

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

И. Н. Коваленко

Теория массового обслуживания обязана своим возникновением практическим задачам, связанным с реальными ситуациями, в которых имеется налицо выполнение последовательности однородных операций, случайных по длительности и времени начала. Первым важным предметом исследования теории массового обслуживания были телефонные системы, характеризующиеся случайным потоком вызовов абонентов, требующих случайного времени занятия телефонной линии. В этой ситуации возникает задача расчета объема телефонного коммутатора, при котором вероятность занятости коммутатора не выше заданного уровня. Аналогичные задачи давно возникали при расчете нагрузок энергетических сетей, планировании предприятий массового обслуживания, исследовании скученности транспорта и во многих других прикладных вопросах. Со времени появления первых работ по теории массового обслуживания (Эрланг [100]) круг ее применений неизмеримо расширился, охватив столько прикладных областей, что в настоящее время определять эту теорию указанием на совокупность приложений нет никакой возможности. С другой стороны, математические методы, несмотря на их очень интенсивное развитие, представляют довольно обозримую картину. В настоящее время уже можно представить четко очерченный круг математических моделей, описывающих системы массового обслуживания; можно с той или иной точностью классифицировать аналитические методы теории массового обслуживания, каждому из них сопоставив класс задач, которые этим методом решаются.

В предлагаемом обзоре принят следующий порядок изложения материала. Вначале даются основные понятия теории массового обслуживания и формулируются «максимальные»

аналитические предпосылки, позволяющие исследовать очень широкий класс систем, то есть предпосылки, касающиеся «логики» обслуживания, могут быть самыми широкими. Далее дается обзор основных работ, в которых приняты эти аналитические предпосылки (марковский характер потока требований и процесса обслуживания). Затем мы постепенно ослабляем аналитические предположения, сопровождая этот процесс рассмотрением соответствующих методов, позволяющих решать более сложные задачи. Таким образом, делается попытка установить некоторое соответствие между методами и математическими моделями. При этом всякий раз введение новой математической постановки связывается с теми или иными прикладными задачами. Однако нам хочется подчеркнуть, что здесь не дается обзора приложений теории массового обслуживания, который мог бы претендовать на какую-либо полноту. Многие интересные приложения мы вообще не имели возможности упоминать.

Основные понятия теории массового обслуживания изложены в известной монографии А. Я. Хинчина [52], автор которой является создателем оснований теории массового обслуживания*. В каждой задаче массового обслуживания рассматривается некоторая математическая схема, которая является абстракцией той или иной физической системы обслуживания, способной выполнять однородные элементарные операции; каждую такую операцию принято называть операцией обслуживания, или просто обслуживанием. Основная характеристика обслуживания — его длительность. Принимается, что длительность обслуживания — случайная величина с некоторым законом распределения, причем длительности различных операций обслуживания независимы и одинаково распределены. Далее, каждая система массового обслуживания характеризуется определенным (конечным или бесконечным) числом (обслуживающих) каналов или приборов. Последнее характеризует максимально-допустимое количество одновременно выполняемых в системе операций обслуживания. Необходимость в выполнении операций обслуживания возникает в отдельные дискретные моменты времени. Говорят, что в эти моменты в систему поступают требования (заявки, клиенты); из телефонной терминологии заимствован термин «вызовы». На удовлетворение каждого требования необходимо затратить некоторое, вообще говоря, случайное время; поэтому говорят об «обслуживании требования». Различают системы

* Термин «теория массового обслуживания» принадлежит А. Я. Хинчину. В зарубежной (английской) литературе теорию массового обслуживания часто называют «теорией очередей» (the theory of queues).

массового обслуживания с ожиданием (очередью), с потерями (отказами) и смешанные. В первом случае каждое поступающее требование в случае занятости всех приборов становится в очередь и ожидает, пока какой-либо прибор не освободится; во втором случае никакое ожидание не возможно: всякое требование, заставшее приборы занятыми, теряется (получает отказ); к третьему случаю относится большое разнообразие промежуточных ситуаций; основные из них мы рассмотрим ниже. Состояние системы характеризуется в основном числом каналов (системы с потерями), которые в данный момент времени заняты обслуживанием требований, и числом требований, «не удовлетворенных» к данному моменту; последние образуют очередь (системы с очередью). Как только обслуживание требования заканчивается и обслуживающий прибор освобождается, он приступает к обслуживанию требования из очереди; обычно принимается обслуживание в порядке общей очереди. Если требование поступает в систему, когда хотя бы один прибор свободен, его обслуживание начинается немедленно одним из свободных приборов (в некоторых задачах приборы упорядочиваются, так что требование из свободных приборов всегда выбирает прибор с наименьшим номером; в других случаях решение задачи не зависит от подобных соглашений).

ИССЛЕДОВАНИЕ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Если рассмотреть моменты времени, когда в систему поступают требования, то множество этих моментов образует поток однородных событий, или целочисленную меру на прямой (мерой любого интервала времени будет число требований, поступивших в систему за этот интервал). Случай, когда поток детерминированный, представляет лишь ограниченный интерес. Гораздо более важно рассмотрение случайных потоков однородных событий, то есть случайных целочисленных мер. Ниже мы остановимся на основных результатах, относящихся к потокам однородных событий; здесь же опишем простейшую модель потока (термин «простейший поток» введен А. Я. Хинчиным). Прежде всего, ограничиваются рассмотрением σ -конечных с вероятностью 1 случайных мер, то есть таких мер, когда появление бесконечного числа событий потока в конечном интервале времени невозможно. В этом предположении простейший поток определяется, как случайная мера, значения которой на непересекающихся борелевских множествах независимы и распределены по закону Пуассона с параметром, пропорциональным лебеговской мере рассматриваемого множества. Большинство задач массового об-

служивания рассматривалось в предположении, что поток требований (по Хинчину — входящий поток вызовов) — простейший.

Среди всевозможных распределений длительности обслуживания требований выделяется показательное распределение; его отличительной чертой является тот факт, что распределение длительности обслуживания после момента времени t при условии, что к этому моменту обслуживание не закончилось, не зависит от t . При простейшем входящем потоке требований и показательно-распределенной длительности обслуживания можно построить марковский процесс с конечным или счетным множеством состояний, представляющий статистическую модель процесса обслуживания; при этом основные показатели качества обслуживания оказываются функционалами построенного процесса.

Указанное обстоятельство имеет место и в более общем случае, а именно, когда поток и обслуживание имеют марковский характер. Наглядный смысл этого понятия состоит в том, что вероятность поступления в систему или окончания обслуживания любого числа требований за время от t до $t + \tau$ определяется лишь состоянием системы в момент t и не изменяется при дополнительной информации о состоянии системы в моменты времени, предшествующие t . Иными словами, состояние процесса, как функция времени, образует марковский процесс. Приведем пример марковской модели процесса обслуживания, где поток требований в общем случае — не простейший, а длительность обслуживания — не показательно-распределенная.

Система состоит из n элементов, подверженных случайным отказам. Если в момент t число неисправных элементов равно k , то вероятность отказа i элементов в интервале времени $(t, t + h)$ при малом h равна $\lambda_{ki}h + o(h)$, $h \rightarrow 0$, где λ_{ki} — некоторые постоянные; если в момент t число неисправных элементов равно k , то восстановление за малое время h i элементов может произойти с вероятностью $\mu_{ki}h + o(h)$. Марковские модели позволяют описывать неординарные потоки (одновременное поступление нескольких требований), изменение темпа обслуживания, а также различные ситуации, когда параметры потока и обслуживания зависят от времени. Сделаем обзор основных результатов по марковским моделям.

Теоретическим аппаратом для исследования марковских моделей массового обслуживания служит теория цепей Маркова и марковских случайных процессов с конечным и счетным множеством состояний. Особую роль в теории массового обслуживания играет эргодическая теория цепей и процессов

Маркова. Условия эргодичности цепи Маркова в виде, весьма удобном в приложениях к теории массового обслуживания, выяснены Фостером [108]. В работе Ходжеса и Розенблатта [134] исследовано распределение времени возвращения при случайном блуждании. Предельная теорема о распределении времени пребывания в различных состояниях в случае однородного марковского процесса с конечным множеством состояний получена в работе Сираждинова [49].

Для исследования переходных процессов в системах массового обслуживания важно оценивать скорость сходимости переходных вероятностей цепи или процесса к предельным вероятностям. В недавней работе Вир-Джонса [265] доказана предельная теорема, которая может служить основанием для подобной оценки в применении ко многим конкретным моделям, в том числе немарковским. Вир-Джонс показал, что в широком классе случаев имеет место показательно-быстрая сходимость вероятностей перехода $p_{ij}^{(n)}$ счетной цепи Маркова к пределам

$$\pi_{ij} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m p_{ij}^{(n)},$$

причем справедлива оценка

$$|p_{ij}^{(n)} - \pi_{ij}| < M_{ij} \rho^n,$$

где константа $\rho < 1$ не зависит от i и j .

В очень многих задачах массового обслуживания математическую модель удастся построить при помощи процесса рождения и гибели, то есть марковского (обычно однородного) процесса со счетным упорядоченным множеством состояний, когда в момент изменения состояния процесса с вероятностью 1 происходит переход в предыдущее или следующее состояние.

Классификация процессов рождения и гибели осуществлена в работе Карлина и Мак-Грегора [148]. Пусть состояния процесса занумерованы числами $0, 1, 2, \dots$; пусть, далее λ_i — интенсивность перехода из состояния i в состояние $i+1$, μ_i — интенсивность перехода из i в $i-1$. Тогда, как показали Карлин и Мак-Грегор, необходимым и достаточным для эргодичности процесса является выполнение следующих двух условий:

$$\sum_{n \geq 0} \pi_n < \infty; \quad \sum_{n \geq 0} (\lambda_n \pi_n)^{-1} = \infty,$$

где

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n}, \quad n > 0.$$

Отметим также посвященную той же задаче статью Ван Цзы-куна [14]. Стационарные вероятности состояний процесса рождения и гибели выражаются элементарной формулой: вероятность n -го состояния, отнесенная к вероятности нулевого состояния, равна π_n . Для исследования нестационарного случая оказался весьма полезным метод интегрального представления вероятности $p_{ij}(t)$ перехода из i -го в j -е состояние за время t ([147, 148]):

$$p_{ij}(t) = \pi_j \int_0^{\infty} e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x).$$

В работах [149, 165] явно вычисляется спектральная мера $\psi(x)$ для нескольких важных случаев процессов рождения и гибели. Используя указанный метод, Карлин и Мак-Грегор [150] исследовали асимптотическое поведение переходных вероятностей и времени пребывания в фиксированном состоянии. В этой работе исследуется поведение при $s \rightarrow +0$ функции $h(s)$, определяемой формулой

$$\int_0^{\infty} e^{-st} p_{ij}(t) dt = \pi_j h(s) + h_1(s, i, j),$$

где

$$h(s) \rightarrow \infty, \quad h_1(s, i, j)/h(s) \rightarrow 0.$$

Асимптотическое поведение $h(s)$ при $s \rightarrow +\infty$ существенным образом связано с распределением времени пребывания в данном состоянии. Так, например, устанавливается, что если при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\lambda_n \pi_n} \sim C n^{\beta-1}, \quad \pi_n \sim D n^{\gamma-1}; \quad C, D, \beta, \gamma > 0,$$

то при $s \rightarrow +0$

$$h(s) \sim H s^{-\alpha},$$

где α и H — некоторые постоянные.

Эта теорема также обобщена на случай, когда в асимптотике $\lambda_n \pi_n$, π_n имеется медленно меняющийся множитель. Исследована также асимптотика функций $Q_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Дискретный аналог процессов рождения и гибели рассмотрен в [146]. В дискретном случае, естественно, спектральную меру можно сосредоточить на отрезке конечной длины. В [146] выяснен принцип нахождения асимптотических выражений для различных функционалов от процесса рождения и гибели, например, отношения вероятностей перехода $p_{ij}(t)/p_{kl}(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Неоднородные процессы рождения и гибели исследовались Кларком [82]. Этот автор получил интегральное уравнение типа Вольтерра, решение которого доставляет асимптотику переходных вероятностей при $t \rightarrow \infty$. Отметим также работу [133], в которой устанавливается связь моделей массового обслуживания с некоторыми специальными процессами рождения и гибели.

Немаловажным методом в теории марковских моделей массового обслуживания является теория ветвящихся случайных процессов. Этот аппарат особенно важен для теории надежности, где с его помощью описываются отказы в сложном оборудовании (отказ одного элемента порождает отказы других элементов). Предельные теоремы для важных классов ветвящихся случайных процессов найдены Б. А. Севастьяновым [45] и В. П. Чистяковым [56].

Вывод предельных теорем для процессов рождения и гибели, естественно, основывается на разного рода аналитических предположениях относительно поведения λ_n и μ_n , как функций n . Наиболее простая картина получается, когда эти функции линейны при $n > 0$. Обобщение на тот случай, когда имеется поглощающий экран при $n = N$, осуществлено в статье Саати [223]. Отметим также интересную работу [261], посвященную связи между цепями Маркова и процессами рождения и гибели. Перейдем к изложению результатов, касающихся конкретных моделей систем массового обслуживания.

Система с ожиданием. Имеется n обслуживающих приборов, на которые поступает простейший поток требований. В случае занятости всех приборов требования становятся в очередь с естественной дисциплиной и ожидают начала обслуживания. Длительность обслуживания распределена по показательному закону с одним и тем же параметром для всех приборов. Для подобной системы основной интерес представляет нахождение распределения длины очереди в стационарном режиме, а также распределения длительности ожидания. Эти задачи решены А. Н. Колмогоровым в 1931 г. [36]. А. Н. Колмогоров нашел необходимое и достаточное условие существования стационарного распределения рассматриваемых случайных процессов, которое заключается в следующем: среднее число требований, поступающих в систему в единицу времени, должно быть меньше производительности системы, то есть произведения числа приборов на среднее число требований, которые один прибор может обслужить в единицу времени. В работе [276] получено интегральное представление для вероятностей состояний системы (числа находящихся в ней требований) в нестационарном

случае; из этого представления следует ряд полезных выводов об асимптотическом поведении указанных вероятностей. В работах Бейли [64, 65] и Лучака [173, 174] получены некоторые точные формулы для нестационарного случая в предположении, что имеется всего один обслуживающий прибор. В частности, в [173] исследуется распределение периода занятости прибора, при этом интенсивность обслуживания и входящего потока может зависеть от времени. Ввиду сложности решения в общем случае зависимости упомянутых параметров от времени, в некоторых работах ищутся нестационарные распределения для ряда частных случаев. Так, Галлихер и Уилер [109] рассматривали постановку, в которой интенсивность обслуживания постоянна, а интенсивность входящего потока кусочно-постоянна. Это характерно для ряда систем, в частности, аэродромов с чередующимся графиком работы.

Во многих случаях система бывает построена таким образом, что требования не становятся в общую очередь, а закрепляются за приборами в циклическом порядке. В такой ситуации система с n приборами как бы расщепляется на n одноканальных (т. е. с одним прибором) систем, на каждую из которых поступает эрланговский поток требований. Подобную систему с эрланговским потоком исследовали Джексон и Никколс [142]; эти авторы получили явные формулы для основных характеристик процесса обслуживания. Аналогичная ситуация исследовалась О. А. Вольбергом [16].

Упомянем интересную работу Бейли [65] — одну из первых, посвященных исследованию процесса обслуживания при критической загрузке (то есть в том случае, когда среднее число поступающих требований в точности равно среднему числу требований, которые система может обслужить). Бейли нашел предельное распределение нормированной длины очереди при неограниченном продолжении процесса обслуживания; при отсутствии нормирования, согласно [36], собственного предельного распределения не существует.

Ряд авторов исследовал системы с ожиданием, где каждое требование должно пройти несколько фаз обслуживания; каждая фаза осуществляется отдельным прибором или группой приборов. В работах [117, 140, 141] исследован стационарный режим таких систем. В статье Рейча [210] устанавливаются полезные результаты вероятностного характера. Так, например, показано, что длительности ожидания требований на первой и второй фазах обслуживания — независимые случайные величины.

Полезное обобщение сделал А. А. Шахбазов [57], изучив систему обслуживания с приборами разной производительности.

Очень много работ по системам обслуживания с приоритетом. Обычно предполагается, что в систему поступает несколько независимых простейших потоков требований, причем требования каждого потока образуют собственную очередь. Когда обслуживающий прибор освобождается, он приступает к обслуживанию находившегося в очереди требования преимущественного класса. Различают преимущества непрерывающие и прерывающие; в последнем случае, в дополнение к сказанному выше, в случае, когда поступает преимущественное требование, обслуживание не преимущественных требований прерывается. Кроме того, различают прерывание с повторением и без повторения, — в зависимости от того, учитывается ли при возобновлении обслуживания время, ранее затраченное на обслуживание требования. Хотя скоро длительность обслуживания распределена по показательному закону, последние две разновидности приводят к одной и той же статистической модели.

