Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»
Факультет інформатики та обчислювальної техніки

Кафедра обчислювальної техніки

Методи оптимізації та планування

Графічно-розрахункова робота
Тема: Виконання кусково-лінійної апроксимації

Варіант 99

ВИКОНАВ:
студент II курсу ФІОТ
групи ІВ-71
Мазан Я. В.
Залікова - 7109

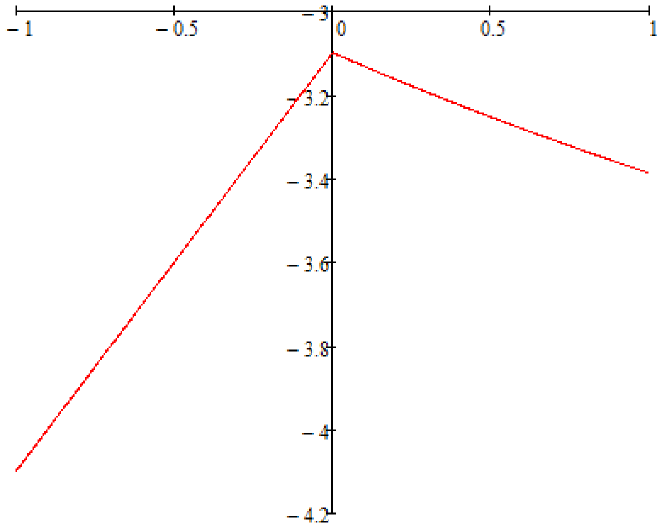
ПЕРЕВІРИВ:
доц. Селіванов В.Л.

Київ – 2018

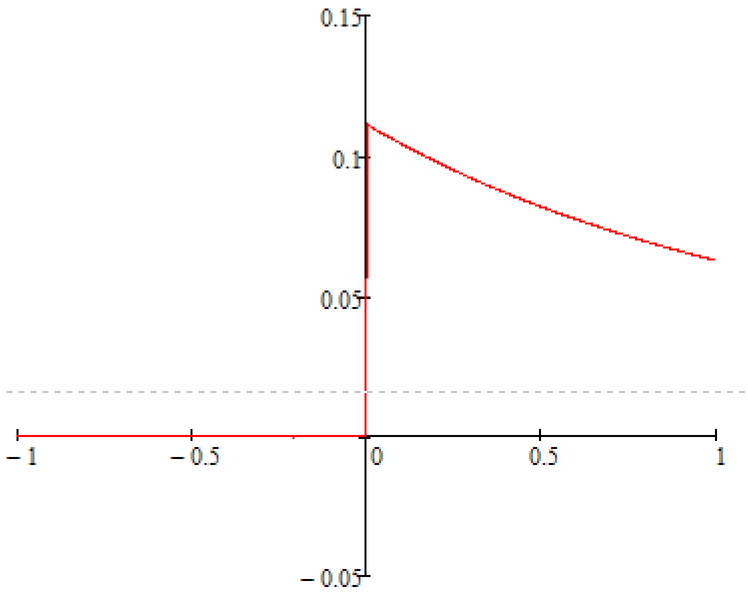
Особисте завдання:
f(x) для x < 0

№ варіанту	f(x) для x < 0	f(x) для x > 0	x_{min}	x_{max}	x_0[a]
99	-|2-x|-ln3	-ln(x+3)-2	-1	+1	x_{max}

