Функция ошибок

Материал из Википедии — свободной энциклопедии [править вики-текст]

Текущая версия страницы пока не проверялась опытными участниками и может значительно отличаться от версии, проверенной 11 ноября 2014; проверки требует 1 правка.

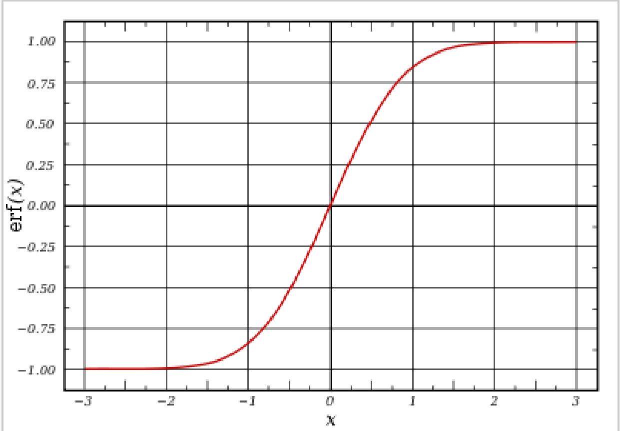


График функции ошибок

В математике **функция ошибок** (функция Лапласа или интеграл вероятности) — это неэлементарная функция, возникающая в теории вероятностей, статистике и теории дифференциальных уравнений в частных производных. Она определяется как

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Дополнительная функция ошибок, обозначаемая $\operatorname{erfc} x$ (иногда применяется обозначение $\operatorname{Erf} x$) определяется через функцию ошибок:

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

Комплексная функция ошибок, обозначаемая $w(x)$, также определяется через функцию ошибок:

$$w(x) = e^{-x^2} \operatorname{erfc}(-ix).$$

Содержание [убрать]

Свойства [править вики-текст]

- Функция ошибок нечётна:

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf} x.$$

- Для любого комплексного x выполняется

$$\operatorname{erf} \bar{x} = \overline{\operatorname{erf} x}$$

где черта обозначает комплексное сопряжение числа x.

- Функция ошибок не может быть представлена через элементарные функции, но, разлагая интегрируемое выражение в ряд Тейлора и интегрируя почленно, мы можем получить её представление в виде ряда:

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \cdots \right)$$

Это равенство выполняется (и ряд сходится) как для любого вещественного x[источник не указан 994 дня], так и на всей комплексной плоскости. Последовательность знаменателей образует последовательность A007680 в OEIS.

- Для итеративного вычисления элементов ряда полезно представить его в альтернативном виде:

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(x \prod_{i=1}^{n} \frac{-(2i-1)x^2}{i(2i+1)} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{2n+1} \prod_{i=1}^{n} \frac{-x^2}{i}$$

поскольку $\frac{-(2i-1)x^2}{i(2i+1)}$ — сомножитель, превращающий i-й член ряда в $(i+1)$-й, считая первым членом x.

- Функция ошибок на бесконечности равна единице; однако это справедливо только при приближении к бесконечности по вещественной оси, так как:
- При рассмотрении функции ошибок в комплексной плоскости точка $z = \infty$ будет для неё существенно особой.
- Производная функции ошибок выводится непосредственно из определения функции:

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{erf}\;x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}.$$

- **Обратная функция ошибок** представляет собой ряд

$$\mathrm{erf}^{-1}\;x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{2k+1}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}x\right)^{2k+1},$$

где $c_0 = 1$ и

$$c_k = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{c_m c_{k-1-m}}{(m+1)(2m+1)} = \left\{1, 1, \frac{7}{6}, \frac{127}{90}, \ldots\right\}.$$

