Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

**І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей,
О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова**

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

ПРАКТИКУМ

Київ — 2011

Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум. (I курс I семестр) / Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. — К: НТУУ «КПІ», 2011. — 180 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»
(протокол № 5 від 22.01.2009)

Навчальне видання

Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної

Практикум

для студентів I курсу технічних спеціальностей

Укладачі: *Алєксєєва Ірина Віталіївна*, канд. фіз-мат. наук, доц.
Гайдей Віктор Олександрович, канд. фіз-мат. наук, доц.
Диховичний Олександр Олександрович, канд. фіз-мат. наук, доц.
Федорова Лідія Борисівна, канд. фіз-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор: *В. В. Булдигін*, д-р фіз.-мат. наук, професор

Рецензенти: *С. В. Єфіменко*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
В. Г. Шпортюк, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Зміст

Вступ

Практикум з вищої математики «Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної» є складовою **навчального комплекту** з вищої математики, який містить: конспект лекцій, практикум, збірник індивідуальних домашніх завдань, збірник контрольних та тестових завдань.

Практикум складено на основі багаторічного досвіду викладання математики в НТУУ «КПІ», його зміст відповідає навчальним програмам з вищої математики всіх технічних спеціальностей НТУУ «КПІ» денної та заочної форм навчання і містить такі розділи дисципліни «Вища математика»:

— множини;
— границя функції і неперервність;
— похідна й диференціал;
— техніка диференціювання;
— правило Бернуллі — Лопіталя і формула Тейлора;
— повне дослідження функцій та побудова їхніх графіків;
— первісна й інтеграл;
— основні методи інтегрування;
— інтегрування деяких класів функцій.

Практикум містить розгорнутий довідковий матеріал, якого потребує свідоме розв'язування задач, широкий спектр розв'язаних навчальних задач, які достатньо розкривають відповідні теоретичні питання, сприяють розвиткові практичних навичок і є зразком належного оформлення розв'язань задач для самостійної роботи, задачі для самостійної роботи в аудиторії та домашнього завдання з відповідями.

Метою практикуму є:

- допомогти опанувати студентам основ математичного аналізу;
- розвинути логічне та аналітичне мислення;
- виробити навички вибору ефективного методу розв'язання задач.

Самостійне розв'язання задач, яке формує основу математичного мислення, передбачає активну роботу з теоретичним матеріалом, використанням конспекту лекцій, посібників та підручників. Деякі з них подано у списку рекомендованої літератури.

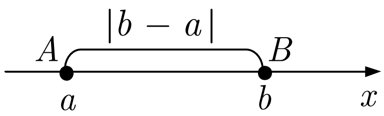
У практичній частині використано такі позначення:

[A.B.C] — посилання на клітинку **C**, у якій вміщено теоретичний факт або формулу, таблиці **A.B.** з теми **A;**

①,②,③,… — посилання у навчальній задачі на коментар, який вміщено після її розв'язання.

Розділ 0. ФОРМУЛИ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

0.1. Модуль, ціла та дробові частини дійсного числа

<table>
<tr>
<td>❶ Модуль дійсного числа. Модулем (абсолютною величиною) дійсного числа x називають число
$$\left|x\right| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$</td>
<td rowspan="2">❷ Властивості модуля.
① $x = y \Rightarrow \left|x\right| = \left|y\right|$;
② $\left|x\right| \geq 0$;
③ $-\left|x\right| \leq x \leq \left|x\right|$;
④ $\left|x\right| = \left|-x\right|$;
⑤ $\left|xy\right| = \left|x\right|\left|y\right|$;
⑥ $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{\left|x\right|}{\left|y\right|}$</td>
</tr>
<tr>
<td>❸ Геометричний зміст модуля. Віддаль між точками $A(a)$ та $B(b)$ числової прямої дорівнює $\left|b-a\right|$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>❹ Ціла частина числа. Цілою частиною числа x називають найбільше ціле число, яке не перевищує числа x, і позначають $[x]$.</td>
<td>❺ Дробова частина числа. Дробовою частиною числа x називають число
$$\{x\} = x - [x].$$</td>
</tr>
<tr>
<td>❻ Середнє арифметичне. Середнім арифметичним чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ називають число $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$.</td>
<td>❼ Середнє геометричне. Середнім геометричним чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ називають число $\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$.</td>
</tr>
</table>

0.2. Деякі важливі нерівності

❶ ***Нерівності з модулем***	① $\left|x+y\right| \leq \left|x\right| + \left|y\right|$ (*нерівність трикутника*); ② $\left|x\right| - \left|y\right| \leq \left|x-y\right| \leq \left|x\right| + \left|y\right|$
❷ ***Нерівність Коші***	$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$
❸ ***Нерівність Бернуллі***	$(1+h)^n \geq 1 + nh, h > -1, n \in \mathbb{N}$

0.3. Степені, корені, логарифми

❶ ***Степені.*** $$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ разів}} \ (n \in \mathbb{N});$$ $$x^0 = 1 \ (x \neq 0); \ x^1 = x;$$ $$x^{-a} = \frac{1}{x^a} \ (x \neq 0, a \in \mathbb{R})$$	❷ ***Властивості степенів.*** ① $x^a x^b = x^{a+b}$; ② $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$; ③ $(x^a)^b = x^{ab}$; ④ $(xy)^a = x^a y^a$
❸ ***Арифметичний корінь n-го степеня.*** *Арифметичним коренем n-го степеня* з невід'ємного числа x називають таке невід'ємне число $a = \sqrt[n]{x}$, що $$a^n = x.$$ Для від'ємних чисел x: $\sqrt[2n]{x}$ – не існує; $\sqrt[2n-1]{x} = -\sqrt[2n-1]{-x}$.	❹ ***Властивості коренів.*** ① $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$; ② $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$; ③ $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a \rvert, n \in \mathbb{N}$; ④ $\sqrt[2n-1]{a^{2n-1}} = a, n \in \mathbb{N}$
❺ ***Логарифми.*** *Логарифмом* додатного числа x за основою a $(a > 0, a \neq 1)$ називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб одержати число x, і позначають $\log_a x$. $$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x.$$ $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1.$ $\log_{10} x = \lg x$ — *десятковий логарифм*; $\log_e x = \ln x$ — *натуральний логарифм.*	❻ ***Властивості логарифмів.*** Для $x, y > 0$ правдиві співвідношення: ① $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; ② $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; ③ $\log_{a^r} x^p = \dfrac{p}{r} \log_a x$; ④ $\log_a a^x = x$; $a^{\log_a x} = x, x > 0$; ⑤ $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$; ⑥ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} = \dfrac{\ln b}{\ln a} = \dfrac{\lg b}{\lg a}$; ⑦ $x^\alpha = a^{\alpha \log_a x}, x > 0$

0.4. Многочлени

❶ *Многочлен n-го степеня.* $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$.

$a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ — *коефіцієнти многочлена*;

a_0x^n — *старший член многочлена*;

a_0 — *старший коефіцієнт*;

a_n — *вільний член многочлена*.

Число x_0 називають *коренем* многочлена $P_n(x)$, якщо $P_n(x_0) = 0$.

$P_0(x) = a_0$ — *стала*;

$P_1(x) = a_0x + a_1$ — *лінійний двочлен*;

$P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ — *квадратний тричлен*.

❷ *Властивості многочленів.*

① Два многочлени $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ тотожно рівні, якщо вони:

1) однакового степеня $(n = m)$;

2) мають рівні коефіцієнти при однакових степенях.

② Цілі корені многочлена з цілими коефіцієнтами можуть бути лише дільниками його вільного члена.

③ ***Теорема Безу.*** Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $x - a$ дорівнює значенню цього многочлена для $x = a$:

$$P_n(x) = (x - a)Q_{n-1}(x) + P_n(a).$$

④ Якщо $x = x_0$ — корінь многочлена $P_n(x)$, то

$$P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x).$$

❸ *Квадратний тричлен* $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$.

$D = b^2 - 4ac$ — *дискримінант*; x_1, x_2 — корені многочлена.

① ***Вилучення повного квадрату.***

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$$

② ***Корені.***

$D < 0$	$D \geq 0$
не має коренів	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

③ ***Розклад на множники.***

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

x_1, x_2 — корені многочлена.

④ ***Теорема Вієта.***

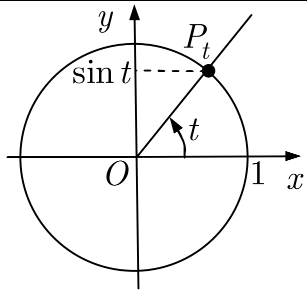
$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$;

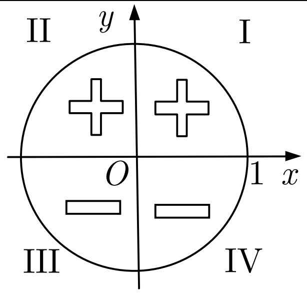
$x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$

0.5. Тригонометричні функції

❶ ***Синус.*** *Синусом* числа t називають ординату точки P_t одиничного кола і позначають $\sin t$.

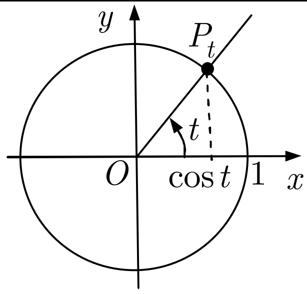
$$\sin(t+2\pi k)=\sin t, k\in\mathbb{Z};$$
$$\sin(-t)=-\sin t$$

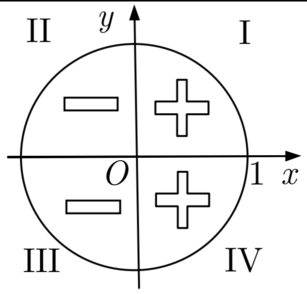




❷ ***Косинус.*** *Косинусом* числа t називають абсцису точки P_t одиничного кола і позначають $\cos t$.

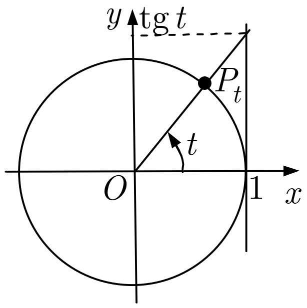
$$\cos(t+2\pi k)=\cos t, k\in\mathbb{Z},$$
$$\cos(-t)=\cos t$$

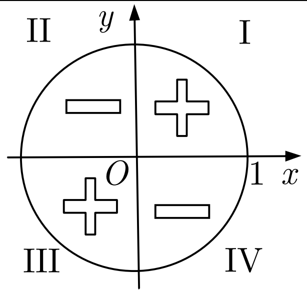




❸ ***Тангенс.*** *Тангенсом* числа t називають ординату точки перетину прямої $x=1$ (осі тангенсів) із променем OP_t.

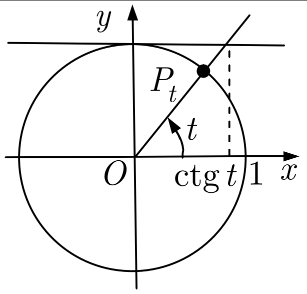
$$\operatorname{tg}(t+\pi k)=\operatorname{tg} t, k\in\mathbb{Z};$$
$$\operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\cos t};\quad \operatorname{tg}(-t)=-\operatorname{tg} t$$

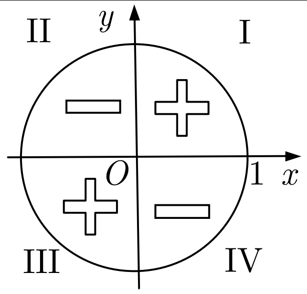




❹ ***Котангенс.*** *Котангенсом* числа t називають абсцису точки перетину прямої $y=1$ (осі котангенсів) із променем OP_t.

$$\operatorname{ctg}(t+\pi k)=\operatorname{ctg} t, k\in\mathbb{Z};$$
$$\operatorname{ctg} t=\frac{\cos t}{\sin t};\ \operatorname{ctg}(-t)=-\operatorname{ctg} t$$





❺ ***«Стандартні» значення.***

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

❻ ***Формули зведення.***

	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$	$\pi-x$	$\pi+x$
sin	$\cos x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
cos	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$
tg	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$
ctg	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$

0.6. Тригонометричні формули

❶ ***Основні тригонометричні тотожності.***

① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$

② $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$

③ $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

④ $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

❷ ***Формули додавання.***

① $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x;$

② $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$

③ $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y};$

④ $\operatorname{ctg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y}$

❸ ***Формули кратних аргументів.***

① $\sin 2x = 2 \sin x \cos x;$

② $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$

③ $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x;$

④ $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

❹ ***Формули зниження степеня.***

① $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2};$

② $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

❺ ***Формули половинного аргументу***

① $\sin \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}};$

② $\cos \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}};$

③ $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x};$

④ $\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2},\, t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2};$

⑤ $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2},\, t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2};$

⑥ $\operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1 - t^2},\, t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$

❻ ***Перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.***

① $2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y);$

② $2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y);$

③ $2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y)$

❼ ***Перетворення суми тригонометричних функцій у добуток.***

① $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \dfrac{x \pm y}{2} \cos \dfrac{x \mp y}{2};$

② $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x - y}{2} \cos \dfrac{x + y}{2};$

③ $\cos x - \cos y = 2 \sin \dfrac{x + y}{2} \sin \dfrac{y - x}{2}$

0.7. Обернені тригонометричні функції

❶ ***Арксинус.*** *Арксинусом* числа x називають число $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює x, і позначають $\arcsin x$.

$$\arcsin x = t \Rightarrow \sin t = x;$$
$$\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1;1];$$
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

❷ ***Арккосинус.*** *Арккосинусом* числа x називають число $t \in \left[0;\pi\right]$, косинус якого дорівнює x і позначають $\arccos x$.

$$\arccos x = t \Rightarrow \cos t = x;$$
$$\cos(\arccos x) = x, x \in [-1;1];$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

❸ ***Арктангенс.*** *Арктангенсом* числа x називають число $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює x, і позначають $\operatorname{arctg} x$.

$$\operatorname{arctg} x = t \Rightarrow \operatorname{tg} t = x;$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, x \in \mathbb{R};$$
$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$

❹ ***Арккотангенс.*** *Арккотангенсом* числа x називають число $t \in \left(0;\pi\right)$, котангенс якого дорівнює x, і позначають $\operatorname{arcctg} x$.

$$\operatorname{arcctg} x = t \Rightarrow \operatorname{ctg} t = x;$$
$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, x \in \mathbb{R};$$
$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$$

❺ ***«Стандартні» значення.***

	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
arccos	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
arctg	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arcctg	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

❻ ***Основні тотожності.***

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

0.8. Гіперболічні функції

❶ ***Гіперболічний синус.*** $$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$ $$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$$	❷ ***Гіперболічний косинус.*** $$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$ $$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$$
❸ ***Гіперболічний тангенс.*** $$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x};$$ $$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$$	❹ ***Гіперболічний котангенс.*** $$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, x \neq 0;$$ $$\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$$
❺ ***«Стандартні» значення.*** $$\operatorname{sh} 0 = 0;$$ $$\operatorname{ch} 0 = 1;$$ $$\operatorname{th} 0 = 0$$	❻ ***Основні тотожності.*** ① $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$ ② $\operatorname{th} x \operatorname{cth} x = 1;$ ③ $1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$ ④ $1 - \operatorname{cth}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
❼ ***Формули подвійного аргументу.*** ① $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x;$ ② $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$	❽ ***Формули зниження степеня.*** ① $\operatorname{sh}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2};$ ② $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$

0.9. Розв’язання основних рівнянь

❶ ***Показникове рівняння*** $a^x = b, a > 0, a \neq 1$	① $b > 0 \Rightarrow x = \log_a b$; ② $b \leq 0 \Rightarrow x \in \varnothing$
❷ ***Логарифмічне рівняння*** $\log_a x = b, a > 0, a \neq 1$	$x = a^b$
❸ ***Тригонометричне рівняння*** $\sin x = a$	① $\lvert a \rvert \leq 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; ② $\lvert a \rvert > 1 \Rightarrow x \in \varnothing$
❹ ***Тригонометричне рівняння*** $\cos x = a$	① $\lvert a \rvert \leq 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; ② $\lvert a \rvert > 1 \Rightarrow x \in \varnothing$
❺ ***Тригонометричне рівняння*** $\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
❻ ***Тригонометричне рівняння*** $\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

0.10. Прогресії

Арифметична прогресія	***Геометрична прогресія***
Характеристична властивість	
❶ $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n \geq 2$	❷ $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, n \geq 2$
Формула n-го члена	
❸ $a_n = a_{n-1} + d = a_1 + d(n-1)$	❹ $b_n = b_{n-1} q = b_1 q^{n-1}$
Формула суми n перших членів	
❺ $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$	❻ $S_n = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

Розділ 1. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ

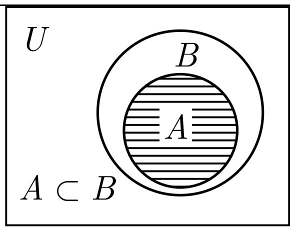
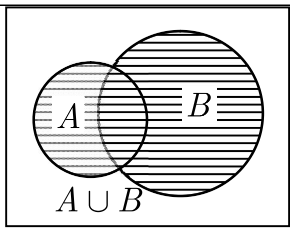
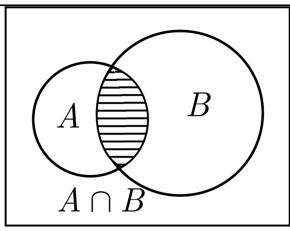
1.1. Математична символіка

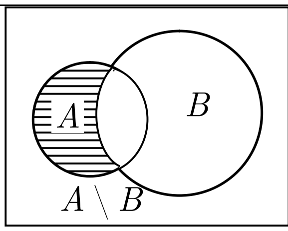
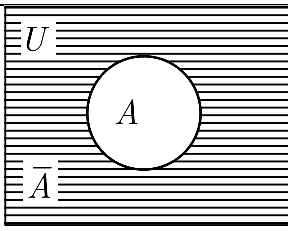
❶ ***Квантор існування*** $\exists$ — «існує», «знайдеться»	«існує x такий, що виконано $A(x)$» $\exists x : A(x)$
❷ ***Квантор спільності*** $\forall$ — «для будь-якого», «для всіх»	«для будь-якого x виконано $A(x)$» $\forall x : A(x)$
❸ ***Імплікація***	«з A випливає B», «якщо A, то B» $A \Rightarrow B$
❹ ***Еквіваленція***	«A тоді й лише тоді, коли B» $A \Leftrightarrow B$
❺ ***Заперечення***	«не A» $\overline{A}$
❻ ***Правила заперечення кванторів***	1) $\overline{\exists x : A(x)} \Leftrightarrow \forall x : \overline{A}(x)$; 2) $\overline{\forall x : A(x)} \Leftrightarrow \exists x : \overline{A}(x)$
❼ ***Необхідна і достатня умови.*** Нехай правдива теорема «Якщо P, то Q.»: $P \Rightarrow Q$	P — *достатня* умова для Q; Q — *необхідна* умова для P
❽ ***Принцип математичної індукції.*** Якщо: 1) твердження $P(n), n \in \mathbb{N}$, правдиве для $n = 1$; 2) із правдивості твердження $P(k)$ випливає правдивість твердження $P(k+1)$, то твердження $P(n)$ правдиве для всіх натуральних n.	❾ ***Схема методу математичної індукції.*** ① Перевіряють правдивість твердження $P(n)$ для $n = 1$. ② Припускаючи правдивість твердження $P(k)$, доводять твердження $P(k+1)$. ③ На підставі принципу математичної індукції висновують правдивість твердження $P(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.2. Скорочені позначення. Біноміальна формула Ньютона

❶ ***Факторіал.*** $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n;$ $0! = 1$	$(n+1)! = n!(n+1)$
❷ ***Сума*** n доданків $a_1, a_2, \ldots, a_n$	$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
❸ ***Біноміальний коефіцієнт*** $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$	❹ ***Основні властивості біноміальних коефіцієнтів.*** ① $C_n^k = C_n^{n-k}, k = \overline{0,n};$ ② $C_n^0 = C_n^n = 1;$ ③ $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, k = \overline{0, n-1}$
❺ ***Біноміальна формула Ньютона.*** $(a+b)^n = b^n + C_n^1 ab^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} b + a^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$	
❻ ***Окремі випадки формули Ньютона.*** ① $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$ ② $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$	❼ ***Паскалів трикутник.*** $\begin{array}{c} 1 \\ 1\ \ 1 \\ 1\ \ 2\ \ 1 \\ 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\ 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} C_0^0 \\ C_1^0\ \ C_1^1 \\ C_2^0\ \ C_2^1\ \ C_2^2 \\ C_3^0\ \ C_3^1\ \ C_3^2\ \ C_3^3 \\ C_4^0\ \ C_4^1\ \ C_4^2\ \ C_4^3\ \ C_4^4 \end{array}$
❽ ***Формули скороченого множення.*** ① $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$ ② $a^3 \pm b^3 = (a+b)(a^2 \mp ab + b^2)$	❾ ***Формули перетворення ірраціональностей.*** ① $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}};$ ② $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} = \dfrac{a \pm b}{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$

1.3. Множини

❶ Під *множиною* розуміють сукупність об'єктів довільної природи, об'єднаних за якою-небудь ознакою.	Об'єкти, які утворюють множину називають *елементами* множини.	
x належить множині A	$x \in A$ (x є елементом A)	
x не належить множині A	$x \notin A$ (x не є елементом A)	
універсальна множина (множина всіх елементів, які розглядають у задачі)	U	
❷ ***Порожня*** множина (множина, яка не містить жодного елемента)	$\varnothing$	
❸ ***Способи задавання*** множин:		
① переліком своїх елементів	$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$;	
② характерною властивістю	$A = \{x \mid P(x)\}$ — множина всіх x, які мають властивість $P(x)$	
❹ ***Включення*** множин. $A \subset B \Leftrightarrow \left(x \in A \Rightarrow x \in B\right)$ *A є підмножиною B*		1) $A \subset A$; 2) $\varnothing \subset A$
❺ ***Рівність*** множин. $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B, \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$	$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B, \\ B \subset A \end{cases}$	
❻ ***Об'єднання*** множин. $A \cup B = \{x \mid x \in A$ або $x \in B\}$		1) $A \cup A = A$; 2) $A \cup \varnothing = A$
❼ ***Переріз*** (***добуток***) множин. $A \cap B = \{x \mid x \in A$ і $x \in B\}$		1) $A \cap A = A$; 2) $A \cap \varnothing = \varnothing$

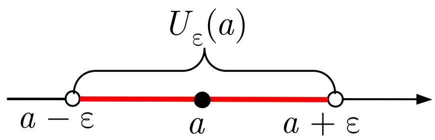
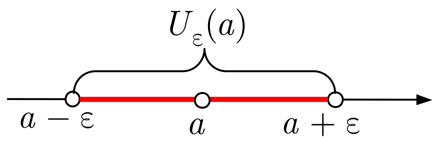
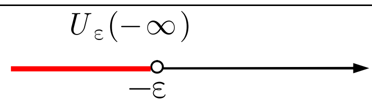
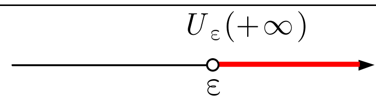
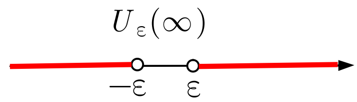
❽ ***Різниця*** множин. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$		1) $A \setminus A = \varnothing$; 2) $A \setminus \varnothing = A$
❾ ***Доповнення*** *множини.* $\overline{A} = U \setminus A$		1) $A \cup \overline{A} = U$; 2) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

❿ ***Основні властивості дій над множинами.***	
комутативність об'єднання	$A \cup B = B \cup A$
комутативність перерізу	$A \cap B = B \cap A$
асоціативність об'єднання	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
асоціативність перерізу	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
дистрибутивність об'єднання щодо перерізу	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
дистрибутивність перерізу щодо об'єднання	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
закони де Моргана	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
закони поглинання	$A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A$

1.4. Числові множини

❶ Множина ***натуральних*** чисел. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$	❷ Множина ***цілих*** чисел. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
❸ Множина ***раціональних*** чисел. $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \middle\vert m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$	❹ Множина ***дійсних*** чисел $\mathbb{R} = \{a, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \vert$ $a \in \mathbb{Z}, \alpha_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\}$
❺ Множина ***ірраціональних*** чисел $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	❻ ***Властивості числових множин.*** ① $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; ② $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

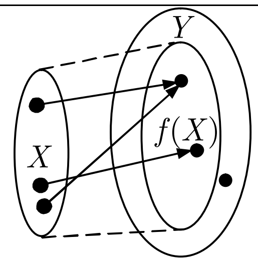
1.5. Числові проміжки

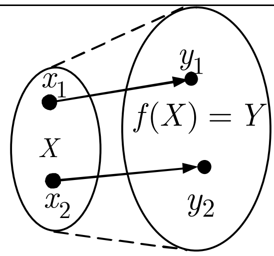
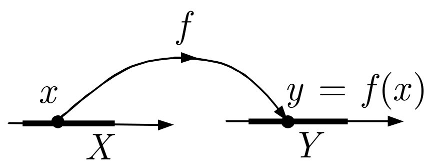
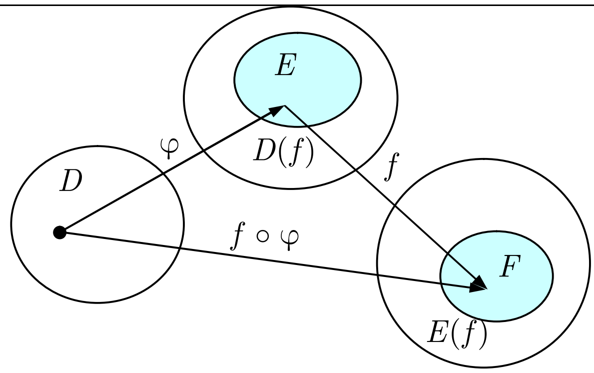
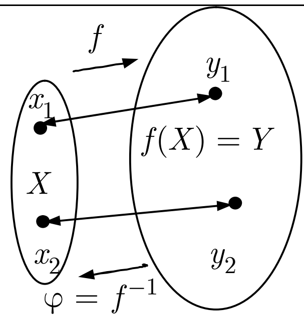
❶ ***Відрізок*** $[a;b] = \{x \mid a \le x \le b\}$	
❷ ***Інтервал*** $(a;b) = \{x \mid a < x < b\}$	
❸ ***Півінтервал*** $[a;b) = \{x \mid a \le x < b\}$	
$(a;b] = \{x \mid a < x \le b\}$	
❹ ***Нескінченний проміжок*** $(a;+\infty) = \{x \mid a < x\}$	
$(-\infty;b) = \{x \mid x < b\}$	
$[a;+\infty) = \{x \mid a \le x\}$	
$(-\infty;b] = \{x \mid x \le b\}$	
$(-\infty;+\infty) = \mathbb{R}$	
❺ ε***-окіл*** точки $a \in \mathbb{R}$. $U_\varepsilon(a) = \{x \| \|x-a\| < \varepsilon\} =$ $= (a-\varepsilon;a+\varepsilon), \varepsilon > 0$	
❻ ***Проколений*** ε***-окіл*** точки $a \in \mathbb{R}$. $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = \{x \| 0 < \|x-a\| < \varepsilon\} =$ $= (a-\varepsilon;a) \cup (a;a+\varepsilon)$	
❼ ε***-окіл*** точки $-\infty$ $U_\varepsilon(-\infty) = \{x \| x < -\varepsilon\} = (-\infty;-\varepsilon)$	
❽ ε***-окіл*** точки $+\infty$ $U_\varepsilon(+\infty) = \{x \| x > \varepsilon\} = (\varepsilon;+\infty)$	
❾ ε***-окіл*** точки ∞ $U_\varepsilon(\infty) = \left\{x \| \|x\| > \varepsilon\right\} =$ $= (-\infty;-\varepsilon) \cup (\varepsilon;+\infty)$	

1.6. Обмежені множини

❶ Множину $A \subset \mathbb{R}$ називають ***обмеженою зверху***, якщо $$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A \Rightarrow x \le M.$$ M — *верхня межа* множини A.	❷ Множину $A \subset \mathbb{R}$ називають ***обмежена знизу***, якщо $$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in A \Rightarrow x \ge m.$$ m — *нижня межа* множини A.
❸ Множину $A \subset \mathbb{R}$ називають ***обмеженою***, якщо вона обмежена зверху і знизу.	$\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in A \Rightarrow m \le x \le M;$ $$\exists C \ge 0 : \forall x \in A \Rightarrow \lvert x \rvert \le C.$$
❹ Число $M \in \mathbb{R}$ є ***точною верхньою межею*** множини $A \subset \mathbb{R}$, якщо: 1) $\forall x \in A : x \le M$; 2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in A : x_0 > M - \varepsilon$. Позначають $M = \sup A$	❺ Число M ***є точною нижньою межею*** множини $A \subset \mathbb{R}$, якщо: 1) $\forall x \in A : x \ge m$; 2) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists x_0 \in A : x_0 < m + \varepsilon$. Позначають $m = \inf A$
❻ ***Існування точних меж.*** Будь-яка обмежена зверху непорожня множина дійсних чисел має точну верхню межу, а будь-яка обмежена знизу — точну нижню межу.	Для необмеженої зверху множини пишуть $\sup A = +\infty$. Для необмеженої знизу множини A пишуть $\inf A = -\infty$.

1.7. Функція (відображення)

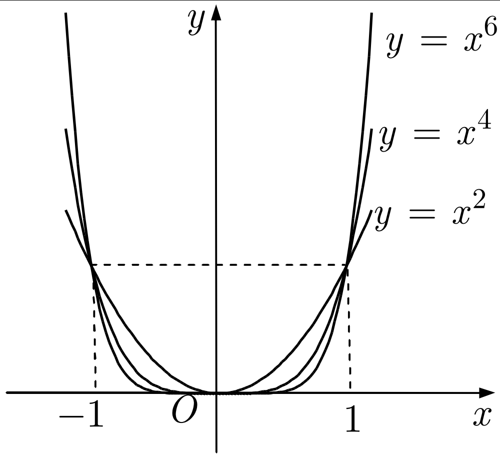
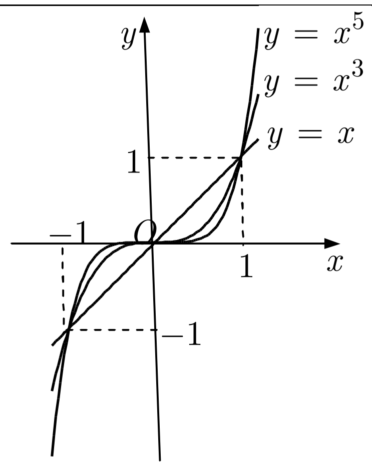
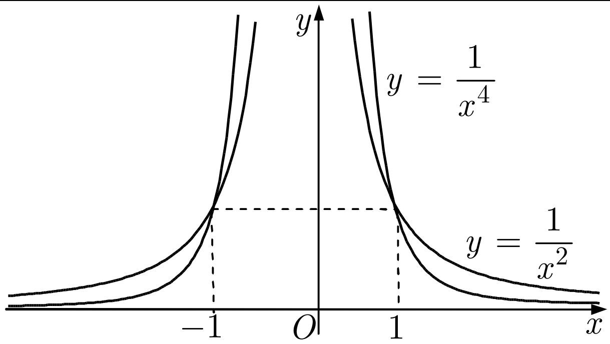
❶ ***Відображення*** множини X у множину Y $f : X \to Y;\ y = f(x), x \in X$ $\boxed{x} \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow \boxed{y = f(x)}$	
аргумент функції	x (прообраз елемента $f(x)$)
значення функції	$f(x)$ (образ елемента x)
область означення функції	$X = D(f)$
множина значень функції	$E(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$

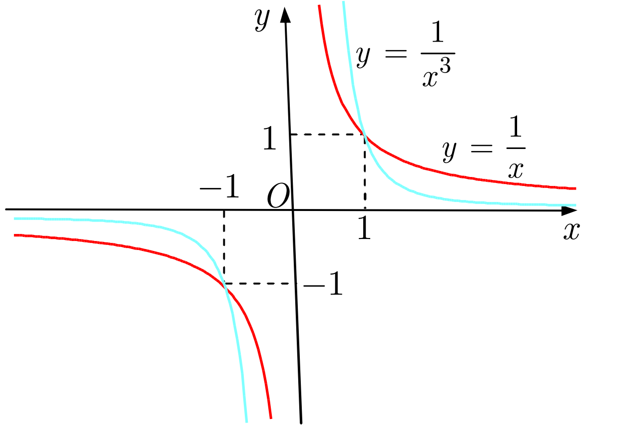
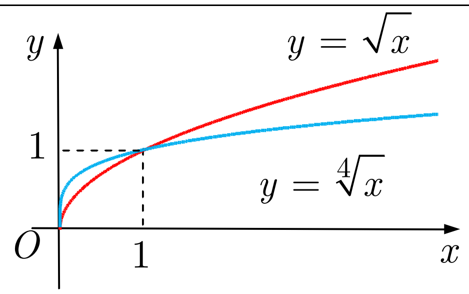
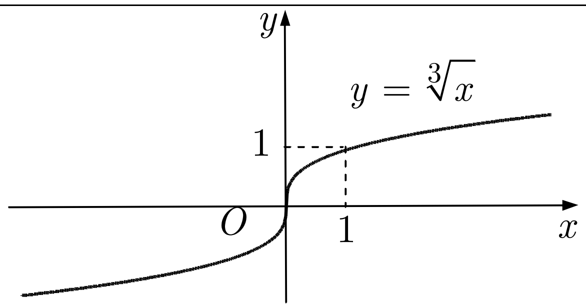
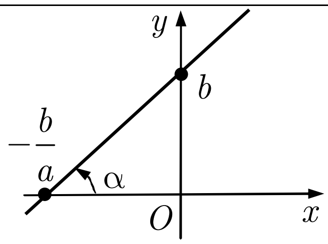
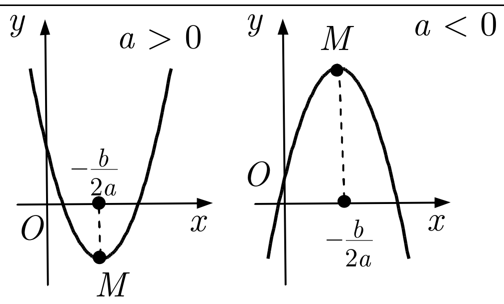
❷ ***Взаємно-однозначне відображення.***	
❸ ***Деякі типи функцій:***	
дійсна (скалярна) функція	$E(f)\subset\mathbb{R}$
функція ***дійсного (скалярного)*** аргументу	$D(f)\subset\mathbb{R}$
дійсна (скалярна) функція ***дійсного (скалярного)*** аргументу	$D(f)\subset\mathbb{R}, E(f)\subset\mathbb{R}$ 
послідовність елементів множини Y	$f:\mathbb{N}\to Y$
числова послідовність	$f:\mathbb{N}\to Y\subset\mathbb{R}$
❹ ***Графік функції*** $y=f(x), x\in X$	$\Gamma=\{M(x;y)\mid x\in X, y=f(x)\}$
❺ ***Складена функція.*** Нехай $u=\varphi(x):D\to E;$ $y=f(u):E\to F.$ Функція $y=f(\varphi(x))=(f\circ\varphi)(x), x\in D$ — *складена* функція, *суперпозиція* функцій f та φ	
❻ ***Обернена функція***. Нехай функція $y=f(x):D\to E,$— взаємно однозначна. *Оберненою* до f функцією називають функцію $y=f^{-1}(x):f(y)=x.$	

1.8. Основні характеристики функції

❶ ***Нулі*** функції	$\{x \mid f(x) = 0\}$
❷ ***Парна*** функція	$\forall x \in D(f) : -x \in D(f)$ і $f(-x) = f(x)$
❸ ***Непарна*** функція	$\forall x \in D(f) : -x \in D(f)$ і $f(-x) = -f(x)$
❹ ***Періодична*** функція з ***періодом*** T	$\exists T \neq 0 \ \forall x \in D(f) :$ $x + T \in D(f)$ і $f(x+T) = f(x)$
❺ ***Зростаюча*** функція на множині X	$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
❻ ***Спадна*** функція на множині X	$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
❼ ***Неспадна*** функція на множині X	$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
❽ ***Незростаюча*** *функція на множині* X	$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
❾ ***Стала*** *функція на множині* X	$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow f(x) = C$
❿ ***Обмежена*** функція на множині X	$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow \lvert f(x) \rvert \leq M$
⓫ Функція ***обмежена зверху*** на множині X	$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow f(x) \leq M$
⓬ Функція ***обмежена знизу*** на множині X	$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow m \leq f(x)$

1.9. Степенева функція

❶ ***Степенева*** функція $y = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. $D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = [0;+\infty)$. Функція парна. Графіком є парабола порядку $2n$.	
❷ ***Степенева*** функція $y = x^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. $D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна; зростає на $\mathbb{R}$. Графіком є парабола порядку $2n-1$.	
❸ ***Степенева*** функція $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ E(f) = (0;+\infty)$. Функція парна. Графік має асимптоти: вертикальну $x = 0$ і горизонтальну $y = 0$.	

❹ ***Степенева*** функція $y = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Функція непарна; спадає на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Графік має асимптоти: вертикальну $x = 0$ і горизонтальну $y = 0$.	
❺ ***Степенева*** функція $y = \sqrt[2n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$. $D(f) = [0;+\infty)$, $E(f) = [0;+\infty)$. Функція зростає на $[0;+\infty)$.	
❺ ***Степенева*** функція $y = \sqrt[2n-1]{x}$, $n \in \mathbb{N}$. $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна; зростає на $\mathbb{R}$.	
❻ ***Лінійна*** функція $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$. $D(f) = \mathbb{R}$. Графіком є пряма лінія з кутовим коефіцієнтом $k = a = \operatorname{tg} \alpha$.	
❼ ***Квадратична*** функція $y = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$. $D(f) = \mathbb{R}$. $$y = ax^2 + bx + c = \\ = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},\\ a \neq 0.$$	 $y = ax^2 + bx + c$ Парабола

❽ ***Дробово-раціональна*** функція

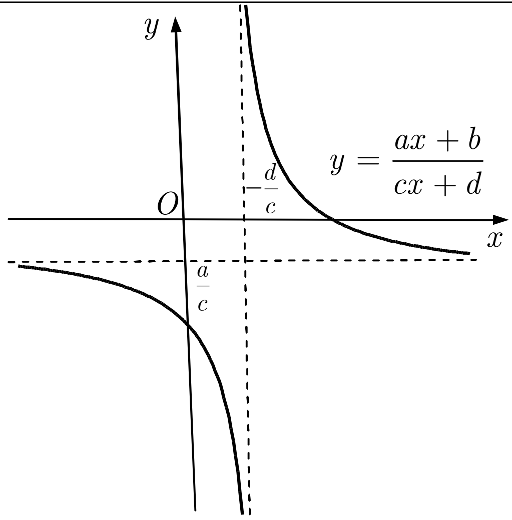
$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0.$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - (ad)/c}{cx+d}.$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}; E(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}.$

Функція $\begin{cases} \text{спадає на } D(f), & ad < bc, \\ \text{зростає на } D(f), & ad > bc. \end{cases}$

Графік (гіпербола) має асимптоти: вертикальну $x = -\dfrac{d}{c}$ і горизонтальну $y = \dfrac{a}{c}$.



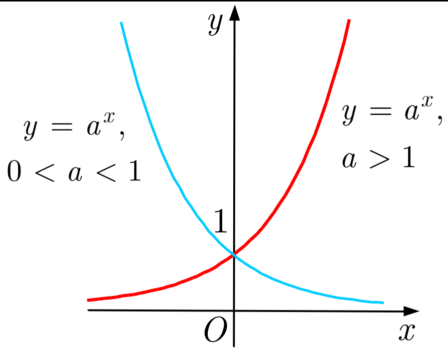
Гіпербола

1.10. Показникова і логарифмічна функція

❶ ***Показникова*** функція $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$.

$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = (0; +\infty).$

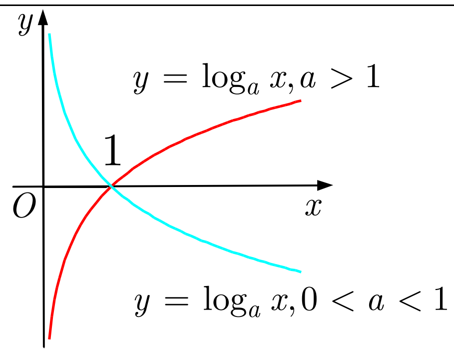
Функція $\begin{cases} \text{спадає на } \mathbb{R}, & 0 < a < 1, \\ \text{зростає на } \mathbb{R}, & a > 1. \end{cases}$



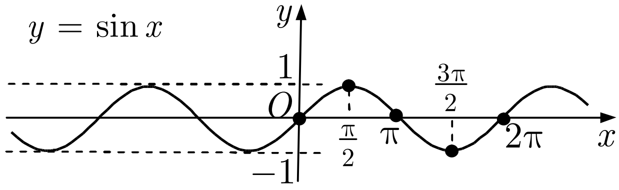
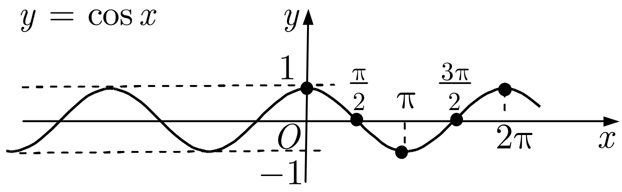
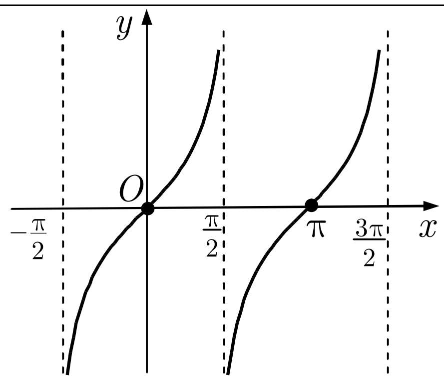
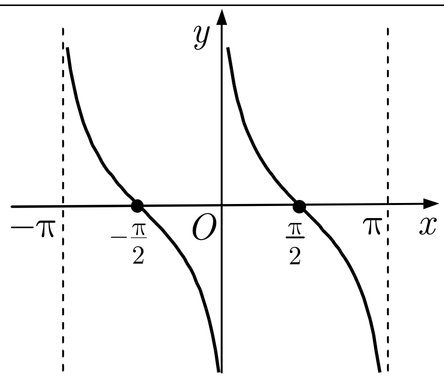
❷ ***Логарифмічна*** функція $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$.

