Лабораторна робота № 3

Тема: «Інтерполяція функцій».

Мета: Ознайомлення з інтерполяційними формулами Лагранжа, Ньютона, рекурентним співвідношенням Ейткена, методами оцінки похибки інтерполяції.

Завдання: Закріплення, поглиблення і розширення знань студентів при вирішенні практичних обчислювальних завдань. Оволодіння обчислювальними методами і практичними методами оцінки похибки обчислень. Придбання умінь і навичок при програмуванні та налагодженні обчислювальних завдань на комп'ютері.

Теоретичні основи:

Інтерполяція функцій є одним із фундаментальних розділів обчислювальної математики. До появи комп'ютерів для багатьох практичних обчислень застосовувалися таблиці елементарних функцій (синусів, логарифмів і т. ін.). Для отримання досить точних результатів при значеннях аргументів, розташованих між вузловими точками, для яких дані табличні значення функції, вирішувалося завдання інтерполяції (у перекладі - «між полюсами»). У найбільш простому випадку сусідні точки графіка цієї функції з'єднувалися відрізком прямої (лінійна інтерполяція). Власне, густота точок таблиці і вибиралася з огляду на інтерполяцію. Наприклад, вираз «чотиризначні таблиці» означає, що для будь-якого значення аргументу, а не тільки для зазначених в таблиці в якості вузлових, шляхом інтерполяції, (як правило, лінійної) можна отримати табличне значення функції з точністю до чотирьох значущих цифр. Основоположне значення задачі інтерполяції пояснюється також тим, що багато методів розв'язання задач чисельного диференціювання, інтегрування, розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь зводяться до диференціювання і інтегрування інтерполяційного многочлена. Після появи комп'ютерів значення задачі інтерполяції функцій, заданих таблицею, не втратило актуальності, оскільки в результаті чисельного вирішення складних задач отримують ряд значень шуканої функції при різних значеннях вхідного параметра. Одержання значної кількості таких значень пов'язане з великими витратами машинного часу. Застосування інтерполяції в цьому випадку дозволяє істотно зменшити ці витрати. Однак, на відміну від задачі інтерполяції відомої функції, в цьому випадку інформація про шукану функцію обмежується таблицею її значень. Ця задача є некоректною, оскільки існує нескінченна множина функцій, що мають задане кінцеве число відомих значень. З подібними ж проблемами доводиться стикатися і при розв'язуванні диференціальних та інтегральних рівнянь. Тому можна сформулювати таку тезу: в обчислювальній математиці не існує коректних задач. Існують тільки коректно поставлені завдання, тобто штучно придумані умови, які на практиці, як правило, не виконуються у зв'язку з браком інформації про те, що є шуканим. У зв'язку з цим задача інтерполяції в реальних умовах є найважливішою до вирішення багатьох інших завдань, необхідних для практики.

Постановка завдання

Нехай деяка функція $f\left(x\right)$ задана своїми значеннями $y_j = f\left(x_j\right)$ на дискретній множині точок x_j, $j = 0,...,m$. Потрібно наближено визначити аналітичний вигляд цієї функції і тим самим отримати можливість обчислити її значення в проміжних точках $x \in \left(x_j, x_{j+1}\right)$. Графік, що ілюструє дану задачу, зображений на рис. 1.

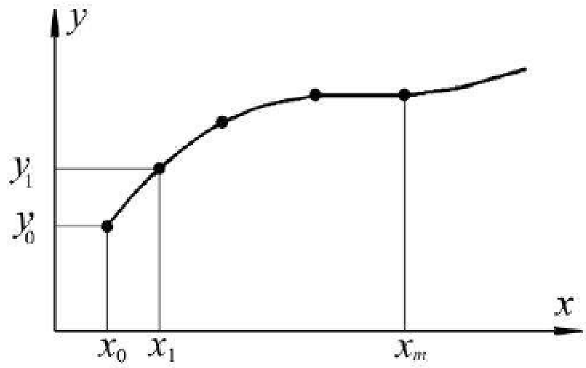

Рис. 1. Інтерполяція функцій

Інтерполюючу функцію будемо шукати у вигляді алгебраїчного многочлена.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,. \tag{1.1}$$

