ЛЕКЦІЯ 4

Спеціальні властивості відношень
Види відношень
Відношення еквівалентності

Спеціальні властивості відношень

Рефлексивність

Відношення R на множині X називають *рефлексивним*, якщо для будь-якого $x \in X$ має місце xRx, тобто, кожний елемент $x \in X$ перебуває у відношенні ***R*** до самого себе.

Приклад 1.

Нехай $R_1 \subset A \times A$. $A = \{1, 2, 3\}$

$$R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b - \text{на множині натуральних чисел}\},$$

$$R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$$

В цьому відношенні присутні всі елементи типу xR_1x

$$1R_11 \equiv (1,1) \in R_1,$$

$$2R_12 \equiv (2,2) \in R_1$$

$$3R_13 \equiv (3,3) \in R_1$$

Приклад 2. Властивість рефлексивності

Нехай задано відношення $R_2 \subseteq A \times A$. $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

$R_2 = \{(a, b) | a\ i\ b - \text{мають спільний дільник на множині цілих чисел}\}$

$(1,1) \to 1,\ (1,2) \to 1,\ (1,3) \to 1\ (1,4) \to 1$

$(2,1) \to 1,\ (2,2) \to 2\,\text{i}\,1,\ (2,3) \to 1,\ (2,4) \to 1\,\text{i}\,2$

$(3,1) \to 1,\ (3,2) \to 1\ (3,3) \to 1\,\text{i}\,3,\ (3,4) \to 1$

$(4,1) \to 1,\ (4,2) \to 2\,\text{i}\,1,\ (4,3) \to 1,\ (4,4) \to 1\,\text{i}\,4$

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}.$$

В цьому відношенні присутні всі елементи типу xR_2x

$1R_21 \equiv (1,1) \in R_2,$

$2R_22 \equiv (2,2) \in R_2$

$3R_23 \equiv (3,3) \in R_2$

$4R_24 \equiv (4,4) \in R_2$

Представлення рефлексивного відношення матрицею

Визначення.

Для рефлексивного відношення всі діагональні елементи *матриці* дорівнюють 1.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \left\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\right\}$$

$$R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_1),$$

$$(a_4, a_2)(a_4, a_3), (a_4, a_4), (a_5, a_2), (a_5, a_3), (a_5, a_5)\}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	1			
a_2	1	1			
a_3			1		
a_4	1	1	1	1	
a_5		1	1		1

Представлення рефлексивного відношення графом

Визначення.

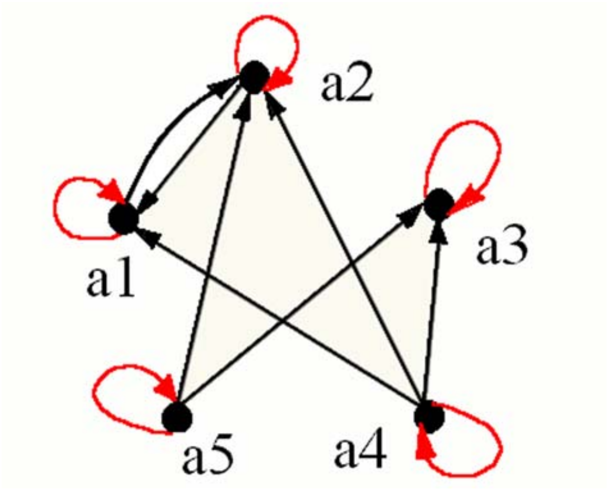
При задаванні відношенння *графом* кожний елемент має петлю – дугу (x, x).

Приклад 4. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_1),$$

$$(a_4, a_2)(a_4, a_3), (a_4, a_4), (a_5, a_2), (a_5, a_3), (a_5, a_5)\}$$



Антирефлексивність

Відношення ***R*** на множині ***X*** називають ***антирефлексивним***,

якщо з $x_1 R x_2$ випливає, що $x_1 \neq x_2$.

Приклад 1.

Нехай задане відношення $R \subset A \times A \quad A = \{1,2,3,4\}$

$$R_1 = \{(a,b) \mid a < b - \text{на множині цілих чисел}\}$$

$$R_1 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

В цьому відношенні всі елементи типу $(x,x) \notin R_1$

$$(1,1) \notin R_1, (2,2) \notin R_1, (3,3) \notin R_1, (4,4) \notin R_1,$$

якщо з $x_1 R x_2$ випливає, що $x_1 \neq x_2$.

$$1R_1 2 \equiv (1,2) \in R_1 \to 1 \neq 2 \quad 2R_1 3 \equiv (2,3) \in R_1 \to 2 \neq 3$$

