МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. 50-летия ВЕЛИКОЙ ОКТЯБРЬСКОЙ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ТИПОВОМУ РАСЧЕТУ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ для студентов всех специальностей

Утверждено
на заседании кафедры
высшей математики № I
Протокол № 7 от 09.12.87 г.

Киев КПИ 1988

Методические указания к типовому расчету по аналитической геометрии для студентов всех специальностей /Сост. Л.П.Пеклова, Т.Г.Стрижак, Г.Г.Барановская и др. – Киев: КПИ, 1988. – 84 с.

Составители: Л.П.Пеклова, доцент
Т.Г.Стрижак, профессор
Г.Г.Барановская, доцент
Л.Б.Федорова, ассистент
А.М.Швиданенко, доцент
Ю.П.Буценко, ассистент
В.В.Дрозд, ассистент
Н.Р.Коновалова, ассистент

Ответственный редактор В.Г.Лозовик, доцент

Рецензенты: Н.А.Вирченко, доцент
Н.Г.Красношапка, доцент

В методических указаниях приведены расчетные задания, предназначенные для самостоятельного (каждая задача содержит 30-31 вариант) выполнения их студентами I курса, изучающими курс аналитической геометрии и элементов линейной алгебры. Кроме расчетных заданий, каждый раздел содержит теоретические вопросы и теоретические задачи и упражнения, являющиеся общими для всех студентов.

В основу методических указаний положен "Сборник заданий по высшей математике" [5].

В прил.1 кратко изложены методы Гаусса - Жордана и Зейделя для приближенного решения системы линейных алгебраических уравнений, даны программы для микрокалькуляторов типа МК-54, МК-61 и решения контрольных примеров.

Защита каждой части типового расчета, выполняемого студентами по частям в процессе изучения курса, заключается в ответах на теоретические вопросы, пояснении решения теоретических упражнений и задач, представлении решения расчетной части задания в письменной форме. Образец оформления титульного листа типового расчета приведен в прил.2.

1. МЕТОД КООРДИНАТ. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

1.1. Теоретические вопросы

1. Декартовы и полярные координаты.
2. Длина отрезка. Деление отрезка в данном отношении.

3. Уравнение прямой на плоскости (общего вида, с угловым коэффициентом, в отрезках).

4. Уравнение пучка прямых.

5. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой.

6. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

I.2. Теоретические задачи и упражнения

I. Вывести формулу расстояния между двумя точками в полярных координатах

$$d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}.$$

2. Вывести формулу для нахождения координат центра тяжести однородной треугольной пластинки.

3. Вывести формулу для нахождения центра тяжести системы, состоящей из I) двух; 2) трех; 3) n материальных точек.

4. Вывести формулу для вычисления площади треугольника через координаты трех его вершин:

$$S=\pm\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right].$$

5. Вывести формулу для вычисления угла между прямыми через угловые коэффициенты прямых.

6. Составить уравнение биссектрис углов, образованных при пересечении двух данных прямых.

7. Показать, что если в левой части уравнения окружности

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$$

подставить координаты любой точки, лежащей вне круга, то получится квадрат касательной, проведенной из этой точки к окружности.

8. Показать, что геометрическое место точек плоскости, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек постоянна, есть прямая.

9. Показать, что три точки $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $(x_3;y_3)$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

I0. Показать, что уравнение прямой в полярных координатах имеет вид

$$\rho\cos(\alpha-\varphi)=\rho_0 .$$

Какой геометрический смысл имеют здесь α и ρ_0?

I.3. Расчетные задания

Задача I. Перейти от декартовых координат к полярным и построить кривые.

I.I. $(x^2+y^2)^2=2xy$.
I.2. $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.
I.3. $(x^2+y^2)^{3/2}=x+y$.
I.4. $x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}-2=0$.
I.5. $(x^2+y^2)^{3/2}=y$.
I.6. $x^2+y^2=x+y$.
I.7. $x^2+y^2=2x+3$.
I.8. $x^2+y^2=2y$.
I.9. $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$
I.I0. $(x^2+y^2-2x)^2-b^2(x^2+y^2)=0$.
I.II. $x^2-y^2=1$.
I.I2. $x^2+y^2=x$.
I.I3. $(x-a)^2+y^2=0$.
I.I4. $(x^2+y^2)^{3/2}=x^2-y^2$.
I.I5. $x^2+(y-a)^2=a^2$.
I.I6. $3x-2y=8$.
I.I7. $xy=1$.
I.I8. $\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
I.I9. $x+y=1$.
I.20. $xy=c/a$.
I.2I. $x^2+y^2=2x+4y$.
I.22. $(x^2+y^2)^{3/2}=2xy$.
I.23. $x^2+y^2=4x$.
I.24. $x^2+y^2=\sqrt{3}\,y$.
I.25. $x^2-y^2=16$.
I.26. $x^2/4+y^2/9=1$.
I.27. $x^2/4-y^2/9=1$.
I.28. $y^2=2ax-x^2$.
I.29. $4x^2-3y^2=1$.
I.30. $(x^2+y^2)^2=18xy$.

Задача 2. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки (размеры: a, b, c, d) или однородной линии (размеры: a, b, c, α).

К рис.I

2.I. $a=3$, $b=4$, $c=4$, $d=$ I.
2.2. $a=4$, $b=3$, $c=3$, $d=3$.
2.3. $a=2$, $b=5$, $c=4$, $d=3$.
2.4. $a=$ I, $b=5$, $c=4$, $d=2$.
2.5. $a=5$, $b=$ I, $c=4$, $d=3$.
2.6. $a=6$, $b=$ I, $c=5$, $d=$ I.
2.7. $a=2$, $b=3$, $c=2$, $d=4$.
2.8. $a=3$, $b=5$, $c=4$, $d=$ I.
2.9. $a=4$, $b=2$, $c=3$, $d=3$.
2.I0. $a=$ I, $b=3$, $c=6$, $d=2$.

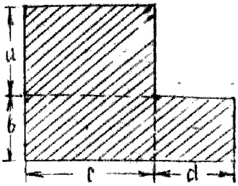

Рис.I

2*

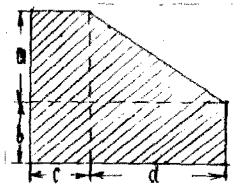

Рис.2

К рис.2

2.11. $a = 3,\ b = 4,\ c = 4,\ d = 1.$
2.12. $a = 4,\ b = 3,\ c = 3,\ d = 3.$
2.13. $a = 2,\ b = 5,\ c = 4,\ d = 3.$
2.14. $a = 1,\ b = 5,\ c = 4,\ d = 2.$
2.15. $a = 1,\ b = 5,\ c = 4,\ d = 2.$
2.16. $a = 6,\ b = 1,\ c = 5,\ d = 1.$
2.17. $a = 2,\ b = 3,\ c = 2,\ d = 4.$
2.18. $a = 3,\ b = 3,\ c = 4,\ d = 2.$
2.19. $a = 4,\ b = 2,\ c = 3,\ d = 5.$
2.20. $a = 5,\ b = 3,\ c = 6,\ d = 2.$

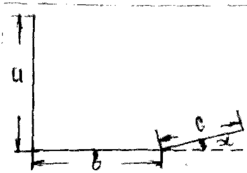

Рис.3

К рис.3

2.21. $a = 5,\ b = 4,\ c = 3,\ \alpha = \pi/2$
2.22. $a = 5,\ b = 4,\ c = 3,\ \alpha = \pi/4$
2.23. $a = 6,\ b = 4,\ c = 4,\ \alpha = \pi/3$
2.24. $a = 6,\ b = 6,\ c = 4,\ \alpha = \pi/2.$
2.25. $a = 8,\ b = 6,\ c = 4,\ \alpha = \pi/4$
2.26. $a = 8,\ b = 6,\ c = 4,\ \alpha = \pi/3$
2.27. $a = 4,\ b = 8,\ c = 6,\ \alpha = \pi/2$
2.28. $a = 4,\ b = 8,\ c = 6,\ \alpha = \pi/4.$
2.29. $a = 6,\ b = 8,\ c = 4,\ \alpha = \pi/3$
2.30. $a = 10,\ b = 8,\ c = 8,\ \alpha = \pi/2.$

Задача 3. В треугольнике ABC найти:

а) уравнение медианы AE ;
б) уравнение биссектрисы BF ;
в) уравнение высоты CD ;
г) центр тяжести однородной пластины ABC ;
д) площадь треугольника ABC;
е) уравнения прямой, проходящей через точку A параллельной прямой BC.

3.1.	A (0; 3).	B (0; 0).	C (-8; 0).
3.2.	A (1; 2).	B (1;-2).	C (-5;-2).
3.3.	A (-1;6).	B (-1;1).	C (-49; 1).
3.4.	A (-12; 2).	B (0; 2).	C (0; -8).
3.5.	A (-10; 2).	B (-13; 0).	C (-11; 3).
3.6.	A (0; 2).	B (6; 0)	C (0; -2).

3.7.	A (I; I).	B (I; -2).	C (-7; -2).
3.8.	A (-I; 5).	B (-I; I).	C (-I3; I).
3.9.	A (-5; 2).	B (0; 2).	C (0; -22).
3.I0.	A (-I0; -9);	B (-I0; 3).	C (0; 3).
3.II.	A (0; I).	B (3; 3).	C (I; 0).
3.I2.	A (I; 0).	B (7; -2).	C (I; -4).
3.I3.	A (-I; 4).	B (-I; I).	C (-I7; I).
3.I4.	A (-4; 2).	B (0; 2).	C (0; -4).
3.I5.	A (-I0; -2).	B (-I0; 3).	C (I4; 3).
3.I6.	A (0; I2).	B (0; 0).	C (-I0; 0).
3.I7.	A (I; -I).	B (4; I).	C (2; -2).
3.I8.	A (-I; 3).	B (II; I).	C (-I; -I).
3.I9.	A (-3; 2).	B (0; 2).	C (0; -6).
3.20.	A (-I0; -I).	B (-I0; 3).	C (-2; 3).
3.2I.	A (0; 5).	B (0; 0).	C (-24; 0).
3.22.	A (I; I0).	B (I; -2).	C (-9; -2).
3.23.	A (-I; 2).	B (5; 4).	C (I; I).
3.24.	A (-2; 2).	B (0; 8).	C (2; 2).
3.25.	A (-I0; 0).	B (-I0; 3).	C (-2; 3).
3.26.	A (0; 4).	B (0; 0).	C (-6; 0).
3.27.	A (I; 3);	B (I; -2).	C (-23; -2).
3.28.	A (-I; I3).	B (-I; I).	C (-2I; I).
3.29.	A (-I, 2).	B (-3; 5).	C (0; 3).
3.30.	A (-I0; I).	B (-I6; 3).	C (-I0; 5).

Задача 4. Написать уравнение траектории точки $M(x;y)$, обладающей свойством: а – для вариантов I – I5, б – для вариантов I6 – 30. Построить линию.

а – В K раз ближе к точке А, чем к точке В.

4.I.	K = 2, A (2; 0), B (-2; 0).	4.2.	K = I, A (5; 7), B (3; -4).
4.3.	K = I, A (-4; 3), B (5; -8).	4.4.	K = 3, A (-2;0), B (2; 0).
4.5.	K = 2, A (0; 3), B (0; -3).	4.6.	K = I, A (5;-2), B (-3; 0).
4.7.	K = I, A (7;2), B (4;-2).	4.8.	K=2, A (-3; 0), B (3; 0).
4.9.	K = 4, A (0; 4), B (0; -4).	4.I0.	K=I, A (5;-2), B (4; 3).
4.II.	K = 3, A (I; I), B (2; -3).	4.I2.	K=3/2, A (0;3), B (-I;0).
4.I3.	K = 2, A (-I;-4), B (2;8).	4.I4.	K=4, A (I;0), B (-4;0).
4.I5.	K = I, A (7; 2), B (0; I).		

б – В K раз ближе к точке А, чем к прямой α.

4.I6.	К = 2,	А (5; 0),	(α): x = I0.
4.I7.	К = I/2	А (-2, 0),	(α): x = I.
4.I8.	К = 3	А (0, -2),	(α): y = -6.
4.I9.	К = I/3	А (0; 6),	(α): y = 2.
4.20.	К = I	А (3; 0),	(α): x = -3.
4.2I.	К = 2	А (0; 4),	(α): y = I.
4.22.	К = I/2	А (0; -5),	(α): y = -I0.
4.23.	К = I	А (-2; 0),	(α): x = 2.
4.24.	К = I	А (0; 4),	(α): y = -4.
4.25.	К = 3	А (3; 0),	(α): x = 9.
4.26.	К =I/3	А (0; I),	(α): y = -6.
4.27.	К = I	А (5; 0),	(α): x = 0.
4.28.	К = 2	А (0; 2),	(α): y = -4.
4.29.	К = I/2	А (4; 0),	(α): x = 7.
4.30.	К = 4	А (0; -3),	(α): y = 2.

Задача 5. При каких x вокруг четырехугольника АВСД можно описать окружность?

I.	А (-3, 3),	В (I; 6),	С (7; 6),	Д (x; 3).
2.	А (-I; 3),	В (-I; 6),	С (5; 6),	Д (x; 3).
3.	А (-3; 3),	В (-I; 5),	С (3; 5),	Д (x; 3).
4.	А (-5; 3),	В (-I; 5),	С (I; 5),	Д (x; 3).
5.	А (-3; 3),	В (-3; 6),	С (I, 7),	Д (x; 2).
6.	А (-3; 3),	В (-I; 6),	С (3; 6);	Д (x; 3).
7.	А (3; 0),	В (I; 6),	С (-2; 6),	Д (x; 0).
8.	А (2, 0),	В (2; 6),	С (-I, 6),	Д (x; 0).
9.	А (3; 0),	В (2; 4),	С (0, 4),	Д (x; 0).
I0.	А (4; 0),	В (2; 4),	С (I; 4),	Д (x; 0).
II.	А (3; 0),	В (3; 6),	С (I; 8),	Д (x; -2).
I2.	А (3; 0),	В (2; 6),	С (0; 6),	Д (x; 0).
I3.	А (-2; -2),	В (3; -3),	С (6; 0),	Д (x; 5).
I4.	А (-I; -I),	В (2; -4),	С (5; -I),	Д (x; 2).
I5.	А (-2; -2),	В (I; -3),	С (3; -I),	Д (x; 2).
I6.	А (-3; -3),	В (I; -3),	С (2; -2),	Д (x; 2).
I7.	А (-2; -2),	В (I; -5),	С (4, -4),	Д (x; I).
I8.	А (-2, -2),	В (2; -4),	С (4; -2),	Д (x; 2).
I9.	А (-2; 0),	В (0; 3),	С (3; 3),	Д (x; 0).
20.	А (-I ; 0),	В (-I; 3),	С (2; 3),	Д (x; 0).

21.	A (-2; 0).	B (-1; 2).	C (1; 2).	Д (x; 0)
22.	A (-3; 0).	B (-1; 2).	C (0; 2).	Д (x; 0).
23.	A (-2; 0).	B (-2; 3).	C (0; 4).	Д (x; -1).
24.	A (-2; 0).	B (-1; 3).	C (1; 3).	Д (x; 0).
25.	A (1; -3).	B (7; -1).	C (7; 2).	Д (x; 4).
26.	A (1; -2).	B (7; -2).	C (7; 1).	Д (x; 1).
27.	A (1; -3).	B (5; -2).	C (5; 0).	Д (x; 1).
28.	A (1; -4).	B (5; -2).	C (5; -1).	Д (x; 1).
29.	A (1; -3).	B (7; -3).	C (9; -1).	Д (x; -1).
30.	A (1; -3).	B (7; -2).	C (7; 0).	Д (x; 1).

2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

2.1. Теоретические вопросы

1. Комплексное число. Алгебраическая форма. Модуль и аргумент комплексного числа. Комплексная плоскость.

2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

3. Арифметические операции над комплексными числами в тригонометрической форме.

4. Формула Муавра.

5. Извлечение корня целой положительной степени. Изображение корней на комплексной плоскости.

6. Решение алгебраических уравнений, имеющих комплексные корни.

2.2. Теоретические задачи и упражнения

1. Используя геометрический смысл комплексного числа, доказать, что $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$; $|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$.

2. Применяя тригонометрическую форму комплексного числа, доказать, что $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$; $|z_1:z_2|=|z_1|:|z_2|$.

3. Доказать, что

$$Arg(z_1 z_2)=Arg\,z_1+Arg\,z_2,\quad Arg\,z_1/z_2=Arg\,z_1-Arg\,z_2.$$

4. С помощью каких геометрических операций можно получить изображения чисел $z_1\cdot z_2$ и $z_1:z_2$ на комплексной плоскости?

5. Доказать, что если $z_1+z_2+z_3=0$ и $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника, вписанного в единичную окружность.

6. Доказать и выяснить геометрический смысл тождества

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

7. Решить уравнение

$$\bar{z}=z^{n-1} \quad (n\neq 2,\ n\in N).$$

2.3. Расчетные задания

<u>Задача I</u>. Найти $Re\,z$ и $Jm\,z$ при следующих условиях.

I.I. $z=\frac{2}{-i}+i(1+i)$.

I.2. $z=\frac{1}{1+2i}+\frac{i}{2-i}$.

I.3. $z=(1+i)(1-3i)$.

I.4. $z=\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.

I.5. $z=(1-2i)(2+i)\cdot\frac{1}{i}$.

I.6. $z=\frac{5}{1+2i}+\frac{5}{2-i}$.

I.7. $z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

I.8. $z=\frac{1+2i}{(1-i)^3}$.

I.9. $z=\frac{1-i^{13}}{(1+2i)^2}$.

I.I0. $z=\frac{1+i}{i}+\frac{i}{1+i}$.

I.II. $z=7:(\sqrt{5}+i\sqrt{2})$.

I.I2. $z=\frac{(1+i)(2+i)}{2-i}$.

I.I3. $z=\frac{(1-i)(2-i)}{2+i}$.

I.I4. $z=\frac{3}{1+2i}+\frac{4}{2-i}$.

I.I5. $z=(2+3i)^2-(2-3i)^2$.

I.I6. $z=(3+2\sqrt{2i})(3-2\sqrt{2i})+\frac{1}{i}$.

I.I7. $z=\frac{12}{5i}+\frac{i}{1+i}$.

I.I8. $z=\frac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}}$.

I.I9. $z=\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{2-2i}{1-2i}$.

I.20. $z=(1+i\sqrt{3}):(1-i\sqrt{3})$.

I.2I. $z=\frac{2}{1+i}+\frac{i}{2-i}$.

I.22. $z=\frac{5}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}+\frac{i}{2}$.

I.23. $z=\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}$.

I.24. $z=\frac{1+i^{15}}{(1-i)^3}$.

I.25. $z=\frac{1}{1+i}+\frac{i}{2-i}$.

I.26. $z=\frac{5}{-i}+i(1-i)$.

I.27. $z=\frac{i}{2+i}+\frac{2+i}{i}$.

I.28. $z=\frac{1}{i}(1-3i)(3i-2)$.

I.29. $z=\frac{4-i}{4+i}+\frac{4+i}{4-i}$.

I.30. $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$.

<u>Задача 2</u>. Применяя формулу Муавра, найти следующее.

2.1. $(\sqrt{3}-i)^{6}$. 2.2. $(1+i\sqrt{3})^{10}$.

2.3. $(1+i)^{20}$. 2.4. $(2+i\sqrt{2})^{15}$.

2.5. $(1-i\sqrt{3})^{6}$. 2.6. $(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^{8}$.

2.7. $(-1+i)^{16}$. 2.8. $(-\sqrt{3}-i)^{10}$.

2.9. $(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{10}$. 2.10. $(-\sqrt{3}+i)^{12}$.

2.11. $(1-i)^{20}$. 2.12. $(2+i\sqrt{12})^{5}$.

2.13. $(1+\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})^{6}$. 2.14. $(4+4i)^{6}$.

2.15. $(-1+i\sqrt{3})^{10}$. 2.16. $(1+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{4}$.

2.17. $(1-i\sqrt{3})^{8}$. 2.18. $(-\sqrt{3}-\sqrt{-2})^{6}$.

2.19. $(-i+1)^{15}$. 2.20. $(-\sqrt{3}-i)^{10}$.

2.21 $(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{6}$. 2.22. $(2-i\sqrt{2})^{10}$.

2.23. $(1+\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})^{8}$. 2.24. $(2-2\sqrt{2}i)^{10}$.

2.25. $[\sin\frac{\pi}{4}+i(1-\cos\frac{\pi}{4})]^{4}$. 2.26. $(-1-i)^{10}$.

