# ЛЕКЦИЯ 3,4

**Отношения**

**Операции над отношениями**

**Операции объединения и пересечения семейств отношений.**

**Доп. Операции. Обратное отношение.**

**Композиция. Свойства композиции.**

**Специальные свойства отношений.**

**Виды отношений.**

**Отношение эквивалентности.**

## Понятие отношения

*Теория отношений реализует в математических терминах на абстрактных множествах реальные связи между реальными множествами.*

Отношение между **парой** объектов называется **бинарным**.

Бинарное отношение используется для указания вида связи между парой объектов, рассматриваемых в определенном порядке. При этом отношение дает критерий для отличия одних упорядоченных пар от других. В этом отличие отношения от соответствия

**Пример 1.** Рассмотрим 2 множества: $A=\{отец, мать\}$ и $B=\{сын, дочь\}$ Рассмотрим бинарные отношения $R \subset A \times B$ и $S \subset A \times B$, заданные предикатами

1. $R=\left\{(a,b)\middle|\right.$ “*a* выше ростом, чем *b*” $\}$ .
2. $S=\left\{(a,b)\middle|\right.$“a старше, чем b” $\}$ .

$$R = \{(сын, отец), (мать, дочь)\} \quad S = \{(отец, сын), (мать, дочь)\}$$

## Определение отношения.

***Отношением*** $R$ множеств $X$ и $Y$ называется произвольное подмножество $X \times Y$.

Если $(x, y) \in R$, это записывают как $xRy$; при этом говорят, что $x$ и $y$ находятся в отношении $R$, или просто, что $x$ ***относится*** к $y$.

Если $X = Y$, то отношение есть подмножество $X \times X$. Такое отношение называют ***бинарным отношением*** на $X$.

# Пример отношений.

## Пример 2.

*X*={*2, 3*}, *Y*={*3, 4, 5*}.

*X*ò*Y*= {*(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3,5)*}.

*R*$\subseteq$ *X*ò*Y*

$R_1=\left\{(x,y)\middle|\text{"}x<y\text{"}\right\}$ $\quad$ $R_1$={*(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)*}

$R_2=\left\{(x,y)\middle|\text{"}x\geq y\text{"}\right\}$ $\quad$ $R_2$={*(3,3)*}

$R_3=\left\{(x,y)\middle|\text{"}x>y\text{"}\right\}$ $\quad$ $R_3$={Ą}

## Пример 3.

*A*={*2,3,5,7*}; *B*={*24,25,26*};

*A*ò*B*={*(2,24),(2,25),(2,26),(3,24),(3,25),(3,26),(5,24),(5,25),(5,26),(7,24),(7,25),(7,26)*}

*R*$\subseteq$ *A*ò*B* *R*=$\left\{(a,b)\middle|\right.$ “*a* является делителем *b*” $\}$,

*R*= {*(2,24),(2,26),(3,24),(5,25)*}

Такие неполные предложения (или так называемые предикаты, утверждения) могут быть рассмотрены как отношения:

- $X$ происходит раньше (или позже), чем $Y$,

- $X$ включается (или входит) в $Y$,

- $X$ параллельно (или перпендикулярно) Y,

- $X$ равно (или эквивалентно) $Y$,

- $X$ является братом $Y$,

- $X$ связан (электрически или иным образом) с $Y$ и т. д.

## Область определения и множество значений.

***Область определения*** отношения $R$ на $X$ и $Y$ есть множество всех $x \in X$ таких, что для некоторых $y \in Y$ имеем $\left(x, y\right) \in R$. Другими словами, область определения $R$ есть множество всех первых координат упорядоченных пар из $R$.

***Множество значений*** отношения $R$ на $X$ и $Y$ есть множество всех $y \in Y$ таких, что $\left(x, y\right) \in R$ для некоторого $x \in X$. Другими словами, множество значений $R$ есть множество всех вторых координат упорядоченных пар из $R$.

**Пример.**

Пусть $R = X \times Y$.

**Область определения** - все множество $X$

**Множество значений** - все множество $Y$.

## Способы задания бинарных отношений.

**1. Задание перечислением или предикатом.**

Бинарное отношение можно задать, перечисляя все входящие в него пары (если отношение состоит из конечного числа пар) или указав общее свойство пар, принадлежащих этому отношению (вспомните способы задания множеств).

