№3

Знайти всі значення коренів та побудувати їх

$w = \sqrt[5]{4 - 4\sqrt{3}i}$

$z = 4 - 4\sqrt{3}i$

$\rho = \sqrt{4^2 + 4^2 \cdot 3} = 8$

$tg\, \varphi = -\sqrt{3}$

$\varphi = arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ $(\cos \varphi > 0)$

$z = 8 e^{-i \frac{\pi}{3}} = 8 e^{-i(\frac{\pi}{3} + 2\pi k)}$

$W_k = 8 e^{-i \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{5}} = 8 e^{-i \frac{\pi}{15}(1 + 6k)}$, $k \in [0; 5]$

$k \in Z$

№ 4

Побудувати лінії та області, які задані такими співвідношеннями

$|z-i|+|z+i|=4$

$|x+iy-i|+|x+iy+i|=4$

$|x+i(y-1)|+|x+i(y+1)|=4$

$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=4-\sqrt{x^2+(y+1)^2}$

$x^2+y^2-2y+1=16-8\sqrt{x^2+y^2+2y+1}+x^2+y^2+2y+1$

$-4y=16-8\sqrt{x^2+y^2+2y+1}$

$y+4=2\sqrt{x^2+y^2+2y+1}$

$y^2+8y+16=4(x^2+y^2+2y+1)$

$4x^2+3y^2=12$

$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

Ст. 18, №1

Дослідити $f(z)$ на аналітичність

$f(x) = -2\cos x\, ch y - i\, 2\, sh y \cdot \sin x$

$u = -2\cos x\, ch y$

$v = -2\, sh y \sin x$

$u'_x = 2\sin x\, ch y$

$v'_y = -2\sin x\, ch y$

$u'_x \neq v'_y$

В: Функція не аналітична

№2

Знайти функцію $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, якщо задана її дійсна частина

$Re\, f(z) = u(x,y) = x^3 + 3x^2 y - 3xy^2 - y^3$

$$v = -\int_{x_0}^{x} u'_y(x; y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} u'_x(x;y)\,dy + C$$

$u'_y = 3x^2 - 6xy - 3y^2$

$u'_x = 3x^2 + 6xy - 3y^2$

$$v = -\int_0^x 3x^2\,dx + \int_0^y (3x^2 + 6xy - 3y^2)\,dy =$$

$$= -x^3\Big|_0^x + (3x^2 y + 3xy^2 - y^3)\Big|_0^y + C =$$

$= -x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + C$

Відповідь: $f(z) = x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3 +$
$+ i(-x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + C)$

Ст. 26 №1

Обчислити інтеграл $\int_L f(z)dz$ по

лінії, що з'єднує точки $z_1 = 0$ та
$z_2 = 1 + i$

1) по прямій
2) по параболі $y = x^2$
3) по ламаній $z_1 z_2 z_3$, де $z_3 = 1$

$f(z) = \bar{z} + 1 - i$

$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$

$f(x,y) = x - iy + 1 - i = x + 1 - i(y+1)$

$dz = dx + idy$

1) $L: \begin{cases} y = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

$f(x, y = x) = x + 1 - i(x+1) = (x+1)(1-i)$

$dz = dx + idx = (1+i)dx$

$$\int_L f(z)\,dz = \int_0^1 (x+1)(1-i)(1+i)\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 (x+1)\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2}+1\right) = 3$$

2) $L: \begin{cases} y = x^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

$$f(x, y = x^2) = x+1-i(x^2+1) = -ix^2+x+(1-i)$$

$$dz = dx + i2x\,dx = dx(1+i2x)$$

$$\int_L f(z)\,dz = \int_0^1 (-ix^2+x+1-i)(1+i2x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (-ix^2+x+1-i+2x^3+i2x^2+i2x+2x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (ix^2+3x+2x^3+1-i+i2x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (2x^3+ix^2+(3+2i)x+1-i)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{2} + i\frac{x^3}{3} + (3+2i)\frac{x^2}{2} + x - ix\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{i}{3} + \frac{3}{2} + i + 1 - i = 3 + \frac{i}{3}$$

3) $\int\limits_{L} f(z)\,dz = \int\limits_{L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{L_2} f(z)\,dz$

L_1 : $y=0$
$0\le x\le 1$

L_2 : $x=1$
$0\le y\le 1$

$f_1(x; y=0) = x+1-i$

$f_2(x=1; y) = 2-i(y+1) = -iy + (2-i)$

$dz_1 = dx$

$dz_2 = i\,dy$

$\int\limits_{L} f(z)\,dz = \int\limits_0^1 (x+1-i)\,dx + \int\limits_0^1 (-iy + (2-i))\cdot i\,dy =$

$= \left(\frac{x^2}{2} + x(1-i)\right)\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 (y+2i+1)\,dy =$