2.27. $(2-i\sqrt{2})^{10}$. 2.28. $(1-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})^{4}$.

2.29. $(1-2i)^{5}$. 2.30. $(2+2\sqrt{3}i)^{12}$.

<u>Задача</u> 3. Найти все значения корней и построить их.

3.1. $\sqrt[3]{i}$. 3.2. $\sqrt[3]{1-i}$. 3.3. $\sqrt[3]{-1}$. 3.4. $\sqrt[3]{8}$.

3.5. $\sqrt[4]{i}$. 3.6. $\sqrt[4]{1+i}$. 3.7. $\sqrt[4]{-1}$. 3.8. $\sqrt[4]{1}$.

3.9. $\sqrt[5]{-1}$. 3.10. $\sqrt[5]{i}$. 3.11. $\sqrt[5]{1+i}$. 3.12. $\sqrt[6]{-1}$.

3.13. $\sqrt[6]{i}$. 3.14. $\sqrt[3]{-i}$. 3.15. $\sqrt[3]{i+1}$. 3.16. $\sqrt[3]{1}$.

3.17. $\sqrt[3]{8}$. 3.18. $\sqrt[4]{-i}$. 3.19. $\sqrt[4]{1-i}$. 3.20. $\sqrt[8]{1}$.

3.21. $\sqrt[4]{-1}$. 3.22. $\sqrt[5]{1}$. 3.23. $\sqrt[5]{-i}$. 3.24. $\sqrt[5]{i-1}$.

3.25. $\sqrt[6]{1}$. 3.26. $\sqrt[6]{-i}$. 3.27. $\sqrt[4]{-4}$. 3.28. $\sqrt[3]{-2+2i}$.

3.29. $\sqrt[4]{-81}$. 3.30. $\sqrt[4]{i-1}$.

Задача 4. Построить линии или области, заданные следующими соотношениями.

4.1. $2<|z-3-4i|\leqslant 5,\ \ Jm z\geqslant 4$.

4.2. $|z-i|=|z+3|$.

4.3. $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geqslant 1$.

4.4. $|z-i|-|z+i|>2$.

4.5. $0<Re\, iz<1,\ \ |z+1|\geqslant 1$.

4.6. $Re\frac{1}{z}=c$.

4.7. $|z|<\arg z,\ \ 0\leqslant\arg z<2\pi$.

4.8. $|z-1|=|Re z|$.

4.9. $|z+1|+|z-1|\leqslant 3$.

4.10. $Re z+1=|z|$.

4.11. $Re z+Jm z<1,\ \ |z-1|<1$.

4.12. $Re(z^2)=a^2$.

4.13. $Jm\frac{z-1}{z+1}=0$.

4.14. $Re\frac{z-1}{z+1}=0$.

4.15. $Jm(z^2)=c$.

4.16. $Jm\frac{z-i}{z-1}=0$.

4.17. $1\leqslant Re z<4,\ \ \frac{\pi}{8}<\arg z<\frac{\pi}{4}$.

4.18. $\arg\frac{z-1}{z+1}=0$.

4.19. $|z-i|\leqslant 1,\ \ 0<\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}$.

4.20. $Re\frac{z-i}{z-1}=0$.

4.21. $0<\arg\frac{i-z}{i+z}<\frac{\pi}{2}$.

4.22. $\arg\frac{z-1}{z+1}=\frac{\pi}{2}$.

4.23. $|\pi-\arg z|<\frac{\pi}{4},\ \ Jm z>2$.

4.24. $Re\left(z(1-i)\right)<\sqrt{2}$.

4.25. $\frac{\pi}{4}<\arg(z+i)<\frac{\pi}{2}$.

4.26. $Jm z-1=|z|$.

4.27. $Jm(z^2)\leqslant 2,\ \ |z|\geqslant 1$.

4.28. $|z|^2+Jm(z^2)<1$.

4.29. $Jm\frac{1}{z}=c$.

4.30. $Jm\frac{z+i}{z+1}=0$.

Задача 5. Решить уравнение. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости, представив их в тригонометрической форме.

5.1. x^3-3x^2+6x-4. 5.2. x^3-2x^2+2x-1.
5.3. x^3+2x^2+6x-9. 5.4. x^3+x^2-2.
5.5. $x^3+3x^2+12x-16$. 5.6. x^3-3x^2+4x+8.
5.7. x^3-x^2+2x+4. 5.8. x^3-3x^2+3x-2.
5.9. $x^3+4x^2+12x+9$. 5.10. x^3+3x^2+4x+2.
5.11. $x^3+5x^2+20x+16$. 5.12. $x^3-6x^2+16x-16$.
5.13. x^3-4x^2+8x-8. 5.14. x^3+x^2-x+2.
5.15. $x^3+5x^2+15x+18$. 5.16. x^3-2x-4.
5.17. $x^3+2x^2+8x-32$. 5.18. x^3-2x^2+16.
5.19. $x^3-5x^2+10x-12$. 5.20. x^3+2x^2-2x+3.
5.21. $x^3+x^2+3x-18$. 5.22. x^3+4x^2+6x+4.
5.23. $x^3+6x^2+24x+32$. 5.24. $x^3-7x^2+34x-18$.
5.25. x^3-4x^2+4x-3. 5.26. $x^3+6x^2+18x+27$.
5.27. x^3-x^2-4x-6. 5.28. $x^3-5x^2+12x-8$.
5.29. $x^3-5x^2+2x+18$. 5.30. x^3+5x^2+8x+6.

3. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Теоретические вопросы

1. Виды матриц, операции над матрицами (умножение на число, сложение, умножение матриц, транспонирование).

2. Определители 2-го, 3-го, n -го порядков; их основные свойства.

3. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц.

4. Обратная матрица.

5. Системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера – Капелли.

6. Матричный способ решения системы.

7. Решение системы с помощью формул Крамера.

8. Метод Гаусса.

9. Решение однородных систем линейных алгебраических уравнений.

3.2. Теоретические задачи и упражнения

1. Входит ли в определитель 5-го порядка произведение 1) $a_{13}a_{24}a_{23}a_{41}a_{55}$; 2) $a_{21}a_{13}a_{34}a_{55}a_{42}$. Подобрать i и k так, чтобы произведение $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ входило в определитель 5-го порядка со знаком плюс.

2. Доказать, что определитель нечетного порядка равен нулю, если все элементы его удовлетворяют условию $a_{ik}+a_{ki}=0$.

3. Найти все матрицы 2-го порядка, квадраты которых равны 1) нулевой матрице, 2) единичной матрице.

4. Выполнить действия:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; 2) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

5. Составить квадратную матрицу 4-го порядка, ранг которой равен 1) 2; 2) 3; 3) 4.

6. Доказать, что ранг матрицы не изменится, если ее строки заменить столбцами.

7. Доказать, что ранг матрицы не изменится, если переставить две строки (два столбца) матрицы.

8. Доказать, что ранг матрицы не изменится, если все элементы какой-нибудь строки (столбца) умножить на произвольное число, отличное от нуля.

9. Система

$$\begin{cases} ay+bx=c, \\ cx+az=b, \\ bz+cy=a \end{cases}$$

имеет единственное решение. Доказать, что $abc\neq 0$ и найти решение.

10. Подобрать λ так, чтобы система

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2, \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda \end{cases}$$

имела решение.

3.3. Расчетные задания

Задача 1. Вычислить определитель.

1.1. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ 1.2. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

1.3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 1.4. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

1.5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 10 & 10 \\ 12 & 36 & 40 & 41 \end{vmatrix}$ 1.6. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

1.7. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 1.8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

1.9. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 1.10. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

1.11. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$ 1.12. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

1.13. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & -7 \\ 3 & -5 & 7 & -1 \\ 5 & -7 & 1 & -3 \\ 7 & -1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ 1.14. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

1.15. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

1.16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

1.17. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{vmatrix}$

1.18. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

1.19. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

1.20. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & -6 \\ 4 & 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$

1.21. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

1.22. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

1.23. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 2 & 6 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

1.24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

1.25. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

1.26. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

1.27. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

1.28. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

1.29. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

1.30. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Задача 2. Вычислить $f(A)$.

2.1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = 2x^2 + 3x + 1.$$

2.2. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 + 5x + 2.$$

2.3. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 3.$$

2.4. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = 3x^2 - 2x + 8.$$

2.5. $$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 3x - 1.$$

2.6. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - x - 1.$$

2.7. $$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 2x + 1.$$

2.8. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = -2x^2 + 8x - 6.$$

2.9. $$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^3 - 4x.$$

2.10. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(x) = 2x^2 + 6x - 3.$$

2.11. $$A = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 5x + 3.$$

2.12. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = 5x^2 + 2x - 8.$$

2.13. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1.$$

2.14. $$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = 2x^3 - 8x + 6.$$

5*

2.15. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ $f(x) = x^2 - 6x + 9.$

2.16. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $f(x) = 9x^2 - 4.$

2.17. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ $f(x) = 9 - x^2.$

2.18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $f(x) = 2x^2 + 8x + 8.$

2.19. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ $f(x) = 5 - 4x - x^2.$

2.20. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ $f(x) = 3x^2 - 7x + 5.$

2.21. $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $f(x) = (x+3)^2.$

2.22. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ $f(x) = (x-2)(2x+3).$

2.23. $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $f(x) = 4 - 2x - x^2.$

2.24. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ $f(x) = 5x^2 - 8x + 6.$

2.25. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2.$

2.26. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $f(x) = (x^2 - 2x)(2x - 1).$

2.27. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $f(x) = (4-2x)(x+6).$

2.28. $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $f(x) = 2x^2 - 6x + 7.$

2.29. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $f(x) = (x^2-2x)(2x+1)$.

2.30. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $f(x) = 5x^2+3x-4$.

Задача 3. Найти обратную матрицу.

3.1. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 3.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 3.3. $\begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

3.4. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 3.5. $\begin{pmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 3.6. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 1 & -9 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

3.7. $\begin{pmatrix} -12 & 17 & -43 \\ -7 & 11 & -24 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 3.8. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \\ 0 & 7 & -21 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 3.9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

3.10. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 3.11. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 3.12. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3.13. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 3.14. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 3.15. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

3.16. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 3.17. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 3.18. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

3.19. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. $\qquad$ 3.20. $\begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 3.21. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6 - 753

3.22. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 3.23. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 3.24. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

3.25. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ 3.26. $\begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -3 & 5 & 1 \\ -4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ 3.27. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3.28. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 7 \\ 2 & 7 & -8 \end{pmatrix}$ 3.29. $\begin{pmatrix} 30 & 4 & -5 \\ -23 & -8 & 10 \\ -18 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ 3.30. $\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Задача 4. Решить матричное уравнение.

4.1. $AX = B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

4.2. $XA = B$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4.3. $AXB = C$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.4. $AX = B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.5. $XA = B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4.6. $AXB = C$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

4.7. $AX=B,\quad A=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&8&5\\2&7&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\\3&-4\end{pmatrix}.$

4.8. $XA=B,\quad A=\begin{pmatrix}4&3&6\\5&4&7\\6&5&7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1&5\\0&0&-1\end{pmatrix}.$

4.9. $AXB=C,\ A=\begin{pmatrix}5&4\\9&7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}7&8&7\\8&9&6\\5&6&8\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$

4.10. $AX=B,\quad A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&-1&2\\4&1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&5\\4&-1\\2&7\end{pmatrix}.$

4.11. $XA=B,\quad A=\begin{pmatrix}5&5&3\\3&4&2\\4&3&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6&4&6\\0&3&-5\end{pmatrix}.$

4.12. $AXB=C,\ A=\begin{pmatrix}3&8&2\\4&5&3\\5&4&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&3\\-3&-4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&2\\4&6\\4&7\end{pmatrix}.$

4.13. $AX=B,\quad A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\1&0&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-3&1\\4&1&-5\end{pmatrix}.$

4.14. $XA=B,\quad A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&0\\1&4&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&2&0\\1&4&5\end{pmatrix}.$

4.15. $AXB=C,\ A=\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$

4.16. $XAB=C$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

4.17. $AXB=C$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

4.18. $XA=B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

4.19. $AXB=C$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

4.20. $AX=B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

4.21. $XA=B$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

4.22. $AXB=C$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

4.23. $AX=B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.24. $XA=B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

4.25. $AXB=C$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$.

4.26. $AX=B,\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$

4.27. $XA=B,\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

4.28. $XAB=C,\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}.$

4.29. $AX=B,\quad A=\begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

4.30. $XA=B,\quad A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

<u>Задача 5</u>. Найти ранг матрицы.

5.1. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & 2 \\ -8 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

5.2. $\begin{pmatrix} 5 & 13 & 3 & 7 \\ 16 & 40 & 10 & 22 \\ 11 & 54 & 14 & 30 \end{pmatrix}$

5.3. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 13 \\ 7 & 11 & 20 \end{pmatrix}$

5.5. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

5.6. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -7 \\ 3 & -5 & 7 & -1 \\ 5 & -7 & 1 & -3 \\ 7 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

5.7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

5.8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

5.9. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}$

5.10. $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5.11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

5.12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5.13. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

5.14. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

5.15. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

5.16. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

5.17. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \\ 7 & -6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

5.18. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

5.19. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 7 & 12 & 11 & 8 \end{pmatrix}$

5.20. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 16 \end{pmatrix}$

5.21. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 12 & 13 & 13 \\ 1 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

5.22. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

5.23. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

5.24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 14 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

5.25 $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & -4 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

5.26. $\begin{pmatrix} 23 & 11 & 2 & 3 \\ 13 & 15 & 9 & 7 \\ 2 & -4 & -7 & -4 \\ 19 & 3 & -12 & -5 \end{pmatrix}$

5.27. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$
5.28. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

5.29. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & -3 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 0 & 12 & -3 \\ 2 & -5 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$
5.30. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ -7 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Задача 6</u>. Решить систему а) – матричным методом; б) – по формулам Крамера.

6.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$
6.2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$
6.4. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -2, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 19, \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$
6.6. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -17, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 18, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$
6.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$
6.10. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

6.11. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$
6.12. $\begin{cases} x_1 \qquad + 2x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 \qquad = 7, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$
6.14. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_2 + 5x_3 = 4. \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$

6.16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

6.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_3 = -13, \\ 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

6.18. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

6.19. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

6.20. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 20, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -8. \end{cases}$

6.21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

6.22. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 8. \end{cases}$

6.23. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -12. \end{cases}$

6.24. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - 7x_2 - 3x_3 = -11. \end{cases}$

6.25. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

6.26. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$

6.27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 6. \end{cases}$

6.28. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

6.29. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

6.30. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10, \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

Задача 7. Доказать разрешимость системы линейных алгебраических уравнений с данной расширенной матрицей и найти общее решение системы.

7.1. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 9 & 2 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 7 & 6 & 8 & 5 \end{array}\right)$ 7.2. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right)$

7.3. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -9 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -5 & -1 & 3 \end{array}\right)$ 7.4. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right)$

7.5. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 14 & 20 & 27 & 0 \\ 5 & 10 & 16 & 19 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & 13 & 5 \end{array}\right)$ 7.6. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$

7.7. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right)$ 7.8. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 23 \end{array}\right)$

7.9. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -6 & -10 \end{array}\right)$ 7.10. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right)$

7.11. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 5 & -5 & -3 \end{array}\right)$ 7.12. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -3 & -6 \\ 2 & -5 & 7 & 9 \\ 4 & 2 & -4 & -7 \\ 5 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$

7.13. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 8 & -5 & 6 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & -4 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 9 & 7 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$ 7.14. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 9 & 1 \end{array}\right)$

7.15. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 8 & -3 \\ 6 & 9 & 9 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

7.16. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right)$$

7.17. $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 4 & -2 & 3 & 1 \\ 8 & 5 & 5 & -4 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & 7 & -3 & 7 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & -3 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

7.18. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

7.19. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & -3 & 9 \end{array}\right)$$

7.20. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 11 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & -13 & 11 & -8 & 49 \\ 4 & 9 & -13 & 14 & -37 \end{array}\right)$$

7.21. $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 & 12 \\ 7 & 5 & -3 & 12 & 0 & 16 \\ 2 & -5 & 12 & 8 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

7.22. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & -5 & 2 \\ 2 & -7 & -3 & -4 & -11 \end{array}\right)$$

7.23. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 13 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

7.24. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & 10 \\ 3 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

7.25. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

7.26. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

7.27. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

7.28. $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

7.29. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & 11 & -13 & 16 & 2 \\ 7 & -\text{[illegible]} & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

7.30. $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 7 & -1 \end{array}\right)$$

Задача 8. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы с данной матрицей.

8.1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

8.2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

8.3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

8.4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

8.5. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

8.6. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

8.7. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 5 & 7 \\ 5 & -9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

8.8. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

8.9. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

8.10. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

8.11. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

8.12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -9 & -14 \\ 1 & 1 & -7 & -11 \end{pmatrix}$

8.13. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -8 \\ 1 & 4 & -7 & 13 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

8.14. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8.15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & -8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

8.16. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

8.17. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

8.18. $\begin{pmatrix} 8 & -5 & -6 & 3 \\ 4 & -1 & -3 & 2 \\ 12 & -7 & -9 & 5 \end{pmatrix}$

8.19. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

8.20. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{pmatrix}$

8.21. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

8.22. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

8.23. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

8.24. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

8.25. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

8.26. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 9 & -6 & 9 & 7 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

8.27. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

8.28. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 \\ 6 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

8.29. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

8.30. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix}$

Задача 9. Составить программу решения системы линейных уравнений $Ax=b$ итерационным методом Гаусса – Зейделя (см.прил.1). Для линейной системы, заданной расширенной матрицей, проверить выполнение достаточного условия сходимости итерационного процесса. С помощью ЭВМ найти решение системы методом Гаусса – Зейделя. Итерации продолжать до совпадения в двух последовательных приближениях трех десятичных знаков.