**Пример.** Пусть дано множество $X = \left\{ p, r, s, q \right\}$.

Зададим отношение $R \subseteq X \times X$ перечислением пар

$$R = \left\{ \left( p, r \right), \left( s, q \right), \left( r, p \right), \left( p, p \right), \left( s, r \right), \left( p, s \right) \right\}$$

**Пример.** Пусть дано $N$ - множество натуральных чисел.

Зададим отношение, указав общее свойство пар, принадлежащих отношению:

$R_1 = \left\{ \left( n, m \right) \in N \times N \middle| n \text{ является делителем } m \right\}$

## 2. Задание графом

Способ задания бинарного отношения с помощью графа. Пусть $R \subset X \times X$. $X = \left\{ x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n \right\}$

1. Элементы множества $X$ - точки на плоскости (их называют вершинами графа).

2. Точки $x_i, x_j$ соединены стрелкой $\longrightarrow$ из $x_i$ в $x_j$ тогда и только тогда, когда $\left( x_i, x_j \right) \in R$.

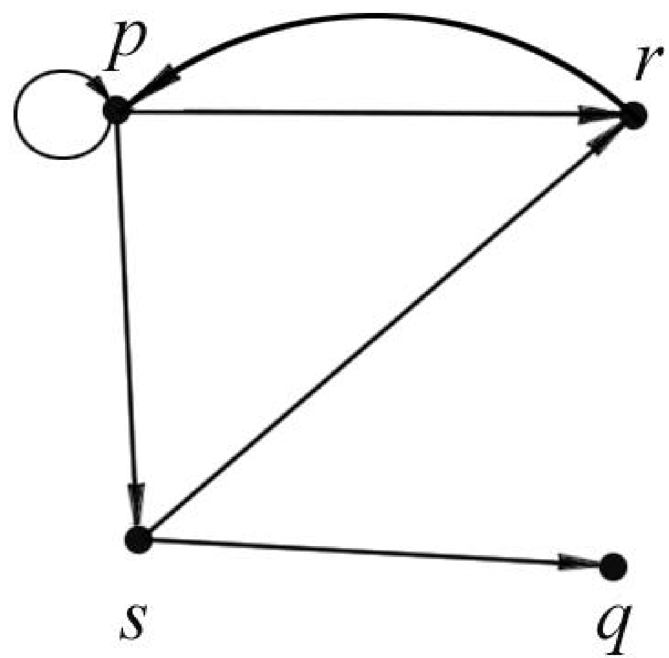
3. Если одновременно $\left( x_i, x_j \right) \in R$ и $\left( x_j, x_i \right) \in R$ то точки $x_i$ и $x_j$ соединяются двумя стрелками $\rightleftarrows$ .

4. Если $\left( x_j, x_j \right) \in R$ , то в точке $x_j$ изображается петля.

## Пример задания отношения графом

На рисунке изображен граф бинарного отношения

$$R = \{(p,r),(s,q),(r,p),(p,p),(s,r),(p,s)\}.$$



## 3. Задание с помощью булевых матриц

Пусть $R \subseteq X \times Y$, где

$$X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n\}; \; Y = \{y_1, y_2, y_3, ..., y_j, ..., y_m\}.$$

***Представление отношения $R$ в виде матрицы - это таблица из $n$ строк и $m$ столбцов.***

$|X| = n$ , $|Y| = m$

1. В первый столбец выписаны элементы множества $X$,
2. В первую строку выписаны элементы множества $Y$.
3. На пересечении строки элемента $x_i$ и столбца элемента $y_j$ записывается 1, если пара $(x_i, y_j) \in R$, и 0 - в противном случае.

Такая таблица называется **булевой матрицей отношения.**

# Пример задания отношения матрицей

Пусть дано множество $X=\{p,q,r,s\}$ и отношение $R_1 \subset X \times X$, заданное перечислением

$$R_1 = \{(p,r),(s,q),(r,p),(p,p),(s,r),(p,s)\}$$

Булева матрица данного отношения имеет вид:

| $R_1$ | *p* | *q* | *r* | *s* |
|---|---|---|---|---|
| p | 1 | 0 | 1 | 1 |
| *q* | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *r* | 1 | 0 | 0 | 0 |
| *s* | 0 | 1 | 1 | 0 |

