*

$$\begin{cases} u - 1 = \dfrac{x-1}{x^2+1}, \\ v = -\dfrac{x+1}{x^2+1}. \end{cases}$$

Для знаходження канонічного рівняння цієї лінії виключимо з системи x . Спочатку розділимо рівності:

$$\frac{u-1}{v} = \frac{1-x}{x+1},$$

звідки

$$x = \frac{v-u+1}{v+u-1}.$$

14^x

Підставимо x в друге рівняння системи:

$$v = -\frac{\frac{v-u+1}{v+u-1}+1}{\left(\frac{v-u+1}{v+u-1}\right)^2+1} = -\frac{2v(v+u-1)}{(v-u+1)^2+(v+u-1)^2},$$

$v \neq 0$. Тоді $(v-u+1)^2+(v+u-1)^2 = 2(1-u-v)$,

$$2u^2+2v^2+\cancel{2}-4u = \cancel{2}-2u-2v,$$

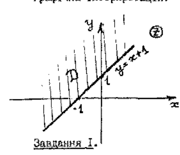
$$u^2+v^2-u+v=0.$$

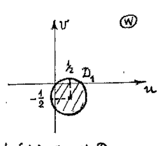
Маємо коло з центром $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ і радіусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Залишилось з"ясувати: $\mathcal{D}_1$ всередині кола чи зовні. Для цього візьмемо точку $z=-2 \in \mathcal{D}$. Тоді $W=f(-2)=\frac{-2+1}{-2-1}=\frac{1}{3}$ – в середині кола. $\mathcal{D}_1$ – круг на площині W.

Графічна інтерпретація:





Завдання I.

Знайти відображення функцією $W=f(z)$ області $\mathcal{D}$, заданої в комплексній площині z, на області $\mathcal{D}_1$ в комплексній площині W та дати графічну інтерпретацію.

I.1. $W=\frac{1}{z}$, $\mathcal{D}: \begin{cases} x^2+y^2<2y, \\ y>x, \end{cases}$

I.2. $W=\frac{2z+1}{z+2}$, $\mathcal{D}: \begin{cases} |z|<1, \\ y>0. \end{cases}$

I.3. $W=e^{2z}$, $\mathcal{D}: \begin{cases} 0<y<\pi/2, \\ x>0. \end{cases}$

I.4. $W = z^2$, $\mathcal{D}: \begin{cases} |z| > 1/2, \\ \operatorname{Re} z > 0. \end{cases}$

I.5. $W = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $\mathcal{D}: \begin{cases} |z| = 1, \\ \operatorname{Im} z > 0. \end{cases}$

I.6. $W = z^3$, $\mathcal{D}: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 < \arg z < \pi/6. \end{cases}$

I.7. $W = \frac{z-1}{2z-6}$, $\mathcal{D}: \ |z-1| < 2.$

I.8. $W = e^{iz}$, $\mathcal{D}: \begin{cases} 0 < x < \pi, \\ y > 0. \end{cases}$

I.9. $W = \frac{1}{z}$, $\mathcal{D}: \begin{cases} x^2 + y^2 < x, \\ y > \frac{1}{2}x. \end{cases}$

I.10. $W = \frac{z+1}{z-2}$, $\mathcal{D}: \ |z-1| < 2.$

I.11. $W = z^2$, $\mathcal{D}: \begin{cases} y \leq x, \\ 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$

I.12. $W = \ln z$, $\mathcal{D}: \ y > 0.$

I.13. $W = 4 + 2iz$, $\mathcal{D}: |z - i| < 1.$

I.14. $W = \frac{2}{z-1}$, $\mathcal{D}: \ 1 < |z| < 2.$

I.15. $W = e^z$, $\mathcal{D}: -\pi < y < 0.$

I.16. $W = z^2$, $\mathcal{D}: \begin{cases} |z| < 2, \\ 0 < \arg z < \pi/2. \end{cases}$

I.17. $W = \frac{1}{z}$, $\mathcal{D}: \begin{cases} |z - i| > 1, \\ \operatorname{Im} z > 0. \end{cases}$

I.18. $W = \frac{1-z}{1+z}$, $\mathcal{D}: \begin{cases} |z| < 1, \\ \operatorname{Im} z > 0. \end{cases}$

I.19. $W = z^4$, $\quad D: \begin{cases} |z| \geq 2, \\ \pi/8 \leq \arg z \leq \pi/4. \end{cases}$

I.20. $W = 3z - 1$, $\quad D: \; x^2 + y^2 \geq 4.$

I.21. $W = \operatorname{ctg} z$, $\quad D: \; 0 < x < \pi/4.$

I.22. $W = e^z$, $\quad D: \; 0 < y < \pi/2.$

I.23. $W = \frac{i - z}{i + z}$, $\quad D: \begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$

I.24. $W = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $\quad D: \begin{cases} |z| < 1, \\ 0 < \arg z < \pi/2. \end{cases}$

I.25. $W = z^2$, $\quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq 2, \\ y \geq x. \end{cases}$

I.26. $W = \cos z$, $\quad D: \; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi/2.$

I.27. $W = \frac{1}{z}$, $\quad D: \begin{cases} |z - 1| < 1, \\ y > x. \end{cases}$

I.28. $W = \frac{2iz}{z + 3}$, $\quad D: \; |z - 1| < 2.$

I.29. $W = \ln z$, $\quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ y > 0. \end{cases}$

I.30. $W = \frac{1}{z + i}$, $\quad D: \; y \geq 0.$

Задача знаходження функції, що відображає область D на D_1, яку можна вважати кругом $|z| < 1$, є важкою. Тому в нашому короткому курсі ми зупинилися на більш простих задачах.

Основна ідея перетворення Лапласа полягає в тому, що між функцією дійсної змінної $f(t)$ та функцією комплексної змінної $F(p)$ $(p = s \pm i\sigma)$ встановлюється відповідність, яка дозволяє дії диференціювання та інтегрування над $f(t)$ замінити алгебраїчними діями над $F(p)$. Відповідність між $f(t)$ та $F(p)$ визначається за формулою

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \tag{1}$$

та позначається

$$f(t) \doteqdot F(p), \quad f(t) \xrightarrow{L} F(p).$$

Перехід від функції $f(t)$ до $F(p)$ за формулою (1) називається <u>перетворенням Лапласа</u>. Для того щоб невласний інтеграл у формулі (1) збігався, достатньо, щоб виконувались умови:

1) інтегрованість $f(t)$ на довільному скінченному інтервалі осі t ;

2) $|f(t)| < M e^{s_0 t}$, де M і s_0 – деякі сталі, причому $s_0 \geq 0$, $s > s_0$ $(Re\, p = s > s_0)$, тобто $|f(t)|$ зростає при $t \to +\infty$ не швидше показникової функції;

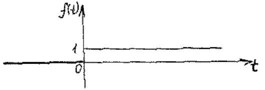
3) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

Функція $f(t)$, яка задовольняє наведеним трьом умовам, називається <u>оригіналом</u>. Функція $F(p)$, визначена формулою(1), називається <u>зображенням</u> оригіналу $f(t)$.

Наведемо приклади функцій – оригіналів:

а) одинична функція Хевісайда

$$1(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\geq 0,\end{cases}$$



Зауваження. Умова 3) існування оригінала не істотня. Якщо помножити довільну функцію $f(t)$, яка задовольняє умови I), 2), але не задовольняє 3), на функцію $1(t)$, отримується в добутку функція $f(t)\cdot 1(t)$, для якої має місце і третя умова. Тому надалі вважаємо, що умова 3) виконується;

б) $f(t)=t^n\cdot 1(t)$; в) $f(t)=e^{-\alpha t}1(t),\ \alpha>0$

§ 1. Приклади знаходження зображення оригіналів:

I. $f(t)=1(t)$.

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Big|_0^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-bt}\right)+\frac{1}{p}=\frac{1}{p},\quad (Re\,p>0)$$

2. $f(t)=e^{-\alpha t}$.

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}e^{-\alpha t}dt=\int_0^\infty e^{-(\alpha+p)t}dt=$$

$$=-\frac{1}{\alpha+p}e^{-(\alpha+p)t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{p+\alpha},\quad (Re\,p>-Re\,\alpha)$$

Таблиця деяких оригіналів та їх зображень

	Оригінали	Зображення
I.	$1(t)$	$\frac{1}{p}$

2.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3.	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
4.	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
5.	$\cos \alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$
6.	$sh\, \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
7.	$ch\, \alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$

<u>Основні властивості перетворення Лапласа</u>

I. <u>Властивість лінійності</u>. Для довільних комплексних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \ldots + C_n f_n(t) \doteqdot C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p) + \ldots + C_n F_n(p)$$

<u>Приклади</u>. <u>Знайдемо зображення</u>:

1. $1+t \doteqdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} = \frac{p+1}{p^2}$.
2. $2\sin t + \frac{1}{2} e^{-t} \doteqdot 2 \cdot \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+1}$

2. <u>Теорема подібності</u>. Для довільного сталого $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

<u>Приклад</u>. Знайдемо зображення

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t \doteqdot \frac{1}{2p} -$$
$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{p/2}{(p/2)^2+1} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2} \frac{p}{p^2+4} = \frac{2}{p(p^2+4)}$$

3. Теорема зсуву. Для довільного комплексного α

$$f(\alpha t)e^{-\alpha t} \doteq F(p+\alpha).$$

Приклади. Знайдемо зображення

1. $e^{2t}\sin t \doteq \frac{1}{(p-2)^2+1}$, $\quad (\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1})$

2. $e^{-2t}\cos 3t \doteq \frac{p+2}{(p+2)^2+9}$, $\quad (\cos 3t \doteq \frac{p}{p^2+9})$.

4. Теорема запізнення. Якщо $t_0 > 0$, тоді

$$f(t-t_0)\cdot 1(t-t_0) \doteq e^{-pt_0}F(p).$$

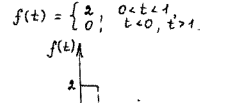
Приклади. Знайдемо зображення

1. $1(t-a)$, $a>0$

$F(p) = \frac{e^{-ap}}{p}$, $\quad (1(t) \doteq \frac{1}{p})$.

2. $e^{t-2}\cdot 1(t-2) \doteq \frac{e^{-2p}}{p-1}$, $\quad (e^{t} \doteq \frac{1}{p-1})$.

3. $f(t) = \begin{cases} 2; & 0<t<1, \\ 0; & t<0,\ t>1. \end{cases}$



За допомогою одиничної функції Хевісайда $f(t)$ можна записати так:

$$f(t) = 2\cdot 1(t) - 2\cdot 1(t-1).$$

Тому $F(p) = \frac{2}{p} - \frac{2e^{-p}}{p} = \frac{2}{p}\left(1-e^{-p}\right).$

5. Диференціювання оригіналу

Якщо функції $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ є функціями-оригіналами, тоді

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0),$$
$$f''(t) \doteqdot p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

де $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Приклади. Знайдемо зображення

1. $f(t) = \cos^2 \alpha t.$

Нехай $f(t) \doteqdot F(p)$.

Тоді $f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0)$.

Але $f(0) = 1$, $f'(t) = -2\alpha\cos\alpha t\cdot\sin\alpha t =$

$$= -\alpha\sin 2\alpha t \doteqdot -\alpha\frac{2\alpha}{p^2+(2\alpha)^2}.$$

Тому $-\frac{2\alpha^2}{p^2+4\alpha^2} = pF(p) - 1$, звідки

$$F(p) = \frac{p^2+2\alpha^2}{p^2+4\alpha^2}.$$

2. $f(t) = te^t$.

