Лекція 3
Відношення й операції

План лекції

1. **Поняття відношення**
2. **Визначення відношення**
3. **Область визначення й множина значень**
4. **Зріз відношення через елемент**
5. **Способи задавання бінарних відношень**

5.1. Задавання перерахуванням і предикатом
5.2. Задавання графом
5.3. Задавання матрицею (таблично)

6. **Операції над відношеннями**
   6.1. Об'єднання, перетин, різниця, доповнення
   6.2. Операції об'єднання й перетину довільних сімейств відношень
7. **Додаткові операції**
   7.1. Обернене відношення
   7.2. Композиція відношень (Множення відношень)
      7.2.1. Властивості композиції відношень

Поняття відношення

Відношення між парою об'єктів називається бінарним. Бінарне відношення використовують для того, щоб вказати характер виду зв'язку між парою об'єктів, які розглядають у певному порядку. При цьому відношення дає критерій для визначення відмінності одних упорядкованих пар від інших. Таким чином, поняття «відношення» є подальшим розвитком понять упорядкованої множини, «відповідності» і «відображення».

У математиці для позначення зв'язку між об'єктами або поняттями часто користуються терміном «відношення».

Приклад. Такі неповні речення (або так звані предикати, твердження) можуть розглядатися як відношення:

- X менше (або більше), ніж Y,
- X вище (або нижче), ніж Y,
- X ділиться на Y,
- X відбувається раніше (або пізніше), ніж Y,
- X включено (або входить) в Y,
- X паралельно (або перпендикулярно) до Y,
- X дорівнює (або еквівалентне) Y,
- X є братом Y,
- X зв'язаний (електрично або іншим способом) з Y и т. ін.

Визначення відношення

Відношенням R множин X і Y називають довільну підмножину $X \times Y$. Якщо $(x,y) \in R$, то це записують як xRy; при цьому говорять, що x і y перебувають у відношенні R, або просто, що x знаходиться у відношенні з y. Якщо $X = Y$, то відношення є підмножиною $X \times X$. Таке відношення називають ***бінарним відношенням*** на X.

Приклади бінарних відношень.

1. Вся множина $X \times Y$ є відношенням множин X і Y.
2. Якщо X — множина дійсних чисел, то відношення
$$\left\{(a,b) \in X \times X \middle| a^2 + b^2 = 4\right\}$$
є бінарним відношенням на X.
3. Нехай X — множина товарів у магазині, а Y — множина дійсних чисел. Тоді $\left\{(a,b) \in X \times Y \middle| a\, price\, b\right\}$ — відношення множин X і Y.
4. Нехай X — множина жінок, а Y — множина чоловіків, тоді $\{ (a,b) | b$ є чоловіком $a \}$ є відношення множин X і Y.

5. Якщо A — множина людей, то відношення
$$\{ (a,b) \in A^2 | b \text{ є родичем } a \}$$
є бінарним відношенням на A.

Область визначення й множина значень

Область визначення відношення R на X і Y – це множина всіх $x \in X$ таких, що для деяких $y \in Y$ маємо $(x,y) \in R$. Інакше кажучи, область визначення R є множиною всіх перших координат упорядкованих пар з R.

Множина значень відношення R на X і Y – це множина всіх $y \in Y$ таких, що $(x,y) \in R$ для деяких $x \in X$. Інакше кажучи, множина значень R є множиною всіх других координат упорядкованих пар з R.

З кожним відношенням R на $X \times Y$ зв'язане відношення R^{-1} на $Y \times X$.

Способи задавання бінарних відношень

1. Бінарне відношення можна задати, перераховуючи всі пари, які в нього входять (якщо відношення складається зі скінченної кількості пар) або вказавши загальну властивість пар, що належать цьому відношенню, тобто предикатом (згадайте способи задавання множин).

