23. Перетворення Лапласа. Диференціювання оригіналу та зображення. Приклади зображення степеневої функції: t^n,   n є N

Пусть $f(t)$ — действительная функция действительного переменного t (под t будем понимать время или координату).

Функция $f(t)$ называется ***оригиналом***, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.
2. $f(t)$ — кусочно-непрерывная при $t \geqslant 0$, т. е. она непрерывна или имеет точки разрыва I рода, причем на каждом конечном промежутке оси t таких точек лишь конечное число.
3. Существуют такие числа $M > 0$ и $s_0 \geqslant 0$, что для всех t выполняется неравенство $|f(t)| \leqslant M \cdot e^{s_0 t}$, т. е. при возрастании t функция $f(t)$ может возрастать не быстрее некоторой показательной функции. Число s_0 называется ***показателем роста*** $f(t)$.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая интегралом

$$\boxed{F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt.} \qquad (32.1)$$

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют ***преобразованием Лапласа***. Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде $f(x) \risingdotseq F(p)$ или $F(p) \risingdotseq f(x)$ (принято оригиналы обозначать малыми буквами, а их изображения — соответствующими большими буквами).

3. Диференціювання оригіналу. Якщо $f(t)$ є функцією-оригіналом з порядком росту s_0 і функції $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ — також функції-оригінали з порядками росту відповідно $s_1, s_2, \dots, s_n$, то

$$f'(t) \to pF(p) - f(0),$$
$$f''(t) \to pF(p) - (pf(0) + f'(0)),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(t) \to p^n F(p) - (p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)),$$

де $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t), k = \overline{1, n}$.

▶ Доведімо властивість для $n = 1$.

Нехай $f(t) \to F(p)$. Тоді для $\operatorname{Re} p = s > \overline{s} = \max\{s_0, s_1\}$ маємо

$$f'(t) \to \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \left(f(t) e^{-pt}\right)\Big|_{t=0}^{t=+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Якщо $\operatorname{Re} p = s > \overline{s}$, то

$$\left|f(t) e^{-pt}\right| \le M e^{-(s-\overline{s})t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

і

$$f'(t) \to -f'(0) + pF(p). \ ◀$$

З властивості диференціювання оригіналу випливає формула включення:

$$\lim_{\operatorname{Re} p \to +\infty} pF(p) = f(0).$$

▶ Справді,

$$f'(t) = g(t) \to pF(p) - f(0) = G(p) \to 0, \operatorname{Re} p \to +\infty \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{\operatorname{Re} p \to +\infty} pF(p) = f(0). \blacktriangleleft$$

4. Диференціювання зображення. Диференціювання зображення зводиться до помноження на $(-t)$ оригіналу,

$$F^{(n)}(p) \leftarrow (-t)^n f(t).$$

$\blacktriangleright$ Оскільки функція у півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$ є аналітичною, то її можна диференціювати за змінною p. Маємо

$$F'(p) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-pt}dt,$$

$$F''(p) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-pt}dt,$$

....

$$F^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} (-1)^n t^n f(t)e^{-pt}dt. \blacktriangleleft$$

З цієї властивості і зображення одиничної функції Гевісайда можна одержати зображення функції-оригіналу t^n :

$$(-t)^n \cdot 1 \to \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{p^{n+1}} \Leftrightarrow t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Решение: Так как $\mathbf{1} \risingdotseq \dfrac{1}{p}$, то, в силу свойства дифференцирования изображения, имеем $-t \cdot \mathbf{1} \risingdotseq -\dfrac{1}{p^2}$, т. е.

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2}.$$

Далее находим $-t^2 \risingdotseq \left(\dfrac{1}{p^2}\right)'_p = -\dfrac{2}{p^3}$, т. е. $t^2 \risingdotseq \dfrac{2!}{p^3}$. Продолжая дифференцирование, получим

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

С учетом свойства смещения получаем

$$e^{at} \cdot t^n \risingdotseq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

24. Перетворення Лапласа. Інтегрування оригіналу та зображення. Зображення $\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$.

Пусть $f(t)$ — действительная функция действительного переменного t (под t будем понимать время или координату).

Функция $f(t)$ называется ***оригиналом***, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.
2. $f(t)$ — кусочно-непрерывная при $t \geqslant 0$, т. е. она непрерывна или имеет точки разрыва I рода, причем на каждом конечном промежутке оси t таких точек лишь конечное число.
3. Существуют такие числа $M > 0$ и $s_0 \geqslant 0$, что для всех t выполняется неравенство $|f(t)| \leqslant M \cdot e^{s_0 t}$, т. е. при возрастании t функция $f(t)$ может возрастать не быстрее некоторой показательной функции. Число s_0 называется ***показателем роста*** $f(t)$.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая интегралом

$$\boxed{F(p) = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}\cdot dt.} \qquad (32.1)$$

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют ***преобразованием Лапласа***. Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде $f(x) \risingdotseq F(p)$ или $F(p) \risingdotseq f(x)$ (принято оригиналы обозначать малыми буквами, а их изображения — соответствующими большими буквами).