Оскільки многочлен $P_n(x)$ у вузлових точках повинен збігатися з заданими значеннями функції, то завдання зводиться до вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i = y_j, \quad j = k,...,k+n \tag{1.2}$$

щодо невідомих a_1 (k - номер початкової вузлової точки, використовуваної в даному розрахунку). Ця система рівнянь має єдине рішення (якщо $m \geq n+k$, і всі x_j різні), оскільки визначник цієї системи – визначник Вандермонда – не дорівнює нулю.

Методи розв'язування задач.
Інтерполяційний многочлен Лагранжа

інтерполяційного многочлена Лагранжа:

$$P_n(x) = L_n(x) = \sum_{j=k}^{k+n} y_j \prod_{\substack{i=k \\ i\neq j}}^{k+n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}. \tag{1.3}$$

В окремому випадку $n = 1$ (лінійна інтерполяція)

$$L_1(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1}$$

а при $n = 2$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_{k+1})(x - x_{k+2})}{(x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k+2})} y_k + \frac{(x - x_k)(x - x_{k+2})}{(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k+2})} y_{k+1} +$$

$$+ \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k+2} - x_k)(x_{k+2} - x_{k+1})} y_{k+2}$$

Неважко помітити, що структура цих формул така, що для кожної вузлової точки $x = x_j$ з вхідного в набору використовуваних формулою вузлових точок, тільки один доданок відмінний від нуля і саме той, в який входить y_j. Крім того, дріб, що входить в цей відмінний від нуля доданок, при $x = x_j$ дорівнює одиниці. Тому $L_n(x_j) = y_j$.

Інтерполяційний многочлен Ньютона

Спочатку необхідно дати кілька визначень. Для спрощення запису введемо позначення: $f_k = f(x_k)$. Кінцевою різницею першого порядку функції f в точці x_k називається величина

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

а кінцевою різницею n-го порядку $(n-1)$ величина

$$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k \tag{1.4}$$

Звідси, зокрема, випливає, що різниця другого порядку

$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = (f_{k+2} - f_{k+1}) - (f_{k+1} - f_k) = f_k - 2f_{k+1} + f_{k+2}$$

Розділеними різницями нульового порядку називаються значення функції f_k . Розділеною різницею першого порядку називається величина

$$f(x_k, x_{k+1}) = f(x_{k+1}, x_k) = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{f_k}{x_k - x_{k+1}} + \frac{f_{k+1}}{x_{k+1} - x_k}$$

Розділена різниця n-го порядку визначається через розділені різниці $(n-1)$-го порядку за рекурентною формулою

$$f\left(x_k, x_{k+1}, x_{k+n}\right) = \frac{f\left(x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+n}\right) - f\left(x_k, x_{k+1}, x_{k+n-1}\right)}{x_{k+n} - x_k} \qquad (1.5)$$

Інший вираз розділеної різниці n-го порядку

$$f\left(x_k, x_{k+1}, x_{k+n}\right) = \sum_{j=k}^{k+n} f_j \left(\prod_{\substack{i=k \\ i \neq j}}^{k+n} \left(x_j - x_i\right) \right)^{-1} \qquad (1.6)$$

Інтерполяційним многочленом Ньютона називається алгебраїчний многочлен

$$l_n\left(x\right) = f\left(x_k\right) + \left(x - x_k\right) f\left(x_k, x_{k+1}\right) + \left(x - x_k\right)\left(x - x_{k+1}\right) f\left(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(x - x_k\right)\left(x - x_{k+1}\right)\ldots\left(x - x_{k+n-1}\right) f\left(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}\right) \qquad (1.7)$$

Цей многочлен тотожно дорівнює многочлену n-го ступеня, записаному в формі Лагранжа або в будь-якій іншій формі в силу єдиності інтерполяційного многочлена. Проте така форма запису дозволяє при необхідності збільшення ступеня многочлена не перебудовувати весь многочлен заново, а тільки додавати додаткові доданки.

