ЛЕКЦІЯ 14

Похибки наближених Обчислень

Tutorial on creating your own GAN in Tensorflow

https://www.anaconda.com/download/

IDE “Spider”

pip install tensorflow

pip install jupyter

https://github.com/uclaacmai/Generative-Adversarial-Network-Tutorial

ВСТУП

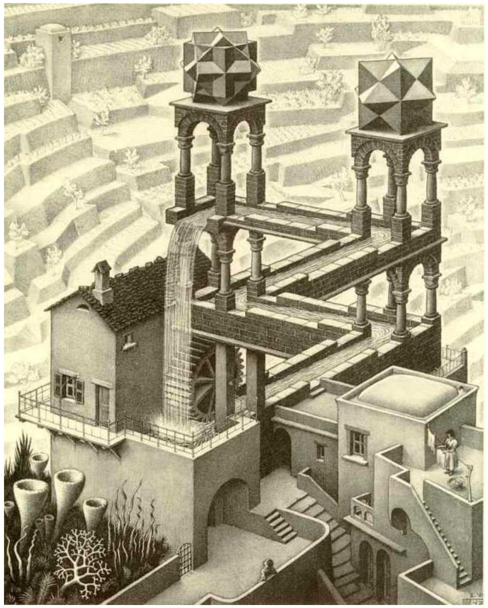
При розв'язуванні задач на ЕОМ практично неможливо одержати точний розв'язок.

Одержуваний чисельний розв'язок майже завжди містить похибка, тобто є наближеним.

Наприклад: $\frac{1}{3} \approx 0.3333, \ \pi \approx 3.14, \ \sqrt{2} = 1.4142,$

У цій лекції розглядаються:

- джерела виникнення похибок при розв'язуванні задачі.
- основні правила задавання наближених величин.
- оцінки похибок обчислень деяких функцій.



Джерела похибок результату

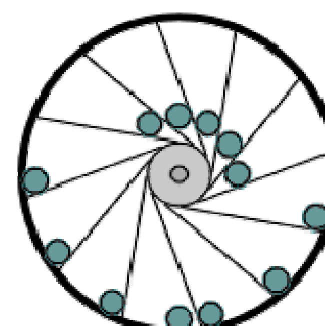
Похибки розв'язку задач на ЕОМ пояснюються наступними причинами:

1. *Похибка математичної моделі* – пов'язана з невідповідністю моделі фізичній реальності.

При моделювання може не враховуватися:

1) Тертя.
2) Опір середовища.
3) Температура.
4) Сили поверхневого натягу

Якщо математична модель обрана недостатньо ретельно, то, які б методи ми не застосовували для обчислень, усі результати будуть ненадійні або неправильні.



Приклад: моделі вічного двигуна.

2. *Похибка вхідних (початкових) даних*

Значення величин, що входять в умову задачі, одержують в результаті вимірювань, а тому вони мають наближений характер;

Це ***непереборна похибка***, але цю похибку можливо й необхідно оцінити для вибору алгоритму розрахунків і точності обчислень.

Похибки експерименту ділять на:

систематичні, випадкові, грубі,

Ідентифікація таких помилок можлива при статистичному аналізі результатів експерименту.

3. ***Похибка методу*** – це наслідок прийнятих методик розрахунку, які використовують наближені формули.

Чисельний алгоритм має дискретний характер

Це означає, що замість точного розв'язку задачі метод знаходить розв'язок іншої задачі, близької до шуканої.

Похибка методу – основна характеристика будь-якого чисельного алгоритму.

Похибка методу повинна бути в 2-5 разів меншою від непереборної похибки.

Приклад. Похибка многочлена Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{w_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$w_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)..(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})..(x - x_n)$$

4. *Похибка округлення* – пов'язана з використанням в обчислювальних машинах чисел з скінченною точністю представлення.

При реалізації чисельних алгоритмів, комп'ютери оперують скінченими десятковими дробами, тобто наближеними числами.

Отже дані і результати проміжних операцій округлюються, внаслідок чого в тій чи іншій мірі накопичуються похибки

Задачі, що виникають при роботі з наближеними величинами

1. Математично виражають похибки наближених величин**.**

2. Оцінюють **похибку результату**, коли відома **похибка вхідних даних**.

3. Знаходять **похибку вхідних даних** з метою одержання заданої **похибки результату**.

4. Погоджують похибки різних вхідних даних для того, щоб не виконувати зайвої роботи при обчисленні якщо інші дані занадто грубі.

5. Стежать в процесі обчислень за похибкою проміжних результатів, для того щоби:

--з одного боку, забезпечити необхідну точність остаточного результату,

--з іншого боку, по можливості спростити обчислення.

