

Министерство образования и науки РФ
Федеральное агентство по образованию
Псковский государственный политехнический институт

Н.И. Солнышкин, И.И. Бандурин

Расчет переходных процессов
в линейных электрических цепях
с сосредоточенными параметрами

Методические указания для самостоятельной работы по курсу
"Теоретические основы электротехники"

Псков
2007

Введение

Одним из основных видов занятий по курсу ТОЭ является выполнение студентами самостоятельной работы. Самостоятельная работа направлена на закрепление изучаемого материала и заключается в самостоятельном решении задач по пройденным темам курса. Самостоятельная работа над решением задач помогает студентам проверить степень усвоения ими курса, получить необходимые знания о сравнительных достоинствах и недостатках основных методов расчета, а также физических процессах, происходящих в электрических цепях, вырабатывает у них навык четко и кратко излагать свои мысли.

Общие указания

Выбор варианта. Индивидуальный вариант студента определяет преподаватель. Номер схемы цепи определяется второй цифрой номера индивидуального варианта.

Правила оформления работы

1. Расчетная работа выполняется на отдельных листах, используя только одну сторону листа. Образец выполнения титульного листа приведен в приложении 2.
2. Задание должно быть полностью внесено в работу. Работа должна содержать все пункты задания.
3. Общий план решения и все математические действия должны иметь достаточно полные пояснения.
4. Исходные формулы, промежуточные и окончательные результаты должны быть четко выделены из общего текста. В окончательных результатах для каждой величины должна быть указана размерность в соответствии с международной системой единиц СИ.
5. Схема, потенциальная диаграмма должны быть выполнены аккуратно, в достаточно крупном масштабе в соответствии с действующими стандартами.
6. Работа засчитывается, если решения не содержат ошибок и выполнены перечисленные требования.
7. Если работа не зачтена, она должна быть выполнена заново. Если неправильно выполнена часть задания, то все необходимые поправки делают в конце работы (сохраняя первоначальный вариант).

Методы расчета переходных процессов

1. Переходные процессы (общие сведения)

Процессы, протекающие в электрических цепях при переходе от одного состояния к другому, называются переходными.

Переходные процессы могут сопровождаться перенапряжением или сверхтоками на отдельных участках цепи. Кроме того, целый ряд устройств автоматики и радиотехники работают длительное время в переходном режиме. Поэтому изучение этих режимов весьма важно для инженерной практики.

Переходный процесс возникает в результате коммутации. Коммутацией называют включения, отключения, переключения ветвей электрической схемы, приводящие к изменению схемы или ее параметров. Считается, что коммутация происходит мгновенно.

При наличии в цепи накопителей энергии: катушек индуктивности и конденсаторов переходный процесс имеет длительность во времени. Объясняется это тем, что каждому состоянию электрической цепи соответствует определенный запас энергии в индуктивностях и емкостях. Переход к новому режиму связан с нарастанием или убыванием энергии накопителей. При конечной мощности энергия может изменяться только непрерывно.

Здесь рассматриваются переходные процессы в линейных электрических цепях. Поэтому исключаются из рассмотрения случаи, когда при коммутации возникает электрическая дуга (нелинейный элемент).

Если нет специального указания, будем считать, что коммутация в цепи происходит в момент времени $t=0$. При этом, последний момент времени перед коммутацией обозначим $t=0-$, а первый момент времени сразу после коммутации $t=0+$.

Из непрерывности энергии накопителей вытекают законы коммутации.

1. Если значение напряжения, приложенного к индуктивному элементу, конечно и индуктивность в момент коммутации не изменяется, то ток в индуктивном элементе (и потокосцепление) при коммутации изменяется непрерывно:

$$i_L(0+) = i_L(0-).$$

2. Если ток, протекающий через емкостный элемент, имеет конечное значение и значение емкости в момент коммутации не изменяется, то напряжение на емкостном элементе (и заряд) при коммутации изменяется непрерывно:

$$u_C(0+) = u_C(0-).$$

Так как в реальных физических цепях каждый элемент обладает и индуктивностью и емкостью, то в них не могут скачком изменяться ни токи, ни напряжения. Однако если, абстрагируясь от действительности, пренебречь в катушке ее распределенной емкостью, то получим, что напряжение на катушке может изменяться скачком. Точно так же, если полностью пренебречь индуктивностью конденсатора, то в нем ток может изменяться скачком.

Если в результате идеализации процессов теоретически окажется возможным появление длящихся бесконечно малое время бесконечно больших напряжений на последовательно включенных отдельных индуктивных элементах цепи, хотя суммарное напряжение остается конечным, или окажется возможным появление длящихся бесконечно малое время бесконечно больших токов в отдельных, параллельно включенных, емкостных элементах цепи, хотя суммарный ток во всех этих ветвях остается конечным, то условие непрерывности энергии накопителей не выполняется, так как при этом величина $\Delta W = p\Delta t = \infty \cdot 0$ становится неопределенной. В них случаях следует различать две стадии переходного процесса. На первой стадии происходит практически мгновенное перераспределение зарядов конденсаторов и потокосцеплений катушек индуктивности. Вторая стадия переходного процесса осуществляется за

конечный интервал времени. Можно не рассчитывать переходный процесс на первой стадии, а сразу переходить ко второй стадии. В этом случае будем называть такие задачи - задачами с «некорректными» начальными условиями.

При расчете переходного процесса в схемах с «некорректными» начальными условиями следует применять законы коммутации в обобщенной форме.

Законы коммутации в обобщенной форме вытекают из законов Кирхгофа.

Из второго закона Кирхгофа следует, что при коммутации сумма изменений потокоцеплений индуктивных элементов любого замкнутого контура равна нулю, то есть *алгебраическая сумма потокоцеплений индуктивных элементов замкнутого контура после коммутации равна алгебраической сумме потокоцеплений индуктивных элементов этого контура до коммутации.*

$$\sum \pm \Psi_k(0+) = \sum \pm \Psi_k(0-)$$

Здесь потокоцепление берут со знаком плюс, если направление обхода контура совпадает с положительным направлением тока в индуктивном элементе. Пример.

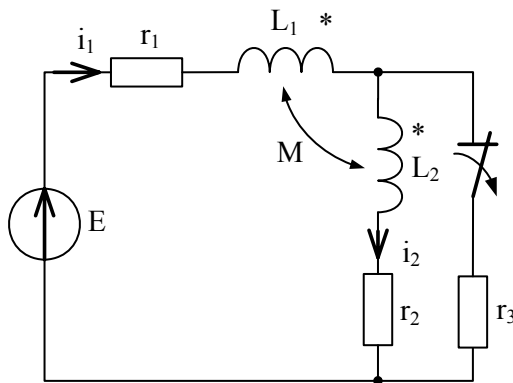


Рис. 1-1

Из первого закона Кирхгофа следует, что сумма изменений зарядов на емкостных элементах, присоединенных к общему узлу, равна нулю, то есть *алгебраическая сумма зарядов на емкостных элементах, присоединенных к общему узлу, после коммутации, равна алгебраической сумме зарядов этих емкостных элементов до коммутации.*

$$\sum \pm q_k(0+) = \sum \pm q_k(0-).$$

Здесь знак заряда берется в соответствии с направлением напряжения на емкостном элементе, по отношению к рассматриваемому узлу.

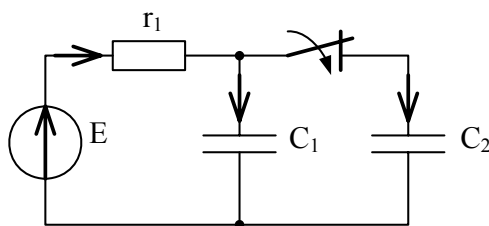


Рис. 1-2

Здесь $u_{C_1}(0-) = E$, а $u_{C_2}(0-)$ - значение напряжения второго емкостного элемента до коммутации.

Токи и напряжения в переходном процессе называют переходными величинами (функциями). Переходная величина определяется полным решением дифференциального уравнения относительно этой функции. Решение дифференциального уравнения может осуществляться различными методами.

$$L_1 i_1(0-) - M i_2(0-) + L_2 i_2(0-) - M i_1(0-) = \\ L_1 i_1(0+) - M i_2(0+) + L_2 i_2(0+) - M i_1(0+).$$

$$\text{После коммутации } i_1(0+) = i_2(0+) = i(0)$$

Тогда

$$i(0+) = \frac{(L_1 - M)i_1(0-) + (L_2 - M)i_2(0-)}{L_1 + L_2 - 2M},$$

$$i_1(0-) = \frac{E}{r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}}; \text{ где } i_2 = \frac{E r_3}{r_1 r_3 + r_2 r_3 + r_1 r_2}$$

Пример.

$$C_1 u_{C_1}(0-) + C_2 u_{C_2}(0-) = C_1 u_{C_1}(0+) + C_2 u_{C_2}(0+).$$

$$\text{После коммутации } u_{C_1}(0+) = u_{C_2}(0+) = u_C(0).$$

$$\text{Тогда } u_C(0) = \frac{C_1 u_{C_1}(0-) + C_2 u_{C_2}(0-)}{C_1 + C_2}.$$

2. Классический метод расчета переходных процессов

Классический метод расчета переходных процессов заключается в следующем. Составляем уравнения электрического состояния цепи после коммутации согласно первому и второму законам Кирхгофа. Если заданными являются э.д.с. источников, то неизвестными будут токи во всех p ветвях цепи. Пусть требуется найти ток i_k в k -ой ветви. Исключая последовательно все остальные токи, получим одно дифференциальное уравнение порядка n относительно тока i_k :

$$\sum_{s=0}^n a_s \frac{d^s i_k}{dt^s} = f_k(t).$$

Порядок n уравнения определяется конфигурацией цепи и характером ее элементов. Свободный член $f_k(t)$ содержит в себе заданные э.д.с.

Полное решение этого дифференциального уравнения состоит из частного решения $i_{k_{пп}}$ (принужденная составляющая), определяемого видом функции $f_k(t)$, и общего решения $i_{k_{св}}$ (свободная составляющая) однородного уравнения:

$$\sum_{s=0}^n a_s \frac{d^s i_{k_{св}}}{dt^s} = 0, \text{ то есть } i_k = i_{k_{пп}} + i_{k_{св}}.$$

Ток $i_{k_{св}}$ (t) называют свободным током, так как он определяется из уравнения при отсутствии источников э.д.с.