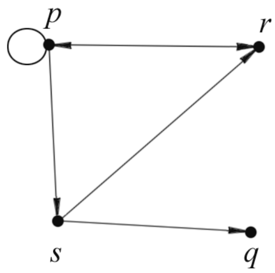
Приклад. Нехай дана множина $X = \{p, r, s, q\}$. Задамо відношення $R \subseteq X \times X$ перерахуванням пар: $R = \{(p,r),(s,q),(r,p),(p,p),(s,r),(p,s)\}$

Приклад. Нехай дано N – множина натуральних чисел. Задамо відношення, вказавши загальну властивість пар, що належать відношенню:

$$R_1 = \left\{ \left(n, m \right) \in N \times N \middle| n \text{ є дільником } m \right\}$$

2. Спосіб задавання бінарного відношення за допомогою графа. Нехай R – бінарне відношення на множині X. Зобразимо елементи множини X у вигляді точок на площині (їх називають вершинами графа). Для двох точок x_i, x_j проводимо стрілку $\rightarrow$ з x_i у x_j тоді й тільки тоді, коли $\left(x_i, x_j \right) \in R$. При цьому, якщо одночасно $\left(x_i, x_j \right) \in R$ та $\left(x_j, x_i \right) \in R$, то точки x_i і x_j з'єднують стрілкою$\leftrightarrow$, а якщо$\left(x_j, x_j \right) \in R$, то в точці x_j зображують петлю. На рисунку зображено граф бінарного відношення:

$$R = \left\{ \left(p, r \right), \left(s, q \right), \left(r, p \right), \left(p, p \right), \left(s, r \right), \left(p, s \right) \right\}.$$



3. Спосіб задавання бінарного відношення за допомогою булевих матриць. Нехай $R \subseteq X \times Y$, де $X = \left\{ x_1, x_2, x_3, ..., x_n \right\}$; $Y = \left\{ y_1, y_2, y_3, ..., y_m \right\}$. Розглянемо $n \times m$-матрицю (таблицю), у якій в перший стовпець виписані елементи множини X, а в перший рядок – елементи множини Y. На перетині рядка елемента x_i й стовпця елемента y_j записують 1, якщо пара $\left(x_i, y_j \right) \in R$, і 0, якщо $\left(x_i, y_j \right) \notin R$. Таку таблицю називають **булевою матрицею відношення.** Булева матриця відношення

$R = \left\{ \left(p, r \right), \left(s, q \right), \left(r, p \right), \left(p, p \right), \left(s, r \right), \left(p, s \right) \right\}$ має вигляд:

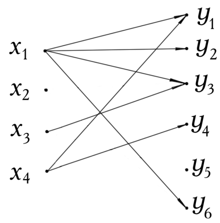
R	p	q	r	s
p	1	0	1	1
q	0	0	0	0
r	1	0	0	0
s	0	1	1	0

Зріз відношення через елемент

Нехай *R* – довільне бінарне відношення між елементами множин *X* і *Y*, $x \in X$. Множину тих елементів, з якими елемент x перебуває у відношенні *R*, називають **зрізом** (або **перетином)** відношення *R* через елемент *x* і позначають *R*(*x*). Якщо бінарне відношення R представлено за допомогою графа, то *R*(*x*) складається з тих вершин, у які з вершини *x* іде стрілка. Підкреслимо, що зріз відношення через елемент – це деяка множина, яка може містити кілька елементів, один елемент і жодного елемента (бути порожньою).

Приклад задавання зрізу відношення R через елемент x_i

Нехай дано множини $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ і $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ і відношення $R \subset X \times Y$, яке задане графом:



Зріз відношення R через елемент x_1: $R(x_1) = \{y_1, y_2, y_3, y_6\}$

Зріз відношення R через x_2: $R(x_2) = \{\varnothing\}$

Зріз відношення R через x_3: $R(x_3) = y_3$

Зріз відношення R через x_4: $R(x_4) = \{y_1, y_4\}$

Операції над відношеннями

Оскільки бінарні відношення представляють множини (пар), то до них застосовні поняття рівності, включення, а також операції об'єднання, перетину і доповнення.

Для двох бінарних відношень *R* і *S* визначимо такі операції:

Включення $R \subset S$ розуміють таким чином, що будь-яка впорядкована пара елементів, яка належить відношенню *R*, належить і відношенню *S*.

Рівність $R = S$ означає, що відношення R і S складаються з тих самих упорядкованих пар.

Об'єднання $R \cup S$ відношень R і S складається з упорядкованих пар, що належать хоча б одному із цих відношень.

Перетин $R \cap S$ відношень R і S є нове відношення, що складається з упорядкованих пар, які належать одночасно обом відношенням.

Різниця $R - S$ відношень *R* і *S* є множина впорядкованих пар, що належать відношенню *R* і не належать відношенню *S*.

