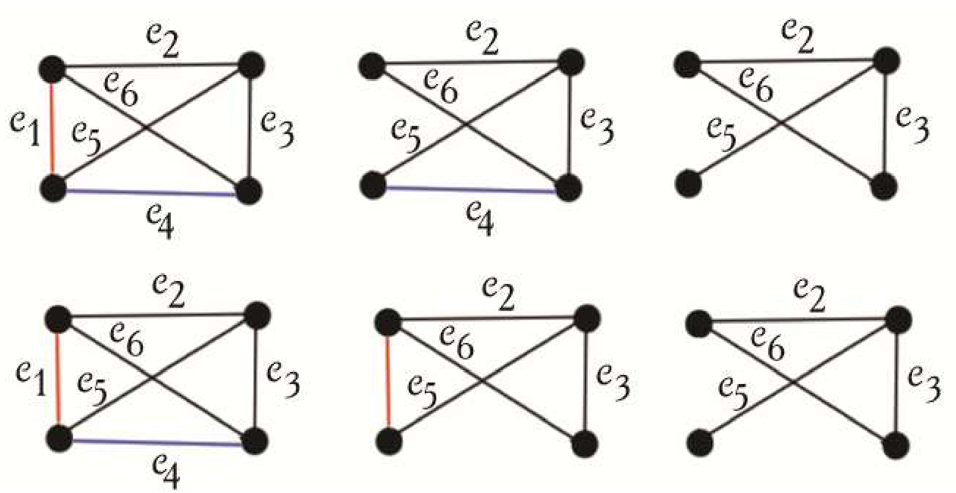
ЛЕКЦІЯ 8
Властивості графів (продовження)

Операції з елементами графів

1. Операція видалення ребра. Нехай $G=(V,E)$ – граф і $e \in E$– деяке його ребро. Граф $G_1 = G - e$ одержуємо із графа G шляхом видалення ребра e за умови, що $G_1 = (V, E \setminus \{e\})$. Таким чином, видалення ребра графа не викликає зміни кількості його вершин.

Властивості операції видалення ребра



Нехай необхідно вилучити ребра $e_1 \in E$ і $e_4 \in E$.

Тоді справедлива тотожність:

$$(G - e_1) - e_4 = (G - e_4) - e_1.$$

Якщо підряд виконується кілька операцій видалення ребер, то результат **не залежить від порядку видалення**.

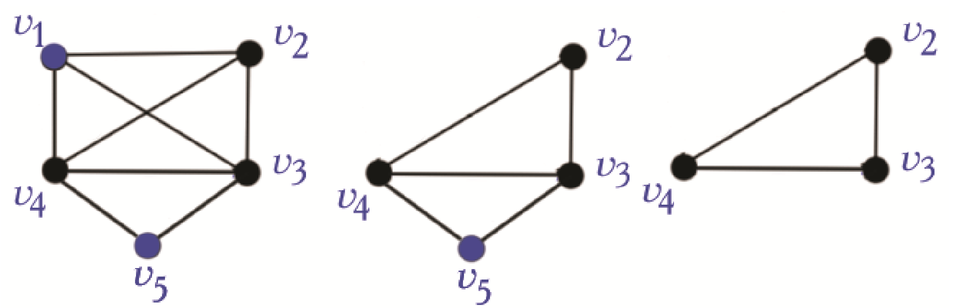
2. Операція видалення вершини

Нехай $G=(V,E)$ і $v\in V$ – деяка вершина графа G. Граф $G_2=G-v$ одержуємо із графа G шляхом видалення вершини v із множини вершин V і видалення всіх інцидентних з вершиною v ребер з множини ребер E.

Таким чином, видалення вершин графа може викликати зміну кількості його ребер.

Властивості операції видалення вершини

Нехай необхідно вилучити вершини $v_1\in V$ й $v_5\in V$. Тоді справедлива тотожність: $(G-v_1)-v_5=(G-v_5)-v_1$.



Якщо підряд виконується кілька операцій видалення вершин, то результат **не залежить від порядку видалення**.

3. Операція введення ребра

Нехай $G=(V,E)$ і існують дві вершини $u\in V$ і $v\in V$, і $(u,v)\notin E$. Тоді операція введення ребра може бути представлена виразом:

$G_3=G+e=(V,E\cup\{e\})$, де $e=(u,v)$.

Властивості операції введення ребра

Виходячи із властивості комутативності операції об'єднання, можна стверджувати, що при введенні в граф декількох ребер результат не залежить від порядку їх додавання.

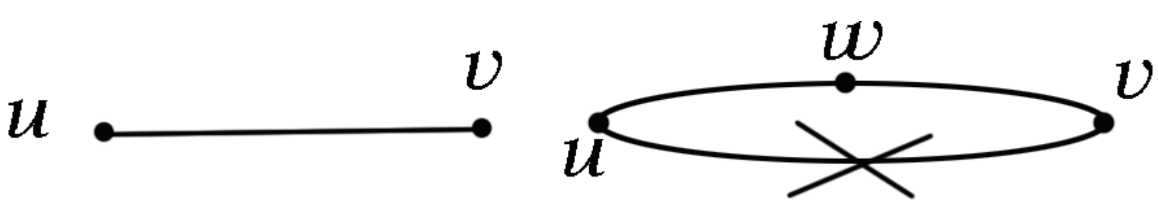
$(G+e)+e_1=(G+e_1)+e$, де $e\in E$ і $e_1\in E$.

4. Операція введення вершини в ребро

Нехай дано граф $G=(V,E)$, який включає вершини $v \in V$ і $u \in V$, а також ребро $(v,u) \in E$, яке їх з'єднує. Операція введення вершини в ребро може бути представлена виразом:

$$G_4=\Big(V \cup \{w\},\big(E \cup \{(v,w)\} \cup \{(w,u)\}\big) \setminus \{(v,u)\}\Big).$$

До множини V додають вершину w, до множини E додають ребра (v,w) і (w,u), а ребро (v,u) видаляють з множини E.

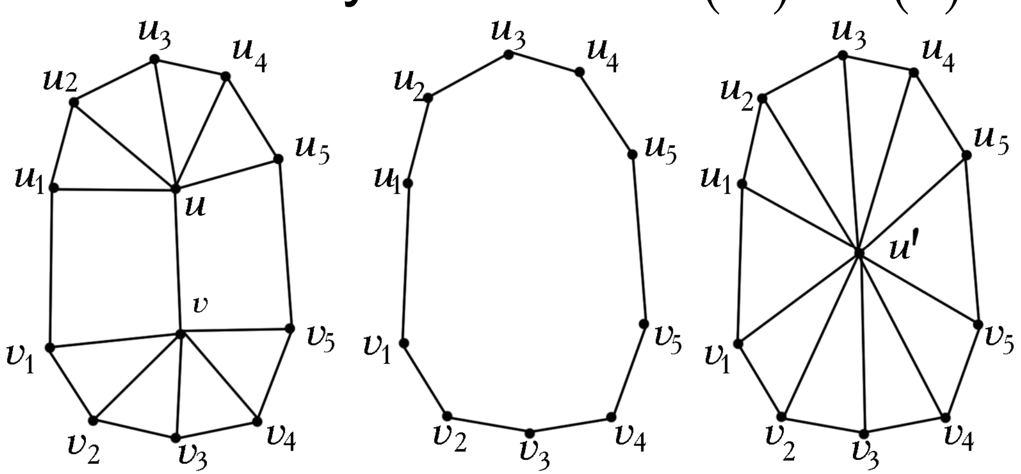


5. Ототожнення (злиття) вершин

Нехай дано граф $G=(V,E)$, що включає вершини $v \in V$ і $u \in V$ з відповідними множинами суміжності $\Gamma(v)=\{v_1, v_2, ..., v_m, u\}$ і $\Gamma(u)=\{u_1, u_2, ..., u_k, v\}$.

Злиття вершин v і u виконують у два етапи:

1. Виключають вершини v і u з графа G: $G' = G - v - u$
2. Додають до отриманого графа вершину u' з такою множиною суміжності: $\Gamma(u') = \Gamma(v) \setminus u \cup \Gamma(u) \setminus v$: $H = G' + u'$.



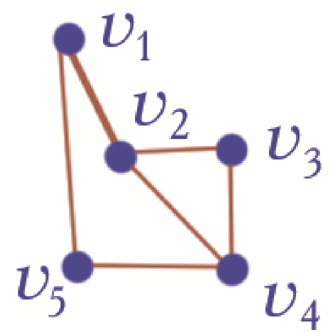
Граф H

Задавання графа в математиці

1. Аналітичний спосіб

Аналітичний спосіб припускає представлення графа $G(V,E)$ у **вигляді множин** V і E. Для задавання цих множин можуть використовуватися всі три способи задавання множин:

Явно: $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$,



$$E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_2,v_4),(v_3,v_4),(v_4,v_5),(v_5,v_1$$

Предикатом: $V=\{v_i \mid i=1,\dots,n\}$

$$E=\{(v_i,v_j) \mid i=2k+1, j=2k, k=1,\dots 2n-1\}$$

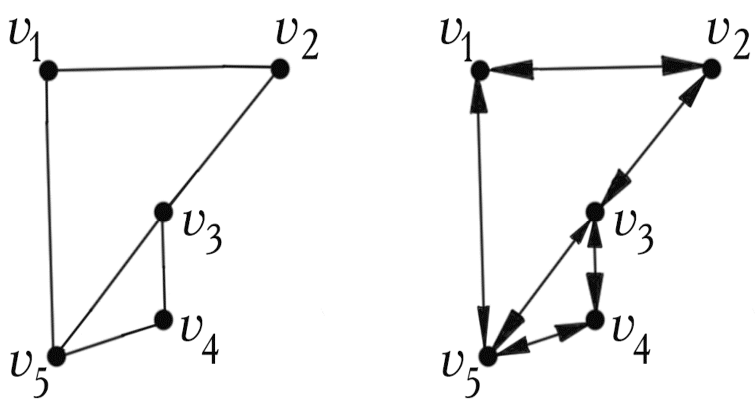
Рекурсивною процедурою: $V=\{v_i \mid i=i+1, i<m\}$

$$E=\{(v_i,v_j) \mid j=j+1, i=i+2, i,j<n\}$$

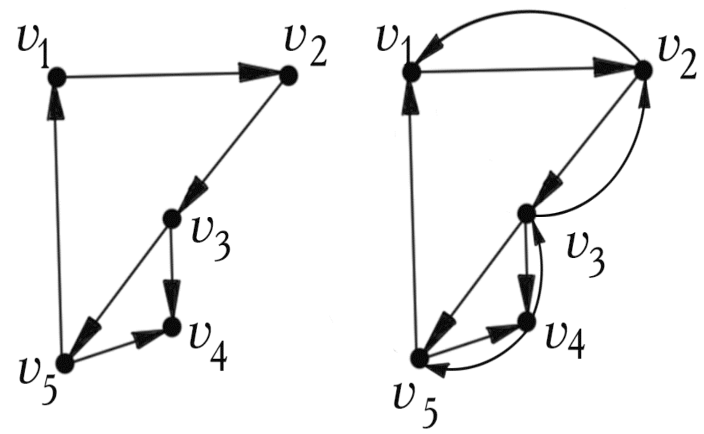
2. **Графічний спосіб**

Вершини представлені **точками**, а **ребра – лініями, що** з'єднують ці точки.