Методи оцінки похибки інтерполяції
Оцінка похибки методу
Теоретична оцінка похибки інтерполяції.

Справедлива наступна оцінка похибки інтерполяції

$$f\left(x\right) = P_n\left(x\right) + \frac{\prod_{j=k}^{k+n}\left(x - x_j\right)}{\left(n+1\right)!} f^{\left(n+1\right)}\left(\xi\right) \qquad (1.8)$$

де x_j - вузли сітки $\xi \in \left[x_k, x_{n+k}\right]$, x - значення аргументу, де оцінюється похибка інтерполяції. Для безпосереднього застосування цієї формули необхідно мати верхню оцінку модуля $\left(n+1\right)$- ї похідної функції $f\left(x\right)$. Якщо йдеться про інтерполяцію відомої функції по її табличних значеннях, то така оцінка може бути отримана аналітично. Наприклад, похідна будь-якого порядку від функцій $\sin x$ і $\cos x$ по модулю не перевищує одиниці.

Необхідно відзначити, що значення $\omega_n\left(x\right)$ між вузлами x_j поблизу кінців інтервалу інтерполяції істотно більше (по модулю), ніж у середині. Крім того, при збільшенні n значення $\omega_n\left(x\right)$ швидко зростають. Звідси випливає, що підвищення степеня многочлена може призвести до збільшення похибки інтерполяції, якщо зі збільшенням порядку похідної досить швидко збільшується її величина.

Практична оцінка похибки інтерполяції за результатами чисельного експерименту. У разі, коли інтерпольована функція є результатом чисельного розв'язку деякої задачі, вся інформація про шукану функцію вичерпується її значеннями у вузлових точках. Задача інтерполяції при цьому є некоректною, оскільки може існувати скільки завгодно функцій, графіки яких проходять через дані точки (рис 1.2а). Тобто, рішення задачі може бути отримано тільки з точністю до довільної адитивної складової, що має нульові значення у всіх заданих вузлових точках.

Однак, якщо сітка вибирається довільно, то існування функції, рівної нулю саме в вузлових точках цієї сітки, малоймовірно. Можна також вказати різні способи використання декількох сіток для підвищення надійності одержуваних результатів. У випадку, розглянутому на рис. 1.2б, функція має різкий сплеск на одному з часткових відрізків. При цьому інтерполяційна формула може просто «не помітити» цього сплеску, оскільки у вузлових точках його вплив може бути дуже малим. «Відчути» такий сплеск можна тільки при уточненні результату (наприклад, шляхом підвищення степеня інтерполяційного многочлена, згущенням сітки).

