МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и кибернетики
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УТВЕРЖДАЮ
Декан ФПМК
А.М. Горцев
25 мая 2014 г.

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Часть 2. Марковские процессы

Учебно-методическое пособие для студентов ФПМК

Томск
2014

РАССМОТРЕНО И ОДОБРЕНО методической комиссией факультета прикладной математики и кибернетики

Председатель комиссии
д-р физ.-мат. наук, профессор А.Г. Дмитренко

Методические пособие предназначено для оказания помощи студентам при выполнении практических заданий курса «Теория случайных процессов». Предложены в большом количестве разнообразные задачи с разобранными решениями, а также задачи для самостоятельной работы по каждой теме. Приведены необходимые сведения из теории случайных процессов. Методическое пособие составлено так, чтобы студент смог выполнить задания, не обращаясь к дополнительной литературе.

Для студентов 3-го курса ФПМК, изучающих курс «Теория вероятностей и случайные процессы».

Составитель –
С.П. Моисеева, канд. техн. наук, доцент

СОДЕРЖАНИЕ

Марковские процессы

Марковские процессы, или процессы без последействия, являются удобной математической моделью для многих реальных процессов. Представим себе систему, которая может находится в различных состояниях, и пусть её функционирование во времени носит стохастический характер, то есть состояния системы в момент времени t в общем случае не определяется однозначно её состояниями в предыдущие моменты $s < t$. Следовательно процесс изменения во времени состояний этой системы можно описать некоторым случайным процессом $\xi(t)$, заданным на интервале $[0, T]$ и принимающим значения из множества *X*.

Пусть в моменты времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ заданы сечения $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$ случайного процесса $\xi(t)$. Для момента времени $t_{n+1} > t_n$ рассмотрим сечение $\xi(t_{n+1})$ и условную функцию распределения

$$P\left\{\xi(t_{n+1}) < x_{n+1} \middle| \xi(t_n) = x_n, ..., \xi(t_1) = x_1\right\} = \frac{P\left\{\xi(t_{n+1}) < x_{n+1}, \xi(t_n) = x_n, ...\xi(t_1) = x_1\right\}}{P\left\{\xi(t_n) = x_n, ..., \xi(t_1) = x_1\right\}}.$$

Определение. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если выполняется равенство

$$P\left\{\xi(t_{n+1}) < x_{n+1} \middle| \xi(t_n) = x_n, \ldots, \xi(t_1) = x_1\right\} = P\left\{\xi(t_{n+1}) < x_{n+1} \middle| \xi(t_n) = x_n\right\},$$

то есть его условная функция распределения вероятностей значений $\xi(t_{n+1})$ в будущий момент времени t_{n-1} не зависит от значений процесса в прошлые моменты $t_1, \ldots t_{n-1}$, а определяется лишь значением $\xi(t_n) = x_n$ в настоящий момент времени t_n.

Условная функция распределения

$$P\left\{\xi(t_{n+1}) < x_{n+1} \middle| \xi(t_n) = x_n\right\} = F(x_n, t_n; x_{n+1}, t_{n+1})$$

называется *марковской переходной функцией*.

Все марковские процессы можно разделить на классы в зависимости от структуры множества *X* – значений случайного процесса $\xi(t)$, и множества моментов времени наблюдения *T*. Если множество *X* – дискретное, то процесс $\xi(t)$ называется цепью Маркова.

При этом если *T* – дискретное, то процесс называется цепью Маркова с дискретным временем, а если *T* – непрерывное, то процесс называется цепью Маркова с непрерывным временем.

Если оба множества *X* и *T* непрерывные, то процесс называется непрерывным марковским процессом.

Цепи Маркова с дискретным временем

Пусть случайный процесс $\xi(t)$ изменения во времени состояний некоторой системы принимает целочисленные значения $i = 1, 2\ldots$ из множества X конечного или счетного, то есть $\xi(t) = i$, $\xi(t') = j$. Переходы из одного состояния в другое происходят через равные промежутки времени $|t' - t| = 1$, которые будем называть шагом.

Условные вероятности $P\{\xi(t+1) = j | \xi(t) = i\} = p_{ij}(t)$, для всех $i, j \in X$ образуют матрицу вероятностей переходов цепи Маркова из одного состояния в другое в момент времени t.

Если вероятности переходов не зависят от момента времени t, то есть $p_{ij}(t) = p_{ij}$, то цепь Маркова называется **однородной** с матрицей вероятностей переходов за один шаг

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

где *n* – число состояний системы (число возможных значений цепи Маркова) – конечное или счетное. Элементы матрицы $p_{ij} \geq 0$ и удовлетворяют условию нормировки

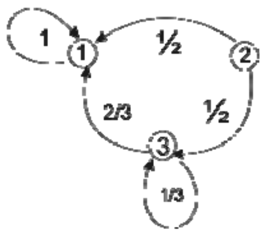
$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \ \forall\ i = 1,2,\ldots n.$$

Такую матрицу называют **стохастической** или **марковской**.

Для описания цепи Маркова удобно использовать **граф вероятностей переходов**, вершины которого обозначают возможные состояния системы, стрелки от одной вершины к другой указывают возможные переходы между состояниями, а число над стрелкой задаёт вероятность такого перехода. Например, пусть множество состояний $X = \{1,2,3\}$, матрица вероятностей переходов имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$

тогда граф вероятностей переходов выглядит следующим образом:



Цепь Маркова с дискретным временем полностью определяется матрицей вероятностей переходов за один шаг и начальным распределением $\Theta = \{\theta(1), \theta(2), \ldots, \theta(n)\}$, где $\theta(i) = P\{\xi(0) = i\}$.

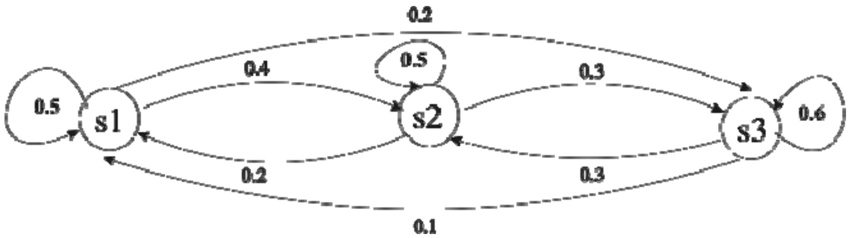
Для распределения вероятностей состояний однородной цепи Маркова имеет место следующее равенство векторов:

$$\{p_1(k), p_2(k), \ldots p_n(k)\} = \{p_1(k-1), p_2(k-1), \ldots, p_n(k-1)\} \cdot P = \Theta \cdot P^k .$$

Для неоднородной цепи Маркова распределение вероятностей находится по формулам

$$\{p_1(k), p_2(k), \ldots p_n(k)\} = \{p_1(k-1), p_2(k-1), \ldots, p_n(k-1)\} \cdot P(k) =$$
$$= \Theta \cdot P(1) \cdot P(2) \cdot \ldots \cdot P(k)$$

ПРИМЕР. Рассмотрим состояния банка, характеризующиеся одной из процентных ставок: 12%, 13%, 14%, которые устанавливаются в начале каждого квартала и фиксированы на всем его протяжении**.** Таким образом, если за систему S принять действующую процентную ставку, то она в каждый момент времени может находиться только в одном из состояний: s_1 – процентная ставка 12%, s_2 – процентная ставка 13%, s_3 – процентная ставка 14%. Анализ работы банка в предшествующие годы показал, что изменение переходных вероятностей с течением времени пренебрежимо мало. Определить распределение вероятностей состояний системы в конце года, если в конце предыдущего года процентная ставка составила 13%, а граф вероятностей переходов имеет вид:



Так как множество состояний, в которых может находиться система S, конечно, то протекающий в ней случайный процесс – дискретный. С определенной степенью погрешности можно предположить, что вероятность пребывания банка в одном из своих состояний в будущем зависит только от состояния в настоящем и не зависит от его состояний в прошлом. Поэтому рассматриваемый процесс можно считать марковским.

В силу условий банк может переходить из состояний в состояние только в определенные моменты времени t_k – начало k-го квартала, $k = 1,2,3,4$, а изменение переходных вероятностей с течением времени пренебрежимо мало, то рассматриваемый процесс является однородным марковским процессом с дискретным временем.

По графу составим матрицу переходных вероятностей:

$$P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Так как в конце предшествующего года процентная ставка составляла 13%, то вектор начального распределения имеет вид $\Theta = \{0,1,0\}$.

Тогда распределение вероятностей состояний процентной ставки банка в конце года, то есть по прошествии четырех кварталов определяется следующим образом:

$$\{p_1(4), p_2(4), p_3(4)\} = \Theta \cdot P^4 = \{0{,}2020; \quad 0{,}4015; \quad 0{,}3965\}.$$

Если предположить, что переходные вероятности зависят от моментов установления процентных ставок, полученный процесс будет являться неоднородной марковской цепью с дискретным временем. Например, пусть

$$P(1) = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \end{bmatrix} \quad P(2) = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

$$P(3) = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \end{bmatrix} \quad P(4) = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Тогда

$$\{p_1(4), p_2(4), p_3(4),\} = \Theta \cdot P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) \cdot P(4) = \{0{,}3584; \quad 0{,}3696; \quad 0{,}272\}.$$

Классификация состояний цепи Маркова с дискретным временем

Определение. Состояние $i \in X$ цепи Маркова называется ***несущественным***, если $\exists \;\; m, j$, такие что

$$p_{ij}^{(m)} > 0, \; \forall n \;\; p_{ji}^{(n)} = 0,$$

то есть существует такое состояние j, в которое можно попасть с положительной вероятностью, но из которого нельзя вернуться в i. Здесь $p_{ij}^{(m)}$ – вероятность перехода цепи Маркова из состояния i в состояние j за m шагов.

Если из множества X выделить все несущественные состояния, то оставшееся множество существенных состояний обладает тем свойством, что, попав в него, цепь Маркова никогда из него не выйдет.

Как видно из рисунка, {1,2,3} – несущественные состояния, {4,5,6} – существенные.

Рассмотрим множество существенных состояний.

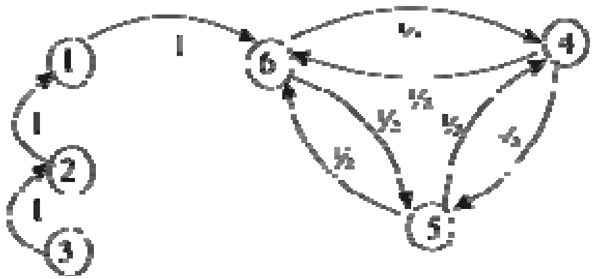


Рис. 1.

Определение. Состояние j называется ***достижимым*** из состояния i (обозначается $i \to j$), если $\exists n > 0$, что $p_{ij}^{(n)} > 0$. Состояния i и j называются ***сообщающимися*** (обозначается $i \leftrightarrow j$), если j достижимо из i, и i достижимо из j.

По определению отношение «$\leftrightarrow$» является симметричным ($i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$), и нетрудно убедиться, что оно транзитивно ($i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$).

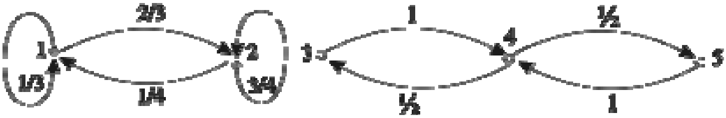
Множество существенных состояний можно разбить на конечное или счетное число непересекающихся множеств $X_1, X_2, \ldots$ состоящих из сообщающихся состояний и характеризующихся тем, что переходы между различными множествами невозможны.