В этом направлении мы можем сослаться на работы Миллера [180], Гейвера [116], Уайта и Кристая [274], Хиткота [129], Стефана [236]. Основной метод исследования, принятый во всех этих работах, — производящие функции для распределения длины очереди и т. п.; решение, как правило, получается в терминах корней некоторых трансцендентных или алгебраических уравнений.

Системы с потерями (отказами). Марковскую модель системы массового обслуживания с потерями впервые исследовал Эрланг [100], который вывел знаменитые формулы для стационарных вероятностей состояний системы, носящие его имя. Рассмотрение систем с потерями особенно существенно для телефонии; этим объясняется большое число относящихся сюда теоретических и прикладных работ в этой области. Формулы Эрланга несколькими авторами обобщались на более сложные системы с потерями, чем рассмотренная Эрлангом. Так, исследовались двухкаскадные и многокаскадные системы, соответствующие сложным телефонным сетям. Отметим работу Г. П. Башарина [2], в которой формулы Эрланга обобщены на случай двухкаскадной системы. Подобные формулы решают задачу формально полностью; однако, в связи с тем, что реальные телефонные сети содержат очень большое число элементов, расчет по точным формулам становится весьма затруднительным. Это обстоятельство стимулировало развитие приближенных методов на пути применения предельных теорем теории вероятностей. Г. П. Башарин [4] доказал предельную теорему, согласно которой многомерное распределение числа занятых линий в коммутаторах первого и второго каскада при возрастании

числа линий сходится к многомерному нормальному распределению. Укажем на работу этого же автора [5], в которой предлагается метод определения вероятностей потерь в сложных коммутационных системах, выверенный с точки зрения удобства реализации с применением вычислительных машин. В [3] решалась следующая задача. Для каждого состояния α системы с потерями определяется случайная величина $\xi_\alpha(t)$ как суммарное время пребывания системы в этом состоянии в интервале $(0, t)$. Ставился вопрос о предельном распределении вектора $\xi(t) = \{\xi_\alpha(t)\}$ при $t \rightarrow \infty$. Автор этой статьи, используя результаты С. Х. Сираждинова [49] об асимптотической нормальности вектора $\xi(t)$, нашел корреляционные характеристики компонент этого вектора.

Хомма [138] рассмотрел нестационарный случай задачи Эрланга о нахождении распределения числа занятых приборов в системе с потерями.

Представляет интерес в телефонии, а также во многих задачах исследования операций, рассмотрение системы с отказами с учетом расположения обслуживающих приборов, например, когда поступающее требование выбирает из числа свободных приборов прибор с наименьшим номером. Подобная схема впервые рассматривалась Пальмом [193]; строгая математическая теория развита в монографии А. Я. Хинчина [52]. Обнаруживается, что поток требований, потерянных на первых n приборах, уже не будет простейшим. А. Я. Хинчин [52] выдвинул гипотезу, состоящую в следующем. Пусть имеются две системы с упорядоченными приборами. Выберем интенсивности входящих потоков таким образом, чтобы на n -й прибор первой системы в среднем поступало столько же требований, что и на $n+1$ -й прибор второй системы. Тогда n -й прибор первой системы будет обслуживать в среднем больше требований, чем $n+1$ -й прибор второй системы. Сам А. Я. Хинчин доказал лишь несколько более слабое утверждение. Гипотеза Хинчина в последние годы была обоснована несколькими авторами; упомянем доказательство, принадлежащее Т. А. Азларову [1].

Системы с ограниченной очередью. В литературе рассматривалась постановка задачи, в которой максимально допустимое число требований в очереди равно m . Эта постановка обобщает систему с ожиданием ($m = \infty$) и систему с потерями ($m = 0$). Для подобной системы представляет интерес определение как характеристик, связанных с длительностью ожидания требований, так и вероятности потери. Зитек [277] нашел выражения для того и другого. Кавата [152] изучил систему массового обслуживания с ожиданием, в которой каждое входящее требование в случае на-

личия в очереди n требований с вероятностью p_n присоединяется к очереди и с вероятностью $1 - p_n$ теряется. Аналитическая теория в данном случае весьма элементарна, так как задача сводится к рассмотрению процесса рождения и гибели, о котором мы упоминали выше.

Удагава и Накамура [262] и Хейт [119] изучили систему, в которой требования с вероятностью, зависящей от длины очереди, присоединяются к ней и могут также покидать систему в процессе ожидания.

Системы с ограничениями на длительность ожидания и пребывания требований в системе. Подобные системы являются отражением ряда реальных систем обслуживания, в первую очередь систем автоматического управления. Первыми работами, относящимися к этому направлению, были две статьи Баррера [66, 67]. Баррер рассматривал систему массового обслуживания, в которую поступает простейший входящий поток требований. Длительность обслуживания требований распределена по показательному закону. Требования либо могут ожидать начала обслуживания не более постоянного времени τ , либо этой величиной ограничена общая длительность пребывания в системе. Далее, Баррер рассматривал две разновидности выбора требований из очереди при освобождении прибора: обслуживание в порядке очереди [67] и случайный выбор требований из очереди [66]. Последнее, как указывает Баррер, хорошо отражает специфику некоторых реальных операций.

В методе, которым пользовался Баррер, позднее были обнаружены некоторые аналитические неточности (Б. В. Гнеденко [21]). С. М. Броди рассмотрел систему с одним обслуживающим прибором и ограниченным временем ожидания в работах [10, 11]. Е. С. Вентцель [15] рассмотрела постановку, в которой τ является не постоянной величиной, а показательно-распределенной случайной величиной. И. Н. Коваленко при помощи метода марковских процессов исследовал случай, когда τ — постоянная величина, при произвольном числе обслуживающих приборов (задача с ограниченным временем пребывания рассмотрена в [32], задача с ограниченным временем ожидания — в [34]).

Групповое обслуживание. Модель группового обслуживания проще всего представить себе, рассмотрев процесс образования очереди пассажиров на автобус. Автобус приходит в случайные моменты времени и забирает из очереди m пассажиров; при меньшем их числе автобус также немедленно отправляется. Пассажиры образуют случайный поток. Спрашивается: какова вероятность того, что при подходе автобуса длина очереди равна n ? Важно также иссле-

довать функцию распределения длительности ожидания требований. Впервые подобную модель рассмотрел Бейли [63]; этот автор также получил некоторые результаты в случае более общей модели, чем марковский процесс со счетным числом состояний: продолжительность одного рейса автобуса в [63] считалась произвольно распределенной случайной величиной. Бейли нашел производящую функцию длины очереди в стационарном режиме. Джейсуэл [143] определил закон распределения длительности ожидания требований в рассматриваемой системе. В указанной статье принимается предположение, что продолжительность рейса имеет в качестве распределения вероятностей смесь эрланговских законов (то есть характеристическая функция этого распределения дробно-рациональна). Частный случай этой задачи был рассмотрен ранее в работе Даунтона [99]. В [97] Даунтон исследовал предельные закономерности, связанные с процессом обслуживания в принятых предпосылках, когда число мест в автобусе неограниченно возрастает и вместе с тем увеличивается интенсивность потока пассажиров. Отметим также недавнюю работу Крейвена [92].

Обслуживание станков. Задача об обслуживании станков является одной из классических задач теории массового обслуживания; в настоящее время различные обобщения этой задачи составили один из основных разделов теории надежности — теорию расчета показателей, связанных с качеством функционирования сложных систем с учетом восстановления отказывающих элементов. В классической постановке А. Я. Хинчина [52] и Б. В. Гнеденко [20] задача об обслуживании станков формулируется следующим образом. Имеется m однородных станков, каждый из которых обладает показательно-распределенной длительностью безотказной работы; отказавшие станки ремонтируются бригадой из r рабочих, причем задается распределение длительности восстановления отказавшего станка. Требуется найти, во-первых, распределение числа неисправных станков в фиксированный момент времени и, во-вторых, среднюю длительность времени простоя отказавшего станка.

А. Я. Хинчин и Б. В. Гнеденко рассмотрели решение задачи в ряде важных случаев. Явные формулы для вероятностей состояний системы получены Наором [190]. Мак [176] исследовал производительность станков, выходящих из строя по показательному закону, в предположении, что $r=1$ и что время, затрачиваемое на ремонт станка, распределено по показательному закону. В этой статье учитывалось также (постоянное) время перехода рабочего от одного станка к другому. Столлер [237] рассмотрел случай, когда возможны

различные виды поломок станка, каждый со своей вероятностью. В работе Мака, Мерфи и Уэбба [177] рассматривается несколько иная постановка, чем в статье Мака [176], а именно, в этой работе длительность ремонта станка считается постоянной. При этом также удастся свести задачу к марковской модели.

Транспортные задачи. Много работ имеется по исследованию транспортного трафика. Общей особенностью подобных постановок является взаимодействие различных транспортных единиц, при котором задержки одних единиц приводят к задержкам других. Основная задача здесь — исследование отклонения действительной скорости движения от номинальной, вызванного различными случайными факторами, которые связаны с влиянием движения одних единиц на движение других.

В работе Такача [255] вычислены характеристики, связанные с распределением времени простоя паровозов, прибывающих и отправляющихся со станции по случайному закону. Вантюра [263] применил теорию массового обслуживания к определению оптимальной работы порта. Из работ, наиболее характерных в исследовании транспортного трафика, отметим статьи Таннера [259], Уордропа [275] и Мейна [179]. В этих работах исследуются вопросы, связанные с пропускной способностью автомобильных дорог при параллельных и перекрестных потоках транспорта. В работе Шуля [224] предлагается приближенная модель, служащая для описания транспортных потоков, которые в силу взаимодействия транспортных единиц отклоняются от простейшего потока.

Бартлетт [69] предложил весьма плодотворную математическую модель, которая исходит из аппроксимации интенсивного потока транспорта диффузионным процессом. Интересная гидродинамическая аналогия движения транспорта построена Лайтхиллом [168].

Из работ, связанных со спецификой воздушного трафика, отметим [81].

Теория водохранилищ, теория запасов. При расчете объема водохранилища возникает следующая задача. Приток и сток воды представляют случайные процессы. Требуется определить вероятность того, что за фиксированный отрезок времени водохранилище ни разу не переполнится, или ни разу не опустошится. Интересно также исследовать стационарное распределение уровня воды в водохранилище.

Вполне естественно, что сложность решения поставленных задач зависит от аналитических предпосылок, касающихся притока и стока, как случайных процессов. При некоторых предположениях процесс, отражающий изменение уровня во-

ды в водохранилище, будет марковским. Рассмотрим различные частные постановки, исходящие из подобного допущения, рассматривавшиеся в литературе.

В работах Морана [181, 183] предложена марковская модель изменения уровня воды в водохранилище; здесь и в следующей статье [182] автор исходит из дискретной модели водохранилища: то-есть предполагалось, что множество различных уровней воды дискретно. Для исследования применяется аппарат цепей Маркова. В статье [184] Моран исследует очень частный случай водохранилища с непрерывным расходом воды.

Хаммерсли [121] сводит к подобной же постановке процесс изменения запасов на складе при случайном пополнении и расходовании. Гани [110] исследовал несколько нетривиальных моделей. Пусть $I(t)$ обозначает величину запаса, поступающего на склад за время t , $D(t)$ — величину продукта, в расходовании которой возникает потребность за время t , $S(t)$ — величину наличного на складе запаса в момент t . Гани изучил следующие постановки:

1. $I(t)$ образует простейший поток; $D(t) = \left[\frac{I(t-M)}{M} \right] M$ или $D(t) = I \left\{ \left[\frac{(t-T)a}{M} \right] \frac{M}{a} \right\}^*$, где M — целое число и $T < \frac{M}{a}$ — положительная постоянная.

2. $I(t)$ — стационарный процесс с независимыми приращениями, принимающими целые значения, и $D(t) = D(t-1) = \begin{cases} M, & \text{если } S(t-0) \geq M; \\ S(t-0), & \text{если } S(t-0) < M; \end{cases}$

3. $I(t)$ соответствует случаю (2), а $D(t)$ случаю (1).

4. То же, что и (3) в предположении $T = \frac{M}{a}$.

5. $I(t)$ и $D(t)$ имеют скачки, образующие независимые простейшие потоки; скачки этих процессов постоянны.

Ряд полезных формул для того случая, когда пополнение водохранилища происходит по показательному закону, получено в работе Гани и Прабху [115]. Даунтон [98] нашел выражение для преобразования Лапласа-Стилтьеса функции распределения количества продукции на складе в стационарном режиме. При этом принималось предположение о постоянной скорости расходования продукта. Поступление запаса на склад в этой работе описывается довольно общим случайным процессом. Исследовался предельный случай, когда интен-

* Здесь $[a]$ — целая часть a .

сивность запасаания примерно равна интенсивности расхода продукта. Кендалл [156] исследовал постановку, в которой пополнение склада или водохранилища происходит таким образом, что величина пополнения за время τ следует закону распределения $\frac{1}{2} \rho \lambda_{2\tau}^2$, где параметр ρ характеризует отношение средней скорости пополнения водохранилища к средней скорости расхода воды. Если v — уровень воды в водохранилище в стационарном режиме, то, как показал Кендалл, справедлива формула

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} P \{ (1 - \rho) v > w \} = e^{-2w}, \quad w \geq 0.$$

Найдена также вероятность того, что водохранилище никогда не будет пусто.

Упомянем о двух статьях Гани [111, 112]: в первой дается подробный обзор работ по водохранилищам и теории запасов, во второй выведены удобные рекуррентные формулы, по которым можно найти распределение первого момента опустошения водохранилища. В последней работе предполагается, что приток происходит по закону Пуассона, сток равномерный.

Несколько марковских дискретных моделей для водохранилищ ограниченной вместимости изучено Прабху [200, 201]. Гани и Пайк [113] применяют к исследованию уровня воды в водохранилище методы теории безгранично делимых законов распределения. Распределение первого момента опустошения водохранилища с дискретными уровнями исследовано Висакулом [269].

Отметим интересную работу Гани и Пайка [114], в которой даются неравенства для вероятности опустошения водохранилища за фиксированное время. В этой работе автор исходит из следующих предпосылок. В случайные моменты времени t_i водохранилище пополняется количествами воды $\alpha_k(i)$, где $k(i) \equiv i \pmod{p}$. Вероятность j поступлений за время τ

равна $f(j, \tau)$, $\sum_{j=0}^{\infty} f(j, \tau) e^{-sj} = e^{-\xi \tau(s)}$, $\xi(+0) = 0$; сток равномер-

ный. Висакул и Ео [270] рассмотрели некоторые задачи о водохранилищах в связи с исследованием риска страховой компании (вероятность разорения и т. п.).

Некоторые из рассмотренных работ используют более общий аппарат исследования, чем марковские модели процесса обслуживания; мы включили их в настоящий параграф с целью собрать в одно место работы, сходные по постановкам задач и приложениям; что касается аналитического аппарата, то ниже мы будем иметь возможность проиллюстрировать его на других задачах.

Другие постановки. Для исследования эффективности сложных систем существенно рассматривать схемы массового обслуживания с потоками, образующимися внутри системы и идущими от одних ее элементов к другим. Очень элементарная постановка подобного рода изучалась в статье Джексона [139]. Отметим еще работу Кёнигсберга [162], где изучается ситуация, когда имеется неполнодоступная система обслуживающих приборов.

Примеров рассмотрения различных частных моделей обслуживания марковского типа, не укладывающихся в рассмотренные выше, в литературе довольно много; однако в настоящее время трудно усмотреть возможность выделения из них широких классов постановок с аппаратом более простым, чем аппарат, применимый к цепям Маркова и марковским процессам со счетным множеством состояний самого общего вида.

Прежде чем переходить к рассмотрению более сложных систем массового обслуживания, не укладывающихся в марковские процессы со счетным множеством состояний, сделаем обзор двух важных направлений — теории потоков однородных событий и теории восстановления: именно эти теории доставляют наиболее мощный аналитический аппарат для исследования систем массового обслуживания.