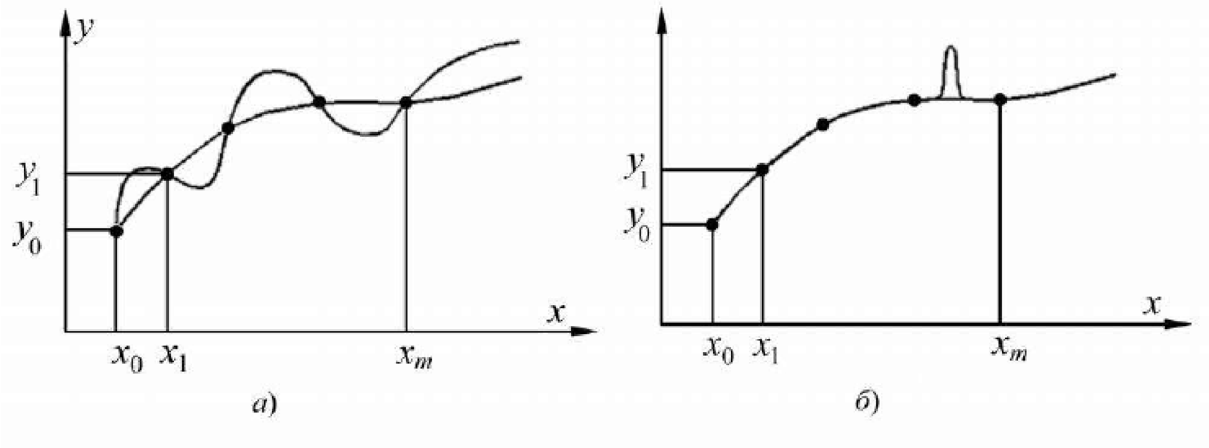

Рис.2. Некоректність задачі інтерполяції

Таким чином, хоча повністю виключити можливість помилки (неправильної оцінки похибки результату), пов'язаної з некоректністю завдання, не можна, але є шляхи зменшення такої можливості.

Розглянемо спосіб оцінки похибки інтерполяції, що не потребує використання будь-якої іншої інформації, крім значень функції у вузлових точках. Для цього на підставі (1.8) представимо математичну модель похибки інтерполяції у наступному вигляді

$$P_n^1(x) - f(x) = c\prod_{j=k_1}^{k_1+n}\left(x - x_j^1\right) + \delta_1(x) \tag{1.9}$$

Тут x_j^1- вузли деякої сітки; $j = 0,\dots,N_1$, c - величина, що незалежна від положення вузлів; k_1 - номер початкового вузла, використовуваного інтерполяційною формулою; $\delta_1(x)$ - додаткова частина похибки, яку вважають малою величиною в порівнянні з першим доданком.

Тепер змінимо сітку, використовуючи нові вузли x_j^2, $j = 0,\dots,N_2$. Тоді отримаємо друге рівняння для знаходження невідомих c і $f(x)$.

$$P_n^2(x) - f(x) = c\prod_{j=k_2}^{k_2+n}\left(x - x_j^2\right) + \delta_2(x) \tag{1.10}$$

Віднімаючи (1.9) з (1.10) і нехтуючи малими, знайдемо c

$$c = \frac{P_n^2(x) - P_n^1(x)}{\Pi_2 - \Pi_1},\ \Pi_i = \prod_{j=k_i}^{k_i+m}\left(x - x_j^i\right) \tag{1.11}$$

оцінку похибки інтерполяції

$$P_n^1(x) - f(x) = \frac{\left(P_n^2(x) - P_n^1(x)\right)\Pi_1}{\Pi_2 - \Pi_1} \tag{1.12}$$

і більш точне значення функції

$$f(x) \approx \frac{P_n^1(x)\Pi_2 - P_n^2(x)\Pi_1}{\Pi_2 - \Pi_1}. \tag{1.13}$$

Формувати різні сітки можна різними способами (наприклад, зменшенням кроку в 2 рази, вибором закону розподілу вузлів). У тому числі для оцінки інтерполяції можна використовувати значення функції в інших вузлах тієї ж самої сітки. Останнє може виявитися більш зручним з практичної точки зору. Спосіб вибору вузлів також може бути різним.

Розглянемо випадок, коли другий набір x_j^2 складається з вузлів x_j^1 з номерами від $k+1$ до $n+k+1$ (тобто $k_1 = k$, $k_2 = k+1$). У цьому випадку згідно (1.12) похибка оцінюється за формулою

$$P_n^1(x) - f(x) \approx \frac{\left[P_n^2(x) - P_n^1(x)\right]\prod_{j=k}^{k+n}\left(x - x_j\right)}{\prod_{j=k+1}^{k+n+1}\left(x - x_j\right) - \prod_{j=k}^{k+n}\left(x - x_j\right)} =$$

$$= -\left[P_n^2(x) - P_n^1(x)\right]\frac{x - x_k}{x_{k+n+1} - x_k}, \tag{1.14}$$

