6. Рівномірно збіжні функціональні ряди. Теореми про неперервність суми та інтегрування рівномірно збіжних функціональних рядів.

Означення 4.3 **(рівномірної збіжності).** Функціональний ряд $\Sigma u_n(x)$ називають *рівномірно збіжним* на множині $D_{\text{рів}}$ до суми $S(x)$,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow$$
$$\left|R_n(x)\right| = \left|S(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon \quad \forall x \in D_{\text{рів}}.$$

$$\boxed{D_{\text{рів}} \subset D \subset X}$$

Використовують позначення

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x), x \in D_{\text{рів}}.$$

Практично рівномірна збіжність ряду означає, що суму ряду $S(x)$ на проміжку $(a;b)$ можна наближено, з наперед заданою точністю, замінити однією і тією самою частковою сумою $S_n(x)$:

$$S(x) \approx S_n(x), x \in (a;b).$$

4.3. Властивості рівномірно збіжних рядів

Властивість 1. Сума членів рівномірно збіжного на деякому проміжку ряду неперервних функцій є функція, неперервна на цьому проміжку.

Властивість 2. Якщо на відрізку $[a;b]$ функціональний ряд $\Sigma u_n(x)$ рівномірно збіжний і члени ряду неперервні на відрізку $[a;b]$, то його можна почленно інтегрувати в межах $(\alpha;\beta)$, де $(\alpha;\beta) \subset [a;b]$:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} u_n(x) dx.$$

Властивість 3. Якщо функціональний ряд $\Sigma u_n(x)$ збіжний на відрізку $[a;b]$, а його члени мають неперервні похідні $u_n'(x), x \in [a;b], n \in \mathbb{N}$, причому ряд $\Sigma u_n'(x)$ рівномірно збіжний на $[a;b]$, то заданий ряд можна почленно диференціювати:

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), x \in [a;b].$$

63.3. Свойства степенных рядов

Сформулируем без доказательства *основные свойства* степенных рядов.

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда (62.3) является непрерывной функцией в интервале сходимости $(-R;R)$.

2. Степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2, можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел R_1 и R_2.

3. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать; при этом для ряда

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (63.3)$$

при $-R < x < R$ выполняется равенство

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1} + \ldots \qquad (63.4)$$

4. Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости; при этом для ряда (63.3) при $-R < a < x < R$ выполняется равенство (см. замечание 1, с. 416)

$$\int\limits_a^x S(t)\,dt = \int\limits_a^x a_0\,dt + \int\limits_a^x a_1 t\,dt + \int\limits_a^x a_2 t^2\,dt + \ldots + \int\limits_a^x a_n t^n\,dt + \ldots \qquad (63.5)$$