Лекція 1

План лекції «Основи теорії множин»

1. Основні визначення

1.1. Визначення множини
1.2. Способи задавання множин
1.3. Визначення підмножини
1.4. Визначення рівності множин
1.5. Визначення порожньої множини
1.6. Визначення універсальної множини
1.7. Скінченна й нескінченна множини,
злічення й незлічення множини, n-множина,
потужність множини

2. Операції над множинами

2.1. Об'єднання
2.2. Перетин
2.3. Різниця
2.4. Симетрична різниця
2.5. Доповнення

3. Діаграми Венна

4. Тотожності алгебри множин

1. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ

Базові поняття теорії множин створені математиками XIX ст., які працювали над основами математичного аналізу. Основу теорії множин заклав німецький математик Георг Кантор (1845–1918). Йому належить висловлення, яке сьогодні розглядається як інтуїтивне визначення множини: «Множина – це розмаїття, мислиме як єдине».

Однак пізніше виявилося, що таке визначення множини має внутрішнє протиріччя. Прикладом може служити парадокс Рассела, що одержав у популярній літературі назву парадокса цирульника. Суть його полягає в нерозв'язності питання про те, чи повинен голитися цирульник, який дав обіцянку голити всіх у його селі, хто не голиться сам?

1.1. Визначення множини

Множина — сукупність різноманітних об'єктів, що мають певну спільну властивість, яка об'єднує їх у єдине ціле.

Приклади множин: множина студентів, присутніх на лекції, множина парних чисел, множина громадян України. Елементом множини може бути інша множина.

Таке визначення множини вимагає введення наступних позначень:
1. *Множина* позначається великою літерою будь-якого алфавіту.
Наприклад: A, B, C,…, X, Y,…,Z.

2. *Елемент* множини позначається малою літерою будь-якого алфавіту.

Наприклад: *a*, *b*, *c*,…,*x*, *y*,…,*z*. Якщо елемент множини є множиною, то він представляється набором своїх елементів у фігурних дужках. Наприклад, $A = \{a, b, c, \{d, c, n\}\}$

3. *Приналежність* елемента множині позначається символом $\in$ – «належить». Якщо елемент не належить множині, то використовують позначення $\notin$ – «не належить». Елемент може належати множині, якщо він є одним з об'єктів цієї множини.

Приклад: Позначення $x \in X$ показує, що елемент x належить множині X, тобто x є одним з елементів множини X. Позначення $\{d, c, n\} \in X$ показує, що множина $\{d, c, n\}$ є елементом множини *X*.

Позначення $a \notin X$ показує, що елемент a не належить множині X.

Вправа.
Нехай *A* – множина рослин, що ростуть у парку КПІ, *B* – множина квітів, *C* – множина дерев.
a) Назвіть два елементи множини *B*, що не є елементами множини *A*.
b) Назвіть два елементи множини *C*, що не є елементами множини *A*.

1.2. Способи задавання множини

1. Задавання множини *в явній формі* шляхом перерахування її елементів: $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$, де n — кількість елементів множини.

Такий спосіб задавання множини громіздкий і не використовується при великій кількості елементів.

2. Задавання множини *предикатом*.

У цьому випадку множину задають шляхом задавання умови або властивості $P(x)$, якій повинні задовольняти всі елементи x множини. Властивість $P(x)$ називають предикатом. Предикат дозволяє із сукупності об'єктів виділити ті, що належать множині. У цьому випадку множину записують у такий спосіб:

$$X = \{x | P(x)\}.$$

Читають цей вираз так:
Множина X складається з таких елементів x, що $P(x)$.

Приклад: Нехай предикат задано висловлюванням «x є парне число».
Тоді множина X складається з таких елементів x, що x є парне число, тобто елементи множини X — парні числа.

3. Задавання множини *рекурсивною процедурою.*

Рекурсивна процедура дозволяє визначити наступні елементи множини через попередні.