Определение. Множества $X_1, X_{2,\ldots}$ называются ***замкнутыми классами,*** или ***неразложимыми классами***, существенных сообщающихся состояний. Цепь Маркова, состояния которой образуют один неразложимый класс, называется ***неразложимой***.

ПРИМЕР. Рассмотрим цепь Маркова с множеством состояний $X = \{1,2,3,4,5\}$ и матрицей вероятностей переходов

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

Граф вероятностей переходов имеет вид



Очевидно, что у рассматриваемой цепи все состояния существенные и есть два неразложимых класса $X_1 = \{1,2\}$, $X_2 = \{3,4,5\}$, и исследование ее свойств сводится к исследованию свойств каждой из двух цепей с матрицами вероятностей переходов соответственно P_1 и P_2.

Проведенная классификация позволяет привести матрицу вероятностей переходов к каноническому виду. Для этого выделяют неразложимые классы, а также отдельно несущественные состояния. Тогда матрица Р примет вид

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_k & 0 \\ B_1 & B_2 & \dots & B_k & R \end{bmatrix},$$

где P_s – матрица вероятностей переходов s-го неразложимого класса, $s = \overline{1,k}$; B_s – матрица вероятностей переходов из несущественных состояний в состояние s-го замкнутого класса; R – матрица вероятностей переходов по несущественным состояниям.

ПРИМЕР. Классифицировать состояния цепи Маркова, заданной матрицей вероятностей переходов за один шаг.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Граф переходов для данной цепи Маркова имеет вид

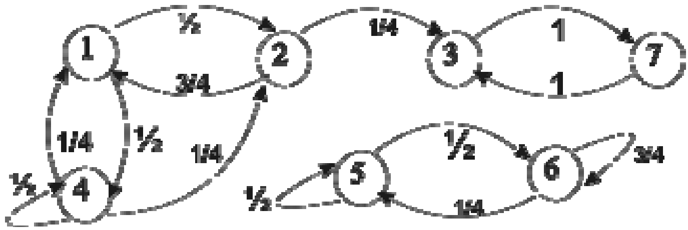


Рис. 2.

Очевидно, что у рассматриваемой цепи состояния 1,4,2 – несущественные, 3,5,6,7 –существенные, кроме того, есть два неразложимых класса $X_1 = \{3,7\}$, $X_2 = \{5,6\}$. Следовательно, канонический вид матрицы вероятностей переходов следующий:

$$P = \begin{array}{c} \\ S5 \\ S6 \\ S3 \\ S7 \\ S1 \\ S2 \\ S4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} S5 & S6 & S3 & S7 & S1 & S2 & S4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Рассмотрим теперь неразложимый класс, изображенный на рис. 3

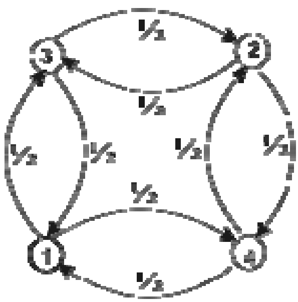


Рис. 3.

Заметим, что здесь возвращение в каждое состояние возможно лишь за четное число шагов, переход в соседнее состояние – за нечетное число шагов, а матрица вероятностей переходов имеет блочную структуру:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \vdots & 1/2 & 1/2 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 1/2 & 1/2 & \vdots & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Отсюда видно, что класс $X_s = \{1,2,3,4\}$ разбивается на два подкласса $C_0 = \{1,2\}$ и $C_1 = \{3,4\}$, обладающих следующим свойством цикличности: за один шаг цепь Маркова из C_0 непременно переходит в C_1, а из C_1 – в C_0, но за два шага возвращается в исходный класс. Этот пример показывает возможность разбиения неразложимых классов на циклические подклассы.

Определение. Будем говорить, что состояние *j* замкнутого класса имеет период $d(j)$, если $d(j)$ есть наибольший общий делитель чисел *n* таких, что $p_{jj}(n) > 0$.

Очевидно, что для предыдущего примера (рис3) $d(j) = 2$, для всех *j*.

Определение. Если $d(j)=1$, ($d(X)=1$), то состояние *j* (класс X) называется апериодическим (эргодическим).

Возвращаясь к циклическим подклассам, можно сделать вывод о том, что если в начальный момент времени система находится в состоянии подкласса C_0, то в момент времени $n = 1 + dr,\ r = 0,1,2,\cdots,$ она будет находиться в подклассе C_1. Следовательно, с каждым из подклассов C_1, C_2 можно связать новую марковскую цепь с матрицей вероятностей переходов $\{p_{ij}(2),\ i, j \in C_p\},\ p = 1,2$, которая будет неразложимой и апериодической. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении предельных свойств вероятностей $p_{ij}(n)$ при $n \to \infty$, можно ограничиться только эргодическими классами.

Классификация состояний цепи Маркова по асимптотическим свойствам переходных вероятностей

Для цепи Маркова $\xi(n)$ определим

$$f_i(n) = P\{\xi(n) = i | \xi(0) = i, \xi(1) \neq i, \ldots \xi(n-1) \neq i\} -$$

вероятность первого возвращения в состояние i на n-м шаге, тогда $f_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_i(n)$ – вероятность того, что система, выйдя из состояния i, хотя бы один раз вернется в него.

Определение. Состояние $i \in X$ называется возвратным, если $f_i = 1$, и невозвратным, если $f_i < 1$.

Все состояния конечного эргодического класса **возвратны**. Невозвратные состояния возможны только при бесконечном числе состояний.

Если состояние $i \in X$ возвратно и $i \leftrightarrow j$, то состояние $j \in X$ также возвратно.

Если состояние i возвратно, то есть $f_i = 1$, то набор вероятностей $f_i(n)$ образует распределение вероятностей времени возврата.

Поскольку отыскание функций $f_i(n)$ довольно сложно, то для определения возвратности состояний полезен следующий критерий.

Критерий возвратности состояний. Состояние $i \in X$ возвратно тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$.

Каждое возвратное состояние можно в свою очередь отнести к одному из двух типов в зависимости от величины среднего значении времени возвращения (от его конечности или бесконечности). Величина $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_i(n)$ по определению математического ожидания равна среднему значению числа шагов, за которые цепь Маркова возвращается в состояние i. Величина μ_i^{-1}, очевидно, характеризует **интенсивность** возвращения в состояние i.

Определение. Возвратное состояние i называется положительным, если $\mu_i^{-1} > 0$, и нулевым, если $\mu_i^{-1} = 0$.

ПРИМЕР. Рассмотрим одномерное случайное блуждание частицы по целочисленным точкам действительной прямой. За каждый переход частица перемещается на единицу вправо с вероятностью p и на единицу влево с вероятностью q, причем $p+q=1$.

Следовательно, используя формулу Бернулли, получаем

$$p_{ii}(2n+1)=0\,,\ p_{ii}(2n)=C_{2n}^{n}p^{n}q^{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}(pq)^{n}\,,\ n=0,1,2\ldots$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга $n!\approx\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}$ получаем

$$p_{ii}(2n)\approx\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}(pq)^{n}=\frac{(4pq)^{n}}{\sqrt{\pi n}}\,.$$

Так как $pq=p(1-p)\le\frac{1}{4}$, причем равенство имеет место только тогда, когда $p=q=\frac{1}{2}$, то $p_{ii}(2n)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_{ii}(2n)$ расходится тогда и только тогда, когда $p=q=\frac{1}{2}$, и в данном случае все состояния являются **возвратными**.

При $p\ne q$, когда $4pq<1$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_{ii}(2n)<\infty$, все состояния являются **невозвратными**. Очевидно, что если $p>q$, то частица, отправляясь из состояния i, будет смещаться вправо к $+\infty$, а если $p<q$, то влево к $-\infty$.

Эргодические теоремы для цепей Маркова

Теорема (основная эргодическая теорема). Рассмотрим неразложимую, непериодическую, возвратную цепь Маркова со счётным числом состояний, тогда имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}p_{ii}(n)=\frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}nf_{i}(n)}=\begin{cases}0, & \text{если i нулевое},\\ >0, & \text{если } i \text{ положительное}.\end{cases}$$

При этих же условиях $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ji}(n) = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n)$.

Теорема. Для неразложимой, непериодической, возвратной и положительной цепи Маркова со счётным числом состояний существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ji}(n) = \pi_i$, где $\pi_i > 0$ и однозначно определяются условиями:

1. $\pi_i = \sum\limits_j \pi_j p_{ji}$ – уравнение Колмогорова для финальных вероятностей,

2. $\sum\limits_i \pi_i = 1$ – условием нормировки для финальных вероятностей.

Распределение вероятностей π_i называется **финальным** или эргодическим, а цепь Маркова называется **эргодической**.

Теорема (альтернативы). Пусть для марковской цепи со счётным числом состояний существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ji}(n) = \pi_i$, при этом выполняется равенство $\pi_i = \sum\limits_j \pi_j p_{ji}$, тогда возможна одна из двух альтернатив: все $\pi_i = 0$ или $\sum\limits_i \pi_i = 1$.

Если $\sum\limits_i \pi_i = 1$, то набор вероятностей π_i образует единственное стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова.

Если $\pi_i = 0$, то не существует стационарного распределения для рассматриваемой цепи Маркова.

Теорема (эргодическая теорема для цепей Маркова с конечным числом состояний). Для неразложимой непериодической цепи Маркова с конечным числом состояний существуют пределы

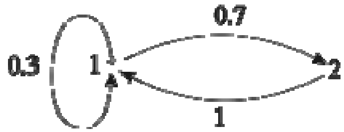
$$\lim_{n\to\infty} p_{ji}(n) = \pi_i,$$

не зависящие от j и удовлетворяющие условию нормировки.

Таким образом, если цепь Маркова ***неразложимая, непериодическая, возвратная и положительная,*** то для неё существует стационарное (финальное) распределение вероятностей.

Если для однородной цепи Маркова существуют финальные вероятности, то говорят, что для этой цепи существует ***стационарный режим функционирования***.

ПРИМЕР. Найти финальные вероятности для цепи Маркова заданной графом



Данная цепь Маркова является неразложимой и апериодической, так как $d(1) = d(2) = 1$. Кроме того, она имеет конечное число состояний, поэтому является эргодической.

Матрица вероятностей переходов $P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Составим систему уравнений для нахождения финальных вероятностей:

$$\begin{cases} 0{,}3\pi_1 + \pi_2 = \pi_1 \\ 0{,}7\pi_1 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases},$$

откуда находим $\pi_1 = 10/17$, $\pi_2 = 7/17$.

Вероятностно-временные характеристики цепи Маркова

Распределение вероятностей состояний цепи Маркова является наиболее важной её характеристикой. Но также представляют интерес и некоторые другие её характеристики.

Вероятность перехода из несущественного состояния в замкнутый класс. Обозначим $\Pi_i(S_k)$ вероятность перехода цепи Маркова из несущественного состояния i в замкнутый класс S_k, p_{ij} – вероятности перехода из i-го состояния в j-е. Тогда $\Pi_i(S_k)$ является решением неоднородной системой линейных алгебраических уравнений следующего вида.

$$\Pi_i(S_k) = \sum_{j \in T} p_{ij} \Pi_j(S_k) + \sum_{j \in S_K} p_{ij},$$

где T – множество несущественных состояний.

Среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутый класс. Пусть для цепи Маркова единственный замкнутый класс S.

Обозначим $m_i(S)$ – среднее значение времени перехода цепи Маркова из несущественного состояния *i* в замкнутый класс *S*. Учитывая, что если из состояния *i* можно сразу попасть в класс S_k, то время перехода равно единице, а если этот переход выполняется в несущественное состояние *j*, тогда суммарное время перехода составляет $1+m_j(S)$, где первое слагаемое, равное единице, определяет первый шаг, а второе: $m_j(S)$ – среднее значение времени перехода из состояния *j* в класс *S*.