$= \frac{1}{2} + 1 - i + \left(\frac{y^2}{2} + y(2i+1)\right)\Big|_0^1 =$

$= \frac{3}{2} - i + \frac{1}{2} + 2i + 1 = 3+i$

№2

Обчислити $\oint\limits_C f(z)\,dz$, де $f(z)$ задані в завданні 1 по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки

$f(z)=\bar{z}+1-i$

$f(x,y)=x+1-i(y+1)$

$$L:\begin{cases}|z|=a & , y>0\\ y=0 & ; x\in(-a;a)\end{cases}$$

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = I = I_1+I_2$$

$$I_1=\int\limits_{\substack{|z|=a\\ y>0}} f(z)\,dz$$

$$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$$

$y>0$

$\sin t>0$

$t\in[0;\pi]$

$dz = dx + i\,dy = -a \sin t \; dt + ia \cos t \, dt$

$f(\;\;) = a \cos t + 1 - i(a \sin t + 1)$

$$I_1 = \int_0^{\pi} (a \cos t + 1 - ai \sin t - i)(-a \sin t + ia \cdot$$

$$\cdot \cos t)\,dt = \int_0^{\pi} (-a^2 \sin t \cos t - a \sin t +$$

$$+ ia^2 \sin^2 t + ia \sin t + ia^2 \cos^2 t + ia \cos t +$$

$$+ a^2 \sin t \cos t + a \cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi} (ia^2 + a(\cos t - \sin t) + ia(\cos t + \sin t))\,dt =$$

$$= ia^2 \int_0^{\pi} dt + a(1+i)\int_0^{\pi} \cos t\,dt + a(i-1)\int_0^{\pi} \sin t\,dt =$$

$$= ia^2 \pi + a(1+i) \cdot \sin t \Big|_0^{\pi} + a(i-1)(-\cos t)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= ia^2 \pi + a(i-1)(1+1) = ia^2\pi + 2ia - 2a$$

$$I_2 = \int_{-a}^{a} f(x, y=0)\,dx$$

$$f(x, y=0) = x + 1 - i$$

$$I_2 = \int_{-a}^{a} (x + 1 - i)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + (1-i)x\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{a^2}{2} + a(1-i) -$$

$$- \frac{a^2}{2} + a(1-i) = 2a(1-i) = 2a - 2ia$$

$I = I_1 + I_2 = ia^2\pi + 2ia - 2a + 2a - 2ia = ia^2\pi$

Відповідь: $\oint\limits_C f(z)\,dz = ia^2\pi$

№ 3

Обчислити $\oint\limits_C f(z)\,dz$, де C – коло радіуса R з центром у точці z_c, з допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних від аналітичної функції

$f(z) = \dfrac{e^z}{z^2 - 1}$, $R = 2$, $z_c = 0$

$f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)(z+1)}$ $\quad D: |z| < 2$

$f(z)$ не аналітична в $z_1 = 1$

$z_2 = -1$

$f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)(z+1)} = e^z\left(\dfrac{A}{z-1} + \dfrac{B}{z+1}\right)$

$A(z+1) + B(z-1) = 1$

$z = -1 \quad B = -\frac{1}{2}$

$z = 1 \quad A = \frac{1}{2}$

$$f(z) = \frac{e^z}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$$

$$\oint\limits_{|z|<2} \frac{e^z}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\oint\limits_{|z|<2} \frac{e^z}{z-1}\,dz - \frac{1}{2}\oint\limits_{|z|<2} \frac{e^z}{z+1}\,dz.$$

За т. Коші

$$\oint\limits_{|z|<2} \frac{e^z}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i e^{1} - \frac{1}{2}\cdot 2\pi i e^{-1} =$$

$$= \pi i (e - e^{-1}) = \frac{\pi i (e^2 - 1)}{e}$$

Відповідь:

№ 4

Застосувавши формулу

Ст. 7 N1

Знайти Re z та Im z

$$z = \frac{3}{1+2i} + \frac{3}{2-i} = \frac{3\cdot(1-2i)}{1^2+2^2} + \frac{3\cdot(2+i)}{2^2+1^2} =$$

$$= \frac{3}{5}(1-2i+2+i) = \frac{3}{5}(3-i) = \frac{9}{5} - \frac{3}{5}i$$

В.: $\operatorname{Re} z = \frac{9}{5}$

$\operatorname{Im} z = -\frac{3}{5}$

N 2

Звести до тригонометричної та показникової форми, побудувати в комплексній площині

$z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$

$\rho = \sqrt{2^2 + 2^2\cdot 3} = 4$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$

$\varphi = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$ $(\cos\varphi < 0)$

$z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$z = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Відповідь: $z = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

CreateByVova