Приклад: Множину натуральних чисел $N = \{1, 2, 3, ...\}$ можна задати в такий спосіб:

$$N = \{ i \mid \text{якщо ціле } i \in N, \text{ то } i+1 \in N, \ i \geq 1 \}$$

Приклад. Задати множину $A=\{x \mid x \in N, x$ – дільник числа $20\}$.
Розв'язок.

$A=\{x \mid x \in N, x$ – дільник числа $20\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

1.3. Визначення підмножини

Нехай кожний елемент множини має не одну властивість, а деякий набір властивостей. Однак для приналежності елемента до даної множини достатньо того, щоб тільки одна властивість із даного набору була спільною для всіх елементів.

У той же час, ніщо не заважає нам згрупувати елементи відповідно до будь-якої іншої властивості. У такий спосіб ми можемо утворювати **підмножини** даної множини, тобто сукупність елементів, що відрізняються від інших елементів даної множини за деякою властивістю.

Множина A **є підмножиною множини** X**,** якщо кожний елемент множини A є елементом множини X, тобто якщо $x \in A$ то $x \in X$. Зокрема, будь-яка множина є підмножиною самої себе.

Для визначення співвідношення множини й підмножини використовують позначення:

$\subseteq$ — «входить в»;

$\subset$ — «строго входить в».

$A \subseteq X$ — множина A входить у множину X. При цьому не виключається випадок, коли всі елементи множини A й множини X збігаються.

$B \subset X$ — множина B строго входить у множину X. У цьому випадку підкреслюється той факт, що в множині X обов'язково існують елементи, що не належать множині B.

Приклад.

$$X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \quad A = \{3,7,9\}.$$

1. $3 \in A$, $3 \in X$.
2. $7 \in A$, $7 \in X$.
3. $9 \in A$, $9 \in X$.

Однак, $0 \notin A$, $0 \in X$. Тому $A \subset X$.

Будемо користуватися наступними позначеннями, які полегшують запис співвідношень, пов'язаних з підмножинами:

$\forall$ — символ, називаний квантором (лат. quantum-скільки). Він означає «будь-який», «довільний»;

$\rightarrow$ — символ наслідку (імплікації), що означає «спричиняє», «якщо..., то ...»;

$\leftrightarrow$ — символ, що означає еквівалентність (у розумінні «те ж саме, що»).

1.4. Визначення рівності множин

Множина X дорівнює множині Y у випадку, якщо будь-який елемент a належить множині X $\left(a \in X\right)$ тоді й тільки тоді, коли $a \in Y$. Іншими словами $X = Y$ (X дорівнює Y) тоді й тільки тоді, коли $X \subseteq Y$ й $Y \subseteq X$.

Приклад. $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{c, a, b, d\}$. Будь-який елемент, що належить множині X, належить множині Y. Отже $X = Y$.

1.5. Визначення порожньої множини

Порожня множина — це множина, яка не містить елементів.

Позначення порожньої множини: $\varnothing$ або $\{\ \}$.

Властивість порожньої множини.

Порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Вправа

Чи є множина, що складається з числа 0, порожньою множиною?

1.6. Визначення універсальної множини

Універсальна множина U — це множина, властивістю якої є те, що всі розглянуті множини є її підмножинами.

Властивість універсальної множини

Властивість 1. Будь-який об'єкт, яка б не була його природа, є елементом універсальної множини. $\forall x \to x \in U$, зокрема $U \in U$.

Властивість 2. Будь-яка множина є підмножиною універсальної множини. $\forall A \to A \subseteq U$, зокрема $U \subseteq U$.

Приклад

1. Універсальна множина в теорії чисел — множина цілих чисел.
2. Універсальна множина в математичному аналізі — множина дійсних чисел.

Множина U, незважаючи на те, що названа універсальною, не може бути однозначно визначена, якщо не названа предметна область, тобто не зазначена властивість об'єктів, за якою дана множина формується.

1.7. Скінченні й нескінченні множини

Скінченна множина — це множина, кількість елементів якої скінченна, тобто, існує невід'ємне ціле число k, яке дорівнює кількості елементів цієї множини. Якщо такого числа не існує, то множина називається нескінченною.