Основні характеристики наближених чисел

Основними характеристиками наближених чисел є абсолютна та відносна похибки

Додатковими характеристиками наближених чисел є межа абсолютної та межа відносної похибки.

Означення абсолютної похибки.

Абсолютною похибкою $\Delta_a x$ наближеного значення величини називається модуль різниці між її точним значенням a та наближеним значенням x.

$$\Delta_a x = \left| a - x \right|$$

Приклад.

$$\pi \approx 3.14 \to \Delta_\pi = \left| \pi - 3.14 \right| = \left| 3.1415926... - 3.14 \right| = 0.0015926...$$

$$\pi \approx 3.1415 \to \Delta_\pi = \left| \pi - 3.1415 \right| = \left| 3.1415926... - 3.1415 \right| = 0.0000926...$$

Межа абсолютної похибки

На практиці абсолютна похибка наближення часто не може бути обчислена, оскільки невідоме точне значення величини. Проте майже завжди можна вказати число, яке не менше від абсолютної похибки, тобто оцінити цю похибку зверху. В нашому прикладі $\left|\pi - 3.14\right| < 0.2$

Для механізму необхідна кругла деталь діаметром 24 мм. Відомо, що він працює задовільно, якщо діаметр d деталі відрізняється від заданого не більше між на

$h_a = \pm 0.5$ мм. Отже, $d = 24 \pm h_a = 24 \pm 0.5$ мм, або $d \in \left[23.5; 24.5\right]$.

Означення.

Число h_a, яке не менше від абсолютної похибки $\Delta_a x$, називається межею абсолютної похибки.

Абсолютна похибка має таку саму розмірність, що і розглядувана величина.

Означення відносної похибки

Відносна похибка σ_a дорівнює відношенню абсолютної похибки обчислення $\Delta_a x$ до модуля наближеного значення величини x:

$$\sigma_a x = \frac{\Delta_a x}{\left| x \right|}.$$

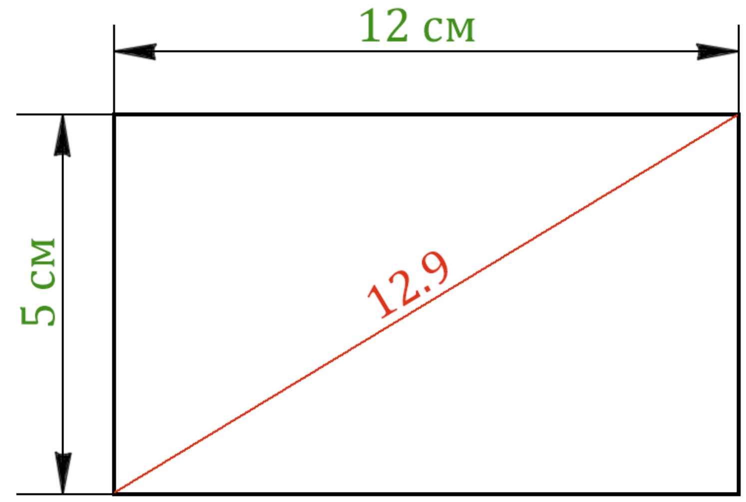
Відносну похибку часто виражають у відсотках.
Відносна похибка є безрозмірною величиною.

Визначення приведеної (нормалізованої) відносної похибки

Приведена похибка $\delta_a x$, дорівнює відношенню абсолютної похибки $\Delta_a x$ до максимального значення $x_{\max}$:

$$\delta_a x = \frac{\Delta_a x}{\left| x_{\max} \right|}.$$

Приклад обчислення відносної похибки



Сторони прямокутника 12см і 5см.

Після вимірювання його діагоналі лінійкою дістали результат 12,9 см. Яка відносна похибка цього наближення?

$$a = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13\text{см.}\ x = 12.9\text{см.}$$

