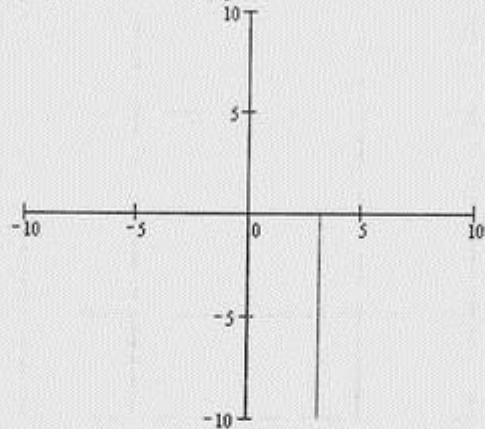


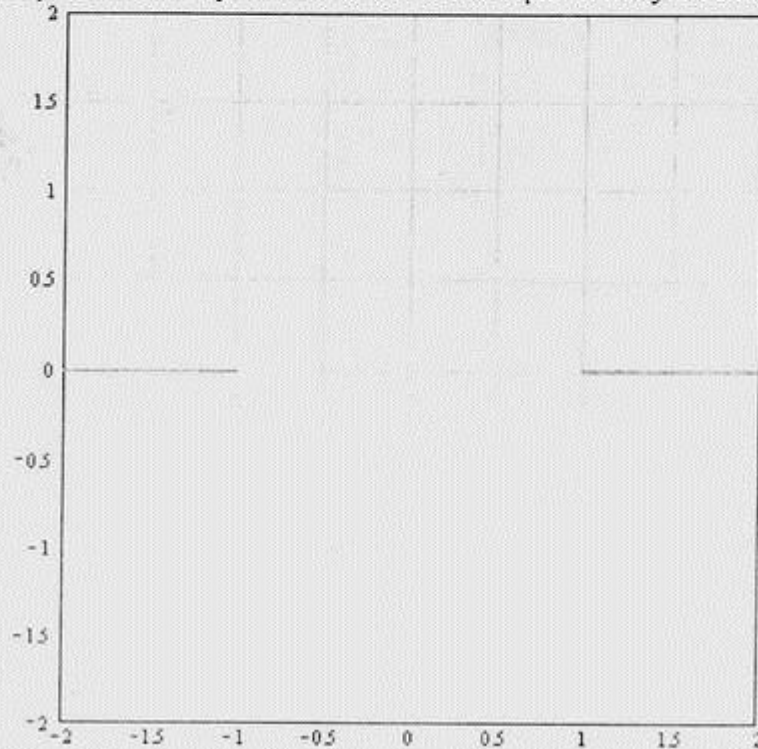
### Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции  $w = f(z)$ .

$w = \cos(z)$ ; полуполоса  $0 < x < \pi, y < 0$ .



Каждая из вертикальных линий в полуполосе преобразуется в кривую, исходящую из точки  $(\cos x; 0)$ . Таким образом отображением полуполосы является вся верхняя полуплоскость:



## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \varphi = \arg z, k = 0, 1, \dots, n-1;$$

### Элементарные функции комплексного переменного

$$z = x + iy$$

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \quad \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i}$$

### Аналитические функции

Функция  $w = f(z)$  называется аналитической в данной точке  $z$ , если она дифференцируема как в самой точке  $z$ , так и в некоторой ее окрестности. Функция  $w = f(z)$  называется аналитической в области  $G$ , если она аналитична в каждой точке  $z \in G$ .

### Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

### Задача 25

Материальная точка массы  $m$  движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат с силой  $F=kx$ , пропорциональной расстоянию. На точку действует сила сопротивления среды  $R=rv$ , пропорциональная скорости  $v$ . При  $t=0$  расстояние точки от начала координат  $x_0$ , а скорость  $v_0$ . Найти закон движения  $x=x(t)$  материальной точки.

$$k = 4m, r = 3m, x_0 = 2m, v_0 = 0.$$

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = kx - rv$$

$$\ddot{x}m - r\dot{x} + kx = 0$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 2$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 0$$

Подставим значения  $k$  и  $r$ :

$$\ddot{x}m - 3m\dot{x} + 4mx = 0$$

Сократим все выражение на  $m$ :

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 4x = 0$$

Перейдем к изображениям функции:

$$p^2 X(p) - px(0) - \dot{x}(0) - 3pX(p) + 3x(0) + 4X(p) = 0$$

$$(p^2 - 3p + 4)X(p) - 2p + 6 = 0$$

$$X(p) = \frac{2p-6}{p^2-3p+4} = \frac{2p-6}{(p-\frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}} = \frac{2p-3}{(p-\frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}} - \frac{6}{\sqrt{7}} \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{(p-\frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = 2e^{3t/2} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} t - \frac{6}{\sqrt{7}} e^{3t/2} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t$$

$$\text{Ответ: } x(t) = 2e^{3t/2} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} t - \frac{6}{\sqrt{7}} e^{3t/2} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t$$

### Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 1 \\ \dot{y} = -\frac{3}{2}x + y \end{cases}$$

$$x(0) = 1, y(0) = 0.$$

Перейдем к изображениям функций  $x$  и  $y$ :