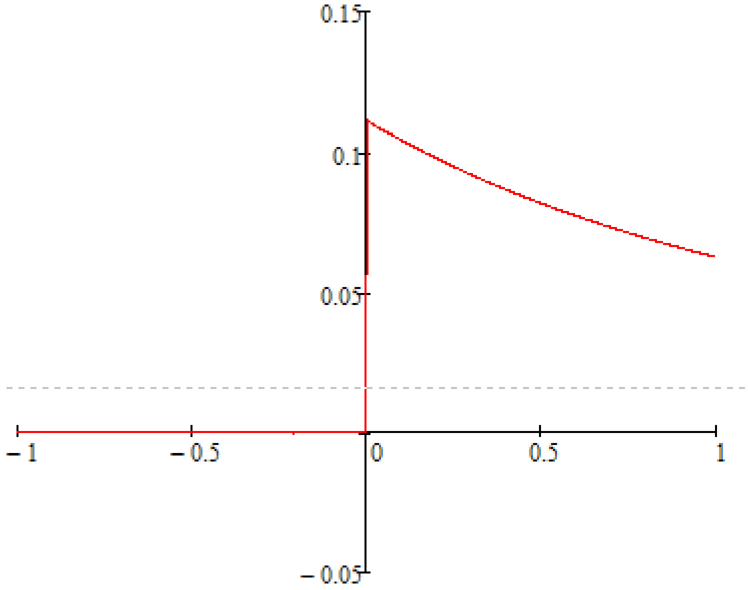
1. Побудувати графік функції y = f(x) для діапазону $x_{min} \le x \le x_{max}$. Значення y = f(x), x_{min}, x_{max} узяти з таблиці варіантів



2. Визначити другу похідну $\frac{d^2y}{dx^2}$ та побудувати її графік для діапазону зміни аргументу $x_{min} \le x \le x_{max}$.



3. Побудувати графік модуля другої похідної функції $\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|$ для діапазону зміни аргументу $x_{min} \le x \le x_{max}$.

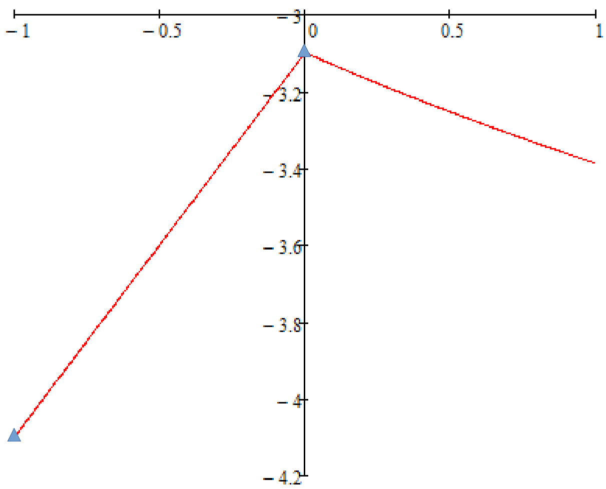


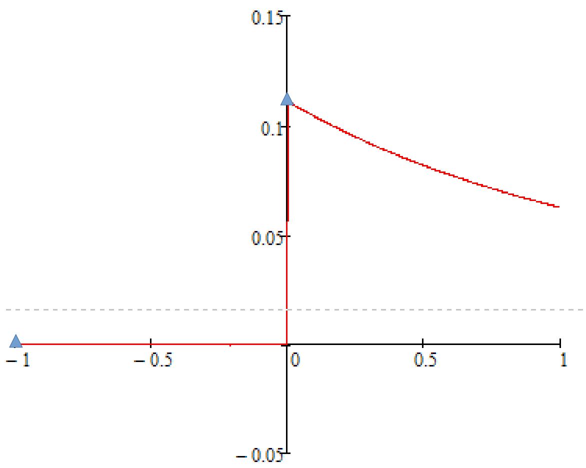
4. Проаналізувати графік нелінійної залежності функції y = f(x), з'ясувавши характер опуклості та вгнутості функції по частинам, наявність точок перегинання та наявність точок розриву першого роду другої похідної функції.

Функція y = f(x) не є опуклою ні вгору, ні вниз на інтервалі $x \in [-1; 0)$ так, як друга похідна f''(x) дорівнює нулю на цьому проміжку. Точок перегину функція не має, на проміжку $x \in (0; +1]$ функція f(x) опукла вниз, бо y = f''(x) > 0 на даному проміжку. Точок розриву I роду функція не має.