5. Інтегрування оригіналу. Інтегрування оригіналу зводиться до ділення зображення на p: якщо $f(t) \to F(p)$, то

$$\int_0^t f(\xi)d\xi \to \frac{F(p)}{p}.$$

▶ Покладімо

$$\varphi(t) = \int_0^t f(t)dt.$$

Можна показати, що якщо $f(t)$ є функцією-оригіналом, то й $\varphi(t)$ буде функцією-оригіналом, причому $\varphi(0) = 0$. Нехай $\varphi(t) \to \Phi(p)$. Тоді

$$f(t) = \varphi'(t) \to p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(p) = p\Phi(p) \Rightarrow \Phi(p) = \frac{F(p)}{p}. ◀$$

6. Інтегрування зображення. Якщо $f(t) \to F(p)$ й інтеграл $\int\limits_p^{\infty} F(q)dq$ збігається, то він є зображенням функції $\frac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \to \int\limits_p^{+\infty} F(q)dq.$$

$$\blacktriangleright \int\limits_p^{\infty} F(q)dq = \int\limits_p^{\infty} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-qt}dt \right\} dq =$$

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t) \left\{ \int\limits_p^{\infty} e^{-qt}dt \right\} dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt}dt. \blacktriangleleft$$

Решение: Так как $\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}$, то $\frac{\sin t}{t} \doteqdot \int\limits_p^{\infty} \frac{1}{\rho^2+1}\,d\rho = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$, т. е. $\frac{\sin t}{t} \doteqdot \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p$. Применяя свойство интегрирования оригинала, получаем $\int\limits_0^{t} \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \doteqdot \frac{\pi}{2p} - \frac{\operatorname{arctg} p}{p}$. ●

25. Перетворення Лапласа. Теореми про запізнення та зміщення. Зображення ступеневої (східчастої) функції.

Пусть $f(t)$ — действительная функция действительного переменного t (под t будем понимать время или координату).

Функция $f(t)$ называется ***оригиналом***, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.
2. $f(t)$ — кусочно-непрерывная при $t \geqslant 0$, т. е. она непрерывна или имеет точки разрыва I рода, причем на каждом конечном промежутке оси t таких точек лишь конечное число.
3. Существуют такие числа $M > 0$ и $s_0 \geqslant 0$, что для всех t выполняется неравенство $|f(t)| \leqslant M \cdot e^{s_0 t}$, т. е. при возрастании t функция $f(t)$ может возрастать не быстрее некоторой показательной функции. Число s_0 называется ***показателем роста*** $f(t)$.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая интегралом

$$\boxed{F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt.} \qquad (32.1)$$

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют ***преобразованием Лапласа***. Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде $f(x) \doteqdot F(p)$ или $F(p) \doteqdot f(x)$ (принято оригиналы обозначать малыми буквами, а их изображения — соответствующими большими буквами).

7. Запізнення (зміщення оригіналу). Нехай $f(t)$ — оригінал. Тоді $f(t-a), a > 0$ — також є оригіналом з аргументом, який запізнюється на величину a. Графік $f(t-a)$ дістають з графіка $f(t)$ зсувом праворуч на величину a.

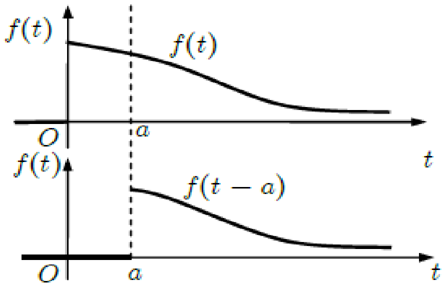

Рис. 16.4. Запізнення оригіналу

Якщо $f(t) \to F(p)$, то для будь-якого додатного a («запізнення»)

$$f(t-a) \to e^{-pa}F(p).$$

► Оскільки $f(t-a) \equiv 0, t < a$, то

$$f(t-a) \to \int_0^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}dt = \int_\tau^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}dt = \left| x = t - a \right| =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(x)e^{-p(x+a)}dx = e^{-pa}\int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx = e^{-pa}F(p). \blacktriangleleft$$

8. Зміщення (зображення). Якщо $f(t) \to F(p)$, то для будь-якого комплексного числа α

$$e^{\alpha t}f(t) \to F(p-\alpha).$$

$$\blacktriangleright\ e^{\alpha t}f(t) \to \int_0^{+\infty} e^{\alpha t}f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-\alpha)t}dt = F(p-\alpha). \blacktriangleleft$$