В силу формулы полной вероятности для условных математических ожиданий, можно записать систему линейных неоднородных уравнений для определения $m_i(S)$: $m_i(S)=\sum\limits_{j\in S} p_{ij}\times 1+\sum\limits_{j\in T}\left(p_{ij}1+m_j(S)\right)$.

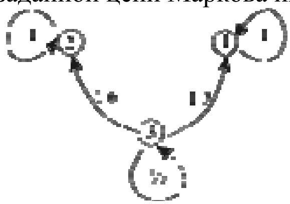
Если цепь Маркова содержит *k* замкнутых классов, то для нахождения среднего времени перехода из несущественного состояния в *k*-й замкнутый класс S_k, необходимо учитывать вероятность перехода в этот замкнутый класс, то есть находить условное время перехода. $m_i(S_k/H_k)$, где H_k – событие, состоящее в том, что из *i*-го состояния мы перешли в *k*-й замкнутый класс. Это время перехода определяется равенством:

$$m_i(S_k/H_k)=\frac{m_i(S_k,H_k)}{\Pi_i(S_k)},$$

где $m_i(S_k,H_k)$ определяется аналогично $m_i(S)$ для цепи Маркова с единственным замкнутым классом состояний.

ПРИМЕР. Найдите вероятность и условное среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутый класс для цепи Маркова, заданных матрицей переходов за один шаг систем $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1/3 & 1/6 & 1/2\end{bmatrix}$.

Граф состояний для заданной цепи Маркова имеет вид



Очевидно, что у рассматриваемой цепи состояние 3 – несущественное и есть два неразложимых класса $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}$.

Следовательно, рассмотри две гипотезы:

H_1 – произошел переход в замкнутый S_1;

H_2 – произошел переход в замкнутый S_1.

Тогда условное среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутые классы S_1 и S_1 определяется по формулам:

$$m_3(S_1/H_1) = \frac{m_3(S_1, H_1)}{\Pi_3(H_1)}, \; m_3(S_2/H_2) = \frac{m_3(S_2, H_2)}{\Pi_3(H_2)},$$

где $\Pi_3(H_i)$ – вероятность события H_i, то есть вероятность перехода из несущественного состояния 3 в *i*-й замкнутый класс.

Вероятности перехода из несущественного состояния 3 в замкнутые классы S_1 и S_2 определяем по формулам

$$\Pi_3(S_1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\Pi_3(S_1), \; \Pi_3(S_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\Pi_3(S_2).$$

Откуда получаем: $\Pi_3(S_1) = \frac{2}{3}$, $\Pi_3(S_2) = \frac{1}{3}$.

Для $m_3(S_1, H_1)$ и $m_3(S_2, H_2)$ имеем систему уравнений:

$$m_3(S_1, H_1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(1 + m_3(S_1, H_1)\right), \Rightarrow \; m_3(S_1, H_1) = \frac{5}{3};$$

$$m_3(S_2, H_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(1 + m_3(S_2, H_2)\right), \Rightarrow \; m_3(S_2, H_2) = \frac{4}{3}.$$

Тогда условное среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутые классы S_1 и S_2 составляет:

$$m_3(S_1/H_1) = \frac{5/3}{2/3} = \frac{5}{2}, \; m_3(S_2/H_2) = \frac{4/3}{1/3} = 4.$$

Среднее время перехода из состояния в состояние внутри замкнутого класса/ Рассмотрим некоторый замкнутый класс *S*. Обозначим m_{ij} – среднее значение времени перехода из состояния *i* в состояние *j* внутри замкнутого класса для $\forall \; i, j \in S$.

Тогда можно получить систему линейных неоднородных алгебраических уравнений, определяющих значения m_{ij}:

$$m_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik}(1 + m_{ki}) = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} m_{ki}$$

Из полученной системы можно найти следующие соотношения:

$$m_{jj} = 1/\pi_j, \; \pi_j = 1/m_{jj},$$

из которых следует, что среднее время возвращения в возвратное состояние j обратно пропорционально финальной вероятности этого состояния, поэтому для положительных состояний оно конечно, а для нулевых – бесконечно.

ПРИМЕР. Студент может перейти на следующий курс с вероятностью p, с вероятностью q может остаться на повторное обучение, а с вероятностью r может быть отчислен ($p + q + r = 1$). Восстановление невозможно, но с вероятностью p можно вновь поступить на первый курс. Записать матрицу вероятностей переходов за один шаг и найти среднее время перехода в эргодическое множество.

Будем считать, что образование занимает 5 лет, тогда состояния $S_1, S_2, S_3,\ S_4, S_5$ – соответствуют обучению с первого по пятый курс, S_0 – абитуриент, S_6 – специалист. По определению $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ – несущественные состояния, S_6 – эргодическое множество из одного состояния.

Тогда матрица переходов за один шаг в каноническом виде может быть записана

$$P = \begin{array}{c} \\ S_6 \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} S_6 & S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & q & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & q & p & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & q & p & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & q & p \\ p & r & 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{bmatrix} \end{array}$$

Через m_i обозначим среднее время перехода из несущественного состояния S_i, $i=\overline{0,5}$ в эргодическое состояние S_6. Тогда можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} m_0 = p_{06} + \sum\limits_{j\neq 6} p_{0j}(1+m_j) = 1 + \sum\limits_{j\neq 6} p_{0j}m_j = 1 + (1-p)m_0 + pm_1, \\ m_1 = p_{16} + \sum\limits_{j\neq 6} p_{1j}(1+m_j) = 1 + \sum\limits_{j\neq 6} p_{1j}m_j = 1 + rm_0 + qm_1 + pm_2, \\ m_2 = p_{26} + \sum\limits_{j\neq 6} p_{2j}(1+m_j) = 1 + \sum\limits_{j\neq 6} p_{2j}m_j = 1 + rm_0 + qm_2 + pm_3, \\ m_3 = p_{36} + \sum\limits_{j\neq 6} p_{3j}(1+m_j) = 1 + \sum\limits_{j\neq 6} p_{3j}m_j = 1 + rm_0 + qm_3 + pm_4, \\ m_4 = p_{46} + \sum\limits_{j\neq 6} p_{4j}(1+m_j) = 1 + \sum\limits_{j\neq 6} p_{4j}m_j = 1 + rm_0 + qm_4 + pm_5, \\ m_5 = p_{56} + \sum\limits_{j\neq 6} p_{5j}(1+m_j) = 1 + \sum\limits_{j\neq 6} p_{5j}m_j = 1 + rm_0 + qm_5, \end{cases}$$

решая систему методом Крамера, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} -p & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & q-1 & p & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & q-1 & p & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & q-1 & p & p \\ r & 0 & 0 & 0 & q-1 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & 0 & q-1 \end{vmatrix} = p^6,$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} -1 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & q-1 & p & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & q-1 & p & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & q-1 & p & p \\ -1 & 0 & 0 & 0 & q-1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(q-1)^5 + (q-1)^4 p - (q-1)^3 p + (q-1)^2 p^3 - (q-1)p^4 + p^5$$

$$\Delta_1 = -(q-1)^5 + (q-1)^4 p - (q-1)^3 p + (q-1)^2 p^3 - (q-1) p^4$$

$$\Delta_2 = -(q-1)^5 + (q-1)^4 p - (q-1)^3 p + (q-1)^2 p^3$$

$$\Delta_3 = -(q-1)^5 + (q-1)^4 p - (q-1)^3 p$$

$$\Delta_4 = -(q-1)^5 + (q-1)^4 p$$

$$\Delta_5 = -(q-1)^5$$

Следовательно, $m_0 = \frac{(1-q)^5}{p^6} + \frac{(1-q)^4}{p^5} + \frac{(1-q)^3}{p^4} + \frac{(1-q)^2}{p^3} + \frac{(1-q)}{p^2} + \frac{1}{p}$.

Аналогично находим для остальных состояний, и записываем ответ в общем виде.

Ответ: $m_i = \sum_{s=i}^{5} \frac{(1-q)^s}{p^{s+1}}$, $i = \overline{0,5}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить граф состояний следующего случайного процесса: устройство S состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти их строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, продолжающийся случайное время.

2. На окружности отмечено 5 точек. Процесс попадает из любой данной точки в одну из соседних с вероятностью 0,5. Записать матрицу переходов за один шаг. Найти матрицу переходов за 2,3 шага.

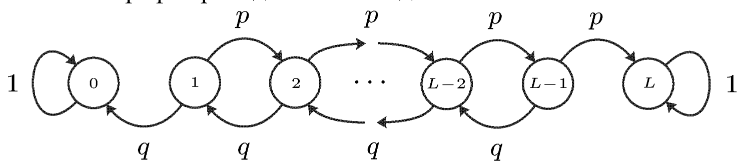
3. В учениях участвуют два корабля, которые одновременно производят выстрелы друг в друга через равные промежутки времени. При каждом выстреле корабль А поражает корабль Б с вероятностью 1/2, а корабль Б поражает корабль А с вероятностью 3/8. Предполагается, что при любом попадании корабль выходит из строя. Рассматриваются результаты серии выстрелов. Найти матрицу перехода, если состояниями цепи являются комбинации кораблей, оставшихся в строю: Е1 – оба корабля в строю, Е2 – в строю только корабль А, Е3 – в строю только корабль Б, Е4 – оба корабля поражены.

4. В сказочной стране Оз никогда не бывает двух солнечных дней подряд. Если сегодня ясно, то завтра будет плохая погода – снег или дождь с равной вероятностью. Если сегодня дождь, то завтра погода изменится с вероятностью 0,5. Если она изменится, то в половине случаев будет ясно. Записать матрицу переходов за один шаг. Найти вероятность того, что послезавтра будет ясно, если сегодня ясно.

5. N -черных и N -белых шаров размещены по двум урнам так, что в каждой из них по N шаров. Число черных шаров первой урны определяет состояние системы. На каждом шаге случайно выбираются по одному шару из каждой урны и меняются местами. Записать матрицу вероятностей переходов за один шаг и найти финальные вероятности.

6. Пусть целые числа $M > 0$ и $N > 0$ – начальные капиталы соответственно первого и второго игроков. Проводятся последовательно игры, в результате каждой из которых с вероятностью p капитал первого игрока увеличивается на 1 и с вероятностью $q = 1 - p$ капитал первого игрока уменьшается на 1. Результаты любой игры не зависят от результатов любых других игр. Пусть S_n – капитал первого игрока после n игр. Предполагается, что в случае $S_n = 0$ или $S_n = N + M$ игра прекращается (ситуация разорения одного игрока). Построить стохастический граф цепи, провести классификацию состояний и найти переходную матрицу. Найти вероятность разорения первого игрока. Рассмотреть случай, когда один из игроков бесконечно богат.

Указание: граф переходов имеет вид:



7. Через фиксированные промежутки времени проводится контроль технического состояния банкомата, который может находиться в одном из трех состояний: S_1 – работает, S_2 – не работает и ожидает ремонта, S_3 – ремонтируется. Предполагается, что процесс, характеризующий состояние прибора является однородной цепью Маркова с переходной матрицей

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & p_{02} \\ 0{,}3 & p_{11} & 0{,}6 \\ p_{20} & 0{,}01 & 0{,}29 \end{bmatrix}.$$

Найти неизвестные элементы матрицы P и вычислить $P(2)$ при условии, что в начальный момент времени банкомат был исправен. Найти среднее время перехода внутри замкнутого класса.

8. Классифицировать состояния для марковской цепи, заданной матрицей вероятностей переходов P1, записать ее в каноническом виде и найти среднее время перехода из одного состояния в другое внутри замкнутого класса (все возможные варианты).