$X=\{p,q,r,s\}$, $Y=\{a,b,c,d\}$ $R_2 \subset X \times Y$

$$R_2 = \{(p,\mathrm{a}),(s,\mathrm{b}),(r,\mathrm{d}),(\mathrm{q},\mathrm{d}),(r,a)\}$$

| $R_2$ | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| p | 1 | 0 | 0 | 0 |
| *q* | 0 | 0 | 0 | 1 |
| *r* | 1 | 0 | 0 | 1 |
| *s* | 0 | 1 | 0 | 0 |

**Срез (сечение) отношения $R$ через элемент**

Пусть $R \subseteq X \times Y$, где

$$X = \left\{x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n\right\};\ Y = \left\{y_1, y_2, y_3, ..., y_j, ..., y_m\right\}.$$

$R$ - произвольное бинарное отношение между элементами множеств $X$ и $Y$.

Рассмотрим произвольный элемент $x_i$ множества $X$

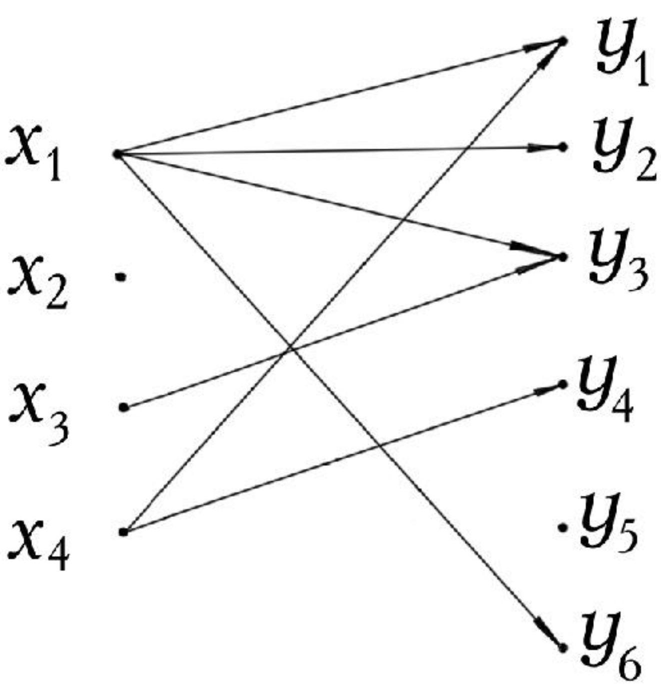
***Множество тех элементов, с которыми элемент $x_i$ находится в отношении $R$, называется* срезом ( сечением) *отношения $R$ через элемент $x_i$ и обозначается $R(x_i)$.***

Если бинарное отношение $R$ представлено с помощью графа, то $R(x_i)$ состоит из тех вершин множества $Y$, в которые из вершины $x_i$ идет стрелка.

Отношение через элемент - это множество, которое может содержать **несколько элементов, один элемент и ни одного элемента (пустое).**

## Пример задания среза отношения $R$ через элемент $x_i$

Пусть даны множества $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ и отношение $R \subset X \times Y$, заданное графом.




Срез отношения $R$ через элемент $x_1$:

$R(x_1) = \{y_1, y_2, y_3, y_6\}$

Срез отношения $R$ через $x_2$:

$R(x_2) = \{\varnothing\}$

Срез отношения $R$ через $x_3$:

$R(x_3) = \{y_3\}$

Срез отношения $R$ через $x_4$:

$R(x_4) = \{y_1, y_4\}$

## Операции над отношениями.

Так как бинарные отношения представляют множества (пар), то к ним применимы понятия равенства, включения, а также операции объединения, пересечения и дополнения.

Для двух бинарных отношений *R* и *S* определим такие операции:

**Включение** $R \subset S$ понимается таким образом, что всякая упорядоченная пара элементов, принадлежащая отношению *R*, принадлежит и отношению *S*.

**Равенство** $R = S$ означает, что отношения *R* и *S* состоят из одних и тех же упорядоченных пар.

**Объединение** $R \cup S$ отношений *R* и *S* состоит из упорядоченных пар, принадлежащих хотя бы одному из этих отношений.

**Пересечение** $R \cap S$ отношений *R* и *S* есть новое отношение, состоящее из упорядоченных пар, принадлежавших обоим отношениям одновременно.