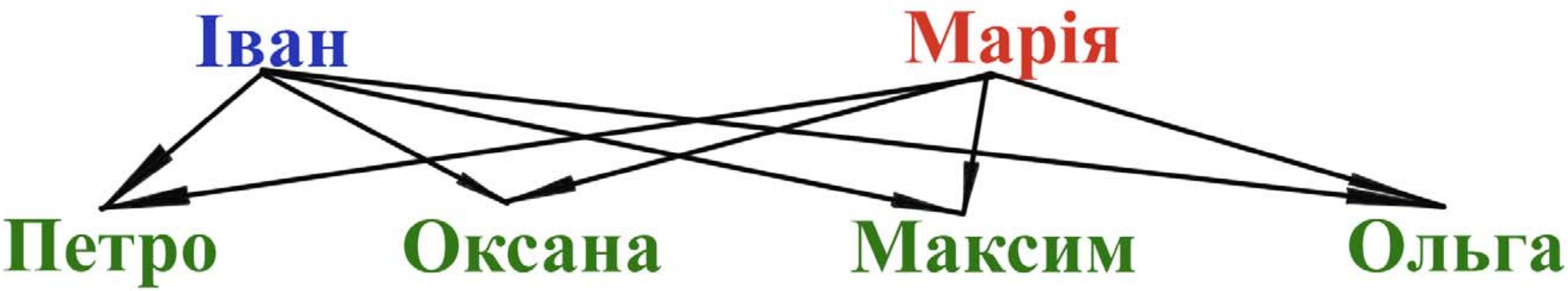
$$1R_1 3 \equiv (1,3) \in R_1 \to 1 \neq 3 \quad 2R_1 4 \equiv (2,4) \in R_1 \to 2 \neq 4$$

$$1R_1 4 \equiv (1,4) \in R_1 \to 1 \neq 4 \quad 3R_1 4 \equiv (3,4) \in R_1 \to 3 \neq 4$$

Приклад 2: з $x_1 R x_2$ випливає, що $x_1 \neq x_2$.

Нехай задано відношення $R_2 \subset A \times A$.

$A = \{\text{Іван}, \text{Марія}, \text{Петро}, \text{Оксана}, \text{Максим}, \text{Ольга}\}$.



$R_2 = \{(a,b) | a \text{ є сином } b \text{ на множині людей.}\}$

$R_2 = \{(\text{Петро},\text{Іван}),(\text{Петро},\text{Марія}),(\text{Максим},\text{Іван}),(\text{Максим},\text{Марія})\}$

$(\text{Петро},\text{Іван}) \in R_2 \rightarrow \text{Петро} \neq \text{Іван}$

$(\text{Максим},\text{Іван}) \in R_2 \rightarrow \text{Максим} \neq \text{Іван}$

$(\text{Петро},\text{Марія}) \in R_2 \rightarrow \text{Петро} \neq \text{Марія}$

$(\text{Максим},\text{Марія}) \in R_2 \rightarrow \text{Максим} \neq \text{Марія}$

Представлення антирефлексивного відношення матрицею

Визначення.

Для антирефлексивного відношення всі діагональні елементи *матриці* дорівнюють 0.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_4, a_1), (a_4, a_2)(a_4, a_3), (a_5, a_2), (a_5, a_3)\}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	0	1			
a_2	1	0			
a_3			0		
a_4	1	1	1	0	
a_5		1	1		0

Представлення антирефлексивного відношення графом

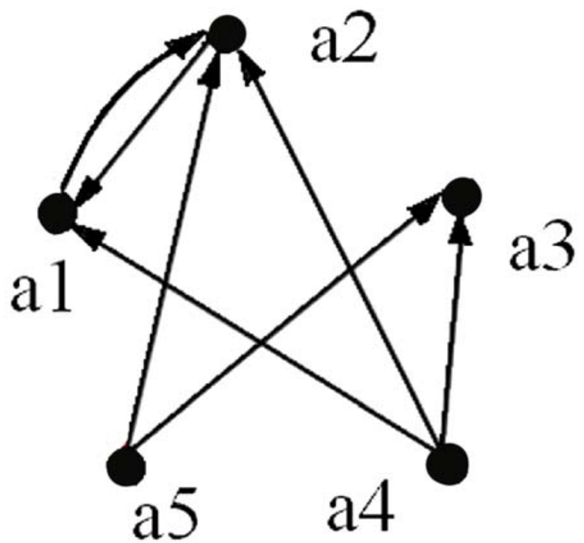
Визначення.

При задаванні відношення *графом* жодна з **вершина не має петлі** – немає дуг виду (x_i, x_i).

Приклад 4. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_4, a_1), (a_4, a_2)(a_4, a_3), (a_5, a_2), (a_5, a_3)\}$$



Симетричність

Нехай задане відношення $R \subseteq X \times X$

Відношення $\boldsymbol{R}$ на множині $\boldsymbol{X}$ називається ***симетричним***, якщо для пари $(x_1,x_2) \in R$ з x_1Rx_2 випливає x_2Rx_1

(інакше кажучи, для будь-якої пари відношення $\boldsymbol{R}$ виконується або в обидва боки, або не виконується взагалі).

Приклад 1.

Нехай задане відношення $R \subset A \times A \quad A = \{1,2,3,4\}$

$$R_1 = \{(a,b) \mid a \neq b - \text{на множині цілих чисел}\}$$

$$R_1 = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(2,3),(3,2),(4,2),(2,4),(3,4)(4,3)\}$$

$$(1,2) \in R_1 \to (2,1) \in R_1 \quad (2,3) \in R_1 \to (3,2) \in R_1$$

$$(1,3) \in R_1 \to (3,1) \in R_1 \quad (2,4) \in R_1 \to (4,2) \in R_1$$

$$(1,4) \in R_1 \to (4,1) \in R_1 \quad (3,4) \in R_1 \to (4,3) \in R_1$$

Приклад 2: з $x_1 R x_2$ випливає $x_2 R x_1$

Нехай задано відношення $R_2 \subset A \times A$.

