Лекція 5. Потужність множин

5.1. Визначення потужності

Поняття потужності множин зв'язано з оцінкою кількості елементів у них. У скінченій множині кількість елементів можна перерахувати. Кількість елементів у множині A позначається як |A|. Наприклад, якщо A={a,b,c}, то |A|=3. Якщо дві множини мають однакову кількість елементів, то між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність. Тоді всі скінчені множини, які мають однакову кількість елементів, будуть еквівалентні по кількості елементів у них і визначають один клас еквівалентності. Цей клас еквівалентності може бути позначений натуральним числом, яке визначає кількість елементів у множині. Всі одноелементі множини утворюють один клас еквівалентності, двоелементі – другий і так далі. Кожному натуральному числу відповідає клас еквівалентності, який об'єднує всі скінчені множини із кількістю елементів, що дорівнює даному числу.

Розглянемо тепер нескінчені множини. Для деяких нескінчених множин також можна встановити взаємно однозначну відповідність елементів. Наприклад, для множини парних натуральних чисел, яке можна представити у вигляді списку: {2,4,6,…}, послідовність (1,2,3…) буде нумерацією цього списку, тобто існує відображення $f(n) = 2n$, для кожного $n \in N$ множини натуральних чисел N у множину усіх парних додатних чисел, яке є бієкцією. Відповідно, множина всіх парних натуральних чисел еквівалентна множині всіх натуральних чисел, тобто парних чисел рівно стільки скільки усіх натуральних чисел. Але, з іншого боку, множину натуральних чисел можна розбити на дві підмножини парних та непарних чисел, тобто парних чисел рівно половина із усіх натуральних чисел! Отримуємо, що в деякому сенсі *частина дорівнює цілому*. І це дійсно так. Можна показати, що існує бієкція із множини натуральних чисел на будь-яку її нескінчену підмножину. Дійсно, нехай $P \subset N$. Оберемо в P найменший елемент і позначимо його x_1; видалимо цей елемент із P і найменший елемент із усіх, що залишились, позначимо як x_2. Продовжуючи цей процес, ми привласнимо номер кожному елементу із P. Ця нумерація є бієкція $N \to P$: $n \to x_n$, де x_n є (n+1)-й елемент P за порядком зростання. Таким чином, множина непарних чисел, множина квадратів натуральних чисел і множина будь-яких лінійних комбінацій, наприклад, ax+b, де $a,b \in N$, будуть еквівалентні між собою і ввійдуть у один клас еквівалентності.

Означення 5.1. Відношення еквівалентності, яке визначається взаємно однозначною відповідністю двох множин, називається **рівнопотужністю**, а клас еквівалентності рівнопотужних множин називається **потужністю** цих множин.

Потужність множини A позначається *card*A. Кількість елементів скінченої множини також називається потужністю, тоді *card*A=|A|. Для рівнопотужних множин часто використовується позначення A~B.

5.2. Кардинальні числа

Порівняння нескінченних множин можливе завдяки властивостям функціональних відображень. Із визначення ін'єкції слідує, що ін'єкція із множини A у множину B можлива тільки в тому випадку, коли кількість елементів у A не більше кількості елементів у B: $|A| \le |B|$ (для скінчених множин). До того ж, якщо не існує ін'єкція із B у A, то ця нерівність перетворюється у строгу нерівність $|A| < |B|$. Якщо ж існує ін'єкція із B у A, яка може не співпадати із оберненим відображенням для ін'єкції $A \to B$, то це можливо тільки тоді, коли кількість елементів у них співпадає, тобто |A|=|B|. А в цьому випадку можна знайти і взаємно однозначне відображення між A та B, тобто бієкцію.

Аналогічно, якщо існує сюр'єкція із A на B така, що один образ у B має декілька прообразів у A, то кількість елементів у A строго більше кількості елементів у B, тобто $|A| > |B|$.

Ці властивості узагальнюються для випадку нескінченних множин наступною теоремою.

<u>Теорема 5.1</u> (Кантора-Бернштейна) (без доведення).

Нехай A та B – дві довільні нескінченні множини. Тоді:

а) або існує ін'єкція із A в B, або існує ін'єкція із B в A (одно не виключає інше),

б) якщо існують ін'єкції $A \to B$ та $B \to A$, то існує біекція із A в B.