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = -X(p) - 2Y(p) + 1/p \\ pY(p) - y(0) = -\frac{3}{2}X(p) + Y(p) \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = -X(p) - 2Y(p) + 1/p \\ pY(p) = -\frac{3}{2}X(p) + Y(p) \end{cases}$$

Выразим  $X(p)$  через  $Y(p)$ , используя второе уравнение:

$$pY(p) = -\frac{3}{2}X(p) + Y(p) \Rightarrow X(p) = -\frac{2}{3}(p-1)Y(p)$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем  $Y(p)$ :

$$p[-\frac{2}{3}(p-1)Y(p)] - 1 = -[-\frac{2}{3}(p-1)Y(p)] - 2Y(p) + 1/p$$

$$Y(p) = \frac{3+3/p}{2(4-p^2)}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{3+3/p}{2(4-p^2)} = -\frac{3}{4} \frac{2}{p^2-4} - \frac{3}{2} \frac{1}{p} \frac{1}{p^2-4} \rightarrow$$

$$\rightarrow y(t) = -\frac{3}{4} \text{sh} 2t + \frac{3}{8} (1 - \cos 2t) = -\frac{3}{4} \text{sh} 2t + \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \text{ch} 2t$$

Зная  $y(t)$ , найдем  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\frac{3}{2}x + y \Rightarrow x(t) = -\frac{2}{3}(\dot{y} - y) = \\ &= -\frac{2}{3}(-\frac{3}{2} \text{ch} 2t - \frac{3}{4} \text{sh} 2t + \frac{3}{4} \text{sh} 2t - \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \text{ch} 2t) = \frac{3}{4} \text{ch} 2t + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ответ:

$$x(t) = \frac{3}{4} \text{ch} 2t + \frac{1}{4}$$

$$y(t) = -\frac{3}{4} \text{sh} 2t + \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \text{ch} 2t$$



**Задача 22**

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{1}{p^3 + p^2 + p}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^3 + p^2 + p} &= \frac{1}{p(p^2 + p + 1)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + p + 1} = \\ &= \frac{Ap^2 + Ap + A + Bp^2 + Cp}{p(p^2 + p + 1)} = \frac{(A+B)p^2 + (A+C)p + A}{p(p^2 + p + 1)} \end{aligned}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A + C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -1 \end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{1}{p^3 + p^2 + p} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + p + 1} - \frac{1}{p^2 + p + 1}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + p + 1} - \frac{1}{p^2 + p + 1} &= \\ &= \frac{1}{p} - \frac{p}{(p + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{(p + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{p} - \frac{p + \frac{1}{2}}{(p + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(p + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \rightarrow \\ &\rightarrow 1 - e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \end{aligned}$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$1 - e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

**Задача 24**

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y'' - 3y' + 2y = e^t$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Из теории нам известно, что если  $x(t)$  соответствует изображению  $X(p)$ , то  $x'(t)$  соответствует  $p \cdot X(p) - x(0)$ , а  $x''(t)$  соответствует  $p^2 \cdot X(p) - p \cdot x(0) - x'(0)$ . Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2 Y(p) - p y(0) - y'(0) - 3p Y(p) + 3y(0) + 2Y(p) = \frac{1}{p-1}$$

$$p^2 Y(p) - p - 3p Y(p) + 3 + 2Y(p) = \frac{1}{p-1}$$

$$(p^2 - 3p + 2)Y(p) = (p-2)(p-1)Y(p) = \frac{p^2 - 4p + 4}{p-1}$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{p^2 - 4p + 4}{(p-1)(p-2)(p-1)} = \frac{(p-2)^2}{(p-1)(p-2)(p-1)} = \\ &= \frac{p-1-1}{(p-1)^2} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} \end{aligned}$$

Найдем оригинал  $y(t)$ :

$$Y(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} \Rightarrow y(t) = e^t - te^t$$

Ответ:  $y(t) = e^t - te^t$

### Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \lambda x dx = \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \sum_{z_m} \operatorname{rez} R(z) e^{i\lambda z} \right\}, \lambda > 0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем  $z_m$ :

$$x^4 + 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm i; z_{3,4} = \pm 2i;$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$ .

Из этого следует:

$$z_m = \{i; 2i\}$$

Эти особые точки являются простыми полюсами. Найдем в них вычеты:

$$\begin{aligned} 1) \operatorname{rez} R(z) e^{i\lambda z} &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3(z-i)}{(z^2+1)(z^2+4)} e^{iz} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 e^{iz}}{(z+i)(z^2+4)} = \\ &= \frac{-ie^{-1}}{(i+i)(-1+4)} = \frac{-i}{6i} e^{-1} = -\frac{1}{6} e^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \operatorname{rez} R(z) e^{i\lambda z} &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^3(z-2i)}{(z^2+1)(z^2+4)} e^{iz} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^3 e^{iz}}{(z+2i)(z^2+1)} = \\ &= \frac{-8ie^{-2}}{(2i+2i)(-4+1)} = \frac{-8i}{-12i} e^{-2} = \frac{2}{3} e^{-2} \end{aligned}$$

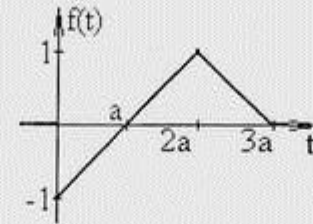
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \sum_{z_m} \operatorname{rez} R(z) e^{i\lambda z} \right\} = \frac{4\pi}{3} e^{-2} - \frac{\pi}{3} e^{-1}$$