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 7/8 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}; \; P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/8 & 3/8 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/8 & 0 & 1/8 & 3/8 & 1/8 \\ 1/3 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}; \; P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Две автомашины A и B сдаются в аренду по одной и той же цене. Каждая из них может находиться в одном из двух состояний: i_1 – машина работает хорошо, i_2 – машина требует ремонта, которые образуют цепь Маркова. Матрицы вероятностей переходов между состояниями за сутки для этих машин равны соответственно:

$$P_A = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{bmatrix} \quad P_B = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

Определить финальные вероятности состояний для обеих автомашин. Какую автомашину стоит арендовать?

10. Цепь Маркова задана графом (рис. 4). Найти стационарное распределение вероятностей, если оно существует.

Рис. 4.

11. Цепь Маркова имеет множество допустимых состояний $E=\{0,1,2,\dots N\}$ и описывается графом (рис. 5), где $0<p<1$, $q=1-p$. Доказать, что цепь является эргодической, и найти стационарное распределение вероятностей.

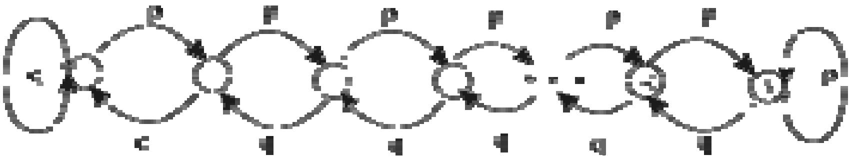


Рис. 5.

12. Провести классификации состояний и записать матрицы переходов в каноническом виде для следующих цепей Маркова

а) $P=\begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

в) $P=\begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$; г) $P=\begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$;

е) $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 & q & 0 \end{bmatrix}$, $p + q = 1$

13. Цепь Маркова имеет множество состояний $\{-6,-5,...,0,1,...,6\}$. Переходные вероятности определяются соотношениями

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если } j = i+1 \le 0 \quad \textit{или } j = i-1 \ge 0 \\ 0 & \textit{в остальных случаях} \end{cases}$$

Провести классификацию состояний цепи Маркова и множества ее состояний, если выполняются равенства:

а) $p_{0,6} = 1,\ \ p_{0,i} = 0\ \ (i \ne 6)$;

б) $p_{0,6} = p_{0,-6} = 1/2,\ \ \ p_{0,i} = 0\ \ (i \ne \pm 6)$;

в) $p_{0,6} = p_{0,-5} = 1/2,\ \ \ p_{0,i} = 0\ \ (i \ne 6, i \ne -5)$.

14. Цепь Маркова задана матрицей переходов за один шаг. Найдите финальные вероятности состояний цепи Маркова.

а) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

в) $P = \begin{bmatrix} 0 & p & q \\ p & 0 & q \\ p & 0 & q \end{bmatrix}$; г) $P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$.

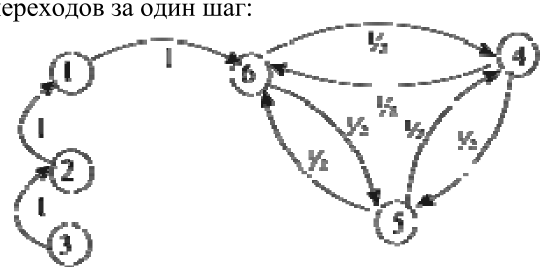
15. Найдите вероятность и условное, при условии попадания в S_k, среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутый

класс для цепи Маркова, заданных матрицей вероятностей переходов за один шаг.

а) $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$; в) $P=\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$;

б) $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$; г) $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$.

16. Найдите вероятность и среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутый класс для цепи Маркова, заданных графом вероятностей переходов за один шаг:



Найдите среднее время перехода внутри замкнутого класса.

17. Найдите вероятность и условное среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутый класс для цепи Маркова, заданных графом вероятностей переходов за один шаг:

Найдите среднее время перехода внутри замкнутых классов.

18. В процессе эксплуатации ЭВМ может рассматриваться как физическая система, которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний: x_1 – ЭВМ полностью исправна; x_2 – ЭВМ имеет незначительные неисправности в ОП, но может решать задачи; x_3 – ЭВМ имеет существенные неисправности, может решать ограниченный класс задач; x_4 – ЭВМ полностью вышла из строя. В начальный момент ЭВМ полностью исправна. Проверка ЭВМ производится в фиксированные моменты времени t_1, t_2, t_3. Процесс, протекающий в системе, можно рассматривать как цепь Маркова. Матрица перехода за один шаг имеет вид:

$$P = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определить вероятности состояний после трех проверок.

19. Автомашина может находиться в двух состояниях: i_1 – работает хорошо, i_2 – требует ремонта. На следующий день работы она меняет свое состояние в соответствии с матрицей вероятностей переходов

$$P = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,7 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

Пусть

– если машина работает нормально, мы имеем прибыль \$40;

– когда она начинает работу в нормальном состоянии, а затем требует ремонта (либо наоборот), прибыль равна \$20;

– если машина требует ремонта, то потери составляют \$20 .

Найдите ожидаемую прибыль за два перехода между состояниями (за два шага).

Указание. Пусть $V = \begin{bmatrix} 40 & 20 \\ 20 & -20 \end{bmatrix}$ матрица доходов за один шаг, тогда $Q = [q_1, q_2] = P \cdot V$ – вектор прибыли за один шаг.

20. В городе N каждый житель имеет одну из трех профессий A, B, C. Дети отцов, имеющих профессии A, B, C сохраняют профессии отцов с вероятностями 3/5, 2/3, 1/4 соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями выбирают любую из двух других профессий. Найти:

1) распределение по профессиям в следующем поколении, если в данном поколении профессию A имело 20%, профессию B – 30%, профессию C – 50%;

2) распределение по профессиям, не меняющееся при смене поколений.

21. Найдите среднее время перехода внутри замкнутых классов, если матрица вероятностей переходов имеет вид

$$\text{а) } P=\begin{bmatrix}0{,}3 & 0{,}7\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{bmatrix};\ \text{б) } P=\begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}6 & 0{,}4\end{bmatrix};\ \text{в) } P=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\ 2/5 & 2/5 & 1/5\\ 1/5 & 2/5 & 2/5\end{bmatrix}.$$

22. Цепь Маркова задана матрицей вероятностей перехода P за один шаг и вектором начального распределения

$$P=\begin{bmatrix}3/12 & 2/12 & 1/12 & 3/12 & 1/12 & 2/12\\ 1/12 & 1/12 & 3/12 & 1/12 & 4/12 & 2/12\\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix},$$

$$Q=\left\{\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0,0,0\right\}.$$

Найти:

а) несущественные состояния;

б) среднее время выхода их множества несущественных состояний;

в) вероятности попадания в замкнутые классы $\{3,4\}$ и $\{5,6\}$ из несущественных состояний.

23. Из таблицы случайных чисел, содержащей все целые числа от 1 до m включительно, по одному выбираются числа наудачу. Система находится в состоянии Q_j, если наибольшее из выбранных чисел равно j

($j=1,2,...m$). Найти вероятности того, что после выбора n чисел наибольшее будет k, если раньше было i.

Указание. Найдите матрицу переходов за один шаг P, тогда $p_{ik}^{(n)}$ – элементы матрицы P^n.

24. M молекул, распределенных в двух резервуарах, случайно по одной перемещаются из своего резервуара в другой. Найти финальные вероятности числа молекул в первом резервуаре.

25. Независимые испытания проводятся до тех пор, пока не будет получена серия из m последовательных появлений события A, вероятность появления которого при каждом испытании равна p. Определить среднее число испытаний t_k, которые нужно провести для получения требуемой серии, если уже имеется серия из k последовательных появлений этого события $(k=0,1,...,m-1)$. Рассчитать t_k при $m=3$, $p=0{,}5$ и $k=0,1,2$.

26. Из урны содержащей N черных и N белых шаров одновременно извлекаются m шаров, вместо которых кладут m черных шаров. Число белых шаров определяет состояние системы. Определите вероятности того, что после n извлечений в урне останется k белых шаров. Рассчитать вероятности при $N=6$, $m=3$.

27. Отрезок AB разделен на m равных интервалов. Частица может находиться только в серединах интервалов, перемещаясь скачками на величину интервала по направлению к точке A с вероятностью p, а по направлению к точке B с вероятностью $q=1-p$. В крайних точках отрезка имеются отражающие экраны, которые при достижении частицей точки A или B возвращают ее в исходное положение. Определить финальные вероятности нахождения частицы в каждом интервале.

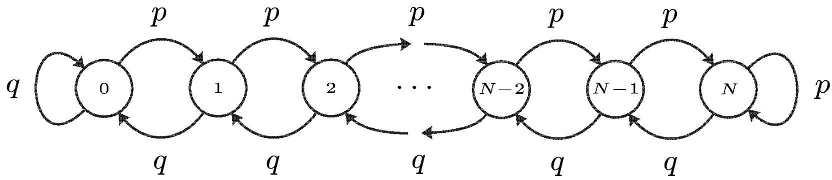
Вероятности перехода для цепи Маркова с бесконечным числом состояний определяются равенствами/ Определить финальные вероятности, если они существуют.

а) $p_{i1}=q$, $p_{i,i+1}=p=1-q$ $(i=1,2,...)$;

б) $p_{i1}=\dfrac{i}{i+1}$, $p_{i,i+1}=\dfrac{1}{i+1}$ $(i=1,2,...)$;

в) $p_{11}=\dfrac{1}{2}$, $p_{12}=\dfrac{1}{2}$, $p_{i,1}=\dfrac{1}{i}$, $p_{i,i+1}=\dfrac{i-1}{i}$ $(i=2,3,...)$.

28. Цепь Маркова задана графом вероятностей переходов



где $0 < p < 1$, $q = 1–p$. Докажите, что цепь является эргодической, и найдите стационарное распределение вероятностей состояний

29. Эргодическая цепь Маркова с двумя состояниями имеет стационарное распределение $\pi0 = p$, $\pi1 = 1–p$. Найдите матрицу вероятностей переходов за один шаг.

Цепи Маркова с непрерывным временем

Рассмотрим марковский процесс $\xi(t)$ с конечным или счетным множеством состояний X, который изменяет свои состояния в произвольные моменты времени. Такой процесс называется **цепью Маркова с непрерывным временем**. Очевидно, что для такой цепи Маркова выполняются условия

$$P\{\xi(t)=j|\xi(s)=i,\xi(s')=i'\}=P\{\xi(t)=i|\xi(s)=j\}=p_{ij}(s,t)$$

для любых $i',i,j\in X$ и $s'<s<t\in T$.

Определение. Вероятность $p_{ij}(s,t)$ называется вероятностью перехода из состояния i в состояние j за промежуток времени $[s,t)$.

Цепи Маркова однозначно определяются матрицей вероятностей переходов $P(s,t)=\|p_{ij}(s,t)\|$ и начальным распределением $\theta_i=P\{\xi(0)=i\}$.

Вероятности состояний в любой момент времени t определяются следующим образом:

$$P_j(t)=\sum_i \theta_i p_{ij}(0,t).$$

Определение. Если вероятности переходов $p_{ij}(s,t)$ зависят только от разности моментов времени, то есть $p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t-s)=p_{ij}(\tau)$, то цепь Маркова называется **однородной**.

Для однородных цепей Маркова матрица вероятностей переходов имеет вид $P(\tau)=\|p_{ij}(\tau)\|$, а вероятности состояний определяются следующим образом:

$$P_j(\tau)=\sum_i \theta_i p_{ij}(\tau).$$

Переходные вероятности обладают следующими свойствами:

1. $p_{ij}(s,t)\ge 0$.
2. $\sum_j p_{ij}(s,t)=1$.