**Разность** $R - S$ отношений *R* и *S* есть множество упорядоченных пар, принадлежащих отношению *R* и не принадлежащих отношению *S*.

**Дополнение.** Если *R* - бинарное отношение между элементами множеств *X* и *Y*, то его **дополнением** (относительно $X \times Y$) называется разность $\left(X \times Y\right) - R$

## Операции объединения и пересечения произвольных семейств отношений.

Если $\left(R_i\right)_{i\in I}$ - семейство отношений, то **объединение этого семейства** есть отношение $\bigcup_{i\in I} R_i$, состоящее из упорядоченных пар, принадлежащих хотя бы одному из отношений $R_i$.

**Пересечением этого семейства -** отношение $\bigcap_{i\in I} R_i$, состоящее из упорядоченных пар, принадлежащих всем отношениям $R_i$.

## Дополнительные операции

Для отношений вводятся некоторые **дополнительные операции**, которые связаны с их специфической структурой, проявляющейся в том, что **все элементы отношений суть упорядоченные пары**. Рассмотрим две такие операции.

### 1. Обратное отношение.

Если в каждой упорядоченной паре, принадлежащей отношению *R* поменять местами первую и вторую компоненту, то получим новое отношение, которое называется **обратным** для отношения R и обозначается через $R^{-1}$ . Например, для отношения $R$

$$R = \{(p,r),(s,q),(r,p),(p,p),(s,r),(p,s)\}$$

обратное отношение $R^{-1}$ имеет вид:

$$R^{-1} = \{(r,p),(q,s),(p,r),(p,p),(r,s),(s,p)\}$$

Ясно, что тогда и граф отношения $R^{-1}$ получается из графа отношения $R$ путем переориентации всех стрелок; если же отношение $R$ задано с помощью булевой матрицы, то, поменяв в ней строки и столбцы, получим булеву матрицу отношений $R^{-1}$.

Пусть $R \subseteq X \times Y$ есть отношение на $X \times Y$. Тогда отношение $R^{-1}$ на $Y \times X$ определяется следующим образом:

$$R^{-1} = \left\{ \left(y, x\right) \middle| \left(x, y\right) \in R \right\}.$$

Другими словами, $\left(y, x\right) \in R^{-1}$ тогда и только тогда, когда $\left(x, y\right) \in R$ или, что равносильно, $yR^{-1}x$ тогда и только тогда, когда $xRy$.

Отношение $R^{-1}$ называется ***обратным отношением*** к данному отношению $R$.

**Пример.**

Пусть $R = \left\{\left(1,r\right),\left(1,s\right),\left(3,s\right)\right\}$,

тогда $R^{-1} = \left\{\left(r,1\right),\left(s,1\right),\left(s,3\right)\right\}$.

Пусть $R$={$\left(a,b\right)\Big|b$ является мужем $a$}, тогда $R^{-1}$={$\left(b,a\right)\Big|a$ является женой $b$}

Пусть $R$ = {$\left(a,b\right)\Big|b$ является родственником $a$}, тогда $R = R^{-1}$

Пусть $R$ — отношение $\left\{\left(a,b\right)\Big|a^2 + b^2 = 4\right\}$, тогда также $R^{-1} = R$.

## 2. Композиция отношений (Умножение отношений)

Пусть $R \subseteq X \times Y$ — отношение на $X \times Y$ ,
а $S \subseteq Y \times Z$ — отношение на $Y \times Z$.

***Композицией*** отношений $S$ и $R$ называется отношение

$$T \subseteq X \times Z,$$

определенное таким образом:
$T = \{ (x, z) \,|$ существует такой элемент $y \in Y$, что $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in S \}$.

Это множество обозначается $T = S \circ R$.

**Пример.**

Пусть $X = \left\{1,2,3\right\}$, $Y = \left\{a,b\right\}$ и $Z = \left\{\alpha,\beta,\lambda,\mu\right\}$.