Ответ:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \frac{4\pi}{3} e^{-2} - \frac{\pi}{3} e^{-1}$

### Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t-a}{a} & 0 < t < 2a \\ \frac{3a-t}{a}, & 2a < t < 3a \\ 0, & 3a < t \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{t-a}{a} \cdot \eta(t) + \frac{4a-2t}{a} \eta(t-2a) + \frac{t-3a}{a} \eta(t-3a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p) = \frac{1}{ap^2} - \frac{1}{p} + \left( \frac{4}{p} - \frac{2}{ap^2} \right) e^{-2ap} + \left( \frac{1}{ap^2} - \frac{3}{p} \right) e^{-3ap}$$

Ответ:  $F(p) = \frac{1}{ap^2} - \frac{1}{p} + \left( \frac{4}{p} - \frac{2}{ap^2} \right) e^{-2ap} + \left( \frac{1}{ap^2} - \frac{3}{p} \right) e^{-3ap}$



### Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{2} + \sqrt{7} \cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it}; \cos t = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right); \sin t = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right); dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \oint_{|z|=1} F(z) dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{2} + \sqrt{7} \cos t)^2} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{(\sqrt{8} + \frac{\sqrt{7}}{2} (z + \frac{1}{z}))^2} = \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{4zdz}{i(2\sqrt{8}z + \sqrt{7}(z^2 + 1))^2} = \oint_{|z|=1} \frac{4zdz}{i[\sqrt{7}(z - \frac{1-\sqrt{8}}{\sqrt{7}})(z + \frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{7}})]^2} \end{aligned}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$$z = (1 - \sqrt{8})/\sqrt{7}; \quad z = (-\sqrt{8} - 1)/\sqrt{7};$$

Точка  $z = (-\sqrt{8} - 1)/\sqrt{7}$  не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка  $z = (1 - \sqrt{8})/\sqrt{7}$  является полюсом второго порядка.

Вычислим в этой точке вычет:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=(1-\sqrt{8})/\sqrt{7}} f(z) &= \lim_{z \rightarrow (1-\sqrt{8})/\sqrt{7}} \frac{d}{dz} [f(z)(z - (1-\sqrt{8})/\sqrt{7})^2] = \\ &= \lim_{z \rightarrow (1-\sqrt{8})/\sqrt{7}} \frac{d}{dz} \frac{4z}{i[\sqrt{7}(z + (\sqrt{8}+1)/\sqrt{7})]^2} = \frac{4}{7i} \lim_{z \rightarrow (1-\sqrt{8})/\sqrt{7}} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z + (\sqrt{8}+1)/\sqrt{7})^2} = \\ &= \frac{4}{7i} \lim_{z \rightarrow (1-\sqrt{8})/\sqrt{7}} \left[ -7 \frac{z\sqrt{7} - 1 - \sqrt{8}}{(z\sqrt{7} + 1 + \sqrt{8})^3} \right] = -\frac{4}{i} \cdot \frac{1 - \sqrt{8} - 1 - \sqrt{8}}{(1 - \sqrt{8} + 1 + \sqrt{8})^3} = -\frac{4}{i} \cdot \frac{-2\sqrt{8}}{2^3} = \frac{\sqrt{8}}{i} \end{aligned}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1} \frac{4zdz}{i[\sqrt{7}(z - \frac{1-\sqrt{8}}{\sqrt{7}})(z + \frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{7}})]^2} = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z) = 2\pi i \cdot \left( \frac{\sqrt{8}}{i} \right) = 4\pi\sqrt{2}$$

Ответ:  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{2} + \sqrt{7} \cos t)^2} = 4\pi\sqrt{2}$

### Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_m > 0} \operatorname{res} R(z) \quad \begin{array}{l} \text{сумма вычетов берется по всем} \\ \text{полюсам полуплоскости } \operatorname{Im} z > 0 \end{array}$$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(z^2 + 1)dz}{(z^2 + 4z + 13)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(z^2 + 1)dz}{(z + 2 + 3i)^2(z + 2 - 3i)^2}$$

Особые точки:

$$z = -2 + 3i \quad (\operatorname{Im} z > 0); \quad z = -2 - 3i \quad (\operatorname{Im} z < 0)$$

Точка  $z = -2 + 3i$  является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=-2+3i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -2+3i} \frac{d}{dz} [f(z)(z + 2 - 3i)^2] = \\ &= \lim_{z \rightarrow -2+3i} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^2 + 1}{(z + 2 + 3i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow -2+3i} \left[ \frac{2(2z + 3i - 1)}{(z + 2 + 3i)^3} \right] = \frac{7}{54i} \end{aligned}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + 1)dx}{(x^2 + 4x + 13)^2} = 2\pi i \left( \frac{7}{54i} \right) = \frac{7\pi}{27}$$

Ответ:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + 1)dx}{(x^2 + 4x + 13)^2} = \frac{7\pi}{27}$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\oint_{|z+i|=2} \frac{-3\pi i}{e^{\pi z/2} + i} dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$$e^{\pi z/2} + i = 0 \Rightarrow e^{\pi z/2} = -i \Rightarrow \pi z/2 = \ln(-i) = -\pi i/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 4ik - i, k \in \mathbb{Z}$$

