

МІНІСТЕРСТВО ОБОРОНИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ПОВІТРЯНИХ СИЛ
імені ІВАНА КОЖЕДУБА

В.А. Степаненко, А.С. Кійко

СИГНАЛИ ТА ПРОЦЕСИ У РАДІОТЕХНІЦІ

**ВИПАДКОВІ СИГНАЛИ
ТА ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ У РАДІОТЕХНІЧНИХ КОЛАХ**

Конспект лекцій

**Харків
2016**

УДК 621.372 (075.8)
ББК 32.84
С34

*Рекомендовано до видання вченою радою
Харківського університету Повітряних Сил
(протокол № від)*

Рецензенти: Л. Г. Корнієнко, доктор технічних наук, професор (ХУПС);
О. І. Сухаревський, доктор технічних наук, професор (ХУПС)

Степаненко В. А.

С34 Сигнали та процеси у радіотехніці : випадкові сигнали та їх перетворення у радіотехнічних колах (конспект лекцій) / В. А. Степаненко. – Х. : ХУПС, 2016. – 96 с.

Конспект лекцій з навчальної дисципліни “Сигнали та процеси в радіотехніці“, яка тривалий час викладається кафедрою фізики та радіоелектроніки Харківського університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, відповідає програмі, обсягу та вимогам підготовки фахівців напрямку “Радіотехніка” рівня бакалавр та магістр з урахуванням особливостей підготовки військових спеціалістів .

УДК 621.372 (075.8)
ББК 32.84

© Степаненко В. А., 2016
© Харківський університет Повітряних
Сил імені Івана Кожедуба, 2016

ЗМІСТ

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ І СИГНАЛІВ В РАДІОТЕХНІЦІ.	7
1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ.....	7
1.1. Загальні відомості про випадкові сигнали. Класифікація.	7
1.2. Функція розподілу ймовірності.....	9
1.3. Щільність розподілу ймовірності.	11
2. СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ. 12	12
2.1. Початкові моменти одновірної щільності розподілу ймовірностей.	12
2.2. Центральний момент одновірної щільності розподілу ймовірностей....	13
2.3. Характеристична функція.	14
3. НОРМАЛЬНА ТА РІВНОМІРНА ЩІЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТІ.....	15
3.1. Нормальна (гаусівська) щільність розподілу ймовірності.	15
3.1.1. Функція розподілу ймовірності гаусовської випадкової величини. 16	
3.1.2. Характеристична функція гаусовської одновірної щільності розподілу ймовірності.	17
3.2. Рівномірний розподіл ймовірності.	18
4. ДВОМІРНА ФУНКЦІЯ І ДВОМІРНА ЩІЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТІ.....	20
4.1. Двомірна і багатомірна функція розподілу ймовірності.....	21
4.2. Двомірна і багатомірна щільність розподілу ймовірності.	22
4.3. Взаємна функція і щільність розподілу ймовірності.....	23
4.4. Моментні функції двовірної щільності розподілу ймовірності.....	23
4.5. Умовні функція і щільність розподілу ймовірності.....	25
5. СТАЦІОНАРНІ І ЕРГОДИЧНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ.....	26
5.1. Стаціонарні випадкові процеси.	26
5.2. Кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу і її властивості.	27
5.3. Ергодичні випадкові процеси.	29

6. СПЕКТРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ..... 30

- 6.1 Спектральна щільність потужності випадкового процесу. 30
- 6.2. Взаємозв'язок між енергетичним спектром і кореляційною функцією
випадкового процесу. 33
- 6.3. Ефективна ширина енергетичного спектру. 35

7. СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДЕЯКИХ ТИПІВ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ. 35

- 7.1. Гаусовські випадкові процеси. 35
- 7.2 Білий шум. 38
- 7.3. Дробовий шум. 39
- 7.4. Тепловий шум. 40

ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ І СИГНАЛІВ У ЛІНІЙНИХ ПРИСТРОЯХ..... 41

8. СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ НА ВИХОДІ ЛІНІЙНОГО ПРИСТРОЮ..... 41

- 8.1. Загальні відомості з методів аналізу проходження випадкових процесів
через лінійні пристрої (кола). 41
- 8.2. Часовий метод аналізу проходження випадкових сигналів через лінійні
кола. 42
- 8.3. Визначення математичного сподівання і середнього квадрата
випадкового процесу на виході лінійного кола. 43
 - 8.3.1. Визначення математичного сподівання. 43
 - 8.3.2. Середній квадрат випадкового процесу на виході лінійного кола. . 44

9. КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ НА ВИХОДІ ЛІНІЙНОГО КОЛА. 45

- 9.1. Кореляційна функція випадкового процесу на виході лінійного кола. .. 45
- 9.2. Взаємна кореляційна функція випадкових процесів на вході і виході
лінійного кола. 47
- 9.3. Приклад практичного використання взаємної кореляційної функції 48

10. СПЕКТРАЛЬНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПРОХОДЖЕННЯ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ ЧЕРЕЗ ЛІНІЙНІ КОЛА..... 49

- 10.1. Загальні відомості. 49
- 10.2. Спектральна щільність потужності (енергетичний спектр) випадкового
процесу на виході лінійного кола. 49

10.3. Проходження білого шуму через інтегруюче RC коло.	52
11. ПРОХОДЖЕННЯ БІЛОГО ШУМУ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНСНІ КОЛА. ..	54
11.1. Проходження білого шуму через ідеальний смуговий фільтр.	54
11.3. Дія білого шуму на паралельний коливальний контур.	55
12. ВУЗЬКОСМУГОВІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ.	58
12.1. Нормалізація випадкових процесів під час проходження через лінійні кола.	58
12.1. Поняття вузькосмугового випадкового процесу.	59
12.2. Двомірна щільність розподілу ймовірностей вузькосмугового випадкового процесу.	59
12.3. Одномірна щільність розподілу початкової фази.	61
12.4. Одномірна щільність розподілу ймовірностей обвідної.	62
13. ДІЯ НА ЛІНІЙНЕ КОЛО (ФІЛЬТР) СУМИ ДЕТЕРМІНОВАНОГО СИГНАЛУ ТА ШУМУ.	64
13.1. Відношення сигнал/шум.	64
13.2. Загальні відомості з оптимальної лінійної фільтрації.	65
13.3. Критерії оптимальності.	66
13.4. Проходження сигналу та шуму через лінійне коло.	66
14. ОПТИМАЛЬНІ ФІЛЬТРИ ПО КРИТЕРІЮ МАКСИМУМУ ВІДНОШЕННЯ СИГНАЛ/ШУМ.	68
14.1. Оптимальна фільтрація детермінованого сигналу на фоні білого шуму.	69
15. ІМПУЛЬСНА ХАРАКТЕРИСТИКА УЗГОДЖЕНОГО ФІЛЬТРУ. ПРИКЛАДИ РЕАЛІЗАЦІЇ УЗГОДЖЕНИХ ФІЛЬТРІВ.	71
15.1. Імпульсна характеристика узгодженого фільтру.	71
15.2. Форма корисного сигналу на виході оптимального фільтра.	72
15.3. Узгоджений фільтр для прямокутного відеоімпульсу.	73
15.4. Узгоджений фільтр для прямокутного радіоімпульсу.	74
ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ І СИГНАЛІВ У ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ ТА НЕЛІНІЙНИХ КОЛАХ....	78
16. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ЛІНІЙНИМИ ПАРАМЕТРИЧНИМИ КОЛАМИ.	78
16.1. Загальні відомості.	78
16.2. Коваріаційна функція та енергетичний спектр випадкового процесу на виході лінійного параметричного кола.	78

16.3. Приклади.....	80
16.3.1. Дія детермінованого сигналу на параметричне коло з випадковими параметрами.....	80
16.3.2. Дія випадкового сигналу на параметричне коло з не випадковими параметрами.....	82
17. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ В НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ.....	83
17.1. Загальні відомості з нелінійних перетворень випадкових процесів.....	83
17.2. Щільність розподілу ймовірностей випадкового процесу на виході нелінійного безінерційного елементу.	84
17.3. Приклад.....	86
17.4. Визначення статистичних характеристик випадкового процесу на виході нелінійного безінерційного елементу.	87
18. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ У ПРОСТИХ НЕЛІНІЙНИХ ПРИСТРОЯХ.....	90
18.1. Проходження вузькосмугового Гаусовського шуму через квадратичний амплітудний детектор.	90
ЛІТЕРАТУРА	95

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ І СИГНАЛІВ В РАДІОТЕХНІЦІ.

1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ.

1.1. Загальні відомості про випадкові сигнали. Класифікація.

На відміну від детермінованих сигналів, форма яких відома точно, миттєві значення випадкових сигналів заздалегідь не відомі і можуть бути передбачені лише з деякою ймовірністю менше одиниці ($P < 1$).

У радіотехніці розглядають два основні класи сигналів, що потребують імовірнісного опису.

Перший – це шуми, які є коливання, що хаотично змінюються в часі. Вони виникають із-за безладного руху зарядів (теплові, дробові, флікерні).

Другий – це сигнали, що несуть інформацію, але що є випадковими через цілий ряд причин. (Наприклад, відбитий від цілі сигнал).

У технічній літературі як аналог терміну «випадковий сигнал» використовують термін «випадковий процес», яким і користуватимемося надалі.

Випадковий процес – це функція часу $X(t)$, миттєві значення якої можна передбачити тільки з певною ймовірністю менше 1.

Розрізняють 5 основних типів випадкових процесів.

1. Безперервний випадковий процес.

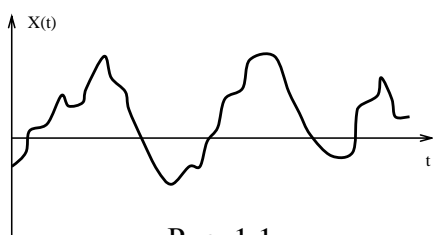


Рис. 1.1

Представляет собою, например, шум на выходе радиоприемного прибора за отсутствия полезного сигнала. Типовая форма одной реализации имеет вид представленный на рис. 1.1.

2. Випадковий процес безперервний за часом і квантований по рівню. (рис. 1.2)

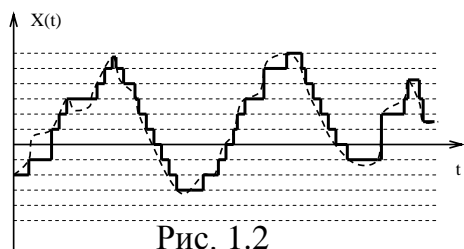
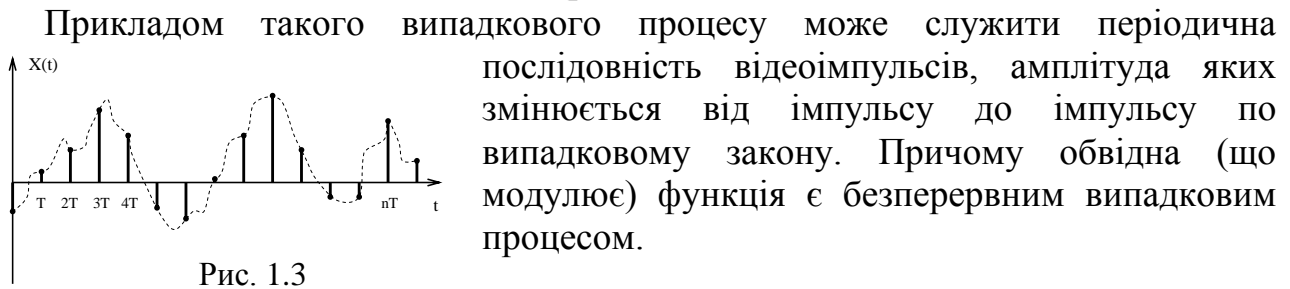


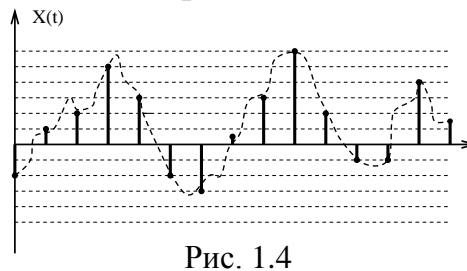
Рис. 1.2

Если такой процесс принимает только 2 уровня «0» и «1» (-1), то его называют случайным телеграфным сигналом.

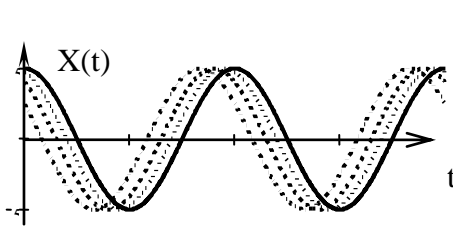
3. Випадковий сигнал дискретний за часом і безперервний по рівню (рис. 1.3).



4. Випадковий процес дискретний за часом і дискретний по рівню (рис. 1.4).



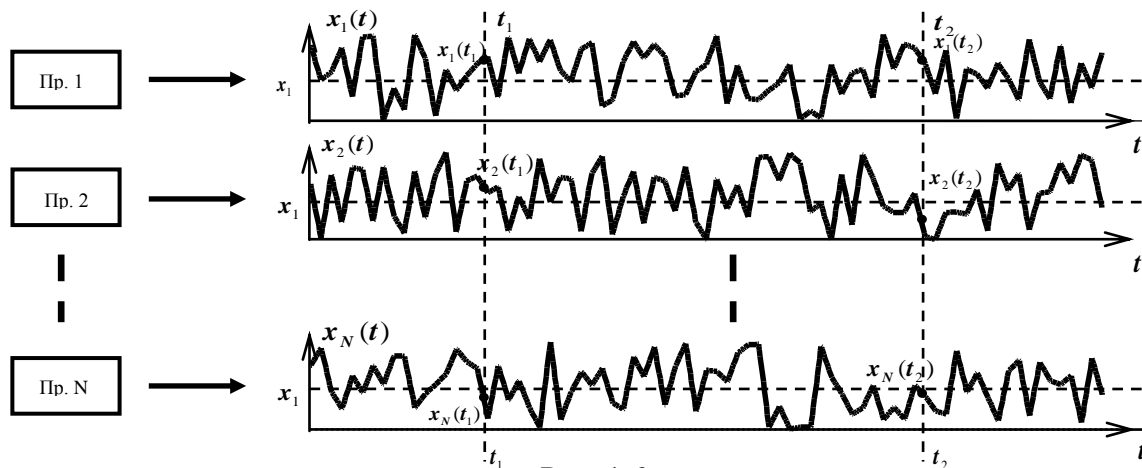
5. Квазідетермінований випадковий процес.



$$X(t) = U_m \cos(\omega_c t + \theta),$$

де θ – випадкова величина, яка для кожної реалізації має своє постійне значення в межах $0 \div 2\pi$ (рис. 1.5).

Визначимося з термінологією на прикладі випадкового процесу першого виду, тобто безперервного випадкового процесу. Припустимо, є N повністю ідентичних приймачів, які працюють одночасно в однакових умовах (рис.1.6).



Випадковий процес на виході приймача позначатимемо $X(t)$. Конкретний вид випадкового процесу на виході кожного приймача називають реалізацією випадкового процесу і позначають $x_i(t)$. Сукупність всіх реалізацій $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_N(t)$ утворюють множину або ансамбль реалізацій випадкового процесу $X(t)$. Реалізації на виході кожного з приймачів відрізнятимуться одна від одної.

Природно, що випадковий процес $X(t)$ визначається сукупністю всіх можливих реалізацій, число яких в ансамблі скільки завгодно велике. Ми вибрали N реалізацій для наочності.

Зафіксуємо тепер момент часу, наприклад, $t = t_1$ і проведемо відлік реалізацій випадкового процесу на виході кожного з приймачів. В результаті одержимо безліч випадкових значень $x_1(t_1)$, $x_2(t_1)$, $x_N(t_1)$.

Сукупність випадкових значень $x_i(t_1)$ утворює випадкову величину, яку позначимо $X(t_1)$.

В результаті дослідів випадкова величина може приймати будь-яке значення, причому наперед невідоме.

Якщо зафіксувати інший момент часу $t = t_2$, то одержимо іншу безліч випадкових значень $x_1(t_2)$, $x_2(t_2)$, $x_N(t_2)$, сукупність яких утворюють іншу випадкову величину $X(t_2)$.

У загальному випадку різним моментам часу відповідатимуть різні випадкові величини.

Виникає питання про те, як кількісно оцінити той або інший випадковий процес. Прості спостереження будь-якої реалізації на виході будь-якого з приймачів в перебігу певного відрізка часу нічого не говорить про те, яка вона буде на другому відрізку часу або на виході інших приймачів.

Так само знання випадкового процесу у фіксований момент часу в одній реалізації нічого не говорить про те, яке значення він прийме в іншій реалізації.

Кількісно оцінити випадковий процес можна тільки при використанні теорії ймовірності.

Випадковий процес $X(t)$ можна описати кількісно, якщо для кожного перетину процесу у будь-який момент часу вказати не тільки його можливі значення але і охарактеризувати і з погляду ймовірності їх появи.

Однією з характеристик випадкового процесу є функція розподілу ймовірності.

1.2. Функція розподілу ймовірності.

Зафіксуємо на тимчасових графіках випадкового процесу момент часу t_1 і виберемо довільний рівень x (наприклад x_1).

Підрахуємо кількість реалізацій « n », в яких випадкова величина $X(t_1)$ знаходиться нижче за рівень x [$n(x, t_1)$].

Очевидно при великому N відношення кількості реалізацій, в яких випадкова величина $X(t_1)$ не перевищить рівня x до загальної кількості реалізацій N

$$\frac{n(x, t_1)}{N}$$

прагнучиме до постійного числа, що характеризує ймовірність того, що при $t = t_1$ значення випадкового процесу $X(t_1)$ знаходиться нижчим за рівень x .

Аналітично таку ймовірність записують таким чином

$$P[X(t_1) \leq x] = F(x, t_1),$$

де $F(x, t_1)$ – функція розподілу ймовірності.

Визначення – функція розподілу ймовірності $F(x, t_1)$ дорівнює ймовірності того, що у момент часу t_1 значення випадкового процесу $X(t_1)$ не перевищить x .

$$F(x, t_1) = P[X(t_1) \leq x] \quad (1.1)$$

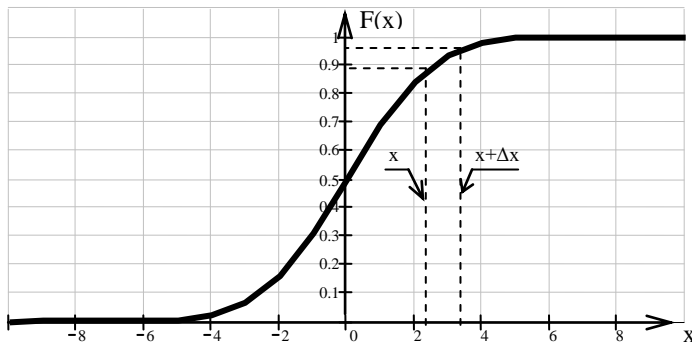


Рис. 1.7.

Наприклад, якщо значення випадкового процесу $X(t)$ у момент часу t_1 можуть змінюватися в межах $-\infty < x < \infty$, то одним з варіантів функції розподілу ймовірності може бути функція виду (рис.1.7).

З графіків можна визначити ймовірність того, що значення випадкового процесу у момент часу t_1 з ймовірністю 0,5 не перевищить значення 0.

$$F(0, t_1) = 0,5.$$

$$\text{Аналогічно } F(6, t_1) = 1.$$

Основні властивості функції розподілу ймовірності.

$$1. \quad 0 \leq F(x, t_1) \leq 1, \quad -\infty < x < \infty.$$

2. Для граничних значень x виконуються наступні умови

$$F(-\infty, t_1) = 0 \text{ и } F(\infty, t_1) = 1.$$

3. $F(x, t_1)$ є неубуваючою функцією.

4. Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (a, b) рівна різниці значень функції розподілу ймовірності на кінцях цього інтервалу:

$$P(a < X(t_1) \leq b) = F(b, t_1) - F(a, t_1)$$

$$P(-3 < X(t_1) \leq 3) = F(3, t_1) - F(-3, t_1) = 0,9 - 0,05 = 0,85.$$

Функцію розподілу ймовірності можна також використовувати для знаходження ймовірності того, що випадковий процес $X(t)$ у момент часу t_1 приймає значення більше (але нерівне) x .

$$P(X(t_1) > x) = 1 - F(x, t_1)$$

$$P(X(t_1) > 3) = 1 - 0,9 = 0,1$$

1.3. Щільність розподілу ймовірності.

Не дивлячись на те, що функція розподілу ймовірності дає вичерпні описи імовірнісній моделі випадкового процесу у фіксований момент часу (але не всього випадкового процесу) її аналітичний опис часто не записується через елементарні функції. Тому вона незручна для розрахунків.

Зручнішою є похідна від функції розподілу ймовірності, яку називають одномірною щільністю розподілу ймовірності (частіше просто одномірною щільністю ймовірності).

$$f(x, t_1) = \frac{dF(x, t_1)}{dx}. \quad (1.2)$$

Добуток $f(x, t_1)dx = P(x < X(t_1) \leq x + \Delta x)$, $\Delta x \rightarrow 0$ є ймовірність попадання випадкової величини в нескінченно малий інтервал шириною dx в околиці x .

$$f(x, t_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, t_1) - F(x, t_1)}{\Delta x}$$

Наприклад, одномірна щільність розподілу ймовірності для розглянутого раніше прикладу, одержана шляхом диференціювання по x матиме вигляд (рис. 1.8).

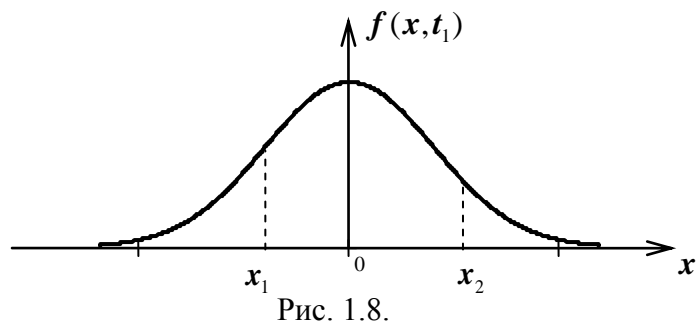


Рис. 1.8.

Основні властивості одномірної щільності ймовірності.

1. $f(x, t_1) \geq 0$ - ненегативна.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t_1) dx = P(-\infty < X(t_1) < \infty) = 1$ - умова нормування;

3. $\int_{-\infty}^x f(x, t_1) dx = F(x, t_1)$;

4. $\int_{x_1}^{x_2} f(x, t_1) dx = \int_{-\infty}^{x_2} f(x, t_1) dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x, t_1) dx = F(x_2, t_1) - F(x_1, t_1) = P(x_1 < X(t_1) \leq x_2)$ -

ймовірність попадання випадкової величини $X(t_1)$ в інтервал $x_1 \dots x_2$.

Висновок. Кількісна оцінка випадкового процесу або сигналу може бути здійснена за допомогою ймовірностних характеристик.

Ймовірності характеристики випадкового процесу:

- *функція розподілу ймовірності;*
- *щільність розподілу ймовірності.*

2. СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ.

Одномірна щільність ймовірності випадкового процесу $X(t)$ у фіксованій момент часу $t = t_1$ дає достатні відомості про випадкову величину $X(t_1)$. При перетвореннях випадкового процесу перетворюється і одномірна щільність ймовірності. Розрахунок її перетворення звичайно зустрічає значні математичні труднощі. Більш легкою є задача розрахунку окремих числових або статистичних характеристик. До того ж, як показує досвід, знання цих характеристик досить часто достатньо для вирішення практичних задач.

До статистичних характеристик законів розподілу ймовірності відносяться початкові та центральні моменти.

Такі моменти є не випадковими величинами і визначаються шляхом усереднення по діапазону можливих значень випадкового процесу в момент часу t_1 . Така операція називається усередненням по ансамблю.

2.1. Початкові моменти одномірної щільності розподілу ймовірностей.

Застосовується декілька способів запису операції знаходження початкових моментів. Наприклад:

$$M[X^n(t_1)] = m_{x^n}(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x, t_1) dx. \quad (2.1)$$

Це початковий момент n -го порядку.

Початковий момент першого порядку ($n = 1$) називають математичним сподіванням або середнім значенням випадкового процесу в момент часу t_1 .

$$M[X(t_1)] = m(x, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx \quad (2.2)$$

Це математичне сподівання (МС) випадкової величини $X(t_1)$. У загальному випадку МС залежить від вибору моменту часу (розрізу або перетину). У кожному перетину МС є не випадковою величиною.

Початковий момент другого порядку ($n = 2$)

$$M[X^2(t_1)] = m_{x^2}(x, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, t_1) dx. \quad (2.3)$$

характеризує середній квадрат значень випадкового процесу $X(t)$ у момент часу t_1 (середній квадрат випадкової величини $X(t_1)$).

Важливість середнього квадрату обумовлена тим, що він характеризує усереднений по часу квадрат випадкової напруги. При цьому він є пропорційним середній потужності. Корінь квадратний з нього - пропорційний ефективному або діючому значенню напруги чи струму.

При аналізі випадкових процесів також широко користуються поняттям центрального моменту.

2.2. Центральний момент одновірної щільності розподілу ймовірностей.

Центральний момент – це момент різниці випадкової величини $X(t_1)$ і її математичного сподівання

$$M[(X(t_1) - m_x)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^n f(x, t_1) dx. \quad (2.4)$$

Центральний момент першого порядку ($n=1$) завжди дорівнює 0.

Дійсно

$$M[(X(t_1) - m_x)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) f(x, t_1) dx = 0.$$

$$M[(X(t_1) - m_x)] = M[X(t_1)] - m_x = m_x - m_x = 0.$$

Центральний момент другого порядку $n=2$ настільки важливий, що одержав спеціальну назву дисперсії і визначається

$$D_x = \sigma_x^2 = M[(X(t_1) - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x, t_1) dx. \quad (2.5)$$

Вона характеризує середню потужність відхилення випадкової величини від її середнього значення.

Дисперсія випадкової величини – це різниця між середнім квадратом та квадратом математичного сподівання.

$$D_x = \sigma_x^2 = M[(X(t_1) - m_x)^2] = M[X(t_1)^2] - m_x^2 \quad (2.6)$$

Дійсно

$$\begin{aligned} M[(X(t_1) - m_x)^2] &= M[X(t_1)^2 - 2X(t_1)m_x + m_x^2] = \\ &= M[X(t_1)^2] - 2m_x \cdot m_x + m_x^2 = M[X(t_1)^2] - m_x^2 \end{aligned}$$

Величина

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\sigma_x^2} \quad (2.7)$$

називається середнім квадратичним відхиленням і характеризує ефективне значення флуктуаційної (змінної) складової випадкового процесу.

Усі розглянуті моменти в загальному випадку залежать від розрізу (перетину) випадкового процесу, тобто являються функціями часу і носять назву моментних функцій.

Наприклад:

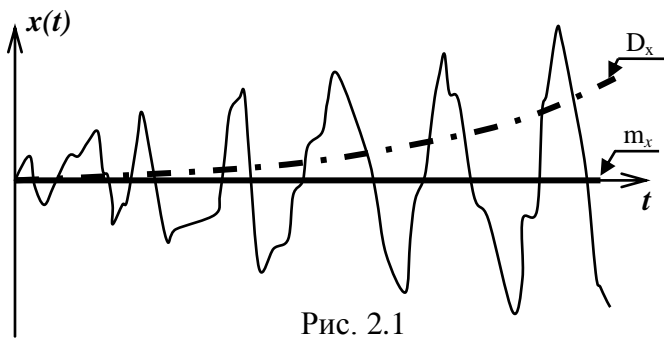


Рис. 2.1

У цієї реалізації випадкового процесу перший момент (середнє значення) незмінна у часі і дорівнює нулю. Другий центральний момент (дисперсія) збільшується по визначеному закону.