9.1. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right)$ 9.2. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 10 \end{array}\right)$

9.3. $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & -7 & 7 \\ -3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -7 & 6 \end{array}\right)$ 9.4. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0{,}24 & -0{,}08 & 8 \\ 0{,}09 & 3 & -0{,}15 & 9 \\ 0{,}04 & -0{,}08 & 4 & 20 \end{array}\right)$

9.5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 10 & 0 \end{array}\right)$ 9.6. $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & 10 & 1 & 13 \\ 2 & 2 & 10 & 14 \end{array}\right)$

9.7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 9{,}13 \\ -1 & 4 & -1 & 43 \\ 2 & -1 & -5 & 25 \end{array}\right)$ 9.8. $\left(\begin{array}{ccc|c} 36{,}47 & 5{,}28 & 6{,}34 & 12{,}26 \\ 7{,}33 & 28{,}74 & 5{,}86 & 15{,}15 \\ 4{,}63 & 6{,}31 & 26{,}17 & 25{,}22 \end{array}\right)$

9.9. $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -2 & -2 & 6 \\ -1 & 10 & -2 & 7 \\ -1 & -1 & 10 & 8 \end{array}\right)$ 9.10. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3{,}21 & 0{,}71 & 0{,}34 & 6{,}12 \\ 0{,}43 & 4{,}11 & 0{,}22 & 5{,}71 \\ 0{,}17 & 0{,}16 & 4{,}73 & 7{,}06 \end{array}\right)$

9.11. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0{,}24 & -0{,}08 & 8 \\ 0{,}09 & 3 & -0{,}15 & 9 \\ 0{,}04 & -0{,}08 & 4 & 20 \end{array}\right)$ 9.12. $\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & -7 & 10 \end{array}\right)$

9.13. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6{,}2 & 1{,}8 & -0{,}7 & 2{,}3 \\ 0{,}4 & 5{,}7 & 1{,}3 & 1{,}9 \\ 2{,}1 & 0{,}7 & 3{,}4 & 1{,}0 \end{array}\right)$ 9.14. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5{,}6 & 2{,}7 & -1{,}7 & 4{,}9 \\ 3{,}4 & -9{,}6 & -2{,}7 & -14{,}5 \\ 0{,}8 & 1{,}3 & 3{,}7 & -9{,}3 \end{array}\right)$

9.15. $\left(\begin{array}{ccc|c} 9{,}4 & -6{,}2 & -0{,}5 & 0{,}52 \\ 3{,}4 & 8{,}3 & 0{,}8 & -0{,}8 \\ 2{,}4 & -1{,}1 & 3{,}8 & 1{,}8 \end{array}\right)$ 9.16. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}02 & -0{,}05 & -0{,}10 & 0{,}795 \\ -0{,}11 & 1{,}03 & -0{,}05 & 0{,}849 \\ -0{,}11 & -0{,}12 & 1{,}04 & 1{,}398 \end{array}\right)$

9.17. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}02 & -0{,}25 & -0{,}30 & 0{,}515 \\ -0{,}41 & 1{,}13 & -0{,}15 & 1{,}555 \\ -0{,}25 & -0{,}14 & 1{,}21 & 2{,}780 \end{array}\right)$ 9.18. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & -1 & 11{,}33 \\ -1 & 6 & -1 & 32 \\ -1 & -1 & 6 & 42 \end{array}\right)$

9.19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6{,}1 & 2{,}2 & 1{,}2 & 16{,}55 \\ 2{,}2 & 5{,}5 & -1{,}5 & 10{,}55 \\ 1{,}2 & -1{,}5 & 7{,}2 & 16{,}80 \end{array}\right)$ 9.20. $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 2 & 6 & 2{,}8 \\ 1 & 10 & 9 & 7 \\ 2 & -7 & -10 & -17 \end{array}\right)$

9.21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6{,}3 & 5{,}0 & -0{,}6 & 1 \\ 3{,}4 & -7{,}0 & 3{,}4 & 2 \\ 0{,}8 & 1{,}0 & 3{,}5 & -2 \end{array}\right)$ 9.22. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5{,}3 & -0{,}7 & 1{,}1 & 5 \\ 1{,}2 & 6{,}1 & -1{,}3 & 6 \\ 2{,}1 & -1{,}4 & 9{,}7 & 10 \end{array}\right)$

9.23. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5{,}4 & -1{,}2 & 2{,}3 & 0{,}7 \\ -2{,}1 & 6{,}7 & 1{,}3 & 7{,}4 \\ -1{,}4 & 2{,}5 & 8{,}6 & -5{,}0 \end{array}\right)$ 9.24. $\left(\begin{array}{ccc|c} 8{,}8 & 6{,}7 & -1{,}2 & 5{,}2 \\ 6{,}4 & 11{,}3 & -2{,}7 & 3{,}8 \\ 2{,}4 & -4{,}5 & 8{,}5 & -0{,}6 \end{array}\right)$

9.25. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}1 & -0{,}3 & 0{,}4 & 2{,}9 \\ -0{,}1 & 2{,}3 & 0{,}6 & -1{,}9 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 3{,}2 & 3{,}4 \end{array}\right)$ 9.26. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & -2 & 14 \\ 2 & -1 & 8 & -8 \end{array}\right)$

9.27. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3{,}2 & -1{,}1 & 0{,}9 & 3{,}5 \\ -1{,}1 & 4{,}5 & 0{,}2 & 1{,}9 \\ 0{,}9 & 0{,}2 & -5{,}2 & 12{,}4 \end{array}\right)$ 9.28. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 9 \\ -1 & -2 & 4 & -10 \end{array}\right)$

9.29. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}6 & -0{,}1 & 0{,}8 & -2{,}4 \\ 0{,}3 & 2{,}1 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}5 & 1{,}7 & 2{,}1 \end{array}\right)$ 9.30 $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & 5 & -10 \end{array}\right)$

Задача I0. Построить полином третьей степени

$$P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

совпадающий в точках x_i ($i = 0, I, 2, 3$) со значениями функции $y(x_i)$:

$$P_3(x_i) = y_i .$$

Номер варианта	x_0	x_1	x_2	x_3	y_0	y_1	y_2	y_3
I0.I	0	I	2	3	I	3	2	-3
I0.2	0	-I	2	4	4	-I	-3	5
I0.3	0	-I	5	I	I	-9	7	9
I0.4	0	2	3	4	2	6	-2	8
I0.5	0	-5	6	7	7	-2	-5	2
I0.6	0	-2	3	2	I	4	2	-3
I0.7	0	2	3	4	I	2	-6	8
I0.8	0	-3	5	7	4	-4	-3	I
I0.9	0	I	2	3	-I	2	-2	3
I0.I0	0	-I	I	2	4	2	5	-I
I0.II	0	2	3	4	2	I	-I	3
I0.I2	0	I	3	5	6	-5	I	-3
I0.I3	0	I	2	4	I	3	-I	4
I0.I4	0	-I	2	3	2	4	6	-2
I0.I5	0	2	3	4	I	2	3	4
I0.I6	0	I	4	5	-I	-2	3	I
I0.I7	0	-I	3	-4	5	I0	7	2
I0.I8	0	-I	2	5	4	9	6	I
I0.I9	0	I	3	4	-2	2	-I	I
I0.20	0	4	3	I	I	2	3	-4
I0.2I	0	I	2	4	4	I	6	9
I0.22	0	I	2	3	I	4	2	-8
I0.23	0	2	3	5	-6	I	-2	3
I0.24	0	-I	2	3	4	I	2	3
I0.25	0	-2	3	I	4	0	6	3
I0.26	0	-I	2	-3	6	I	7	6
I0.27	0	I	2	4	6	I	9	5
I0.28	0	I	-2	3	I	0	6	5
I0.29	0	-I	2	-3	I	6	9	0
I0.30	0	I	2	3	5	8	-8	2

4. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. ЗАДАЧИ НА ПРЯМУЮ И ПЛОСКОСТЬ С ПРИМЕНЕНИЕМ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

4.1. Теоретические вопросы

1. Векторы. Линейные операции над векторами.

2. Скалярное произведение, его свойства. Длина вектора. Угол между двумя векторами.

3. Определители, их свойства.

4. Векторное произведение. Свойства. Геометрический смысл.

5. Смешанное произведение, его свойства. Геометрический смысл. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов.

6. Плоскость. Уравнение плоскости.

7. Расстояние от точки до плоскости.

8. Уравнения прямой в пространстве. Нахождение точки пересечения прямой и плоскости.

4.2. Теоретические задачи и упражнения

1. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны и $\vec{AB}=\alpha\vec{a}/2$; $\vec{BC}=4(\beta\vec{a}-\vec{b})$; $\vec{CD}=-4\beta\vec{b}$; $\vec{DA}=\vec{a}+\alpha\vec{b}$. Найти α и β и доказать коллинеарность векторов $\vec{BC}$ и $\vec{DA}$.

2. Разложить вектор $\vec{S}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ по трем некомпланарным векторам $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$; $\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{p}=2\vec{b}+3\vec{c}$.

3. Найти угол между единичными векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, если известно, что векторы $\vec{a}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ и $\vec{b}=5\vec{e}_1-4\vec{e}_2$ взаимно перпендикулярны.

4. Доказать компланарность векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, зная, что

$$[\vec{a}\vec{b}]+[\vec{b}\vec{c}]+[\vec{c}\vec{a}]=0.$$

5. Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) перпендикулярно к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, можно записать

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

6. Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через пересекающиеся прямые

$$\frac{x-x_1}{e_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{e_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

можно записать

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ e_1 & m_1 & n_1 \\ e_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Доказать, что уравнения прямой, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1) параллельно плоскостям $A_1x+B_1y+D_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, можно записать

$$\frac{x-x_1}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_1}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_1}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

8. Доказать, что необходимым и достаточным условием принадлежности двух прямых

$$\frac{x-x_1}{e_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{e_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

одной плоскости является выполнение равенства

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ e_1 & m_1 & n_1 \\ e_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Доказать, что расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и имеющей направляющий вектор $\vec{S}$, определяется формулой

$$d=|[\vec{S},\overrightarrow{AB}]|/|\vec{S}|.$$

10. Даны две скрещивающиеся прямые, проходящие соответственно через точки $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$. Их направляющие векторы $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ известны. Доказать, что расстояние между ними определяется формулой

$$d=|\vec{S}_1\vec{S}_2\overrightarrow{AB}|/|[\vec{S}_1\vec{S}]|.$$

4.3. Расчетные задания

Задача I. Написать разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

I.I. $\vec{x}=\{-2;4;7\}$. $\vec{p}=\{0;I;2\}$. $\vec{q}=\{I;0;I\}$. $\vec{r}=\{-I;2;4\}$.

I.2. $\vec{x}=\{6;I2;-I\}$. $\vec{p}=\{I;3;0\}$. $\vec{q}=\{2;-I;I\}$. $\vec{r}=\{0;-I;2\}$.

I.3. $\vec{x}=\{I;-4;4\}$. $\vec{p}=\{2;I;-I\}$. $\vec{q}=\{0;3;2\}$. $\vec{r}=\{I;-I;I\}$.

I.4. $\vec{x}=\{-9;5;5\}$. $\vec{p}=\{4;I;I\}$. $\vec{q}=\{2;0;-3\}$. $\vec{r}=\{-I;2;I\}$.

I.5. $\vec{x}=\{-5;-5;5\}$. $\vec{p}=\{-2;0;I\}$. $\vec{q}=\{I;3;-I\}$. $\vec{r}=\{0;4;I\}$.

I.6. $\vec{x}=\{I3;2;7\}$. $\vec{p}=\{5;I;0\}$. $\vec{q}=\{2;-I;3\}$. $\vec{r}=\{I;0;-I\}$.

I.7. $\vec{x}=\{-I9;-I;7\}$. $\vec{p}=\{0;I;I\}$. $\vec{q}=\{-2;0;I\}$. $\vec{r}=\{3;I;0\}$.

I.8. $\vec{x}=\{3;-3;4\}$. $\vec{p}=\{I;0;2\}$. $\vec{q}=\{0;I;I\}$. $\vec{r}=\{2;-I;4\}$.

I.9. $\vec{x}=\{3;3;-I\}$. $\vec{p}=\{3;I;0\}$. $\vec{q}=\{-2;2;I\}$. $\vec{r}=\{-I;0;2\}$.

I.I0. $\vec{x}=\{-I;7;-4\}$. $\vec{p}=\{-I;2;I\}$. $\vec{q}=\{2;0;3\}$. $\vec{r}=\{I;I;-I\}$.

I.II. $\vec{x}=\{6;5;-I4\}$. $\vec{p}=\{I;I;4\}$. $\vec{q}=\{0;-3;2\}$. $\vec{r}=\{2;I;-I\}$.

I.I2. $\vec{x}=\{6;-I;7\}$. $\vec{p}=\{I;-2;0\}$. $\vec{q}=\{-I;I;3\}$. $\vec{r}=\{I;0;4\}$.

I.I3. $\vec{x}=\{5;I5;0\}$. $\vec{p}=\{I;0;5\}$. $\vec{q}=\{-I;3;2\}$. $\vec{r}=\{0;-I;I\}$.

I.I4. $\vec{x}=\{2;-I;II\}$, $\vec{p}=\{I;I;0\}$. $\vec{q}=\{0;I;-2\}$. $\vec{r}=\{I;0;3\}$.

I.I5. $\vec{x}=\{II;5;-3\}$. $\vec{p}=\{I;0;2\}$. $\vec{q}=\{-I;0;I\}$. $\vec{r}=\{2;5;-3\}$.

I.I6. $\vec{x}=\{8;0;5\}$. $\vec{p}=\{2;0;I\}$. $\vec{q}=\{I;I;0\}$. $\vec{r}=\{4;I;2\}$.

I.I7. $\vec{x}=\{3;I;8\}$. $\vec{p}=\{0;I;3\}$. $\vec{q}=\{I;2;-I\}$. $\vec{r}=\{2;0;-I\}$.

I.I8. $\vec{x}=\{8;I;I2\}$. $\vec{p}=\{I;2;-I\}$. $\vec{q}=\{3;0;2\}$. $\vec{r}=\{-I;I;I\}$.

I.I9. $\vec{x}=\{-9;-8;-3\}$. $\vec{p}=\{I;4;I\}$. $\vec{q}=\{-3;2;0\}$. $\vec{r}=\{I;-I;2\}$.

I.20. $\vec{x}=\{-5;9;-I3\}$. $\vec{p}=\{0;I;-2\}$. $\vec{q}=\{3;-I;I\}$. $\vec{r}=\{4;I;0\}$.

I.2I. $\vec{x}=\{-I5;5;6\}$. $\vec{p}=\{0;5;I\}$. $\vec{q}=\{3;2;-I\}$. $\vec{r}=\{-I;I;0\}$.

I.22. $\vec{x}=\{8;9;4\}$. $\vec{p}=\{I;0;I\}$. $\vec{q}=\{0;-2;I\}$. $\vec{r}=\{I;3;0\}$.

I.23. $\vec{x}=\{23;-I4;-30\}$, $\vec{p}=\{2;I;0\}$. $\vec{q}=\{I;-I;0\}$. $\vec{r}=\{-3;2;5\}$.

I.24. $\vec{x}=\{3;I;3\}$. $\vec{p}=\{2;I;0\}$. $\vec{q}=\{I;0;I\}$. $\vec{r}=\{4;2;I\}$.

I.25. $\vec{x}=\{-I;7;0\}$. $\vec{p}=\{0;3;I\}$. $\vec{q}=\{I;-I;2\}$. $\vec{r}=\{2;-I;0\}$.

I.26. $\vec{x}=\{II;-I;4\}$. $\vec{p}=\{I;-I;2\}$. $\vec{q}=\{3;2;0\}$. $\vec{r}=\{-I;I;I\}$.

I.27. $\vec{x}=\{-I3;2;I8\}$. $\vec{p}=\{I;I;4\}$. $\vec{q}=\{-3;0;2\}$. $\vec{r}=\{I;2;-I\}$.

I.28. $\vec{x}=\{0;-8;9\}$. $\vec{p}=\{0;-2;I\}$. $\vec{q}=\{3;I;-I\}$. $\vec{r}=\{4;0;I\}$.

1.29. $\vec{x} = \{8;\ -7;\ -13\}$, $\vec{p} = \{0;\ 1;\ 5\}$, $\vec{q} = \{3;\ -1;\ 2\}$, $\vec{r} = \{-1;\ 0;\ 1\}$.

1.30. $\vec{x} = \{2;\ 7;\ 5\}$, $\vec{p} = \{1;\ 0;\ 1\}$, $\vec{q} = \{1;\ -2;\ 0\}$, $\vec{r} = \{0;\ 3;\ 1\}$.

1.31. $\vec{x} = \{15;\ -20;\ -1\}$, $\vec{p} = \{0;\ 2;\ 1\}$, $\vec{q} = \{0;\ 1;\ -1\}$, $\vec{r} = \{5;\ -3;\ 2\}$.

<u>Задача 2</u>. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

2.1. $\vec{a} = \{1;\ -2;\ 3\}$, $\vec{b} = \{3;\ 0;\ -1\}$. $\vec{c}_1 = 2\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{b}-\vec{a}$.

2.2. $\vec{a} = \{1;\ 0;\ 1\}$, $\vec{b} = \{-2;\ 3;\ 5\}$. $\vec{c}_1 = \vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a}-\vec{b}$.

2.3. $\vec{a} = \{-2;\ 4;\ 1\}$, $\vec{b} = \{1;\ -2;\ 7\}$. $\vec{c}_1 = 5\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 2\vec{a}-\vec{b}$.

2.4. $\vec{a} = \{1;\ 2;\ -3\}$, $\vec{b} = \{2;\ -1;\ -1\}$. $\vec{c}_1 = 4\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 8\vec{a}-\vec{b}$.

2.5. $\vec{a} = \{3;\ 5;\ 4\}$, $\vec{b} = \{5;\ 9;\ 7\}$. $\vec{c}_1 = 2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a}-2\vec{b}$.

2.6. $\vec{a} = \{1;\ 4;\ -2\}$, $\vec{b} = \{1,\ 1,\ -1\}$. $\vec{c}_1 = \vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 4\vec{a}+2\vec{b}$.

2.7. $\vec{a} = \{1;\ -2;\ 5\}$, $\vec{b} = \{3;\ -1;\ 0\}$. $\vec{c}_1 = 4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b}-2\vec{a}$.

2.8. $\vec{a} = \{3;\ 4;\ -1\}$, $\vec{b} = \{2;\ -1;\ 1\}$. $\vec{c}_1 = 6\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b}-2\vec{a}$.

2.9. $\vec{a} = \{-2;\ -3;\ -2\}$, $\vec{b} = \{1;\ 0;\ 5\}$. $\vec{c}_1 = 3\vec{a}-9\vec{b}$, $\vec{c}_2 = -\vec{a}-3\vec{b}$.

2.10. $\vec{a} = \{-1;\ 4;\ 2\}$, $\vec{b} = \{3;\ -2;\ 6\}$. $\vec{c}_1 = 2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{b}-6\vec{a}$.

2.11. $\vec{a} = \{5;\ 0;\ -1\}$, $\vec{b} = \{7;\ 2;\ 3\}$. $\vec{c}_1 = 2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{b}+6\vec{a}$.

2.12. $\vec{a} = \{0;\ 3;\ -2\}$, $\vec{b} = \{1;\ -2;\ 1\}$. $\vec{c}_1 = 5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a}+5\vec{b}$.

2.13. $\vec{a} = \{-2;\ 7;\ -1\}$, $\vec{b} = \{-3;\ 5;\ 2\}$. $\vec{c}_1 = 2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a}+2\vec{b}$.

2.14. $\vec{a} = \{3;\ 7;\ 0\}$, $\vec{b} = \{1;\ -3;\ 4\}$. $\vec{c}_1 = 4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b}-2\vec{a}$.

2.15. $\vec{a} = \{-1;\ 2;\ -1\}$, $\vec{b} = \{2;\ -7;\ 1\}$. $\vec{c}_1 = 6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b}-3\vec{a}$.

2.16. $\vec{a} = \{7;\ 9;\ -2\}$, $\vec{b} = \{5;\ 4;\ 3\}$. $\vec{c}_1 = 4\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 4\vec{b}-\vec{a}$.

2.17. $\vec{a} = \{5;\ 0;\ -2\}$, $\vec{b} = \{6;\ 4;\ 3\}$. $\vec{c}_1 = 5\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 6\vec{b}-10\vec{a}$.

2.18. $\vec{a} = \{8;\ 3;\ -1\}$, $\vec{b} = \{4;\ 1;\ 3\}$. $\vec{c}_1 = 2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 2\vec{b}-4\vec{a}$.

2.19. $\vec{a} = \{3;\ -1;\ 6\}$, $\vec{b} = \{5;\ 7;\ 10\}$. $\vec{c}_1 = 4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b}-2\vec{a}$.

2.20. $\vec{a} = \{1;\ -2;\ 4\}$, $\vec{b} = \{7;\ 3;\ 5\}$. $\vec{c}_1 = 6\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b}-2\vec{a}$.

2.21. $\vec{a} = \{3;\ 7;\ 0\}$, $\vec{b} = \{4;\ 6;\ -1\}$. $\vec{c}_1 = 3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 5\vec{a}-7\vec{b}$.

2.22. $\vec{a} = \{2;\ -1;\ 4\}$, $\vec{b} = \{3;\ -7;\ -6\}$. $\vec{c}_1 = 2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a}-2\vec{b}$.

2.23. $\vec{a} = \{5;\ -1;\ -2\}$, $\vec{b} = \{6;\ 0;\ 7\}$. $\vec{c}_1 = 3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 4\vec{b}-6\vec{a}$.

2.24. $\vec{a} = \{-9;\ 5;\ 3\}$, $\vec{b} = \{7;\ 1;\ -2\}$. $\vec{c}_1 = 2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a}+5\vec{b}$.

2.25. $\vec{a} = \{4;\ 2;\ 9\}$, $\vec{b} = \{0;\ -1;\ 3\}$. $\vec{c}_1 = 4\vec{b}-3\vec{a}$, $\vec{c}_2 = 4\vec{a}-3\vec{b}$.

2.26. $\vec{a} = \{2;\ -I;\ 6\}$, $\vec{b} = \{-I;\ 3;\ 8\}$, $\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 2\vec{a} - 5\vec{b}$.

2.27. $\vec{a} = \{5;\ 0;\ 8\}$, $\vec{b} = \{-3;\ I;\ 7\}$, $\vec{c}_1 = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 12\vec{b} - 9\vec{a}$.

2.28. $\vec{a} = \{-I;\ 3;\ 4\}$, $\vec{b} = \{2;\ -I;\ 0\}$, $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b} - 3\vec{a}$.

2.29. $\vec{a} = \{4;\ 2;\ -7\}$, $\vec{b} = \{5;\ 0;\ -3\}$, $\vec{c}_1 = \vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 6\vec{b} - 2\vec{a}$.

2.30. $\vec{a} = \{2;\ 0;\ -5\}$, $\vec{b} = \{I;\ -3;\ 4\}$, $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - 5\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$.

2.3I. $\vec{a} = \{-I;\ 2;\ 8\}$, $\vec{b} = \{3;\ 7;\ -I\}$, $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 9\vec{b} - 12\vec{a}$.