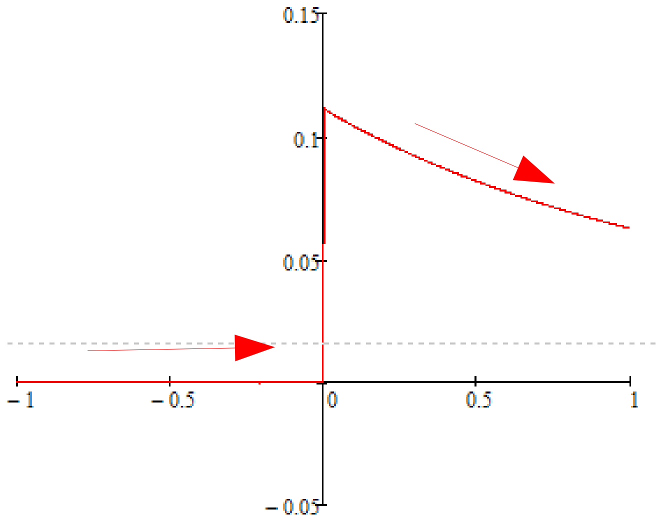
5. Обрати початкову точку (або початкові точки) апроксимації для подальших розрахунків, зазначивши її (або їх) на графіках y = f(x) та $\left|\frac{d^2 y}{dx^2}\right|$, визначити абсцису цієї початкової точки x_0^p (або абсциси початкових точок x_0^1, x_0^2 тощо).

Візьму $x_0^1 = x_{min} = -1$; $x_0^2 = 0$





6. За графіком $\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|$ обрати напрямок (або напрямки) розрахунків значень $h_i = x_i - x_{i-1}$ (i=1,n) від початкової точки (або від початкових точок) та зазначити його (або їх) на цьому графіку у вигляді стрілок над графіком $\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|$.



7. Визначити методику розрахунків значень h_i (i= 1,n) та обрати формулу для розрахунку значень $h_i = \sqrt{\dfrac{8\Delta_{max}f}{A_i}}$ або $h_i = \sqrt{\dfrac{16\Delta_{max}f}{A_i}}$, де A_i – максимальне за модулем значення другої похідної на i-й частині ламаної лінії, що розраховується.

Так, як на діапазоні $x \in (0;+1]$ наша функція опукла вниз без жодних точок перегину, то розраховуємо $h_i = \sqrt{\dfrac{8\Delta_{max}f}{A_i}}$. На першому діапазоні $x \in [-1;0)$ ми апроксимуємо пряму ($A_1 = 0$), тому на ньому можемо прийняти $h_1 = 1$, $x_1 = x_0 + h_1 = 0$ ($x_0 = -1$)

8.Підібрати таке значення похибки $\Delta_{max}f$, при якому в результаті розрахунків h_i (i=1,n) отримаємо n = 8 або n = 9, тобто отримаємо апроксимуючу ламану лінію з 8 або з 9 частин. Виконати розрахунок усіх значень hi (i=1,n) та здійснити нумерацію вузлів (вершин ломаної лінії), починаючи з номера 0.

9. Здійснити розрахунок абсцис x_i (1,n), починаючи з x_0, початкових ординат y_i^p (0,n), вузлів апроксимації (вершин ламаної лінії), що належать функції y=f(x), та кінцевих ординат y_i^k (0,n), вузлів апроксимації з урахуванням корекції, яку здійснюють для отримання знакозмінної похибки апроксимації.

Виконання завдань 8-9:

Поділимо ліву частину на інтервали:

$h_1 := 1$ $\qquad X_0 := -1$ $\qquad A_1 := y''(X_0) = 0$

$X_1 := X_0 + h_1 = 0$

Поділимо праву частину на інтервали: $\Delta f_{max} := 0.00011$

$h_2 := \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_2}} = 0.126$ $X_2 := X_1 + h_2 = 0.126$ $A_2 := y''(X_1) = 0.111$

$h_3 := \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_3}} = 0.131$ $X_3 := X_2 + h_3 = 0.257$ $A_3 := \left|y''(X_2)\right| = 0.102$

$h_4 := \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_4}} = 0.137$ $X_4 := X_3 + h_4 = 0.394$ $A_4 := \left|y''(X_3)\right| = 0.094$

$h_5 := \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_5}} = 0.142$ $X_5 := X_4 + h_5 = 0.536$ $A_5 := \left|y''(X_4)\right| = 0.087$

$h_6 := \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_6}} = 0.148$ $X_6 := X_5 + h_6 = 0.684$ $A_6 := \left|y''(X_5)\right| = 0.08$