Нехай $f(t) \doteqdot F(p)$.

$$f'(t) = e^t + te^t \doteqdot \frac{1}{p-1} + F(p) = pF(p),$$

Оскільки $f(0) = 0$, $e^t \doteqdot \frac{1}{p-1}$.

Остаточно $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2}$.

6. Диференціювання зображення.

$$F'(p) \doteqdot -t \cdot f(t),$$
$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-t)^n f(t), \quad Re\, p > s_0$$

Приклади. Знайдемо зображення

1. $f(t) = t \sin 2t$.

Оскільки $\sin 2t \doteqdot \frac{2}{p^2+4}$, тому

$$t \sin 2t \doteqdot -\frac{(-2 \cdot 2p)}{(p^2+4)^2} = \frac{4p}{(p^2+4)^2}.$$

2. $f(t) = (t+1)\,ch\,3t$.

$$(t+1)\,ch\,3t = t\,ch\,3t + ch\,3t \doteqdot -\left(\frac{p}{p^2-9}\right)' + \frac{p}{p^2-9} =$$
$$= -\frac{p^2-9-2p^2}{(p^2-9)^2} + \frac{p}{p^2-9} = \frac{p^2+9}{(p^2-9)^2} + \frac{p}{p^2-9} =$$
$$= \frac{p^3+p^2-9p+9}{(p^2-9)^2}.$$

7. Інтегрування оригіналу.

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}, \quad Re\, p > s_0$$

Приклади. Знайдемо зображення

1. $f(t)=\int\limits_0^t \sin\tau\, d\tau.$

Маємо $\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}$. Тоді за теоремою про інтегрування оригіналу

$$\int\limits_0^t \sin\tau\, d\tau \doteqdot \frac{1}{p(p^2+1)}.$$

2. $f(t)=\int\limits_0^t e^{-\tau}\tau^2 d\tau.$

За теоремою зсуву $e^{-t}t^2 \doteqdot \frac{2}{(p+1)^3}$, $\left(t^2 \doteqdot \frac{2!}{p^3}\right)$.

Далі $\int\limits_0^t e^{-\tau}\tau^2 d\tau \doteqdot \frac{2}{p(p+1)^3}$.

8. Інтегрування зображення

Якщо $\frac{f(t)}{t}$ є оригіналом, тоді

$$\int\limits_p^\infty F(p)\,dp \doteqdot \frac{f(t)}{t}.$$

Приклади. Знайдемо зображення

1. $f(t)=\frac{e^t-1}{t}.$

Як відомо $e^t-1 \doteqdot \frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}$. Тому

$$\frac{e^t-1}{t} \doteqdot \int\limits_p^\infty \left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)dp = \ln\left|\frac{p-1}{p}\right|\Bigg|_p^\infty = \ln\frac{p}{p-1}$$

2. $f(t)=\frac{\sin t}{t}.$

Оскільки $\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}$, тоді $\frac{\sin t}{t} \doteqdot \int\limits_p^{\infty} \frac{dp}{p^2+1} =$

$$= \operatorname{arctg} p \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

9. Теорема множення зображень (теорема про згортку).

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \doteqdot \int\limits_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau. \qquad (2)$$

Інтеграл в (2) називається згорткою функцій $f_1(t)$ та $f_2(t)$ та позначається символом $f_1 * f_2$.

Приклади. Знайдемо зображення:

1. $f(t) = \int\limits_0^t e^{t-\tau} \sin\tau\, d\tau$.

Функція $f(t)$ є згортка функцій $f_1(t) = e^t$ та $f_2(t) = \sin t$.
За теоремою множення

$$f(t) \doteqdot F_1(p) \cdot F_2(p) = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p^2+1}.$$

2. $f(t) = \int\limits_0^t \cos(t-\tau) e^{2\tau}\, d\tau$.

$$f(t) = \cos t * e^{2t} \doteqdot \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p-2}.$$

Завдання I. Знайти зображення наступних функцій

I.1. $f(t) = t^2 \cos 2t$. I.2. $f(t) = (t+1) \sin 2t$.

I.3. $f(t) = t^2 \sin 3t$. I.4. $f(t) = t(e^{-t} + \operatorname{ch} t)$

I.5. $f(t) = \int\limits_0^t e^{\tau} \tau^4\, d\tau$. I.6. $f(t) = e^{-t} \cos 2t$.

I.7. $f(t) = e^t \sin^2 t$. I.8. $f(t) = t \sin 2t\, \operatorname{sh} 3t$.

1.9. $f(t)=t\cdot\cos t\cdot ch\,2t$

1.10. $f(t)=\dfrac{e^{-t}\sin 3t}{t}$.

1.11. $f(t)=\dfrac{sh^2 2t}{t}$.

1.12. $f(t)=\dfrac{\sin t\cdot\sin 3t}{t}$.

1.13. $f(t)=\dfrac{sh\,3t}{t}$.

1.14. $f(t)=\dfrac{\cos 2t-\cos 4t}{t}$.

1.15. $f(t)=\dfrac{1-\cos t}{t}\cdot e^{t}$.

1.16. $f(t)=\dfrac{e^{t}\sin^2 2t}{t}$.

1.17. $f(t)=\int\limits_0^t \tau\, sh\,2\tau\, d\tau$.

1.18. $f(t)=\int\limits_0^t (\tau+1)\cos 3\tau\, d\tau$.

1.19. $f(t)=\int\limits_0^t \tau^3 e^{-2\tau} d\tau$.

1.20. $f(t)=\int\limits_0^t \dfrac{\sin 2\tau}{\tau}\, d\tau$.

1.21. $f(t)=\sin t\cdot\cos 2t$.

1.22. $f(t)=\cos t\cdot\cos 4t$.

1.23. $f(t)=e^{-t}\sin 2t\cdot\sin 4t$.

1.24. $f(t)=\int\limits_0^t e^{-3\tau} ch\,2\tau\, d\tau$.

1.25. $f(t)=ch\,t\cdot\cos 2t$.

1.26. $f(t)=t\cdot sh\,2t$.

1.27. $f(t)=\dfrac{e^{t}-t-1}{t}$.

1.28. $f(t)=\int\limits_0^t \cos^2 2\tau\, d\tau$.

1.29. $f(t)=\sin^3 t$.

1.30. $f(t)=\cos^4 t$.

§ 2. ЗНАХОДЖЕННЯ ОРИГІНАЛУ ЗА ЙОГО ЗОБРАЖЕННЯМ

Для знаходження оригіналу $f(t)$ за відомим зображенням $F(p)$ частіше використовують наступні методи.

1. Якщо $F(p)$ є правильний раціональний дріб, тоді його розкладають на суму простих дробів та знаходять оригінали для кожного простого дробу, використовуючи властивості 1-9 перетворення Лапласа.

2. Використовують формулу розкладу, згідно з якою при деяких достатньо загальних умовах оригіналом для $F(p)$ є функція

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} \underset{p_k}{\operatorname{res}} \left(F(p)e^{pt}\right), \tag{3}$$

де сума лишків береться по всіх особливих точках p_k функції $F(p)$.

3. У випадку простих полюсів p_k, $k=\overline{1,n}$ для зображення $F(p)=F_1(p)/F_2(p)$ оригінал $f(t)$ можна знайти за формулою

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}\, e^{p_k t}. \tag{4}$$

Приклади.

I. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$.

Розкладаємо $F(p)$ в суму простих дробів

$$\frac{1}{p^2+4p+3}=\frac{1}{(p+1)(p+3)}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p+3}.$$

Знаходимо коефіцієнти A та B:

$$A=\left[\frac{1}{(p+1)(p+3)}\cdot(p+1)\right]_{p=-1}=\frac{1}{2},$$

$$B=\left[\frac{1}{(p+1)(p+3)}\cdot(p+3)\right]_{p=-3}=-\frac{1}{2}.$$

Тоді

$$F(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+3}.$$

Використовуючи властивість лінійності, знаходимо:

$$f(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}.$$

2. $$F(p)=\frac{1}{p^2+4p+5}.$$

Виділяємо в знаменнику повний квадрат:

$$\frac{1}{p^2+4p+5}=\frac{1}{(p+2)^2+1}.$$

Застосовуючи теорему зсуву, маємо

$$f(t)=e^{-2t}\sin t.$$

3. $$F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}.$$

Розкладаємо на елементарні дроби:

$$F(p)=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p-2}+\frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Методом невизначених коефіцієнтів знаходимо A, B, C, D:

$$A=-\frac{1}{15},\quad B=\frac{1}{6},\quad C=-\frac{1}{10},\quad D=-\frac{2}{5}.$$

Тому $F(p)=-\frac{1}{15}\frac{1}{p+1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{10}\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{5}\frac{2}{p^2+4}$.

А, отже,

$$f(t)=-\frac{1}{15}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{10}\cos 2t-\frac{1}{5}\sin 2t$$

4. $$F(p)=\frac{1}{(p-1)^2(p+2)}.$$

Функція $F(p)$ має полюси $p_1=1$, $p_2=-2$, причому p_1 – полюс другого порядку, p_2 – простий полюс.

За формулою (3)

$$f(t)=\underset{1}{\mathrm{res}}\frac{e^{pt}}{(p-1)^2(p+2)}+\underset{-2}{\mathrm{res}}\frac{e^{pt}}{(p-1)^2(p+2)}=$$

$$=\lim_{p\to 1}\left(\frac{e^{pt}}{p+2}\right)'_p+\lim_{p\to -2}\frac{e^{pt}}{(p-1)^2}=$$

$$=\lim_{p\to 1}\frac{te^{pt}(p+2)-e^{pt}}{(p+2)^2}+\lim_{p\to -2}\frac{e^{pt}}{(p-1)^2}=$$

$$=\frac{e^t}{9}(3t-1)+\frac{e^{-2t}}{9}=\frac{1}{9}\left(3te^t+e^{-2t}-e^t\right).$$

5. $$F(p)=\frac{p-1}{(p+1)(p-2)}.$$

Функція $F(p)$ має прості полюси $p_1=-1$, $p_2=2$.

Позначимо $F(p)=p-1$, $F_2(p)=(p+1)(p-2)$. Тоді $F_2'(p)=2p-1$. Згідно з /4/

$$f(t)=\frac{F_1(-1)}{F_2'(-1)}e^{-t}+\frac{F_1(2)}{F_2'(2)}e^{2t}=$$

$$=\frac{-2}{-3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}=\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}.$$

6. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

Наявність множника e^{-p} вказує на необхідність застосування теореми запізнення. Тут $t_0=1$, $\frac{1}{p(p-1)}=-\frac{1}{p}+\frac{1}{p-1}\risingdotseq$ $\risingdotseq e^t-1$. Тому

$$\frac{e^{-p}}{p(p-1)}\risingdotseq(e^{t-1}-1)\cdot 1(t-1).$$

<u>Завдання 2.</u> Знайти оригінали за заданим зображенням.