$D(f) = (0; +\infty),\ E(f) = \mathbb{R}.$

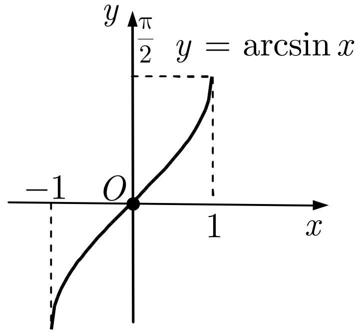
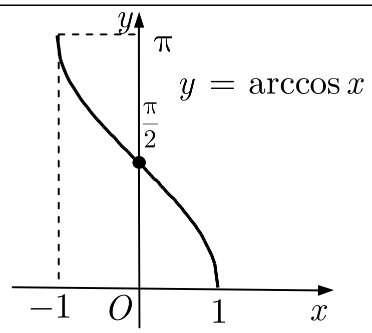
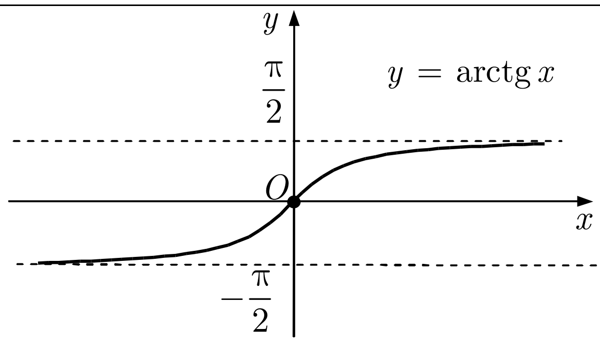
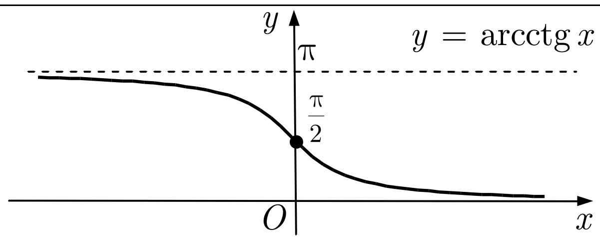
Функція $\begin{cases} \text{спадає на } \mathbb{R}, & 0 < a < 1, \\ \text{зростає на } \mathbb{R}, & a > 1. \end{cases}$



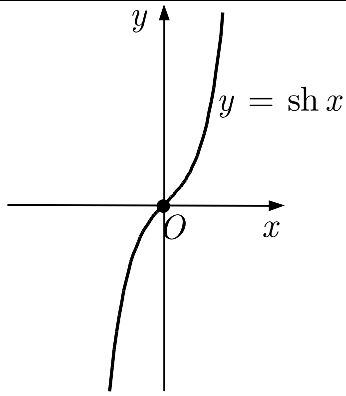
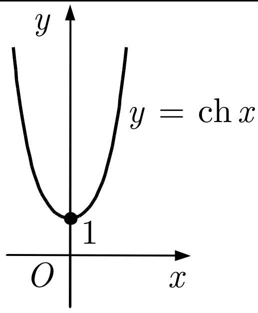
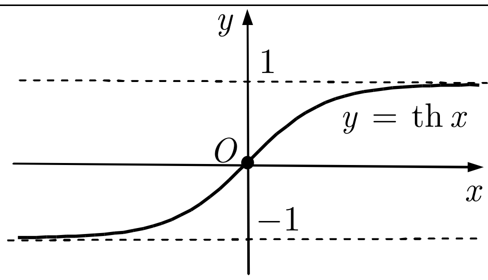
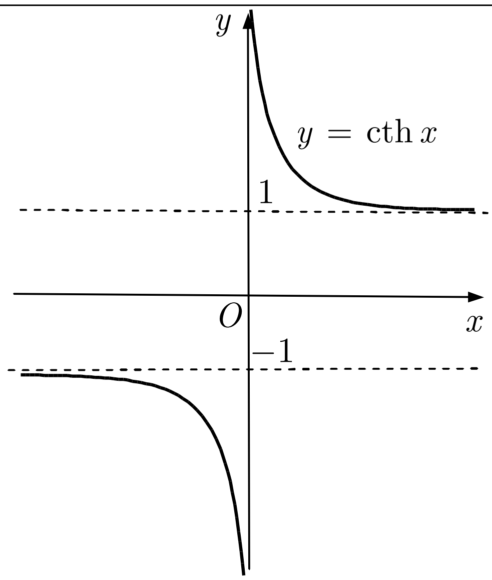
1.11. Тригонометричні функції

❶ ***Синус*** $y = \sin x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [-1;1]$. Функція непарна; періодична з періодом $T = 2\pi$.	 Синусоїда
❷ ***Косинус*** $y = \cos x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [-1;1]$. Функція парна; періодична з періодом $T = 2\pi$.	 Косинусоїда
❸ ***Тангенс*** $y = \operatorname{tg} x$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, $E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна; періодична з періодом $T = \pi$; зростає на $D(f)$. Графік має вертикальні асимптоти $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	 Тангенсоїда
❹ ***Котангенс*** $y = \operatorname{ctg} x$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}, E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна; періодична з періодом $T = \pi$; спадає на $D(f)$. Графік має вертикальні асимптоти $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$	 Котангенсоїда

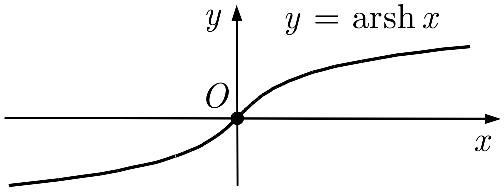
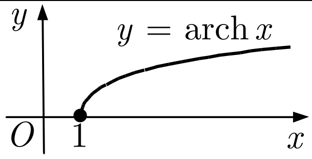
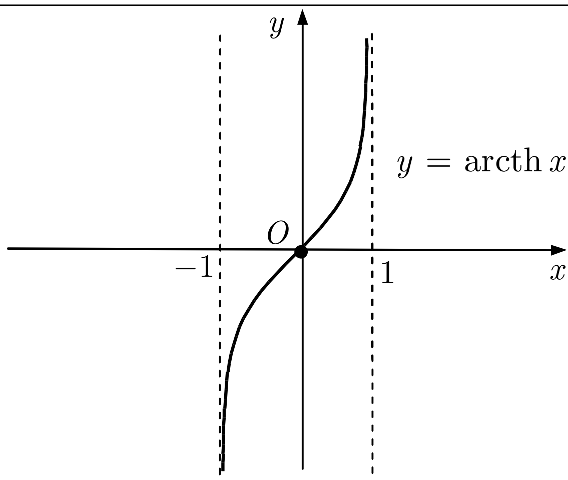
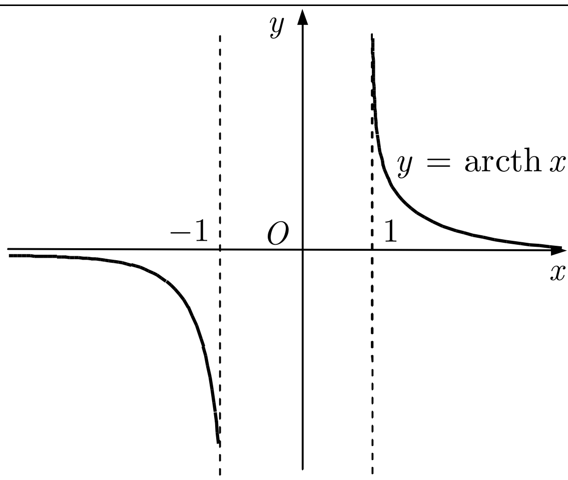
1.12. Обернені тригонометричні функції

❶ ***Арксинус*** $y = \arcsin x$. $D(f) = [-1;1],\ E(f) = \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. Функція непарна; зростає на $D(f)$.	
❷ ***Арккосинус*** $y = \arccos x$. $D(f) = [-1;1],\ E(f) = [0;\pi]$. Функція спадає на $D(f)$.	
❸ ***Арктангенс*** $y = \mathrm{arctg}\, x$. $D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Функція непарна; зростає на $D(f)$. Графік має горизонтальні асимптоти $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$.	
❹ ***Арккотангенс*** $y = \mathrm{arcctg}\, x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = (0;\pi)$. Функція спадає на $D(f)$. Графік має горизонтальні асимптоти $y = 0,\ y = \pi$.	

1.13. Гіперболічні функції

❶ ***Гіперболічний синус*** $y = \operatorname{sh} x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна. Зростає на $\mathbb{R}$.	
❷ ***Гіперболічний косинус*** $y = \operatorname{ch} x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [1; +\infty)$. Функція парна.	
❸ ***Гіперболічний тангенс*** $y = \operatorname{th} x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = (-1; 1)$. Функція непарна; зростає на $\mathbb{R}$. Графік має горизонтальні асимптоти $y = \pm 1$.	
❹ ***Гіперболічний котангенс*** $y = \operatorname{cth} x$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, E(f) = \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$. Функція непарна; спадає на $D(f)$. Графік має асимптоти: вертикальну $x = 0$ і горизонтальні $y = \pm 1$.	

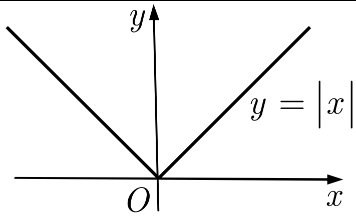
1.14. Обернені гіперболічні функції

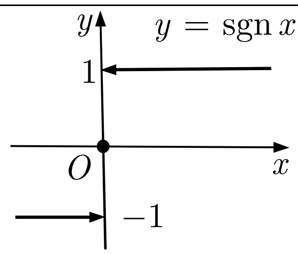
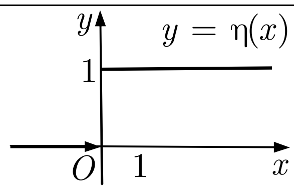
❶ ***Ареасинус*** $$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$ $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \mathbb{R}.$ Функція непарна; зростає на $D(f)$.	
❷ ***Ареакосинус*** $$y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$ $D(f) = [1;+\infty), E(f) = [0;+\infty)$ Функція зростає на $D(f)$.	
❸ ***Ареатангенс*** $$y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$ $D(f) = (-1;1), E(f) = \mathbb{R}.$ Функція непарна; зростає на $D(f)$. Графік має вертикальні асимптоти $x = \pm 1$.	
❹ ***Ареакотангенс*** $$y = \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}.$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus [-1;1],\ E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$ Функція непарна; спадає на $(-\infty;-1), (1;+\infty)$. Графік має асимптоти: вертикальні $x = \pm 1$ і горизонтальну $y = 0$.	

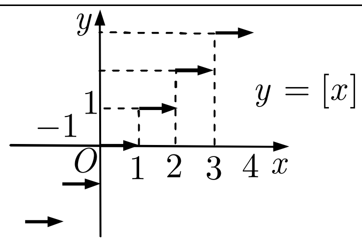
1.15. Деякі неелементарні функції

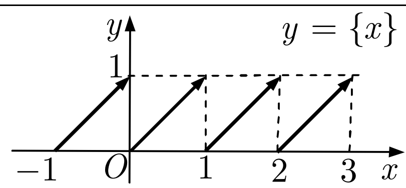
<table>
<tr>
<td>❶ Основні елементарні функції. До основних елементарних функцій належать: стала, степенева, показникова, логарифмічна, тригонометричні й обернені тригонометричні функції.</td>
<td>❷ Клас елементарних функцій. Всі функції, одержані скінченною кількістю арифметичних дій над основними елементарними функціями, і суперпозиції таких функцій, утворюють клас елементарних функцій.</td>
</tr>
<tr>
<td>❸ Функція модуль $y = |x|$.

$D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = [0; +\infty)$.

Функція парна.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>❹ Функція знак числа (сигнум)
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$
$D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = \{-1, 0, 1\}$.

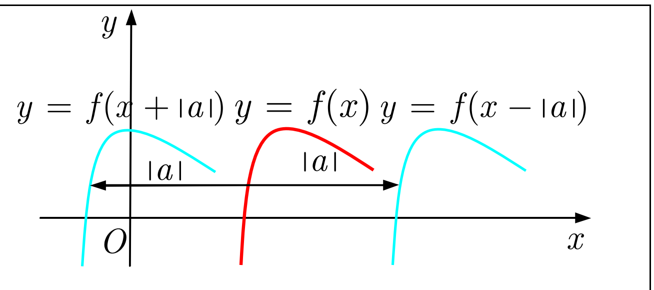
Функція непарна.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>❺ Функція Гевісайда
$$y = \eta(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$
$D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = \{0, 1\}$.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>❻ Ціла частина числа
$$y = [x] = n,$$
де $x = n + r, n \in \mathbb{Z}, 0 \le 1 < r$.

$D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = \mathbb{Z}$.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>❼ Дробова частина числа
$$y = \{x\} = x - [x]$$
$D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = [0; 1)$.

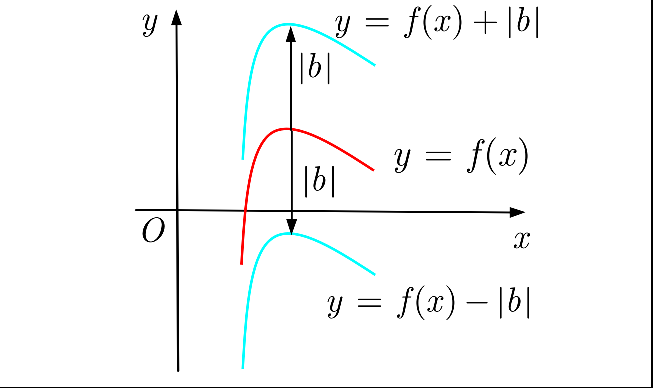
Функція періодична з періодом $T = 1$.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

1.16. Геометричні перетворення графіків функцій

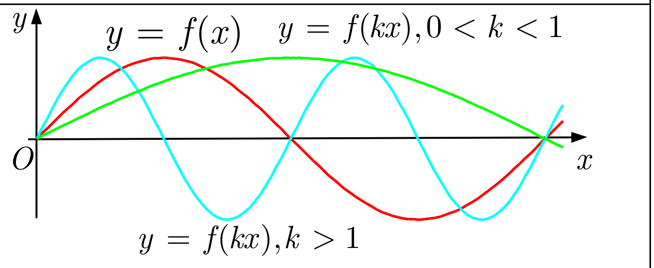
❶ ***Паралельне перенесення вздовж осі Ox.*** Щоб побудувати графік $y = f(x-a)$, графік $y = f(x)$ паралельно переносять уздовж осі Ox на a (праворуч для $a > 0$, ліворуч для $a < 0$).



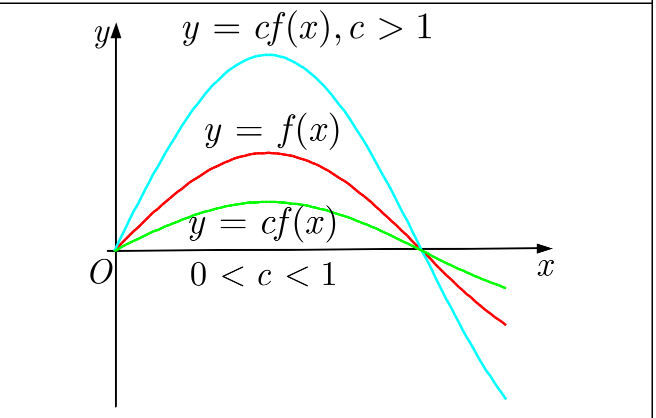
❷ ***Паралельне перенесення вздовж осі Oy.*** Щоб побудувати графік $y = f(x) + b$, графік $y = f(x)$ паралельно переносять уздовж осі Oy на b (вгору для $b > 0$, вниз для $b < 0$).



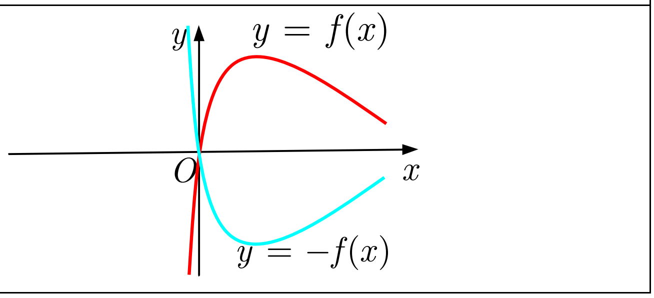
❸ ***Стискання (розтягування) вздовж осі Ox.*** Щоб побудувати графік $y = f(kx)$, графік $y = f(x)$ розтягують у $\dfrac{1}{k}$ разів $(0 < k < 1)$ уздовж осі Ox чи стискають у k разів $(k > 1)$ вздовж осі Ox



❹ ***Стискання (розтягування) вдовж осі Oy.*** Щоб побудувати графік $y = cf(x)$, графік $y = f(x)$ стискають в $\dfrac{1}{c}$ разів $(0 < c < 1)$ вздовж осі Oy чи розтягують у c разів $(c > 1)$ вздовж осі Oy.



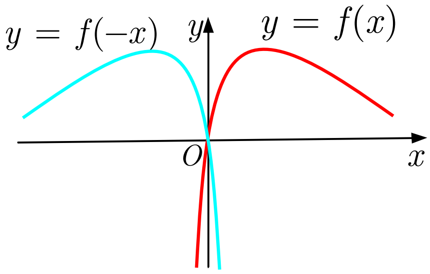
❺ ***Дзеркальне відбиття щодо осі Ox.*** Щоб побудувати графік $y = -f(x)$, графік $y = f(x)$ симетрично відображують щодо осі Ox.



<table>
<tr>
<td>

❻ ***Дзеркальне відбиття щодо осі Oy.*** Щоб побудувати графік $y = f(-x)$, графік $y = f(x)$ симетрично відображують щодо осі Oy.

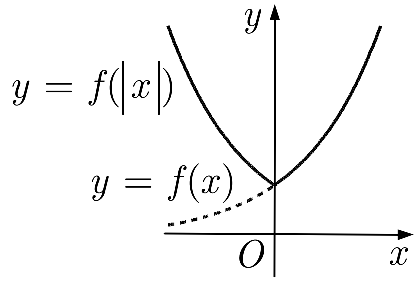
</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

❼ Щоб побудувати графік $y = f\left(\left|x\right|\right)$, частину графіка $y = f(x), x \geq 0$, доповнюють його відбитком щодо осі Oy.

</td>
<td>

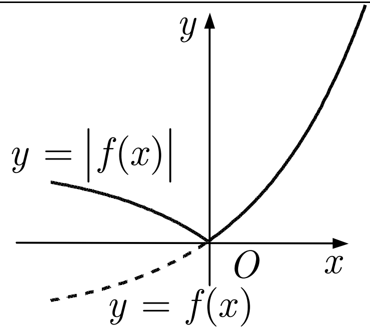


</td>
</tr>
<tr>
<td>

❽ Щоб побудувати графік $y = \left|f(x)\right|$,

частину графіка $y = f(x), y \geq 0$, не міняють, а частину графіка $y = f(x), y < 0$, відбивають щодо осі Ox.

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

1.17. Гармонічне коливання

<table>
<tr>
<td>

❶ ***Гармонічне коливання***

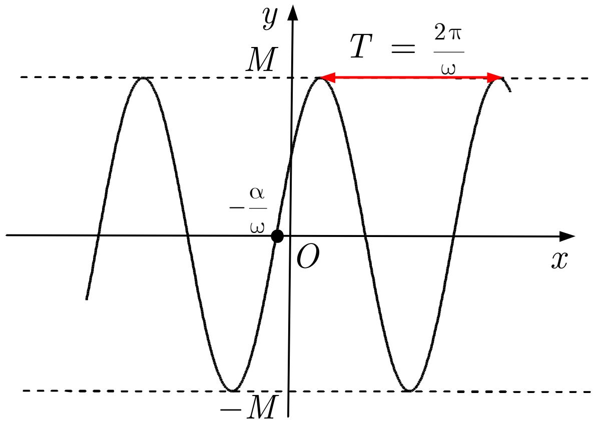
$$y = M\sin(\omega t + \alpha),$$

де t — час, $M > 0$ — *амплітуда*, $\omega > 0$ — *частота* (колова),

$\omega t + \alpha$ — *фаза*,

α — *початкова фаза*.

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

❷ ***Формула доповняльного кута***

</td>
<td>

$$A\sin\omega t + B\cos\omega t = M\sin(\omega t + \alpha),$$

$$M = \sqrt{A^2 + B^2};$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ \sin\alpha = \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{cases}$$

</td>
</tr>
</table>

1.18. Числові послідовності

❶ ***Числова послідовність.*** *Числовою послідовністю* $$x_1, x_2, ..., x_n, ... = \{x_n\}, n \in \mathbb{N},$$ називають числову функцію $x_n = f(n)$ означену на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$.	$x_1, x_2, ..., x_n, ...$ — *члени* послідовності; $x_n = f(n), n \in \mathbb{N}$, — n*-й* (*загальний*) *член* послідовності	
❷ ***Обмежена*** послідовність $\{x_n\}$	$\exists M > 0\ \forall n : \lvert x_n \rvert \le M$	
❸ ***Необмежена*** послідовність $\{x_n\}$	$\forall M > 0\ \exists n : \lvert x_n \rvert > M$	
Монотонні послідовності ($\Delta = x_{n+1} - x_n;\ \ q = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}, x_n > 0$)		
❹ ***Зростаюча*** послідовність $\{x_n\}$ $\{x_n\} \nearrow$	$\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$	
	$\Delta > 0$	$q > 1$
❺ ***Неспадна*** послідовність $\{x_n\}$	$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \le x_{n+1}$	
	$\Delta \ge 0$	$q \ge 1$
❻ ***Спадна*** послідовність $\{x_n\}$ $\{x_n\} \searrow$	$\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1}$	
	$\Delta < 0$	$q < 1$
❼ ***Незростаюча*** послідовність $\{x_n\}$	$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \ge x_{n+1}$	
	$\Delta \le 0$	$q \le 1$

1.19. Границя послідовності

❶ ***Границя*** числової послідовності x_n. $$a = \lim_{n\to\infty} x_n$$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(a).$
❷ ***Збіжні (розбіжні)*** послідовності. Якщо $a \in \mathbb{R}$, то послідовність називають *збіжною*.	Якщо $a = \infty, \pm\infty$ або не існує, то послідовність називають *розбіжною*.
❸ ***Збіжна*** послідовність $$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert x_n - a \rvert < \varepsilon$

❹ ***Нескінченно мала*** послідовність (н. м. п.). $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow \left\|\alpha_n\right\| < \varepsilon$
❺ ***Нескінченно велика*** послідовність (н. в. п.). $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$	$\forall E > 0\ \exists N_E \in \mathbb{N} : \forall n > N_E \Rightarrow$ $\Rightarrow \left\|x_n\right\| > E$
❻ ***Властивості збіжних послідовностей***	
① Збіжна послідовність має єдину границю. ② Збіжна послідовність обмежена. ③ Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ та $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ і, починаючи з деякого номера, $x_n \le y_n$, то $a \le b$.	④ ***Теорема про три послідовності*** («про двох вартових»). Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ і, починаючи з деякого номера, виконано нерівність $x_n \le y_n \le z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.
❼ ***Властивості нескінченно малих послідовностей.***	
① Сума скінченної кількості н. м. п. є н. м. п. ② Добуток обмеженої послідовності на н. м. п. є н. м. п. ③ Добуток скінченної кількості н. м. п. є н. м. п.	④ Якщо $\{x_n\}$ — н. в. п., то $\left\{1/x_n\right\}$ — н. м. п. Якщо $\{\alpha_n\}$ — н. м. п. і $\alpha_n \ne 0\ \forall n$, то $\left\{1/\alpha_n\right\}$ — н. в. п. ⑤ ***Теорема про зв'язок збіжної послідовності з її границею і н. м. п.*** Числова послідовність $\{x_n\}$ збігається до числа a тоді й лише тоді, коли $x_n = a + \alpha_n$, де α_n — н. м. п.
❽ ***Теорема про арифметичні дії зі збіжними послідовностями.*** Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R}$, то: ① $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$;	② $\lim\limits_{n\to\infty} Cx_n = Ca, C = \text{const}$; ③ $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$; ④ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}, b \ne 0.$
❾ ***Необхідна умова збіжності послідовності.*** Якщо послідовність збігається, то вона обмежена.	❿ ***Ознака Веєрштраса*** (достатня умова збіжності послідовності). Якщо монотонна послідовність $\{x_n\}$ обмежена, то вона збігається.

1.20. Деякі важливі границі послідовностей

❶ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0,\ \alpha>0$	❷ $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}=\infty,\ \alpha>0$
❸ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$	❹ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1, a>0$
❺ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_0n^l+a_1n^{l-1}+\ldots+a_l}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}0, & l<m,\\ \frac{a_0}{b_0}, & l=m,\\ \infty, & l>m\end{cases}$	
❻ ***Невизначеності***	$\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0},0\cdot\infty,\infty-\infty,1^{\infty},0^{0},\infty^{0}$
∞ — н. в. п., 0 — н. м. п., 1 — послідовність збіжна до 1	
❼ ***«Визначеності»*** $(a,b\in\mathbb{R})$	
$a+(+\infty)=+\infty;$	$(+\infty)+(+\infty)=+\infty;$
$a\cdot(+\infty)=+\infty, a>0;$	$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty;$
$\frac{a}{\infty}=0;$	$\frac{a}{0}=\infty;$
$0^{+\infty}=0;$	$0^{-\infty}=+\infty;$
$a^{+\infty}=0,\ 0<a<1;$	$a^{+\infty}=+\infty,\ 1<a<+\infty;$
$(+\infty)^{b}=0, -\infty\le b<0;$	$(+\infty)^{b}=+\infty,\ 0<b<+\infty$

1.21. Границя функції

❶ Означення ***за Гейне, мовою послідовностей*** $$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$	$$\forall \{x_n\} : x_n \in D(f), n \in \mathbb{N} :$$ $$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0 \Rightarrow$$ $$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$
❷ Означення ***за Коші, мовою околів*** $$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$	$$\forall U_\varepsilon(A)\ \exists U_\delta(x_0) :$$ $$\forall x \in X \cap U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$
❸ Означення ***за Коші, мовою*** ε-δ $$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad (x_0, A \in \mathbb{R})$$	$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in D(f) :$$ $$0 < \left\lvert x - x_0 \right\rvert < \delta \Rightarrow \left\lvert f(x) - A \right\rvert < \varepsilon$$
❹ ***Ліва*** границя. $$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x\to x_0,\\ x<x_0}} f(x)$$	❺ ***Права*** границя. $$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x\to x_0,\\ x>x_0}} f(x)$$
❻ ***Необхідна і достатня умова існування скінченної границі.*** Функція $f(x), x \in X,$ має скінченну границю в точці x_0 тоді й лише тоді,	коли в цій точці існують рівні границі зліва і справа: $$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$$ $$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$$
❼ ***Нескінченно мала функція*** в точці x_0 (н. м. ф.)	$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$$
❽ ***Нескінченно велика функція*** в точці x_0 (н. в. п.)	$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \quad (\text{або } \pm\infty)$$
❾ ***Властивості функцій, що мають скінченну границю.*** ① Якщо функція має границю в точці, то ця границя єдина. ② Функція, що має скінченну границю в точці, обмежена в деякому околі цієї точки. ③ Якщо функція f має додатну (від’ємну) границю A в точці x_0, то існує проколений окіл точки x_0, в якому функція f додатна (від’ємна).	❿ ***Властивості н. м. ф.*** ① Алгебрична сума і добуток скінченної кількості нескінченно малих функцій, коли $x \to x_0$, є н. м. ф., коли $x \to x_0$. ② Добуток н. м. ф., коли $x \to x_0$, на обмежену в околі точки x_0 функцію є н. м. ф., коли $x \to x_0$.

④ Якщо в деякому проколеному околі точки x_0 правдива нерівність $f_1(x) \le f_2(x)$ і існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) \le \lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

⑤ Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = A$ і в деякому околі точки x_0 правдиві нерівності $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A.$

③ Якщо $\alpha(x)$ є н. м. ф., коли $x \to x_0$, і $\alpha(x) \ne 0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ є н. в. ф., коли $x \to x_0$, і навпаки, обернена до н. в. ф. є н. м. ф., коли $x \to x_0$.

④ ***Теорема про зв'язок функції, її границі і н. м. ф.*** Число A є границею функції f у точці x_0 тоді й лише тоді, коли функцію можна зобразити у вигляді

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ — н. м. ф., коли $x \to x_0$.

⓫ ***Теорема про арифметичні дії з функціями, які мають скінченні границі.*** Якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \lim_{x\to x_0} g(x) = B,$$

то:

① $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$

② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB,$

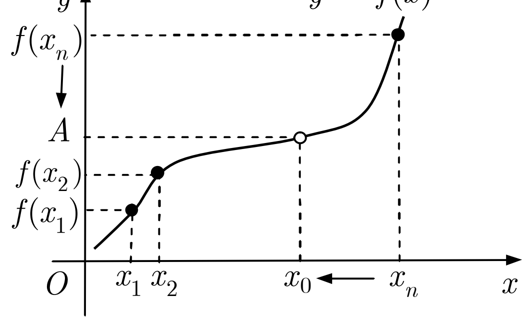
$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^n = A^n, n \in \mathbb{N};$

③ $\lim\limits_{x\to x_0} Cf(x) = CA;$

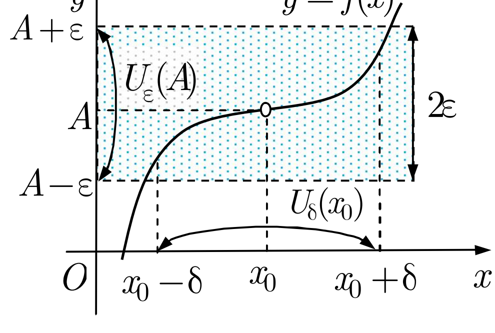
④ $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}, B \ne 0;$

⑤ $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = A^B.$

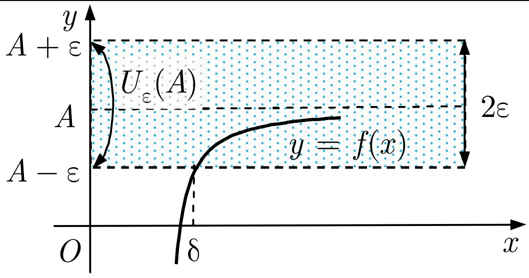
1.22. Геометричний зміст границі функції



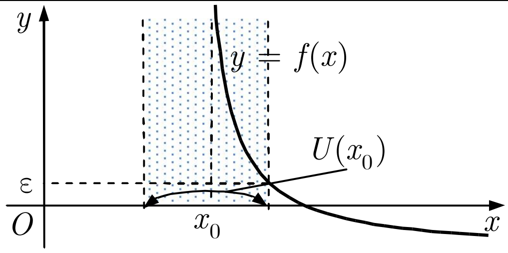
❶ Скінченна границя функції $f(x)$, коли $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ (за Гейне)



❷ Скінченна границя функції $f(x)$ коли $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ (за Коші)



❸ Скінченна границя функції $f(x)$ коли $x \to +\infty$ (за Коші)



❹ Нескінченна границя функції $f(x)$, коли $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ (за Коші)

1.23. Деякі важливі границі функцій

❶ $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha} = 0,\ \alpha > 0$	❷ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{\alpha}} = \infty,\ \alpha > 0$
❸ $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x^{\alpha}} = 0,\ \alpha > 0$	❹ $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\alpha} = \infty,\ \alpha > 0$
❺ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$	
❻ $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1; \end{cases}$	$\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & 0 < a < 1, \\ 1, & a = 1, \\ 0, & a > 1; \end{cases}$
❼ $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty;$ $\lim\limits_{x\to +0} \log_a x = -\infty,$ $a > 1;$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty;$ $\lim\limits_{x\to +0} \log_a x = +\infty,$ $0 < a < 1$
❽ $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\dfrac{\pi}{2}$	❾ $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi;$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$

1.24. Порівняння нескінченно малих функцій

❶ $\alpha(x)$ — н. м. ф. ***вищого порядку мализни***, ніж $\beta(x)$, коли $x \to x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$	$\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \to x_0$
❷ $\alpha(x)$ — н. м. ф. ***нижчого порядку мализни***, ніж $\beta(x)$, коли $x \to x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$	$\beta(x) = o(\alpha(x))$, $x \to x_0$
❸ $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ — н. м. ф. ***одного порядку мализни***, коли $x \to x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$	$\alpha(x) \asymp \beta(x))$, $x \to x_0$
❹ $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ — ***еквівалентні н. м. ф.***, коли $x \to x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$	$\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to x_0$
❺ $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ — ***непорівнянні*** н. м. ф., коли $x \to x_0$	$\nexists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$	
❻ $\alpha(x)$ н. м. ф. ***порядку*** k ***щодо*** н. м. ф. $\beta(x)$, коли $x \to x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = C$,	$\alpha(x) \sim C(\beta(x))^k$, $x \to x_0$,
	$C \neq 0, C \neq \infty$; $C(\beta(x))^k$ — *головна частина розкладу* функції $\alpha(x)$ щодо $\beta(x), x \to x_0$	
❼ Якщо н. м. ф. f еквівалентна функції g, коли $x \to x_0$, то для будь-якої функції $h(x)$ правдиві формули: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x)$; $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{h(x)}$.	❽ Нескінченно малі в точці функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли їхня різниця є н. м. ф. вищого порядку щодо $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, коли $x \to x_0$, тобто $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$, $\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x))$	
❾ ① Сума скінченної кількості н. м. ф. різних порядків еквівалентна доданку найменшого порядку. ② Сума скінченної кількості н. в. ф. різних порядків еквівалентна доданку найвищого порядку.	$f(x) = ax^m + bx^n, m < n$: $f(x) \sim ax^m, x \to 0$; $f(x) \sim bx^n, x \to \infty$	

1.25. Визначні границі

❶ ***Перша визначна границя***	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
❷ ***Наслідки.*** ① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$; ② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$;	③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$; ④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$
❸ ***Друга визначна границя***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=e$
❹ ***Наслідки.*** ① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$; ② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;	③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$; ④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$; ⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$
Формули перетворення степенево-показникових невизначеностей	
❺ $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\left[1^{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)}$	❻ $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\ln u(x)}$

1.26. Таблиця еквівалентностей

❶ $\sin x\sim x, x\to 0.$	❻ $\log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a}, x\to 0.$
❷ $\operatorname{tg} x\sim x, x\to 0.$	❼ $\ln(1+x)\sim x, x\to 0.$
❸ $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}, x\to 0.$	❽ $a^x-1\sim x\ln a, x\to 0.$
❹ $\arcsin x\sim x, x\to 0.$	❾ $e^x-1\sim x, x\to 0.$
❺ $\operatorname{arctg} x\sim x, x\to 0.$	❿ $(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x, x\to 0.$

1.27. Неперервність функції в точці

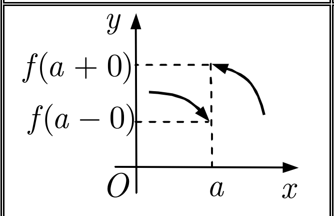
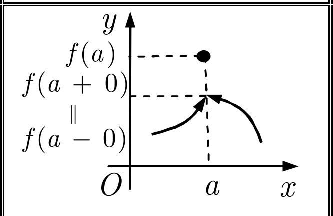
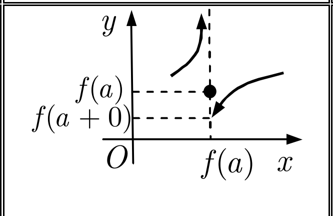
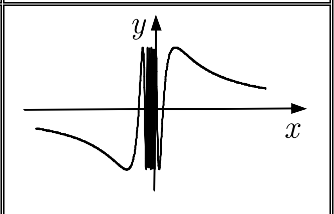
❶ ***Функція неперервна в точці.*** Функцію $f(x), x \in X$, називають *неперервною в точці* x_0, якщо існує границя функції $f(x)$, коли $x \to x_0$, і ця границя дорівнює значенню функції в точці: $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$	❷ ***Функція неперервна зліва в точці.*** Функція $f(x)$ у точці x_0 *неперервна зліва*, якщо $$f(x_0 - 0) = f(x_0).$$ ❸ ***Функція неперервна справа в точці.*** Функція $f(x)$ у точці x_0 *неперервна справа*, якщо $$f(x_0 + 0) = f(x_0).$$
❹ ***Критерій неперервності функції в точці.*** Функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли	$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$
❺ ***Приріст аргументу*** функції в точці x_0	$$\Delta x = x - x_0$$
❻ ***Приріст функції*** $f(x)$ у точці x_0	$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$
❼ ***Функція неперервна в точці.*** Функцію $f(x), x \in X$, називають	*неперервною в точці* $x_0 \in X$, якщо $$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$
❽ ***Властивості функцій неперервних у точці.*** ① Функція, неперервна в точці, обмежена в деякому околі цієї точки. ② Якщо функція f неперервна в точці x_0, то існує окіл $U(x_0)$, у якому функція f має знак числа $f(x_0)$. ③ Якщо для функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ виконано нерівність $f_1(x_0) > f_2(x_0)$ і функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні в точці x_0, то існує окіл точки x_0, у якому $f_1(x) > f_2(x)$.	④ Якщо функції f та g неперервні в точці x_0, то й функції $f \pm g, fg$ та $\dfrac{f}{g}$ $(g(x_0) \neq 0)$ неперервні в точці x_0. ⑤ Нехай функція g неперервна в точці x_0, а функція f неперервна в точці $y_0 = g(x_0)$, тоді складена функція $f(g(x))$ неперервна в точці x_0. ⑥ Основні елементарні функції неперервні в усіх точках, де вони означені.

1.28. Неперервність функції на відрізку

❶ ***Функція неперервна в інтервалі.*** Функцію f називають *неперервною в інтервалі* $(a;b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.	❷ ***Функція неперервна на відрізку.*** Функцію f називають *неперервною на відрізку* $[a;b]$, якщо вона неперервна в інтервалі $(a;b)$, в точці a неперервна справа, а в точці b — неперервна зліва.
Множину всіх неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій позначають $C[a;b]$.	
Властивості неперервних на відрізку функцій	
❸ ***Перша теорема Веєрштраса.*** Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на ньому.	❹ ***Друга теорема Веєрштраса.*** Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на ньому своїх найбільшого та найменшого значень.
❺ ***Перша теорема Больцано — Коші.*** Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і набуває на його кінцях значень $A = f(a)$ і $B = f(b)$ різних знаків, то всередині інтервалу $(a;b)$ знайдеться принаймні одна точка c, для якої $$f(c) = 0.$$	❻ ***Друга теорема Больцано — Коші.*** Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b], f(a) = A, f(b) = B,$ і C — будь-яке число, що лежить між A та B, то в інтервалі $(a;b)$ знайдеться принаймні одна точка c, в якій $$f(c) = C.$$
❼ ***Теорема про неперервність оберненої функції.*** Якщо функція f строго монотонна і неперервна на відрізку $[a;b]$, то	обернена функція f^{-1} неперервна на $[A;B]$, де $[A;B]$ — множина значень функції f.

1.29. Точки розриву функції

❶ ***Точка неперервності***. Точку, в якій функція f неперервна, називають *точкою неперервності* функції f.	❷ ***Точка розриву.*** Точку x_0 називають *точкою розриву* функції f, якщо: 1) функція f або не означена в точці x_0, 2) або f означена в точці x_0, але не є в цій точці неперервною.

<table>
<tr><td colspan="4">Класифікація точок розриву</td></tr>
<tr><td colspan="2">❸ Розрив 1-го роду (скінченний розрив)
$\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0) < \infty$</td><td colspan="2">❹ Розрив 2-го роду
1) $\nexists f(x_0 - 0)$ або $\nexists f(x_0 + 0)$, або
2) $\exists f(x_0 - 0) = \pm\infty$ чи
$\exists f(x_0 + 0) = \pm\infty$</td></tr>
<tr><td>Неусувний
$f(x_0 + 0) \neq$
$\neq f(x_0 - 0)$</td><td>Усувний
$f(x_0 + 0) =$
$= f(x_0 - 0)$</td><td>Нескінченний (полюс)
$\exists f(x_0 - 0) = \pm\infty$
або
$\exists f(x_0 + 0) = \pm\infty$</td><td>Істотний
$\nexists f(x_0 - 0)$
або
$\nexists f(x_0 + 0)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

❺ ***Алгоритм дослідження функції на неперервність у точці.***

① Знаходять $f(x_0 - 0)$ і $f(x_0 + 0)$.

② Висновують:

1) якщо існують скінченні однобічні границі і

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0),$$

то функція $f(x)$ *неперервна в точці* x_0;

2) якщо існують скінченні однобічні границі і

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$$

або функція не означена в точці x_0,

то функція $f(x)$ має *розрив 1-го роду, усувний*, у точці x_0;

3) якщо існують скінченні однобічні границі і $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$,

то функція $f(x)$ має *розрив 1-го роду, неусувний*, у точці x_0;

4) якщо існують однобічні границі і хоча б одна з них нескінченна, то функція $f(x)$ має *розрив 2-го роду, нескінченний (полюс)*, у точці x_0 (графік функції має вертикальну асимптоту $x = x_0$);

5) якщо хоча б одна із границь не існує, то функція $f(x)$ має *розрив 2-го роду, істотний*, у точці x_0.

Розділ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2.1. Похідна і диференціал функції

❶ ***Похідна функції в точці.*** *Похідною* функції $y = f(x)$ *у точці* x_0 називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:	$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
Позначення похідної функції $y = f(x)$	$y', f'(x), \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df}{dx}$
❷ ***Функція, диференційовна в точці.*** Функцію $f(x)$ називають *диференційовною в точці* x_0, якщо її приріст у цій точці $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	можна зобразити як $\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0,$ де A — деяке дійсне число, $o(\Delta x)$ — н. м. ф. вищого порядку мализни, ніж Δx, коли $\Delta x \to 0$.
❸ ***Диференціал функції.*** Головну частину приросту функції $A\Delta x$ називають *диференціалом функції* в точці x_0.	❹ Функція, яка має скінченну похідну в точці є диференційовною в цій точці.
❺ ***Ліва похідна.*** *Лівою похідною* функції $f(x)$ *у точці* x_0 називають $f'(x_0 - 0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	❻ ***Права похідна.*** *Правою похідною* функції $f(x)$ *у точці* x_0 називають $f'(x_0 + 0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
❼ ***Критерій існування похідної.*** Функція $f(x)$ має в точці x_0 похідну тоді й лише тоді, коли	існують права та ліва похідні і ці похідні рівні між собою: $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$.
❽ ***Диференціал*** функції $f(x)$ у точці x_0	$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$

2.2. Правила диференціювання

❶ $(Cu)' = Cu', C = \text{const}$	❷ $(u \pm v)' = u' \pm v'$
❸ $(uv)' = u'v + uv'$	❹ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
❺ $\big(f(u)\big)'_x = f'_u \cdot u'_x$	❻ $y = f(x) \Rightarrow y' = f(x)(\ln f(x))'$
❼ ***Похідна оберненої функції***	$y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$
❽ ***Похідна параметрично заданої функції*** $y(x): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in (\alpha;\beta) \end{cases}$	$y'(x): \begin{cases} x = x(t), \\ y'_x(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}, t \in (\alpha;\beta) \end{cases}$

2.3. Формули диференціювання

Тут $u = u(x)$. Якщо $u(x) = x$, то $u' = x' = 1$.