$h_7 := \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_7}} = 0.155$ $X_7 := X_6 + h_7 = 0.839$ $A_7 := \left|y''(X_6)\right| = 0.074$

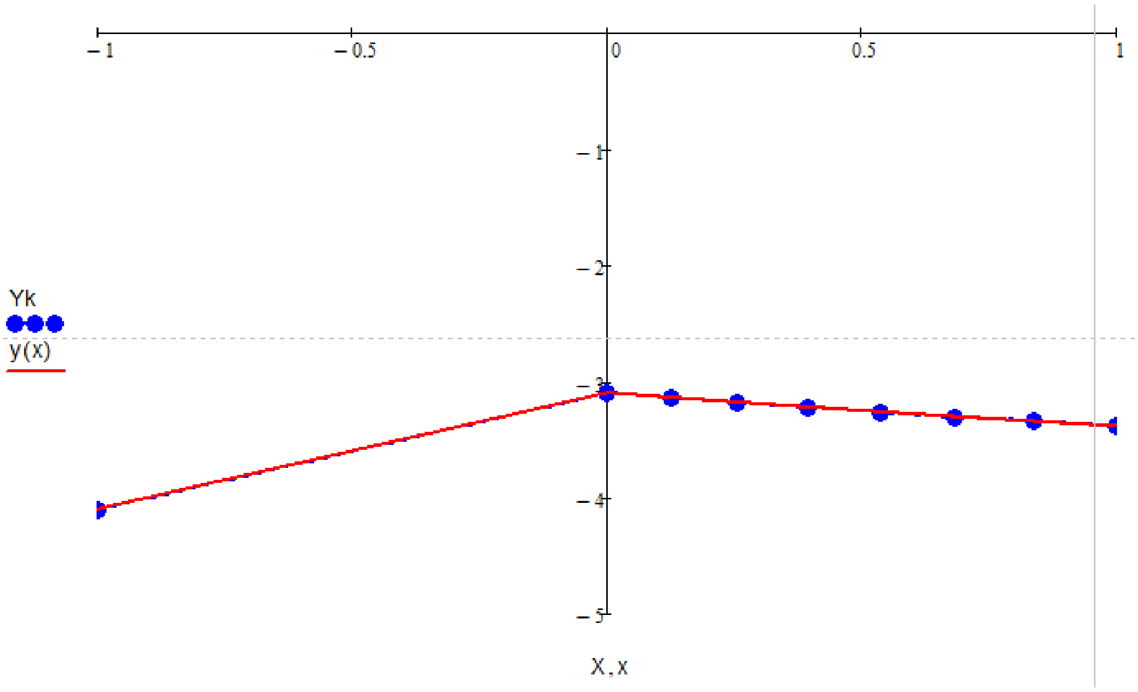
$h_8 := \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_8}} = 0.161$ $X_8 := X_7 + h_8 = 1$ $A_8 := \left|y''(X_7)\right| = 0.068$

Виходячи з 8-го завдання, шукаємо ординати вершин ломаної лінії:

$j := 0..8$ $Yp_j := y(X_j)$ $Yk_j := \begin{cases} Yp_j & \text{if } X_j < 0 \\ Yp_j + \Delta f_{max} & \text{if } X_j \ge 0 \end{cases}$

$X_0 = -1$	$Yp_0 = -4.099$	$Yk_0 = -4.099$
$X_1 = 0$	$Yp_1 = -3.099$	$Yk_1 = -3.099$
$X_2 = 0.126$	$Yp_2 = -3.14$	$Yk_2 = -3.14$
$X_3 = 0.257$	$Yp_3 = -3.181$	$Yk_3 = -3.181$
$X_4 = 0.394$	$Yp_4 = -3.222$	$Yk_4 = -3.222$
$X_5 = 0.536$	$Yp_5 = -3.263$	$Yk_5 = -3.263$
$X_6 = 0.684$	$Yp_6 = -3.304$	$Yk_6 = -3.304$
$X_7 = 0.839$	$Yp_7 = -3.345$	$Yk_7 = -3.345$
$X_8 = 1$	$Yp_8 = -3.386$	$Yk_8 = -3.386$

10. Побудувати графік апроксимуючої функції (ломаної лінії) y=φ(x), використовуючи отримані значення x_i (0, n) та y_i^k (0, n).