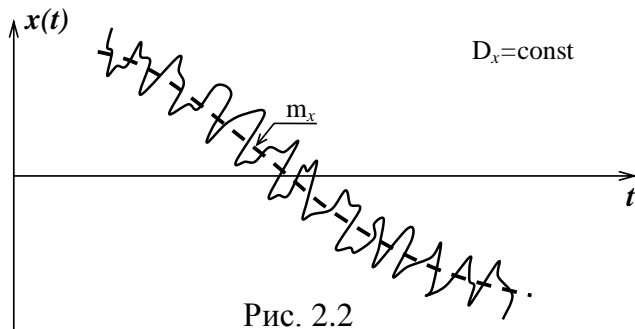


Рис. 2.2

У цієї реалізації випадкового процесу другий центральний момент (дисперсія) незмінна, а перший момент (МС) змінюється у часі.

2.3. Характеристична функція.

Нехай заданий випадковий процес $X(t)$, для якого відома одновірна щільність імовірності для перетину t_1 $f(x, t_1)$ (одновірна щільність імовірності випадкової величини $X(t_1)$). Оскільки перетин процесу може бути довільним, то для спрощення опустимо параметр t_1 . Тоді $f(x, t_1) = f(x)$. Для знаходження моментів цієї випадкової величини необхідно скористатись виразом (2.1)

$$M[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

Для спрощення аналізу випадкових величин і процесів часто замість випадкової величини x розглядають її функціональне перетворення

$$\varphi(x) = e^{jux},$$

де u – дійсна заміна.

Математичне сподівання цього функціонального перетворення $M[e^{jux}]$ - називається характеристичною функцією випадкової величини X і визначається з співвідношення

$$\theta_x(u) = M[e^{jux}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} f(x) dx \quad (2.8)$$

Отриманий вираз це по суті перетворення Фур'є одновірної щільності імовірності (без врахування знаку „-“ в експоненті).

Таким чином, характеристична функція може розглядатися як комплексна не випадкова величина аргументу u , однозначно зв'язана з щільністю розподілу ймовірності $f(x)$, також як спектральна щільність з відповідним сигналом.

Завдяки цьому знання характеристичної функції рівнозначно знанню щільності ймовірності. Останню завжди можна визначити шляхом перетворення, яке аналогічне зворотному перетворенню Фур'є.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_x(u) e^{-jux} du \quad (2.9)$$

Використання характеристичних функцій спрощує визначення моментів розподілу ймовірностей.

Візьмемо „ k ” - ту похідну від характеристичної функції по змінній u .

$$\frac{d^k}{du^k} \theta_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^k}{du^k} (f(x) e^{jux}) dx = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) e^{jux} dx$$

При $u=0$, отримаємо

$$\frac{d^k \theta_x(u)}{du^k} = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx = j^k M[x^k]$$

звідки

$$M[x^k] = \frac{1}{j^k} \left. \frac{d^k \theta_x(u)}{du^k} \right|_{u=0} \quad (2.10)$$

Висновок: Для визначення моментів можна обійтись без інтегрування, яке необхідне при визначенні моментів через щільність розподілу ймовірностей $f(x)$.

3. НОРМАЛЬНА ТА РІВНОМІРНА ЩІЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТІ.

3.1. Нормальна (гаусівська) щільність розподілу ймовірності.

Серед різних розподілів ймовірності особливе місце займає нормальний розподіл (розподіл Гауса). Його важливість визначається тим, що такий розподіл є досить точна математична модель для багатьох випадкових процесів. Ще однією перевагою гаусовської моделі є те, що гаусовській випадковий процес може бути повністю описаний (в статистичному сенсі) за допомогою тільки першого та другого моментів, тобто математичного сподівання та дисперсії. Для інших процесів це ствердження несправедливе.

Одномірна нормальна (гаусовська) щільність розподілу ймовірності описується функцією.

$$f(x, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad -\infty \leq x < \infty \quad (3.1)$$

де m_x – математичне сподівання випадкової величини $X(t_1)$ (середнє значення)

σ_x – дисперсія випадкової величини.

Графік одновірної щільності розподілу ймовірності має вигляд (рис. 3.1).

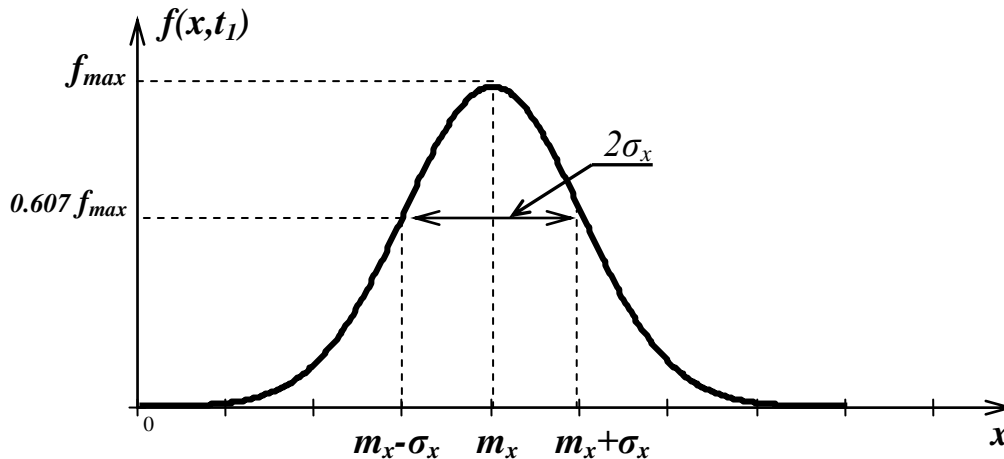


Рис. 3.1

Основними особливостями одновірної нормальної щільності розподілу ймовірності є:

1. Графік має тільки один максимум, який відповідає математичному сподіванню.
2. Графік симетричний відносно математичного сподівання (МС).
3. Ширина нормальної щільності розподілу ймовірності пропорційна σ_x .
На рівні $0,607 f_{\max}$ ширина щільності розподілу дорівнює $2\sigma_x$.
4. В точках $m_x \pm \sigma_x$ абсолютна величина похідної $\frac{d}{dx} f(x, t_1)$ досягає максимального значення.

3.1.1. Функція розподілу ймовірності гаусовської випадкової величини.

Функція розподілу ймовірності гаусовської випадкової величини не може бути записана у вигляді компактного математичного виразу з використанням елементарних функцій. З врахуванням зв'язку між функцією розподілу і щільністю розподілу ймовірності можна записати

$$F(x, t_1) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx. \quad (3.2)$$

Графік гаусовської функції розподілу має наступний вигляд (рис. 3.2).

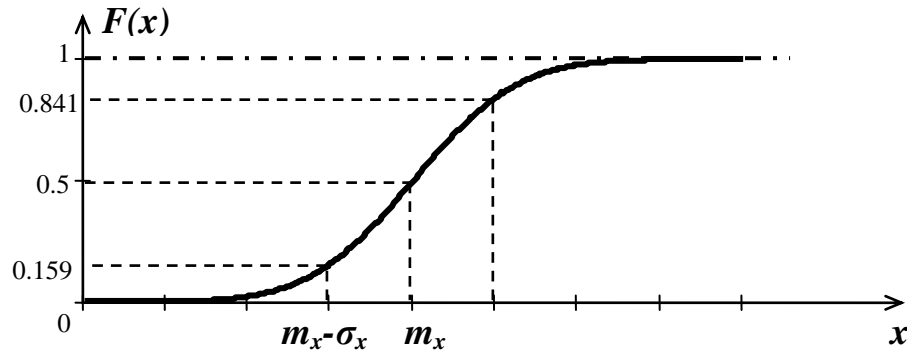


Рис. 3.2

Так як функція розподілу залежить від m_x і σ_x то її розраховують чисельними методами. Для нормованого гаусовського розподілу, у якому вважають $\sigma_x=1$ і $m_x=0$

$$F(x, t_1) = \Phi(x, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (3.3)$$

Цей інтеграл розрахований та табульований і носить спеціальну назву інтеграла ймовірності. У технічній літературі зустрічається і інші позначення $\Phi(x, t_1) = \text{erf}(x, t_1)$ і назва – функція похибок.

Якщо $m_x \neq 0$ і $\sigma_x \neq 1$, то по табличним значенням нормованої функції розподілу легко знайти значення ненормованої з співвідношення

$$F(x, t_1) = \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}, t_1\right)$$

Оскільки в таблицях приведені значення тільки для $x > 0$, то значення для $x < 0$ можуть бути знайдені з очевидного співвідношення

$$\Phi(-x, t_1) = 1 - \Phi(x, t_1)$$

Важливою перевагою нормального розподілу є те, що для нього легко знаходяться центральні моменти любого «n»-го порядку

$$M[(x(t_1) - m_x)^n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^n e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx = \begin{cases} 0, & n = 2k + 1 \\ (n-1)\sigma^n, & n = 2k \end{cases}$$

3.1.2. Характеристична функція гаусовської одновірної щільності розподілу ймовірності.

Ця функція може бути отримана з співвідношення

$$\theta_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

В результаті інтегрування отримаємо

$$\theta_x(u) = e^{jm_x u - \frac{1}{2}\sigma_x^2 u^2} \quad (3.4)$$

3.2. Рівномірний розподіл імовірності.

Рівномірний розподіл імовірності зустрічається тоді, коли серед значень випадкового процесу $X(t)$ у момент часу t_1 не має будь яких переважних значень. Наприклад, вважають, що випадкова початкова фаза генератора гармонічного сигналу з рівною ймовірністю може приймати значення у діапазоні $0 \dots 2\pi$.

Щільність ймовірності рівномірного розподілу $f(x, t_1)$ є постійною величиною A на інтервалі можливих значень $a \div b$ випадкової величини $X(t_1)$.

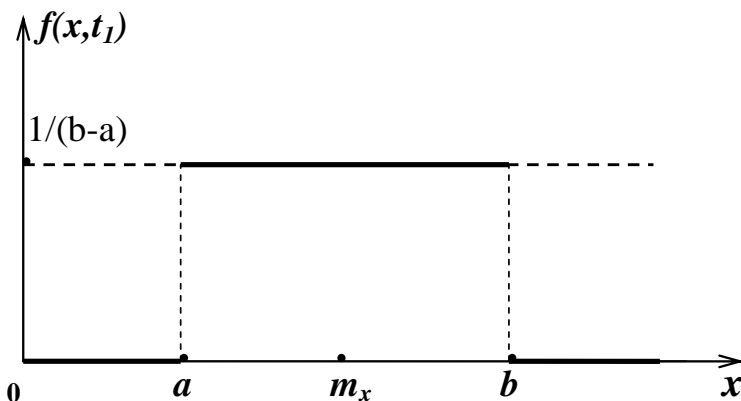
Значення цієї константи A можна знайти з умови нормування

$$\int_a^b f(x, t_1) dx = \int_a^b A dx = A(b - a) = 1.$$

Звідки
$$A = \frac{1}{b - a}.$$

Отже, вираз для рівномірної щільності розподілу ймовірності буде мати вигляд

$$f(x, t_1) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & a < x \leq b; \\ 0, & x \leq a, x > b. \end{cases} \quad (3.5)$$



Графік рівномірної щільності ймовірності має вигляд (рис. 3.3).

Знайдемо перший момент, тобто математичне сподівання випадкової величини

Рис. 3.3

$$m_x = \int_a^b x f(x, t_1) dx = \frac{1}{b - a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b - a)} = \frac{b + a}{2}$$

Математичне сподівання (середнє значення) дорівнює середині інтервалу можливих значень випадкової величини $X(t_1)$.

Другий початковий момент

$$\begin{aligned} M[X^2(t_1)] &= \int_a^b x^2 f(x, t_1) dx = \frac{1}{b - a} \int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3(b - a)} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b - a)} = \\ &= \frac{(b - a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b - a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}. \end{aligned}$$

Дисперсія (другий центральний момент) випадкової величини $X(t_1)$. Дисперсію знайдемо з використанням її зв'язку з другим початковим моментом

$$\sigma_x^2 = M[X^2(t_1)] - m_x^2 = \frac{a^2 + a\epsilon + \epsilon^2}{3} - \frac{(a + \epsilon)^2}{4} = \frac{(\epsilon - a)^2}{12}.$$

середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \frac{\epsilon - a}{2\sqrt{3}}.$$

Функцію розподілу ймовірності знайдемо з використанням її зв'язку з щільністю розподілу ймовірності

$$F(x, t_1) = \int_{-\infty}^x f(x, t_1) dx = \int_a^x \frac{1}{\epsilon - a} dx = \frac{x}{\epsilon - a} \Big|_a^x = \frac{x - a}{\epsilon - a}.$$

Остаточно вираз для функції розподілу ймовірності

$$F(x, t_1) = \begin{cases} \frac{x - a}{\epsilon - a}, & a < x \leq \epsilon; \\ 0, & x \leq a; \\ 1, & x > \epsilon. \end{cases} \quad (3.6)$$

Графік її має вигляд (рис. 3.4)

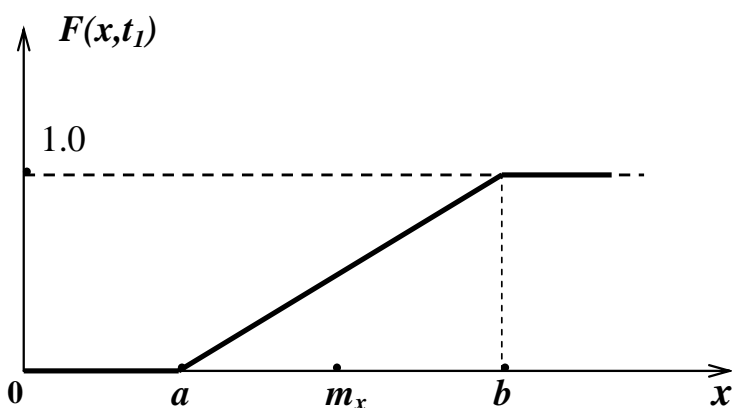


Рис. 3.4

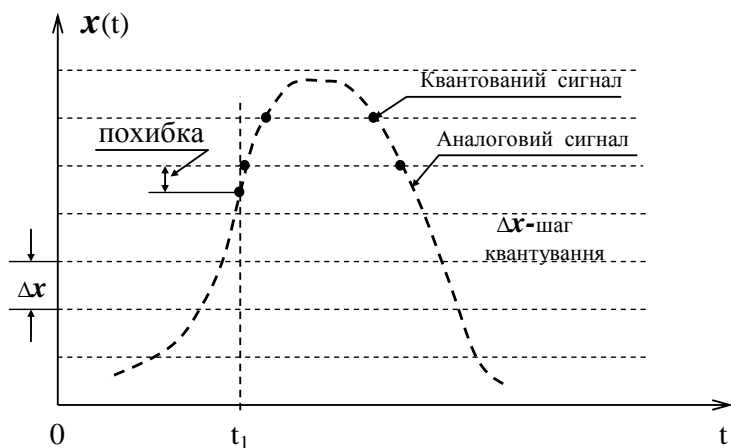


Рис. 3.5

Однією з важливіших особливостей рівномірного розподілу ймовірності є використання його для описання похибок аналого-цифрового перетворення.

Відомо, що при перетворенні аналогового сигналу у квантований кожний відрізок аналогового сигналу округляється до найближчого рівня квантування (рис. 3.5).

При визначенні середньоквадратичної похибки перетворення припускають, що похибка рівномірно розподілена на інтервалі $-\frac{\Delta x}{2} \dots \frac{\Delta x}{2}$.

Використаємо отримані результати для рівномірного розподілу і визначимо:

- математичне сподівання похибки квантування

$$m_x = \frac{b+a}{2} = \frac{\frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta x}{2}}{2} = 0 ;$$

- дисперсію похибки квантування

$$\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{\left(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2}\right)^2}{12} = \frac{\Delta x^2}{12} ;$$

- середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \frac{\Delta x}{2\sqrt{3}} .$$

Рівномірна щільність розподілу імовірності використовується і для визначення статичних характеристик гармонічного коливання з випадковою початковою фазою.

$$x(t) = \cos[\omega t + \theta(t)], \quad \theta(t) - \text{випадкова початкова фаза}$$

Звичайно вважають, що початкова фаза має рівномірну щільність розподілу ймовірності в межах кута $0 \dots 2\pi$.

$$f(\theta, t_1) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 < \theta \leq 2\pi \\ 0, & \theta \leq 0, \theta > 2\pi \end{cases} .$$

З проведеного раніше аналізу статистичних характеристик рівномірного розподілу отримаємо:

- математичне сподівання

$$m_\theta = \frac{b+a}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi .$$

- дисперсія

$$\sigma_\theta^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{3} .$$

- середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_\theta = \sqrt{\sigma_\theta^2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} .$$

4. ДВОМІРНА ФУНКЦІЯ І ДВОМІРНА ЩІЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТІ.

Одномірна щільність розподілу ймовірності $f(x, t_1)$ дає повну характеристику поведінки випадкового процесу в будь-який фіксований момент часу. Вона служить основою для опису випадкового процесу. Однак ця характеристика не є вичерпною для всього процесу в цілому, оскільки вона не дає відомостей про те, як взаємозв'язані значення випадкового процесу в різні моменти часу, наприклад t_1 і t_2 , $t_2 > t_1$.

Іншими словами, одномірна щільність розподілу ймовірності не говорить про динаміку зміни процесу в часі.

Ці відомості до певної міри дає двомірна щільність і функція розподілу ймовірності.

4.1. Двомірна і багатомірна функція розподілу ймовірності.

Як і при розгляді одномірної функції розподілу припустимо, що є приймач, на виході якого формується випадковий сигнал $X(t)$ за відсутності на виході корисного сигналу.

Нехай реалізації цього сигналу $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_n(t)$ на виході ідентичних N приймачів, що працюють в однакових умовах, мають вигляд (рис. 4.1).

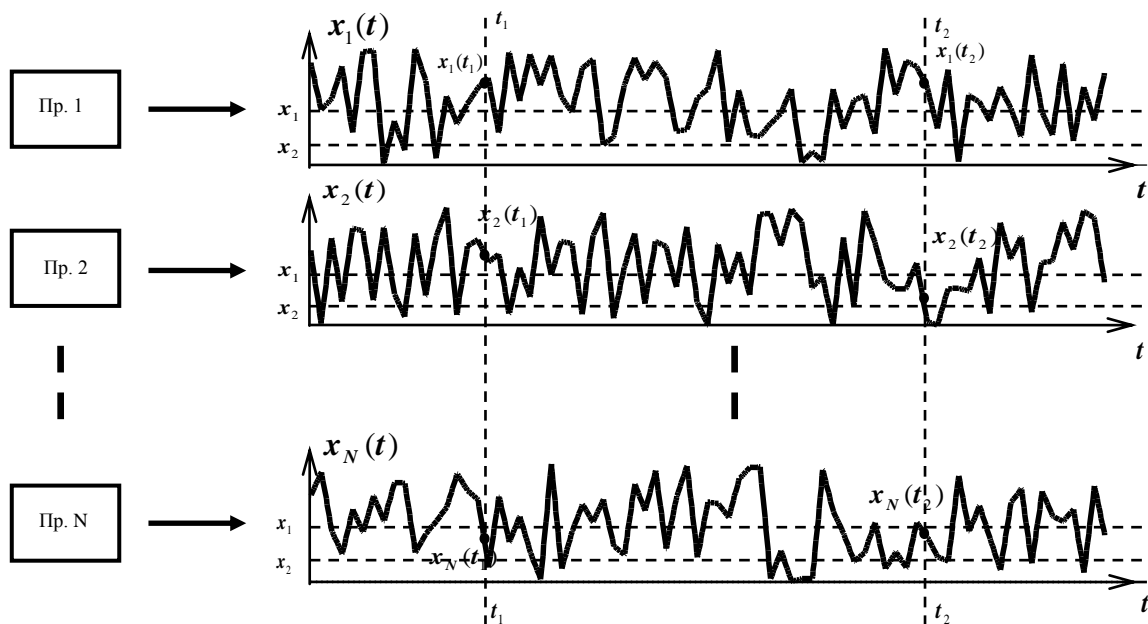


Рис. 4.1.

Виберемо на часовій осі два довільні моменти часу t_1 і t_2 , $t_2 > t_1$. Якщо узяти відліки реалізацій випадкового процесу в ці моменти часу, то отримаємо безліч випадкових значень $x_1(t_1)$, $x_2(t_1)$, $x_N(t_1)$, які утворюють випадкову величину $X(t_1)$ і безліч значень $x_1(t_2)$, $x_2(t_2)$, $x_N(t_2)$, які утворюють випадкову величину $X(t_2)$.

З діапазону зміни випадкових величин $X(t_1)$ і $X(t_2)$ виділимо два довільні рівні x_1 і x_2 .

Підрахуємо число реалізацій « n », в яких у момент часу t_1 випадкова величина $X(t_1)$ знаходиться нижчим за рівень x_1 , а випадкова величина $X(t_2)$ у момент часу t_2 нижче за рівень x_2 . Очевидно, що при великому N відношення $\frac{n(x_1, x_2, t_1, t_2)}{N}$ прагнучиме до постійного числа, яке показує ймовірність того, що у момент часу t_1 випадкова величина $X(t_1)$ не перевищує рівень x_1 , а у момент часу t_2 випадкова величина $X(t_2)$ не перевищує рівень x_2 .

Цю ймовірність позначають таким чином:

$$P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2] = F(x_1, x_2, t_1, t_2) \quad \begin{matrix} -\infty < x_1 < \infty \\ -\infty < x_2 < \infty \end{matrix} \quad (4.1)$$

і називають **двомірною функцією розподілу ймовірності випадкового процесу $X(t)$** .

Міркуючи аналогічно, можна ввести поняття трьохмірної, чотирьохмірної і будь-якої ***n*-мірної** функції розподілу ймовірності.

$$P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n] = F(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (4.2)$$

Чим більше ***n***, тим більший обсяг відомостей ми отримуємо про випадковий процес.

Властивості **«*n*»-мірної** функції розподілу розглянемо на прикладі двомірної функції розподілу.

1. $0 \leq F(x_1, x_2, t_1, t_2) \leq 1 \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad -\infty < x_2 < \infty.$
2. $F(-\infty, x_2, t_1, t_2) = F(x_1, -\infty, t_1, t_2) = F(-\infty, -\infty, t_1, t_2) = 0.$
3. $F(\infty, \infty, t_1, t_2) = 1.$
4. $F(\infty, x_2, t_1, t_2) = F(x_2, t_2); \quad F(x_1, \infty, t_1, t_2) = F(x_1, t_1).$

Аналогічно можна розповсюдити ці властивості на функцію розподілу будь-якого порядку.

4.2. Двомірна і багатомірна щільність розподілу ймовірності.

Якщо продиференціювати двомірну функцію розподілу по змінних x_1 і x_2 , то отримаємо двомірну щільність розподілу ймовірності.

$$f(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (4.3)$$

Двомірний закон розподілу враховує статистичний зв'язок між значеннями випадкового процесу в моменти часу t_1 і t_2 .

Двомірна щільність розподілу може бути уявлена в трьохмірному просторі у вигляді поверхні над площиною x_1 і x_2 .

„*n*”- мірну щільність розподілу ймовірності можна записати аналогічним чином.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2, \dots, \partial x_n}. \quad (4.4)$$

Властивості **«*n*»-мірної** щільності розподілу ймовірності розглянемо на прикладі двовимірної.

1. $f(x_1, x_2, t_1, t_2) \geq 0 \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad -\infty < x_2 < +\infty.$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 = 1$ – умова нормування.
3. $F(x_1, x_2, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2.$

$$4. f(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_2; \quad f(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1.$$

$$5. P[a < X(t_1) \leq b; c < X(t_2) \leq d] = \int_a^b \int_c^d f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2.$$

Якщо значення випадкового процесу $X(t)$ в різних перетинах t_1, t_2, \dots, t_n статистично незалежні, то багатомірна щільність розподілу ймовірності такого випадкового процесу дорівнює добутку одновимірних, тобто

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, t_1) \cdot f(x_2, t_2) \dots f(x_n, t_n). \quad (4.5)$$

4.3. Взаємна функція і щільність розподілу ймовірності.

До цих пір розглядалися імовірнісні і статистичні характеристики тільки одного випадкового процесу $X(t_1)$. На практиці зустрічаються випадки, коли необхідно знати характеристики двох статистично зв'язаних випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$.

Простішою такою характеристикою є взаємна двовимірна функція розподілу ймовірності значень випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ в довільний момент часу t_1 .

$$F(x, y, t_1) = P[X(t_1) \leq x, Y(t_1) \leq y]. \quad (4.6)$$

Цей вираз визначає ймовірність поєднання двох подій: випадкова величина $X(t_1)$ не перевищує рівня x , а випадкова величина $Y(t_1)$ не перевищує величину y .

Для отримання взаємної двовимірної щільності розподілу ймовірності необхідно узяти похідну від взаємної функції розподілу по змінних x і y

$$f(x, y, t_1) = \frac{\partial F(x, y, t_1)}{\partial x \partial y}. \quad (4.7)$$

Якщо випадкові процеси $X(t)$ і $Y(t)$ статистично незалежні, то

$$f(x, y, t_1) = f(x, t_1) \cdot f(y, t_1).$$

4.4. Моментні функції двовимірної щільності розподілу ймовірності.

Якнайповнішим описом випадкового процесу є багатомірна щільність розподілу ймовірності.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Однак такий опис пов'язаний із значними математичними труднощами.

На щастя, багато задач, пов'язаних з описом випадкових процесів, вдається вирішити на основі двовимірної щільності розподілу ймовірності.

Зокрема, двовимірна щільність розподілу ймовірності дозволяє визначити таку найважливішу характеристику випадкового процесу, як **КОВАРІАЦІЙНА ФУНКЦІЯ** (автоковаріаційна).

Коваріаційна функція випадкового процесу це перший початковий момент добутку значень випадкового процесу в моменти часу t_1 і t_2 . і який записується у вигляді:

$$K_x(t_1, t_2) = M[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (4.8)$$

При аналізі випадкових процесів частіше основний інтерес представляє їх флуктуаційна (змінна) складова.

При цьому визначають перший центральний момент добутку випадкових величин, який називають **КОРЕЛЯЦІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ**.

$$R_x(t_1, t_2) = M[(X(t_1) - m_{x_1})(X(t_2) - m_{x_2})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{x_1})(x_2 - m_{x_2}) f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (4.9)$$

Кореляційну функцію можна виразити через коваріаційну.

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= M[(X(t_1) - m_{x_1})(X(t_2) - m_{x_2})] = M[(X(t_1)X(t_2)) - M[(X(t_1)m_{x_2})] - \\ &- M[(X(t_2)m_{x_1})] + m_{x_1} \cdot m_{x_2}] = K_x(t_1, t_2) - m_{x_1} \cdot m_{x_2} \\ R_x(t_1, t_2) &= K_x(t_1, t_2) - m_{x_1} \cdot m_{x_2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

При збігу моментів часу коваріаційна функція.

$$K_x(t) = M[(X(t))^2].$$

Тоді кореляційна функція

$$R_x(t) = K_x(t) - m_x^2 = \sigma_x^2.$$

Аналогічно можна записати вирази для взаємних коваріаційних і кореляційних функцій значень двох випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ в моменти часу t_1 і t_2 .

$$\begin{aligned} K_{xy}(t_1, t_2) &= M[(X(t_1)Y(t_2))] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y, t_1, t_2) dx dy, \\ R_{xy}(t_1, t_2) &= M[(X(t_1) - m_x)(Y(t_2) - m_y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y, t_1, t_2) dx dy. \end{aligned}$$

Між значеннями випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ в моменти часу t_1 і t_2 можуть існувати або бути відсутніми статистичні зв'язки.