Іншими словами, якщо множина A рівнопотужна деякій підмножині множини B, а множина B рівнопотужна деякій підмножині множини A, то A та B рівнопотужні.

Ця теорема має наступні наслідки.

1) Якщо існує ін'єкція $A \to B$, але не існує ін'єкція $B \to A$, то множина B має потужність, яка строго більша потужності A: $card\mathrm{B} > card\mathrm{A}$.

2) Якщо існує ін'єкція $B \to A$, але не існує ін'єкція $A \to B$, то множина B має потужність, яка строго менша потужності A: $card\mathrm{B} < card\mathrm{A}$.

3) Якщо існує біекція із A в B, то множини A та B рівнопотужні: $card\mathrm{B} = card\mathrm{A}$.

<u>Означення 5.2.</u> Клас еквівалентності рівнопотужних множин називається **потужністю**, або **кардинальним числом**.

Класи еквівалентності рівнопотужних скінчених множин є скінченими кардинальними числами. Ці числа за означенням є натуральними числами, які відповідають кількості елементів у кожній множині. Потужність порожньої множини дорівнює нулю: $card\varnothing = 0$.

<u>Означення 5.3.</u> Потужність нескінченої множини називається **трансфінітним кардинальним числом**, або просто **трансфінітним числом**.

Таким чином, множина кардинальних чисел – це фактор-множина рівнопотужних множин, яке являє собою об'єднання множин натуральних та трансфінітних чисел.

5.3. Злічені множини

<u>Означення 5.4.</u> Потужність зліченої множини називається потужність множини натуральних чисел N. **Зліченою** називається всяка множина A, рівнопотужна множині натуральних чисел N. Потужність зліченої множини позначається кардинальним трансфінітним числом $\aleph_0$ (читається: *алеф-нуль*).

Зліченість множини A позначає, що існує принаймні одна така біекція із A на N (але це не означає, що така біекція задана). Інакше злічену множину можна визначити як множину, елементи якої можна розташувати у вигляді списку (навіть, якщо цей список буде нескінченним). Тоді кожному елементу множини можна поставити у відповідність його порядковий номер у цьому списку, тобто може бути побудоване відображення із N в A $f(n)$: $N \to A$, де $n \in N$. Таке відображення називається **нумерацією**. Очевидно, що пронумерувати можна будь-яку скінчену множину. Множина A скінчена або злічена тоді і тільки тоді, коли існує ін'єкція A в N, або, якщо $A \neq \varnothing$, тоді і тільки тоді, коли існує сюр'єкція N на A.

Наприклад, множина всіх парних натуральних чисел A та множина натуральних чисел N рівнопотужні, так як існує ін'єкція $A \to N$ і сюр'єкція $N \to A$.

<u>Теорема 5.2.</u> Множина додатних раціональних чисел Q^+ злічена.

Доведення. Будь-яке раціональне число можна представити у вигляді дробу m/n, де m, n – натуральні числа, $n \neq 0$. Запишемо раціональні числа у вигляді таблиці:

1/1	2/1	3/1	4/1	...
1/2	2/2	3/2	4/2	...
1/3	2/3	3/3	4/3	...
...	...	...	...	...

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
...	...	...	...	...

Права таблиця задає нумерацію елементів лівої таблиці (стрілки вказують напрямок нумерації). Тоді ми можемо виписати елементи лівої таблиці (множину раціональних додатних чисел) у вигляді списку, в якому кожному елементу відповідає натуральне число:

1/1	2/1	2/2	1/2	3/1	3/2	3/3	2/3	1/3	4/1	4/2	4/3	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...

Отриманий перелік доводить зліченість множини додатних раціональних чисел. ►

Можна помітити, що раціональні числа входять у цей перелік із повторами: наприклад, 1/1=2/2=3/3=...=1. Проте неважко скласти ефективну процедуру викреслення чисел, які повторюються, із цього переліку.

Аналогічно можна довести, що множина цілих чисел Z, множина всіх раціональних чисел (і додатних, і від'ємних) є зліченими.

Теорема 5.3. Потужність зліченої множини $\aleph_0$ є найменшим трансфінітним кардинальним числом. Це позначає, що будь-яка нескінчена множина A має принаймні одну злічену частину (тобто злічену підмножину).