Свободный ток возникает вследствие того, что при коммутации в цепи имеющиеся запасы энергии в полях от предыдущего установившегося режима не соответствуют запасам энергии в полях, которые будут в новом установившемся режиме после происшедших изменений в цепи.

При $t \rightarrow \infty$ ток $i_{k_{св}}$ (t) стремится к нулю, так как процесс в цепи, обладающей конечным сопротивлением, должен затухать при отсутствии в цепи источников энергии. Поэтому ток $i_k(t)$ стремится со временем к $i_{k_{пп}}$ (t). Следовательно, частное решение $i_{k_{пп}}$ является током установившегося режима, который устанавливается после коммутации.

Принужденная составляющая переходной величины (частное решение) определяется по схеме, образованной после коммутации. В схеме с периодическими (постоянными) источниками принужденная составляющая также будет периодической (постоянной) во времени.

Для определения $i_{k_{св}}$ находим n корней характеристического уравнения

$$\sum_{s=0}^n a_s p^s = 0.$$

В случае, если все корни простые, имеем

$$i_{k_{св}} = \sum_{s=1}^n A_s e^{p_s t},$$

и, следовательно, полное решение имеет вид

$$i_k = i_{k_{пп}} + \sum_{s=1}^n A_s e^{p_s t}.$$

Здесь A_{k_s} - произвольные постоянные интегрирования. Они определяются из начальных условий, о чем будет сказано ниже.

В случае наличия кратных корней характеристического уравнения приведенного выше выражение для i_k после определения всех величин A_k из начальных условий будет содержать неопределенности, раскрывая которые получим выражение i_k для этого случая.

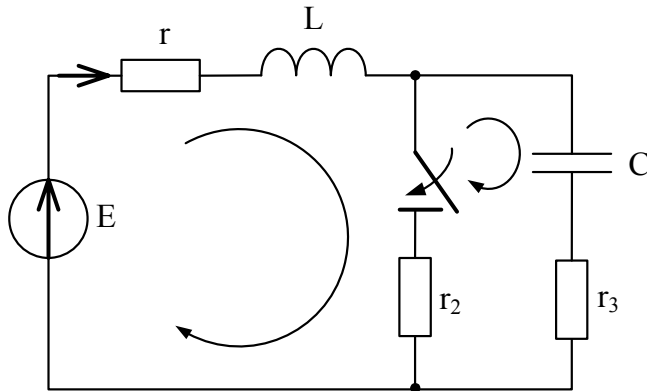
Характеристическое уравнение можно составить одним из следующих способов.

Первый способ. Определитель матрицы контурных сопротивлений (узловых проводимостей), составленный по методу контурных токов (узловых напряжений) для послекоммутационной схемы заменой $j\omega$ на p , приравняют к нулю:

$$\det Z^{(k)}(p) = 0 \text{ или } \det Y^{(y)}(p) = 0.$$

Данное алгебраическое уравнение решают относительно p , что позволяет получить корни характеристического уравнения.

Для схемы рис. 2-1 имеем матрицу контурных сопротивлений



$$Z^{(k)}(p) = \begin{bmatrix} r + pL + r_3 & -r_3 \\ -r_3 & r_3 + r_2 + 1/pC \end{bmatrix}.$$

Приравнявая к нулю определитель этой матрицы, получим характеристическое уравнение

$$\det Z^{(k)}(p) = (r + pL + r_3)(r_3 + r_2 + 1/pC) - r_3^2 = 0.$$

Рис. 2-1

Второй способ. В схеме, образованной после коммутации, э.д.с. и токи источников принимают равными нулю (источники э.д.с. закорачивают, а ветви с источниками тока разрывают). В полученной схеме разрывают любую ветвь и входное комплексное сопротивление (проводимость) по отношению к этим зажимам с заменой $j\omega$ на p приравняют к нулю: $Z_{BX}(p)=0$ или $Y_{BX}(p)=0$. Для схемы рис. 2-1 имеем входное сопротивление по отношению ко второй ветви.

$$Z_{BX}(p) = r_2 + \frac{1}{pC} + \frac{(r_1 + pC) \cdot r_3}{r_1 + pL + r_3} = 0.$$

Решая это уравнение относительно p , получим два корня p_1 и p_2 .

Как было отмечено выше, постоянные интегрирования определяются из начальных условий: значений переходной величины и ее $(n-1)$ производных при $t=0+$.

Начальные значения тока (потокосцепления) индуктивного элемента и напряжения (заряда) емкостного элемента определяются из законов коммутации и называются независимыми начальными условиями. Если эти величины равны нулю, то схема имеет нулевые начальные условия.

Начальные условия всех остальных токов и напряжений и производных по времени от токов и напряжений на элементах схемы, называются зависимыми начальными

условиями. Зависимые начальные условия определяются из уравнений, составленных по законам Кирхгофа, для послекоммутационной схемы с учетом законов коммутации.

Пример. Найдём независимые и зависимые начальные условия для схемы рис.2-2 ($E=\text{const}$).

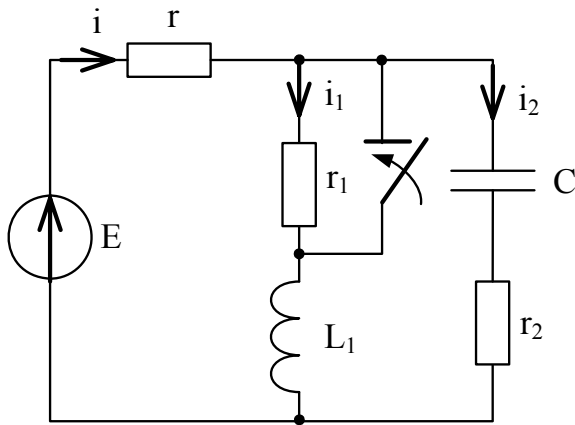


Рис. 2-2

Независимые начальные условия

$$i_1(0-) = i_1(0+) = i_1(0) = \frac{E}{r + r_1};$$

$$u_C(0-) = u_C(0+) = u_C(0) = \frac{E}{r + r_1} r_1;$$

а) Запишем уравнения электрического состояния послекоммутационной схемы по законам Кирхгофа для момента времени $t=0$.

$$i(0) = i_1(0) + i_2(0);$$

$$ri(0) + u_C(0) + r_2 i_2(0) = E;$$

$$L \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = u_C(0) + r_2 i_2(0);$$

Отсюда определим зависимые начальные условия, например:

$$i_2(0) = \frac{E - u_C(0) - ri_1(0)}{r + r_2};$$

$$i(0) = \frac{E - u_C(0) - ri_1(0)}{r + r_2} + i_1(0);$$

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_C(0) + r_2 i_2(0)}{L} = \frac{1}{L} \left(\frac{r_2}{r + r_2} E + \frac{r}{r + r_2} u_C(0) - \frac{r r_2}{r + r_2} i_1(0) \right).$$

б) Для послекоммутационной схемы рис.2-2 катушка индуктивности заменяем источником тока с током $J = i_L(0-)$ по направлению совпадающему с положительным направлением тока, а конденсатор — источником ЭДС с $e = u_C(0-)$ противоположно положительному направлению тока рис.2-3. Отсюда, по методу наложения, можно сразу записать:

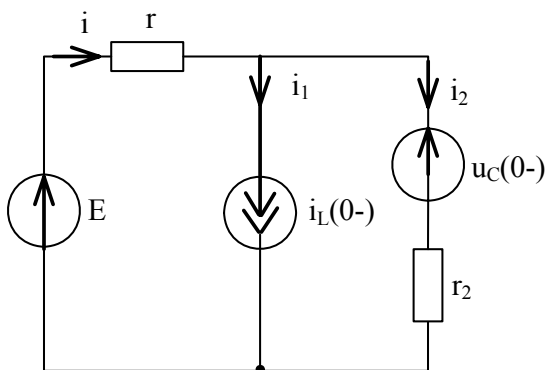


Рис. 2-3

$$i_2(0) = \frac{E}{r + r_2} - \frac{u_C(0)}{r + r_2} - \frac{i_L(0) \cdot r}{r + r_2} = \frac{E - u_C(0) - ri_1(0)}{r + r_2};$$

$$i(0) = \frac{E - u_C(0) - ri_1(0)}{r + r_2} + i_1(0);$$

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_C(0) + r_2 i_2(0)}{L}.$$

2.1. Алгоритм расчета переходных процессов классическим методом

Расчет переходных процессов классическим методом рекомендуется проводить по следующей алгоритмической схеме:

1. Составить систему уравнений энергетического состояния цепи по любому известному методу, описывающую процесс в цепи после коммутации.
2. Найти принужденную составляющую искомой величины, используя для расчета любой известный метод.
3. Записать с точностью до постоянных выражение для свободной составляющей искомой величины. Для этого:
 - а) сформировать характеристическое уравнение;
 - б) определить его корни;
 - в) записать решение.
4. Записать с точностью до постоянных полное решение для искомой величины как сумму принужденной и свободной составляющих.
5. Определить постоянные интегрирования. Для этого:
 - а) записать выражения для искомой величины и ее (n-1) производной (где n -порядок характеристического уравнения) при $t=0$;
 - б) расчетом установившегося режима в цепи до коммутации и на основе законов коммутации определить независимые начальные условия $i_L(0) = i_L(0+)$; $u_C(0) = u_C(0+)$;
 - в) с помощью независимых начальных условий и системы уравнений п.1, записанной для $t=0$, определить зависимые начальные условия (значения искомой величины и ее (n-1) производной при $t=0$);
 - г) определить постоянные интегрирования, содержащиеся в общем решении для свободной составляющей полного решения.
6. Записать окончательное решение для искомой переходной функции.

2.2. Пример расчета переходного процесса классическим методом

В цепи рис. 2-3 размыкается ключ К. При этом начинается процесс перехода от одного установившегося режима к другому. Параметры элементов: $e = 100\sqrt{2} \sin \omega t$, В; $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$; $L = 0,01$ Гн; $C = 0,0001$ Ф; $r = 10$ Ом.

Определить переходные функции токов.