$$A = \{\text{Іван}, \text{Марія}, \text{Петро}, \text{Оксана}, \text{Максим}, \text{Ольга}\}.$$

$$R_2 = \{(a, b) \mid a \text{ є родичем } b\}$$

$$(\text{Петро}, \text{Іван}) \in R_2 \rightarrow (\text{Іван}, \text{Петро}) \in R_2$$

$$(\text{Максим}, \text{Іван}) \in R_2 \rightarrow (\text{Іван}, \text{Максим}) \in R_2$$

$$(\text{Петро}, \text{Марія}) \in R_2 \rightarrow (\text{Марія}, \text{Петро}) \in R_2$$

$$(\text{Максим}, \text{Марія}) \in R_2 \rightarrow (\text{Марія}, \text{Максим}) \in R_2$$

$$(\text{Петро}, \text{Ольга}) \in R_2 \rightarrow (\text{Ольга}, \text{Петро}) \in R_2$$

$$(\text{Максим}, \text{Оксана}) \in R_2 \rightarrow (\text{Оксана}, \text{Максим}) \in R_2$$

Представлення симетричного відношення матрицею

Визначення.

Матриця симетричного відношення є симетричною відносно головної діагоналі

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_1, a_4), (a_4, a_1)(a_3, a_4), (a_4, a_3), (a_3, a_5), (a_5, a_3)\}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	x	1		1	
a_2	1	x			
a_3			x	1	1
a_4	1	0	1	x	
a_5		0	1		x

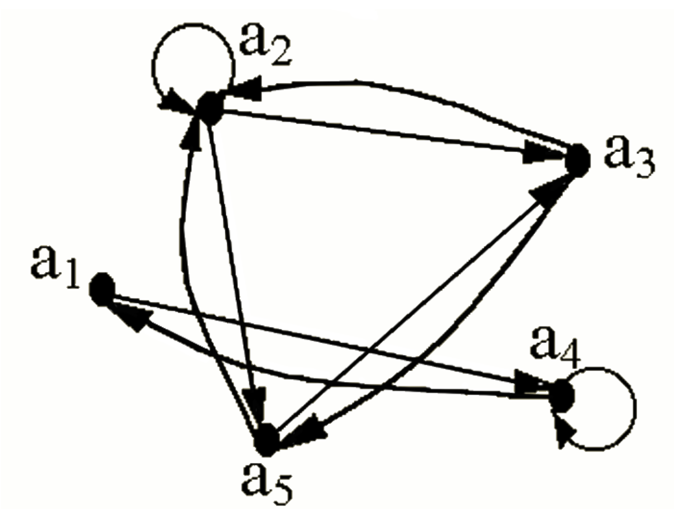
Представлення симетричного відношення графом

Визначення

У графі для кожної дуги з x_i в x_k **існує протилежно спрямована дуга** з x_k в x_i.

Нехай задане відношення $R \subset A \times A$. $A = (1, 2, 3, 4, 5)$

$$R = \{(a_1, a_4), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_2, a_5), (a_3, a_5), (a_3, a_2), (a_4, a_4), (a_4, a_1), (a_5, a_2), (a_5, a_3)\}$$



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1				1	
a_2		1	1		1
a_3		1			1
a_4	1			1	
a_5		1	1		

Антисиметричність

Нехай задане відношення $R \subseteq X \times X$

Відношення ***R*** називається ***антисиметричним***, якщо з $x_1 R x_2$ і $x_2 R x_1$ випливає, що $x_1 = x_2$.

Антисиметричність не є оберненою до симетричності.

Приклад 1.

Нехай $R_1 \subset A \times A,\ \ A = \{1, 2, 3\}$

$R_1 = \{(a, b) | a \le b - \text{на множині натуральних чисел}\},$

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

В цьому відношенні з aR_1b і bR_1a випливає, що $a = b$.

$$(1,1) \in R_1 \to (1,1) \in R_1, \qquad (1,2) \in R_1 \to (2,1) \notin R_1$$

$$(2,2) \in R_1 \to (2,2) \in R_1, \qquad (1,3) \in R_1 \to (3,1) \notin R_1$$

$$(3,3) \in R_1 \to (3,3) \in R_1, \qquad (2,3) \in R_1 \to (3,2) \notin R_1$$

Приклад 2. з x_1Rx_2 і x_2Rx_1 випливає, що $x_1=x_2$.

Нехай задано відношення $R_2 \subset A \times A$. $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

$R_2 = \{(a, b) | a$ є дільником b на множині дійсних чисел $\}$

$(1,1) \to 1,\ (1,2) \to 1,\ (1,3) \to 1\ (1,4) \to 1,$

$(2,2) \to 2,\quad (2,4) \to 2,$

$(3,3) \to 3, (4,4) \to 4.$

$R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}.$

В цьому відношенні з aR_1b і bR_1a випливає, що $a = b$.

$(1,1) \in R_2 \to (1,1) \in R_2,$

$(2,2) \in R_2 \to (2,2) \in R_2,$

$(3,3) \in R_2 \to (3,3) \in R_2,$

$(4,4) \in R_2 \to (4,4) \in R_2$

$(1,2) \in R_2 \to (2,1) \notin R_2$

$(1,3) \in R_2 \to (3,1) \notin R_2$

$(2,4) \in R_2 \to (4,2) \notin R_2$

Представлення антисиметричного відношення матрицею

Визначення.

1.Матриця антисиметричного відношення може мати одиниці на головній діагоналі.