❶ $(C)' = 0, C = \text{const}$	❷ $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$
❸ $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', a > 0$	❹ $(e^u)' = e^u u'$
❺ $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}, a > 0, a \neq 1$	❻ $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
❼ $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	❽ $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
❾ $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	❿ $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
⓫ $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	⓬ $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
⓭ $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$	⓮ $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
⓯ $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$	⓰ $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$
⓱ $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$	⓲ $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}$

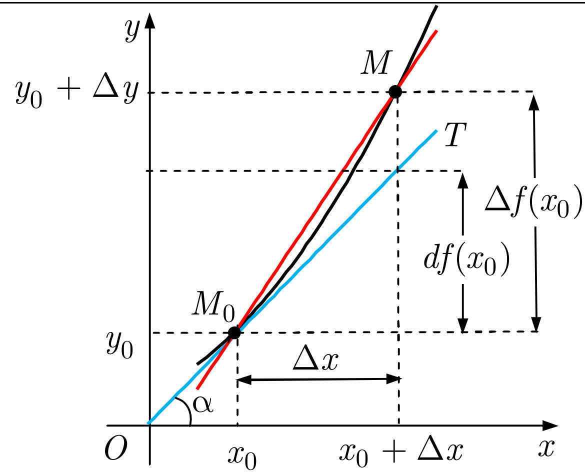
2.4. Формули для похідних вищих порядків

❶ ***Похідні вищих порядків***	$f''(x) = (f'(x))'$, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', n \in \mathbb{N}$
Позначення	$y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots;$ $f''(x), f'''(x), \ldots, f^{(n)}(x);$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^ny}{dx^n}$
❷ ***Диференціали вищих порядків***	$d^2f(x_0) = d(df(x_0))$, $d^nf(x_0) = d(d^{n-1}f(x_0))$
❸ ***Формула обчислення диференціала***	$d^nf(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n$, де x — незалежний аргумент
❹ ***Лейбніцова*** формула	$\left(u(x)v(x)\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$
❺ ***Похідна параметрично заданої функції*** $y(x): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in (\alpha;\beta) \end{cases}$	$y^{(n)}(x): \begin{cases} x = x(t), \\ y_{x^n}^{(n)}(t) = \dfrac{\left(y_{x^{n-1}}^{(n-1)}(t)\right)'}{x'(t)}, t \in (\alpha;\beta) \end{cases}$
❻ $(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, & n \le m, \\ 0, & n > m \end{cases}$ $m \in \mathbb{N}$	❼ $\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$
❽ $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$	❾ $(e^x)^{(n)} = e^x$
❿ $(\log_a x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$	⓫ $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
⓬ $(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$	⓭ $(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$

2.5. Геометричний зміст похідної і диференціала

❶ ***Дотична і нормаль до кривої.***
Дотичною до кривої в точці M_0 називають пряму M_0T, що є граничним положенням січної M_0M, коли точка M прямує по кривій до точки M_0.

Нормаллю до кривої називають пряму, яка перпендикулярна до дотичної і проходить через точку дотику.



❷ ***Геометричний зміст похідної і диференціала в точці.***

① Похідна функції $f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; f(x_0))$, тобто

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

де α — кут нахилу дотичної до осі Ox.

② Диференціал функції дорівнює приросту ординати дотичної.

❸ ***Рівняння дотичної***	$f'(x_0) < \infty$	$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
	$f'(x_0) = \infty$	$x = x_0$
❹ ***Рівняння нормалі***	$f'(x_0) \neq 0$	$y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$
	$f'(x_0) = 0$	$x = x_0$

❺ Умова ***паралельності*** прямих $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$	$k_1 = k_2$
❻ Умова ***перпендикулярності*** прямих $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$	$k_1k_2 = -1$
❼ ***Кут між прямими*** $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$	$\operatorname{tg}\varphi = \left\lvert \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right\rvert$

❽ ***Кут між двома кривими.*** *Кутом між двома кривими* $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ у точці їх перетину називають кут між дотичними до кривих, проведеними в цій точці.

2.6. Основні теореми диференціального числення

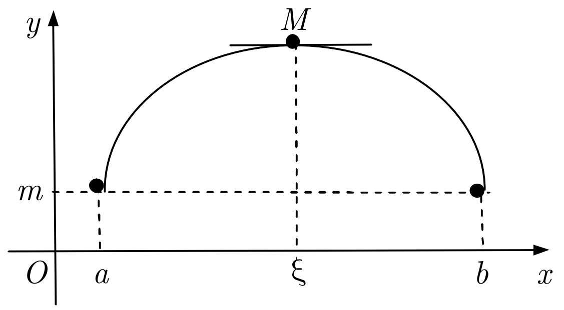
❶ ***Теорема Роля.*** Якщо функція f:

1) неперервна на відрізку $[a;b]$;

2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$;

3) на кінцях відрізку $[a;b]$ набуває рівних значень $f(a)=f(b)$, то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ, у якій похідна функції дорівнює нулеві, тобто

$$f'(\xi)=0, \xi \in (a;b).$$



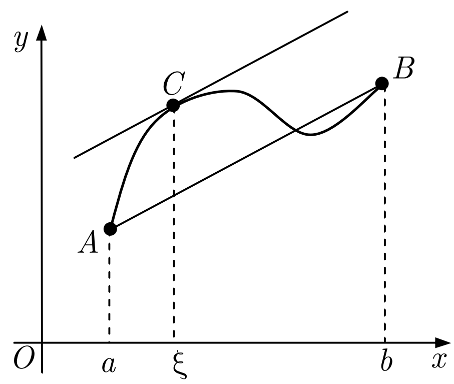
❷ ***Теорема Лаґранжа.*** Якщо функція f:

1) неперервна на відрізку $[a;b]$,

2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ така, що

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ \xi \in (a;b)$$



❸ ***Теорема Коші.*** Якщо функції f та g:

1) неперервні на відрізку $[a;b]$,

2) диференційовні в інтервалі $(a;b)$,

3) похідна $g'(x) \neq 0$ в інтервалі $(a;b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\ \ \xi \in (a;b)$$

❹ ***Правило Бернуллі — Лопіталя.*** Якщо функції f, g означені і диференційовні у проколеному околі точки x_0; $g'(x) \neq 0$ в цьому околі;

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0\ (\infty);$$

існує $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$;

то існує

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

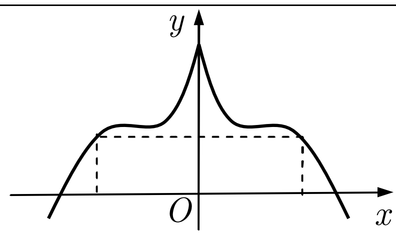
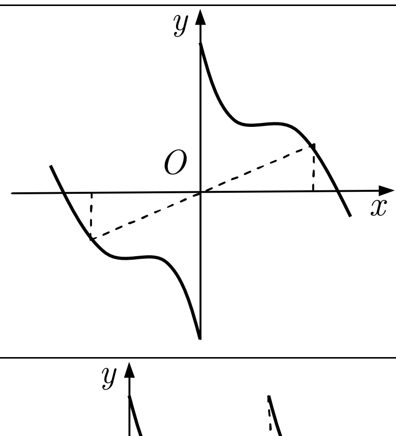
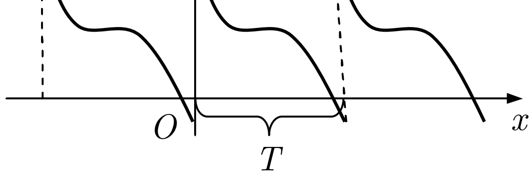
❺ ***Формула Тейлора із залишковим членом у формі Пеано.*** Якщо функція $f(x)$ означена в деякому околі точки x_0 і n разів диференційовна в ньому, то правдива *Тейлорова формула* з центром у точці x_0 із *залишковим членом у формі Пеано*: $$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) = P_n(x) + R_n(x), x \to x_0,$$ $P_n(x)$ — *Тейлорів многочлен*; $R_n(x)$ — *залишковий член*.
❻ ***Формула Тейлора із залишковим членом у формі Лаґранжа.*** Якщо $f(x)$ означена в деякому околі точки x_0 й $(n+1)$ разів диференційовна в ньому, то правдива *Тейлорова формула* з центром у точці x_0 *із залишковим членом у Лаґранжовій формі*: $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = = P_n(x) + R_n(x),\ \xi \in (x_0, x)$$

2.7. Тейлорова формула

❶ ***Формула Тейлора*** для функції f із центром у точці x_0	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$
❷ ***Формула Тейлора — Маклорена*** для функції f із центром у точці $x_0 = 0$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$
❸ ***Залишковий член*** у формі ***Лаґранжа***	$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$ $\xi \in (x_0; x)$
❹ ***Залишковий член*** у формі ***Пеано***	$R_n(x) = o((x - x_0)^n), x \to x_0$

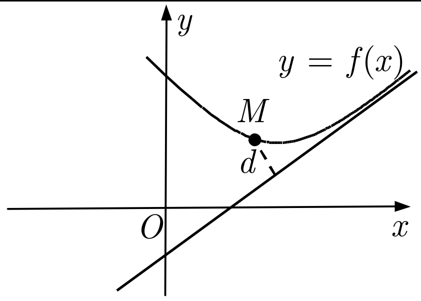
Формула Тейлора — Маклорена для деяких елементарних функцій
❺ $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + R_n(x)$
❻ $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + R_n(x)$
❼ $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x)$
❽ $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x)$
❾ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot ... \cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$

2.8. Характеристики функції і побудова її графіка

Симетрія графіка функції	
❶ ***Парна функція.*** Графік парної функції симетричний щодо осі Oy.	
❷ ***Непарна функція.*** Графік непарної функції симетричний щодо початку координат.	
❸ ***Періодична*** функція з періодом T. Графік періодичної функції повторюється з періодом T	

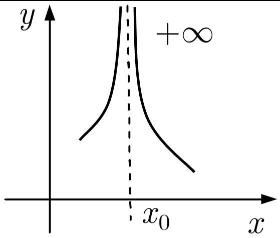
Асимптоти графіка функції

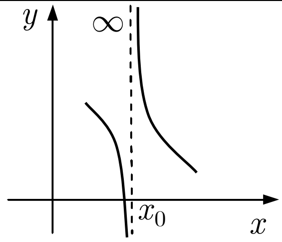
❹ ***Асимптота.*** *Асимптотою* кривої з нескінченною гілкою називають таку пряму, що віддаль d точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M віддаляється вздовж нескінченної гілки від початку координат.



❺ ***Вертикальна асимптота.*** Пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$



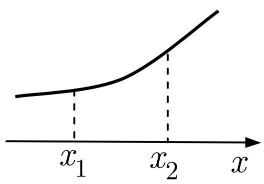
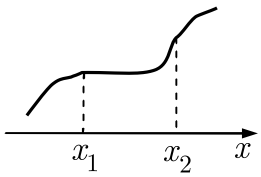
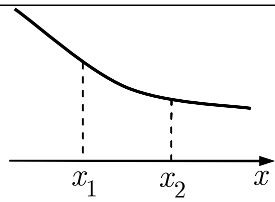
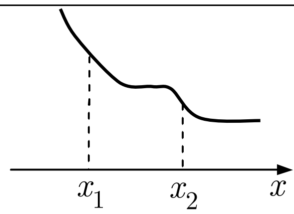


❻ ***Похила асимптота.*** Графік функції $y = f(x)$ має похилу асимптоту $y = kx + b$, тоді й лише тоді, коли існують скінченні границі

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

❼ ***Монотонність функції***

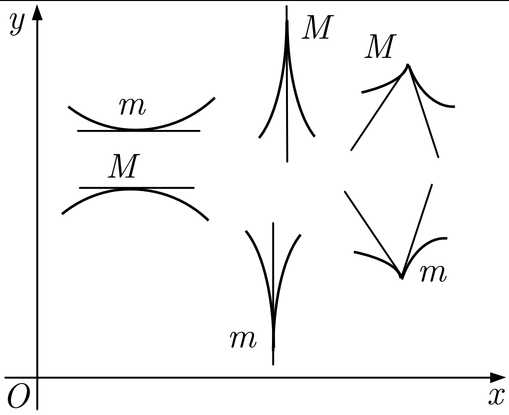
			
Функція зростає	Функція не спадає	Функція спадає	Функція не зростає

❽ ***Екстремум функції в точці.***

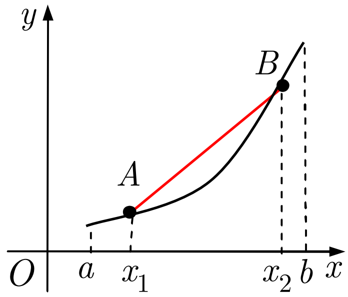
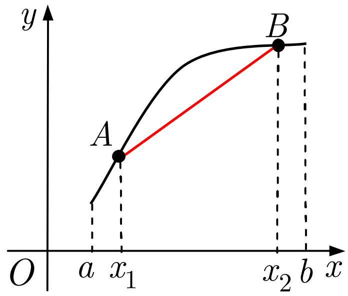
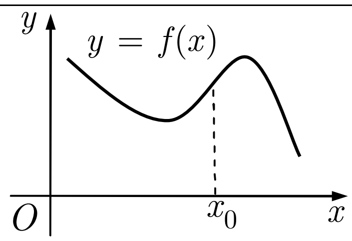
Точку x_0 називають *точкою локального максимуму* (*мінімуму*) функції $f(x)$, якщо існує такий δ-окіл точки x_0, що для всіх $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ виконано нерівність

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) < 0$$

$$(\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) > 0).$$

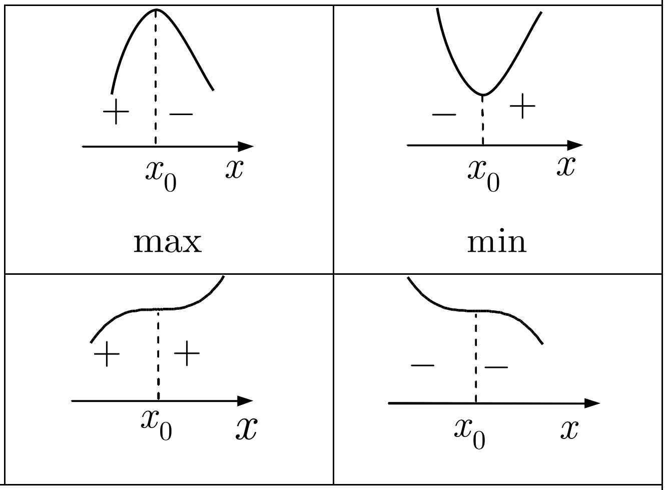


Значення $f(x_0)$ називають *локальним максимумом* (*мінімумом*) функції. Точки максимуму і мінімуму називають *точками екстремуму функції*, а максимуми та мінімуми функції — *екстремумами функції*.

❾ ***Функція опукла донизу.*** Функцію f називають *опуклою донизу* (*угнутою*) в інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-яких x_1 та x_2 з $(a;b)$, $a \le x_1 < x_2 \le b$, хорда AB лежить не нижче графіка цієї функції.	
❿ ***Функція опукла догори.*** Функцію f називають *опуклою догори* (*опуклою*) в інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-яких x_1 та x_2 з $(a;b)$, $a \le x_1 < x_2 \le b$, хорда AB лежить не вище графіка цієї функції.	
⓫ ***Точка перегину.*** *Точкою перегину* графіка диференційовної функції $y = f(x)$ називають точку $M(x_0; f(x_0))$ у якій напрям опуклості міняється на протилежний.	

2.9. Дослідження функції за допомогою похідних

❶ ***Критична точка 1-го порядку***. Нехай функція f означена в околі точки x_0. Точку x_0 називають *критичною точкою 1-го порядку*, якщо виконано одну з умов: 1) $f'(x_0) = 0$; 2) $f'(x_0) = \infty$; 3) $\nexists f'(x_0)$.	❷ ***Достатня умова зростання (спадання) функції.*** Якщо функція f диференційовна в інтервалі $(a;b)$ і $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ скрізь, крім, можливо, скінченної кількості точок, у яких $f'(x) = 0$ в $(a;b)$, то функція f зростає (спадає) в інтервалі $(a;b)$.
❸ ***Теорема Ферма.*** Якщо функція f означена в деякому околі точки x_0, досягає в цій точці екстремуму і має скінченну похідну, то ця похідна дорівнює нулеві: $$f'(x_0) = 0.$$	❹ ***Необхідна умова існування екстремуму.*** Якщо в точці x_0 функція f досягає екстремуму, то ця точка є критичною точкою 1-го порядку.

❺ ***Перша достатня умова існування екстремуму.*** Нехай x_0 — критична точка 1-го порядку і функція f неперервна в деякому околі точки x_0. Якщо в цьому околі: 1) $f'(x) > 0$ для $x < x_0$, і $f'(x) < 0$ для $x > x_0$, то в точці x_0 функція досягає максимуму; 2) $f'(x) < 0$, для $x < x_0$, і $f'(x) > 0$, для $x > x_0$, то функція досягає в точці x_0 мінімуму;	3) похідна не змінює знак переходячи через x_0, то в точці x_0 екстремуму немає. 
❻ ***Друга достатня умова існування екстремуму.*** Нехай функція f двічі неперервно диференційовна в точці x_0 та $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Тоді:	1) якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимуму; 2) якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального мінімуму.
❼ ***Критична точка 2-го порядку.*** Нехай функція f означена в околі точки x_0. Точку x_0 називають *критичною точкою 2-го порядку*, якщо виконано одну з умов: 1) $f''(x_0) = 0$; 2) $f''(x_0) = \infty$; 3) $\nexists f''(x_0)$.	❽ ***Достатня умова опуклості донизу (догори).*** Нехай функція $y = f(x)$ в інтервалі $(a;b)$ двічі неперервно диференційовна. Тоді: 1) якщо $f''(x) > 0 \, \forall x \in (a;b)$, то графік цієї функції в інтервалі $(a;b)$ опуклий донизу $\bigcup$; 2) якщо $f''(x) < 0 \, \forall x \in (a;b)$, то графік цієї функції в інтервалі $(a;b)$ опуклий догори $\bigcap$.
❽ ***Необхідна умова існування точки перегину.*** Якщо $M_0(x_0; f(x_0))$ — точка перегину графіка функції $y = f(x)$, то x_0 — критична точка 2-го порядку.	❾ ***Достатня умова існування точки перегину.*** Якщо для функції f точка x_0 є критичною точкою 2-го порядку, і, переходячи через цю точку, друга похідна $f''(x)$ міняє знак, то точка x_0 є точкою перегину функції f.

❿ ***Схема дослідження функції на монотонність і локальний екстремум.***

① Знаходять область означення функції.

② Знаходять критичні точки 1-го порядку функції f, якщо вони є (якщо їх немає, то функція не має екстремумів).

③ Досліджують знак першої похідної в кожному з інтервалів, на які критичні точки розбивають область означення.

④ Застосовуючи достатні умови монотонності й існування локального екстремуму, висновують про поведінку функції. Обчислюють значення функції в точках екстремуму.

⓫ ***Схема дослідження функцій на опуклість і точки перегину.***

① Знаходять область означення функції.

② Знаходять критичні точки 2-го порядку функції f, якщо вони є (якщо їх немає, то графік функції не має точок перегину).

③ Досліджують знак другої похідної в кожному з інтервалів, на які критичні точки розбивають область означення.

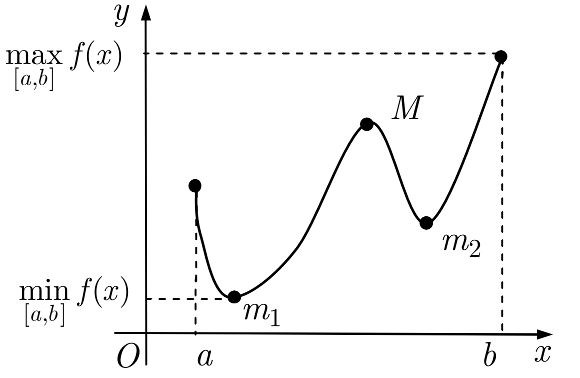
④ Застосовуючи достатні умови опуклості й існування точок перегину, висновують про поведінку функції.

⓬ ***Схема дослідження функції на глобальний екстремум.***

① Знаходять критичні точки 1-го порядку функції в інтервалі $(a;b)$;

② Обчислюють значення функції у знайдених критичних точках і на кінцях відрізку $[a;b]$.

③ Серед обчислених значень функції вибирають найбільше та найменше значення функції на $[a;b]$.



⓭ ***Схема повного дослідження функції та побудови її графіка.***

① Знаходять область означення функції f — множину $D(f)$.

② Встановлюють можливі симетрії графіка функції.

③ Визначають можливі точки розриву функції і асимптоти її графіка.

④ За допомогою першої похідної функції визначають інтервали монотонності і точки екстремуму.

⑤ За допомогою другої похідної функції визначають інтервали опуклості функції і точки перегину.

⑥ Знаходять можливі точки перетину графіка функції з осями координат.

⑦ Будують графік функції $y = f(x)$.

Розділ 3. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1. Первісна. Невизначений інтеграл

❶ Функцію $F(x)$ називають *первісною* функції $f(x)$ в інтервалі $(a;b)$, якщо вона диференційовна для будь-якого $x \in (a;b)$ і $F'(x) = f(x)$.	❷ ***Основна властивість первісної.*** Якщо функції F_1 та F_2 — дві різні первісні однієї і тої самої функції f в інтервалі $(a;b)$, то вони відрізняються одна від одної лише сталим доданком, тобто $$F_2(x) = F_1(x) + C,$$ де $C = \text{const}$.
❸ ***Достатня умова існування первісної***). Будь-яка неперервна на відрізку $[a;b]$ функція f має на цьому відрізку первісну F.	
❹ Сукупність $F(x)+C$ всіх первісних функції $f(x)$ в інтервалі $(a;b)$ називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначають $$\int f(x)dx = F(x) + C,$$	де $f(x)dx$ — *підінтегральний вираз;* $f(x)$ — *підінтегральна функція*, x — *змінна інтегрування*, C — *довільна стала*. Знаходження невизначеного інтеграла називають *інтегруванням*.

3.2. Основні правила інтегрування

❶ $\left(\int f(u)du\right)'_u = f(u)$	❷ $d\left(\int f(u)du\right) = f(u)du.$
❸ $\int dF(u) = F(u) + C$	❹ $\int af(u)du = a\int f(u)du, a \neq 0$
❺ $\int (f_1(u) \pm f_2(u))du = \int f_1(u)du \pm \int f_2(u)du$	
❻ $\int f(u)du = F(u) + C, u = \varphi(x)$	
❼ ***Формула інтегрування частинами.*** Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ неперервно диференційовні на деякому проміжку, то на цьому проміжку правдива	*формула інтегрування частинами*: $$\int udv = uv - \int vdu.$$

❽ ***Формула заміни змінної.*** Якщо функція $f(x)$ неперервна в інтервалі $(a;b)$, функція $\varphi(t)$ неперервно диференційовна і строго монотоннна і в інтервалі $(\alpha;\beta)$, причому $\varphi'(t)\neq 0$, то правдива *формула заміни змінної*:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

де у праву частину треба підставити

$$t = \varphi^{-1}(x).$$

3.3. Основні формули інтегрування*

❶ $\int \frac{du}{u} = \ln\left\|u\right\| + C$	❷ $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
❸ $\int e^{u}du = e^{u} + C$	❹ $\int a^{u}du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$
❺ $\int \sin u du = C - \cos u$	❻ $\int \cos u du = \sin u + C$
❼ $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	❽ $\int \frac{du}{\sin^2 u} = C - \operatorname{ctg} u$
❾ $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$	❿ $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$
⓫ $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$	⓬ $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = C - \operatorname{cth} u$
⓭ $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2+a}\right\| + C,$ $a \neq 0$	⓮ $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C,$ $a \neq 0$
⓯ $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C,$ $a \neq 0$	⓰ $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C,$ $a \neq 0$
⓱ $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\| + C$	⓲ $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
⓳ $\int \operatorname{tg} u du = C - \ln\left\|\cos u\right\|$	⓴ $\int \operatorname{ctg} u du = \ln\left\|\sin u\right\| + C$

[*] Формулу 3.3.13 називають «довгим логарифмом», а 3.3.16 — «високим логарифмом».

3.4. Основні методи інтегрування

❶ ***Внесення під знак диференціала***	$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u(x))du(x)$
❷ ***Замінювання змінної***	$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$
❸ ***Інтегрування частинами***	$\int udv = uv - \int vdu$
❹ ***Перетворення підінтегрального виразу внесенням під знак диференціала*** $f'(x)dx = df(x);$ $dx = \frac{1}{a}d(ax+b), a, b = \text{const};$ $xdx = \frac{1}{2}d(x^2);$ $\frac{dx}{x} = d(\ln x);$	$\cos xdx = d(\sin x);$ $\sin xdx = -d(\cos x);$ $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x);$ $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x);$ $\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x);$ $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$

3.5. Метод інтегрування частинами

$P_n(x)$ — многочлен степеня n	
❶ $\int P_n(x)\begin{Bmatrix}\sin\alpha x\\ \cos\alpha x\\ e^{\alpha x}\end{Bmatrix}dx,$	$u = P_n(x)$
❷ $\int P_n(x)\ln xdx$	$u = \ln x$
$\int P_n(x)\operatorname{arcf} xdx$	$u = \operatorname{arcf} x$
❸ $\int e^{ax}\begin{Bmatrix}\sin bx\\ \cos bx\end{Bmatrix}dx,\ \int\begin{Bmatrix}\sin(\ln x)\\ \cos(\ln x)\end{Bmatrix}dx$	Двічі інтегрувати частинами $\Rightarrow$ рівняння щодо шуканого інтеграла.
$\int\sqrt{a^2 \pm x^2}dx, \int\sqrt{x^2 - a^2}dx$	Один раз інтегрувати частинами $\Rightarrow$ рівняння щодо шуканого інтеграла.

3.6. Інтегрування дробово-раціональних виразів

<table>
<tr><td>❶ Типи елементарних дробів</td><td>$\mathrm{I}.\ \dfrac{A}{x-a}$</td><td>$\mathrm{II}.\ \dfrac{A}{(x-a)^k}$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{III}.\ \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad D=p^2-4q<0$</td><td colspan="2">$\mathrm{IV}.\ \dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},\ k\ge 2, k\in\mathbb{N}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Інтегрування елементарних дробів</td></tr>
<tr><td>❷ $\displaystyle\int\frac{dx}{x-a}=\ln\left|x-a\right|+C$</td><td colspan="2">❸ $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\frac{1}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$</td></tr>
<tr><td>❹ $\displaystyle\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$</td><td colspan="2">Виносять старший коефіцієнт і вилучають повний квадрат у знаменнику.</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}$$</td></tr>
<tr><td>❺ $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$</td><td colspan="2">Вилучають у чисельнику похідні від знаменника:
$d(ax^2+bx+c)=(2ax+b)dx;$
$Ax+B\equiv\dfrac{A}{2a}(2ax+b)+C$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+C\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">❻ $\displaystyle I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right), n\in\mathbb{N}$</td></tr>
<tr><td>❼ Раціональний дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ називають правильним, якщо степінь чисельника менше, ніж степінь знаменника.
Будь-який неправильний дріб можна подати як суму многочлена і правильного дробу.</td><td colspan="2">❽ Схема розкладання правильного дробу на суму елементарних.
① Розкладають знаменник дробу на множники.
② Записують розклад на елементарні дроби з невизначеними коефіцієнтами.
③ Визначають коефіцієнти.</td></tr>
</table>

❾ ***Теорема розкладання.*** Будь-який правильний раціональний дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(n > m)$ можна єдиним чином розкласти на суму елементарних дробів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{r_s}} =$$

$$= \frac{A_1}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{x-a_1} + \ldots +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1-1}} + \ldots + \frac{M_{r_1}x+N_{r_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots$$

❿ ***Схема інтегрування дробово-раціонального виразу.***

① Вилучають (у разі потреби) цілу частину дробу $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

② Правильний дріб розкладають на суму елементарних дробів.

③ Інтегрують суму цілої частини і елементарних дробів.

⓫ Множнику $(x-a)^\alpha$ у знаменнику дробу $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ відповідає розклад

$$\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a}$$

$$A_\alpha = \left.\frac{P_m(x)}{\cancel{(x-a)^\alpha}\varphi(x)}\right|_{x=a},$$

$$A_{\alpha-k} =$$

$$= \frac{1}{(\alpha-k)!}\left.\left(\frac{P_m(x)}{\cancel{(x-a)^\alpha}\varphi(x)}\right)^{(\alpha-k)}\right|_{x=a},$$

$$k = \overline{1, \alpha-1}.$$

3.7. Інтегрування тригонометричних виразів

Основні способи знаходження $I = \int R(\sin x, \cos x)dx$	
❶ Загальний випадок — *універсальна тригонометрична підстановка*	$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
❷ $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$I = \int \tilde{R}(\cos x)d(\cos x)$
❸ $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$I = \int \tilde{R}(\sin x)d(\sin x)$
❹ $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$	$I = \int \tilde{R}(\operatorname{tg} x)d(\operatorname{tg} x)$ або $I = \int \tilde{R}(\operatorname{ctg} x)d(\operatorname{ctg} x)$
Знаходження $\int \sin^m x \cos^n x dx$	
❺ $m = 2k-1, k \in \mathbb{N}$	$\sin^{2k-1} x dx = \sin x(\sin x)^{2k-2}dx =$ $= -(1-\cos^2 x)^{k-1} d\cos x$
❻ $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$	$\cos^{2k-1} x dx = (1-\sin^2 x)^{k-1} d\sin x$
❼ $m = 2k, n = 2l, k, l \in \mathbb{N}$	$\sin^{2k} x \cos^{2l} x =$ $= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^l$
❽ $\int \operatorname{tg}^m x dx = \int \operatorname{tg}^{m-2} x \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^{m-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx$	
❾ $\int \operatorname{ctg}^m x dx = \int \operatorname{ctg}^{m-2} x \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \operatorname{ctg}^{m-2} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx$	
❿ $\int \sin kx \cos lx dx = \frac{1}{2}\int \big(\sin(k-l)x + \sin(k+l)x\big)dx$	
⓫ $\int \cos kx \cos lx dx = \frac{1}{2}\int \big(\cos(k-l)x + \cos(k+l)x\big)dx$	
⓬ $\int \sin kx \sin lx dx = \frac{1}{2}\int \big(\cos(k-l)x - \cos(k+l)x\big)dx$	

3.8. Інтегрування ірраціональних виразів

<table>
<tr><td colspan="2">❶ $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$</td><td colspan="2">Виносять старший коефіцієнт і вилучають повний квадрат під коренем.</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">❷ $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$</td><td colspan="2">Вилучають у чисельнику похідну від підкореневого виразу:
$d(ax^2+bx+c)=(2ax+b)dx;$
$Ax+B\equiv\frac{A}{2a}(2ax+b)+C$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + C\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">❸ $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$</td><td colspan="2">$t=\frac{1}{x-\alpha}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">❹ $\int R\left(x, X^{r_1/s_1}, \ldots, X^{r_n/s_n}\right)dx,$
де $X=\frac{ax+b}{cx+d}$</td><td colspan="2">$\frac{ax+b}{cx+d}=t^m, m=\text{НСК}(s_1,\ldots,s_n)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">❺ Інтегрування диференціального бінома $\int x^m(a+bx^n)^p dx, m,n,p\in\mathbb{Q}$ (теорема Чебишова)</td></tr>
<tr><td>I
$p\in\mathbb{Z}\Rightarrow$
$x=t^k,$
$k=\text{НСК}(s_1,s_2),$
$n=\frac{r_2}{s_2}, m=\frac{r_1}{s_1}$</td><td>II
$\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}\Rightarrow$
$\Rightarrow a+bx^n=t^s,$
$p=\frac{r}{s}$</td><td>III
$\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}\Rightarrow$
$\Rightarrow ax^{-n}+b=t^s,$
$p=\frac{r}{s}$</td><td>IV
У решті випадків інтеграл не виражається в елементарних функціях.</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
</table>

Тригонометричні підстанови	
❻ $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$	$x = a\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
❼ $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$	$x = a\operatorname{tg} t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
❽ $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$	$x = \frac{a}{\cos t}, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

Розділ 1. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ

1. Множини. Функції

Навчальні задачі

1.1. Методом математичної індукції довести, що

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Розв'язання*. *[1.1.8.]
[***Крок 1.*** *Перевіряємо правдивість твердження для* $n = 1$.]
Для $n = 1$ рівність правдива:

$$1 \cdot 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}.$$

[***Крок 2.*** *Припускаючи правдивість твердження для* $n = k$, *доводимо твердження для* $n = k + 1$.]
Нехай ця рівність правдива при $n = k$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Доведімо, що рівність правдива і при $n = k + 1$, тобто

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Справді,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) =$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

[***Крок 3.*** *Висновуємо правдивість твердження для будь-якого* n.]

1.2. Розкласти біном $(a+b)^6$.

Розв'язання*. *[1.2.3, 1.2.4.]
[*Виписуємо формулу для бінома у згорнутому вигляді і розгортаємо його.*]

$$(a+b)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k a^{6-k} b^k =$$
$$= C_6^0 a^6 b^0 + C_6^1 a^5 b^1 + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 a^1 b^5 + C_6^6 a^0 b^6 =$$

[*Обчислюємо біноміальні коефіцієнти.*]

$$C_6^0 = C_6^6 = 1;\ C_6^1 = C_6^5 = \frac{6!}{1!5!} = 6;\ C_6^2 = C_6^4 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15;$$
$$C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

[*Підставляємо знайдені коефіцієнти в розклад.*]

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

1.3. Записати усі підмножини множини $M = \{1, 2, 3\}$.

***Розв'язання*. [1.3.4.]**

Порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини.

Одноелементні підмножини множини M: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.

Двоелементні підмножини множини M: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$.

Триелементна множина $M = \{1, 2, 3\}$ є своєю підмножиною.

Множина M має $2^3 = 8$ підмножин:

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}.$$

1.4. Задано множини

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \left|x-1\right| < 1\}, B = \{x \in \mathbb{R} : \left|x+1\right| \ge 2\}.$$

Знайдіть і зобразіть множини $A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

***Розв'язання*. [0.1.1, 1.3.6–1.3.8.]**

[*Знаходимо множини A та B, розв'язуючи відповідні нерівності.*]

$$\left|x-1\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1;\ 0 < x < 2.$$

$$\left|x+1\right| \ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 \ge 2, \\ x+1 \le -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1, \\ x \le -3. \end{array}\right.$$

[*Зображуємо знайдені множини на числових осях. Решту множин можна знаходити як аналітично, так і графічно.*]

$A = (0; 2)$;

$B = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$;

$A \cup B = (-\infty; -3] \cup (0; +\infty)$;

$A \cap B = [1; 2)$;

$A \setminus B = (0; 1)$;

$B \setminus A = (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

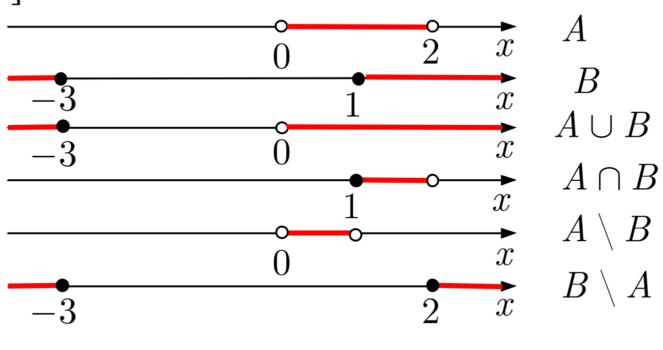


Рис. до зад. 1.4.

1.5. Знайти $\sup A, \inf A, \max A, \min A$, якщо $A = [0; 2)$.

***Розв'язання*. [1.6.]**

Оскільки $\forall x \in [0; 2)\ \exists x^* : x < x^*$, то ця множина не має найбільшого елемента.

Множина верхніх меж A — це множина $[2; +\infty)$ з найменшим елементом 2, який і є точною верхньою межею множини $[0; 2)$. Отже, $\sup A = 2$.

Множина нижніх меж — це множина $(-\infty; 0]$ з найбільшим елементом $0 \in A$, який і є точною нижньою межею множини A. Отже, $\min A = \inf A = 0$.

1.6. Знайти $f(-2), f(0), f(1),$ якщо $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \le 0, \\ 2^x, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$

Розв'язання.

Маємо функцію, що задана різними формулами на різних проміжках. Оскільки, $-2 \le 0, 0 \le 0,$ то значення $f(-2), f(0)$ знайдімо за формулою $f(x) = 1 + x:$

$$f(-2) = -1; \;\; f(0) = 1.$$

Оскільки $1 > 0,$ то значення $f(1)$ знаходимо за формулою $f(x) = 2^x:$

$$f(1) = 2.$$

1.7. Визначити функцію $f(x),$ яка справджує умову $f(x+1) = x^2 - 3x + 2.$

Розв'язання.

Нехай $x + 1 = t,$ тоді $x = t - 1.$ Отже,

$$f(t) = f(x+1) = x^2 - 3x + 2 = t^2 - 5t + 6 \Rightarrow f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

1.8. Продовжити функцію $y = x^2, \; x \in (0; +\infty)$ на $(-\infty; 0]$ так, щоб продовжена функція на $\mathbb{R}$ стала: а) парною, б) непарною:

***Розв'язання.* [1.8.2, 1.8.3.]**

Нехай продовжуємо функцію на проміжок $(-\infty, 0)$ виразом $y = g(x),$ та $y(0) = a.$

а) для парності функції потрібно, щоб

$$\forall x \in (-\infty; 0) \;\; y(x) = g(x) = y(-x) = f(-x) = x^2,$$
$$y(0) = a = y(-0) = a \;\; \forall a \in \mathbb{R}.$$

б) для непарності функції потрібно, щоб

$$\forall x \in (-\infty; 0) \;\; y(x) = g(x) =$$
$$= -y(-x) = -f(-x) = -x^2;$$
$$y(0) = a = -y(-0) = -a \Rightarrow a = 0.$$

Отже,

а) $y(x) = x^2, x \in (-\infty; 0), y(0) \in \mathbb{R};$ (рис. 1);

б) $y(x) = -x^2, x \in (-\infty; 0]$ (рис. 2).

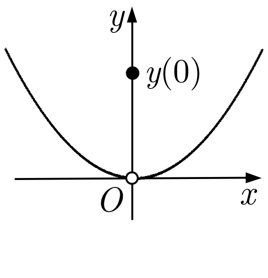


Рис. 1 до зад. 1.8

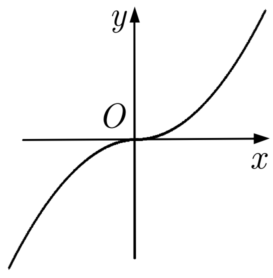


Рис. 2 до зад. 1.8

1.9. Знайти обернену функцію до функції $y = 2x + 5$ і визначити її область означення.

***Розв'язання.* [1.7.6.]**

Для функції $f(x) = 2x + 5, D(f) = E(f) = \mathbb{R}.$

Функція $f(x)$ зростає для всіх $x \in \mathbb{R}.$ Отже, вона має обернену функцію на $\mathbb{R}.$

Розв'яжімо рівняння $y = 2x + 5$ щодо $x:$

$$y = 2x + 5 \Leftrightarrow x = \frac{y-5}{2}.$$

Оберненою до f функцією є функція $y = \dfrac{x-5}{2}, x \in \mathbb{R}.$

1.10. Знайти композиції $f \circ g$ і $g \circ f$, вказати їхні області означення, якщо $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x};$

***Розв'язання**. [1.7.5.]*

$D(f) = \mathbb{R}, D(g) = [0; +\infty).$

$$E(g) = [0; +\infty) \subset D(f);$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x,$$
$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\} = [0, +\infty).$$
$$E(f) = [0; +\infty) \subseteq D(g);$$
$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = \left|x\right|.$$
$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\} = \mathbb{R}.$$

Отже,

$$(f \circ g)(x) = x, x \in [0; +\infty);$$
$$(g \circ f)(x) = \left|x\right|, x \in \mathbb{R}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

1.11. Замініть крапки виразами «достатньо, але не необхідно», «необхідно, але не достатньо», «необхідно й достатньо» і запишіть висловлювання символічно так, щоб утворились істинні твердження:

1) для того щоб виграти в лотереї, ... мати хоча б один лотерейний квиток;

2) для того щоб сума двох дійсних чисел була числом раціональним, ... щоб кожен доданок був раціональним числом;

3) для того щоб трикутник був рівнобедреним, ... щоб кути при основі були рівні.

1.12. З'ясуйте зміст висловлювань і встановіть, істинні вони чи хибні $(x, y \in \mathbb{R})$:

1) $\forall x\, \exists y : x + y = 3;$ 2) $\exists y\, \forall x : x + y = 3;$

3) $\exists x, y : x + y = 3;$ 4) $\forall x, y : x + y = 3.$

1.13. Методом математичної індукції доведіть, що для будь-якого n :

1) $n(2n^2 - 3n + 1)$ ділиться націло на $6;$

2) $n^5 - n$ ділиться націло на $5;$

3) $1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

4) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{n^2}\le 2-\dfrac{1}{n}$.

1.14. Розкладіть біном:

1) $(1+x)^5$; 2) $(a-b)^4$.

3) $(a-\sqrt{2})^6$; 4) $(a+2b)^5$.

1.15. Опишіть переліком елементів множину:

1) $M=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2-4x=-3\right\}$; 2) $M=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2-3x=10\right\}$;

3) $M=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2+1=0\right\}$; 4) $M=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2-2x+2=0\right\}$;

5) $M=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^3+x-2=0\right\}$; 6) $M=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^3-3x-2=0\right\}$.

1.16. Запишіть рівнянням або нерівністю умову і знайдіть множину точок координатної прямої, яку ця умова задає: віддаль між точками:

1) $M(x)$ та $N(4)$ дорівнює 5; 2) $M(x)$ та $N(-3)$ менша за 2;

3) $M(x)$ та $N(1)$ не більша за $0,5$; 4) $M(-4)$ та $N(x)$ не менша за $\dfrac{1}{5}$.

1.17. Запишіть усі підмножини множини M, якщо:

1) $M=\{3,4\}$; 2) $M=\{5,6,12\}$.

1.18. Задано множини: $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,\{1,2,3\}\}$, $C=\{1,2,\{1,2\}\}$. Установіть, який із двох записів правильний:

1) $A\in B$ або $A\subset B$; 2) $A\in C$ або $A\subset C$.