Неорієнтовані графи



Орієнтовані графи



3. **Матричний спосіб**

Граф задають у вигляді **матриці інцидентності** або **матриці суміжності**.

Задавання графа за допомогою матриці інцидентності

Неорієнтований граф

Нехай G – **неорієнтований** граф. Нехай B – матриця, кожний **рядок** якої **відповідає вершині** графа, а кожний **стовпець відповідає ребру** графа.

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_i \\ \ldots \\ v_n \end{array} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_j & \ldots & e_m \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = (V, E)$$

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_n\},$$

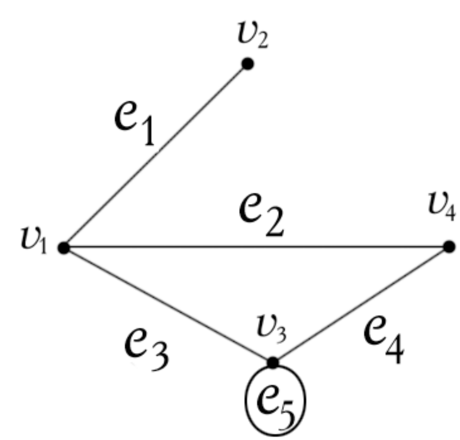
$$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_j, \ldots, e_m\}.$$

Елемент i-го рядка та j-го стовпця матриці B позначають b_{ij}. $b_{ij} = 1$, якщо i-а вершина інцидентна j-му ребру, і дорівнює 0 у протилежному випадку.

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_i \\ \dots \\ v_n \end{array} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & \dots & e_j & \dots & e_m \\ \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & \dots & e_j & \dots & e_m \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_i & 0 & 0 & 0 & b_{ij} & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Матрицю B називають *матрицею інцидентності* неорієнтованого графа *G*. Отже, елементи матриці інцидентності $B = \left(b_{ij}\right)$ задають формулою:



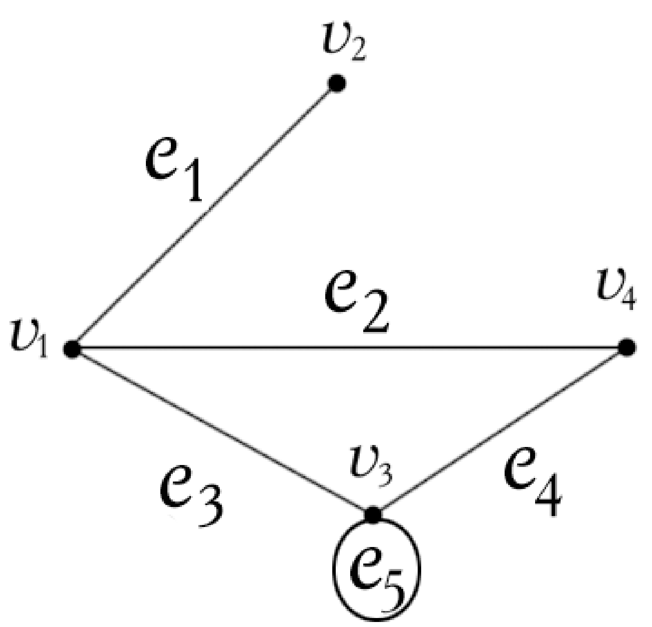
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо ребро } e_i \text{ інцидентне вершині } v_j, \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Приклад. Граф $G=(V,E)$ задано аналітично множинами

$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,

$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}=\{(v_1,v_2),(v_1,v_4),(v_1,v_3),(v_3,v_4),(v_3,v_3)\}$.

Сфомувати матрицю інцидентності



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
v_1	1	1	1	0	0
v_2	1	0	0	0	0
v_3	0	0	1	1	1
v_4	0	1	0	1	0

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Властивості матриці інцидентності неорієнтованого графа

1. Для вершин без петель **степінь вершини дорівнює сумі одиничних елементів** відповідного рядка матриці, оскільки кожна одиниця в цьому рядку представляє інцидентність цієї вершини ребру.

2. У **кожному стовпці**, який не представляє ребро петлі, **будуть дві одиниці**, тому що кожне таке ребро інцидентне двом вершинам.

3. У рядку матриці інцидентності, який відповідає вершині **з петлею**, сума **одиниць на одну більше** степеня даної вершини.

4. Стовпець, що відповідає **ребру петлі**, містить тільки **одну одиницю**.

Властивості матриці інцидентності орієнтованого графа

Нехай G – **орієнтований** граф. Тоді матриця інцидентності $B=\left(b_{ij}\right)$ включає елементи, які дорівнюють

1, якщо вершина інцидентна з початком ребра,

-1, якщо вершина інцидентна з кінцем ребра,

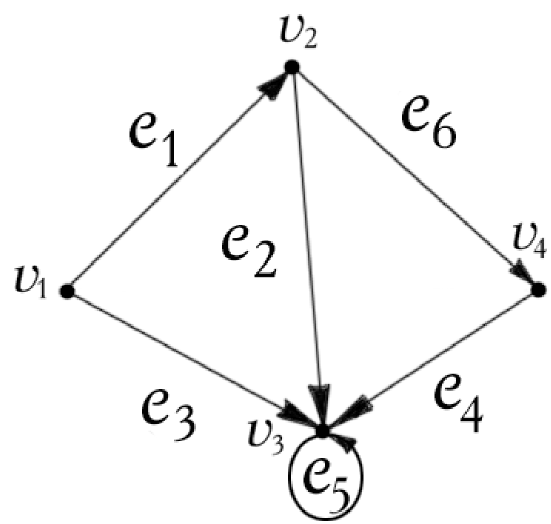
0, якщо вершина і ребро не інцидентні,

2 або будь-якому числу, якщо вершина містить петлю

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \textit{ якщо} \text{ вершина } v_j \text{ є початком ребра } e_i, \\ -1, \text{ якщо вершина } v_j \text{ є кінцем ребра } e_i, \\ 2, \text{ якщо вершина } v_j \text{ є початком і кінцем ребра } e_i, \\ 0, \text{ в інших випадках.}\end{cases}$$

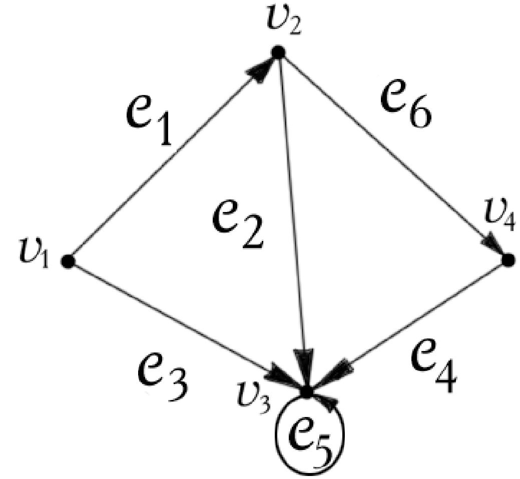
Приклад. Нехай задано орієнтований граф $G=(V,E)$, де $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ і $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$

Графічне представлення даного орграфа:



Матриця інцидентності орграфа має вигляд:

$$\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$



або

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Властивості матриці інцидентності орграфа

1. Для вершин без петель напівстепень виходу **дорівнює сумі додатних одиничних елементів** відповідного рядка

2. Для вершин без петель напівстепень входу **дорівнює сумі від'ємних одиничних елементів** відповідного рядка.

3. У **кожному стовпці**, який не представляє ребро петлі, сума елементів дорівнює нулю.

4. Якщо дуга – це петля, то в стовпці один елемент, який дорівнює 2.

Задавання графа за допомогою матриці суміжності

Нехай G – неорієнтований граф.

Нехай C – матриця, **рядки якої позначені вершинами графа** і **стовпці позначені тими ж вершинами** в тому ж самому порядку.

Елемент i-го рядка й j-го стовпця матриці C позначається c_{ij}.

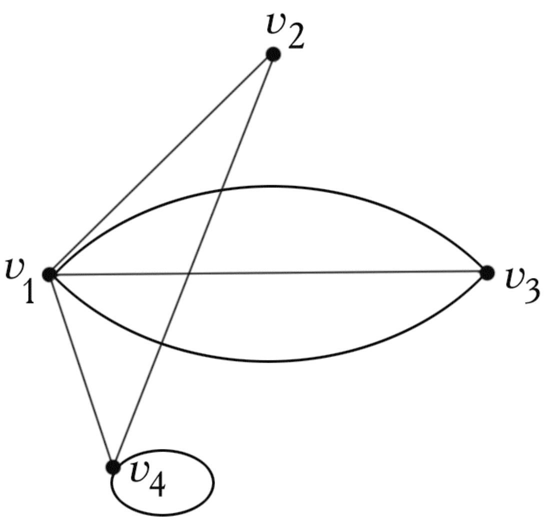
$$C = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_i \\ v_j \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_i & v_j & v_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 25 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & c_{ij} & 1 \\ 25 & 1 & c_{ji} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- дорівнює 1, якщо існує одне ребро з i-ої вершини в j-у вершину,
- дорівнює числу ребер з i-ї вершини в j-у вершину при наявності декількох ребер,
- дорівнює 0 якщо ребер між вершинами не існує.