Из этих точек только одна охвачена контуром  $|z+i|=2$  и должна приниматься во внимание. Это точка  $z=-i$ , являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res} f_2(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{-3\pi i(z+i)}{e^{\pi z/2} + i} = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем правило} \\ \text{Лопиталя} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{-3\pi i}{\frac{\pi}{2} e^{\pi z/2}} = \frac{-6i}{e^{-\pi i/2}} = \frac{-6i}{-i} = 6$$

Таким образом:

$$\oint_{|z+i|=2} \frac{-3\pi i}{e^{\pi z/2} + i} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f_2(z) = 2\pi i \cdot 6 = 12\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\begin{aligned} & \oint_{|z+i|=2} \left( \frac{2 \sin \frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)} - \frac{3\pi i}{e^{\pi z/2} + i} \right) dz = \\ & = \oint_{|z+i|=2} \left( \frac{2 \sin \frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)} \right) dz + \oint_{|z+i|=2} \left( \frac{-3\pi i}{e^{\pi z/2} + i} \right) dz = \\ & = -\pi i + 12\pi i = 11\pi i \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \oint_{|z+i|=2} \left( \frac{2 \sin \frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)} - \frac{3\pi i}{e^{\pi z/2} + i} \right) dz = 11\pi i$$

### Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - 2\sqrt{3} \sin t}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it}; \cos t = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right); \sin t = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right); dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \oint_{|z|=1} F(z) dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - \sqrt{12} \sin t} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{4 - \frac{\sqrt{12}}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right)} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{4iz - \frac{\sqrt{12}}{2} (z^2 - 1)} = \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{8iz - \sqrt{12}(z^2 - 1)} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{-\sqrt{12}(z - i/\sqrt{3})(z - i\sqrt{3})} \end{aligned}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$$z = i/\sqrt{3}; \quad z = i\sqrt{3};$$

Точка  $i\sqrt{3}$  не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка  $i/\sqrt{3}$  является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(z) &= \lim_{z \rightarrow i/\sqrt{3}} [f(z)(z - i/\sqrt{3})] = \\ &= \lim_{z \rightarrow i/\sqrt{3}} \frac{2}{-\sqrt{12}(z - i\sqrt{3})} = \frac{2}{-\sqrt{12}(i/\sqrt{3} - i\sqrt{3})} = -\frac{i}{2} \end{aligned}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1} \frac{2dz}{-\sqrt{12}(z - i/\sqrt{3})(z - i\sqrt{3})} = 2\pi i \sum_{|z|=1} \operatorname{res} f(z) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{2}\right) = \pi$$

$$\text{Ответ: } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - 2\sqrt{3} \sin t} = \pi$$



### Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z|=2} \underbrace{\frac{\operatorname{sh} \pi z - \pi z}{z^2 \sin^2(\pi z/6)}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции  $z = 6ik$ . Однако в контур попадает только  $z = 0$ . Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sh} \pi z - \pi z}{z^2 \sin^2(\pi z/6)} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad g(z) = \operatorname{sh} \pi z - \pi z, \quad h(z) = z^2 \sin^2(\pi z/6)$$

Определим порядки производных, ненулевых при  $z = 0$ . Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что  $z = 0$  представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} [f(z)z] = \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sh} \pi z - \pi z}{z \sin^2(\pi z/6)} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем пра-} \\ \text{вило Лопиталья} \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{\pi - \pi \operatorname{ch} \pi z}{1 - \cos^2(\pi z/6) + \frac{1}{3} \pi z \sin(\pi z/6) \cos(\pi z/6)} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем пра-} \\ \text{вило Лопиталья} \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{\pi^2 \operatorname{sh} \pi z}{\frac{2}{3} \pi \sin(\pi z/6) \cos(\pi z/6) + \frac{2}{9} \pi^2 \cos^2(\pi z/6) - \frac{1}{18} \pi^2 z} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем пра-} \\ \text{вило Лопиталья} \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{\pi^3 \operatorname{ch} \pi z}{\frac{1}{3} \pi^2 \cos^2(\pi z/6) - \frac{1}{6} \pi^2 - \frac{1}{27} \pi^3 z \cos(\pi z/6) \sin(\pi z/6)} \right) = \frac{\pi^3}{\pi^2/6} = 6\pi \end{aligned}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} \pi z - \pi z}{z^2 \sin^2(\pi z/6)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{res} f(z) = 2\pi i \cdot 6\pi = 12\pi^2 i$$

Ответ:  $\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} \pi z - \pi z}{z^2 \sin^2(\pi z/6)} dz = 12\pi^2 i$

### Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z+i|=2} \left( \frac{2 \sin \frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)} - \frac{3\pi i}{e^{\pi z/2} + i} \right) dz$$

Разобьем этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint_{|z+i|=2} \underbrace{\frac{2 \sin \frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)}}_{f_1(z)} dz + \oint_{|z+i|=2} \underbrace{\frac{-3\pi i}{e^{\pi z/2} + i}}_{f_2(z)} dz$$