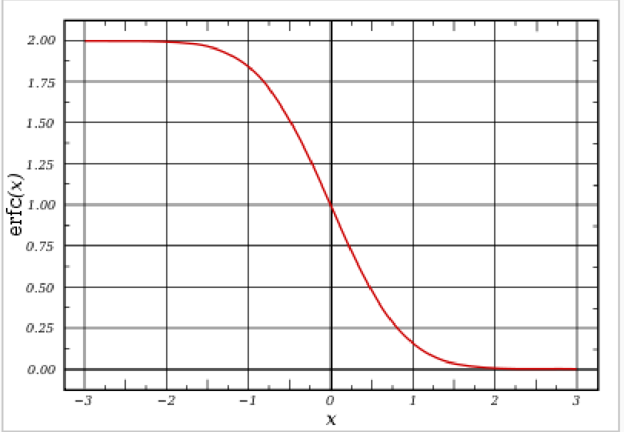
Поэтому ряд можно представить в следующем виде (заметим, что дроби сокращены):

$$\mathrm{erf}^{-1}\;x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(x + \frac{\pi x^3}{12} + \frac{7\pi^2 x^5}{480} + \frac{127\pi^3 x^7}{40320} + \frac{4369\pi^4 x^9}{5806080} + \frac{34807\pi^5 x^{11}}{182476800} + \ldots\right).$$ [1]

Последовательности числителей и знаменателей после сокращения — A092676 и A132467 в OEIS; последовательность числителей до сокращения — A002067 в OEIS.

Применение [править вики-текст]

Если набор случайных чисел подчиняется нормальному распределению со стандартным отклонением σ, то вероятность, что число отклонится от среднего не более чем на a, равна $\mathrm{erf}\;\frac{a}{\sigma\sqrt{2}}$.



Дополнительная функция ошибок

Функция ошибок и дополнительная функция ошибок встречаются в решении некоторых дифференциальных уравнений, например, уравнения теплопроводности с граничными условиями описываемыми функцией Хевисайда («ступенькой»).

В системах цифровой оптической коммуникации, вероятность ошибки на бит также выражается формулой, использующей функцию ошибок.

Асимптотическое разложение [править вики-текст]

При больших x полезно асимптотическое разложение для дополнительной функции ошибок:

$$\mathrm{erfc}\;x = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(2x^2)^n}\right] = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{n!(2x)^{2n}}.$$

Хотя для любого конечного x этот ряд расходится, на практике первых нескольких членов достаточно для вычисления $\mathrm{erfc}\;x$ с хорошей точностью, в то время как ряд Тейлора сходится очень медленно.

Другое приближение даётся формулой

$$(\mathrm{erf}\;x)^2 \approx 1 - \exp\left(-x^2 \frac{4/\pi + ax^2}{1 + ax^2}\right)$$

где

$$a = \frac{-8}{3\pi}\frac{\pi - 3}{\pi - 4}.$$

Родственные функции [править вики-текст]

С точностью до масштаба и сдвига, функция ошибок совпадает с нормальным интегральным распределением, обозначаемым $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\;\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Обратная функция к Φ, известная как нормальная квантильная функция, иногда обозначается probit и выражается через нормальную функцию ошибок как

$$\operatorname{probit} p = \Phi^{-1}(p) = \sqrt{2}\,\operatorname{erf}^{-1}(2p-1).$$

Нормальное интегральное распределение чаще применяется в теории вероятностей и математической статистике, в то время как функция ошибок чаще применяется в других разделах математики.

Функция ошибок является частным случаем функции Миттаг-Леффлера, а также может быть представлена как вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера):

$$\operatorname{erf}\ x = \frac{2x}{\sqrt{\pi}}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right).$$

Функция ошибок выражается также через интеграл Френеля. В терминах регуляризованной неполной гамма-функции P и неполной гамма-функции,

$$\operatorname{erf}\ x = \operatorname{sign}\ x\, P\left(\frac{1}{2}, x^2\right) = \frac{\operatorname{sign}\ x}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right).$$

Обобщённые функции ошибок [править вики-текст]

Некоторые авторы обсуждают более общие функции

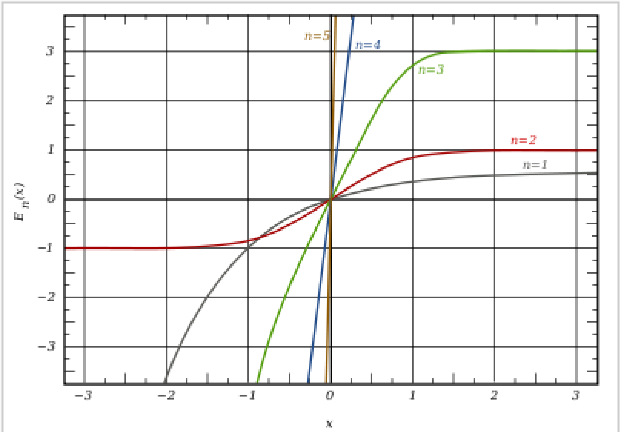


График обобщённых функций ошибок $E_n(x)$:
серая линия: $E_1(x) = (1 - e^{-x})/\sqrt{\pi}$
красная линия: $E_2(x) = \operatorname{erf}\ x$
зелёная линия: $E_3(x)$
синяя линия: $E_4(x)$
жёлтая линия: $E_5(x)$.