1.19. Задано множини A та B. Знайдіть множини $A\cup B, A\cap B, A\setminus B,\ B\setminus A$, якщо:

1) $A=\{1,2,3\}, B=\{2,3,4,5\}$; 2) $A=\{1,2,3,6\}, B=\{1,2,4,5\}$;

3) $A=\{x\in\mathbb{R}: x>1\}, B=\{x\in\mathbb{R}: x<2\}$;

4) $A=(-2;3], B=[2;4)$; 5) $A=\{a,b,c\}, B=\{b,c,d,e\}$;

6) $A=\{x\in\mathbb{R}: \left|x+1\right|<1\}, B=\{x\in\mathbb{R}: \left|x-1\right|\ge 2\}$;

7) $A=\mathbb{Q}, B=\mathbb{I}$ — множина ірраціональних чисел.

1.20. Узявши відрізок $U = [0;1]$ за універсальну множину, запишіть і зобразіть доповнення множини:

1) $A = \{0,1\}$; 2) $B = \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left[\frac{2}{3};1\right)$;

3) $C = \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$. 4) $D = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right)$.

1.21. Розрив ділянки електричного кола (подія A) (рис. 1–3) може виникнути внаслідок виходу з ладу елементів $\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$ (відповідно, події A_1, A_2, A_3). Виразіть подію A через події A_1, A_2, A_3.

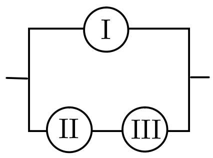


Рис. 1 до зад. 1.21

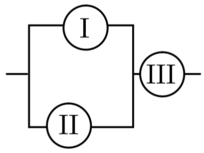


Рис. 2 до зад. 1.21

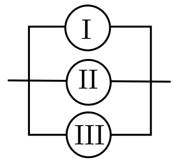


Рис. 3 до зад. 1.21

1.22. Знайдіть $\max A, \min A$, $\sup A$ та $\inf A$ якщо вони існують, де:

1) $A = (0;1)$; 2) $A = [0;2)$;

3) $A = \{-1\} \cup [2;3]$; 4) $A = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.23. Знайдіть множину G, на яку задана функція відображує множину F:

1) $y = x^2, F = [-1;2]$; 2) $y = \log_3 x, F = (3;27]$.

1.24. Знайдіть проміжки тотожності функцій:

1) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ та $\varphi(x) = x$; 2) $f(x) = x$ та $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$.

1.25. Знайдіть $f(-1), f(0), f(2), f(3)$, якщо $f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$

1.26. Визначте функцію $y = f(x)$, що справджує умову:

1) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}, x \neq 0$;

2) $f\left(x_1 + x_2\right) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$.

1.27. Продовжте функцію $f(x)$, $x \in (0;+\infty)$ на $(-\infty;0]$ так, щоб функція на $\mathbb{R}$ була: а) парною, б) непарною:

1) $f(x) = x + 1$; 2) $f(x) = e^x + 1$.

1.28. З'ясуйте чи є функція оборотна; якщо так, то знайдіть відповідну обернену функцію і її область означення:

1) $y = (x-1)^3$; 2) $y = \cos 2x$.

1.29. Знайдіть композиції $f \circ g$ і $g \circ f$, вкажіть їхні області означення:

1) $f(x) = 1 - x, g(x) = x^2$; 2) $f(x) = e^x, g(x) = \ln x$.

1.30. Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|x\right| - x$; 2) $y = \left|x\right| - (\sqrt{x})^2$;

3) $y = \operatorname{sgn} \cos x$; 4) $y = \operatorname{sgn} \sin x$;

5) $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$; 6) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;

7) $y = x^{\log_x (x^2 - 2)}$; 8) $y = \sqrt{2}^{\log_2 x}$;

9) $y = \sin(\arcsin x)$; 10) $y = \arcsin(\sin x)$.

1.31. Побудуйте графіки функцій $f(x)$, $-f(x)$, $f(-x)$, $-f(-x)$, $f(x-a)$, $f(x) - a$, якщо:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}, a = 2$; 2) $f(x) = 3x - 1, a = 2$.

1.31. Зобразіть на координатній площині множину:

1) $M = \left\{(x;y) \mid x^2 + y^2 \le 4\right\}$; 2) $M = \left\{(x;y) \mid x^2 + y^2 > 9\right\}$;

3) $M = \left\{(x;y) \mid x^2 \ge 2y + 1\right\}$;

4) $M = \left\{(x;y) \mid x^2 \ge y^2 - 1, x + y < 1\right\}$;

5) $M = \left\{(x;y) \mid xy > 1, y > x^2\right\}$; 6) $M = \left\{(x;y) \middle| \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}\right\}$.

Відповіді

1.11. 1) «необхідно, але не достатньо»,$P \Rightarrow Q$; 2) «достатньо, але не необхідно», $P \Leftarrow Q$; 3) «необхідно й достатньо», $P \Leftrightarrow Q$.

1.12. 1) істинне; 2) хибне; 3) істинне; 4) хибне.

1.14. 1) $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$; 2) $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$;
3) $a^6 - 6\sqrt{2}a^5 + 30a^4 - 40\sqrt{2}a^3 + 60a^2 - 24\sqrt{2}a + 8$;
4) $a^5 + 10a^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32b^5$.

1.15. 1) $M = \{1,3\}$; 2) $\{-2,5\}$; 3) $M = \varnothing$; 4) $M = \varnothing$; 5) $\{1\}$; 6) $\{-1,2\}$.

1.16. 1) $\left|x-4\right|=5,\{-1,9\}$; 2) $\left|x+3\right|<2,(-5;-1)$; 3) $\left|x-1\right|\le 0,5,[0,5;1,5]$;

4) $\left|x+4\right|\ge \dfrac{1}{5},(-\infty;-4,2)\cup(-3,8;+\infty)$.

1.17. 1) $\varnothing,\{3\},\{4\},\{3,4\}$; 2) $\varnothing,\{5\},\{6\},\{12\},\ \{5,6\},\{5,12\},\{6,12\},\{5,6,12\}$.

1.18. 1) $A\subset B$; 2) $A\in C, A\subset C$.

1.19. 1) $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}, A\cap B=\{2,3\}, A\setminus B=\{1\}, B\setminus A=\{4,5\}$;

2) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\},\ A\cap B=\{1,2\},\ A\setminus B=\{3,6\},\ B\setminus A=\{4,5\}$;

3) $A=(1;+\infty), B=(-\infty;2), A\cup B=(-\infty;+\infty), A\cap B=(1;2), A\setminus B=[2;+\infty)$, $B\setminus A=(-\infty;1]$;

4) $A\cup B=(-2;4),\ A\cap B=[2;3],\ A\setminus B=(-2;2),\ B\setminus A=(3;4)$;

5) $A\cup B=\{a,b,c,d,e\},\ A\cap B=\{b,c\},\ A\setminus B=\{a\},\ B\setminus A=\{d,e\}$;

6) $A=(-2;0),\ B=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty),\ A\cup B=(-\infty;0)\cup[3;+\infty),\ A\cap B=(-2;-1]$, $A\setminus B=(-1;0),\ B\setminus A=(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$;

7) $A\cup B=\mathbb{R}, A\cap B=\varnothing, A\setminus B=\mathbb{Q},\ B\setminus A=\mathbb{I}$.

1.20. 1) $\overline{A}=(0;1)$; 2) $\overline{B}=\left[0;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right]\cup\{1\}$; 3) $\overline{C}=\left[0;\dfrac{1}{4}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

4) $D=\left[0;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[\dfrac{3}{4};1\right]$.

1.21. 1) $A=A_1\cap(A_2\cup A_3)$; 2) $A=(A_1\cap A_2)\cup A_3$; 3) $A=A_1\cap A_2\cap A_3$.

1.22. 1) $\overline{\exists}\max A, \overline{\exists}\min A, \sup A=1,\ \inf A=0$; 2) $\overline{\exists}\max A, \sup A=2, \min A=\inf A=0$;

3) $\max A=\sup A=3, \min A=\inf A=-1$; 4) $\max A=\sup A=1, \overline{\exists}\min A, \inf A=0$.

1.23. 1) $G=[0;4]$; 2) $(1;3]$.

1.24 1) тотожні на будь-якому інтервалі, який не містить точку 0; 2) тотожні на проміжку $[0;+\infty)$.

1.25. $f(-1)=-2; f(0)=0;\ f(2)=2; f(3)=3$.

1.26. 1) $f(x)=x^2-2$; 2) $f(x)=\sin x$.

1.27. $f_{\text{п}}=\begin{cases} f(x), x>0,\\ a\in\mathbb{R}, x=0,\\ f(-x), x<0,\end{cases} f_{\text{н}}=\begin{cases} f(x), x>0,\\ 0, x=0,\\ -f(-x), x<0.\end{cases}$

1.28. 1) Обернена функція $y=\sqrt[3]{x}+1, D=\mathbb{R}$; 2) Оберненої функції не існує.

1.29. 1) $(f\circ g)(x)=1-x^2, x\in\mathbb{R}$; $(g\circ f)(x)=(1-x)^2, x\in\mathbb{R}$;

2) $(f\circ g)(x)=x, x\in[0;+\infty)$; $(g\circ f)(x)=x, x\in\mathbb{R}$.

2. Границя послідовності

Навчальні задачі

2.1. Записати перші 5 членів послідовності $\{x_n\}$, якщо:

1) $x_n=2^{n+1}$; 2) $x_1=-1, x_n=-nx_{n-1}$.

3) x_n — n-й знак у десятковому записі числа π.

***Розв'язання*. [1.18.1]**

1) **[***Підставляємо значення* $n = 1, 2, 3, 4, 5$ *у формулу для загального члена послідовності.***]**

$$x_1 = 4, x_2 = 8, x_3 = 16, x_4 = 32, x_5 = 64.$$

Отже, $\{x_n\} = 4, 8, 16, 32, 64, \ldots.$

2) **[***Послідовно визначаємо члени з рекурентної формули.***]**

$$x_1 = -1, x_2 = 2,\ x_3 = -6,\ x_4 = 24, x_5 = -120.$$

Отже,

$$\{x_n\} = -1, 2, -6, 24, -120, \ldots$$

3) Оскільки $\pi = 3{,}141592654\ldots$, то

$$x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 4, x_4 = 1, x_5 = 5.$$

Отже, $\{x_n\} = 3, 1, 4, 1, 5, \ldots.$

2.2. Доведіть, що послідовність $\{x_n\}$ зростає, якщо:

1) $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$; 2) $x_n = \dfrac{2^n}{n}$;

***Розв'язання*. [1.18.4–1.19.7.]**

1) **[***Записуємо* x_{n+1}.**]** $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n+3}$.

[Розглядаємо $\Delta = x_{n+1} - x_n$.**]**

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} =$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1) - (2n+3)n}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отже, $x_{n+1} > x_n\ \ \forall n \in \mathbb{N}$, тобто послідовність $\{x_n\}$ зростає.

2) $x_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{n+1}$.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1 = \left(\frac{2^{n+1}}{n+1} : \frac{2^n}{n}\right) - 1 = \frac{2n}{n+1} - 1 = \frac{n-1}{n+1} > 0\ \ \forall n \geq 2.$$

Отже, $x_{n+1} > x_n\ \ \forall n \in \mathbb{N}$, тобто послідовність $\{x_n\}$ зростає.

2.3. Доведіть, що числова послідовність $\{x_n\}$ обмежена, якщо:

1) $x_n = \dfrac{n^3+1}{n^3+4}$; 2) $x_n = \dfrac{(-1)^n n + 11}{\sqrt{n^2+1}}$.

***Розв'язання*. [1.18.2.]**

1) $0 < \dfrac{n^3+1}{n^3+4} = 1 - \dfrac{3}{n^3+4} < 1 \Rightarrow \left|\dfrac{n^3+1}{n^3+4}\right| < 1.$

Отже, послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою.

2) Оскільки

$$\left|(-1)^n n + 11\right| \overset{[0.2.1]}{\le} \left|(-1)^n n\right| + 11 = n + 11,$$
$$\sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2} = n,$$

то

$$\left|x_n\right| = \frac{\left|(-1)^n n + 11\right|}{\sqrt{n^2+1}} \le \frac{n+11}{n} = 1 + \frac{11}{n} \le 12.$$

Отже, послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою.

2.4. 1) Довести за означенням, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$;

2) визначити номер N_ε, такий, що

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon = 0,001 \, \forall n > N_\varepsilon.$$

***Розв'язання**. [1.19.1.]*

1) Виберімо довільне додатне число ε і покажімо, що для нього можна визначити такий номер N_ε, що для всіх номерів $n > N_\varepsilon$ буде виконано нерівність

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Розв'яжімо нерівність:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Отже, за N_ε можна взяти $\left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right]$, якщо $\left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right] > 0$ або 1, якщо $\left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right] \le 0.$

2) Якщо $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$, тоді

$$N = \left[\frac{1}{\frac{1}{1000}} - 1\right] = [999] = 999;$$
$$\forall n > 999: \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{1000}.$$

2.5. Довести, що послідовність $\{x_n\}$, яку означено рекурентним співвідношенням $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, x_1 = \sqrt{2}$, збіжна. Знайти її границю.

***Розв'язання**. [1.19.10]*

Доведімо, що для всіх n правдива нерівність $x_n < 2$. Припустімо, що цю нерівність доведено при $n = k, x_k < 2$. Тоді маємо

$$x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Оскільки $x_1 < 2$, то, на підставі принципу математичної індукції, нерівність $x_n < 2$ доведено для всіх n. Оскільки, крім того, $0 < x_n$, то послідовність $\{x_n\}$ обмежена. З нерівності

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} > \sqrt{2x_n} > \sqrt{x_n^2} = x_n$$

випливає, що вона зростає.

Отже, за ознакою Веєрштраса, ця послідовність має границю, яку позначмо s. Перейдімо до границі в рівності

$$a_{n+1}^2 = 2 + a_n.$$

За теоремою [1.19.8] маємо

$$s^2 = s + 2,$$

звідки $s_1 = -1, s_2 = 2$. Але, оскільки $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, то $s \geq 0$.

Отже, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$.

2.6. Довести, що послідовність $\{x_n\} = \left\{ \dfrac{(-1)^n n}{n+1} \right\}$ є розбіжною.

***Розв'язання**. [1.19.1.]*

Розгляньмо послідовність

$$\{x_n\} = -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

Якщо вибрати $\varepsilon = 1$, то всі парні члени послідовності потрапляють в інтервал $(0;2)$ з центром у точці $x = 1$, а всі непарні — в інтервал $(-2;0)$ з центром у точці $x = -1$, причому ці інтервали не перетинаються.

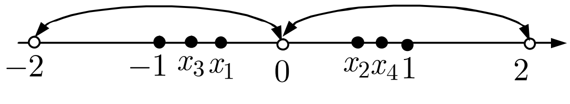


Рис. до зад. 2.6

А за означенням, якщо точка $x = 1$ або $x = -1$ була б границею послідовності $\{x_n\}$, то всі члени послідовності, починаючи з деякого номера, мали б потрапити у вибраний інтервал.

2.7. Знайти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3-(n-2)^3}{96n^2+39n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3-1}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$.

***Розв'язання*. [1.19.8, 1.20.1, 1.20.5, 1.20.7]**①

1) $$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n-2)^3}{96n^2+39n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+6n^2+12n+8-(n^3-6n^2+12n-8)}{96n^2+39n}=$$

$$=\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{12n^2+16}{96n^2+39n}}_{\substack{\text{поділімо чисельник}\\ \text{і знаменник на } n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{12+\frac{16}{n^2}}{96+\frac{39}{n}}=\frac{12}{96}=\frac{1}{8}.$$

2) $$\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3-1}}}_{\substack{\text{поділімо чисельник і знаменник на } n^2 -\\ \text{«найвищий степінь» } n \text{ з урахуванням}\\ \text{показників коренів}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{5/6}}+\sqrt[5]{32+\frac{1}{n^{10}}}}{\left(1+\frac{1}{n^{3/4}}\right)\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}}=\frac{\sqrt[5]{32}}{1}=2.$$

3) $(n+1)!=(n+1)n!$; $(n+2)!=(n+2)(n+1)n!$.

$$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!(1+(n+1))}{n!(n+1)(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+1)(n+2)}\overset{[1.20.5]}{=}0,$$

оскільки степінь многочлена в чисельнику менше, ніж степінь многочлена у знаменнику.

4) $$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{-1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\left|\begin{array}{l}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\to 0,\\ n\to\infty\end{array}\right|=\frac{1}{-1}=-1.$$

***Коментар*.** ① Щоб знайти границі типу 1)–3) ділять чисельник і знаменник дробу на n у найвищому степені всього виразу (коли цей степінь з'ясується), або на вираз, який найшвидше зростає (приклад 4).

2.8. Знайти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n-1}$.

Розв'язання*. *[1.19.7, 1.19.8, 1.20.5, 1.20.7.]

1) **[***Тут застосувати теорему [1.19.8] безпосередньо не можна. Отже, перетворюємо загальний член послідовності.***]**

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) \overset{[1.2.8]}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\left(n^2+1\right)-n^2\right)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{найбільший степінь}\\ \text{виразу } n, \text{а не } n^2\end{matrix}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

2) Ця послідовність є часткою сум двох геометричних прогресій із знаменниками $q_1 = \dfrac{1}{3}$ та $q_2 = \dfrac{1}{4}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot\dfrac{(1/3)^{n+1}-1}{1/3-1}}{1\cdot\dfrac{(1/4)^{n+1}-1}{1/4-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}{\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)} \underset{[1.19.8]}{\overset{[1.20.7]}{=}} \frac{9}{8}.$$

3) **[***Тут не можна скористатись безпосередньо теоремою [1.19.8], оскільки маємо суму нескінченної кількості н. м. п. Перетворюємо загальний член послідовності, зводячи дроби до спільного знаменника і користуючись формулою суми арифметичної прогресії з різницею* 1.**]**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+(n-1)}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} \overset{[1.20.5]}{=} \frac{1}{2}.$$

4) Послідовність є добутком н. м. п. $\left\{\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n-1}\right\}$ (степінь чисельника менша за степінь знаменника) й обмеженої послідовності $\{\sin n^2\}$, оскільки

$$\left|\sin n^2\right| \le 1 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отже, властивістю [1.19.7] маємо, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n-1} = 0.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

2.9. Запишіть перші 5 членів послідовності $\{x_n\}$, якщо:

1) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; 2) $x_1 = 1, x_n = x_{n-1} + 2$.

2.10. Доведіть, що послідовність $\{x_n\}$ зростає, якщо:

1) $x_n = n^3 + 2n$; 2) $x_n = n - \ln n$;

3) $x_n = \dfrac{3^n}{n+1}$; 4) $x_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!}$.

2.11. Доведіть, що числова послідовність $\{x_n\}$ обмежена, якщо:

1) $x_n = (-1)^n$; 2) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$.

2.12. Дослідіть послідовність на монотонність і обмеженість:

1) $x_n = n - \dfrac{1}{n}$; 2) $x_n = \cos\dfrac{\pi n}{2}$;

3) $x_n = -\dfrac{n^2+1}{n^2}$; 4) $x_n = -\sqrt{n}$.

2.13. Знайдіть найбільший елемент обмеженої зверху послідовності $\{x_n\}$, якщо:

1) $x_n = 6n - n^2 - 5$; 2) $x_n = e^{10n - n^2 - 24}$;

3) $x_n = \dfrac{10^n}{n!}$; 4) $x_n = \dfrac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$.

2.14. Доведіть, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і визначте номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такий, що $\left|x_n - a\right| < \varepsilon = 0,001 \ \forall n > N_\varepsilon$, якщо:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{n+1} = 3$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n - 1}{3^n} = 1$.

2.15. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+3n)^3 - 27n^3}{(1+4n)^2 + 2n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4 - n^4}{n^4 + 3}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)^2}{(n+1)^3-(n+3)^3}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(2n-1)}{4n^3+1}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+5}+n}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{9n^2+2n}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{8n^3+2}}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)!}{(n+3)!+(n+2)!}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot 5^n-4^n}{3\cdot 5^n+4^n}$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+4^n}{3^n-4^{n+1}}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-3})$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{n^3}{n^2+1}\right)$; 14) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+5}{4n+1}-\dfrac{n^2+4}{2n+3}\right)$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cos n!}{n^2+1}$; 16) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n}\sin 2^n}{n^3+1}$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{3}{n^3}+...+\dfrac{2n-1}{n^3}\right)$;

18) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+...+\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$;

20) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

2.16. Доведіть існування границі послідовності

$$x_n = \frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+...+\frac{1}{2^n+1}.$$

2.17. Доведіть існування границі послідовності і знайдіть її:

1) $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, ...$; 2) $0,2, \quad 0,23, \quad 0,233, \quad 0,2333, ...$;

3) $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2+x_n}, x_1 = a > 0.$

2.18. Встановіть, які із заданих послідовностей є нескінченно великими, а які нескінченно малими:

1) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$;
2) $x_n = n^{(-1)^n}$;

3) $x_n = n \sin \dfrac{\pi n}{2}$;
4) $x_n = \lg(\lg n), n \geq 2$;

5) $x_n = n + \sqrt[3]{2 + n - n^3}$;

6) $x_n = \sqrt{2n^2 + 4n + 1} - \sqrt{2n^2 + 3n + 2}$.

Відповіді

2.9. 1) $\{x_n\} = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$; 2) $\{x_n\} = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

2.10. 1) $x_n = \dfrac{1}{3n}$; 2) $x_n = \dfrac{1}{(2n+1)\big(2n+2\big)}$;

2.12. 1) зростаюча, необмежена; 2) немонотонна, обмежена; 3) зростаюча, обмежена; 4) спадна, обмежена зверху.

2.13. 1) $x_{\max} = x_3 = 4$; 2) $x_{\max} = x_5 = e$; 3) $x_{\max} = x_9 = x_{10} = \dfrac{10^9}{9!}$; 4) $x_{\max} = x_1 = \dfrac{\pi^2}{6}$.

2.15. 1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $-\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) -2; 6) 2; 7) 0; 8) ∞; 9) $\frac{2}{3}$; 10) $-\frac{1}{4}$; 11) $\frac{1}{3}$; 12) 0; 13) -1; 14) $\frac{5}{8}$; 15) 0; 16) 0; 17) 0; 18) $\frac{3}{4}$;19) 1; 20) $\frac{1}{2}$.

2.17. 1) 2; 2) $\frac{7}{30}$; 3) 0.

2.17. 1), 4) — н. в. п.; 5) — н. м. п.

3. Границя функції

Навчальні задачі

3.1. Виходячи з означення границі функції за Коші (мовою $\varepsilon - \delta$), довести, що:

1) $\lim\limits_{x \to 2}(4x + 1) = 9$;
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$;

3) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x+2} = \infty$.

***Розв'язання**. [1.21.3.]*

1) Візьмімо $\varepsilon > 0$ і знайдімо таке $\delta(\varepsilon)$, що для всіх x, які справджують нерівність $\left|x - 2\right| < \delta$, виконано нерівність

$$\left|(4x+1)-9\right| < \varepsilon;\ \left|x-2\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Якщо $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, то

$$\left|x-2\right| < \delta = \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \left|(4x+1)-9\right| < \varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 2}(4x+1) = 9$.

2) За означенням

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x : x > \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x+2} - 0\right| < \varepsilon.$$

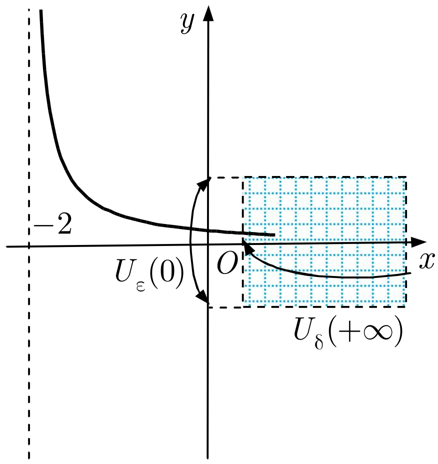


Рис. до зад. 3.1.2)

Візьмімо довільне $\varepsilon > 0$, тоді

$$\frac{1}{x+2} < \varepsilon;\ x+2 > \frac{1}{\varepsilon};\ x > \frac{1}{\varepsilon} - 2.$$

Якщо $\delta = \frac{1}{\varepsilon} - 2$, коли $\frac{1}{\varepsilon} - 2 > 0$, або $\delta = 0$, коли $\frac{1}{\varepsilon} - 2 < 0$, то

$$x > \delta \Rightarrow \frac{1}{x+2} < \varepsilon,$$

а, отже, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2} = 0$.

3) За означенням

$$\lim_{x\to-2}\frac{1}{x+2} = \infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x : 0 < \left|x+2\right| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x+2}\right| > \varepsilon.$$

Візьмімо довільне $\varepsilon > 0$, тоді

$$\left|\frac{1}{x+2}\right| = \frac{1}{\left|x+2\right|} > \varepsilon \Rightarrow \left|x+2\right| < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Якщо $\delta_2 = \frac{1}{\varepsilon}$, то для всіх x:

$$0 < \left|x+2\right| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x+2}\right| > \varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to-2}\frac{1}{x+2} = \infty$.

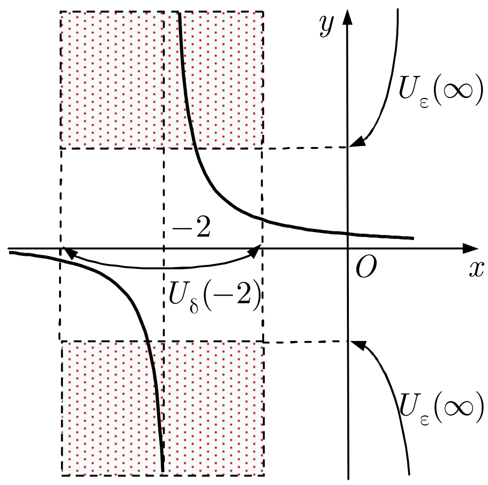


Рис. до зад. 3.1.3)

3.2. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Розв'язання. ***[1.20.7, 1.21.11, 1.23.]*** ①

1) **[***Функція є відношенням двох многочленів. Оскільки знаменник не прямує до нуля, коли* $x\to 0$, *то до обчислення цієї границі застосовна теорема [1.21.11.]***]**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{0-1}{2\cdot 0^2-0-1}=1.$$

2) **[***Знаменник дробу прямує до нуля, коли* $x\to -\dfrac{1}{2}$, *а чисельник до нуля не прямує — це «визначена» ситуація.***]**

$$\lim_{x\to -1/2}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left[\frac{-\frac{3}{4}}{0}\right]\overset{[1.20.7]}{=}\infty.$$

3) **[***Маємо невизначеність* $\dfrac{0}{0}$ *— чисельник і знаменник раціонального дробу прямують до нуля — щоб знайти границю, треба перетворити вираз під знаком границі.***]**

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{[0.4.3]}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{2\left(x-1\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}$$

4) **[***Оскільки найвищі степені чисельника і знаменника рівні, то границя відношення многочленів, коли аргумент прямує до нескінченності, дорівнює відношенню старших коефіцієнтів чисельника і знаменника.***]**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{[1.20.5]}{=}\frac{1}{2}.$$

Справді,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Коментар. ① Способи відшукання границі функції в точці залежать як від самої функції, так і від точки, до якої прямує аргумент функції.

3.3. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{(x-3)^2(x+1)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x+5}-3}$.

***Розв'язання**. [1.21.11.]*

1) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{[0.4.3]}{=}\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x+1)}{2\cancel{(x+2)}\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{x+1}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{7}.$$

2) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{(x-3)^2(x+1)}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{[0.4.3]}{=}\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)^2(x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{(x-3)(x+1)}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

3) $$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x+5}-3}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{[1.2.8]}{=}\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-16)(\sqrt{x+5}+3)}{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)(\sqrt{x+5}+3)=48.$$

3.4. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+6}{5-4x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-x}{\sqrt[4]{x^8-5x+3}}$.

***Розв'язання**. [3.3, 3.2.6.]*

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+x+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\overset{[1.23.5]}{=}0$ (степінь многочлена знаменника вищий за степінь многочлена чисельника).

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+6}{5-4x^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\overset{[1.23.5]}{=}-\dfrac{3}{4}$ (степінь многочлена чисельника дорівнює степеню многочлена знаменника — границя дорівнює відношенню старших коефіцієнтів многочленів).

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2+2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\overset{[1.23.5]}{=}\infty$ (степінь многочлена чисельника вищий за степінь многочлена знаменника).

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-x}{\sqrt[4]{x^8-5x+3}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-\frac{1}{x}}{\sqrt[4]{1-\frac{5}{x^7}+\frac{3}{x^8}}}=4$

(найвищі степені чисельника і знаменника дорівнюють 2 з урахуванням показника кореня).

3.5. Знайти:

$$1)\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+3x+1}\right);\qquad 2)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-x-2}\right).$$

Розв'язання.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+3x+1}\right)=[\infty-\infty]=$

$$\overset{[1.2.8]}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3x-\sqrt{9x^2+3x+1}\right)}{3x+\sqrt{9x^2+3x+1}}\left(3x+\sqrt{9x^2+3x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-\left(9x^2+3x+1\right)}{3x+\sqrt{9x^2+3x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-(3x+1)}{3x+\sqrt{9x^2+3x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\left(3+\frac{1}{x}\right)}{3+\sqrt{9+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-3}{3+3}=-\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+3x+1}\right)=[-\infty-\infty]=-\infty.$$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-x-2}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)-3}{(x-2)(x+1)}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}.$$

3.6. Знайти а) $f(x_0-0)$; б) $f(x_0+0)$:

$$1)\ f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}\ (x\neq 1),x_0=1;\qquad 2)\ f(x)=\frac{2}{x-2},x_0=2;$$

$$3)\ f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 2,\\ -2x+2, & x>2,\end{cases}\quad x_0=2.$$

***Розв'язання*. [1.21.4, 1.21.5.]**

1) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x-1}{-(x-1)}=-1;$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{x-1}=1.$$

2) $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{2}{x-2} = -\infty;\ \lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{2}{x-2} = +\infty.$

3) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0}(x+1) = 3;\ \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0}(-2x+2) = -2.$

3.7. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \lg(4x-1+\sqrt{2x+5});$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty} 4^{\frac{2x}{x+1}};$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \sin\left(\pi \dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2}\right).$

***Розв'язання*. [1.23.]** ①

1) $\lim\limits_{x\to 2} \lg(4x-1+\sqrt{2x+5}) = \lg\left(\lim\limits_{x\to 2}(4x-1+\sqrt{2x+5})\right) = \lg 10 = 1.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} 4^{\frac{2x}{x+1}} = 4^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}} = 4^2 = 16.$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \sin\left(\pi \dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to 2} \sin\left(\pi \dfrac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \sin \dfrac{2\pi}{\sqrt{2x}+2} = \sin\left(\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2\pi}{\sqrt{2x}+2}\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1.$

***Коментар*.** ① У цій задачі скористаємось можливістю переходу до границі під знаком неперервної функції, а функції $y = \lg x, y = 4^x, y = \sin x, y = \cos x$ — неперервні в будь-якій точці області означення.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

3.9. Виходячи з означення границі за Коші (мовою $\varepsilon - \delta$), доведіть, що:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-8) = -5;$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x+1}{3x+9} = \dfrac{5}{3};$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty;$ 4) $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{1}{x} = -\infty.$

3.10. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4}{3x^2-2x-16};$ 2) $\lim\limits_{x\to \frac{8}{3}} \dfrac{x^2-4}{3x^2-2x-16};$

3) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{3x^2-2x-16};$ 4) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-4}{3x^2-2x-16}.$

3.11. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

3.12. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+5}{2x^3+x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+3}{x^2+x+6}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-10}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x-7}{3-4\sqrt{x^2+2}}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}+...+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5^x-4^x-3^x-2^x\right)$.

3.13. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2-2x+1}{x^2-5x+6}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{49-x^2}{1-\sqrt{8-x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x^m-a^m}$ $(n,m\in\mathbb{N},a>0)$.

3.14. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+12x}-\sqrt{9x^2+18x-5}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 6}\left(\dfrac{12}{x^2-36}-\dfrac{1}{x-6}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

3.15. Знайдіть а) $f(x_0-0)$; б) $f(x_0+0)$:

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{|x+1|}, x_0=-1$; 2) $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}, x_0=2$;

3) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<2,\\ x^2, & x\ge 2,\end{cases}\quad x_0=2$; 4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, & x<0,\\ x, & x\ge 0,\end{cases}\quad x_0=0.$

3.16. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}3^{x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arcctg}x$.

3.17. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to1}\log_2(7x-1+\sqrt{3x+1})$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{x+1}{x^2+1}}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\cos\left(\pi\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

Відповіді

3.10. 1) $\dfrac{1}{5}$; 2) ∞; 3) $\dfrac{2}{7}$; 4) $\dfrac{1}{3}$. **3.11.** 1) 9; 2) $\dfrac{3}{4}$; 3) ∞; 4) 0.

3.12. 1) $\dfrac{3}{2}$; 2) 0; 3) ∞; 4) -2; 5) -1; 6) 0; 7) 100; 8) $+\infty$.

3.13. 1) 1; 2) ∞; 3) 0; 4) 6; 5) -28; 6) 4; 7) $-\dfrac{1}{12}$; 8) $\dfrac{n}{m}a^{n-m}$.

3.14. 1) $-\infty$; 2) 0; 3) $-\dfrac{1}{12}$; 4) -1; 5) $\dfrac{1}{4}$; 6) 0.

3.15. 1) $f(-1-0)=-1, f(-1+0)=1$; 2) $f(2-0)=0, f(2+0)=+\infty$;
3) $f(2-0)=3, f(2+0)=4$; 4) $f(-0)=-2, f(+0)=0$.

3.16. 1) $+\infty$; 2) 0; 3) $+\infty$; 4) 0; 5) $-\dfrac{\pi}{2}$; 6) 0.

3.17. 1) 3; 2) 1; 3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\dfrac{1}{2}$.

4. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Навчальні задачі

4.1. Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$;

***Розв'язання*. [1.21.10.]**

$$\lim_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})\overset{[0.6.7]}{=}\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2}=$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\sin\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)=\sin 0=0.$$

Функція $2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$ обмежена, оскільки:

$$\left|2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\le 2.$$

Добуток нескінченно малої функції на обмежену є функцією нескінченно малою. Отже,

$$\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}+x}{2}\sin\frac{1}{2(x+\sqrt{x+1})}=0.$$

4.2. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x\cdot\operatorname{tg}x}{1-\cos 2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{\sin 5x}-3^{\sin x}}{e^{x^2}-\cos x}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\pi-4\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}{x}$.

***Розв'язання*. [1.26.]**

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left|\sin 5x\sim 5x, x\to 0\right|=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{x}=5.$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x\cdot\operatorname{tg}x}{1-\cos 2x}=\left|\begin{array}{l}\sin 2x\overset{[1.21.1]}{\sim}2x,\operatorname{tg}x\overset{[1.21.2]}{\sim}x,\quad x\to0\\ 1-\cos 2x\overset{[1.21.3]}{\sim}\dfrac{(2x)^2}{2}=2x^2, x\to0\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cdot x}{2x^2}=1.$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\overset{[0.6.7]}{=}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=\left|\begin{array}{c}\sin\frac{x-a}{2}\sim\frac{x-a}{2},\\ x\to a\end{array}\right|=$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\cdot\frac{x-a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos a.$$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{c}\ln(1+3^x)\overset{[1.26.7]}{\sim}3^x,\\ \ln(1+2^x)\sim 2^x,\\ x\to-\infty\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x}{2^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=0.$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\sin 5x}-3^{\sin x}}{e^x-\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\sin x}(3^{\sin 5x-\sin x}-1)}{(e^x-1)+(1-\cos x)}=$

$$=\left|\begin{array}{c}3^{\sin 5x-\sin x}-1\overset{[1.26.8]}{\sim}\\ \sim(\sin 5x-\sin x)\ln 3\overset{[0.6.7]}{=}\\ =2\ln 3\cdot\sin 2x\cdot\cos 3x,\ x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{\sin x}\ln 3\cdot\sin 2x\cdot\cos 3x}{(e^x-1)+(1-\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{\sin x}\ln 3\cdot\frac{\sin 2x}{x}\cdot\cos 3x}{\frac{e^x-1}{x}+\frac{1-\cos x}{x}}=\left|\begin{array}{l}3^{\sin x}\to 1,\cos 3x\to 1,\\ \frac{\sin 2x}{x}\overset{[1.26.1]}{\to}2,\ \frac{e^x-1}{x}\overset{[1.26.9]}{\to}1,\\ \frac{1-\cos x}{x}\overset{[1.26.3]}{\to}0,\ x\to 0\end{array}\right|=4\ln 3.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi-4\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}{x}=$

$$\overset{[1.26.2]}{=}4\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}\right)}{x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{1+x}}{x\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{1+x}\right)}\overset{[0.6.2]}{=}$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{x\left(1+\frac{1}{1+x}\right)}=4\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}}{x\cdot\frac{x+2}{x+1}}=4\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+2}=2.$$

4.3. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{x-10}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$.

Розв'язання. ***[1.26.]***

1) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix} t=x-1, x=t+1\\ t\to 0, x\to 1\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 7\pi(t+1)}{\sin 2\pi(t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(7\pi t+7\pi)}{\sin(2\pi t+2\pi)}\overset{[0.5.6]}{=}\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 7\pi t}{\sin 2\pi t}=\left|\begin{matrix}\sin 7\pi t\overset{[1.26.1]}{\sim}7\pi t,\\ \sin 2\pi t\sim 2\pi t,\\ t\to 0\end{matrix}\right|=-\lim_{t\to 0}\frac{7\pi t}{2\pi t}=-\frac{7}{2}.$$

2) $$\lim_{x\to 10}\frac{\lg x-1}{x-10}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix} t=x-10,\\ x=t+10,\\ t\to 0, x\to 10\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\lg(10+t)-\lg 10}{t}\overset{[0.3.6]}{=}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\lg\left(1+\frac{t}{10}\right)}{t}=\left|\begin{matrix}\lg\left(1+\dfrac{t}{10}\right)\overset{[1.26.6]}{\sim}\dfrac{t}{10\ln 10},\\ t\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{10\ln 10}}{t}=\frac{1}{10\ln 10}.$$

3) $$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{x-1}=\left|\begin{matrix}e^{x-1}-1\overset{[1.26.9]}{\sim}x-1,\\ x\to 1\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{e(x-1)}{x-1}=e.$$

4) $$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix} t=x-1, x=t+1,\\ t\to 0, x\to 1\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{1-\left(t+1\right)^{1/3}}{1-(t+1)^{1/5}}=$$

$$=\left|\begin{matrix}(1+t)^{1/3}-1\overset{[1.26.10]}{\sim}\dfrac{t}{3},\\ (1+t)^{1/5}-1\sim\dfrac{t}{5}, t\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{3}t}{-\frac{1}{5}t}=\frac{5}{3}.$$

4.4. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\ln(x+1)-\ln x)$;

3) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\dfrac{\pi}{\cos x}-2x\operatorname{tg} x\right)$.

Розв'язання. ***[3.3, 3.2.6.]***

1) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln 3^x}{\ln 2^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x\ln 3}{x\ln 2}=\frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+1)-\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \left[\infty\cdot 0\right] =$

$$= \left|\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}, x\to+\infty\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1.$$

3) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\pi}{\cos x} - 2x\operatorname{tg} x\right) = \left[\infty-\infty\right] = \lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\pi}{\cos x} - \dfrac{2x\sin x}{\cos x}\right) =$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\pi-2x\sin x}{\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{array}{l} t = x-\dfrac{\pi}{2}, \\ x = t+\dfrac{\pi}{2}, \\ t\to 0, x\to\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\pi - 2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{\pi-\left(2t+\pi\right)\cos t}{-\sin t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\pi(1-\cos t)-2t\cos t}{-\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{\pi(1-\cos t)}{-\sin t} + \lim_{t\to 0}\frac{2t\cos t}{\sin t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t^2}{2}}{-t} + \lim_{t\to 0}\frac{2t\cos t}{t} = -\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0} t + 2\lim_{t\to 0}\cos t = 2.$$

4.5. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{x}{2x+1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(e+x)\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

***Розв'язання**. [1.23.6, 1.25.5, 1.26.]*

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{x}{2x+1}} = \left[0^{1/2}\right] = 0.$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{x} = \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty}\right] \overset{[1.23.6]}{=} 0.$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}\right] \overset{[1.23.6]}{=} +\infty.$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x = \left[1^\infty\right] \overset{[1.25.5]}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}-1\right)x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}} = e^{-1}.$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(e+x)\right)^{\operatorname{ctg} x} = \left[1^\infty\right] \overset{[1.25.5]}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x+e)-1)\operatorname{ctg} x} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+e)-\ln e}{\operatorname{tg} x}} \overset{[0.3.6]}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)}{\operatorname{tg} x}} \overset{[1.26.7]}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{e}}{x}} = e^{1/e}.$$

4.6. Які з функцій є нескінченно малими чи нескінченно великими?

1) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$; а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{1+2^x}$; а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$.

***Розв'язання*. [1.21.7, 1.21.8.]**

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \left[\infty+\infty\right] = +\infty.$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \left[\infty-\infty\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

Отже, $f(x)$ — н. в. ф., коли $x\to-\infty$; $f(x)$ — н. м. ф., коли $x\to+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+2^x} = 1;\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+2^x} = 0.$

Отже, $f(x)$ — н. м. ф., коли $x\to+\infty$.

4.7. Визначити порядок мализни і головну частину нескінченно малої функції $\alpha(x) = x^3+1000x^2$ щодо н. м. ф. $\beta(x) = x$, коли $x\to 0$.

***Розв'язання*. [1.24.6.]**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+1000x^2}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+1000)}{x^k} = \lim_{x\to 0}x^{2-k}(x+1000) =$$

$$= \begin{cases} 0, & 2-k>0,\\ 1000, & 2=k,\\ \infty, & 2-k<0. \end{cases}$$

Отже, н. м. ф. $\alpha(x)$ має порядок 2 щодо н. м. ф. $\beta(x) = x$, коли $x\to 0$; головна частина $1000x^2$. Тобто

$$x^3+1000x^2 \sim 1000x^2, x\to 0.$$

4.8. Визначити порядок росту і головну частину нескінченно великої функції $\alpha(x)=\dfrac{x^5}{1+x+2x^2}$ щодо функції $\beta(x)=x, x\to\infty$.

***Розв'язання*. [1.24.6.]**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^5}{1+x+2x^2}}{x^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{5-k}}{1+x+2x^2}=\begin{cases}\infty, & 5-k>2,\\ \dfrac{1}{2}, & 5-k=2,\\ 0, & 5-k<2.\end{cases}$$

Отже, н. в. ф. $\alpha(x)$ має порядок росту $5-2=3$ щодо н. в. ф. $\beta(x)=x$, коли $x\to\infty$; головна частина $\dfrac{1}{2}x^3$. Тобто

$$\frac{x^5}{1+x+2x^2}\sim\frac{x^3}{2}, x\to\infty.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

4.9. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(x+\dfrac{5\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x}{\arcsin 2x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{arctg}x}{\sqrt{4+x}-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg}x\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{tg}^2x-\sin^2x}$;

7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$; 8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}a}{x-a}$.

4.10. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(2x\operatorname{tg}x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$.

4.11. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}x\log_2\dfrac{10+x}{5+x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\cos\dfrac{\pi}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$.