Используем вычеты для взятия первого интеграла:

$$\oint_{|z+i|=2} \frac{2 \sin \frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)} dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки:  $z=1-i$  и  $z=3-i$ . При этом точка  $z=3-i$  не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка  $z=1-i$  является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f_1(z) &= \lim_{z \rightarrow 1-i} \frac{d}{dz} \left[ \frac{2 \sin \frac{\pi z}{2-2i} (z-1+i)^2}{(z-1+i)^2(z-3+i)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1-i} \frac{d}{dz} \left[ \frac{2 \sin \frac{\pi z}{2-2i}}{(z-3+i)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1-i} \left[ \frac{(1+i)\pi}{2(z-3+i)} \cos \frac{(1+i)\pi z}{4} - \frac{2}{(z-3+i)^2} \sin \frac{(1+i)\pi z}{4} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\oint_{|z+i|=2} \frac{2 \sin \frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f_1(z) = 2\pi i \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = -\pi i$$

### Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z|=1} \underbrace{\frac{e^{zi} + 2}{\sin 3zi}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции  $f(z)$ :

$$z = i\pi k/3, k \in \mathbb{Z}$$

В рассматриваемую область попадает только точка  $z = 0$ . Точка  $z_1 = 0$  является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} [f(z)(z - 0)] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(e^{zi} + 2)}{\sin 3zi} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(e^{zi} + 2)}{3zi} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{zi} + 2}{3i} = \frac{e^0 + 2}{3i} = \frac{2}{3i} \end{aligned}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{zi} + 2}{\sin 3zi} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^k \operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{2}{3i} = \frac{4}{3} \pi$$

$$\text{Ответ: } \oint_{|z|=1} \frac{e^{zi} + 2}{\sin 3zi} dz = \frac{4}{3} \pi$$

### Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z|=1/3} \underbrace{\frac{4z^5 - 3z^3 + 1}{z^6}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка:  $z = 0$ . Определим тип этой особой точки:

$$\frac{4z^5 - 3z^3 + 1}{z^6} = \frac{4}{z} - \frac{3}{z^3} + \frac{1}{z^6}$$

Считая получившийся результат рядом Лорана по степеням  $z$ , т.е. в окрестности  $z = 0$ , мы приходим к выводу, что точка  $z = 0$  является полюсом 6-го порядка. В соответствии с этим, найдем вычет в данной точке:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=0} f(z) &= \frac{1}{5!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^5}{dz^5} [f(z)z^6] = \frac{1}{120} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^5}{dz^5} \left( \frac{4z^5 - 3z^3 + 1}{1} \right) = \\ &= \frac{1}{120} \lim_{z \rightarrow 0} (480) = \frac{480}{120} = 4 \end{aligned}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{z_i} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint_{|z|=1/3} \frac{4z^5 - 3z^3 + 1}{z^6} dz = 2\pi i \cdot 4 = 8\pi i$$

$$\text{Ответ: } \oint_{|z|=1/3} \frac{4z^5 - 3z^3 + 1}{z^6} dz = 8\pi i$$



### Задача 11

Определить тип особой точки  $z = 0$  для данной функции:

$$f(z) = z^4 \sin\left(\frac{5}{z^2}\right)$$

Тип особой точки для этой функции следует находить, применяя разложение в ряд Лорана в окрестности точки  $z=0$ :

$$f(z) = z^4 \sin\left(\frac{5}{z^2}\right) = z^4 \left( \frac{5}{z^2} - \frac{5^3}{3!z^6} + \frac{5^5}{5!z^{10}} - \dots \right) =$$

$$= 5z^2 - \frac{5^3}{3!z^2} + \frac{5^5}{5!z^6} - \frac{5^7}{7!z^{10}} + \dots$$

Рассмотрим получившийся ряд и выделим главную и правильную части ряда Лорана:

$$f(z) = \underbrace{5z^2}_{\text{правильная часть}} - \underbrace{\frac{5^3}{3!z^2} + \frac{5^5}{5!z^6} - \frac{5^7}{7!z^{10}} + \dots}_{\text{главная часть}}$$

Поскольку главная часть содержит бесконечное число членов, то точка  $z = 0$  для заданной функции  $f(z)$  является существенной особой точкой.

Ответ: Точка  $z = 0$  является существенно особой точкой для заданной функции.

### Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z) = \frac{1}{\sin z^2}$$

Перейдем к новой переменной:

$$t = z^2; f(t) = \frac{1}{\sin t}$$

Эта функция не является аналитической при  $\sin t = 0$ .

Найдем  $t$ , соответствующие этому случаю:

$$\sin t = 0 \Rightarrow t = \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

Запишем данную функцию в виде отношения функций  $g(t)$  и  $h(t)$ :

$$f(t) = \frac{1}{\sin t}; \quad g(t) = 1; \quad h(t) = \sin t;$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при  $t = \pi k$ :

$$g(\pi k) \neq 0$$

$$h(\pi k) = 0$$

$$h'(t) = \cos t; h'(\pi k) \neq 0$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при  $t = \pi k$  выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки  $t = \pi k$  являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при  $t = \pi k$  для функций  $h(t)$  и  $g(t)$ . В данном случае, это  $1 - 0 = 1$ .

$$t = \pi k \Rightarrow z = \sqrt{t} = \sqrt{\pi k}; k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: Точки  $z = \sqrt{\pi k}; k \in \mathbb{Z}$  для данной функции являются полюсами 1-го порядка.

### Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z-z_0$ .

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}, z_0 = 2 + i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} \right)$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_0$ :

$$\frac{1}{z+a} = \frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} - \frac{z^3}{a^4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{(z-z_0)+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-z_0)^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-z_0)+2+2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-z_0)^n}{(2+2i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} \right) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-z_0)^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-z_0)^n}{(2+2i)^{n+1}} \right] = \\ &= \frac{(-1)^n}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{(2+2i)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } f(z) = \frac{(-1)^n}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{(2+2i)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n$$

### Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки  $z_0$ .

$$f(z) = \cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}, z_0 = 2$$

Перейдем к новой переменной  $z' = z - z_0$ .

$$z' = z - 2; \cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2} = \cos \frac{z'^2 + 4}{z'^2} = \cos \left( 1 + \frac{4}{z'^2} \right) = \cos 1 \cos \frac{4}{z'^2} - \sin 1 \sin \frac{4}{z'^2} = f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от  $z'$  в окрестности точки  $z'_0 = 0$ . Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} f(z') &= \cos 1 \cos \frac{4}{z'} - \sin 1 \sin \frac{4}{z'} = \left( 1 - \frac{4^2}{2!z'^2} + \frac{4^4}{4!z'^4} - \frac{4^6}{6!z'^6} + \dots \right) \cos 1 - \\ &- \left( \frac{4}{z'} - \frac{4^3}{3!z'^3} + \frac{4^5}{5!z'^5} - \frac{4^7}{7!z'^7} + \dots \right) \sin 1 = \left( \cos 1 - \frac{4^2 \cos 1}{2!z'^2} + \frac{4^4 \cos 1}{4!z'^4} - \right. \\ &- \frac{4^6 \cos 1}{6!z'^6} + \dots \left. \right) - \left( \frac{4 \sin 1}{z'} - \frac{4^3 \sin 1}{3!z'^3} + \frac{4^5 \sin 1}{5!z'^5} - \frac{4^7 \sin 1}{7!z'^7} + \dots \right) = \\ &= \cos 1 - \frac{4 \sin 1}{z'} - \frac{4^2 \cos 1}{2!z'^2} + \frac{4^3 \sin 1}{3!z'^3} + \frac{4^4 \cos 1}{4!z'^4} - \frac{4^5 \sin 1}{5!z'^5} - \dots \end{aligned}$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки  $z_0 = 2$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos 1 - \frac{4 \sin 1}{z-2} - \frac{4^2 \cos 1}{2!(z-2)^2} + \frac{4^3 \sin 1}{3!(z-2)^3} + \frac{4^4 \cos 1}{4!(z-2)^4} - \\ &- \frac{4^5 \sin 1}{5!(z-2)^5} - \dots \end{aligned}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos 1 - \frac{4 \sin 1}{z-2} - \frac{4^2 \cos 1}{2!(z-2)^2} + \frac{4^3 \sin 1}{3!(z-2)^3} + \frac{4^4 \cos 1}{4!(z-2)^4} - \\ &- \frac{4^5 \sin 1}{5!(z-2)^5} - \dots \end{aligned}$$



### Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z$ .

$$f(z) = \frac{13z - 338}{2z^3 + 13z^2 - 169z}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{13z - 338}{2z^3 + 13z^2 - 169z} = \frac{13(z - 26)}{z(z + 13)(2z - 13)} = \frac{13}{2z} \cdot \frac{z - 26}{(z + 13)(z - 6,5)}$$

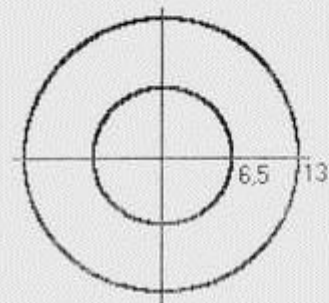
Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

$$\begin{aligned} \frac{z - 26}{(z + 13)(z - 6,5)} &= \frac{A}{z + 13} + \frac{B}{z - 6,5} = \frac{Az - 6,5A + Bz + 13B}{(z + 13)(z - 6,5)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \{A = 2; B = -1\} &\Rightarrow \frac{z - 26}{(z + 13)(z - 6,5)} = \frac{2}{z + 13} - \frac{1}{z - 6,5} \end{aligned}$$

Отсюда  $f(z)$  примет следующий вид:

$$f(z) = \frac{13}{2z} \cdot \left( \frac{2}{z + 13} - \frac{1}{z - 6,5} \right)$$

Особые точки:  $z = 0; z = 6,5; z = -13$



Рассмотрим область  $|z| < 6,5$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{13}{2z} \cdot \left( \frac{2}{z + 13} - \frac{1}{z - 6,5} \right) = \frac{1}{z} \cdot \left[ \frac{1}{1 + \frac{z}{13}} + \frac{1}{1 - \frac{z}{13}} \right] = \\ &= \frac{1}{z} \cdot \left[ \left( 1 - \frac{z}{13} + \frac{z^2}{169} - \frac{z^3}{2197} + \dots \right) + \left( 1 + \frac{z}{13} + \frac{z^2}{169} + \frac{z^3}{2197} + \dots \right) \right] = \\ &= \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{13} + \frac{z}{169} - \frac{z^2}{2197} + \dots \right) + \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{13} + \frac{z}{169} + \frac{z^2}{2197} + \dots \right) \end{aligned}$$