3. Уравнение Чемпена–Колмогорова:

$p_{ij}(s+t)=\sum_k p_{ik}(s)p_{kj}(t)$ – для однородных цепей Маркова,

$p_{ij}(s,t)=\sum_k p_{ik}(s,\tau)p_{kj}(\tau,t)$ – для неоднородных цепей Маркова, где $s<\tau<t$.

4. Условие стохастической непрерывности:

$$\lim_{\tau\to 0} p_{ij}(\tau)=\begin{cases}1, & \textit{если} \quad i=j,\\ 0, & \textit{если} \quad i\neq j.\end{cases}$$

Это условие означает, что с вероятностью 1 цепь однородная Маркова не изменит своего состояния за бесконечно малый промежуток времени $\tau\to 0$. Следует отметить, что стохастическая непрерывность не означает непрерывность реализаций марковской цепи. Это происходит потому, что разрывы каждой реализации цепи происходят в случайные моменты времени, и вероятность того, что разрыв произойдет именно в данный момент времени t, равна нулю.

Дифференциальные уравнения Колмогорова

Цепи Маркова с непрерывным временем задаются матрицей **инфинитезимальных характеристик** $Q(t)=\left\|q_{ij}(t)\right\|$, элементы которой определяются следующим образом:

$$q_{ii}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ii}(t,t+\Delta t)-1}{\Delta t}<0,$$

$$q_{ij}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ij}(t,t+\Delta t)}{\Delta t}>0,\ i\neq j.$$

Величина $q_{ij}(t)$ имеет смысл **интенсивности** перехода цепи Маркова из состояния i в состояние j, а величины $\left(-q_{ii}(t)\right)$ – смысл интенсивности выхода из состояния i.

Кроме того, они обладают свойством $\sum_j q_{ij}=0$.

Из определения инфинитезимальных характеристик можно определить вероятности перехода за время $\Delta t \to 0$:

$$p_{ii}(t, t+\Delta t) = 1 + q_{ii}(t)\Delta t + o(\Delta t),$$
$$p_{ij}(t, t+\Delta t) = q_{ij}(t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Матрица **инфинитезимальных характеристик позволяет найти вероятности** $p_{ij}(s,t)$ для любых $s < t$. Эти вероятности удовлетворяют прямой и обратной системам дифференциальных уравнений Колмогорова.

Для **неоднородных** цепей Маркова:

– **Обратная система дифференциальных уравнений Колмогорова** имеет вид:

$$-\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial s} = \sum_k q_{ik}(s) p_{kj}(s,t),$$

где $p_{ij}(t,t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – краевые условия, заданные на ***правой*** границе $s = t$ области изменения переменной $-\infty < s \le t$.

– **Прямая система дифференциальных уравнений Колмогорова** имеет вид:

$$\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial t} = \sum_k p_{ik}(s,t) q_{kj}(t),$$

где $p_{ij}(s,s) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – краевые условия, заданные на ***левой*** границе $t = s$ области изменения переменной $s \le t < \infty$.

Для **однородных** цепей Маркова эти системы записываются следующим образом:

– **обратная система дифференциальных уравнений**

$$\frac{\partial p_{ij}(\tau)}{\partial \tau} = \sum_k q_{ik} p_{kj}(\tau)$$

с начальными условиями $p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$;

– **прямая система дифференциальных уравнений**

$$\frac{\partial p_{ij}(\tau)}{\partial\tau}=\sum_k p_{ik}(\tau)q_{kj}$$

с начальными условиями $p_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

Иногда удобно записывать системы уравнений Колмогорова в матричной форме. Введем матрицу вероятностей переходов $P(t)=\left\|p_{ij}(t)\right\|$ для однородной цепи Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний, тогда системы уравнений можно записать в виде

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t}=PQ \text{ – прямая, } \frac{\partial P(t)}{\partial t}=QP \text{ – обратная.}$$

Обратная система уравнений применяется обычно для нахождения значений функционалов от цепей Маркова, прямую систему уравнений можно применять для нахождения безусловного распределения вероятностей $P_i(t)=P\{\xi(t)=i\}$ состояний системы в произвольный момент времени.

ПРИМЕР. Пусть $\xi(t)$ является однородной цепью Маркова с двумя состояниями, $X=\{0,1\}$. Время пребывания в состоянии 0 распределено по экспоненциальному закону с параметром λ, а время пребывания в состоянии 1 распределено по экспоненциальному закону с параметром μ. Составить прямую и обратную системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Найти матрицу вероятностей переходов из состояния i в j, $i,j=0,1$.

Решение:

Пусть η_0 – случайная величина, характеризующая время пребывания в состоянии 0, тогда $P\{\eta_0<\Delta t\}=F_0(\Delta t)=1-e^{-\lambda\Delta t}=p_{01}(\Delta t)$ – вероятность того, что цепь Маркова за время Δt перейдет из состояния 0 в состояние 1, а $P\{\eta_0>\Delta t\}=1-F_0(\Delta t)=e^{-\lambda\Delta t}=p_{00}(\Delta t)$ – вероятность того, что цепь Маркова за время Δt не изменит своего состояния.

Аналогично, пусть η_1 – случайная величина, характеризующая время пребывания в состоянии 1, тогда

$$P\{\eta_1 < \Delta t\} = F_1(\Delta t) = 1 - e^{-\mu\Delta t} = p_{10}(\Delta t),$$

$$P\{\eta_0 > \Delta t\} = 1 - F_1(\Delta t) = e^{-\mu\Delta t} = p_{11}(\Delta t).$$

Находим матрицу **инфинитезимальных характеристик** $Q = \|q_{ij}\|$:

$$q_{00} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{00}(\Delta t) - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{-\lambda\Delta t} - 1}{\Delta t} = -\lambda,$$

$$q_{11} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{11}(\Delta t) - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{-\mu\Delta t} - 1}{\Delta t} = -\mu,$$

$$q_{01} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - e^{-\lambda\Delta t}}{\Delta t} = \lambda,$$

$$q_{10} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{10}(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - e^{-\mu\Delta t}}{\Delta t} = \mu.$$

Составим прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$p'_{00}(t) = p_{00}(t)q_{00} + p_{01}(t)q_{10} = -\lambda p_{00}(t) + \mu p_{01}(t) \qquad (1)$$

$$p'_{01}(t) = p_{00}(t)q_{01} + p_{01}(t)q_{11} = \lambda p_{00}(t) - \mu p_{01}(t) \qquad (2)$$

$$p'_{10}(t) = p_{11}(t)q_{10} + p_{10}(t)q_{00} = \mu p_{11}(t) - \lambda p_{10}(t) \qquad (3)$$

$$p'_{11}(t) = p_{11}(t)q_{11} + p_{10}(t)q_{01} = -\mu p_{11}(t) + \lambda p_{10}(t) \qquad (4)$$

Обратная система дифференциальных уравнений Колмогорова будет иметь вид:

$$p'_{00}(t) = q_{00}p_{00}(t) + q_{01}p_{10}(t) = -\lambda p_{00}(t) + \lambda p_{10}(t),$$

$$p'_{01}(t) = q_{00}p_{01}(t) + q_{01}p_{11}(t) = -\lambda p_{01}(t) + \lambda p_{11}(t),$$

$$p'_{10}(t) = q_{10}p_{00}(t) + q_{11}p_{10}(t) = \mu p_{00}(t) - \mu p_{10}(t),$$

$$p'_{11}(t) = q_{10}p_{01}(t) + q_{11}p_{11}(t) = \mu p_{01}(t) - \mu p_{11}(t).$$

Начальные условия: $p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Решая пары уравнений (1–2) и (3–4) находим искомые вероятности. Из первого уравнения получаем $\left[p'_{00}(t) + \lambda p_{00}(t)\right]\frac{1}{\mu} = p_{01}(t)$, подставляем в (2):

$$\left[p'_{00}(t)+\lambda p_{00}(t)\right]'\frac{1}{\mu}=\lambda p_{00}(t)-\left[p'_{00}(t)+\lambda p_{00}(t)\right]=-p'_{00}(t)\,,$$

получаем дифференциальное уравнение второго порядка:

$$p''_{00}(t)+(\lambda+\mu)p'_{00}(t)=0\,.$$

Откуда находим $p_{00}(t)=C_1+C_2e^{-(\lambda+\mu)t}$ и, учитывая начальные условия, получаем $p_{00}(t)=\dfrac{\mu}{\mu+\lambda}+\dfrac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\lambda+\mu)t}$,

$$p_{01}(t)=\frac{1}{\mu}\left\{\left[\frac{\mu}{\mu+\lambda}+\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\lambda+\mu)t}\right]'+\lambda\left[\frac{\mu}{\mu+\lambda}+\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\lambda+\mu)t}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\mu}\left\{-\lambda e^{-(\lambda+\mu)t}+\lambda\left[\frac{\mu}{\mu+\lambda}+\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\lambda+\mu)t}\right]\right\}=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}-\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\lambda+\mu)t}\,.$$

Аналогично, находим

$$p_{11}(t)=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}+\frac{\mu}{\mu+\lambda}e^{-(\lambda+\mu)t}\,,\ p_{10}(t)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}-\frac{\mu}{\mu+\lambda}e^{-(\lambda+\mu)t}\,.$$

Задание: убедитесь, что полученное решение обращает в тождество и обратную систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

Для рассмотренного примера решим задачу нахождения безусловных вероятностей $P_i(t)=P\{\xi(t)=i\}$ состояний системы в произвольный момент времени.

Для вероятностей $P_0(t)=P\{\xi(t)=0\}$ и $P_1(t)=P\{\xi(t)=1\}$ Δt – методом составим прямую систему Колмогорова. Учитывая, что

$$p_{00}(t,t+\Delta t)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)\,,$$
$$p_{11}(t,t+\Delta t)=1-\mu\Delta t+o(\Delta t)\,,$$
$$p_{01}(t,t+\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)\,,$$
$$p_{01}(t,t+\Delta t)=\mu\Delta t+o(\Delta t)\,,$$

имеем

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t+\mathrm{o}(\Delta t)$$
$$P_0(t+\Delta t)=P_1(t)(1-\mu\Delta t)+P_0(t)\lambda\Delta t+\mathrm{o}(\Delta t)\,.$$

Разделив полученные выражения на Δt, и устремив $\Delta t \to 0$, получим систему дифференциальных уравнений вида

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$
$$P_1'(t) = -\mu P_0(t) + \lambda P_1(t).$$

Пусть в начальный момент цепь Маркова находилась в состоянии 0, то есть $P_0(0) = P\{\xi(0) = 0\} = 1$, $P_1(0) = P\{\xi(0) = 1\} = 0$. Тогда решение системы дифференциальных уравнений принимает вид:

$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} - \frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{-(\lambda+\mu)t},$$
$$P_0(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Финальные вероятности

Для однородной неразложимой цепи Маркова с конечным числом состояний существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j$, $\forall j$, не зависящий от i, который называется финальной вероятностью j-го состояния, а их совокупность – финальным распределением.