$$\Delta_a x = \left|13 - 12.9\right| = 0.1 \text{ см}$$

$$\sigma_a x = \frac{0.1}{12.9} = 0.00775$$

або $\sigma_a x = \frac{1}{129} \cdot 100\% \approx 0.78\%$

Межа відносної похибки

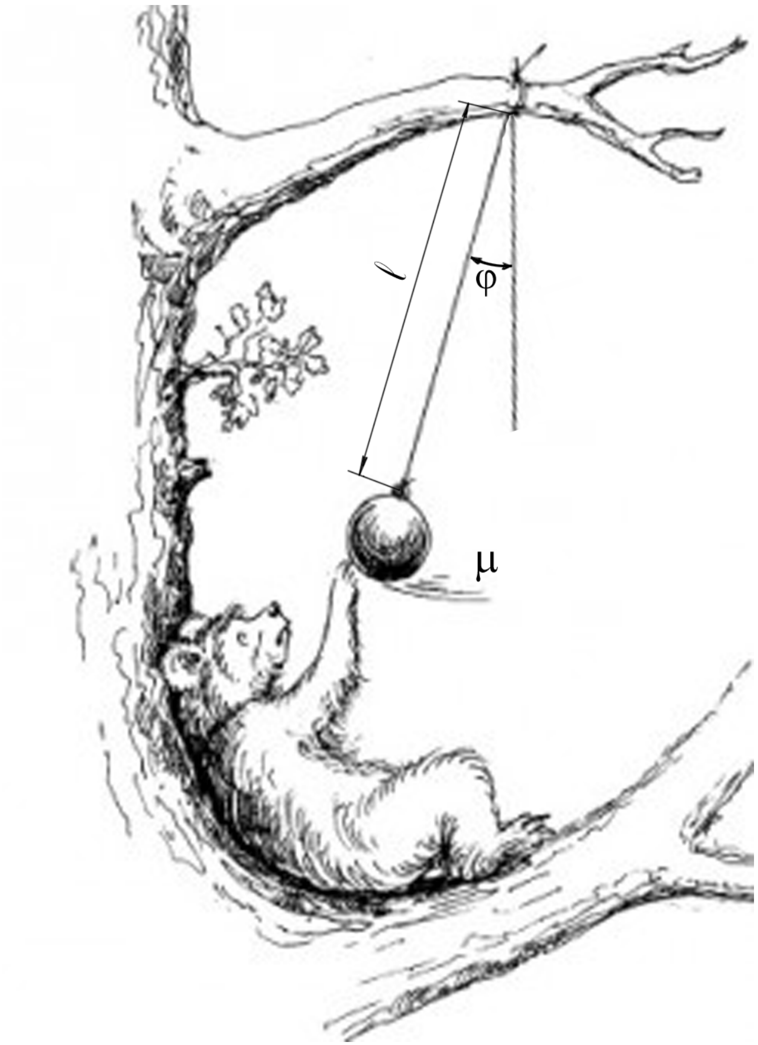
Означення. Число E_a, яке не менше за відносну похибку , називається межею відносної похибки: $E_a > \sigma_a x$.

Оскільки $\sigma_a x = \dfrac{\Delta_a x}{|x|} < \dfrac{h_a}{|x|}$, то число $\dfrac{h_a}{|x|}$ називають межею відносної похибки: $E_a = \dfrac{h_a}{|x|}$.

Приклад. При вимірюванні довжини l і діаметра d деякого провідника одержали значення $l = 50 \pm 0.1$ м та $d = 2 \pm 0.1$ мм. Яке з вимірювань точніше?

$$E_l = \frac{0.1}{50} \cdot 100\% = 0.2\% \qquad E_d = \frac{0.1}{2} \cdot 100\% = 5\%$$

Отже, вимірювання довжини більш точне.



Звідки беруться похибки?

Нехай є реальний маятник, що робить згасаючі коливання, який починає рух у момент $t = t_0$. Потрібно знайти кут відхилення φ від вертикалі в момент t_1. Рух маятника ми можемо описати наступним диференціальним рівнянням:

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mu\frac{d\varphi}{dt} + g\sin\varphi = 0,$$

де l – довжина маятника, g – прискорення сили тяжіння, μ – коефіцієнт тертя.

Похибки математичної моделі реального маятника

1. **Реальне тертя** залежить **не** зовсім **лінійно** від швидкості маятника (*похибка моделі*)
2. **Довжина** маятника l може бути виміряна **з деякою точністю**, обумовленою вимірювальним приладом (*похибка вхідних даних*)
3. **Прискорення** вільного падіння g **має різні значення** в різних точках планети.
4. **Коефіцієнт тертя** μ також може бути заданий з **деякою точністю** (*похибка вхідних даних*)
5. **Чисельний метод** розв'язування диференціального рівняння **має похибку** (*похибка методу*)

Правила розрахунків похибки округлення

1. Додавання й віднімання наближених чисел

Розглянемо два наближених числа x і y, для яких відомі точні значення a і b і відповідно *абсолютні похибки* $\pm\Delta_a x$ й $\pm\Delta_b y$.

$$\pm\Delta_a x = x - a,$$

$$\pm\Delta_b = y - b.$$

Операція суми $s = x + y$ виконується з похибкою $\pm\Delta s$.

Операція різниці $r = x - y$ виконується з похибкою $\pm\Delta r$.