2.1. $\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$ 2.2. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$

2.3. $\dfrac{6}{p^3-8}$ 2.4. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$

2.5. $\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$ 2.6. $\dfrac{4}{p^3+8}$

2.7. $\dfrac{p+4}{p^2+4p+3}$ 2.8. $\dfrac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$

2.9. $\dfrac{1}{p^3+p^2+p}$ 2.10. $\dfrac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}$

2.11. $\dfrac{1}{p^3(p^2-4)}$

2.12. $\dfrac{1}{p^3-1}$

2.13. $\dfrac{6p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$

2.14. $\dfrac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}$

2.15. $\dfrac{1-p}{p(p^2+3p+3)}$

2.16. $\dfrac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}$

2.17. $\dfrac{2-p}{p^3-2p^2+5p}$

2.18. $\dfrac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}$

2.19. $\dfrac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}$

2.20. $\dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$

2.21. $\dfrac{p-2}{p^2-4p+13}$

2.22. $\dfrac{2-p}{p^2-2p+5}$

2.23. $\dfrac{1}{(p-1)(p^2-4)}$

2.24 $\dfrac{p+3}{p(p^2-4p+3)}$

2.25. $\dfrac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$

2.26. $\dfrac{p+2}{p^2(p^2+5p+4)}$

2.27. $\dfrac{p^2+2p+2}{2p^2(p+1)}$

2.28. $\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$

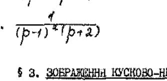
2.29. $\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$

2.30. $\dfrac{p+4}{p^3+1}$

§ 3. ЗОБРАЖЕННЯ КУСКОВО-НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ

Розглянемо деякі приклади.

I. Знайдемо зображення прямокутного імпульсу



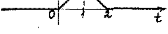
$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<1,\\ 0, & t<0,\ t>1\end{cases}$$

За допомогою функції Хевісайда $f(t)$ можна записати у такому вигляді:

$$f(t) = 1 \cdot (1(t) - 1(t-1))$$

Тому
$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}.$$

2. Знайдемо зображення трикутного імпульсу:



$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \le t \le 1 \\ 2-t, & 1 < t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

Функція $f(t)$ приймає ненульові значення: t – на $[0,1]$, $(2-t)$ – на $(1,2]$. Отже,

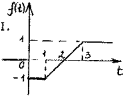
$$f(t) = t\,[1(t) - 1(t-1)] + (2-t)[1(t-1) - 1(t-2)] =$$
$$= t \cdot 1(t) - 2(t-1) \cdot 1(t-1) + (t-2)\, 1(t-2) \doteqdot$$
$$\doteqdot \frac{1}{p^2} - 2\,\frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-2p}}{p^2},$$

оскільки $t \doteqdot \frac{1}{p^2}$, а за теоремою запізнення

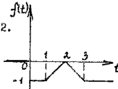
$$(t - t_0)\, 1(t - t_0) \doteqdot \frac{e^{-pt_0}}{p^2}.$$

Завдання 3. За поданим графіком оригіналу знайти зображення.

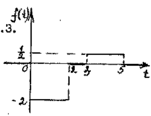
3.1.



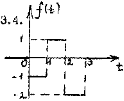
3.2.



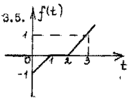
3.3.



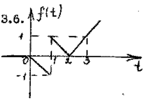
3.4.



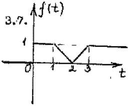
3.5.



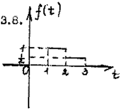
3.6.



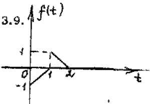
3.7.



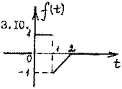
3.8.



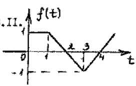
3.9.



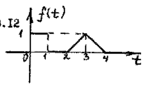
3.10.



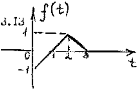
3.11.



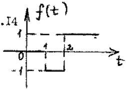
3.12



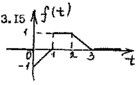
3.13



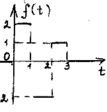
3.14



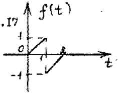
3.15



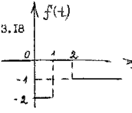
3.16



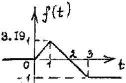
3.17



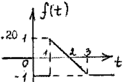
3.18



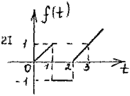
3.19



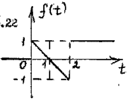
3.20



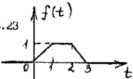
3.21



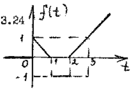
3.22



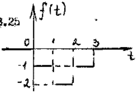
3.23



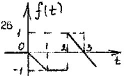
3.24



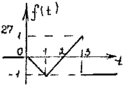
3.25



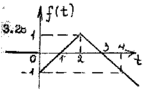
3.26



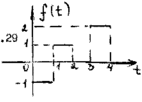
3.27



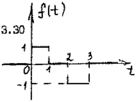
3.28



3.29



3.30



§4. ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Знаходження розв"язку лінійних диференціальних рівнянь операційним методом складається з трьох етапів:

1) перехід від вихідних функцій, які входять в диференціальне рівняння, до їх зображень за Лапласом, при цьому диференціальне рівняння перетворюється на алгебраїчне відносно зображення шуканої функції;

2) знаходження розв"язку отриманого алгебраїчного рівняння;

3) перехід від зображення до оригіналу.

Приклади. Розв"яжемо наступні задачі Коші:

1. $x'' + 3x' = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$

Невідому функцію $x(t)$ вважаємо оригіналом та переходимо від диференціального рівняння до рівняння в зображеннях. Для цього використовуємо формули диференціювання оригіналу:

$$x(t) \doteqdot \mathcal{X}(p),$$
$$x'(t) \doteqdot p\mathcal{X}(p) - x(0) = p\mathcal{X}(p),$$
$$x''(t) \doteqdot p^2\mathcal{X}(p) - px'(0) = p^2\mathcal{X}(p) + 1.$$

Початкове диференціальне рівняння набуде вигляду:

$$(p^2\mathcal{X}(p) + 1) + 3p\mathcal{X}(p) = \frac{1}{p-1}, \quad (e^t \doteqdot \frac{1}{p-1}).$$

Розв"язуємо алгебраїчне рівняння відносно $\mathcal{X}(p)$:

$$\mathcal{X}(p) = \frac{1}{(p-1)(p+3)p} - \frac{1}{p(p+3)}.$$

Тепер за відомим зображенням треба знайти оригінал.

Розкладаємо перший дріб на елементарні дроби:

$$\frac{1}{p(p-1)(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+3},$$

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{12},$$

тобто

$$\frac{1}{p(p-1)(p+3)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p+3} \fallingdotseq$$

$$\fallingdotseq -\frac{1}{3} + \frac{1}{4}e^{t} + \frac{1}{12}e^{-3t}$$

Оригінал зображення $\frac{1}{p(p+3)}$ шукаємо так:

$$\frac{1}{p+3} \fallingdotseq e^{-3t}.$$

За теоремою про інтегрування оригіналу маємо

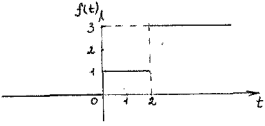
$$\frac{1}{p(p+3)} \fallingdotseq \int_0^t e^{-3t}dt = -\frac{1}{3}e^{-3t}\Big|_0^t = -\frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}.$$

Остаточно:

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{t} + \frac{1}{12}e^{-3t} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{4}e^{t} + \frac{5}{12}e^{-3t} - \frac{2}{3}.$$

2. $x'' + 2x' + x = 1(t) + 2\cdot 1(t-2)$, якщо $x(0)=0$, $x'(0)=0$. Графік правої частини рівняння має вигляд



Початкове рівняння в операторній формі

$$(p^2+2p+1)\mathcal{X}(p)=\frac{1}{p}(1+2e^{-2p}).$$

Звідси

$$\mathcal{X}(p)=\frac{1+2e^{-2p}}{p(p^2+2p+1)}=\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}-\frac{1}{(p+1)^2}\right]\cdot(1+2e^{-2p}).$$

При знаходженні оригіналу враховуємо теорему запізнення, а саме

$$x(t)=1-e^{-t}-te^{-t}+2\left[1-e^{-(t-2)}-\right.$$
$$\left.-(t-2)e^{-(t-2)}\right]\cdot 1(t-2).$$

<u>Завдання 4</u>. Операційним методом розв"язати задачу Коші:

4.1. $y''+y=6e^{-t}$, $y(0)=3$, $y'(0)=1$.

4.2. $y''-y'=t^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

4.3. $y''+y'=t^2+2t$, $y(0)=0$, $y'(0)=-2$.

4.4. $y''-y=\cos 3t$, $y(0)=y'(0)=1$.

4.5. $y''+y'+y=7e^{2t}$, $y(0)=1$, $y'(0)=4$.

4.6. $y''+y'-2y=-2(t+1)$, $y(0)=y'(0)=1$.

4.7. $y''-9y=\sin t-\cos t$, $y(0)=-3$, $y'(0)=2$.

4.8. $y''+2y'=2+e^{t}$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

4.9. $2y''-y'=\sin 3t$,
$y(0)=2,\ y'(0)=1$.

4.10 $y''+2y'=\sin\frac{t}{2}$,
$y(0)=-2,\ y'(0)=4$.

4.11. $y''+y=\operatorname{sh} t$,
$y(0)=2,\ y'(0)=1$.

4.12. $y''+4y'+29y=e^{-2t}$,
$y(0)=0,\ y'(0)=1$.

4.13. $y''-3y'+2y=e^{t}$,
$y(0)=1,\ y'(0)=0$.

4.14. $2y''+3y'+y=3e^{t}$,
$y(0)=0,\ y'(0)=1$.

4.15. $y''-2y'-3y=2t$,
$y(0)=y'(0)=1$.

4.16. $y''+4y=\sin 2t$,
$y(0)=0,\ y'(0)=1$.

4.17. $2y''+5y'=29\cos t$,
$y(0)=-1,\ y'(0)=0$.

4.18. $y''+y'+y=t^2+t$,
$y(0)=1,\ y'(0)=-3$.

4.19. $y''+4y=8\sin 2t$,
$y(0)=3,\ y'(0)=-1$.

4.20. $y''-y'-6y=2$,
$y(0)=1,\ y'(0)=0$.

4.21. $y''+4y=4e^{2t}+4t^2$,
$y(0)=1,\ y'(0)=2$

4.22. $y''+4y'+4y=16e^{2t}$,
$y(0)-y'(0)=2$

4.23. $y''-3y'+2y=12e^{3t}$,
$y(0)=2,\ y'(0)=6$.

4.24. $y''+4y=3\sin t+10\cos 3t$,
$y(0)=-2,\ y'(0)=3$

4.25. $y''+2y'+10y=2e^{-t}\cos 3t$,
$y(0)=5,\ y'(0)=1$.

4.26. $y''+3y'-10y=40$,
$y(0)=3,\ y'(0)=6$

4.27. $y''+y'-2y=e^{-t}$,
$y(0)=-1,\ y'(0)=0$.

4.28. $y''-2y'=e^{t}(t^2+t-3)$,
$y(0)=2,\ y'(0)=2$.