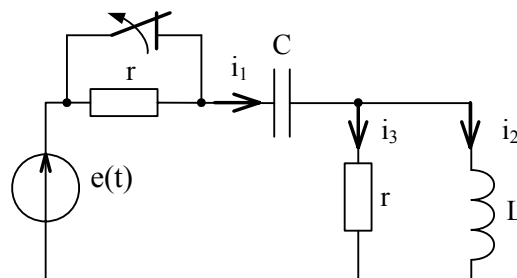


Рис. 2-3

Составим систему уравнений электрического состояния цепи для послекоммутационной схемы

$$i_1 = i_2 + i_3; \quad ri_1 + u_C + L \frac{di_2}{dt} = e(t), \quad u_L = L \frac{di_2}{dt} = ri_3.$$

Будем искать ток в индуктивности в переходном режиме. Остальные токи определим по выражению тока i_2 , используя уравнения (1).

Рассчитаем принужденную составляющую тока i_2 . Воспользуемся для расчета комплексным методом. Для комплексной схемы рис. 2-4 имеем:

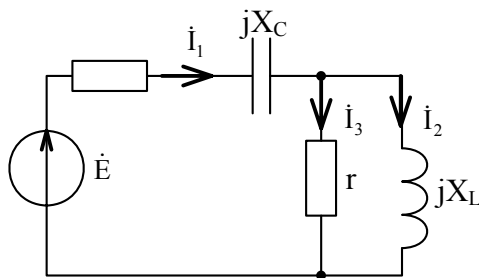


Рис. 2-4

$$Z_1 = r - jx_c = 10 - j10 \text{ Ом};$$

$$Z_2 = jx_L = 10j \text{ Ом};$$

$$Z_{23} = \frac{Z_2 r}{Z_2 + r} = 5 + j5 \text{ Ом};$$

$$Z_3 = Z_1 + Z_{23} = 15 + j15 \text{ Ом};$$

$$I_2 = \frac{EZ_{23}}{Z_3 Z_2} = \frac{Er}{Z_1 Z_2 + Z_2 r + r Z_1} = 4,45e^{-j26,6^\circ}; \quad i_2(t) = 6,3 \sin(\omega t - 26,6^\circ), \text{ А.}$$

Сформируем характеристическое уравнение.

Входное сопротивление для схемы рис.2 равно:

$$Z(p) = r + \frac{1}{pC} + \frac{pLr}{pL + r}.$$

Из условия $Z(p)=0$ получаем уравнение:

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0, \text{ где } \delta = \frac{r^2 C + L}{4rLC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{2LC}.$$

Определяем значение корней:

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm j\omega' = -500 \pm j500.$$

Корни характеристического уравнения получились комплексными. Выражение для свободной составляющей тока i_2 запишем в виде:

$$i_{2\text{св}} = e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega' t + A_2 \cos \omega' t).$$

Запишем полное решение для тока i_2 и выражение производной по времени от тока i_2 :

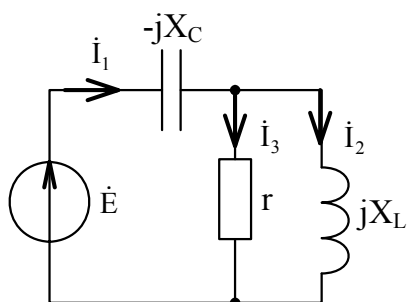
$$i_2(t) = i_{2\text{пр}}(t) + i_{2\text{св}}(t) = 6,3 \sin(\omega' t - 26,5^\circ) + e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega' t + A_2 \cos \omega' t).$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} = 6,3 \sin(\omega' t - 26,5^\circ) - e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega' t + A_2 \cos \omega' t) + e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega' t + A_2 \cos \omega' t).$$

Для определения постоянных интегрирования, нужно знать начальные условия:

$$i_2(0) \text{ и } \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0}.$$

Определим независимые начальные условия. Для этого рассчитаем установившийся режим в цепи до коммутации (рис. 2-5).



$$Z_1 = -jx_c; \quad Z_2 = jx_L;$$

$$Z_{23} = \frac{Z_2 r}{Z_2 + r}; \quad Z_3 = Z_1 + Z_{23};$$

$$U_C = \frac{E}{Z_3} Z_1 = 100 - j100; \quad u_C(0) = \sqrt{2} \text{Im}(U_C) = 141, \text{ В.}$$

$$I_2 = \frac{E \cdot Z_{23}}{Z_3 Z_2} = 10; \quad i_2(0) = \sqrt{2} \operatorname{Im}(I_2) = 0, \text{ A.}$$

Рис. 2-5

Запишем систему уравнений (1) для момента времени $t=0$:

$$i_1(0) = i_2(0) + i_3(0); \quad r i_1(0) + u_c(0) + L \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = e(0); \quad L \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = r i_3(0).$$

Отсюда находим:

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = \frac{e(0) - r i_2(0) - u_c(0)}{2L} = 0,707 \cdot 10^4, \text{ A/c.}$$

Подставляя начальные условия $i_2(0)$ и $\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0}$ в выражения для искомой величины i_2 , и

ее производной $\frac{di_2}{dt}$ при $t=0$, получим систему алгебраических уравнений

относительно постоянных интегрирования:

$$0 = -2,81 + A_2, \quad 7070 = 5600 - 500A_2 + 500A_1.$$

Отсюда $A_1 = 5,67$, $A_2 = 2,81$.

Итак, имеем: $i_2(t) = 6,3 \sin(\omega't - 26,5^\circ) + 6,32e^{-500t} \sin(\omega't + 26,36^\circ), \text{ A.}$

Токи i_1 и i_3 найдем из уравнений (1).

$$u_L = r i_3 = L \frac{di_2}{dt};$$

$$i_3 = \frac{L}{r} \frac{di_2}{dt} = 6,3 \sin(\omega't + 63,5^\circ) - 4,45e^{-\delta t} \sin(\omega't - 18,5^\circ), \text{ A;}$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = 8,9 \sin(\omega't + 18,5^\circ) + 4,47e^{-\delta t} \sin(\omega't + 71^\circ), \text{ A.}$$

2.3. Контрольные вопросы и задачи

1. Как можно определить постоянную времени в цепи с одним накопителем энергии по осциллограмме тока или напряжения в какой-либо ветви?
2. Определить, какой процесс: заряд или разряд конденсатора в цепи на рис. 2 – будет происходить быстрее?

Ответ: заряд.

3. Влияет ли на постоянную времени цепи тип питающего устройства: источник напряжения или источник тока?
4. В цепи на рис. 2 **$R_1 = R_2 = R_3 = 100 \text{ Ом}$** , $C=10 \text{ мкФ}$. Чему должна быть равна индуктивность L катушки, устанавливаемой на место конденсатора, чтобы постоянная времени не изменилась?

Ответ: $L=0,225 \text{ Гн}$.

5. Как влияет на характер переходного процесса в R-L-C-контуре величина сопротивления R и почему?

6. Определить ток **$i(t)$** через катушку индуктивности в цепи на рис. 7, если

$$\mathbf{U_0 = 500 \text{ В} ; R_1 = R_3 = 20 \text{ Ом} ; R_2 = R_4 = 80 \text{ Ом} ; R_5 = 8 \text{ Ом} ; L = 2 \text{ Гн} .}$$

Ответ: $i(t) = 7,5(1 - e^{-20t}) A$

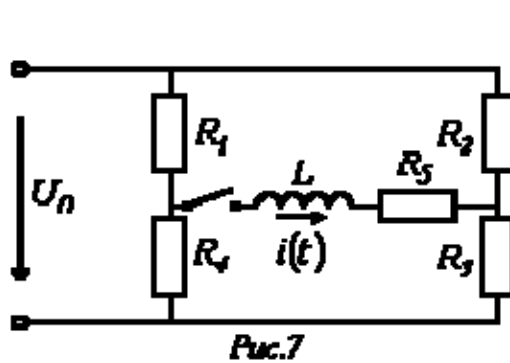


Рис.7

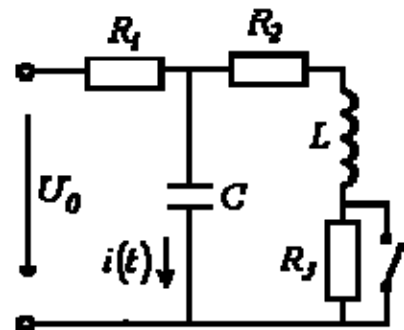


Рис.8

7. Определить ток $i(t)$ в ветви с конденсатором в цепи на рис. 8, если $U_0 = 60 B$; $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $R_2 = R_3 = 40 \text{ Ом}$, $L = 0,2 \text{ Гн}$; $C = 1 \text{ мкФ}$

Ответ: $i(t) = 2,4(e^{-1,5 \cdot 10^4 t} - e^{-10^4 t}) A$

8. Составить характеристическое уравнение для цепи на рис. 1, используя выражение входного сопротивления относительно места разрыва ветви с резистором R_1 .
9. Может ли в одной части линейной цепи протекать колебательный переходный процесс, а в другой – апериодический?
10. Для чего в схеме на рис. 5 служит цепочка, состоящая из диода и резистора R?
11. Почему можно разрывать ветвь с конденсатором и нельзя – ветвь с индуктивным элементом?
12. Почему корни характеристического уравнения не зависят от того, относительно какой переменной было записано дифференциальное уравнение?
13. Для цепи на рис. 8 составить характеристическое уравнение и определить, при каких значениях R_2 переходный процесс в ней будет носить апериодический характер, если $L = 1 \text{ Гн}$, $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $C = 10 \text{ мкФ}$

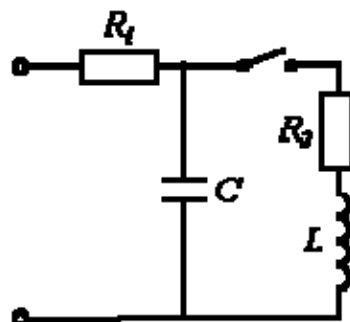


Рис.8

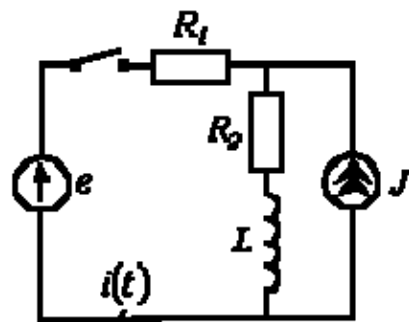


Рис.9

14.