Матрицю C називають *матрицею суміжності* графа G.

Формула для визначення елементів матриці суміжності графа

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо існує ребро } \left(v_i, v_j\right), \\ k, \text{ якщо існують ребра } \left\{ \overbrace{\left(v_i, v_j\right), \left(v_i, v_j\right), \dots, \left(v_i, v_j\right)}^{k} \right\} \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

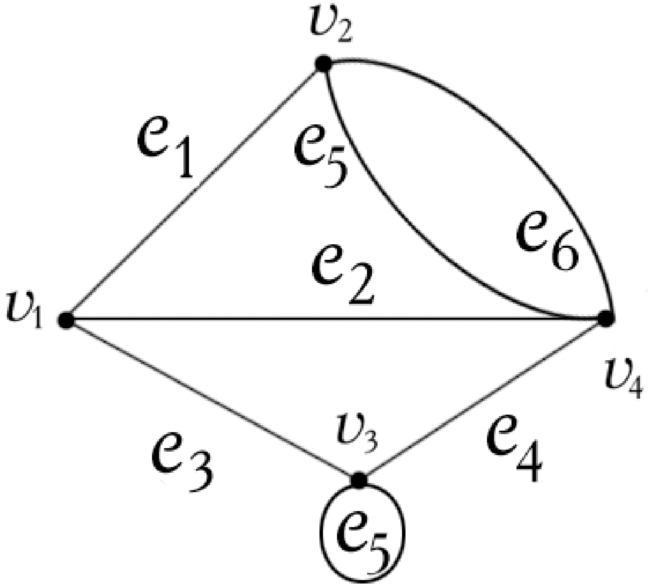


$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Приклад. Розглянемо неорієнтований граф

Матриця суміжності даного графа має вигляд:

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ v_3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$



або

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Властивості матриці суміжності

1. Матриця суміжності неорієнтованого графа симетрична щодо головної діагоналі.

2. Якщо вершина має петлі, то їх число розміщається на головній діагоналі матриці суміжності.

3. Якщо між двома вершинами графа існує кілька ребер, то на перетині рядків і стовпців проставляється їхня кількість.

Матриця суміжності орієнтованого графа

Нехай G – орієнтований граф.

Нехай C – матриця, **рядки якої позначені вершинами графа і стовпці позначені тими ж вершинами** в тому ж самому порядку.

i-й рядок і j-й стовбець- c_{ij}.

1 - якщо ребро виходить з v_i, і входить у вершину v_j.

$2,...,n$ дорівнює числу ребер при наявності декількох ребер,

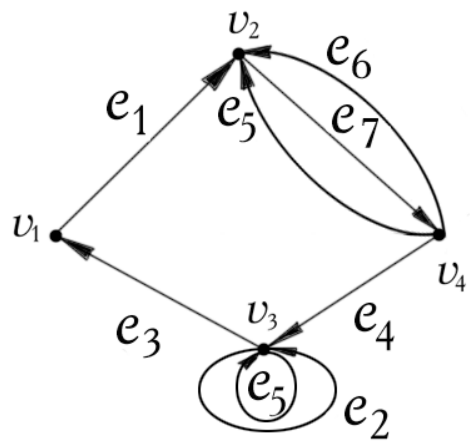
0 – якщо ребер між вершинами не існує.

В Х І Д

$$C = \begin{array}{cc} \text{В} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_i & v_j & v_n \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{И}\ v_1 \\ \text{Х}\ v_2 \\ \text{І}\ v_i \\ \text{Д}\ v_j \\ v_n \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & c_{ij} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Матрицю C називають *матрицею суміжності* орграфа G.

Приклад. Розглянемо орієнтований граф:



Його матриця суміжності має вигляд:

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ v_4 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{або } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Властивості матриці суміжності орієнтованого графа

1. Матриця суміжності несиметрична щодо головної діагоналі.

2. Сума чисел у рядку матриці суміжності без урахування чисел на головній діагоналі дозволяє визначити потужність *напівстепеня виходу* для кожної вершини орграфа: $\deg^{+}(v_i)$, де $1 \le i \le n$.

3. Сума чисел у стовпці матриці суміжності без урахування чисел на головній діагоналі дозволяє визначити потужність *напівстепеня входу* для кожної вершини орграфа: $\deg^{-}(v_i)$, де $1 \le i \le n$.

Задавання графа за допомогою списку ребер

Список ребер графа (орграфа) представлено двома стовпцями.

Стовпець 1- ребра,

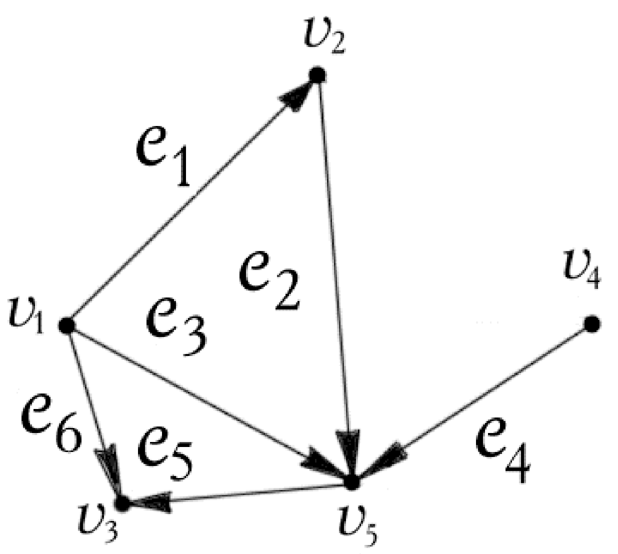
Стовпець 2 – інцидентні з ними вершини.

e_1	(v_1, v_2)
e_2	(v_2, v_3)
$\dots$	$\dots$
e_i	(v_i, v_j)
$\dots$	$\dots$
e_n	(v_n, v_m)

Для неорієнтованого графа порядок проходження вершин довільний.

Для орграфа першим стоїть номер вершини, з якої ребро виходить.

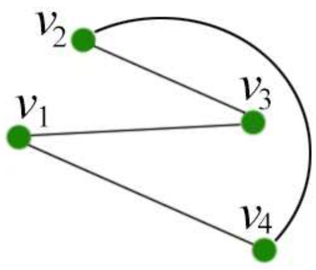
Приклад. Орграф і його список ребер.

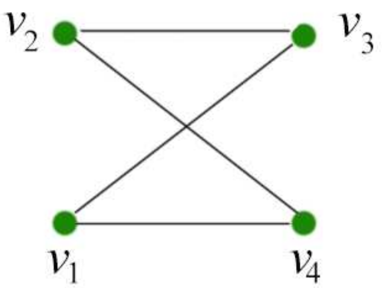


$$e_1 \to (v_1, v_2),$$
$$e_2 \to (v_2, v_3),$$
$$e_3 \to (v_1, v_5),$$
$$e_4 \to (v_4, v_5),$$
$$e_5 \to (v_5, v_3),$$
$$e_6 \to (v_1, v_3)$$

Ізоморфізм графів

Способи задавання графа:
- аналітичний,
- графічний (рисунок),
- матрицею інцидентності,
- матрицею суміжності,
- списком ребер.



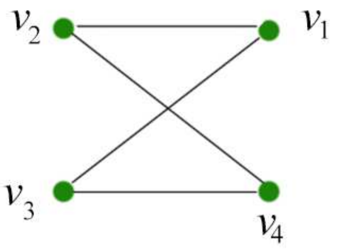


Вид рисунка залежить від форми ліній і взаємного **розташування вершин**.

Не завжди легко зрозуміти, чи однакові графи, зображені на різних рисунках.

Вид матриць і списку ребер **залежить від нумерації** вершин і ребер графа.

Граф повністю **заданий**, якщо **нумерація** його вершин **зафіксована**.



Графи, що відрізняються тільки нумерацією вершин, називають *ізоморфними*.

Визначення ізоморфізму графів

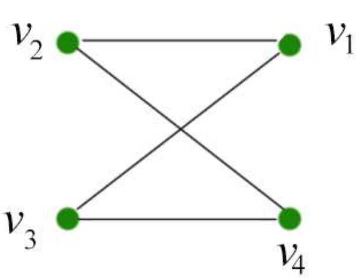
Нехай $G=\left(V_1,E_1\right)$ і $H=\left(V_2,E_2\right)$ – графи.

$R:V_1\to V_2$-взаємно однозначна відповідність (бієкція),

$$\left(\left|V_1\right|=\left|V_2\right|\right).$$

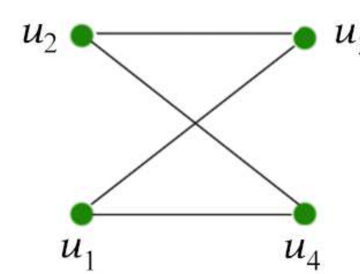
Відображення R називають *ізоморфізмом* графів G і H, якщо для будь-яких вершин $v_i,v_j\in G$ їх образи u_i і u_j суміжні в графі H тоді і тільки тоді, коли v_i і v_j суміжні в графі G.

Якщо таке відображення R існує, то графи G і H називають *ізоморфними* графами.

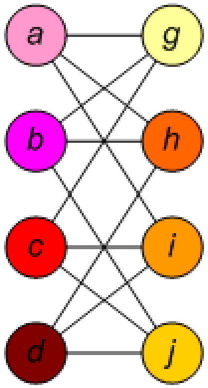


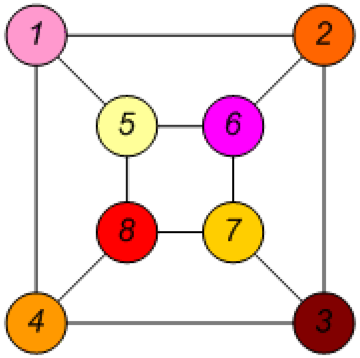
$$R=\left\{\left(v_1,u_3\right),\left(v_2,u_2\right),\left(v_3,u_1\right),\left(v_4,u_4\right)\right\}$$

G	v_1	v_2	v_3	v_4
H	u_3	u_2	u_1	u_4



Приклад. $G\left(V_1, E_1\right)$ $H\left(V_2, E_2\right)$





1. $\left|V_1\right| = 8, \left|V_2\right| = 8, \ \left|V_1\right| = \left|V_2\right|$

2.