4.29. $y''+y=2\cos t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

4.30. $y''-y=4\sin t+5\cos 2t$, $y(0)=-1$, $y'(0)=-2$

Завдання 5. Розв"язати рівняння, побудувати графік правої частини ($1(t)$ – функція Хевісайда)

5.1. $y'+2y=1(t)+1(t-3)$, $y(0)=1$

5.2. $y'+4y=2\cdot(1(t)+1(t-1))$, $y(0)=0$

5.3. $2y'+y=1(t)-1(t-2)$, $y(0)=2$

5.4. $y''+y=1(t)-2\cdot 1(t-1)+1(t-2)$, $y(0)=y'(0)=0$

5.5. $y'+3y=2\cdot 1(t)-1(t-1)$, $y(0)=3$

5.6. $y''+y=1(t)+1(t-2)$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

5.7. $y''+2y'+2y=1(t)-1(t-2)$, $y(0)=y'(0)=0$

5.8. $y''+3y'=1(t-1)$, $y(0)=4$, $y'(0)=0$

5.9. $y'+3y=1(t)-2\cdot 1(t-1)+2\cdot 1(t-2)$, $y(0)=1$

5.10. $y'-y=-2\cdot 1(t)+2\cdot 1(t-2)+\frac{1}{2}\cdot 1(t-3)-\frac{1}{2}\cdot 1(t-5)$, $y(0)=0$

5.11. $y'-y=1(t)+2\cdot 1(t-\frac{\pi}{2})$, $y(0)=0$

5.12. $y''-2y'+y=t\cdot 1(t)-(t-1)\,1(t-1)$, $y(0)=y'(0)=0$

5.13. $y'+2y=2\cdot 1(t)-1(t-1)-1(t-2)$, $y(0)=3$

5.14. $y'+y=2\cdot 1(t-2)-1(t-1)$, $y(0)=0$

5.15. $y''-3y'+2y=1(t-2)-1(t-3)$, $y(0)=y'(0)=0$

5.16. $y''+4y'+4y=2\,(1(t)-1(t-1))$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

5.17. $y''-3y'+2y=1(t-1)-1(t-2)$, $y(0)=y'(0)=0$

5.18. $4y' + 2y = 1(t) - 1(t-1)$, $y(0) = 2$

5.19. $y' + 2y = 2\,1(t) - 1(t-1)$, $y(0) = 3$

5.20. $y' + y = 1(t) + 1(t-2) - 1(t-1) - 1(t-3)$, $y(0) = 1$

5.21. $y'' + 2y' + 2y = 1(t) + 1(t-2)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

5.22. $y' + 4y = 1(t) + 4\cdot 1(t-1)$, $y(0) = 0$

5.23. $2y' + 3y = 1(t) - 2\cdot 1(t-1) + 2\cdot 1(t-2)$, $y(0) = 0$

5.24. $y' + y = 1(t-1) + 1(t-2) + 1(t-3)$, $y(0) = 0$

5.25. $y'' + 4y = 1(t) - 1(t-2\pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$

5.26. $y'' + y = 1(t) - 2\cdot 1(t-1) + 1(t+2)$, $y(0) = y'(0) = 0$

5.27. $y'' + 3y' = 1(t-2)$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$

5.28. $y'' + 4y = 2\cdot 1(t-2) - 1(t-1)$, $y(0) = y'(0) = 0$

5.29. $y'' + 9y = 1(t-3)$, $y(0) = y'(0) = 0$

5.30. $y'' + 2y' = 1(t-1)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Зауваження. Аналогічно розв"язуються системи лінійних диференціальних рівнянь.

Приклад. Розв"яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1,\ y(0) = -1.$$

Переходячи до операторної системи, отримаємо

$$\begin{cases} p\,\mathcal{X}(p) - 1 + \mathcal{Y}(p) = 0, \\ p\,\mathcal{Y}(p) + 1 + \mathcal{X}(p) = 0, \end{cases}$$

де $\quad \mathcal{X}(p) \doteqdot x(t), \quad \mathcal{Y}(p) \doteqdot y(t)$

Розв"язуємо систему відносно $\mathcal{X}(p)$ та $\mathcal{Y}(p)$:

$$\mathcal{X}(p) = \frac{p+1}{p^2-1} = \frac{1}{p-1}, \quad \mathcal{Y}(p) = -\frac{p+1}{p^2-1} = -\frac{1}{p-1}$$

Оригінали для $\mathcal{X}(p)$ та $\mathcal{Y}(p)$ відповідно будуть

$$x(t) = e^t, \quad y(t) = -e^t.$$

Завдання 6. Розв"язати систему диференціальних рівнянь

6.1. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 2e^t, \\ \dot{y} = 2x + y, \end{cases}$

$x(0) = 0,\ y(0) = 1$

6.2. $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = 1, \\ \dot{x} = x - y, \end{cases}$

$x(0) = -1,\ y(0) = 0$

6.3. $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = 2(\dot{x} + y), \end{cases}$

$x(0) = y(0) = 1$

6.4. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{x} - \dot{y} = x + y, \end{cases}$

$x(0) = 0,\ y(0) = 1$

6.5. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1, \end{cases}$

$x(0) = -1,\ y(0) = 2$

6.6. $\begin{cases} \dot{x} + x = 3y + 1, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases}$

$x(0) = 1,\ y(0) = 2$

6.7. $\begin{cases} \dot{x} = y + t, \\ \dot{y} = x - 2, \end{cases}$

$x(0) = y(0) = 0$

6.8. $\begin{cases} \dot{x} + 2x - y = 0, \\ \dot{y} - 3x = 0, \end{cases}$

$x(0) = 0,\ y(0) = 1$

6.9. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$

$x(0) = 0,\ y(0) = 1$

6.10. $\begin{cases} \dot{x} + 3x + y = 0, \\ \dot{y} - x + y = 0, \end{cases}$

$x(0) = y(0) = 1$

6.11. $\begin{cases} \dot{x}+4x+4y=0, \\ \dot{y}+2x+6y=0, \end{cases}$ $x(0)=3,\ y(0)=15$

6.12. $\begin{cases} \dot{x}-x-2y=t, \\ \dot{y}-2x-y=t, \end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=4$

6.13. $\begin{cases} \dot{x}=x-2y+1, \\ \dot{y}=-3x, \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1$

6.14. $\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=-x, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=1$

6.15. $\begin{cases} \dot{x}=-4(x+y), \\ \dot{x}+4\dot{y}=-4y, \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0.$

6.16. $\begin{cases} \dot{x}=4x-5y, \\ \dot{y}=x, \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1$

6.17. $\begin{cases} \dot{x}=x+5y, \\ \dot{y}=-x-3y, \end{cases}$ $x(0)=-2,\ y(0)=1$

6.18. $\begin{cases} \dot{x}=x+4y, \\ \dot{y}=2x-y+9, \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0$

6.19. $\begin{cases} \dot{x}=2x+5y, \\ \dot{y}=x-2y+2, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=1$

6.20. $\begin{cases} \dot{x}=x+2y+1, \\ \dot{y}=4x-y, \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

6.21. $\begin{cases} \dot{x}+x=3y+1, \\ \dot{y}=x+y, \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=2$

6.22. $\begin{cases} \dot{x}=5y-2x+1, \\ \dot{y}=x+2y+1, \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=2$

6.23. $\begin{cases} \dot{x}=3x+y, \\ \dot{y}+5x+3y=2, \end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=0$

6.24. $\begin{cases} \dot{x}+3y+4y=1, \\ \dot{y}=2x+3y, \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=2$

6.25. $\begin{cases} \dot{x}+2x=6y+1, \\ \dot{y}=2x+2y, \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1$

6.26. $\begin{cases} \dot{x}=2x+3y+1, \\ \dot{y}=4x-2y, \end{cases}$ $x(0)=-1,\ y(0)=0$

6.27. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1, \end{cases}$
$x(0) = 0,\ y(0) = 5$

6.28. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y, \\ \dot{y} = -4x, \end{cases}$
$x(0) = 3,\ y(0) = 1$

6.29. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -\frac{3}{2}x + y, \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = 0$

6.30. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3, \end{cases}$
$x(0) = -1,\ y(0) = 0$

§ 5. ФОРМУЛА ДЮАМЕЛЯ

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n – го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$L\left\{x(t)\right\} = a_0 \overset{(n)}{x}(t) + a_1 \overset{(n-1)}{x}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t) \quad (5)$$

та з нульовими початковими умовами

$$x(0) = x'(0) = \ldots = \overset{(n-1)}{x}(0) = 0. \qquad (6)$$

Припустимо, що відомий розв"язок рівняння $L\left\{x(t)\right\} = 1$ при умовах (6). Позначимо його $x_1(t)$. Тоді розв"язок $x(t)$ задачі (5) – (6) можна виразити через $x_1(t)$ та $f(t)$ за допомогою однієї з формул:

$$x(t) = \int_0^t x_1'(\tau) f(t-\tau)\,d\tau, \quad x(t) = \int_0^t x_1'(t-\tau) f(\tau)\,d\tau,$$

$$x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t f'(\tau) x_1(t-\tau)\,d\tau,$$

$$x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t f'(t-\tau) x_1(\tau)\,d\tau.$$

Кожен з цих виразів називається формулою (інтегралом) Дюамеля.

Метод знаходження розв"язку диференціального рівняння, побудований на формулі Дюамеля, застосовують, коли виникають труднощі при знаходженні зображення $F(p)$ правої частини $f(t)$ рівняння (5).

<u>Приклад.</u> Використовуючи формулу Дюамеля, розв"яжемо рівняння при заданих початкових умовах:

$$x''+x=\frac{1}{1+\cos^2 t}\quad,\quad x(0)=x'(0)=0.$$

Розв"язування.

Розглянемо допоміжну задачу

$$x_1''+x_1=1\,,\; x_1(0)=x_1'(0)=0.$$

Застосовуючи операційний метод, знаходимо

$$X_1(p)=\frac{1}{p(p^2+1)}\;,$$

звідки $x_1(t)=\int\limits_0^t \sin t\,dt=1-\cos t.$

За формулою

$$x(t)=\int\limits_0^t x_1'(t-\tau)f(\tau)\,d\tau \qquad \text{маємо}$$

$$x(t)=\int\limits_0^t\frac{\sin(t-\tau)}{1+\cos^2\tau}\,d\tau=\sin t\cdot\int\limits_0^t\frac{\cos\tau}{1+\cos^2\tau}\,d\tau-$$

$$-\cos t\cdot\int\limits_0^t\frac{\sin\tau}{1+\cos^2\tau}\,d\tau=\frac{\sin t}{2\sqrt2}\ln\left|\frac{\sqrt2-\sin\tau}{\sqrt2+\sin\tau}\right|\Bigg|_0^t+$$

$$+\cos t\cdot\operatorname{arctg}\cos\tau\;=\frac{\sin t}{2\sqrt2}\ln\left|\frac{\sqrt2-\sin t}{\sqrt2+\sin t}\right|+$$

$$+\cos t\cdot[\operatorname{arctg}(\cos t)-\frac{\pi}{4}].$$

Завдання 7. Знайти розв"язок диференціального рівняння, який задовольняє умови $y(0) = y'(0) = 0$.

7.1. $y'' - y = \operatorname{th} t$

7.2. $y'' - y' = \frac{1}{1+e^t}$

7.3. $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}$

7.4. $y'' - 2y' + 2y = 2e^t \cos t$.

7.5. $y'' - y = \operatorname{th}^2 t$

7.6. $y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch} t}$

7.7. $y'' - y' = \frac{e^t}{1+e^t}$

7.8. $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t+1}$

7.9. $y'' + y' = \frac{e^{2t}}{3+e^t}$

7.10. $y'' - 2y' = \frac{e^t}{\operatorname{ch} t}$

7.11. $y'' - 4y = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 2t}$

7.12. $y'' + y' = \frac{1}{1+e^t}$

7.13. $y'' - 4y' + 4y = \frac{2e^{2t}}{\operatorname{ch}^2 2t}$.