Ответ: $368 \text{ Ом} < R_2 < 1632 \text{ Ом}$

15. Определить $i(t)$ в цепи на рис. 9, если $R_1 = R_2 = 5 \text{ Ом}$, $L = 0,01 \text{ Гн}$, $e = 100\sqrt{2} \sin(1000t - 0,2618) B$, $J = 4 A$

Ответ: $i(t) = -2 + 10 \sin(1000t - \pi/6) + 7e^{-1000t} A$

3. Метод переменных состояния расчета переходных процессов

Метод переменных состояния для определенного круга задач позволяет рассчитать переходные процессы в общей форме, формализуя весь процесс решения таким образом, что оказывается возможным получить это решение при помощи ЭВМ.

В электрических цепях переменными состояниями являются токи (потокосцепления) в индуктивных элементах и напряжения (заряды) на емкостных элементах. Переменные состояния определяют энергетическое состояние цепи. Переменные состояния совместно с источниками определяют значение любой переменной (ток, напряжение) цепи в любой момент времени.

3.1. Составление уравнений по методу переменных состояния

По методу переменных состояния составляют две системы уравнений (уравнения состояния и уравнения выходных величин):

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X} + \mathbf{B}_1 \mathbf{V}, \quad (3-1)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_2 \mathbf{X} + \mathbf{B}_2 \mathbf{V}, \quad (3-2)$$

где $\dot{\mathbf{X}}$ - вектор-столбец переменных состояния (токи в индуктивных и напряжения на емкостных элементах);

\mathbf{Y} - вектор-столбец выходных величин (искомые токи и напряжения);

\mathbf{V} - вектор-столбец входных воздействий (токи источников тока и э.д.с. источников);

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ - матрицы, элементы которых определяются параметрами и топологией схемы.

Первое уравнение связывает первые производные по времени переменных состояния; переменными состояниями и внешними воздействиями. Следует отметить, что представление дифференциальных уравнений для переменных состояния в канонической форме удобно при решении их на ЭВМ, так как для численного решения такой системы можно использовать стандартное математическое обеспечение.

Второе уравнение является алгебраическим и связывает выходные величины с переменными состояниями и внешними воздействиями.

Уравнения состояния и уравнения выходных величин могут быть получены либо с помощью уравнений Кирхгофа для послекоммутационной схемы, либо путем использования метода наложения.

В первом случае сначала записывают исходные уравнения для схемы по законам Кирхгофа; затем выбирают переменные состояния и решают уравнения относительно первых производных переменных состояния.

Не останавливаясь на втором подходе получения уравнений, отметим лишь, что он основан на замене емкостей источниками э.д.с, индуктивностей - источниками тока и применении метода наложения.

Решают уравнения состояния аналитически или численно при заданных начальных условиях для переменных состояния. Начальные условия для переменных состояния являются независимыми и определяются из расчета установившегося режима в цепи до коммутации.

3.2. Пример составления уравнений по методу переменных состояния

Рассмотрим пример составления уравнений.

Пусть требуется составить уравнения состояния и уравнения для выходных переменных тока i_3 и напряжения u_{C_2} с помощью законов Кирхгофа для послекоммутационной схемы рис. 3-1.

Выбираем за переменные состояния ток в индуктивности i_1 и напряжение на емкости u_{C_2} .

а) Записываем уравнения по законам Кирхгофа

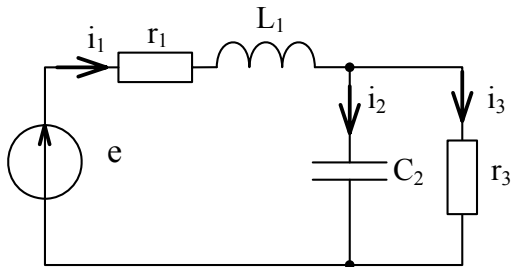


Рис. 3-1

$$i_1 = i_2 + i_3,$$

$$r_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} + u_{C_2} = e,$$

$$u_{C_2} = r_3 i_3,$$

$$i_2 = C_2 \frac{du_{C_2}}{dt}.$$

Из этой системы уравнений получаем уравнения в нормальной форме:

$$\frac{du_{C_2}}{dt} = -\frac{1}{r_3 C_2} u_{C_2} + \frac{1}{C_2} i_1;$$

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{1}{L_1} u_{C_2} - \frac{r_1}{L_1} i_1 + \frac{1}{L} e$$

или в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{C_2} \\ \dot{i}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_3 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{r_1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{C_2} \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} e$$

или $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X} + \mathbf{B}_1 \mathbf{V}$,

б) Формируем уравнения по вспомогательной схеме. На схеме L-элемент заменен

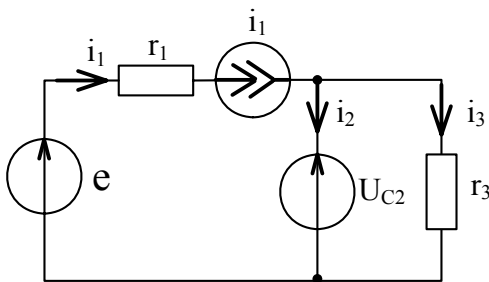


Рис. 3-2

источником тока $i_1(t)$, а C - элемент – источником напряжения $u_{C_2}(t)$. Требуется тем или иным методом получить выражение для $i_3(t)$ и $u_L(t)$. Используя метод наложения и 2 - ой закон Кирхгофа получаем:

$$i_2 = -\frac{u_{C_2}}{r_3} + i_1,$$

$$i_3 = \frac{u_{C_2}}{r_3},$$

$$r_1 i_1 + u_L + u_{C_2} = e.$$

Таким образом:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{u_L}{L_1} = \frac{e - r_1 i_1 - u_{C_2}}{L_1} = -\frac{1}{L_1} u_{C_2} - \frac{r_1}{L_1} i_1 + \frac{1}{L} e$$

$$\frac{du_{C_2}}{dt} = \frac{i_2}{C_2} = \frac{-\frac{u_{C_2}}{r_3} + i_1}{C_2} = -\frac{1}{r_3 C_2} u_{C_2} + \frac{1}{C_2} i_1$$

Уравнения выходных величин имеют вид

$$\begin{aligned} i_3 r_3 &= u_C \\ u_{r_1} &= r_1 i_1 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} i_3 \\ u_{r_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/r_3 & 0 \\ 0 & r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C_2} \\ i_1 \end{bmatrix},$$

то есть $Y=A_2X$.

3.3. Контрольные вопросы и задачи

1. Какие требования и почему выдвигаются к уравнениям состояния?
2. Что включает в себя система уравнений при расчете переходного процесса в цепи методом переменных состояния?
3. Перечислите основные этапы методики составления уравнений состояния.
4. Записать матрицы A и B для цепи на рис. 5, если $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 60 \text{ Ом}$, $R_4 = 110 \text{ Ом}$, $L_3 = 0,4 \text{ Гн}$, $L_6 = 0,8 \text{ Гн}$, $C_1 = 20 \text{ мкФ}$.

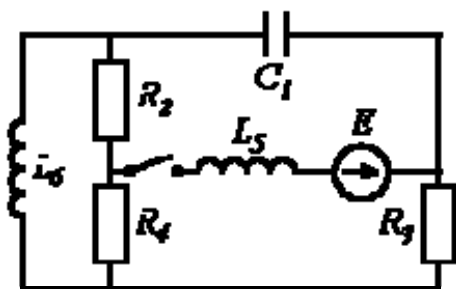


Рис.5

Ответ: $A = \begin{bmatrix} -657 & -111,9 & -8555 \\ 2,24 & 44,7 & 15,8 \\ 0,86 & 7,9 & -513,1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. Операторный метод расчета переходных процессов

Сущность операторного метода заключается в том, что функции $f(t)$ вещественной переменной t , которую называют **оригиналом**, ставится в соответствие функция $F(p)$ комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$, которую называют **изображением**. В результате этого производные и интегралы от оригиналов заменяются алгебраическими функциями от соответствующих изображений (дифференцирование заменяется умножением на оператор p , а интегрирование – делением на него), что в свою очередь определяет переход от системы интегро-дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных. При решении этих уравнений находятся изображения и далее путем обратного перехода – оригиналы. Важнейшим моментом при этом в практическом плане является необходимость определения только независимых начальных условий, что существенно облегчает расчет переходных процессов в цепях высокого порядка по сравнению с классическим методом.

Изображение $F(p)$ заданной функции $f(t)$ определяется в соответствии с **прямым преобразованием Лапласа**:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (1)$$

В сокращенной записи соответствие между изображением и оригиналом обозначается, как:

$$F(p) \doteq f(t) \quad \text{или} \quad F(p) = L\{f(t)\}$$

Следует отметить, что если оригинал $f(t)$ увеличивается с ростом t , то для сходимости интеграла (1) необходимо более быстрое убывание модуля e^{-st} . Функции, с которыми встречаются на практике при расчете переходных процессов, этому условию удовлетворяют.

В качестве примера в табл. 1 приведены изображения некоторых характерных функций, часто встречающихся при анализе нестационарных режимов.

Таблица 1. Изображения типовых функций

Оригинал $f(t)$	A	e^{at}	$\sin at$	$\cos at$	$\sinh at$	$\cosh at$
Изображение $F(p)$	$\frac{A}{p}$	$\frac{1}{p-a}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$

Некоторые свойства изображений

1. Изображение суммы функций равно сумме изображений слагаемых:

$$\sum_{k=1}^N f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^N F_k(p)$$

2. При умножении оригинала на коэффициент на тот же коэффициент умножается изображение:

$$Af(t) \doteq AF(p)$$

С использованием этих свойств и данных табл. 1, можно показать, например, что

$$U_0(1 - e^{-at}) \doteq \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p+a}$$

Изображения производной и интеграла

В курсе математики доказывается, что если $f(t) \doteq F(p)$, то $\frac{df}{dt} \doteq pF(p) - f(0)$, где $f(0)$ - начальное значение функции $f(t)$.