Задача 3. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

3.I. A (I; -2; 3), B (0; -I; 2), C (3; -4; 5).
3.2. A (0; -3; 6), B (-I2; -3; -3), C (-9; -3; -6).
3.3. A (3; 3; -I), B (5; 5; -2), C (4; I; I).
3.4. A (-I; 2; -3), B (3; 4; -6), C (I; I; -I).
3.5. A (-4; -2; 0), B (-I; -2; 4), C (3; -2; I).
3.6. A (6; 3; -I), B (5; 2; 0), C (6; 4; -I).
3.7. A (-3; -7; -5), B (0; -I; -2), C (2; 3; 0).
3.8. A (2; -4; 6), B (0; -2; 4), C (6; -8; I0).
3.9. A (0; I; -2), B (3; I; 2), C (4; I; I).
3.I0. A (3; 3; -I), B (I; 5; -2), C (4; I; I).
3.II. A (2; I; -I), B (6; -I; -4), C (4; 2; I).
3.I2. A (-I; -2; I), B (-4; -2; 5), C (-8; -2; 2).
3.I3. A (6; 2; -3), B (6; 3; -2), C (7; 3; -3).
3.I4. A (0; 0; 4), B (-3; -6; I), C (-5; -I0; -I).
3.I5. A (2; -8; -I), B (4; -6; 0), C (-2; -5; -I).
3.I6. A (3; -6; 9), B (0; -3; 6), C (9; -I2; I5).
3.I7. A (0; 2; -4), B (8; 2; 2), C (6; 2; 4).
3.I8. A (3; 3; -I), B (5; I; -2), C (4; I; I).
3.I9. A (-4; 3; 0), B (0; I; 3), C (-2; 4; -2).
3.20. A (I; -I; 0), B (-2; -I; 4), C (8; -I; -I).
3.2I. A (7; 0; 2), B (7; I; 3), C (8; -I; 2).
3.22. A (2; 3; 2), B (-I; -3; -I), C (-3; -7; -3).
3.23. A (2; 2; 7), B (0; 0; 6), C (-2; 5; 7).
3.24. A (-I; 2; -3), B (0; I; -2), C (-3; 4; -5).
3.25. A (0; 3; -6), B (9, 3; 6), C (I2; 3; 3).
3.26. A (3; 3; -I), B (5; I; -2), C (4; I; -3).
3.27. A (-2; I; I), B (2; 3; -2), C (0; 0; 3).
3.28. A (I; 4; -I), B (-2; 4; -5), C (8; 4; 0).
3.29. A (0; I; 0), B (0; 2; I), C (I; 2; 0).
3.30. A (-I; 0; 4), B (-I; 6; 7), C (I; I0; 9).
3.3I. A (-2; 4; -6), B (0; 2; -4), C (-6; 8; -I0).

Задача 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4.1. $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q},\quad \vec{b}=3\vec{p}-\vec{q};\quad |\vec{p}|=1,\ |\vec{q}|=2,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/6.$

4.2. $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}-2\vec{q};\quad |\vec{p}|=4,\ |\vec{q}|=1,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/4.$

4.3. $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}+2\vec{q};\quad |\vec{p}|=1/5,\ |\vec{q}|=1,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/2.$

4.4. $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}+5\vec{q};\quad |\vec{p}|=4,\ |\vec{q}|=1/2,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=5\pi/6.$

4.5. $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q},\quad \vec{b}=2\vec{p}+\vec{q};\quad |\vec{p}|=2,\ |\vec{q}|=3,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=3\pi/4.$

4.6. $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}-2\vec{q};\quad |\vec{p}|=2,\ |\vec{q}|=3,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/3.$

4.7. $\vec{a}=2\vec{p}-\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}+3\vec{q};\quad |\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=2,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/2.$

4.8. $\vec{a}=4\vec{p}+\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}-\vec{q};\quad |\vec{p}|=7,\ |\vec{q}|=2,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/4.$

4.9. $\vec{a}=\vec{p}-4\vec{q},\quad \vec{b}=3\vec{p}+\vec{q};\quad |\vec{p}|=1,\ |\vec{q}|=2,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/6.$

4.10. $\vec{a}=\vec{p}+4\vec{q},\quad \vec{b}=2\vec{p}-\vec{q};\quad |\vec{p}|=7,\ |\vec{q}|=2,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/3.$

4.11. $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}-\vec{q};\quad |\vec{p}|=10,\ |\vec{q}|=1,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/2.$

4.12. $\vec{a}=4\vec{p}-\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}+2\vec{q};\quad |\vec{p}|=5,\ |\vec{q}|=4,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/4.$

4.13. $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}-2\vec{q};\quad |\vec{p}|=6,\ |\vec{q}|=7,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/3.$

4.14. $\vec{a}=3\vec{p}-\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}+2\vec{q};\quad |\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=4,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/3.$

4.15. $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}-2\vec{q};\quad |\vec{p}|=2,\ |\vec{q}|=3,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/4.$

4.16. $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q},\quad \vec{b}=3\vec{p}+\vec{q};\quad |\vec{p}|=4,\ |\vec{q}|=1,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/6.$

4.17. $\vec{a}=5\vec{p}+\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q};\quad |\vec{p}|=1,\ |\vec{q}|=2,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/3.$

4.18. $\vec{a}=7\vec{p}-2\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}+3\vec{q};\quad |\vec{p}|=1/2,\ |\vec{q}|=2,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/2.$

4.19. $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}+\vec{q};\quad |\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=4,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/4.$

4.20. $\vec{a}=10\vec{p}+\vec{q},\quad \vec{b}=3\vec{p}-2\vec{q};\quad |\vec{p}|=4,\ |\vec{q}|=1,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/6.$

4.21. $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}+2\vec{q};\quad |\vec{p}|=8,\ |\vec{q}|=1/2,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/3.$

4.22. $\vec{a}=3\vec{p}+4\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}-2\vec{q};\quad |\vec{p}|=2{,}5,\ |\vec{q}|=2,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/2.$

4.23. $\vec{a}=7\vec{p}+\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q};\quad |\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=1,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=3\pi/4.$

4.24. $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q},\quad \vec{b}=3\vec{p}-\vec{q};\quad |\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=5,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=2\pi/3.$

4.25. $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q};\quad |\vec{p}|=7,\ |\vec{q}|=2,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/4.$

4.26. $\vec{a}=5\vec{p}-\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}+\vec{q};\quad |\vec{p}|=5,\ |\vec{q}|=3,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=5\pi/6.$

4.27. $\vec{a}=3\vec{p}-4\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}+3\vec{q};\quad |\vec{p}|=2,\ |\vec{q}|=3,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/4.$

4.28. $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q},\quad \vec{b}=5\vec{p}+\vec{q};\quad |\vec{p}|=1/2,\ |\vec{q}|=4,\quad (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=5\pi/6.$

4.29. $\vec{a} = 2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=1$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/3$.

4.30. $\vec{a} = 2\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=5\vec{p}+\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/2$.

4.31. $\vec{a} = 3\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=3$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=3\pi/4$

<u>Задача 5</u>. Компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$?

5.1. $\vec{a} = \{2;\ 3;\ 1\}$, $\vec{b} = \{-1;\ 0;\ -1\}$, $\vec{c} = \{2;\ 2;\ 2\}$.

5.2. $\vec{a} = \{3;\ 2;\ 1\}$, $\vec{b} = \{2;\ 3;\ 4\}$, $\vec{c} = \{3;\ 1;\ -1\}$.

5.3. $\vec{a} = \{1;\ 5;\ 2\}$, $\vec{b} = \{-1;\ 1;\ -1\}$, $\vec{c} = \{1;\ 1;\ 1\}$.

5.4. $\vec{a} = \{1;\ -1;\ -3\}$, $\vec{b} = \{3;\ 2;\ 1\}$, $\vec{c} = \{2;\ 3;\ 4\}$.

5.5. $\vec{a} = \{3;\ 3;\ 1\}$, $\vec{b} = \{1;\ -2,\ 1\}$, $\vec{c} = \{1;\ 1;\ 1\}$.

5.6. $\vec{a} = \{3;\ 1;\ -1\}$, $\vec{b} = \{-2;\ -1;\ 0\}$, $\vec{c} = \{5;\ 2;\ -1\}$.

5.7. $\vec{a} = \{4;\ 3;\ 1\}$, $\vec{b} = \{1;\ -2;\ 1\}$, $\vec{c} = \{2;\ 2;\ 2\}$.

5.8. $\vec{a} = \{4;\ 3;\ 1\}$, $\vec{b} = \{6;\ 7;\ 4\}$, $\vec{c} = \{2;\ 0;\ -1\}$.

5.9. $\vec{a} = \{3;\ 2;\ 1\}$, $\vec{b} = \{1;\ -3;\ -7\}$, $\vec{c} = \{1;\ 2;\ 3\}$.

5.10. $\vec{a} = \{3;\ 7;\ 2\}$, $\vec{b} = \{-2;\ 0;\ -1\}$, $\vec{c} = \{2;\ 2;\ 1\}$.

5.11. $\vec{a} = \{1;\ -2;\ 6\}$, $\vec{b} = \{1;\ 0;\ 1\}$, $\vec{c} = \{2;\ -6;\ 17\}$.

5.12. $\vec{a} = \{6;\ 3;\ 4\}$, $\vec{b} = \{-1;\ -2;\ -1\}$, $\vec{c} = \{2;\ 1;\ 2\}$.

5.13. $\vec{a} = \{7;\ 3;\ 4\}$, $\vec{b} = \{-1;\ -2;\ -1\}$, $\vec{c} = \{4;\ 2;\ 4\}$.

5.14. $\vec{a} = \{2;\ 3;\ 2\}$, $\vec{b} = \{4,\ 7;\ 5\}$, $\vec{c} = \{2;\ 0;\ -1\}$.

5.15. $\vec{a} = \{5;\ 3;\ 4\}$, $\vec{b} = \{-1,\ 0;\ -1\}$, $\vec{c} = \{4;\ 2;\ 4\}$.

5.16. $\vec{a} = \{3;\ 10;\ 5\}$, $\vec{b} = \{-2;\ -2;\ -3\}$, $\vec{c} = \{2;\ 4;\ 3\}$.

5.17. $\vec{a} = \{-2;\ -4;\ -3\}$, $\vec{b} = \{4;\ 3;\ 1\}$, $\vec{c} = \{6;\ 7;\ 4\}$.

5.18. $\vec{a} = \{3;\ 1;\ -1\}$, $\vec{b} = \{1;\ 0;\ -1\}$, $\vec{c} = \{8;\ 3;\ -2\}$.

5.19. $\vec{a} = \{4;\ 2;\ 2\}$, $\vec{b} = \{-3;\ -3;\ -3\}$, $\vec{c} = \{2;\ 1;\ 2\}$.

5.20. $\vec{a} = \{4;\ 1;\ 2\}$, $\vec{b} = \{9;\ 2;\ 5\}$, $\vec{c} = \{1;\ 1;\ -1\}$.

5.21. $\vec{a} = \{5;\ 3;\ 4\}$, $\vec{b} = \{4;\ 3;\ 3\}$, $\vec{c} = \{9;\ 5;\ 8\}$.

5.22. $\vec{a} = \{3;\ 4;\ 2\}$, $\vec{b} = \{1;\ 1;\ 0\}$, $\vec{c} = \{8;\ 11;\ 6\}$.

5.23. $\vec{a} = \{4;\ -1;\ -6\}$, $\vec{b} = \{1;\ -3;\ -7\}$, $\vec{c} = \{2;\ -1;\ -4\}$.

5.24. $\vec{a} = \{3;\ 1;\ 0\}$, $\vec{b} = \{-5;\ -4;\ -5\}$, $\vec{c} = \{4;\ 2;\ 4\}$.

5.25. $\vec{a} = \{3;\ 0;\ 3\}$, $\vec{b} = \{8;\ 1;\ -1\}$, $\vec{c} = \{1;\ 1;\ -1\}$.

5.26. $\vec{a} = \{I;\ -I;\ 4\}$. $\vec{b} = \{I;\ 0;\ 3\}$. $\vec{c} = \{I;\ -3;\ 8\}$.

5.27. $\vec{a} = \{6;\ 3;\ 4\}$. $\vec{b} = \{-I;-2;-I\}$. $\vec{c} = \{2;\ I;\ 2\}$.

5.28. $\vec{a} = \{4;\ I;\ I\}$. $\vec{b} = \{-9;-4;-9\}$. $\vec{c} = \{6;\ 2;\ 6\}$.

5.29. $\vec{a} = \{-3;\ 3;\ 3\}$. $\vec{b} = \{-4;\ 7;\ 6\}$. $\vec{c} = \{3;\ 0;\ -I\}$.

5.30. $\vec{a} = \{-7;\ I0;-5\}$. $\vec{b} = \{0;-2;-I\}$. $\vec{c} = \{-2;\ 4;\ -I\}$.

5.3I. $\vec{a} = \{7;\ 4;\ 6\}$. $\vec{b} = \{2;\ I;\ I\}$. $\vec{c} = \{I9;\ II;I7\}$.

Задача 6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

6.I. A_I (I; 3; 6). A_2 (2; 2; I). A_3 (-I;0;I). A_4 (-4;6;-3).

6.2. A_I (-4;2; 6). A_2 (2;-3; 0). A_3 (-I0;5;8). A_4 (-5;2;-4).

6.3. A_I (7; 2; 4). A_2 (7;-I;-2). A_3 (3;3; I). A_4 (-4;2; I).

6.4. A_I (2; I; 4). A_2 (-I;5; -2). A_3 (-7;-3;2). A_4 (-6;-3;6).

6.5. A_I (-I;-5;2). A_2 (-6;0;-3). A_3 (3;6;-3). A_4 (-I0;6;7).

6.6. A_I (0;-I;-I). A_2 (-2;3; 5). A_3 (I;-5;-9). A_4 (-I;-6;3).

6.7. A_I (5;2; 0). A_2 (2;5;0). A_3 (I; 2; 4). A_4 (-I;I;I).

6.8. A_I (2;-I; -2). A_2 (I; 2; I). A_3 (5; 0; -6). A_4 (-I0;9;-7).

6.9. A_I (-2; 0;-4). A_2 (-I;7; I). A_3 (4;-8;-4). A_4 (I;-4;6).

6.I0. A_I (I4;4; 5). A_2 (-5;-3;2). A_3 (-2;-6;-3). A_4 (-2;2;-I).

6.II. A_I (I; 2; 0). A_2 (3; 0; -3). A_3 (5; 2; 6). A_4 (8; 4;-9).

6.I2. A_I (2;-I;2). A_2 (I; 2; -I). A_3 (3; 2; I). A_4 (-4; 2;5).

6.I3. A_I (I; I; 2). A_2 (-I; I; 3). A_3 (2;-2; 4). A_4 (-I;0;-2).

6.I4. A_I (2; 3; I). A_2 (4; I; -2). A_3 (6; 3; 7). A_4 (7;5; -3).

6.I5. A_I (I; I;-I). A_2 (2; 3; I). A_3 (3; 2; I). A_4 (5; 9;-8).

6.I6. A_I (I; 5;-7). A_2 (-3;6; 3). A_3 (-2;7; 3). A_4 (-4;8;-I2).

6.I7. A_I (-3;4;-7). A_2 (I; 5;-4). A_3 (-5;-2;0). A_4 (2; 5; 4).

6.I8. A_I (-I;2;-3). A_2 (4;-I; 0). A_3 (2;I; -2). A_4 (3; 4; 5).

6.I9. A_I (4;-I; 3). A_2 (-2; I;0). A_3 (0; -5;I). A_4 (3;2; -6).

6.20. A_I (I;-I;I). A_2 (-2; 0;3). A_3 (2;I;-I). A_4 (2; -2;-4).

6.2I. A_I (I;2; 0). A_2 (I;-I; 2). A_3 (0;I;-I). A_4 (-3; 0; I).

6.22. A_I (I; 0; 2). A_2 (I; 2; -I). A_3 (2; -2; I). A_4 (2; I; 0).

6.23. A_I (I; 2;-3). A_2 (I; 0; I). A_3 (-2;-I; 6). A_4 (0; -5;-4).

6.24. A_I (3;I0;-I). A_2 (-2; 3;-5). A_3 (-6;0; -3). A_4 (I; -I;2).

6.25. A_I (-I;2; 4). A_2 (-I;-2;-4). A_3 (3; 0;-I). A_4 (7; -3;I).

6.26. A_I (0;-3; I). A_2 (-4; I; 2). A_3 (2; -I;5). A_4 (3; I;-4).

6.27. A_I (I; 3; 0). A_2 (4; -I; 2). A_3 (3; 0; I). A_4 (-4;3; 5).

6.28. A_I (-2;-I;-I). A_2 (0; 3; 2). A_3 (3; I;-4). A_4 (-4;7; 3).

6.29. A_I (-3;-5; 6). A_2 (2; I; -4). A_3 (0; -3;-I). A_4 (-5;2;-8).

6.30. A_I (2;-4;-3). A_2 (5;-6; 0). A_3 (-I; 3;-3). A_4 (-I0;-8;7).

6.3I. A_I (I;-I; 2). A_2 (2; I; 2). A_3 (I; I; 4). A_4 (6; -3;8).

Задача 7. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки, M_I, M_2, M_3.

7.I. M_I (-3; 4;-7). M_2 (I; 5; -4). M_3 (-5;-2; 0). M_0 (-I2;7;-I).

7.2. M_I (-I; 2;-3). M_2 (4;-I; 0). M_3 (2; I;-2). M_0 (I; -6;-5).

7.3. M_I (-3;-I; I). M_2 (-9;I;-2). M_3 (3;-5; 4). M_0 (-7; 0;-I).

7.4. M_I (I; -I; I). M_2 (-2;0;3). M_3 (2; I;-I). M_0 (-2; 4;2).

7.5. M_I (I; 2; 0). M_2 (I; -I;2). M_3 (0; I; -I). M_o (2; -I; 4).

7.6. M_1 (I; 0; 2). M_2 (I; 2;-I). M_3 (2;-2; I). M_0 (-5;-9; I).

7.7. M_I (I; 2;-3). M_2 (I; 0; I). M_3 (-2;-I;6). M_0 (3;-2; -9).

7.8. M_I (3;I0;-I). M_2 (-2;3;-5). M_3 (-6; 0;-3). M_0 (-6;7;-I0).

7.9. M_I (-I;2; 4). M_2 (-I;-2;-4). M_3 (3; 0; -I). M_0 (-2;3; 5).

7.I0. M_I (0;-3; I). M_2 (-4; I;2). M_3 (2;-I; 5). M_0 (-3; 4;-5).

7.II. M_I (I; 3; 0). M_2 (4; -I; 2). M_3 (3; 0; I). M_0 (4; 3; 0).

7.I2. M_I(-2;-I;-I). M_2 (0; 3; 2). M_3 (3; I;-4). M_0 (-2I;20;-I6).

7.I3. M_I (-3;-5; 6). M_2 (2; I; -4). M_3 (0;-3;-I). M_0 (3; 6; 68).

7.I4. M_I (2;-4; -3). M_2 (5;-6; 0). M_3 (-I;3;-3). M_0 (2;-I0; 8).

7.I5. M_I (I; -I; 2). M_2 (2; I; 2). M_3 (I; I; 4). M_0 (-3; 2; 7).

7.I6. M_I (I; 3; 6). M_2 (2; 2; I). M_3 (-I; 0; I). M_0 (5; -4; 5).

7.I7. M_I (-4; 2;6). M_2 (2;-3;0). M_3 (-I0;5;8). M_0 (-I2;I; 8).

7.I8. M_I (7; 2; 4). M_2 (7; -I;-2). M_3 (-5;-2;-I). M_0 (I0; I; 8).

7.I9.	M_I (2; I; 4).	M_2 (3; 5; -2).	M_3 (-7;-3; 2).	M_0 (-3; I; 8).
7.20.	M_I (-I;-5; 2).	M_2 (-6; 0; -3).	M_3 (3; 6; -3).	M_0 (I0;-8;-7).
7.2I.	M_I (0; -I;-I).	M_2 (-2;3; 5).	M_3 (I;-5; -9).	M_0 (-4;-I3;6).
7.22.	M_I (5; 2; 0).	M_2 (2; 5; 0).	M_3 (I; 2; 4).	M_0 (-3;-6;-8).
7.23.	M_I (2;-I;-2).	M_2 (I;2; I).	M_3 (5; 0; -6).	M_0 (I4; -3;7).
7.24.	M_I (-2;0;-4).	M_2 (-I; 7; I).	M_3 (4; -8;-4).	M_0 (-6; 5; 5).
7.25.	M_I (I4; 4; 5).	M_2 (-5;-3; 2).	M_3 (-2;-6;-3).	M_0 (-I;-8; 7).
7.26.	M_I (I; 2; 0).	M_2 (3; 0; -3).	M_3 (5; 2; 6).	M_0 (-I3;-8;I6).
7.27.	M_I (2;-I; 2).	M_2 (I; 2; -I).	M_3 (3; 2; I).	M_0 (-5; 3; 7).
7.28.	M_I (I; I; 2).	M_2 (-I; I; 3).	M_3 (2; -2;4).	M_0 (2; 3; 8).
7.29.	M_I (2; 3; I).	M_2 (4; I; -2).	M_3 (6; 3; 7).	M_0 (-5;-4;8).
7.30.	M_I (I; I;-I).	M_2 (2; 3; I).	M_3 (3; 2; I).	M_0 (-3;-7; 6).
7.3I.	M_I (I;5;-7).	M_2 (-3; 6;3).	M_3 (-2; 7;3).	M_0 (I;-I; 2).