Также заданы отношения

$R = X \times Y$ и $S = Y \times Z$. $R = \left\{\left(1,a\right),\left(2,b\right),\left(3,b\right)\right\}$,

$S = \left\{\left(a,\alpha\right),\left(a,\beta\right),\left(b,\lambda\right),\left(b,\mu\right)\right\}$,

Тогда $S \circ R = \left\{\left(1,\alpha\right),\left(1,\beta\right),\left(2,\lambda\right),\left(2,\mu\right),\left(3,\lambda\right),\left(3,\mu\right)\right\}$

поскольку

из $\left(1,a\right) \in R$ и $\left(a,\alpha\right) \in S$ следует, что $\left(1,\alpha\right) \in S \circ R$,

из $\left(1,a\right) \in R$ и $\left(a,\beta\right) \in S$ следует, что $\left(1,\beta\right) \in S \circ R$,

…..

из $\left(3,b\right) \in R$ и $\left(b,\mu\right) \in S$ следует, что $\left(3,\mu\right) \in S \circ R$.

## Свойства композиции отношений

Композиция отношений **ассоциативна**; т.е.,

если $X$,$Y$ и $Z$ — множества и если
$R \subseteq X \times Y$,
$S \subseteq Y \times Z$ и
$T \subseteq Z \times D$ тогда

$$R \circ \left(S \circ T\right) = \left(R \circ S\right) \circ T.$$

# Специальные свойства отношений
## *Рефлексивность.*

Отношение ***R*** на множестве ***X*** называется ***рефлексивным***, если для любого ***x***Č***X*** имеет место ***xRx***, то есть, каждый элемент ***x***Č***X*** находится в отношении ***R*** к самому себе.

**Пример.**

$R_1$ — “á” на множестве вещественных чисел,

$R_2$ — “иметь общий делитель” на множестве целых чисел.

Все диагональные элементы матрицы равны 1; при задании отношения графом каждый элемент имеет петлю – дугу ***(x, x)***.

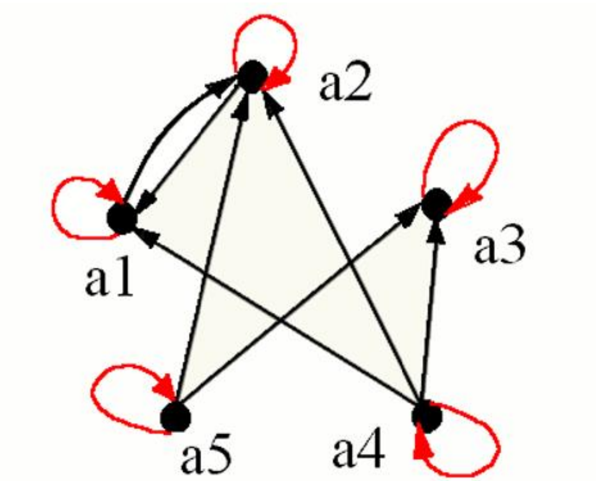
## Пример задания рефлексивных отношений

Пусть задано отношение $R \subset A \times A$.

$$R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3),$$

$$(a_4, a_1), (a_4, a_2)(a_4, a_3), (a_4, a_4),$$

$$(a_5, a_2), (a_5, a_3), (a_5, a_5)\}$$




| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1 | 1 | | | |
| $a_2$ | 1 | 1 | | | |
| $a_3$ | | | 1 | | |
| $a_4$ | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| $a_5$ | | 1 | 1 | | 1 |

## *Антирефлексивность.*

Пусть задано отношение $R \subseteq X \times X$

Отношение ***R*** на множестве ***X*** называется ***антирефлексивным***, если из $x_1 R x_2$ следует, что $x_1 \div x_2$.

**Пример.**

$R_1$ — “Y” на множестве вещественных чисел,

$R_2$ — “быть сыном” на множестве людей.

Представление булевой матрицей:

Все **диагональные элементы являются нулевыми**.

Представление графом:

Ни одна **вершина не имеет петли** – нет дуг вида $(x_i, x_i)$.

**_Симметричность._**

Пусть задано отношение $R \subseteq X \times X$

Отношение $R$ на множестве $X$ называется ***симметричным***, если для пары $(x_1,x_2)$Č$R$ из $x_1Rx_2$ следует $x_2Rx_1$

(иначе говоря, для любой пары отношение $R$ выполняется либо в обе стороны, либо не выполняется вообще).

Задание матрицей

Матрица симметричного отношения является **симметричной относительно главной диагонали**.

