3. Синтез комбінаційних схем

3.1. Представлення функції f_4 в канонічних формах алгебр Буля, Шеффера, Пірса та Жегалкіна

Алгебра Буля {І, АБО, НЕ}

$$f_{4ДДНФ} = (\overline{x_4}\,\overline{x_3}\,\overline{x_2}x_1)\vee(\overline{x_4}\,\overline{x_3}x_2\overline{x_1})\vee(\overline{x_4}x_3x_2x_1)\vee(x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1})\vee$$
$$\vee(x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2}x_1)\vee(x_4\overline{x_3}x_2\overline{x_1})\vee(x_4x_3\overline{x_2}\,\overline{x_1})\vee(x_4x_3\overline{x_2}x_1)\vee(x_4x_3x_2x_1);$$

$$f_{4ДКНФ} = (x_4\vee x_3\vee x_2\vee x_1)(x_4\vee x_3\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_1})(x_4\vee\overline{x_3}\vee x_2\vee x_1)(x_4\vee\overline{x_3}\vee x_2\vee\overline{x_1})\&$$
$$\&(x_4\vee\overline{x_3}\vee\overline{x_2}\vee x_1)(\overline{x_4}\vee x_3\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_1})(\overline{x_4}\vee\overline{x_3}\vee\overline{x_2}\vee x_1).$$

Алгебра Шеффера {І–НЕ}

$$f_4 = ((x_4/x_4)/(x_3/x_3)/(x_2/x_2)/x_1)/((x_4/x_4)/(x_3/x_3)/x_2/(x_1/x_1))/$$
$$/((x_4/x_4)/x_3/x_2/x_1)/(x_4/(x_3/x_3)/(x_2/x_2)/(x_1/x_1))/$$
$$/(x_4/(x_3/x_3)/(x_2/x_2)/x_1)/(x_4/(x_3/x_3)/x_2/(x_1/x_1))/$$
$$/(x_4/x_3/(x_2/x_2)/(x_1/x_1))/(x_4/x_3/(x_2/x_2)/x_1)/(x_4/x_3/x_2/x_1).$$

Алгебра Пірса {АБО–НЕ}

$$f_4 = (x_4\uparrow x_3\uparrow x_2\uparrow x_1)\uparrow(x_4\uparrow x_3\uparrow(x_2\uparrow x_2)\uparrow(x_1\uparrow x_1))\uparrow(x_4\uparrow(x_3\uparrow x_3)\uparrow x_2\uparrow x_1)\uparrow$$
$$\uparrow(x_4\uparrow(x_3\uparrow x_3)\uparrow x_2\uparrow(x_1\uparrow x_1))\uparrow(x_4\uparrow(x_3\uparrow x_3)\uparrow(x_2\uparrow x_2)\uparrow x_1)\uparrow$$
$$\uparrow((x_4\uparrow x_4)\uparrow x_3\uparrow(x_2\uparrow x_2)\uparrow(x_1\uparrow x_1))\uparrow((x_4\uparrow x_4)\uparrow(x_3\uparrow x_3)\uparrow(x_2\uparrow x_2)\uparrow x_1).$$

Алгебра Жегалкіна {ВИКЛЮЧНЕ АБО, І, const 1}

$$f_4 = x_1\oplus x_2\oplus x_3x_1\oplus x_3x_2\oplus x_3x_2x_1\oplus x_4\oplus x_4x_1\oplus x_4x_2\oplus$$
$$\oplus x_4x_2x_1\oplus x_4x_3x_1\oplus x_4x_3x_2x_1.$$

3.2. Визначення належності функції f_4 до п'яти чудових класів

- f(1111) = 1 => функція зберігає одиницю;
- f(0000) = 0 => функція зберігає нуль;
- f(0011) $\neq$ f(1100) => функція не само двоїста;
- f(0010) > f(0011) => функція не монотонна;
- функція нелінійна, оскільки її поліном Жегалкіна нелінійний .

3.3. Мінімізація функції f_4

Метод Квайна–Мак-Класкі

Виходячи з таблиці 2.2, запишемо стовпчик ДДНФ (K^0), розподіливши терми за кількістю одиниць. Проведемо попарне склеювання між сусідніми групами та виконаємо поглинання термів (рисунок 4.4)

K^0	K^1	K^2
~~0001~~	X001	~~1X0X~~
~~0010~~	X010	1X0X
~~1000~~	~~100X~~	
~~1001~~	10X0	
~~1010~~	~~1X00~~	
~~1100~~	~~1X01~~	
~~0111~~	~~110X~~	
~~1101~~	X111	
~~1111~~	11X1	

Рисунок 4.4 – Склеювання і поглинання термів

Одержані прості імпліканти запишемо в таблицю покриття (таблиця 4.3).