ТЕОРИЯ ПОТОКОВ ОДНОРОДНЫХ СОБЫТИЙ

Потоки без последствия. Простейший поток, рассмотренный выше, обладает тем свойством, что появление событий этого потока в неперекрывающихся интервалах времени суть независимые случайные события. Если отправляться от одного этого свойства, то мы получим довольно широкий класс потоков без последствия, характеризующийся (в естественных вероятностных предпосылках) вероятностями появления того или иного числа событий в бесконечно малом интервале времени, то есть инфинитезимальными характеристиками. А. Я. Хинчин [53] исследовал условия, при которых в случае потока без последствия число событий потока в любом интервале времени распределено по закону Пуассона. Подобные потоки допускают разложение в суперпозицию статистически независимых регулярного и сингулярного потоков; последний связан с появлением событий в фиксированные дискретные моменты времени. Исследованию потоков без последствия также посвящена статья А. Я. Хинчина [54]. В монографии А. Я. Хинчина [52] дана исчерпывающая теория потоков однородных событий без последствия; найдены достаточные инфинитезимальные характеристики таких потоков.

Многие работы посвящены изучению простейшего (пуассоновского) потока. Так, в работе Марчевского [178] установлено некоторое усиленное свойство отсутствия последействия. Лукач [175] дал некоторую статистическую характеристику закона Пуассона; она может служить для статистической проверки гипотезы о простейшем характере потока.

В работе Нисиды [192] изучаются различные функционалы от простейшего потока, в частности, расстояния от произвольного момента t до события потока, определяемого некоторым дополнительным условием. Хида [131] исследовал распределение максимального перерыва между событиями простейшего потока и получил ряд предельных теорем. Например, для максимума M_n интервалов между появлением m -го и $(m+1)$ -го события потока ($0 \leq m \leq n-1$) устанавливается следующее предельное соотношение:

$$P \{ \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda M_n (\alpha \log n)^{-1} \geq 1 \} = 1,$$

где λ — интенсивность потока. Полезное для теории массового обслуживания асимптотическое разложение, связанное с законом Пуассона, получено в [30].

Подробно исследовался неоднородный поток Пуассона. В этой связи следует отметить работу Мыцельского [189], в которой приводятся формулы для распределения расстояний между событиями неоднородного потока Пуассона. Ряд характеристик этого потока исследован в работе Кофмана и Крюона [151]. Рыль-Нарджевский [219] определяет неоднородный поток в евклидовом пространстве в терминах теории меры.

Отметим статью Фиша и Урбаника [105], посвященную изучению сложного неоднородного пуассоновского процесса, содержащего в качестве частного случая все регулярные потоки без последействия. Фиш и Урбаник установили следующую характеристику такого процесса: если ξ_t — процесс с независимыми приращениями такой, что для каждого $x \neq 0$ существует интегрируемая по Лебегу функция $Q(x, t)$, удовлетворяющая соотношению

$$Q(x, t) = \begin{cases} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P \{ \xi_{t+\Delta t} - \xi_t < x \}, & x < 0, \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P \{ \xi_{t+\Delta t} - \xi_t \geq x \}, & x > 0, \end{cases}$$

причем равномерно по t

$$Q(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +0} Q_{+}(t), \quad Q(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow -0} Q_{-}(t),$$

то ξ_t — сложный пуассоновский процесс.

В ряде работ исследовалось соотношение между интенсивностью потока (средним числом событий в единицу времени) и параметром потока (пределом отношения вероятности появления хотя бы одного события в интервале длительности Δt к Δt при $\Delta t \rightarrow 0$). В. С. Королюк установил равенство обеих этих характеристик в случае стационарного потока. Данный результат изложен в монографии Хинчина [52]. Зитек [27, 28] обобщил теорему В. С. Королюка на нестационарные потоки. В работе Зитека для произвольного интервала времени $I = (\alpha, \beta)$ определяется $M(I)$ как среднее число событий в этом интервале и $\lambda(I)$, как вероятность хотя бы одного события в интервале (α, β) . Тогда, как показал Зитек, условие ординарности потока может быть выражено в виде равенства

$$M(I) = \int \lambda(i)$$

(интеграл в правой части понимается, как интеграл Бэркилла от функции интервала); из этого естественным образом следует результат В. С. Королюка.

Отметим в этой же связи работу Прекопы [203]; в этой работе находятся условия сходимости последовательности сумм независимых случайных величин к сложному распределению Пуассона, что в применении к теории потоков приводит к условиям, в которых имеет место сложный пуассоновский поток однородных событий. Упомянем также работу Хомма [135].

Из работ, посвященных потокам Пуассона в абстрактных пространствах, упомянем статью Блан-Лапьера и Форте [76], где дается весьма общее определение потока Пуассона.

Следует отметить важную работу Дарлинга [93], в которой предлагается общий метод аналитического определения функционалов от простейшего потока. Автор кладет в основу своего метода представление посредством контурного интеграла математического ожидания функции вида

$$f_0(Y_0) f_1(Y_1) \dots f_n(Y_n),$$

где Y_0, Y_1, \dots, Y_n — отрезки, на которые делится фиксированный отрезок равномерно распределенными в нем точками.

Теорема, полезная для статистики потоков без последствия (обобщение известной теоремы Райкова), установлена Тейхером [260]. В большом числе работ устанавливается, что простейший поток выступает либо в виде точного решения той или иной задачи, либо является предельным при некоторых условиях.

В первую очередь упомянем работу Хомма [137], установившего, что выходящий поток системы массового обслуживания с ожиданием при простейшем входящем потоке и показательной-распределенной длительности обслуживания — простейший. И. Н. Коваленко (см. Б. В. Гнеденко и И. Н. Коваленко [22]) показал, что простейший поток является в некоторых предположениях экстремальным в смысле наибольшей трудности слежения за объектами, появляющимися в соответствии с потоком однородных событий.

Некоторым совокупностям предпосылок о потоке, из которых выводится, что это поток Пуассона, посвящены работы Редхеффера [209], Рыль-Нарджевского [220], Флорека, Марчевского и Рыль-Нарджевского [106].

Одной из математических схем, в пределе приводящих к простейшему потоку, является суммирование независимых малоинтенсивных потоков. Г. А. Ососков [41] доказал предельную теорему о сходимости суперпозиций малоинтенсивных потоков к простейшему потоку. Эта теорема требует стационарности и ординарности потоков-слагаемых, равенства суммарных интенсивностей потоков в каждой серии, а также сходимости к этой интенсивности суммы

$$\sum_{r=1}^n \lambda_{nr} \varphi_{nr}(t),$$

где λ_{nr} — интенсивность r -го из общего числа n потоков в n -й серии, $\varphi_{nr}(t)$ — функция Пальма данного потока. Если скоро λ_{nr} равномерно малы, условия теоремы будут не только достаточными, но и необходимыми.

Случаем, когда суммируются потоки с ограниченным последствием (см. ниже), занимались Кокс и Смит [89].

Важные результаты получены в работах Б. Григелиониса [23, 24]. Этот автор исследовал асимптотическое поведение распределений, связанных со сходящимися к потоку Пуассона суммами малоинтенсивных независимых потоков. Б. Григелионис выявил также интересные случаи сходимости к нестационарному потоку Пуассона. Результаты Б. Григелиониса имеют самые непосредственные приложения в теории надежности.

Реньи установил следующий факт [215]. Если рассмотреть произвольный поток с ограниченным последствием и каждое событие его, независимо от остальных, вычеркнуть с вероятностью, близкой к единице, а потом изменить масштаб таким образом, чтобы на отрезок фиксированной длины приходилось в среднем фиксированное число невыброшенных событий, то в пределе поток невыброшенных событий будет

в смысле конечномерных распределений сходиться к простейшему потоку. Интересное обобщение теоремы Реньи получено Навроцким [191]. Навроцкий установил, что описанное выше преобразование потока (выбрасывание событий и сжатие) оставляет инвариантными смеси простейших потоков и только их. Ю. К. Беляев обобщил упомянутую теорему Реньи на произвольные потоки однородных событий, для которых выполняется некоторое свойство эргодичности. Результат Ю. К. Беляева помещен в [22].

К простейшему потоку приводит также следующая схема. В начальный момент времени на прямой имеется последовательность точек, которые затем начинают случайно блуждать по прямой независимо одна от другой. По прошествии длительного времени расположение точек будет описываться потоком близким к простейшему. Здесь в первую очередь следует назвать работу Р. Л. Добрушина [25]. Р. Л. Добрушин рассматривает последовательность частиц, расположенных на прямой. Пусть $\xi_i(t)$ обозначает координату i -й частицы в момент t . Предполагается, что при каждом фиксированном t случайные величины $\xi_i(t) - \xi_i(0)$ независимы в совокупности и не зависят от $\xi_i(0)$ при $i \neq j$. Обозначим

$$P_t(a, b) = P\{a \leq \xi_i(t) - \xi_i(0) \leq b\}.$$

Тогда, если

$$M\left\{\left|\frac{\eta_\Delta(0)}{|\Delta|} - \lambda\right|\right\}_{|\Delta| \rightarrow \infty} \rightarrow 0,$$

где $\eta_\Delta(t)$ — число $\xi_i(t)$ в интервале Δ длины $|\Delta|$, и если при любом $l > 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |P_t(nl, (n+1)l) - P_t((n-1)l, nl)| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0,$$

то в пределе будем иметь простейший поток с параметром λ . В случаях, когда проверка условия Р. Л. Добрушина оказывается затруднительной, могут быть полезными результаты Ватанабэ [267] и Льюиса [167]. В обеих этих работах принимаются простые предположения относительно начального расположения частиц, из которых при определенных условиях следует сходимость к простейшему потоку.

Довольно интенсивно изучались потоки однородных событий, которые так или иначе связаны с простейшим потоком. Они строятся, как правило, таким образом, что вначале имеется простейший — «порождающий» — поток, а затем каждой точке этого потока ставится в соответствие определенная

конфигурация точек «вторичного» потока. Весьма общее построение, связанное с вторичными потоками, осуществлено в двух статьях Прекопы [204, 205].

К этой же проблематике естественно отнести случайные процессы импульсного типа, когда каждому событию простейшего потока соответствует определенный эффект — финитная функция, равная нулю вне окрестности момента появления этого события. Исследованию эргодических свойств и корреляционных характеристик подобных процессов посвящены статьи [79, 208, 243, 244, 246, 249]. Сюда же относится теория зацепления хаотически следующих импульсов, играющая большую роль в задачах радиотехники. Мы упомянем лишь работы Я. С. Ицхоки [29] и Н. М. Седякина [48].

Теория случайных процессов, порожденных простейшим потоком, имеет важные применения к расчету мощностей разного рода энергетических систем (Реньи [214], Реньи и Сент-мартони [216]).

Следующим по сложности классом потоков однородных событий после класса потоков без последствия является класс потоков с ограниченным последствием. В неоднократно упоминавшейся выше книге [52] впервые была дана строгая теория потоков с ограниченным последствием. В последнее десятилетие эта теория интенсивно развивалась, причем привился термин «процессы восстановления» для обозначения потоков с ограниченным последствием. Этим вопросам мы посвятим следующий параграф; здесь же остановимся на некоторых работах, где исследуются потоки более общей природы.

Желание построить теорию, которая позволяла бы описывать потоки, образующиеся внутри систем массового обслуживания (потоки потерянных требований в системе с потерями, выходные потоки обслуженных требований и т. п.), привело Н. В. Яровицкого [58] к некоторой модели потоков, названных автором «односвязно-зависимыми». Смысл этого понятия заключается в следующем. Пусть t_i — моменты событий потока. Н. В. Яровицкий требует, чтобы существовало представление

$$\zeta_i = t_{i+1} - t_i = \xi_i + \eta_i,$$

где ξ_i — независимые в совокупности случайные величины, не зависящие также от η_i ; каждая из случайных величин η_i зависит только от ξ_{i-1} . Представляет интерес доказанная автором теорема о сохранении свойства односвязной зависимости при прохождении потока через однолинейную систему с потерями.

Несколько работ посвящены изучению общих свойств стационарных потоков однородных событий. Эргодическая теорема для стационарных потоков установлена Рыль-Нард-жевским [221]. Следует упомянуть работу И. М. Сливняка [50], который построил строгую теорию, связывающую теорию стационарных потоков, исходя из конечномерных распределений, с одной стороны, и исходя из фиксирования конфигураций последовательно расположенных событий, — с другой. Весьма полезная в многих приложениях модель случайных потоков предложена Бартлеттом [68].

Встречающиеся на практике потоки однородных событий самой различной природы исследовались весьма интенсивно. Для иллюстрации сошлемся на работу Шуля [225], где содержится результат обработки статистических наблюдений потока транспорта. В такого рода работах, как правило, наблюдаемый поток аппроксимируется той или иной известной математической моделью — чаще всего потоком без последствия или потоком с ограниченным последствием. Наметившаяся в последнее время тенденция рассматривать более общие марковские потоки (каждый следующий интервал между поступлением требований зависит от предыдущего) пока что не получила серьезного развития: очень трудно определять характеристики систем массового обслуживания с подобного рода входящими потоками.

ТЕОРИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Пусть $\{\xi_n\}$ — независимые в совокупности, положительные, одинаково распределенные случайные величины ($n \geq 1$), ξ_0 — положительная случайная величина, независимая от $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$. Образует последовательные суммы

$$S_0 = \xi_0, S_1 = \xi_0 + \xi_1, \dots, S_n = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n, \dots$$

В результате образуется счетное множество точек $\{S_n\}$, которое и называется процессом восстановления. Подобные процессы тесно связаны с задачами массового обслуживания. Существует очень много физических примеров, когда поток требований, поступающий в систему массового обслуживания, представляет собой процесс восстановления. Так, рассмотрим прибор, который пребывает в исправном состоянии случайное время ξ , после чего выходит из строя; в этом случае его немедленно заменяют новым прибором, имеющим то же распределение времени безотказной работы. Предположим затем, что отказавшие приборы поступают в систему массового обслуживания, которая их ремонтирует. Тогда поток требований в данную систему будет иметь ограниченное последствие.

где под требованиями понимаются отказавшие приборы. Введем некоторые обозначения: N_t — число сумм S_n в интервале $(0, t)$; $H(t)$ — математическое ожидание N_t ; $h^{(n)}(t)$ — плотность случайной величины S_n , $n \geq 0$; $h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h^{(n)}(t)$; $\gamma''(t) = t - S_{N_t}$.

Эти обозначения соответствуют основным характеристикам процесса восстановления, исследованию которых посвящены почти все работы по теории восстановления.

Заметим, что в ряде работ предположения об одинаковой распределенности и положительности случайных величин снимаются; рассматриваются также функционалы более сложные, чем перечисленные выше. На этом мы остановимся несколько ниже. Теории восстановления посвящена большая литература. Имеется монография Кокса [88]; обзорные статьи Амметера [61] и Смита [233], относящиеся соответственно к 1955 г. и 1958 г., уже объединили значительный материал. В последние годы поток работ по теории восстановления и различным ее обобщениям еще более усилился.

Наибольший интерес представляет случай, когда случайные величины ξ_i не обязательно положительны с вероятностью 1, но обладают положительными математическими ожиданиями. Одним из первых результатов в этом направлении были две теоремы Блэкуэлла [75]. Блэкуэлл предполагал, что случайные величины ξ_i , $i \geq 0$, нерешетчаты, одинаково распределены и имеют положительное математическое ожидание $m \leq \infty$. В этом случае справедливы соотношения

$$H(t + \Delta) - H(t) \rightarrow \frac{\Delta}{m}, \quad t \rightarrow \infty;$$

$$H(t + \Delta) - H(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow -\infty.$$

Если же ξ_i решетчаты, то как показал Блэкуэлл, справедливы вполне аналогичные соотношения, с тем лишь отличием, что t и Δ следует считать кратными максимальному шагу распределения.

Феллер [101] исследовал интегральное уравнение так называемое «уравнение восстановления»

$$\varphi = g + \varphi * F^*,$$

где F — функция распределения случайной величины. В случае, когда g — непрерывная финитная функция, данное уравнение допускает решение в следующем виде:

$$\varphi = g * H,$$

* Здесь $\varphi * F(t) = \int_0^t \varphi(t-s) dF(s)$

где H определено выше. В случае нерешетчатого распределения F справедливо соотношение

$$\varphi(t) \rightarrow m^{-1} \int g(x) dx, \quad t \rightarrow \infty,$$

где предполагается, что $0 < m \leq \infty$. Аналогичное соотношение имеет место и в решетчатом случае.

Феллер и Орей [102] в предположении, что ξ_i не решетчаты, доказали следующее свойство. Либо математическое ожидание $U(I)$ числа сумм S_n в интервале I равно бесконечности для любого $I = (-h, h)$, либо существует такое α , $0 \leq \alpha < \infty$, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t+I) = \alpha |I|.$$

В частности, если $m > 0$, $\alpha = \frac{1}{m}$; во всех остальных случаях $\alpha = 0$. С очевидными изменениями этот факт переносится на решетчатый случай.