Оскільки знаки похибок доданків нам невідомі,

то, для забезпечення достовірності кінцевого результату ми повинні взяти найгірший випадок, коли похибки додаються.

Абсолютні похибки арифметичних операцій

1. Абсолютна похибка **суми** наближених чисел дорівнює **сумі** абсолютних похибок доданків з однаковими знаками.

$$x + y \Rightarrow \quad \Delta s = +\Delta_a x + \Delta_b y$$

$$x + y \Rightarrow -\Delta s = \left(-\Delta_a x\right) + \left(-\Delta_b y\right)$$

2. Абсолютна похибка **різниці** наближених чисел дорівнює різниці абсолютних похибок доданків із протилежними знаками.

$$x - y \Rightarrow \quad \Delta r = \left(+\Delta_a x\right) - \left(-\Delta_b y\right)$$

$$x - y \Rightarrow -\Delta r = \left(-\Delta_a x\right) - \left(+\Delta_b y\right)$$

3. Абсолютна похибка добутку

$$xy \Rightarrow \Delta\left(xy\right) \approx y \cdot \Delta_a x + x \cdot \Delta_b y,$$

4. Абсолютна похибка частки

$$x / y \Rightarrow \Delta\left(x/y\right) \approx \frac{\Delta_a x}{y} - \frac{x\Delta_b y}{y^2}$$

де $\left|a - x\right| = \Delta_a x$, $\left|b - y\right| = \Delta_b y$,

Відносна похибка суми й різниці

Нехай $\sigma_a x = \dfrac{\pm\Delta_a x}{|a|}$ – відносна похибка наближеного числа x

і $\sigma_b y = \dfrac{\pm\Delta_b y}{|b|}$ – відносна похибка наближеного числа y.

Визначення відносних похибок **суми** й **різниці** наближених чисел x і y через абсолютні похибки операндів:

$$\sigma_+ = \frac{\pm\Delta_a x \pm \Delta_b y}{|x+y|} \qquad \sigma_- = \frac{\pm\Delta_a x \mp \Delta_b y}{|x-y|}$$

Відносна похибка суми

Відносна похибка суми визначається через відносну похибку доданків: $c = a + b \quad \to \quad z = x + y$

$$x = a \pm \Delta_a x = a\left(1 + \frac{\pm\Delta_a x}{a}\right) = a\left(1 \pm \sigma_a x\right)$$

$$y = b \pm \Delta_b y = b\left(1 + \frac{\pm\Delta_b y}{b}\right) = b\left(1 \pm \sigma_b y\right)$$

$$c\left(1 \pm \sigma_c z\right) = a\left(1 \pm \sigma_a x\right) + b\left(1 \pm \sigma_b y\right)$$

Поділимо на $\left(a + b\right)$ ліву та праву частину виразу

$$\left|\frac{c}{a+b}\left(1 \pm \sigma_c z\right)\right| = \left|\frac{a}{a+b}\left(1 \pm \sigma_a x\right)\right| + \left|\frac{b}{a+b}\left(1 \pm \sigma_b y\right)\right|$$

$$\left|\frac{c}{a+b}(1\pm\sigma_c z)\right| = \left|\frac{a}{a+b}(1\pm\sigma_a x)\right| + \left|\frac{b}{a+b}(1\pm\sigma_b y)\right|$$

Справа розкриємо дужки:

$$\frac{c}{a+b}\left(1+\sigma_c z\right) = \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b}\sigma_a x + \frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+b}\sigma_b y$$

Зведемо подібні члени

$$\frac{c}{a+b}\left(1+\sigma_c z\right) = \frac{a+b}{a+b} + \frac{a}{a+b}\sigma_a x + \frac{b}{a+b}\sigma_b y$$

$$\frac{a+b}{a+b}\left(1+\sigma_c z\right) = \frac{a+b}{a+b} + \frac{a}{a+b}\sigma_a x + \frac{b}{a+b}\sigma_b y$$

Скоротимо дроби

$$1+\sigma_c z = 1+\frac{a}{a+b}\sigma_a x + \frac{b}{a+b}\sigma_b y$$

$$\sigma_c z = \frac{a}{a+b}\sigma_a x + \frac{b}{a+b}\sigma_b y$$

Відносна похибка різниці

Відносна похибка різниці визначається виразом:

$$c = a - b \to z = x - y$$

$$x = a \pm \Delta_a x = a\left(1 + \frac{\pm\Delta_a x}{a}\right) = a\left(1 \pm \sigma_a x\right)$$

$$y = b \pm \Delta_b y = b\left(1 + \frac{\pm\Delta_b y}{b}\right) = b\left(1 \pm \sigma_b y\right)$$