Таким образом, для напряжения на индуктивном элементе можно записать

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \doteq LpI(p) - Li(0)$$

или при нулевых начальных условиях

$$u_L(t) \doteq L \frac{di}{dt} \doteq LpI(p)$$

Отсюда операторное сопротивление катушки индуктивности

$$Z(p) = Lp$$

$$f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p) \quad \int_0^t f(t) dt \stackrel{\cdot}{=} \frac{F(p)}{p}$$

Аналогично для интеграла: если

, то

С учетом ненулевых начальных условий для напряжения на конденсаторе можно записать:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0)$$

Тогда

$$u_C(t) \stackrel{\cdot}{=} \frac{i(p)}{Cp} + \frac{u_C(0)}{p}$$

или при нулевых начальных условиях

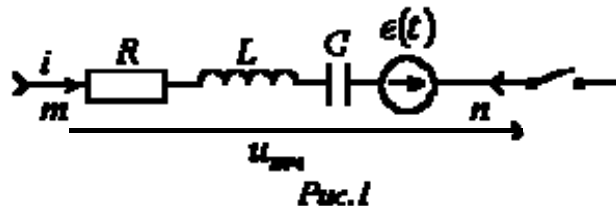
$$u_C(t) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{Cp} I(p)$$

откуда операторное сопротивление конденсатора

$$Z(p) = \frac{1}{Cp}$$

Закон Ома в операторной форме

Пусть имеем некоторую ветвь $m-n$ (см. рис. 1), выделенную из некоторой



сложной цепи. Замыкание ключа во внешней цепи приводит к переходному процессу, при этом начальные условия для тока в ветви и напряжения на конденсаторе в общем случае ненулевые.

Для мгновенных значений переменных можно записать:

$$u_{mn}(t) = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) - e(t)$$

Тогда на основании приведенных выше соотношений получим:

$$U_{mn}(p) = I(p) \left(R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{p} - E(p)$$

Отсюда

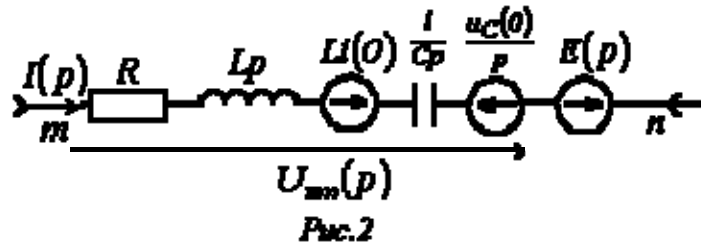
$$I(p) = \frac{U_{mn}(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p} + E(p)}{Z(p)} \quad (2)$$

$$Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$$

где - операторное сопротивление рассматриваемого участка цепи.

Следует обратить внимание, что операторное сопротивление $Z(p)$ соответствует комплексному сопротивлению $Z(j\omega)$ ветви в цепи синусоидального тока при замене оператора p на $j\omega$.

Уравнение (2) есть математическая запись закона Ома для участка цепи с источником ЭДС в операторной форме. В соответствии с ним для ветви на рис. 1 можно нарисовать операторную схему замещения, представленную на рис. 2.



Законы Кирхгофа в операторной форме

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма изображений токов, сходящихся в узле, равна нулю

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0$$

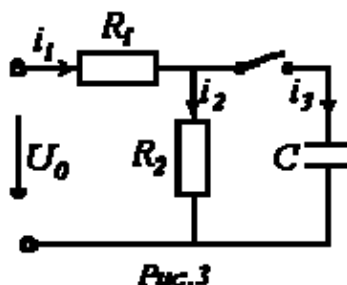
Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма изображений ЭДС, действующих в контуре, равна алгебраической сумме изображений напряжений на пассивных элементах этого контура

$$\sum_{k=1}^m E_k(p) = \sum_{k=1}^m U_k(p)$$

При записи уравнений по второму закону Кирхгофа следует помнить о необходимости учета ненулевых начальных условий (если они имеют место). С их учетом последнее соотношение может быть переписано в развернутом виде

$$\sum_{k=1}^m \left(E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p} \right) = \sum_{k=1}^m \left(R_k + L_k p + \frac{1}{C_k p} \right) I_k(p)$$

В качестве примера запишем выражение для изображений токов в цепи на рис. 3 для двух случаев: 1 - $u_C(0) = 0$; 2 - $u_C(0) \neq 0$.



В первом случае в соответствии с законом Ома

$$I_1(p) = \frac{U_0(p)}{R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{Cp}}{R_2 + \frac{1}{Cp}}} = \frac{U_0(1 + R_2 Cp)}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)}$$

Тогда

$$I_2(p) = I_1(p) \frac{1}{R_2 Cp + 1} = \frac{U_0}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)}$$

и

$$I_3(p) = I_1(p) \frac{R_2 C p}{R_2 C p + 1} = \frac{U_0 R_2 C}{R_1 R_2 C p + R_1 + R_2}$$

Во втором случае, т.е. при $u_c(0) \neq 0$, для цепи на рис. 3 следует составить операторную схему замещения, которая приведена на рис. 4. Изображения токов в ней могут быть определены любым методом расчета линейных цепей, например, методом контурных токов:

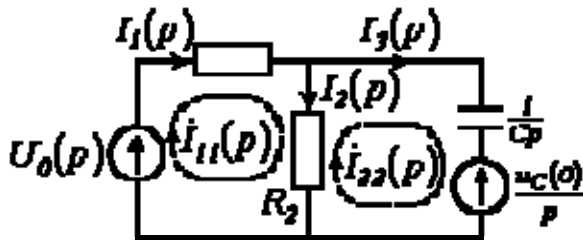


Рис. 4

$$\begin{aligned} I_{11}(p)(R_1 + R_2) - I_{22}(p)R_2 &= \frac{U_0}{p}; \\ -I_{11}(p)R_2 + I_{22}\left(R_2 + \frac{1}{Cp}\right) &= -\frac{u_c(0)}{p}. \end{aligned}$$

откуда $I_1(p) = I_{11}(p)$; $I_2(p) = I_{11}(p) - I_{22}(p)$ и $I_3(p) = I_{22}(p)$.

Переход от изображений к оригиналам

Переход от изображения искомой величины к оригиналу может быть осуществлен следующими способами:

1. Посредством обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

которое представляет собой решение интегрального уравнения (1) и сокращенно записывается, как:

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\}.$$

На практике этот способ применяется редко.

2. По таблицам соответствия между оригиналами и изображениями

В специальной литературе имеется достаточно большое число формул соответствия, охватывающих практически все задачи электротехники. Согласно данному способу необходимо получить изображение искомой величины в виде, соответствующем табличному, после чего выписать из таблицы выражение оригинала.

Например, для изображения тока в цепи на рис. 5 можно записать

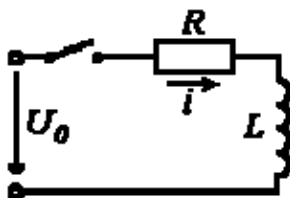


Рис. 5

$$I(p) = \frac{U_0(p)}{Z(p)} = \frac{U_0}{p(R + pL)} = \frac{U_0}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \right)$$

Тогда в соответствии с данными табл. 1

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$

что соответствует известному результату.

3. С использованием формулы разложения

Пусть изображение $F(p)$ искомой переменной определяется отношением двух полиномов

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots a_1 p + a_0},$$

где $m < n$.

Это выражение может быть представлено в виде суммы простых дробей

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}, \quad (3)$$

где p_k - k -й корень уравнения $F_2(p) = 0$.

Для определения коэффициентов A_k умножим левую и правую части соотношения (3) на $(p - p_k)$:

$$(p - p_k) \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{p - p_i} + A_k = \frac{F_1(p)(p - p_k)}{F_2(p)}$$

При $p \rightarrow p_k$

$$A_k = F_1(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p - p_k}{F_2(p)}$$

Рассматривая полученную неопределенность типа $0/0$ по правилу Лопиталя, запишем

$$A_k = F_1'(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{\frac{d}{dp}(p - p_k)}{F_2'(p)} = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}.$$

Таким образом,

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \frac{1}{p - p_k}$$

Поскольку отношение $\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}$ есть постоянный коэффициент, то учитывая, что

$$e^{at} = \frac{1}{p - a}, \text{ окончательно получаем}$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \quad (4)$$

Соотношение (4) представляет собой формулу разложения.

Частные случаи:

1. Если один из корней уравнения $F_2(p) = 0$ равен нулю, т.е. $F_2(p) = p F_3(p)$, то уравнение (4) сводится к виду

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}$$

2. **Комплексно-сопряженным корням** уравнения $F_2(p) = 0$ в формуле разложения соответствуют комплексно-сопряженные слагаемые, которые в сумме дают удвоенный вещественный член, т.е. для k -й пары комплексно-сопряженных корней имеет место

$$f_k(t) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \right)$$

3. Если в уравнении (4) $F_2(p)$ имеет n различных корней (p_1, p_2, \dots, p_n) и из них **корень p_1 кратностью m_1 , корень p_2 кратностью m_2 , корень p_s кратностью m_s** , то:

$$f(t) = \sum_{k=1}^s \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \cdot \frac{F_1(p) e^{pt}}{F_2(p)} \right]_{p=p_k}$$

Здесь выражение, стоящее в знаменателе квадратной скобки, надо сначала сократить на $(p - p_k)^{m_k}$ и лишь после этого дифференцировать.

В заключение раздела отметим, что для нахождения начального $f(0)$ и конечного $f(\infty)$ значений оригинала можно использовать **предельные соотношения**

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p F(p)$$

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p)$$

которые также могут служить для оценки правильности полученного изображения.

4.1. Алгоритм расчета переходных процессов

1. Рассчитать цепь до коммутации и найти независимые начальные условия: $i_L(0) = i_L(0-)$ и $u_C(0) = u_C(0-)$

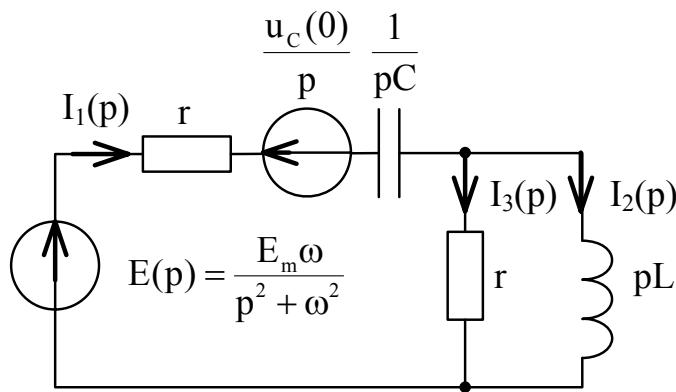
2. Составить операторную схему. Изображения заданных источников э.д.с. (токов) найти по таблице соответствия между оригиналами и изображениями. Ненулевые независимые начальные условия учесть введением внутренних э.д.с. В ветвях, содержащих индуктивные элементы, внутренние э.д.с. равны $L i_L(0)$ и по направлению совпадают с положительным направлением тока. В ветвях с емкостными элементами внутренние э.д.с. равны u_C / p и противоположны положительным направлениям $u_C(0)$.