Для кількісної оцінки міри зв'язку між значеннями випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ в моменти часу t_1 і t_2 використовують **коефіцієнт кореляції**, який визначається співвідношенням

$$\rho_{x,y}(t_1, t_2) = \frac{R_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x \sigma_y} \quad -1 \leq \rho \leq 1.$$

Аналогічно можна визначити коефіцієнт кореляції одного і того ж випадкового процесу $X(t)$ в моменти часу t_1 і t_2 .

$$\rho_x(t_1, t_2) = \frac{R_x(t_1, t_2)}{\sigma_{1x} \sigma_{2x}}.$$

Якщо випадкові процеси $X(t)$ і $Y(t)$ зв'язані жорсткою лінійною залежністю, то

$$\rho = \pm 1.$$

Якщо значення випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ в моменти часу t_1 і t_2 статистично незалежні, то коефіцієнт кореляції рівний 0.

$$\rho_{x,y}(t_1, t_2) = 0.$$

4.5. Умовні функція і щільність розподілу ймовірності.

Розглянемо дві випадкові величини $X(t_1)$ і $Y(t_1)$ що відносяться до значень випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ у момент часу t_1 .

Умовну функцію розподілу ймовірності визначимо як ймовірність того, що випадкова величина $X(t_1)$ не перевищує величини x за умови, що випадкова величина $Y(t_1)$ не перевищує рівня y . Записується це таким чином

$$F\left(x, t_1 / y(t_1) \leq y\right) = F(x, y, t_1) / F(y, t_1),$$

де $F(x, y, t_1)$ – двовимірна взаємна функція розподілу $X(t_1)$ і $Y(t_1)$;

$F(y, t_1)$ – одновимірна функція розподілу $Y(t_1)$.

Умовна щільність розподілу ймовірності знаходиться шляхом диференціювання умовної щільності розподілу по змінній x за умови, що випадкова величина $Y(t_1)$ приймає конкретне значення y .

$$f\left(x, t_1 / y(t_1) = y\right) = \frac{\partial F\left(x, t_1 / y(t_1) = y\right)}{\partial x} = \frac{f(x, y, t_1)}{f(y, t_1)}$$

Міняючи місцями випадкові величини $X(t_1)$ і $Y(t_1)$ одержимо

$$f\left(y, t_1 / X(t_1) = x\right) = \frac{f(x, y, t_1)}{f(x, t_1)}$$

Частіше одержані співвідношення записують в скороченому вигляді

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x, y)}{f(y)}; \quad f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{f(x, y)}{f(x)}; \quad f(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)f(y);$$

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{y}\right)f(y)}{f(x)}.$$

Останній вираз називають формулою Байеса.

З одержаних виразів можна записати співвідношення для безумовної щільності ймовірності.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{y}\right) f(y) dy.$$

5. СТАЦІОНАРНІ І ЕРГОДИЧНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ.

5.1. Стаціонарні випадкові процеси.

Випадкові процеси прийнято розділяти на нестационарні і стаціонарні. Нестационарний випадковий процес характерний тим, що його ймовірності і статистичні характеристики залежать від часу, тобто щільність розподілу ймовірності, математичне сподівання і дисперсія випадкового процесу в різні моменти часу (різних перетинах) можуть бути різними.

За визначенням стаціонарним називається такий випадковий процес у якого n -мірна щільність розподілу ймовірності не змінюється при одночасному зсуву всіх часових перетинів уздовж осі часу на однакову величину τ , тобто

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1 - \tau, t_2 - \tau, \dots, t_n - \tau).$$

Випадковий процес, що задовольняє цій умові, називається стаціонарним у вузькому сенсі.

Якщо для такого випадкового процесу знаходити одновірну щільність розподілу ймовірності для різних перетинів, то вони будуть однаковими з однаковими математичними сподіваннями і дисперсіями. Іншими словами, стаціонарний випадковий процес – це процес, статистичні характеристики якого не залежать від часу.

Більшість випадкових процесів, які зустрічаються в радіотехніці, є стаціонарними.

До основних особливостей стаціонарного випадкового процесу відносяться:

1. Одновірна щільність ймовірності не залежить від перетину, для якого вона знаходиться, не залежить від часу

$$f(x, t_1) = f(x_1, t + \tau) = f(x).$$

2. Двовірна щільність розподілу ймовірності залежить тільки від різниці моментів спостереження

$$\tau = t_2 - t_1.$$

і при не змінюється для будь-яких значень часу t_1 і t_2 , тобто

$$f(x_1, x_2, t_1, t_2) = f(x_1, x_2, t_1 + \tau, t_2 + \tau) = f(x_1, x_2, \tau).$$

3. Математичне сподівання стаціонарного випадкового процесу не залежить від часу і є постійною величиною

$$M[X(t)] = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = m_x.$$

4. Дисперсія стаціонарного процесу постійна

$$M[(X(t) - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = \sigma_x^2.$$

5. Кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу залежить тільки від різниці моментів часу спостереження $\tau = t_2 - t_1$.

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{x_1})(x_2 - m_{x_2}) f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

$$\text{При } m_{x_1} = m_{x_2} = m_x \quad \text{і} \quad f(x_1, x_2, t_1, t_2) = f(x_1, x_2, \tau)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2}_{K_x(\tau) - \text{коваріаційна функція}} - m_x^2.$$

Якщо для випадкового процесу виконуються розглянуті умови, то такий процес є стаціонарним.

Стаціонарні процеси, для яких математичне сподівання і дисперсія є постійними величинами

$$m_x = \text{const}, \quad \sigma_x^2 = \text{const},$$

і кореляційна функція залежить тільки від $\tau = t_2 - t_1$ називають **стаціонарним в широкому сенсі**. Умова стаціонарності в широкому сенсі менш сувора, ніж умова стаціонарності у вузькому сенсі.

Для гаусовського випадкового процесу поняття стаціонарності в широкому і вузькому сенсі співпадають. Це означає, що по відомій кореляційній функції випадкового процесу можна записати багатомірну щільність розподілу ймовірності.

Стаціонарні процеси часто зустрічаються на практиці. Прикладом їх можуть служити флуктуаційні шуми на виході приймального пристрою, шуми опорів, транзисторів, електронних ламп.

5.2. Кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу і її властивості.

Як з'ясовано раніше, кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу залежить тільки від різниці моментів спостереження $\tau = t_2 - t_1$, тобто залежить тільки від одного аргументу τ .

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m)(x_2 - m) f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2.$$

Основні властивості кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу полягають в наступному:

1. Залежність між значеннями випадкового процесу $X(t)$ і $X(t - \tau)$, при зростанні τ слабшає. У межі при $\tau \rightarrow \infty$ ці значення стають незалежними. Отже

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = R_x(\infty) = 0.$$

2. Значення кореляційної функції при $\tau = 0$ дорівнює дисперсії σ_x^2

$$R_x(0) = \sigma_x^2.$$

Дійсно

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} R_x(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} M[(X(t) - m_x)(X(t - \tau) - m_x)] = M[(X(t) - m_x)^2] = \\ &= M[X^2(t)] - M[2m_x X(t)] + M[m_x^2] = M[X^2(t)] - m_x^2 = \sigma_x^2. \end{aligned}$$

3. Кореляційна функція суми незалежних випадкових стаціонарних процесів дорівнює сумі кореляційних функцій процесів.

$$R_{X(t)+Y(t)}(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau).$$

Дійсно, нехай

$$\begin{aligned} Z(t) &= X(t) + Y(t) \\ R_z(\tau) &= M[(Z(t)Z(t-\tau))] = \\ &= M\{[X(t) - m_x + Y(t) - m_y] \cdot [X(t-\tau) - m_x + Y(t-\tau) - m_y]\} = \\ &= \underbrace{M[(X(t) - m_x)(X(t-\tau) - m_x)]}_{R_x(\tau)} + \underbrace{M[(Y(t) - m_y)(Y(t-\tau) - m_y)]}_{R_y(\tau)} + \\ &\quad + \underbrace{M[(Y(t) - m_y)(X(t-\tau) - m_x)]}_{R_{yx}(\tau)=0} = R_x(\tau) + R_y(\tau). \end{aligned}$$

4. Абсолютне значення (модуль) кореляційної функції не може перевищувати її значення в нулі, тобто

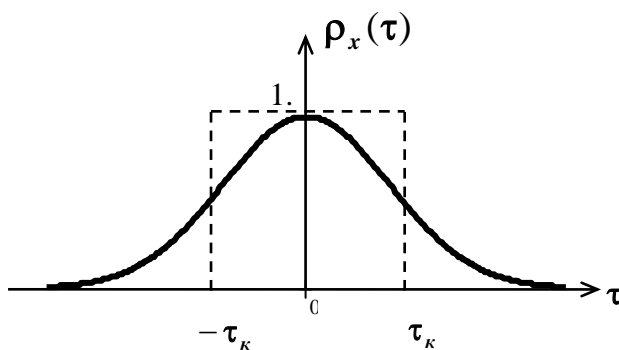
$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = \sigma_x^2.$$

5. Кореляційна функція є парною

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau).$$

6. Нормована автокореляційна функція стаціонарного випадкового процесу (коефіцієнт автокореляції) не перевищує одиниці

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{\sigma_x^2}; \quad \rho_x(0) = 1.$$



Для стаціонарного випадкового процесу завжди можна знайти таке $\tau = \tau_{кор}$, коли можна вважати, що $\rho_x(\tau_{кор}) \rightarrow 0$.

Інтервал $\tau_{кор}$ називають інтервалом кореляції.

Інтервал кореляції $\tau_{кор}$ визначають таким чином.

Замінімо нормовану кореляційну функцію $\rho_x(\tau)$ прямокутником рівної площі. Тоді

$$2\tau_{кор} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau.$$

Інтервал кореляції $\tau_{кор}$ визначає зміни випадкового процесу. Чим менше $\tau_{кор}$, тим більша швидкість зміни випадкового процесу.

5.3. Ергодичні випадкові процеси.

Для розрахунку статистичних характеристик стаціонарного випадкового процесу (математичного сподівання m_x , дисперсії σ_x^2 і кореляційної функції $R_x(\tau)$) необхідно мати в своєму розпорядженні сукупність N реалізацій випадкового процесу, одержаних дослідним шляхом. Чим більше N , тим точніше будуть статистичні характеристики.

Пояснимо метод відшукування m_x , σ_x^2 , $R_x(\tau)$. Допустимо, що отримані осцилограми від N ідентичних джерел стаціонарного випадкового процесу $X(t)$. Кожна реалізація випадкового процесу це $x_k(t)$.

Зафіксувавши довільний момент часу t_1 , можна знайти для нього всі значення $x_k(t_1)$ і розрахувати математичне сподівання

$$m_x = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1).$$

Одержана оцінка є наближеною і прагнутиме до істинної при збільшенні N .

Аналогічно може бути розрахована дисперсія випадкового процесу і кореляційна функція

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k(t_1) - m_x)^2, \quad R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [x_k(t_1) - m_x][x_k(t_1 - \tau) - m_x].$$

Змінюючи значення τ і проводячи ідентичні підрахунки можна одержати оцінку кореляційної функції залежно від τ .

Процедура знаходження статистичних характеристик достатньо трудомістка, оскільки для цього необхідно записати і обробити велике число реалізацій випадкового процесу.

На щастя більшість стаціонарних випадкових процесів мають властивість, яка дозволяє знаходити статистичні характеристики випадкового процесу всього лише по одній реалізації великої тривалості.

Такі стаціонарні випадкові процеси називаються ергодичними.

Для ергодичних випадкових процесів статистичні характеристики можуть бути отримані як шляхом усереднення по ансамблю реалізацій, так і еквівалентним йому усередненням за часом.

Математичне сподівання:

$$m_x = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}_{\text{усереднення по ансамблю}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt}_{\text{усереднення по часу}}.$$

Дисперсія

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x]^2 dx.$$

Кореляційна функція

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x][x(t - \tau) - m_x] dx.$$

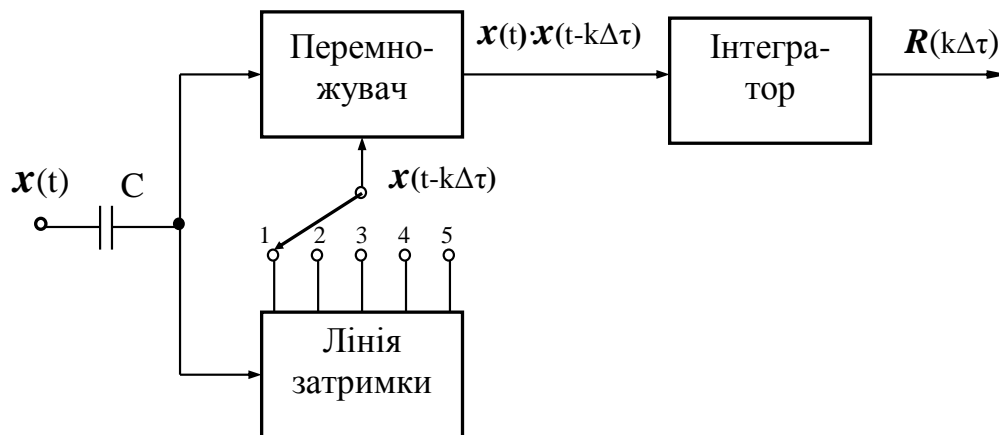
Оцінки, одержані шляхом усереднювання по ансамблю реалізацій і за часом, будуть однаковими, якщо усереднення за часом проводиться на нескінченно великому інтервалі. При кінцевому інтервалі усереднювання результат – наближений.

На практиці інтервал усереднювання T беруть значно більше інтервалу кореляції випадкового процесу, тобто

$$T \gg \tau_{кор}.$$

Кореляційну функцію визначають в спеціальних пристроях – кореляторах.

Спрощена функціональна схема одного з них має наступний вигляд.



Випадковий процес (точніше його реалізація) через конденсатор C , який прибирає постійну складову (математичне сподівання), одночасно поступає на помножувач і лінію затримки. У лінії затримки випадковий процес затримується на час Δt , $2\Delta t$, і подається на помножувач.

Добуток затриманого і незатриманого випадкових процесів поступає на інтегратор, на виході якого отримують кореляційну функцію.

Якщо випадковий процес змінюється в часі дуже швидко, то інтервал Δt повинен бути невеликим.

6. СПЕКТРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ.

6.1 Спектральна щільність потужності випадкового процесу.

Однією з найважливіших характеристик детермінованого сигналу є спектр для періодичного сигналу і спектральна щільність для неперіодичного сигналу. Для їх знаходження використовується математичний апарат рядів Фур'є і інтеграла Фур'є.

Якщо сигнал $U(t)$ детермінований неперіодичний, то його спектральну щільність легко знайти з використанням прямого перетворення Фур'є.

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Спробуємо застосувати пряме перетворення Фур'є і для реалізації стаціонарного випадкового процесу $X(t)$.

$$S_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

На жаль, така процедура виявляється неможливою через дві причини.

1. Одержана спектральна щільність $S_x(j\omega)$ тільки для однієї реалізації випадкового процесу. Інша реалізація того ж випадкового процесу матиме іншу спектральну щільність. Отже, перетворення Фур'є у такому вигляді буде спектральною щільністю не самого випадкового процесу, а тільки однієї його реалізації.

2. Інша, важливіша причина, полягає в тому, що пряме перетворення Фур'є можна застосовувати тільки до функцій, що задовольняють умові Діріхле

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt < \infty$$

Ця умова ніколи не задовольняється для будь-якої реалізації стаціонарного в широкому сенсі випадкового процесу.

Для застосування перетворення Фур'є до реалізації стаціонарного процесу обмежимо його тривалість інтервалом часу $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$.

Реалізація такого усіченого випадкового процесу задовольнятиме умові Діріхле і до неї можна застосувати перетворення Фур'є.

$$S_T(j\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t)e^{-j\omega t} dt, \quad T < \infty.$$

Індекс T указує, що реалізація випадкового процесу усічена. Надалі цей індекс опускатимемо.

Знайдемо енергію усіченої реалізації випадкового процесу, використовуючи теорему Парсеваля. Згідно цій теоремі енергія може бути знайдена шляхом інтегрування квадрата часової функції або квадрата спектральної щільності

$$\mathcal{E} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega$$

Розділивши ліву і праву частину цього виразу на T , то отримаємо середню потужність усіченої реалізації випадкового процесу $X(t)$.

$$\frac{\mathcal{E}}{T} = P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{T} d\omega, \quad (6.1)$$

де - $\frac{S^2(\omega)}{T}$ спектральна щільність потужності однієї реалізації випадкового процесу $X(t)$ тривалістю T .

Щоб одержати спектральну щільність потужності випадкового процесу $X(t)$ тривалістю T , необхідно усереднити ліву і праву частину по всьому ансамблю реалізацій

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} M[x^2(t)] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M[S^2(\omega)]}{T} d\omega \quad (6.2)$$

де - $\frac{M[S^2(\omega)]}{T}$ спектральна щільність потужності усіченого випадкового процесу.

Якщо тривалість випадкового процесу необмежено зростає, тобто $T \rightarrow \infty$, то, здійснивши в (6.2) граничний перехід, отримаємо.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} M[x^2(t)] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M[S^2(\omega)]}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega,$$

де $W(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M[S^2(\omega)]}{T} \quad (6.3)$

- спектральна щільність потужності випадкового процесу $X(t)$ або **енергетичний спектр**.

Енергетичний спектр випадкового процесу $X(t)$ є середнє значення енергетичних спектрів всіх реалізацій.

Для ергодичного випадкового процесу єдина необмежена по тривалості реалізація є достатньою для повної характеристики випадкового процесу. Тому для ергодичних випадкових процесів немає необхідності в статистичному усередненні і вираз для енергетичного спектру можна записати таким чином

$$W(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S^2(\omega)}{T} - \text{енергетичний спектр ергодичного випадкового процесу.}$$

Якщо врахувати, що для стаціонарного випадкового процесу усереднений за часом середній квадрат випадкового процесу дорівнює самому середньому квадрату, то можна записати

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} M[x^2(t)] dt = M[x^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega.$$

Іншими словами, оскільки середня потужність будь-якої реалізації **центрованого ергодичного випадкового процесу** дорівнює дисперсії процесу, можна записати

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega \quad (6.4)$$

Спектральна щільність потужності $W(\omega)$ дійсна і не містить інформації про фази складових, що не дозволяє відновити реалізацію випадкового процесу.

Практичний розрахунок енергетичного спектру випадкового процесу відповідно до виразу (37.3) звичайно викликає значні утруднення, оскільки для цього необхідно здійснити статистичне усереднення енергетичних спектрів безлічі реалізацій.

Як правило, розрахунок спектральної щільності потужності здійснюється з використанням кореляційної функції випадкового процесу.

6.2. Взаємозв'язок між енергетичним спектром і кореляційною функцією випадкового процесу.

Як відомо, кореляційна функція детермінованого сигналу зв'язана перетворенням Фур'є з його спектральною щільністю $S(j\omega)$.

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega,$$

де $S^2(\omega) = S(j\omega) \cdot S^*(j\omega)$ - енергетичний спектр детермінованого сигналу.

Застосуємо це співвідношення до усіченої реалізації стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ тривалістю T з математичним сподіванням рівним нулю ($m_x = 0$).

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t-\tau)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega,$$

де $S_x^2(\omega)$ - квадрат спектральної щільності реалізації випадкового процесу тривалістю T .

Розділимо обидві частини цього виразу на T , виконаємо статистичне усереднювання по безлічі реалізацій і здійснимо межовий перехід при $T \rightarrow \infty$. В результаті одержимо

$$\underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} M[x(t)x(t-\tau)]dt}_{R(\tau)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M[S_x^2(\omega)]}{T}}_{W(\omega)} e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Ліва частина цього виразу є усереднена по ансамблю реалізацій кореляційна функція, а вираз під інтегралом в правій частині – енергетичний спектр випадкового процесу, усереднений по ансамблю реалізацій.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M[S_x^2(\omega)]}{T} = W(\omega).$$

Отже

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega \tau} d\omega \quad (6.5)$$

Якщо випадковий процес ергодичний, то необхідність усереднювання реалізацій відповідає через властивості ергодичного процесу.

Оскільки кореляційна функція пов'язана із спектральною щільністю потужності випадкового процесу зворотним перетворенням Фур'є, то, очевидно, спектральна щільність потужності пов'язана з кореляційною функцією прямим перетворенням Фур'є, тобто

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \quad (6.6)$$

Одержану пара перетворень (6.5, 6.6) називають формулами Вінера-Хінчина.

Оскільки $R(\tau)$ і $W(\omega)$ є парними і дійсними, то формули Вінера-Хінчина можна записати з використанням формул Ейлера.

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) \cos \omega \tau d\omega \quad W(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

У виразах для $R(\tau)$ і $W(\omega)$ енергетичний спектр визначений для позитивних і негативних частот ω , причому $W(\omega) = W(-\omega)$.

На відміну від такого двостороннього спектру (математичного) користуються одностороннім «фізичним» енергетичним спектром $w(f)$. Він відмінний від нуля тільки для позитивних частот $f \geq 0$.

$$W(f) = W(\omega) + W(-\omega) = 2W(\omega) \rightarrow W(\omega) = \frac{1}{2} W(f).$$

В цьому випадку формули Вінера-Хінчина записуються у вигляді

$$W(f) = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau, \quad R(\tau) = \int_0^{\infty} W(f) \cos 2\pi f \tau df. \quad (6.7)$$

Енергетичний спектр суми незалежних випадкових процесів дорівнює сумі енергетичних спектрів складових. Якщо

$$Z(t) = X(t) + Y(t), \text{ то } R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau)$$

Якщо випадкові процеси залежні (корельовані), то кореляційна функція

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) + R_Y(\tau)$$

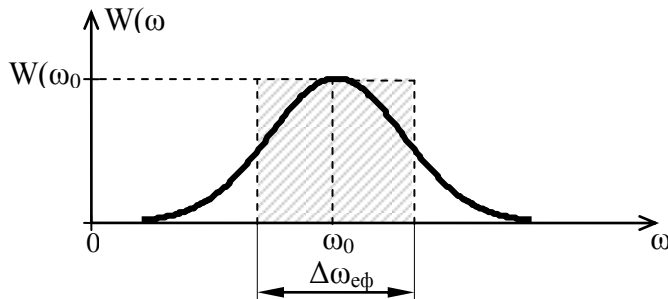
і енергетичний спектр, відповідно.

$$W_z(\omega) = W_x(\omega) + W_{xy}(\omega) + W_{yx}(\omega) + W_y(\omega).$$

6.3. Ефективна ширина енергетичного спектру.

Нехай енергетичний спектр має наступний вигляд

Для оцінки величини діапазону частот, займаного випадковим процесом, користуються поняттям ефективної ширини спектру.



Ефективна ширина спектру знаходиться таким чином.

Замінімо енергетичний спектр еквівалентним у вигляді прямокутника з висотою $W(\omega_0)$, площа якого дорівнює площі під реальним енергетичним

спектром.

$$W(\omega_0) \Delta\omega_{\text{eff}} = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega.$$

Звідки

$$\Delta\omega_{\text{eff}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega}{W(\omega_0)} \quad (6.8)$$

Іноді під шириною спектру $\Delta\omega$ розуміють інтервал між деякими крайніми частотами при яких значення енергетичного спектру сигналу зменшуються до певного рівня, наприклад, до половини від максимального значення. У багатьох випадках ці значення близькі до $\Delta\omega_{\text{eff}}$.

7. СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДЕЯКИХ ТИПІВ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ.

7.1. Гаусовські випадкові процеси.

Більшість реальних випадкових процесів тих, що зустрічаються в радіотехніці описуються гаусовським законом щільності розподілу ймовірності. Обумовлено це тим, що випадкові процеси часто є результатом складання великого числа незалежних або слабо залежних рівномірно малих доданків, кожне з яких грає однакову роль. В цьому випадку можна використовувати граничну теорему Ляпунова.

Згідно цієї теорії щільність розподілу ймовірності суми незалежних або слабо залежних малих складових наближається до гаусовського закону розподілу незалежно від того, які закони розподілу мають ці складові.

До гаусовських випадкових процесів, що зустрічаються в радіотехніці, відносяться дробові і теплових шуми, що виникають в радіоколах, атмосферні, космічні та інші шуми.

Поняття одномірного гаусовського випадкового процесу було введено раніше. Його щільність розподілу ймовірності описується співвідношенням

$$f(x, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Введемо поняття гаусовської багатомірної щільності розподілу ймовірності випадкового процесу, в загальному випадку, нестационарного.

Випадковий процес називається гаусовським (нормальним) якщо значення випадкового процесу в «n» фіксованих моментів часу t_1, t_2, \dots, t_n мають щільність розподілу ймовірності цих випадкових величин наступного виду

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \sqrt{(2\pi)^n D}} \exp \left[-\frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ik} \frac{(x_i - m_i)}{\sigma_i} \frac{(x_k - m_k)}{\sigma_k} \right]. \quad (7.1)$$

Це «n» - мірна гаусовська щільність розподілу нестационарного випадкового процесу.

$m_k = M[X(t_k)]$ - математичне сподівання випадкового процесу в «k»-й момент часу (t_k);

$\sigma_k = M[(X(t_k) - m_k)^2]$ - дисперсія значень випадкового процесу в «k»-й момент часу;

D – визначник «n»-го порядку, складений з нормованих коефіцієнтів кореляції.

$$\rho(t_i, t_k) = \rho_{ik} = \frac{M[(X(t_i) - m_i)(X(t_k) - m_k)]}{\sigma_i \sigma_k}.$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & 1 & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix};$$

D_{ik} – доповнення, алгебраїчного елементу ρ_{ik} .

Якщо випадковий процес стаціонарний, то:

1. Математичне сподівання m і дисперсія σ^2 є постійними величинами для будь-якого перетину t , тобто

$$m_1 = m_1 = \dots m_n = m \quad \text{і} \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots \sigma_n^2 = \sigma^2$$

2. Кореляційна функція залежить тільки від різниці між моментами часу $(t_k - t_i) = \tau$.

$$R(t_i, t_k) = R(t_k - t_i) = R(\tau).$$

3. Нормована кореляційна функція (коефіцієнт кореляції)

$$\rho(t_i, t_k) = \rho(\tau) = \frac{R(\tau)}{\sigma^2}.$$

Отже, щільність розподілу ймовірності « n »-го порядку гаусовського стаціонарного процесу залежатиме тільки від “ m ”, “ σ^2 ”, $\rho(\tau)$ і може бути записана таким чином

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \tau) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{(2\pi)^n D}} \times \exp \left[-\frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ik} \frac{(x_i - m)(x_k - m)}{\sigma^2} \right]. \quad (7.2)$$

На підставі отриманого виразу (7.2) можна записати вираз для двовірної щільності розподілу ймовірності.

Врахуємо, що в цьому випадку

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \rho(\tau) \\ \rho(\tau) & 1 \end{vmatrix} = 1 - \rho^2(\tau). \quad D_{11} = D_{22} = 1. \quad D_{12} = D_{21} = -\rho(\tau).$$

Тоді

$$f(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1 - \rho^2(\tau)}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 \sqrt{1 - \rho^2}} \left[(x_1 - m)^2 - 2\rho(x_1 - m)(x_2 - m) + (x_2 - m)^2 \right] \right\}. \quad (7.3)$$

Якщо значення випадкового процесу, розділені інтервалом часу τ , статистично незалежні, то коефіцієнт кореляції і двовірна щільність розподілу ймовірності записується у вигляді

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \tau) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \times \exp \left\{ -\frac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2}{2\sigma^2 \sqrt{1 - \rho^2}} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times \exp \left\{ -\frac{(x_1 - m)^2}{2\sigma^2} \right\} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times \exp \left\{ -\frac{(x_2 - m)^2}{2\sigma^2} \right\}. \end{aligned}$$

Звідси видно, що двовірна щільність розподілу ймовірності не корельованого гаусовського випадкового процесу дорівнює добутку одномірних щільностей розподілу ймовірності.

Ця особливість поширюється і на багатомірний випадок.