7.14. $y'' - 4y = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 2t}$

7.15. $y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$

7.16. $y'' + y' = \frac{e^t}{1+e^t}$

7.17. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{(t+1)^2}$

7.18. $2y'' - y' = \frac{e^t}{(1+e^{t/2})^2}$

7.19. $y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 t}$

7.20. $y'' - y' = \frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}$

7.21. $y'' + 2y' + y = \frac{te^{-t}}{t+1}$

7.22. $y'' - y' = \frac{e^{2t}}{2+e^t}$

7.23. $y'' - y = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}$

7.24. $y'' + y' = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$

7.25. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{1+t^2}$

7.26. $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{\operatorname{ch}^2 t}$

7.27. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{\operatorname{ch}^2 t}$

7.28. $y'' - 4y = \operatorname{th}^2 2t$

7.29. $y'' + 2y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$

7.30. $y'' + y' = \frac{1}{(1+e^t)^2}$

§ Знаходження розв"язку інтегральних рівнянь Вольтерра з ядрами спеціального виду

Рівняння виду

$$y(x)=\int_0^x K(x-t)y(t)dt+f(x) \qquad (7)$$

з ядром $K(x-t)$, яке залежить лише від різниці аргументів, називається інтегральним рівнянням типу згортки.

Операційний метод знаходження розв"язку такої задачі полягає в тому, що функції $y(x)$, $K(x)$, $f(x)$ вважаємо оригіналами та переходимо від рівняння (7) до рівняння в зображеннях. Нехай $y(x)\doteqdot Y(p)$, $f(x)\doteqdot F(p)$, $K(x)\doteqdot L(p)$. Тоді, користуючись формулою згортки, будемо мати:

$$Y(p)=F(p)+L(p)\cdot Y(p),$$

звідки

$$Y(p)=\frac{F(p)}{1-L(p)}, \quad L(p)\neq 1.$$

Для $Y(p)$ знаходимо оригінал $y(x)$ – розв"язок інтегрального рівняння (7).

Приклад. Розв"яжемо інтегральне рівняння

$$y(x)=\cos x+\int_0^x (x-t)y(t)dt.$$

Переходячи до зображень та розглядаючи інтеграл як згортку функцій, маємо

$$Y(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2}Y(p).$$

Тоді $$Y(p) = \frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-1)} .$$

Знаходячи оригінал для $Y(p)$, отримаємо розв"язок інтегрального рівняння

$$y(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{ch} x).$$

<u>Завдання 8.</u> Розв"язати інтегральне рівняння.

8.1. $y(x) = \sin x + \int_0^x (x-t)y(t)\,dt$

8.2. $y(x) = x - \int_0^x e^{x-t}y(t)\,dt.$

8.3. $\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)y(t)\,dt = x$

8.4. $y(x) = \cos x + \int_0^x (x-t)y(t)\,dt.$

8.5. $y(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{t-x}y(t)\,dt.$

8.6. $\int_0^x \sin(x-t)y(t)\,dt = x^3(x-1)$

8.7. $y(x) = e^x + \int_0^x y(t)\,dt$

8.8. $y(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \sin 2(x-t)y(t)\,dt.$

8.9. $y(x) = \cos x + \int_0^x y(t)\,dt.$

8.10. $\int_0^x e^{x-t}y(t)\,dt = x^2.$

8.11. $y(x) = e^x - 2\int_0^x \cos(x-t)y(t)\,dt.$

8.12. $\int_0^x \cos(x-t)y(t)\,dt = \sin x$

8.13. $y(x) = \operatorname{sh} x - \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)y(t)\,dt.$

8.14. $\operatorname{sh} x = \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)y(t)\,dt.$

8.15. $y(x) = e^{x} + \int_0^x e^{x-t} y(t)\,dt$

8.16. $y(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t} y(t)\,dt$.

8.17. $y(x) = 1 + \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 y(t)\,dt$

8.18. $y(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)\, y(t)\,dt$

8.19. $y(x) = x - \int_0^x (x-t)\, y(t)\,dt$

8.20. $y(x) = 1 + x + \int_0^x \sin(x-t)\, y(t)\,dt$

8.21. $y(x) = \operatorname{sh} x + \int_0^x (x-t)\, y(t)\,dt$.

8.22. $y(x) = 1 + 2\int_0^x \cos(x-t)\, y(t)\,dt$.

8.23. $y(x) = e^{x} + 2\int_0^x \cos(x-t)\, y(t)\,dt$.

8.24. $\int_0^x \cos(x-t)\, y(t)\,dt = x + x^2$.

8.25. $\int_0^x e^{2(x-t)} y(t)\,dt = x^2 e^{x}$.

8.26. $\int_0^x \cos(x-t)\, y(t)\,dt = x\cos x$.

8.27. $x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\, y(t)\,dt = y(x)$

8.28. $y(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 y(t)\,dt$

8.29. $y(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t)\, e^{-(t-x)} y(t)\,dt$

8.30. $y(x) = x + 2\int_0^x [(x-t) - \sin(x-t)]\, y(t)\,dt$.

ВІДПОВІДІ

Розділ 3.

2.1. $e^{z}+c$, 2.2. $e^{iz}+c$, 2.3. $3z-2iz+c$,

2.4. $-z+2iz+c$, 2.4. 2.5. $e^{-iz}+c$;

2.6. $ie^{-z}+c$, 2.7. $\operatorname{sh} z+c$, 2.8. $\operatorname{ch} z+c$,

2.9. $\cos z+c$, 2.10. $-\cos z+c$, 2.11. $2^{-z}+c$,

2.12. $(3+i)z^{2}+c$, 2.13. $-(1+2i)z^{2}+c$, 2.14. $2iz^{3}+c$,

2.15. $(1-i)z^{3}+c$ 2.16. $iz^{3}+2z+c$ 2.17. $-2iz^{3}+c$;

2.18. $-(1+2i)z^{3}+c$, 2.19. $-iz^{3}+4z+c$, 2.20. $z^{2}-3iz+c$,

2.21. $z^{2}+5z+c$, 2.22. $i2^{-iz}+c$; 2.23. $-i3^{z}+c$,

2.24. $2^{-iz}+c$, 2.25. $-2z^{2}+z+c$, 2.26. $i3^{iz}+c$

2.27. $-(1+i)z^{2}+iz+c$, 2.28. $\cos(2z+1)+c$, 2.29. $-z^{2}+c$.

2.30. $\frac{1}{2}\ln(x^{2}+y^{2})+c$,

Розділ 5.

1.1. $|z|>1/\sqrt{2}$ 1.2. $R=2$ 1.3. $1<|z|<5$

1.4. $|z+1|<\frac{2}{5}$ 1.5. $|z-3|<4$ 1.6. $R=\infty$

1.7. $\sqrt{2}<|z-3+i|<\sqrt{5}$ 1.8. $|z-2-i|>\frac{1}{2}$ 1.9. $|z+1-i|>1$

1.10. $|z+1+i|<1$ 1.11. $|z-i|<2$ 1.12. $0<|z-2+i|<1$

1.13. $|z-1|<\frac{1}{5}$ 1.14. $2<|z+1+i|<3$ 1.15. $2<|z|<4$

1.16. розбігається всюду 1.17. $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 1.18. $1<|z|<3$

1.19. $|z|>e^{-1}$ 1.20. $|z+1|>\frac{1}{5}$ 1.21. $|z-i|>e$

1.22. $0<|z-i|<2$ 1.23. $|z+1|>2$ 1.24. $1<|z|<2$

1.25. $R=\frac{1}{e}$ 1.26. $|z+2i|>3$ 1.27. $|z|>e$

1.28. $|z-i|<e$ 1.29. $|z+i|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 1.30. $|z|<4$

2.1. $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{4-2n}}{(2n)!}$ 2.2. $\frac{1}{z^4}+\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-4}}{(2n)!}$

2.3. В ряд Лорана не розвивается. 2.4. не розкладается.

2.5. $\sum_{1}^{\infty}\left[n-\frac{(-1)^n}{2^n}\right]z^{n-1}$ 2.6. $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n+1)!}$

2.7. $\sum_{0}^{\infty}\frac{z^{n-3}}{n!}$ 2.8. $\frac{1}{2z}-\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2z)^n}{(2n)!}$ 2.9. $-\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{z^{n+k}}{n!}$

2.10. $\sum_{0}^{\infty}\frac{z^3}{n!\,z^n}$ 2.11. $\frac{1}{2z}-\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n-1)!\,z^{2n}}$ 2.12. $\sum_{0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}z^n-\frac{1}{z}$

2.13. $\frac{1}{z^3}-\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n-3}}{n!}$ 2.14. $\frac{1}{z}-\sum_{0}^{\infty}(-1)^n z^n$

2.15. $\sum_{0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{z}{2}\right)^n+3\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}$ 2.16. $2\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^{n+1}}-\frac{2}{3}\sum_{0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^n}$

2.17. Не розвивается 2.18. $\frac{1}{z-1}+5\sum_{2}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{(z-1)^n}$

2.19. $-\frac{1}{12}\sum\frac{z^{2n+1}}{4^n}-\frac{1}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{z^{2n-1}}$ 2.20. $\frac{1}{z}-\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$

2.21. $\sum_{1}\frac{n}{z^{n+1}}+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}z^n$ 2.22. $\sum_{1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{z^n}$

2.23. $\frac{1}{5}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n+1}+n}{z^{n+2}}$ 2.24. $\frac{1}{z-1}-\sum_{0}^{\infty}(z-1)^n$

2.25. $\sum_{1}^{\infty}\frac{n\,4^{n-1}}{(z+2)^{n+3}}$ 2.26. $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$

2.27. $\frac{1}{z}+\sum_{1}^{\infty}\frac{n+(-2)^n}{z^{n+1}}$ 2.28. $\sum_{0}^{\infty}C_n z^n+C_n z^{-n}$

2.29. $\sum c_{2n} z^{2n} + C_{2n} z^{-2n}$ 2.30. $-\frac{1}{2}\sum\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + 2\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+2}}$

$C_{2n} = C_{-2n} = (-1)^n \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!\,(2n+2k+1)!}$, $n = 0, 1, 2 \ldots$

Розділ VI.

I.I. $z = 0$, усувна особлива точка

$z_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ полюси 2-го порядку.

I.2. $z = 0$, усувна о.т.; $z = 2k\pi$ полюси 2-го порядку.

I.3. $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ усувні о.т. $k = 0, \pm 1 \ldots$ $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ прості полюси, $k = 0, \pm 1, \ldots$ I.4. $z = \pi$, простий полюс $z = k\pi$, $k = 0, -1, \pm 2, \ldots$ полюси 2-го порядку.

I.5. $z = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ полюси прості; I.6. $z = 0$ істотно особлива; I.8. $z_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ полюси 2-го порядку; I.9. $z_1 = 0$, полюс 3-го порядку, $z = \pm 2i$, полюси 2-го порядку; I.10. $z = 0$, істотно особлива,

I.II. $z = 0$, полюс 3-го порядку; I.12. $z = 0$, полюс 4-го порядку; I.13. $z = 0$, полюс 2-го порядку,

I.14. $z = -1$, полюс 3-го порядку, $z = 1$, полюс 2-го порядку, $z = 2$ полюс 2-го порядку; I,15. $z = \pm 3i$ полюси 2-го порядку, $z = 0$ усувна особлива точка,

I.16. $z = 0$ істотно особлива; I.17. $z = -1$ усувна особлива точка; I.18. $z = 0$, полюс 4-го порядку,

I.19. $z = 0$, усувна особлива точка; I.20. $z = -2$, істотно особлива точка; I.21. $z = 0$, істотно особлива,

I,22. $z = 0$, полюс 2-го порядку; I.23. $z = 0$, полюс 2-го порядку; $z = 2\pi n i$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ прості полюси.