а (1.13) має вигляд

$$f(x) \approx \frac{x_{k+n+1} - x}{x_{k+n+1} - x_k}P_n^1(x) + \frac{x - x_k}{x_{k+n+1} - x_k}P_n^2(x) = P_{n+1}(x) \tag{1.15}$$

Функція (1.15) в дійсності представляє собою інтерполяційний многочлен степеня $n+1$, оскільки:

- $P_{n+1}(x)$ є алгебраїчним многочленом степеня $n+1$;
- у вузлах з номерами від $i = k+1$ до $i = k+n$ обидва многочлени $P_n^1(x_i)$ і, $P_n^2(x_i)$, а, отже, і $P_{n+1}(x_i)$, збігаються з $f(x_i)$;

$$P_{n+1}(x_k) = P_n^1(x_k) = f(x_k);$$

$$P_{n+1}(x_{n+k+1}) = P_n^2(x_{n+k+1}) = f(x_{n+k+1})$$

Рекурентна формула (1.15) використовується при інтерполяції за схемою Ейткена.

Таким чином, даний спосіб оцінки похибки інтерполяції зводиться до побудови інтерполяційного многочлена $P_{n+1}(x)$ і порівнянні $P_n(x)$ значень з $P_{n+1}(x)$ як з більш точними.

Оцінка похибок вихідних даних та округлення

Крім похибки інтерполяції необхідно враховувати похибку, яка обумовлена помилками самих використовуваних значень функції. Цю похибку, згідно (1.3), можна оцінити за формулою

$$\Delta_n(x) = \sum_{j=k}^{k+n} \sigma_j A_j, \quad A_j = \left| \prod_{\substack{i=k \\ i \neq j}}^{k+n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right| \tag{1.16}$$

або за рекурентним співвідношенням,

$$\Delta_{n+1}(x) = \left| \frac{x_{k+n+1} - x}{x_{k+n+1} - x_k} \Delta_n^1(x) \right| + \left| \frac{x - x_k}{x_{k+n+1} - x_k} \Delta_n^2(x) \right| \tag{1.17}$$

$$\Delta_0^1(x) = \sigma_k, \qquad \Delta_0^2(x) = \sigma_{k+1}$$

де σ_j- відомі оцінки похибки значень y_j. Якщо $y_j = f(x_j)$ - обчислені значення відомої функції, то

$$\sigma_j \le |y_j| \cdot 10^{-M+1}, \tag{1.18}$$

(M - число десяткових розрядів мантиси машинного слова).

Помилку округлення при застосуванні інтерполяційної формули Лагранжа можна оцінити таким способом. Якщо при програмній реалізації цього способу інтерполяції проводиться додавання методом накопичення, то величина похибки округлення приблизно в n разів більше, ніж та, яка випливає з (1.16) з урахуванням (1.18).

При застосуванні рекурентної формули (1.15) відбувається попарне додавання та накопичення часткових сум по схемі бінарного дерева. Якщо при кожному додаванні доданки приблизно дорівнюють один одному, то накопичення похибки округлення, пов’язаної з вирівнюванням порядків доданків, що суттєво відрізняються між собою, не відбувається. Загальну похибку, пов’язану з машинним представленням чисел, можна тоді оцінити за формулою (1.17).

Відзначимо, що в практичних розрахунках степень інтерполяційного многочлена, як правило, не перевищує 10, тому похибка округлення не перевищує набагато похибку вихідних даних. Однак існує можливість того, що доданки суми мають великі за модулем величини і різні знаки, так що сума має істотно менше значення. Тоді відносна похибка округлення може виявитися дуже великою.