2.Відсутня симетрія відносно головної діагоналі.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$R = \{(a_1, a_1), (a_2, a_1), (a_4, a_4)(a_4, a_1)(a_3, a_4), (a_3, a_5)\}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1				
a_2	1	x			
a_3			x	1	1
a_4	1			1	
a_5					x

Представлення антисиметричного відношення графом

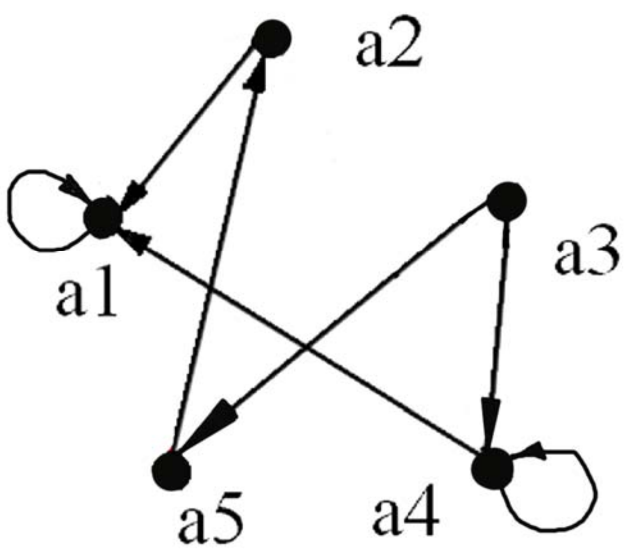
Визначення

У графі для кожної дуги з x_i в x_k не **існує протилежно спрямованої дуги** з x_k в x_i.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$R = \{(a_1, a_1), (a_2, a_1), (a_4, a_4)(a_4, a_1)(a_3, a_4), (a_3, a_5)\}$$



Асиметричність

Відношення R називається ***асиметричним***,

якщо для пари x_1Rx_2 випливає, що не виконується x_2Rx_1

(інакше кажучи, для будь-якої пари відношення R виконується або в одну сторону, або не виконується взагалі).

Приклад 1.

$$A=\{1,2,3,4\}\quad R_1=\{(a,b)\,|\,a>b-\text{на множині цілих чисел}\}$$

$$R_1=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$

$$(2,1)\in R_1\to(1,2)\notin R_1$$

$$(3,1)\in R_1\to(1,3)\notin R_1$$

$$(3,2)\in R_1\to(2,3)\notin R_1$$

$$(4,1)\in R_1\to(1,4)\notin R_1$$

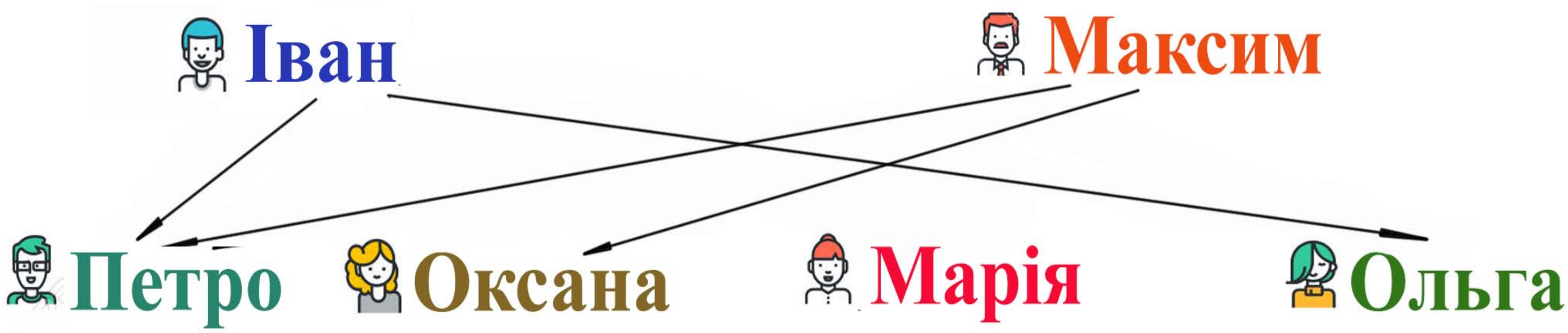
$$(4,2)\in R_1\to(2,4)\notin R_1$$

$$(1,1)\notin R_1,(2,2)\notin R_1,(3,3)\notin R_1,\ (4,4)\notin R_1$$

Приклад 2. З пари x_1Rx_2 випливає, що не виконується x_2Rx_1

$$R_2 = \{(a,b) | a \text{ є сином } b \text{ на множині людей.}\}$$

$$A = \{\text{Іван}, \text{Марія}, \text{Петро}, \text{Оксана}, \text{Максим}, \text{Ольга}\}$$



$$(\text{Іван}, \text{Петро}) \in R_2 \to (\text{Петро}, \text{Іван}) \notin R_2$$

$$(\text{Іван}, \text{Ольга}) \in R_2 \to (\text{Ольга}, \text{Іван}) \notin R_2$$

$$(\text{Максим}, \text{Петро}) \in R_2 \to (\text{Петро}, \text{Максим}) \notin R_2$$

$$(\text{Максим}, \text{Оксана}) \in R_2 \to (\text{Оксана}, \text{Максим}) \notin R_2$$

Представлення асиметричного відношення матрицею

Визначення.