Доведення. Припустимо, що для деякої нескінченої множини A відношення $card\mathrm{A}>\aleph_0$ не виконується, тобто $card\mathrm{A}\le\aleph_0$. Це означає, по теоремі Кантора-Бернштейна, що існує ін'єкція $\mathrm{A}\to\mathrm{N}$, тобто в N існує нескінченна частина P, така що між A та P існує біекція. Але між множиною N і його нескінченою частиною P також існує біекція. Відображення $n\to x_n$, де x_n є (n+1)-й за порядком зростання елемент P, визначає біекцію N на P. Тобто отримали, що $card\mathrm{A}=\aleph_0$. ►

Якщо існує сюр'єкція $\mathrm{A}\to\mathrm{B}$, то $card\mathrm{B}\le card\mathrm{A}$. Дійсно, прообраз кожної точки B не порожній, і якщо у кожному із прообразів обрати по одному елементу, то отримуємо деяку частину A, рівнопотужну B. Звідси та за теоремою 5.3 слідує, що у класі кардинальних чисел існує відношення порядку: якщо α є кардинальним числом деякої підмножини множини потужності β, то $\alpha\le\beta$.

Неважко показати (для скінчених множин це просто, а для нескінчених це слідує із теореми Кантора-Бернштейна), що це відношення рефлексивне, антисиметричне та транзитивне. Відповідно воно дійсно є відношенням порядку. Із теореми Кантора-Бернштейна також слідує, що це відношення є відношенням лінійного порядку, тобто будь-які два кардинальних числа зрівнянні.

На множині кардинальних чисел можна визначити операції додавання, добутку та піднесення у степінь.

1. **Додавання**. Нехай α та β кардинальні числа, а множини A та B мають відповідно потужності $card\mathrm{A}=\alpha$ та $card\mathrm{B}=\beta$. Тоді $\alpha+\beta$ - сума потужностей A та B, - це потужність будь-якої множини, яке дозволяє розбиття на два класи еквівалентності, рвінопотужні A та B відповідно. Іншими словами, якщо множини A та B не перетинаються, то потужність їх об'єднання дорівнює $\alpha+\beta$.

2. **Добуток**. Через $\alpha\cdot\beta$ позначається потужність декартового добутку $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$. Іншими словами, добуток $\alpha\cdot\beta$ - це кардинальне число об'єднання α частин, які не перетинаються та кожна з яких має потужність β.

3. **Піднесення у степінь**. Через α^β позначається потужність множини A^B, тобто потужність множини усіх функціональних відображень із B в A: $card(\mathrm{B}\to\mathrm{A}) = card(\mathrm{A}^\mathrm{B}) = card\mathrm{A}^{card\mathrm{B}}$.

Теорема 5.4. Для будь-якого скінченого числа $m\ge1$ виконується рівності:

$$m\cdot\aleph_0 = \aleph_0 \text{ та } \aleph_0^{\,m} = \aleph_0.$$

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції. Покажемо спочатку, що $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$ рівнопотужне N, тобто $\aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0$ (базис індукції).

Елементи декартового добутку $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$ можна виписати у вигляді таблиці:

$$\begin{array}{ccccc}
(0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) & \ldots \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) & \ldots \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots \\
(3,0) & (3,1) & (3,2) & (3,3) & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Введемо діагональну нумерацію. Отримаємо послідовність (0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2),…. Ця послідовність визначає біекцію N на $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$. Відповідно, N еквівалентно $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$, тобто $\aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0 = \aleph_0^{\,2}$.

Припустимо тепер, що $\aleph_0^{\,m-1} = \aleph_0$, і покажемо, що тоді $\aleph_0^{\,m} = \aleph_0$.

За припущенням індукції декартовий добуток $\aleph_0^{m-1}$ злічений. Тоді, відповідно базису індукції, декартовий добуток двох злічених множин $N^{m-1}\times N = N^m$ також злічений, тобто $\aleph_0^m= =\aleph_0$. ►

Наслідок теореми 5.4. Об'єднання скінченої або зліченої кількості скінчених або злічених підмножин множини A скінчене або злічене.