Финальные вероятности определяются из системы линейных алгебраических уравнений $\sum\limits_i \pi_i q_{ij} = 0$, с учетом условия нормировки $\sum\limits_i \pi_i = 1$. Если ввести матричные обозначения $\pi = [\pi_1, \pi_2 \ldots]$, $Q = \|q_{ij}\|$, $E = [1,1,\ldots]^T$, то уравнения для нахождения финальных вероятностей можно записать в виде $\begin{cases} \pi Q = 0, \\ \pi E = 1. \end{cases}$

В рассмотренном выше примере финальные вероятности можно найти предельным переходом, устремив $t \to \infty$:

$$\pi_0 = \frac{\mu}{\mu+\lambda}, \quad \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}.$$

Время перехода из одного состояния в другое

Время перехода из одного состояния в другое T_{kj} при $k \neq j$ для цепей Маркова с непрерывным временем определяется следующими соотношениями:

$$1+\sum_{k\neq j} q_{ik}T_{kj}=0 \text{ для всех } i\neq j.$$

Если $i=j$, то естественно $T_{jj}=0$, поэтому рассматривается $T_{jj}(t)$ – длина интервала от текущего момента времени t, до следующего попадания в это состояния. Тогда $T_{jj}=M\{T_{jj}(t)|\xi(t)=j\}$ определяется из уравнения

$$1+q_{jj}T_{jj}+\sum_{k\neq j} q_{ik}T_{kj}=0.$$

Для рассмотренного выше примера найдем среднее время перехода из одного состояния в другое. Для $i\neq j$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases}1+q_{11}T_{10}=0,\\ 1+q_{00}T_{01}=0,\end{cases} \text{ откуда имеем } \begin{cases}1-\mu T_{10}=0,\\ 1-\lambda T_{01}=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}T_{10}=\dfrac{1}{\mu},\\ T_{01}=\dfrac{1}{\lambda}.\end{cases}$$

А для $i=j$ $$\begin{cases}1+q_{11}T_{11}+q_{10}T_{01}=0,\\ 1+q_{00}T_{00}+q_{01}T_{10}=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1-\mu T_{11}+\mu T_{01}=0,\\ 1-\lambda T_{00}+\lambda T_{10}=0.\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}1-\mu T_{11}+\mu\dfrac{1}{\lambda}=0,\\ 1-\lambda T_{00}+\lambda\dfrac{1}{\mu}=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}T_{11}=\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda\mu},\\ T_{00}=\dfrac{\lambda+\mu}{\mu\lambda}.\end{cases}$$

Процессы гибели и размножения

Процессом гибели и размножения называется однородная марковская цепь с непрерывным временем и счетным множеством состояний

$X = \{0,1,2,\ldots\}$, в которой за время Δt из состояния i возможен лишь непосредственный переход в состояния $i-1$ и $i+1$, то есть для инфинитезимальных характеристик будут выполнены следующие условия:

$$q_{ii-1} = \mu_i,\ q_{ii+1} = \lambda_i,\ q_{ii} = -(\lambda_i + \mu_i),$$
$$q_{00} = -\lambda_0,\ q_{01} = \lambda_0,$$
$$q_{ij} = 0 \text{ для остальных значений } i, j.$$

Такие процессы хорошо описывают задачи в области биологии, физики, социологии, массового обслуживания. Состояние процесса можно интерпретировать, например, как число особей некоторой популяции, переход из состояния i в $i+1$ – как рождение новой особи, а переход из состояния i в $i-1$ – как гибель некоторой особи.

Процессы гибели и размножения принято изображать в виде размеченного графа состояний, следующего вида

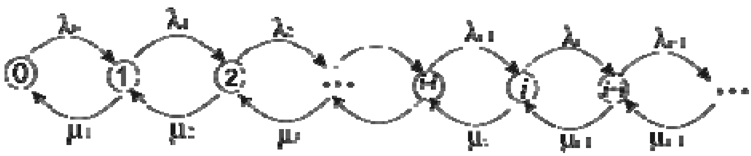


Рис. 5.

Вершина графа обозначает состояние цепи Маркова. Ребра графа ориентированы и показывают возможные переходы из одного состояния в другое. В графе рисуют лишь те ребра, которые показывают переходы с ненулевыми инфинитезимальными характеристиками. Эти характеристики обычно пишут рядом с ребрами и называют весами ребер. Удобство такого способа описания марковских процессов заключается в его наглядности и возможности реализации простого правила построения системы дифференциальных уравнений Колмогорова.

ПРАВИЛО: *производная по времени от вероятности состояния в момент времени t равна сумме произведений вероятностей состояний на веса ребер, входящих в данное состояние (как будто вероятности* ***втекают*** *в данное состояние), минус произведение вероятности рассматриваемого состояния на сумму весов всех ребер, выходящих из него (как будто вероятность* ***вытекает*** *из рассматриваемого состояния).*

Прямая и обратная системы дифференциальных уравнений для переходных вероятностей $p_{ij}(t)$ процессов гибели и размножения имеют вид:

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = p_{ij-1}(t)\lambda_{j-1} - p_{ii}(t)(\lambda_j + \mu_j) + p_{ij+1}(t)\mu_{j+1},$$
$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \lambda_i p_{i+1,j+1}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{ij}(t) + \mu_i p_{i-1j}(t).$$

Система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний $P_i(t) = P\{i(t) = i\}$ соответственно записывается в виде:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -P_0(t)(\lambda_0 + \mu_0) + P_1(t)\mu_1,$$
$$\frac{dP_i(t)}{dt} = P_{i-1}(t)\lambda_{i-1} - P_i(t)(\lambda_i + \mu_i) + P_{i+1}(t)\mu_{i+1}, \; i = 1,2,...$$

Система уравнений Колмогорова для стационарных вероятностей π_j:

$$\pi_{j-1}\lambda_{j-1} - \pi_i(\lambda_j + \mu_j) + \pi_{j+1}\mu_{j+1} = 0 \quad j = 1,2,\ldots,$$
$$\pi_0\lambda_0 - \pi_1\mu_1 = 0,$$
$$\sum_i \pi_i = 1.$$

Для решения полученной системы можно применить метод **Хинчина**. Обозначим $z_j = \pi_{j-1}\lambda_{j-1} - \pi_j\mu_j$, тогда из системы уравнений следует, что $z_1 = 0$, $z_j = z_{j+1}$, $\forall j = 1,2,\cdots$ следовательно, имеет место равенство

$$\pi_{j-1}\lambda_{j-1} - \pi_j\mu_j = 0,$$

откуда получаем равенство

$$\pi_j = \pi_{j-1}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} = \pi_0\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j} = \pi_0\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}.$$

Вероятность π_0 найдём из условия нормировки

$$\pi_0 = 1\Bigg/\left\{1 + \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right\} = \left\{1 + \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right\}^{-1}.$$

Здесь возможны два случая, связанные со сходимостью ряда:

1) $\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}<\infty$,

тогда стационарные вероятности существуют и равны

$$\pi_j=\left\{1+\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right\}^{-1}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}.$$

2) $\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}=\infty$,

тогда не существует стационарного распределения для рассматриваемого процесса гибели и размножения.

Простейший поток

Случайным потоком однородных событий называется последовательность $t_1 < t_2 < ... < t_n ...$ моментов наступления событий. Обозначим $m(t)$ – число событий наступивших за время t. Пусть для этого процесса выполнены следующие условия.

Стационарность. Поток называется стационарным, если число событий, наступивших на интервале $[s,t)$, не зависит от положения этого интервала на оси времени, а определяется лишь его длиной $t-s$.

Последействие. Число событий, наступивших на некотором интервале времени не зависит от числа событий, наступивших на других, не пересекающихся с ним, интервалах.

Ординарность. Вероятность наступления более одного события за бесконечно малый промежуток времени является бесконечно малой более высокого порядка, чем длина рассматриваемого промежутка.

Обозначим через $p_k(\Delta t)$ вероятность того, что на интервале Δt наступит k событий. Эти вероятности определяются равенствами

$$p_0(\Delta t)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$

$$p_1(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$

$$p_k(\Delta t)=o(\Delta t),\ k\geq 1.$$

Определение. Случайный поток однородных событий, удовлетворяющий всем трем свойствам, называется **простейшим**.

Для простейшего потока можно получить ряд полезных свойств:

ПРИМЕР. *Найти распределение вероятностей числа наступивших событий в простейшем потоке.*

Решение: Рассмотрим процесс $m(t)$ – число наступивших событий простейшего потока за время t. Для вероятностей $P_m(t) = P\{m(t) = m\}$ получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

Учитывая отсутствие последствия, можно записать

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) \cdot P_0(\Delta t) = P_0(t)\left[1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)\right].$$

Аналогично, для $P_k(t)$ можно записать

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t)\left[1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)\right] + P_{k-1}(t)\left[\lambda\Delta t + o(\Delta t)\right] + o(\Delta t). \qquad (*)$$

После предельного перехода $\Delta t \to 0$, получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t),$$
$$P_k'(t) = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t), \quad \forall k > 0.$$

Для однозначного решения этой системы надо добавить граничное условие, которое естественно брать в виде

$$P_k(0) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k = 0, \\ 0, & \text{если} \quad k \geq 1, \end{cases}$$

так как в силу ординарности потока на интервале нулевой длины с вероятностью 1 не будет ни одного события.

Метод производящих функций

Для решения системы дифференциально-разностных уравнений (*) воспользуемся методом производящих функций, обозначив

$$G(z,t) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_m(t),$$

систему уравнений Колмогорова (*) перепишем в виде уравнения

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial t} = -\lambda G(z,t) + \lambda z G(z,t) = \lambda(z-1)G(z,t),$$

с начальным условием

$$G(z,0) = 1.$$

Это уравнение легко решается методом разделения переменных

$$\frac{dG(z,t)}{G(z,t)} = \lambda(z-1)\lambda dt \ ,$$

откуда, интегрируя в пределах (0,t), получим

$$\ln G(z,t) - \ln G(z,0) = \lambda(z-1)t \ .$$

Но, как следует из граничного условия,

$$G(z,0) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i P_i(0) = z^0 P_1(0) = 1 \, ,$$

и поэтому

$$G(z,t) = \exp\left[(z-1)\lambda t)\right] = e^{z\lambda\ t} e^{-\lambda\, t} \, ,$$

Разлагая $e^{z\lambda t}$ в ряд Тейлора, запишем

$$G(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k (\lambda t)^k}{k!} \ e^{-\lambda\, t} \ .$$

Очевидно, что число событий простейшего потока, наступивших за произвольный фиксированный интервал времени, распределено по закону **Пуассона**.

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda\, t} \ .$$

Основные вероятностные характеристики простейшего потока

Получим некоторые, наиболее используемые, вероятностные характеристики:

– вероятность того, что в течение времени τ не произойдет ни одного события, равна $P_0(\tau) = e^{-\lambda\, \tau}$.

– вероятность того, что за промежуток времени τ в потоке наступит хотя бы одно событие, равна $P_0(\tau) = 1 - e^{-\lambda\, \tau}$.

Математическое ожидание числа событий, наступивших за время t

$$M\{k(t)\} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t$$

Дисперсия числа событий, наступивших за время t

$$D\{k(t)\} = M\{k^2(t)\} - M^2\{k(t)\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} - \left[\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \right]^2 = \lambda t .$$

Рассмотрим случайную величину, характеризующую **длину интервала между моментами наступления событий простейшего потока**.

Пусть $\tau = t_k – t_k – 1$ есть длина интервала между двумя произвольными соседними моментами наступления событий.

По определению функция распределения $F(t) = P(\tau<t)$. Эта вероятность вычисляется с помощью вероятности противоположного события, то есть

$$F(t) = P(\tau < t) = 1 - P(\tau > t) = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \ x \geq 0 .$$

Плотность распределения промежутка времени между двумя последовательными событиями получим, продифференцировав $F(t)$ по времени.