Матриця асиметричного відношення не містить одиничних елементів, симетричних відносно головної діагоналі.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$R = \{(a_2, a_1)(a_4, a_1)(a_3, a_4), (a_3, a_5), (a_2, a_5)\}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1					
a_2	1	x			1
a_3			x	1	1
a_4	1				
a_5					x

Представлення асиметричного відношення графом

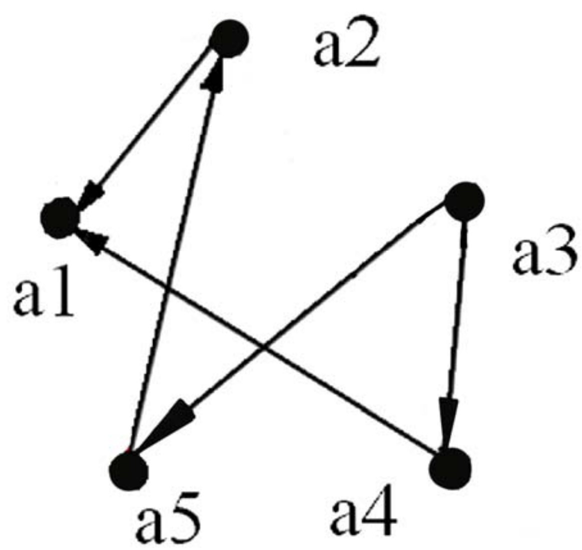
Визначення

У графі для кожної дуги з x_i в x_k не **існує протилежно спрямованої дуги** з x_k в x_i.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$R = \{(a_2, a_1), (a_4, a_1)(a_3, a_4), (a_3, a_5), (a_5, a_2)\}$$



Граф без петель

Транзитивність

Нехай задане відношення $R \subseteq X \times X$

Відношення ***R*** називають ***транзитивним***, якщо для будь-яких x_1, x_2, x_3 з $x_1 R x_2$ і $x_2 R x_3$ випливає $x_1 R x_3$.

Приклад1.

$$R_1 = \{(a,b) | a \le b - \text{на множині натуральних чисел}\}$$

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R_1 = \{(2,3),(1,1),(2,4),(1,2),(2,2),(1,3),(1,4),(3,4),(3,3),(4,4)\}$$

$$(1,1) \in R_1 \rightarrow (1,2),(1,3),(1,4)$$

$$(1,2) \in R_1 \rightarrow (2,2),(2,3),(2,4)$$

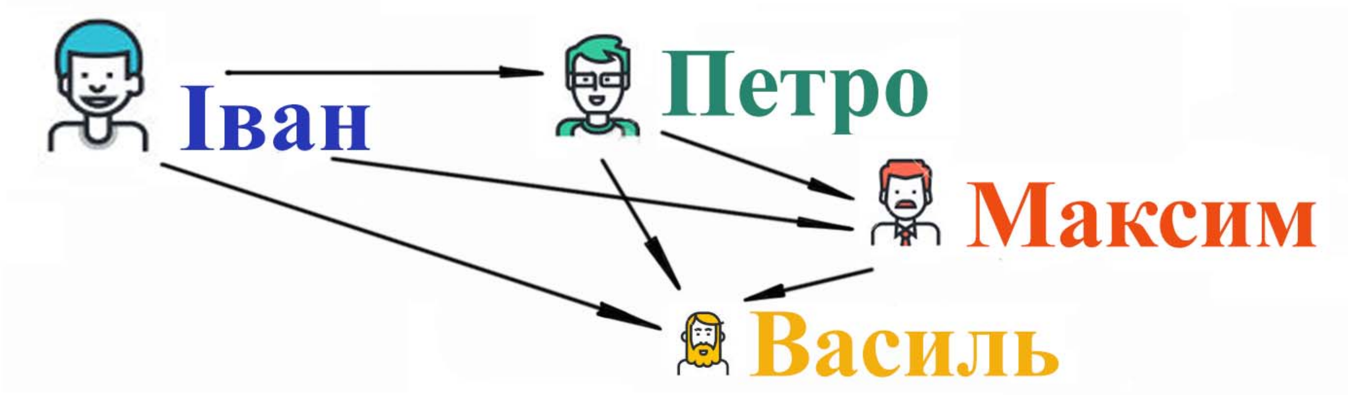
$$(1,3) \in R_1 \rightarrow (3,3),(3,4)$$

$$(1,4) \in R_1 \rightarrow (4,4)$$

Приклад 2.

$$R_2 = \{(a,b) \mid a \text{ нащадок } b\}$$

$$A = \{\text{Іван}, \text{Петро}, \text{Василь}, \text{Максим}\} \quad R_2 \subseteq A \times A$$



$$R_2 = \{(\text{Іван, Петро}), (\text{Іван,Максим}), (\text{Іван,Василь}), (\text{Петро,Максим}), (\text{Петро,Василь}), (\text{Максим,Василь})\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(\text{Іван,Петро}) \in R_2 \\ (\text{Петро,Максим}) \in R_2\end{array}\right. \Rightarrow (\text{Іван,Петро}) \in R_2$$

$$\left.\begin{array}{l}(\text{Іван,Максим}) \in R_2 \\ (\text{Максим,Василь}) \in R_2\end{array}\right. \Rightarrow (\text{Іван,Василь}) \in R_2$$

$$\left.\begin{array}{l}(\text{Петро,Максим}) \in R_2 \\ (\text{Максим,Василь}) \in R_2\end{array}\right. \Rightarrow (\text{Петро,Василь}) \in R_2$$

Задавання *графом*

У графі, що задає транзитивне відношення ***R***, для всякої пари дуг таких, що кінець першої збігається з початком другої, існує третя дуга, що має початок в спільній вершині з першою і кінець у спільній вершині з другою.