Доведення. Нехай I – деяка частина N ($I\subset N$) і A_i ($i\in I$) – деякі підмножини A, і для будь-якого i $A_i\neq\varnothing$ (але, якщо $A_i=\varnothing$, то це нічого не змінить, так як якщо $A_i=\varnothing$, то об'єднання не зміниться). Нехай f_i – сюр'єкція N на A_i. Тоді відображення $(i,n)\rightarrow f_i(n)$ буде сюр'єкцією $I\times N$ на $\bigcup_{i\in I} A_i$. Оскільки $I\times N$ злічена, то $\bigcup_{i\in I} A_i$ скінчене або злічене. ►

Теорема 5.5. Якщо A – нескінчена множина, а B скінчене або злічене, то $A\cup B \sim A$ (рівнопотужні), тобто $card(A\cup B) = card A$.

Доведення. Нехай A_1 – злічена підмножина множини A. Об'єднання зліченої та скінченої множин злічене, об'єднання злічених множин також злічене, тому $A_1\cup B \sim A_1$. Множина $A\cup B$ не зміниться, якщо з неї видалити, а потім додати підмножину A_1. Тоді $A\cup B= = (A\backslash A_1) \cup(A_1\cup B)$. Оскільки $A_1\cup B \sim A_1$, то $(A\backslash A_1) \cup(A_1\cup B) \sim (A\backslash A_1) \cup A_1$. Але $(A\backslash A_1) \cup A_1 = A$, тож маємо, що $A\cup B \sim A$. ►

Наслідок цієї теореми полягає в тому, що множина, утворена внаслідок вилучення з нескінченої множини елементів зліченої, рівнопотужна початковій.

Теорема 5.6 (без доведення). Якщо α та β - кардинальні числа, такі що $\alpha\neq 0$ та $\beta\neq 0$, і якщо принаймні одне з них є трансфінітним, то сума $\alpha+\beta$ та добуток $\alpha\cdot\beta$ дорівнюють найбільшому з них, тобто $\alpha+\beta = \max\{\alpha,\beta\}$, $\alpha\cdot\beta = \max\{\alpha,\beta\}$.

Наприклад, визначимо потужність множини всіх скінчених послідовностей натуральних чисел. Множина одноелементних послідовностей – це множина N, всі двоелементні послідовності утворюють декартовий добуток $N\times N$, триелементні – N^3, k-елементні – N^k і так далі. Яке б велике число k ми б не взяли, для нього існує число k+1 і, відповідно, існує послідовність довжиною k+1. Тому процес побудови послідовностей направлений у нескінченність. В результаті отримуємо, що множина всіх скінчених послідовностей є $A=N\cup N^2\cup N^3\cup\ldots\cup N^k\cup\ldots$, тобто це об'єднання зліченої кількості злічених підмножин множини A. Оскільки $card N = \aleph_0$, $card N^2 = \aleph_0^2,\ldots$, $card N^k = \aleph_0^k,\ldots$, то потужність цієї множини визначається виразом $card A = \aleph_0 + \aleph_0^2 + \aleph_0^3 + \ldots + \aleph_0^k + \ldots = \aleph_0$.

5.4. Незлічені множини

Теорема 5.7. Якою б не була множина A, множина її підмножин має потужність, яка строго більша потужності A.

Ця теорема показує, що послідовність трансфінітних кардинальних чисел не обмежена.

Доведення. Припустимо, що існує сюр'єкція f: $A\rightarrow P(A)$, тобто сюр'єкція f множини A на множину її підмножин P(A). Тоді для $x\in A$ $f(x)$ є елементом P(A), тобто деякою підмножиною A. Позначимо через B підмножину A, яка утворена з таких $x\in A$, що $x\notin f(x)$. Так як $B\in P(A)$, то в A існує принаймні один елемент y такий, що $f(y)=B$. Якщо $y\in f(y)=B$, то, за визначенням множини B, $y\notin B$, що неможливо. Якщо $y\notin f(y)=B$, то $y\in B$. В обох випадках ми приходимо до протиріччя.

Однак, оскільки існує ін'єкція A в P(A), а саме $x\rightarrow\{x\}$, то A має потужність, яка менша за потужність P(A), а, значить, і строго менша потужності P(A). ►

Теорема 5.8. Якщо множина A нескінчена, то множина P'(A) скінчених підмножин A рівнопотужна множині A.