4.12. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(4^{1/x}-4^{1/(x+1)}\right)$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin x^2}-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$.

4.13. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^x$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^x$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{\cos x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 3^x}{1+x\cdot 7^x}\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x^2\cdot 2^x}{1+x^2\cdot 5^x}\right)^{1/\sin^3 x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{1/\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{3}\right)}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\sin^2 x}\right)^{1/\ln\cos x}$.

4.14. Визначте, які функції є нескінченно малими:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x},\ x\to 1$; 2) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}},\ x\to+0$;

3) $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^4+x+1)},\ x\to\infty$?

4.15. Визначте, які функції є нескінченно великими:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-4x^2+4x}-\dfrac{1}{x^2-3x+2},\ x\to 2$;

2) $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{x}$, а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$.

4.16. Визначте порядок мализни і головну частину нескінченно малої функції $\alpha(x)$ щодо функції $\beta(x)=x$, коли $x\to 0$:

1) $\alpha(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$; 2) $\alpha(x)=\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^x-1)^2}$;

3) $\alpha(x)=3^{\sqrt{x}}-1$; 4) $\alpha(x)=\operatorname{tg}x-\sin x$.

4.17. Визначте порядок росту і головну частину нескінченно великої функції $\alpha(x)=\sqrt{x^4+x+1}$ щодо функції $\beta(x)=x$, коли $x\to\infty$.

Відповіді

4.9. 1) 3; 2) 0; 3) $-\dfrac{1}{2}$; 4) 12; 5) 0; 6) $\dfrac{1}{4}$; 7) $-\sin a$; 8) $-\dfrac{1}{\sin^2 a}$.

4.10. 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) -2; 3) $-\dfrac{1}{2}$; 4) $-\ln 2$. **4.11.** 1) $\dfrac{5}{\ln 2}$; 2) $-\dfrac{\pi^2}{2}$; 3) $\dfrac{1}{a}$; 4) $\dfrac{3}{2}$.

4.12. 1) 5; 2) $\ln 4$; 3) $\dfrac{1}{3}$; 4) 2; 5) 0; 6) $4\ln 2-4$.

4.13. 1) ∞; 2) 0; 3) e^{km}; 4) e^8; 5) e; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; 7) $\dfrac{3}{7}$; 8) $\dfrac{2}{5}$; 9) e^{-9/π^2}; 10) 9.

4.16. 1) $k=\dfrac{1}{2}$, головна частина — $\left(-x^{1/2}\right)$, $x\to 0$; 2) $k=\dfrac{2}{3}$, головна частина — $\left(-2x^{2/3}\right), x\to 0$; 3) $k=\dfrac{1}{2}$, головна частина — $\left(\ln 3\cdot x^{1/2}\right)$; 4) $k=3$, головна частина — $\dfrac{x^3}{2}$.

4.17. $k=2$, головна частина $x^2, x\to\infty$.

5. Неперервність функції. Точки розриву функції

Навчальні задачі

5.1. Дослідити на неперервність функцію:

1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; 2) $f(x)=e^{1/x}$;

3) $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x<0,\\ (x-1)^2, & 0\le x\le 2,\\ 4-x, & x>2;\end{cases}$ 4) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$.

***Розв'язання*. [1.29.]**

1) Функція f — елементарна; область означення функції $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Отже, $x_0=0$ — точка розриву.

[*З'ясовуємо тип точки розриву, знаходячи однобічні границі.*].

Оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Leftrightarrow \lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=1,$$
$$x_0=0\notin D(f),$$

то точка $x_0=0$ є точкою розриву 1-го роду, усувного. ①

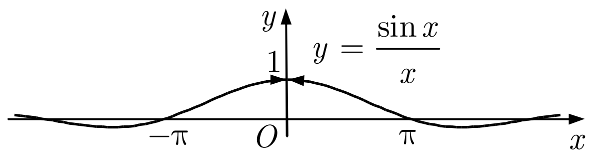


Рис. до зад. 5.1.1)

Функцію $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ можна доозначити в точці $x_0=0$, покладаючи

$$g(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

Функція g вже буде неперервною на $\mathbb{R}$.

2) Функція f — елементарна; область означення $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Отже, функція f має розрив у точці $x_0=0$.

$$\lim_{x\to -0}e^{1/x}=0;\quad \lim_{x\to +0}e^{1/x}=+\infty.$$

Оскільки обидві границі існують і одна з них нескінченна, то $x_0=0$ — точка розриву 2-го роду, нескінченного. Графік функції має в точці $x_0=0$ праву вертикальну асимптоту.

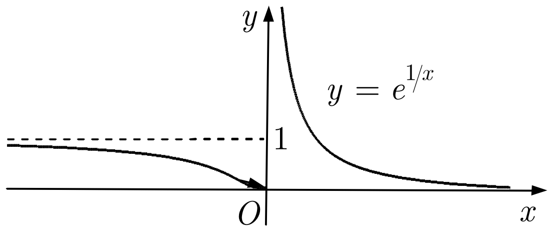


Рис. до зад. 5.1.2)

3) Функція f — неелементарна, означена різними аналітичними виразами на різних проміжках, які є неперервними функціями на цих проміжках. Отже, єдині можливі точки розриву — це точки $x_1=0$ та $x_2=2$, де міняються аналітичні вирази для функції f.

Дослідімо точку $x_1=0$.

$$f(0)=(0-1)^2=1.$$
$$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}(1-x^2)=1;$$
$$\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}(x-1)^2=1.$$

Оскільки існують скінченні границі $f(-0), f(+0)$ і

$$f(+0)=f(-0)=1=f(0),$$

то функція f є неперервною в точці $x_1=0$.

Дослідімо точку $x_2 = 2$.

$$f(2) = (2-1)^2 = 1.$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} (x-1)^2 = 1;$$
$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} (4-x) = 2.$$

Оскільки існують скінченні границі $f(2-0), f(2+0)$ і

$$f(2-0) = 1 \neq 2 = f(2+0),$$

то точка $x_2 = 2$ є точкою розриву 1-го роду, неусувного, зі стрибком

$$\delta = f(2+0) - f(2-0) = 2 - 1 = 1.$$

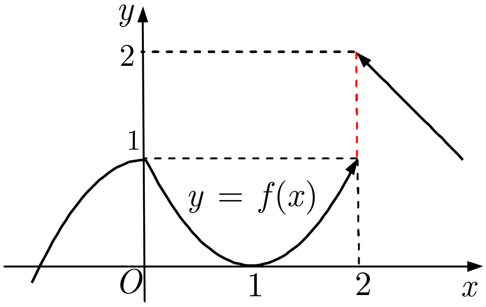


Рис. до зад. 5.1.3)

4) Функція f — елементарна, область означення $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Доведімо, користуючись означенням границі за Гейне, що не існує $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$. Для цього побудуймо дві послідовності значень аргументу:

$$\{x_n'\} = \left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right\} = \frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \ldots, \frac{2}{\pi + 2\pi n}, \ldots;$$
$$\{x_n''\} = \left\{\frac{1}{2\pi n}\right\} = \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{4\pi}, \frac{1}{6\pi}, \ldots, \frac{1}{2\pi n}.$$

Обидві послідовності збігаються до нуля. Запишімо послідовності значень функції f:

$$f(x_n') = 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots;$$
$$f(x_n'') = 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$$

Оскільки послідовність $\{f(x_n')\}$ збігається до нуля, а послідовність $\{f(x_n'')\}$ — до одиниці, то не існує $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$.

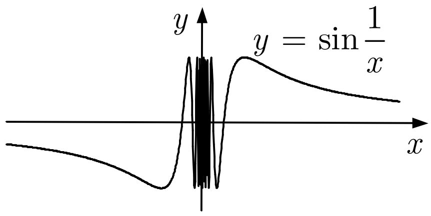


Рис. до зад. 5.1.4)

Точка $x_0 = 0$ є точкою розриву 2-го роду, істотного.

Коментар. ① Усувний розрив можна «усунути», доозначивши функцію $f(x)$ у точці x_0, тобто утворивши нову функцію

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ f(x_0 \pm 0), & x = x_0, \end{cases}$$

що збігається з функцією $f(x)$ скрізь, окрім точки x_0, і буде вже неперервною в цій точці.

5.2. Показати, що будь-який многочлен непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має принаймні один дійсний корінь.

Розв'язання*. *[1.28.5.]

Розгляньмо многочлен непарного степеня з дійсними коефіцієнтами

$$P_{2n+1}(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + ... + a_{2n+1}.$$

Нехай для визначеності $a_0 > 0.$ При досить великих за абсолютною величиною від'ємних значеннях x знак многочлена $P_{2n+1}(x)$ буде від'ємним, а при досить великих додатних значеннях x — додатним. Оскільки многочлен є скрізь неперервною функцією, то знайдеться деяка точка, в якій він дорівнює нулеві.

5.3. Знайти з точністю $0,1$ корінь рівняння $x^4 + x^3 - 1 = 0$ на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання*. *[1.28.5.]

Нехай $f(x) = x^4 + x^3 - 1$. Ця функція неперервна $\forall x \in \mathbb{R}$, а, отже, і на $[0;1]$. Оскільки $f(0) = -1 < 0, f(1) = 1 > 0,$ то за теоремою Больцано — Коші

$$\exists c \in (0;1) : f(c) = 0,$$

тобто рівняння $f(x) = 0$ має корінь на $[0;1]$. Знайти корінь з точністю $0,1$ означає вказати відрізок $[a;b]$ завдовжки $b - a \le 0,1,$ який містить корінь рівняння. Щоб знайти наближене значення кореня, скористаємось методом половинного поділу.

Крок 1. Покладаємо $a = 0, b = 1$. Обчислюємо

$$f(a) = f(0) = -1, f(b) = f(1) = 1.$$

Перевіряємо

$$f(a)f(b) = -1 \cdot 1 = -1 < 0,$$
$$\left|b - a\right| = 1 > 0,1.$$

Крок 2. Обчислюємо

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Крок 3. Обчислюємо

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{16}.$$

Перевіряємо

$$f(x_1)f(a) = -\frac{13}{16} \cdot (-1) = \frac{13}{16} > 0;$$
$$f(x_1)f(b) = -\frac{13}{16} \cdot 1 = -\frac{13}{16} < 0.$$

Покладаємо $a_1 = x_1 = \dfrac{1}{2}, b_1 = b = 1$. Перевіряємо

$$\left|a_1 - b_1\right| = \frac{1}{2} > 0,1.$$

Крок 4. Обчислюємо

$$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Крок 5. Обчислюємо

$$f(x_2) = f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{67}{256}.$$

Перевіряємо

$$f(x_2)f(a_1) = -\frac{67}{256} \cdot \left(-\frac{13}{16}\right) > 0;$$

$$f(x_2)f(b_1) = -\frac{67}{256} \cdot 1 < 0.$$

Покладаємо

$$a_2 = x_2 = \frac{3}{4}, b_2 = b_1 = 1.$$

Перевіряємо

$$\left|a_2 - b_2\right| = \frac{1}{4} = 0,25 > 0,1.$$

Крок 6. Обчислюємо

$$x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{7}{8}...$$

Врешті-решт дістанемо: $x = 0,81$ з точністю $\varepsilon = 0,1.$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

5.5. Використовуючи лише графік функції $f(x)$, визначте її точки розриву і їхній тип:

1) рис. 1; 2) рис 2.

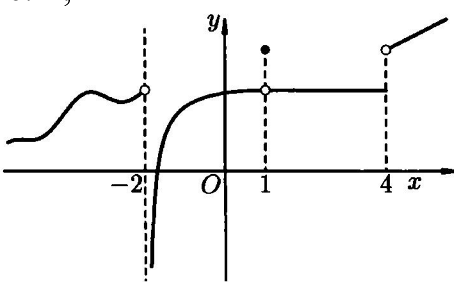


Рис. 1 до зад. 5.5

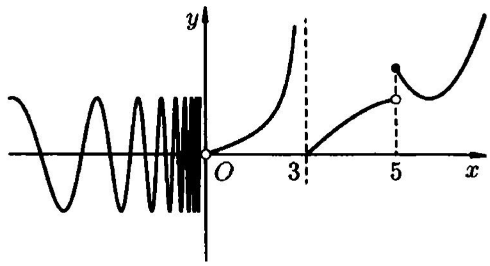


Рис. 2 до зад. 5.5

5.6. Знайдіть точки розриву функції, дослідіть їхній характер, у разі усувного розриву дозначте функцію «за неперервністю». Схематично побудуйте графік функції в околах точок розриву.

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$;

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$;

3) $f(x)=\dfrac{(1+x)^n-1}{x}, n\in\mathbb{N}$;

4) $f(x)=1-x\sin\dfrac{1}{x}$;

5) $f(x)=\dfrac{|3x-5|}{3x-5}$;

6) $f(x)=\dfrac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}$;

7) $f(x)=(x+1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

8) $f(x)=\dfrac{3^{\frac{1}{x-2}}-1}{3^{\frac{1}{x-2}}+1}$;

9) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$;

10) $f(x)=\dfrac{2}{1-3^{3+x}}$;

11) $f(x)=3^{\frac{x}{4-x^2}}$;

12) $f(x)=e^{\frac{1}{\sin x}}$;

13) $f(x)=\dfrac{3}{\log_2|x+1|}$;

14) $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

15) $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{2-x}$;

16) $f(x)=\sin\dfrac{1}{(x+3)^2}$;

17) $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x\le 1,\\ 4-2x, & 1<x<2{,}5,\\ 2x-7 & 2{,}5\le x\le 4.\end{cases}$

18) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}2x, & x<\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{\pi}{2x+3}, & x>\dfrac{1}{2};\end{cases}$

19) $f(x)=\begin{cases}e^{x+3}, & x\le -3,\\ 10-x^2, & |x|\le 3,\\ 2^{\frac{1}{x-2}}, & x>3;\end{cases}$

20) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 1,\\ \sin\frac{1}{x-3}, & x>1.\end{cases}$

5.7. Виберіть значення параметрів так, що функція стала неперервною і побудуйте її графік:

1) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1,\\ 3-ax^2, & x>1;\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} -2\sin x, & x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ A\sin x+B, & \left|x\right|<\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x, & x\ge \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

5.8. Дослідіть на неперервність функцію і побудуйте її графік:

1) $y=\dfrac{1}{\ln\left|x\right|}$;

2) $y=\{x\}$;

3) $y=\dfrac{1}{\{x\}}$;

4) $y=(-1)^{[x]}$.

5.9. Розв’яжіть нерівність:

1) $\dfrac{(2x-1)(x-2)^3}{(x+1)(x+2)^2}<0$;

2) $\dfrac{(x+3)(x+2)^3(x+1)}{x(x-3)(x-4)}>0$.

5.10. Доведіть, що рівняння має розв’язок на вказаному відрізку:

1) $x^3-3x+1=0, x\in[-1;0]$;

2) $x^5-6x^2+3x-7=0, x\in[0;2]$.

Відповіді

5.5. 1) функція $f(x)$ має: в точці $x=2$ розрив 2-го роду, нескінченний; у точці $x=1$ розрив 1-го роду, усувний; у точці $x=4$ розрив 1-го роду, неусувний;
2) функція $f(x)$ має: в точці $x=0$ розрив 2-го роду, істотний; у точці $x=3$ розрив 2-го роду, нескінченний; у точці $x=5$ розрив 1-го роду, неусувний.

5.6. 1) функція $f(x)$ має в точці $x=1$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\ne 1,\\ \dfrac{2}{3}, & x=1;\end{cases}$

2) функція $f(x)$ має в точці $x=-1$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\ne -1,\\ \dfrac{1}{3}, & x=-1;\end{cases}$

3) функція $f(x)$ має в точці $x=0$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\ne 0,\\ n, & x=0;\end{cases}$

4) функція $f(x)$ має в точці $x=0$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\ne 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

5) функція $f(x)$ має в точці $x=\dfrac{5}{3}$ розрив 1-го роду, неусувний;
6) функція $f(x)$ має в точці $x=-2$ розрив 1-го роду, неусувний;
7) функція $f(x)$ має в точці $x=0$ розрив 1-го роду, неусувний;
8) функція $f(x)$ має в точці $x=2$ розрив 1-го роду, неусувний;
9) функція $f(x)$ має в точках $x=\pm3$ розрив 2-го роду, нескінченний;
10) функція $f(x)$ має в точці $x=-3$ розрив 2-го роду, нескінченний;
11) функція $f(x)$ має в точках $x=\pm2$ розрив 2-го роду, нескінченний;
12) функція $f(x)$ має в точках $x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$, розрив 2-го роду, нескінченний;
13) функція $f(x)$ має в точці $x=-2$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ а в точках $x=-2, x=0$ — розрив 2-го роду, нескінченний;
14) функція $f(x)$ має в точці $x=0$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$ а в точках $x=\pm1$ — розрив 2-го роду, нескінченний;
15) функція $f(x)$ має в точці $x=2$ розрив 2-го роду, істотний;
16) функція $f(x)$ має в точці $x=-3$ розрив 2-го роду, істотний;
17) функція $f(x)$ має в точці $x=2{,}5$ розрив 1-го роду, неусувний;
18) функція $f(x)$ має в точці $x=\dfrac{1}{2}$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq \dfrac{1}{2},\\ \dfrac{\pi}{4}, & x=\dfrac{1}{2};\end{cases}$
19) функція $f(x)$ має в точці $x=3$ розрив 1-го роду, неусувного;
20) функція $f(x)$ має в точках $x=0, x=1$ розрив 1-го роду, неусувний, а в точці $x=3$ — розрив 2-го роду, істотний.

5.6. 1) $x=-1$ — точка розриву 1-го роду (скінченного); 2) $x=-3$ — точка розриву 2-го роду (нескінченного); 3) $x=-1$ — точка розриву 1-го роду (усувного), $x=-2$, $x=0$ — точки розриву 2-го роду (нескінченного); 6) $x=\dfrac{1}{2}$ — точка розриву 1-го роду (усувного).

5.7. 1) $a=1$; 2) $A=-1, B=1$.

5.8. 1) $x=0$ — точка розриву 1-го роду, усувного, $x=\pm1$ — точки розриву 2-го роду, нескінченного; 2), 4) $x\in\mathbb{Z}$ — точки розриву 1-го роду, неусувного; 3) $x\in\mathbb{Z}$ — розриви 2-го роду, нескінченного.

5.9. 1) $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup\left(\dfrac{1}{2};2\right]$; 2) $x\in(-\infty;-3)\cup(-2;-1)\cup(0;3)\cup(4;+\infty)$.

Розділ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

6. Похідна. Техніка диференціювання

Навчальні задачі

6.1. Користуючись означенням, знайти похідну функції $f(x) = 4x^2 - 3x + 8$ у точці x_0. Обчислити $f'(1)$.

Розв'язання. ***[2.1.1.]***

$$f(x_0 + \Delta x) = 4(x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 8 =$$
$$= 4x_0^2 - 3x_0 + 8 + 8x_0\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2.$$
$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 8x_0\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2.$$
$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{8x_0\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = 8x_0 - 3 + 4\Delta x.$$
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(8x_0 - 3 + 4\Delta x) = 8x_0 - 3.$$
$$f'(1) = 5.$$

6.2. Знайти похідну функції:

1) $f(x) = x^4$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$;

3) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$; 4) $f(x) = 5x^3$;

5) $f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$; 6) $f(x) = -\dfrac{5}{4x^3}$.

Розв'язання. ***[2.2.1, 2.3.2.]***

1) $f'(x) = (x^4)' \overset{[2.3.1]}{\underset{\alpha=4}{=}} 4x^3.$

2) $f'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' \overset{[2.3.1]}{\underset{\alpha=1/2}{=}} \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

3) $f'(x) = (\sqrt[4]{x^3})' = (x^{3/4})' \overset{[2.3.1]}{\underset{\alpha=3/4}{=}} \dfrac{3}{4}x^{-1/4} = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}.$

Для розв'язання прикладів стануть у пригоді формули:

$$\boxed{\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}, \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}.}$$

Нагадаймо, що сталий множник виносимо за знак похідної.

$$\boxed{(Cu)' = Cu'.}$$

4) $f'(x) = (5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2.$

5) $f'(x) = (4\sqrt[3]{x^2})' = 4(x^{2/3})' = 4 \cdot \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{8}{3\sqrt[3]{x}}.$

6) $f'(x) = \left(-\dfrac{5}{4x^3}\right)' = -\dfrac{5}{4}(x^{-3})' = -\dfrac{5}{4} \cdot (-3)x^{-4} = \dfrac{15}{4x^4}.$

6.3. Знайти похідну функції:

1) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1;$ 2) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x^2};$

3) $f(x) = e^x \sin x;$ 4) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln x}.$

Розв'язання*. *[2.2.1–2.2.4, 2.3.]

1) $f'(x) = \underset{(u \pm v)' = u' \pm v', (Cu)' = Cu'}{(3x^2 - 5x + 1)'} =$

$$= 3(x^2)' - 5(x)' + (1)' = 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 6x - 5.$$

2) **[***Перед тим, як знаходити похідну, переписуємо функцію у вигляді, зручному для диференціювання.***]**

$$f'(x) = \left(3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}\right)' = \left(3x^{1/3} + 2x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2}\right)' =$$

$$= 3\left(x^{1/3}\right)' + 2(x^{-1})' - \frac{1}{2}(x^{-2})' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^{-2/3} + 2 \cdot (-1)x^{-2} - \frac{1}{2} \cdot (-2)x^{-3} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

3) $f'(x) = \underset{(uv)' = u'v + uv'}{(e^x \sin x)'} = \underset{(e^x)' = e^x, (\sin x)' = \cos x}{(e^x)' \sin x + e^x (\sin x)'} =$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x).$$

4) $f'(x) = \underset{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}{\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln x}\right)'} = \underset{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ (\ln x)' = \frac{1}{x}}{\dfrac{(\operatorname{tg} x)' \ln x - \operatorname{tg} x (\ln x)'}{\ln^2 x}} =$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\ln x - \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x \ln x - \sin x \cdot \cos x}{x \ln^2 x \cdot \cos^2 x}.$$

6.4. Знайти похідну і диференціал функції:

1) $f(v) = \operatorname{tg} v \cdot \sin a$; 2) $\rho(\varphi) = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi$;

3) $s(t) = \ln t + \operatorname{ctg} 3$.

***Розв'язання*. [2.2, 2.3, 2.1.8.]**

1) $f'(v) = (\operatorname{tg} v \cdot \sin a)' \overset{[2.2.1]}{=} \sin a \cdot (\operatorname{tg} v)' \overset{[2.3.9]}{=} \dfrac{\sin a}{\cos^2 v}$.

$$df \overset{[2.1.8]}{=} \frac{\sin a}{\cos^2 v}\, dv.$$

2) $\rho'(\varphi) = (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi)' \underset{[2.3.7, 2.3.8]}{\overset{[2.2.2, 2.2.4]}{=}} \sin \varphi + \varphi \cos \varphi - \sin \varphi = \varphi \cos \varphi$.

$$d\rho \overset{[2.1.8]}{=} \varphi \cos \varphi d\varphi.$$

3) $s'(t) = \left(\ln t + \operatorname{ctg} 3\right)' \underset{[2.3.6, 2.3.1]}{\overset{[2.2.2]}{=}} \dfrac{1}{t} + 0 = \dfrac{1}{t}$.

$$ds \overset{[2.1.8]}{=} \frac{dt}{t}.$$

6.5. Знайти похідну функції:

1) $f(x) = \sin 3x$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg} qx$;

3) $f(x) = \sin(2x^2)$; 4) $f(x) = 3(\operatorname{tg} x)^2$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^3 x}$; 6) $f(x) = \sqrt{\sin^2 x + 3\cos^2 4x}$.

***Розв'язання*. [2.2.5, 2.3.]**

1) $f'(x) = (\sin 3x)' = \underset{u=3x}{(\sin u)'} \underset{[2.3.7]}{\overset{[2.2.5]}{=}} \underbrace{\cos 3x}_{\text{похідна синуса}} \cdot \underbrace{(3x)'}_{\text{похідна аргументу}} = 3\cos 3x$.

2) $f'(x) = (\operatorname{ctg} qx)' \overset{[2.3.10]}{=} -\dfrac{(qx)'}{\sin^2 qx} = -\dfrac{q}{\sin^2 qx}$.

3) $f'(x) = [\sin(2x^2)]' \overset{[2.3.7]}{=} \cos(2x^2) \cdot (2x^2)' = 4x \cos 2x^2$.

4) $f'(x) = [3(\operatorname{tg} x)^2]' = \underset{u=\operatorname{tg} x}{(3u^2)'} \overset{[2.3.2]}{=} 3 \cdot 2 \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x)' \overset{[2.3.9]}{=} 6 \operatorname{tg} x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{6 \sin x}{\cos^3 x}$.

5) $f'(x) = \left[\dfrac{1}{\cos^3 x}\right]' = \left[(\cos x)^{-3}\right]' \overset{[2.3.2]}{=} -3(\cos x)^{-4}(\cos x)' \overset{[2.3.8]}{=} \dfrac{3\sin x}{\cos^4 x}.$

6) $f'(x) = \left[\sqrt{\sin^2 x + 3\cos^2 4x}\right]' = \left[\left(\sin^2 x + 3\cos^2 4x\right)^{1/2}\right]' \overset{[2.3.2]}{=}$

$$= \frac{(\sin^2 x + 3\cos^2 4x)'}{2\left(\sin^2 x + 3\cos^2 4x\right)^{1/2}} \overset{[2.3.2]}{=}$$

$$= \frac{2\sin x \cdot \cos x + 3 \cdot 2\cos 4x \cdot (-\sin 4x) \cdot 4}{2\sqrt{\sin^2 x + 3\cos^2 4x}} = \frac{\sin 2x - 12\sin 8x}{2\sqrt{\sin^2 x + 3\cos^2 4x}}.$$

6.6. Знайти похідну функції:

1) $f(x) = \arcsin(2x)$;

2) $f(x) = \arcsin^2 3x$;

3) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

4) $f(x) = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

5) $f(x) = \arccos(x^m)$;

6) $f(x) = \operatorname{arctg}^4 \sqrt{x}$.

Розв'язання. [2.3.11–2.3.14.]

1) $f'(x) = \left[\arcsin(2x)\right]' \overset{[2.3.11]}{=} \dfrac{(2x)'}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$

2) $f'(x) = \left[\arcsin^2 3x\right]' = [(\arcsin 3x)^2]' \overset{[2.3.2]}{=} 2\arcsin 3x \cdot (\arcsin 3x)' \overset{[2.3.11]}{=}$

$$= 2\arcsin 3x \cdot \frac{(3x)'}{\sqrt{1-(3x)^2}} = 2\arcsin 3x \cdot \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{6\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

3) $f'(x) = \left[\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right]' = \dfrac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2} \overset{[2.3.13]}{=} \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$

4) $f'(x) = \left[\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]' \overset{[2.3.14]}{=} -\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{x}{2(x+1)\sqrt{x^3}} = \dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}.$

5) $f'(x) = \left[\arccos x^m\right]' \overset{[2.3.12]}{=} -\dfrac{(x^m)'}{\sqrt{1-x^{2m}}} = -\dfrac{mx^{m-1}}{\sqrt{1-x^{2m}}}.$

6) $f'(x) = \left[\operatorname{arctg}^4 \sqrt{x}\right]' \overset{[2.3.13]}{=} [(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^4]' = 4\operatorname{arctg}^3 \sqrt{x} \cdot (\operatorname{arctg}\sqrt{x})' =$

$$= 4\operatorname{arctg}^3\sqrt{x} \cdot \frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{2\operatorname{arctg}^3 x}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

6.7. Знайти похідні функції:

1) $f(x) = a^{3x}, a > 0;$ 2) $f(x) = 7^{\frac{1}{4x}};$

3) $f(x) = 4^{\sin^2 x};$ 4) $f(x) = e^{x^4};$

5) $f(x) = e^{\sqrt{\sin x}};$ 6) $f(x) = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6).$

***Розв'язання*. [2.3.3, 2.3.4.]**

1) $f'(x) = \left[a^{3x}\right]' \overset{[2.3.3]}{=} a^{3x} \ln a \cdot 3 = 3a^{3x} \ln a.$

2) $f'(x) = \left[7^{\frac{1}{4x}}\right]' \overset{[2.3.3]}{=} 7^{\frac{1}{4x}} \ln 7 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$

3) $f'(x) = \left[4^{\sin^2 x}\right]' \overset{[2.3.3]}{=} 4^{\sin^2 x} \ln 4 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x.$

4) $f'(x) = \left[e^{x^4}\right]' \overset{[2.3.4]}{=} e^{x^4} \cdot 4x^3.$

5) $f'(x) = \left[e^{\sqrt{\sin x}}\right]' \overset{[2.3.4]}{=} e^{\sqrt{\sin x}} \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$

6) $f'(x) = \left[e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\right]' =$

$$= (e^x)'(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)' =$$

$$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + e^x(3x^2 - 6x + 6) = e^x x^3.$$

6.8. Знайти похідну функції:

1) $f(x) = \log_2(5x + 4);$ 2) $f(x) = \ln^5 x;$

3) $f(x) = \ln \operatorname{arctg} x;$ 4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$

***Розв'язання*. [2.3.5, 2.3.6.]**

1) $f'(x) = \left[\log_2(5x + 4)\right]' \overset{[2.3.5]}{=} \frac{5}{(5x + 4) \ln 2}.$

2) $f'(x) = \left[\ln^5 x\right]' \overset{[2.3.6]}{=} 5 \ln^4 x \cdot \frac{1}{x}.$

3) $f'(x) = \left[\ln \operatorname{arctg} x\right]' \overset{[2.3.6]}{=} \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$

4) $f'(x) = \left[\ln(x + \sqrt{1 + x^2})\right]' \overset{[2.3.6]}{=} \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$

6.9. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x)=\operatorname{sh}^2 x$; 2) $f(x)=\operatorname{th}^3 x^2$;

3) $f(x)=\ln\operatorname{ch} x$; 4) $f(x)=\cos(\operatorname{cth} x)$.

***Розв'язання**. [2.3.15, 2.3.18.]*

1) $f'(x)=\left[\operatorname{sh}^2 x\right]'=\left[(\operatorname{sh} x)^2\right]'=2\operatorname{sh} x\cdot(\operatorname{sh} x)'\overset{[2.3.15]}{=}2\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} x.$

2) $f'(x)=\left[\operatorname{th}^3 x^2\right]'=\left[(\operatorname{th} x^2)^3\right]'=3\operatorname{th}^2 x^2(\operatorname{th} x^2)'\overset{[2.3.17]}{=}3\operatorname{th}^2 x^2\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x^2}\cdot 2x.$

3) $f'(x)=\left[\ln\operatorname{ch} x\right]'=\dfrac{(\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch} x}\overset{[2.3.16]}{=}\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\operatorname{th} x.$

4) $f'(x)=\left[\cos(\operatorname{cth} x)\right]'\overset{[2.3.18]}{=}-\sin\operatorname{cth} x\cdot\left(-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right)=\dfrac{\sin\operatorname{cth} x}{\operatorname{sh}^2 x}.$

6.10. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x)=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}(x+4)^2}$; 2) $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$.

***Розв'язання**. [2.2.6.]* ①

1) **[***Застосовуючи формулу логарифмічної похідної треба максимально спростити вираз перед диференціюванням.***]**

$$f'(x)\overset{[2.2.6]}{=}f(x)\underbrace{\left(\ln\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}(x+4)^2}\right)'}_{\substack{\text{максимально використовуємо}\\ \text{властивості логарифму}}}=$$

$$=f(x)\left(3\ln(x+1)+\frac{1}{4}\ln(x-2)-\frac{2}{5}\ln(x-3)-2\ln(x+4)\right)'=$$

$$=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}(x+4)^2}\left(\frac{3}{x+1}+\frac{1}{4(x-2)}-\frac{2}{5(x-3)}-\frac{2}{x+4}\right).$$

2) $f'(x)\overset{[2.2.6]}{=}f(x)(\ln(\cos x)^{\sin x})'=f(x)(\sin x\ln\cos x)'=$

$$=(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right).$$

***Коментар**.* ① Формулу логарифмічної похідної доцільно використовувати для диференціювання виразів з великою кількістю множників або степенево-показникових виразів.

Стануть у пригоді такі формули:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$\log_a x^{\alpha} = \alpha \log_a x, x, y > 0.$$

6.11. Знайти похідну функції $y(x)$, заданої неявно $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Розв'язання. ①

[*Диференціюємо обидві частини рівності, що задає функцію $y(x)$ неявно, за змінною x.***]**

$$\underbrace{(x^3)' + (y^3)' - 3a(xy)' = 0.}_{\substack{y^3 \text{ є складеною функцією,} \\ \text{а } xy \text{ - добутком}}}$$

$$3x^2 + 3y^2y' - 3ay - 3axy' = 0.$$

[*Залишаємо усі доданки, які містять y', ліворуч і переносимо праворуч решту.***]**

$$(3y^2 - 3ax)y' = -3x^2 + 3ay.$$

[*Виражаємо y'.***]**

$$y' = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

Коментар. ① Перехід від неявного задавання функції до явного часто буває складним, а то й неможливим. Для знаходження похідної $y' = \dfrac{dy}{dx}$ **не рекомендовано** переходити від неявного задавання функції до явного.

6.12. Знайти похідну параметрично заданої функції $y(x): \begin{cases} x = \operatorname{tg} t + t, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}, \end{cases} t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ для довільного значення t і для $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання. [2.2.8.] ①

$$y'_x(t) = \frac{\dfrac{2\sin t}{\cos^3 t}}{\dfrac{1}{\cos^2 t} + 1} = \frac{2\sin t}{\cos t + \cos^3 t};$$

$$y'_x(x): \begin{cases} x = \operatorname{tg} t + t, \\ y'_x(t) = \dfrac{2\sin t}{\cos t + \cos^3 t}. \end{cases}$$

$$y'_x \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

6.13. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2,5x^2 - 0,3x + 0,1$; 2) $f(x) = ax^2 + bx + c$;

3) $f(y) = 2\sqrt{y} - \frac{1}{y} + \sqrt[4]{3}$;

4) $f(x) = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$;

5) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$; 6) $s(t) = \frac{3t^2 + 1}{t - 1}$.

6.14. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \sin x + \operatorname{ctg} x$; 2) $f(x) = \frac{x}{1 - \cos x}$;

3) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; 4) $\rho(\varphi) = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi$.

6.15. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^2 \log_3 x$; 2) $f(x) = \frac{x - 1}{\lg x}$;

3) $f(x) = x \sin x \ln x$; 4) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$;

5) $f(x) = \frac{x}{4^x}$; 6) $f(x) = x \cdot 10^x$;

7) $f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$; 8) $f(x) = \frac{\cos x}{e^x}$;

9) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$; 10) $f(x) = \frac{1 - 10^x}{1 + 10^x}$.

6.16. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = (5x^2 + 7)^3$; 2) $f(x) = (1 + 5x - 8x^2)^5$;

3) $f(x) = \left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}\right)^4$; 4) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 1}$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+5}}$; 6) $f(x) = \dfrac{10}{(4x^3-5x^2+7x-1)^4}$;

7) $f(x) = (5x^2-7x+2)(15x^2+5)^3$; 8) $f(x) = (8x^3-21)\sqrt[3]{(7+4x^3)^2}$.

6.17. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \sqrt{\sin x}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$;

3) $f(x) = \operatorname{ctg}^4 x$; 4) $f(x) = 5\cos^5 x$;

5) $f(x) = 7\operatorname{tg}^6 x$; 6) $f(x) = 8\sin^2 x$;

7) $f(x) = \dfrac{1}{7}\sin 7x + \dfrac{3}{5}\sin 5x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$;

8) $f(x) = \dfrac{1}{9}\cos 9x + \dfrac{3}{7}\cos 7x - \dfrac{8}{3}\cos 3x$;

9) $f(x) = \left(\dfrac{2}{\cos^4 x} + \dfrac{3}{\cos^2 x}\right)\sin x$; 10) $f(x) = \left(\cos^2 x + \dfrac{2}{3}\right)\sin^3 x$.

6.18. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \arcsin 5x$; 2) $f(x) = \arcsin\sqrt{x}$;

3) $f(x) = \arccos(1-x^2)$; 4) $f(x) = \arccos\dfrac{1}{x}$;

5) $f(x) = \operatorname{arctg} 3x^2$; 6) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$;

7) $f(x) = \arcsin^3 x^2$; 8) $f(x) = \operatorname{arctg}^2 \dfrac{1}{x^2}$;

9) $f(x) = \arccos^4 5x$; 10) $f(x) = \operatorname{arcctg}\sqrt{x^3}$;

11) $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}, x \geq 0$; 12) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

6.19. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = 2^{3x}$; 2) $f(x) = 6^{-x^2}$;

3) $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$; 4) $f(x) = a^{x^n}, a > 0$;

5) $f(x) = (a^x)^n, a > 0$; 6) $f(x) = e^{1/x}$;

7) $f(x) = \ln(15e^x + x^2)$;   8) $f(x) = 5^{\ln(x^2+x+1)}$.

6.20. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \ln \dfrac{\sqrt[21]{(x+4)^{13}}\sqrt[28]{(x-3)^{13}}}{\sqrt[12]{x+1}}$;

2) $f(x) = \ln \dfrac{x^2(2x+4)^7}{(6+7x+2x^2)(2x+3)^7}$;

3) $f(x) = (5x-4)^3(x-2)^2(3-4x)$;   4) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x(x^2+2)}{x-4}}$;

5) $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2+1}\sin^3 x \cos^4 x$;   6) $f(x) = \dfrac{(x+5)^7(x^2-4x+2)^3}{(x^3+3x^2+5)^2}$;

7) $f(x) = x^x$;   8) $f(x) = (\sin x)^{\arcsin x}$;

9) $f(x) = (\ln x)^{e^x}$;   10) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$;

11) $f(x) = x^3 e^{x^2} \sin 2x + x^{1/x}$;   12) $f(x) = x^{x^2} + x^{2^x} + 2^{x^x}$.

6.21. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \operatorname{ch}^3 x$;   2) $f(x) = \ln \operatorname{th} x$;

3) $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{ch} x + \sin x \cdot \operatorname{sh} x$;   4) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{\operatorname{sh} x + \sin x}$.

6.22. Знайдіть похідні y' функції $y(x)$, заданої неявно:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;   2) $2y \ln y = x$;

3) $\cos(xy) = x$;   4) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

5) $y = x + \operatorname{arctg} y$;   6) $x^y = y^x$;

7) $\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$;   8) $a^{x/y} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^a$.

6.23. Знайдіть похідну y'_x функції $y(x)$, заданої параметрично:

1) $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin \varphi), \\ y = a(1 - \cos \varphi); \end{cases}$ 2) $x = \dfrac{t+1}{t}, y = \dfrac{t-1}{t}$;

3) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t; \end{cases}$ 4) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}, y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

6.24. Знайдіть диференціал функції:

1) $f(x) = \sin x - x\cos x + 4$; 2) $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$.

Відповіді

6.13. 1) $4x^3 - x^2 + 5x - 0,3$; 2) $2ax + b$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{y^2}$; 4) $4x^3 - 3x^2 - 8x + 9$;

5) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; 6) $\dfrac{3t^2 - 6t - 1}{(t-1)^2}$.

6.14. 1) $f(x) = \cos x - \dfrac{1}{\sin^2 x}$; 2) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x - x\sin x}{(1-\cos x)^2}$; 3) $f(x) = \dfrac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}$;

4) $\rho'(\varphi) = \varphi \cos \varphi$.

6.15. 1) $f'(x) = 2x \log_3 x + \dfrac{x}{\ln 3}$; 2) $f'(x) = \dfrac{x \ln 10 \lg x - x + 1}{x \ln 10 \lg^2 x}$;

3) $f'(x) = \sin x \ln x + x \cos x \ln x + \sin x$; 4) $f'(x) = -\dfrac{1}{x \ln^2 x}$;

5) $f'(x) = 4^{-x}(1 - x\ln 4)$; 6) $f'(x) = 10^x(1 + x\ln 10)$; 7) $f'(x) = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$;

8) $f'(x) = -\dfrac{\sin x + \cos x}{e^x}$; 9) $f'(x) = e^x(x^2+1)$; 10) $f'(x) = -\dfrac{2 \cdot 10^x \ln 10}{(1+10^x)^2}$.

6.16. 1) $30x(5x^2+7)^2$; 2) $5(1+5x-8x^2)^4(5-16x)$; 3) $4\left(1 + 2\sqrt{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)^3 \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{6}{x^3}\right)$;

4) $\dfrac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+1}}$; 5) $-\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+5)^4}}$; 6) $-\dfrac{40(12x^2-10x+7)}{(4x^3-5x^2+7x-1)^5}$;

7) $(10x-7)(15x^2+5)^3 + 90x(15x^2+5)^2(5x^2-7x+2)$; 8) $\dfrac{160x^5}{\sqrt[3]{7+4x^3}}$.

6.17. 1) $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$; 2) $\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos^3 x}}$; 3) $4 \operatorname{ctg}^3 x \cdot \left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$; 4) $5\cos^4 x \cdot (-\sin x)$;

5) $42 \operatorname{tg}^5 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 6) $8 \sin 2x$; 7) $\cos 7x + 3\cos 5x + \cos 3x$;

8) $-\sin 9x - 3\sin 7x + 8\sin 3x$; 9) $\dfrac{8 - 3\cos^4 x}{\cos^5 x}$; 10) $5\sin^2 x \cos^3 x$.

6.18. 1) $\dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$; 2) $\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$; 3) $\dfrac{2x}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}$; 4) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; 5) $\dfrac{6x}{1+9x^4}$;

6) $\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$; 7) $3\arcsin^2 x^2\cdot\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; 8) $-\dfrac{4x}{x^4+1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}$;

9) $-\dfrac{20\arccos^3 5x}{\sqrt{1-25x^2}}$; 10) $-\dfrac{3\sqrt{x}}{2(1+x^2)}$; 11) $\dfrac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$; 12) $-\dfrac{1}{2}$.

6.19. 1) $3\cdot 2^{3x}\ln 2$; 2) $-2x\cdot 6^{-x^2}\ln 6$; 3) $\dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}$; 4) $nx^{n-1}a^{x^n}\ln a$; 5) $na^{nx}\ln a$;

6) $-\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$; 7) $\dfrac{15e^x+2x}{15e^x+x^2}$;8) $5^{\ln(x^2+x+1)}\ln 5\cdot\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

6.20. 1) $\dfrac{13}{21(x+4)}+\dfrac{13}{28(x-3)}-\dfrac{1}{12(x+1)}$; 2) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x+2}-\dfrac{4x+7}{2x^2+7x+6}-\dfrac{14}{2x+3}$;

3) $15(5x-4)^2(x-2)^2(3-4x)+2(5x-4)^3(x-2)(3-4x)-4(5x-4)^3(x-2)^2$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{5}f(x)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x^2+2}-\dfrac{1}{x-4}\right)$; 5) $f(x)\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2x}{x^2+1}+3\operatorname{ctg} x-4\operatorname{tg} x\right)$;

6) $f(x)\left(\dfrac{7}{x+5}-\dfrac{6x-12}{x^2-4x+2}-\dfrac{6x^2+12x}{x^3+3x^2+5}\right)$; 7) $x^x(\ln x+1)$; 8) $f(x)\left(\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x+\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

9) $(\ln x)^{e^x}e^x\left(\dfrac{1}{x\ln x}+\ln\ln x\right)$; 10) $(\operatorname{tg} x)^{\cos x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\sin x\cdot\ln\operatorname{tg} x\right)$;

11)–12) *Вказівка.* Знайдіть похідну кожного доданку окремо.