Висновок: Щільність розподілу ймовірності гаусовського випадкового процесу будь-якого порядку повністю визначається по відомих математичному сподіванню, дисперсії і кореляційній функції.

7.2 Білий шум.

Одним з видів випадкових процесів є шум. У разі, коли шум виникає в результаті накладання безлічі незалежних або слабо залежних явищ, миттєві значення сумарного випадкового процесу виявляються майже незалежними в достатньо близькі моменти часу.

Для багатьох задач радіотехніки кореляційну функцію такого процесу представляють у вигляді δ – функції, таким чином

$$R(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau), \quad (7.4)$$

де - $\frac{N_0}{2}$ постійний коефіцієнт.

Такий вид кореляційної функції свідчить про те, що значення випадкового

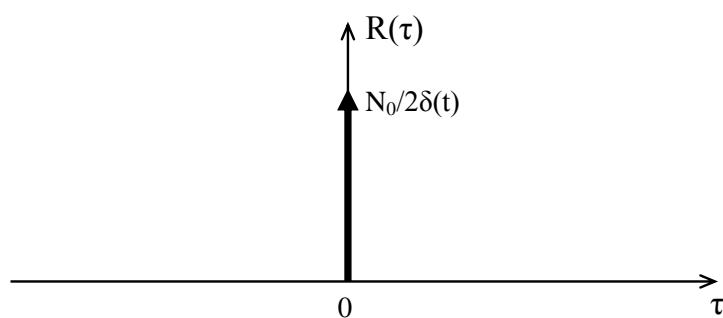


Рис. 7.1.

процесу $X(t)$, в будь-які два скільки завгодно близьких моменту часу некорельовані. Тому такий випадковий процес можна назвати абсолютно випадковим процесом.

Спектральна щільність потужності або енергетичний спектр такого випадкового

процесу знайдемо по співвідношенню Вінера-Хинчина.

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = \frac{N_0}{2}. \quad (7.5)$$

Таким чином, спектральна щільність потужності абсолютного випадкового процесу постійна на всіх частотах (рис. 7.2, рис. 7.3).

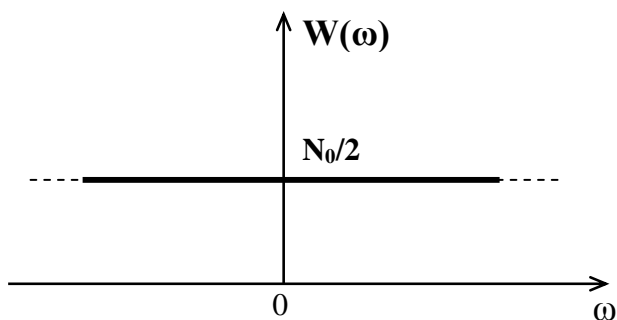


Рис.7.2

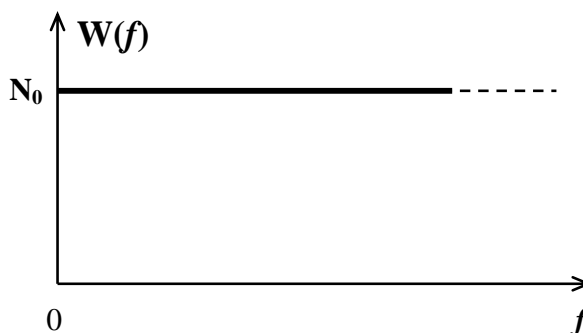


Рис.7.3

Випадковий процес, що володіє рівномірним спектром в нескінченному широкому діапазоні частот, звичайно називають «білим шумом», по аналогії з білим світлом, що має у видимій частині рівномірний суцільний спектр.

Якщо знайти повну потужність, яка, як відомо, дорівнює дисперсії σ^2

$$R(0) = \sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{N_o}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega = \infty,$$

то вона виявиться нескінченно великою. Це означає, що білий шум слід розглядати як ідеалізацію. Реальні процеси завжди мають спектральну щільність потужності, яка убиває з ростом частоти.

Незважаючи на це багато реальних випадкових процесів вважають білим шумом, якщо в межах АЧХ кола випадковий процес, що впливає на нього має рівномірну спектральну щільність потужності.

Щільність ймовірності білого шуму може бути будь-якою і у багатьох випадках її можна вважати нормальною.

7.3. Дробовий шум.

До флуктуаційних шумів, які можна розглядати як білий шум відноситься дробовий шум.

Дробовий шум виникає в електронно-вакуумних і напівпровідникових приладах. Цей шум обумовлений тим, що число носіїв зарядів, що вириваються з поверхні емітера або катода в одиницю часу непостійне.

Щільність розподілу ймовірності струму за рахунок, дробового шуму, підкоряється гаусовському закону розподілу.

$$f(i, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(i-I_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad (7.6)$$

де $I_0 = m_i$ - середнє (математичне сподівання) значення струму,

σ^2 – дисперсія флуктуацій струму.

Кореляційна функція дробового шуму

$$R(\tau) = eI_0\delta(\tau) \quad (7.7),$$

$e=1,6 \cdot 10^{-19}$ кл, заряд електрона.

Спектральна щільність потужності дробового шуму, наприклад, діода, що працює в режимі насичення відповідно до формули Вінера-Хинчина

$$W(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2eI_0 \quad (38.8)$$

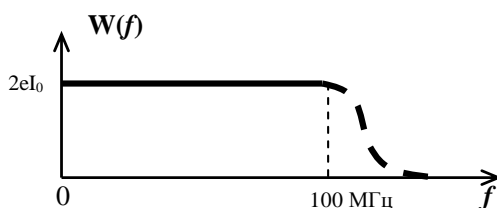


Рис. 7.4

Цей вираз справедливий для області низьких і високих частот (до 100МГц) (рис. 7.4).

7.4. Тепловий шум.

Тепловий шум обумовлений тепловим хаотичним рухом електронів. Джерелом теплового шуму може бути резистор, провідники і т.д. Вільні електрони в резисторі здійснюють хаотичне переміщення між атомами кристалічної решітки речовини. В результаті такого хаотичного переміщення на кінцях резистора виникає флуктуюча напруга, яку прийнято називати білим шумом.

Спектральна щільність потужності теплового шуму опору R визначається формулою Найквіста

$$W(\omega) = \frac{N_0}{2} = 2kTR, \quad W(f) = N_0 = 4kTR,$$

де $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град. – постійна Больцмана,

T – температура опору в градусах Кельвіна.

При $T = 290^\circ \text{ К}$ До, $kT = 4 \cdot 10^{-21}$ Вт/Гц.

Спектральна щільність потужності теплового шуму рівномірна практично у всьому радіодіапазоні ($0 \dots 10^{10}$ Гц).

ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ І СИГНАЛІВ У ЛІНІЙНИХ ПРИСТРОЯХ.

8. СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ НА ВИХОДІ ЛІНІЙНОГО ПРИСТРОЮ.

8.1. Загальні відомості з методів аналізу проходження випадкових процесів через лінійні пристрої (кола).

При аналізі проходження випадкових процесів через лінійні кола використовуються такі ж характеристики, що для аналізу проходження детермінованих сигналів, а саме:

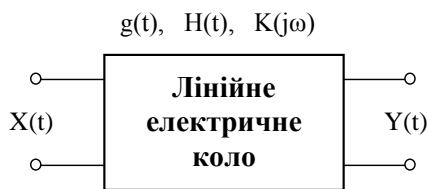


Рис. 8.1.

$K(j\omega)$ – комплексну частотну характеристику;

$g(t)$ – імпульсну характеристику;

$H(t)$ – перехідну характеристику (рідше).

Якщо вхідний вплив є детермінованим, то при використанні часового або спектрального методу аналізу можна отримати однозначну відповідність між вхідним та вихідним сигналами.

При дії на вході лінійного кола реалізації випадкового процесу також існує однозначна відповідність процесів на вході та виході. Однак, в силу їх випадковості неможливий явний (формульний) опис вхідного, а, значить, і вихідного процесів.

Єдиним винятком є випадок, коли вхідний процес виявляється квазидетермінованим процесом.

Оскільки для опису вхідного випадкового процесу використовуються або ймовірності характеристики (щільність і функція розподілу ймовірності), або статистичні (математичне сподівання, дисперсія, кореляційна функція, спектральна щільність потужності), то очевидно, що такі ж характеристики необхідно використовувати і для опису вихідного випадкового процесу.

Ідеальним варіантом було б знаходження n -мірної щільності розподілу ймовірності вихідного випадкового процесу $f(y_1, y_2, \dots, y_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$ по n -мірній щільності вхідного $f(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Однак на цьому шляху виникають значні математичні труднощі.

Тому частіше усього аналіз проходження випадкових процесів через лінійні кола зводиться до визначення тільки статистичних характеристик. Цим ми займемося в подальшому.

Як і при аналізі проходження детермінованих сигналів через лінійні кола, для аналізу проходження випадкових процесів використовують:

- часовий метод аналізу;
- спектральний метод аналізу.

8.2. Часовий метод аналізу проходження випадкових сигналів через лінійні кола.

При аналізі проходження детермінованих сигналів через лінійні кола використовується інтеграл Дюамеля через імпульсну характеристику $g(t)$ [раніше $K(t)$].

$$U(t) = \int_0^t e(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t S(t)K(t-\theta)d\theta = \int_0^t e(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Якщо вхідний випадковий сигнал квазидетермінований, то по вхідній дії можна знайти вихідний сигнал.

Нехай на лінійне коло з відомою імпульсною характеристикою

$$g(t) = 5e^{-3t}1(t)$$

впливає квазидетермінований випадковий процес

$$X(t) = M + 4\cos(2t + \Theta), \quad -\infty < t < \infty.$$

Де M і Θ – взаємно незалежні випадкові величини, з яких Θ рівномірно розподілена на інтервалі $0 \dots 2\pi$.

Потрібно визначити вихідний випадковий процес $Y(t)$. Оскільки вхідний сигнал заданий аналітично, то можна знайти і аналітичний вираз вихідного випадкового процесу.

Відповідно з інтегралом Дюамеля можна записати

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_{0-\infty}^t X(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{0-\infty}^t M5e^{-3(t-\tau)}d\tau + 20 \int_{0-\infty}^t \cos(2\tau + \Theta)e^{-3(t-\tau)}d\tau = \\ &= \frac{5}{3}M + 20e^{-3t} \int_{0-\infty}^t e^{3\tau} \cos(2\tau + \Theta)d\tau. \end{aligned}$$

Здійсненням заміни змінних інтеграл зводиться до табличного. Тоді для сталого режиму ($t \rightarrow \infty$) можна записати

$$Y(t) = \frac{5}{3}M + \frac{20}{13}[3\cos(2t + \Theta) + 2\sin(2t + \Theta)].$$

Реакція кола також є квазідетермінованим випадковим процесом і містить ті ж випадкові параметри M і Θ , що і вхідний.

Якщо ж вхідна дія випадковий процес, то для вихідного процесу можна знайти тільки імовірнісні або статистичні характеристики (m_y, σ_y^2) .

8.3. Визначення математичного сподівання і середнього квадрата випадкового процесу на виході лінійного кола.

8.3.1. Визначення математичного сподівання.

Нехай на вхід лінійного кола діє стаціонарний випадковий процес $X(t)$ з відомим математичним сподіванням $M[X(t)] = m_x$.

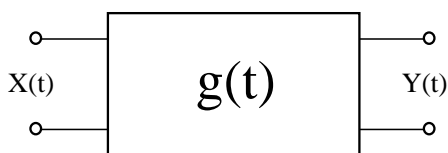


Рис. 8.2

$g(t)$ – відома імпульсна характеристика, для якої виконується умова

$$g(t)=0, \quad t<0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$$

Потрібно визначити математичне сподівання вихідного випадкового процесу $Y(t)$.

Для вихідного випадкового процесу відповідно до інтеграла Дюамеля можемо записати

$$Y(t) = \int_0^t X(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Математичне сподівання вихідного випадкового процесу

$$M[Y(t)] = M\left[\int_0^t X(t-\tau)g(\tau)d\tau\right].$$

Внесемо символ статистичного усереднення під знак інтеграла. Відзначимо, що така процедура можлива майже у всіх практичних випадках.

$$m_y(t) = \int_0^t \underbrace{M[x(t-\tau)]}_{m_x} g(\tau)d\tau,,$$

Де $M[x(t-\tau)] = m_x$ - математичне сподівання вхідного випадкового процесу.

Отже, математичне сподівання випадкового процесу на виході лінійного кола (системи) дорівнює

$$m_y(t) = m_x \int_0^t g(\tau)d\tau \quad (8.1)$$

Математичне сподівання вихідного випадкового процесу в загальному випадку (перехідному режимі) залежить від часу, не дивлячись на те, що вхідний процес стаціонарний ($m_x = \text{const}$).

Якщо верхню межу інтеграла спрямувати до нескінченності, то набудемо значення математичного сподівання вихідного випадкового процесу $Y(t)$ в сталому (стаціонарному) режимі, тобто

$$m_y = m_x \int_0^{t \rightarrow \infty} g(\tau) d\tau \quad (8.2)$$

Тут $\int_0^{t \rightarrow \infty} g(\tau) d\tau$ - площа під імпульсною характеристикою кола.

У стаціонарному режимі математичне сподівання вихідного випадкового процесу дорівнює добутку математичного сподівання вхідного випадкового процесу на площу, обмежену імпульсною характеристикою і віссю абсцис.

З теорії кіл відомо, що площа під імпульсною характеристикою дорівнює значенню АЧХ кола на нульовій частоті ($\omega=0$), тобто $K(\omega=0)$.

$$\int_0^{\infty} g(t) dt = K(\omega=0).$$

Висновок: Математичне сподівання (середнє значення) вихідного випадкового процесу в стаціонарному режимі дорівнює математичному сподіванню вхідного випадкового процесу помноженому на коефіцієнт передачі кола на частоті $\omega=0$

$$m_y = m_x K(\omega=0)$$

8.3.2. Середній квадрат випадкового процесу на виході лінійного кола.

Необхідно визначити середній квадрат вихідного випадкового процесу

$$M[Y^2(t)] = M[Y(t)Y(t)].$$

Відповідно до інтеграла Дюамеля для вихідного випадкового процесу можна записати

$$Y(t) = \int_0^t X(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Підставимо у вираз для середнього квадрата, ввівши дві змінних інтегрування τ_1 і τ_2 для першого і другого інтегралів відповідно.

$$\begin{aligned} M[Y(t)Y(t)] &= M \int_0^t X(t-\tau_1)g(\tau_1)d\tau_1 \cdot \int_0^t X(t-\tau_2)g(\tau_2)d\tau_2 = \\ &= \int_0^t g(\tau_1) \left\{ \int_0^t M[X(t-\tau_1)X(t-\tau_2)]g(\tau_2)d\tau_2 \right\} d\tau_1 \end{aligned}$$

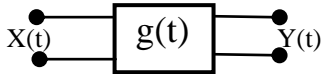
У цьому виразі $M[X(t-\tau_1)X(t-\tau_2)] = K_x(t-\tau_1-t+\tau_2) = K_x(\tau_2-\tau_1)$ - коваріаційна функція вхідного випадкового процесу.

Остаточно для середнього квадрата вихідного випадкового процесу отримаємо

$$M[Y^2(t)] = \int_0^t g(\tau_1) \left[\int_0^t K_x(\tau_2 - \tau_1) g(\tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1 \quad (8.3)$$

У перехідному режимі середній квадрат вихідного випадкового процесу залежить від часу. Якщо верхню межу спрямувати до нескінченності ($t \rightarrow \infty$), то набудемо стаціонарного значення середнього квадрата.

Розглянемо дію білого шуму на лінійне коло. Оскільки білий шум має нульове математичне сподівання $m_x=0$, то його коваріаційна функція дорівнює кореляційній



$$K_x(\tau) = R_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

Тоді середній квадрат вихідного випадкового процесу буде

$$\begin{aligned} M[Y^2(t)] &= \sigma_y^2 = \int_0^t g(\tau_1) \left[\int_0^t \frac{N_0}{2} \delta(\tau_2 - \tau_1) g(\tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1 = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^t g(\tau_1) g(\tau_1) d\tau_1 \Big|_{\tau_1=\tau} = \frac{N_0}{2} \int_0^t g^2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

У перехідному режимі середній квадрат вихідного випадкового процесу залежить від часу.

Якщо верхню межу інтеграла спрямувати до нескінченності ($t \rightarrow \infty$), то отримаємо дисперсію випадкового процесу $Y(t)$ σ_y^2 в стаціонарному режимі. Вона не залежить від часу і є постійною величиною

$$M[Y^2(t)] = \sigma_y^2 = \frac{N_0}{2} \int_0^{t \rightarrow \infty} g^2(\tau) d\tau = \text{const} \quad (8.4)$$

Висновок: У стаціонарному режимі середній квадрат випадкового процесу на виході лінійного кола пропорційний площі, обмеженої квадратом імпульсної характеристики.

9. КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ НА ВИХОДІ ЛІНІЙНОГО КОЛА.

9.1. Кореляційна функція випадкового процесу на виході лінійного кола.

Нехай на вхід лінійного кола з відомою імпульсною характеристикою $g(t)$ діє стаціонарний випадковий процес $X(t)$.

Необхідно визначити кореляційну функцію випадкового процесу на виході $Y(t)$.

Вважатимемо, що математичне сподівання випадкового процесу $X(t)$ дорівнює нулю $m_x=0$. Як встановлено, математичне сподівання випадкового процесу на виході кола рівне

$$m_y = m_x \int_0^t g(\tau) d\tau.$$

Оскільки $m_x=0$, то і $m_y=0$. В цьому випадку коваріаційна і кореляційні функції вихідного випадкового процесу співпадають

$$K_y(\tau) = R_y(\tau)$$

Тому для кореляційної функції вихідного стаціонарного випадкового процесу можна записати

$$R_y(\tau) = M[Y(t)Y(t+\tau)] \quad (9.1)$$

Вихідний випадковий процес знаходиться за допомогою інтеграла Дюамеля

$$Y(t) = \int_0^t X(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

У сталому режимі верхню межу необхідно спрямувати в нескінченність ($t \rightarrow \infty$).

Як і раніше скористаємося двома змінними τ_1 і τ_2 для співмножників виразу для $R_y(\tau)$ (40.1).

Тоді можна записати

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= M\left[\int_0^t X(t-\tau_1)g(\tau_1)d\tau_1 \times \int_0^t X(t-\tau_2+\tau)g(\tau_2)d\tau_2\right] = \\ &= M\left\{\int_0^t g(\tau_1)\left[\int_0^t X(t-\tau_1)X(t-\tau_2+\tau)g(\tau_2)d\tau_2\right]d\tau_1\right\} = \\ &= \int_0^t g(\tau_1)\left\{\underbrace{\int_0^t M[X(t-\tau_1)X(t-\tau_2+\tau)]d\tau_2}_{R_x(\tau_2-\tau_1-\tau)}\right\}d\tau_1 \end{aligned}$$

У отриманому виразі

$$M[X(t-\tau_1)X(t-\tau_2+\tau)] = R_x(t-\tau_1-t+\tau_2-\tau) = R_x(\tau_2-\tau_1-\tau) -$$

- кореляційна функція вхідного випадкового процесу $X(t)$.

Тоді кореляційна функція вихідного випадкового процесу в сталому режимі матиме вигляд

$$R_y(\tau) = \int_0^{t \rightarrow \infty} g(\tau_1) \left[\int_0^{t \rightarrow \infty} R_x(\tau_2 - \tau_1 - \tau) g(\tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1 \quad (9.2)$$

При дії на лінійне коло білого шуму з кореляційною функцією

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

Вираз (40.2) спрощується

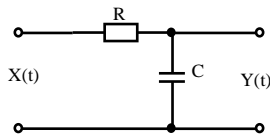
$$R_y(\tau) = \int_0^{t \rightarrow \infty} g(\tau_1) \left[\int_0^{t \rightarrow \infty} \frac{N_0}{2} \delta(\tau_2 - \tau_1 - \tau) g(\tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1 = \int_0^{t \rightarrow \infty} g(\tau_1) \frac{N_0}{2} g(\tau_1 + \tau) d\tau_1.$$

Замінивши τ_1 на t ($\tau_1=t$), отримаємо

$$R_y(\tau) = \frac{N_0}{2} \int_0^{t \rightarrow \infty} g(t) g(t + \tau) dt \quad (9.3).$$

1. Приклад.

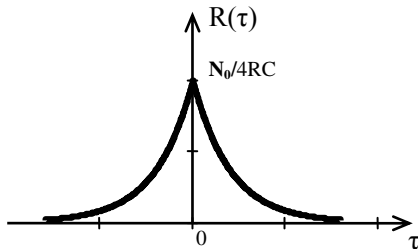
При дії білого шуму на інтегруюче RC коло з імпульсною характеристикою



$$g(t) = \frac{1}{\tau_k} e^{-\frac{t}{\tau_k}} 1(t), \quad \tau_k = RC.$$

кореляційна функція випадкового процесу на виході $Y(t)$ буде

$$R_y(\tau) = \frac{N_0}{4RC} e^{-\frac{|\tau|}{RC}}, \quad -\infty < \tau < \infty.$$



По кореляційній функції легко визначити дисперсію вихідного випадкового процесу, використовуючи вираз $\sigma_y^2 = R_y(\tau=0) = \frac{N_0}{4RC}$.

9.2. Взаємна кореляційна функція випадкових процесів на вході і виході лінійного кола.

Якщо випадковий процес діє на вхід лінійного кола, то повинен існувати певний зв'язок процесів на вході і виході кола. Тобто ці процеси корельовані.

Експериментальне визначення взаємної кореляційної функції складної системи часто використовується для атестації цієї системи.

Для цього зміряну кореляційну функцію системи порівнюють з еталонною для справної системи. За наслідками порівняння роблять висновок про її працездатність.

Взаємна кореляційна функція за умови $m_x=0$ і $m_y=0$ визначається таким чином.

Відповідно до інтеграла Дюамеля для $Y(t)$

$$Y(t) = \int_0^t X(t - \tau_1) g(\tau_1) d\tau_1$$

Тоді

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= M[X(t)Y(t+\tau)] = M[X(t) \int_0^{t+\tau} X(t+\tau - \tau_1) g(\tau_1) d\tau_1] = \\ &= \int_0^{t+\tau} \underbrace{M[X(t)X(t+\tau - \tau_1)]}_{R_x(\tau_1 - \tau)} g(\tau_1) d\tau_1 = \int_0^{t+\tau} R_x(\tau_1 - \tau) g(\tau_1) d\tau_1 = \\ &= \int_0^{t+\tau} R_x(t - \tau) g(t) dt. \end{aligned}$$

Тобто

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{t \rightarrow \infty} R_x(t - \tau) g(t) dt. \quad (9.4)$$

У разі дії на вхід системи білого шуму з кореляційною функцією

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

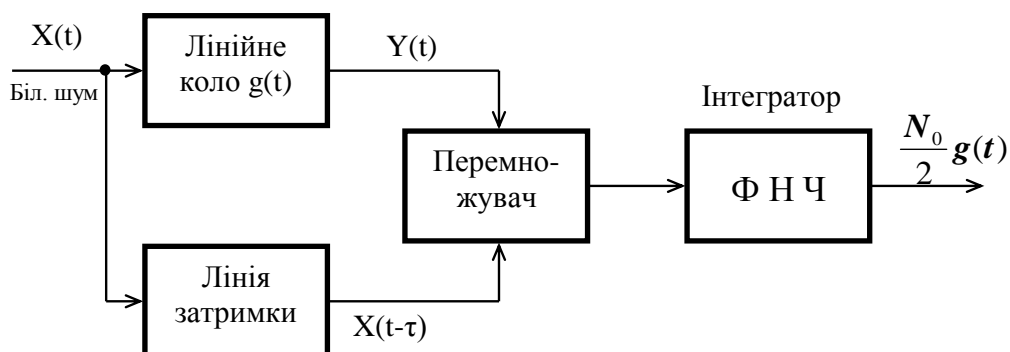
вираз для взаємної кореляції буде мати вигляд

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_0^{t \rightarrow \infty} \frac{N_0}{2} \delta(t - \tau) g(t) dt = \begin{cases} \frac{N_0}{2} g(\tau), & \tau > 0. \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \\ R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau) &= \int_0^{t \rightarrow \infty} \frac{N_0}{2} \delta(t + \tau) g(t) dt = \begin{cases} 0, & \tau > 0. \\ \frac{N_0}{2} g(-\tau), & \tau < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

9.3. Приклад практичного використання взаємної кореляційної функції.

Розглянутий в 3 факт лежить в основі експериментального визначення імпульсної характеристики кола.

Структурна схема пристрою, що реалізовує розглянутий метод, має наступний вигляд.



Такий метод визначення імпульсної характеристики $g(t)$ дозволяє уникнути подачі δ - функції значної (∞) амплітуди на вхід кола.

10. СПЕКТРАЛЬНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПРОХОДЖЕННЯ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ ЧЕРЕЗ ЛІНІЙНІ КОЛА.

10.1. Загальні відомості.

При спектральному аналізі в якості характеристики кола використовується комплексна передатна характеристика $K(j\omega)$.

Якщо на вході діє детермінований сигнал, то по ньому можна визначити спектральну щільність вхідного сигналу

$$S_{\text{вх}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(t) e^{-j\omega t} dt.$$

По відомій комплексній передатній характеристиці $K(j\omega)$ знаходиться спектральна щільність вихідного сигналу

$$S_{\text{вих}}(j\omega) = S_{\text{вх}}(j\omega) K(j\omega),$$

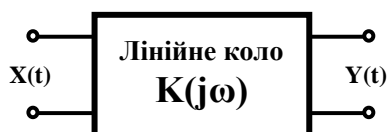
а потім з використанням зворотного перетворення Фур'є вихідний сигнал

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int S_{\text{вих}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Жодне з цих співвідношень не може бути застосовано при аналізі проходження випадкового процесу через лінійне коло. Обумовлено це тим, що неможливо знайти спектральну щільність вхідного, а, значить, і вихідного випадкового процесу.

Для випадкового процесу можливо знайти тільки енергетичний спектр. Розглянемо, як можна трансформувати спектральний метод для детермінованих сигналів до випадкових з урахуванням їх особливостей.

10.2. Спектральна щільність потужності (енергетичний спектр) випадкового процесу на виході лінійного кола.



Розглянемо лінійне коло з відомою комплексною передатною характеристикою $K(j\omega)$.

На вхід кола діє випадковий процес $X(t)$ з відомою кореляційною функцією $R_x(\tau)$.

Необхідно визначити енергетичний спектр $W_y(\omega)$ вихідного випадкового процесу $Y(t)$.

Відповідно до теореми Вінера-Хинчина для енергетичного спектру вихідного випадкового процесу можна записати

$$W_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

де $R_y(\tau)$ - кореляційна функція вихідного випадкового процесу $Y(t)$.

Як було показано раніше

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau_2 - \tau_1 - \tau) g(\tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1.$$

Тоді

$$W_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) g(\tau_2) \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau_2 - \tau_1 - \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] d\tau_1 d\tau_2.$$

Оскільки, $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$, то можна записати

$$W_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) g(\tau_2) \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau_1 - \tau_2 + \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] d\tau_1 d\tau_2.$$

Зробимо заміну змінних $\tau_1 - \tau_2 + \tau = z \rightarrow \tau = z + \tau_2 - \tau_1$ і одержимо

$$W_y(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1}_{K^*(j\omega)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) e^{-j\omega\tau_2} d\tau_2}_{K(j\omega)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} R_x(z) e^{-j\omega z} dz}_{W_x(\omega)}.$$

У одержаному виразі перший інтеграл комплексно сполучена КЧХ кола, другий – КЧХ кола, третій енергетичний спектр випадкового процесу на вході.