1.24. $z=0$, полюс 3-го порядку, $z=-1$, полюс 2-го порядку. 1.25. $z=0$, усувна особлива точка, ,
$z=2\pi k, k=\pm 1, \pm 2$ полюси 2-го порядку. 1.26. $z=\frac{\pi}{2}+2k\pi$
усувні особливі точки, $z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ прості полюси.
1.27. $z=-1$, усувні особливі точки,
прості полюси. 1.27. $z=-1$, істотно особлива точка.
1.28. $z=0$, істотно особлива точка. 1.29. $z=0$, істотно особлива точка. 1.30. $z=0$, полюс 3-го порядку,
$z=2k\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3}), k=0, \pm 1, \dots$ полюси 1-го порядку.

2.1. 1. 2.2. $\operatorname{res} f(0)=0$. 2.3. $\operatorname{res} f(0)=-1/6$

2.4. $\operatorname{res} f(0)=0$. 2.5. $\operatorname{res} f(0)=\sin 1$, $\operatorname{res} f(1)=-\sin 1$

2.6. $\operatorname{res} f(-1)=\frac{-17}{54e}$ 2.7. $\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{e}-1$

2.8. $\operatorname{res} f(1)=-\frac{1}{27}$, $\operatorname{res} f(2)=\frac{1}{27}$ 2.9. $\operatorname{res} f(i)=\frac{4}{9}i\operatorname{sh}2$, $\operatorname{res} f(\frac{1}{2})=\frac{4}{9}(e+2e^{i})$

2.10. $\operatorname{res} f(0)=0$ 2.11. $\operatorname{res} f(1)=e$

2.12. $\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{24}$ 2.13. $\operatorname{res} f(0)=0$ 2.14. $\operatorname{res} f(0)=0$

2.15. $\operatorname{res} f(1)=-e$, $\operatorname{res} f(0)=e-1$ 2.16. $\operatorname{res} f(-1)=5/6$

2.17. $\operatorname{res} f(0)=0$, $\operatorname{res} f(\frac{\pi}{4})=\frac{4}{\pi}$, $\operatorname{res} f(\frac{\pi}{2}+\pi n)=\frac{-8}{\pi^4(2n+1)(4n+1)}$

2.18. $\operatorname{res} f(i)=-1$ 2.19. $\operatorname{res} f(-3)=\frac{e^{-3i}}{8}$, $\operatorname{res} f(-1)=-\frac{e^{-i}}{4}$, $\operatorname{res} f(1)=\frac{e^{i}}{8}$

2.20. $\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{6}$, $\operatorname{res} f(3)=\frac{2}{27}\sin^2\frac{3}{3}$

2.21. $\operatorname{res} f(0)=0$, $\operatorname{res} f(z_1)=-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}e^{i}$, $\operatorname{res} f(z_2)=\frac{(1-i)e^{-i}}{4\sqrt{2}}$

$\operatorname{res} f(z_3)=\frac{(1+i)e^{i}}{4\sqrt{2}}$, $\operatorname{res} f(z_4)=-\frac{(1-i)e^{-i}}{4\sqrt{2}}$ – де z_k ($k=1, 2, 3, 4$) корені рівняння $z^4+1=0$. 2.22. $\operatorname{res} f(0)=-5/2$

$\operatorname{res} f(1)=e$

2.23.

$\operatorname{res} f(-i) = \frac{1+3i}{20}\cos 1$, $\operatorname{res} f(i) = -\frac{1-3i}{20}\cos 1$,

$\operatorname{res} f(3) = \frac{\operatorname{ch} 3}{10}$.

2.24. $\operatorname{res} f(0) = -\frac{4}{\pi^2}$, $\operatorname{res} f(\frac{\pi}{2}) = 0$. 2.25. $\operatorname{res} f(0) = -1$

2.26. $\operatorname{res} f(0) = 0$. 2.27. $\operatorname{res} f(0) = -1/3$

2.28. $\operatorname{res} f(e^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, $\operatorname{res} f(e^{i\frac{3\pi}{4}}) = \frac{1}{4} e^{-i\frac{9\pi}{4}}$

$\operatorname{res} f(e^{-i\frac{\pi}{4}}) = \frac{1}{4} e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $\operatorname{res} f(e^{-i\frac{3\pi}{4}}) = \frac{1}{4} e^{i\frac{9\pi}{4}}$

2.29. $\operatorname{res} f(0) = 24$ 2.30. $\operatorname{res} f(0) = 1$

3.1. $-2\pi i/9$ 3.2. $\pi i \sin 1$ 3.3. $-\frac{1}{3}\pi i$

3.4. $3\pi i$ 3.5. 0. 3.6. $\pi i(1 - e^{-1})$ 3.7. 0.

3.8. $4\pi i$ 3.9. $2\pi i\left(-\frac{1}{6} + \operatorname{sh} 1\right)$. 3.10. 0. 3.11. $\frac{2\pi i}{(n+1)!\, 5^{n+1}}$

3.12. $2\pi i$ 3.13. 0

3.14. $2\pi i\left(1 - \frac{1}{2}e\right)$ 3.15. 0

3.16. $8\sqrt{2}\pi i$ 3.17. $-\pi i/\sqrt{2}$

3.18. 0 3.19. 0

3.20. 0

3.21. $-4\pi i$ 3.22. $-\pi^2 i$

3.23. $2\pi i\left(\frac{e^3 - e^{-3} - 6}{54}\right)$ 3.24. πi

3.25. $-2\pi i$

3.26. $-\pi i/_{121}$

3.27. $2\pi i\left(\operatorname{tg} 1-\frac{2\pi}{\pi^{2}/4}\right)$ ромб з вершинами

3.28. $-\frac{\pi}{8}$

3.29. $-16i$

3.30. $\frac{\pi i}{5}\operatorname{ch}2$

Розділ 7.

1.1. $D_1:\begin{cases} v<-1/2 \\ u+v<0 \end{cases}$

1.2. $D_1\begin{cases} |w|<1 \\ v\geqslant 0 \end{cases}$

1.3. $D_1\begin{cases} |w|>1 \\ v>0 \end{cases}$

1.4. $D_1\begin{cases} |w|>1/4 \\ w\notin(-\infty;-1/4] \end{cases}$

1.5. $D_1:\begin{cases} v=0 \\ -1<u<1 \end{cases}$

1.6. $D_1\begin{cases} |w|\leq 1 \\ 0<\arg w<\pi/2 \end{cases}$

1.7. $D_1: u<1/4$

1.8. $D_1:\begin{cases} |w|<1 \\ v>0 \end{cases}$

1.9. $D_1:\begin{cases} u>1 \\ u+2v<0 \end{cases}$

1.10. $D_1: |w-2|>2$

1.11. $D_1: 0<v<\pi$

1.12. $D_1:\begin{cases} u\leq 1-\frac{v^2}{4} \\ 0\leq u\leq 1,\ 0\leq v\leq 2 \end{cases}$

1.13. $D_1: |w-2|<2$

1.14. $D_1:\begin{cases} |w-4/3|>4/3 \\ u>1 \end{cases}$

1.15. $D_1: v<0$

1.16. $D_1:\begin{cases} |w|<4 \\ v>0 \end{cases}$

1.17. $D_1: -\frac{1}{2}<v<0$

1.18. $D_1: -\frac{\pi}{2}<\arg w<0$

1.19. $D_1:\begin{cases} |w|\geq 16 \\ \frac{\pi}{2}\leq\arg w\leq\pi \end{cases}$

1.20. $|w+1| \geq 6$ 1.21. $\begin{cases} |w|>1 \\ u>0 \end{cases}$ 1.22. $\begin{cases} u>0 \\ v>0 \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} |w|<1 \\ v>0 \end{cases}$ 1.24. $-\frac{\pi}{2} \leq \arg w \leq 0$

1.25. $\begin{cases} -4 \leq u \leq 0 \\ 0 \leq v \leq 8 \\ u \leq \frac{1}{6} v^2 - 4 \end{cases}$ 1.26. $v > 0$

1.27. $\begin{cases} u > \frac{1}{2} \\ u+v<0 \end{cases}$ 1.28. $|w|<1$

1.29. $\begin{cases} u>0 \\ 0<v<\pi \end{cases}$ 1.30. $u^2+v^2+v \leq 0$

Розділ 8.

I.1. $\frac{2p(p^2-12)}{(p^2+4)^3}$ I.2. $\frac{2(p^2+2p+4)}{(p^2+4)^2}$

I.3. $\frac{18(p^2-3)}{(p^2+9)^3}$ I.4. $\frac{2(p^2-p+2)}{(p^2-1)^2}$

I.5. $\frac{24}{(p-1)^5 p}$ I.6. $\frac{p^2+2p-3}{(p^2+2p+5)^2}$

I.7. $\frac{2}{(p-1)[(p-1)^2+4]}$ I.8. $\frac{2(p-3)}{(p^2-6p+13)^2} - \frac{2(p+3)}{(p^2+6p+13)^2}$

I.9. $\frac{1}{2}\left[\frac{p^2-4p+3}{(p^2-4p+5)^2} + \frac{p^2+4p+3}{(p^2+4p+5)^2}\right]$ I.10. $\operatorname{arcctg} \frac{3}{p+1}$

I.11. $\frac{1}{4} \ln \frac{p^2}{p^2-16}$

I.12. $\frac{1}{4} \ln \frac{p^2+16}{p^2+4}$

I.13. $\frac{1}{2} \ln \frac{p+3}{p-3}$

I.14. $\frac{1}{2} \ln \frac{p^2+16}{p^2+4}$

I.15. $\frac{1}{2} \ln \frac{p^2-2p+2}{(p-1)^2}$

I.16. $\frac{1}{4} \ln \frac{p^2-2p+17}{(p-1)^2}$

I.17. $\frac{4}{(p^2-4)^2}$

I.18. $\frac{p^3+p^2+9p-9}{p(p^2+9)^2}$

I.19. $\frac{6}{p(p+2)^4}$

I.20. $\frac{1}{p} \operatorname{arcctg} \frac{p}{2}$

I.21. $\frac{p^2-3}{(p^2+1)(p^2+9)}$

I.22. $\frac{p(p^2+17)}{(p^2+9)(p^2+25)}$

I.23. $\frac{16(p+1)}{(p^2+2p+5)(p^2+2p+37)}$

I.24. $\frac{p+3}{p(p^2+6p+13)}$

I.25. $\frac{p(p^2+6)}{2(p^2-2p+5)(p^2+2p+5)}$

I.26. $\frac{4p}{(p^2-4)^2}$

I.27. $\ln \frac{p}{p-1}$

I.28. $\frac{p^2+8}{p^2(p^2+16)}$

I.29. $\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$

I.30. $\frac{p^4+16p^2+24}{p(p^2+4)(p^2+16)}$

2.1. $\frac{13}{17} e^{2t} + \frac{1}{17} e^{-2t}(16 \sin t - 13 \cos t)$

2.2. $e^{-t/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right) - e^{-t}$

2.3. $\frac{1}{2}\left(e^{2t} - e^{-t} \cos \sqrt{3} t - \sqrt{3} e^{-t} \sin \sqrt{3} t\right)$

2.4. $\frac{1}{2}\left(e^{-2t} \cos t + 3 e^{-2t} \sin t - e^{-t}\right)$

2.5. $1 - e^{-t}\left(\cos \sqrt{2} t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2} t\right)$

2.6. $\frac{1}{3}\left(e^{-2t} - e^{t} \cos \sqrt{3} t + \sqrt{3} e^{t} \sin \sqrt{3} t\right)$

2.7. $e^{-2t}(\operatorname{ch} t + 2 \operatorname{sh} t)$

2.8. $\frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{t} \cos 2t + 2 \sin 2t\right)$

2.9. $1 - e^{-t/2}\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$

2.10. $\frac{1}{2}\left(e^{-t} + e^{-2t} \cos t + 7 e^{-2t} \sin t\right)$

2.11. $\frac{1}{16}\left(\operatorname{ch} 2t - 2t^2 - 1\right)$

2.12. $\frac{1}{3}\left(e^{t} - e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \sqrt{3} e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$

2.13. $e^{t}(\cos t + 2 \sin t) - e^{-2t}$

2.14. $\frac{1}{11}\left[e^{2t} - e^{-t}\left(\cos \sqrt{2} t + 3 \sin \sqrt{2} t\right)\right]$

2.15. $\frac{1}{3}\left[1 - e^{-\frac{3}{2} t}\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right)\right]$.