$$c\left(1 \pm \sigma_c y\right) = a\left(1 \pm \sigma_a x\right) - b\left(1 \pm \sigma_b y\right)$$

$$\left|\frac{c}{a-b}\left(1 \pm \sigma_c z\right)\right| = \left|\frac{a}{a-b}\left(1 \pm \sigma_a x\right)\right| - \left|\frac{b}{a-b}\left(1 \pm \sigma_b y\right)\right|$$

$$\frac{a-b}{a-b}\left(1 + \sigma_c z\right) = \frac{a-b}{a-b} + \frac{a}{a-b}\sigma_a x - \frac{b}{a-b}\sigma_b y$$

$$\sigma_c z = \frac{a}{a-b}\sigma_a x - \frac{b}{a-b}\sigma_b y$$

Відносні похибки добутку наближених чисел

Очевидно, що наближене число

$$x = a \pm \Delta_a x = a\left(1 + \frac{\pm\Delta_a x}{a}\right) = a\left(1 \pm \sigma_a x\right).$$

Тоді для добутку $c = ab \to z = xy$ одержуємо

$$z = c\left(1 \pm \sigma_c z\right) = xy = ab\left(1 \pm \sigma_a x\right)\left(1 \pm \sigma_b y\right) =$$
$$= ab\left(1 \pm \left(\sigma_a x + \sigma_b y\right) + \sigma_a x \cdot \sigma_b y\right)$$

У практичних розрахунках нехтують малим доданком $\sigma_a x \cdot \sigma_b y$.

Виходячи із цього спрощення, можна сформулювати правила для обчислення відносних похибок добутку й частки.

Відносна похибка добутку наближених чисел дорівнює **сумі** відносних похибок множників: $z = x \cdot y$

$$\sigma_c z = \sigma_a x + \sigma_b y.$$

Відносна похибка частки наближених чисел дорівнює **різниці** відносних похибок діленого й дільника: $z = x/y$

$$\sigma_c z = \sigma_a x - \sigma_b y.$$

Обчислення з строгим врахуванням похибок

Теорема 1. Якщо $a \approx x$, $b \approx y$ з межами абсолютних похибок h_a і h_b, то межа h_{a+b} і межа h_{a-b} наближень $a+b \approx x+y$, $a-b \approx x-y$ обчислюється за формулами:

$$h_{a+b} = h_a + h_b,$$
$$h_{a-b} = h_a - h_b$$

Теорема 2. Якщо $a \approx x$, $b \approx y$ з межами абсолютних похибок h_a і h_b, то межа $h_{a \cdot b}$ і межа $h_{a/b}$ наближень $a \cdot b \approx x \cdot y$, $a/b \approx x/y$ обчислюється за формулами:

$$h_{a \cdot b} = h_a y + h_b x,$$
$$h_{a/b} = \frac{h_a y - h_b x}{y^2}.$$

Теорема 3. Якщо $a \approx x,\, b \approx y,\, b \neq 0,\, y \neq 0$ з межами відносних похибок E_a і E_b, то межі $E_{a \cdot b}$ і $E_{\frac{a}{b}}$ відносних похибок наближень $a \cdot b \approx x \cdot y$, $a/b \approx x/y$ обчислюються за формулами:

$$E_{a \cdot b} = E_a + E_b$$
$$E_{a/b} = E_a - E_b,$$

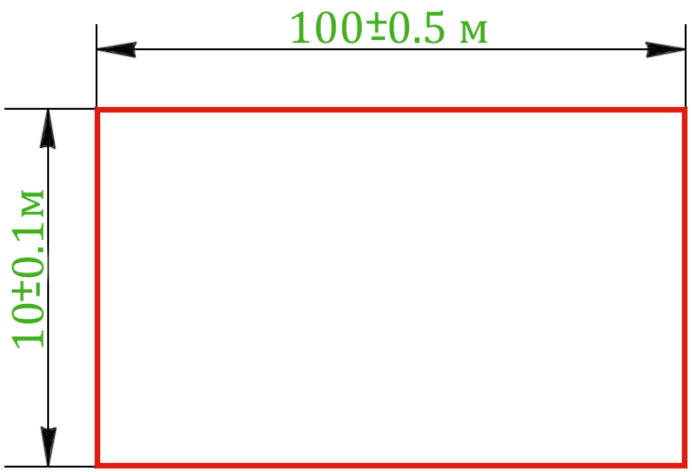
Теорема 4. Якщо $a \approx x$ з межею відносної похибки E_a, то $a^n \approx x^n$ з межею відносної похибки $n \cdot E_a$.