Нескінченна множина — множина, що включає нескінченну кількість елементів.

Злічена множина — нескінченна множина, елементи якої можливо пронумерувати натуральними числами.

Незлічена множина — така нескінченна множина, яка не є зліченною.

Таким чином, будь-яка множина є або скінченна, або зліченна, або незліченна.

n *-множина* — це множина, що складається з n елементів.

Потужність множини визначається як кількість елементів множини.

Потужність множини X позначається $\left|X\right|$ або $\# X$.

Якщо | A | = | B |, то множини A и B *називають* ***рівнопотужними.***

Булеан

Множину всіх підмножин множини *M* називають ***булеаном*** і позначають 2^M

$$2^M = \left\{A \middle| A \subseteq M\right\}.$$

Для скінченної множини M з $n = |M|$ кількість її підмножин (потужність булеана) дорівнює $2^n = 2^{|M|}$. Отже $\left|2^M\right| = 2^{|M|}$.

Вправа

Нехай *A* – множина студентів вашої групи, яка її потужність?

Яка потужність булеана вашої групи?

2. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

Операції над множинами дозволяють будувати нові множини, використовуючи вже існуючі.

2.1. Об'єднання

Об'єднанням множин X і Y називають множину, що складається із усіх тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній із множин X, Y, тобто належать X або належать Y.

(Об'єднання множин іноді називають сумою або додаванням множин)

Визначення об'єднання множин X і Y може бути записане в такий спосіб:

$$x \in X \cup Y \leftrightarrow x \in X \text{ або } x \in Y.$$

$\leftrightarrow$ — символ, що означає еквівалентність (у змісті «те ж саме, що»).

У літературі часто використовують ще й таке визначення:

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ або } x \in Y\}$$

Тут «або» відіграє не розділову (або-або), а об'єднавчу роль, тобто об'єднанню належать і спільні елементи згаданих множин.

Приклад.

$X = \left\{1,2,3,4,5\right\}$,$Y = \left\{2, 5,8,9\right\}$, $X \cup Y = \left\{1,2,3,4,5,8,9\right\}$

Об'єднання множин у загальному випадку визначається в такий спосіб:

Нехай $I = \left\{1,2,3,...,n\right\}$. Тоді

$$\bigcup_{i \in I} X_i = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup ... \cup X_n = \{x \mid \text{існує } i \in I \text{ таке, що } x \in X_i\}.$$

2.2. Перетин

Перетином множин X і Y називається множина, що складається із усіх тих і тільки тих елементів, які належать як множині X, так і множині Y. (Перетин множин іноді називають добутком множин).

Перетин множин X і Y позначається так: $X \cap Y$ «перетин X і Y».

Визначення перетину множин X і Y може бути записане в такий спосіб:

$$x \in X \cap Y \leftrightarrow x \in X \text{ і } x \in Y$$

Часто використовується також визначення:

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ і } x \in Y\}.$$

Приклад.

$$X = \left\{1,2,3,4,5\right\} ,Y = \left\{2, 5,8,9\right\}, X \cap Y = \left\{ 2,5\right\} .$$

Перетин множин у загальному випадку визначається в такий спосіб:

Нехай $I = \left\{1,2,3,...,n\right\}$. Тоді

$$\bigcap_{i \in I} X_i = X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap ... \cap X_n = \{x \mid x \in X_i \text{ для всіх } i \in I\}.$$

Вправа

1. Найстарший математик серед шахістів і найстарший шахіст серед математиків – це та сама людина чи (можливо) різні?
2. Найкращий математик серед шахістів і найкращий шахіст серед математиків – це та сама людина чи (можливо) різні?

2.3. Різниця

Ця операція, на відміну від операцій об'єднання і перетину, може бути застосована тільки для двох множин.

Різницею множин X і Y називається множина, що складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать X, але не належать Y.