Смит [226] доказал теорему о пределе при $t \rightarrow \infty$ выражения вида

$$H(t) - \int_0^t K(t-x) dH(x),$$

где $K(t)$ — функция распределения неотрицательной случайной величины.

Дискретный аналог подобных результатов исследовался Карлином [145].

Смит [231] нашел порядок роста при $t \rightarrow \infty$ функции $H(t)$ в предположении, что ξ_i , $i \geq 0$, неотрицательны и имеют в качестве функции распределения $F(x)$. Оказалось, что для выполнения соотношения

$$H(t) \sim \frac{t^\nu}{L(t)}, \quad t \rightarrow \infty,$$

где $\nu = 0$ или 1 , а $L(t)$ — медленно меняющаяся функция, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{t} \int_0^t [1 - F(x)] dx \sim \frac{L(t)}{t^\nu}, \quad t \rightarrow \infty.$$

$H(t)$ иногда называют функцией восстановления, а ее производную $h(t)$ — плотностью восстановления. Изучению предельного поведения плотности восстановления при $t \rightarrow \infty$ также посвящено много работ.

Наиболее общим следует признать результат Смита [232]. Смит рассматривает случайные величины ξ_i с общей плотностью $f(t)$ и $0 < m \leq \infty$. Вводится оператор $\Delta[v(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} v^{*n}(t)$ для любой функции $v(t)$ с n -кратной сверткой $v^{*n}(t)$; в частности,

$$\Delta[f(t)] = h(t).$$

Пусть

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0; \end{cases} \text{ и для любого } \delta > 0 \quad c_\delta(t) = f(t) u(t - \delta);$$

$$b_\delta(t) = f(t) u(t) - c_\delta(t), \quad a(t) = f(t) - b_\delta(t) - c_\delta(t).$$

Тогда для выполнения предельного соотношения

$$\Delta[f(t)] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{m}$$

необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:

- 1) $f(t) \rightarrow 0$;
- 2) для некоторого $\delta > 0$

$$\Delta[b_\delta(t)] \rightarrow 0; \text{ при } t \rightarrow \infty;$$

- 3) $c_\delta(t) \in L_p, p = p(\delta)$.

Из более ранних работ отметим [91, 228].

Смит [229] изучил асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ кумулянтов распределения случайной величины N_t . В этой же связи укажем на статью Ю. К. Беляева и В. М. Максимова [9]. В этой работе находится радиус сходимости ряда

$$\Pi_t(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{N_t = k\} z^k$$

и порядок функции $\Pi_t(z)$.

Необходимо также упомянуть работы, в которых случайные величины ξ_i могут быть разнораспределенными: [123, 186, 230]. В частности, в [186] установлена предельная теорема о поведении при $t \rightarrow \infty$ интегрального выражения

$$\int_{-\infty}^t dx \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{x}{\mu_n} \right) P\{x \leq S_n < x + h\},$$

где μ_n — математическое ожидание ξ_n .

Хатори [123] доказал, что если математические ожидания ξ_i равномерно ограничены снизу, а дисперсии — сверху некоторыми постоянными, причем существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_k = m < \infty,$$

то с вероятностью 1

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} m.$$

Исследовано также предельное поведение определенной выше случайной величины $\gamma''(t)$. Предельное поведение при $t \rightarrow \infty$ сумм вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P\{t \leq S_n < t+h\}$$

изучалось Кавата [154], причем предполагалась сходимость средних арифметических

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Моримура [185] исследовал тот случай, когда в данной сумме a_k суть независимые показательно-распределённые случайные величины.

Исследованию сумм подобного же вида (a_k — детерминированные величины) посвящены работы Хатори [124, 126, 128]. Приведем теорему Хатори [128]. Пусть $\phi(u)$ — любая бэровская функция из $L(0, \infty)$ и пусть

$$M\xi_i \geq L, \quad D\xi_i \leq K, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k \rightarrow m > 0.$$

Тогда с вероятностью 1

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^t \phi(t-u) dN_u \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \int_0^{\infty} \phi(u) du.$$

Отметим здесь же работу Кавата [153]; в ней устанавливается предельная теорема для выражения вида

$$\int_{-\infty}^t \sum_{n=1}^{\infty} P\{x \leq S_n < x+h\} dx.$$

Одна из основных предпосылок, принятых в данной работе, — условие Крамера для $\{\xi_i\}$. Случайный процесс $\gamma''(t)$ рассматривался в статьях Хиды [132], Ламперти [163].

Хатори [125, 127] установил ряд предельных теорем относительно поведения при $t \rightarrow \infty$ отношения

$$\frac{M\{[N_t]^\alpha\}}{t^\alpha}.$$

Изучению процессов восстановления, для которых случайные величины ξ_i обладают бесконечными математическими ожиданиями, посвящены исследования Е. Б. Дынкина [26], Ламперти [164], Такача [251], Қаллианпура и Роббинса [144]. В известной работе [26] Е. Б. Дынкин исследует предельное поведение при $t \rightarrow \infty$ случайной величины $\gamma''(t)$ и аналогичной ей случайной величины $\gamma'(t)$ — «величины перескока».

Теория восстановления дает ключ к решению большинства задач, возникающих в теории счетчиков. Как правило, практически интересные характеристики счетчиков являются функциями соответствующим образом выбранного процесса восстановления. Этот метод используется во многих работах, посвященных математической теории счетчиков. Мы упомянем здесь работы Б. В. Гнеденко [18], Пайка [206], Поллачека [195], Такача [241, 242, 247, 250, 256], Хаммерсли [120], Алберта и Нелсона [60].

Полезным обобщением процессов восстановления являются полумарковские процессы. Они определяются следующим образом. Пусть I_n , $n \geq 1$, — цепь Маркова (обычно с конечным множеством состояний). Далее, определяется последовательность независимых (при фиксированной реализации $\{I_n\}$) случайных неотрицательных величин ξ_n , причем распределение ξ_n — функция I_n , не зависящая от n . Полумарковский процесс — это последовательность пар $\{S_n, I_n\}_{n=1}^\infty$, где, как обычно,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

На полумарковские процессы переносятся основные предельные теоремы, о которых мы упоминали в связи с процессами восстановления. Пайк [207] произвел классификацию полумарковских процессов, основывающуюся на классификации цепи Маркова $\{I_n\}$. Эргодическая теория полумарковских цепей в случае решетчатых случайных величин ξ_n развита Анселоне [62]. Впрочем, в подобной ситуации полумарковская цепь легко сводится к обычной цепи Маркова.

Полумарковские процессы в случае, когда I_n — цепь Маркова с двумя возможными состояниями и детерминированными переходами, изучались Дерманом [95], Такачем [251, 252, 253], а также во многих работах по теории надежности.

Более общим классом случайных процессов, который включает в себя почти все процессы, рассматриваемые в теории массового обслуживания, является класс так называемых регенерирующих случайных процессов. Теория подобных процессов наиболее полно изложена в статье Смита [233], имеющейся в русском переводе. Здесь мы имеем возможность ограничиться лишь определением регенерирующего процесса.

Пусть Ω — выборочное пространство с определенной на нем вероятностной мерой и пусть каждому $\omega \in \Omega$ поставлена в соответствие положительная величина $\xi = \xi(\omega)$ и функция

$$x(t) = x(t, \omega), \quad 0 \leq t < \xi(\omega),$$

со значениями из абстрактного пространства X . Предположим теперь, что имеется бесконечная последовательность независимых испытаний, в результате которых получены значения ω , соответственно, равные $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$. Обозначим, как и выше, через N_t число сумм

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$$

в интервале $(0, t)$. Тогда регенерирующий процесс определяется следующим образом:

$$\eta(t) = x(t - S_{N_t}, \omega_{N_t}).$$

Иногда полезно рассматривать несколько более общее определение регенерирующего процесса:

$$\zeta(t) = \begin{cases} x_0(t, \omega_0), & t \leq \xi_0(\omega_0), \\ \eta(t - \xi_0(\omega_0)), & t > \xi_0(\omega_0), \end{cases}$$

где $\{\omega_0\}$ — некоторое другое выборочное пространство, ω_0 независимо от $\{\omega_i\}_{i \geq 1}$, $x_0(t, \omega_0)$ — определенная на этом пространстве функция $(0 \leq t \leq \xi_0(\omega_0))$ со значениями из X .

В статье Смита [227] имеется ряд предельных теорем, дающих представление о предельном поведении $\zeta(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

В заключение отметим эргодическую теорему Бенеша [73], относящуюся к так называемым слабо стационарным классам событий; этот класс обобщает все упомянутые выше случайные объекты.

Перейдем теперь к изложению результатов, относящихся к немарковским моделям систем массового обслуживания. Здесь существует большое число методов исследования; одни из них связаны с применением рассмотренных выше классов

случайных процессов — процессов восстановления, полумарковских процессов и т. д., другие будут затронуты ниже; однако у всех этих методов общим является использование в том или ином виде марковской связи случайных величин. Вместе с тем, каждый метод имеет свои преимущества и недостатки при решении конкретных задач, в связи с чем требует отдельного рассмотрения.

Классификация Кендалла. Кендалл в известной работе [155] предложил классификацию систем массового обслуживания, которая исходит из аналитических предположений о характере входящего потока требований и распределения длительности обслуживания, а также учитывает число обслуживающих приборов. Систему массового обслуживания Кендалл обозначает записью $A|B|n$, где A — признак входящего потока, B — признак распределения длительности обслуживания, n — число обслуживающих приборов (каналов, линий). Возможные признаки распределений кодируются следующими буквами: M — показательное распределение, E_k — распределение Эрланга, D — вырожденное распределение, G — распределение самого общего вида.

Мы введем еще один класс распределений, а именно, R — распределение с дробно-рациональной характеристической функцией. Таким образом, введенные классы распределений удовлетворяют соотношениям

$$M \subset E_k \subset R \subset G,$$

а если рассматривать замыкание данных классов распределений в смысле слабой сходимости, то будем иметь также

$$D \subset E_k,$$

что часто используется при аналитическом решении задач, когда длительность обслуживания или интервала между поступлением требований постоянна.

При обозначении потока в том случае, если он обладает ограниченным последствием, после индекса M , E_k и т. п. пишут « I » (Independent)*.

Классификация Кендалла очень удобна; она позволяет в сокращенном виде кодировать различные системы. Так, например, запись $GI|M|1$ обозначает систему массового обслуживания с входящим потоком с ограниченным последствием общего вида, показательно-распределительной длительностью обслуживания и одним обслуживающим прибором. Однако классификация данного вида неполна, так как могут

* Если входящий поток — простейший или эрланговский, — пишут просто $M(E_k)$, а не $MI(E_kI)$.

быть системы $G|G|n$ с ожиданием, с потерями и т. д. В литературе имеются предложения о дальнейшем развитии сокращенных обозначений. Мы будем далее употреблять символику Кендалла в сочетании с словестным описанием системы, там, где это необходимо; например, мы будем говорить: «система $M|G|n$ с потерями».

МЕТОД ВЛОЖЕННЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Выше были рассмотрены марковские модели систем массового обслуживания, которые характеризовались тем, что можно построить марковский процесс $\nu(t)$ с конечным или счетным множеством состояний, в том или ином смысле воспроизводящий процесс обслуживания. Кендалл [155] разработал метод вложенных цепей Маркова, основное содержание которого состоит в следующем. Для широкого класса систем массового обслуживания процесс $\nu(t)$, отражающий функционирование системы, не является марковским, однако можно выбрать такие, вообще говоря, случайные моменты времени $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$, что значения $\nu(t)$ в эти моменты времени образуют цепь Маркова с конечным или счетным множеством состояний. Это утверждение само по себе не несет никакой информации, однако все дело в том, что моменты $\{t_n\}$ можно выбирать таким образом, что по поведению процесса в эти моменты времени можно делать выводы о его поведении между этими моментами; в большинстве случаев знание распределения $\nu(t_n)$ или предела данного распределения при $n \rightarrow \infty$ уже позволяет находить основные показатели качества системы обслуживания.

Метод вложенных цепей Маркова по существу использовался уже в работах А. Я. Хинчина 30-х годов при решении отдельных задач. Кендаллу принадлежит общий метод построения вложенных цепей Маркова для широкого круга задач. Самим Кендаллом и другими авторами при помощи метода вложенных цепей исследовано большое число различных систем массового обслуживания.

Для каких систем пригоден метод вложенных цепей Маркова? Непосредственное применение принципов описания процессов обслуживания, разработанных Кендаллом, приводит к возможности построения вложенной цепи Маркова для следующего класса систем.

Если поток — типа R (см. выше), то в случае одного прибора распределение длительности обслуживания может быть любым; если число приборов больше одного, распределение длительности обслуживания может быть либо D , либо R ; впрочем, в последнем случае имеем обычную марковскую модель.

Если поток — типа GI , обслуживание может быть только типа R ; число приборов произвольно. Сказанное относится как к системам с ожиданием, так и к системам с потерями. В случае, когда обслуживающий прибор один, сюда включаются также системы с преимуществами. Не выходят за пределы данного класса также системы, характеризующиеся потоком требований марковского типа (см. выше), в том числе неординарным и с интенсивностью, зависящей от состояния системы, коль скоро множество состояний не более, чем счетно; требования также могут уходить из очереди по марковскому закону (вероятность ухода требования из очереди за время от t до $t+h$ определяется только значением $\nu(t)$ и при фиксировании последнего не зависит от

$$\{\nu(\tau_i)\}_{i=1}^m (m \geq 1; \tau_i < t, 1 \leq i \leq m).$$

В том простом случае, когда исследуется однолинейная система с потерями, вложенная цепь Маркова позволяет изучить и случай $GI|G|1$, выходящий за рамки очерченного класса систем.

Таким образом, мы видим, что применение метода Кендалла всегда позволяет строить конечную или счетную вложенную цепь Маркова, за исключением следующих случаев: 1) случая системы $GI|G| \dots$, 2) случая системы $\dots |G|n$, где $n > 1$ (на месте многоточия может стоять любой символ). Нам представляется, что возможности метода вложенных цепей Маркова далеко не исчерпаны к настоящему времени. В частности, в случае, когда $\nu(t)$ — регенерирующий случайный процесс, можно сводить к вложенным цепям Маркова значительно более широкие классы задач массового обслуживания, покрывающие $GI|G|n$. Так, в системе $GI|G|n$ вложенную цепь Маркова образуют векторы

$$\nu_n = \left\{ s_n; \operatorname{sign} \left(\sum_{i=1}^l \xi_{m_i} (-1)^{\varepsilon_i} \right); \{m_i; \varepsilon_i\} \in I_{s_n} \right\},$$

где s_n — число требований, поступивших в систему с момента, когда она в последний раз была свободна от требований, до момента t_n поступления n -го требования: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{s_n}$ суть последовательные интервалы между поступлением $(n-s_n)$ -го и $(n-s_n+1)$ -го, \dots , $(n-1)$ -го и n -го требований; соответственно $\xi_{s_n+1}, \xi_{s_n+2}, \dots, \xi_{2s_n}$ — длительности обслуживания $(n-s_n)$ -го, \dots , $(n-1)$ -го требований, I_s — некоторое конечное множество индексов и $\varepsilon_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$. Такой подход, позволяющий получать полезные теоретические и

практические результаты, к настоящему времени далеко не исследован.

Применения вложенных цепей Маркова к различным системам посвящены работы О. А. Вольберга [16], Уишарта [272, 273] Штермера [239], Хоммы [136], Конолли [84], Такача [248, 254], Финча [104], Т. И. Насировой [40], Кестена и Ранненберга [157], Сюй Гуан-хуэя [51] и многие другие. Наиболее известный и широко используемый результат, полученный посредством применения данного метода — формула для характеристической функции длительности ожидания в системе $M|G|1$, найденная А. Я. Хинчиным [52].

МЕТОД СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ

Объясним этот метод на примере системы $G|G|1$ с естественной дисциплиной очереди. Пусть t_n — момент поступления в систему n -го требования. Определим w_n как длительность ожидания n -го требования. Положим

$$\tau_n = t_{n+1} - t_n,$$

и пусть η_n — длительность обслуживания n -го требования. Тогда, как обнаружил Линдли [169], справедливо равенство

$$w_{n+1} = \begin{cases} w_n + \eta_n - \tau_n, & \text{если } w_n + \eta_n - \tau_n \geq 0, \\ 0, & \text{если } w_n + \eta_n - \tau_n < 0. \end{cases}$$

Таким образом, если случайные величины $\zeta_n = \eta_n - \tau_n$ независимы, то в качестве математической модели длительности ожидания мы будем иметь случайное блуждание по прямой с величиной n -го скачка, равной ζ_n , и с задерживающим экраном в нуле. То, что на положительной полупрямой блуждание однородного, позволяет применять в данной ситуации метод интегрального уравнения Винера-Хопфа. С его помощью исследованы распределения длительности ожидания и длины очереди в стационарном режиме в случае системы $G|G|1$ с ожиданием.