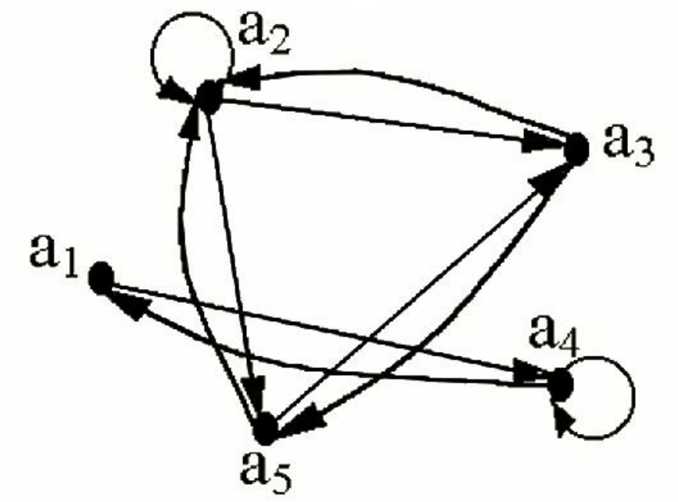
Задание графом

В графе для каждой дуги из $x_i$ в $x_k$ **существует противоположно направленная дуга** из $x_k$ в $x_i$.

## Пример задания симметричных отношений

Пусть задано отношение $R \subset A \times A$.

$$R = \{(a_1, a_4), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_2, a_5), (a_3, a_5), (a_3, a_2),$$
$$(a_4, a_4), (a_4, a_1), (a_5, a_2), (a_5, a_3)\}$$




| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | | | | 1 | |
| $a_2$ | | 1 | 1 | | 1 |
| $a_3$ | | 1 | | | 1 |
| $a_4$ | 1 | | | 1 | |
| $a_5$ | | 1 | 1 | | |

## *Асимметричность.*

Отношение ***R*** называется ***асимметричным***, если для пары $(x_1,x_2)$ ČR из $x_1Rx_2$ следует, что не выполняется $x_2Rx_1$.

(иначе говоря, для любой пары отношение ***R*** выполняется либо в одну сторону, либо не выполняется вообще).

**Пример.**

$R_1$ — “**>**” на множестве вещественных чисел,

$R_2$ — “быть сыном” на множестве людей.

Задание матрицей

Матрица асимметричного отношения не содержит единичных элементов, симметричных относительно главной диагонали.

Задание графом

В графе полностью отсутствуют противоположно направленные дуги.

# ***Антисимметричность.***

Пусть задано отношение $R \subseteq X \times X$

Отношение $\boldsymbol{R}$ называется ***антисимметричным***, если из $\boldsymbol{x_1 R x_2}$ и $\boldsymbol{x_2 R x_1}$ следует, что $\boldsymbol{x_1 = x_2}$.

**Пример.**

$\boldsymbol{R_1}$ — “á” на оси действительных чисел .

$\boldsymbol{R_2}$ — “есть делителем”– на множестве действительных чисел.

## ***Транзитивность.***

Пусть задано отношение $R \subseteq X \times X$

Отношение ***R*** называется ***транзитивным***, если для любых $x_1, x_2, x_3$ из $x_1 R x_2$ и $x_2 R x_3$ следует $x_1 R x_3$.

**Пример.**

***R*** — “á” и “**<**” на множестве действительных чисел – транзитивны.

Задание графом

В графе, задающем транзитивное отношение ***R***, для всякой пары дуг таких, что конец первой совпадает с началом второй, существует третья дуга, имеющая общее начало с первой и общий конец со второй.

## ***Антитранзитивность***

Отношение $R$ называется ***антитранзитивным***, если для любых $x_1, x_2, x_3$ из $x_1 R x_2$ и $x_2 R x_3$ следует, что $x_1 R x_3$ не выполняется.

**Пример.**

$R_1$ — “быть следующим годом” на множестве лет,

$R_2$ — “быть отцом” на множестве людей.

**Пример.**

Пусть $X = \left\{ \alpha, \beta, \gamma, \delta \right\}$. Пусть $R \subseteq X \times X$ определено в виде

$$R = \left\{ \left( \alpha, \alpha \right), \left( \alpha, \beta \right), \left( \alpha, \delta \right), \left( \beta, \alpha \right), \left( \delta, \alpha \right), \left( \delta, \delta \right), \left( \gamma, \delta \right), \left( \gamma, \gamma \right) \right\}.$$

1. $R$ не является рефлексивным, поскольку $\beta \in X$, но $\left( \beta, \beta \right) \notin R$.