Різниця множин X і Y позначається $X \setminus Y$ або $X - Y$. Визначення різниці множин X і Y може бути записане так:

$$x \in X \setminus Y \leftrightarrow x \in X \text{ і } x \notin Y$$

Різницю множин можна також визначити в такий спосіб:

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ і } x \notin Y\}.$$

Приклад:

Якщо $X = \{1,2,3,4,5\}$ і $Y = \{2,4,6,7\}$, то

$$X \setminus Y = \{1,3,5\},\ Y \setminus X = \{6,7\}.$$

2.4. Симетрична різниця

Симетрична різниця множин X і Y визначається виразом

$$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Приклад: Нехай $X = \{1,2,4,6,7\}$ і $Y = \{2,3,4,5,6\}$.

Тоді $X \setminus Y = \{1,7\}, Y - X = \{3,5\},\ X \Delta Y = \{1,3,5,7\}$.

2.5. Доповнення

Доповнення множини X, позначуване як $\overline{X}$, визначається як множина елементів універсальної множини, що не належать множині X. Отже,

$$\overline{X} = U \setminus X = \{x \mid x \in U \text{ і } x \notin X\}$$

Множина $\overline{X}$ читається як НЕ X і включає всі елементи універсальної множини, що не ввійшли в множину X.

Часто використовуваним еквівалентним позначенням множини $\overline{X}$ є позначення $\neg X$. Отже $\overline{X} = \neg X$.

3. ДІАГРАМИ ВЕННА (Ейлера)

Діаграми Венна (Ейлера) — дуже зручний інструмент, що дозволяє зображувати множини й ілюструвати операції над ними. Множини в діаграмах Венна зображуються внутрішніми частинами кіл, їх перетинами, об'єднаннями і т.д. На рис. 2.1 наведена діаграма Венна для множини X, яка зображена внутрішньою частиною кола. Зовнішня частина кола зображує $\overline{X}$.

На рис. 2.2 наведена діаграма Венна для двох множин: X і Y. Кожна множина зображена колом, і кола перетинаються.

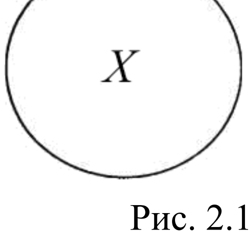


Рис. 2.1

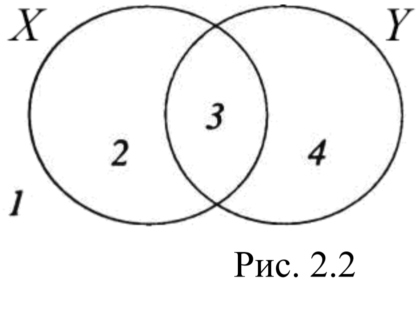
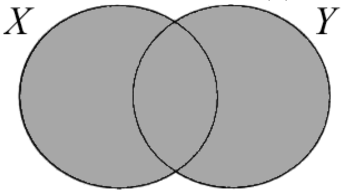


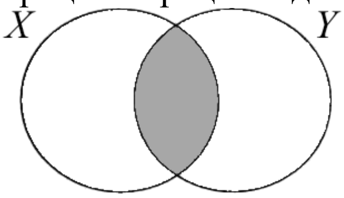
Рис. 2.2

На рис.2.2 можна бачити 4 області: 1 – область універсальної множини, 2 – область, що належить тільки множині X, 3 – область, що належить спільно множинам X і Y, 4 – область, що належить тільки множині Y.

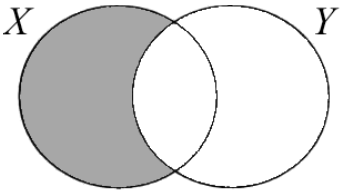
Нижче наведені ілюстрації операцій над множинами.