Цю теорему легко довести, проводячи міркування аналогічно тим, які наведені у прикладі про потужність всіх скінчених послідовностей натуральних чисел.

Означення 5.5. **Характеристичною функцією** деякої підмножини B множини A називається функція φ_B, яка визначена на A та приймає значенні в множині {0,1}, така, що $\varphi_B(x)=1$, якщо $x\in B$, та $\varphi_B(x)=0$, якщо $x\notin B$.

Визначення цієї функції однозначно визначає підмножину (частину) B множини A. Тоді кожній підмножині буде відповідати характеристичний вектор, якій містить 0 та 1. Наприклад, якщо A={a,b,c}, то підмножині B={a,c} буде відповідати вектор φ_B=(1,0,1), підмножині B={b} – вектор φ_B=(0,1,0) і т.д.

Характеристична функція φ(x) задає множину відображень $\varphi: A\to\{0,1\}$, тобто $\{0,1\}^A$. Тоді існує бієкція множини-степені P(A) множини A на множину відображень $\varphi: A\to\{0,1\}$. Дійсно, кожній підмножині B множини A ($B\in P(A)$) можна поставити у відповідність один і тільки один вектор φ_B. Так само, кожному вектору φ_B можна знайти відповідну підмножину B множини A. Отже множини P(A) та $\{0,1\}^A$ рівнопотужні, тобто кардинальне число множини P(A) є $card\{0,1\}^E = 2^{card E}$.

Тепер теорему 5.7 можна сформулювати наступним чином. Яким би не було кардинальне число α, $2^\alpha>\alpha$.

Так, $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Звідси випливає, що існують незлічені множини.

Ми показали, що множина всіх скінчених послідовностей натуральних чисел злічена. Можна довести, що множина всіх нескінчених послідовностей натуральних чисел є незліченою. Ця множина є нічим іншим, як множиною всіх відображень $\varphi: N\to\{0,1\}$, тобто $\{0,1\}^N$, і потужність цієї множини дорівнює $2^{\aleph_0}$. Але множину всіх нескінчених послідовностей натуральних чисел можна також інтерпретувати як множину всіх функцій, визначених на N і приймаючих значення в N, тобто як множину функціональних відображень $f(n)$: N→N, тобто N^N, відповідно, потужність цієї множини є $\aleph_0^{\aleph_0}$. Оскільки ці дві множини рівнопотужні, то отримуємо, що $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

<u>Теорема 5.9</u> (Кантора). Множина дійсних чисел з інтервалу (0,1) незлічена.

Доведення. Для доведення скористаємось діагональним методом Кантора. Будемо представляти будь-яке число з інтервалу (0,1) у вигляді нескінченого десяткового дробу. Скінчені дроби також можна представити у такому вигляді, наприклад, число 0,5 може бути записано як 0,49999...

Припустимо, що множина цих чисел злічена. Тоді їх можна записати у вигляді списку. Побудуємо цей список і запишемо його у вигляді таблиці, де представлені десяткові частини чисел:

	1	2	3	…	k	…
a_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1k}	…
a_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2k}	…
a_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{3k}	…
…	…	…	…	…	…	…
a_k	a_{k1}	a_{k2}	a_{k3}	…	a_{kk}	…
…	…	…	…	…	…	…

Утворимо тепер нескінчене антидіагональне число $b = b_1b_2\ldots b_k\ldots$ за правилом: i-й розряд числа b_i буде дорівнювати $1+a_{ii}$, якщо $a_{ii}\neq 9$ і 8 (або будь-якому іншому числу, відмінному від 9), якщо $a_{ii}=9$. Якщо множина чисел з (0,1) злічена, то побудоване число b повинно увійти у цей список з яким-небудь номером, наприклад, з номером k: $b=a_k$. Але тоді $b_1 = a_{k1} = a_{11}+1$, $b_2 = a_{k2} = a_{22}+1,\ldots$, $b_k = a_{kk} = a_{kk}+1$, що неможливо. Відповідно, множина дійсних чисел з інтервалу (0,1) незлічена. ►

<u>Означення 5.6.</u> Потужність множини (0,1) називається **потужністю континууму**. Потужність континууму позначається $\aleph_1$ (алеф-один).

Потужність континуума – це потужність множини дійсних чисел R, тобто $card R = \aleph_1$, тому що існує бієкція (0,1)→R.