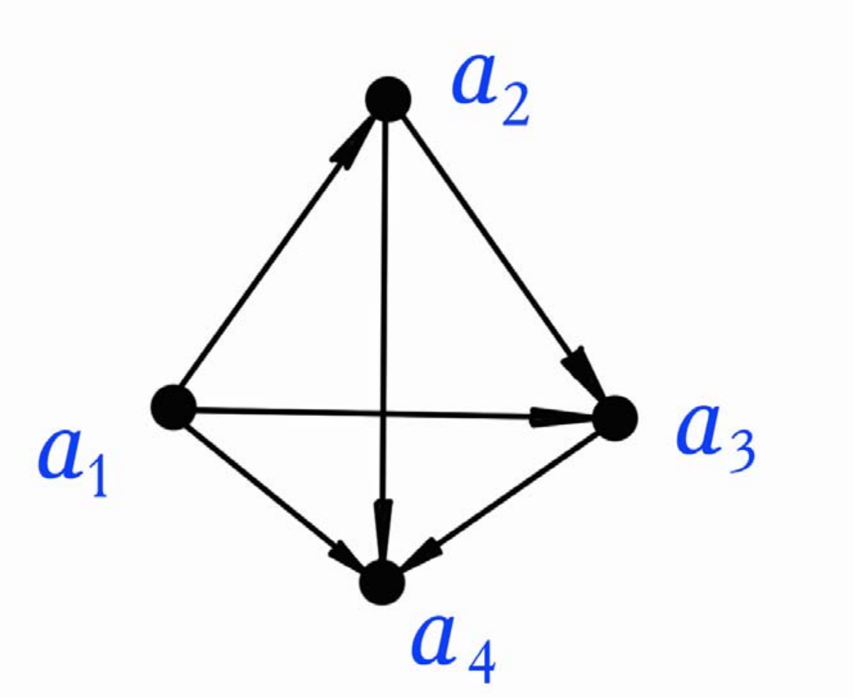
$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \quad R_3 \subseteq A \times A$$

$$R_3 = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_1, a_4), (a_2, a_4)\}$$

$$\begin{matrix} (a_1, a_2) \in R_3 \\ (a_2, a_3) \in R_3 \end{matrix} \Rightarrow (a_1, a_3) \in R_3$$

$$\begin{matrix} (a_1, a_3) \in R_3 \\ (a_3, a_4) \in R_3 \end{matrix} \Rightarrow (a_1, a_4) \in R_3$$

$$\begin{matrix} (a_2, a_3) \in R_3 \\ (a_3, a_4) \in R_3 \end{matrix} \Rightarrow (a_2, a_4) \in R_3$$



Антитранзитивність

Відношення ***R*** називають ***антитранзитивним***, якщо для будь-яких x_1, x_2, x_3 з x_1Rx_2 і x_2Rx_3 випливає, що x_1Rx_3 не виконується.

Приклад 1

$$R_1 = \{(a,b) \mid a \text{ є наступним роком за } b \text{ на множині років}\}$$

$$A = \{2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016\}$$

$$R_1 = \{(2010, 2011), (2011, 2012), (2012, 2013), (2013, 2014),$$
$$(2014, 2015), (2015, 2016)\}$$

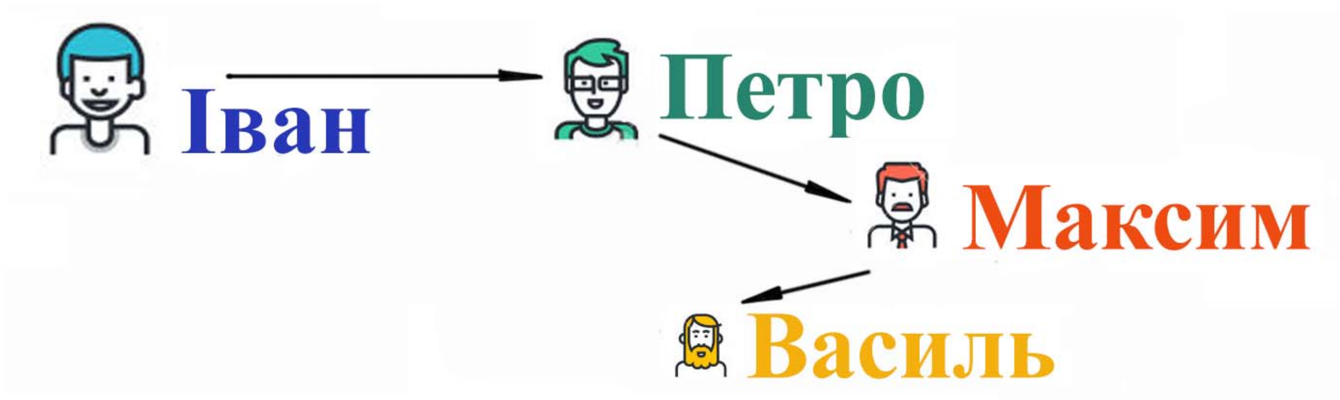
$$\begin{matrix} (2010, 2011) \in R_1 \\ (2011, 2012) \in R_1 \end{matrix} \Rightarrow (2010, 2012) \notin R_1$$

$$\begin{matrix} (2014, 2015) \in R_1 \\ (2015, 2016) \in R_1 \end{matrix} \Rightarrow (2014, 2016) \notin R_1$$