Функция распределения $F(x)$ длительности ожидания в указанных предположениях удовлетворяет интегральному уравнению на полупрямой

$$F(x) = \int_0^{\infty} k(x-y) F(y) dy, \quad x > 0,$$

где $k(x)$ — плотность вероятности случайной величины ζ_n . Условия существования и аналитический вид решения данного интегрального уравнения изучены в работах Спит-

цера [234, 235]. Этому же уравнению удовлетворяет распределение максимума последовательных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью $k(x)$; отсюда исходят различные применения к исследованию времени ожидания результатов, полученных при изучении максимумов частных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин; в качестве одного из наиболее мощных методов укажем на знаменитое тождество Спитцера [234] (см. также Уэндел [271]); весьма общая форма тождества Спитцера с различными применениями к теоретико-вероятностной проблематике имеется в работе Кингмена [161].

Заметим, что, в отличие от случая, когда имеется вложенная цепь Маркова и решение задачи (например, характеристическая функция длительности ожидания) выражается в замкнутом виде через простые характеристики обслуживания и потока, в рассматриваемой постановке решение более сложно: оно требует факторизации функции

$$\frac{1 - \tilde{k}(\lambda)}{i\lambda},$$

где $\tilde{k}(\lambda)$ — характеристическая функция распределения случайной величины ζ_n .

Тем не менее, метод случайного блуждания весьма полезен, так как во многих случаях, интересных для практики, решение удается получить в обозримом виде; к тому же, найденная вероятностная интерпретация процесса обслуживания, как случайного блуждания, дает ключ к применению метода Монте-Карло.

Метод случайного блуждания применим и к многолинейным системам. В этом случае (мы по-прежнему рассматриваем систему с ожиданием и естественной дисциплиной очереди) роль случайной величины w_n играет случайный вектор

$$W_n = \{w_{n1}, w_{n2}, \dots, w_{ns}\},$$

где s — число приборов, а w_{ni} — время, которое необходимо затратить i -му прибору после момента t_n прибытия n -го требования для окончания обслуживания тех требований, которые поступили ранее t_n . Таким образом, длительность ожидания n -го требования

$$w_n = \min \{w_{n1}, w_{n2}, \dots, w_{ns}\}.$$

Блуждание в этом случае более сложное; тем не менее Киферу и Вольфовицу [158, 159] удалось получить этим методом ряд результатов принципиального характера. Так, выяснено условие, необходимое и достаточное для существо-

вания собственного предельного распределения случайной величины w_n при $n \rightarrow \infty$. Это условие состоит в том, чтобы нагрузка системы ρ была меньше 1* $\left(\rho = \frac{M\eta_n}{sM\tau_n}\right)$.

Из работ, в которых изучается система $GI|G|n$ с ожиданием методом случайного блуждания, укажем на статьи Финча [103], Бойера [78], Уо [268]; Поллачек [196] исследовал как систему с ожиданием, так и систему с потерями. Следует упомянуть интересную работу Будро, Греффина и Каца [77], где получены производящие функции для различных показателей системы $GI|G|1$.

Из работ, где рассматриваются более общие системы, отметим работу Поллачека [198], касающуюся системы $GI|G|n$ с ограниченной длительностью ожидания. Эта постановка также сводится к рассмотрению многомерного случайного блуждания.

И. Н. Коваленко [33] предложил общую модель случайного блуждания для изучения системы $GI|G|n$ в случае, когда длительность ожидания начала обслуживания и время пребывания требования в системе ограничены сверху произвольными случайными величинами. Подробные выкладки для случая $M|G|1$ содержатся в [34].

Во многих работах (см., например, [59]) тот же метод используется для изучения систем с многофазным обслуживанием.

МЕТОД ВИРТУАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ

Для изучения системы $M|G|1$ и некоторых других систем оказался полезным метод, предложенный Такачем [245] и Бенешем [70] — метод виртуального времени ожидания.

Представим себе систему $M|G|1$ с ожиданием. Обозначим через $W(t)$ «виртуальное время ожидания», то-есть то время, которое пришлось бы ожидать начала обслуживания требованию, если бы это требование поступило в систему в момент t . $W(t)$ является марковским однородным процессом смешанного типа: возможно и непрерывное, и скачкообразное изменение. Функция $F(t, x) = P\{W(t) \leq x\}$ удовлетворяет (см. [122, 245]) интегрально-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda(t) \left\{ F - \int_0^x H(x-y) d_y F(t, y) \right\}, \quad (1)$$

* В вырожденном случае, когда поток регулярный, а длительность обслуживания постоянна, допускается также равенство $\rho = 1$.

где $\lambda(t)$ — интенсивность потока, $H(x)$ — функция распределения длительности обслуживания.

Такач нашел стационарное решение уравнения (1) при $\lambda(t) \equiv \lambda$.

Нестационарный случай изучался Рейчем [211, 212, 213]. В ряде работ конкретные системы обслуживания исследовались указанным методом. В этой связи упомянем работы Прабху [202] и Такача [257,].

Следует упомянуть исследования Бенеша [72], в которых изучается процесс $W(t)$ в самых общих предположениях относительно входящего потока и распределения длительности обслуживания. Пусть $K(t)$ обозначает суммарную длительность обслуживания требований, поступивших в систему до момента t , и пусть

$$R(t, u, w) = P\{K(t) - K(u) - t + u \leq w / w(u) = 0\}.$$

Тогда справедливо уравнение

$$F(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t R(t, u, x) F(u, 0) du, \quad x \geq 0.$$

Весьма общий метод вывода стохастических уравнений для процессов, связанных с функционированием систем массового обслуживания, развит Форте [107].

МЕТОД ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Выше был в общих чертах описан метод вложенных цепей Маркова, сводящийся к выделению дискретного множества моментов времени, на котором состояния системы образуют цепь Маркова. Метод дополнительных переменных состоит в том, что к состоянию системы $v(t)$ добавляются некоторые дополнительные переменные $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, ..., так что процесс

$$\zeta(t) = \{v(t); \xi_1(t), \xi_2(t), \dots\}$$

с расширенным множеством состояний уже оказывается марковским. Специфика задач массового обслуживания позволяет в большинстве случаев сопоставить каждому состоянию v конечное число $\tilde{v}(v)$, таким образом, что при $v(t) = v$ число переменных $\xi_i(t)$ равно $\tilde{v}(v)$, причем каждая из них с течением времени изменяется непрерывно и принимает вещественные значения.

Каков смысл дополнительных переменных? Как правило, каждая переменная характеризует обслуживание некоторого

фиксированного требования. Она имеет назначение нести в себе всю информацию об обслуживании требования до момента t , которая существенна для прогноза о продолжении данного обслуживания после этого момента. Существует два подхода к определению дополнительных переменных: выбирать в качестве $\xi_i(t)$ время, прошедшее с момента начала обслуживания, и, соответственно, время, оставшееся до окончания обслуживания. Первый подход впервые строго обоснован Б. А. Севастьяновым [46, 47]; формальный алгоритм составления уравнений для вероятностей состояний процесса $\zeta(t)$ предложен в статье Кокса [86] (см. также [85, 87]). Второй подход был развит в упоминавшихся выше работах Такача.

Принципиальной разницы между обоими подходами не существует; задача, допускающая аналитическое решение в каком-либо естественном классе аналитических выражений (например, суперпозиции характеристических функций длительностей обслуживания требований различных типов), подобным же образом решается и при другом подходе. То есть каждая задача является «легкой» или «трудной» для обоих методов одновременно. Вместе с тем, метод Севастьянова более соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания, то есть в этом случае переменные $\xi_i(t)$ являются функционалами от реализации процесса $\gamma(t)$ до момента t ; в случае же альтернативного метода $\xi_i(t)$ связаны с будущим поведением системы.

Методом дополнительных переменных получен целый ряд результатов, касающихся немарковских моделей систем массового обслуживания.

Выдающимся результатом, который привел к появлению очень большого числа последующих работ, было обобщение Б. А. Севастьяновым формул Эрланга для системы с потерями $M|M|n$ на случай $M|G|n$ [46, 47]. Б. А. Севастьянов обнаружил, что формулы Эрланга

$$p_k = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} p_0, \quad 0 \leq k \leq n,$$

для стационарных вероятностей p_k занятости k приборов, где λ — интенсивность входящего потока, а τ — математическое ожидание длительности обслуживания, справедливы в случае произвольного распределения длительности обслуживания, если только входящий поток — простейший. Используя метод Б. А. Севастьянова, многие авторы доказывали подобное свойство инвариантности для целого ряда систем массового

обслуживания. В этом направлении работали Т. П. Марьянович, Маттес и Я. Н. Кениг, Ярошенко и другие авторы. Укажем на работы Т. П. Марьяновича [37, 38, 39], имеющие важные приложения в теории надежности. Так, например, метод Б. А. Севастьянова позволил Т. П. Марьяновичу найти характеристики надежности сложных резервированных систем.

В статье И. Н. Коваленко [35] доказывается теорема, указывающая в пределах довольно широкого класса систем массового обслуживания границы того круга постановок, для которого имеет место инвариантность стационарных характеристик обслуживания по отношению к виду распределения длительности обслуживания. Таким образом, выяснено, в каких случаях вероятности состояний выражаются в одних средних характеристиках.

До работы Б. А. Севастьянова было много попыток обобщить формулы Эрланга на случай системы $M|G|n$ с потерями (см., например, Воло [264]), однако все эти работы не содержат строгого доказательства. В 1962 г. опубликована статья А. Я. Хинчина [55], посвященная этой же задаче, однако, как нам представляется, в ней также есть пробел в доказательстве: постулируется независимость остатков длящихся в данный момент времени разговоров (А. Я. Хинчин употреблял телефонную терминологию) при условии, что число этих разговоров равно k . Нам известно несколько попыток перенести рассуждения А. Я. Хинчина [55] на более общие системы; в большинстве случаев эти результаты ошибочны, так как в новой постановке независимость, о которой шла речь, не имеет места.

Из серьезных работ, в которых развивается метод Такача, отметим статью Лойнса [171]. В ней исследуется двумерный марковский процесс $(w(t), z(t))$, где $z(t)$ — транзитивная цепь Маркова, а $w(t)$ изменяется по детерминированному закону, зависящему от $z(t)$. Автор находит преобразование Лапласа распределения случайного вектора $(w(t), z(t))$ и исследует предельное поведение этого распределения при $t \rightarrow \infty$.

В статье Ю. К. Беляева [7] исследуется близкая к этой постановке модель «линейчатых случайных процессов». Математическая схема Беляева предполагает, что в любой момент времени может выполняться не более одной операции обслуживания. В подобной ситуации автор исследует аналитические свойства линейчатого случайного процесса и обосновывает ряд теорем, доказательство которых в работах Кокса отсутствовало. В частности, находятся условия существования плотности вероятности состояния процесса в момент t .

Прежде всего отметим асимптотические методы, применяемые при исследовании систем, работающих в условиях большой загрузки. Кингмен [160] заметил, что в системе $G|G|1$ с ожиданием при $\rho \uparrow 1$ нормированная длительность ожидания имеет закон распределения, сходящийся к показательному закону. Эта теорема имеет большое значение, поскольку, с одной стороны, явное нахождение распределения длительности ожидания в общем случае — трудная аналитическая задача, с другой — именно случай большой загрузки, т. е. случай, когда значения ρ , близки к 1, представляет наибольший интерес для приложений.

Эта же задача и различные ее обобщения изучались Ю. В. Прохоровым [42], О. В. Висковым, Райсом [217], И. Н. Коваленко и другими авторами. Упомянем одну из последних работ: Э. Г. Самандаров [44].

Поллачек [197] изучил систему $G|G|1$ с ожиданием в условиях критической загрузки: $\rho = 1$. Если в этом случае нормировать длительность ожидания n -го требования множителем $1/\sqrt{n}$, то в пределе при $n \rightarrow \infty$ для распределения этой случайной величины получается двоянный нормальный закон. Поллачек в той же работе исследовал задачу в более общей постановке, когда имеют место разного рода временные задержки в обслуживании. Близкие результаты были получены О. А. Вольбергом [16] и С. М. Броди [12].

Штермер [238] изучал в данном аспекте систему $M|D|1$; им рассматривался также случай $\rho > 1$ (см. также [17]).

Нам представляется, что предельные теоремы для задач массового обслуживания, основанные на методе малого параметра, должны занять очень существенное место и в теории, и в приложениях. Имеется большое разнообразие в способах выбора малого параметра: в одних случаях им может быть $1 - \rho$, как в только что упомянутых работах; в других — наоборот, существенно рассмотрение малой загрузки, так что в качестве малого параметра естественно выбрать ρ ; наконец, возможна и такая постановка, когда $\rho \rightarrow 1$ и вместе с тем число обслуживающих приборов $n \rightarrow \infty$. Имеющиеся результаты, касающиеся асимптотического анализа систем массового обслуживания методом малого параметра, следует признать еще далеко не исчерпывающими.

В настоящее время, как видно из изложенного материала, существует большое разнообразие систем массового обслуживания, показатели качества которых поддаются аналитическому исследованию. Однако какого-либо метода, который позволял бы на основании результатов для стандартных

простых систем исследовать более сложные системы, как это делается, например, в теории автоматического регулирования, не существует. Поэтому заслуживает внимания попытка построения корреляционной теории процессов, связанных с массовым обслуживанием. В этой связи укажем на работу Морза [187].

В последние годы к решению задач массового обслуживания стали широко применять метод Монте-Карло. В этом направлении имеется ряд существенных достижений и у нас, и за рубежом. С общими принципами моделирования задач массового обслуживания можно познакомиться по работе Н. П. Бусленко [13]. Различные классы систем массового обслуживания исследовались методом Монте-Карло Хайнхольдом [130], Валлстромом [266], Г. П. Климовым и Г. А. Алиевым [31] и многими другими авторами.

Однако и здесь, как и в аналитической теории, пока что отсутствует метод структурного анализа сложных систем; не разработана строгая теория разбиения сложной системы на подсистемы, которые можно было бы моделировать отдельно с последующим обобщением результатов. В такой ситуации возможности вычислительной техники в настоящее время не позволяют строить адекватные модели сложных управляющих систем. Численный метод развит в работе Декампа [94].

Только начинает развиваться статистика систем массового обслуживания. Рядом авторов получены статистические оценки параметров системы массового обслуживания в случае марковской модели обслуживания. Отметим статью Брени [80], где предлагается оценка для среднего времени пребывания требований в системе $M|M|1$ с ожиданием. Бенеш [71] нашел совокупность достаточных статистик в применении к задаче статистической оценки параметров входящего потока и длительности обслуживания для системы $M|M|\infty$.

Несколькими авторами ставился вопрос о возможности раскрытия структуры системы массового обслуживания и оценки ее параметров по наблюдению выходящего потока. Результат Каваты [152], состоящий в том, что выходящий поток системы $M|M|n$ — простейший, говорит о том, что в случае подобной системы при $\rho < 1$ по выходящему потоку невозможно восстановить ни n , ни интенсивность обслуживания. В случае системы $M|G|n$ и даже $M|G|1$ задача, по-видимому, не рассматривалась.

В последнее время появились некоторые работы, в которых исследуются системы массового обслуживания в более общих предположениях, чем независимость интервалов между поступлением в систему требований и длительностей обслужи-

вания различных требований. Одна из возможных постановок такого рода изучена Лойнсом [172]. Лойнс занимается системой массового обслуживания с ожиданием при наличии одного обслуживающего прибора. Пусть τ_n — интервал между поступлением в систему n -го и $n + 1$ -го требования, η_n — длительность обслуживания n -го требования. Автор исходит из следующего предположения. Существует последовательность случайных величин $\{z_n\}$ такая, что векторы $\{z_n, \eta_n, \tau_n\}$ образуют стационарную последовательность; η_n, τ_n и длительность ω_n ожидания n -го требования независимы при известных z_{n-1} и z_n ; ω_n и z_n независимы при известном z_{n-1} . В данной статье составлены уравнения, по которым находятся характеристики подобной системы; рассмотрен ряд примеров.

Ряд полезных обобщений процессов массового обслуживания может быть осуществлен при помощи аппарата производных цепей Маркова, развитого в работе Козэна [83].