Наприклад, множина всіх точок R^n з раціональними або алгебраїчними координатами злічена, тому що її кардинальне число дорівнює $\aleph_0^n = \aleph_0$, а множина всіх точок R^n з дійсними координатами незлічена і дорівнює континууму.

<u>Теорема 5.10.</u> Мають місце рівності:

$$m\cdot\aleph_1 = \aleph_0\cdot\aleph_1 = \aleph_1\cdot\aleph_1 = \aleph_1{}^m = \aleph_1{}^{\aleph_0} = \aleph_1, \text{ де } m\geq 1 \text{ – ціле.}$$

Доведення. Всі ці кардинальні числа не більше $\aleph_1{}^{\aleph_0}$ і не менше $\aleph_1$, тому достатньо показати, що $\aleph_1{}^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Дійсно, $\aleph_1{}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0{}^2} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Але треба довести, що $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Якщо взяти числа з A = (0,1), такі, що в їх зображенні присутні числа 0,1,2,...,7, то ця множина буде рівнопотужна множині $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}^N$, відповідно, її потужність дорівнює $8^{\aleph_0}$. Сама множина A має потужність $\leq 10^{\aleph_0}$ (ми пишемо ≤ через подвійність запису десяткового числа). Тому $8^{\aleph_0} \leq card\text{A} \leq 10^{\aleph_0}$, звідки $2^{\aleph_0} \leq card\text{A} \leq 16^{\aleph_0} = (2^4)^{\aleph_0} = 2^{4\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Відповідно $card\text{A} = 2^{\aleph_0}$. З іншого боку, $card\text{A} = \aleph_1$. Отже $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. ►

Наприклад, множина комплексних чисел має потужність континуум, через те що вона рівнопотужна R^2: $\aleph_1{}^2 = \aleph_1$. Будь-який векторний простір скінченого числа вимірів n над полем дійсних чисел або комплексних чисел має потужність континуум.

Множина всіх дійсних функцій дійсних змінних має потужність, яка є строго більшою за потужність континуума, тому що її потужність дорівнює $\aleph_1{}^{\aleph_1}$, а $\aleph_1{}^{\aleph_1} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0\aleph_1} = 2^{\aleph_1} > \aleph_1$.

5.5. Континуум-гіпотеза

При дослідженні потужностей нескінчених множин був встановлений той факт, що множина кардинальних чисел є лінійно впорядкованою. Лінійна впорядкованість означає, що для кожного кардинального числа існує кардинальне число, яке безпосередньо слідує за ним. $\aleph_0$ є найменшим трансфінітним числом. Але нічого невідомо про те, яке трансфінітне число є наступним за $\aleph_0$. Існує тільки припущення, яке називається континуум-гіпотезою.

Континуум-гіпотеза. Кардинальне число $2^{\aleph_0}$ безпосередньо слідує за $\aleph_0$.

Це означає, що $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ і між ними немає жодного іншого кардинального числа. Цей факт потребує доведення. Ми нічого не знаємо про множини, які незлічені, але менші ніж континуальні. Не знаємо навіть, чи існують такі множини. Відсутність прикладів подібних множин не є доведенням неможливості їх існування, тому твердження про безпосереднє слідування $2^{\aleph_0}$ за $\aleph_0$ є гіпотезою, а не теоремою.

Можна піти далі і сформулювати більш загальне твердження.

Узагальнення континуум-гіпотези. Для будь-якого кардинального числа α кардинальне число 2^{α} безпосередньо слідує за α. Звідси слідує, що послідовність кардинальних чисел необмежена: $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \ldots$

Дійсно, $2^{\aleph_0}$ є потужність множини-степені P(N) (замість N може бути будь-яка інша нескінчена множина). Але з цієї множини можна утворити знову множину всіх її підмножин P(P(N)), потужність якої є $2^{2^{\aleph_0}}$, і цей процес можна продовжувати до нескінченності. Звідси слідує, що не існує найбільшого трансфінітного числа.

Намагання довести континуум-гіпотезу в якості теореми були безуспішні, а у 1963 році Коен довів, що континуум-гіпотеза нерозв’язана – її неможливо ні довести, ні спростувати, можна тільки прийняти її або протилежне їй твердження в якості аксіоми.