Задача 8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{BC}$.

8.I.	A (I; 0; -2).	B (2; -I; 3).	C (0; -3; 2).
8.2.	A (-I;3; 4).	B (-I; 5; 0).	C (2; 6; I).
8.3.	A (4; -2; 0).	B (I; -I; -5).	C (-2; I; -3).
8.4.	A (-8; 0; 7).	B (-3; 2; 4).	C (-I; 4; 5).
8.5.	A (7; -5; I).	B (5; -I; -3).	C (3; 0; -4).
8.6.	A (-3; 5; -2).	B (-4; 0; 3).	C (-5; 2; 5).
8.7.	A (I; -I; 8).	B (-4; -3; I0).	C (-I; -I; 7).
8.8.	A (-2; 0; -5).	B (2; 7; -3).	C (I; I0; -I).
8.9.	A (I; 9; -4).	B (5; 7; I).	C (3; 5; 0).
8.I0.	A (-7; 0; 3).	B (I; -5;-4).	C (2; -3; 0).
8.II.	A (0; -3; 5).	B (-7; 2; 6).	C (-3; 2; 4).
8.I2.	A (5; -I; 2).	B (2; -4; 3).	C (4; -I; 3).
8.I3.	A (-3; 7; 2).	B (3; 5; I).	C (4; 5; 3).
8.I4.	A (0; -2; 8).	B (4; 3; 2).	C (I; 4; 3).
8.I5.	A (I; -I; 5).	B (0; 7; 8).	C (-I; 3; 8).
8.I6.	A (-I0;0; 9).	B (I2;4;II).	C (8; 5; I5).
8.I7.	A (3; -3;-6).	B (I; 9;-5).	C (6; 6; -4).
8.I8.	A (2; I; 7).	B (9; 0; 2).	C (9; 2; 3).
8.I9.	A (-7;I; -4).	B (8; II;-3).	C (9; 9; -I).

8.20. A (I; 0;-6), B (-7; 2; I), C (-9; 6; I).
8.2I. A (-3; I; 0), B (6; 3; 3) , C (9; 4; -2).
8.22. A (-4; -2;5), B (3; -3; -7), C (9; 3; -7).
8.23. A (0; -8;I0), B (-5; 5; 7), C (-8; 0; 4).
8.24. A (I; -5;-2), B (6; -2; I), C (2; -2; -2).
~~8.25. A (0; 7; -9), B (-I; 8;-II), C (-4; 3;-I2).~~
8.26. A (-3; -I;7), B (0; 2; -6), C (2; 3; -5).
8.27. A (5; 3; -I), B (0; 0; -3), C (5; -I; 0).
8.28. A (-I; 2; -2), B (I3; I4; I), C (I4; I5; 2).
8.29. A (7; -5; 0), B (8; 3; -I), C (8; 5; I).
8.30. A (-3; 6; 4), B (8; -3; 5), C (I0; -3; 7).
8.3I. A (2; 5; -3), B (7; 8; -I), C (9; 7; 4).

Задача 9. Найти угол между плоскостями.

9.I. $x - 3y + 5 = 0$, $2x - y + 5z - I6 = 0$.
9.2. $x - 3y + z - I = 0$, $x + z - I = 0$.
9.3. $4x - 5y + 3z - I = 0$, $x - 4y - z + 9 = 0$.
9.4. $3x - y + 2z + I5 = 0$, $5x + 9y - 3z - I = 0$.
9.5. $6x + 2y - 4z + I7 = 0$, $9x + 3y - 6z - 4 = 0$.
9.6. $x - y\sqrt{2} + z - I = 0$, $x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$.
9.7. $3y - z = 0$, $2y + z = 0$.
9.8. $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - I2 = 0$.
9.9. $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $I6x + I2y - I5z - I = 0$.
9.I0. $2x - y + 5z + I6 = 0$, $x + 2y + 3z + 8 = 0$.
9.II. $2x + 2y + z - I = 0$, $x + z - I = 0$.
9.I2. $3x + y + z - 4 = 0$, $y + z + 5 = 0$.
9.I3. $3x - 2y - 2z - I6 = 0$, $x + y - 3z - 7 = 0$.
9.I4. $2x + 2y + z + 9 = 0$, $x - y + 3z - I = 0$.
9.I5. $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $2x - y + 2z + 5 = 0$.
9.I6. $3x + 2y - 3z - I = 0$, $x + y + z - 7 = 0$.
9.I7. $x - 3y - 2z - 8 = 0$, $x + y - z + 3 = 0$.
9.I8. $3x - 2y + 3z + 23 = 0$, $y + z + 5 = 0$.
9.I9. $x + y + 3z - 7 = 0$, $y + z - I = 0$.
9.20. $x - 2y + 2z + I7 = 0$, $x - 2y - I = 0$.
9.2I. $x + 2y - I = 0$, $x + y + 6 = 0$.
9.22. $2x - z + 5 = 0$, $2x + 3y - 7 = 0$.

9.23.	$5x + 3y + z - I8 = 0$,	$2y + z - 9 = 0$.
9.24.	$4x + 3y - 2 = 0$,	$x + 2y + 2z + 5 = 0$.
9.25.	$x + 4y - z + I = 0$,	$2x + y + 4z - 3 = 0$.
9.26.	$2y + z - 9 = 0$,	$x - y + 2z - I = 0$.
9.27.	$2x - 6y + I4z - I = 0$,	$5x - I5y + 35z - 3 = 0$.
9.28.	$x - y + 7 - I = 0$,	$2x - 2y - 5 = 0$.
9.29.	$3x - y - 5 = 0$,	$2x + z - 3 = 0$.
9.30.	$x + y + z\sqrt{2} - 3 = 0$;	$x - y + z\sqrt{2} - I = 0$.
9.3I.	$x + 2y - 2z - 7 = 0$,	$x + y - 35 = 0$.

<u>Задача IO</u>. Найти координаты точки A, равноудаленной от точек B и C.

IO.I.	A (0; 0; z).	B (5; I; 0).	C (0; 2; 3).
IO.2.	A (0; 0; z).	B (3; 3; I).	C (4; I; 2).
IO.3.	A (0; 0; z).	B (3; I; 3).	C (I; 4; 2).
IO.4.	A (0; 0; z).	B (−I; −I; −6).	C (2; 3; 5).
IO.5.	A (0; 0; z).	B (−I3; 4; 6).	C (IO; −9; 5).
IO.6.	A (0; 0; z).	B (−5; −5; 6).	C (−7; 6; 2).
IO.7.	A (0; 0; z).	B (−I8, I; 0).	C (I5; −IO, 2).
IO.8.	A (0; 0; z).	B (IO; 0; −2).	C (9; −2; I).
IO.9.	A (0; 0; z).	B (−6; 7; 5).	C (8; −4; 3).
IO.IO.	A (0; 0; z).	B (6; −7; I).	C (−I; 2; 5).
IO.II.	A (0; 0; z).	B (7; 0; −I5).	C (2; IO; −I2).
IO.I2.	A (0; y; 0).	B (3; 0; 3).	C (0; 2; 4).
IO.I3.	A (0; y; 0).	B (I; 6; 4).	C (5; 7; I).
IO.I4.	A (0; y; 0).	B (−2; 8; IO).	C (6; II; −2).
IO.I5.	A (0; y; 0).	B (−2; −4; 6).	C (7; 2; 5).
IO.I6.	A (0; y; 0).	B (2; 2; 4).	C (0; 4; 2).
IO.I7.	A (0; y; 0).	B (0; −4; I).	C (I; −3; 5).
IO.I8.	A (0; y; 0).	B (0; 5; −9).	C (−I; 0; 5).
IO.I9.	A (0; y; 0).	B (−2; 4; −6).	C (8; 5; I).
IO.20.	A (0; y; 0).	B (7; 3; −4).	C (I; 5; 7).
IO.2I.	A (0; y; 0).	B (0; −2; 4).	C (−4; 0; 4).
IO.22.	A (x; 0; 0).	B (0; I; 4).	C (2; 0; 4).
IO.23.	A (x; 0; 0).	B (4; 0; 5).	C (5; 4; 2).

10.24.	A (x ; 0; 0).	B (8; 1; −7).	C (10; −2; 1).
10.25.	A (x ; 0; 0).	B (3; 5; 6).	C (1; 2; 3).
10.26.	A (x ; 0; 0).	B (4; 5; −2).	C (2; 3; 4).
10.27.	A (x ; 0; 0).	B (−2; 0; 6).	C (0; −2; −4).
10.28.	A (x ; 0; 0).	B (1; 5; 9).	C (3; 7; 11).
10.29.	A (x ; 0; 0).	B (4; 6; 8).	C (2; 4; 6).
10.30.	A (x ; 0; 0).	B (1; 2; 3).	C (2; 6; 10).
10.31.	A (x ; 0; 0).	B (−2; −4; −6).	C (−1; −2; −3).

Задача 11. Написать канонические уравнения прямой.

11.1.	$2x+2y+z-2=0,$	$2x-y-3z+6=0$
11.2.	$x-3y+2z+2=0,$	$x+3y+z+14=0.$
11.3.	$x-2y+z-4=0,$	$2x+2y-z-8=0.$
11.4.	$x+y+z-2=0,$	$x-y-2z+2=0.$
11.5.	$2x+3y+z+6=0,$	$x-3y-2z+3=0.$
11.6.	$3x+y-z-6=0,$	$3x-y+2z=0.$
11.7.	$x+5y+2z+11=0,$	$x-y-z-1=0.$
11.8.	$3x+4y-2z+1=0,$	$2x-4y+3z+4=0.$
11.9.	$5x+y-3z+4=0,$	$x-y+2z+2=0.$
11.10.	$x-y-z-2=0,$	$x-2y+z+4=0.$
11.11.	$4x+y-3z+2=0,$	$2x-y+z-8=0.$
11.12.	$3x+3y-2z-1=0,$	$2x-3y+z+6=0.$
11.13.	$6x-7y-4z-2=0;$	$x+7y-z-5=0.$
11.14.	$8x-y-3z-1=0,$	$x+y+z+10=0.$
11.15.	$6x-5y-4z+8=0,$	$6x+5y+3z+4=0.$
11.16.	$x+5y-z-5=0,$	$2x-5y+2z+5=0.$
11.17.	$2x-3y+z+6=0,$	$x-3y-2z+3=0.$
11.18.	$5x+y+2z+4=0,$	$x-y-3z+2=0.$
11.19.	$4x+y+z+2=0,$	$2x-y-3z-8=0.$
11.20.	$2x+y-3z-2=0,$	$2x-y+z+6=0.$
11.21.	$x+y-2z-2=0,$	$x-y+z+2=0.$
11.22.	$x+5y-z+11=0,$	$x-y+2z-1=0.$
11.23.	$x-y+z-2=0,$	$x-2y-z+4=0.$
11.24.	$6x-7y-z-2=0,$	$x+7y-4z-5=0.$

II.25. $x + 5y + 2z - 5 = 0,\quad 2x - 5y - z + 5 = 0.$

II.26. $x - 3y + z + 2 = 0,\quad x + 3y + 2z + 14 = 0.$

II.27. $2x + 3y - 2z + 6 = 0,\quad x - 3y + z + 3 = 0.$

II.28. $3x + 4y + 3z + 1 = 0,\quad 2x - 4y - 2z + 4 = 0.$

II.29. $3x + 3y + z - 1 = 0,\quad 2x - 3y - 2z + 6 = 0.$

II.30. $6x - 5y + 3z + 8 = 0,\quad 6x + 5y - 4z + 4 = 0.$

II.31. $2x - 3y - 2z + 6 = 0,\quad x - 3y + z + 3 = 0.$

Задача I2. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

I2.1. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4},\quad x + 2y + 3z - 14 = 0.$

I2.2. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5},\quad x + 2y - 5z + 20 = 0.$

I2.3. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2},\quad x - 3y + 7z - 24 = 0.$

I2.4. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2},\quad 2x - y + 4z = 0.$

I2.5. $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0},\quad 3x + y - 5z - 12 = 0.$

I2.6. $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2},\quad x + 3y - 5z + 9 = 0.$

I2.7. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1},\quad x - 2y + 5z + 17 = 0.$

I2.8. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1},\quad x - 2y + 4z - 19 = 0.$

I2.9. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1},\quad 2x - y + 3z + 23 = 0.$

I2.10. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0},\quad 2x - 3y - 5z - 7 = 0.$

I2.11. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3},\quad 4x - 2y - z - 11 = 0.$

I2.12. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1},\quad 3x - 2y - 4z - 8 = 0.$

I2.13. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2},\quad x + 2y - z - 2 = 0.$

12.14. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3}$, $\quad 5x-y+4z+3=0.$

12.15. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$, $\quad x+3y+5z-42=0.$

12.16. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-4}{2}$, $\quad 7x+y+4z-47=0.$

12.17. $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5}$, $\quad 2x+3y+7z-52=0.$

12.18. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$, $\quad 3x+4y+7z-16=0.$

12.19. $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1}$, $\quad 2x-5y+4z+24=0.$

12.20. $\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12}$, $\quad x-2y-3z+18=0.$

12.21. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{0}$, $\quad x-7y+3z+11=0.$

12.22. $\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{2}$, $\quad 3x+7y-5z-11=0.$

12.23. $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-1}$, $\quad 4x+y-6z-5=0.$

12.24. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-8}{0}$, $\quad 5x+9y+4z-25=0.$

12.25. $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}$, $\quad x+4y+13z-23=0.$

12.26. $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{3}$, $\quad 3x-2y+5z-3=0.$

12.27. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-2}$, $\quad 3x-y+4z=0.$

12.28. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{-2}$, $\quad x+2y-5z+16=0.$

12.29. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{-2}$, $\quad 3x-7y-2z+7=0.$

12.30. $\frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{11}$, $\quad 5x+7y+9z-32=0.$

12.31. $\frac{x-7}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2}$, $\quad 2x+y+7z-3=0.$

Задача I3. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой (для вариантов I - I5) или плоскости (для вариантов I6 - 3I).

I3.I. M (0; -3; -2), $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z}{1}$.

I3.2. M (2; -I; I), $\frac{x-4,5}{1}=\frac{y+3}{-0,5}=\frac{z-2}{1}$.

I3.3. M (I; I; I), $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1,5}{-2}=\frac{z-1}{1}$.

I3.4. M (I; 2; 3), $\frac{x-0,5}{0}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z-1,5}{1}$.

I3.5. M (I; 0; -I), $\frac{x-3,5}{2}=\frac{y-1,5}{2}=\frac{z}{0}$.

I3.6. M (2; I; 0), $\frac{x-2}{0}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z+0,5}{1}$.

I3.7. M (-2; -3; 0), $\frac{x+0,5}{1}=\frac{y+1,5}{0}=\frac{z-0,5}{1}$.

I3.8. M (-I; 0; -I), $\frac{x}{-1}=\frac{y-1,5}{0}=\frac{z-2}{1}$.

I3.9. M (0; 2; I), $\frac{x-1,5}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1}$.

I3.I0. M (3; -3; -I), $\frac{x-6}{5}=\frac{y-3,5}{4}=\frac{z+0,5}{0}$.

I3.II. M (3; 3; 3), $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1,5}{0}=\frac{z-3}{1}$.

I3.I2. M (-I; 2; 0), $\frac{x+0,5}{1}=\frac{y+0,7}{-0,2}=\frac{z-2}{2}$.

I3.I3. M (2; -2; -3), $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+0,5}{0}=\frac{z+1,5}{0}$.

I3.I4. M (-I; 0; I), $\frac{x+0,5}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-4}{2}$.

I3.I5. M (0; -3;-2), $\frac{x+0,5}{0}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z-1,5}{1}$.

I3.I6. M (I; 0; I), $4x+6y+4z-25=0$.

I3.I7. M (-I; 0;-I), $2x+6y-2z+II=0$.

I3.I8. M (0; 2; I). $2x + 4y - 3 = 0$.
I3.I9. M (2; I; 0). $y + z + 2 = 0$.
I3.20. M (-2; 2; 0). $4x - 5y - z - 7 = 0$.
I3.2I. M (2; -I; I). $x - y + 2z - 2 = 0$.
I3.22. M (I; I; I). $x + 4y + 13z + 5 = 0$.
I3.23. M (I; 2; 3). $2x + 10y + 10z - 1 = 0$.
I3.24. M (0; -3; -2). $2x + 10y + 10z - 1 = 0$.
I3.25. M (I; 0; -I). $2x + 4z - 1 = 0$.
I3.26. M (3; -3; -I). $2x - 4y - 4z - 13 = 0$.
I3.27. M (-2; -3; 0). $x + 5y + 4 = 0$.
I3.28. M (2; -2; -3). $y + z + 2 = 0$.
I3.29. M (-I; 0; I). $2x + 4y - 3 = 0$.
I3.30. M (3; 3; 3). $8x + 6y + 8z - 25 = 0$.
I3.3I. M (-2; 0; 3). $2x - 2y + 10z + 1 = 0$.

Задача I4. Даны координаты точек M_0, M_I, M_2, M_3. Найти:

а) канонические уравнения прямой $M_I M_2$;

б) уравнение плоскости $M_I M_2 M_3$;

в) уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно плоскости $M_I M_2 M_3$;

г) уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно к вектору $M_I M_3$;

д) уравнения прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно к плоскости $M_I M_2 M_3$;

е) уравнение плоскости, делящей пополам двугранный угол, который образован плоскостями $M_0 M_I M_2$ и $M_I M_2 M_3$.

I4.I. M_0 (0; -I; I). M_I (I; 0; I). M_2 (4; I; 6). M_3 (6; -I; 0).

I4.2. M_0 (0; I; I). M_I (-I3; 0; 6). M_2 (I0; I; -3). M_3 (-2; I; 3).

I4.3. M_0 (0; -4; -I). M_I (6; -8; -2). M_2 (-4; I0; -I). M_3 (0; -2; -3).

I4.4. M_0 (0; I; 2). M_I (2; 0; 2). M_2 (8; -I; 7). M_3 (I2; I; I).

I4.5. M_0 (0; I; -2). M_I (I; -I2; 8). M_2 (0; II; -I0). M_3 (0; -I; 2).

I4.6. M_0 (I; -I; 0). M_I (7; -5; -I). M_2 (-3; I3; 0). M_3 (I; I; -2).

14.7. M_0 (I; -3; -I). M_I (0; -2; -I); M_2 (-3;-I;-6). M_3 (-5;-3;0).

I4.8. M_0 (I; 2; 3). M_I (I4; 3; -2). M_2 (-9;2; 7). M_3 (3; 2; I).

I4.9. M_0 (-3; I; -I). M_I (-7; 0; 5). M_2 (II; I;-5). M_3 (-I;-I;-I).

I4.I0. M_0 (2; -4; -2). M_I (4; -2;-2). M_2 (I0; 0; 8). M_3 (I4;-4;-4).

I4.II. M_0 (I; 0; -I). M_I (-I2;-I;4). M_2 (II;0;-5). M_3 (-I;0; I).

I4.I2. M_0 (-2;-2; 3). M_I (4; -6;2). M_2 (-6;I2;3). M_3 (-2; 0;I).

I4.I3. M_0 (I; -2; -I). M_I (2; -I;-I). M_2 (5; 0; 4). M_3 (7;-2;-2).

I4.I4. M_0 (2; 0; 0). M_I (-24;I; 5). M_2 (22,0;-4). M_3 (-2;0;2).

I4.I5. M_0 (3;-I; 2). M_I (7; 5; 0). M_2 (-II;-5;2). M_3 (I; -I;-2).

I4.I6. M_0(2; I; 0). M_I (3; 2; 0). M_2 (6; 3; 5). M_3 (8;I;-I).