МОНОГРАФИИ, ОБЗОРЫ, ТАБЛИЦЫ

На русском языке имеются только две монографии по теории массового обслуживания: А. Я. Хинчина [52] и Б. В. Гнеденко и И. Н. Коваленко [22] (первые два выпуска этой книги — Б. В. Гнеденко [19]). Опубликована также обзорная статья Ю. К. Беляева, Б. В. Гнеденко и И. Н. Коваленко [8]. Отметим также книгу В. Я. Розенберга и А. И. Прохорова [43], рассчитанную на читателя-прикладника. Из зарубежных книг по теории массового обслуживания в первую очередь нужно назвать монографию Саати [222], отличающуюся обилием материала (особенно по марковским моделям) и доступным стилем изложения. С точки зрения общности подхода к процессам, связанным с массовым обслуживанием, нам представляется наиболее ценной монография Бенеша [71]. В книге Поллачека [199] изложена теория систем $GI/G/n$ с применением аппарата теории функций комплексного переменного к исследованию соответствующего случайного блуждания. В книге Такача [258] исследуются, в основном, однолинейные системы, методом интегро-дифференциальных уравнений. Теория систем массового обслуживания, характерных для телефонии, подробно изложена в монографии Сиски [240]. Для специалистов, занимающихся приложениями в исследовании операций, большой интерес может представить книга Морза [188]. Отметим также монографии Кокса и Смита [90], Риордана [218], Ле-Галля [166]. Аппарат марковских процессов в виде, удобном для использования в теории массового обслуживания, имеется в книге Баруча — Райда [74].

В заключение автор хотел бы выразить искреннюю благодарность О. В. Вискову — редактору обзора за полезные замечания. Автор включил в обзор свыше 20 работ, указанных редактором.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Азларов Т. А., Обобщение одной теоремы А. Я. Хинчина. Тр. Ташкентск. ун-та, 1961, вып. 189, 113—118 (РЖМат, 1962, 11В337)
2. Башарин Г. П., Теоретико-вероятностное исследование двухкаскадной телефонной системы с отказами, работающей в режиме свободного искаания. Докл. АН СССР, 1958, 121, № 1, 101—104 (РЖМат, 1959, 9352)
3. —, О предельном распределении времени занятости полностью доступного пучка линий. Теория вероятностей и ее применения, 1960, 5, № 2, 246—252 (РЖМат, 1961, 7В183)
4. —, О многомерном предельном распределении чисел занятых линий в коммутаторах второго каскада телефонной системы с отказами. Докл. АН СССР, 1958, 121, № 2, 280—283 (РЖМат, 1961, 4В179)
5. —, Об аналитическом определении и методах вычисления вероятностей потерь в коммутационных схемах. В сб. Пробл. передачи информации, вып. 9, М., АН СССР, 1961, 5—47 (РЖМат, 1962, 5В424)
6. —, Таблицы вероятностей и средних квадратичных отклонений потерь на полностью доступном пучке линий. Изв. АН СССР, М., 1962
7. Беляев Ю. К., Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности. Тр. VI Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1960, Вильнюс, Гос. изд-во полит. и научн. лит. ЛитССР, 1962, 309—323 (РЖМат, 1964, 5В146)
8. Беляев Ю. К., Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Основные направления исследований в теории массового обслуживания. Тр. VI Всесоюз. совещания по теории вероятн. и матем. статистике, Вильнюс, 1962, 341—357
9. —, Максимов В. М., Свойства аналитичности производящей функции для числа восстановлений. Теория вероятностей и ее применения, 1963, 8, № 1, 108—112 (РЖМат, 1963, 9В86)
10. Броди С. М., Об одной задаче теории массового обслуживания. Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958, Ереван, АН АрмССР, 1960, 143—147 (РЖМат, 1961, 8В179)
11. —, Про однолінійну систему з т-чекуванням у випадку ерланівського вхідного потоку. Доповіді АН УРСР, 1962, 1425—1428 (РЖМат, 1963, 11В402)
12. —, Об одной предельной теореме теории массового обслуживания. Укр. матем. ж., 1963, 15, № 1, 76—79 (РЖМат, 1964, 6В428)
13. Бусленко Н. П., Решение задач теории массового обслуживания методом моделирования на электронных цифровых вычислительных машинах. В сб. Пробл. передачи информации, вып. 9, М., АН СССР, 1961, 48—69 (РЖМат, 1962, 6В333)
14. Ван Цзы-кун, Классификация всех процессов размножения и гибели. Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 4, 19—25 (РЖМат, 1960, 3264)
15. Вентцель Е. С., Теория вероятностей. (Учебник для вузов). Изд. 2-е переработ. и доп. М., Физматгиз, 1962, 564 стр. илл., 1 р. 11 к. (РЖМат, 1964, 5В58К)
16. Вольберг О. А., Задача о стационарной и нестационарной очередях. Докл. АН СССР, 1939, 24, № 7, 656—661

17. —, Предельный случай стационарной задачи об ожидании. Уч. зап. пед. ин-та, Ленинград, 1939, 28, 103—110
18. Гнеденко Б. В., О счетчиках Гейгера—Мюллера. Ж. эксперим. и теор. физики, 1941
19. —, Лекции по теории массового обслуживания, вып. 1—2, Киев, 1960
20. —, О среднем простое станков при многоступенчатой работе. Изв. хлопчатобум. пром-сти, 1934, 11, 15—18
21. —, Несколько замечаний к двум работам Д. И. Баррера. BuM. Inst. Politehn. Iași, 1959, 5, № 1—2, 111—118 (РЖМат, 1963, 1В201)
22. —, Коваленко И. Н., Лекции по теории массового обслуживания, вып. 1—3, Киев, 1963
23. Григелионис Б., Об одной предельной теореме теории восстановления. Liet. matem. rinkinyus, Лит. матем. сб., 1962, 2, № 1, 25—34 (РЖМат, 1963, 9В85)
24. —, Об асимптотическом разложении остаточного члена в случае сходимости к закону Пуассона, Liet. matem. rinkinyus, Лит. матем. сб., 1962, 2, № 1, 35—48 (РЖМат, 1963, 9В82)
25. Добрушин Р. Л., О законе Пуассона для распределения частиц в пространстве. Укр. матем. ж., 1956, 8, № 2, 127—134 (РЖМат, 1957, 4997)
26. Дынкин Е. Б., Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1955, 19, № 4, 247—266 (РЖМат, 1956, 5998)
27. Зитек Ф., К теории ординарных потоков. Чехосл. матем. ж., 1958, 3, № 3, 448—459 (РЖМат, 1962, 3В17)
28. —, Заметка об одной теореме Королюка. Чехосл. матем. ж., 1957, 7, (82), 318—319 (РЖМат, 1958, 3925)
29. Ицхоки Я. С., Вероятность n -зацепления хаотически следующих импульсов случайной длительности и распределение длительности их зацепления. Радиотехн. и электроника, 1962, 7, № 1, 16—24 (РЖМат, 1962, 9В86)
30. Китанин Л. Ф., Распределение Пуассона, асимптотические разложения. Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-т, 1955, 3, 170—171 (РЖМат, 1958, 1371)
31. Климов Г. П., Алиев Г. А., Решение на вычислительных машинах одной задачи теории массового обслуживания методом Монте-Карло. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 5, 933—935 (РЖМат, 1962, 6В332)
32. Коваленко И. Н., Исследование многолинейной системы обслуживания с очередью и ограниченным временем пребывания в системе. Укр. матем. ж., 1960, 12, № 4, 471—476 (РЖМат, 1961, 11В194)
33. —, Об одном методе в теории массового обслуживания. Резюме. Тр. VI Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1960. Вильнюс, Гос. изд-во полнт. и научн. лит. ЛитССР, 1962, 357—358 (РЖМат, 1964, 3В376)
34. —, Некоторые задачи массового обслуживания с ограничением. Теория вероятностей и ее применения, 1961, 6, № 2, 222—228 (РЖМат, 1961, 12В214)
35. —, Об условии независимости вероятностей состояний системы обслуживания от вида распределения времени обслуживания. В сб. Probl. передачи информ. Вып. 2. М., АН СССР, 1962, 147—151 (РЖМат, 1963, 7В377)
36. Колмогоров А. Н., Sur la problème d'attente. Матем. сб., 1931, 38, № 1—2, 101—106
37. Марьянович Т. П., Обобщение формул Эрланга на случай, когда приборы могут выходить из строя и восстанавливаться. Укр. матем. ж., 1960, 12, № 3, 279—286 (РЖМат, 1961, 7В187)

38. —, Надійність системи при наявності резерву. Доповіді АН УРСР, 1961, № 7, 850—853 (РЖМат, 1962, 5В119)
39. —, Надійність системи зі змішаним резервом. Доповіді АН УРСР, 1961, № 8, 994—997 (РЖМат, 1962, 5В120)
40. Насирова Т. И., Об одном обобщении задачи Эрланга. Тр. Вычисл. центра АН АзербССР, 1963, 2, 3—13 (РЖМат, 1964, 6В423)
41. Ососков Г. А., Одна предельная теорема для потоков однородных событий. Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 2, 274—282 (РЖМат, 1957, 8044)
42. Прохоров Ю. В., Переходные явления в процессах массового обслуживания. I. Лит. матем. сб., III, 1963, № 1, 199—205.
43. Розенберг В. Я., Прохоров А. И. Что такое теория массового обслуживания? Изд. «Советское Радио».
44. Самандаров Э. Г., Системы обслуживания в условиях большой нагрузки. Теория вероятностей и ее применения, 1963, 8, № 3, 327—330 (РЖМат, 1964, 2В17)
45. Севастьянов Б. А., Предельные теоремы для ветвящихся случайных процессов специального вида. Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 3, 339—348 (РЖМат, 1958, 6951)
46. —, Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами. Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 1, 106—116 (РЖМат, 1958, 7970)
47. —, Формулы Эрланга в телефонии при произвольном законе распределения длительности разговора. Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, Т. 4. М., АН СССР, 1959, 68—70 (РЖМат, 1960, 9361)
48. Седякин Н. М., Количественное соотношение при совпадении импульсов. Научн. докл. высш. школы. Радиотехн. и электроника, 1958, № 1, 90—95 (РЖМат, 1959, 7294)
49. Сираждинов С. Х., Предельные теоремы для однородных цепей Маркова с непрерывным временем. Докл. АН СССР, 1954, 98, № 6, 905—908 (РЖМат, 1956, 3185)
50. Сливняк И. М., Некоторые свойства стационарных потоков однородных случайных событий. Теория вероятностей и ее применения, 1962, 7, № 3, 347—352 (РЖМат, 1963, 9В110)
51. Сюй Гуан-хуэй, Процессы очереди в системе $GI/M/n$ с групповым обслуживанием. Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1960, 10, № 2, 182—189 (РЖМат, 1961, 4В176)
52. Хинчин А. Я., Математические методы теории массового обслуживания, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1955, 49 (РЖМат, 1957, 5032)
53. —, О пуассоновских потоках случайных событий. Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 3, 320—327 (РЖМат, 1958, 5917)
54. —, Потоки случайных событий без последствия. Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 1, 3—18 (РЖМат, 1958, 9047)
55. —, О формулах Эрланга в теории массового обслуживания. Теория вероятностей и ее применения, 1962, 7, № 3, 330—335 (РЖМат, 1963, 9В181)
56. Чистяков В. П., Локальные предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 3, 360—374 (РЖМат, 1958, 5913)
57. Шахбазов А. А., Обслуживание приборами разной производительности. Елми әсәрләр. Азәрб. унив. Физ.-ријазинјат вәкимја елмләри сер., Уч. зап. Азәрб. ун-т, Сер. физ.-матем. и хим. н., 1962, № 3, 107—113 (РЖМат, 1963, 6В303)
58. Яровицкий Н. В., О некоторых свойствах односвязно зависимых потоков. Укр. матем. ж., 1962, 14, № 2, 170—179 (РЖМат, 1963, 9В185)

59. **Akaike Horotugu**, On ergodic property of a tandem type queueing process. Ann. Inst. Statist. Math., 1957, 9, № 1, 13—21 (PJKMar, 1961, 7B179)
60. **Albert G. E., Nelson L.**, Contributions of the statistical theory of counting data. Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 1, 9—22 (PJKMar, 1954, 1751)
61. **Ammeter H.**, Das Erneuerungsproblem und seine Erweiterung auf stochastische Prozesse. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1955, № 2, 265—304 (PJKMar, 1957, 725)
62. **Anselone P. M.**, Ergodic theory for discrete semi-Markov chains. Duke Math. J., 1960, 27, № 1, 33—40 (PJKMar, 1961, 2B19)
63. **Bailey N. T. J.**, On queueing processes with bulk service. J. Roy. Statist. Soc., 1954, B16, № 1, 80—87 (PJKMar, 1955, 3879)
64. —, A continuous time treatment of a simple queue using generating functions. J. Roy. Statist. Soc., 1954, B16, № 2, 288—291 (PJKMar, 1957, 1671)
65. —, Some further results in the nonequilibrium theory of a simple queue. J. Roy. Statist. Soc., 1957, B19, № 2, 326—333 (PJKMar, 1959, 5056)
66. **Barrer D. Y.** Queueing with impatient customers and indifferent clerks. Operat. Res., 1957, 5, № 5, 644—649 (PJKMar, 1958, 7033)
67. —, Queueing with impatient customers and ordered service. Operat. Res., 1957, 5, № 5, 650—656 (PJKMar, 1957, 7034)
68. **Bartlett M. S.**, Processus stochastiques ponctuels. Ann. Inst. Henri Poincaré, 1954, 14, № 1, 35—60 (PJKMar, 1957, 4991)
69. —, Some problems associated with random velocity. Publ. Inst. statist. Univ. Paris, 1957, 6, № 4, 261—270 (PJKMar, 1959, 7306)
70. **Beneš V. E.**, On queues with Poisson arrivals. Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 670—677 (PJKMar, 1959, 3032)
71. —, General stochastic processes in the theory of queues. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Massachusetts, Palo Alto, London, 1963 (PJKMar, 1964, 8B68K)
72. —, Combinatory methods and stochastic Kolmogorov equations in the theory of queues with one server. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 94, № 2, 282—294 (PJKMar, 1961, 7B181)
73. —, A «renewal» limit theorem for general stochastic processes. Ann. Math. Statistics, 1962, 33, № 1, 98—113 (PJKMar, 1963, 6B95)
74. **Bharucha-Reid A. T.**, Elements of the theory of Markov processes and their applications. New York, McGraw-Hill Book Co., 1960, XI, 468 pp., 11.50 doll. (PJKMar, 1961, 4B29 K)
75. **Blackwell D.**, Extension of a Renewal Theorem. Pacific. J. Math., 1953, 3, № 3, 315—320 (PJKMar, 1954, 3388)
76. **Blanc-Lapierre A., Forter R.**, Sur les répartitions de Poisson. C. r. Acad. Sci., 1955, 240, № 10, 1045—1046 (PJKMar, 1960, 1908)
77. **Boudreau P. E., Griffin J. S. Jr, Kac M.** A discrete queueing problem with variable service times. IBM J. Res. and Developm., 1962, 6, № 4, 407—418 (PJKMar, 1963, 9B182)
78. **Boyer R. H.**, An integro-differential equation for a Markov process. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, 7, № 4, 473—486 (PJKMar, 1961, 4B19)
79. **Breny H.**, Sur une classe de fonctions aléatoires liées à la loi de Poisson. Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, 22, № 8—10, 405—416 (PJKMar, 1955, 4603)
80. —, Sur l'estimation ergodique du temps moyen de présence dans, une file d'attente du type M1/M/1. Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1962, 31, № 11—12, 767—779 (PJKMar, 1963, 9B187)
81. **Chantal R.**, Sur des probabilités relatives au trafic aérien dans les aéroports. Travaux, 1953, 37, № 226, 397—403 (PJKMar, 1954, 3782)