Критерій якості оцінки похибки

Оскільки оцінки (1.12) - (1.15) виведені з припущенням, що величини $\delta_i(x)$ малі, то необхідна перевірка справедливості цього припущення. Це можна зробити наступним чином. Оцінка похибки за формулою (1.15) зводиться до порівняння значення $P_n(x)$ із значенням, отриманим при інтерполяції многочленом $(n+1)$-го степеня $P_{n+1}(x)$. Тому процес збільшення степеня можна продовжити і отримати значення $P_{n+2}(x)$. $\Delta_n = P_n(x) - P_{n+1}(x)$ представляє собою оцінку похибки інтерполяції значення $P_n(x)$. Різниця $\Delta_{\Delta n} = P_{n+1}(x) - P_{n+2}(x)$ є оцінкою похибки оцінки похибки (рис. 1.3). Відношення $\delta_n = \left|\Delta_{\Delta n}/\Delta_n\right|$ змістовно визначає відносну розмитість оцінки похибки. Якщо $\delta_n \ll 1$, то це означає, що відносна розмитість оцінки мала, і такій оцінці можна довіряти. Якщо ж $\delta_n > 0.3 - 0.4$, то ширина області розмитості порівняна з Δ_n і таку оцінку слід відкинути.

Чисельний експеримент

Застосуємо цей спосіб оцінки до конкретної задачі інтерполяції. Нехай

$$f(x) = \sin x, \; x_j = \frac{j}{m}\frac{\pi}{2}, \quad y_j = f(x_j), \quad j = 0,\ldots,m.$$

Результати інтерполяції і оцінки похибки зручно представляти на графіку у вигляді залежності $-\lg\left|P_n - P_{n+1}\right|$ (десяткового логарифма правої частини (1.14)) від $\overline{x} = (x - x_j)/(x_{j+1} - x_j)$. На рис. 3 різні криві відповідають різним n (при $j = 2$).

Відзначимо, що збільшення ординати кривої на одиницю при збільшенні степеня інтерполяційного многочлена означає зменшення похибки в 10 разів. Зближення кривих означає те, що за рахунок подальшого збільшення степеня точність підвищити не вдається.

Попарне зближення кривих пояснюється тим, що функція $\sin x$ – непарна, і в її розкладанні за степенями x присутні тільки непарні члени.

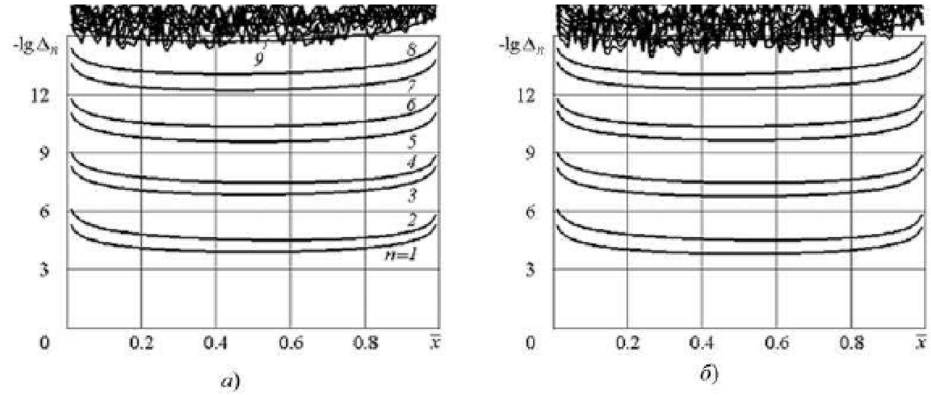

Рис. 3. Результати інтерполяції

З рис. 3а видно, що в результаті інтерполяції даних цього прикладу при $m = 20$ можуть бути отримані значення з похибкою порядку 10-13 з відносною розмитістю близько 0.01. На рис. 3б зображені криві, аналогічні наведеним на рис. 3а, тільки для оцінки похибки використані точні значення функції $\sin x$. Видно, що відмінність графіків на обох малюнках незначна, що говорить про високу точність оцінки похибки за цим методом.