I4.I7. M_0 (0;-2; I). M_I (I3;-3;-4). M_2 (-I0;-2;5). M_3 (2;-2;-I).

I4.I8. M_0 (3; 5; I). M_I (-3; 9; 2). M_2 (7; -9;I). M_3 (3; 3; 3).

I4.I9. M_0 (-I;I; 0). M_I (0; I; I). M_2 (I; 6; 4). M_3 (-I;0;6).

I4.20. M_0 (4;-2;-6). M_I (-22;-4;4). M_2 (24;-2;-I4). M_3 (0;-2;-2).

I4.2I. M_0 (-I;-3; I). M_I (5;-7; 0). M_2 (-5;II;I). M_3 (-I;-I;-I).

I4.22. M_0 (-I;0; 3). M_I (0; I; 3). M_2 (3; 2; 8). M_3 (5;0;2).

I4.23. M_0 (2;-I;-3). M_I (-II;-2;2). M_2 (I2;-I;-7). M_3 (0;-I;-I).

I4.24. M_0 (-2;3; 2). M_I (I0; 7; I). M_2 (-I0;-II;2). M_3 (-2; I;0).

I4.25. M_0 (I; 0; 2). M_I (0; I; 2). M_2 (-I; 4; I2). M_3 (I; 6; 0).

I4.26. M_0 (3; 2; -2). M_I (-I0; I;3). M_2 (I3;2;-6). M_3 (I; 2; 0).

I4.27. M_0 (2;-5;-I). M_I (-4;-9; 0). M_2 (6;9; -I). M_3 (2;-3;I).

I4.28. M_0 (2; 3; I). M_I (I; 2; I). M_2 (-2;I;-4). M_3 (-4;3;2).

I4.29. M_0 (0;-I; I). M_I (-I;4; I2). M_2 (0;-5;II). M_3 (0;I;-I).

I4.30. M_0 (0;-8;-2). M_I (I2;-I6;-4). M_2 (-8;20;-2). M_3 (0;-4;-6).

5. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

5.1. Теоретические вопросы

1. Определение линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость элементов. Базис линейного пространства.

2. Линейный оператор. Матрица линейного оператора.

3. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.

4. Евклидово пространство. Неравенство Коши – Буняковского, норма элемента.

5. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.

6. Преобразование матрицы линейного оператора к диагональному виду.

7. Квадратичная форма и приведение ее к каноническому виду.

5.2. Теоретические задачи и упражнения

1. Доказать, что система векторов является линейно зависимой, если она содержит 1) нулевой вектор, 2) два равных вектора.

2. Доказать, что функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$ – линейно независимы.

3. Доказать, что любая система попарно ортогональных векторов в пространстве R_n является линейно независимой.

4. Написать неравенство Коши – Буняковского и неравенство треугольника для пространства R_n.

5. Доказать, что в евклидовом пространстве имеет место равенство (обобщенная теорема Пифагора)

$$\|x_1+x_2+\ldots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\ldots+\|x_n\|^2.$$

6. Найти матрицу преобразования декартова базиса в пространстве R_2 при повороте на угол φ.

7. Показать, что оператор поворота не имеет собственных векторов в вещественном пространстве.

8. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если в первом базисе поменять местами два вектора?

9. Найти координаты многочлена $P_3(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ в базисе $1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3$.

10. Найти матрицу перехода от базиса $1, x, x^2$ к базису $1, (x-2), (x-2)^2$.

5.3. Расчетные задания

<u>Задача I</u>. Проверить, является ли данное множество линейным пространством.

Множество	Сложение элементов a и b	Умножение на число α
I	2	3
I.I. Все трехмерные векторы с целыми координатами	Обычным образом	Обычным образом
I.2. Все трехмерные векторы, лежащие на одной оси	"	"
I.3. Все двухмерные векторы, каждый из которых лежит на одной из координатных осей	"	"
I.4. Все трехмерные векторы	$[a \cdot b]$	Обычным образом
I.5. Все двухмерные векторы, лежащие на одной оси	Обычным образом	$\alpha \cdot \lvert a \rvert$
I.6. Все векторы, являющиеся линейными комбинациями трех заданных		Обычным образом
I.7. Все функции $a(t)$ такие, что $t \in [a, b]$, $a(t) > 0$	$a(t) \cdot b(t)$	$a^{\alpha}(t)$
I.8. Все непрерывные функции $a(t)$, $t \in [0, 1]$		Обычным образом
I.9. Все четные функции $a(t)$, $t \in [-1, 1]$	$a(t) \cdot b(t)$	Обычный образом
I.I0. Нечетные функции $a(t)$, $t \in [-1, 1]$	Обычным образом	
I.II. Все многочлены третьей степени	"	"
I.I2. Все n -мерные векторы	"	"
I.I3. Все n -мерные векторы	$(x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n)$	Обычным образом
I.I4. Все сходящиеся последовательности	Почленное	"
I.I5. Все многочлены степени $\leqslant n$	Обычным образом	Обычным образом

I	2	3
I.16. Все многочлены степени $\leq n$	Обычным образом	
I.17. Все квадратные диагональные матрицы порядка n	"	"
I.18. Все квадратные матрицы порядка n	"	"
I.19. Все диагональные квадратные матрицы порядка n	$\{a_{ij}\cdot b_{ij}\}$	Обычным образом
I.20. Все прямоугольные матрицы размера $m \times n$	**Обычным образом**	
I.21. Все симметрические квадратные матрицы порядка n	"	"
I.22. Все целые числа	Обычным образом	$[\alpha a]$
I.23. Все действительные числа	"	Обычным образом
I.24. Все положительные числа	$a\cdot b$	a^{α}
I.25. Все отрицательные числа	$-\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$	$-\lvert a\rvert^{\alpha}$
I.26. Все действительные числа	$a\cdot b$	Обычным образом
I.27. Все дифференцируемые функции	$a(t)+b(t)$	"
I.28. Все дифференцируемые функции	$a(t)\cdot b(t)$	"
I.29. Все трехмерные векторы такие, что $X_1+X_2+X_3=0$	**Обычным образом**	
I.30. Все трехмерные векторы, такие, что $X_1+X_2+X_3=1$	"	"

Задача 2. Установить, является ли данный набор элементов линейно зависимым; если да, то указать коэффициенты линейной комбинации.

2.1. $\vec{a}=\{1;4;6\}$, $\vec{b}=\{1;-1;1\}$, $\vec{c}=\{1;1;3\}$.

2.2. $\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\qquad x\in(-\pi/2,+\pi/2)$.

2.3. $\vec{a}=\{2;3;1\}$, $\vec{b}=\{3;-1;5\}$, $\vec{c}=\{1;-4;3\}$.

2.4. $\sin x,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

2.5. $\vec{a}=\{5;4;3\}$, $\vec{b}=\{3;3;2\}$, $\vec{c}=\{8,1,3\}$.

2.6. $1, x, \sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

2.7. $\vec{a}=\{1;1;1\}$, $\vec{b}=\{0;1;1;\}$, $\vec{c}=\{0;0;1\}$.

2.8. e^x, e^{2x}, e^{3x}, $x\in(-\infty,+\infty)$.

2.9. $\vec{a}=\{1;-1;2\}$, $\vec{b}=\{-1;1;-1\}$, $\vec{c}=\{2;-1;1\}$.

2.10. $x, x^2, (1+x)^2$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

2.11. $\vec{a}=\{1;2;3\}$, $\vec{b}=\{4;5;6\}$, $\vec{c}=\{7;8;9\}$.

2.12. $1, x, x^2, (1+x)^2$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

2.13. $\vec{a}=\{1;1;1\}$, $\vec{b}=\{1;2;3\}$, $\vec{c}=\{1;3;6\}$.

2.14. $\cos x, \sin x, \sin 2x$, $x\in(-\pi/2,+\pi/2)$.

2.15. $\vec{a}=\{3;4;-5\}$, $\vec{b}=\{8;7;-2\}$, $\vec{c}=\{2;-1;8\}$.

2.16. e^x, e^{2x}, e^{-x}, $x\in(-\infty,+\infty)$.

2.17. $\vec{a}=\{3;2;-4\}$, $\vec{b}=\{4;1;-2\}$, $\vec{c}=\{5;2;-3\}$.

2.18. $1+x+x^2$, $1+2x+x^2$, $1+3x+x^2$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

2.19. $\vec{a}=\{0;1;1\}$, $\vec{b}=\{1;0;1\}$, $\vec{c}=\{1;1;0\}$.

2.20. $1, e^x, \operatorname{sh}x$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

2.21. $\vec{a}=\{5;-6;1\}$, $\vec{b}=\{3;-5;-2\}$, $\vec{c}=\{2;-1;3\}$.

2.22. $1/x, x, 1$, $x\in(0,1)$.

2.23. $\vec{a}=\{7;1;-3\}$, $\vec{b}=\{2;2;-4\}$, $\vec{c}=\{3;-3;5\}$.

2.24. $1, \operatorname{tg}x, \operatorname{ctg}x$, $x\in(0,\pi/2)$.

2.25. $\vec{a}=\{1;2;3\}$, $\vec{b}=\{6;5;9\}$, $\vec{c}=\{7;8;9\}$.

2.26. $x_1, (1+x), (1+x)^2$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

2.27. $\vec{a}=\{2;1;0\}$, $\vec{b}=\{-5;0;3\}$, $\vec{c}=\{3;4;3\}$.

2.28. e^x, xe^x, x^2e^x, $x\in(-\infty,+\infty)$.

2.29. $\vec{a}=\{2;0;2\}$, $\vec{b}=\{1;-1;0\}$, $\vec{c}=\{0;-1;-2\}$.

2.30. $e^x, \operatorname{sh}x, \operatorname{ch}x$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

Задача 3. Доказать линейность оператора, найти его матрицу.

3.1. Проектирование на плоскость $x+z=0$.

3.2. Зеркальное отражение относительно плоскости $x+z=0$.

3.3. Проектирование на плоскость $y+z=0$.

3.4. Проектирование на плоскость OYZ.

3.5. Проектирование на плоскость $y=0$.

3.6. Проектирование на ось Ox.

3.7. Проектирование на плоскость $x-\sqrt{3}z=0$.

3.8. Зеркальное отражение относительно плоскости $x-z=0$.

3.9. Зеркальное отражение относительно плоскости $x+y=0$.

3.10. Поворот относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/2$.

3.11. Проектирование на плоскость $y+\sqrt{3}z=0$.

3.12. Зеркальное отражение относительно плоскости $x-y=0$.

3.13. Проектирование на плоскость $z=0$.

3.14. Поворот относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/4$.

3.15. Зеркальное отражение относительно плоскости OXZ.

3.16. Проектирование на плоскость $x+y=0$.

3.17. Поворот относительно оси Ox на угол $\pi/2$ в положительном направлении.

3.18. Проектирование на плоскость $-z+y=0$.

3.19. Зеркальное отражение относительно плоскости OYZ.

3.20. Проектирование на плоскость $y=\sqrt{3}x$.

3.21. Зеркальное отражение относительно плоскости OXY.

3.22. Проектирование на плоскость $\sqrt{3}y+z=0$.

3.23. Поворот в положительном направлении относительно оси Oy на угол $\pi/2$.

3.24. Зеркальное отражение относительно плоскости $y-z=0$.

3.25. Проектирование на ось Oy.

3.26. Зеркальное отражение относительно плоскости $y+z=0$.

3.27. Проектирование на ось Oz.

3.28. Проектирование на плоскость $x=y$.

3.29. Проектирование на плоскость $x=z$.

3.30. Проектирование на плоскость $\sqrt{3}x+y=0$.

Задача 4. Являются ли преобразования A, B, C линейными, если $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$; для линейных преобразований указать матрицу.

4.1. $A\vec{x} = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\ -3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2x_3)$,

$B\vec{x} = (6 - 5x_2 - 4x_3,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2)$,

$C\vec{x} = (x_3^4,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2x_3)$.

4.2. $A\vec{x} = (5x_1 - 4x_2 + 3x_3,\ 2x_1 - x_3,\ x_2 - 2)$,

$B\vec{x} = (5x_1 + 4x_2 + 3x_3,\ 0,\ x_3^4 + 2x_2)$,

$C\vec{x} = (5x_1 + 4x_2 - 3x_3,\ 2x_2 - x_1,\ x_3 + 2x_2)$.

4.3. $A\vec{x} = (x_3^2,\ x_2 - x_1,\ x_2 + x_3)$,

$B\vec{x} = (2,\ x_3 - x_1,\ x_3 + x_2)$,

$C\vec{x} = (x_3,\ x_1 - x_2,\ x_2 + x_3)$.

4.4. $A\vec{x} = (4x_1 - x_3 - 1,\ 0,\ 2x_1 + x_2 + 3x_3)$,

$B\vec{x} = (3x_1^2 - 2x_2 - x_3,\ 0, 0)$,

$C\vec{x} = (3x_3 - 2x_1 - x_2,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 0)$.

4.5. $A\vec{x} = (4x_1 - 2x_3 - 1,\ 2x_3 - x_1,\ x_1^3)$,

$B\vec{x} = (4x_1 - 2x_3 - x_2,\ 2x_3 - x_1,\ 2)$,

$C\vec{x} = (4x_1 - 2x_3 - x_2,\ 2x_3 - x_1,\ x_1)$.

4.6. $A\vec{x} = (5x_1 - 4x_2 - 1,\ 2x_1 - x_2,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,

$B\vec{x} = (5x_1 - 4x_2 - x_3^3,\ 2x_1 - x_2,\ 3x_1 + 2x_2 - x_3)$,

$C\vec{x} = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ x_1 - x_2 + x_3)$.

4.7. $A\vec{x} = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_1 + x_2 - 3)$,

$B\vec{x} = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_1 + x_2^4 + x_3)$,

$C\vec{x} = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_1 - x_2 - x_3)$.

4.8. $A\vec{x} = (2x_1 - x_2,\ x_2 - x_3,\ 3x_1 + 4x_2^2 + x_3)$,

$B\vec{x} = (2x_1 - x_2,\ x_2 + x_3,\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3)$,

$C\vec{x} = (2x_1 - x_2,\ x_2 - 1,\ 3x_1 - 5)$.

4.9. $A\vec{x} = (x_2 - 2x_1,\ x_3,\ 2x_1 + x_2 + x_3^2)$,

$B\vec{x} = (x_2 - 2x_1,\ -x_3,\ x_1 + 2x_2 - x_3)$,

$C\vec{x} = (x_2 - 2x_1,\ 1,\ x_1 - x_2 - x_3)$.

4.10. $A\vec{x} = (6x_1 + 5x_2 - 4,\ 3x_1 + 2x_2 - x_3,\ 0)$,

$B\vec{x} = (6x_1 + 5x_2 + 4x_3,\ -3x_1 - x_2^2,\ 0)$,

$C\vec{x} = (6x_1 + 5x_2 - 4x_3,\ 3x_1 - 2x_2 + x_3,\ 0)$.

4.11. $A\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 - 1,\ 0,\ x_1 + x_3)$,

$B\vec{x} = (3x_1 + 2x_2^2 + x_3,\ 0,\ 0)$,

$C\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ 0,\ x_1 + x_2 + x_3)$

4.12. $A\vec{x} = (0,\ x_1 - 2x_2 + x_3,\ x_2 + x_3)$,

$B\vec{x} = (0,\ x_1 - 2x_2 + x_3,\ x_2 + 1)$,

$C\vec{x} = (0,\ x_1^2 + 2x_2 + x_3,\ x_2 - x_3)$.

4.13. $A\vec{x} = (5x_1 + 4x_2 - x_3,\ x_1 - 2x_2,\ x_1 + x_2 + x_3)$,

$B\vec{x} = (5x_1 + 4x_2 - 2x_3^3,\ x_1 - 2x_2,\ x_1 + x_2 + x_3)$,

$C\vec{x} = (5x_1 + 4x_2 - 2,\ x_1 - 2x_2,\ x_1 + x_2 + x_3)$.

4.14. $A\vec{x} = (3x_1 - x_2^3,\ 6x_1 + 8x_3,\ x_1 + 9x_3)$,

$B\vec{x} = (3x_1 - x_2,\ 6x_1 + 8,\ x_1 - 9x_3)$,

$C\vec{x} = (3x_1 + x_2,\ 6x_1 + 8x_3,\ x_1 + x_3)$.

4.15. $A\vec{x} = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_2 + x_3,\ x_1 - x_2)$,

$B\vec{x} = (x_1^2 + x_2 - x_3,\ x_2 - x_3,\ 0)$,

$C\vec{x} = (x_1 - x_2 - x_3,\ x_2 + 3,\ x_1 - x_2)$.

4.16. $A\vec{x} = (2x_1 - x_2,\ x_1 + 2 + x_3,\ x_1 - x_3)$,
$B\vec{x} = (2x_1 + x_2,\ x_1 + 2x_2 + x_3,\ 0)$,
$C\vec{x} = (2x_1 - x_2^2,\ x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_2 + x_3)$.

4.17. $A\vec{x} = (x_2 - x_3,\ 3x_1 + x_3,\ 6x_1 - 7x_2 + x_3)$,
$B\vec{x} = (x_2^2 + x_3,\ 3x_1 - x_3,\ 6x_1 + 7x_2 - 2x_3)$,
$C\vec{x} = (-x_2 + 2,\ 3x_1 + x_2,\ 6x_1 - x_2 + 8x_3)$.

4.18. $A\vec{x} = (x_1^2 + 2x_2 + x_3,\ 0,\ 0)$,
$B\vec{x} = (x_1 + x_2 + x_3,\ 0,\ x_1 + 1)$,
$C\vec{x} = (x_1 + x_2 + x_3,\ 0,\ x_1 - x_3)$.

4.19. $A\vec{x} = (x_1,\ x_1 - 2x_3,\ 3x_1 + x_2 - x_3^2)$,
$B\vec{x} = (-x_1,\ x_1 + 2,\ 3x_1 + x_2 - x_3)$,
$C\vec{x} = (x_1,\ x_1 + x_2 + x_3,\ 3x_1 + x_2 - x_3)$.

4.20. $A\vec{x} = (4x_1 + x_2^3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 + x_3)$,
$B\vec{x} = (4x_1 + 4,\ 2x_2 - x_1,\ x_1 - x_3)$,
$C\vec{x} = (4x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - 2x_2 + x_3,\ x_2 + 3x_3)$.

4.21. $A\vec{x} = (x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,\ 3x_2 - 3x_3)$,
$B\vec{x} = (-x_3,\ 2x_1 + x_2^3 + 4,\ 2x_2 - 3x_3)$,
$C\vec{x} = (x_3^2,\ 2x_1 + 3x_2,\ 3x_2 + 2x_3)$.

4.22. $A\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_3,\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$,
$B\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ 1,\ 2x_1 - 3x_2 - 4)$,
$C\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_3,\ 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3)$.

4.23. $A\vec{x} = (x_1^3 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3,\ 7x_1 + 8x_2)$,
$B\vec{x} = (x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3,\ 7x_1 + 8x_2)$,
$C\vec{x} = (x_1 + 2x_2 + 3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6,\ 7x_1 + 8x_2)$.

4.24. $A\vec{x} = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$,
$B\vec{x} = (3x_1 - 2x_2 - 1,\ x_2 + 2,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$,
$C\vec{x} = (3x_1 - 2x_2 - x_3^2,\ x_2 + 2x_3,\ 0)$.

4.25. $A\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 + 4,\ 5x_1 + 6x_2 + 7,\ 8x_1 + x_3)$,
$B\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3^3,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3,\ 0)$,
$C\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3,\ 8x_1 + x_3)$.

4.26. $A\vec{x} = (3x_1 - 3x_2^3 - 2x_3,\ x_1 + x_3,\ 0)$,
$B\vec{x} = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1 + x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3)$,
$C\vec{x} = (4x_1 - 3x_2 - 2,\ x_1 + x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3)$.

4.27. $A\vec{x} = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2)$,
$B\vec{x} = (6x_1 - 5x_2 - 4,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2)$,
$C\vec{x} = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3^2,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ 0)$.

4.28. $A\vec{x} = (x_1,\ x_2 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$,
$B\vec{x} = (x_1,\ x_2 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5)$,
$C\vec{x} = (x_1,\ x_2^2 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$.

4.29. $A\vec{x} = (2x_1 + x_2,\ x_3^2,\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3)$,
$B\vec{x} = (2x_1 + x_2,\ x_3,\ 2x_1 - 3x_2 + 4)$,
$C\vec{x} = (2x_1 + x_2,\ x_3,\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3)$.