Тоді можна записати

$$W_y(\omega) = K^2(\omega) W_x(\omega) \quad (10.1)$$

Таким чином: енергетичний спектр випадкового процесу на виході лінійного кола дорівнює добутку енергетичного спектру вхідного випадкового процесу і квадрата модуля комплексної передавальної (частотної) характеристики кола (КЧХ).

По енергетичному спектру вихідного випадкового процесу можна визначити його кореляційну функцію і, відповідно, дисперсію.

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) K^2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) K^2(\omega) d\omega.$$

Якщо вхідний випадковий процес білий шум $W_x(\omega) = \frac{N_0}{2}$,

то

$$\sigma_y^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega = \frac{N_0}{2\pi} \int_0^{\infty} K^2(\omega) d\omega.$$

Таким чином, послідовність спектрального методу аналізу проходження випадкового процесу через лінійні кола полягає в наступному:

1. Визначаємо енергетичний спектр вхідного випадкового процесу $W_x(\omega)$.

2. Знаходимо квадрат модуля комплексної передавальної характеристики кола

$$K^2(\omega).$$

3. Визначаємо енергетичний вихідного випадкового процесу

$$W_y(\omega) = W_x(\omega) K^2(\omega).$$

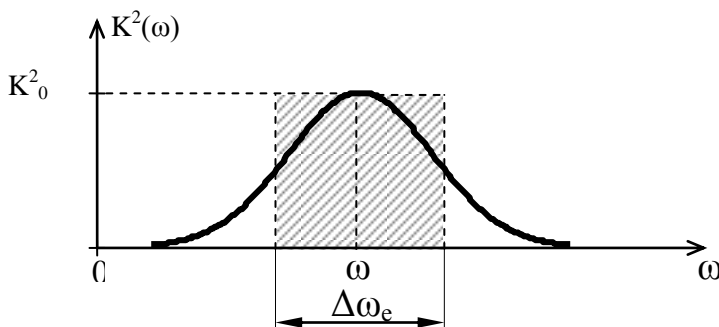
4. Визначаємо кореляційну функцію вихідного випадкового процесу

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Ефективна смуга пропускання (шумова смуга) кола.

По аналогії з ефективною шириною енергетичного спектру випадкового процесу для частотних характеристик лінійних кіл також введено поняття ефективної смуги пропускання (або ефективної шумової смуги).

Нехай, наприклад, квадрат модуля частотної характеристики кола $K^2(\omega)$ має вигляд.



Замінімо квадрат АЧХ кола ідеальною прямокутною АЧХ з тим же коефіцієнтом передачі K_0^2 і площею рівною площі під реальною АЧХ. Ширину основи цього прямокутника і

називають ефективною або шумовою смугою пропускання.

Тобто

$$\Delta\omega_{\text{эф}} \cdot K_0^2 = \int_0^{\infty} K^2(\omega) d\omega \rightarrow \Delta\omega_{\text{эф}} = \frac{\int_0^{\infty} K^2(\omega) d\omega}{K_0^2} \quad (10.2)$$

Середня потужність випадкового процесу на виході (дисперсія) при дії на вході білого шуму буде

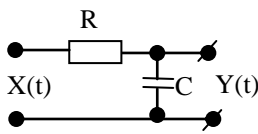
$$P_{ср.вых} = \sigma_y^2 = \frac{N_0}{2\pi} \int_0^\infty K^2(\omega) d\omega = \frac{N_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{K^2(\omega)}{K_0^2} K_0^2 d\omega = \frac{N_0 K_0^2}{2\pi} \frac{\int_0^\infty K^2(\omega) d\omega}{K_0^2} =$$

$$= N_0 K_0^2 \frac{\Delta\omega_{эф}}{2\pi} = N_0 K_0^2 \Delta f_{эф}.$$

$$\sigma_y^2 = N_0 K_0^2 \Delta f_{эф} \quad (10.3)$$

10.3. Проходження білого шуму через інтегруюче RC коло.

Нехай на інтегруюче RC коло діє білий шум.



Визначимо енергетичний спектр і кореляційну функцію випадкового процесу на виході кола.

Енергетичний спектр білого шуму на вході $W_x(\omega) = \frac{N_0}{2}$.

Комплексна частотна характеристика кола

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_{кола}}$$

Тоді

$$K^2(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega\tau_{кола})^2}.$$

Енергетичний спектр процесу на виході кола буде

$$W_y(\omega) = W_x(\omega) K^2(\omega) = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{1 + (\omega\tau_{кола})^2}.$$

Кореляційна функція випадкового процесу на виході кола $Y(t)$ по формулі Вінера-Хинчина

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_y(\omega) \cos \omega\tau d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_y(\omega) \cos \omega\tau d\omega =$$

$$= \frac{N_0}{2 \cdot \pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_{кола}^2} \cos \omega\tau d\omega = \frac{N_0}{2 \cdot \pi \tau_{кола}^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega\tau}{\frac{1}{\tau_{кола}^2} + \omega^2} d\omega.$$

Інтеграл табличний

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2 \cdot a} e^{-ma}.$$

Звідки

$$R_y(\tau) = \frac{N_0}{4\tau_{кола}} e^{-\frac{\tau}{\tau_{кола}}}.$$

Оскільки кореляційна функція є парною, то остаточно

$$R_y(\tau) = \frac{N_0}{4\tau_{\text{кола}}} e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{\text{кола}}}}. \quad (10.4)$$

Результат, природно, той же, що і при часовому методі.
Знайдемо шумову смугу пропускання кола.

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{\text{эф}} &= \frac{\int_0^\infty K^2(\omega) d\omega}{K^2(0)} = \int_0^\infty \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_{\text{кола}}^2} d\omega \Big|_{\omega \tau_{\text{кола}} = x} = \frac{1}{\tau_{\text{кола}}} \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^2} dx = \\ &= \frac{1}{\tau_{\text{кола}}} \operatorname{arctg} x \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\tau_{\text{кола}}}. \end{aligned}$$

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\tau_{\text{кола}}}.$$

Звичайна смуга пропускання для такого кола

$$\Delta\omega = \omega_{cp} = \frac{1}{\tau_{\text{кола}}}.$$

Інтервал кореляції вихідного випадкового процесу

$$\tau_k = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty |\rho_y(\tau)| d\tau,$$

де $\rho_y(\tau) = \frac{R_y(\tau)}{\sigma_y^2}$ — нормована кореляційна функція

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \frac{N_0}{4\tau_{\text{кола}}}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \rho_y(\tau) &= e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{\text{кола}}}}. \\ \tau_{\text{кор}} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{\text{кола}}}} d\tau = \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{\tau_{\text{кола}}}} d\tau = -\tau_{\text{кола}} e^{-\frac{\tau}{\tau_{\text{кола}}}} \Big|_0^\infty = \tau_{\text{кола}}. \end{aligned}$$

Висновок: Інтервал кореляції на виході лінійного кола при дії на вході білого шуму рівний постійному часу кола $\tau_{\text{кор}} = \tau_{\text{кола}}$.

11. ПРОХОДЖЕННЯ БІЛОГО ШУМУ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНСНІ КОЛА.

11.1. Проходження білого шуму через ідеальний смуговий фільтр.



Рис. 11.1

На вхід ідеального смугового фільтру (рис. 42.1) впливає випадковий процес $X(t)$ у вигляді білого шуму.

Визначимо статистичні характеристики вихідного випадкового процесу $Y(t)$ ($W_y(\omega)$, $R_y(\tau)$, σ_y^2 , та інші).

Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) ідеального смугового фільтру має наступний вигляд (рис. 42.2)

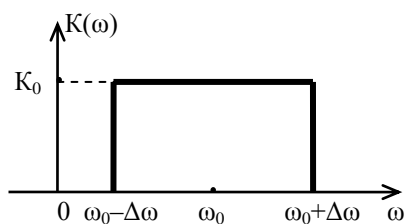


Рис. 11.2

$$K(\omega) = \begin{cases} K_0, & \omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega; \\ 0, & \omega > \omega_0 + \Delta\omega, \omega < \omega_0 - \Delta\omega. \end{cases}$$

Якщо $2\Delta\omega \ll \omega_0$, то фільтр вважається вузькосмуговим.

Енергетичний спектр випадкового процесу на вході, в даному випадку білого шуму

$$W_x(\omega) = \frac{N_0}{2}.$$

Енергетичний спектр вихідного процесу

$$W_y(\omega) = K^2(\omega)W_x(\omega) = \begin{cases} K_0^2 \frac{N_0}{2}, & \omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega; \\ 0, & \omega < \omega_0 - \Delta\omega; \omega > \omega_0 + \Delta\omega. \end{cases}$$

Для визначення кореляційної функції вихідного випадкового процесу скористаємося формулою Вінера-Хинчина

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty W_y(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \frac{K_0^2 N_0}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \cos \omega \tau d\omega = \frac{K_0^2 N_0 \Delta\omega}{\pi} \cdot \frac{\sin \Delta\omega \tau}{\Delta\omega \tau} \cos \omega_0 \tau.$$

Таким чином, кореляційна функція вихідного випадкового процесу

$$R_y(\tau) = \frac{K_0^2 N_0 \Delta\omega}{\pi} \cdot \frac{\sin \Delta\omega \tau}{\Delta\omega \tau} \cos \omega_0 \tau \quad (11.1)$$

Середня потужність флуктуації (дисперсія)

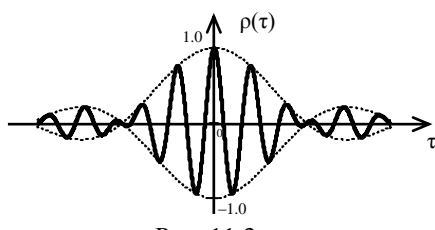
$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \frac{K_0^2 N_0 \Delta\omega}{\pi} = \frac{K_0^2 N_0 \Delta\omega \cdot 2}{\pi \cdot 2} = \frac{K_0^2 N_0 \Delta\omega_{эф}}{2\pi} = k_0^2 N_0 \Delta f_{эф}.$$

Нормована кореляційна функція

$$\rho(\tau) = \frac{R_y(\tau)}{R_y(0)} = \frac{\sin \Delta\omega \tau}{\Delta\omega \tau} \cos \omega_0 \tau.$$

Її графік має наступний (рис. 11.3) вигляд

Інтервал (час) кореляції визначається характером обвідної нормованої кореляційної функції і дорівнює



$$\tau_{кор} = \int_0^{\infty} \frac{\sin \Delta\omega \tau}{\Delta\omega \tau} d\tau = \frac{\pi}{2\Delta\omega}.$$

$$\tau_{кор} = \frac{\pi}{2\Delta\omega}.$$

(11.2)

Рис. 11.3

11.3. Дія білого шуму на паралельний коливальний контур.

На вхід паралельного коливального контуру з високою добротністю діє випадковий процес $x_i(t)$ у вигляді струму, що є білим шумом.

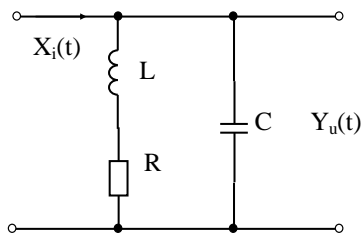


Рис. 11.4.

Визначимо статистичні характеристики випадкової напруги на контурі.

Відомо, що комплексний вхідний опір контуру у області малих розстроєнь описується виразом

$$K(j\omega) = Z(j\omega) = \frac{R_{oe}}{1 + j2Q\zeta},$$

$$\text{де } \zeta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \text{ - відносна розстройка}$$

R_{oe} - еквівалентний резонансний опір контуру;

ω_0 - резонансна частота контуру.

З урахуванням того, що постійна часу контуру дорівнює

$$\tau_{кола} = \frac{2L}{R} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{2\rho}{R\omega_0} = \frac{2Q}{\omega_0}.$$

отримаємо

$$K^2(\omega) = Z^2(\omega) = \frac{R_{oe}^2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau_{кола}^2}.$$

Відповідно до спектрального методу для спектральної щільності потужності напруги на контурі можна записати

$$W_y(\omega) = W_x(\omega) K^2(\omega) = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{R_{oe}^2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau_{кола}^2}. \quad (11.3)$$

Кореляційну функцію випадкової напруги на контурі знайдемо по формулі Вінера-Хинчина

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_y(\omega) \cos \omega\tau d\omega = \frac{R_{oe}^2 N_0 \Delta\omega}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega\tau}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau_{кола}^2} d\omega.$$

Після заміни змінних $\omega - \omega_0 = \Omega$ і тригонометричних перетворень інтеграл зводиться до табличного

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma}.$$

В результаті отримаємо

$$R_y(\tau) = \frac{R_{oe}^2 N_0}{2\tau_{кола}} e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{кола}}} \cos \omega_0 \tau. \quad (11.4)$$

Дисперсія випадкової напруги

$$\sigma_y^2 = \sigma_u^2 = R_y(0) = \frac{R_{oe}^2 N_0}{2\tau_{кола}}.$$

Нормована кореляційна функція

$$\rho_u(\tau) = \frac{R_y(\tau)}{R_y(0)} = e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{кола}}} \cos \omega_0 \tau.$$

Її графік має наступний (рис. 11.5) вигляд

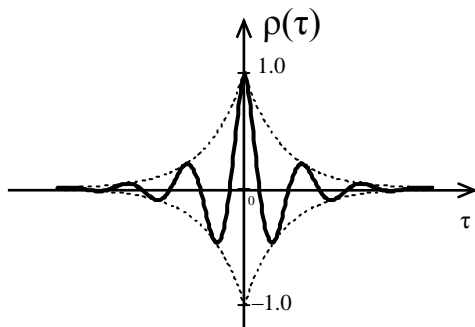


Рис. 11.5

Інтервал кореляції визначається законом зміни обвідної кореляційної функції

$$\tau_{кор} = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\tau_{кола}}} d\tau = -\tau_{кола} e^{-\frac{\tau}{\tau_{кола}}} \Big|_0^{\infty} = \tau_{кола}.$$

$$\tau_{кор} = \tau_{кола}.$$

Шумова смуга

$$\Delta\omega_{ef} = \frac{\int_0^{\infty} K^2(\omega) d\omega}{K^2(\omega_0)} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau_{кола}^2} d\omega = \frac{\pi}{\tau_{кола}}.$$

$$\Delta\omega_{ef} = \frac{\pi}{\tau_{\text{кола}}}, \quad \Delta f_{\text{эф}} = \frac{1}{2\tau_{\text{кола}}}.$$

Дисперсія випадкової напруги через шумову смугу можна записати таким чином

$$\sigma_u^2 = \sigma_y^2 = \frac{R_{oe}^2 N_0}{2\tau_{\text{кола}}} \cdot \frac{\pi}{\pi} = \frac{R_{oe}^2 N_0 \Delta\omega_{ef}}{2\pi} = R_{oe}^2 N_0 \Delta f_{\text{эф}}.$$

$$\sigma_y^2 = R_{oe}^2 N_0 \Delta f_{\text{эф}}.$$

Висновки:

- 1) Якщо реальне вибіркове (резонансне) коло у вигляді смугового фільтру має високу крутість скатів, тобто АЧХ близька до прямокутної, то нормована кореляційна функція на виході при дії білого шуму має вигляд

$$\rho_y(\tau) = \frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau} \cos \omega_0\tau.$$

При цьому дисперсія дорівнює

$$\sigma_y^2 = N_0 K_0^2 \Delta f_{\text{эф}}.$$

- 2) Якщо в якості вибіркового (резонансного) кола використовується одиночний контур, то нормована кореляційна функція при дії білого шуму

$$\rho_y(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{\text{кола}}}} \cos \omega_0\tau,$$

а дисперсія

$$\sigma_y^2 = R_{oe}^2 N_0 \Delta f_{\text{эф}}.$$

12. ВУЗЬКОСМУГОВІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ.

12.1. Нормалізація випадкових процесів під час проходження через лінійні кола.

Нехай на вхід лінійного кола діє стаціонарний випадковий процес $X(t)$ з розподілом, який відрізняється від нормального (рис. 12.1).

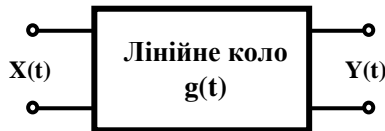


Рис. 12.1

Якщо ефективна ширина спектра цього процесу більше ефективної смуги пропускання кола $\Delta\omega_{ef} \gg \Delta\omega_{Пef}$ ($\tau_{кор} \ll \tau_k$), то розподіл вихідного випадкового процесу $Y(t)$ наближається до нормального. Ефект нормалізації тим сильніший, чим краще виконується нерівність $\Delta\omega_{ef} \gg \Delta\omega_{Пef}$. Це пояснюється наступним.

Для випадкового процесу на виході лінійного кола $Y(t)$ можна записати

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t \rightarrow \infty} X(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Розглянемо інтеграл як межу суми

$$Y(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\tau)g(t-k\Delta\tau),$$

де $\Delta\tau$ - малий інтервал часу, на протязі якого інтегральний вираз практично не змінюється.

Якщо інтервал кореляції вхідного стаціонарного випадкового процесу менше постійній часу кола, то вихідний випадковий процес $Y(t)$ буде уявляти собою суму великої кількості приблизно однакових випадкових величин $X(k\Delta\tau)g(t-k\Delta\tau)$. У відповідності з центральною граничною теоремою Ляпунова А. Н. закон розподілу вихідного процесу, який створено сумою великої кількості соразмірних випадкових величин буде наближатися до нормального.

Очевидно, що якщо вхідний випадковий процес нормальний, то вихідний випадковий процес буде тим більше нормальним.

Висновок.

При проходженні стаціонарного випадкового процесу з законом розподілу, який відрізняється від нормального, через лінійне коло при виконанні умови $\tau_{кор} \ll \tau_k$, ($\Delta\omega_{ef} \gg \Delta\omega_{Пef}$) вихідний процес буде нормальним.

12.1. Поняття вузькосмугового випадкового процесу.

Раніше була розглянута задача проходження білого шуму через вузькосмугове коло. В результаті було з'ясовано, що енергетичний спектр вихідного випадкового процесу повторює по формі квадрат АЧХ кола, тобто є вузькосмуговим і має вигляд $W_y(\omega) = W_x(\omega)K^2(\omega)$. (рис. 12.2.)

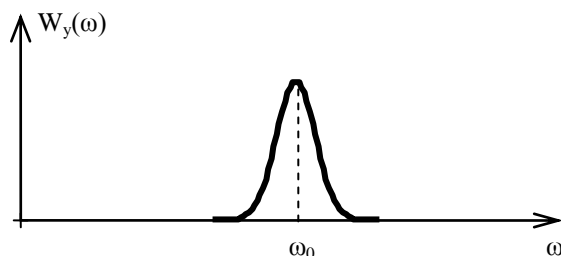


Рис. 12.2.

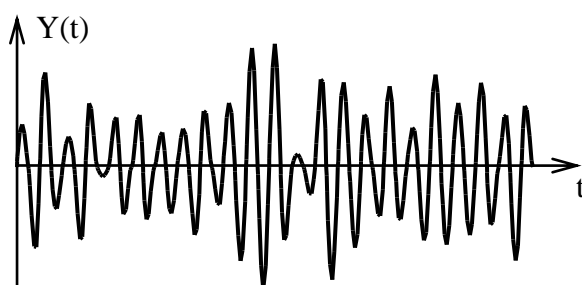


Рис. 12.3.

Часовий графік реалізації випадкового процесу має вигляд (рис. 12.3)

Зовнішні вузькосмуговий випадковий процес схожий на амплітудно-модульований сигнал з випадковою зміною амплітуди. Однак у вузькосмуговому випадковому процесі по випадковому закону повільно змінюється і фаза, а значить і частота.

Такий характер вузькосмугового випадкового процесу дозволяє записати його наступним виразом

$$X(t) = U(t)\cos[\omega_0 t + \Theta(t)] = U(t)\cos\Psi(t),$$

де $U(t)$ - обвідна,

$\Theta(t)$ - початкова фаза,

які є випадковими функціями часу.

У відповідності з властивістю нормалізації вузькосмуговий випадковий процес є стаціонарним з щільністю розподілу його миттєвих значень у будь-якому перетині $\tau > \tau_{кор}$ по нормальному закону з нульовим математичним сподіванням

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}.$$

12.2. Двовірна щільність розподілу ймовірностей вузькосмугового випадкового процесу.

Представимо вузькосмуговий випадковий процес у вигляді

$$X(t) = U(t)\cos[\omega_0 t + \Theta(t)] = \underbrace{U(t)\cos\Theta(t)}_{U_c(t)} \cos\omega_0 t - \underbrace{U(t)\sin\Theta(t)}_{U_s(t)} \sin\omega_0 t =$$

$$= U_c(t)\cos\omega_0 t - U_s(t)\sin\omega_0 t,$$

де $U_c(t) = U(t)\cos\Theta$, $U_s(t) = U(t)\sin\Theta$.

Очевидно, що

$$U(t) = \sqrt{U_c^2 + U_s^2}, \quad \Theta(t) = \arctg \frac{U_s(t)}{U_c(t)}.$$

При амплітудному детектуванні виділяється обвідна $U(t)$, а при фазовому - $\Theta(t)$.

Тому необхідно знати щільність розподілу ймовірності значень обвідної $f(U)$ і фази $f(\Theta)$. Індекс t опущений, оскільки процес стаціонарний.

Ці щільності ймовірності можна знайти, якщо відома двовірна щільність розподілу ймовірності $f(U, \Theta)$.

Оскільки $U(t)$ однозначно пов'язана з $U_c(t)$ і $U_s(t)$, то спочатку необхідно знайти щільність розподілу ймовірності $f(U_c)$, $f(U_s)$, $f(U_c, U_s)$.

Закон розподілу миттєвих значень випадкового процесу $X(t)$ нормальний, тобто

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Оскільки \cos і \sin складові отримані шляхом простого перенесення енергетичного спектра вузькосмугового випадкового процесу на частоту $\omega=0$, то їх розподіл також нормальний з дисперсією σ_x^2 і $m_x=0$.

$$f(U_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{U_c^2}{2\sigma_x^2}}, \quad f(U_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{U_s^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Значення випадкових процесів $U_c(t)$ і $U_s(t)$ в одні моменти часу не корельовані. А так як їх розподіл нормальний, то і статистично незалежні.

Отже, двовірну (сумісну) щільність розподілу ймовірності можна знайти як добуток одноірних

$$f(U_c, U_s) = f(U_c) f(U_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{(U_c^2 + U_s^2)}{2\sigma_x^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Це двовірна щільність розподілу ймовірності \cos і \sin складових вузькосмугового випадкового процесу.

Перейдемо від $f(U_c, U_s)$ до двовірної щільності розподілу обвідної $U(t)$ і фази $\Theta(t)$ $f(U, \Theta)$.

Перехід пояснимо за допомогою векторної діаграми (рис. 12.4, рис 12.5).

Ймовірність того, що вектор $\vec{U}(t)$ попаде в елементарний прямокутник $dU_c dU_s$

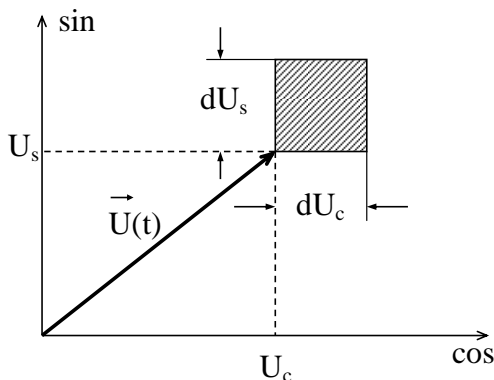


Рис. 12.4

$$f(U_c, U_s) \cdot dU_c dU_s = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} dU_c dU_s.$$

Перейдемо від прямокутної (декартової) системи координат до полярної (рис. 12.5).

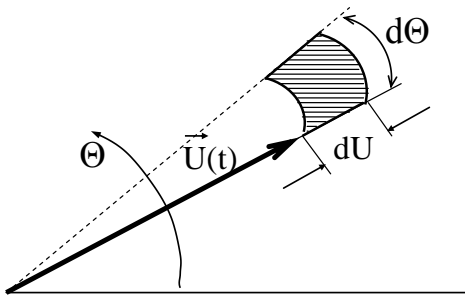


Рис. 12.5

У полярній системі координат площа заштрихованого елемента буде $U d\Theta dU$. Ймовірність попадання кінця вектора в цей елемент буде

$$\frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} U d\Theta dU.$$

Отже, для двомірної щільності розподілу ймовірності обвідної $U(t)$ і фази $\Theta(t)$ $f(U, \Theta)$ можна записати

$$f(U, \Theta) = \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (12.1)$$

12.3. Одномірна щільність розподілу початкової фази.

Як відомо, одномірна щільність розподілу початкової фази $f(\Theta)$ може бути знайдена шляхом інтегрування двомірної щільності $f(U, \Theta)$ по змінній U .

$$f(\Theta) = \int_0^\infty f(U, \Theta) dU = \int_0^\infty \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} dU = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} d(U^2) = \frac{-2\sigma_x^2}{4\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2\pi}.$$

Тобто

$$f(\Theta) = \frac{1}{2\pi}. \quad (12.2)$$

Це рівномірна щільність розподілу ймовірності на інтервалі $-\pi \dots +\pi$ (рис. 12.6).

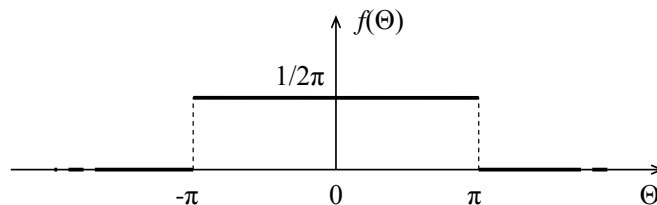


Рис. 12.6

12.4. Одномірна щільність розподілу ймовірностей обвідної.

Знайдемо шляхом інтегрування двомірної щільності $f(U, \Theta)$ по змінній Θ .

$$f(U) = \int_{-\pi}^{\pi} f(U, \Theta) d\Theta = \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} \int_{-\pi}^{\pi} d\Theta = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Це щільність розподілу ймовірностей обвідної вузькосмугового випадкового процесу.

$$f(U) = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (12.3)$$

Така щільність розподілу ймовірностей називається розподілом Релея. Її графік має наступний вигляд (рис. 12.7).

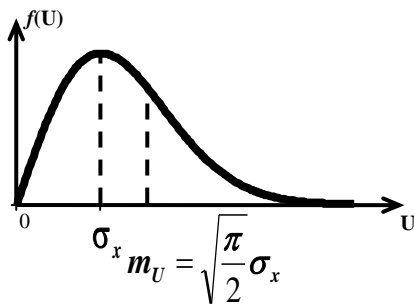


Рис. 12.7.

Максимальне значення досягається при $U = \sigma_x$. Це означає, що найбільш імовірнісне значення обвідної вузькосмугового випадкового процесу дорівнює $U = \sigma_x$.

Математичне сподівання

$$m_U = \int_0^{\infty} U \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} dU.$$

Позначимо $\frac{U}{\sqrt{2}\sigma_x} = A \rightarrow dU = \sqrt{2}\sigma_x dA$.

$$m_U = 2\sqrt{2}\sigma_x \int_0^{\infty} A^2 e^{-A^2} dA.$$

Це табличний інтеграл

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}.$$

Тоді

$$m_U = \frac{2\sqrt{2}\sigma_x \sqrt{\pi}}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x.$$

Отже

$$m_U = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x. \quad (12.4).$$

Середній квадрат обвідної

$$M[U^2] = \int_0^{\infty} U^2 f(U) dU = \int_0^{\infty} U^2 \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} dU.$$

Позначимо

$$\frac{U^2}{2\sigma_x^2} = A \rightarrow 2U dU = 2\sigma_x^2 dA \rightarrow dU = \frac{\sigma_x^2}{U} dA.$$

Тоді

$$M[U^2] = \frac{2U\sigma_x^2}{U} \int_0^{\infty} A e^{-A} dA.$$

Інтеграл табличний

$$\int_0^{\infty} x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \Big|_0^{\infty} = 1.$$

Отже

$$M[U^2] = 2\sigma_x^2.$$

Дисперсія дорівнює

$$\sigma_y^2 = M[U^2] - m_U^2 = 2\sigma_x^2 - \frac{\pi}{2}\sigma_x^2 = \sigma_x^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) = 0.429\sigma_x^2.$$

Остаточно

$$\sigma_U^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma_x^2 = 0.429\sigma_x^2. \quad (12.5).$$

Висновки:

Щільність розподілу ймовірності обвідної вузькосмугового випадкового процесу змінюється по закону Релея.