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \ \tau \geq 0 .$$

Пользуясь полученной функцией плотности распределения, можно получить числовые характеристики случайной величины τ: математическое ожидание $M(\tau)$, дисперсию $D(\tau)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(\tau)$

$$M(\tau) = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}, \ \ D(\tau) == \frac{1}{\lambda^2}, \ \ \sigma(\tau) == \frac{1}{\lambda} .$$

Для малых Δt можно получить приближенную формулу, получаемую заменой функции $e^{-\lambda \Delta t}$, только двумя членами разложения в ряд по степеням Δt, тогда вероятность попадания на малый промежуток времени Δt хотя бы одного события составляет:

$$P(\tau < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \left[1 - \lambda \Delta t + \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2!} - \frac{(\lambda \Delta t)^3}{3!} + \ldots \right] \approx \lambda \Delta t + 0(\Delta t) .$$

Отсюда можно сделать следующий вывод: средний интервал времени τ между любыми двумя соседними событиями в простейшем потоке в среднем равен $1/\lambda$ и его среднеквадратическое отклонение также равно $1/\lambda$, где λ – интенсивность потока, т.е. среднее число событий, происходящих в единицу времени. Закон распределения случайной величины, обладающей такими свойствами, называется показательным (или экспоненциальным), а величинаλ является параметром этого показательного закона. Таким образом, для простейшего потока математическое ожидание интервала времени между соседними событиями равно его среднеквадратическому отклонению.

ПРИМЕР. Пусть клиенты, которые хотят получить консультацию, образуют простейший поток с параметром λ. Клиентов обслуживает один работник социальной сферы, если он занят, образуется очередь. Считается, что длина очереди не ограничена. Время обслуживания одного клиента является экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром μ. Пусть $i(t)$ – число клиентов, находящихся в системе в момент t. Найти финальные вероятности числа клиентов в системе.

Пусть $i(t)$ есть число клиентов, находящихся в системе в момент времени t. Граф вероятностей переходов для процесса $i(t)$ изображен на рис. 6.

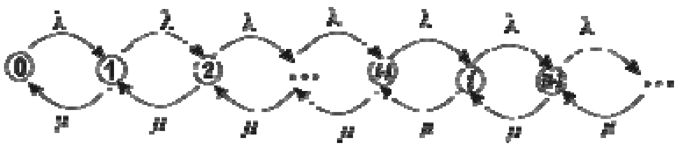


Рис. 6.

Прямая система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$
$$P_i'(t) = \lambda P_{i-1}(t) - (\lambda+\mu)P_i(t) + \mu P_{i+1}(t),\ i \ge 1.$$

Очевидно, что система уравнений для финальных вероятностей примет вид

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0, \\ \lambda\pi_{i-1} - (\lambda+\mu)\pi_i + \mu\pi_{i+1} = 0, i \ge 1, \\ \sum_i \pi_i = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0$.

Из уравнения для $i = 2$: $\lambda\pi_0 - (\lambda + \mu)\pi_1 + \mu\pi_2 = 0$, получаем $\pi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0$.

Аналогично, $\pi_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \pi_0$.

Можно показать, что $\pi_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \pi_0$.

Тогда из условия нормировки получаем, что $\pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = 1$.

Так как ряд сходится при $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, то и стационарный режим существует лишь при $\lambda < \mu$. В этом случае $\sum_{i=0}^{\infty} i\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{1}{1 - \lambda/\mu}$, следовательно, $\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$.

Окончательно, финальные вероятности числа клиентов в системе определяются по формуле $\pi_i = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$.

Рассмотрим пример на применение **производящих функций** при решении систем дифференциальных уравнений Колмогорова.

ПРИМЕР. Поток клиентов, пришедших открыть счет (депозит) в банке, является простейшим с параметром λ, будем считать, что случайная величина, характеризующая продолжительность обслуживания счета, является экспоненциально распределенной с параметром μ. Найти распределение вероятностей числа счетов в банке в момент времени t, если в начальный момент времени в банке не было ни одного счета.

Пусть $i(t)$ есть число клиентов, счета которых обслуживаются в банке, в момент времени t. Граф вероятностей переходов для процесса $i(t)$ изображен на рис. 7.

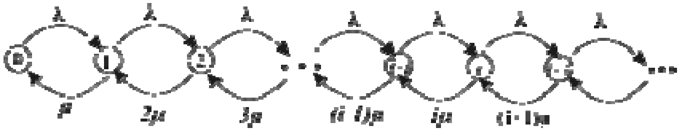


Рис. 7.

Составляем прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова для распределения вероятностей $P_i(t) = P\{i(t) = i\}$:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$
$$P_i'(t) = \lambda P_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu) P_i(t) + (i+1)\mu P_{i+1}(t).$$

Очевидно, начальные условия имеют вид:

$$P_i(0) = \begin{cases} 1, \text{ если } i = 0, \\ 0, \text{ если } i > 0. \end{cases}$$

Чтобы решить систему дифференциальных уравнений, определим производящую функцию $F(z,t) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i P_i(t)$.

Домножим каждое уравнение системы на z^i и просуммируем:

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i P_i'(t) = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} z^i P_{i-1}(t) - \lambda \sum_{i=1}^{\infty} z^i P_i(t) + \mu \sum_{i=0}^{\infty} i z^i P_i(t) + \mu \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) z^i P_{i+1}(t).$$

При этом учитываем, что $\sum_{i=1}^{\infty} z^i P_{i-1}(t) = zF(z,t)$, $\sum_{i=1}^{\infty} i z^i P_i(t) = z\frac{\partial F(z,t)}{\partial z}$.

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} = \lambda z F(z,t) - \lambda F(z,t) - \mu z \frac{\partial F(z,t)}{\partial z} + \mu \frac{\partial F(z,t)}{\partial z}, \Rightarrow$$
$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} + \mu(z-1)\frac{\partial F(z,t)}{\partial z} = \lambda(z-1)F(z,t).$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка, система обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристик которого имеет вид:

$$\frac{dt}{1}=\frac{dz}{\mu(z-1)}=\frac{dF}{\lambda(z-1)F}\,.$$

Рассмотрим первое равенство $\frac{dt}{1}=\frac{dz}{\mu(z-1)}$. Решение этого уравнения имеет вид: $t=\frac{1}{\mu}\ln(z-1)+\frac{1}{\mu}\ln C_1$, или $e^{\mu t}=C_1(z-1)$. Отсюда $C_1=\frac{1}{z-1}e^{\mu t}$.

Из второго равенства получим: $\frac{dz}{\mu}=\frac{dF}{\lambda F}$, откуда следует $\ln F=\frac{\lambda}{\mu}z+\ln C_2$. Тогда $F=e^{\frac{\lambda}{\mu}z}C_2$, где $C_2=\varphi(C_1)=\varphi\left(\frac{1}{z-1}e^{\mu t}\right)$.

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид: $F(z,t)=e^{\frac{\lambda}{\mu}z}C_2=e^{\frac{\lambda}{\mu}z}\varphi\left(C_1\right)=e^{\frac{\lambda}{\mu}z}\varphi\left[\frac{1}{z-1}e^{\mu t}\right]$, где φ – произвольная дифференцируемая функция.

Найдем ее вид, используя начальное условие $F(z,0)=1$:

$$F(z,0)=e^{\frac{\lambda}{\mu}z}\varphi\left[\frac{1}{z-1}\right]=1\,.$$

Отсюда $\varphi\left[\frac{1}{z-1}\right]=e^{-\frac{\lambda}{\mu}z}$. Выполнив замену $\frac{1}{z-1}=y$, получим $\varphi\left(y\right)=e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left(1+\frac{1}{y}\right)}$. Следовательно,

$$F(z,t)=e^{\frac{\lambda}{\mu}z}e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{z-1}e^{\mu t}}\right)}=e^{\frac{\lambda}{\mu}z}e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left(1+(z-1)e^{-\mu t}\right)}=e^{\frac{\lambda}{\mu}(z-1)\left[1-e^{-\mu t}\right]}=e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-z)\left[1-e^{-\mu t}\right]}.$$

Разлагая эту функцию в ряд по степеням z^i, найдем вероятности $P_i(t)$ следующим образом:

$$e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-z)\left[1-e^{-\mu t}\right]}=e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left[1-e^{-\mu t}\right]}e^{\frac{\lambda}{\mu}z\left[1-e^{-\mu t}\right]}=e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left[1-e^{-\mu t}\right]}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}z\left[1-e^{-\mu t}\right]\right]^i}{i!}=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}z^i\frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}\left[1-e^{-\mu t}\right]\right]^i}{i!}e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left[1-e^{-\mu t}\right]}=\sum_{i=0}^{\infty}z^iP_i(t).$$

Следовательно, распределение является пуассоновским с параметром $\frac{\lambda}{\mu}\left[1-e^{-\mu t}\right]$

$$P_i(t)=\frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}\left[1-e^{-\mu t}\right]\right]^i}{i!}e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left[1-e^{-\mu t}\right]}.$$

Отсюда можно определить финальное распределение

$$\lim_{t\to\infty}P_i(t)=\pi(i)=\frac{(\lambda/\mu)^i}{i!}e^{-\lambda/\mu}.$$

Распределение $\pi(i)$ является пуассоновским с параметром λ/μ.

Задачи для самостоятельного решения

1. Некоторый прибор подвержен отказам двух типов. Пусть вероятность отказа первого типа за бесконечно малое время τ равна $\lambda_1\tau+o(\tau)$, а вероятность отказа второго типа за это же время τ равна $\lambda_2\tau+o(\tau)$. В состоянии отказа производится ремонт, длительность которого распределена по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2 для отказов первого и второго типов соответственно. Найти вероятность того, что прибор работает в момент времени t, если известно, что в

начальный момент времени прибор был исправен. Найти финальные вероятности всех состояний системы.

Указание. Данная система описывается цепью Маркова с непрерывным временем с тремя состояниями: **0** – прибор исправен; **1** - произошел отказ первого типа и выполняется его восстановление; **2** – произошел отказ второго типа и выполняется его восстановление.

2. Имеются два трансатлантических кабеля, каждый из которых может передавать одновременно только одно телеграфное сообщение. Время исправной работы каждого из них имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. Время ремонта, в случае поломки, распределено тоже по экспоненциальному закону с параметром μ. Найти вероятность того, что два сообщения, поступившие одновременно найдут оба кабеля исправными, при условии, что в момент $t = 0$ оба кабеля были исправны. Найти финальные вероятности всех состояний системы.

3. Имеется цепь Маркова с двумя состояниями. Время пребывания в каждом из них распределено по экспоненциальному закону с параметром λ. $N(t)$ – число переходов из одного состояния в другое за время t. Найти вероятностное распределение $N(t)$, то есть $P_k(t) = P\{N(t) = k\}, k = 0,1,2...$

Указание. Записать формулу полной вероятности для $P_k(t+\Delta t)$, и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получить дифференциальные уравнения относительно $P_k(t)$.

4. Марковская цепь с двумя состояниями задана вероятностями переходов за бесконечно малое время τ:

$$p_{12}(\tau) = \lambda_1\tau + o(\tau), \quad p_{11}(\tau) = 1 - \lambda_1\tau + o(\tau),$$
$$p_{21}(\tau) = \lambda_2\tau + o(\tau), \quad p_{22}(\tau) = 1 - \lambda_2\tau + o(\tau).$$

Нарисовать граф переходов для этой цепи, записать прямую и обратную системы уравнений Колмогорова. Решить обратную систему и найти финальные вероятности предельным переходом в этом решении.

5. Данные, полученные при исследовании рынка ценных бумаг, показали, что рыночная цена одной акции акционерного общества может колебаться в пределах от 1 руб. до 10 руб. Будем интересоваться следующими состояниями, характеризующимися рыночной ценой акции: **S1** – от 1 руб. до 4 руб.; **S2** – от 4 руб. до 7 руб.; **S3** – от 7 руб. до 9 руб.; **S4** – от 9 руб. до 10 руб. Замечено, что рыночная цена акции в будущем существенно зависит от ее цены в текущий момент времени. При этом в силу

случайных воздействий рынка изменение цены может произойти в любой случайный момент времени. Матрица инфинитезимальных характеристик имеет вид: $Q=\begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 0 \\ 3 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$. Составить долгосрочный прогноз рыночной цены акции и ответить на вопрос: стоит ли приобретать акции по цене 6 руб. за акцию?