2.16. $5 e^{t} - 5 e^{t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$

2.17. $\frac{1}{10}\left[4 - e^{t}(4\cos 2t + 3\sin 2t)\right]$

2.18. $2e^{-t}(1 - \cos t)$

2.19. $\frac{1}{2}\left[e^{t} - e^{2t}(\cos t + \sin t)\right]$

2.20. $\frac{1}{5}\left[e^{t} - e^{3t}(\cos t - 17\sin t)\right]$

2.21. $e^{2t}\cos 3t$

2.22. $\frac{1}{2}e^{t}(2\cos 2t + \sin 2t)$

2.23. $\frac{1}{6}(\operatorname{sh} 2t + 2\operatorname{ch} 2t - 2e^{t})$

2.24. $1 - 2e^{t} + e^{3t}$

2.25. $2e^{t} - 2t - 3$

2.26. $\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{24}e^{-4t} + \frac{t}{2} - \frac{3}{8}$

2.27. $\frac{1}{2}e^{-t} + t$

2.28. $\frac{1}{20}(\cos 2t - 2\sin 2t + 4e^{t} - 5)$

2.29. $e^{-2t} + \frac{1}{9}e^{t}(3t - 1)$

2.30. $e^{-t} - e^{\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{5}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)$

3.1. $-\frac{1}{p} + \frac{e^{-p} - e^{-3p}}{p^2}$

3.2. $-\frac{1}{p} + \frac{e^{-p} - 2e^{-2p} + e^{-3p}}{p^2}$

3.3. $\frac{-4 + 2e^{-2p} + e^{-3p} + e^{-5p}}{2p}$

3.4. $\frac{-1 + 2e^{-p} - 3e^{-2p} + 2e^{-3p}}{p}$

3.5. $\frac{1 - e^{-p} + e^{-2p}}{p^2} - \frac{1}{p}$

3.6. $\frac{2e^{-p}}{p} + \frac{2e^{-2p} - 1}{p^2}$

3.7. $\frac{1}{p} + \frac{2e^{-2p} - e^{-p} - e^{-3p}}{p^2}$

3.8. $\frac{2e^{-p} - e^{-2p} - e^{-3p}}{2p}$

3.9. $\frac{e^{-p} + 1}{p} + \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p^2}$

3.10. $\frac{1 - 2e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p} - 2e^{-3p} + e^{-4p}}{p^2}$

3.11. $\frac{1}{p} - \frac{e^{-p} - 2e^{-3p}}{p^2}$

3.12. $\frac{1 - e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p} - 2e^{-3p} + e^{-4p}}{p^2}$

3.13. $\frac{1 - 2e^{-2p} + e^{-3p}}{p^2} - \frac{1}{p}$

3.14. $\frac{2e^{-2p} - e^{-p}}{p}$

3.15. $\frac{e^{-p} - 1}{p} + \frac{1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}}{p^2}$

3.16. $\frac{2 - 4e^{-p} + 3e^{-2p} - e^{-3p}}{p}$

3.17. $\frac{1 + e^{-p} - 2e^{-2p}}{p^2} - \frac{3}{p}e^{-p}$

3.18. $\frac{-2 + 2e^{-p} - e^{-2p}}{p}$

3.19. $\frac{1 - 2e^{-p} - e^{-3p}}{p^2}$

3.20. $\frac{2e^{-p} - 1}{p} - \frac{e^{-p} + e^{-3p}}{p^2}$

3.21. $\frac{e^{-2p} - 2e^{-p} - e^{-3p}}{p} + \frac{1 - e^{-p} + e^{-2p} - e^{-3p}}{p^2}$

3.22. $\frac{1 + 2e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-2p} - 1}{p^2}$

3.23. $\frac{1 - e^{-p} - e^{-2p} - e^{-3p}}{p^2}$

3.24. $\frac{1 - e^{-p} + e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-p} + e^{-2p} - 1}{p^2}$

3.25. $\frac{e^{-2p} + e^{-3p} - e^{-p} - 1}{p}$

3.26. $-\frac{1 + e^{-p} - e^{-2p}}{p^2} + \frac{2e^{-2p}}{p}$

3.27. $\frac{2e^{-p} - 1}{p^2}$

3.28. $\frac{-1 - 2e^{-2p}}{p^2} - \frac{1}{p}$

3.29. $\frac{-1 + 2e^{-p} - e^{-2p} + 2e^{-3p} - 2e^{-4p}}{p}$

3.30. $\frac{1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}}{p}$

4.1. $4\sin t+3e^{-t}$ 4.2. $\frac{1}{3}(e^{t}-t^{3}+t^{2}+2t-1)$

4.3. $2e^{-t}-2+\frac{t^{3}}{3}-t^{2}+2t$ 4.4. $sh\,t+1,1ch\,t-0,1\cos 3t$

4.5. $\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+e^{2t}$ 4.6. $\frac{1}{5}(4e^{-2t}+8e^{t}+3t-9)$

4.7. $-1,5e^{-3t}+1,2e^{3t}-0,1\sin t+0,1\cos t$

4.8. $1-\frac{1}{3}e^{-2t}+t+\frac{1}{3}e^{t}$ 4.9. $\frac{1}{37}(44e^{\frac{t}{2}}-13+6\cos 3t-\sin 3t)$

4.10. $\frac{1}{17}(17-35e^{-2t}+4\sin\frac{t}{2}-16\cos\frac{t}{2})$

4.11. $2\cos t+\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}sh\,t$ 4.12. $\frac{e^{-2t}}{25}(1-\cos 5t+5\sin 5t)$

4.13. $e^{t}(1-t)$ 4.14. $sh\,t$

4.15. $\frac{1}{9}(5e^{3t}-6t+4)$ 4.16. $\frac{1}{8}(5\sin 2t-2t\cos 2t)$

4.17. $2e^{-\frac{t}{2}}-1-2\cos t+5\sin t$ 4.18. $e^{-\frac{t}{2}}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)+t^{2}-t-1$

4.19. $3\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t-2t\cos 2t$ 4.20. $\frac{1}{15}(8e^{3t}+12e^{-2t}-5)$

4.21 $\frac{1}{4}(e^{2t}+2t^{2}-1+2\cos 2t+\sin 2t)$ 4.22. $e^{-2t}+2te^{-2t}+e^{2t}$

4.23. $4e^{t}-8e^{2t}+6e^{3t}$ 4.24. $\sin 2t+\sin t-2\cos 3t$

4.25. $e^{-t}(5\cos 3t+2\sin 3t)+\frac{1}{3}e^{-t}t\sin 3t$

4.26. $e^{-5t}+6e^{2t}-4$ 4.27. $-ch\,t$

4.28. $e^{2t}-e^{t}(t^{2}+t-1)$ 4.29. $t\sin t$

4.30. $-2\sin t-\cos 2t$.

5.1. $\frac{1}{2}(1+e^{-2t}-2e^{-2(t-3)}1(t-3))$

5.2. $\frac{1}{4}[1-e^{-4t}+(1-e^{-4(t-1)})\cdot 1(t-1)]$

5.3. $e^{-\frac{t}{2}}+1-(1-e^{-\frac{1}{2}(t-2)})1(t-2)$

5.4. $2[\sin^2\frac{t}{2}-2\sin^2\frac{t-1}{2}1(t-1)+\sin^2\frac{(t-2)}{2}1(t-2)]$

5.5. $\frac{1}{3}(2+1(e^{-3t}-(1-e^{-3(t-1)})1(t-1))$

5.6. $1-\cos t+(1-\cos(t-2))1(t-2)$

5.7. $\frac{1}{2}[(1-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t)+(1-e^{(t-2)}\cos(t-2)-e^{-(t-2)}\sin(t-2))1(t-2)]$

5.8. $\frac{1}{3}[12+(t-1)1(t-1)-1(t-1)+e^{-3(t-1)}1(t-1)]$

5.9. $1-2\cdot 1(t-1)+2\cdot 1(t-2)-3[e^{-3t}-2e^{-3(t-1)}1(t-1)+2e^{-3(t-2)}1(t-2)]$

5.10. $2(1-e^{t})-2(1-e^{t-2})1(t-2)-\frac{1}{2}(1-e^{t-3})1(t-3)+\frac{1}{2}(1-e^{t-5})1(t-5)$

5.11. $-(e^{t}-1+2(e^{t-\pi/2}-1)\cdot 1(t-\frac{\pi}{2}))$

5.12. $t+2+te^{t}-2e^{t}+[t+1+(t-1)e^{t-1}-2e^{t-1}]1(t-1)$

5.13. $2e^{-2t}-(1-e^{-2(t-1)})1(t-1)+1-(1-e^{-2(t-2)})1(t-2)$

5.14. $2(1-e^{-(t-2)})1(t-2)-(1-e^{-(t-1)})1(t-1)$

5.15. $\frac{1}{2}[(1-2e^{t-2}+e^{2(t-2)})1(t-2)-(1-2e^{t-3}+2e^{2(t-3)})1(t-3)]$

5.16. $\frac{1}{2}[1+e^{-2t}+2te^{-2t}-(2(t-1)e^{-2(t-1)}+e^{-2(t-1)}-1)1(t-1)]$

5.17. $\frac{1}{2}\left[(1-2e^{t-1}+e^{2(t-1)})1(t-1)-(1+2e^{t-2}+e^{2(t-2)})1(t-2)\right]$

5.18. $\frac{1}{2}\left[1-(1-e^{-\frac{1}{2}(t-1)})1(t-1)\right]$

5.19. $(1-2e^{-2t})-\frac{1}{2}(1-e^{-2(t-1)})1(t-1)$

5.20. $1+(1-e^{-(t-2)})1(t-2)-(1-e^{-(t-1)})1(t-1)-(1-e^{-(t-3)})1(t-3)$

5.21. $\frac{1}{2}\left[1+e^{-t}(\cos t+\sin t)+(1-e^{-(t-2)}(\cos(t-2)-\sin(t-2)))1(t-2)\right]$

5.22. $\frac{1}{4}(1-e^{-4t})+(1-e^{-4(t-1)})1(t-1)$

5.23. $\frac{1}{2}(1-e^{-3t})-\frac{3}{2}(1-e^{-\frac{3}{2}(t-1)})1(t-1)+\frac{3}{2}(1-e^{-\frac{3}{2}(t-2)})1(t-2)$.