На рис. 4а наведені оцінки похибки (1.16), яка викликана помилками використовуваних значень функції $\sigma_j = \sin x_j \cdot 10^{-15}$ (тут використана подвійна точність). Ця похибка, як неважко помітити, істотно перевищує значення σ_j. При інтерполяції на відрізках, близьких до середини таблиці, ця похибка значно менше (рис. 4б).

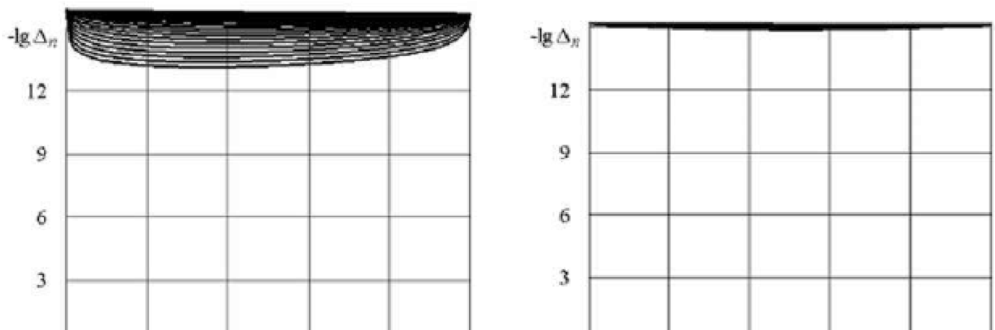

Рис. 4. Вплив похибки початкових даних при інтерполяції

У табл. 1.1 подано результати розрахунків для цього ж прикладу для точки, розташованої посередині між вузлами. Величина $\Delta_n = P_n(x) - P_{n+1}(x)$ є оцінена за формулою (1.14) похибка інтерполяції; Δ_n^{exact} – різниця між інтерпольованим і точним значеннями; $k_\Delta = 1 - \Delta_n^{exact} \big/ \Delta_n$ – є коефіцієнтом уточнення інтерпольованого значення і він же рівний частковій оцінці похибки оцінки похибки (1.14), тобто фактичної розмитості оцінки (1.14).

Таблиця 1.

n	Δ_n	Δ_n^{exact}	k_Δ
1	$-1.2\cdot10^{-4}$	$-1.5\cdot10^{-4}$	0.25
2	$-3.0\cdot10^{-5}$	$-3.0\cdot10^{-5}$	0.01
3	$-1.4\cdot10^{-7}$	$-1.7\cdot10^{-7}$	0.25
4	$-3.4\cdot10^{-8}$	$-3.4\cdot10^{-8}$	0.01
5	$-2.7\cdot10^{-10}$	$-2.2\cdot10^{-10}$	-0.16
6	$-4.3\cdot10^{-11}$	$4.4\cdot10\text{-}^{11}$	0.01
7	$6.1\cdot10^{-13}$	$5.2\cdot10^{-13}$	-0.15
8	$-9.0\cdot10^{-14}$	$-9.1\cdot10^{-14}$	0.02
9	$-1.8\cdot10^{-15}$	$-1.6\cdot10^{-15}$	-0.13
10	$1.9\cdot10^{-16}$	$2.4\cdot10^{-16}$	0.22
11	$5.6\cdot10^{-17}$	$4.3\cdot10^{-17}$	-0.22
12	$2.8\cdot10^{-17}$	$-1.2\cdot10^{-17}$	-1.44
13	$8.3\cdot10^{-17}$	$-4.0\cdot10^{-17}$	-1.48

З таблиці видно, що при $k_\Delta = 0.01$ значення Δ_n і Δ_n^{exact} практично збігаються. При $0.2 < k_\Delta < 0.3$ значення Δ_n і Δ_n^{exact} помітно різняться, але при оцінці похибки такі відмінності можуть вважатися допустимими. При $k_\Delta > 0.3$ значення Δ_n і Δ_n^{exact} розрізняються суттєво, і оцінку похибки за таких умов не можна вважати задовільною.