3. Определить по операторной схеме изображение искомой величины любым методом (метод контурных токов, метод узловых напряжений, метод эквивалентного источника и т.д.).

4. Найти оригинал искомой величины, пользуясь теоремой разложения или таблицами соответствия оригиналов и изображений.

4.2. Пример расчета переходного процесса операторным методом

Рассчитать переходную функцию $i_1(t)$ в схеме рис. 2-3 операторным методом. Из расчета цепи до коммутации (раздел 2.2) получили независимые начальные условия: $i_2(0) = 0$ А; $u_C(0) = -141$ В.



Составляем операторную схему замещения. Воспользуемся для расчета операторным изображением комплекса мгновенной э.д.с.

$$e(t) \div E(p) = \frac{E_m (p \cdot \sin \psi_E + \omega \cos \psi_E)}{p^2 + \omega^2}$$

или

$$e(t) \div E(p) = \frac{E_m \omega}{p^2 + \omega^2}$$

Рис. 4-1.

Внутренняя э.д.с. $Li_2(0)$ отсутствует, так как $i_2(0) = 0$. По закону Ома:

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}; \quad U(p) = E(p) - \frac{U_c(0)}{p} = \frac{E_m \omega}{p^2 + \omega^2} - \frac{U_c(0)}{p} = \frac{-U_c(0) \cdot p^2 + E_m \omega \cdot p - U_c(0) \cdot \omega^2}{p \cdot (p^2 + \omega^2)};$$

$$Z(p) = r + \frac{1}{pC} + \frac{pL}{r + pL} = \frac{2rLCp^2 + (r^2C + L)p + r}{p(LCp + rC)};$$

$$I_1(p) = \frac{(-U_c(0) \cdot p^2 + E_m \omega \cdot p - U_c(0) \cdot \omega^2) \cdot p(LCp + rC)}{p \cdot (p^2 + \omega^2) \cdot (2rLCp^2 + (r^2C + L)p + r)} =$$

$$= \frac{(-U_c(0) \cdot p^2 + E_m \omega \cdot p - U_c(0) \cdot \omega^2) \left(\frac{1}{2r} p + \frac{1}{2L} \right)}{(p - j\omega)(p + j\omega)(p^2 + 2\delta p + \omega_0^2)},$$

$$\text{где } \delta = \frac{r^2C + L}{4rLC}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{2LC}.$$

Подставим значения параметров в изображение для тока.

$$I_1(p) = \frac{7,05 \cdot p^3 + 14121 \cdot p^2 + 14121068 \cdot p + 7050000000}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

здесь $p_{1,2} = \pm j\omega = \pm j1000$; $p_{3,4} = -\delta \pm j\omega' = -500 \pm j500$. Применим теорему разложения.

$$F_2'(p) = 4 \cdot p^3 + 3000 \cdot p^2 + 3000000 \cdot p + 10000000000;$$

$$F_1(p_1) = -7,07 \cdot 10^9 + j \cdot 7,07 \cdot 10^9; \quad F_2'(p_1) = -2 \cdot 10^9 - j \cdot 10^9;$$

$$F_1(p_3) = 1,752 \cdot 10^9 + j \cdot 1,763 \cdot 10^9; \quad F_2'(p_3) = 5 \cdot 10^8 + j \cdot 10^9;$$

$$i_1(t) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} \right) + 2 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)} e^{p_3 t} \right) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left(4,47 e^{-j71.5^\circ} e^{j1000 \cdot t} \right) +$$

$$+ 2 \cdot \operatorname{Re} \left(2,22 e^{-j18.2^\circ} e^{-500t} e^{j500t} \right) = 8,9 \cdot \cos(1000 \cdot t - 71.5^\circ) + 4,4 \cdot e^{-500t} \cos(500 \cdot t - 18.2^\circ)$$

Окончательно, после преобразования, получим:

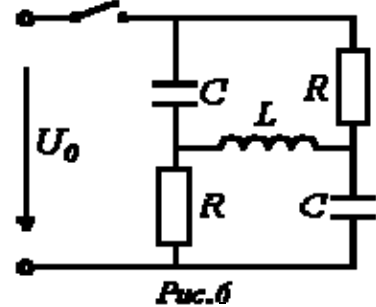
$$i_1(t) = 8,9 \sin(\omega t + 18,5) + 4,4 e^{-500t} \sin(\omega' t - 71^\circ), \text{ A.}$$

4.3. Контрольные вопросы

1. В чем заключается сущность расчета переходных процессов операторным методом?
2. Что такое операторная схема замещения?
3. Как при расчете операторным методом учитываются ненулевые независимые начальные условия?
4. Какими способами на практике осуществляется переход от изображения к оригиналу?

5. Для чего используются предельные соотношения?
6. Как связаны изображение и оригинал в формуле разложения? Какие имеются варианты ее написания?
7. С использованием теоремы об активном двухполюснике записать операторное изображение для тока через катушку индуктивности в цепи на рис. 6.

Ответ:
$$I_L(p) = \frac{U_0(1 - RCp)}{p(p^2 CRL + pL + 2R)}$$



8. С использованием предельных соотношений и решения предыдущей задачи найти начальное и конечное значения тока в ветви с индуктивным элементом.

Ответ:
$$I_L(0) = 0; I_L(\infty) = \frac{U_0}{2R}$$

5. Расчет переходных процессов при произвольной форме воздействия на цепь

Обобщенные функции

При анализе цепей во временной области часто используют *обобщенные функции*: единичную функцию $1(t-t_0)$, единичную импульсную функцию $\delta(t-t_0)$ и функцию единичного наклона $\delta_2(t-t_0)$.

Единичная функция $1(t-t_0)$ – это разрывная функция, равная 0 при $t < t_0$ и равная 1 при $t \geq t_0$, т.е.

$$1(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ 1 & \text{при } t \geq t_0. \end{cases}$$

Несмещенную во времени относительно начало координат единичную функцию (рис. 5.1.1. а) можно записать как:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

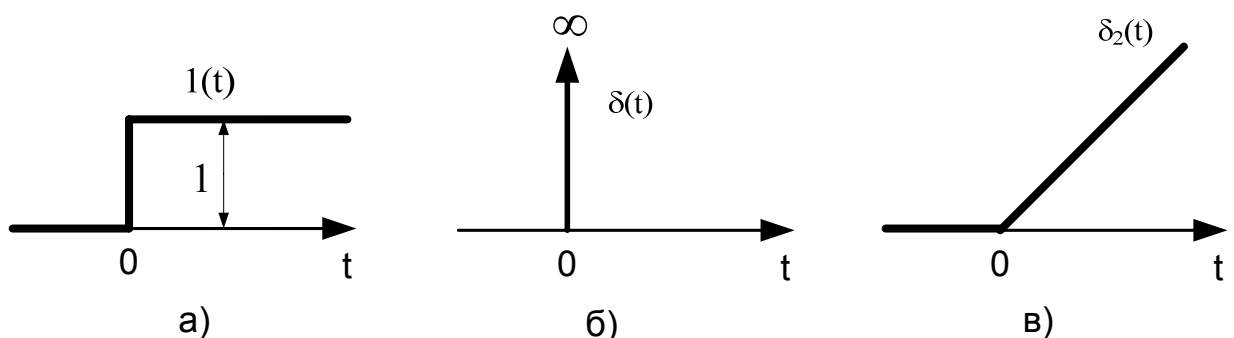


Рис. 5.1.1. Обобщенные функции

- а) единичная функция
- б) единичная импульсная функция
- в) функция единичного наклона

Единичная импульсная функция $\delta(t-t_0)$, или дельта-функция (δ -функция), определяется как производная от единичной функции и представляет собой бесконечно короткий импульс бесконечно большой высоты с площадью, равной единице, т.е.:

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_0; \\ \infty & \text{при } t = t_0. \end{cases}$$

Аналогично несмещенная во времени дельта-функция (рис. 5.1.1. б):

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ \infty & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Единичную импульсную функцию $\delta(t-t_0)$ обозначают вертикальной стрелкой при $t=t_0$ (см. рис. 5.1.1. б).

Примечания:

- 1) поскольку $\delta(t)$ является производной от $1(t)$, то

$$1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt;$$

- 2) функция $1(t)$ – безразмерна; размерность единичной импульсной функции $[\delta(t)] = [1'(t)] = [1(t)] / [t] = 1/c$.
- 3) операторное изображение единичной функции $1/p$, а единичной импульсной функции 1 , т.е.:

$$1(t) \Rightarrow \frac{1}{p};$$

$$\delta(t) \Rightarrow 1.$$

Функцию единичного наклона $\delta_2(t-t_0)$ является интегралом от единичной функции и описывается следующим образом:

$$\delta_2(t-t_0) = (t-t_0) \cdot 1(t-t_0) = \int_{-\infty}^t 1(t-t_0) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ t & \text{при } t \geq t_0. \end{cases}$$

Несмещенная во времени функция единичного наклона (см. рис. 5.1.1. в):

$$\delta_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ t & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Используя эти формулы, можно воздействие произвольной формы представить в виде суммы обобщенных функций. Например, суммой коротких смещенных прямоугольных импульсов бесконечно малой длительности. Тогда, суммируя элементарные реакции на такие стандартные воздействия можно найти всю реакцию.