6.21. 1) $3\operatorname{ch}^2 x\cdot\operatorname{sh} x$; 2) $\dfrac{2}{\operatorname{sh} 2x}$; 3) $2\cos x\cdot\operatorname{sh} x$; 4) $\dfrac{2\operatorname{sh} x\cdot\sin x}{(\operatorname{sh} x+\sin x)^2}$.

6.22. 1) $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$; 2) $\dfrac{1}{2(1+\ln y)}$; 3) $-\dfrac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$; 4) $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$; 5) $\dfrac{1+y^2}{y^2}$; 6) $\dfrac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$;

7) $\dfrac{x+y}{x-y}$; 8) $\dfrac{y}{x}$.

6.23. 1) $y'_x: x=a(\varphi-\sin\varphi), y'_x(\varphi)=\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$; 2) $y'_x: x=1+\dfrac{1}{t}, y'_x(t)=-1$;

3) $y'_x: x=\ln(1+t^2), y'_x(t)=\dfrac{t}{2}$; 4) $y'_x: x=\dfrac{3at}{1+t^3}, y'_x(t)=\dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$.

6.24. 1) $x\sin x dx$; 2) $\operatorname{arctg} x dx$.

7. Застосування похідної

Навчальні задачі

7.1. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $f(x)=x^2-6x+4$ в точках $M_1(4;-4)$ та $M_2(3;-5)$.

Розв'язання. ***[2.5.3, 2.5.4.]***

[*Обчислюємо, похідні функції $f(x)$ у точках M_1 та M_2.***]**

$$f'(x) = 2x - 6;\;\; f'(x_1) = 2;\;\; f'(x_2) = 0.$$

Дотична до кривої $y = f(x)$ у точці M_1 має рівняння

$$y - (-4) = 2(x - 4);\quad y = 2x - 12.$$

Дотична до кривої $y = f(x)$ у точці M_2 має рівняння

$$y - (-5) = 0(x - 3);\;\; y = -5.$$

Нормаль до кривої $y = f(x)$ у точці M_1 має рівняння

$$y - (-4) = -\frac{1}{2}(x - 4);\;\; y = -\frac{1}{2}x - 2.$$

Нормаль до кривої $y = f(x)$ у точці M_2 має рівняння

$$x = 3.$$

7.2. Визначити, в якій точці дотична до параболи $y = x^2$:

1) паралельна прямій $y = 4x - 5$;

2) перпендикулярна до прямої $2x - 6y + 5 = 0$;

3) утворює із прямою $3x - y + 1 = 0$ кут $\frac{\pi}{4}$.

***Розв'язання**. [2.5.2, 2.5.5–2.5.7.]*

Нехай точка дотику $M_0(x_0; y_0)$. Тоді:

$$k_{\text{дот.}} \overset{[2.5.2]}{=} y'(x_0) = 2x_0.$$

1) У паралельних прямих рівні кутові коефіцієнти [2.5.5]. Отже,

$$k_{\text{дот.}} = 2x_0 = 4 \Rightarrow x_0 = 2, y_0 = 4.$$

Дотична до параболи $y = x^2$ паралельна прямій $y = 4x - 5$ у точці $M_0(2; 4)$.

2) [*Знаходимо кутовий коефіцієнт прямої* $2x - 6y + 5 = 0$.]

$$2x - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6} \Rightarrow k = \frac{1}{3}.$$

У перпендикулярних прямих кутові коефіцієнти зв'язані співвідношенням

$$k_1 k_2 \overset{[2.5.6]}{=} -1.$$

Отже,

$$k_{\text{дот.}} = 2x_0 = -3 \Rightarrow x_0 = -\frac{3}{2}, y_0 = \frac{9}{4}.$$

Дотична до параболи $y = x^2$ перпендикулярна до прямої $2x - 6y + 5 = 0$ в точці $M_0\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$.

3) [*Знаходимо кутовий коефіцієнт прямої* $3x - y + 1 = 0$.]

$$3x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + 1 \Rightarrow k = 3.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \overset{[2.5.7]}{=} \left|\frac{2x_0 - 3}{1 + 2x_0 \cdot 3}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{2x_0 - 3}{6x_0 + 1}\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1, \\ x_0 = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 1, \\ y_0 = \dfrac{1}{16}. \end{array}\right.$$

Дотична до параболи $y = x^2$ утворює кут $\dfrac{\pi}{4}$ із прямою $3x - y + 1 = 0$ в точках $M_1(-1;1)$ та $M_2\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{16}\right)$.

7.3. Визначити, під яким кутом перетинаються гіпербола $y = \dfrac{1}{x}$ із параболою $y = \sqrt{x}$.

Розв'язання. [2.5.8.]

[Знаходимо точки перетину гіперболи та параболи.]

$$\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{x} \Rightarrow x = 1, y = 1.$$

Криві перетинаються в точці $M_0(1;1)$.

[Знайдімо кутові коефіцієнти дотичних у точці M_0.]

$$k_1 = (\sqrt{x})'\,\big|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = \frac{1}{2};$$

$$k_2 = \left.\left(\frac{1}{x}\right)'\right|_{x=1} = \left.-\frac{1}{x^2}\right|_{x=1} = -1.$$

Отже,

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{\frac{1}{2} - (-1)}{1 + \frac{1}{2}\cdot(-1)}\right| = 3.$$

Криві утворюють кут $\varphi = \operatorname{arctg} 3$.

7.4. 1) Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^2 + 3t + 1$ (м). Визначити його швидкість у момент $t = 4$ с.

2) Кількість електрики, що протікає через провідник, починаючи з моменту $t = 0$, задано формулою $q(t) = 2t^2 + 3t + 1$ (Кл). Знайти силу струму наприкінці п'ятої секунди.

Розв'язання.

1) Швидкість руху тіла є похідною від пройденого шляху. Отже,

$$v(t) = s'(t) = (t^2 + 3t + 1)' = 2t + 3 \Rightarrow v(4) = 11 \text{ (м/с)}.$$

2) Сила струму є похідною від кількості електрики, що протікає через провідник. Отже,

$$I(t) = q'(t) = (2t^2 + 3t + 1)' = 4t + 3 \Rightarrow I(5) = 23 \text{ (A)}.$$

7.5. Написати рівняння дотичної та нормалі у точці $M_0(2;2)$ до кривої

$$L : \begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2}, \\ y = \dfrac{1}{2t} + \dfrac{3}{2t^2}. \end{cases}$$

***Розв'язання**. [2.5.3, 2.4.5.]*[①]

[*Знаходимо значення параметра t, яке відповідає точці $M_0(2;2)$.***]**

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2}, \\ 2 = \dfrac{1}{2t} + \dfrac{3}{2t^2} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

Точці $(2;2)$ кривої відповідає значення параметра $t = 1$.

[*Обчислюємо похідну $y'_x(1)$.***]**

$$y'_x(t) \overset{[2.4.5]}{=} \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t+6}{2t+4};\ y'_x\ |_{t=1} = \frac{7}{6}.$$

Рівняння дотичної:

$$y = 2 + \frac{7}{6}(x-2);\ 6y - 7x + 2 = 0.$$

Рівняння нормалі:

$$y = 2 - \frac{6}{7}(x-2);\ 7y + 6x - 26 = 0.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

7.6. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у заданій точці:

1) $y = \sqrt{x}, x_0 = 4$; 2) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3, x_0 = -2$.

7.7. У яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до кубічної параболи $y = x^3$ дорівнює 3?

7.8. 1. Скласти рівняння дотичної до параболи $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x - 6$, перпендикулярної до прямої $x + 5y - 10 = 0$.

2. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = x^3$, паралельної прямій $3x - y + 5 = 0$.

7.9. З'ясуйте, під якими кутами перетинаються:

1) парабола $y = x^2$ та пряма $3x - y - 2 = 0$;

2) синусоїда $y = 1 + \sin x$ та пряма $y = 1$;

3) коло $x^2 + y^2 = 8ax$ та крива $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$.

7.10. 1. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = (9t - t^3)$ м. Знайдіть швидкість руху для моментів $t = 1$ с та $t = 2$ с.

2. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \dfrac{t^4}{4} - 4t^3 + 16t^2$. Знайдіть швидкість руху. Коли тіло рухається у зворотному напрямі?

7.11. 1. Напишіть рівняння дотичної та нормалі до еліпса $x = 3\cos t$, $y = 4\sin t$, у точці $M_0\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}; 2\sqrt{2}\right)$.

2. Напишіть рівняння дотичних до кривої $x = t\cos t, y = t\sin t, t \in \mathbb{R}$, у початку координат і в точці, яка відповідає значенню параметра $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

7.12. Складіть диференціальне рівняння кривої, що має характеристичну властивість:

1) квадрат довжини відрізка, який відтинає будь-яка дотична від осі ординат, дорівнює добутку координат точки дотику;

2) будь-яка дотична перетинається з віссю ординат у точці, однаково віддаленої від точки дотику до початку координат.

Відповіді

7.6. 1) $x - 4y + 4 = 0,\ 4x + y - 18 = 0$; 2) $y - 5 = 0,\ x + 2 = 0$.

7.7. $(1;1), (-1;-1)$.

7.8. 1. $5x - y - 38 = 0$; 2. $3x - y \pm 2 = 0$.

7.9. 1) $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}, \alpha_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{13}$; 2) $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{4}, \alpha_2 = \dfrac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{4}, \alpha_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

7.10. 1. 6 м/с; -3 м/с. 2. $v = t^3 - 12t^2 + 32t$, рух у зворотному напрямі від $t = 4$ до $t = 8$.

7.11. 1. $y + \dfrac{4}{3}x - 4\sqrt{2} = 0, y - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{7\sqrt{2}}{8} = 0$. 2. $y = 0, (\pi + 4)x + (\pi - 4)y - \pi^2\dfrac{\sqrt{2}}{4} = 0$.

7.12. 1) $y' = \dfrac{y}{x} \pm \sqrt{\dfrac{y}{x}}$; 2) $y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}\right)$.

8. Похідні вищих порядків

Навчальні задачі

8.1. Знайти похідні вказаного порядку функції f:

1) $f(x) = 5x^4, f'''(x)$; 2) $f(x) = \sin^2 x, f^{(5)}(x)$;

3) $f(x) = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}), f''(x)$.

***Розв'язання*. [2.4.1.]**

1) $f'(x) = 20x^3$; $f''(x) = (20x^3)' = 60x^2$; $f'''(x) = (60x^2)' = 120x$.

2) $f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$; $f''(x) = 2\cos 2x$; $f'''(x) = -4\sin 2x$;

$$f^{(4)}(x) = -8\cos 2x; \quad f^{(5)}(x) = 16\sin 2x.$$

3) $f'(x) = \dfrac{1 + \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$; $f''(x) = -\dfrac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$.

8.2. Знайти похідну:

1) $y^{(100)}, y = (x^2 + 1)\cos 2x$; 2) $y^{(n)}, y = \dfrac{x-3}{x^2 - 3x + 2}$.

***Розв'язання*. [2.4.4.]**

1) **[***Щоб знайти похідну, використовуємо Лейбніцову формулу.***]**

$$u = \cos 2x, v(x) = x^2 + 1, n = 100.$$

$v^{(0)}(x) = x^2 + 1$ $\quad C_{100}^0 = 1$ $\quad u^{(100)}(x) = 2^{100}\cos 2x$

$v'(x) = 2x$ $\quad C_{100}^1 = 100$ $\quad u^{(99)}(x) = 2^{99}\sin 2x$

$v''(x) = 2$ $\quad C_{100}^2 = 4950$ $\quad u^{(98)}(x) = -2^{98}\cos 2x$

$v'''(x) = 0$...

Оскільки

$$u^{(100)}(x) = 2^{100}\cos\left(2x + 50\pi\right) = 2^{100}\cos 2x;$$

$$u^{(99)}(x) = 2^{99}\cos\left(2x + \frac{99\pi}{2}\right) = 2^{99}\sin 2x;$$

$$u^{(98)}(x) = 2^{98}\cos\left(2x + 49\pi\right) = -2^{98}\cos 2x;$$

$$C_{100}^{1} \overset{[1.2.3]}{=} \frac{100\,!}{1\,!\,99\,!} = 100;$$

$$C_{100}^{2} = \frac{100\,!}{2\,!\,98\,!} \overset{[1.2.3]}{=} \frac{100\cdot 99}{1\cdot 2} = 4950.$$

Отже,

$$y^{(100)}(x) = 2^{100}\cos 2x\cdot(x^2+1) + 100\cdot 2^{100}\sin 2x\cdot x - 4950\cdot 2^{99}\cos 2x =$$
$$= 2^{100}\Big((x^2-2474)\cos 2x + 100x\sin 2x\Big).$$

2) Функція означена і диференційовна на $(-\infty;1),(1;2),(2;+\infty)$.

[*Розкладаємо дробово-раціональний вираз на суму елементарних дробів.*]

$$\frac{x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x - B - 2A}{(x-1)(x-2)}.$$

[*У рівних дробів, з рівними знаменниками, повинні бути рівні чисельники. Два многочлена тотожно рівні* (*тобто для всіх значень* x), *якщо вони мають рівні коефіцієнти при однакових степенях.*]

$$x - 3 \equiv (A+B)x - B - 2A \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1, \\ -B - 2A = -3. \end{cases}$$

$$y = \frac{x-3}{x^2-3x+2} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-2}.$$

$$y^{(n)} = 2\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} \overset{[2.4.7]}{=} 2\cdot\frac{(-1)^n n\,!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n\,!}{(x-2)^{n+1}}.$$

8.3. Знайти другу похідну функції $y(x)$, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, t \in [0;2\pi). \end{cases}$$

Розв'язання*. *[2.4.5.]

$$y'(x):\begin{cases} x = a\cos t, t\in[0;2\pi), \\ y'_x(t) = \dfrac{b\cos t}{-a\sin t} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t. \end{cases} \quad y''(x):\begin{cases} x = a\cos t, t\in[0;2\pi), \\ y''_{x^2}(t) = \dfrac{\frac{b}{a}\frac{1}{\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}. \end{cases}$$

8.4. Знайти похідну y'' неявної функції, заданої співвідношенням:

$$y = x + \operatorname{arctg} y.$$

***Розв'язання*.**

[*Знаходимо 1-шу похідну функції, заданої неявно.***]**

$$y - x - \operatorname{arctg} y = 0.$$

$$y' - 1 - \frac{y'}{1+y^2} = 0;$$
$$y'\left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) = 1;$$
$$y' = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} - 1.$$

[*Диференціюємо вираз для* y' *за змінною* x.]

$$y'' = \left(\frac{1}{y^2} - 1\right)' = \underbrace{-\frac{2y'}{y^3}}_{\text{підставляємо вираз для } y'} = -\frac{2}{y^3}\left(\frac{1}{y^2} - 1\right) = \frac{2}{y^3} - \frac{2}{y^5}.$$

8.5. Знайти диференціал 2-го порядку функції $f(x) = \ln(1+x^2)$.

***Розв'язання**. [2.4.3.]*①

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}; \quad f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2};$$
$$d^2 f = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\,dx^2.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

8.6. Знайдіть зазначену похідну:

1) $f(x) = (x+10)^6, f'''(2);$ 2) $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4, f^{\mathrm{IV}}(1);$

3) $f(x) = x^3 \ln x, f^{\mathrm{IV}}(x);$ 4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), f''(x);$

5) $f(x) = xe^x, f^{(n)}(x);$ 6) $f(x) = \ln(ax+b), f^{(n)}(x);$

7) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}, f^{(n)}(x);$ 8) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}, f^{(n)}(x).$

8.7. Знайдіть зазначену похідну функції $y = y(x)$, заданої неявно:

1) $y = \mathrm{tg}(x+y), y''';$ 2) $e^{x+y} = xy, y''.$

8.8. Знайдіть похідну y''_{xx} функції $y = y(x)$, заданої параметрично:

1) $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t;$

2) $x = a(\varphi - \sin\varphi), y = a(1 - \cos\varphi);$

3) $x = \ln t, y = t^2 - 1;$ 4) $x = \arcsin t, y = \ln(1-t^2).$

8.9. Застосуйте Лейбніцову формулу до обчислення похідної:

1) $[(x^2+1)\sin x]^{(20)}$; 2) $[(x^3+2)e^{4x+3}]^{(4)}$;

3) $(e^x \sin x)^{(n)}$; 4) $(x^3 \ln x)^{(5)}$.

8.10. Знайдіть диференціал d^2y функції:

1) $y = 4^{-x^2}$; 2) $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$.

8.11. $y = \ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}, x = \operatorname{tg} t$; виразіть d^2y через: 1) x та dx; 2) t та dt.

Відповіді

8.6. 1) 207360; 2) 360; 3) $\dfrac{6}{x}$; 4) $-\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; 5) $e^x(x+n)$; 6) $\dfrac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$;

7) $(-1)^n \dfrac{n!}{2}\left[\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}} + \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$; 8) $(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.

8.7. 1) $\dfrac{-2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}$; 2) $-\dfrac{y((x-1)^2+(y-1)^2)}{x^2(y-1)^3}$.

8.8. 1) $y''_{xx} : x = a\cos^3 t, y''_{xx}(t) = \dfrac{1}{3a\cos^4 t \sin t}$;

2) $y''_{xx} : x = a(\varphi - \sin\varphi), y''_{xx}(\varphi) = -\dfrac{1}{a(1-\cos\varphi)^2}$; 3) $y''_{xx} : x = \ln t, y''_{xx}(t) = 4t^2$;

4) $y''_{xx} : x = \arcsin t, y''_{xx}(t) = -\dfrac{2}{1-t^2}$.

8.9. 1) $(x^2-379)\sin x - 40x\cos x$; 2) $32e^{4x+3}(8x^3+24x^2+18x+19)$;

3) $e^x \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin\left(x + \dfrac{k\pi}{2}\right)$; 4) $-\dfrac{6}{x^2}$.

8.10. 1) $4^{-x^2} 2\ln 4 \cdot (2x^2 \ln 4 - 1)dx^2$; 2) $\dfrac{4\ln x - 4 - \ln^3 x}{x^2\sqrt{(\ln^2 x - 4)^3}}dx^2$.

8.11. 1) $d^2y = \dfrac{4x}{x^4-1}d^2x - \dfrac{4(1+3x^4)}{(x^4-1)^2}dx^2$; 2) $d^2y = -\dfrac{4}{\cos^2 2t}dt^2$.

9. Правило Бернуллі — Лопіталя

Навчальні задачі

9.1. Перевірити Ролєву теорему для функції $f(x) = x - x^3$ на $[-1;0]$ та $[0;1]$.

***Розв'язання.* [2.6.1.]**

Оскільки $f(x)$ неперервна і диференційовна на $\mathbb{R}$, то вона є неперервною на відрізках $[-1;0]$ та $[0;1]$ і диференційовною в інтервалах $(-1;0)$ та $(0;1)$.

$$f(-1) = f(0) = f(1) = 0.$$

Отже, на $[-1;0]$ та $[0;1]$ виконано всі умови Ролєвої теореми для функції $f(x)$. Знайдімо значення ξ, про яке йдеться у теоремі:

$$f'(x) = 1 - 3x^2.$$

$$f'(\xi) = 1 - 3\xi^2 = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}, \xi_2 = \sqrt{\frac{1}{3}};$$

$$\xi_1 \in (-1;0),\ \xi_2 \in (0;1).$$

9.2. Довести, що для многочлена $P(x) = (x^2+1)(x+3)(x+2)(x-1)$ в інтервалі $(-3;1)$ існує корінь рівняння $P''(x) = 0$.

***Розв'язання*. [2.6.1.]**

Оскільки

$$P(-3) = P(-2) = P(1) = 0,$$

і $P(x)$ — функція диференційовна на $\mathbb{R}$, то для функції $P(x)$ виконано всі умови Ролєвої теореми на $[-3;-2]$ і $[-2;1]$:

$\exists\,\xi_1 \in (-3;-2) : P'(\xi_1) = 0;$

$\exists\,\xi_2 \in (-2;1) : P'(\xi_2) = 0.$

Для функції $P'(x)$ на $[\xi_1;\xi_2] \subset (-3;1)$ виконано всі умови Ролєвої теореми:

$$\exists\zeta \in (\xi_1;\xi_2) \Rightarrow \zeta \in (-3;1) : P''(\zeta) = 0.$$

9.3. Перевірити Лаґранжову теорему для $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ на $[-1;1]$.

***Розв'язання*. [2.6.2.]**

Функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[-1;1]$ і диференційовна в інтервалі $(-1;1)$. Отже, виконано умови Лаґранжової теореми для $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ на $[-1;1]$.

$$f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x};\ f(1) - f(-1) = 2f'(\xi);$$

$$0 = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\xi} \Rightarrow \xi = 0 \in (-1;1).$$

9.4. Довести нерівність

$$\left|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b\right| \le \left|a - b\right|.$$

***Розв'язання*. [2.6.2.]**

Для $a = b$, нерівність виконано. Отже, нехай $a < b$. Тоді для функції $y = \operatorname{arctg} x$ на $[a;b]$ виконано умови Лаґранжової теореми.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\frac{\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b}{a-b} = \frac{1}{1+\xi^2}, \xi \in (a;b).$$

$$\left|\frac{\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b}{a-b}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b\right| \leq \left|a-b\right|.$$

9.5. З'ясувати чи застосовна теорема Коші для функцій $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^3$ на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$?

***Розв'язання**. [2.6.3.]*

Функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і диференційовні на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Але

$$g'(0) = 3x^2 \,|_{x=0} = 0.$$

Невиконання умови теореми призводить до невиконання твердження:

$$\frac{\sin\xi}{3\xi^2} \neq \frac{\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2})^3 - (-\frac{\pi}{2})^3} = 0 \quad \forall\xi \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

9.6. Знайти границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{50} - 2x + 1}{x^{100} - 2x + 1}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x + \sin x}{2x - \sin x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)^{\ln x}$.

***Розв'язання**. [2.6.4.]*①

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} = L;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x - x - 1\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} = L.$$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = L;$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=M;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0=M=L.$$

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{50}-2x+1}{x^{100}-2x+1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=L;$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x^{50}-2x+1)'}{(x^{100}-2x+1)'}=\lim_{x\to1}\frac{50x^{49}-2}{100x^{99}-2}=\frac{24}{49}=L.$$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{2x-\sin x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=L;$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(2x-\sin x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{2-\cos x}-\nexists,$$

тобто правило Бернуллі — Лопіталя не застосовне, але

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{2-\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{2}.$$

5) $\lim\limits_{x\to1-0}(1-x)^{\ln x}=[0^0]=\left|\begin{matrix}\ln x\sim(x-1),\\ x\to1-0\end{matrix}\right|=e^{\lim\limits_{x\to1-0}\ln(1-x)\cdot(x-1)}=$

$$=\exp\left(\lim_{x\to1-0}\frac{\ln(1-x)}{(x-1)^{-1}}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=L.$$

$$\exp\left(\lim_{x\to1-0}\frac{-(1-x)^{-1}}{-(1-x)^{-2}}\right)=e^{\lim\limits_{x\to1-0}(1-x)}=e^0=1=L.$$

Коментар. ① Щоб перетворити вираз на частку при потребі використовують формули:

$$fg=\frac{f}{g^{-1}}=\frac{g}{f^{-1}};\ \ f^g=e^{g\ln f}(f>0);\ \ f-g=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

9.7. Нехай $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$. Доведіть, що всі три корені рівняння $f'(x)=0$ дійсні.

9.8. Доведіть, що рівняння $16x^4-64x+31=0$ не може мати двох різних дійсних коренів у інтервалі $(0;1)$.

9.9. Доведіть, що рівняння $e^{x-1}+x-2=0$, яке має корінь $x=1$ (перевірте!), не має інших дійсних коренів.

9.10. Застосовуючи Лаґранжову формулу для функції $f(x)=\sqrt{3}x^3+3x$ на відрізку $[0;1]$, визначте точку $x=\xi$, що фігурує у формулі.

9.11. Застосовуючи Лаґранжову формулу, доведіть нерівність $e^x>1+x, x\neq 0$.

9.12. Застосовуючи формулу Коші для функцій $f(x)=2x^3+5x+1$ та $g(x)=x^2+4$ на відрізку $[0;2]$, визначте точку $x=\xi$, що фігурує у формулі.

9.13. Користуючись правилом Бернуллі — Лопіталя, знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}+x-2}{x^{50}+x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{4^x-5^x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$;

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$;

6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$;

9) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^n e^{-x})$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right]$;

11) $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

12) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\ln^3 x)$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$;

14) $\lim\limits_{x\to 1+0}\ln x\cdot\ln(x-1)$;

15) $\lim\limits_{x\to\infty}((\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x)$;

16) $\lim\limits_{x\to +0}x^{\sin x}$;

17) $\lim\limits_{x\to +0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$;

18) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{1/x}$;

19) $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x}$;

20) $\lim\limits_{x\to \pi/2-0}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

9.14. Перевірте, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$ існує, але його не можна обчислити за правилом Бернуллі — Лопіталя.

Відповіді

9.10. $\xi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **9.12.** $\xi_1=\dfrac{1}{2},\xi_2=\dfrac{5}{3}$.

9.13. 1) $\dfrac{101}{51}$; 2) $\dfrac{\ln 2-\ln 3}{\ln 4-\ln 5}$; 3) 1; 4) $\dfrac{2}{3\sqrt[6]{5}}$; 5) $-\dfrac{1}{2}$; 6) 0; 7) $-\infty$; 8) $\dfrac{\alpha}{\beta}$; 9) 0; 10) $\dfrac{1}{2}$; 11) $-\dfrac{2}{\pi}$; 12) $+\infty$; 13) 0; 14) 0; 15) 0; 16) 1; 17) 1; 18) 1; 19) $\dfrac{1}{e}$; 20) 1.

10. Тейлорова формула

Навчальні задачі

10.1. Записати формулу Тейлора для нескінченно диференційовної функції $f(x)$ у точці x_0:

1) 2-го порядку із залишковим членом у формі Пеано;

2) 3-го порядку із залишковим членом у формі Лаґранжа.

Розв'язання. ***[2.6.5, 2.6.6.]***

1) $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^3), x\to x_0$.

2) $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4, \xi\in(x_0;x).$$

10.2. Функцію $f(x)$ розвинути за степенями $(x-2)$, якщо:

1) $f(x)=2x^4-5x^3-3x^2+8x+4$;

2) $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ до члена, що містить $(x-2)^3$.

Розв'язання. ***[2.6.5.]***

1) Многочлен має похідні будь-якого порядку:

$$f(2)=0;$$

$$f'(x)=8x^3-15x^2-6x+8,\quad f'(2)=0;$$

$$f''(x)=24x^2-30x-6,\quad f''(2)=30;$$

$$f'''(x)=48x-30,\quad f'''(2)=66;$$

$$f^{(4)}(x) = 48;$$
$$f^{(k)}(2) = 0, k = 5, 6, \ldots.$$
$$f(x) = 15(x-2)^2 + 11(x-2)^3 + 2(x-2)^4.$$

2) $f(x) = \dfrac{x}{1-x} = -1 - \dfrac{1}{x-1}$, $x_0 = 2, n = 3$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k + o\Big((x-2)^3\Big).$$
$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2};\ f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^3};\ f'''(x) = \frac{6}{(x-1)^4}.$$
$$f(2) = -2,\ \ f'(2) = 1;$$
$$f''(2) = -2,\ \ f'''(2) = 6.$$
$$f(x) = -2 + (x-2) - (x-2)^2 + (x-2)^3 + o\Big((x-2)^3\Big).$$

10.3. Розвинути за степенями x функцію $f(x) = e^x \ln(x+1)$ до члена, який містить x^3 включно.

***Розв'язання.* [2.7.5, 2.7.6.]**

[*Записуємо формули Тейлора — Маклорена 3-го порядку для функцій* $f(x) = e^x$ *та* $f(x) = \ln(x+1)$.**]**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$
$$e^x \ln(1+x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) =$$
$$= x + x^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) + x^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + o(x^3) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$
$$e^x \ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

10.4. Обчислити $\sqrt[3]{30}$ з точністю до 10^{-4} за допомогою Тейлорової формули.

***Розв'язання.* [2.7.3, 2.7.9.]**

[*Перетворюємо підкореневий вираз — шукаємо найближчий повний куб.*]

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = \sqrt[3]{27\left(1 + \frac{1}{9}\right)} = 3\sqrt[3]{1 + \frac{1}{9}}.$$

[*Записуємо Тейлорову формулу для функції* $f(x)=(1+x)^{1/3}$ *і залишковий член у Лаґранжовій формі.*]

$$(1+x)^{1/3}=1+\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)...\left(\frac{1}{3}-k+1\right)}_{n\text{ множників}}\frac{x^k}{k!}+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}\cdot\frac{2\cdot5\cdot8...(3n-1)}{3^{n+1}(1+\xi)^{n+\frac{2}{3}}}\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1},\xi\in\left(0;\frac{1}{9}\right).$$

[*Підбираємо такий порядок формули Тейлора, щоб залишковий член за модулем не перевищував заданої похибки.*]

$$\left|3R_1(x)\right|=\frac{2}{3\cdot2!}(1+\xi)^{-\frac{5}{3}}\left(\frac{1}{9}\right)^2<\frac{1}{3^5}>10^{-4};$$

$$\left|3R_2(x)\right|=\frac{2\cdot5}{3^2\cdot3!}(1+\xi)^{-\frac{8}{3}}\left(\frac{1}{9}\right)^3<\frac{5}{3^9}>10^{-4};$$

$$\left|3R_3(x)\right|=\frac{2\cdot5\cdot8}{3^3\cdot4!}(1+\xi)^{-\frac{11}{3}}\left(\frac{1}{9}\right)^4<\frac{10}{3^{12}}<10^{-4}\Rightarrow n=3.$$

[*Обчислюємо шукане значення за формулою Тейлора 3-го порядку, беручи в проміжних обчисленнях один запасний десятковий знак після коми.*]

$$\sqrt[3]{30}\approx3\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{9}\right)^3\right)\approx$$

$$\approx3(1+0,03703-0,00137+0,00008)=3\cdot1,03574=3,10722.$$

$$\sqrt[3]{30}=3,1072\pm10^{-4}.$$

10.5. Обчислити $e^{0,1}$ з точністю до $0,001$.

***Розв'язання**. [2.7.3, 2.7.5.]*

[*Записуємо формулу Тейлора — Маклорена для* e^x *із залишкови членом у Лаґранжовій формі.*]

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},0<\xi<\frac{1}{10}.$$

[*Визначаємо потрібний порядок Тейлорової формули, оцінюючи модуль залишкового члена.*]

$$\left|R_n(x)\right|=\frac{e^\xi(0,1)^{n+1}}{(n+1)!}<\underbrace{\frac{2}{10^{n+1}(n+1)!}}_{\substack{\textit{для зручності}\\ \textit{підсилюємо нерівність}}}<0,001.$$

$$n = 1: \frac{1}{100} > 0,001;$$
$$n = 2: \frac{1}{3000} < 0,001.$$
$$e^{0,1} \approx 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,01}{2!} = 1,0000 + 0,1000 + 0,0050 = 1,105.$$
$$e^{0,1} \approx 1,105 \pm 10^{-3}.$$

10.6. Оцінити похибку, яку допускають, обчислюючи значення $\ln 1,5$ за формулою: $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$.

Розв'язання. ***[2.7.3.]***①
$n = 4$.
$$R_4(x) = \frac{4!\,x^5}{5!(1+\xi)^4}, 0 < \xi < x = 0,5.$$
$$0 < R_4(x) \le \max_{0\le\xi\le 0,5} \frac{1}{5}\frac{(0,5)^5}{(1+\xi)^4} < \frac{(0,5)^5}{5} < 0,01 = \varepsilon.$$
$$\ln 1,5 \approx 0,5 - \frac{1}{2}(0,5)^2 + \frac{1}{3}(0,5)^3 - \frac{1}{4}(0,5)^4 \approx 0,40.$$
$$\ln 1,5 \approx 0,40 \pm 0,01.$$

10.7. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}$, використовуючи формул Тейлора.

Розв'язання. ***[2.7.7.]***
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!} + \frac{o(x^4)}{x^3}\right) = \frac{1}{6}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

10.8. Розвиньте многочлен $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ за степенями двочлена $x - 4$.

10.9. Розвиньте многочлен $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ за степенями двочлена $x + 1$.

10.10. Функцію $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ розвиньте за степенями x, застосовуючи Тейлорову формулу.

10.11. Напишіть Тейлорову формулу 3-го порядку для функції $y = \frac{x}{x-1}$ при $x_0 = 2$ і побудуйте графіки заданої функції та її многочлена Тейлора 3-го степеня.

10.12. Напишіть Тейлорову формулу 3-го порядку для функції $y = \operatorname{tg} x$ при $x_0 = 0$ і побудуйте графіки заданої функції та її многочлена Тейлора 3-го степеня.

10.13. Напишіть формулу Тейлора — Маклорена n-го порядку для функції $y = xe^x$ при $x_0 = 0$.

10.14. Напишіть Тейлорову формулу n-го порядку для функції $y = \sqrt{x}$ при $x_0 = 4$.

10.15. Знайдіть перші три члени розвинення функції $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$ за Тейлоровою формулою при $x_0 = 1$. Обчисліть наближено $f(1,03)$.

10.16. Знайдіть перші три члени розвинення функції

$$f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$$

за Тейлоровою формулою при $x_0 = 2$. Обчисліть наближено $f(2,02)$ та $(1,97)$.

10.17. Застосовуючи наближену формулу $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$, знайдіть $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ й оцініть похибку.

10.18. Обчисліть з абсолютною похибкою, меншою $0,001$, наближене значення:

1) $\sin 1$;
2) $\sqrt{e}$;
3) $\ln 1,05$;
4) $\sqrt[5]{33}$.

10.19. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$;
2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

Відповіді

10.8. $(x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$;
10.9. $(x+1)^3 - 5(x+1) + 8$.
10.10. $x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1$.

10.11. $2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+\dfrac{(x-2)^4}{(1+\theta(x-2))^5}, 0<\theta<1.$

10.12. $\operatorname{tg} x = x+\dfrac{1}{3}x^3+R_3(x).$

10.13. $x+\dfrac{x^2}{1!}+\dfrac{x^3}{2!}+...+\dfrac{x^n}{(n-1)!}+R_n(x).$

10.14. $2+\dfrac{x-4}{4}-\dfrac{(x-4)^2}{64}+\dfrac{(x-4)^3}{512}-...+(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-2)!}{n!(n-1)!2^{4n-2}}(x-4)^n+R_n(x).$

10.15. $1-6(x-1)+(x-1)^2+..., f(1,03)=0,82.$

10.16. $f(x)\approx 321+1087(x-2)+1648(x-2)^2+..., f(2,02)\approx 343,4, f(1,97)=289,9.$

10.17. $0,78, \delta<0,01.$

10.18. 1) $0,842$; 2) $1,648$; 3) $0,049$; 4) $2,012$.

10.19. 1) $-\dfrac{1}{12}$; 2) $\dfrac{1}{3}$.

11. Дослідження функцій за допомогою похідних

Навчальні задачі

11.1. Знайти інтервали монотонності функції:

1) $f(x)=4x^3-21x^2+18x+7;$ 2) $f(x)=\sqrt{8x^2-x^4};$

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e}, & x<e,\\ \dfrac{\ln x}{x}, & x\ge e.\end{cases}$

***Розв'язання**. [2.9.1, 2.9.2, 2.910.]*

1) **[*Крок 1.*** *Визначаємо область означення.***]**
$D(f)=(-\infty;+\infty).$

[*Крок 2.* *Знаходимо критичні точки 1-го порядку: точки, в яких перша похідна функції рівна нулеві,* ∞ *або не існує.*]

$$f'(x)=12x^2-42x+18=12(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}, x_2=3.$$

$$\forall x\in(-\infty;+\infty)\ \exists f'(x), f'(x)\ne\infty.$$

Критичні точки: $x_1=\dfrac{1}{2}, x_2=3.$

[*Крок 3.* *Крок визначаємо знак похідної на кожному інтервалі монотонності.***]**

$$\begin{array}{lccccc} \text{знак } f' & + & & - & & + \\ \text{поведінка } f & \nearrow & \frac{1}{2} & \searrow & 3 & \nearrow \quad x \end{array}$$

[***Крок 4.*** *Застосовуємо достатні умови монотонності.*]

$f\ \nearrow: (-\infty; \dfrac{1}{2}) \cup (3; +\infty);\ f\ \searrow: (\dfrac{1}{2}; 3).$

2) $D(f) = [-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$.

$$f'(x) = \frac{16x - 4x^3}{2\sqrt{8x^2 - x^4}} = \frac{2x}{|x|}\frac{4 - x^2}{\sqrt{8 - x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 : x_1 = -2, x_2 = 2;$$

$$f'(x) = \infty : x_{3,4} = \pm\sqrt{8} \notin D;$$

$$\nexists f'(x) : x = 0.$$

Критичними точками є $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$.

$$\begin{array}{lcccccccccc} f' & & + & & - & & + & & - & & \\ f & -\sqrt{8} & \nearrow & -2 & \searrow & 0 & \nearrow & 2 & \searrow & \sqrt{8} & x \end{array}$$

$f\ \nearrow: (-\sqrt{8}; -2) \cup (0; 2);\ f\ \searrow: (-2; 0) \cup (2; \sqrt{8}).$

3) $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Для $x < e\ \ f'(x) = 0$.

Знайдемо ліву й праву похідні в точці $x = e$:

$$f'_-(e) = \lim_{h\to+0} \frac{f(e-h) - f(e)}{h} = 0;$$

$$f'_+(e) = \lim_{h\to+0} \frac{f(e+h) - f(e)}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{\frac{\ln(e+h)}{e+h} - \frac{1}{e}}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{e\ln(e+h) - e - h}{h(e+h)e} =$$

$$\frac{1}{e^2} \lim_{h\to+0} \frac{e\ln(e+h) - e - h}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{1}{e^2} \lim_{h\to+0} \left(\frac{e}{e+h} - 1\right) = 0.$$

скористалися правилом Бернуллі -- Лопіталя

Отже, $f'(e) = 0$.

Для $x > e\ \ f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

Отже,

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \le e, \\ \dfrac{1 - \ln x}{x^2}, & x > e. \end{cases}$$

$$\forall x > e\ \exists f'(x) < 0.$$

$f = \text{const} : (-\infty; e);\ \ f\ \searrow: (e; +\infty).$

11.2. Знайти екстремуми функції:

1) $y = x^4 - 8x^2 + 12$; 2) $y = x\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}$;

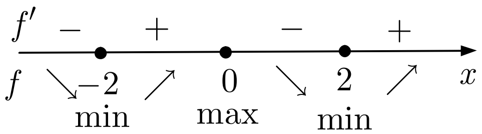
3) $y = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$.

Розв'язання*. *[2.9.4, 2.9.5, 2.9.10.]

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

$$\forall x \in (-\infty; +\infty)\ \exists y' = 4x^3 - 16x.$$
$$y' = 0 : x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2.$$
$$y' \neq \infty, \exists y'\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Критичні точки $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$.

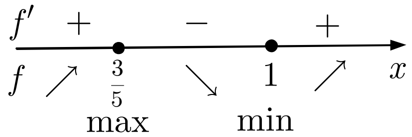


$$y_{\min}(-2) = y_{\min}(2) = -8, y_{\max}(0) = 12.$$

2) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

$$y' = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x-1}} = \frac{5x-3}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$
$$y' = 0 : 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{5}.$$
$$y' = \infty : \sqrt[3]{x-1} = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Критичні точки $x_1 = \dfrac{3}{5}, x_2 = 1$.

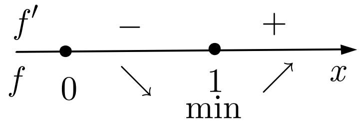


$$y_{\min}(1) = 0, y_{\max}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

3) $D(y) = (0; +\infty)$.

$$\forall x \in D(f)\ \exists y' = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}.$$
$$y' = 0 : x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Критична точка $x = 1$.



$$y_{\min}(1) = \frac{1}{2}.$$

11.3. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = x^4 - 8x^2 + 3, x \in [-1; 2].$$

Розв'язання*. *[2.9.12.] ①

Функція y неперервна на відрізку $[-1; 2]$.

[*Крок 1.* *Знаходимо критичні точки 1-го порядку функції в* $(-1; 2)$.**]**

$$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4).$$
$$y' = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2;$$
$$y' \neq \infty, x \in (-1; 2).$$
$$x_1, x_3 \notin (-1; 2);\ \ x_2 \in (-1; 2).$$

[*Крок 2.* *Обчислюють значення функції у знайдених критичних точках і на кінцях відрізку*.**]**

$y(-1) = -4;\ y(0) = 3;\ y(2) = -13.$

[*Крок 3.* *Серед обчислених значень функції вибирають найбільше та найменше значення функції на відрізку.***]**

$$\max_{[-1,2]} y = y(0) = 3;$$
$$\min_{[-1,2]} y = y(2) = -13.$$

11.4. Довести нерівність $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x, x > 0.$

Розв'язання*. *[2.9.4, 2.9.5.]

Розгляньмо функцію

$$y(x) = \ln(x + 1) - x.$$

І дослідімо її на локальний екстремум.

$$y' = \frac{1}{x + 1} - 1 = \frac{-x}{x + 1} < 0\, \forall x > 0.$$

Функція спадає на $(0; +\infty)$ і отже, своє найбільше значення вона набуває у точці $x = 0 :\ y(0) = 0.$

Звідси випливає, що $y(x) < 0$ або

$$\ln(x + 1) - x < 0\, \forall x > 0.$$

Розгляньмо функцію

$$y(x) = \ln(x + 1) - x + \frac{x^2}{2}.$$

Дослідімо її на локальний екстремум.

$$y'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{x^2}{x+1} > 0 \quad \forall x > 0.$$

Функція зростає на $(0; +\infty)$ і, отже, своє найменше значення набуває у точці $x = 0$: $y(0) = 0$. Звідси випливає, що $y(x) > 0$ або

$$\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} > 0 \ \forall x > 0.$$

11.5. Знайти інтервали опуклості і точки перегину графіка функції $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Розв'язання. ***[2.9.8, 2.9.9, 2.9.11.]***①

[***Крок 1.*** Знаходимо область означення функції.]

$D(f) = (-\infty; +\infty)$.