Щільність розподілу фази має рівномірний закон розподілу.

13. ДІЯ НА ЛІНІЙНЕ КОЛО (ФІЛЬТР) СУМИ ДЕТЕРМІНОВАНОГО СИГНАЛУ ТА ШУМУ.

13.1. Відношення сигнал/шум.

Розглянемо лінійне коло (фільтр) з відомою комплексною частотною характеристикою $K(j\omega)$ на вхід якого діє сума детермінованого сигналу та шуму $X(t)=S_{\text{вх}}(t)+\eta_{\text{вх}}(t)$. На виході фільтру буде відповідно $Y(t)=S_{\text{вих}}(t)+\eta_{\text{вих}}(t)$ (рис. 13.1).

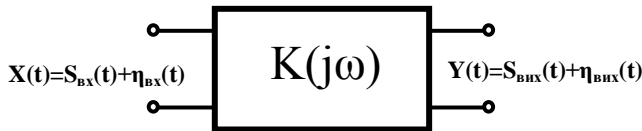


Рис. 13.1.

Сигнал на вході повністю відомий. Це означає, що задані його форма і положення на осі часу (наприклад t_0). Шум уявляє собою випадковий процес з заданими

статистичними характеристиками.

Знайдемо відношення сигнал/шум на виході фільтру у момент часу t_0 .

Це відношення звичайно позначають буквою q і записують через відношення амплітуди сигналу у момент часу t_0 $|S_{\text{вих}}(t_0)|$ до середньоквадратичного рівня шуму на виході $\sigma_{\text{вих}}$

$$q = \frac{|S_{\text{вих}}(t_0)|}{\sigma_{\text{вих}}}.$$

Часто відношення сигнал/шум на виході фільтру записують через потужності сигналу та шуму

$$q^2 = \frac{|S_{\text{вих}}(t_0)|^2}{\sigma_{\text{вих}}^2}.$$

При спектральному методі аналізу сигнал на виході у момент часу t_0 буде

$$S_{\text{вих}}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вих}}(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega.$$

Дисперсія або середня потужність шуму на виході

$$\sigma_{\text{вих}}^2 = R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_y(\omega) e^{j\omega \cdot 0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\text{вх}}(\omega) K^2(\omega) d\omega.$$

Тоді відношення сигнал/шум на виході фільтру буде

$$q = \frac{|S_{\text{вих}}(t_0)|}{\sigma_{\text{вих}}} = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|}{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\text{вх}}(\omega) K^2(\omega) d\omega \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (13.1)$$

Очевидно, що підбором амплітудно-частотної характеристики фільтру можна збільшити відношення сигнал/шум на виході.

На протязі довгого періоду розвитку радіотехніки до фільтрів пред'являлись наступні вимоги.

Найбільш рівномірне пропускання спектру сигналу і найбільше придушення за межами цього спектру. Ідеальним рахувався фільтр з прямокутною АЧХ (рис. 13.2).

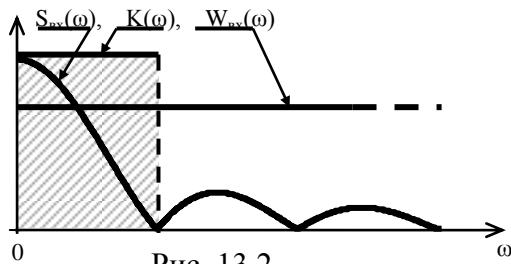


Рис. 13.2.

Приведене трактування має наступні недоліки:

1. Не враховується форма сигналу, яка може бути різною при одній і тій же ширині спектру сигналу.
2. Практично не враховуються статистичні властивості шуму

(завади).

Корінний перелом в теорії і практиці лінійних фільтрів пов'язаний з появою робіт Колмогорова, Котельникова, Вінера, які сформулювали та вирішили задачу синтезу (створення) фільтру оптимального для заданого сигналу на фоні завад з заданими статистичними характеристиками.

13.2. Загальні відомості з оптимальної лінійної фільтрації.

В усіх радіотехнічних системах поряд з корисним сигналом мають місце завади або шуми. Тому виникає наступне питання. Чи можливо побудувати систему так, щоб зменшити вплив завад?

Оказується можливим підібрати таку передатну або імпульсну характеристику системи (фільтра), які мінімізують вплив завад на вихідний сигнал. При цьому такий фільтр називають оптимальним.

Вирішення задачі оптимізації фільтра складається з декількох етапів.

1. Вибір критерію оптимальності. (Умови, при виконанні якої фільтр рахується оптимальним.).
2. Синтез (створення) фільтра у відповідності з вибраним критерієм.
3. Оцінка характеристик оптимального фільтра.
4. З'ясування можливості практичної реалізації оптимального фільтра, чи необхідності розробки його спрощених варіантів.

Якщо навіть виявляється, що неможливо реалізувати дійсно оптимальний фільтр, то оптимізація все одно є дуже корисною і доцільною. Причина полягає в тому, що характеристики оптимального фільтра це межа, до якої повинні прагнути характеристики реальних фільтрів.

Так як реальний фільтр не може бути кращим ніж оптимальний, то їх порівняння дає чітку відповідь на наступне питання. Чи є необхідність в подальшому вдосконаленні реального фільтра, якщо його характеристики досить близькі до оптимальних?

13.3. Критерії оптимальності.

Існує велика кількість критеріїв оптимальності, серед яких потрібно зробити вибір.

Перед усе необхідно, щоб критерії задовольняли ряду вимог.

1. Критерій повинен мати фізичний зміст і його застосування не повинно приводити до очевидних негативних результатів.

Наприклад, якщо в якості критерію оптимальності вибрати критерій мінімуму дисперсії (потужності) шуму на виході фільтру, то очевидно, що в результаті оптимізації ми отримали би фільтр, на виході якого як корисний сигнал так і шум дорівнювали нулю.

Ясно, що це тривіальний і неприпустимий результат.

З іншого боку, якщо формулювання критерію мінімуму потужності шуму на виході доповнити вимогою заданої потужності сигналу на виході, то він може виявитися прийнятним.

2. Наслідком застосування критерію оптимальності повинна бути єдиність та однозначність вирішення задачі.

3. Критерій оптимальності повинен приводити до математичних співвідношень і алгоритмів, які піддаються вирішенню.

Ця остання вимога виявляється дуже строгою і приводить до того, що на практиці використовується дуже обмежена кількість критеріїв.

Найбільш поширеними критеріями оптимальності є:

- критерій максимуму відношення сигналу до шуму (сигнал/шум) q на виході фільтру;
- критерій мінімуму середньоквадратичної похибки (помилки).

13.4. Проходження сигналу та шуму через лінійне коло.

Розглянемо дію прямокутного відеоімпульсу та білого шуму на інтегруюче RC коло (рис. 44.3, рис. 44.4).

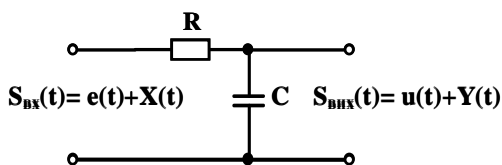


Рис. 13.3.

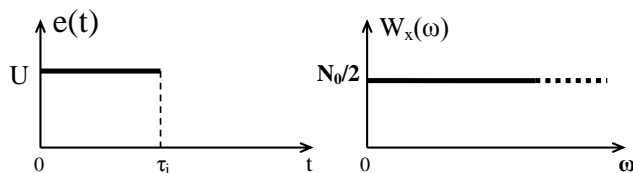


Рис. 13.4.

$e(t)$ – прямокутний відеоімпульс з амплітудою U і тривалістю τ_i

$X(t)$ – білий шум з спектральною щільністю потужності $W_x(\omega) = \frac{N_0}{2}$.

У частому випадку схема фільтра може бути задана. Тоді задача оптимізації зводиться до визначення параметрів фільтру, що забезпечують максимум відношення сигнал/шум.

Першим етапом вирішення задачі є вибір моменту часу t_0 , який відповідає максимуму відношення сигнал/шум на виході.

Оскільки коло лінійне, то можна незалежно розглянути проходження сигналу і шуму.

Вихідний сигнал при відсутності шуму можна знайти відомим методом за допомогою інтеграла Дюамеля.

Така задача була вирішена раніше. Було встановлено, що напруга на виході описується виразом

$$u(t) = \begin{cases} U(1 - e^{-\alpha t}), & 0 \leq t < \tau_i; \\ Ue^{-\alpha t}(e^{\alpha \tau_i} - 1), & t \geq \tau_i. \end{cases} \quad \alpha = \frac{1}{\tau_{\text{кола}}} = \frac{1}{RC}.$$

Графік вхідного і вихідного сигналів представлений на рис. 13.5.

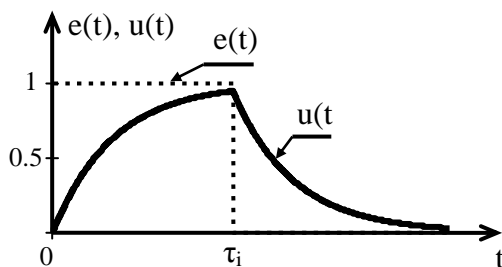


Рис. 13.5

З графіків видно, що вихідний корисний сигнал досягає максимуму у момент часу $t = \tau_i$. Тому вибираємо $t_0 = \tau_i$.

Для шуму на виході фільтру можна знайти тільки статистичні характеристики, наприклад, кореляційну функцію.

Кореляційна функція на виході при дії білого шуму на вході для такого кола була знайдена раніше

$$R_y(\tau) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha |\tau|}.$$

Дисперсія (середня потужність) шуму на виході фільтра дорівнює значенню кореляційної функції в нулі

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \frac{\alpha N_0}{4}.$$

Отже, для відношення сигнал/шум по потужності на виході фільтра у момент часу $t_0 = \tau_i$ можна записати

$$q_{\text{вих}}^2 = \frac{u^2(\tau_i)}{\sigma_y^2} = \frac{U^2(1 - e^{-\alpha \tau_i})^2}{\frac{\alpha N_0}{4}} = \frac{4U^2}{N_0} \cdot \frac{(1 - e^{-\alpha \tau_i})^2}{\alpha}.$$

$$q_{\text{вих}}^2 > 0 \quad \text{для всіх значень } \alpha = \frac{1}{RC} > 0.$$

$$q_{\text{вих}}^2 = 0 \quad \text{для } \alpha = \infty \quad \text{та} \quad \alpha = 0.$$

Отже, повинно існувати $\alpha_{\text{опт}}$ при якому $q_{\text{вих опт}}^2 = \max$.

Помножив і розділив на τ_i отримаємо

$$q_{вих}^2 = \frac{u^2(\tau_i)}{\sigma_y^2} = \frac{U^2(1-e^{-\alpha\tau_i})^2}{\frac{\alpha N_0}{4}} = \frac{2U^2\tau_i}{N_0} \cdot \frac{2(1-e^{-\alpha\tau_i})^2}{\alpha\tau_i} = \frac{2U^2\tau_i}{N_0} \cdot K(\alpha\tau_i).$$

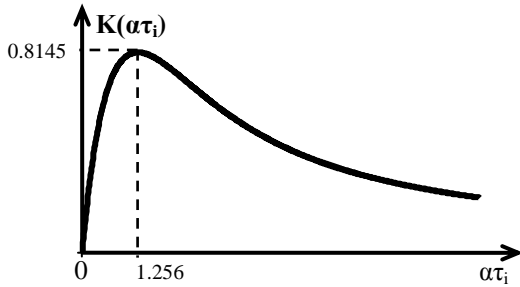


Рис. 13.6.

Графік $K(\alpha\tau_i)$ представлений на рис. 13.6.

Максимуму відповідає значення

$$\alpha\tau_i = 1.256. \quad \alpha = \frac{1.256}{\tau_i}.$$

Максимальне відношення сигнал/шум досягається у момент часу $t = t_0 = \tau_i$, при постійній часу кола $\tau_{кола} = RC = 0.8\tau_i$.

Розрахуємо відношення сигнал/шум по потужності на виході фільтра у момент часу $t_0 = \tau_i$. Для цього підставимо оптимальне значення $\alpha\tau_i = 1.256$. в вираз для q

$$q_{вих\,opt}^2 = \frac{2U^2\tau_i}{N_0} \cdot \frac{2(1-e^{-1.256})^2}{1.256} = \frac{2U^2\tau_i}{N_0} \cdot 0.8145.$$

Враховуючи, що $U^2\tau_i = E$.- енергія прямокутного відеоімпульсу отримаємо

$$q_{вих\,opt}^2 = \frac{2E}{N_0} \cdot 0.8145. \quad (13.2)$$

Таким чином розглянутий RC фільтр забезпечує приблизно $0.8q_{opt}^2$, де $q_{opt}^2 = \frac{2E}{N_0}$, як буде показано пізніше, максимальне значення відношення сигнал/шум оптимального (точніше узгодженого) фільтра. Тобто програш не перевищує 20%, що часто допустимо особливо враховуючи простоту реалізації такого фільтра.

14. ОПТИМАЛЬНІ ФІЛЬТРИ ПО КРИТЕРІЮ МАКСИМУМУ ВІДНОШЕННЯ СИГНАЛ\ШУМ.

В залежності від задачі, яка вирішується – виявлення сигналу, вимірювання його параметрів, або розпізнання та інших – критерії оптимальності можуть бути різними. Для задачі виявлення сигналів в шумах найбільше розповсюдження одержав критерій максимуму відношення сигнал/шум на виході фільтра.

Розглянемо задачу синтезу фільтра по цьому критерію.

14.1. Оптимальна фільтрація детермінованого сигналу на фоні білого шуму.

Нехай на вхід лінійного кола з постійними параметрами і частотною характеристикою $K(j\omega)$ діє адитивна суміш сигналу та шуму $X(t)=S_{\text{вх}}(t)+\eta_{\text{вх}}(t)$.

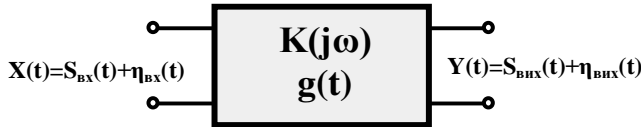


Рис. 14.1.

На виході фільтру буде відповідно $Y(t)=S_{\text{вих}}(t)+\eta_{\text{вих}}(t)$ (рис. 14.1).

Сигнал на вході повністю відомий. Це означає, що задані його форма і положення на осі часу (наприклад t_0). Шум уявляє собою

випадковий процес з заданими статистичними характеристиками.

Задача полягає в тому, що необхідно визначити комплексну частотну характеристику фільтра $K(j\omega)=K(\omega)e^{j\varphi_k(\omega)}$, яка забезпечує максимальне значення відношення сигнал/шум на виході фільтру.

Такий фільтр називають оптимальним або узгодженим фільтром по відношенню до відомого по формі сигналу.

При спектральному методі аналізу сигнал на виході у момент часу t_0 буде

$$S_{\text{вих}}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вих}}(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega.$$

$$S_{\text{вх}}(j\omega) = S_{\text{вх}}(\omega) e^{j\psi_s}, \quad K(j\omega) = K(\omega) e^{j\varphi_k}.$$

$$S_{\text{вих}}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(\omega) K(\omega) e^{j[\psi_s + \varphi_k + \omega t_0]} d\omega. \quad (14.1)$$

Окрім корисного сигналу на вході діє завада у вигляді білого шуму з енергетичним спектром $W_\eta(\omega) = W(\omega) = \frac{N_0}{2}$.

Середньоквадратичний рівень шуму на виході фільтра визначається по відомому співвідношенню

$$\sigma_{\text{вих}} = \sqrt{\sigma_{\text{вих}}^2} = \sqrt{R(0)} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_y(\omega) e^{j\omega \cdot 0} d\omega \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) K^2(\omega) d\omega \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} K^2(\omega) d\omega \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega \right]^{\frac{1}{2}}$$

Тоді відношення сигнал/шум на виході фільтру q у момент часу t_0 буде

$$q_{\text{вих}} = \frac{|S_{\text{вих}}(t_0)|}{\sigma_{\text{вих}}} = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(\omega) K(\omega) e^{j[\psi_s + \varphi_k + \omega t_0]} d\omega \right|}{\left[\frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (14.2)$$

Частотна характеристика оптимального фільтра може бути знайдена шляхом оптимізації отриманого виразу (14.2).

Скористаємося відомою з математики нерівністю Коші – Буняковського – Шварца

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) F_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |F_2(x)|^2 dx. \quad (14.3)$$

Ця нерівність обертається в рівність тільки у випадку

$$F_2(x) = c F_1^*(x). \quad (14.4)$$

У нашому випадку

$$F_1(x) = S_{\text{вх}}(\omega) e^{j\psi_s}, \quad F_2(x) = K(\omega) e^{j(\varphi_k + \omega t_0)}.$$

Тоді нерівність (14.3) можна записати у вигляді

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(\omega) K(\omega) e^{j[\psi_s + \varphi_k + \omega t_0]} d\omega \right| \leq \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}^2(\omega) d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega \right]^{\frac{1}{2}}.$$

З урахуванням цього співвідношення вираз для відношення сигнал/шум (14.2) може бути записаний у вигляді

$$q_{\text{вх}} = \frac{|S_{\text{вх}}(t_0)|}{\sigma_{\text{вх}}} = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(\omega) K(\omega) e^{j[\psi_s + \varphi_k + \omega t_0]} d\omega \right|}{\left[\frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega \right]^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}^2(\omega) d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega \right]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \left[\frac{2}{N_0} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}^2(\omega) d\omega \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Враховуючи, що

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}^2(\omega) d\omega.$$

можна записати

$$q \leq \sqrt{\frac{2E}{N_0}}. \quad (14.5)$$

Як слідує з виразу (14.4) отримана нерівність перетворюється в рівність при умові

$$K(\omega) e^{j(\varphi_k + \omega t_0)} = c S_{\text{вх}}^*(j\omega) = c S_{\text{вх}}(\omega) e^{-j\varphi_s(\omega)}.$$

або

$$K(\omega) e^{j\varphi_k} = c S_{\text{вх}}(\omega) e^{-j[\varphi_s(\omega) + \omega t_0]} = c S_{\text{вх}}^*(j\omega) e^{-j\omega t_0}.$$

Остаточно

$$K(j\omega) = c S_{\text{вх}}^*(j\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (14.6)$$

Функція $K(j\omega)$ (14.6), яка максимізує відношення сигнал/шум, узгоджена з спектральними характеристиками сигналу – амплітудною і фазовою. У зв'язку з цим такий оптимальний фільтр називають узгодженим.

Висновки:

1. АЧХ узгодженого фільтру повинна задовольняти умові

$$K_{onm}(\omega) = c S_{ax}(\omega).$$

2. ФЧХ узгодженого фільтру повинна задовольняти умові

$$\varphi_k(\omega) = -[\psi_s(\omega) + \omega t_0].$$

Ці умови мають глибокий фізичний зміст.

Перша умова говорить про те, що АЧХ фільтру повинна по своїй формі співпадати з АЧС сигналу. Це означає наступне. Фільтр пропускає складові шуму нерівномірно. Ослаблення шуму тим більше, чим менше модуль $S_{ax}(j\omega)$. Це приводить до суттєвого зменшення потужності шуму на виході фільтру. Ослаблення сигналу в цьому випадку буде мінімальним, так як зменшення $K(\omega)$ має місце тільки для спектральних складових сигналу дуже малого рівня. В результаті досягається послаблення шуму відносно сигналу.

Другу умову можна назвати **умовою компенсації початкових фаз** в спектрі сигналу. Це обумовлено тим, що фазовий зсув в фільтрі дорівнює $-\psi_s(\omega)$. В результаті проходження сигналу через фільтр відбувається компенсація початкових фаз сигналу.

$$S(j\omega) = S(j\omega) \cdot K(j\omega) = S_{ax}(\omega) e^{j\varphi_s(\omega)} \cdot c S_{ax}(\omega) e^{-j[\varphi_s(\omega) + \omega t_0]} = c S_{ax}^2(\omega) e^{-j\omega t_0}.$$

Тобто всі складові сигналу будуть в одній нульовій фазі. Це в свою чергу приведе до утворення піку сигналу в момент часу t_0 .

15. ІМПУЛЬСНА ХАРАКТЕРИСТИКА УЗГОДЖЕНОГО ФІЛЬТРУ. ПРИКЛАДИ РЕАЛІЗАЦІЇ УЗГОДЖЕНИХ ФІЛЬТРІВ.

15.1. Імпульсна характеристика узгодженого фільтру.

Той факт, що коефіцієнт передачі узгодженого фільтру $K_{onm}(j\omega)$ є функцією спряженою по відношенню до спектра сигналу $S_{ax}(j\omega)$ вказує на тісний зв'язок між часовими характеристиками фільтру та сигналу. Дійсно,

$$g_{onm}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{onm}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ax}^*(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega.$$

Врахуємо, що $S_{ax}^*(j\omega) = S_{ax}(-j\omega)$ і перейдемо до нової змінної $\omega_1 = -\omega$.

$$g_{onm}(t) = -\frac{c}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} S_{ax}(j\omega_1) e^{-j\omega_1(t-t_0)} d\omega_1 = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ax}(j\omega_1) e^{j\omega_1(t_0-t)} d\omega_1.$$

Права частина полученого виразу є ніщо інше, як функція $cS(t_0 - t)$, тобто

$$g_{onm}(t) = cS(t_0 - t). \quad (15.1)$$

Це означає, що імпульсна характеристика оптимального фільтру це дзеркальна копія сигналу (з точністю до С) зміщена вправо на t_0 (Рис. 15.1).

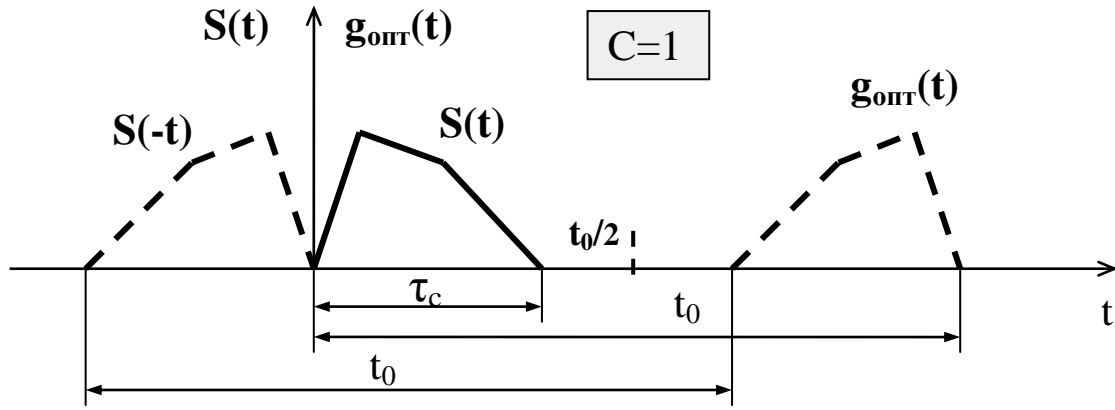


Рис. 15.1

Оскільки імпульсна характеристика оптимального фільтра не може починатися при $t < 0$ (відгук фільтра не може попереджувати дію $\delta(t)$), то очевидно, що затримка t_0 не може бути менше τ_c . Тільки при $t_0 \geq \tau_c$ може бути використана вся енергія сигналу для максимального піку у момент часу $t = t_0$.

15.2. Форма корисного сигналу на виході оптимального фільтра.

Знайдемо сигнал на виході оптимального фільтра при дії на вході тільки корисного сигналу. Шумів немає.

$$\begin{aligned}
 S_{\text{вих}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вих}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(j\omega) K_{\text{опт}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(j\omega) S_{\text{вх}}^*(j\omega) e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{\text{вх}}(j\omega)|^2 e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \\
 &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{s_{\text{вх}}}(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega.
 \end{aligned} \tag{15.2}$$

Енергетичний спектр вхідного сигналу $W_{s_{\text{вх}}}(\omega)$ і автокореляційна функція сигналу зв'язані формулами Вінера-Хінчина

$$R_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad W_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Тоді (15.2) можна записати у вигляді

$$S_{\text{вих}}(t) = c R_s(t - t_0). \tag{15.3}$$

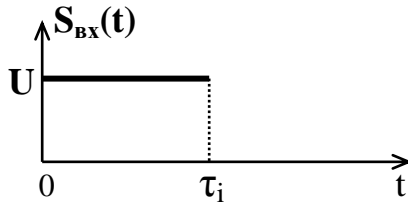
Визначимо максимальну амплітуду вихідного сигналу в момент часу $t = t_0$.

$$S_{\text{вих}}(t_0) = c R_s(0) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{\text{вх}}(j\omega)|^2 d\omega = c \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}^2(t) dt = c E.$$

Таким чином, максимальна амплітуда сигналу на виході оптимального фільтра визначається його енергією.

15.3. Узгоджений фільтр для прямокутного відеоімпульсу.

Синтезуємо оптимальний фільтр для прямокутного відео імпульсу з амплітудою U і тривалістю τ_i (Рис. 46.2).



$$S_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} U, & 0 \leq t \leq \tau_i; \\ 0, & t < 0, t > \tau_i. \end{cases}$$

Рис. 46.2

Спектральна щільність такого сигналу, як відомо, дорівнює

$$S_{\text{вх}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(t) e^{-j\omega t} dt = U \int_0^{\tau_i} e^{-j\omega t} dt = \frac{U}{j\omega} (1 - e^{-j\omega \tau_i}).$$

Знайдемо комплексну частотну характеристику оптимального фільтра при $t_0 = \tau_i$.

$$K_{\text{онм}}(j\omega) = c S_{\text{вх}}^*(j\omega) e^{-j\omega t_0} = \frac{cU}{-j\omega} (1 - e^{j\omega \tau_i}) e^{-j\omega \tau_i} = \frac{cU}{j\omega} (1 - e^{-j\omega \tau_i}).$$

У даному випадку $K_{\text{онм}}(j\omega)$ з точністю до постійного множника „ c ” співпадає з спектральною щільністю сигналу. Отже, імпульсна характеристика фільтра $g_{\text{онм}}(t)$ співпадає по формі з самим сигналом $S_{\text{вх}}(t)$. Тобто

$$g_{\text{онм}}(t) = c S(t_0 - t) = \begin{cases} cU, & 0 \leq t \leq \tau_i; \\ 0, & t < 0, t > \tau_i. \end{cases}$$

В подальшому задача зводиться до пошуку кола, яке має знайдені імпульсну і комплексну частотну характеристики.

У відповідності з виразом для КЧХ фільтра він повинен уявляти собою каскадне з'єднання трьох лінійних ланок:

1. Підсилювача з коефіцієнтом підсилення $K_1 = cU$.

2. Ідеального інтегратора з коефіцієнтом передачі $K_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$.

3. Пристрою з коефіцієнтом передачі $K_3(j\omega) = 1 - e^{-j\omega \tau_i}$. Останній пристрій реалізується з допомогою ланки затримки на час τ_i з передатною функцією $e^{-j\omega \tau_i}$, інвертора, який змінює знак сигналу, і суматора.

Структурна схема фільтра згідно з розглянутим має вигляд (Рис. 15.3).