5.24. $(1-e^{-(t-1)})1(t-1)+(1-e^{-(t-2)})1(t-2)+(1-e^{-(t-3)})1(t-3)$

5.25. $\frac{1}{4}\left[1-\cos 2t-(1-\cos 2(t-2\pi))1(t-2\pi)\right]$

5.26. $(1-\cos t)-2(1-\cos(t-1))1(t-1)+(1-\cos(t-2))1(t-2)$

5.27. $4+\frac{1}{9}(e^{-3(t-2)}+3(t-2)-1)\cdot 1(t-2)$

5.28. $\frac{1}{2}(1-\cos 2(t-2))1(t-2)-\frac{1}{4}(1-\cos 2(t-1))1(t-1)$

5.29. $\frac{1}{3}(1-\cos 3(t-3))1(t-3)$

5.30. $\frac{1}{2}(1-e^{-2t})+\frac{1}{2}\left[t-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right]1(t-1)$

6.1. $\begin{cases} x(t)=2e^{t}\operatorname{sh}2t \\ y(t)=e^{t}(2\operatorname{ch}2t-1). \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{4}(2t-1-3e^{2t}) \\ y(t)=\frac{1}{4}(2t-3+3e^{2t}). \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} x(t)=e^{t}(\cos t-2\sin t), \\ y(t)=e^{t}(\cos t+3\sin t). \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} x(t)=\sin t \\ y(t)=\cos t \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{8}(15e^{2t}-13e^{-2t}-10), \\ y(t)=\frac{1}{8}(5e^{2t}+13e^{-2t}-2) \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{8}(15e^{2t}-9e^{-2t}+2), \\ y(t)=\frac{1}{8}(15e^{2t}+3e^{-2t}-2). \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} x(t)=1-\operatorname{ch}t, \\ y(t)=-t-\operatorname{sh}t. \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{4}(e^{t}-e^{-3t}), \\ y(t)=\frac{1}{4}(3e^{t}+e^{-3t}). \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} x(t)=-e^{t}\sin 2t, \\ y(t)=e^{t}\cos 2t \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} x(t)=e^{-2t}(1-2t), \\ y(t)=e^{-2t}(1+2t). \end{cases}$

6.11. $\begin{cases} x(t)=11e^{-8t}-8e^{-2t}, \\ y(t)=11e^{-8t}+4e^{-2t} \end{cases}$

6.12. $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{9}(28e^{3t}-9e^{-t}-3t-1), \\ y(t)=\frac{1}{9}(28e^{3t}+9e^{-t}-3t-1). \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} x(t)=-\frac{4}{5}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{5}{2}t, \\ y(t)=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{5}{2}t+\frac{1}{5}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{5}{2}t. \end{cases}$

6.14. $\begin{cases} x(t)=\cos t+\sin t, \\ y(t)=\cos t-\sin t. \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} x(t)=(1-2t)e^{-2t}, \\ y(t)=te^{-2t} \end{cases}$

6.16. $\begin{cases} x(t)=-5e^{2t}\sin t, \\ y(t)=e^{2t}(\cos t-2\sin t) \end{cases}$

6.17. $\begin{cases} x(t)=e^{-t}(\sin t-2\cos t), \\ y(t)=e^{-t}\cos t \end{cases}$

6.18. $\begin{cases} x(t)=5\operatorname{ch}3t+\frac{4}{3}\operatorname{sh}3t-4 \\ y(t)=1-\operatorname{ch}3t+\frac{11}{3}\operatorname{sh}3t \end{cases}$

6.19. $\begin{cases} x(t)=\frac{19}{9}\operatorname{ch}3t+\frac{2}{3}\operatorname{sh}3t-\frac{10}{9}, \\ y(t)=\frac{5}{9}\operatorname{ch}3t+\frac{1}{3}\operatorname{sh}3t+\frac{4}{9} \end{cases}$

6.20. $\begin{cases} x(t)=\operatorname{sh}3t-\frac{1}{9}\operatorname{ch}3t+\frac{1}{9}, \\ y(t)=\frac{14}{9}\operatorname{ch}3t-\frac{4}{3}\operatorname{sh}3t-\frac{5}{9} \end{cases}$

6.21 $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{4}(12\operatorname{sh}2t+3\operatorname{ch}2t+1), \\ y(t)=\frac{1}{4}(6\operatorname{sh}2t+9\operatorname{ch}2t-1). \end{cases}$

6.22 $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{5}(11\operatorname{sh}3t+\operatorname{ch}3t-1), \\ y(t)=\frac{1}{5}(7\operatorname{ch}3t+5\operatorname{sh}3t-1) \end{cases}$

6.23 $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{2}(5\operatorname{ch}2t+6\operatorname{sh}2t-1), \\ y(t)=\frac{1}{2}(3-8\operatorname{sh}2t-3\operatorname{ch}2t) \end{cases}$

6.24 $\begin{cases} x(t)=3-3\operatorname{ch}t-7\operatorname{sh}t, \\ y(t)=4\operatorname{ch}t+6\operatorname{sh}t-2. \end{cases}$

6.25 $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{8}(11\operatorname{sh}4t-\operatorname{ch}4t+1), \\ y(t)=\frac{1}{8}(9\operatorname{ch}4t+4\operatorname{sh}4t-1) \end{cases}$

6.26 $\begin{cases} x(t)=(-7\operatorname{ch}4t-2\operatorname{sh}4t-1)\frac{1}{8}, \\ y(t)=(\operatorname{ch}4t-4\operatorname{sh}4t-1)\cdot\frac{1}{4} \end{cases}$

6.27 $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{5}(8e^{3t}-6e^{-t}-2), \\ y(t)=\frac{1}{5}(8e^{3t}+6e^{-t}+1) \end{cases}$

6.28 $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{5}(5e^{4t}+4e^{-2t}), \\ y(t)=\frac{1}{5}(8e^{-2t}-5e^{4t}). \end{cases}$

6.29 $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{4}(3\operatorname{ch}2t+1), \\ y(t)=\frac{1}{8}(3-6\operatorname{sh}2t-3\operatorname{ch}2t) \end{cases}$

6.30 $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}2t+\operatorname{ch}2t-3), \\ y(t)=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}2t+\operatorname{ch}2t-1). \end{cases}$

7.1 $\operatorname{arctg}\operatorname{sh}t-\operatorname{sh}t$

7.2 $e^{t}-1+(e^{t}+1)\ln\frac{1+e^{-t}}{2}$

7.3 $e^{t}(t\operatorname{arctg}t-\ln\sqrt{1+t^2})$

7.4 $te^{t}\sin t$

7.5 $2\operatorname{ch}t-2-\operatorname{sh}t\cdot\operatorname{arctg}\operatorname{sh}t$

7.6 $t\operatorname{sh}t-\operatorname{ch}t\ln\operatorname{ch}t$

7.7 $te^{t}-\ln(1+e^{t})(1+e^{t})+\ln 2(1+e^{t})$

7.8 $e^{t}[(t+1)\ln(t+1)-t]$

7.9 $\frac{1}{2}e^{t}-\frac{3}{2}e^{-t}+2-3\ln\frac{e^{t}+3}{4}(1+3e^{-t})$

7.10 $2te^{2t}+(e^{2t}+1)\ln\frac{1+e^{t}}{2}$

7.11 $\operatorname{sh}t(t-\operatorname{th}\frac{t}{2})-\operatorname{ch}t\ln\frac{1+\operatorname{ch}t}{2}$

7.12 $t-(1+e^{-t})\ln\frac{1+e^{t}}{2}$

7.13 $\frac{1}{2}e^{2t}\ln\operatorname{ch}2t$

7.14 $\frac{1}{8}\operatorname{sh}^2 2t$

7.15 $1-\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t\cdot\operatorname{arctg}\operatorname{sh}t$

7.16 $e^{-t}-1+(1+e^{-t})\ln\frac{1+e^{t}}{2}$

7.17 $e^{-t}(t+1)-e^{-t}-e^{-t}\ln(t+1)$

7.18 $e^{\frac{t}{2}}-1-2\ln\frac{1+e^{\frac{t}{2}}}{2}$

7.19 $\frac{\operatorname{sh}^2 t}{2}$

7.20 $\frac{e^t}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+e^t}{2}$ 7.21 $e^{-t}(\frac{t^2}{2}+t-(t+1)\ln(t+1))$

7.22 $1-e^t+(e^t-2)\ln\frac{2+e^t}{3}$ 7.23 $\operatorname{sh}t\ln\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}t(\operatorname{sh}t-\operatorname{arctg}\operatorname{sh}t)$

7.24 $\frac{e^t-1}{e^t}-e^{-t}\ln\frac{1+e^t}{2}$ 7.25 $e^{-t}(t\operatorname{arctg}t-\ln\sqrt{1+t^2})$

7.26 $e^t\ln\operatorname{ch}t$ 7.27 $e^{-t}\ln\operatorname{ch}t$

7.28 $-\frac{1}{4}(\operatorname{ch}2t+\operatorname{sh}2t\operatorname{arctg}\operatorname{sh}2t)$

7.29 $e^{-2t}\ln\frac{e^{2t}+1}{2}+\frac{1-e^{2t}}{e^{2t}(1+e^{2t})}+\operatorname{th}t$

7.30 $\frac{1-e^{-t}}{2}-\frac{2\operatorname{sh}t}{1+e^t}-\ln\frac{1+e^{-t}}{2}$

8.1 $\frac{1}{2}(\sin x+\operatorname{sh}x)$ 8.2 $x-\frac{1}{2}x^2$

8.3 $1-\frac{x^2}{2}$ 8.4 $\frac{1}{2}(\cos x+\operatorname{ch}x)$

8.5 $\frac{1}{2}\sin 2x+\operatorname{ch}2x$ 8.6 $x^4-x^3+12x^2-6x$

8.7 $e^x(1+x)$ 8.8 $\frac{1}{3}(4-\cos\sqrt{3}x)$

8.9 $\frac{1}{2}(e^x+\sin x+\cos x)$ 8.10 $2e^x-x^2-2x-2$

8.11 $\operatorname{ch}x-xe^{-x}$ 8.12 1

8.13 $\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{x}{2}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 8.14 1

8.15 e^{2x} 8.16 $\frac{1}{5}(e^{3x}-\cos x+2\sin x)$

8.17. $\frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{ch} x)$

8.18. $x + \frac{1}{6}x^3$

8.19. $\sin x$

8.20. $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

8.21. $\frac{1}{2}x \operatorname{ch} x + \frac{1}{2}\operatorname{sh} x$

8.22. $1 + xe^x$

8.23. $(x+1)^2 e^x$

8.24. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

8.25. $2e^{2x} - x^2 e^x$

8.26. $2\cos x - 1$

8.27. $x - \frac{1}{6}x^3$

8.28. $\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{x} + e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

8.29. $\frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{1}{16} + \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

8.30. $\frac{2}{3}\operatorname{sh} x + \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\,x$