$(a, g) \to (1, 5)$ $(c, g) \to (8, 5)$

$(a, h) \to (1, 2)$ $(c, i) \to (8, 4)$

$(a, i) \to (1, 4)$ $(c, j) \to (8, 7)$

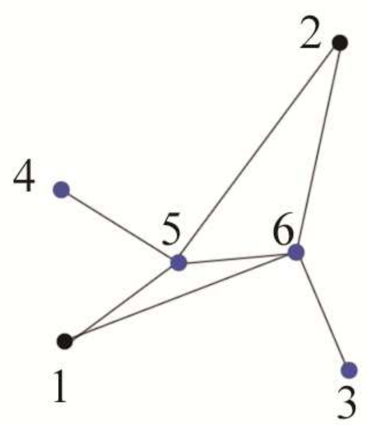
$(b, g) \to (6, 5)$ $(d, h) \to (3, 2)$

$(b, h) \to (6, 2)$ $(d, i) \to (3, 4)$

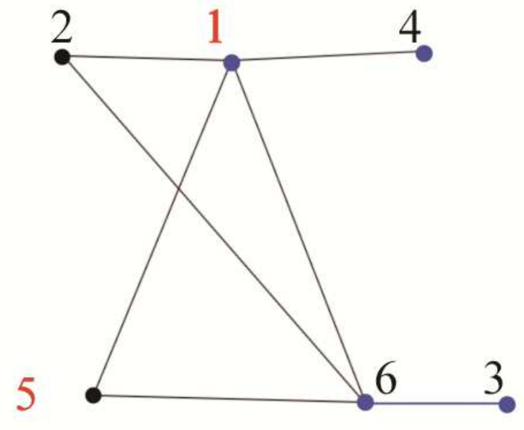
$(b, j) \to (6, 7)$ $(d, j) \to (3, 7)$

$$R = \{(a,1),(b,6),(c,8),(d,3),(h,2),(g,5),(i,4),(j,7)\}$$

Приклад. Графи G й H – ізоморфні.



Граф G.



Граф H.

G – матриця суміжності графа G й **H** – матриця суміжності графа H

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Властивість матриць суміжності ізоморфних графів

Якщо графи G й H **ізоморфні**, то з матриці суміжності графа G можна одержати матрицю суміжності H шляхом послідовної перестановки рядків і стовпців.

Для цього потрібно виконати максимально $n!$ перестановок, де n – число вершин графа.

Ізоморфізм орграфів

Для того, щоб два *орграфа* були *ізоморфні*, додатково до розглянутих раніше умов потрібно, щоб напрямки їх дуг збігалися.

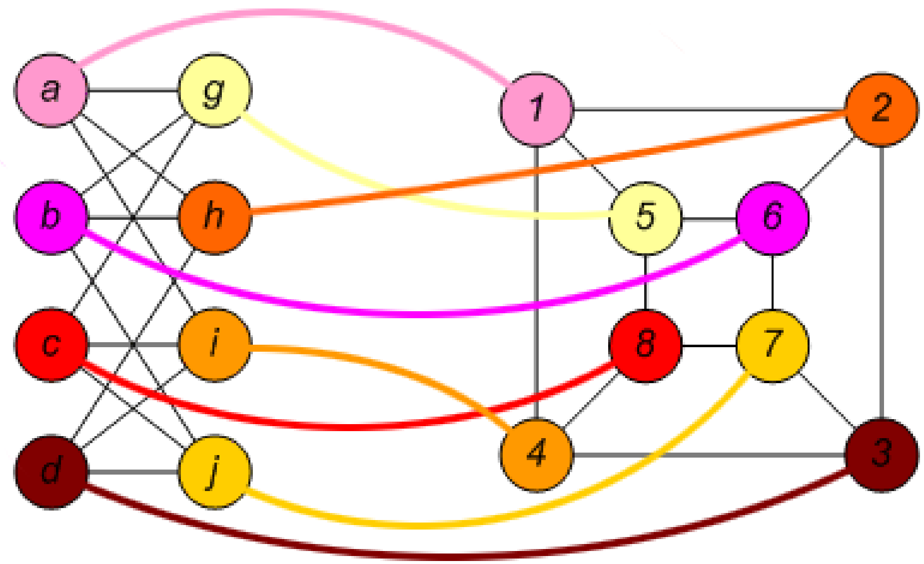
Алгоритм розпізнавання ізоморфізму графів $G(V,E)$ і $H(W,X)$

1. Перевіряємо умову $|V| = |W| = n$. **Якщо кількість вершин графа $|V|$ не дорівнює кількості вершин графа $|W|$, то графи однозначно неізоморфні**.

2. **Сортуємо елементи** множин $V = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ і $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_n\}$ за степенем суміжгості для кожної вершини.

3. В отриманих упорядкованих послідовностях вершин шукаємо **вершини, з однаковими значеннями критерія упорядкування**, тобто порівнювані вершини повинні мати однаковий степінь суміжності.

4. Якщо такі **вершини знайдені**, то **з'єднуємо їх ребром** з метою побудови графа взаємно однозначної відповідності. Якщо такої відповідності немає, тобто одна зі знайдених вершин уже включена в граф відповідності, то вихідні графи G й H неізоморфні.
5. Якщо **граф взаємно однозначної відповідності побудований**, **то розглянуті графи ізоморфні**, а його ребра вказують на перестановки, які потрібно зробити для ізоморфного перетворення графа G в граф H.

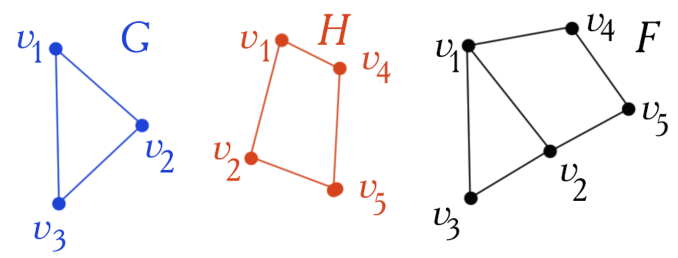


Теоретико-множинні операції над графами

1. Операція об'єднання графів

Граф F називається об'єднанням графів $G=(V,E)$ і $H=(V_1,E_1)$ якщо

$$F=G\cup H=(V\cup V_1,E\cup E_1).$$



Якщо $V\cap V_1=\varnothing$ та $E\cap E_1=\varnothing$, то об'єднання графів називають диз'юнктивним. (Незв'язний граф)

З властивостей операції об'єднання випливає, що $G\cup H=H\cup G$.

Граф є зв'язним, якщо його не можна представити у вигляді диз'юнктивного об'єднання двох графів і незв'язним – у протилежному випадку.

2. Операція перетину графів

Граф F називають перетином графів $G=\left(V,E\right)$ і $H=\left(V_1,E_1\right)$ якщо

$$F=G\cap H=\left(V\cap V_1,E\cap E_1\right).$$

3. Операція доповнення

Доповненням графа $G=\left(V,E\right)$ називають граф $\bar{G}=\left(V,\bar{E}\right)$, множиною вершин якого є множина V, а множина ребер формується відповідно до правила $\bar{E}=\left\{e\in V\times V\,\middle|\,e\notin E\right\}$

4. Декартовий добуток графів

Декартовым добутком графів $G_1(V_1,E_1)$ і $G_2(W_2,E_2)$ називають граф $G(\Omega,E)$, множиною вершин якого є декартовий добуток $\Omega = V_1 \times W_2$, де $|V_1| = n$, $|W_2| = m$

$$V_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\},\ W_2 = \{w_1, w_2, ..., w_m\} \text{ і } \Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n\cdot m}\},$$

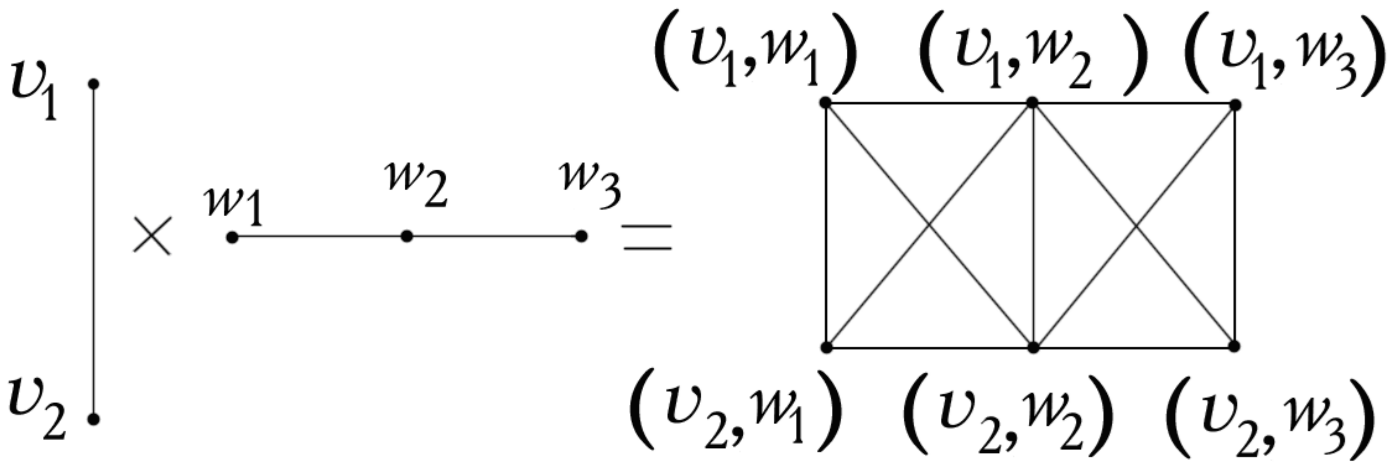
$$\omega_1 = (v_1, w_1),\ \omega_2 = (v_1, w_2), ..., (v_i, w_j), \ldots (v_a, w_b)$$

Причому вершина (v_i, w_j) суміжна з вершиною (v_a, w_b) при $1 \le i, a \le n, 1 \le j, b \le m$ тоді й тільки тоді, коли в графі G_1 суміжні відповідні вершини v_i і v_a, а в графі G_2 суміжні вершини w_j і w_b.

Приклад 1. На рисунку показаний приклад добутку $G = G_1 \times G_2$.