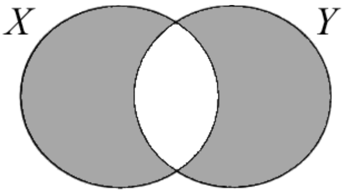
$X \cup Y$



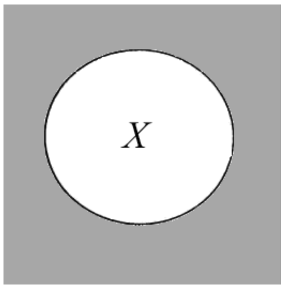
$X \cap Y$



$X \setminus Y$



$X \Delta Y$



$\overline{X}$

4. ТОТОЖНОСТІ АЛГЕБРИ МНОЖИН

Тотожності алгебри множин, сформульовані в наведених нижче теоремах, можуть бути перевірені шляхом формальних доказів або на діаграмах Венна.

Таблиця 1

1. Комутативність об'єднання $X \cup Y = Y \cup X$	1. Комутативність перетину $X \cap Y = Y \cap X$
2. Асоціативність об'єднання $X \cup \left(Y \cup Z\right) = \left(X \cup Y\right) \cup Z$	2. Асоціативність перетину $X \cap \left(Y \cap Z\right) = \left(X \cap Y\right) \cap Z$
3. Дистрибутивність об'єднання відносно перетину $X \cup \left(Y \cap Z\right) = \left(X \cup Y\right) \cap \left(X \cup Z\right)$	3. Дистрибутивність перетину відносно об'єднання $X \cap \left(Y \cup Z\right) = \left(X \cap Y\right) \cup \left(X \cap Z\right)$
4. Закони дії з порожніми і універсальними	4. Закони дії з порожніми і універсальними

множинами $X \cup \varnothing = X$ $X \cup \overline{X} = U$ $X \cup U = U$	множинами $X \cap U = X$ $X \cap \overline{X} = \varnothing$ $X \cap \varnothing = \varnothing$
5.Закон ідемпотентності об'єднання Термін **ідемпотентність** означає властивість математичного об'єкта, яка проявляється в тому, що **повторна дія** над об'єктом ***не змінює*** його $X \cup X = X$	5. Закон ідемпотентності перетину $X \cap X = X$
6. Закон де Моргана $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$	6. Закон де Моргана $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$
7. Закон поглинання $X \cup \left(X \cap Y\right) = X$	7. Закон поглинання $X \cap \left(X \bigcup Y\right) = X$
8. Закон склеювання $\left(X \cap Y\right) \cup \left(X \cap \overline{Y}\right) = X$	8. Закон склеювання $\left(X \cup Y\right) \cap \left(X \cup \overline{Y}\right) = X$
9. Закон Порецького $X \cup \left(\overline{X} \cap Y\right) = X \cup Y$	9. Закон Порецького $X \cap \left(\overline{X} \cup Y\right) = X \cap Y$
10. Закон подвійного доповнення $\overline{\overline{X}} = X$	

У справедливості перерахованих властивостей можна переконатися у різний спосіб. Наприклад, намалювати діаграми Ейлера для лівої й правої частин тотожностей й переконатися, що вони збігаються, або ж провести формальне міркування для кожної тотожності. Розглянемо для прикладу першу тотожність: $A \cup A = A$. Візьмемо довільний елемент x, що належить до лівої частини тотожності, $x \in A \cup A$. За визначенням операції об'єднання маємо: $x \in A$ або $x \in A$. У кожному разі $x \in A$. Візьмемо знову довільний елемент з множини в лівій частині тотожності. Виявляється, що він належить множині в правій частині. Звідси за визначенням включення множин одержуємо, що $A \cup A \subseteq A$. Нехай тепер $x \in A$. Тоді, очевидно, вірно, що $x \in A$ або $x \in A$. Звідси за визначенням операції об'єднання маємо $x \subseteq A \cup A$. Таким чином, $A \subseteq A \cup A$.

Отже, за визначенням тотожності множин: $A \cup A = A$. Аналогічні міркування неважко провести й для інших тотожностей.

Для доведення можна використовувати тотожності алгебри логіки.
Доведемо в такий спосіб властивість дистрибутивності множин.

ТЕОРЕМА

Для множин X і Y справджується тотожність:

$$X \cap \left(Y \cup Z\right) = \left(X \cap Y\right) \cup \left(X \cap Z\right)$$

ДОВЕДЕННЯ

При доведенні скористаємося операціями алгебри логіки, оскільки для доведення співвідношень на множинах необхідно довести, що ці співвідношення справедливі для всіх його елементів.