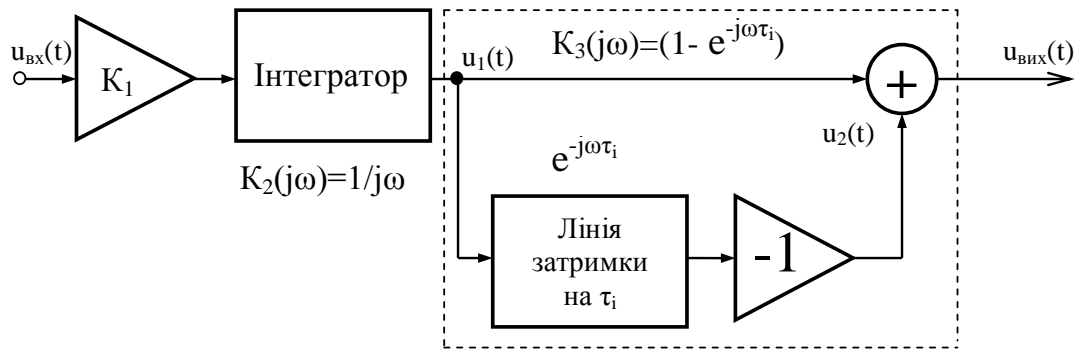


Рис. 15.3

На малюнку (рис. 15.4 а,б) представлені, відповідно, епюри імпульсних реакцій у характерних точках схеми та епюри відгуків на сигнал $S_{ax}(t)$. Малюнок побудований для випадку $c = \frac{1}{U}$, тобто $K_1 = 1$.

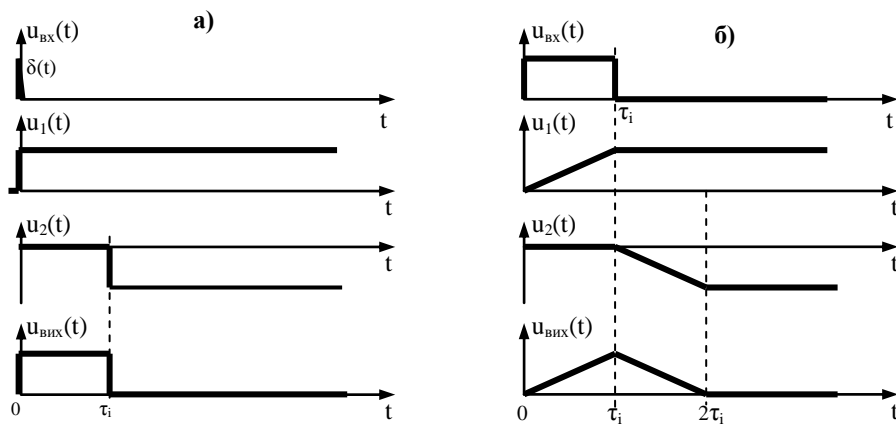


Рис. 15.4

Сигнал на виході узгодженого фільтра повторює по формі автокореляційну функцію прямокутного відеоімпульса. При цьому відношення сигнал/шум у момент часу $t_0 = \tau_i$ максимальне і дорівнює

$$q^2 = \frac{2E}{N_0} = \frac{2U^2 \tau_i}{N_0}.$$

15.4. Узгоджений фільтр для прямокутного радіоімпульсу.

Звичайно на радіоприймальні пристрої РЛС поступають радіоімпульсні сигнали. Часто узгоджену фільтрацію доцільно здійснювати у радіоканалі приймального пристрою на високій або проміжній частоті.

Розглянемо, якою повинна бути функціональна схема узгодженого фільтра для радіоімпульсу з прямокутною обвідною

$$u(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t, & 0 \leq t \leq \tau_i; \\ 0, & t > 0, \quad t < 0. \end{cases}$$

при умові, що на тривалості імпульсу вкладається ціле число періодів високочастотного коливання, тобто

$$\frac{\omega \tau_i}{2\pi} = f_0 \tau_i = \frac{\tau_i}{T} - \text{ціле число, наприклад, } \frac{\tau_i}{T} = 3.$$

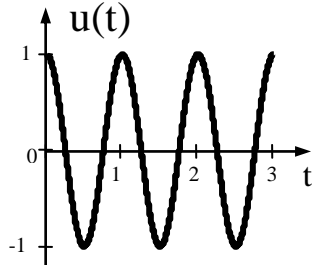


Рис. 15.5

Радіоімпульс є симетричним. Тобто, імпульсна характеристика, яка повинна представляти собою дзеркальне відображення радіоімпульсу, повинна мати вигляд самого радіоімпульсу (Рис. 15.6).

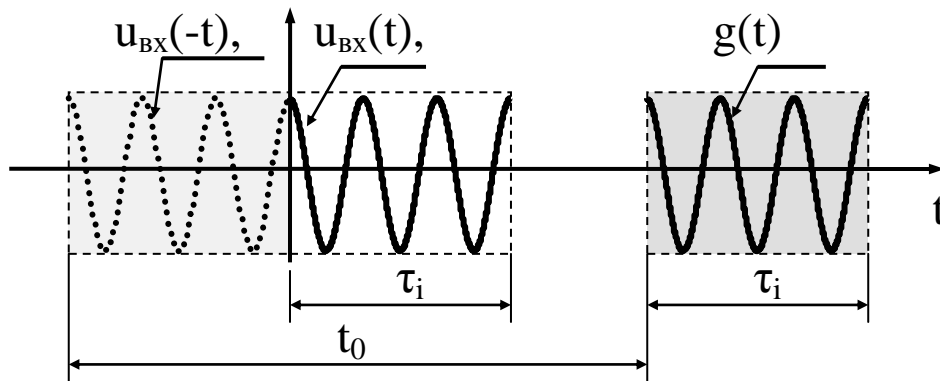


Рис. 15.6

Узгоджений фільтр з такою імпульсною характеристикою можна отримати у наступному пристрої (Рис. 15.7).

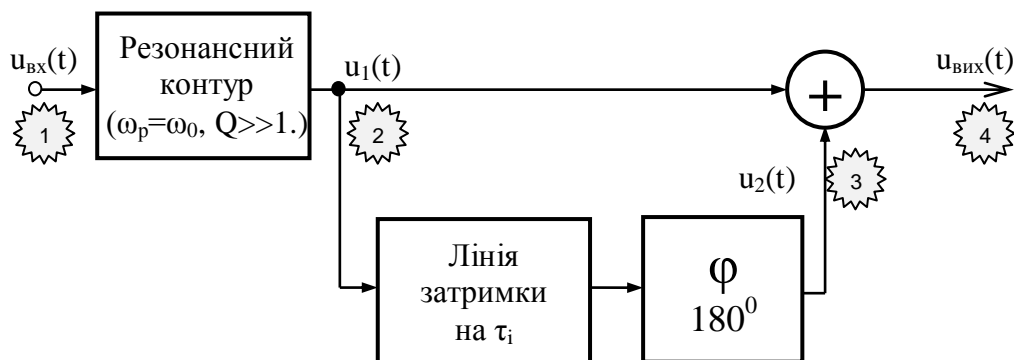


Рис. 15.7

Резонансна частота контура $\omega_p = \omega_0$. Лінія затримки затримує сигнал на величину τ_i .

Можна впевнитись, що при подачі на вхід пристрою δ -функції, він буде мати необхідну імпульсну характеристику (Рис. 15.8, а).

Графіки напруги у різних точках узгодженого фільтра при дії на вході прямокутного радіоімпульса з частотою ω_0 і тривалістю τ_i представлені на рис. 15.8, б.

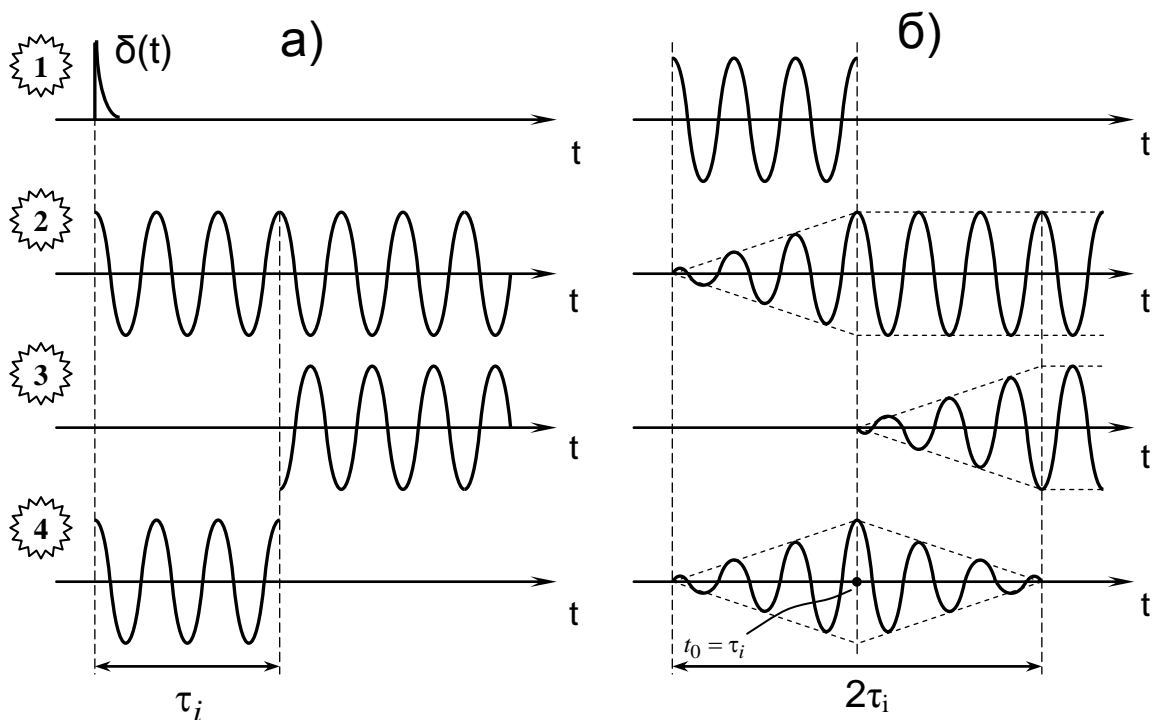


Рис. 15.8

Вихідний сигнал узгодженого фільтра повторює по формі автокореляційну функцію прямокутного радіоімпульса. У момент часу $t_0 = \tau_i$ напруга на виході максимальна і дорівнює

$$q^2 = \frac{2E}{N_0}.$$

Реалізувати на практиці такий фільтр важко, так як потрібно мати практично ідеальний коливальний контур ($Q \gg 1$) і виконати дуже строгі фазові співвідношення між затриманим та незатриманим сигналами на входах віднімаючого пристрою.

Тому на практиці замість узгодженого фільтра використовують квазиоптимальний фільтр. Він уявляє собою коливальний контур, який настроєний на частоту ω_0 з постійною часу $\tau_{\text{кола}} = 0.8\tau_i$ ($\Pi = \frac{0.4}{\tau_i}$). Програш

квазиоптимального фільтра по відношенню до узгодженого складає приблизно 1,2 рази, однак він набагато простіше в реалізації.

Сигнал на виході квазиоптимального фільтра має наступний вигляд (Рис. 15.9).

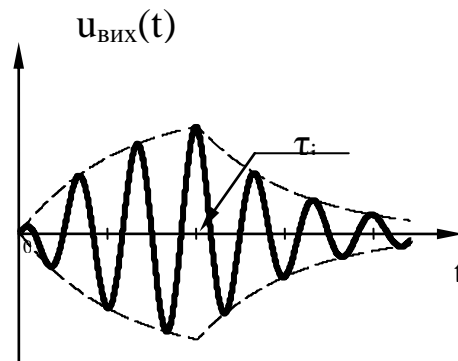


Рис. 15.9

ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ І СИГНАЛІВ У ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ ТА НЕЛІНІЙНИХ КОЛАХ.

16. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ЛІНІЙНИМИ ПАРАМЕТРИЧНИМИ КОЛАМИ.

16.1. Загальні відомості.

При аналізі лінійних перетворень випадкових процесів особливе місце займає задача про їх проходження через лінійні кола зі змінними параметрами (параметричні кола).

Як відомо, в якості параметричних елементів використовують параметричний опір $R(t)$, параметричну ємність $C(t)$ та параметричну індуктивність $L(t)$.

Прикладами лінійних параметричних кіл служать лінія затримки з керованим часом затримки, параметричний перетворювач частоти, підсилювач з змінним (керованим) коефіцієнтом підсилення і тому подібне.

Окрім того, при розповсюдженні сигналів умови розповсюдження радіохвиль виявляються непостійними і змінюються випадковим образом.

Для оцінки впливу каналу розповсюдження радіохвиль на спектральні та кореляційні характеристики сигналу на виході приймального пристрою канал розповсюдження представляють у вигляді чотириполюсника з змінним комплексним коефіцієнтом передачі $K(j\omega, t)$. Таким чином може бути охарактеризований будь який параметричний пристрій.

Оскільки коефіцієнт передачі параметричного кола змінюється у часі, в тому числі і випадковим образом, то вводять поняття коваріаційної функції передатної характеристики кола

$$K_k(t_1, t_2, \omega_1, \omega_2) = M[K(j\omega_1, t_1) K(j\omega_2, t_2)].$$

Якщо закон зміни флуктуаційної складової передатної характеристики є стаціонарним, то тоді

$$K_k(\omega, \tau) = M[K(j\omega, t) K(-j\omega, t + \tau)].$$

Залежність передатної характеристики від часу може бути і детермінованою функцією. Наприклад, амплітудний модулятор, параметричний перетворювач частоти, синхронний детектор та інші.

16.2. Коваріаційна функція та енергетичний спектр випадкового процесу на виході лінійного параметричного кола.

Розглянемо лінійне параметричне коло з комплексною передатною функцією $K(j\omega, t)$, яка залежить від частоти і часу (Рис. 16.1).

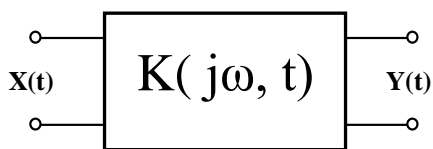


Рис. 16.1

На вхід кола поступає стаціонарний випадковий процес $X(t)$ з нульовим математичним сподіванням. Необхідно визначити коваріаційну функцію вихідного випадкового процесу $Y(t)$.

Нехай довільній усіченій реалізації вхідного випадкового процесу $X(t)$ відповідає спектральна щільність $S_x(j\omega)$, тобто

$$x(t) \div S_x(j\omega).$$

У відповідності з спектральним методом аналізу спектральна щільність на виході кола дорівнює

$$S_y(j\omega) = S_x(j\omega)K(j\omega, t).$$

Тоді згідно з зворотним перетворенням Фур'є реалізацію вихідного випадкового процесу можна записати у вигляді

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) K(j\omega, t) e^{j\omega t} d\omega.$$

Для зміщеного на τ випадкового процесу на виході у відповідності з теоремою зсуву отримаємо

$$y(t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) K(j\omega, t + \tau) e^{j\omega(t+\tau)} d\omega.$$

Так як комплексний коефіцієнт передачі кола $K(j\omega, t)$ залежить від часу, то вихідний випадковий процес буде нестационарним, незважаючи на те, що вхідний процес стаціонарний.

Тому коваріаційна функція вихідного випадкового процесу буде залежати не тільки від τ , але від обраного моменту часу t .

$$K_y(t, \tau) = M[y(t)y(t + \tau)] = M \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) K(j\omega, t) e^{j\omega t} d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega_1) K(j\omega_1, t + \tau) e^{j\omega_1(t+\tau)} d\omega_1 \right].$$

Інакше

$$K_y(t, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} M \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) S_x(j\omega_1) K(j\omega, t) K(j\omega_1, t + \tau) e^{j\omega t} e^{j\omega_1(t+\tau)} d\omega d\omega_1 \right].$$

Якщо закон зміни коефіцієнта передачі кола носить випадковий характер, то в коваріаційній функції необхідно провести усереднення не тільки по спектральним функціям, але і по коефіцієнту передачі.

Після не складних, але достатньо громіздких перетворень можна записати

$$K_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_k(\tau, \omega) W_x(\omega) e^{j\omega \tau} d\omega, \quad (16.1)$$

де $K_k(\tau, \omega)$ - коваріаційна функція передатної характеристики кола;

$W_x(\omega)$ - енергетичний спектр вхідного випадкового процесу.

Висновок: Коваріаційна функція випадкового процесу на виході параметричного кола, коефіцієнт передачі якого змінюється по випадковому закону, знаходиться як зворотне перетворення Фур'є добутку

енергетичного спектру вхідного випадкового процесу і коваріаційної функції передатної характеристики параметричного кола.

По відомій коваріаційній функції вихідного випадкового процесу можна знайти його енергетичний спектр по теоремі Вінера-Хінчина

$$W_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (16.2)$$

Якщо параметри кола не змінюються у часі, тобто коло не параметричне, то

$$K_k(\omega, \tau) = K_k(\omega) = K(j\omega)K(-j\omega) = K^2(\omega).$$

У цьому випадку вираз для коваріаційної функції вихідного випадкового процесу приймає вигляд

$$K_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \Big|_{m_x=0} = R_y(\tau).$$

Це співпадає з раніше отриманим результатом для лінійного кола з постійними параметрами.

Розглянемо випадок, коли комплексна передатна характеристика не залежить від частоти, тобто

$$K(j\omega, t) = K(t).$$

Це означає, що передатна характеристика змінюється тільки у часі по випадковому або детермінованому закону.

У цьому відповідно до виразу (16.1) получимо

$$K_y(\tau) = K_k(\tau) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = K_k(\tau) \cdot R_x(\tau).$$

Висновок: Якщо передатна характеристика параметричного кола не залежить від частоти, то коваріаційна функція вихідного випадкового процесу дорівнює добутку кореляційної функції вхідного процесу і коваріаційної функції передатної характеристики кола

$$K_y(\tau) = K_k(\tau) \cdot R_x(\tau). \quad (16.3)$$

16.3. Приклади.

16.3.1. Дія детермінованого сигналу на параметричне коло з випадковими параметрами.

На вхід лінійного параметричного кола діє детермінований сигнал

$$x(t) = \cos \omega_0 t.$$

Передатна характеристика параметричного кола

$$K(t) = K_0 + \Delta K(t),$$

де K_0 – середнє значення (математичне сподівання) передатної характеристики;

$\Delta K(t)$ – флуктуаційна складова, яка уявляє собою нормальний стаціонарний випадковий процес з дисперсією σ_x^2 і нульовим математичним сподіванням ($m_x = 0$).

Нехай

$$W_{\Delta k}(\omega) = \frac{2c}{a^2 + \omega^2}.$$

$$W_{K_0}(\omega) = K_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau = 2\pi K_0^2 \delta(\omega).$$

Тоді

$$W_K(\omega) = W_{K_0}(\omega) + W_{\Delta k}(\omega) = 2\pi K_0^2 \delta(\omega) + \frac{2c}{a^2 + \omega^2}.$$

В цьому випадку коваріаційна функція передатної характеристики кола буде

$$\begin{aligned} K_k(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_k(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi K_0^2 \delta(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2c}{a^2 + \omega^2} e^{j\omega\tau} d\omega = K_0^2 + \frac{c}{a} e^{-a|\tau|}. \end{aligned}$$

$$K_k(\tau) = K_0^2 + \frac{c}{a} e^{-a|\tau|}.$$

Визначимо коваріаційну функцію і енергетичний спектр вихідного випадкового процесу.

1. Визначимо кореляційну функцію вхідного детермінованого сигналу. Вона відома і дорівнює

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau.$$

2. Коваріаційна функція випадкового процесу на виході параметричного кола

$$K_y(\tau) = R_x(\tau) \cdot K_k(\tau) = \frac{1}{2} \left(K_0^2 + \frac{c}{a} e^{-a|\tau|} \right) \cos \omega_0 \tau.$$

3. Енергетичний спектр вихідного випадкового процесу

$$\begin{aligned} W_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(K_0^2 + \frac{c}{a} e^{-a|\tau|} \right) \cos \omega_0 \tau e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{4} K_0^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)\tau} d\tau \right\} + \frac{1}{4a} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|\tau|} e^{-j(\omega - \omega_0)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|\tau|} e^{-j(\omega + \omega_0)\tau} d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Остаточно

$$W_y(\omega) = \frac{\pi}{2} K_0^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{c}{2} \left[\frac{1}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right].$$

Графіки коваріаційної функції і енергетичного спектру вихідного випадкового процесу, які побудовані згідно отриманих результатів, представлені на рис. 16.2, 16.3.

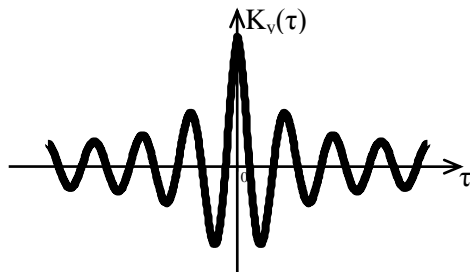


Рис. 16.2

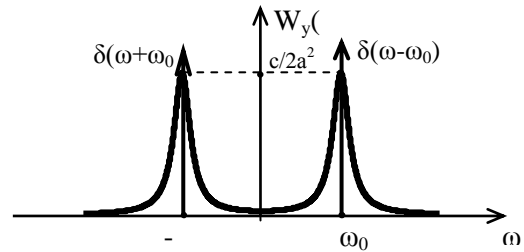


Рис. 16.3

В енергетичному спектрі вихідного випадкового процесу з'явилися очікуємі спектральні складові на частотах $\pm \omega_0$, які відповідають гармонічному сигналу.

Окрім того, в енергетичному спектрі вихідного випадкового процесу з'явилася шумова складова, яка обумовлена флуктуаціями коефіцієнта передачі кола відносно середнього значення K_0 .

16.3.2. Дія випадкового сигналу на параметричне коло з не випадковими параметрами.

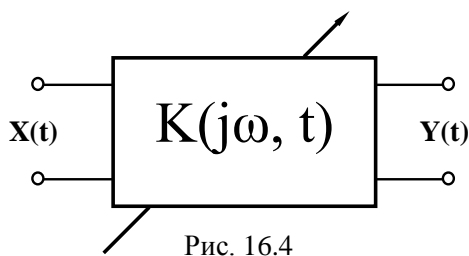


Рис. 16.4

На керуємий підсилювач діє випадковий сигнал $X(t)$ з кореляційною функцією $R_x(\tau)$ і нульовим математичним сподіванням (Рис. 16.4).

Частотна характеристика підсилювача описується виразом

$$K(j\omega, t) = K(t) = K_0(1 + M \cos \Omega t),$$

де $K_0 = \text{const}$, $M < 1$, $\Omega = \text{const}$.

Кореляційна функція вхідного сигналу $R_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $0 < \alpha < 1$.

Визначимо коваріаційну функцію і енергетичний спектр вихідного випадкового процесу.

1. Коваріаційна функція випадкового процесу на виході

$$K_y(\tau) = R_x(\tau) \cdot K_k(\tau).$$

$$\begin{aligned} K_k(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} K_0 [1 + M \cos \Omega t] K_0 [1 + M \cos(\Omega t + \Omega \tau)] dt = \\ &= \frac{K_0^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [1 + M \cos \Omega t + M \cos(\Omega t + \Omega \tau) + M^2 \cos \Omega t \cos(\Omega t + \Omega \tau)] dt = K_0^2 \left(1 + \frac{M^2}{2} \cos \Omega \tau \right). \end{aligned}$$

$$K_k(\tau) = K_0^2 \left(1 + \frac{M^2}{2} \cos \Omega \tau \right).$$

Тоді

$$K_y(\tau) = K_0^2 \left(1 + \frac{M^2}{2} \cos \Omega \tau \right) e^{-\alpha|\tau|}.$$

2. Енергетичний спектр випадкового процесу на виході параметричного кола

$$\begin{aligned} W_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = K_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau + \frac{K_0^2 M^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} \cos \Omega \tau e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= 2K_0^2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \omega \tau d\tau + \frac{K_0^2 M^2}{2} \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \Omega \tau \cos \omega \tau d\tau = \\ &= 2K_0^2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \omega \tau d\tau + \frac{K_0^2 M^2}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos(\omega_0 - \Omega) \tau d\tau + \frac{K_0^2 M^2}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos(\omega_0 + \Omega) \tau d\tau. \end{aligned}$$

Табличні інтеграли

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \cos bt = \frac{a}{(a^2 + b^2)}, \quad W_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \omega \tau d\tau = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Тоді

$$W_y(\omega) = \frac{2\alpha K_0^2}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{K_0^2 M^2}{2} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_0 - \Omega)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_0 + \Omega)^2} \right].$$

Графіки кореляційних функцій і енергетичних спектрів на вході і виході кола мають наступний вигляд (Рис. 16.5, 16.6).

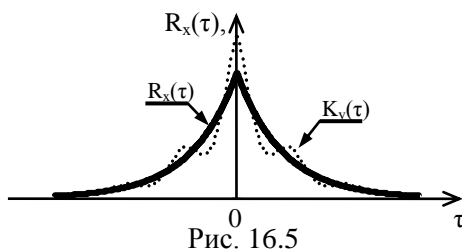


Рис. 16.5

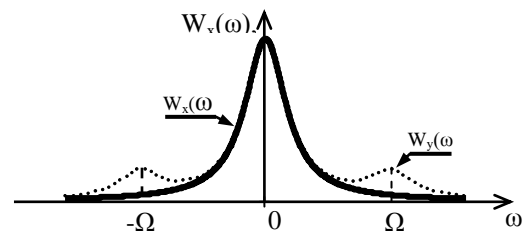


Рис. 16.6

7. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ В НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ.

17.1. Загальні відомості з нелінійних перетворень випадкових процесів.

Під нелінійними системами розуміють, наприклад, підсилювачі сигналів з великою амплітудою сигналів на вході, обмежувачі, детектори, та інші аналогічні пристрої, які знаходяться під дією сигналу і шуму.

Реальні нелінійні пристрої представляють собою поєднання нелінійного безінерційного елемента (транзистора, діода, електронної лампи та інше) з лінійними інерційними колами, які звичайно є інерційними.

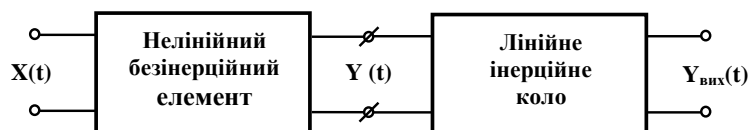
Повним вирішенням задачі проходження випадкових процесів через нелінійну систему було б визначення багатомірної щільності розподілу ймовірності на виході системи. Однак визначення багатомірного закону розподілу в багатьох випадках виявляється складним практично нерозв'язним завданням. Навіть при нормальному законі розподілу вхідного процесу задача вирішується далеко не завжди, так як при нелінійних перетвореннях вихідний процес перестає бути нормальним і для його опису потрібний більш ніж двомірний розподіл.

На жаль, якогось загального метода знаходження статистичних характеристик випадкового процесу на виході нелінійного пристрою не існує. Наприклад, для лінійних кіл порівняно просто визначити кореляційну функцію, енергетичний спектр, але дуже складно закон розподілу ймовірності.

В нелінійних безінерційних елементах дуже важко визначити кореляційну функцію.

Тому аналіз перетворення випадкових процесів нелінійними системами можна провести лиш в деяких окремих випадках.

При цьому спочатку знаходять характеристики на виході нелінійного безінерційного елемента, а потім розглядають проходження полученого випадкового процесу через лінійне коло.



Розглянемо вирішення першої частини задачі, тобто задачу проходження випадкового процесу через нелінійний безінерційний елемент.

17.2. Щільність розподілу ймовірностей випадкового процесу на виході нелінійного безінерційного елемента.

Нехай стаціонарний випадковий процес $X(t)$, миттєві значення реалізацій якого у довільний момент часу утворюють випадкову величину X , діє на нелінійний безінерційний елемент (Рис. 17.1).