[***Крок 2***. *Знаходимо критичні точки 2-го порядку функції.*]

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},\ f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 2 = 0; x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$f''(x) = \infty \Rightarrow x \in \varnothing.$$

[***Крок 3.*** *Досліджуємо знак другої похідної в кожному інтервалі.*]

знак f'' $\quad + \quad - \quad +$

поведінка f $\quad \cup \ -\frac{1}{\sqrt{3}} \ \cap \ \frac{1}{\sqrt{3}} \ \cup \quad x$

[***Крок 4.*** *Висновуємо про поведінку функції в кожному інтервалі.*]

Отже, графік функції $y = f(x)$:

опуклий донизу в $\left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$;

опуклий догори в $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Точки перегину — $M\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{3}{4}\right)$.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

11.6. Покажіть, що функція $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ спадає в інтервалі $(-2; 1)$.

11.7. Покажіть, що функція $y = \sqrt{2x - x^2}$ зростає в інтервалі $(0; 1)$ і спадає в інтервалі $(1; 2)$. Побудуйте графік цієї функції.

11.8. Покажіть, що функція:

1) $y = x^3 + x$ скрізь зростає; 2) $y = \operatorname{arctg} x - x$ скрізь спадає.

11.9. Знайдіть інтервали монотонності і точки екстремумів функції:

1) $y = (x-2)^5(2x+1)^4$; 2) $y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$ $(a > 0)$;

3) $y = x - e^x$; 4) $y = x^2 e^{-x}$;

5) $y = \dfrac{x}{\ln x}$; 6) $y = 2x^2 - \ln x$;

7) $y = x - 2\sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$; 8) $y = x + \cos x$;

11.10. Знайдіть найбільше та найменше значення функцій на зазначеному відрізку:

1) $y = x^4 - 2x^2 + 5, [-2; 2]$; 2) $y = x + 2\sqrt{x}, [0; 4]$;

3) $y = \sqrt{100 - x^2}, [-6; 8]$; 4) $y = \sin 2x - x, \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

11.12. Доведіть правдивість нерівностей:

1) $2x \operatorname{arctg} x \ge \ln(1 + x^2)$; 2) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

11.13. Визначте висоту конуса, вписаного в кулю радіусом R, з найбільшою бічною поверхнею.

11.14. Знайдіть висоту прямого колового конуса, описаного навколо кулі радіусом R, найменшого об'єму.

11.15. Покажіть, що графік функції

1) $y = x \operatorname{arctg} x$ скрізь угнутий; 2) $y = \ln(x^2 - 1)$ скрізь опуклий.

11.16. Знайдіть інтервали угнутості й опуклості графіка функції, та точки перегину:

1) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$; 2) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$;

3) $y = \ln(1 + x^2)$; 4) $y = x^4(12\ln x - 7)$;

5) $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$; 6) $y = xe^{2x} + 1$.

Відповіді

11.9. 1) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{11}{18};+\infty\right)\uparrow,\ \left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{11}{18}\right)\downarrow,\ x_{\max}=-\dfrac{1}{2}, x_{\min}=\dfrac{11}{18}$; 2) $\left(-\infty;\dfrac{2a}{3}\right)\cup(a;+\infty)\uparrow,$ $\left(\dfrac{2a}{3};a\right)\downarrow,\ x_{\min}=a, x_{\max}=\dfrac{2a}{3}$; 3) $(-\infty;0)\uparrow,\ (0;+\infty)\downarrow,\ x_{\max}=0$;
4) $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)\downarrow,\ (0;2)\uparrow,\ x_{\max}=2, x_{\min}=0$; 5) $(0;1)\cup(1;e)\downarrow,\ (e;+\infty)\uparrow,\ x_{\min}=e$;
6) $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\downarrow,\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\uparrow,\ x_{\min}=\dfrac{1}{2}$; 7) $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{3};2\pi\right)\downarrow,\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3}\right)\uparrow,\ x_{\max}=\dfrac{5\pi}{3},\ x_{\min}=\dfrac{\pi}{3}$;
8) монотонно зростає.
11.10. 1) $\max\limits_{[-2;2]} y=13, \min\limits_{[-2;2]} y=4$; 2) $\max\limits_{[0;4]} y=8, \min\limits_{[0;4]} y=0$;
3) $\max\limits_{[-6;8]} y=10, \min\limits_{[-6;8]} y=6$; 4) $\max\limits_{[-\pi/2;\pi/2]} y=\dfrac{\pi}{2}, \min\limits_{[-\pi/2;\pi/2]} y=-\dfrac{\pi}{2}$.

11.13. $\dfrac{4R}{3}$. **11.14.** $4R$.

11.16. 1) $\left(-\infty;\dfrac{5}{3}\right)\cap,\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right)\cup$, точка перегину $\left(\dfrac{5}{3};-\dfrac{250}{27}\right)$; 2) $(-\infty;2)\cup,(2;4)\cap,(4;+\infty)\cup$, точки перегину $(2;62),(4;206)$;
3) $(-\infty;-1)\cap,\ (-1;1)\cup,(1;+\infty)\cap$, точки перегину $(\pm1;\ln 2)$;
4) $(0;1)\cap,(1;+\infty)\cup$, точка перегину $(1;-7)$;
5) $(-\infty;-1),(1;+\infty)\cup,(-1;1)\ \cap, M_{1,2}(\pm1;\sqrt[3]{2})$ — точки перегину;
6) $(-\infty;-1)\ \cap,(-1;+\infty)\ \cup, M(-1;1-e^{-2})$ — точка перегину.

12. Побудова графіків функцій

Навчальні задачі

12.1. Знайти рівняння асимптот графіка функції $y=\dfrac{x^3+2}{x^2-4}$.

***Розв'язання.* [2.8.5, 2.8.6.]**
[***Крок 1.*** *Визначаємо область означення.*]
Область означення функції $D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.
[***Крок 2.*** *Досліджують поведінку функції у граничних точках області означення.*]
Дослідімо поведінку функції, коли $x\to-2$:

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x^3+2}{x^2-4}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-2+0}\frac{x^3+2}{x^2-4}=+\infty.$$

Пряма $x=-2$ є вертикальною (двобічною) асимптотою графіка функції.
Дослідімо поведінку функції, коли $x\to2$:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3+2}{x^2-4}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^3+2}{x^2-4}=+\infty.$$

Пряма $x=2$ є вертикальною (двобічною) асимптотою графіка функції.
Дослідімо поведінку функції, коли $x\to-\infty$, шукаючи похилу асимптоту $y=kx+b$:

$$k_{-}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2}{x(x^2-4)}=1,$$
$$b_{-}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+2}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+2-x^3+4x}{x^2-4}\right)=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+2}{x^2-4}\right)=0.$$

Так само, $k_{+}=1, b_{+}=0$.

Отже, $y=x$ є похилою (двобічною) асимптотою графіка функції.

12.2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

1) $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$; 2) $y=(x+1)^{2/3}-(x+2)^{2/3}$;

3) $y=\dfrac{e^{x+2}}{x+2}$; 4) $y=x+\operatorname{arctg}x$;

5) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.

***Розв'язання*. [2.9.13.]**

1) [***Крок 1.*** *Знаходимо область означення функції.*]
$D(f)=(-\infty;-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3};\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};+\infty)$.

[***Крок 2.*** *Встановлюємо можливі симетрії графіка функції.*]
Функція f непарна, оскільки $D(f)$ симетрична та

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{1+(-x)^2}=-\frac{x^3}{1+x^2}=-f(x).$$

Графік функції симетричний щодо початку координат.

[***Крок 3.*** *Визначаємо можливі точки розриву функції і асимптоти графіка функції.*]
Дослідімо поводження функції на межах області означення — в околах точок $x=\pm\sqrt{3}$ та $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty;$$
$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty,\quad \lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty.$$

Точки $x=\pm\sqrt{3}$ — точки розриву 2-го роду (нескінченного). Прямі $x=-\sqrt{3}$ та $x=\sqrt{3}$ — двобічні вертикальні асимптоти.
Шукаємо похилі асимптоти $y=kx+b$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=-1;$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{3-x^2}=0.$$

Пряма $y=-x$ — двобічна похила асимптота.
[***Крок 4.*** *За допомогою першої похідної функції визначаємо інтервали монотонності і точки екстремуму.*]

$$y'=\frac{3x^2(3-x^2)+2x^4}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}.$$
$$y'=0\Rightarrow x=0, x=\pm3;$$
$$y'=\infty\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}.$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
y' & - & & + & & + & & + & & + & & - & \\
y & \searrow & -3 & \nearrow & -\sqrt{3} & \nearrow & 0 & \nearrow & \sqrt{3} & \nearrow & 3 & \searrow & x \\
 & & \text{min} & & & & & & & & \text{max} & &
\end{array}$$

У точці $x=3$ функція f досягає максимуму

$$y_{\max}=y(3)=-\frac{9}{2},$$

а в точці $x=-3$ функція досягає мінімуму

$$y_{\min}=y(-3)=\frac{9}{2}.$$

[***Крок 5.*** *За допомогою другої похідної функції визначаємо інтервали опуклості функції і точки перегину.*]

$$y''=\frac{(18x-4x^3)(3-x^2)^2-(9x^2-x^4)2(3-x^2)(-2x)}{(3-x^2)^4}=\frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}.$$

$$y'' = 0, x \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow x = 0;$$
$$y'' = \infty, x \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow x = \sqrt{3}.$$

$$\begin{array}{ccccccccc} y'' & + & & - & & + & & - & \\ y & \cup & -\sqrt{3} & \cap & 0 & \cup & \sqrt{3} & \cap & x \\ & & & & \text{т. перегину} & & & & \end{array}$$

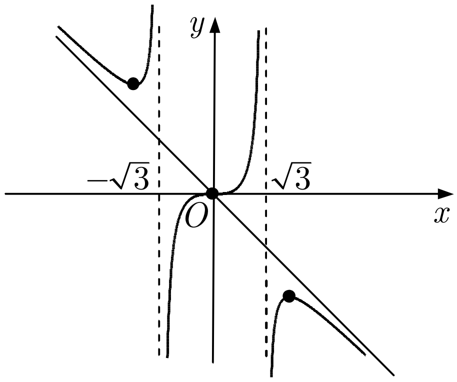


Рис. до зад. 12.2.1)

Точка $O(0; 0)$ є точкою перегину функції.

[***Крок 6.*** *Знаходять можливі точки перетину графіка функції з осями координат.*]

[***Крок 7.*** *Будуємо графік функції* $y = f(x)$.]

2) 1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. $f(-x) = (-x+1)^{2/3} - (-x+2)^{2/3} \neq \pm f(x)$.

3. $y = kx + b$:

$$k_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+1)^{2/3} - (x+2)^{2/3}}{x} = 0;$$
$$b_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \left[(x+1)^{2/3} - (x+2)^{2/3} \right] =$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+1)^2 - (x+2)^2}{(x+1)^{4/3} + (x+1)^{2/3}(x+2)^{2/3} + (x+2)^{4/3}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3x}{3x^{4/3}} = 0;$$

$y = 0$ — горизонтальна асимптота.

4. $y' = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{(x+2)^{1/3} - (x+1)^{1/3}}{(x+1)^{1/3}(x+2)^{1/3}} \right)$.

$$y' = 0 \Rightarrow (x+2)^{1/3} = (x+1)^{1/3} \Rightarrow x \in \varnothing;$$
$$y' = \infty \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2.$$

$$\begin{array}{cccccc} y' & + & & - & & + \\ y & \nearrow & -2 & \searrow & -1 & \nearrow \quad x \\ & & \max & & \min & \end{array}$$

$y_{\min}(-1) = -1; y_{\max}(-2) = 1$.

5. $y'' = -\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{(x+2)^{4/3} - (x+1)^{4/3}}{(x+1)^{4/3}(x+2)^{4/3}} \right)$.

$$y'' = 0 \Rightarrow (x+2)^{4/3} = (x+1)^{4/3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2 = x+1, \\ x+2 = -x-1 \end{array} \right. \Rightarrow x = -\frac{3}{2}.$$
$$y'' = \infty \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2.$$

y''	$+$		$+$		$-$		$-$	
y	$\cup$	-2	$\cup$	$-\frac{3}{2}$	$\cap$	-1	$\cap$	x

т. перегину

$y\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 0.$

6. $y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}.$

$x = 0 \Rightarrow y = 1 - \sqrt[3]{4} \approx -0,58.$

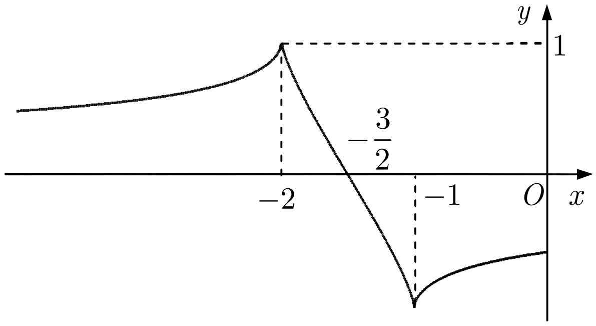


Рис. до зад. 12.1.2)

3) 1. $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty).$

2. $y(-x) = \dfrac{e^{-x+2}}{-x+2} \neq \pm y(x).$

3. $x \to -\infty : y = kx + b :$

$$k_- = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x+2}}{x(x+2)} = 0;$$
$$b_- = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x+2}}{x+2} = 0.$$

$x \to +\infty : y = kx + b :$

$$k_+ = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+2}}{x(x+2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+2}}{2} = +\infty.$$

$y = 0$ — ліва горизонтальна асимптота.

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{e^{x+2}}{x+2} = -\infty;$$
$$\lim_{x \to -2+0} \frac{e^{x+2}}{x+2} = +\infty.$$

$x = -2$ — вертикальна асимптота.

4. $y' = \dfrac{e^{x+2}(x+1)}{(x+2)^2}.$

$$y' = 0 \Rightarrow x = -1;$$
$$y' = \infty \Rightarrow x = -2.$$

$$\begin{array}{cccccc} y' & - & & - & & + \\ y & \searrow & -2 & \searrow & \underset{\min}{-1} & \nearrow \quad x \end{array}$$

$$y(-1) = e \approx 2,71.$$

5. $y'' = \dfrac{e^{x+2}(x^2 + 2x + 2)}{(x+2)^3}$.

$$y'' = 0 \Rightarrow x \in \varnothing;$$

$$y'' = \infty \Rightarrow x = -2.$$

$$\begin{array}{cccc} y'' & - & & + \\ y & \cap & -2 & \cup \quad x \end{array}$$

6. $y \neq 0, x \neq 0$.

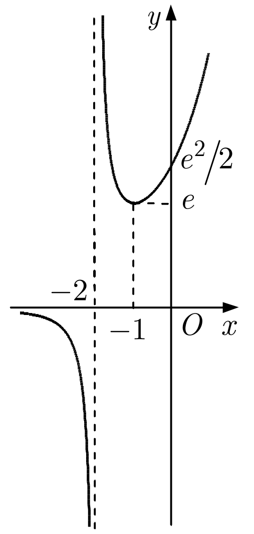


Рис. до зад. 12.2.3)

4) 1. $D(y) = \mathbb{R}$.

2. $y(-x) = -x - \operatorname{arctg} x = -y(x) \ \ \forall x \in D(f)$.

Графік функції симетричний щодо початку координат.

3. $x \to -\infty : y = kx + b :$

$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = 1;$$

$$b_- = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

$y = x - \dfrac{\pi}{2}$ — ліва похила асимптота.

$y = x + \dfrac{\pi}{2}$ — права похила асимптота.

4. $y' = 1 + \dfrac{1}{1+x^2} > 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow y \uparrow$ на $\mathbb{R}$.

5. $y'' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 0;$$

$$y'' = \infty \Rightarrow x \in \varnothing.$$

$$\begin{array}{cccc} y'' & + & & - \\ y & \cup & 0 & \cap \quad x \end{array}$$

6. $y(0) = 0$.

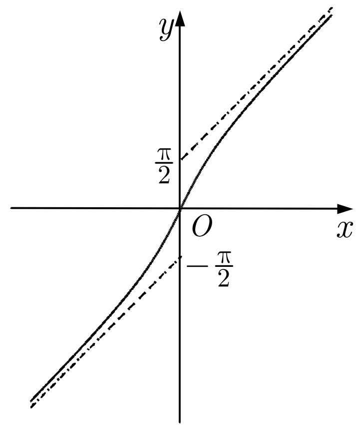


Рис. до зад. 12.2.4)

5) 1. $D(y) = \mathbb{R}$.

2. $y(-x) = \dfrac{1}{x^2+1} = y(x) \ \ \forall x \in D(y)$.

Графік функції симетричний щодо осі Oy.

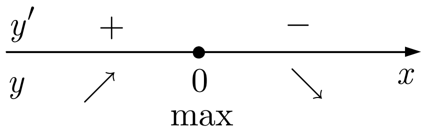
3. $x \to \pm\infty, y = kx + b$:

$$k_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x(x^2+1)} = 0;$$
$$b_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

$y = 0$ — горизонтальна асимптота.

4. $y' = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

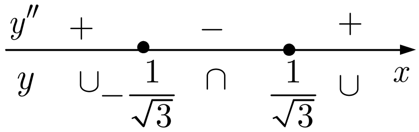
$$y' = 0 \Rightarrow x = 0;$$
$$y' = \infty \Rightarrow x \in \varnothing.$$



$y(0) = 1$.

5. $y'' = 2\dfrac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}$.

$$y'' = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}};$$
$$y'' = \infty \Rightarrow x \in \varnothing.$$



$y(0) = 1, y\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{3}{4}$.

6. $y(0) = 1, y \neq 0$.

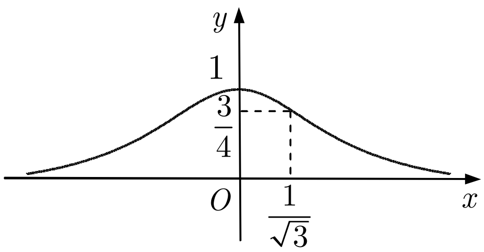


Рис. 12.2.5)

12.3. Дослідити астроїду, задану рівняннями $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ і побудувати її.

Розв'язання. ①

Функції $\cos^3 t$ та $\sin^3 t$ означенні для будь-яких значень t. Але оскільки ці функції періодичні з періодом 2π, досить розглянути проміжок $t \in [0; 2\pi)$.

Оскільки $x \in [-a; a]$ та $y \in [-a; a]$, то крива асимптот не має.

Знайдімо

$$y'_x(t) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t.$$

Звідси критичні точки 1-го порядку:

$$y'_x(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = \pi;$$

$$y'_x(t) = \infty \Rightarrow t_3 = \frac{\pi}{2}, t_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

Знайдімо

$$y''_{x^2}(t) = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

Знайдімо критичні точки 2-го порядку:

$$y''_{x^2}(t) \neq 0;$$

$$y''_{x^2}(t) = \infty \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = \frac{\pi}{2}, t_3 = \pi, t_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

Побудуймо таблицю значень змінних t, x та y, а також знаків першої та другої похідних.

t	0	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	t	π	$\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$
x	a		0		x	$-a$		0	
y'	0	$-$	∞	$+$	y'	0	$-$	∞	$+$
y''	∞	$+$	∞	$+$	y''	∞	$-$	∞	$-$
y	0	$\searrow\cup$	$y_{\max} = a$	$\nearrow\cup$	y	0	$\searrow\cap$	$y_{\min} = -a$	$\nearrow\cap$

На підставі дослідження будуймо астроїду.

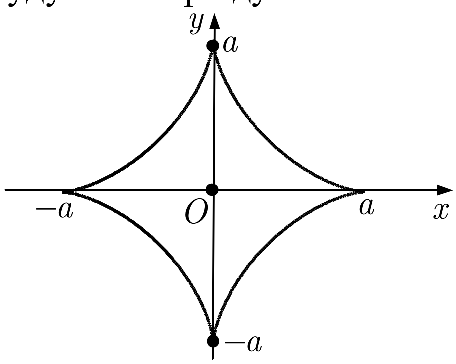


Рис. до зад. 12.3

Коментар. ① Дослідження кривої, заданої параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in T,$$

де функції φ та ψ двічі диференційовні, провадять за схемою:

1. Встановлюють можливі симетрії кривої.
2. Визначають асимптоти кривої. А, саме, шукають такі значення t:

або $x \to \infty$, або $y \to \infty$, або $x \to \infty, y \to \infty$.

3. За допомогою першої похідної функції визначають інтервали монотонності і точки екстремуму.
4. За допомогою другої похідної функції визначають інтервали опуклості функції і точки перегину.
5. Знаходять можливі точки перетину кривої з осями координат.
6. Будують криву за встановленою інформацією.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

12.4. Перевірте, що пряма $y = 2x + 1$ є асимптотою лінії $y = 2x + 1 + \dfrac{1}{x^3}$.

12.5. Знайдіть асимптоти графіка функції:

1) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$; 2) $y = \ln \dfrac{x + 1}{x - 2}$;

3) $y = xe^x$; 4) $y = xe^{2/x} + 1$;

5) $y = x \operatorname{arctg} 2x$. 6) $y = 2x + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2}$;

7) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$; 8) $y = x \ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$.

12.6. Повністю дослідіть функцію і побудуйте її графік:

1) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$; 2) $y = e^{-x^2}$;

3) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; 4) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

12.7. Повністю дослідіть функцію і побудуйте її графік:

1) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$; 2) $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$;

3) $y = \sqrt[3]{(x + 1)^2} + \sqrt[3]{(x - 1)^2}$; 4) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}}$;

5) $y = xe^{-x}$; 6) $y = x^2 e^{-x}$;

7) $y = \dfrac{e^{-1/x}}{x}$; 8) $y = (2x - 1)e^{2/x}$;

9) $y = \dfrac{1}{x \ln x}$; 10) $y = x^2 \ln x$;

11) $y = x + \sin x$; 12) $y = x - 2\operatorname{arctg} x$;

12.8. Побудуйте циклоїду, задану рівняннями:

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$$

Відповіді

12.5. 1) $x = -1$ — вертикальна асимптота, $y = x + 2$ — похила асимптота;
2) $x = -1$ — ліва вертикальна асимптота, $x = 2$ — права вертикальна асимптота;
3) $y = 0$ — ліва горизонтальна асимптота;
4) $x = 0$ — права вертикальна асимптота, $y = x + 3$ — похила асимптота;
5) $y = -\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}$ — ліва похила асимптота, $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}$ — права похила асимптота;
6) $y = 2x \pm \frac{\pi}{2}$ — ліва і праві похилі асимптоти; 7) $y = x - \frac{1}{3}$ — похила асимптота;
8) $x = -\frac{1}{e}$ — права вертикальна асимптота, $y = x + \frac{1}{e}$ — права похила асимптота.

12.6. 1) рис. до зад. 12.6.1); 2)) рис. до зад. 12.6.2); 3)) рис. до зад. 12.6.3); 4) рис. до зад. 12.6.4).

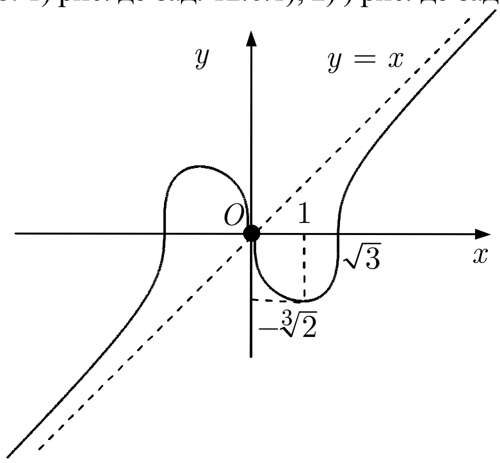


Рис. до зад. 12.6.1)

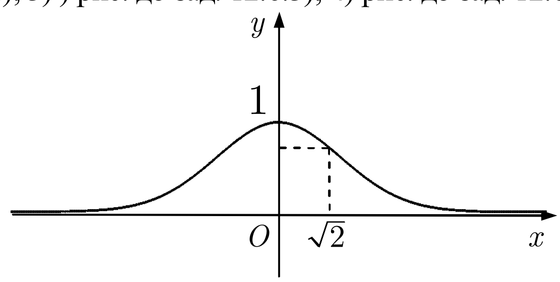


Рис. до зад. 12.6.2)

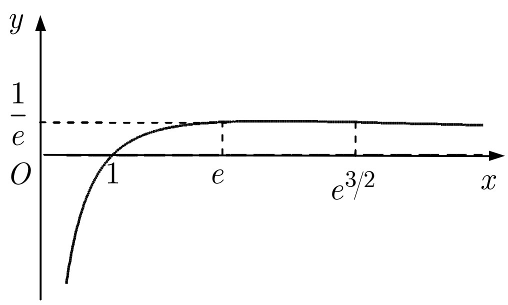


Рис. до зад. 12.6.3)

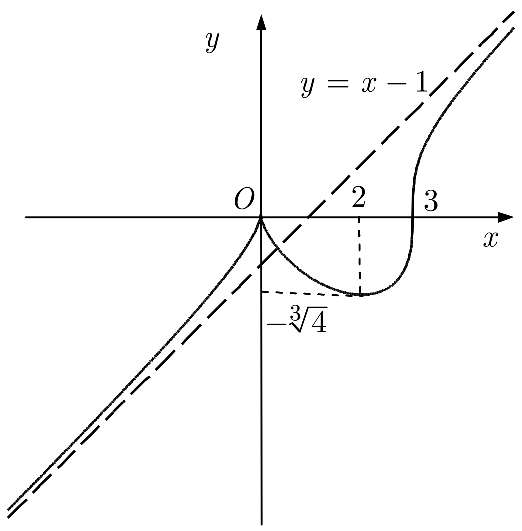


Рис. до зад. 12.6.4)

12.7. 1) $y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{2}, y_{\min} = y(-1) = -\dfrac{1}{2},$ $\left(-\sqrt{3}; -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right), (0;0)$ та $\left(\sqrt{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ — точки перегину, $y = 0$ — асимптота; 2) $y_{\min} = y(0) = 1,$ $x = \pm 1, y = 0$ — асимптоти;

3) $y_{\max} = y(0) = 2, y_{\min} = y(\pm 1) = \sqrt[3]{4};$

4) $y_{\max} = y(0) = 0,$ $y_{\min} = y(2) = \sqrt[3]{16},$ $(-\sqrt[3]{4}; -\sqrt[3]{2})$ — точка перегину, $x = \sqrt[3]{4}, y = x$ — асимптоти;

5) $y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{e}, \left(2; \dfrac{2}{e^2}\right)$ — точка перегину, $y = 0$ — асимптота;

6) $y_{\max} = y(2) = \dfrac{4}{e^2},$ $y_{\min} = y(0) = 0,$ $x = 2 \pm \sqrt{2}$ — абсциси точок перегину, $y = 0$ — асимптота;

7) $y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{e}, x = 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ — абсциси точок перегину, $x = 0$ — ліва асимптота, $y = 0$ — асимптота;

8) $(1; e^2)$ — точка перегину, $x = 0$ — права асимптота, $y = 2x + 3$ — асимптота.

9) $y_{\max} = y\left(\dfrac{1}{e}\right) = -e,$ $x = 1$ — асимптота, $x = 0$ та $y = 0$ — праві асимптоти;

10) $y_{\min} = y\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}, \left(\dfrac{1}{e\sqrt{e}}; -\dfrac{3}{2e^3}\right)$ — точка перегину;

11) $(k\pi; k\pi), k \in \mathbb{Z},$— точки перегину;

12) $y_{\max} = y(-1) = \dfrac{\pi}{2} - 1, y_{\min}(1) = 1 - \dfrac{\pi}{2},$ $(0;0)$ — точка перегину, $y = x \pm \pi$ — асимптоти.

12.8. Графік повторюється з періодом $T = 2\pi,$ $y_{\max}(\pi a) = 2a, y_{\min}(0) = y_{\min}(2\pi a) = 0.$

Розділ 3. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

13. Інтегрування внесенням під знак диференціала

Навчальні задачі

13.1. Знайти:

1) $\int x^3 dx$;
2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$;
3) $\int \frac{dx}{x^2+3}$;
4) $\int \frac{dx}{x^2-4}$;
5) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$;
6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$;
7) $\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$.

***Розв'язання**. [3.3, 3.2.6.]*[①]

1) **[***У формулі [3.3.2] покладаємо* $\alpha = 3$ **]**:

$$\int x^3 dx \underset{\alpha=3}{\overset{[3.3.2]}{=}} = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C.$$

[*Перевіряємо диференціюванням правильність інтегрування.***]**

$$\left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3.$$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2} dx \underset{\alpha=-1/2}{\overset{[3.3.2]}{=}} \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = 2\sqrt{x} + C.$

3) $\int \frac{dx}{x^2+3} \underset{a=\sqrt{3}}{\overset{[3.3.15]}{=}} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

4) $\int \frac{dx}{x^2-4} \underset{a=2}{\overset{[3.3.16]}{=}} \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} \underset{a=\sqrt{5}}{\overset{[3.3.14]}{=}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} \underset{a=2}{\overset{[3.3.16]}{=}} \ln\left|x + \sqrt{2+x^2}\right| + C.$

7) $\int \frac{d(\sin x)}{\sin x} \underset{u=\sin x}{=} \underbrace{\int \frac{du}{u}}_{\text{цей крок виконують усно}} \overset{[3.3.1]}{\underset{[3.2.6]}{=}} = \ln\left|u\right| = \ln\left|\sin x\right| + C.$

Коментар. ① Для знаходження первісних функцій використовують основну таблицю інтегралів та правила інтегрування.
Правильність інтегрування перевіряють диференціюванням:

$$(F(x)+C)' = f(x).$$

13.2. Знайти безпосереднім інтегруванням:

1) $\int \frac{x^2+3\sqrt{x}-2}{x^3}dx;$ 2) $\int \operatorname{tg}^2 x dx;$

3) $\int \frac{1}{x^4+x^2}dx;$ 4) $\int a^x e^x dx;$

5) $\int (\arcsin x + \arccos x)dx;$ 6) $\int \frac{dx}{4+5x^2};$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}.$

Розв'язання*. *[3.2.3–3.2.6, 3.3.] ①

1) $$\int \frac{x^2+3\sqrt{x}-2}{x^3}dx = \int\left(\frac{1}{x}+3x^{-5/2}-2x^{-3}\right)dx \overset{[3.2.4,3.2.5]}{=}$$
$$= \int\frac{dx}{x} + 3\int x^{-5/2}dx - 2\int x^{-3}dx \overset{[3.3.1,3.3.2]}{=}$$
$$= \ln\left|x\right| + 3\frac{x^{-5/2+1}}{-5/2+1} - 2\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C =$$
$$= \ln\left|x\right| + 3\frac{x^{-3/2}}{-3/2} - 2\frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln\left|x\right| - \frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + C.$$

2) $$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx \overset{[3.2.5]}{=} \int\frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx \overset{[3.2.3,3.3.7]}{=} \operatorname{tg} x - x + C.$$

3) $$\int \frac{1}{x^4+x^2}dx = \int\frac{(1+x^2)-x^2}{x^4+x^2}dx = \int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx \overset{[3.2.5]}{=}$$
$$= \int\frac{dx}{x^2} - \int\frac{dx}{x^2+1} \overset{[3.3.2,3.3.15]}{=} \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{1}\operatorname{arctg}\frac{x}{1} + C = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C.$$

4) $\int a^x e^x dx = \int (ae)^x dx \overset{[3.3.4]}{=} \dfrac{(ae)^x}{\ln a + 1} + C.$

5) $\int (\arcsin x + \arccos x) dx = \int \dfrac{\pi}{2} dx = \dfrac{\pi}{2} x + C.$

6) $\int \dfrac{dx}{4 + 5x^2} \overset{[3.2.4]}{=} \dfrac{1}{5} \int \dfrac{dx}{x^2 + 4/5} \underset{a=2/\sqrt{5}}{\overset{[3.3.15]}{=}}$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}}{2} x\right) + C = \frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}x}{2} + C.$$

7) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3 - 2x^2}} \overset{[3.2.4]}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \int \dfrac{dx}{\sqrt{3/2 - x^2}} \underset{a=\sqrt{3/2}}{\overset{[3.3.14]}{=}} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{\dfrac{2}{3}} x + C.$

Коментар. ① Метод безпосереднього інтегрування полягає у використанні таблиці інтегралів, властивостей лінійності та інваріантності невизначеного інтеграла.

Інтегруючи алгебричну суму функцій, дістають кілька довільних сталих, але в результаті пишуть лише одну сталу — їхню алгебричну суму.

13.3. Знайти інтеграл внесенням під знак диференціала:

1) $\int (2x+1)^{10} dx;$ 2) $\int \sqrt[3]{(5x+2)^5} dx;$

3) $\int (x^2 + 4)^6 2x dx;$ 4) $\int \sin^4 x \cos x dx;$

5) $\int \dfrac{\operatorname{arctg}^3 x}{1 + x^2} dx;$ 6) $\int \dfrac{dx}{x \ln^3 x};$

7) $\int \dfrac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}};$ 8) $\int \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$

9) $\int \dfrac{\sin x}{\sqrt{3 - \cos x}} dx;$ 10) $\int \dfrac{dx}{2x + 7};$

11) $\int \dfrac{e^x}{e^x + 1} dx;$ 12) $\int \dfrac{dx}{x \ln x}.$

Розв'язання. ***[3.4.1, 3.4.4, 3.3.1, 3.3.2.]***

1) $\int (2x+1)^{10} dx = \left| dx = \dfrac{1}{2} d(2x+1) \right| = \int (2x+1)^{10} \cdot \dfrac{1}{2} d(2x+1) =$

$$= \frac{1}{2} \int (2x+1)^{10} d(2x+1) = \frac{1}{2} \frac{(2x+1)^{11}}{11} + C.$$

2) $$\int \sqrt[3]{(5x+2)^5}dx = \left| dx = \frac{1}{5}d(5x+2) \right| = \frac{1}{5}\int (5x+2)^{5/3}d(5x+2) =$$
$$= \frac{1}{5}\frac{(5x+2)^{8/3}}{8/3} + C = \frac{3}{40}\sqrt[3]{(5x+2)^8} + C.$$

3) $$\int \underbrace{(x^2+4)^6}_{u^6}\underbrace{2x}_{u'}\,dx = \left| d(x^2+4) = 2xdx \right|$$
$$= \int (x^2+4)^6 d(x^2+4) = \frac{(x^2+4)^7}{7} + C.$$

4) $$\int \sin^4 x \cos x dx = \left| d(\sin x) = \cos x dx \right| =$$
$$= \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

5) $$\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx = \left| d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{x^2+1} \right| =$$
$$= \int \operatorname{arctg}^3 x d(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4} + C.$$

6) $$\int \frac{dx}{x\ln^3 x} = \left| \frac{dx}{x} = d(\ln x) \right| = \int \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} =$$
$$= \int \ln^{-3} x d(\ln x) = \frac{\ln^{-2} x}{-2} + C = -\frac{1}{2\ln^2 x} + C.$$

7) $$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| xdx = -\frac{1}{2}d(1-x^2) \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

8) $$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) \right| =$$
$$= \int \arcsin x d \arcsin x = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C.$$

9) $$\int \frac{\sin x}{\sqrt{3-\cos x}}dx = \left| d(3-\cos x) = \sin x dx \right| =$$
$$= \int \frac{d(3-\cos x)}{\sqrt{3-\cos x}} = 2\sqrt{3-\cos x} + C.$$

10) $$\int \frac{dx}{2x+7} = \left| d(2x+7) = 2dx \right| = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+7)}{2x+7} = \frac{1}{2}\ln\left|2x+7\right| + C.$$

11) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1)+C.$

12) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \left|\frac{dx}{x} = d(\ln x)\right| = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln\left|\ln x\right| + C.$

13.4. Знайти інтеграл внесенням під знак диференціала:

1) $\int e^{5x+1}dx;$ 2) $\int e^{2x^2+1}xdx;$

3) $\int e^{\sin x}\cos xdx;$ 4) $\int \frac{2^{\operatorname{tg} x}dx}{\cos^2 x}.$

***Розв'язання**. [3.4.1, 3.4.4, 3.3.3, 3.3.4.]*

1) $\int e^{5x+1}dx = \frac{1}{5}\int e^{5x+1}d(5x+1) = \frac{1}{5}e^{5x+1}+C.$

2) $\int e^{2x^2+1}xdx = \frac{1}{4}\int e^{2x^2+1}d(2x^2+1) = \frac{1}{4}e^{2x^2+1}+C.$

3) $\int e^{\sin x}\cos xdx = \int e^{\sin x}d(\sin x) = e^{\sin x}+C.$

4) $\int \frac{2^{\operatorname{tg} x}dx}{\cos^2 x} = \int 2^{\operatorname{tg} x}d(\operatorname{tg} x) = \frac{2^{\operatorname{tg} x}}{\ln 2}+C.$

13.5. Знайти інтеграл внесенням під знак диференціала:

1) $\int \sin 3xdx;$ 2) $\int \cos x^2\cdot xdx;$

3) $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x};$ 4) $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}.$

***Розв'язання**. [3.4.1, 3.4.4, 3.3.5–3.3.8.]*

1) $\int \sin 3xdx = \frac{1}{3}\int \sin 3xd(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C.$

2) $\int \cos x^2\cdot xdx = \frac{1}{2}\int \cos x^2 d(x^2) = \frac{1}{2}\sin x^2 + C.$

3) $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x} = \int \frac{d(e^x)}{\cos^2 e^x} = \operatorname{tg} e^x + C.$

4) $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)} = \int \frac{d(\ln x)}{\sin^2(\ln x)} = -\operatorname{ctg}(\ln x)+C.$

13.6. Знайти інтеграл внесенням під знак диференціала:

1) $\int \frac{dx}{x^2+8x+25};$ 2) $\int \frac{dx}{2x^2+3};$

3) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+1}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x}}$.

Розв'язання. ***[3.4.1, 3.4.4, 3.3.14, 3.3.16.]***

1) $$\int \frac{dx}{x^2+8x+25} = \int \frac{d(x+4)}{(x+4)^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{3} + C.$$

2) $$\int \frac{dx}{2x^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3/2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}x + C.$$

3) $$\int \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x})}{e^{4x}+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^{2x} + C.$$

4) $$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x^2+4x+4)}} =$$

$$= \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{4-(x+2)^2}} = \arcsin\frac{x+2}{2} + C.$$

13.7. Знайти інтеграл внесенням під знак диференціала:

1) $\int \frac{dx}{7-9x^2}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{23x^2-14}}$;

3) $\int \frac{x^3}{1-x^8}\,dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x-1}}$.

Розв'язання. ***[3.4.1, 3.4.4, 3.3.13, 3.3.15.]***

1) $$\int \frac{dx}{7-9x^2} = -\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2-7/9} =$$

$$= -\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}}\ln\left|\frac{x-\frac{\sqrt{7}}{3}}{x+\frac{\sqrt{7}}{3}}\right| + C = -\frac{1}{6\sqrt{7}}\ln\left|\frac{3x-\sqrt{7}}{3x+\sqrt{7}}\right| + C.$$

2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{23x^2-14}} = \frac{1}{\sqrt{23}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-14/23}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{23}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-14/23}\right| + C.$$

3) $$\int \frac{x^3}{1-x^8}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{x^8-1} = -\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^4-1}{x^4+1}\right| + C.$$

4) $$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+1)-1-\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2-\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left| x+1+\sqrt{x^2+2x-\frac{1}{3}} \right| + C.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

13.8. Знайдіть безпосереднім інтегруванням:

1) $\int \left(3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$;
2) $\int \left(4x^3 + \frac{1}{x^2} - 7\sqrt[4]{x^3}\right) dx$;

3) $\int \frac{\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}} dx$;
4) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$;

5) $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;
6) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$;

7) $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$;
8) $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx$;

9) $\int \frac{x^4}{1-x^2} dx$;
10) $\int \frac{x^6}{x^2-1} dx$.

13.9. Знайдіть, користуючись інваріантністю формул інтегрування:

1) $\int \sin x d(\sin x)$;
2) $\int \operatorname{tg}^3 x d(\operatorname{tg} x)$;

3) $\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$;
4) $\int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x}$;

5) $\int e^{\sin x} d(\sin x)$;
6) $\int \frac{d(e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

13.10. Знайдіть внесенням під знак диференціала:

1) $\int (x+1)^{15} dx$;
2) $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$;

3) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx$;
4) $\int \sqrt{8-2x} dx$;

5) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx;$ 6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}};$

7) $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}dx;$ 8) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{4+x^5}};$

9) $\int \sin^3 x\cos xdx;$ 10) $\int \frac{\sin xdx}{\cos^2 x};$

11) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx;$ 12) $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2 dx}{1+x^2};$

13) $\int \cos(1-2x)dx;$ 14) $\int \sin(2x-3)dx;$

15) $\int e^{1/x}\frac{dx}{x^2};$ 16) $\int e^{\sin x}\cos xdx;$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}};$ 18) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}};$

19) $\int \frac{dx}{1+9x^2};$ 20) $\int \frac{dx}{2x^2+9};$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}};$ 22) $\int \frac{xdx}{x^4+1};$

23) $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ 24) $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx;$

25) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3};$ 26) $\int \frac{dx}{x^2-2x-3};$

27) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x+9x^2}};$ 28) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}.$

13.11. Знайдіть таку функцію f, що:

1) $f'(x)=x^2+4x+1, f(-1)=1;$

2) $f'(x)=\sin x+\cos x, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2.$

Відповіді

13.8. 1) $x^3-\ln|x|+\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$; 2) $x^4-\dfrac{1}{x}-4\sqrt[4]{x^7}+C$;3) $\ln\left|\dfrac{x+\sqrt{x^2+3}}{x+\sqrt{x^2-3}}\right|+C$;

4) $\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C$; 5) $x+\cos x+C$; 6) $C-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x$; 7) $3x-\dfrac{2\cdot 1,5^x}{\ln 1,5}+C$;

8) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\ln\dfrac{a}{b}-2x+\left(\dfrac{b}{a}\right)^x\ln\dfrac{b}{a}+C$; 9) $-x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C$;

10) $\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^3}{3}+x+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$.

13.10. 1) $\dfrac{(x+1)^{16}}{16}+C$; 2) $C-\dfrac{1}{8(2x-3)^4}$; 3) $C-\dfrac{5}{33}(8-3x)^{11/5}$; 4) $C-\dfrac{\sqrt{(8-2x)^3}}{3}$;

5) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$; 6) $\sqrt{x^2+1}+C$; 7) $\dfrac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+C$; 8) $\dfrac{2}{5}\sqrt{4+x^5}+C$;

9) $\dfrac{1}{4}\sin^4x+C$; 10) $\dfrac{1}{\cos x}+C$; 11) $\dfrac{2}{3}\sqrt{\ln^3x}+C$; 12) $\dfrac{\operatorname{arctg}^3x}{3}+C$; 13) $C-\dfrac{1}{2}\sin(1-2x)$;

14) $C-\dfrac{1}{2}\cos(2x-3)$; 15) $C-e^{1/x}$; 16) $e^{\sin x}+C$; 17) $\dfrac{1}{5}\arcsin 5x+C$; 18) $\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3x}{2}+C$;

19) $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}3x+C$; 20) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{3}x+C$; 21) $\dfrac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-\dfrac{1}{4}}\right)+C$;

22) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C$; 23) $C-2\sqrt{1-x^2}-\dfrac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}$; 24) $C-\dfrac{1}{9}(\sqrt{1-9x^2}+\arccos^2 3x)$;

25) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}+C$; 26) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+1}\right|+C$; 27) $\dfrac{1}{3}\ln(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+8})+C$;

28) $\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3x+1}{\sqrt{3}}+C$.