$$E_n(x) = \frac{n!}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{\sqrt{\pi}}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{x^{np+1}}{(np+1)p!}.$$

Примечательными частными случаями являются:

- $E_0(x)$ — прямая линия, проходящая через начало координат: $E_0(x) = \dfrac{x}{e\sqrt{\pi}}$
- $E_2(x)$ — функция ошибок $\operatorname{erf}\ x$.

После деления на $n!$ все E_n с нечётными n выглядят похоже (но не идентично). Все E_n с чётными n тоже выглядят похоже, но не идентично, после деления на $n!$. Все обобщённые функции ошибок с $n > 0$ выглядят похоже на полуоси $x > 0$.

На полуоси $x > 0$ все обобщённые функции могут быть выражены через гамма-функцию:

$$E_n(x) = \frac{\Gamma(n)\left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{n}, x^n\right)\right)}{\sqrt{\pi}}, \qquad x > 0$$

Следовательно, мы можем выразить функцию ошибок через гамма-функцию:

$$\operatorname{erf}\ x = 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right)}{\sqrt{\pi}}$$

Итерированные интегралы дополнительной функции ошибок [править вики-текст]

Итерированные интегралы дополнительной функции ошибок определяются как

$$i^n \operatorname{erfc} z = \int\limits_z^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc} \zeta \, d\zeta.$$

Их можно разложить в ряд:

$$i^n \operatorname{erfc} z = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-z)^j}{2^{n-j} j! \, \Gamma\left(1 + \frac{n-j}{2}\right)},$$

откуда следуют свойства симметрии

$$i^{2m} \operatorname{erfc}(-z) = -i^{2m} \operatorname{erfc} z + \sum_{q=0}^m \frac{z^{2q}}{2^{2(m-q)-1}(2q)!(m-q)!}$$

и

$$i^{2m+1} \operatorname{erfc}(-z) = i^{2m+1} \operatorname{erfc} z + \sum_{q=0}^m \frac{z^{2q+1}}{2^{2(m-q)-1}(2q+1)!(m-q)!}.$$

Реализация [править вики-текст]

В стандарте языка Си (ISO/IEC 9899:1999, 7.12.8) предусмотрены функция ошибок erf и дополнительная функция ошибок erfc. Функции находятся в заголовочных файлах `math.h` или `cmath`. Там же есть пары функций `erff(),erfcf()` и `erfl(),erfcl()`. Первая пара получает и возвращает значения типа `float`, а вторая — значения типа `long double`. Соответствующие функции также содержатся в библиотеке Math проекта Boost.

В языке Java функции ошибок нет в стандартной библиотеке математических функций java.lang.Math [2]. Класс `Erf` есть в пакете `org.apache.commons.math.special` от Apache [3]. Однако эта библиотека не является одной из стандартных библиотек Java 6.

Maple[4], Matlab[5], Mathematica и Maxima[6] содержат обычную и дополнительную функцию ошибок, а также обратные к ним функции.

В языке Python функция ошибок доступна из стандартной библиотеки math, начиная с версии 2.7. [7] Также функция ошибок, дополнительная функция ошибок и многие другие специальные функции определены в модуле `Special` проекта SciPy [8].

В языке Erlang функция ошибок и дополнительная функция ошибок доступны из стандартного модуля math, [9].

См. также [править вики-текст]

- Функция Гаусса
- Функция Доусона

Литература [править вики-текст]

- Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, eds. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* New York: Dover, 1972. *(См. часть 7)*
- Nikolai G. Lehtinen «Error functions», April 2010 *[10]*

Ссылки [править вики-текст]

- MathWorld — Erf
- Онлайновый калькулятор Erf и много других специальных функций (до 6 знаков)
- Онлайновый калькулятор, вычисляющий в том числе Erf

Категория: Специальные функции