Таким чином, застосування розглянутого способу оцінки похибки інтерполяції дозволяє не лише з високою точністю оцінити цю похибку (користуючись тільки інформацією, закладеною в табличних даних), але і наближено визначити частку похибки, що міститься в цій оцінці. Це дозволяє судити про якість оцінки, і в разі незадовільного результату відкинути таку оцінку.

Порядок розв'язування задачі на ЕОМ

1) За вказівкою викладача вибрати метод інтерполяції (многочлени Лагранжа (1.3), Ньютона (1.7) або рекурентне співвідношення Ейткена (1.15)).

2) Скласти програму, що обчислює значення заданої функції $y_i = f\left(x_i\right)$ у вузлах інтерполяції $x_i = a + hi$, де $h = \frac{\left(b-a\right)}{10}$, $i = 0,1,\ldots,10$, на відрізку $\left[a,b\right]$.

3) Передбачити в програмі оцінку похибки на основі порівняння значень, отриманих за допомогою інтерполяційних многочленів різного степеня.

4) Оцінити розмитість оцінки похибки.

5) Налагодити програму шляхом інтерполяції функції $\sin x$ (див. «Чисельний експеримент»).

6) Застосувати програму для інтерполяції функції, з таблиці 2 за номером у списку.

7) Результат оцінки похибки представити у вигляді графіка (рис. 3, 4) і для одного з значень x у вигляді таблиці 1.

Таблиця 2

Варіанти завдань

№ варианта	$f(x)$	$[a, b]$	№ варианта	$f(x)$	$[a, b]$
1	$\sin x^2$	$[0, 2]$	**9**	$x \cdot \cos\left(x + \ln\left(1 + x\right)\right)$	$[1, 5]$
2	$\cos x^2$	$[0, 2]$	**10**	$10 \cdot \ln 2x / \left(1 + x\right)$	$[1, 5]$
3	$e^{\sin x}$	$[0, 5]$	**11**	$\sin x^2 \cdot e^{-\left(x/2\right)^2}$	$[0, 3]$
4	$1/\left(0.5 + x^2\right)$	$[0, 2]$	**12**	$\cos\left(x + \cos^3 x\right)$	$[0, 2]$
5	$e^{-\left(x + \sin x\right)}$	$[2, 5]$	**13**	$\cos(x + e^{\cos x})$	$[3, 6]$
6	$1/\left(1 + e^{-x}\right)$	$[0, 4]$	**14**	$\cos\left(2x + x^2\right)$	$[0, 1]$
7	$\sin\left(x + e^{\sin x}\right)$	$[0, 3]$	**15**	$e^{\cos x} \cos x^2$	$[0, 2]$
8	$e^{-\left(x + 1/x\right)}$	$[1, 3]$			

Вимоги до звіту по лабораторній роботі

Звіт по лабораторній роботі повинен містити:

1) файл вихідного тексту програми;
2) файли результатів для тестового прикладу і для інтерполяції заданої функції;
3) опис алгоритму розрахунку (в текстовій формі та у вигляді блок-схеми) в електронному та роздрукованому вигляді;
4) роздруківку файлів з коментарями;
5) загальні висновки за результатами роботи, що включають результати тестування, отримані оцінки похибки результатів і обґрунтування цих оцінок.

Контрольні питання.

1) Переваги та недоліки різних методів інтерполяції.
2) Оцінка ефективності різних способів оцінки похибки інтерполяції з точки зору їх надійності та практичної застосовності.
3) Вплив похибки початкових даних та округлення на результат інтерполяції.
4) Способи зменшення похибок при інтерполяції.
5) Способи підвищення надійності оцінки похибки інтерполяції.