2. $R$ не является симметричным, поскольку $\left( \gamma, \delta \right) \in R$, но $\left( \delta, \gamma \right) \notin R$.

3. $R$ не является антисимметричным, поскольку $\left( \alpha, \beta \right) \in R$ и $\left( \beta, \alpha \right) \in R$, но $\alpha \neq \beta$.

4. $R$ не является транзитивным, поскольку $\left( \beta, \alpha \right) \in R$, $\left( \alpha, \delta \right) \in R$, но $\left( \beta, \delta \right) \notin R$.

# Виды отношений.

## 1. Отношения эквивалентности.

*Элементы называют эквивалентными, если любой из них может быть заменен другим.*

В этом случае говорят, что данные элементы находятся в отношении эквивалентности.

*Свойства отношения эквивалентности*.

Отношение $R$ на множестве $X$ является **отношением эквивалентности** если оно

**рефлексивно,**

**симметрично,**

**транзитивно.**

## *В чем проявляются свойства эквивалентности?*

1. Свойство **рефлексивности** проявляется в том, что каждый элемент эквивалентен самому себе или $x \equiv x$.

2. Высказывание, что два элемента являются эквивалентными, не требует уточнения, какой из элементов рассматривается первым, какой вторым, т. е. имеет место $x \equiv y \rightarrow y \equiv x$ - свойство **симметричности.**

3. Два элемента, эквивалентные третьему, эквивалентны между собой, или имеет место $x \equiv y$ и $y \equiv z \rightarrow x \equiv z$ - свойство **транзитивности.**

## Обозначения отношений эквивалентности

В качестве общего символа отношения эквивалентности используется символ «$\equiv$» (иногда символ «$\sim$»).

Для отдельных частных отношений эквивалентности используются другие символы:

«=» - для обозначения равенства;

«$\|$» - для обозначения параллельности;

«$\leftrightarrow$» или «$\rightleftarrows$» - для обозначения логической эквивалентности.

**Пример 1.** Рассмотрим примеры множеств эквивалентности

***R*₁** — “a **=** **b**” на множестве чисел.

Пусть задано отношение $R_1 \subseteq X \times X$ на множестве $X = \{1, 2, 3\}$.

$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}.$$

Определим его свойства:

**1. Рефлексивность:** Каждый элемент эквивалентен самому себе: $1R_1 1, 2R_1 2, 3R_1 3$.

**2. Симметричность:**

Из $1R_1 2$ следует, что $2R_1 1$,

из $1R_1 3$ следует, что $3R_1 1$ ,

из $2R_1 3$ следует, что $3R_1 2$ .

4. **Транзитивность:**

Если $1R_1 2$ и $2R_1 3$ , то $1R_1 3$. Если $1R_1 3$ и $3R_1 2$ , то $1R_1 2$.

Если $2R_1 1$ и $1R_1 3$ , то $2R_1 3$. Если $2R_1 3$ и $3R_1 1$ , то $2R_1 1$.

Если $3R_1 1$ и $1R_1 2$ , то $3R_1 2$. Если $3R_1 2$ и $2R_1 1$ , то $3R_1 1$.

Пусть задано отношение $R = X \times X$.

**Пример 2.** ***R2*** — “a учится в одной группе с b” на множестве студентов университета.

Пусть задано отношение $R_2 \subseteq X \times X$ на множестве

Пусть $X = \{Иван, Ольга, Максим\}$

$$R_2 = \{(Иван, Ольга), (Иван, Максим), (Иван, Иван),$$
$$(Ольга, Иван), (Ольга, Ольга), (Ольга, Максим)$$
$$(Максим, Иван), (Максим, Ольга), (Максим, Максим)\}$$

**Рефлексивность:** «Иван учится в одной группе с самим собой»

**Симметричность:** «Иван учится в одной группе с Ольгой»$\equiv$ «Ольга учится в одной группе с Иваном».

**Транзитивность:** «Иван учится в одной группе с Ольгой » и «Ольга учится в одной группе с Максимом» $\rightarrow$ «Иван учится в одной группе с Максимом»

## классы эквивалентности

**Отношение** эквивалентности $R$ на множестве $A$ **разбивает** его **на подмножества**, элементы которых эквивалентны друг другу и не эквивалентны элементам других подмножеств.