11. Здійснити розрахунок значень кутових коефіцієнтів (значень тангенсів кутів нахилу) k_i (i=1,n) лінійних частин ламаної лінії.

Загальна формула для розрахунку k_i: $k_i = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$

$$k_1 = \frac{f(0) - f(-1)}{0+1} = -3.1 + 4.1 = 1$$

Аналогічно маємо:

$$k_2 = \frac{f(0.126) - f(0)}{0.126} = -0.327$$

$$k_3 = \frac{f(0.257) - f(0.126)}{0.131} = -0.313$$

$k_4 = -0.301$

$k_5 = -0.289$

$k_6 = -0.277$

$k_7 = -0.267$

$k_8 = -0.257$

12. Виконати розкладання апроксимуючої функції (ламаної лінії) y=φ(x) на окремі доданки (лінійні та елементарні нелінійні (лінійні з обмеженням на нульовому рівні)), починаючи з точки, яка має абсцису x_0^a . Значення x_0^a узяти з таблиці варіантів.

13. Над кожним елементарним нелінійним доданком зазначити його квадрант (I, II, III, IV) та режим (на відкривання чи на закривання)

14. Здійснити розрахунок наступних значень:

- Значення $\varphi(x_0^a)$ для першого лінійного доданку
- Значення $b_0 = k_0$ та x_0 для другого лінійного доданку
- Значення $b_i = k_i - k_{i-1}$ та x_{REFi} для кожного елементарного нелінійного доданку

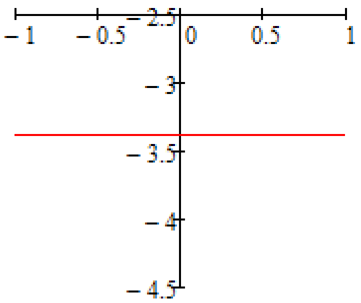
Завдання 12-14:

Із варіанту маємо $x_0^a = x_{max} = 1$. Так, як у нас $x_0^a = x_{max}$, то в нас для елементарних нелінійних доданків $\varphi_i(x) = b_i(x-x_i)$ діє лише обмеження 2 роду:

$$b_i = \begin{cases} 0, x \geqslant x_i \\ k_i - k_{i-1}, x < x_i \end{cases}$$

Перший лінійний доданок:

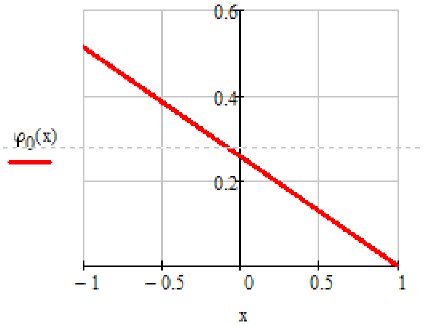
$\varphi(x_0^a) = f(x_{max}) = -3.387$



Другий лінійний доданок:

$b_0 := k_8 = -0.257$

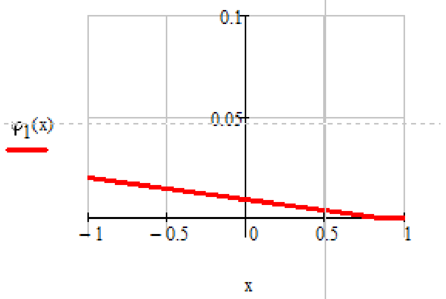
$\varphi_0(x) := b_0(x - X_8)$



Елементарні нелінійні доданки:

$b_1 := k_7 - k_8 = -0.011$

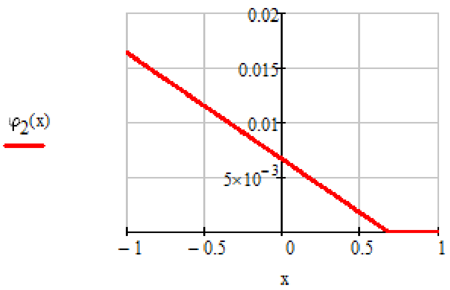
$\varphi_1(x) := \begin{cases} b_1 \cdot (x - X_7) & \text{if } x < X_7 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$