4.30. $A\vec{x} = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\ 1,\ x_1 + 2x_2 + 3)$,
$B\vec{x} = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\ 0,\ x_1^3 + 2x_2 + 3x_3)$,
$C\vec{x} = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

<u>Задача 5</u>. Вектор $\vec{x}$ задан в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Найти его координаты в базисе ($\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$). Координаты векторов $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ в базисе ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) указаны в таблице.

Номер варианта	$\vec{e}_1'$			$\vec{e}_2'$			$\vec{e}_3'$			$\vec{x}$		
	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
5.I	I	I	2	2	-I	0	-I	I	I	6	-I	3
5.2	I	I	3	3/2	-I	0	-I	I	I	I	2	4
5.3	I	I	4	4/3	-I	0	-I	I	I	I	3	6
5.4	I	I	3/2	3	-I	0	-I	I	I	2	4	I
5.5	I	I	4/3	4	-I	0	-I	I	I	6	3	I
5.6	I	I	5	5/4	-I	0	-I	I	I	I	4	8
5.7	I	I	5/4	5	-I	0	-I	I	I	8	4	I
5.8	I	I	6	6/5	-I	0	-I	I	I	2	5	I0
5.9	I	I	6/5	6	-I	0	-I	I	I	I0	5	I
5.I0	I	I	7	7/6	-I	0	-I	I	I	I	6	I2
5.II	I	I	7/6	7	-I	0	-I	I	I	-I2	6	I
5.I2	I	I	8	8/7	-I	0	-I	I	I	-I	7	I4
5.I3	I	I	-I	I/2	-I	0	-I	I	I	-3	2	4
5.I4	I	I	I/2	-I	-I	0	-I	I	I	2	4	3
5.I5	I	I	-2	2/3	-I	0	-I	I	I	2	6	-3
5.I6	I	I	2/3	-2	-I	0	-I	I	I	I2	3	-I
5.I7	I	I	-3	3/4	-I	0	-I	I	I	I	-4	8
5.I8	I	I	-3	3/4	-I	0	-I	I	I	I	4	-8
5.I9	I	I	-4	4/5	-I	0	-I	I	I	7	-5	I0
5.20	I	I	4/5	-4	-I	0	-I	I	I	5	-5	-4
5.2I	I	I	-5	5/6	-I	0	-I	I	I	7	-5	I0
5.22	I	I	5/6	-5	-I	0	-I	I	I	6	6	2
5.23	I	I	-6	6/7	-I	0	-I	I	I	I	7	-7
5.24	I	I	6/7	-6	-I	0	-I	I	I	7	7	2
5.25	I	I	-7	7/8	-I	0	-I	I	I	3	-8	8
5.26	I	I	-8	8/9	-I	0	-I	I	I	I	-9	9
5.27	I	I	8/9	-8	-I	0	-I	I	I	9	9	2
5.28	I	I	-9	9/I0	-I	0	-I	I	I	3	-I0	I0

Номер варианта	$\vec{e}\,'_1$			$\vec{e}\,'_2$			$\vec{e}\,'_3$			$\vec{X}$		
	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
5.29	I	I	9/I0	-9	-I	0	-I	I	I	I0	I0	7
5.30	I	I	I0	I0/9	-I	0	-I	I	I	I	9	I8

<u>Задача 6</u>. Найти собственные числа и собственные векторы линейных операторов, заданных данными матрицами.

6.I. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -I \\ -I & 3 & -I \\ I & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 6.2. $\begin{pmatrix} 2 & -I & 0 \\ -I & 2 & 0 \\ I & -I & I \end{pmatrix}$ 6.3. $\begin{pmatrix} 3 & -I & I \\ 0 & 2 & -I \\ 0 & -I & 2 \end{pmatrix}$

6.4. $\begin{pmatrix} 5 & -I & -I \\ 0 & 4 & -I \\ 0 & -I & 4 \end{pmatrix}$ 6.5. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -I \\ -I & 5 & -I \\ I & -2 & 4 \end{pmatrix}$ 6.6. $\begin{pmatrix} 3 & I & -I \\ 2 & 2 & -I \\ -2 & I & 4 \end{pmatrix}$

6.7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -I \\ I & I & -I \\ -I & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 6.8. $\begin{pmatrix} 2 & I & 0 \\ I & 2 & 0 \\ -I & I & 3 \end{pmatrix}$ 6.9. $\begin{pmatrix} 4 & I & 0 \\ I & 4 & 0 \\ -I & I & 5 \end{pmatrix}$

6.I0. $\begin{pmatrix} 5 & I & -I \\ -2 & 4 & -I \\ -2 & I & 6 \end{pmatrix}$ 6.II. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & I & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 6.I2. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -I & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

6.I3. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & I \end{pmatrix}$ 6.I4. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 6.I5. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

6.I6. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -I & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 6.I7. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 6.I8. $\begin{pmatrix} I3 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

6.I9. $\begin{pmatrix} 7/3 & 2/3 & -2/3 \\ 4/3 & 5/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$ 6.20. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 7/3 & -4/3 \\ 2/3 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$ 6.2I. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ I/3 & I3/3 & -4/3 \\ 2/3 & -2/3 & II/3 \end{pmatrix}$

6.22. $\begin{pmatrix} 19/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 2/3 & -2/3 & 11/3 \end{pmatrix}$ 6.23. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 6.24. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.25. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 6.26. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 6.27. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

6.28. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2/3 & 5/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -13/3 \end{pmatrix}$ 6.29. $\begin{pmatrix} 5/3 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 7/3 \end{pmatrix}$ 6.30. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Задача 7. Привести матрицу к диагональному виду (см.варианты задачи 6).

Задача 8. Привести квадратичную форму к каноническому виду.

8.1. $6x^2+5y^2+7z^2-4xy+4xz$. 8.2. $4x^2+y^2+z^2-4xy+4xz-3yz$.

8.3. $x^2+5y^2-4z^2+2xy-4xz$. 8.4. $x^2+y^2+5z^2-6xy+6xz-6yz$.

8.5. $xy+yz+xz$. 8.6. $x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+4yz$.

8.7. $4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4yz+4xz$. 8.8. $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz$.

8.9. $2x^2+2y^2-5z^2+2xy$. 8.10. $2x^2-7y^2-4z^2+4xy+20yz-16xz$.

8.11. $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2yz+2xz$. 8.12. $4x^2+y^2+4z^2-4xy+4yz-8xz$.

8.13. $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz$. 8.14. $x^2+5y^2+z^2+2xy+2yz+6xz$.

8.15. $x^2-2y^2+z^2+4xy+4yz-10xz$. 8.16. $x^2+4y^2+z^2-4xy+2xz$.

8.17. $x^2+2y^2+5z^2+2xy+4yz$. 8.18. $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz+2xz$.

8.19. $x^2+xz+yz$. 8.20. $2x^2+y^2-4xy-4yz$.

8.21. $x^2+2y^2+3z^2-4xy-4yz$. 8.22. $3x^2+4y^2+5z^2+4xy-4yz$.

8.23. $2x^2+5y^2+5z^2+4xy-4xz-8yz$. 8.24. $x^2-2y^2-2z^2-4xy+4xz+8yz$.

8.25. $5x^2+6y^2+4z^2-4xz-4xy$. 8.26. $3x^2+6y^2+3z^2-4xy-8xz-4yz$.

8.27. $7x^2+5y^2+3z^2-8xy+8yz$. 8.28. $2xy+2zu$.

8.29. $x^2+2y^2+yz+xy$. 8.30. $xy+yz+zu$.

Задача 9. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить в новой системе координат.

9.1. $-x^2-y^2+4xy+2x-4y+1=0.$

9.2. $2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0.$

9.3. $4xy+4x-4y=0.$

9.4. $-2x^2-2y^2+2xy-6x+6y+3=0.$

9.5. $-3x^2-3y^2+4xy-6x+4y+2=0$

9.6. $-2xy-2x-2y+1=0.$

9.7. $-x^2-y^2-4xy-4x-2y+2=0.$

9.8. $-4x^2-4y^2+2xy+10x-10y+1=0.$

9.9. $4xy+4x-4y-2=0$

9.10. $x^2+y^2+2xy-8x-8y+1=0.$

9.11. $x^2+y^2+4xy-8x-4y+1=0$

9.12. $x^2+y^2-2xy-2x+2y-7=0.$

9.13. $2xy+2x+2y-3=0.$

9.14. $4x^2+4y^2+2xy+12x+12y+1=0.$

9.15. $3x^2+3y^2+4xy+8x+12y+1=0.$

9.16. $x^2+y^2-8xy-20x+20y+1=0.$

9.17. $3x^2+3y^2-2xy-6x+2y+1=0$

9.18. $4xy+4x+4y+1=0$

9.19. $3x^2+3y^2-4xy+6x-4y-7=0$

9.20. $-4xy-4x+4y+6=0$

9.21. $5x^2+5y^2-2xy+10x-2y+1=0$

9.22. $2x^2+2y^2+4xy+8x+8y+1=0$

9.23. $-x^2-y^2+2xy+2x-2y+1=0.$

9.24. $2x^2+2y^2-4xy-8x+8y+1=0$

9.25. $3x^2+3y^2+2xy-12x-4y+1=0$

9.26. $-4xy+8x+8y+1=0$

9.27. $2x^2+2y^2-2xy+6x-6y-6=0$

9.28. $x^2+y^2+4xy+4x+2y-5=0$

9.29. $4xy+4x-4y+4=0$

9.30. $3x^2+3y^2-4xy+4x+4y+1=0$

6. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ 2-го ПОРЯДКА. ПОВЕРХНОСТИ 2-го ПОРЯДКА

6.1. Теоретические вопросы

1. Канонические уравнения окружности, эллипса, гиперболы и параболы.

2. Эксцентриситет эллипса и гиперболы. Асимптоты гиперболы. Фокальные радиусы.

3. Упрощение уравнений с помощью преобразований параллельного переноса и поворота осей координат.

4. Уравнения сферы и эллипсоида.

5. Уравнения гиперболоидов и параболоидов. Прямолинейные образующие поверхностей.

6. Уравнения поверхностей вращения.

7. Уравнения цилиндрической поверхности с образующей, параллельной одной из координатных осей.

8. Уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат.

6.2. Теоретические задачи и упражнения

1. Доказать, что уравнение касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

2. Доказать, что уравнение касательной к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

3. Доказать, что уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид $yy_0 = p(x + x_0)$.

4. Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы от ее асимптот есть величина постоянная, равная $\frac{a^2b^2}{c^2}$, где a, b, c – соответственно полуоси и полуфокусное расстояние гиперболы.

5. Доказать, что уравнение любой окружности, проходящей через точки пересечения окружности $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ с прямой $Mx + Ny + Q = 0$, можно записать

$$m(x^2 + y^2 + Ax + By + C) + n(Mx + Ny + Q) = 0.$$

6. При каком условии прямая $y = kx + l$ касается эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ?}$$

7. Вывести уравнение поверхности, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-a; 0; 0)$ и $F_2(a; 0; 0)$ равна постоянному числу $4a^2$.

8. Написать уравнения прямолинейных образующих гиперболоида $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = -1$, проходящих через точку M (–6; 2; 4).

6.3. Расчетные задания

Задача I. Найти уравнение окружности, проходящей через точки A, B, C (данные см.разд.I, задача 3).

Задача 2. На эллипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ найти точки, расстояния которых до одного фокуса в K — раз больше расстояния до второго фокуса.

2.1. $a = 1$, $b = 2$, $K = 2$.	2.2. $a = 2$, $b = 1$, $K = 2$.
2.3. $a = 4$, $b = 2$, $K = 2$.	2.4. $a = 2$, $b = 1$, $K = 3$.
2.5. $a = 2$, $b = 4$, $K = 2$.	2.6. $a = 3$, $b = 1$, $K = 3$.
2.7. $a = 4$, $b = 3$, $K = 2$.	2.8. $a = 2$, $b = 8$, $K = 4$.
2.9. $a = 8$, $b = 2$, $K = 2$.	2.10. $a = 6$, $b = 4$, $K = 3$.
2.11. $a = 2$, $b = 8$, $K = 2$.	2.12. $a = 7$, $b = 5$, $K = 2$.
2.13. $a = 5$, $b = 7$, $K = 3$.	2.14. $a = 2$, $b = 7$, $K = 2$.
2.15. $a = 1$, $b = 2$, $K = 5$.	2.16. $a = 3$, $b = 4$, $K = 2$.
2.17. $a = 5$, $b = 1$, $K = 3$.	2.18. $a = 1$, $b = 4$, $K = 2$.
2.19. $a = 5$, $b = 2$, $K = 4$.	2.20. $a = 4$, $b = 3$, $K = 3$.
2.21. $a = 6$, $b = 3$, $K = 2$.	2.22. $a = 8$, $b = 1$, $K = 2$.
2.23. $a = 2$, $b = 6$, $K = 2$.	2.24. $a = 4$, $b = 5$, $K = 3$.
2.25. $a = 3$, $b = 1$, $K = 4$.	2.26. $a = 1$, $b = 4$, $K = 3$.
2.27. $a = 4$, $b = 2$, $K = 5$.	2.28. $a = 7$, $b = 3$, $K = 3$.
2.29. $a = 8$, $b = 7$, $K = 2$.	2.30. $a = 4$, $b = 6$, $K = 5$.

Задача 3. Написать каноническое уравнение гиперболы, если а) угол между ее асимптотами равен α, расстояние между фокусами $2c$ (варианты 1 – 15); б) эксцентриситет равен $\mathcal{E}$, расстояние между фокусами $2c$ (варианты 15 – 30).

3.1. $\alpha = \pi/4$, $c = 4$.	3.2. $\alpha = \pi/2$, $c = 3$.
3.3. $\alpha = \pi/2$, $c = 8$.	3.4. $\alpha = \pi/8$, $c = 6$.
3.5. $\alpha = 2\pi/3$, $c = 4$.	3.6. $\alpha = 30^\circ$, $c = 1$.
3.7. $\alpha = \pi/8$, $c = 8$.	3.8. $\alpha = \pi/2$, $c = 4$.
3.9. $\alpha = 2\pi/3$, $c = 10$.	3.10. $\alpha = \pi/3$, $c = 3$.
3.11. $\alpha = \pi/4$, $c = 1$.	3.12. $\alpha = 2\pi/3$, $c = 1$.
3.13. $\alpha = \pi/3$, $c = 1$.	3.14. $\alpha = \pi/2$, $c = 1$.
3.15. $\alpha = \pi/4$, $c = 2$.	3.16. $\mathcal{E} = 1,5$, $c = 4$.
3.17. $\mathcal{E} = 1,3$, $c = 3$.	3.18. $\mathcal{E} = 1,2$, $c = 8$.
3.19. $\mathcal{E} = 1,3$, $c = 6$.	3.20. $\mathcal{E} = 1,4$, $c = 2$.

3.2I. $\varepsilon = I{,}3$,	$c = I$.	3.22. $\varepsilon = I{,}8$,	$c = 2$.
3.23. $\varepsilon = I{,}5$,	$c = 6$.	3.24. $\varepsilon = I{,}2$,	$c = I$.
3.25. $\varepsilon = I{,}5$,	$c = 6$.	3.26. $\varepsilon = I{,}4$,	$c = 2$.
3.27. $\varepsilon = I{,}2$,	$c = 3$.	3.28. $\varepsilon = I{,}5$,	$c = 6$.
3.29. $\varepsilon = I{,}3$,	$c = 8$.	3.30. $\varepsilon = I{,}8$,	$c = 5$.

Задача 4. Найти уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения линий $y = kx$ и $x^2+y^2+ax+by = 0$ и симметрична относительно I) оси Ox (варианты I – I5); 2) оси Oy (варианты I5 – 30).

4.I.	$k = -I$,	$a = -4$,	$b = 0$.	4.2.	$k = I$,	$a = 2$,	$b = 4$.
4.3.	$k = -I/2$,	$a = 0$,	$b = 4$.	4.4.	$k = 2$,	$a = 4$,	$b = 8$.
4.5.	$k = -3$,	$a = -4$,	$b = -2$.	4.6.	$k = 3$,	$a = 6$,	$b = 4$.
4.7.	$k = -I$,	$a = -2$,	$b = 0$.	4.8.	$k = I$,	$a = 2$,	$b = 6$.
4.9.	$k = -2$,	$a = -I$,	$b = 3$.	4.I0.	$k = 2$,	$a = 6$,	$b = 8$.
4.II.	$k = -3$,	$a = 0$,	$b = 8$.	4.I2.	$k = I$,	$a = -I$,	$b = -3$.
4.I3.	$k = -4$,	$a = 6$,	$b = 6$.	4.I4.	$k = 4$,	$a = 4$,	$b = -4$.
4.I5.	$k = -I$,	$a = 2$,	$b = -6$.	4.I6.	$k = I$,	$a = 4$,	$b = 3$.
4.I7.	$k = 2$,	$a = 4$,	$b = 2$.	4.I8.	$k = 3$,	$a = I$,	$b = 2$.
4.I9.	$k = 4$,	$a = I$,	$b = 4$.	4.20.	$k = 5$,	$a = 2$,	$b = 6$.
4.2I.	$k = -I$,	$a = -6$,	$b = 0$.	4.22.	$k = -2$,	$a = 0$,	$b = -4$.
4.23.	$k = -3$,	$a = -4$,	$b = 2$.	4.24.	$k = -4$,	$a = 0$,	$b = 4$.
4.25.	$k = 0{,}5$	$a = 2$,	$b = 1$.	4.26.	$k = -0{,}5$,	$a = -2$,	$b = I$.
4.27.	$k = I$,	$a = -I$,	$b = -3$.	4.28.	$k = -I$,	$a = 4$,	$b = 4$.
4.29.	$k = 2$,	$a = 8$,	$b = 6$.	4.30.	$k = -I$,	$a = 2$,	$b = -6$.

Задача 5. Построить область, удовлетворяющую системе неравенств.

5.I. $\begin{cases} x^2+(y-1)^2 \le 1, \\ x^2 > 2(y-1). \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} > 1, \\ (y-1)^2 < 4(x-1). \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} y^2-10x < 0, \\ 5x-3y-15 < 0, \\ y-2 < 0. \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} x^2+8y < 0, \\ 2x+3y+6 < 0, \\ x+2 > 0. \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}\le 1, \\ |y|\le 2. \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}\le 1, \\ \dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{4}\le 1. \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} x^2-y^2>1, \\ |x|\ge 1. \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y+1)^2}{9}<1, \\ 0<x<2. \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} x^2+y^2-4y\le 0, \\ |x|\ge 1. \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2\le 25, \\ (x-4)^2+(y-6)^2\le 9. \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2\le 9, \\ x^2+y^2-2x+4y\ge -4. \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} (x-3)^2+(y-3)^2<8, \\ x>y. \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} x^2+y^2+x+y>0, \\ y>2x. \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} x^2+y^2-2x<0, \\ 4|y|<1. \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}\le 1, \\ x+y<3. \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} x^2+y^2<25, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}\ge 1. \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y>0, \\ x>y. \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}<1, \\ x^2<4. \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y\ge -4, \\ (x-2)^2+(y-1)^2\le 16. \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} x^2+y^2\le 4, \\ x^2-y^2\ge 1. \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} x^2-y^2\ge 0, \\ \dfrac{x^2}{4}-y^2<1. \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} (y-1)^2<2x, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2\le 1. \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} y^2-\dfrac{x^2}{4}\le 1, \\ x^2+\dfrac{y^2}{4}>1. \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} y^2\ge 2(x-2), \\ 0<y<2x, \\ x<4. \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} xy < 1, \\ x^2 + y^2 < 4. \end{cases}$

5.26. $\begin{cases} xy < 1, \\ |x| + |y| < 2. \end{cases}$

5.27. $\begin{cases} y < |x-1|, \\ x^2 - 2x < y - 1. \end{cases}$

5.28. $\begin{cases} 4x^2 + y^2 < 4, \\ 4|x| + |y| > 4. \end{cases}$

5.29. $\begin{cases} x^2 - y^2 < 0, \\ 4y^2 < x^2. \end{cases}$

5.30. $\begin{cases} y^2 < 2x + 2, \\ x + |y| > 0. \end{cases}$

Задача 6. Упростить уравнение кривой и построить ее.