13.11. 1) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+2x^2+x+\dfrac{1}{3}$;2) $f(x)=\sin x-\cos x+1$.

14. Методи замінювання змінної і інтегрування частинами

14.1. Знайти замінюванням змінної інтеграл:

1) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x+1}dx$; 2) $\displaystyle\int x(3x-10)^{20}dx$;

3) $\displaystyle\int\frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}dx$.

***Розв'язання**. [3.4.2.]*

$$1)\ \int x\sqrt[3]{x+1}dx=\left|\begin{array}{l}x+1=t^3,\\ x=t^3-1\\ dx=3t^2dt\end{array}\right|=\int(t^3-1)t\cdot 3t^2dt=$$

$$= 3\int (t^3-1)t^3dt = 3\Big(\int t^6dt - \int t^3dt\Big) = 3\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C =$$

$$\overset{②}{=}\left|t=\sqrt[3]{x+1}\right| = \frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+1)^7}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}+C.$$

$$2)\int x(3x-10)^{20}dx = \left|\begin{array}{l} 3x-10=t \\ x=\dfrac{t+10}{3} \\ dx=\dfrac{1}{3}dt \end{array}\right| = \int \frac{t+10}{3}t^{20}\cdot\frac{1}{3}dt =$$

$$= \frac{1}{9}\int (t^{21}+10t^{20})dt = \frac{1}{9}\left(\frac{t^{22}}{22}+\frac{10t^{21}}{21}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{(3x-10)^{22}}{22}+\frac{10}{21}(3x-10)^{21}\right)+C.$$

$$3)\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}dx = \left|\begin{array}{c} t=\sqrt{1-e^x}, \\ x=\ln\left(1-t^2\right) \\ dx=-\dfrac{2tdt}{1-t^2} \end{array}\right| = -2\int \frac{(1-t^2)^3}{t}\cdot\frac{tdt}{1-t^2} =$$

$$= -2\int (t^4-2t^2+1)dt = -2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t\right) =$$

$$= -\frac{2}{5}\sqrt{(1-e^x)^5}+\frac{4}{3}\sqrt{(1-e^x)^3}-2\sqrt{1-e^x}+C.$$

Коментар. ① Рекомендації щодо вибору заміни змінної буде подано для основних класів функцій.

② Не забувайте переходити у відповіді до «старої» змінної.

14.2. Знайти інтегруванням частинами інтеграл:

1) $\int (3x-1)e^{2x}dx$; 2) $\int (x^2-x)\sin 3xdx$.

Розв'язання*. *[3.4.3, 3.5.] ①

$$1)\int (3x-1)e^{2x}dx \overset{②}{=} \left|\begin{array}{l} u=3x-1 \ \to\ du=3dx \\ dv=e^{2x}dx \ \to\ v=\dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right| =$$

$$\underset{\int udv=uv-\int vdu}{=} (3x-1)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{3}{2}e^{2x}dx = \frac{3x-1}{2}e^{2x}-\frac{3}{4}e^{2x}+C.$$

$$2)\ \int (x^2-x)\sin 3x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 - x & \to & du = (2x-1)dx \\ dv = \sin 3x dx & \to & v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3}(x^2-x)\cos 3x + \frac{1}{3}\int (2x-1)\cos 3x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = 2x-1 & \to & du = 2dx \\ dv = \cos 3x dx & \to & v = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3}(x^2-x)\cos 3x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(2x-1)\sin 3x - \frac{2}{3}\int \sin 3x dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}(x^2-x)\cos 3x + \frac{1}{9}(2x-1)\sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + C =$$

$$= \frac{\sin 3x}{3}\frac{2x-1}{3} - \frac{\cos 3x}{3}\left(x^2 - x - \frac{2}{9}\right) + C.$$

Коментар. ① Метою методу інтегруванням частинами є перейти від «складного» інтеграла до простішого («нескладнішого»).

Щоб обчислити інтеграли вигляду $\int P_n(x)\begin{Bmatrix}\sin \alpha x \\ \cos \alpha x\end{Bmatrix}dx,\ \int P_n(x)e^{\alpha x}dx,$ де $P_n(x)$ — многочлен степеня $n, \alpha \in \mathbb{R},$ треба брати

$$\boxed{u = P_n(x).}$$

② Покладімо $u = 3x-1, dv = e^{2x}dx.$ Від u до du переходять диференціюванням, а від dv до v — інтегруванням:

$$du = (3x-1)'dx = 3dx; \quad v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

(при цьому можна вважати, що $C = 0$).

14.3. Знайти:

1) $\int \ln x dx;$ 2) $\int x \operatorname{arctg} x dx;$

3) $\int \arcsin x dx.$

Розв'язання. ***[3.4.3, 3.5.]***①

$$1)\ \int \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & \to & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & \to & v = x \end{matrix} \right| = x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

$$2)\int x\operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \ \to \ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx \quad \to \quad v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

$$3)\int \arcsin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x \ \to \ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \quad \to \quad v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| d(1-x^2) = -2xdx \right|$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Коментар. ① Щоб обчислити інтеграли вигляду $\int P_n(x)\ln x dx$ або $\int P_n(x)\operatorname{arcf} x dx$, де $P_n(x)$ — многочлен степеня n, arcf — одна з арк-функцій: $\arcsin, \arccos, \operatorname{arctg}$ чи arcctg, треба брати:

$$\boxed{u = \ln x} \text{ або } \boxed{u = \operatorname{arcf} x.}$$

14.4. Знайти:

1) $\int e^{3x}\cos 2x dx$; 2) $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

Розв'язання. ***[3.4.3, 3.5.]***

$$1)\ I \overset{①}{=} \int e^{3x}\cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{3x} \quad \to \ du = 3e^{3x}dx \\ dv = \cos 2xd \ \to \ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x \cdot e^{3x} - \frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{3x} \quad \to \quad du = 3e^{3x}dx \\ dv = \sin 2xd \ \to \ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}e^{3x}(2\sin 2x + 3\cos 2x) - \frac{9}{4}\int e^{3x}\cos 2x dx.$$

[*Записуємо рівняння щодо шуканого інтеграла.*]

$$I = \frac{1}{4}e^{3x}(2\sin 2x + 3\cos 2x) - \frac{9}{4}I;$$

$$I = \frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 2x + 3\cos 2x).$$

2) $$I \overset{②}{=} \int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{a^2 - x^2} & \to & du = -\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ dv = dx & \to & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx}_{\text{перетворюємо інтеграл}} = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}dx + a^2 \arcsin\frac{x}{a}.$$

[*Записуємо рівняння щодо шуканого інтеграла.*]

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - I \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Коментар. ① Інтеграли вигляду $\int e^{ax}\begin{Bmatrix}\sin bx \\ \cos bx\end{Bmatrix}dx$, $\int \begin{Bmatrix}\sin(\ln x) \\ \cos(\ln x)\end{Bmatrix}dx$ та ін., двічі інтегрують частинами, двічі вибираючи за u функцію того самого типу (чи $e^{\alpha x}$, чи тригонометричну функції — все одно), і одержують рівняння щодо шуканого інтеграла.

② Інтеграли вигляду $\int \sqrt{a^2 \pm x^2}dx, \int \sqrt{x^2 - a^2}dx$ один раз інтегрують частинами, перетворюють одержаний інтеграл і дістають рівняння щодо шуканого інтеграла.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

14.5. Застосовуючи заміну змінної, знайдіть:

1) $\int x(5x - 1)^{19}dx$;

2) $\int \dfrac{xdx}{(2x + 1)^7}$;

3) $\int \dfrac{dx}{1 + \sqrt{x}}$;

4) $\int \dfrac{dx}{1 + \sqrt[3]{x + 1}}$;

5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}$;

6) $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

14.6. Знайдіть, інтегруючи частинами:

1) $\int x \sin 2x dx$; 2) $\int (9x-3)\cos 3x dx$;

3) $\int x 3^x dx$; 4) $\int x e^{-x} dx$;

5) $\int \arccos(2x) dx$; 6) $\int x \operatorname{arctg} x dx$;

7) $\int x^2 \ln(1+x) dx$; 8) $\int \ln(x^2+1) dx$;

9) $\int (x^2-2x+3)\sin x dx$; 10) $\int x^2 e^{-x} dx$;

11) $\int (\arcsin x)^2 dx$; 12) $\int \ln^2 x dx$;

13) $\int e^{-2x} \cos 5x dx$; 14) $\int \sin \ln x dx$;

15) $\int e^{\sin x} \sin 2x dx$; 16) $\int \dfrac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

Відповіді

14.5. 1) $\frac{1}{25}\left(\frac{(5x-1)^{21}}{21}+\frac{(5x-1)^{20}}{20}\right)+C$; 3) $2(\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x}))+C$;

4) $\frac{3}{2}(x+1)^{2/3}-3(x+1)^{1/3}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|+C$; 5) $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$;

6) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$.

14.6. 1) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{x}{2}\cos 2x+C$; 2) 2) $(3x-1)\sin 3x+\cos 3x+C$; 3) $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$;

4) $C-e^{-x}(x+1)$; 5) $x\arccos 2x-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+C$; 6) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+C$;

7) $\frac{(x^3+1)\ln(1+x)}{3}-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C$; 8) $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg} x+C$;

9) $-(x-1)^2\cos x-2(x-1)\sin x+C$; 10) $C-e^x(2+2x+x^2)$;

11) $2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+x\arcsin^2 x+C$; 12) $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$;

13) $\frac{e^{-2x}}{29}(5\sin 5x-2\cos 5x)+C$; 14) $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$;

15) $2e^{\sin x}(\sin x-1)+C$; 16) $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C$.

15. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Навчальні задачі

15.1. Зінтегрувати елементарні дроби:

1) $\int \frac{2dx}{x-1}$; 2) $\int \frac{3dx}{(x-2)^3}$;

3) $\int \frac{x+5}{x^2+2x+5}\,dx$; 4) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$;

5) $\int \frac{2x+3}{(x^2+6x+13)^2}$.

***Розв'язання*. [3.6.]**

1) $\int \frac{2dx}{x-1} = 2\ln\left|x-1\right| + C.$

2) $\int \frac{3dx}{(x-2)^3} = 3\int (x-2)^{-3} d(x-2) = -\frac{3}{2(x-2)^2} + C.$

3) $$\int \frac{x+5}{x^2+2x+5}\,dx = \left| \begin{matrix} d(x^2+2x+5) = (2x+2)dx \\ x+5 = \frac{1}{2}(2x+2)+4 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+4}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} + 4\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$= \left| \begin{matrix} x^2+2x+5 = \\ = (x+1)^2+4 \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$$

4) **[***Застосовуємо рекурентну формулу [3.6.6].***]**

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right), n \in \mathbb{N}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^3} = \left| \begin{matrix} a=3; \\ n=3 \end{matrix} \right| = \frac{1}{2\cdot 2\cdot 9}\left(\frac{x}{(x^2+9)^2} + (2\cdot 3-3)\int \frac{dx}{(x^2+9)^2} \right) =$$

$$= \left| \begin{matrix} a=3; \\ n=2 \end{matrix} \right| = \frac{1}{36}\left(\frac{x}{(x^2+9)^2} + 3\cdot\frac{1}{2\cdot 1\cdot 9}\left(\frac{x}{x^2+9} + (2\cdot 2-3)\int \frac{dx}{x^2+9} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{36}\frac{x}{(x^2+9)^2} + \frac{1}{216}\frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{648}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

$$5)\ \int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+6x+13)^2} = \left| \begin{matrix} d(x^2+6x+13) = 2x+6 \\ 2x+3 = (2x+6)-3 \end{matrix} \right| =$$

$$= \underbrace{\int \frac{(2x+6)dx}{(x^2+6x+13)^2}}_{\int \frac{f'(t)}{f^2(t)}dt = -\frac{1}{f}+C} - 3\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+6x+13)^2}}_{x^2+6x+13=(x+3)^2+4} =$$

$$= -\frac{1}{x^2+6x+13} - 3\int \frac{d(x+3)}{((x+3)^2+4)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2+6x+13} - 3\left(\frac{1}{2\cdot 1\cdot 4}\left(\frac{x+3}{(x+3)^2+4} + (2\cdot 2-3)\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+4}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{x^2+6x+13} - \frac{3}{8}\frac{x+3}{(x+3)^2+4} - \frac{3}{16}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C.$$

15.2. Вилучити цілу частину дробу $\dfrac{x^5+x^2-1}{x^2+x+1}$.

***Розв'язання**. [3.6.]*

[*Вилучають цілу частину діленням многочленів у стовпчик. Ділити припиняють тоді, коли степінь остачі стане меншим за степінь дільника.* **]**

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^5+x^2-1 \\ x^5+x^4+x^3 \end{array} & \begin{array}{l} x^2+x+1 \\ \hline x^3-x^2+2 \end{array} \\ \hline -\begin{array}{r} -x^4-x^3+x^2-1 \\ -x^4-x^3-x^2 \end{array} & \\ \hline -\begin{array}{r} 2x^2-1 \\ 2x^2+2x+2 \end{array} & \\ \hline -2x-3 & \end{array}$$

[*Записуємо відповідь.***]**

$$\frac{x^5+x^2-1}{x^2+x+1} = x^3-x^2+2+\frac{-2x-3}{x^2+x+1}.$$

15.3. Розкласти правильні дроби на елементарні:

1) $\dfrac{3x+1}{(x-2)(x+1)^3}$; 2) $\dfrac{x^2-3}{(x-1)(x^2+x+1)}$;

3) $\dfrac{2x-1}{(x^2+1)^2x^2}$.

***Розв'язання*. [3.6.9.]**

1) $$\frac{3x+1}{(x-2)(x+1)^3} = \underbrace{\frac{A}{x-2}}_{\substack{\textit{відповідає}\\(x-2)}} + \underbrace{\frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{(x+1)^3}}_{\textit{відповідає }(x+1)^3}.$$

2) $$\frac{x^2-3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \underbrace{\frac{A}{x-1}}_{\substack{\textit{відповідає}\\(x-1)}} + \underbrace{\frac{Mx+N}{x^2+x+1}}_{\substack{\textit{відповідає}\\(x^2+x+1)}}.$$

3) $$\frac{2x-1}{(x^2+1)^2x^2} = \underbrace{\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2}}_{\textit{відповідає } x^2} + \underbrace{\frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}}_{\textit{відповідає } (x^2+1)^2}.$$

15.4. Знайти коефіцієнти розкладу дробів на елементарні:

1) $\dfrac{6x^3-11x^2+10x-9}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}$; 2) $\dfrac{4x}{(x-1)^2(x+3)}$;

3) $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)^2}$.

***Розв'язання*. [3.6.8, 3.6.9, 0.4.2.]**

[*Розкладаємо правильний дріб на суму елементарних дробів.***]**

$$\frac{6x^3-11x^2+10x-9}{(x-1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

[*Зводимо розкладені дроби до спільного знаменника і прирівнюємо чисельники дробів в обох частинах рівності (знаменники у них рівні).*]

$$6x^3-11x^2+10x-9 \equiv$$

$$\equiv A(x-2)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (x-1)(x-2)(Cx+D).$$

[*Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях [0.4.2]*① .**]**:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & 6 = A+B+C \\ x^2 & -11 = -2A-B-3C+D \\ x^1 & 10 = A+B+2C-3D \\ x^0 & -9 = A-B+2D \end{array} \overset{②}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A = 2, \\ B = 3, \\ C = 1, \\ D = -1. \end{cases}$$

[*Записуємо відповідь.***]**

$$\frac{6x^3-11x^2+10x-9}{(x-1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

2) **[***Розкладаємо правильний дріб на суму елементарних дробів.***]**

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+3)} \overset{②}{\equiv} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}.$$

[*Коефіцієнти над степенями лінійних многочленів знаходимо методом викреслювання (домноження).***]**

$$B \overset{[3.6.10]}{=} \left.\frac{4x}{\cancel{(x-1)^2}(x+3)}\right|_{x=1} = 1.$$

$$C \overset{[3.6.10]}{=} \left.\frac{4x}{(x-1)^2\cancel{(x+3)}}\right|_{x=-3} = -\frac{3}{4};$$

$$A \overset{[3.6.10]}{=} \frac{1}{1!}\left.\left(\frac{4x}{x+3}\right)'\right|_{x=1} = \left.\frac{4(x+3)-4x}{(x+3)^2}\right|_{x=1} = \frac{3}{4}.$$

Отже,

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{\frac{3}{4}}{x+3}.$$

3) **[***Розкладаємо дріб на елементарні перетворюючи його (метод перетворення.***]**

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2(x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

Коментар. ① Два многочлена того самого степеня тотожно рівні, якщо вони мають рівні коефіцієнти при однакових степенях.

② Знаходження коефіцієнтів можна дещо спростити, підставляючи у тотожність зручні значення: перші два «зручних» значення — дійсні корені знаменника. (*метод зручних значень*).

Підставляємо в тотожність значення:

$$x = 1 \Rightarrow -4 = -2A \Rightarrow A = 2;$$

$$x = 2 \Rightarrow 15 = 5B \Rightarrow B = 3;$$

$$x = 0 \Rightarrow -9 = -2A - B + 2D \Rightarrow D = -1.$$

Оскільки визначення коефіцієнту C потребує ще однієї рівності, прирівнюємо коефіцієнти в обох частинах тотожності при x^3:

$$6 = A + B + C \Rightarrow C = 1.$$

15.5. Знайти:

1) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx;$ 2) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2-7x+12}\,dx;$

3) $\int \frac{dx}{1-x^4}$; 4) $\int \frac{x^4}{8+x^3}\,dx$.

Розв'язання. ***[3.6.10.]***

1) Підінтегральна функція є неправильним дробом.

[**Крок 1.** *Вилучаємо цілу частину неправильного дробу.*]

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = x+1+\frac{2}{x^3-x^2+x-1}.$$

[**Крок 2.** *Правильний дріб розкладаємо на суму елементарних дробів методом невизначених коефіцієнтів.*]

$$x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1).$$

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1} = \frac{1}{x-1}+\frac{1-x}{x^2+1};$$

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2+1}.$$

[**Крок 3.** *Інтегруємо суму цілої частини дробу і елементарних дробів.*]

$$\int\frac{x-1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}-\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+C_1;$$

$$\int\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx = \int(x+1)dx+\int\frac{dx}{x-1}-$$

$$-\int\frac{x-1}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}+x+\ln\left|x-1\right|+\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

2) 1. $\frac{2x+3}{x^2-7x+12}$ — дріб правильний.

2. $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$.

$$\frac{2x+3}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}.$$

$$A = \left.\frac{2x+3}{\cancel{(x-3)}(x-4)}\right|_{x=3} = -9;$$

$$B = \left.\frac{2x+3}{(x-3)\cancel{(x-4)}}\right|_{x=4} = 11.$$

$$\frac{2x+3}{x^2-7x+12} = \frac{-9}{x-3}+\frac{11}{x-4}.$$

3. $\int\frac{2x+3}{x^2-7x+12} = -9\int\frac{dx}{x-3}+11\int\frac{dx}{x-4} =$

$$= -9\ln\left|x-3\right|+11\ln\left|x-4\right|+C.$$

3) 1. $\dfrac{1}{1-x^4}$ — дріб правильний.

2. $1-x^4 = (1-x)(1+x)(1+x^2)$.

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

$$A = \left.\frac{-1}{\cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+1)}\right|_{x=1} = -\frac{1}{4};$$

$$B = \left.\frac{-1}{(x-1)\cancel{(x+1)}(x^2+1)}\right|_{x=-1} = \frac{1}{4}.$$

$$x^3 \mid A+B+M = 0 \Rightarrow M = 0;$$

$$x = 0 : 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + N \Rightarrow N = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{1-x^4} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}.$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^4} = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} =$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|x-1\right| + \frac{1}{4}\ln\left|x+1\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

4) 1. $\dfrac{x^4}{8+x^3}$ — неправильний дріб.

$$\frac{x^4}{x^3+8} = x - \frac{8x}{x^3+8}.$$

2. $x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)$.

$$\frac{8x}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Mx+N}{x^2-2x+4} =$$

$$= \frac{A(x^2-2x+4)+(Mx+N)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}.$$

$$8x = A(x^2-2x+4)+(Mx+N)(x+2).$$

$$\begin{array}{c|l} x=-2 & -16 = 12A \Rightarrow A = -\dfrac{4}{3}; \\ x^2 & 0 = A+M \Rightarrow M = \dfrac{4}{3}; \\ x^0 & 0 = 4A+2N \Rightarrow N = \dfrac{8}{3}. \end{array}$$

$$\frac{x^4}{x^3+8} = x - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{x+2} + \frac{x+2}{x^2-2x+4}\right).$$

3. $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^3+8} = \int xdx + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x+2} - \frac{4}{3}\int \frac{x+2}{x^2-2x+4}dx \boxed{=}$

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+4}dx = \left| \begin{array}{l} d(x^2-2x+4) = 2x-2, \\ x+2 = \dfrac{1}{2}(2x-2)+3 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^2+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C_1.$$

$$\boxed{=} \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}\ln(x+2) - \frac{2}{3}\ln(x^2-2x+4) - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

15.6. Розкладіть на суму елементарних раціональний дріб:

1) $\dfrac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$;

2) $\dfrac{5x^2-25x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)}$;

3) $\dfrac{3x^3-10x^2-11x+21}{x^2-5x+4}$;

4) $\dfrac{x^4-x^3-9x^2-10x-14}{x^2-2x-8}$;

5) $\dfrac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}$;

6) $\dfrac{x^3-2x^2-3x+4}{x^2(x-2)^2}$;

7) $\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$;

8) $\dfrac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}$.

15.7. Знайдіть:

1) $\displaystyle\int \frac{4dx}{x+5}$;

2) $\displaystyle\int \frac{3dx}{4x+1}$;

3) $\displaystyle\int \frac{3dx}{(x-2)^4}$;

4) $\displaystyle\int \frac{7dx}{(x-2)^3}$;

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$;

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$;

7) $\int \frac{xdx}{(x^2-4)^2}$; 8) $\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+13}$;

9) $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$; 10) $\int \frac{xdx}{2x^2-3x-2}$;

11) $\int \frac{xdx}{x^2-5x+4}$; 12) $\int \frac{4x-3}{x^2-2x+6}\,dx$.

15.8. Знайдіть:

1) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$;

3) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$; 4) $\int \frac{(2x^2-5)dx}{x^4-5x^2+6}$;

5) $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$; 6) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$;

7) $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}\,dx$; 8) $\int \frac{(7x^3-9)dx}{x^4-5x^3+6x^2}$;

9) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; 10) $\int \frac{dx}{1+x^3}$;

11) $\int \frac{(2x^2-3x-3)dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$; 12) $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$;

13) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$; 14) $\int \frac{(5x^2-12)dx}{(x^2-6x+13)^2}$;

15) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$; 16) $\int \frac{x^2-x}{(x+1)^9}\,dx$;

17) $\int \frac{dx}{x^4-4x^2+3}$; 18) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$.

Відповіді

15.6. 1) $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{7}{x+3}+\dfrac{5}{x-4}$; 2) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}$; 3) $3x+5-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{x-4}$;

4) $x^2+x+1+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-4}$; 5) $\dfrac{13}{(x-4)^3}-\dfrac{3}{(x-4)^2}+\dfrac{2}{x-4}-\dfrac{2}{x-2}$;

6) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{4x}-\dfrac{1}{2(x-2)^2}+\dfrac{3}{4(x-2)}$; 7) $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2-x+1}\right)$; 8) $-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{2x+1}{x^2+4}$.

15.7. 1) $4\ln|x+5|+C$; 2) $\dfrac{3}{4}\ln|4x+1|+C$; 3) $C-\dfrac{1}{(x-2)^3}$; 4) $-\dfrac{7}{2(x-2)^2}+C$;

5) $\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+5}\right|+C$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{6}}+C$; 7) $-\dfrac{1}{2(x^2-4)}+C$; 8) $\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2+3}{2}+C$;

9) $\ln\dfrac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+C$; 10) $\dfrac{1}{5}\ln((x-2)^2\sqrt{2x+1})+C$; 11) $\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2-5x+4\right|+\dfrac{5}{6}\ln\left|\dfrac{x-4}{x-1}\right|+C$;

12) $2\ln(x^2-2x+6)+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{\sqrt{5}}+C$.

15.8. 1) $\ln\left|\dfrac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$; 2) $\dfrac{3}{11}\ln\left|3x+1\right|+\dfrac{2}{33}\ln\left|2x-3\right|-\dfrac{1}{3}\ln\left|x\right|+C$;

3) $\dfrac{x}{4}+\ln\left|x\right|-\dfrac{7}{16}\ln\left|2x-1\right|-\dfrac{9}{16}\ln\left|2x+1\right|+C$;

4) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$; 5) $\dfrac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C$;

6) $x+\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{(x-1)^2}{|x|}+C$; 7) $\dfrac{3}{2(x-2)^2}+\ln|x-5|+C$;

8) $\dfrac{3}{2x}-\dfrac{5}{4}\ln\left|x\right|+20\ln\left|x-3\right|-\dfrac{47}{4}\ln\left|x-2\right|+C$;

9) $\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$; 10) $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;

11) $\ln\dfrac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C$;

12) $\dfrac{x^2}{2}-2x-\dfrac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1)+C$;

13) $\dfrac{2-x}{4(x^2+2)}+\dfrac{\ln(x^2+2)}{2}-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$;

14) $\dfrac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\dfrac{53}{16}\operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{2}+C$; 15) $\dfrac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\dfrac{5}{16}\operatorname{arctg}x+C$;

16) $-\dfrac{1}{6(x+1)^6}+\dfrac{3}{7(x+1)^7}-\dfrac{1}{4(x+1)^8}+C$; 17) $\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$;

18) $\dfrac{3}{8}\operatorname{arctg}x-\dfrac{x}{4(x^4-1)}-\dfrac{3}{16}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$.

16. Інтегрування тригонометричних виразів

Навчальні задачі

16.1. Знайти:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 5}$; 2) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}$;

3) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x}$.

***Розв'язання**. [3.7.1–3.7.4.]*

$$1) \int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 5} \overset{[3.7.1]}{=} \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}; \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{3-3t^2}{1+t^2} + \dfrac{2t}{1+t^2} + 5} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 4} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{15}} \left(t + \frac{1}{2}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{15}} \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \right) + C.$$

$$2) \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x} = \left| \frac{(-\sin x)^3}{\cos^2 x} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \right| \overset{[3.7.2]}{=}$$

$$= \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{(1-\cos^2 x) d(\cos x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \int d(\cos x) - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

$$3) \int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx = \left| \frac{(-\cos x)^5}{\sin^4 x} = -\frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} \right| \overset{[3.7.3]}{=} \int \frac{\cos^4 x \cdot \cos x dx}{\sin^4 x} =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \sin x; dt = \cos x dx; \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \end{matrix} \right| = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)}{\sin^4 x} =$$

$$= \int \frac{d(\sin x)}{\sin^4 x} - 2\int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} + \int d(\sin x) = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x + C.$$

$$4) \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{(-\sin x)^2 + 3(-\sin x)(-\cos x) + (-\cos x)^2} = \\ = \dfrac{1}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x} \end{array} \right| \overset{[3.7.4]}{=}$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 1}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 1} =$$

$$= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\left(\operatorname{tg} x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x + 3 - \sqrt{5}}{2\operatorname{tg} x + 3 + \sqrt{5}}\right| + C.$$

16.2. Знайти:

1) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^7 x}$;

3) $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx$; 4) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4 x dx$;

5) $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^3 x dx$.

***Розв'язання*. [3.7.]**

1) $$\int \frac{1}{\cos^3 x}dx = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^3 x}dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx \overset{[3.4.3]}{=}$$

$$= \left| \begin{array}{lcl} u = \sin x & \to & du = \cos x dx \\ dv = \dfrac{\sin x dx}{\cos^3 x} & \to & v = \dfrac{1}{2\cos^2 x} \end{array} \right| = \int \frac{dx}{\cos x} + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + C.$$

2) $$\int \frac{dx}{\sin^7 x} \overset{[3.7.1]}{=} \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{(1+t^2)^6 dt}{64t^7} = \ldots.$$

3) $$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx \overset{[3.7.4]}{=} \int \operatorname{ctg}^4 x \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \operatorname{ctg}^4 x d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + C.$$

4) $$\int \operatorname{tg}^4 x dx \overset{[3.7.8]}{=} \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^2 x dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

5) $$\int \operatorname{ctg}^3 x dx \overset{[3.7.9]}{=} \int \operatorname{ctg} x \left(\operatorname{ctg}^2 x \right) dx = \int \operatorname{ctg} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx =$$
$$= -\int \operatorname{ctg} x d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg} x dx = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x - \int \frac{d \sin x}{\sin x} =$$
$$= -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x - \ln \left| \sin x \right| + C.$$

16.3. Знайти:

1) $\int \sin 6x \cos 7x dx$; 2) $\int \cos^4 3x dx$.

***Розв'язання**. [3.7.7, 3.7.10.]*

1) $$\int \sin 6x \cos 7x dx \overset{[3.7.10]}{=} \frac{1}{2} \int (-\sin x + \sin 13x) dx = \frac{1}{2} \left(\cos x - \frac{1}{13} \cos 13x \right) + C.$$

2) $$\int \cos^4 3x dx \overset{[3.7.7]}{=} \int \left(\frac{1 + \cos 6x}{2} \right)^2 dx = \int \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos 6x + \cos^2 6x \right) dx =$$
$$= \int \left(\frac{1 + \cos 12x}{8} + \frac{1}{2} \cos 6x + \frac{1}{4} \right) dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{96} \sin 12x + C.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

16.4. Знайдіть:

1) $\int \cos 3x \cos x dx$; 2) $\int \sin 5x \sin \frac{x}{2} dx$;

3) $\int \sin \frac{3}{4} x \cos \frac{x}{4} dx$; 4) $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$.

16.5. Знайдіть:

1) $\int \sin^3 x dx$; 2) $\int \cos^5 x dx$;

3) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$; 4) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$;

5) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$; 6) $\int \sin^2 x \cos^4 x$;

7) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$; 8) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx$;

9) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$; 10) $\int \operatorname{tg}^5 x dx$;

11) $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$; 12) $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$;

13) $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$; 14) $\int \frac{dx}{3 - 2\sin x + \cos x}$;

15) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}$; 16) $\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$.

15) $\int \operatorname{sh}^3 x dx$; 16) $\int \operatorname{ch}^3 x dx$;

17) $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$; 18) $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$.

$\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}$.

Відповіді

16.4. 1) $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$; 2) $-\frac{1}{11}\sin\frac{11}{2}x + \frac{1}{9}\sin\frac{9}{2}x + C$; 3) $-\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos x + C$;
4) $\frac{3x}{8} + \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{16} + C$.

16.5. 1) $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$;2) $\sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$;
3) $\frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x - 5) + C$; 4) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$;
5) $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$; 6) $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C$; 7) $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$;
8) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{3}{2}x + C$; 9) $x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + C$;
10) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln\left|\cos x\right| + C$; 11) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$; 12) $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 4}{3} + C$;
13) $-\frac{1}{2(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1)} + C$; 14) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) + C$; 15) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x) + C$;
16) $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x - \sqrt{7}}{2\operatorname{tg} x + \sqrt{7}}\right| + C$; 17) $\frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x + C$; 18) $\operatorname{sh} x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + C$;
17) $C - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2x) + C$; 18) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C$.

17. Інтегрування ірраціональних виразів

Навчальні задачі

17.1. Зінтегрувати, використовуючи відповідну замінну змінної:

1) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$; 2) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}\frac{dx}{2x+1}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+4}}$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}$.

***Розв'язання**. [3.8.]*

$$1)\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}} \overset{[3.8.4]}{=} \left| \begin{array}{l} x+1=t^6, \\ x=t^6-1, \\ dx=6t^5 \end{array} \right| = 6\int \frac{(t^6-1)t^5dt}{t^3-t^2} =$$

$$= 6\int \frac{t^3(t^6-1)}{t-1}dt = 6\int \left(t^8+t^7+t^6+t^5+t^4+t^3\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^9}{9}+\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_{t=\sqrt[6]{x+1}} + C.$$

$$2)\int \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}\frac{dx}{2x+1} \overset{[3.8.4]}{=} \left| \begin{array}{l} \dfrac{2x-1}{2x+1}=t^2 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ dx=\dfrac{2tdt}{(1-t^2)^2}; 2x+1=\dfrac{2}{1-t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t\cdot 2tdt}{\dfrac{2}{1-t^2}(1-t^2)^2} = \int \frac{t^2}{1-t^2}dt = \int \left(\frac{1}{1-t^2}-1\right)dt =$$

$$= -t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = -\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}\right| + C.$$

$$3)\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+4}} \overset{[3.8.1]}{=} \left| \begin{array}{l} 3x^2+6x+4= \\ =3\left(x^2+2x+\dfrac{4}{3}\right)=3\left((x+1)^2+\dfrac{1}{3}\right) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+\frac{1}{3}}\right| + C.$$

$$4)\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}} \overset{[3.8.3]}{=} \left| t=\frac{1}{x}; x=\frac{1}{t}; dx=-\frac{dt}{t^2} \right| =$$

$$= -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} - 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t - t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(t + \frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= -\arcsin \frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C = -\arcsin \frac{2t+1}{\sqrt{5}} + C = -\arcsin \frac{2+x}{\sqrt{5}x} + C.$$

17.2. Використовуючи тригонометричні підстанови, знайти:

1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

Розв'язання. ***[3.8.6–3.8.8.]***

$$1)\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}} = \left| \begin{array}{l} x = 3\,\mathrm{tg}\, t, t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right); \quad dx = \frac{3dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{x^2+9} = \sqrt{9\,\mathrm{tg}^2\, t + 9} = \frac{3}{\cos t} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3dt}{\cos^2 t \cdot 9\,\mathrm{tg}^2\, t \cdot \frac{3}{\cos t}} = \frac{1}{9}\int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{9}\int \frac{d\sin t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{9\sin t} + C =$$

$$= -\frac{1}{9}\frac{1}{\cos t}\frac{1}{\mathrm{tg}\, t} + C = -\frac{1}{3x}\sqrt{1 + \frac{x^2}{9}} + C = -\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x} + C.$$

$$2)\ \int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]; dx = 2\cos t dt; \sin t = \frac{x}{2}; \\ \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = 2\cos t \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{2\cos t dt}{8\cos^3 t} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}\, t + C =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \frac{1}{4}\frac{x}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} + C = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C.$$

17.3. Знайти, використовуючи теорему Чебишова:

1) $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}$; 2) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Розв'язання. ***[3.8.5.]***

1) $$\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^3} = \underbrace{\int x^{-1}(1+x^{1/3})^{-3}dx}_{\text{записуємо підінтегральний вираз як диференціальний біном}} = \underbrace{\left| \begin{gathered} m=-1, n=\frac{1}{3}, p=-3 \Rightarrow \\ k = \text{НСК}(1,3) = 3; x = t^3; \\ dx = 3t^2dt \end{gathered} \right|}_{\text{визначаємо випадок}} =$$

$$= \int \frac{1}{t^3}(1+t)^{-3}3t^2dt = 3\int \frac{dt}{t(1+t)^3} =$$

$$= \left| \begin{gathered} \frac{1+t-t}{t(1+t)^3} = -\frac{1}{(1+t)^3} + \frac{1}{t(1+t)^2} = \ldots = \\ = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3} \end{gathered} \right| =$$

$$= 3\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3} \right) dt =$$

$$= 3\ln\left|t\right| - 3\ln\left|1+t\right| + \frac{3}{1+t} + \frac{3}{2(1+t)^2} + C =$$

$$= 3\ln\left| \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} \right| + \frac{3}{1+\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{2(\sqrt[3]{x}+1)^2} + C.$$

2) $$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}dx =$$

$$= \left| \begin{gathered} m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3}; \\ \frac{m+1}{n} = 2 \Rightarrow 1 + x^{1/4} = t^3; t = (1+x^{1/4})^{1/3}; \\ \frac{1}{4}x^{-3/4}dx = 3t^2dt \end{gathered} \right| =$$

$$= \int x^{1/4}(1+x^{1/4})^{1/3}x^{-3/4}dx = \int (t^3-1)t \cdot 12t^2dt = 12\int (t^6 - t^3)dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C = \frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7} - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + C.$$

3) $$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0(1+x^4)^{-1/4}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} m=0, n=4, p=-\dfrac{1}{4}; \\ \dfrac{m+1}{n}+p=0 \Rightarrow x^{-4}+1=t^4; \\ x=\dfrac{1}{\left(t^4-1\right)^{1/4}}; dx=-\dfrac{t^3dt}{\left(t^4-1\right)^{5/4}} \end{array} \right| = \int \left(x^{-4}+1\right)^{-1/4} x^{-1}dx =$$

$$= -\int \frac{\left(t^4-1\right)^{1/4}}{t} \frac{t^3dt}{\left(t^4-1\right)^{5/4}} = -\int \frac{t^2dt}{t^4-1} = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^{-4}+1} + C.$$

Задачі для самостійного розв'язання

17.4. Знайдіть:

1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx$;

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}$;

4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}dx$;

5) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\frac{dx}{x}$;

6) $\displaystyle\int \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3}dx$;

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5+13x+8x^2}}$;

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{11+9x-7x^2}}$;

9) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+5x+3}}$;

10) $\displaystyle\int \frac{x+8}{\sqrt{3x^2+x+9}}dx$;

11) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x-2x^2}}$;

12) $\displaystyle\int \frac{5x-3}{\sqrt{1-13x-5x^2}}dx$;

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$;

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}}$;

15) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}dx$;

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$;

17) $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4 dx$;

18) $\int x^{-1}(1+x^{1/3})^{-3} dx$;

19) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;

20) $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx$;

21) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$;

22) $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5} dx$;

23) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$;

24) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} dx$.

Відповіді

17.4. 1) $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$;

2) $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-8\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+48\sqrt[12]{x}+3\ln(1+\sqrt[12]{x})+\frac{33}{2}\ln(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+2)-$
$-\frac{171}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}}+C$;

3) $t+\frac{3}{2}\sqrt[3]{t}+3\sqrt[6]{t}+3\ln(\sqrt[6]{t}-1)+C\Big|_{t=2x-1}$;

4) $\frac{3}{7}\sqrt[6]{t^7}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{t^5}+\sqrt{t}-3\sqrt[6]{t}+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{t}+C\Big|_{t=2x-3}$;

5) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$; 6) $(5-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-6\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$;

7) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+\frac{13}{16}+\sqrt{x^2+\frac{13}{8}x+\frac{5}{8}}\right|+C$; 8) $\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{14x-9}{\sqrt{389}}+C$;

9) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+5x+3}-\frac{5}{4\sqrt{2}}\ln\left|x+\frac{5}{4}+\sqrt{x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}\right|+C$;

10) $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+x+9}+\frac{47}{6\sqrt{3}}\ln\left|x+\frac{1}{6}+\sqrt{x^2+\frac{x}{3}+3}\right|+C$;

11) $-\frac{1}{2}\sqrt{8-3x-2x^2}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+3}{\sqrt{73}}+C$;

12) $-\sqrt{1-13x-5x^2}-\frac{19}{2\sqrt{5}}\arcsin\frac{10x+13}{\sqrt{189}}+C$;

13) $C-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|$; 14) $\arccos\frac{1}{x\sqrt{2}}+C$;

15) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$;

16) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$;

17) $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\dfrac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\dfrac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\dfrac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+C$;

18) $3\left(\ln\left|\dfrac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\dfrac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right)+C$;

19) $\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2+1}-1)-\dfrac{1}{4}\ln(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}}+C$;

20) $\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$; 21) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C$;

22) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2}-\dfrac{1}{4}\dfrac{\sqrt{1-x^4}}{x^4}+C$; 23) $\dfrac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}+C}$;

24) $\dfrac{12\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{13}}}{13}-\dfrac{18\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{10}}}{5}+\dfrac{36\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7}}{7}-3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}+C.$

Список використаної і рекомендованої літератури

Підручники і посібники

1. *Вища* математика: підручник. У 2 кн. Кн. 1 / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003. — 400 с. — ISBN 966-06-0229-4.

2. *Вся* высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 1. — М.: Эдиториал УРСС, 2010. — 336 с. — ISBN 978-5-354-01237-4.

3. *Вся* высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 2. — М.: Эдиториал УРСС, 2007. — 192 с. — ISBN 978-5-382-00208-8.

4. *Дубовик В. П.* Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. . Юрик. — К: А. С. К., 2006. — 647 с. — ISBN 966-539-320-0.

5. *Жевняк Р. М.* Высшая математика. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1992. — 384 с.

6. *Жевняк Р. М.* Высшая математика: учеб. пособие Ч.2. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1985. — 224 с.

7. *Овчинников П. П.* Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 1 / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. — К.: Техніка, 2003. — 600 с. — ISBN: 966-575-055-0.

8. *Письменный Д.* Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Письменный. — М.: *Айрис-Пресс*, 2008. — 608 с. ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.

9. *Шипачев В. С.* Курс высшей математики / В. С. Шипачев. — М. Оникс, 2009. — 608 с. — ISBN 978-5-488-02067-2.

Задачники і розв'язники

10. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — С.Пб.: Лань, Специальная литература, 2002. — 448 с. — ISBN 5-8114-0107-8.

11. *Барковський В. В.* Вища математика для економістів: навч. посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. — К.: ЦУЛ, 2010. — 417 с. — ISBN 978-966-364-991-7.

12. *Вища* математика: збірник задач: Навч. посібник /В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К.: А. С. К., 2005. – 480 с.

13. *Герасимчук В. С.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: навч. посіб. Ч. 1. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних. Прикладні задачі / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов — К.: Книги України ЛТД, 2009. — 578 с. — ISBN 978-966-2331-03-5.

14. *Герасимчук В. С.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: навч. посіб. Ч.2. Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. — К. : Книги України ЛТД, 2010. — 470 с. — ISBN 978-966-2331-05-9.

15. Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посібн. / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. — К.: ЦУЛ, 2009. — 592 с. — ISBN 978-966-364-928-3.

16. *Сборник* задач по математике для втузов. В 4 ч. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: учеб. пособие / Болгов В. А., Демидович Б. П., Ефимов А. В. и др. Под общ. ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. — М.: Наука, 1993. — 480 с. — ISBN 5-02-014433-9.

17. *Сборник* задач по курсу высшей математики / Г.И. Кручкович, Н.И. Гутарина, П.Е. Дюбюк и др. — М.: Высш. шк., 1973. — 576 с.