Теорема 5. Якщо $a \approx x$ з межею відносної похибки E_a, то $\sqrt[n]{a} \approx \sqrt[n]{x}$ з межею відносної похибки $1/n \cdot E_a$.

Приклад 1.

Для сторін прямокутника $a = 10$ і $b = 100$ знайдені наближення $x = 10 \pm 0.1$м і $b = 100 \pm 0.5$м. Знайти наближене значення периметра і межі абсолютної і відносної похибок.

Розв’язок.



$$P \approx (a+b) \cdot 2 = (10+100) \cdot 2 = 220 \text{(м)},$$

$$h_p = (h_a + h_b) \cdot 2 = (0.1 + 0.5) \cdot 2 = 1.2 \text{ (м)},$$

$$P = 220 \pm 1.2 \text{ (м)},$$

$$E_p = \frac{h_p}{P} \cdot 100\% = \frac{1.2}{220} \cdot 100\% = 0.0055 \cdot 100\% \approx 0.6\%$$

Приклад 2.

При вимірюванні аудиторії було визначено $x = 12.2 \pm 0.03$м і $y = 1.3 \pm 0.02$м. Знайти площу аудиторії та визначити межі похибок.

Розв'язок.

$$S = a \cdot b = 12.2 \cdot 8.3 = 101.26 \text{ м}^2$$

$$h_S = h_a b + h_b a = 0.03 \cdot 8.3 + 0.02 \cdot 12.2 = 0.493 \ (\text{м}^2)$$

$$S = 101.26 \pm 0.493 \ (\text{м}^2)$$

$$E_a = \frac{h_a}{a} \cdot 100\% = \frac{0.03}{12.2} \cdot 100\% \approx 0.25\%, \quad E_b = \frac{h_b}{b} \cdot 100\% = \frac{0.02}{8.3} \cdot 100\% \approx 0.25$$

$$E_S = E_a + E_b = 0.25\% + 0.25\% = 0.5\%$$

Приклад 2.

В заявці на виготовлення деталі сферичної форми вказаний радіус $r = 2.1 \pm 0.02$ см . Визначити об'єм деталі і вказати межі похибок наближення.

Розв'язок.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad \frac{4}{3} = 1.33 \pm 0.004, \quad \pi = 3.14 \pm 0.002$$

$$V = 1.33 \cdot 3.14 \cdot (2.1)^3 = 38.6757882 \approx 38.68$$

$$E_4 = \frac{0.004}{1.33} \cdot 100\% \approx 0.31, \quad E_\pi = \frac{0.002}{3.14} \cdot 100\% \approx 0.07, \quad E_r = \frac{0.02}{2.1} \cdot 100\% \approx 0.96$$

$$E_V = 0.31 + 0.07 + 3 \cdot 0.96 = 3.25\%$$

$$E_V = 0.0031 + 0.0007 + 0.0096 = 0.0325$$

Оскільки $E_V = \frac{h_v}{V}$, то $h_V = E_V \cdot V = 0.0325 \cdot 38.68 = 1.26$

ЗНАЧУЩА ЦИФРА

Визначення. *Будь-яка цифра числа, записаного в позиційній системі числення, починаючи з першої ліворуч ненульової цифри.*

$$123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0 \qquad 0456 = 0 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

Кількість значущих цифр в числі (S):

$$123 \Rightarrow S = 3,\ 0456 \Rightarrow S = 3,\ 0,3678 \Rightarrow S = 4,\ 1,023 \Rightarrow S = 4.$$

Приклад 1. У числі 0.012030 є останні п'ять цифр. Перші два нулі не є значущими. Вони самі по собі не представляють кількісну величину, а служать для визначення розрядів інших цифр.

Приклад 2. При зображенні цілих чисел, наприклад, числа 456000, нулі праворуч можуть служити як для позначення з.ц., так і для визначення розрядів інших цифр. Щоб уникнути цієї невизначеності, зазначене число слід записати у вигляді $4.56e10^5$, якщо воно має три з.ц., або $4.5600e10^5$, якщо воно має п'ять з.ц.

Правила обчислення без строгого врахування похибок

Правило 1. При додаванні і відніманні наближених чисел з різною кількістю десяткових розрядів результат повинен містити найменшу кількість десяткових розрядів, що виражають останні значущі цифри доданків.

Приклад.

Додавання чисел з різною кількістю значущих цифр:

$$2.366 + 17.25 + 11.563 + 78.345 \approx 109.52$$

Правило 2. При множенні та діленні наближених чисел в результаті потрібно зберігати стільки значущих цифр, скільки їх має те з наближених початкових даних, в якому найменше число надійних значущих цифр.