82. **Clarke A. B.**, Waiting line process of Markov type. *Ann. Math. Statistics*, 1956, 27, № 2, 452—459 (PЖMat, 1957, 3370)
83. **Cohen J. W.**, Applications of derived Markov chains in queueing theory. *Appl. Scient. Res.*, 1963, B10, № 3—4, 269—303 (PЖMat, 1964, 6B430)
84. **Conolly B. W.**, The busy period in relation to the queueing process GI/M/1. *Biometrika*, 1959, 46, № 1—2, 246—251 (PЖMat, 1961, 4B175)
85. **Cox D. R.**, A note on the formal use of complex probabilities in the theory of stochastic processes. *Proc. Internat. Congr. Math.*, 1954, 2, Amsterdam, 1954, 284—285 (PЖMat, 1957, 731)
86. —, The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1955, 51, № 3, 433—441 (PЖMat, 1956, 6749)
87. —, A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1955, 51, № 2, 313—319 (PЖMat, 1958, 4883)
88. —, *Renewal theory*. London, Methuen, 1962, 142 pp. (PЖMat, 1963, 10B119K)
89. —, Smith W. L., On the superposition of renewal processes. *Biometrika*, 1954, 41, № 1, 2, 91—99 (PЖMat, 1957, 1675)
90. —, *Queues*, Methuen, J. Wiley and Sons, London—N. Y., 1961, 180 pp., ill. (PЖMat, 1964, 4B373K)
91. —, A direct proof of a fundamental theorem of renewal theory. *Skand. aktuarietidskr.*, 1953, № 3—4, 139—150 (PЖMat, 1956, 3193)
92. **Craven B. D.**, Some results for the bulk service queue. *Austral. J. Statist.*, 1963, 5, № 2, 49—56 (PЖMat, 1964, 8B356)
93. **Darling D. A.**, On a class of problem related to the random division of an interval. *Ann. Math. Statistics*, 1953, 24, № 2, 239—253 (PЖMat, 1954, 3390)
94. **Descamps R.**, Calcul direct des probabilités d'attente dans une file. *Rev. franc. rech. opérat.*, 1959, 3, № 11, 88—100 (PЖMat, 1960, 10738)
95. **Derman C.**, Remark concerning two-state semi-Markov processes. *Ann. Math. Statistics*, 1961, 32, № 2, 615—616 (PЖMat, 1962, 4B19)
96. **Doig A.**, A bibliography on the theory of queues. *Biometrika*, 1957, 44, № 3—4, 490—514 (PЖMat, 1959, 3033)
97. **Downton F.**, On limiting distributions arising in bulk service queues. *J. Roy. Statist. Soc.*, 1956, B18, № 2, 265—274 (PЖMat, 1958, 5031)
98. —, A note on Moran's theory of dams. *Quart. J. Math.*, 1957, 8, № 32, 282—286 (PЖMat, 1959, 8306)
99. —, Waiting time in bulk service queues. *J. Roy. Statist. Soc.*, 1955, B17, № 2, 256—261 (PЖMat, 1960, 2090)
100. **Erlang A. K.**, Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges, *The Post Office Electrical Engineers Journal*, 1918, 10, 189—197
101. **Feller W.**, A simple proof for renewal theorems. *Commun. Pure and Appl. Math.*, 1961, 14, № 3, 285—293 (PЖMat, 1962, 8B17)
102. —, Orey S., A renewal theorem. *J. Math. and Mech.*, 1961, 10, № 4, 619—624 (PЖMat, 1962, 7B13)
103. **Finch P. D.**, On the distribution of queue size in queueing problems. *Acta math. Acad. scient. Hung.*, 1959, 10, № 3—4, 327—336 (PЖMat, 1961, 1B204)
104. —, Balking in the queueing system GI/M/1. *Acta math. Acad. scient. Hung.*, 1959, 10, № 1—2, 241—247 (PЖMat, 1960, 10737)

105. **Fisz M.**, Urbanik K., The analytical characterisation of the composed nonhomogeneous Poisson process. Bull. Acad. polon. sci., Cl. III. 1955, 3, № 3, 149—150 (PJKMar, 1959, 8962)
106. **Flórek K.**, Marczewski E., Ryll-Nardzewski C., Remarks on the Poisson stochastic process (I). Studia math. (Warszawa), 1953, 13, № 1, 122—129 (PJKMar, 1955, 3306)
107. **Fortet R. M.**, Random distributions with an application to telephone engineering. Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability, Vol. 2. Berkeley—Los Angeles, 1956, 81—88 (PJKMar, 1958, 8115)
108. **Foster F. G.**, On the stochastic matrices associated with certain queueing processes. Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 3, 355—360 (PJKMar, 1959, 4011)
109. **Gallier H. P.**, Wheeler R. C., Nonstationary queueing probabilities for landing congestion of aircraft. Operat. Res., 1958, 6, № 2, 264—275 (PJKMar, 1959, 7305)
110. **Gani J.**, Some problems in the theory of provisioning and of dams. Biometrika, 1955, 42, № 1—2, 179—200 (PJKMar, 1959, 6164)
111. —, Problems in the probability theory of storage systems. J. Roy. Statist. Soc., 1957, B19, № 2, 181—206 (PJKMar, 1959, 8304)
112. —, Elementary methods for an occupancy problem of storage. Math. Ann., 1958, 136, № 5, 454—465 (PJKMar, 1959, 11390)
113. —, Pyke R., The content of dam as the supremum of an infinitely divisible process. J. Math. and Mech., 1960, 9, № 4, 639—651 (PJKMar, 1961, 5B129)
114. —, Inequalities for first emptiness probabilities of a dam with ordered inputs. J. Roy. Statist. Soc., 1962, B24, № 1, 102—106 (PJKMar, 1963, 7B196)
115. —, Prabhu N. U., Stationary distributions on the negative exponential type for the infinite dam. J. Roy. Statist. Soc., 1957, B19, № 2, 342—351 (PJKMar, 1959, 8305)
116. **Gaver D. P.**, A waiting line with interrupted service, including priorities. J. Roy. Statist. Soc., 1962, B24, № 1, 73—90 (PJKMar, 1963, 11B395)
117. **Ghosal A.**, Queues in series. J. Roy. Statist. Soc., 1962, B24, № 2, 359—363 (PJKMar, 1963, 9B180)
118. **Girault M.**, Initiation aux processus aléatoires. Le processus de Poisson files d'attente pannes de machines. Paris, Dunod, 1959, X, 107 p., ill. (PJKMar, 1961, 4B252K)
119. **Haight F. A.**, Queueing with reneging. Metrika, 1959, 2, № 3, 186—197 (PJKMar, 1961, 5B122)
120. **Hammersley J. M.**, On counters with random dead time I. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, 49, Part 4, 623—637 (PJKMar, 1954, 3781)
121. —, Storage problems. Math. Ann., 1955, 128, № 5, 475—478 (PJKMar, 1956, 1516)
122. **Hasofer A. M.**, On the integrability, continuity and differentiability of a family of functions introduced by L. Takács. Ann. Math. Statistics, 1963, 34, № 3, 1045—1049 (PJKMar, 1964, 8B70)
123. **Hatori Hirohisa**, Some theorems in an extended renewal theory. I. Kodai Math. Semin. Repts, 1959, 11, № 3, 139—146 (PJKMar, 1961, 3B20)
124. —, A note on a renewal theorem. Kodai Math. Semin. Repts, 1960, 12, № 1, 28—37 (PJKMar, 1961, 3B22)
125. —, Some theorems in an extended renewal theory. II. Kodai Math. Semin. Repts, 1960, 12, № 1, 21—27 (PJKMar, 1961, 3B21)

126. —, Some theorems in an extended renewal theory. III. Kodai Math. Semin. Repts, 1961, 13, № 4, 219—223 (PЖMat, 1963, 5B112)
127. —, An extended renewal theory. Bull. Tokyo Inst. Technol., 1961, № 39, 3—4, (PЖMat, 1962, 8B21)
128. —, Some theorems in an extended renewal theory. IV. Kodai Math. Semin. Repts, 1962, 14, № 2, 86—94 (PЖMat, 1963, 5B113)
129. **Heathcote C. R.**, The time-dependent problem for a queue with preemptive priorities. Operat. Res., 1959, 7, № 5, 670—680 (PЖMat, 1961, 5B124)
130. **Heinhold J.**, Das Schalterproblem. MTW-Mitt., 1958, 5, № 5, 261—269 (PЖMat, 1960, 714)
131. **Hida Takeyuki**, On some asymptotic properties of Poisson process. Nagoya Math. J., 1953, 6, October, 29—36 (PЖMat, 1956, 3184)
132. —, On the transition probability of a renewal process. Nagoya Math. J., 1957, 11, 41—51 (PЖMat, 1958, 4879)
133. **Hisinuma**, Некоторые замечания о теории очередей. Bull. Japan Statist. Soc., 1955, 70—75 (PЖMat, 1958, 7032)
134. **Hodges J. L. Jr.**, **Rosenblatt M.**, Recurrence-time moments in random walks. Pacif. J. Math., 1953, 3, № 1, 127—136 (PЖMat, 1954, 1727)
135. **Homma Tsuruchiyo**, On a convoluted Poisson process. Repts. Statist. Applic. Res., Union Japan Scientists and Engrs, 1953, 3, № 1, 6—12 (PЖMat, 1961, 1B17)
136. —, On the many server queueing process with a particular type of queue discipline. Repts. Statist. Applic. Res., Union Japan Scientists and Engrs, 1956, 4, № 3, 90—101 (PЖMat, 1960, 8081)
137. —, A certain queueing problem of two service stages and the erflux distribution. J. Operat. Res. Soc. Japan, 1957, 1, № 1, 25—36 (PЖMat, 1961, 5B125)
138. —, On some fundamental traffic problems. Yokohama Math. J., 1957, 5, № 1, 99—114 (PЖMat, 1959, 6163)
139. **Jackson J. R.**, Networks of waiting lines. Operat. Res., 1957, 5, № 4, 518—521 (PЖMat, 1958, 7035)
140. **Jackson R. P. R.**, Queueing systems with phase type service. Operat. Res. Quart., 1954, 5, № 4, 109—120 (PЖMat, 1956, 663)
141. —, Random queueing processes with phase-type service. J. Roy. Statist. Soc., 1956, B18, № 1, 129—132 (PЖMat, 1958, 5036)
142. —, **Nickols D. G.**, Some equilibrium results for the queueing process $E_k/M/1$. J. Roy. Statist. Soc., 1956, B18, № 2, 275—279 (PЖMat, 1958, 8134)
143. **Jaiswal N. K.**, Bulk-service queueing problem. Operat. Res., 1960, 8, № 1, 139—143 (PЖMat, 1961, 4B178)
144. **Kallianpur G.**, **Robbins H.**, The sequence of sums of independent random variables. Duke Math. J., 1954, 21, № 2, 285—307 (PЖMat, 1955, 3856)
145. **Karlin S.**, On the renewal equation. Pacif. J. Math., 1955, 5, № 2, 229—257 (PЖMat, 1956, 8964)
146. —, **McGregor J.**, Representation of a class of stochastic processes. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 4, № 6, 387—391 (PЖMat, 1957, 7194)
147. —, The differential equations of birth-and-death processes, and the Stieltjes moment problem. Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, № 2, 489—546 (PЖMat, 1958, 9043)
148. —, The classification of birth and death processes. Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 86, № 2, 366—400 (PЖMat, 1962, 9B27)

149. —, Many server queueing processes with Poisson input and exponential service times. *Pacif. J. Math*, 1958, 8, № 1, 87—118 (ПЖМар, 1961, 3В29)
150. —, Occupation time laws for birth and death processes. *Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability*, 1960. Vol. 2, Berkeley—Los Angeles, Univ. California Press, 1961, 249—272 (ПЖМар, 1962, 11В21)
151. Kaufmann A., Cruon R., Le processus de Gallier. *Distribution de Poisson «par grappes»*. *Rev. franç. rech. opérat.*, 1959, 3, № 12, 137—144 (ПЖМар, 1961, 3В30)
152. Kawata Tatsuo, A problem in the theory of queues. *Repts. Statist. Applic. Res., Union Japan and Engrs*, 1955, 3, № 4, 122—129 (ПЖМар, 1961, 5В121)
153. —, A renewal theorem. *J. Math. Soc. Japan*, 1956, 8, № 2, 118—126 (ПЖМар, 1958, 6В46)
154. —, A theorem of renewal type. *Kodai Math. Semin. Repts*, 1961, 13, № 3, 185—194 (ПЖМар, 1962, 7В14)
155. Kendall D. G., Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain. *Ann. Math. Statistics*, 1953, 24, № 3, 338—354 (ПЖМар, 1956, 3218). Имеется русский перевод. Математика, сб. перев. ин. ст. 3, 6, 1959)
156. —, Some problems in the theory of dams. *J. Roy. Statist. Soc.*, 1957, B19, № 2, 207—233 (ПЖМар, 1959, 6142)
157. Kesten H., Runnenburg J. T., Priority in waiting line problems. *Proc. Koninkl. Nederl. Akad. wetensch., Ser. A*, 60, № 3, 1957, 312—336 (ПЖМар, 1959, 8309)
158. Kiefer J., Wolfowitz J., On the theory of queues with many servers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1955, 78, № 1, 1—18 (ПЖМар, 1956, 3216)
159. —, On the characteristics of the general queueing process with applications to random walks. *Ann. Math. Statistics*, 1956, 27, № 1, 147—161 (ПЖМар, 1960, 715)
160. Kingman J. F. C., On queues in heavy traffic. *J. Roy. Statist. Soc.* 1962, B24, 383—392 (ПЖМар, 1964, 3В37)
161. —, Spitzer's identity and its use in probability theory. *J. London Math. Soc.*, 1962, 37, № 3, 309—316 (ПЖМар, 1963, 4В102)
162. Koenigsberg E., Queueing with special service. *Operat. Res.*, 1956, 4, № 2, 213—220 (ПЖМар, 1957, 1673)
163. Lamperti J., A contribution to renewal theory. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1961, 12, № 5, 724—731 (ПЖМар, 1962, 12В20)
164. —, An invariance principle in renewal theory. *Ann. Math. Statistics*, 1962, 33, № 2, 685—696 (ПЖМар, 1962, 5В114)
165. Ledermann W., Reuter G. E. H., Spectral theory for the differential equations of simple birth and death processes. *Phil. Trans. Roy. Soc. London, ser. A*, 1954, 246, № 914, 321—369 (ПЖМар, 1955, 2318)
166. Le Gall P., Les systèmes avec ou sans attente et les processus stochastiques, t. 1, Dunod, Paris, 1962 (ПЖМар, 1963, 5В387К)
167. Lewis T., The intervals between regular events displaced in time by independent random deviations of large dispersion. *J. Roy. Statist. Soc.*, 1961, B23, № 2, 476—483 (ПЖМар, 1962, 7В15)
168. Lighthill M. J., The hydrodynamic analogy. *Operat. Res. Quart.*, 1957, 8, № 3, 109, 114, Discuss, 142—148 (ПЖМар, 1960, 717)
169. Lindley D. V., The theory of queues with a single server. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1952, 48, 277

170. **Loynes R. M.**, The stability of a queue with non-independent inter-arrival and service times. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1962, 58, № 3, 497—520 (PЖMar, 1964, 4B375)
171. —, A continuous-time treatment of certain queues and infinite dams. *J. Austral. Math. Soc.*, 1962, 2, № 4, 484—498 (PЖMar, 1963, 9B167)
172. —, Stationary waiting-time distributions for single-server queues. *Ann. Math. Statistics*, 1962, 33, № 4, 1323—1339 (PЖMar, 1963, 9B188)
173. **Luchak G.**, The solution of the single-channel queueing equations characterised by a time-dependent Poisson-distributed arrival rate and a general class of holding times. *Operat. Res.*, 1956, 4, № 6, 111—732 (PЖMar, 1959, 8310)
174. —, The distribution of the time required to reduce to some preassigned level a single-channel queue characterised by a time-dependent Poisson-distributed arrival rate and a general class of holding times. *Operat. Res.*, 1957, 5, № 2, 205—209 (PЖMar, 1959, 8311)
175. **Lukacs E.**, Sur une caractérisation de la distribution de Poisson. *C. r. Acad. sci.*, 1954, 239, № 18, 1114—1116 (PЖMar, 1956, 645)
176. **Mack C.**, The efficiency of N machines unidirectionally patrolled by one operative when walking time is constant and repair times are variable. *J. Roy. Statist. Soc.*, 1957, B19, № 1, 173—178 (PЖMar, 1958, 7041)
177. —, **Murphy T.**, **Webb N. L.**, The efficiency of N machines unidirectionally patrolled by one operative when walking time and repair times are constants. *J. Roy. Statist. Soc.*, 1957, B19, № 1, 166—172 (PЖMar, 1958, 7040)
178. **Marczewski E.**, Remarks on the Poisson stochastic process (II). *Studia math. (Warszawa)*, 1953, 13, № 1, 130—136 (PЖMar, 1955, 3307)
179. **Mayne A. J.**, Some further results in the theory of pedestrians and road traffic. *Biometrika*, 1954, 41, № 3—4, 375—389 (PЖMar, 1955, 6017)
180. **Miller R. G.**, Priority queues. *Ann. Math. Statistics*, 1960, 31, № 1, 86—103 (PЖMar, 1962, 1B304)
181. **Moran P. A. P.**, A probability theory of dams and storage systems. *Austral. J. Appl. Sci.*, 1954, 5, № 2, 116—124 (PЖMar, 1956, 9001)
182. —, A probability theory of dams and storage systems: modifications of the release rules. *Austral. J. Appl. Sci.*, 1955, 6, № 2, 117—130 (PЖMar, 1957, 4268)
183. —, Dam storage and the theory of probability. *J. Inst. Engrs. Australia*, 1958, 30, № 4—5, 146—148 (PЖMar, 1959, 11391)
184. —, A probability theory of a dam with a continuous release. *Quart. J. Math.*, 1956, 7, № 26, 130—137 (PЖMar, 1957, 6561)
185. **Morimura Hidenori**, Some limit theorems concerning with the renewal numbers. *Kodai Math. Semin. Repts*, 1958, 10, № 2, 47—53 (PЖMar, 1959, 10195)
186. —, On a renewal theorem. *Kodai Math. Semin. Repts*, 1956, 8, № 3, 125—133 (PЖMar, 1961, 3B19)
187. **Morse P. M.**, Stochastic properties of waiting lines. *Operat. Res.*, 1955, 3, 255—261 (PЖMar, 1959, 10311)
188. —, *Queues, inventories, and maintenance*, J. Wiley and Sons, Chapman and Hall, N.-Y., London, 1958 (PЖMar, 1961, 4B143)
189. **Mycielski J.**, On the distances between signals in the non-homogeneous Poisson stochastic process. *Studia math.*, 1956, 15, № 3, 300—313 (PЖMar, 1958, 1358)
190. **Naor P.**, On machine interference. *J. Roy. Statist. Soc.*, 1956, B18, № 2, 280—287 (PЖMar, 1958, 6056)