Приклад 2

$$A = \{\text{Іван}, \text{Петро}, \text{Василь}, \text{Максим}\},\ R_2 \subseteq A \times A$$

$$R_2 = \{(a, b) \mid a \text{ є батьком } b\}$$



$$R_2 = \{(\text{Іван}, \text{Петро}), (\text{Петро}, \text{Максим}), (\text{Максим}, \text{Василь})\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(\text{Іван}, \text{Петро}) \in R_2 \\ (\text{Петро}, \text{Максим}) \in R_2\end{array}\right. \Rightarrow (\text{Іван}, \text{Максим}) \notin R_2$$

$$\left.\begin{array}{l}(\text{Петро}, \text{Максим}) \in R_2 \\ (\text{Максим}, \text{Василь}) \in R_2\end{array}\right. \Rightarrow (\text{Петро}, \text{Василь}) \notin R_2$$

Приклад визначення властивостей відношення

Нехай $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Нехай $R \subseteq X \times X$ визначене у вигляді:

$$R = \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\beta),(\alpha,\delta),(\beta,\alpha),(\delta,\alpha),(\delta,\delta),(\gamma,\delta),(\gamma,\gamma)\}.$$

1. R не є рефлексивним, оскільки $\beta \in X$, але $(\beta,\beta) \notin R$.

2. R не є антирефлексивним оскільки $(\alpha,\alpha) \in R$.

3. R не є симетричним, оскільки $(\gamma,\delta) \in R$, але $(\delta,\gamma) \notin R$.

3. R не є антисиметричним, оскільки $(\alpha,\beta) \in R$ й $(\beta,\alpha) \in R$, але $\alpha \neq \beta$.

4. R не є асиметричним, оскільки $(\alpha,\beta) \in R$ та $(\beta,\alpha) \in R$

5. R не є транзитивним, оскільки $(\beta,\alpha) \in R, (\alpha,\delta) \in R$, але $(\beta,\delta) \notin R$.

6. R не є антитранзитивним, оскільки $(\alpha,\alpha) \in R$ та $(\alpha,\beta) \in R$

Види відношень

1. Відношення еквівалентності

Елементи називають еквівалентними, якщо довільний з них може бути замінений іншим.

У цьому випадку говорять, що дані елементи перебувають у відношенні еквівалентності.

Властивості відношення еквівалентності

Відношення R на множині X є **відношенням еквівалентності,** якщо воно

рефлексивне,

симетричне,

транзитивне.

У чому проявляються властивості еквівалентності?

1. Властивість **рефлексивності** проявляється в тому, що кожний елемент еквівалентний самому собі або $x \equiv x$.

2. Висловлювання про те, що два елементи є еквівалентними, не вимагає уточнення, який з елементів розглядається першим, а який – другим, тобто має місце $x \equiv y \to y \equiv x$ – властивість **симетричності**.

3. Два елементи, які еквівалентні третьому, також є еквівалентними між собою, або має місце $x \equiv y$ і $y \equiv z \to x \equiv z$ – властивість **транзитивності**.

Позначення відношень еквівалентності

Як загальний символ відношення еквівалентності використовується символ «$\equiv$» (іноді символ «$\sim$»).

Для окремих відношень еквівалентності використовуються інші символи:

«=» – для позначення рівності;

«$\|$» – для позначення паралельності;

«$\leftrightarrow$» або «$\rightleftarrows$» – для позначення логічної еквівалентності.

Приклад. Розглянемо приклади множин еквівалентності
$R_1 = \{(a,b) \mid a \text{ еквівалентне } b \text{ на множині чисел}\}$.

Нехай задане відношення $R_1 \subseteq X \times X$ на множині $X = \{1,2,3\}$.

$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}.$$

Визначимо його властивості:

1. Рефлексивність:

Кожний елемент еквівалентний самому собі: $1R_1 1, 2R_1 2, 3R_1 3$.

2. Симетричність:

з $1R_1 2$ випливає, що $2R_1 1$,

з $1R_1 3$ випливає, що $3R_1 1$,

з $2R_1 3$ випливає, що $3R_1 2$.

3. Транзитивність:

Якщо $1R_1 2$ і $2R_1 3$, то $1R_1 3$. Якщо $1R_1 3$ і $3R_1 2$, то $1R_1 2$.
Якщо $2R_1 1$ і $1R_1 3$, то $2R_1 3$. Якщо $2R_1 3$ і $3R_1 1$, то $2R_1 1$.
Якщо $3R_1 1$ і $1R_1 2$, то $3R_1 2$. Якщо $3R_1 2$ і $2R_1 1$, то $3R_1 1$.

Приклад

Нехай задане відношення $R_2 \subseteq X \times X$

$R_2 = \{(a,b) | a \text{ вчиться в одній групі з } b \text{ на множині студентів}\}$

Нехай $X = \{Иван, Ольга, Максим\}$

$$R_2 = \{(Иван, Ольга), (Иван, Максим), (Иван, Иван),$$

$$(Ольга, Иван), (Ольга, Ольга), (Ольга, Максим)$$

$$(Максим, Иван), (Максим, Ольга), (Максим, Максим)\}$$

Рефлексивність: «Іван вчиться в одній групі із самим собою»

Симетричність: «Іван вчиться в одній групі з Ольгою»$\equiv$ «Ольга вчиться в одній групі з Іваном».

Транзитивність: «Іван вчиться в одній групі з Ольгою » і «Ольга вчиться в одній групі з Максимом» $\rightarrow$ «Іван вчиться в одній групі з Максимом»

Отже, відношення R_2 є еквівалентним.