Переходная проводимость

При рассмотрении метода наложения было показано, что ток в любой ветви схемы может быть представлен в виде

$$i_k = g_{km} U_m,$$

где g_{km} – собственная ($k=m$) или взаимная ($k \neq m$) проводимость. Это соотношение, трансформированное в уравнение

$$i_k(t) = g_{km}(t) U_m, \quad (3)$$

будет иметь силу и в переходном режиме, т.е. когда замыкание ключа в m -й ветви подключает к цепи находящийся в этой ветви источник постоянного напряжения U_m .

При этом $g_{km}(t)$ является функцией времени и называется переходной проводимостью.

В соответствии с (3) переходная проводимость численно равна току в ветви при подключении цепи к постоянному напряжению $U_m = I B$.

Переходная функция по напряжению

Переходная функция по напряжению наиболее часто используется при анализе четырехполюсников.

Если линейную электрическую цепь с нулевыми начальными условиями подключить к источнику постоянного напряжения U , то между произвольными точками m и n цепи возникнет напряжение

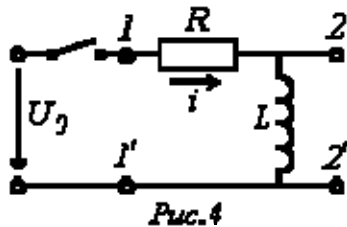
$$u_{mn}(t) = h(t)U,$$

где $h(t)$ - переходная функция по напряжению, численно равная напряжению между точками m и n схемы при подаче на ее вход постоянного напряжения $U = I B$.

Переходную проводимость $g(t)$ и переходную функцию по напряжению $h(t)$ можно найти расчетным или экспериментальным (осциллографирование) путями.

В качестве примера определим эти функции для цепи на рис. 4.

В этой схеме



$$i(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}),$$

$$\tau_L = \frac{L}{R},$$

где

Тогда переходная проводимость

$$g(t) = \frac{i(t)}{U_0} = \frac{1}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}})$$

Переходная функция по напряжению

$$h(t) = \frac{u_{22}(t)}{U_0} = \frac{L \frac{di}{dt}}{U_0} = \frac{U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}}{U_0} = e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

Расчет переходных процессов с использованием интеграла Дюамеля

Зная реакцию цепи на единичное возмущающее воздействие, т.е. функцию переходной проводимости $g(t)$ или (и) переходную функцию по напряжению $h(t)$, можно найти реакцию цепи на воздействие произвольной формы. В основе метода – метода расчета с помощью интеграла Дюамеля – лежит принцип наложения.

При использовании интеграла Дюамеля для разделения переменной, по которой производится интегрирование, и переменной, определяющей момент времени, в который определяется ток в цепи, первую принято обозначать как τ , а вторую – как t .

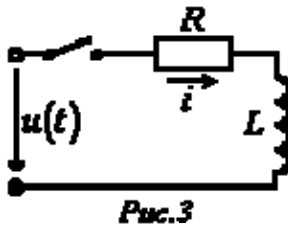
$$i(t) = u(0)g(t) - \int_0^t u'(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (1)$$

Соотношение (1) называется **интегралом Дюамеля**.

Следует отметить, что с использованием интеграла Дюамеля можно определять также напряжение. При этом в (1) вместо переходной проводимости $g(t)$ будет входить переходная функция по напряжению.

5.1. Алгоритм расчета с использованием интеграла Дюамеля

1. Определение функции $g(t)$ (или $h(t)$) для исследуемой цепи.
 2. Запись выражения $g(t-\tau)$ (или $h(t-\tau)$) путем формальной замены t на $(t-\tau)$.
 3. Определение производной $u'(\tau)$.
 4. Подстановка найденных функций в (1) и интегрирование определенного интеграла.
- В качестве примера использования интеграла Дюамеля определим ток в цепи рис. 3.



Исходные данные для расчета: $u(t) = 1000e^{-5t}$ В,
 $R = 10 \text{ Ом}$ $L = 1 \text{ Гн}$

1. Переходная проводимость

$$g(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = 0,1(1 - e^{-10t})$$

2. $g(t-\tau) = 0,1(1 - e^{-10(t-\tau)})$

3. $u'(\tau) = -5000e^{-5\tau}$

4.
$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'(\tau)g(t-\tau)d\tau = 100(1 - e^{-10t}) - 500 \int_0^t e^{-5\tau} d\tau +$$

$$+ 500e^{-10t} \int_0^t e^{5\tau} d\tau = 100(1 - e^{-10t}) + 100 \Big|_0^t e^{-5\tau} + 100e^{-10t} \Big|_0^t e^{5\tau} =$$

$$= 200(e^{-5t} - e^{-10t}) \text{ А.}$$

Полученный результат аналогичен выражению тока, определенному в предыдущей лекции на основе формулы включения.

5.2. Пример расчета переходного процесса методом интеграла Дюамеля

Методом интеграла Дюамеля, для схемы рис. 5.1., найти и построить $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, а также напряжение на индуктивности $u_L(t)$. Напряжение источника ЭДС: $e(t)=E_m \cdot 1(t)$, $e(t)=E_m \cdot t \cdot 1(t)$.

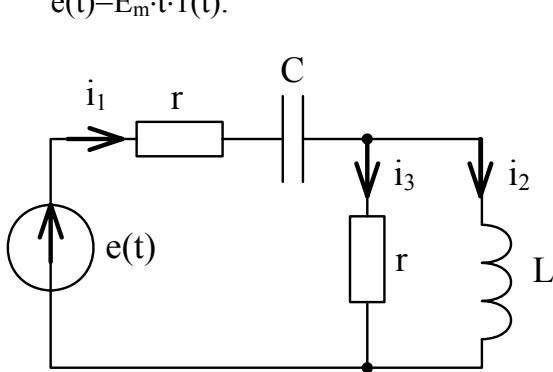


рис. 5.1

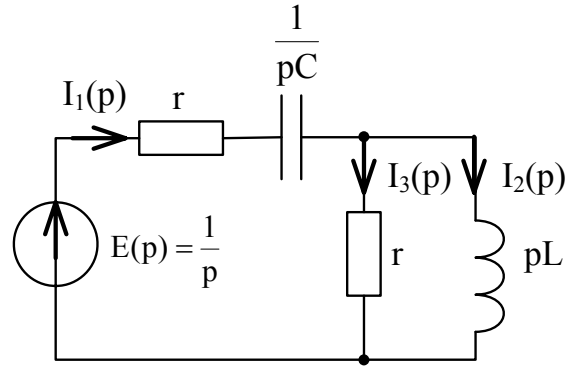


рис. 5.2

Будем искать ток в индуктивности в переходном режиме. Остальные токи определим по выражению тока i_2 , используя уравнения (1), составленные по законам Кирхгофа.

$$i_1 = i_2 + i_3; \quad u_L = L \frac{di_2}{dt} = r \cdot i_3. \quad (1)$$

1. Определяем переходную проводимость Y_{21} операторным методом при н.н.у., как ток $I_2(p)$ при воздействии единичной э.д.с. (рис. 5.2.).

Операторное изображение $I_1(p)$:

$$I_1(p) = \frac{E(p)}{r + \frac{1}{p \cdot C} + \frac{r \cdot pL}{r + pL}} = \frac{1}{p \cdot \left(r + \frac{1}{p \cdot C} + \frac{r \cdot pL}{r + pL} \right)} = \frac{(r + pL) \cdot C}{2 \cdot r \cdot p^2 L \cdot C + r^2 p \cdot C + p \cdot L + r};$$

По формуле делителя тока операторное изображение $I_2(p)$:

$$I_2(p) = \frac{r \cdot I_1(p)}{r + pL} = \frac{r \cdot C}{2 \cdot r \cdot p^2 L \cdot C + r^2 p \cdot C + p \cdot L + r};$$

Подставим значения параметров в изображение для тока и преобразуем его так, чтобы получить табличное изображение.

$$I_2(p) = \frac{50}{p^2 + 1000p + 500000} = 0,1 \cdot \frac{500}{(p + 500)^2 + 500^2} \div 0,1 \cdot e^{-500 \cdot t} \sin 500 \cdot t = i_2(t);$$

2. Следовательно, переходная проводимость $h_{21}(t-\tau)$:

$$h_{21}(t - \tau) = 0,1 \cdot e^{-500 \cdot (t - \tau)} \sin(500 \cdot (t - \tau))$$

Сначала найдем все реакции при воздействии $e(t)=E_m \cdot 1(t)$, а затем при $e(t)=E_m \cdot t \cdot 1(t)$.

Сначала найдем все реакции при воздействии $e(t)=E_m \cdot I(t)$

3.1. Определяем $U'(\tau)$

$$U'(t) = \frac{d}{dt}(E_m) = 0$$

4.1. Так как $U'(t) = 0$, то второе слагаемое в формуле выпадает.

$$i_2(t) = U(0)h_{21}(t) = 100\sqrt{2} \cdot 0,1 \cdot e^{-500t} \sin 500t = 10\sqrt{2} \cdot e^{-500t} \sin 500t, \quad \text{А}$$

Находим остальные токи:

$$i_3(t) = \frac{L}{r} \frac{di_2}{dt} = 10^{-3}(10\sqrt{2})(-500e^{-500t} \sin 500t + 500e^{-500t} \cos 500t) =$$

$$= 5\sqrt{2}e^{-500t}(\cos 500t - \sin 500t), \quad \text{А}$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = 10\sqrt{2} \cdot e^{-500t} \sin 500t + 5\sqrt{2}e^{-500t}(\cos 500t - \sin 500t) =$$

$$= 5\sqrt{2}e^{-500t}(\cos 500t + \sin 500t), \quad \text{А}$$

Напряжение на индуктивности на индуктивности

$$u_L(t) = L \frac{di_2}{dt} = r \cdot i_3(t) = 50\sqrt{2}e^{-500t}(\cos 500t - \sin 500t), \quad \text{А}$$

Найдем все реакции при воздействии $e(t)=E_m \cdot t \cdot I(t)$.