191. **Nawrotzki K.**, Ein Grenzwertsatz für homogene zufällige Punktfolgen. (Verallgemeinerung eines Satzes von A. Rényi). Math. Nachr., 1962, 24, № 4, 201—217 (PЖMar, 1963, 6B83)
192. **Nisida Tosio**, On some probability distributions concerning Poisson process, Math. Japon., 1953, 3, 7—12 (PЖMar, 1957, 8780)
193. **Palm C.**, Intensitätsschwankungen im Fernspreverkehr. Ericsson Technics, 1943, 44, 1—189
194. **Peck L. G.**, **Hazelwood R. N.**, Finite queueing tables. New York, John Wiley and Sons, Inc., London, Chapman and Hall, Ltd, 1958, XVI, 210 pp. (PЖMar, 1960, 4405)
195. **Pollaczek F.**, Sur la théorie stochastique des compteurs électroniques. C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 7, 766—768 (PЖMar, 1956, 3220)
196. —, Développement de la théorie stochastique des lignes téléphoniques pour un état initial quelconque. C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 25, 1764—1766 (PЖMar, 1956, 3217)
197. —, Problèmes stochastiques posés par le phénomène de formation d'une queue d'attente à un guichet et par des phénomènes apparentés. Mem. Sci. math. № 136, Gauthier-Villars, 1957, 123 p., 2500 fr. (PЖMar, 1958, 8143K)
198. —, Sur une théorie unifiée des problèmes stochastiques soulevés par l'encombrement d'un faisceau parfait de lignes téléphoniques. C. r. Acad. sci. 1962, 254, № 23, 3965—3967 (PЖMar, 1963, 9B161)
199. —, Théorie analytique des problèmes stochastiques relatifs à un groupe de lignes téléphoniques avec dispositif d'attente. Paris, Gauthier-Villars, 1961, № 150, 115 (PЖMar, 1963, 8B326)
200. **Prabhu N. U.**, Some exact results for the finite dam. Ann. Math. Statistics, 1958, 29, № 4, 1234—1243 (PЖMar, 1960, 713)
201. —, Application of generating functions to a problem in finite dam theory. J. Austral. Math. Soc., 1959, 1, № 1, 116—120 (PЖMar, 1960, 14251)
202. —, Elementary methods for some waiting time problems. Operat. Res., 1962, 10, № 4, 559—566 (PЖMar, 1963, 9B162)
203. **Prékopa A.**, On the compound Poisson distribution. Acta scient. math., 1957, 18, № 1—2, 23—28 (PЖMar, 1958, 10048)
204. —, On secondary processes generated by random point distributions. Ann. Univ. Scient. Budapest., Sec. math., 1959, 2, 139—146 (PЖMar, 1963, 8B132)
205. —, On secondary processes generated by a random point distribution of Poisson type. Ann. Univ. Scient. Budapest., Sec. math., 1958, 1, 153—170 (PЖMar, 1961, 6B19)
206. **Pyke R.**, On renewal processes related to Type I and Type II counter models. Ann. Math. Statistics, 1958, 29, № 3, 737—754 (PЖMar, 1962, 8B62)
207. —, Markov renewal processes: definitions and preliminary properties. Ann. Math. Statistics, 1961, 32, № 4, 1231—1242
208. **Ramakrishnan A.**, Stochastic processes associated with random divisions of a line. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, Vol. 49, Part 3, pp 473—485 (PЖMar, 1954, 3018)
209. **Redheffer R. M.**, A note on the Poisson law. Math. Mag., 1953, 26, № 4, 185—188 (PЖMar, 1954, 1722)
210. **Reich E.**, Waiting times when queues are in tandem. Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 768—773 (PЖMar, 1959, 9353)
211. —, On the mixed-type Markov process of Takács. Abstr. Short commun. Internat. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 127 (PЖMar, 1959, 6059)
212. —, On the integrodifferential equation of Takács. I. Ann. Math. Statistics, 1958, 29, 563—570 (PЖMar, 1959, 11287)

213. —, On the integrodifferential equation of Takács. II. Ann. Math. Statistics, 1959, 30, 143—148 (PЖMar, 1961, 9B215)
214. **Rényi A.**, Kompresszorok és légtartályok racionális méretezése uze-mek sűrített levegővel való ellátására. Magyar tud. akad. Alkalma-zott mat. intéz. közl., 1952, 1, 105—108 (PЖMar, 1958, 8087)
215. —, A Poisson-folyamat egy jellemzése. Magyar tud. akad. Mat. ku-tató int. közl., 1957, 1, № 4, 519—527 (PЖMar, 1958, 9042)
216. —, Szetmártony T., Gépipari üzemek elektromos energiaszüksé-gletének és egyidejűségi, illetőleg szükségleti tényezőjének valószí-nűségsszámítási meghatározása. Magyar tud. akad. Alkalmazott mat. intéz. közl., 1952, 1, 85—104 (PЖMar, 1958, 8086)
217. **Rice S. O.**, Single service systems. II. Busy period. Bell. System Techn. J., 1962, 41, № 1, 279—310 (PЖMar, 1964, 5B393)
218. **Riordan J.**, Stochastic service systems. J. Wiley and Sons, N.—Y., London, 1962 (PЖMar, 1963, 2B341)
219. **Ryll-Nardzewski C.**, On the non-nomogeneous Poisson process. Stu-dia math. (Warszawa), 1953, 14, № 1, 124—128 (PЖMar, 1955, 4569)
220. —, Remarks on the Poisson stochastic process (III) (On a property of the nonhomogeneous Poisson process). Studia math., 1954, 14, № 2, 314—318 (PЖMar, 1957, 4204)
221. —, Remarks on processes of calls. Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability, 1960, Vol. 2, Berkeley—Los Angeles, Univ. California Press, 1961, 455—465 (PЖMar, 1963, 6B94)
222. **Saaty T. L.**, Mathematical methods of operations research. New York—London, McGraw-Hill Book Co., 1959, xi, 421 pp., ill., 77 sh., 6d. (PЖMar, 1961, 6B129K)
223. —, Some stochastic processes with absorbing barriers. J. Roy. Sta-tist. Soc., 1961, B23, № 2, 319—344 (PЖMar, 1964, 2B24)
224. **Schuhl A.**, La calcul des probabilités et la répartition des véhicules sur les routes à deux voies de circulation. Travaux, 1955, 39, № 243, 16—18 (PЖMar, 1956, 6029)
225. —, Hasard et probabilité dans les problèmes de circulation routière. J. Soc. statist. Paris, 1956, 97, № 10—12, 233—251, Discuss., 251—253 (PЖMar, 1958, 1439)
226. **Smith W. L.**, Asymptotic renewal theorems. Proc. Roy. Soc. Edin-burgh, 1953—1954, A64, № 1, 9—48 (PЖMar, 1956, 3192)
227. —, Regenerative stochastic processes. Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 304—305 (PЖMar, 1956, 8998)
228. —, Extensions of a renewal theorem. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 4, 629—638 (PЖMar, 1956, 8963)
229. —, On the cumulants of renewal processes. Biometrika, 1959, 46, № 1—2, 1—29 (PЖMar, 1960, 9232)
230. —, On some general renewal theorems for nonidentically distributed variables. Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probabi-lity, 1960, Vol. 2, Berkeley—Los Angeles, Univ. California Press, 1961, 467—514 (PЖMar, 1963, 8B128)
231. —, A note on the renewal function when the mean renewal lifetime is infinite. J. Roy. Statist. Soc., 1961, B23, № 1, 230—237 (PЖMar, 1963, 12B161)
232. —, On necessary and sufficient conditions for the convergence of the renewal density. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, 104, № 1, 79—100 (PЖMar, 1963, 4B101)
233. —, Renewal theory and its ramifications. J. Roy. Statist. Soc., 1958, B20, № 2, 243—284 (PЖMar, 1959, 11288)

Имеется русский перевод: Математика. сб. перев. ин. ст., 1961, т. 5, № 3, 95—150

234. **Spitzer F.**, A combinatorial lemma and its application to probability theory. Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 2, 323—339 (PЖMat, 1958, 4860)
235. —, The Wiener — Hopf equation whose kernel is a probability density. Duke Math. J., 1957, 24, № 3, 327—343 (PЖMat, 1958, 7948)
236. **Stephan F. F.**, Two queues under preemptive priority with Poisson arrival and service rates. Operat. Res., 1958, 6, № 3, 399—418 (PЖMat, 1959, 9351)
237. **Stoller D. S.**, Some queueing problems in machine maintenance. Naval Res. Logist. Quart., 1958, 5, № 1, 83—87 (PЖMat, 1959, 8308)
238. **Störmer H.**, Über die Verteilung der Wartezeiten bei Verkehrsspitzen. Arch. elektr. Übertrag., 1959, 13, № 6, 262—266 (PЖMat, 1961, 7B185)
239. —, Über ein Warteproblem aus der Vermittlungstechnik. Z. angew. Math. und Mech., 1960, 40, № 5—6, 236—246 (PЖMat, 1961, 7B180)
240. **Syski R.**, Introduction to congestion theory in telephone systems. Oliver and Boyd, Ltd., Edinburgh and London, 1960.
241. **Takács L.**, Részecskeszámlálóknál fellépő incidenciaproblemakról. Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl., 1953, 2, 153—163 (PЖMat, 1958, 9157)
242. —, Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalásánál. Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl., 1953, 2, 135—151 (PЖMat, 1958, 4882)
243. —, On stochastic processes connected with certain physical recording apparatuses. Acta math. Acad. sci. Hung., 1955, 6, № 3—4, 363—380 (PЖMat, 1959, 4001)
244. —, On processes of happenings generated by means of a Poisson process. Acta math. Acad. sci. Hung., 1955, 6, № 1—2, 81—99 (PЖMat, 1956, 7533)
245. —, Investigation of waiting time problems by reduction to Markov processes. Acta math. Acad. sci. Hung., 1955, 6, № 1—2, 101—129 (PЖMat, 1956, 6748)
246. —, On secondary processes generated by a Poisson process and their applications in physics. Acta math. Acad. sci. Hung., 1954, 5, № 3—4, 203—236 (PЖMat, 1956, 3219)
247. —, On a probability problem arising in the theory of counters. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 3, 488—498 (PЖMat, 1957, 8850)
248. —, On the generalization of Erlang's formula. Acta math. Acad. sci. Hung., 1956, 7, № 3—4, 419—433, (PЖMat, 1958, 3932)
249. —, On secondary stochastic processes generated by a multidimensional Poisson process. Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1957, 2, № 1—2, 71—80 (PЖMat, 1959, 6051)
250. —, On some probability problems concerning the theory of counters. Acta math. Acad. sci. Hung., 1957, 8, № 1—2, 127—138 (PЖMat, 1958, 9127)
251. —, On limiting distributions concerning a sojourn time problem. Acta math. Acad. sci. Hung., 1957, 8, № 3—4, 279—294 (PЖMat, 1958, 7959)
252. —, On certain sojourn time problem in the theory of stochastic processes. Acta math. Acad. sci. Hung., 1957, 8, № 1—2, 169—191 (PЖMat, 1958, 7958)
253. —, On a generalization of the renewal theory. Magyar tud. akad. Math. kutató int. közl., 1957, 2, № 1—2, 91—103, (PЖMat, 1963, 11B152)
254. —, A telefon-forgalom elméletének néhány valószínűségszámítási kérdéséről I. Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1958, 8, № 2, 151—210 (PЖMat, 1959, 7304)

255. —, Egy közlekedéssel kapcsolatos valószínűség-számítási problémáról. Magyar tud., akad. Mat. kutató int. közl., 1956, 1, № 1—2, 99—107 (PJKMar, 1959, 5059)
256. —, On a probability problem in the theory of counters. Ann. Math. Statistics, 1958, 29, № 4, 1257—1263 (PJKMar, 1960, 2089)
257. —, The time dependence of a single server queue with Poisson input and general service times. Ann. Math. Statistics, 1962, 33, № 4, 1340—1348 (PJKMar, 1963, 9B166)
258. —, Introduction to the theory of queues, N.—Y., Oxford Univ. Press, 1962 (PJKMar, 1964, 1B413)
259. **Tanner J. C.**, A simplified model for delays in overtaking on a two-lane road. J. Roy. Statist. Soc., 1958, B20, № 2, 408—414 (PJKMar, 1960, 716)
260. **Teicher H.**, On the multivariate Poisson distribution. Skand. aktuariatidskr., 1954, № 1—2, 1—9 (PJKMar, 1956, 3180)
261. **Udagawa Kanehisa**, Ito Noriko, Note on a relation between the Markov chain and the birth and death process. J. Operat. Res. Soc. Japan, 1961, 4, № 1, 27—45 (PJKMar, 1962, 7B21)
262. —, Nakamura Gisaku, On a queueing which joining customers give up their services halfway. J. Operat. Res. Soc. Japan, 1957, 1, № 2, 59—76 (PJKMar, 1960, 9338)
263. **Ventura E.**, Application de la théorie de files d'attente à la détermination des installations de chargement et de l'horaire de travail optima pour un port à quai minéralier unique. Rev. rech. opérat., 1958, 2, № 6, 48—58 (PJKMar, 1959, 7277)
264. **Vaulot A. E.**, Rev. gén. de l'Électricité, 1927, 22, № 26, 1164—1171
265. **Vêre-Jones D.**, Geometric ergodicity in denumerable Markov chains. Quart. J. Math., 1962, 13, № 49, 7—28 (PJKMar, 1963, 4B104)
266. **Wallström B.**, Artificial traffic trials on a two-stage link system using a digital computer. Ericsson Techn., 1958, 14, № 2, 259—289 (PJKMar, 1961, 1B203)
267. **Watanabe Hisao**, On the Poisson distribution. J. Math. Soc. Japan, 1956, 8, № 2, 127—134 (PJKMar, 1958, 9045)
268. **Waugh W. A. O. N.**, An age-dependent birth and death process. Biometrika, 1955, 42, № 3—4, 291—306 (PJKMar, 1959, 10739)
269. **Weesakul B.**, First emptiness in a finite dam. J. Roy. Statist. Soc., 1961, B23, № 2, 343—351 (PJKMar, 1963, 12B142)
270. —, Yeo G. F., Some problems in finite dams with an application to insurance risk. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1963, 2, № 2, 135—146 (1964, 8B76)
271. **Wendel J. F.**, Spitzer's formula: a short proof. Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 6, 905—908, (PJKMar, 1960, 1892)
272. **Wishart D. M. G.**, A queueing system with γ^2 service-time distribution. Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 768—779 (PJKMar, 1958, 8133)
273. —, A queueing system with service-time distribution of mixed chi-squared type. Operat. Res., 1959, 7, № 2, 174—179 (PJKMar, 1960, 8082)
274. **White H.**, Christie L. S., Queueing with preemptive priorities or with breakdown. Operat. Res., 1958, 6, № 1, 19—95 (PJKMar, 1960, 8084)
275. **Wardrop J. G.**, The traffic capacity of weaving sections of roundabouts. Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 269—284 (PJKMar, 1958, 9113)
276. **Yih Ming-i**, On the problem M/M/s in the theory of queues. Sci. Rec., 1959, 3, № 12, 614—615 (PJKMar, 1961, 7B184)
277. **Zitek F.**, Príspevek k theórii smísenných systémů hromadné obsluhy. Aplikace mat., 1957, 2, № 2, 154—159 (PJKMar, 1958, 4025)