Класи еквівалентності

Відношення еквівалентності R на множині A **розбиває** його **на підмножини**, елементи яких еквівалентні один одному й не еквівалентні елементам інших підмножин.

Визначення. Підмножини, що не перетинаються, на які розбивається множина A відношенням еквівалентності R, називають **класами еквівалентності**.
Класами еквівалентності називають підмножини, що не перетинаються та отримані в результаті розбиття множини A відношенням еквівалентності R
Визначення. Множину класів еквівалентності множини A відносно R називають фактор-**множиною і** позначають $[A]_R$.

Приклад

Нехай множина A — це набір різнокольорових повітряних кульок.

Множина A

1. Відношення R_1 задамо умовою: $(a,b) \in R$ якщо «a одного кольору з b». *Одержимо класи еквівалентності з кульок одного кольору.*

2. Відношення R_2 задамо умовою: $(a,b) \in R$ якщо «a одного розміру з b» *Одержимо класи еквівалентності з кульок одного розміру*

3. Відношення R_3 задамо умовою: $(a,b) \in R$ якщо «a однакової форми з b» *Одержимо класи еквівалентності з кульок однакової форми.*

Визначення класу еквівалентності

Нехай $a_i \in A$ – *елемент множини* $A=\{a_1,a_2,...,a_i,...,a_n\}$ і R — відношення еквівалентності на $A \times A$.

Тоді $[a_i]$ позначає множину $\{x \mid xRa_i\} = \{x \mid (x,a_i) \in R\}$, яку називають ***класом еквівалентності***, що містить a_i. Символ $[A]_R$ позначає множину всіх класів еквівалентності множини A по відношенню R. Таким чином,

$[A]_R$ - *фактор-множина*

Приклад. Нехай $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ і дано відношення еквівалентності:

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(1,4),$$
$$(2,1),(2,4),(3,5),(5,3),(4,1),(4,2)\}.$$

Класи еквівалентності по відношенню R були отримані шляхом визначення класу еквівалентності кожного елемента множини A:

$\left[1\right]=\left\{x\middle|\left(x,1\right)\in R\right\}=\left\{x\middle|xR1\right\}=\left\{1,2,4\right\}$ де

$1\in\left[1\right]$, оскільки $\left(1,1\right)\in R$,

$2\in\left[1\right]$ оскільки $\left(2,1\right)\in R$,

$4\in\left[1\right]$ оскільки $\left(4,1\right)\in R$.

Так само одержуємо

$$\left[2\right]=\left\{x\middle|\left(x,2\right)\in R\right\}=\left\{x\middle|xR2\right\}=\left\{2,1,4\right\}$$

$$\left[3\right]=\left\{x\middle|\left(x,3\right)\in R\right\}=\left\{x\middle|xR3\right\}=\left\{3,5\right\}$$

$$\left[4\right]=\left\{x\middle|\left(x,4\right)\in R\right\}=\left\{x\middle|xR4\right\}=\left\{4,1,2\right\}$$

$$\left[5\right]=\left\{x\middle|\left(x,5\right)\in R\right\}=\left\{x\middle|xR5\right\}=\left\{5,3\right\}$$

$$\left[6\right]=\left\{x\middle|\left(x,6\right)\in R\right\}=\left\{x\middle|xR6\right\}=\left\{6\right\}$$

Приклад. Нехай Q – множина раціональних чисел.

Розіб'ємо Q на класи еквівалентності, для яких a/b – раціональний дріб, де $a \in Z$, $b \in N$.

Будь-який дріб c/d буде віднесений до одного класу еквівалентності з a/b тоді й тільки тоді, коли $ad = bc$.

(Наприклад: $2/4 \sim 3/6$, $2/6 \sim 3/9$).

Властивості такого відношення.

1. **Рефлексивність.** Для будь-якого дробу a/b виконується рівність $ab = ba$. Отже, $a/bRa/b$.

2. **Симетричність.** Якщо $a/bRc/d$, то $ad=bc$, у той же час $bc = ad$. Звідси $c/d\ Ra/b$.

3. **Транзитивність.** Нехай $a/bRc/d$ і $c/dRm/n$. Доведемо, що $a/bRm/n$, тобто $an = bm$. Дійсно, оскільки $a/bRc/d$, то $ad = bc$ і $c/dRm/n$, те $cn = dm$. Домножимо першу рівність на n, а другу на b, одержимо $and = bcn$ і $bcn = bmd$. В обох рівностях присутнє bcn. Тому $and = bmd$ або $an = bm$.

Завдання 1

Нехай приміщення лабораторії складається із трьох кімнат.
Усього співробітників у лабораторії – 8.

Множина всіх співробітників: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$

Множина співробітників в 1-й кімнаті: $X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$

Множина співробітників в 2-й кімнаті: $X_2 = \{x_4\}$

Множина співробітників в 3-й кімнаті: $X_1 = \{x_5, x_6, x_7, x_8\}$

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$$

Питання 1.

Записати матрицю відношення R, заданого предикатом:

$$R = \{(x, y) \mid \text{"}x \text{ } \textit{працює в одній кімнаті з } y\text{"}\}$$

ВІДПОВІДЬ НА ЗАПИТАННЯ 1

Відношення

$$R = \left\{(x, y) \mid "x \ \textit{працює в одній кімнаті з} \ y"\right\}$$

Представлене матрицею

$$\begin{array}{cc}
R & \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Питання 2

Визначите властивості відношення R і його вид