**Определение**. Непересекающиеся подмножества, на которые разбивается множество $A$ отношением эквивалентности $R$, называются **классами эквивалентности**.

**Определение**. Множество классов эквивалентности множества $A$ относительно $R$ называется **фактор-множеством** и обозначается $[A]_R$ .

**Пример.**

Пусть множество $A$ — это набор разноцветных шаров.

1. Отношение $R_1$ зададим условием:

$\left(a,b\right) \in R$ если «$a$ одного цвета с $b$»

*Получим классы эквивалентности из шаров одного цвета.*

2. Отношение $R_2$ зададим условием:

$\left(a,b\right) \in R$ если «$a$ одного размера с $b$»

*Получим классы эквивалентности из шаров одного размера*

3. Отношение $R_3$ зададим условием:

$\left(a,b\right) \in R$ если «$a$ одинаковой формы с $b$»

*Получим классы эквивалентности из шаров одинаковой формы.*

## Определение класса эквивалентности

Пусть $a_i \in A$ - *элемент множества* $A = \{a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n\}$ и $R$ — отношение эквивалентности на $A \times A$.

Тогда $[a_i]$ обозначает множество $\{x | xRa_i\} = \{x | (x, a_i) \in R\}$ и называется ***классом эквивалентности***, содержащим $a_i$. Символ $[A]_R$ обозначает множество всех классов эквивалентности множества $A$ по отношению $R$. Таким образом,

$[A]_R$ - *фактор-множество*

**Пример.** Пусть $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ и дано отношение эквивалентности:

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(1,4),$$
$$(2,1),(2,4),(3,5),(5,3),(4,1),(4,2)\}.$$

Классы эквивалентности по отношению $R$ были получены путем определения класса эквивалентности каждого элемента множества $A$:

$$\left[1\right] = \left\{x \middle| \left(x,1\right) \in R\right\} = \left\{x \middle| xR1\right\} = \left\{1,2,4\right\}$$

где

$1 \in \left[1\right]$, поскольку $\left(1,1\right) \in R$,

$2 \in \left[1\right]$ т. к. $\left(2,1\right) \in R$,

$4 \in \left[1\right]$ поскольку $\left(4,1\right) \in R$.

Точно так же, получаем

$$\left[2\right] = \left\{x \middle| \left(x,2\right) \in R\right\} = \left\{x \middle| xR2\right\} = \left\{2,1,4\right\}$$

$$\left[3\right] = \left\{x \middle| \left(x,3\right) \in R\right\} = \left\{x \middle| xR3\right\} = \left\{3,5\right\}$$

$$\left[4\right] = \left\{x \middle| \left(x,4\right) \in R\right\} = \left\{x \middle| xR4\right\} = \left\{4,1,2\right\}$$

$$\left[5\right] = \left\{x \middle| \left(x,5\right) \in R\right\} = \left\{x \middle| xR5\right\} = \left\{5,3\right\}$$

$$\left[6\right] = \left\{x \middle| \left(x,6\right) \in R\right\} = \left\{x \middle| xR6\right\} = \left\{6\right\}$$

**Пример.** Пусть $Q$ – множество рациональных чисел.
Разобьем $Q$ на классы эквивалентности, для которых $a/b$ - рациональная дробь, где $a \in Z$ , $b \in N$.
Любая дробь $c/d$ будет отнесена к одному классу эквивалентности с $a/b$ тогда и только тогда, когда $ad = bc$.
(Например: $2/4 \sim 3/6$, $2/6 \sim 3/9$).
Свойства такого отношения.
1. **Рефлексивность.** Для любой дроби $a/b$ выполняется равенство $ab = ba$. Следовательно, $a/bRa/b$.
2. **Симметричность.** Если $a/bRc/d$ , то $ad = bc$, в то же время $bc = ad$ . Отсюда $c/d\ Ra/b$.
3. **Транзитивность.** Пусть $a/bRc/d$ и $c/dRm/n$. Докажем, что $a/bRm/n$, т. е. $an = bm$. Действительно, поскольку $a/bRc/d$ , то $ad = bc$ и $c/dRm/n$, то $cn = dm$. Домножим первое равенство на $n$, а второе на $b$, получим $and = bcn$ и $bcn = bmd$ . В обоих равенствах присутствует $bcn$. Поэтому $and = bmd$ или $an = bm$.