$x \in X \cap \left(Y \cup Z\right) \leftrightarrow \left(x \in X\right) \wedge \left(x \in \left(Y \cup Z\right)\right) \leftrightarrow$ Визначення перетину

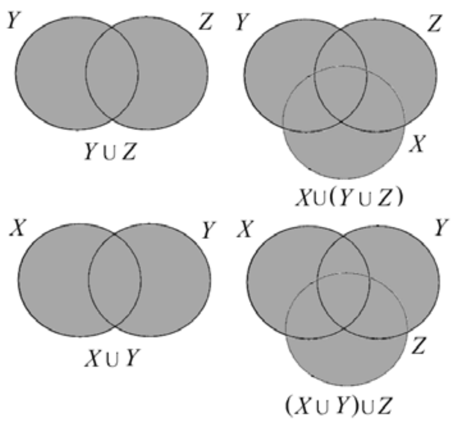
$\leftrightarrow \left(x \in X\right) \wedge \left(x \in \left(\left(x \in Y\right) \vee \left(x \in Z\right)\right)\right) \leftrightarrow$ Визначення об'єднання

$\leftrightarrow \left(\left(x \in X\right) \wedge \left(x \in Y\right)\right) \vee \left(\left(x \in X\right) \wedge \left(x \in Z\right)\right) \leftrightarrow$ Закон логіки де Моргана

$\leftrightarrow \left(x \in \left(X \cap Y\right)\right) \vee \left(x \in \left(X \cap Z\right)\right) \leftrightarrow$ Визначення перетину

$\leftrightarrow x \in \left(\left(X \cap Y\right) \cup \left(X \cap Z\right)\right)$ Визначення об'єднання

Для доведення також використовують діаграми Венна (Ейлера)
Доведемо властивість асоціативності за допомогою діаграм Венна



1. Будуємо $\left(Y \cup Z\right)$ й потім $X \cup \left(Y \cup Z\right)$
2. Будуємо $\left(X \cup Y\right)$ й потім $\left(X \cup Y\right) \cup Z$

Для доведення тотожностей алгебри множин можна використовувати інші тотожності алгебри множин.

ТЕОРЕМА. Для множин X і Y справедлива тотожність

$$\left(X \cap Y\right) \cup \left(X \cap \overline{Y}\right) = X$$

ДОВЕДЕННЯ. Доведемо цю тотожність двома способами: аналітично (використовуючи алгебру множин) і конструктивно (використовуючи діаграми Ейлера-Венна).

$(X \cap Y) \cup \left(X \cap \bar{Y}\right) =$ початковий вираз

$= \left(X \cup \left(X \cap \bar{Y}\right)\right) \cap \left(Y \cup \left(X \cap \bar{Y}\right)\right) =$ застосували закон дистрибутивності відносно $\left(X \cap \bar{Y}\right)$

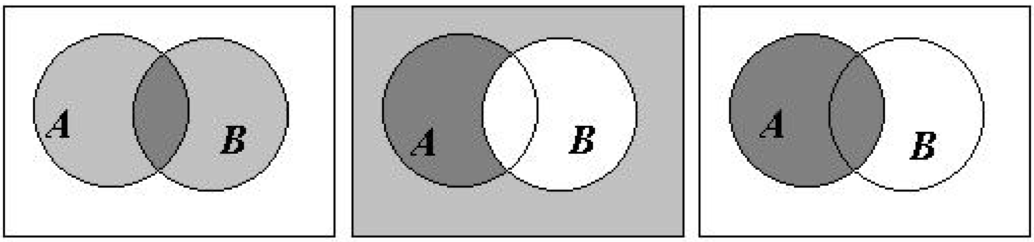
$= \left(X \cup \left(X \cap \bar{Y}\right)\right) \cap \left(Y \cup X\right) =$ застосували закон Порецького

$= X \cap \left(Y \cup X\right) =$ застосували закон склеювання для об'єднання

$= X$ застосували закон склеювання для перетину

2. Побудуємо відповідні діаграми Ейлера-Венна.