Рассмотрим область  $6,5 < |z| < 13$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{13}{2z} \cdot \left( \frac{2}{z + 13} - \frac{1}{z - 6,5} \right) = \frac{1}{z} \cdot \left[ \frac{1}{1 + \frac{z}{13}} - \frac{13}{2z(1 - \frac{z}{13})} \right] = \\ &= \frac{1}{z} \cdot \left[ \left( 1 - \frac{z}{13} + \frac{z^2}{169} - \frac{z^3}{2197} + \dots \right) + \left( \frac{13}{2z} + \frac{169}{4z^2} + \frac{2197}{8z^3} + \frac{28561}{16z^4} + \dots \right) \right] = \\ &= \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{13} + \frac{z}{169} - \frac{z^2}{2197} + \dots \right) + \left( \frac{13}{2z^2} + \frac{169}{4z^3} + \frac{2197}{8z^4} + \frac{28561}{16z^5} + \dots \right) \end{aligned}$$

Рассмотрим область  $|z| > 13$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{13}{2z} \cdot \left( \frac{2}{z + 13} - \frac{1}{z - 6,5} \right) = \frac{1}{z} \cdot \left[ \frac{13}{z(1 + \frac{13}{z})} - \frac{13}{2z(1 - \frac{13}{z})} \right] = \\ &= \frac{1}{z} \cdot \left[ \left( \frac{13}{z} - \frac{169}{z^2} + \frac{2197}{z^3} - \frac{28561}{z^4} + \dots \right) + \left( \frac{13}{2z} + \frac{169}{4z^2} + \frac{2197}{8z^3} + \frac{28561}{16z^4} + \dots \right) \right] = \\ &= \left( \frac{13}{z^2} - \frac{169}{z^3} + \frac{2197}{z^4} - \frac{28561}{z^5} + \dots \right) + \left( \frac{13}{2z^2} + \frac{169}{4z^3} + \frac{2197}{8z^4} + \frac{28561}{16z^5} + \dots \right) \end{aligned}$$

Ответ:

$$|z| < 6,5: f(z) = \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{13} + \frac{z}{169} - \frac{z^2}{2197} + \dots \right) + \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{13} + \frac{z}{169} + \frac{z^2}{2197} + \dots \right)$$

$$6,5 < |z| < 13: f(z) = \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{13} + \frac{z}{169} - \frac{z^2}{2197} + \dots \right) + \left( \frac{13}{2z^2} + \frac{169}{4z^3} + \frac{2197}{8z^4} + \frac{28561}{16z^5} + \dots \right)$$

$$|z| > 13: f(z) = \left( \frac{13}{z^2} - \frac{169}{z^3} + \frac{2197}{z^4} - \frac{28561}{z^5} + \dots \right) + \left( \frac{13}{2z^2} + \frac{169}{4z^3} + \frac{2197}{8z^4} + \frac{28561}{16z^5} + \dots \right)$$

### Задача 6

Проверить, что  $v$  является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z_0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части  $v(x, y)$  и значению  $f(z_0)$ :

$$v = x^2 - y^2 + 2x + 1$$

$$f(0) = i$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$\begin{aligned} f'(z) &= f'(x + iy) = -2y + 2ix + 2i = 2(ix - y) + 2i = \\ &= 2i(x + iy) + 2i = 2iz + 2i \end{aligned}$$

Т.к. производная существует, то  $v$  является мнимой частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции  $f(z)$ , можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int (2iz + 2i) dz = iz^2 + 2iz + C$$

Определим константу  $C$ :

$$f(0) = i \cdot 0^2 + 2i \cdot 0 + C = i \Rightarrow C = i$$

Итак, аналитическая функция  $f(z)$  выглядит следующим образом:

$$f(z) = iz^2 + 2iz + i$$

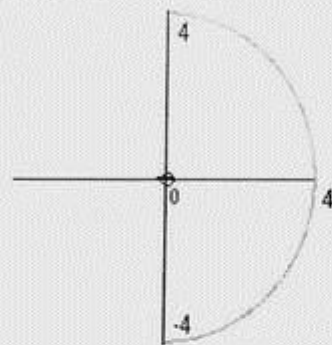
$$\text{Ответ: } f(z) = iz^2 + 2iz + i$$

### Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int_L z \bar{z} dz; L: \{z \mid |z| = 4; \operatorname{Re} z \geq 0\}$$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции  $f(z)$  к функции  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , где  $z = x + iy$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sqrt{x^2 + y^2} (x - iy) = \underbrace{x \sqrt{x^2 + y^2}}_{u(x, y)} + \\ &+ i \underbrace{(-y) \sqrt{x^2 + y^2}}_{v(x, y)} \end{aligned}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-(x^2 + 2y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