6.1. $5x^2 + 9y^2 + 30x - 18y + 9 = 0.$

6.2. $16x^2 - 25y^2 + 32x - 100y + 84 = 0.$

6.3. $5x^2 - 9y^2 - 30x + 18y - 9 = 0.$

6.4. $y^2 + 6x + 14y + 43 = 0.$

6.5. $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0.$

6.6. $2x^2 + 5y^2 - 20y + 5 = 0.$

6.7. $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0.$

6.8. $x^2 + 3y^2 + 4x - 9y + 2 = 0.$

6.9. $5x^2 + 9y^2 + 30x - 18y + 54 = 0.$

6.10. $5x^2 + 6y^2 - 10x - 12y - 4 = 0.$

6.11. $3x^2 + 8y^2 + 12x - 16y - 4 = 0.$

6.12. $2x^2 - 3y^2 - 6y - 5 = 0.$

6.13. $4x^2 - 6y^2 + 8x - 12 = 0.$

6.14. $5x^2 - 4y^2 - 10x - 8y + 3 = 0.$

6.15. $9x^2 - 4y^2 + 18x - 12y + 36 = 0.$

6.16. $x^2-5x-y^2-3y=0.$

6.17. $5x^2+9y^2+30x-18y+60=0.$

6.18. $y^2+5x-6y+4=0.$

6.19. $x^2+4y^2-2x+16y=0.$

6.20. $4x^2-y^2+16x+4y=0.$

6.21. $2x^2-y^2+8x+4y-10=0.$

6.22. $7x-5y^2+10y-19=0.$

6.23. $6x^2+6y^2-36x+12y-9=0.$

6.24. $3y^2+x^2+4x-9y-4=0.$

6.25. $9x^2-18x+3y+11=0.$

6.26. $2x^2-5y^2-20y+5=0.$

6.27. $9x^2-4y^2-18x-16y-10=0.$

6.28. $9x^2+5y^2-18x+30y+9=0.$

6.29. $4y^2+8x-16y-20=0.$

6.30. $8x^2+8y^2-4x-4y+3=0$

Задача 7. Упростить уравнение кривой и построить ее.

7.1. $x^2+2xy-y^2-8\sqrt{2}=0.$

7.2. $4x^2+4\sqrt{3}xy+5y^2-16=0.$

7.3. $3x^2-4\sqrt{6}xy+5y^2+18=0$

7.4. $9x^2+8\sqrt{3}xy+6y^2-36=0.$

7.5. $7x^2-8xy+y^2-9=0.$

7.6. $2x^2-4\sqrt{2}xy+y^2+4=0.$

7.7. $2x^2-6\sqrt{2}xy-y^2+40=0.$

7.8. $6x^2+6\sqrt{10}xy-y^2+32=0.$

7.9. $2\sqrt{6}xy+5y^2+6=0.$

7.10. $5x^2+4xy+2y^2-18=0.$

7.11. $4x^2+2\sqrt{6}xy+3y^2-24=0.$

7.12. $6x^2+2\sqrt{5}xy+2y^2-21=0.$

7.13. $5x^2+4\sqrt{2}xy+3y^2-14=0$

7.14. $7x^2+6\sqrt{2}xy+4y^2-15=0.$

7.15. $3x^2+2\sqrt{14}xy+8y^2-10=0.$

7.16. $7x^2+2\sqrt{6}xy+2y^2-24=0.$

7.17. $9x^2+4\sqrt{2}xy+2y^2-20=0.$ 7.18. $6x^2+2\sqrt{10}xy+3y^2-16=0.$

7.19. $4x^2+4\sqrt{3}xy+5y^2-40=0.$ 7.20. $5x^2+4xy+8y^2+20=0.$

7.21. $9x^2+24xy+16y^2-40=0.$ 7.22. $5x^2+6xy+5y^2-16=0.$

7.23. $7x^2+16xy-23y^2-24=0.$ 7.24. $x^2+2xy+y^2+14=0.$

7.25. $4x^2-4xy+y^2-1=0.$ 7.26. $5x^2-6xy+5y^2-32=0.$

7.27. $x^2-2xy+y^2+25=0.$ 7.28. $4x^2-4xy+y^2-1=0.$

7.29. $4xy+2x-2y-1=0.$ 7.30. $xy+3x-3y-9=0.$

Задача 8. Найти координаты центра и радиус сферы.

8.1. $x^2+y^2+z^2+2x-6y+8z+10=0.$

8.2. $x^2+y^2+z^2-12x+6y+37=0.$

8.3. $x^2+y^2+z^2-2x+6y-8z+26=0$

8.4. $x^2+y^2+z^2+4y-10z+10=0.$

8.5. $2x^2+2y^2+2z^2-10x-12y+8z+1=0.$

8.6. $x^2+y^2+z^2-x+2y+1=0.$

8.7. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-20=0.$

8.8. $x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z-2=0.$

8.9. $2x^2+2y^2+2z^2+4y-3z+2=0.$

8.10. $x^2+y^2+z^2-2x=0$

8.11. $x^2+y^2+z^2-4z+3=0.$

8.12. $x^2+y^2+z^2-x+y=0$

8.13. $x^2+y^2+z^2-4x+y-2z=0.$

8.14. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-14=0.$

8.15. $x^2+y^2+z^2-4x+8y-2z-4=0.$

8.16. $3x^2+3y^2+3z^2-6x+8y-\frac{11}{3}=0.$

8.17. $x^2+y^2+z^2+7x-4z=0$.

8.18. $5x^2+5y^2+5z^2+9y-10z+9=0$.

8.19. $x^2+y^2+z^2-8x+10y-12z-4=0$.

8.20. $2x^2+2y^2+2z^2-12x-10y+8z+1=0$.

8.21. $x^2+y^2+z^2-6x+2y-10z+36=0$.

8.22. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-z+25=0$.

8.23. $x^2+y^2+z^2-6x+2y+z+25/4=0$.

8.24. $x^2+y^2+z^2+10x-2z+1=0$.

8.25. $x^2+y^2+z^2-6x-4y-3=0$.

8.26. $x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-40=0$.

8.27. $x^2+y^2+z^2-2x-10y-4=0$.

8.28. $x^2+y^2+z^2-6x+8z+9=0$.

8.29. $x^2+y^2+z^2-6x+2y-14=0$.

8.30. $2x^2+2y^2+2z^2-4x+5y-z+4=0$.

Задача 9. Составить уравнение фигуры, полученной вращением кривой вокруг оси. Сделать чертеж.

9.1. $\begin{cases} x+2y=0, \\ z=0 \end{cases}$ ось Ox.

9.2. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0 \end{cases}$ ось Ox.

9.3. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0 \end{cases}$ ось Ox.

9.4. $\begin{cases} y^2=2px, \\ z=0 \end{cases}$ ось Ox.

9.5. $\begin{cases} y=\sin x, \\ z=0 \end{cases}$ ось Ox.

9.6. $\begin{cases} x^2+(y-4)^2=1, \\ z=0 \end{cases}$ ось Ox.

9.7. $\begin{cases} x^2=2py, \\ z=0 \end{cases}$ ось Ox.

9.8. $\begin{cases} y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \\ z=0 \end{cases}$ ось Ox.

9.9. $\begin{cases} z=\sqrt{1-x^2}, \\ y=0 \end{cases}$ ось Oz. 9.10. $\begin{cases} z=\dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \\ x=0 \end{cases}$ ось Oz.

9.11. $\begin{cases} z=\sqrt{(x^2-1)(4-x^2)}, \\ y=0 \end{cases}$ ось Oz. 9.12. $\begin{cases} z=4y^2, \\ x=0 \end{cases}$ ось Oz.

9.13. $\begin{cases} x-y=0, \\ z=0 \end{cases}$ ось Ox. 9.14. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0, \\ z=0 \end{cases}$ ось Oy.

9.15. $\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0 \end{cases}$ ось Ox. 9.16. $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ z=0 \end{cases}$ ось Ox.

9.17. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$ ось Oz. 9.18. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$ ось Oz.

9.19. $\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$ ось Oz. 9.20. $\begin{cases} x^2=2z, \\ y=0 \end{cases}$ ось Oz.

9.21. $\begin{cases} z=x^2, \\ y=0 \end{cases}$ ось Ox. 9.22. $\begin{cases} z=x^2, \\ y=0 \end{cases}$ ось Oy.

9.23. $\begin{cases} z=y, \\ x=0 \end{cases}$ ось Ox. 9.24. $\begin{cases} z=y, \\ x=0 \end{cases}$ ось Oz.

9.25. $\begin{cases} x+2y=4, \\ z=0 \end{cases}$ ось Ox. 9.26. $\begin{cases} 2y+z-2=0, \\ x=0 \end{cases}$ ось Ox.

9.27. $\begin{cases} z=y^2, \\ x=0 \end{cases}$ ось Oy. 9.28. $\begin{cases} y=4-x^2, \\ z=0 \end{cases}$ ось Ox.

9.29. $\begin{cases} (x-2)^2+y^2=4, \\ z=0 \end{cases}$ ось Oy. 9.30. $\begin{cases} xy=a^2, \\ z=0 \end{cases}$ ось Ox.

Задача 10. Назвать и построить поверхности.

10.1. а) $x^2-y^2=8z$, б) $yz=4$.

10.2. а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=z$, б) $y^2-z^2=1$.

10.3. а) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$, б) $z^2=8x$.

10.4. а) $y^2+\frac{z^2}{4}=2z$, б) $x^2+4y^2=z^2$.

10.5. а) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$, б) $z=\sqrt{xy}$.

10.6. а) $x^2+y^2+z^2=2az$, б) $(z-a)^2=xy$.

10.7. а) $x^2-y^2+z^2=4$, б) $x^2-y^2=z^2$.

10.8. а) $x^2+y^2=2az$, б) $y^2+z^2=4z$.

10.9. а) $z^2-x^2=2y$, б) $z=4-x^2$.

10.10. а) $\frac{x^2}{25}-z^2-\frac{y^2}{9}=1$, б) $xz=1$.

10.11. а) $-x^2+4y^2+z^2=4$, б) $(y-1)^2=z$.

10.12. а) $4x^2-y^2-z^2=4$, б) $y^2-x^2=0$.

10.13. а) $(x-1)^2+y^2-(z+1)^2=1$, б) $x^2+2xy+y^2=0$.

10.14. а) $4x^2-3y^2+6z^2-18=0$, б) $x^2=4yz$.

10.15. а) $x^2+2y^2+20y+z^2+34=0$, б) $\frac{x^2}{4}+y^2=z^2$.

10.16. а) $x^2-3y^2+6z^2-18=0$, б) $\frac{y^2}{4}+z^2=1$.

10.17. а) $5x^2-3y^2+9z^2-30=0$, б) $z^2+4y^2=2z$.

10.18. а) $4x^2+3y^2-24z=0$, б) $x^2-5x-y^2+3y=0$.

10.19. а) $x^2+4z^2-8y=0$, б) $4x^2-6y^2+8x-12=0$.

10.20. а) $12x^2+3y^2-4z^2+24=0$, б) $x^2+z^2-2x+4z=0$.

10.21. а) $2x^2+7y^2+4z^2-28=0$, б) $4x^2-3y^2+9z^2=0$.

10.22. а) $9x^2-4y^2+18x-12y+36=0$, б) $x^2+9y^2+2x=0$.

10.23. а) $12x^2-2y-5z^2=0$, б) $4x^2-9y^2-4z^2=0$.

10.24. а) $3x^2+5y^2+30z=0$, б) $9z^2-6y=0$.

10.25. а) $9x^2+18y+6z^2=0$, б) $6x^2-3y^2+18=0$.

10.26. а) $3x^2+4y^2+4z^2=16$, б) $x^2+4y^2-9z^2=0$.

10.27. а) $16x^2-y^2+32z=0$, б) $y^2-4yz+4z^2=0$.

10.28. а) $3x^2-9y^2+4z^2+36=0$, б) $4x^2=yz$.

10.29. а) $36x^2-9y^2-4z^2-36=0$, б) $z^2+4z-y^2=0$.

10.30. а) $4x^2-y^2=z$, б) $z^2-x^2-2x=0$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение I

Примеры численной реализации методов решения систем линейных алгебраических уравнений на программируемых микрокалькуляторах "Электроника Б3-34", "Электроника МК-54", "Электроника МК-61" [9].

I. Метод Гаусса – Жордана заключается в одновременном исключении какого-либо переменного из всех уравнений системы, кроме одного. На первом шаге выберем ведущий элемент $a_{11} \neq 0$. Разделим первое уравнение системы на a_{11}, во всех остальных – исключим x_1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & a_{n,n+1}^{(1)} \end{array}\right),$$

где

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j} / a_{11},$$
$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j}^{(1)} \cdot a_{i1},$$
$$j = 2, \ldots, n+1; \quad i = 2, \ldots, n.$$

На втором шаге выберем ведущий элемент $a_{22}^{(1)} \neq 0$, разделим второе уравнение на $a_{22}^{(1)}$ и исключим x_2 из всех уравнений, кроме второго:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} & a_{1,n+1}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} & a_{3,n+1}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} & a_{n,n+1}^{(2)} \end{array}\right),$$

где

$$a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} / a_{22}^{(1)},$$
$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{2j}^{(2)} \cdot a_{i2}^{(1)},$$
$$i = 1, 3, \ldots, n, \quad j = 3, \ldots, n+1.$$

После n шагов матрица системы преобразуется в единичную, а в столбце свободных членов суть значения неизвестных.

Программа I решения системы трех линейных алгебраических уравнений методом Гаусса – Жордана:

ИП1 ИП2 ПП 15 П8 ИП3 П9 ПП 31 ПП
15 ПП 23 П2 С/П ПП 23 ПВ ИП3 ПС
ПП 31 В/О П2 F, П1 ИП3 ПД 1 3
П0 КИП0 КИП0 КИП0 ИП1 + П3 ИП2 × –
КП↑ XY ИП3 ИПД × – В/О

Инструкция. Элементы расширенной матрицы системы засылаем в регистры по схеме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathrm{I} & 4 & 7 & \mathrm{A} \\ 2 & 5 & 8 & \mathrm{B} \\ 3 & 6 & 9 & \mathrm{C} \end{array}\right)$$

После вычислений (В/О С/П) значения x_1, x_2, x_3 хранятся соответственно в регистрах: А и У, 2 и Х, 3.

Контрольный пример. Решить методом Гаусса – Жордана систему

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1,5 & -0,2 & 0,1 & 0,4 \\ -0,1 & 1,5 & -0,1 & 0,8 \\ -0,3 & 0,2 & -0,5 & 0,2 \end{array}\right)$$

В режиме программирования (F ПРГ) вводим программу. В режиме автоматической работы (F АВТ) вводим элементы расширенной матрицы системы

1,5 П1 П5 0,1/-/ П2 П8/-/ П7 0,3/-/ П3 0,2/-/ П4
/-/ П6 0,5/-/ П9 0,4 ПА 0,8 П8

Нажимаем клавиши В/О С/П . После останова запишем результат:

$x_2 = 0{,}530$, (ИПА) $x_1 = 0{,}364$, (ИП3) $x_3 = -0{,}406$.

2. Итерационный метод Гаусса – Зейделя.

Приведем систему линейных уравнений $Ax = b$ каким-либо образом к виду

$$x = Bx + C.$$

В частности, если $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, то можно записать

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} b_{ij} x_j + C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $$C_i = b_i / a_{ii}, \quad b_{ij} = -a_{ij} / a_{ii}.$$

В методе Гаусса – Зейделя итерационный процесс вычисления последовательных приближений к искомому решению осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{11} x_1^{(k)} + \ldots + b_{1n} x_n^{(k)} + C_1, \\ x_2^{(k+1)} = b_{21} x_1^{(k+1)} + b_{22} x_2^{(k)} + \ldots + b_{2n} x_n^{(k)} + C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1} x_1^{(k+1)} + \ldots + b_{n,n-1} x_{n-1}^{(k+1)} + b_{nn} x_n^{(k)} + C_n, \end{cases}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ – номер итерации.

Если при любом выборе начального приближения $x^{(0)}$ выполнено условие $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x$, то итерационный процесс называется сходящимся к решению системы. Для сходимости итерационного метода достаточно выполнения условий:

$$\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \leq \alpha < 1 \quad (i=1,\ldots,n), \text{ или } \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \leq \beta < 1 \quad (j=1,\ldots,n),$$

или

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i=1,\ldots,n).$$

Выполнение последнего условия говорит о наличии в матрице диагонального преобладания.

В практических вычислениях итерационный процесс прекращают, если компоненты двух последовательных приближений отличаются на величину, меньшую наперед заданного числа ε. Обычно полагают $x^{(0)} = C$.

Программа 2 решения итерационным методом Гаусса – Зейделя системы трех линейных алгебраических уравнений, сведенной к виду

$$\begin{cases} x_1 = b_{12} x_2 + b_{13} x_3 + c_1, \\ x_2 = b_{21} x_1 + b_{23} x_3 + c_2, \\ x_3 = b_{31} x_1 + b_{32} x_2 + c_3, \end{cases} \qquad b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad c_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Элементы расширенной матрицы и приближения искомых переменных хранятся соответственно в регистрах

$$\left(\begin{array}{ccc|c} b_{12} & b_{13} & c_1 & x_1^{(k)} \\ b_{21} & b_{23} & c_2 & x_2^{(k)} \\ b_{31} & b_{32} & c_3 & x_3^{(k)} \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & A \\ 4 & 5 & 6 & B \\ 7 & 8 & 9 & C \end{array}\right)$$

В программе предусмотрен автоматический ввод исходных данных:

П1	С/П	П2	С/П	П3	С/П	П4	С/П	П5	С/П
П6	С/П	П7	С/П	П8	С/П	П9	С/П	ПА	С/П
ПВ	С/П	ПС	ИПВ	ИП1	X	ИПС	ИП2	X	+
ИП3	+	ПА	ИПА	ИП4	X	ИПС	ИП5	X	+
ИП6	+	ПВ	ИПА	ИП7	X	ИПВ	ИП8	X	+
ИП9	+	ПС	С/П	БП	23				

Инструкция. Нажав клавиши F ПРГ, ввести программу. В режиме автоматической работы (F АВТ) ввести исходные данные: В/О (b_{12}) С/П (b_{13}) С/П (c_1) С/П (b_{21}) С/П (b_{23}) С/П (c_2) С/П (b_{31}) С/П (b_{32}) С/П (c_3) С/П ($x_1^{(0)}$) С/П ($x_2^{(0)}$) С/П ($x_3^{(0)}$) С/П.

После останова записать в таблицу значения очередного приближения: ИПА ($x_1^{(k)}$), ИПВ ($x_2^{(k)}$), ИПС ($x_3^{(k)}$). Для выполнения следующей итерации нажать клавишу С/П.

Контрольный пример. Решить методом Гаусса – Зейделя систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 0,12x_2 + 0,09x_3 = 10, \\ 0,08x_1 + 4x_2 - 0,15x_3 = 20, \\ 0,18x_1 - 0,06x_2 + 3x_3 = -4,5. \end{cases}$$

Итерации продолжать до совпадения в двух последовательных приближениях трех десятичных знаков.

Преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases} x_1 = -0,024x_2 - 0,018x_3 + 2, \\ x_2 = -0,02x_1 + 0,038x_3 + 5, \\ x_3 = -0,06x_1 + 0,02x_2 - 1,5. \end{cases}$$

Выберем начальное приближение: $x_1^{(0)} = 2$, $x_2^{(0)} = 5$, $x_3^{(0)} = -1,5$. Результаты вычислений заносим в таблицу (K – номер итерации)

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
I	I,907	4,905	-I,5I6
2	I,909	4,904	-I,5I6
3	I,909	4,904	-I,5I6

Ответ: x_1 = I,909; x_2 = 4,904; x_3 = -I,5I6.

Приложение 2

Образец оформления титульного листа

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. 50-летия ВЕЛИКОЙ ОКТЯБРЬСКОЙ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ

Кафедра высшей математики № I

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ТР-I-АГ
по теме "Аналитическая геометрия"

Вариант №

Выполнил: студент гр._________
I курса факультета __________
____
(фамилия, имя, отчество)

"___" ___________
(дата)

Руководитель:__________________________
(должность, фамилия, имя, отчество преподавателя)

Зачтено ________________ (подпись)

"___" ______________
(дата)

Киев КПИ (год)

Список литературы

I. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М.: Наука, 1980.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. - М.: Наука, 1968.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1974.

4. Ефимов А.В., Демидович Б.П. и др. Сборник по математике для вузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. - М.: Наука, 1981.

5. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). - М.: Высш.шк., 1983.

6. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. - М.: Наука, 1975.

7. Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и геометрии. - Минск, изд.-во БГУ, 1979.

8. Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. - М.: Наука, 1968.

9. Барановская Г.Г., Любченко И.Н. Микрокалькуляторы в курсе высшей математики. - Киев: Выща шк., 1987.

10. Гусятников П.Б. Векторная алгебра в примерах и задачах. - М.: Высш.шк., 1985.

11. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. - М.: Наука, 1987.

ОГЛАВЛЕНИЕ