$X \cap Y$ $\qquad$ $X \cap \bar{Y}$ $\qquad$ $\left(X \cap Y\right) \cup \left(X \cap \bar{Y}\right) = X$



Приклад. Доведемо тотожність:

$$A \setminus \left(B \cup C\right) = \left(A \setminus B\right) \setminus C$$

Доведення:

1 спосіб

1) Доведемо, що $A \setminus \left(B \cup C\right) \subseteq \left(A \setminus B\right) \setminus C$. Розглянемо довільний елемент множини $A \setminus \left(B \cup C\right)$:

$x \in A \setminus \left(B \cup C\right) \Rightarrow x \in A$ і $x \notin B \cup C \Rightarrow x \in A$ і $x \notin B$ і $x \notin C \Rightarrow x \in A \setminus B$ й $x \notin C \Rightarrow x \in \left(A \setminus B\right) \setminus C$.

2) Доведемо, що $\left(A \setminus B\right) \setminus C \subseteq A \setminus \left(B \cup C\right)$. Нехай $x \in \left(A \setminus B\right) \setminus C$:

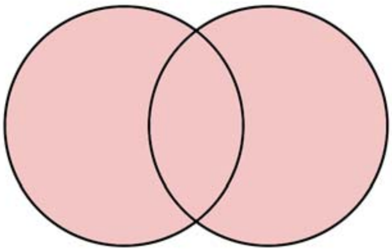
$x \in \left(A \setminus B\right) \setminus C \Rightarrow x \in A \setminus B$ і $x \notin C \Rightarrow x \in A$ і $x \notin B$ і $x \notin C \Rightarrow x \in A$ й $x \notin B \cup C \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in A \setminus \left(B \cup C\right)$.

2 спосіб

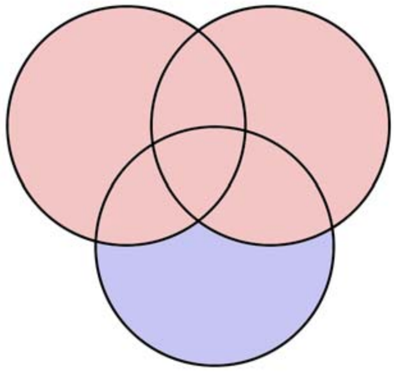
Перетворимо ліву частину тотожності в праву за допомогою властивостей операцій над множинами:

$$A \setminus \left(B \cup C\right) = A \cap \left(\overline{B \cup C}\right) = A \cap \left(\bar{B} \cap \bar{C}\right) = \left(A \cap \bar{B}\right) \cap \bar{C} = \left(A \setminus B\right) \cap \bar{C} = \left(A \setminus B\right) \setminus C$$

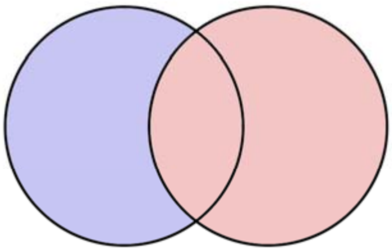
Зобразимо обидві частини тотожності за допомогою кіл Ейлера-Венна:



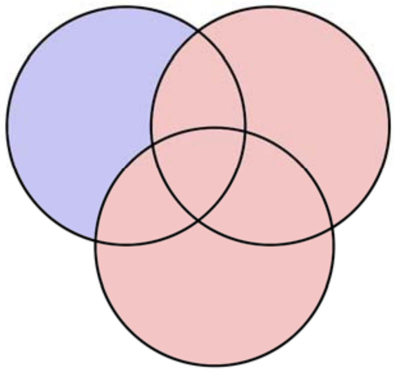
$\left(B \cup C\right)$



$A \setminus \left(B \cup C\right)$



$\left(A \setminus B\right)$



$\left(A \setminus B\right) \setminus C$