Условия Коши-Римана не выполняются, следовательно, функция не является аналитической. Тогда представим кривую, по которой идет интегрирование, в параметрическом виде:

$$z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = \sqrt{16 - t^2}; y(t) = t; z_A = z(-4); z_B = z(4)$$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\begin{aligned} \int_L f(z) dz &= \int_{-4}^4 f[z(t)] z'(t) dt = \int_{-4}^4 4(\sqrt{16 - t^2} - it) \left(i - \frac{t}{\sqrt{16 - t^2}}\right) dt = \\ &= 64i \cdot \arcsin\left(\frac{t}{4}\right) \Big|_{-4}^4 = 64i\pi \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int_L f(z) dz = 64i\pi$$



### Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\operatorname{Arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right)$$

Функция  $\operatorname{Arctg}$  является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$$

Подставим вместо  $z$  значение  $\frac{3+4i}{5}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right) &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+\frac{3i-4}{5}}{1-\frac{3i-4}{5}} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{5+3i-4}{5-3i+4} = \\ &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+3i}{9-3i} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i(1+3i)}{9i+3} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i}{3} \end{aligned}$$

Логарифмическая функция  $\operatorname{Ln}(z)$ , где  $z \neq 0$ , определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i}{3} &= -\frac{i}{2} \left[ \ln \left| \frac{i}{3} \right| + i \left( \arg \left( \frac{i}{3} \right) + 2\pi k \right) \right] = \\ &= -\frac{i}{2} \ln \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left( \arg \left( \frac{i}{3} \right) + 2\pi k \right) \approx \frac{i}{2} \cdot 1,099 + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \end{aligned}$$

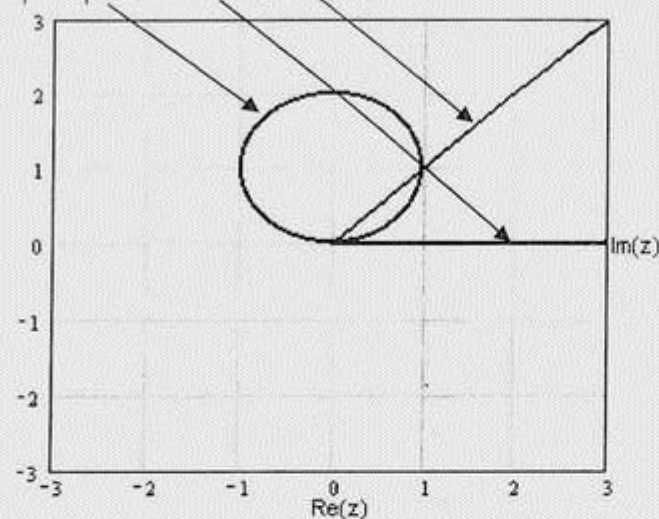
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{Arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right) \approx \frac{i}{2} \cdot 1,099 + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

### Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$$|z-i| \leq 1, \quad 0 < \arg z < \pi/4$$



### Задача 5

Определить вид кривой:

$$z = 2\operatorname{ch} 3t - i3\operatorname{sh} 3t$$

Уравнение вида  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$  определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . В нашем случае:

$$x(t) = 2\operatorname{ch} 3t; \quad y(t) = -3\operatorname{sh} 3t$$

Выразим параметр  $t$  через  $x$  и  $y$ :

$$x = 2\operatorname{ch} 3t \Rightarrow \operatorname{ch} 3t = \frac{x}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{3} \operatorname{arch} \left( \frac{x}{2} \right)$$

$$y = -3\operatorname{sh} 3t \Rightarrow \operatorname{sh} 3t = -\frac{y}{3} \Rightarrow t = -\frac{1}{3} \operatorname{arsh} \left( \frac{y}{3} \right)$$

Получим уравнение кривой в виде  $F(x, y) = 0$ :

$$\frac{1}{3} \operatorname{arch} \left( \frac{x}{2} \right) = -\frac{1}{3} \operatorname{arsh} \left( \frac{y}{3} \right) \Rightarrow \frac{1}{3} \operatorname{arch} \left( \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{3} \operatorname{arsh} \left( \frac{y}{3} \right) = 0$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{3} \operatorname{arch} \left( \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{3} \operatorname{arsh} \left( \frac{y}{3} \right) = 0$$

/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

CreateByVova

### Задача 1

Найти все значения корня:  $\sqrt[4]{16}$

Корень  $n$ -й степени из комплексного числа  $z$  имеет  $n$  разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

$$\varphi = \arg(z); \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad z \neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения  $k$ , найдем все значения корня  $\sqrt[4]{16}$ :

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

$$\sqrt[4]{16} = 2i$$

$$\sqrt[4]{16} = -2$$

$$\sqrt[4]{16} = -2i$$

$$\text{Ответ: } \sqrt[4]{16} = \{2; 2i; -2; -2i\}$$

### Задача 2

Представить в алгебраической форме:  $\text{Ln}(-1 + i)$

Логарифмическая функция  $\text{Ln}(z)$ , где  $z \neq 0$ , определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\text{Ln } z = \ln|z| + i\text{Arg } z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Подставим в эту формулу значения  $z$ :

$$\text{Ln}(-1 + i) = \ln|-1 + i| + i\text{Arg}(-1 + i) =$$

$$= \ln \sqrt{2} + i(\arg(-1 + i) + 2\pi k), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Вычислим значения логарифма и аргумента:

$$\text{Ln}(-1 + i) \approx 0,347 + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Ответ: } \text{Ln}(-1 + i) \approx 0,347 + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$