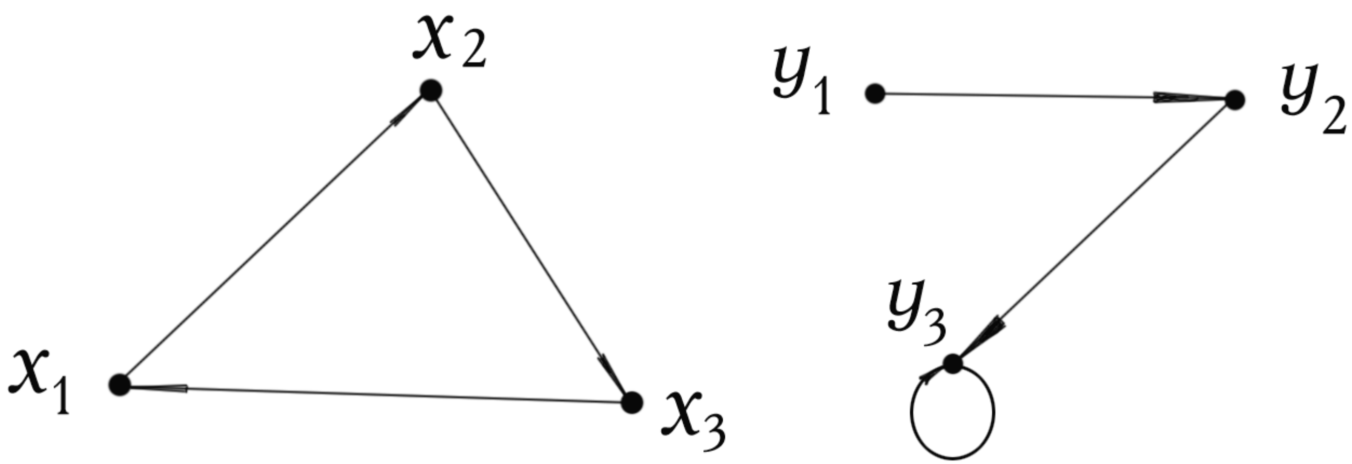
$G_1 = \left(V_1, E_1\right)$, де $V_1 = \left\{v_1, v_2\right\}$ і $E_1 = \left\{\left(v_1, v_2\right)\right\}$.

$G_2 = \left(W_2, E_2\right)$, де $W_2 = \left\{w_1, w_2, w_3\right\}$ і $E_2 = \left\{\left(w_1, w_2\right), \left(w_2, w_3\right)\right\}$.



Приклад. Знай ти декартовий добуток орграфів, які задані графічно

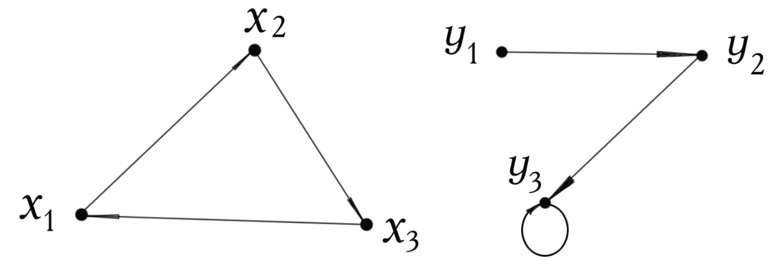
Розв’язок.



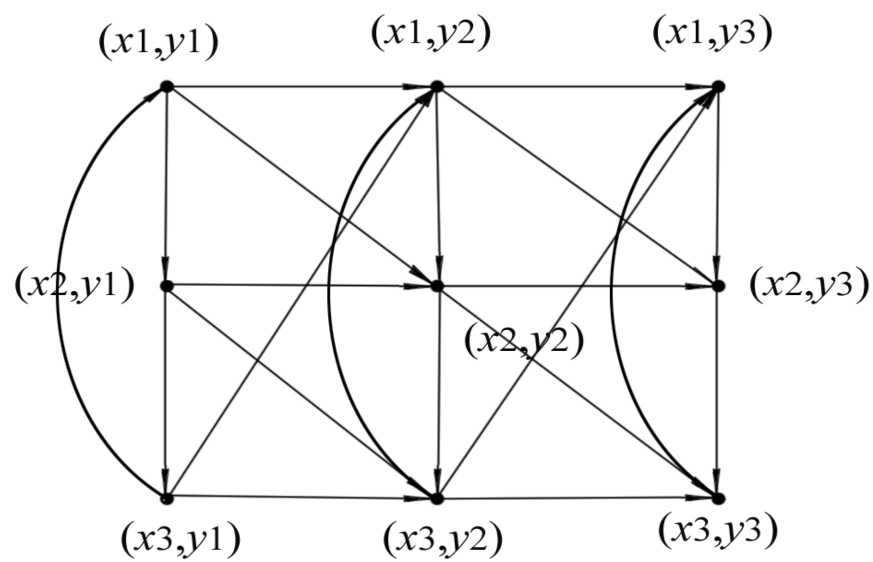
$G_1(X, E_1)$**:** $X = \{x_1, x_2, x_3\},\ E_1 = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1)\}$

$G_2(Y, E_2)$**:** $Y = \{y_1, y_2, y_3\},\ E_1 = \{(y_1, y_2), (y_2, y_3), (y_3, y_3)\}$

Побудуємо множину вершин декартового добутку графів:



$$\left\{\left(x_1,y_1\right),\left(x_{1,}y_2\right),\left(x_1,y_3\right),\left(x_2,y_1\right),\left(x_{2,}y_2\right),\left(x_2,y_3\right),\left(x_3,y_1\right),\left(x_{3,}y_2\right),\left(x_3,y_3\right)\right\}$$

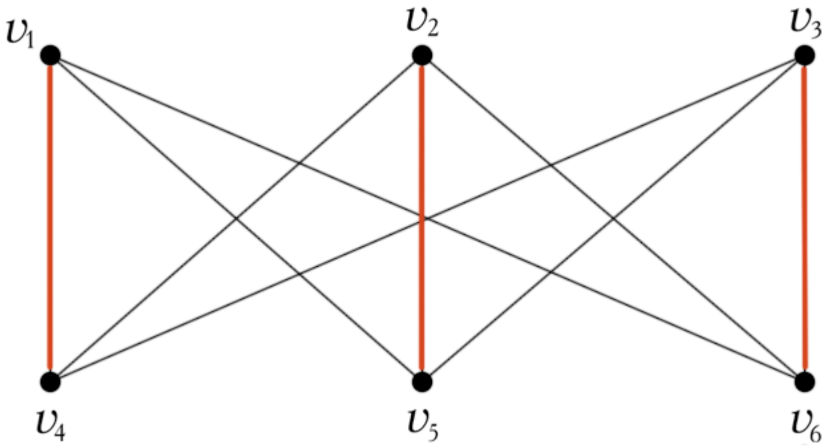


Паросполучення ребер графа

Довільну підмножину попарно несуміжних ребер графа $G\left(V, E\right)$ називають його ***паросполученням.***

Комбінацію називають досконалим ***паросполученням*** якщо кожна вершина графа інцидентна хоча б одному ребру з паросполучення.

Приклад. Граф, показаний на рисунку, має досконале паросполучення $\left\{\left(v_1, v_4\right), \left(v_2, v_5\right), \left(v_3, v_6\right)\right\}$



Графи й бінарні відношення

Відношення $R \subset V \times V$ представимо орієнтованим графом $G\left(R\right)$, у якому ребро $\left(v_i, v_j\right)$ існує тільки тоді, коли виконано $v_i R v_j$.

Властивості бінарних відношень на графах

1. **Рефлексивність.** Відношення R на множині V ***рефлексивне,*** якщо для кожного елемента $v \in V$ справедливе $\left(v, v\right) \in R$.

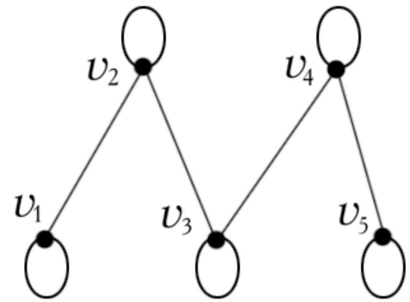
Граф: Петля.

Матриця суміжності: 1 на головній діагоналі

Правило:

Якщо відношення R рефлексивне, то граф $G\left(R\right)$ без кратних ребер має петлі у всіх вершинах.

Приклад. На малюнку показаний приклад графа рефлексивного відношення.



Головна діагональ матриці суміжності $G(R)$ складається з одиниць.

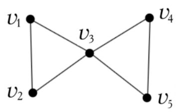
$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} \end{Vmatrix}$$

2. **Антирефлексивність.** Якщо відношення R на множині V ***антирефлексивне***, то для всіх елементів v множини V справедливе $(v,v) \notin R$.

Граф $G(R)$: без кратних ребер не має петель.

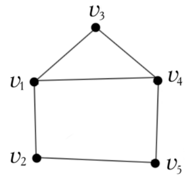
Приклад. На малюнку показаний граф антирефлексивного відношення

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$$



Головна діагональ матриці суміжності $G(R)$ складається з нулів.

3. **Симетричність.** Відношення R на V називають ***симетричним***, якщо з $\left(v_i, v_j\right) \in R$ випливає $\left(v_j, v_i\right) \in R$ при $v_i \neq v_j$. Матриця суміжності симетричного відношення симетрична щодо головної діагоналі.

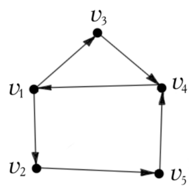


$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\left(v_1, v_2\right) \in R \to \left(v_2, v_1\right) \in R,\ \left(v_1, v_3\right) \in R \to \left(v_3, v_1\right) \in R,$$
$$\left(v_1, v_4\right) \in R \to \left(v_4, v_1\right) \in R,\ \left(v_2, v_5\right) \in R \to \left(v_5, v_2\right) \in R,$$
$$\left(v_3, v_4\right) \in R \to \left(v_4, v_3\right) \in R,\ \left(v_4, v_5\right) \in R \to \left(v_5, v_4\right) \in R.$$

4. **Антисиметричність та асиметричність.** Відношення R на V називають ***антисиметричним***, якщо з $\left(v_i, v_j\right) \in R$ випливає $\left(v_j, v_i\right) \in R$ тільки при $v_i = v_j$. Матриця суміжності антисиметричного відношення несиметрична щодо головної діагоналі. Асиметричне відношення завжди представлене орграфом з дугами без петель.