Приклад. Помножити наближені числа.

$$23.41 \cdot 0.0324 = 0.758484 \approx 0.758$$

Правила підрахунку цифр (за В. М. Брадісом)

Ці правила даються з припущенням, що компоненти дій містять тільки вірні цифри й число дій невелике.

1) При **додаванні й відніманні** наближених чисел у результаті слід зберегти стільки десяткових знаків після коми, скільки їх у наближеному числі, даному **з найменшим числом десяткових знаків після коми**.

$$a = 234{,}341; \quad b = 12{,}23353; \quad a + b = 246{,}574\mathbf{353} \approx 246{,}574$$

$$a = 227{,}34345; \quad b = 10{,}2; \; a - b = 217{,}1\mathbf{4345} \approx 217{,}1$$

2) При **множенні й діленні** в результаті слід зберегти стільки значущих цифр, скільки їх у наближеному числі, даному з **найменшим числом вірних значущих цифр**.

Множення

$a = 45,32;$

$b = 0,098;$

$a \cdot b = 45,32 \cdot 0,098 = 4,4\mathbf{4136}$

$$a \cdot b = 4,4$$

Ділення

$a = 134,234;$

$b = 432,1;$

$a/b = 134,234/432,1 = 0,3106\mathbf{549409858289}$

$$a/b = 0,3107$$

3) При **піднесенні наближеного числа у квадрат** у результаті слід зберегти **стільки значущих цифр, скільки їх у основі степеня**.

$$a = 1,2345; \quad a^2 = 1,52399025; \quad a^2 = 1,5240$$

4) При **добуванні квадратного** й кубічного кореня із наближеного числа в результаті слід зберегти **стільки значущих цифр, скільки їх у підкореневому числі.**

$$a = 675,6; \ \sqrt{a} = \sqrt{675,6} = 25,9923065540555673$$

$$\sqrt{a} = 25,99$$

5) При обчисленні проміжних результатів слід зберегти на одну цифру більше, ніж рекомендують правила 1-4. В остаточному результаті ця «запасна цифра» відкидається.

$$a = 2,345; \ b = 5,1238; \quad (ab)^2 - ? \ ab = 2,345 \cdot 5,1238 = 12,015311$$

$$(12,015)^2 = 144,360225$$

Відкидаємо запасну цифру: $(ab)^2 = 144,4$

6) Якщо дані можна брати з довільною точністю, то **для одержання результату з *m* вірними цифрами** вхідні дані слід брати з таким числом цифр, які згідно з попередніми правилами забезпечують ***m*+1 цифру в результаті**.

Приклад. Скільки потрібно взяти значущих цифр у числах a,b і c, щоб результат обчислення виразу $d=\dfrac{ab}{c}$ мав 4 вірних значущих цифри?

Відповідь

Згідно з пунктом 6 правил Брадиса числа a,b й c повинні мати не менше ніж 5 значущих цифр.

Загальна формула для похибки

Основна задача теорії похибок полягає в наступному:
Якщо відомі похибки аргументів функції,
потрібно
визначити похибку даної функції.
Нехай дана диференційована функція

$$u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

і нехай $\left|\Delta x_i\right| \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$ — абсолютні похибки аргументів функції. Тоді абсолютна похибка функції

$$\left|\Delta u\right| = \left|f\left(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n\right) - f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right|.$$

$$\left|\Delta u\right| \approx \left|du\right| = \left|df\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right|$$

1. Використовуємо визначення диференціала $du = f'(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.

2. На практиці $|\Delta x_i|$ — малі величини, добутками, квадратами й вищими степенями яких можна знехтувати.

Беручи до уваги пункти 1 та 2 запишемо:

$$|\Delta u| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i|.$$

Отже,

$$|\Delta u| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i| \qquad (2)$$

Тепер позначимо через h_{x_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ межі абсолютних похибок аргументів x_i і через h_u – межу похибки функції u.

Тоді межа абсолютної похибки: $$h_u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \cdot h_{x_i} \qquad (3)$$

Для одержання виразу відносної похибки поділимо обидві частини виразу $\left|\Delta u\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \left|\Delta x_i\right|$ на u і, використовуючи табличну формулу $\left(\ln f\left(\mathbf{x}\right)\right)' = f'\left(\mathbf{x}\right)/f\left(\mathbf{x}\right)$ одержим:

$$\sigma_u \le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big/u\right|\left|\Delta x_i\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right|\left|\Delta x_i\right| \quad (4)$$

Отже, межа відносної похибки функції u дорівнює:

$$E_u = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln u\right| \cdot h_{x_i}$$

