Інтегральна теорема Коші для двозв'язної області

Теорема : Нехай функція $f(z)$ аналітична в двозв'язній області D з кусково-гладкою межею ∂D і неперервна в замкненій області $\overline{D}$. Тоді

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Розглянемо двозв'язну область D з зовнішнім контуром Γ та внутрішнім контуром γ (рис. 67.2). Зорієнтуємо межу ∂D області D додатно, тобто, щоб під час обходу межі область D весь час лишалась ліворуч. При цьому зовнішній контур Γ обходиться проти годинникової стрілки, а внутрішній контур γ - за годинниковою стрілкою.

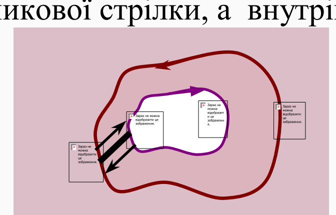

Рис. 67.2

З'єднаємо контури Γ та γ гладкою кривою $l = AB$. Тоді область D можна розглядати як однозв'язну область, обмежену контуром $\Gamma^+ \cup AB \cup \gamma^- \cup BA$. За *інтегральною теоремою Коші для однозв'язної області*

$$\oint\limits_{\Gamma^+ \cup AB \cup \gamma^- \cup BA} f(z)dz = 0.$$

Але $\displaystyle\int\limits_{AB \cup BA} f(z)dz = 0$, тому

$$\oint\limits_{\Gamma^+ \cup \gamma^-} f(z)dz = \oint\limits_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Доведене співвідношення, враховуючи, що

$$\int\limits_{\gamma^-} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma^+} f(z)dz,$$

можна записати у вигляді:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} f(z)dz, \qquad (67.7)$$

тобто інтеграл вздовж зовнішнього контуру дорівнює інтегралу вздовж внутрішнього контуру (контури однаково орієнтовані).