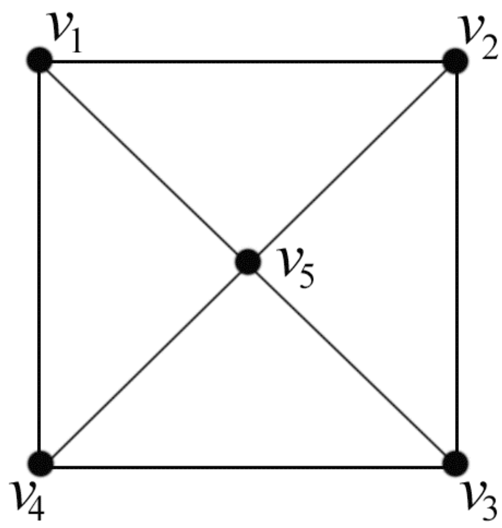
$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$



$$\left(v_1, v_2\right) \in R \to \left(v_2, v_1\right) \notin R, \left(v_1, v_3\right) \in R \to \left(v_3, v_1\right) \notin R,$$
$$\left(v_4, v_1\right) \in R \to \left(v_1, v_4\right) \notin R, \left(v_2, v_5\right) \in R \to \left(v_5, v_2\right) \notin R,$$
$$\left(v_3, v_4\right) \in R \to \left(v_4, v_3\right) \notin R, \left(v_5, v_4\right) \in R \to \left(v_4, v_5\right) \notin R.$$

5. **Транзитивність.** Відношення R на множині V називають ***транзитивним***, якщо з $\left(v_i, v_j\right) \in R$, $\left(v_j, v_k\right) \in R$ випливає $\left(v_i, v_k\right) \in R$ при $v_i, v_j, v_k \in V$ і $v_i \neq v_j, v_j \neq v_k, v_i \neq v_k$. У графі, що задає транзитивне відношення для всякої пари дуг, таких, що кінець першої дуги збігається з початком другий, існує транзитивно замикаюча дуга, що має спільний початок з першою і спільний кінець з другою.

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{Vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$



$$(v_1, v_5) \in R, (v_5, v_2) \in R \to (v_1, v_2) \in R;$$
$$(v_1, v_5) \in R, (v_5, v_4) \in R \to (v_1, v_4) \in R;$$
$$(v_3, v_5) \in R, (v_5, v_4) \in R \to (v_3, v_4) \in R;$$
$$(v_2, v_5) \in R, (v_5, v_3) \in R \to (v_2, v_3) \in R\ .$$

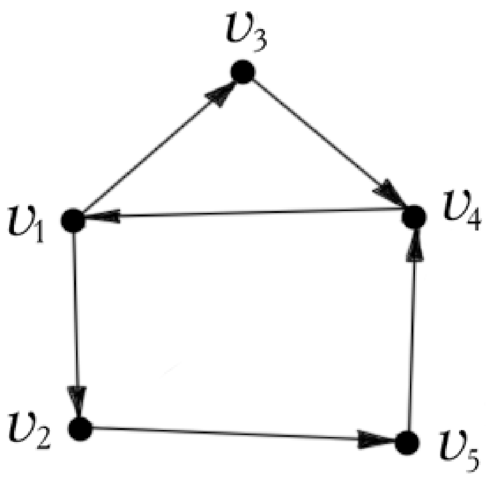
...

$$(v_1, v_2) \in R, (v_2, v_5) \in R \to (v_1, v_5) \in R\ .$$
$$(v_5, v_1) \in R, (v_1, v_2) \in R \to (v_5, v_2) \in R\ .$$

...

Відношення R на множині вершин $V = \{v_1, v_2, ..., v_5\}$ транзитивне, оскільки для довільного ребра в графі виконується умова транзитивності.

6. **Антитранзитивність.** Відношення R на множині V називають ***антитранзитивним***, якщо з $(v_i, v_j) \in R$, $(v_j, v_k) \in R$ випливає $(v_i, v_k) \notin R$ при $v_i, v_j, v_k \in V$ і $v_i \neq v_j, v_j \neq v_k, v_i \neq v_k$. У графі, що задає антитранзитивне відношення для всякої пари дуг, таких, що кінець першої дуги збігається з початком другої, не існує транзитивно замикаючої дуги, яка має спільний початок з першою і спільний кінець з другою.



$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\left(v_1, v_3\right) \in R, \left(v_3, v_4\right) \in R \to \left(v_1, v_4\right) \notin R;$$
$$\left(v_4, v_1\right) \in R, \left(v_1, v_3\right) \in R \to \left(v_4, v_3\right) \notin R;$$
$$\left(v_3, v_4\right) \in R, \left(v_4, v_1\right) \in R \to \left(v_3, v_1\right) \notin R;$$
$$\left(v_4, v_1\right) \in R, \left(v_1, v_2\right) \in R \to \left(v_4, v_2\right) \notin R;$$
$$\left(v_2, v_5\right) \in R, \left(v_5, v_4\right) \in R \to \left(v_2, v_4\right) \notin R;$$
$$\left(v_5, v_4\right) \in R, \left(v_4, v_1\right) \in R \to \left(v_5, v_1\right) \notin R;$$
$$\left(v_1, v_2\right) \in R, \left(v_2, v_5\right) \in R \to \left(v_1, v_5\right) \notin R$$

Відношення R на множині вершин $V = \left\{v_1, v_2, ..., v_5\right\}$ антитранзитивне, оскільки для довільних пар ребер виконується умова антитранзитивності.

Зв'язок між операціями над графами і операціями над відношеннями

1. Нехай $R \subset V \times V$. Тоді $U = V \times V$.
Доповненням $\overline{R}$ відношення R на V є відношення:

$$\overline{R} = U \setminus R,$$

де U – універсальне (повне) відношення.

2. Граф $G\left(\overline{R}\right)$ є доповненням графа $G(R)$ (до повного орграфа K з множиною вершин V і множиною ребер

$$E\left(K\right) = V \times V.$$

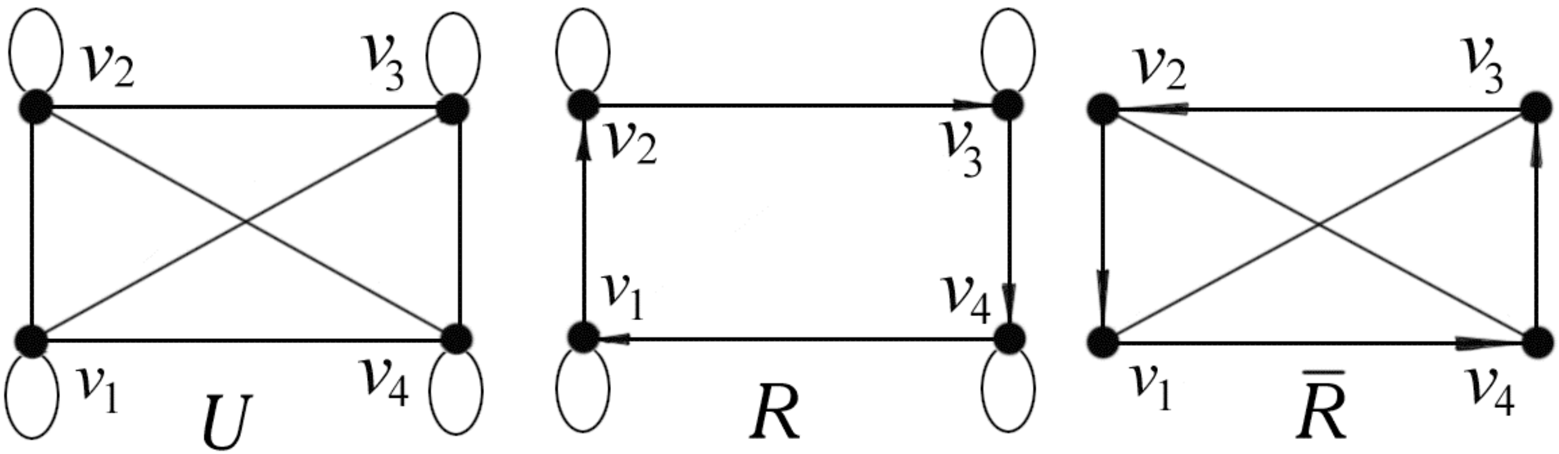
Приклад. Нехай $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.

$$U=\{(v_1,v_1),(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_1,v_4),(v_2,v_1),(v_2,v_2),(v_2,v_3),(v_2,v_4),$$

$$(v_3,v_1),(v_3,v_2),(v_3,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_1),(v_4,v_2),(v_4,v_3),(v_4,v_4)\}$$

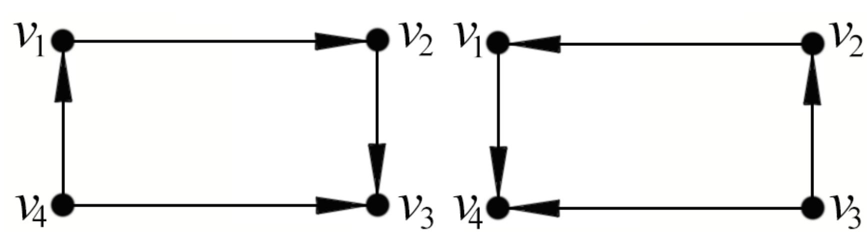
$$R=\{(v_1,v_1),(v_1,v_2),(v_2,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_1),(v_4,v_4)\}$$

$$\overline{R}=\{(v_1,v_3),(v_1,v_4),(v_2,v_1),(v_2,v_4),(v_3,v_1),(v_3,v_2),(v_4,v_2),(v_4,v_3)\}$$



3. Граф зворотного відношення $G\left(R^{-1}\right)$ відрізняється від графа $G\left(R\right)$ тим, що напрямки всіх ребер замінені на зворотні.