6. Марковская цепь с тремя состояниями задана вероятностями переходов за бесконечно малое время τ :

$$p_{12}(\tau)=\lambda_1\tau+o(\tau),\ p_{11}(\tau)=1-\lambda_1\tau+o(\tau),$$

$$p_{21}(\tau)=\lambda_2\tau+o(\tau),\ p_{23}(\tau)=\mu_2\tau+o(\tau),$$

$$p_{22}(\tau)=1-(\lambda_2+\mu_2)\tau+o(\tau),$$

$$p_{32}(\tau)=\mu_2\tau+o(\tau),\ \ p_{33}(\tau)=1-\mu_2\tau+o(\tau),\ p_{13}(\tau)=p_{31}(\tau)=0$$

Найти финальные вероятности состояний системы и среднее время перехода из одного состояния в другое.

7. Два библиотекаря выдают книги. Время обслуживания одного читателя распределено по экспоненциальному закону с параметром q . Поток читателей образует пуассоновский поток с параметром λ . Состояние системы определяется числом свободных библиотекарей. Найти вероятность того, что читателю не откажут в обслуживании.

8. Система состоит из N идентичных элементов, каждый из которых работает независимо от других, причем время безотказной работы имеет экспоненциальное распределение с параметром λ . Отказавший элемент ремонтируется в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ . Состояние системы определяется числом исправных элементов. Найти инфинитезимальные параметры, отличные от нуля, для цепи Маркова, описывающую такую систему.

9. Один мастер следит за работой M аппаратов, которые при исправной работе не требуют его вмешательства. Сбои в работе происходят в случайные моменты времени, образующие пуассоновский поток с параметром λ . На устранение неполадки мастер тратит случайное время τ , распределенное по экспоненциальному закону с параметром ν . Под состояние системы будем понимать число аппаратов ожидающих своей очереди. Найти инфинитезимальные параметры для такой системы.

10. Рассмотрите процесс чистого размножения с инфинитезимальными параметрами:

а) $\lambda_i = \lambda$,

б) $\lambda_i = i\lambda$.

Найдите среднее число особей в произвольный момент времени, если в начальный момент

11. Задача Эрланга. Найти стационарное распределение вероятностей π_i процесса гибели и размножения с параметрами $\mu_i = i\mu, \lambda_i = \lambda, \lambda_N = 0$, где N – число состояний системы. Найти среднее время перехода T_{0N}, T_{N0}.

12. Дан пуассоновский поток с параметром λ. Известно, что за время t наступило n событий. Найти плотность распределения вероятностей времени наступления *r*-го события ($r < n$).

<u>Указание:</u> Пусть t_r – момент наступления *r*-го события. Рассмотрим группу независимых событий:

Н1 – за время $[0, t_r)$ наступило $r-1$ событие;

Н2 – за время $[t_r, t_r + dt)$ наступило одно событие;

Н3 – за время $[t_r + dt, t]$ наступило $n-r$ событий.

Далее воспользоваться определением условной вероятности наступления r-го события $p_r(t_r)$, при условии, что за время $t > t_r$ наступило $n > r$ событий.

13. Некоторый прибор выходит из строя после воздействия *K* возмущений. Возмущения образуют пуассоновский поток с параметром λ. Найти плотность распределения времени безотказной работы прибора.

14. Телефонный узел имеет m каналов. Моменты поступления вызовов образуют пуассоновский поток с параметром λ. Вызовы обслуживаются, если имеется свободный канал, в противном случае они теряются. Продолжительность каждого разговора – случайная величина с экспоненциальным законом распределения с параметром μ. Длительности отдельных разговоров – независимые случайные величины. Под состоянием системы будем понимать число свободных каналов. Найти финальные вероятности состояний системы.

15. Система состоит из *N* идентичных каналов, каждый из которых работает независимо от других случайное время до отказа. Время безотказной работы распределено по экспоненциальному закону с параметром

λ. Отказавший элемент ремонтируется, причем время ремонта распределено тоже по экспоненциальному закону с параметром μ. Состояние системы определяется числом элементов находящихся в ремонте. Найти финальные вероятности состояний системы.

16. Дан процесс гибели и размножения с параметрами $\mu_i = i\mu$, $\lambda_i = i\lambda$. Считая, что $\xi(0) = 1$, найти распределение числа живущих индивидуумов в момент времени t. Рассмотреть случаи $\lambda = \mu$, $\lambda > \mu$, $\lambda < \mu$.

<u>Указание:</u> воспользоваться производящей функцией $F(z.t) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} z^i P_i(t)$.

17. Решить систему дифференциальных уравнений для процесса гибели и размножения с конечным числом состояний, для которого $\mu_i = iq$, $\lambda_i = (N-i)p$, $p + q = 1$, $i = 0,1,2,...$ Начальные условия имеют вид:

$$P_i(0) = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 0, & i \neq 1. \end{cases}$$

18. Частицы, вылетающие из радиоактивного вещества, образуют простейший поток с параметром λ. Каждая частица независимо от других с вероятностью p регистрируется счетчиком. Определить вероятность того, что за время t зарегистрировано n частиц.

19. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что за время t зарегистрировано n частиц, если $p = 1$ и после каждого момента регистрации частицы счетчик отключается на случайное время τ, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ.

20. По двум линиям связи в коммутационный узел поступает два независимых простейших потока сообщений с параметрами λ_1 и λ_2. Найти вероятность того, что за время t в узел поступит n сообщений.

21. В населенном пункте ведет прием один врач-инфекционист. Известно, что за бесконечно малый отрезок времени Δt каждый больной с вероятностью λ передает инфекцию здоровому человеку. Предположим, что после обращения к врачу больной становится не опасен для окружающих. Время лечения будем считать экспоненциальным с параметром μ. Найти нестационарное распределение вероятностей числа больных. В начальный момент болен был один человек.

22. Клиенты, обращающиеся в мастерскую бытового обслуживания, образуют простейший поток с параметром λ. Каждый клиент обслуживается одним мастером в течение случайного времени, подчиняющегося показательному закону с параметром μ. В случае отсутствия свободных мастеров клиент не ждет, а отказывается от обслуживания. Определить, сколько необходимо иметь мастеров, чтобы вероятность отказа клиенту в обслуживании не превосходила 0,015, если $\mu = \lambda$.

23. Решить предыдущую задачу при условии, что число обслуживающих рабочих равно r ($r < m$).

24. В электронно-вычислительной машине могут быть применены либо элементы A, либо B. Отказы этих элементов образуют простейший поток с параметрами $\lambda_A = 0{,}1$ ед./час и $\lambda_B = 0{,}01$ ед./час. Суммарная стоимость всех элементов A равна a, суммарная стоимость элементов B равна b ($b > a$). Неисправность элемента вызывает простой машины на случайное время ремонта, подчиняющееся показательному закону распределения со средним временем, равным двум часам. Стоимость каждого часа простоя машины равна c. Найти математическое ожидание экономии от применения более надежных элементов за 1000 часов работы машины.

25. Для анализа изменения с течением времени размера текущего фонда компании, ведущей дела по страхованию автомобилей, важно обладать информацией о поступлении требований по выплатам в соответствии со страховыми полисами. Наблюдение показало, что число поступающих выплат за любой промежуток времени не зависит от момент времени, с которого начинается отсчет, а зависит только от его продолжительности; требования в любые два не пересекающиеся интервала времени поступают независимо; в достаточно малые промежутки поступает по одному требованию Ожидаемое число требований равно 2. Найти:

1) вероятность того, что за месяц в компанию поступит 7 требований?

2) вероятность того, что за месяц в компанию поступит не менее7 требований?

3) вероятность того, что за месяц в компанию поступит менее 7 требований?

4) вероятность того, что за месяц в компанию не поступит ни одного требования?

5) за две недели поступит хотя бы одно?

6) интервал между двумя соседними требованиями будет меньше двух дней?

7) интервал между двумя соседними требованиями будет не менее двух дней?

С какой вероятностью:

1) за ноябрь поступит в компанию 6 требований?

2) за декабрь поступит в компанию 6 требований?

3) за январь поступит в компанию не менее 5 требований?

4) за первые две недели ноября не поступит ни одного требования?

5) за вторую и третью недели декабря поступит хотя бы одно требование?

6) интервал времени межу соседними поступлениями требований будет не менее трех дней, если первое из них поступило в первый день второй недели января?

7) интервал времени межу соседними поступлениями требований будет меньше двух дней, если первое из них поступило в начале третьей недели декабря?

26. При рассмотрении деятельности страховой компании за определенный период нас будет интересовать изменении ее начального фонда, происходящее благодаря поступлению в компанию страховых взносов и выплатам компании по страховым полисам. В связи с этим рассмотрим три состояния, характеризующиеся величиной фонда, который принимаем за 100%: 1 – текущий фонд составляет не менее 200% начального фонда, 2 – текущий фонд составляет от 100% до 200% начального фонда, 3 – менее 100% начального фонда. Изучение деятельности в предыдущие периоды позволяет сделать вывод о том, что ее переходы из состояния в состояние характеризуются следующей матрицей инфинитезимальных характеристик, не зависящих от времени:

$$Q = \begin{pmatrix} -3.8 & 2.3 & 1.5 \\ 0.8 & -2.7 & 1.9 \\ 0 & 0.4 & -0.4 \end{pmatrix}.$$

Обосновать, что в этой системе протекает однородный дискретный Марковский процесс с непрерывным временем, построить граф состояний, записать систему дифференциальных уравнений и найти вероятности состояний, если в момент, предшествующий рассматриваемому периоду фонд составлял 150% от начального фонда, найти финальные вероятности системы.

27. Поток поступления неисправной аппаратуры в мастерскую гарантийного ремонта является простейшим с параметром $\lambda = 10$ ед./час.

Продолжительность ремонта одной единицы является случайной величиной, имеющей показательный закон распределения с параметром $\mu = 5$ ед./час. Определить среднее время, проходящее от момента поступления неисправной аппаратуры до начала ремонта, если в мастерской четверо рабочих, каждый из которых одновременно ремонтирует только один прибор.

28. В травматологическом пункте работают два врача. С какой наибольшей интенсивностью могут поступать больные, чтобы среднее число ожидающих в очереди не превосходило трех, если на оказание помощи больному в среднем затрачивается 9 мин?

29. В мастерскую срочного ремонта обуви, имеющую двух мастеров, обращаются в среднем 18 клиентов в час, а среднее время обслуживания одного клиента 5 мин. Какова вероятность для клиента завершить починку обуви не более чем за полчаса?

30. На коммутатор, имеющий три внешние линии связи, поступает в среднем в час 60 требований на связь. Средняя продолжительность переговоров 3 мин. Определить: а) вероятность отказа абоненту; б) среднее число занятых линий.

Литература

1. *Волков И.К., Зуев СМ., Цветкова Г.М.* Случайные процессы : учеб. для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 448 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVIII).
2. *Маталыцкий М.А.* Элементы теории случайных процессов : учеб. пособие. Гродно : ГрГУ, 2004. 326 с.
3. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М. : Физматлит, 2002. 320 с.
4. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов : учеб. пособие. 2-е изд., испр. Томск : Изд-во НТЛ, 2010. 204 с.
5. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания : учеб. пособие. Томск : Изд-во НТЛ, 2004. 228 с.

Корректор – А.В. Воробьева
Оригинал-макет А.И. Лелоюр

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 413 от «9» июня 2014 г. Тираж 100 экз.