Доповнення. Якщо *R* – бінарне відношення між елементами множин *X* і *Y*, то його **доповненням** (відносно $X \times Y$) називають різницю $(X \times Y) - R$

Операції об'єднання й перетину довільних сімейств відношень

Якщо $(R_i)_{i\in I}$ – сімейство відношень, то **об'єднання цього сімейства** є відношенням $\bigcup_{i\in I} R_i$, що складається з упорядкованих пар, які належать хоча б одному з відношень R_i.

Перетин цього сімейства – відношення $\bigcap_{i\in I} R_i$, що складається з упорядкованих пар, які належать одночасно усім відношенням R_i.

Додаткові операції

Для відношень задають деякі **додаткові операції**, які пов'язані з їх специфічною структурою, яка проявляється в тому, що **всі елементи відношень є упорядкованими парами**. Розглянемо дві такі операції.

1. Обернене відношення

Якщо в кожній упорядкованій парі, що належить відношенню *R*, поміняти місцями перший і другий компонент, то одержимо нове відношення, яке називають **оберненим до** відношення R і позначають через R^{-1} .

Наприклад, для відношення R

$$R = \{(p,r),(s,q),(r,p),(p,p),(s,r),(p,s)\}$$

обернене відношення R^{-1} має вигляд:

$$R^{-1} = \{(r,p),(q,s),(p,r),(p,p),(r,s),(s,p)\}$$

Ясно, що тоді й граф відношення R^{-1} одержують з графа відношення R шляхом переорієнтації всіх стрілок.

Якщо ж відношення R задане за допомогою булевої матриці, то, помінявши в ній рядки та стовпці, одержимо булеву матрицю відношень R^{-1}.

Нехай $R \subseteq X \times Y$ є відношенням на $X \times Y$. Тоді відношення R^{-1} на $Y \times X$ визначається в такий спосіб:

$$R^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}.$$

Інакше кажучи, $(y,x) \in R^{-1}$ тоді й тільки тоді, коли $(x,y) \in R$ або, що рівнозначно, $yR^{-1}x$ тоді й тільки тоді, коли xRy.

Відношення R^{-1} називають ***оберненим відношенням*** до даного відношення R.

Приклади прямих та обернених відношень

Нехай $R=\{(1,r),(1,s),(3,s)\}$, тоді $R^{-1}=\{(r,1),(s,1),(s,3)\}$.

Нехай R={ $(a,b)|b$ є чоловіком a }, тоді

R^{-1}={ $(b,a)|a$ є дружиною b }

Нехай

R = { $(a,b)|b$ є родичем a }, тоді $R=R^{-1}$

Нехай

R — відношення $\left\{(a,b)\middle|a^2+b^2=4\right\}$, тоді також $R^{-1}=R$.

2. Композиція відношень (Множення відношень)

Нехай $R\subseteq X\times Y$ — відношення на $X\times Y$,
а $S\subseteq Y\times Z$ — відношення на $Y\times Z$.

Композицією відношень S і R називають відношення

$$T\subseteq X\times Z,$$

визначене в такий спосіб:

$T=\{\,(x,z)|$ існує такий елемент $y\in Y$, що $(x,y)\in R$ і $(y,z)\in S$ $\}$.

Цю множину позначають $T=S\circ R$.

Приклад.

Нехай $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b\}$ і $Z=\{\alpha,\beta,\lambda,\mu\}$.

Також задані відношення

$R=X\times Y$ и. $S=Y\times Z$ $R=\{(1,a),(2,b),(3,b)\}$,

$S=\{(a,\alpha),(a,\beta),(b,\lambda),(b,\mu)\}$,

Тоді $S\circ R=\{(1,\alpha),(1,\beta),(2,\lambda),(2,\mu),(3,\lambda),(3,\mu)\}$ оскільки

з $(1,a)\in R$ і $(a,\alpha)\in S$ випливає, що $(1,\alpha)\in S\circ R$,

з $(1,a)\in R$ і $(a,\beta)\in S$ випливає, що $(1,\beta)\in S\circ R$,

…..

з $(3,b)\in R$ і $(b,\mu)\in S$ випливає, що $(3,\mu)\in S\circ R$.

Властивості композиції відношень

Композиція відношень **асоціативна**; тобто, якщо X, Y, Z, D — множини і якщо $R\subseteq X\times Y$, $S\subseteq Y\times Z$ і $T\subseteq Z\times D$.

Тоді $R\circ(S\circ T)=(R\circ S)\circ T$.