II квадрант, на закривання

$b_2 := k_6 - k_7 = -9.739 \times 10^{-3}$

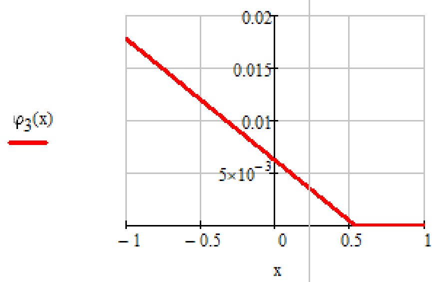
$\varphi_2(x) := \begin{cases} b_2 \cdot (x - X_6) & \text{if } x < X_6 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$



II квадрант, на закривання

$b_3 := k_5 - k_6 = -0.012$

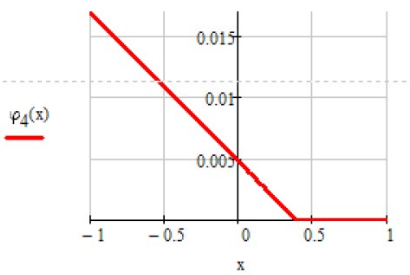
$\varphi_3(x) := \begin{cases} b_3 \cdot (x - X_5) & \text{if } x < X_5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$



II квадрант, на закривання

$b_4 := k_4 - k_5 = -0.012$

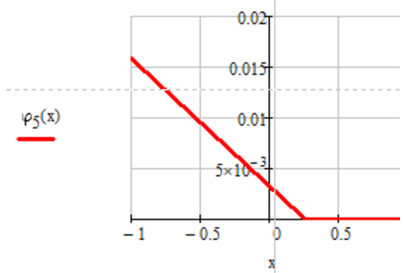
$\varphi_4(x) := \begin{cases} b_4 \cdot (x - X_4) & \text{if } x < X_4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$



II квадрант, на закривання

$b_5 := k_3 - k_4 = -0.013$

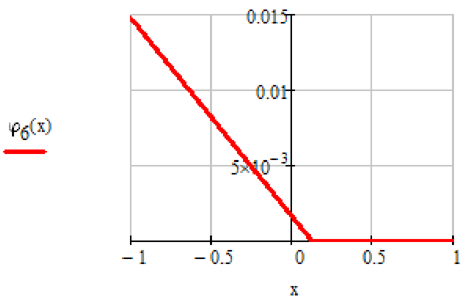
$\varphi_5(x) := \begin{cases} b_5 \cdot (x - X_3) & \text{if } x < X_3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$



II квадрант, на закривання

$b_6 := k_2 - k_3 = -0.013$

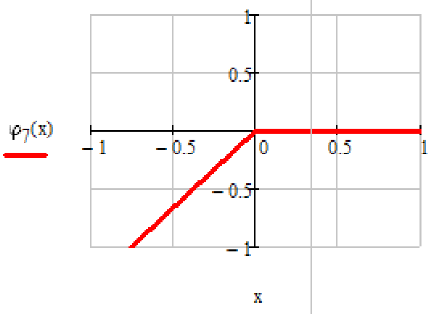
$\varphi_6(x) := \begin{cases} b_6 \cdot (x - X_2) & \text{if } x < X_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$



II квадрант, на закривання

$b_7 := k_1 - k_2 = 1.327$

$$\varphi_7(x) := \begin{cases} b_7 \cdot (x - X_1) & \text{if } x < X_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



III квадрант, на відкривання

Обчислення $x_{REFi} = \quad x_i - \frac{y_i^k}{k_i}$

X_{REF1} = -1+4.099/1 = 3.098
X_{REF2} = 0 – 3.099/0.327 = -9.489
X_{REF3} = 0.126 – 3.14/0.313 = -9.892
X_{REF4} = [розрахунки ідентичні] = -10.319
X_{REF5} = -10. 768
X_{REF6} = -11.241
X_{REF7} = -11.675
X_{REF8} = -12.201