3.2. Определяем $U'(\tau)$

$$U'(t) = \frac{d}{dt}(E_m \cdot t) = E_m = 100 \cdot \sqrt{2}$$

4.2. Так как $U(0)=0$, то первое слагаемое в формуле выпадает.

$$i_2(t) = \int_0^t U'(\tau) \cdot h_{21}(t - \tau) d\tau = \int_0^t 100\sqrt{2} \cdot 0,1 \cdot e^{-500(t-\tau)} \sin(500 \cdot (t - \tau)) d\tau$$

$$= 10\sqrt{2} \int_0^t e^{-500(t-\tau)} \sin(500 \cdot (t - \tau)) d\tau = -\frac{10\sqrt{2}}{500} \int_{-500t}^0 e^x \sin x dx =$$

$$= -\frac{1}{25\sqrt{2}} \left(\frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x) \right) \Big|_{-500t}^0 = -\frac{1}{25\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot (0 - 1) - \left(\frac{e^{-500t}}{2} \cdot (\sin(-500t) - \cos(-500t)) \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{25\sqrt{2}} - \frac{1}{25\sqrt{2}} e^{-500t} (\sin 500t + \cos 500t), \quad \text{А}$$

Находим остальные токи:

$$i_3(t) = \frac{L}{r} \frac{di_2}{dt} = 10^{-3} \left(-\frac{1}{25\sqrt{2}} \right) (-500e^{-500t} (\sin 500t + \cos 500t) + 500e^{-500t} (\cos 500t - \sin 500t)) =$$

$$= -\frac{1}{50\sqrt{2}} e^{-500t} (-(\sin 500t + \cos 500t) + (\cos 500t - \sin 500t)) = \frac{1}{25\sqrt{2}} e^{-500t} \sin 500t$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = \frac{1}{25\sqrt{2}} - \frac{1}{25\sqrt{2}} e^{-500t} (\sin 500t + \cos 500t) + \frac{1}{25\sqrt{2}} e^{-500t} \sin 500t =$$

$$= \frac{1}{25\sqrt{2}} - \frac{1}{25\sqrt{2}} e^{-500t} \cos 500t, \quad \text{А}$$

Напряжение на индуктивности на индуктивности

$$u_L(t) = L \frac{di_2}{dt} = r \cdot i_3(t) = \frac{\sqrt{2}}{5} e^{-500t} \sin 500t$$

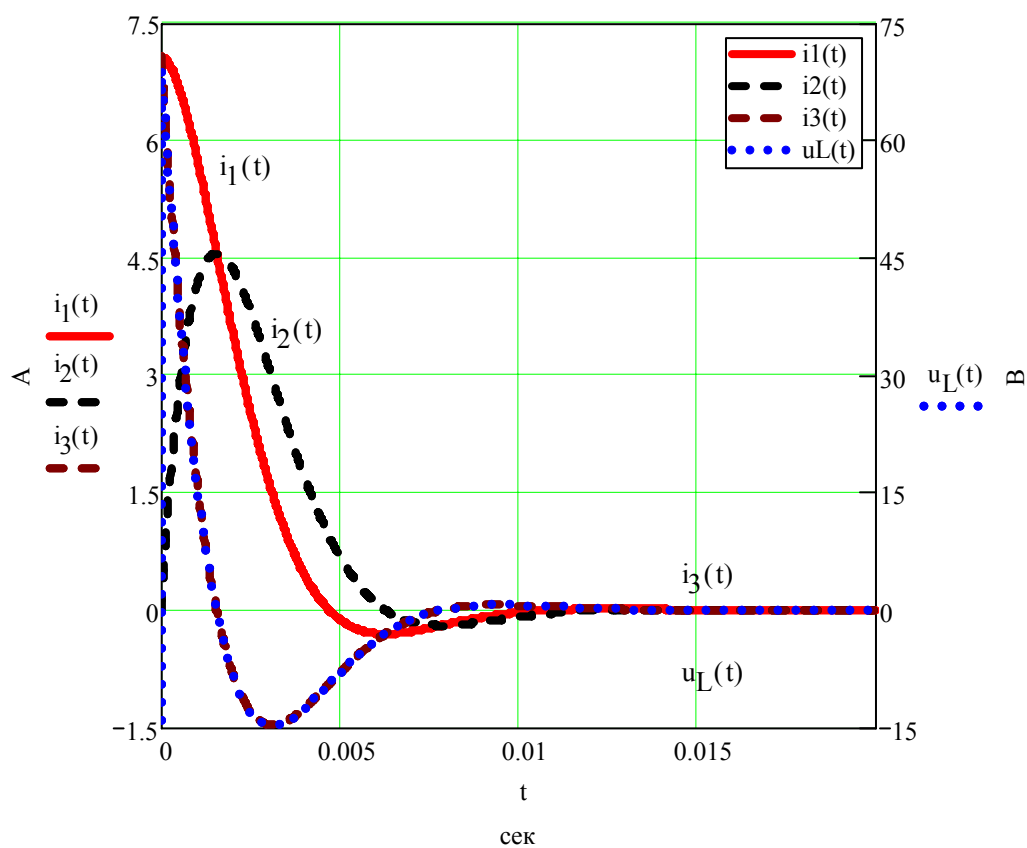


рис. 5.3. Графики всех токов и напряжения на индуктивности при $e(t) = E_m \cdot \delta_1(t)$.

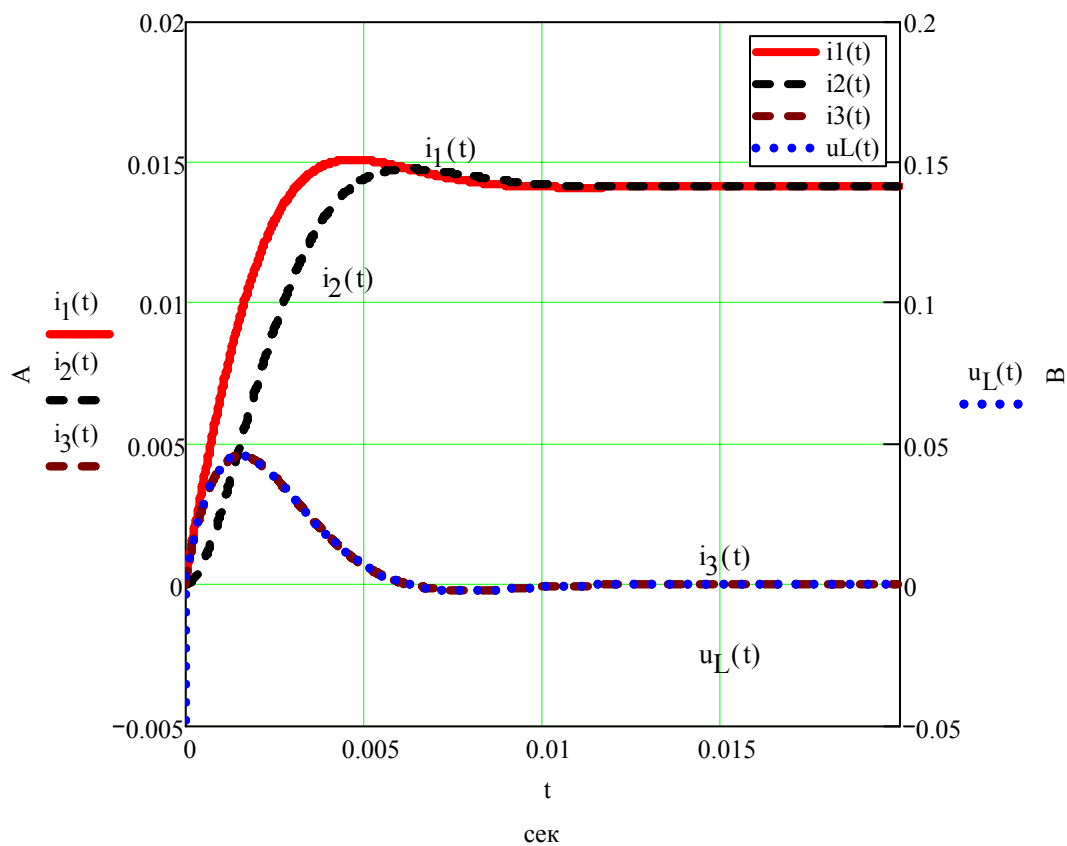


рис. 5.4 Графики всех токов и напряжения на индуктивности при $e(t) = E_m \cdot t \cdot \delta_1(t)$.

5.3. Контрольные вопросы и задачи

1. Какой принцип лежит в основе метода расчета переходных процессов с использованием интеграла Дюамеля, и для каких цепей может быть использован данный метод?
2. В каких случаях целесообразно использовать метод расчета с использованием интеграла Дюамеля?
3. В цепи на рис. 3 при $t = 0,2 \text{ с}$ напряжение на входе цепи мгновенно падает до нуля. Определить ток в цепи.

Ответ: $i = 200(e^{-5t} - e^{-10t}) \text{ А}$ при $t < 0,2 \text{ с}$; $i = 344e^{-10t} \text{ А}$ при $t \geq 0,2 \text{ с}$.

Литература

1. Основы теории цепей: Учеб. для вузов /Г.В.Зевеке, П.А.Ионкин, А.В.Нетушил, С.В.Страхов. –5-е изд., перераб. –М.: Энергоатомиздат, 1989. -528с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи. Учеб. для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. –7-е изд., перераб. и доп. –М.: Высш. шк., 1978. –528с.
3. Теоретические основы электротехники. Учеб. для вузов. В трех т. Под общ. ред. К.М.Поливанова. Т.1. К.М.Поливанов. Линейные электрические цепи с сосредоточенными постоянными. – М.: Энергия- 1972. –240с.

Содержание

Введение	2
Методы расчета переходных процессов	3
1. Переходные процессы (общие сведения).....	3
2. Классический метод расчета переходных процессов	5
2.1. Алгоритм расчета переходных процессов классическим методом	8
2.2. Пример расчета переходного процесса классическим методом	8
2.3. Контрольные вопросы и задачи.....	10
3. Метод переменных состояния расчета переходных процессов	12
3.1. Составление уравнений по методу переменных состояния.....	12
3.2. Пример составления уравнений по методу переменных состояния	12
3.3. Контрольные вопросы и задачи.....	14
4. Операторный метод расчета переходных процессов.....	14
4.1. Алгоритм расчета переходных процессов.....	20
4.2. Пример расчета переходного процесса операторным методом	20
4.3. Контрольные вопросы	21
5. Расчет переходных процессов при произвольной форме воздействия на цепь	22
5.1. Алгоритм расчета с использованием интеграла Дюамеля.....	25
5.2. Пример расчета переходного процесса методом интеграла Дюамеля.....	26
5.3. Контрольные вопросы и задачи.....	29
Литература	30