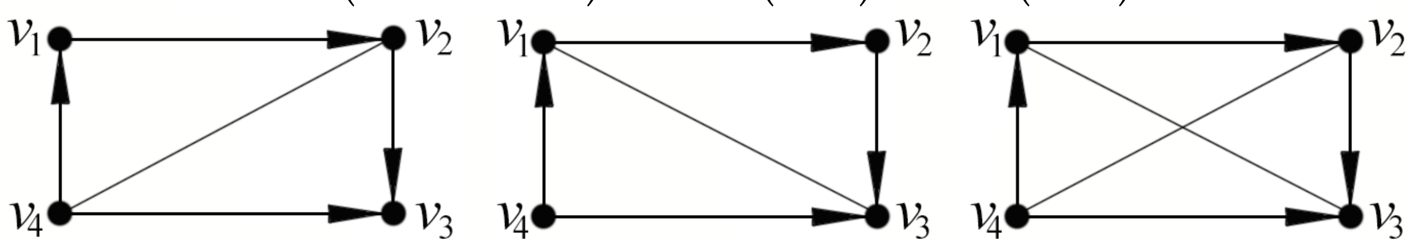
R $\qquad$ R^{-1}



$$R=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_4,v_1),(v_4,v_3)\};\ R^{-1}=\{(v_2,v_1),(v_3,v_2),(v_1,v_4),(v_3,v_4)\}$$

4. Граф об'єднання двох відношень, заданих на V, $G\left(R_1\cup R_2\right)$ є графом об'єднання двох графів $G\left(R_1\right)$ і $G\left(R_2\right)$:

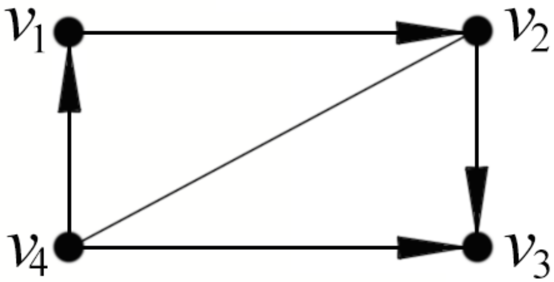
$$G\left(R_1\cup R_2\right)=G\left(R_1\right)\cup G\left(R_2\right).$$



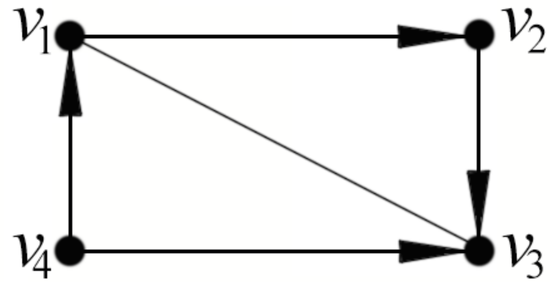
R_1 $\qquad$ R_2 $\qquad$ $R_1\cup R_2$

5. Граф перетину відношень $R_1 \cap R_2$ на V $G\left(R_1 \cap R_2\right)$ є графом перетинудвох графів $G\left(R_1\right)$ і $G\left(R_2\right)$:

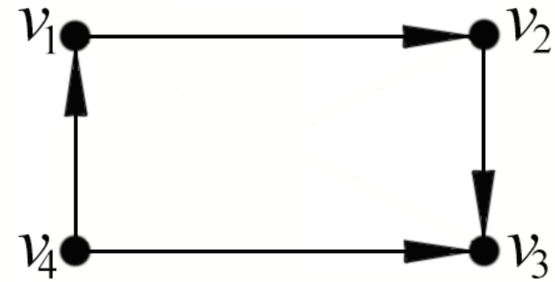
$$G\left(R_1 \cap R_2\right) = G\left(R_1\right) \cap G\left(R_2\right).$$



R_1



R_2



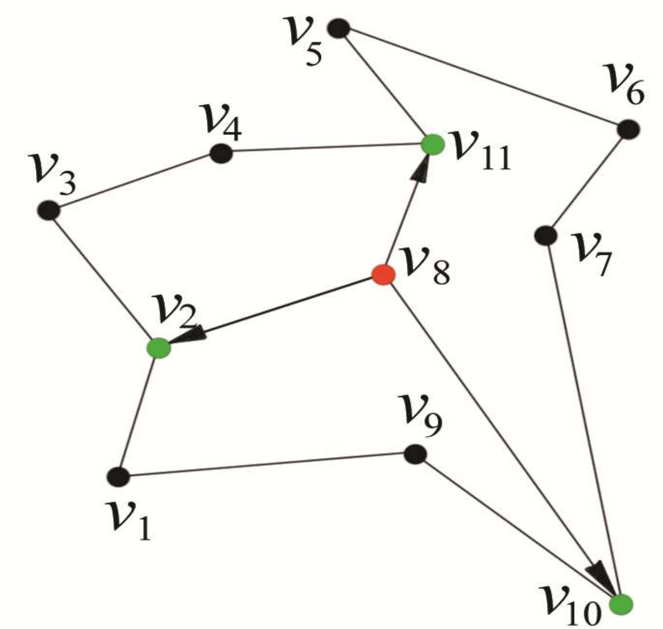
$R_1 \cap R_2$

Багатозначні відображення

Пряме відображення першого порядку вершини v_i – це множина таких вершин v_j графа $G(V,E)$, для яких існує дуга (v_i, v_j), тобто

$$\Gamma^{+}(v_i) = \left\{ v_j \middle| (v_i, v_j) \in E, i, j = 1, 2, \dots, n \right\},$$

де $n = |V|$ – кількість вершин графа

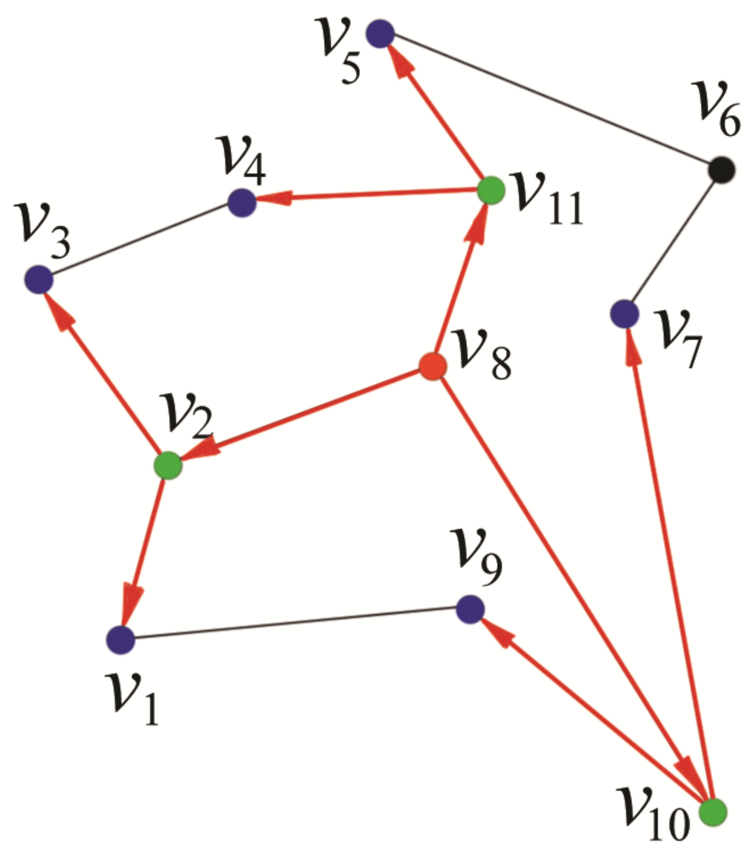


$i = 8 \quad v_i = v_8$

$\Gamma^{+}(v_8) = \{v_2, v_{10}, v_{11}\}$

Пряме відображення другого порядку вершини v_i – це пряме відображення від прямого відображення першого порядку

$$\Gamma^{+2}\left(v_i\right) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+1}\left(v_i\right)\right).$$



$i = 8 \quad v_i = v_8$

$\Gamma^{+}\left(v_8\right) = \left\{v_2, v_{10}, v_{11}\right\}$

$\Gamma^{+2}\left(v_8\right) = \left\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_7, v_9\right\}$

Аналогічно можна записати відображення 3-го порядку

$$\Gamma^{+3}\left(v_i\right) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+2}\left(v_i\right)\right) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+}\left(\Gamma^{+1}\left(v_i\right)\right)\right),$$

Відображення для 4-го порядку

$$\Gamma^{+4}\left(v_i\right) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+3}\left(v_i\right)\right) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+}\left(\Gamma^{+}\left(\Gamma^{+1}\left(v_i\right)\right)\right)\right),$$

і т.д., для p-го порядку.

....

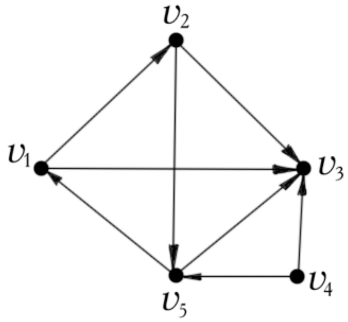
$$\Gamma^{+p}\left(v_i\right) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+(p-1)}\left(v_i\right)\right)$$

Зворотне відображення першого порядку вершини v_i – це множина таких вершин v_j графа $G\left(V,E\right)$, для яких існує дуга $\left(v_j,v_i\right)$, тобто

$$\Gamma^{-}\left(v_i\right)=\left\{v_j \middle| \left(v_j,v_i\right)\in E, i,j=1,2,\dots,n\right\},$$

де $n=\left|V\right|$ – кількість вершин графа

Зворотне відображення другого й наступних порядків вершини v_i – це зворотне відображення від зворотного відображення попереднього порядку



$$\Gamma^{-2}\left(v_i\right)=\Gamma^{-}\left(\Gamma^{-1}\left(v_i\right)\right).$$

$$\Gamma^{-3}\left(v_i\right)=\Gamma^{-}\left(\Gamma^{-2}\left(v_i\right)\right)=\Gamma^{-}\left(\Gamma^{-}\left(\Gamma^{-1}\left(v_i\right)\right)\right)$$

....

$$\Gamma^{-p}\left(v_i\right)=\Gamma^{-}\left(\Gamma^{-(p-1)}\left(v_i\right)\right)$$

Компонента зв’язності графа

Компонента зв’язності – деяка множина вершин графа, у якій між довільними двома вершинами **існує шлях** з однієї в іншу, і не існує жодного шляху з вершини цієї множини у вершину не з цієї множини.