Таблиця 4.3 –Таблиця покриття

	0001	0010	1000	1001	1010	1100	0111	1101	1111
X001	+			+					
X010		+			+				
10X0			+		+				
X111							+		+
11X1								+	+
1X0X			+	+		+		+	

В ядро функції входять ті терми, без яких неможливо покрити хоча б одну імпліканту.

Ядро = {X001; X010; 1X0X; X111}

Оскільки ядро повністю покриває функцію, то в МДНФ входять тільки терми ядра.

$$f_{4МНДФ}= (\overline{x_3}\,\overline{x_2}x_1)v(\overline{x_3}x_2\overline{x_1})v(x_4\overline{x_2})v(x_3x_2x_1)$$

Метод невизначених коефіцієнтів

Таблиця 4.4 – Метод невизначених коефіцієнтів

x_4	x_3	x_2	x_1	x_4x_3	x_4x_2	x_4x_1	x_3x_2	x_3x_1	x_2x_1	$x_4x_3x_2$	$x_4x_3x_1$	$x_4x_2x_1$	$x_3x_2x_1$	$x_4x_3x_2x_1$	f_4
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	~~000~~	~~000~~	~~000~~	~~000~~	~~0000~~	~~0~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~00~~	~~00~~	~~01~~	~~00~~	~~01~~	~~01~~	~~000~~	~~001~~	~~001~~	001	0001	1
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~00~~	~~01~~	~~00~~	~~01~~	~~00~~	~~10~~	~~001~~	~~000~~	~~010~~	010	0010	1
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~00~~	~~01~~	~~01~~	~~01~~	~~01~~	~~11~~	~~001~~	~~001~~	~~011~~	~~011~~	~~0011~~	~~0~~
~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~01~~	~~00~~	~~00~~	~~10~~	~~10~~	~~00~~	~~010~~	~~010~~	~~000~~	~~100~~	~~0100~~	~~0~~
~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~01~~	~~00~~	~~01~~	~~10~~	~~11~~	~~01~~	~~010~~	~~011~~	~~001~~	~~101~~	~~0101~~	~~0~~
~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~01~~	~~01~~	~~00~~	~~11~~	~~10~~	~~10~~	~~011~~	~~010~~	~~010~~	~~110~~	~~0110~~	~~0~~
~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~01~~	~~01~~	~~01~~	~~11~~	~~11~~	~~11~~	~~011~~	~~011~~	~~011~~	111	0111	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~10~~	10	~~10~~	~~00~~	~~00~~	~~00~~	100	100	100	~~000~~	1000	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~10~~	10	~~11~~	~~00~~	~~01~~	~~01~~	100	~~101~~	101	001	1001	1
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~10~~	~~11~~	~~10~~	~~01~~	~~00~~	~~10~~	~~101~~	100	~~110~~	010	1010	1
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~10~~	~~11~~	~~11~~	~~01~~	~~01~~	~~11~~	~~101~~	~~101~~	~~111~~	~~011~~	~~1011~~	~~0~~
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~11~~	10	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~00~~	110	~~110~~	100	~~100~~	1100	1
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~11~~	10	~~11~~	~~10~~	~~11~~	~~01~~	110	111	101	~~101~~	1101	1
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~11~~	~~11~~	~~10~~	~~11~~	~~10~~	~~10~~	~~111~~	~~110~~	~~110~~	~~110~~	~~1110~~	~~0~~
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~11~~	~~11~~	~~11~~	~~11~~	~~11~~	~~11~~	~~111~~	111	~~111~~	111	1111	1

Ідея цього методу полягає у відшуканні ненульових коефіцієнтів при кожній імпліканті. Метод виконується у декілька етапів:

1. Рівняння для знаходження коефіцієнтів представляється у вигляді таблиці (таблиця 4.4).
2. Виконується викреслення нульових рядків.
3. Викреслюються вже знайдені нульові коефіцієнти на залишившихся рядках.
4. Імпліканти, що залишилися, поглинають імпліканти справа від них.

В ядро функції входять ті терми, без яких неможливо покрити хоча б одну імпліканту.

Ядро = {X001; X010; 1X0X; X111}

Оскільки ядро повністю покриває функцію, то в МДНФ входять тільки терми ядра.

$$f_{4МДНФ}=(x_4\overline{x_2})\vee(\overline{x_3}\,\overline{x_2}x_1)\vee(\overline{x_3}x_2\overline{x_1})\vee(x_3x_2x_1).$$

Метод діаграм Вейча

Метод діаграм Вейча — це графічний метод, призначений для ручної мінімізації. Його наочність зберігається за невеликої кількості аргументів. Кожна клітинка відповідає конституанті. Кожний прямокутник, що містить 2^k елементів, відповідає імпліканті. Прямокутник максимального розміру відповідає простій імпліканті (рисунок 4.5).