Приклад. Дано круг радіусом R. Знайти площу круга і визначити межу похибки обчислення за умови, що початкові дані задані в такий спосіб:

$$\pi = 3{,}14 \pm 0{,}0026, \quad R = 1{,}549 \pm 0{,}0005$$

$$h_\pi = \pm 0.0026, \quad h_R = \pm 0.0005$$

Розв'язок. $S = \pi \cdot R^2$, $\quad h_S = \sum_{i=1}^{2} \left| \partial S / \partial x_i \right| \cdot h_{x_i}$ де $x_1 = \pi,\ x_2 = R$

$$h_S = \left| \partial\left(\pi R^2\right) / \partial \pi \right| \cdot h_\pi + \left| \partial\left(\pi R^2\right) / \partial R \right| \cdot h_R$$

$$E_S = \frac{\left| h_S \right|}{S} \approx \frac{h_S}{S}$$

$$h_S = R^2 h_\pi + 2\pi R h_R = 2.3994 \cdot 0.0026 + 9.7277 \cdot 0.0005 =$$

$$= 0.00624 + 0.00486 = 0.0111$$

$$S = \pi \cdot R^2 = 3.14 \cdot 2.399 \approx 7.534$$

$$E_S = \frac{h_S}{S} = \frac{0.0111}{7.534} \cdot 100\% \approx 0{,}147\%$$

Приклад 2. Дано прямокутник ABCD довжиною $L = 15 \pm 0.002$ см і висотою $H = 5 \pm 0.001$ см.

Знайти площу прямокутника. Визначити межу абсолютної похибки h_S і межу відносної похибки E_S таких обчислень.

Розв'язок. $S_{ABCD} = L \cdot H$

$$h_S = \left|\frac{\partial\left(LH\right)}{\partial L}\right| \cdot h_L + \left|\frac{\partial\left(LH\right)}{\partial H}\right| \cdot h_H. \quad E_S = \frac{\left|h_S\right|}{S} \approx \frac{h_S}{S}.$$

$$h_S = Hh_L + Lh_H = 5 \cdot 0.002 + 15 \cdot 0.001 = 0.01 + 0.015 = 0.025.$$

$$S \approx L \cdot H = 5 \cdot 15 = 75. \quad E_S = \frac{h_S}{S} = \frac{0.025}{75} = 0,00033 = 0,033\%.$$

Приклад 3. Дано прямокутник ABCD довжиною $L = 15 \pm 0.002$ см і висотою $H = 5 \pm 0.001$ см. Знайти периметр прямокутника. Визначити межу абсолютної похибки h_P і межу відносної похибки таких обчислень.

Розв'язок.

$$P_{ABCD} = 2L + 2H$$

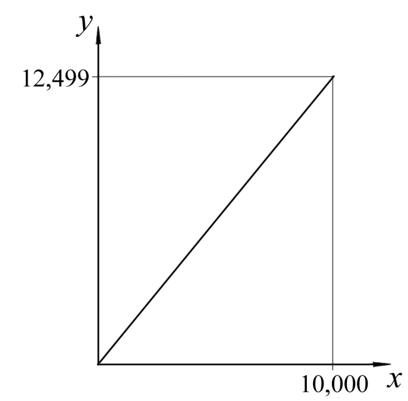
$$h_P = 2\left|\frac{\partial(L+H)}{\partial L}\right| h_L + 2\left|\frac{\partial(L+H)}{\partial H}\right| h_H = 2h_L + 2h_H$$

$$h_P = 2h_L + 2h_H = 2 \cdot 0.002 + 2 \cdot 0.001 = 0.004 + 0.002 = 0.006$$

$$P = 2L + 2H = 2 \cdot 15 + 2 \cdot 5 = 40,\ E_P = \frac{h_P}{P} = \frac{0.006}{40} = 0.015\%$$

Приклад 4. Нехай задано вектор координатами

$$V = (x, y) = (10.000 \pm 0.001,\ 12.499 \pm 0.0012)$$



Визначити величину його модуля.
Визначити межу абсолютної похибки і межу відносної похибки обчислень.

Розв'язок. $m = \sqrt{x^2 + y^2}$, $h_m = \left|\frac{\partial m}{\partial x}\right| h_x + \left|\frac{\partial m}{\partial y}\right| h_h$.

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};\ \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$h_m = \frac{x \cdot h_x + y h_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{10 \cdot 0.001 + 12.499 \cdot 0.0012}{\sqrt{100 + 156}} =$$

$$= \frac{0.01 + 0.0145}{\sqrt{256}} = \frac{0.0245}{16} = 0.0015, \qquad m = \sqrt{100 + 156} = 16$$

$$E_m = \frac{h_m}{m} = \frac{0.0015}{16} \approx 0.01\%$$