Компонента зв’язності – це граф, породжений деякою множиною C_v, де C_v – множина, що включає вершину v і усі ті вершини графа, які можуть бути з'єднані з нею ланцюгом.

Теорема про розбиття графа. Різні компоненти графа $G\left(V,\Gamma\right)$ утворюють розбиття множини V, тобто

1. $C_v \neq \varnothing$,
2. $v_i, v_j \in V, C_{v_i} \neq C_{v_j} \Rightarrow C_{v_i} \cap C_{v_j} = \varnothing$,
3. $\bigcup C_v = V$.

Теорема про зв'язний граф. Граф є зв'язним графом тоді й тільки тоді, коли він складається з одного компонента зв'язності.

Між будь-якою парою вершин зв'язного графа існує як мінімум один шлях.

Досяжні і контрдосяжні вершини

Визначення. Вершину w графа D (або орграфа) називають **досяжною** з вершини v, якщо $w = v$, або існує шлях з v у w (маршрут від v у w).

Визначення. Вершину w графа D (або орграфа) називають **контрдосяжною** з вершини v, якщо існує шлях з w у v (маршрут від w у v).

Матриця досяжності

Матрицею досяжності називається матриця $n \times n$ $R = \left(r_{ij} \right), i, j = 1, 2, \ldots, n$, де n – число вершин графа, а кожний елемент визначається в такий спосіб:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } v_j \text{ досяжна з } v_i, \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Множина досяжних вершин $R\left(v_i \right)$ графа G. Множина $R\left(v_i \right)$ вершин, досяжних із заданої вершини v_i, складається з таких елементів v_j, для яких елемент r_{ij} в матриці досяжності дорівнює 1.

Усі *діагональні елементи* r_{ii} в матриці R дорівнюють 1, оскільки кожна вершина досяжна з себе самої зі шляхом довжиною 0.

Відображення і досяжність

Пряме відображення 1-го порядку $\Gamma^{+1}\left(v_i\right)$ – це множина таких вершин v_j, які досяжні з v_i з використанням шляхів довжиною 1.

Пряме відображення 2-го порядку – це множина $\Gamma^{+}\left(\Gamma^{+1}\left(v_i\right)\right) = \Gamma^{+2}\left(v_i\right)$, яка складається з вершин, досяжних з v_i з використанням шляхів довжиною 2.

Пряме відображення p-го порядку – це множина $\Gamma^{+p}\left(v_i\right)$, яка складається з вершин, досяжних із v_i за допомогою шляхів довжини p.

Визначення множини досяжності через відображення

Будь-яка вершина графа G, яка досяжна з v_i, повинна бути досяжна з використанням шляху (або шляхів) довжиною 0 або 1, або 2, ..., або p. Тоді множина вершин, досяжних з вершини v_i, можна представити у вигляді

$$R(v_i) = \{v_i\} \cup \Gamma^{+1}(v_i) \cup \Gamma^{+2}(v_i) \cup \ldots \cup \Gamma^{+p}(v_i).$$

Побудова матриці досяжності

Будуємо матрицю по рядках.

1. Знаходимо досяжні множини $R(v_i)$ для всіх вершин $v_i \in V$.
2. Для $i-$го рядка $r_{ij} = 1$, якщо $v_j \in R(v_i)$, а якщо ж $v_j \notin R(v_i)$, то $r_{ij} = 0$.

Матриця контрдосяжності

Матриця контрдосяжності – це матриця $n \times n$

$\mathbf{Q} = \left(q_{ij}\right)$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$, де n – число вершин графа, визначається в такий спосіб:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо з вершини } v_j \text{ може бути досягнута вершина } v_i, \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Контрдосяжною множиною $Q\left(v_i\right)$ називають множину вершин, з яких можна досягти вершину v_i. Контрдосяжну множину $Q\left(v_i\right)$ визначають з виразу:

$$Q\left(v_i\right) = \left\{v_i\right\} \cup \Gamma^{-1}\left(v_i\right) \cup \Gamma^{-2}\left(v_i\right) \cup \ldots \cup \Gamma^{-p}\left(v_i\right).$$

Визначення. **Матриця контрдосяжності** дорівнює транспонованій матриці досяжності $Q = R^T$.

Числа, що характеризують граф.

Цикломатичне число

Цикломатичним числом графа $G = (V, E)$ називається число

$$m = N - n + p,$$

де $N = |E|$ – число ребер графа,

$n = |V|$ – число вершин графа,

p – число компонентів зв'язності графа.

Для зв'язного графа $m = N - n + 1$.

Теорема. Цикломатичне число графа дорівнює найбільшій кількості незалежних циклів.

Цикли в графі

Циклом називають шлях, у якім перша й остання вершини збігаються.

Довжина циклу – число складових його *ребер*.

Простий цикл – це цикл без повторюваних ребер.

Елементарний цикл – це простий цикл без повторюваних вершин.

Наслідок

Петля – елементарний цикл.

Властивості циклів

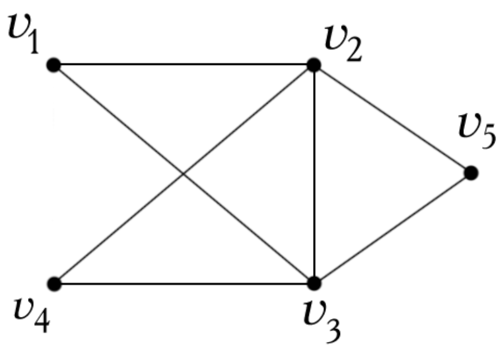
1. Зв'язний граф G не має циклів тоді й тільки тоді, коли цикломатичне число $m = 0$. Такий граф є деревом.

2. Зв'язний граф G має єдиний цикл тоді й тільки тоді, коли цикломатичне число $m = 1$.

Визначення цикломатичного числа

Цикломатичне число зв'язного графа можна визначити як число ребер, яке потрібно вилучити, щоб граф став деревом.

Приклад. Визначимо цикломатичне число графа, показаного на малюнку.



У розглянутому графі число вершин $n = 5$, число ребер $N = 7$.
Оскільки граф є зв'язним, то число компонентів зв’язності $p = 1$.

Таким чином, $m = N - n + p = 7 - 5 + 1 = 3$.

Число внутрішньої стійкості

Нехай дано граф $G\left(V,\Gamma\right)$. Множину $S \subset V$ називають внутрішньо стійкою, якщо ніякі дві вершини, що входять в S, не є суміжними. Іншими словами сформулюємо цю умову, використовуючи відображення першого порядку:

$$\Gamma^{+}\left(S\right) \cap S = \varnothing.$$

Якщо позначити через Φ сімейство всіх внутрішньо стійких множин графа, то для нього будуть справедливі співвідношення:

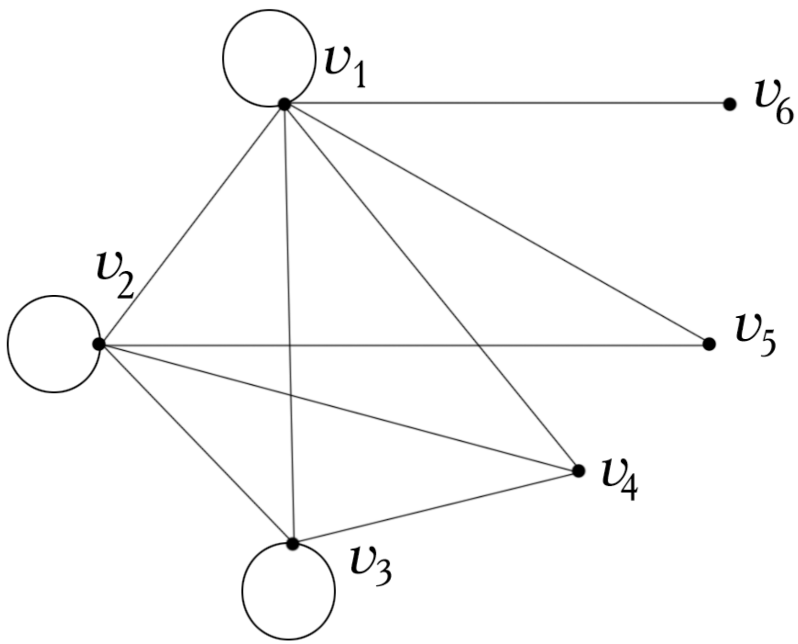
1. $\varnothing \in \Phi$,
2. Нехай $S \in \Phi$, тоді якщо $A \subset S$, то $A \in \Phi$.

Визначення. Числом *внутрішньої стійкості* графа G є величина, яку визначають з виразу:

$$a = \max_{S \in \Phi} \left| S \right|.$$

Визначення $S \subset V$ *називають множиною внутрішньої стійкості, якщо всі вершини з* S *не суміжні між собою. Потужність найбільшої множини внутрішньої стійкості називають числом внутрішньої стійкості.*

Приклад. Знайдемо числа внутрішньої стійкості графа.



Найбільша множина внутрішньої стійкості для нашого графа має вигляд $S = \{v_4, v_5, v_6\}$ (при додаванні будь-яких інших вершин будемо одержувати суміжні вершини). Відповідно, *число внутрішньої стійкості* графа G дорівнює $a = 3$.

Число зовнішньої стійкості

Нехай даний граф $G(V,\Gamma)$. Говорять, що множина $T \subset V$ зовні стійка, якщо для кожної вершини $v \notin T$ маємо $\Gamma^{+}(v) \cap T \neq \varnothing$, інакше кажучи $V \setminus T \subset \Gamma^{-1}(T)$.

Якщо Ψ – сімейство всіх зовні стійких множин графа, то для нього слушні такі співвідношення:

1. Нехай $T \in \Psi$. Якщо $T \subset A$, то $A \in \Psi$.

Визначення

Число *зовнішньої стійкості* b графа G є величина, яку одержують з виразу:

$$b = \min_{T \in \Psi} \left| T \right|.$$

Зовні стійка множина – множина вершин Т таких, що будь-яка вершина графа або належить Т або суміжна з вершиною з Т.

Приклад. Для представленого графа найменша множина зовнішньої стійкості має вигляд $T = \{v_1\}$ (тому що будь-яка інша вершина (не приналежна T) з'єднана з вершиною v_1 з T).

Число зовнішньої стійкості графа G рівно $b = 1$.