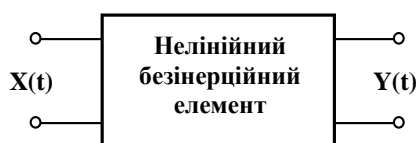


Рис. 417.1

Щільність розподілу випадкової величини X будемо рахувати відомою $f(x)$.

На виході нелінійного елемента виникає випадковий процес $Y(t)$, миттєві значення якого

в той же момент часу утворюють випадкову величину Y .

Необхідно визначити щільність розподілу ймовірності випадкової величини Y , тобто $f(y)$.

Нехай, наприклад, характеристика нелінійного елемента, яка визначає залежність між випадковими величинами X та Y , має вигляд (Рис. 17.2).

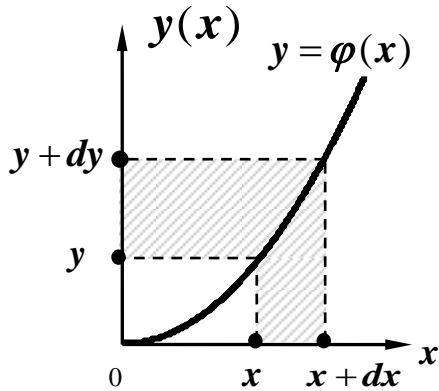


Рис. 17.2

Цю нелінійну залежність можна записати у загальному вигляді $y = \varphi(x)$.

З графіка видно, що якщо випадкова величина X попадає в інтервал $x \div x + dx$, то випадкова величина Y попадає в інтервал $y + dy$.

Ймовірності цих подій дорівнюють відповідно $f(x)dx$ та $f(y)dy$. Оскільки ці ймовірності однакові, то

$$f(x)dx = f(y)dy.$$

Звідки

$$f(y) = f(x) \frac{dx}{dy}.$$

З урахуванням невід'ємності $f(x)$ і $f(y)$ можна записати

$$f(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|. \quad (17.1)$$

В цьому виразі аргумент x повинен бути виражений через зворотну функцію від y , тобто $x = \psi(y)$.

$$f(y) = f[\psi(y)] \left| \frac{d[\psi(y)]}{dy} \right|. \quad (17.2)$$

Характеристики нелінійного елемента можуть мати і інший вигляд, наприклад, (Рис. 17.3).

В цьому випадку одному значенню y будуть відповідати два значення x : x_1 і x_2 (Рис. 17.4).

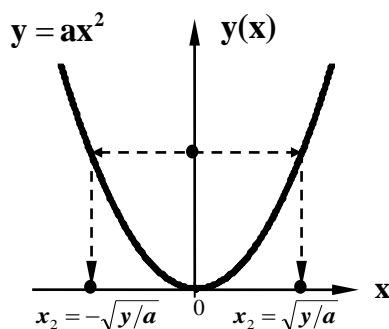


Рис. 17.3

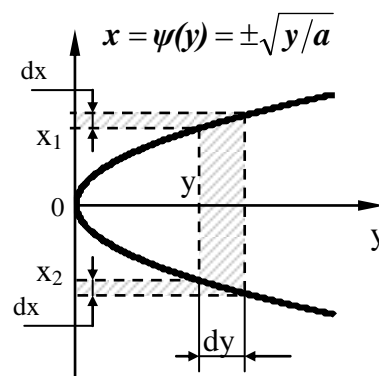


Рис. 17.4

Тому в більш загальному випадку

$$f(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|_{x=x_1} + f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|_{x=x_2} + \dots \quad (17.3)$$

Якщо характеристика $y = \varphi(x)$ постійна на деякому інтервалі x , то вираз (17.3) потрібно доповнити складовим з дельта функцією, яка враховує перебування x вище (або нижче) заданого рівня (Рис. 17.5).

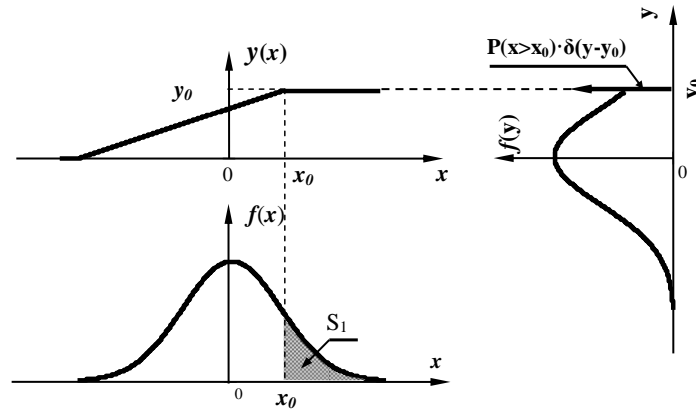


Рис. 17.5

Тобто

$$f(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|_{x=x_1} + f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|_{x=x_2} + \dots + P(x > x_0) \cdot \delta(y - y_0) + \dots, \quad (17.4)$$

де $P(x > x_0) = P(y_0) = S_1$.

17.3. Приклад.

Пояснимо знаходження $f(y)$ на практичному прикладі. Обмежемося випадком, коли $f(x)$ відповідає нормальному закону розподілу.

Нехай Гаусовський випадковий процес $X(t)$ діє на нелінійний елемент з квадратичною характеристикою $y = ax^2$. (Рис. 17.6).

Таку характеристику можна реалізувати, наприклад, з допомогою двотактного включення двох діодів з квадратичними вольтамперними характеристиками (Рис. 17.7).

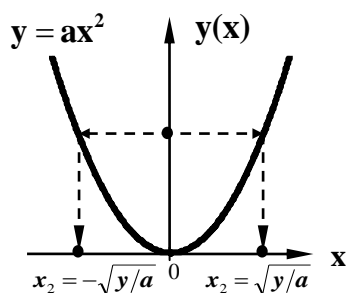


Рис.17.6

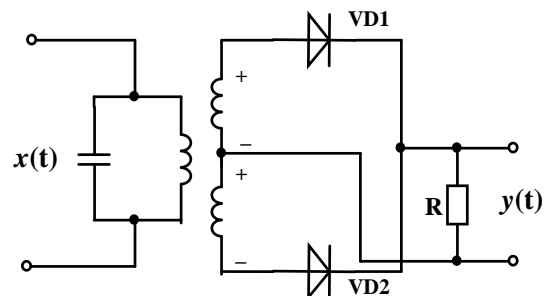


Рис. 17.7

При позитивній полярності випадкової напруги $X(t)$ випадковий струм $I(t) = Y(t)$ проходить через верхній діод, при негативній – через нижній.

Визначимо щільність розподілу $f(y)$ струму через резистор R .

Так як кожному значення y відповідає два значення x , то скористаємось виразом (17.3).

Спочатку визначимо зворотну функцію $y = ax^2 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{y}{a}}$. $y \geq 0$

Тоді

$$\left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[\left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{ay}}.$$

Отже, при $y \geq 0$

$$f(y) = f_x\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{ay}} + f_x\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{ay}} = \frac{1}{2\sqrt{ay}} \left[f_x\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) + f_x\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right) \right].$$

Щільність розподілу ймовірності випадкової величини X

$$f_x(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{x_{1,2}^2}{2\sigma_x^2}} \Bigg|_{x_1, x_2 = \pm \sqrt{\frac{y}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{y}{2a\sigma_x^2}}.$$

Після підстановки в вираз для щільності ймовірності $f(y)$ і при врахуванні того, що $f_x(x_1) = f_x(x_2)$, отримаємо

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi a y \sigma_x}} e^{-\frac{y}{2a\sigma_x^2}}, & y \geq 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases} \quad (17.5)$$

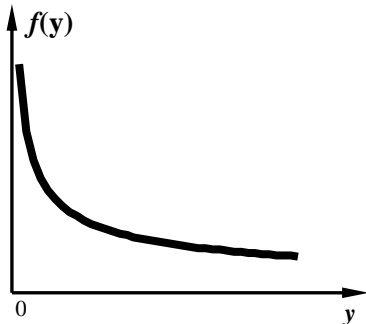


Рис. 17.8

Графік щільності розподілу випадкової величини y $f(y)$ має наступний вигляд (Рис. 17.8).

Відмітемо, що при $y=0$ щільність розподілу y $[f(y)]$ прагне до безмежності. Це означає, що найбільш ймовірне значення струму y дорівнюють нулю.

17.4. Визначення статистичних характеристик випадкового процесу на виході нелінійного безінерційного елемента.

Середнє значення випадкового процесу, який отримано в результаті нелінійних перетворень можна знайти двома еквівалентними методами.

Перший

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy.$$

Другий

Врахуємо, що $y = \varphi(x)$.

Тоді

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx.$$

В результаті нелінійного перетворення змінюється і середнє значення. Зокрема можливий випадок, коли при $m_x = 0$, $m_y \neq 0$.

Середній квадрат випадкового процесу $Y(t)$ можна також вичислити двома способами.

$$M[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y) dy.$$

$$M[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) f(x) dx.$$

Дисперсія випадкового процесу $Y(t)$ може бути знайдена по співвідношенню

$$\sigma_y^2 = M[Y^2(t)] - m_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y) dy - \left[\int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy \right]^2,$$

або

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) f(x) dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx \right]^2.$$

Коваріаційна функція може бути знайдена при відомій двовірній щільності розподілу ймовірності.

Для стаціонарного випадкового процесу

$$K_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1) \varphi(x_2) f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2,$$

де x_1 і x_2 значення вхідного випадкового процесу, які розділені інтервалом часу τ .

Кореляційна функція

$$R_y(\tau) = K_y(\tau) - m_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1) \varphi(x_2) f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 - \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx \right]^2.$$

Навіть для простіших нелінійних функцій розрахунок коваріаційної і кореляційної функцій пов'язано зі значими труднощами.

Для прикладу визначимо (без проміжних розрахунків) коваріаційну функцію випадкового процесу, який виникає в результаті нелінійного перетворення типу $y = ax^2 = \varphi(x)$ гаусівського стаціонарного випадкового процесу $X(t)$.

Його двовірній щільності розподілу ймовірності має вигляд

$$f(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-\rho^2(\tau)}} \cdot \exp \left\{ -\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \rho(\tau)}{2\sigma_x^2 [1-\rho^2(\tau)]} \right\},$$

де

$$\varphi(x_1) = ax_1^2, \quad \varphi(x_2) = ax_2^2.$$

У відповідності з раніше розглянутим можна записати

$$\begin{aligned} K_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1)\varphi(x_2)f(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a^2 x_1^2 x_2^2 \cdot \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-\rho^2(\tau)}} \cdot \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\rho(\tau)}{2\sigma_x^2[1-\rho^2(\tau)]}\right\} dx_1dx_2. \end{aligned}$$

В результаті досить громіздких обчислень можна записати

$$K_y(\tau) = a^2 \sigma_x^4 + 2a^2 R_x^2(\tau),$$

де $R_x(\tau)$ – кореляційна функція вхідного випадкового процесу.

Енергетичний спектр вихідного випадкового процесу розраховується по співвідношенню

$$\begin{aligned} W_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = a^2 \sigma_x^4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}d\tau + 2a^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x^2(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \\ &= 2\pi a^2 \sigma_x^4 \delta(\omega) + 2a^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x^2(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \end{aligned}$$

Звичайно в радіотехнічних пристроях перед нелінійним елементом знаходяться вузько смугові вибіркові кола. Тому випадковий процес на їх виходах стає вузькосмуговим.

Кореляційна функція гаусівського вузькосмугового випадкового процесу, як було показано раніше, дорівнює

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 \rho_0(\tau) \cos \omega_0 \tau.$$

Тоді

$$R_x^2(\tau) = \sigma_x^4 \rho_0^2(\tau) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 \tau \right].$$

Підставимо у вираз для раніше знайденої коваріаційної функції випадкового процесу після нелінійного перетворення і отримаємо

$$K_y(\tau) = a^2 \sigma_x^4 + a^2 \sigma_x^4 \rho_0^2(\tau) + a^2 \sigma_x^4 \rho_0^2(\tau) \cos 2\omega_0 \tau.$$

По коваріаційній функції вихідного випадкового процесу можна знайти енергетичний спектр

$$\begin{aligned} W_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = a^2 \sigma_x^4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}d\tau + a^2 \sigma_x^4 \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0^2(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau + \\ &+ a^2 \sigma_x^4 \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0^2(\tau) \cos 2\omega_0 \tau e^{-j\omega\tau}d\tau = 2\pi a^2 \sigma_x^4 \delta(\omega) + W_{nc}(\omega) + W_{\omega c}(\omega). \end{aligned}$$

Перша складова спектру відповідає постійній складовій вихідного випадкового процесу (квадрату дисперсії), друга – його низькочастотній флуктуаційній складовій, яка з точністю до постійного коефіцієнта дорівнює квадрату кореляційної функції вхідного випадкового процесу, і третя – високочастотній флуктуаційній складовій зі спектром, який зосереджений поблизу частоти $2\omega_0$.

У загальному випадку при дії вузькосмугового випадкового процесу енергетичний спектр на виході нелінійного елементу буде мати вигляд (Рис. 17.9).

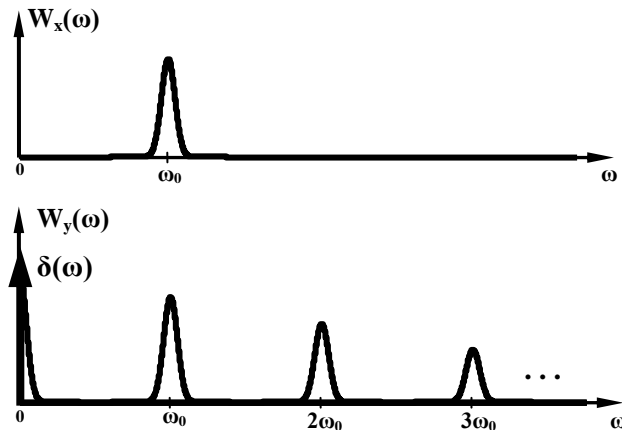


Рис. 17.9

В залежності від виду характеристики нелінійного елементу тих чи інших складових в спектрі вихідного сигналу може не бути.

18. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ У ПРОСТИХ НЕЛІНІЙНИХ ПРИСТРОЯХ.

18.1. Проходження вузькосмугового Гаусовського шуму через квадратичний амплітудний детектор.

Принципова схема амплітудного детектора, як відомо, має наступний вигляд (Рис. 18.1).

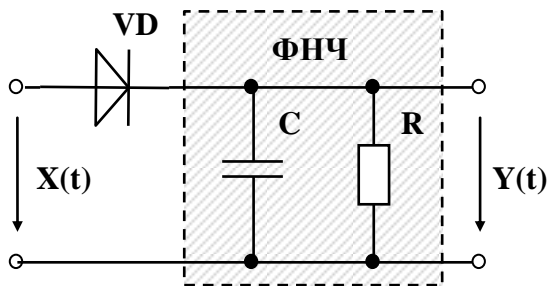


Рис. 18.1

Амплітудний детектор уявляє собою поєднання безінерційного нелінійного елемента (діода) і інерційного лінійного кола фільтра низьких частот (ФНЧ).

Нехай входною дією є вузькосмуговий гаусівський шум $X(t)$, який створюється вузькосмуговими

резонансними колами, що стоять до детектора.

Як відомо, вузькосмуговий гаусівський шум уявляє собою гармонічне коливання з амплітудою і фазою, які змінюються по випадковому закону

$$X(t) = U(t)[\cos \omega_0 t + \Theta(t)],$$

де $U(t)$ і $\Theta(t)$ – повільні функції часу з Релеївським та рівномірним законами розподілу відповідно.

Необхідно знайти статистичні характеристики вихідного випадкового процесу $Y(t)$.

Методи, які були розглянуті раніше, в принципі дозволяють знайти закон розподілу і кореляційною функцією шуму на виході діода (струм діода), а потім на виході фільтра. Однак така процедура потребує дуже громіздких обчислень.

Задачу можна суттєво спростити, якщо скористатися особливостями роботи амплітудного детектора.

Оскільки детектор квадратичний, то його вольтамперну характеристику необхідно апроксимувати характеристикою виду

$$I = a_2 X^2, \quad X \geq 0.$$

Після підстановки $X(t)$ отримаємо

$$I(t) = a_2 \frac{U^2(t)}{2} + a_2 \frac{U^2(t)}{2} \cos\{2[\cos \omega_0 t + \Theta(t)]\}.$$

Друга складова з частотою $2\omega_0$ відфільтровується (придушується) ФНЧ. Падіння напруги на виході створює перша складова струму.

Тому для вихідного випадкового процесу $Y(t)$ можна записати

$$Y(t) = a_2 R \frac{U^2(t)}{2} = k \frac{U^2(t)}{2}.$$

Щільність розподілу ймовірності миттєвих значень обвідної вхідного випадкового процесу $U(t)$ має закон Релея, тобто

$$f(u) = \frac{u}{\sigma_x^2} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Знайдемо щільність розподілу ймовірності випадкової величини Y вихідного випадкового процесу $Y(t)$.

$$f(y) = f(u) \left| \frac{du}{dy} \right|.$$

$$y = k \frac{u^2}{2} \rightarrow u = \sqrt{\frac{2y}{k}} = \sqrt{\frac{2}{k}} y^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді

$$\left| \frac{du}{dy} \right| = \sqrt{\frac{2}{k}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2ky}}.$$

Отже

$$f(y) = \frac{\sqrt{\frac{2y}{k}}}{\sigma_x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2ky}} e^{-\frac{2y}{k 2\sigma_x^2}} = \frac{1}{k\sigma_x^2} e^{-\frac{y}{k\sigma_x^2}}.$$

Тобто

$$f(y) = \frac{1}{k\sigma_x^2} e^{-\frac{y}{k\sigma_x^2}}.$$

Графік цієї залежності має наступний вигляд (Рис. 18.2)

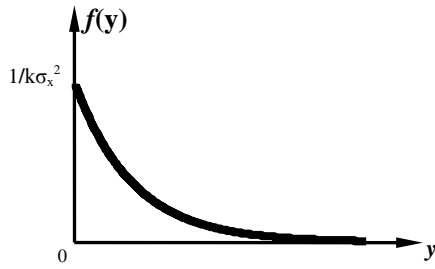


Рис. 18.2

Таким чином, щільність ймовірності вихідного випадкового процесу має експоненціальний закон розподілу.

Розрахуємо **середнє значення (математичне сподівання)** вихідного випадкового процесу

$$m_y = M[y(t)] = \int_0^{\infty} y f(y) dy = \frac{1}{k\sigma_x^2} \underbrace{\int_0^{\infty} y e^{-\frac{y}{k\sigma_x^2}} dy}_{k^2 \sigma_x^4} = k\sigma_x^2.$$

Середній квадрат вихідного випадкового процесу

$$M[y^2(t)] = \int_0^{\infty} y^2 f(y) dy = \frac{1}{k\sigma_x^2} \underbrace{\int_0^{\infty} y^2 e^{-\frac{y}{k\sigma_x^2}} dy}_{2(k\sigma_x^2)^3} = 2k^2 \sigma_x^4.$$

Дисперсія шуму на виході

$$\sigma_y^2 = M[y^2(t)] - m_y^2 = 2k^2 \sigma_x^4 - k^2 \sigma_x^4 = k^2 \sigma_x^4.$$

Визначимо **енергетичний спектр** сигналу на виході.

Нехай енергетичний спектр вхідного вузькосмугового гаусовського шуму є відомим

$$W_x(\omega) = \frac{N_0}{2} e^{-\alpha(\omega+\omega_0)^2} + \frac{N_0}{2} e^{-\alpha(\omega-\omega_0)^2}, \quad \alpha = \frac{2L}{R}.$$

Графік такого спектру має вигляд (Рис. 18.3)

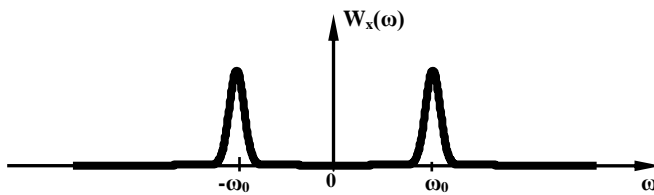


Рис. 18.3

Енергетичний спектр повторює по формі АЧХ вибіркового кола, яке знаходиться перед

квадратичним детектором.

Тоді у відповідності з теоремою Вінера–Хінчина для кореляційної функції вхідного випадкового процесу отримаємо

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha(\omega-\omega_0)^2} \cos \omega\tau d\omega.$$

Зробимо заміну змінних

$$\omega - \omega_0 = \Omega \rightarrow \omega = \omega_0 + \Omega \rightarrow d\omega = d\Omega.$$

Така зміна означає зміщення спектра шуму з частоти $\omega = \omega_0$ на частоту $\omega = 0$.

Тоді

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &= \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\Omega^2} \cos(\omega_0 + \Omega)\tau d\Omega = \\
 &= \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\Omega^2} [\cos \omega_0 \tau \cos \Omega \tau - \sin \omega_0 \tau \sin \Omega \tau] d\Omega = \\
 &= \frac{N_0}{2\pi} \cos \omega_0 \tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\Omega^2} \cos \Omega \tau d\Omega = \frac{N_0}{\pi} \cos \omega_0 \tau \int_0^{\infty} e^{-\alpha\Omega^2} \cos \Omega \tau d\Omega.
 \end{aligned}$$

Отриманий інтеграл є табличним

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} \cos mx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\frac{m^2}{4\alpha^2}}.$$

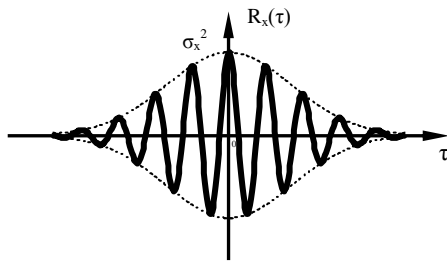
Отже

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{\tau^2}{4\alpha}} \cos \omega_0 \tau = \frac{N_0}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{\tau^2}{4\alpha}} \cos \omega_0 \tau.$$

Або

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\frac{\tau^2}{4\alpha}} \cos \omega_0 \tau, \quad \sigma_x^2 = \frac{N_0}{2\sqrt{\pi\alpha}}.$$

Графік отриманої кореляційної функції має вигляд



Коваріаційна функція випадкового процесу в результаті квадратичного перетворення була отримана раніше у вигляді

$$K_y(\tau) = a_2^2 \sigma_x^4 + 2a_2^2 R_x^2(\tau).$$

Отже, коваріаційна функція випадкового струму через діод буде

$$K_i(\tau) = a_2^2 \sigma_x^4 + 2a_2^2 \sigma_x^4 e^{-\frac{\tau^2}{2\alpha}} \cos^2 \omega_0 \tau.$$

Енергетичний спектр випадкового струму через діод згідно з теоремою Вінера–Хінчина буде

$$\begin{aligned}
 W_i(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_i(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = a_2^2 \sigma_x^4 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau}_{2\pi\delta(\omega)} + 2a_2^2 \sigma_x^4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2\alpha}} \cos^2 \omega_0 \tau e^{-j\omega\tau} d\tau = \\
 &= a_2^2 \sigma_x^4 \cdot 2\pi\delta(\omega) + 2a_2^2 \sigma_x^4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2\alpha}} \cos^2 \omega_0 \tau e^{-j\omega\tau} d\tau.
 \end{aligned}$$

Інтеграл у отриманому виразі для спектру дорівнює

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2\alpha}} \cos^2 \omega_0 \tau \cos \omega \tau d\tau &= 2a_2^2 \sigma_x^4 \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2\alpha}} \cos \omega \tau d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2\alpha}} \cos 2\omega_0 \tau \cos \omega \tau d\tau \right] = \\
 &= \sqrt{2\pi\alpha} \cdot a_2^2 \sigma_x^4 \left[e^{-\frac{\alpha}{2}\omega^2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}(\omega+2\omega_0)^2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}(\omega-2\omega_0)^2} \right].
 \end{aligned}$$

Остаточно

$$W_i(\omega) = 2\pi a_2^2 \sigma_x^4 \cdot 2\delta(\omega) + \sqrt{2\pi\alpha} \cdot a_2^2 \sigma_x^4 \left[e^{-\frac{\alpha}{2}\omega^2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{\alpha}{2}(\omega+2\omega_0)^2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{\alpha}{2}(\omega-2\omega_0)^2} \right].$$

Графік енергетичного спектра випадкового струму через діод має вигляд (Рис. 18.4)

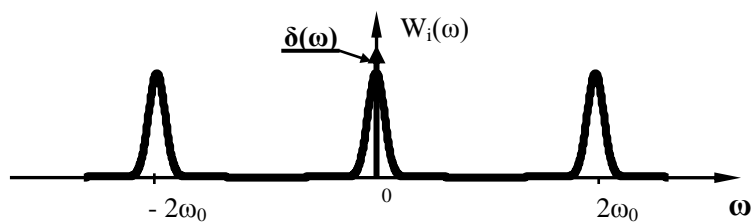


Рис. 18.4

Падіння напруги на резисторі R фільтра нижніх частот (ФНЧ) створюють тільки складові струму поблизу частоти $\omega = 0$.

Отже для енергетичного спектра випадкового процесу на виході квадратичного детектора можна записати

$$W_y(\omega) = 2\pi R \cdot a_2^2 \sigma_x^4 \cdot \delta(\omega) + \sqrt{2\pi\alpha} \cdot R \cdot a_2^2 \sigma_x^4 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}\omega^2}.$$

Графік енергетичного спектра випадкового процесу на виході квадратичного детектора має вигляд (Рис. 18.5)

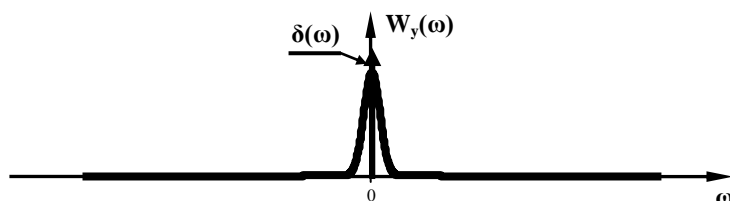


Рис. 18.5

ЛІТЕРАТУРА

1. Колесник А. Б., Руженцев В. И. Электрорадиотехнические цепи и сигналы: Конспект лекций, ч. III. – Харьков: ВИРТА, 1980.
2. Белов Е. Н., Костин Г. А., Фролов С. Н. Электрорадиотехнические цепи и сигналы: Учебные задачи, ч. 2. – Х.: ВИРТА, 1983.
3. Детерміновані сигнали та їх перетворення у радіотехнічних колах: Навчальний посібник/ Е. А. Горюшкін, Б. Д. Деріпалов, В. Д. Карлов, О. П. Кондратенко, В. А. Степаненко. – Х.: ХВУ, 2004.
4. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 1988.
5. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь, 1986.
6. Радиотехнические цепи и сигналы/ Под ред. К. А. Самойло. – М.: Радио и связь, 1982.
7. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. – М.: Сов. радио, 1966.
8. Филиппский Ю. К. Случайные сигналы в радиотехнике. – К.: Вища школа, 1986.
9. Купер Дж., Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. – М.: Мир, 1989.
10. Примеры и задачи по статистической радиотехнике/ В. Т. Горяинов, А. Г. Журавлев, В. И. Тихонов/ Под ред. В. И. Тихонова. – М.: Сов. радио, 1970.

Навчальне видання

Степаненко Віктор Андрійович

СИГНАЛИ ТА ПРОЦЕСИ В РАДІОТЕХНІЦІ

ВИПАДКОВІ СИГНАЛИ ТА ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ У РАДІОТЕХНІЧНИХ КОЛАХ

Конспект лекцій

Редактор Л. М. Шевченко
Техн. редактор Т. В. Василенко
Коректор Н. К. Гур'єва

Підписано до друку 2016. Формат 60x84 ¹/₁₆
Друк ризографічний. Ум.-друк. арк. 5,57.
Тираж 50 пр. Зам. № .

Видавець і виготівник
Харківський університет Повітряних Сил.
61023 Харків – 23, вул. Сумська, 77/79.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 2535 від 22. 06. 2006