Лекція 19. Біноміальні коефіцієнти. Розбиття

19.1. Біном Ньютона

Кількість сполучень C_n^r називають також **біноміальними коефіцієнтами**. Зміст цієї назви встановлює наступна теорема, відома також як формула **бінома Ньютона**.

Теорема 19.1 (біноміальна). Нехай x та y – змінні, n – додатне ціле число. Тоді

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j y^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j .$$

Доведення. Будемо проводити доведення за методом математичної індукції. Доведемо для n=1:

$$(x+y)^1 = x+y = 1x^1y^0 + 1x^0y^1 = C_1^0x^1y^0 + C_1^1x^0y^1 = \sum_{j=0}^{1} C_1^j x^j y^{1-j} .$$

Припустимо, що рівність виконується для n-1 і доведемо її для довільного n.

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1} = (x+y)\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j x^j y^{n-j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} xC_{n-1}^j x^j y^{n-j-1} + \sum_{j=0}^{n-1} yC_{n-1}^j x^j y^{n-j-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j x^{j+1} y^{n-j-1} + \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j x^j y^{n-j} = \sum_{j=1}^{n} C_{n-1}^{j-1} x^j y^{n-j} + \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j x^j y^{n-j} =$$

$$= C_{n-1}^0 x^0 y^n + \sum_{j=1}^{n} (C_{n-1}^{j-1} + C_{n-1}^j) x^j y^{n-j} + C_{n-1}^{n-1} x^n y^0 = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j y^{n-j}.$$

Аналогічно доводиться друга рівність. ►

Наслідок 1. $\sum_{j=0}^{n} C_n^j = 2^n$.

Доведення.

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j 1^j 1^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j . ►$$

Наслідок 2. $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j = 0$.

Доведення.

$$0^n = (-1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^j 1^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j . ►$$

Наслідок 3. $(x-y)^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j x^j y^{n-j}$.

Доведення. Залишаємо читачеві на самостійну роботу. ►

Наприклад, запишемо розклад вигляду $(x+y)^4$. Скориставшись біноміальною теоремою отримаємо:

$$(x+y)^4 = C_4^0x^4y^0 + C_4^1x^3y^1 + C_4^2x^2y^2 + C_4^3x^1y^3 + C_4^4x^0y^4 =$$
$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Біноміальні коефіцієнти мають цілий ряд важливих властивостей, які встановлює наступні теореми.

Теорема 19.2. $\sum_{j=0}^{n} jC_n^j = n2^{n-1}$.

Доведення. Розглянемо наступну послідовність, яка складається з чисел 1,…,n. Спочатку виписані всі підмножини довжиною 0, потім всі підмножини довжиною 1 і т.д. Маємо C_n^j підмножин потужності j, де кожна підмножина має довжину j, таки чином всього в цій послідовності $\sum_{j=0}^{n} jC_n^j$ чисел. З іншого боку, кожне число x входить в цю послідовність $2^{|\{1,...,n\}\setminus\{x\}|} = 2^{n-1}$ разів, а всього чисел n. ►

Теорема 19.3. $C_{n+m}^k = \sum_{j=0}^{k} C_n^j C_m^{k-j}$.

Доведення. C_{n+m}^k - це число способів вибрати k предметів з n+m предметів. Предмети можна вибирати в два прийоми: спочатку вибрати j предметів з перших n предметів, а потім вибрати недостатні k-j предметів з m предметів, які залишились. Звідси загальне число способів вибрати k предметів складає $\sum_{j=0}^{k} C_n^j C_m^{k-j}$.►

З твердження 18.4 $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$ випливає ефективний спосіб рекурентного обчислення значень біноміальних коефіцієнтів, який можна зобразити в графічному способі, відомий як **трикутник Паскаля**.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

В цьому рівносторонньому трикутнику кожне число (окрім одиниць збоку) є сумою двох чисел, які стоять над ним. Число сполучень C_n^r знаходиться в (n+1) рядку на (r+1) місці.

19.2. Поліноміальна теорема

Як узагальнення біному Ньютона розглянемо вираз у вигляді $(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n$. Основний результат сформульовано в наведеній нижче теоремі.

Теорема 19.4 (поліноміальна).

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1\ge 0,\ldots,n_k\ge 0\\ n_1+\ldots+n_k=n}} P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}.$$

Доведення. Запишемо $(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n$ у вигляді добутку n співмножників і розкриємо дужки. Коефіцієнт при $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ дорівнює кількості перестановок із повтореннями таких, що елемент x_1 міститься в кожній з них n_1 разів, x_2 – n_2 разів і т.д., а всього елементів $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. Очевидно, що цей коефіцієнт дорівнює $P_n(n_1,\ldots,n_k)$. ►

Отриману формулу називають **поліноміальною**. Вона, зокрема, дає змогу доводити деякі властивості чисел $P_n(n_1,\ldots,n_k)$. Зазначимо дві з них.

Наслідок 1. Нехай $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1$; тоді

$$\sum_{\substack{n_1\ge 0,\ldots,n_k\ge 0\\ n_1+\ldots+n_k=n}} P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = k^n.$$

Наслідок 2.

$$P_n(n_1, n_2,\ldots,n_k) = P_{n-1}(n_1-1, n_2,\ldots,n_k) + P_{n-1}(n_1, n_2-1,\ldots,n_k) + \ldots + P_{n-1}(n_1, n_2,\ldots,n_k-1).$$

Доведення. Цей вираз отримуємо з теореми 19.4, помноживши обидві частини поліноміальної формули для n-1 на $(x_1+x_2+\ldots+x_k)$ та порівнявши коефіцієнти при однакових доданках. ►

19.3. Задача про цілочислові розв'язки

Цю задачу формулюють так: знайти кількість розв'язків рівняння $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$ у цілих невід'ємних числах, де n – ціле невід'ємне число.

Узявши такі невід'ємні цілі числа $x_1,x_2,\ldots,x_k$, що $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$, можна отримати сполучення з повтореннями з k елементів по n, а саме: елементів першого типу – x_1 одиниць, другого – x_2 одиниць і т.д. Навпаки, якщо є сполучення з повтореннями з k елементів по n, то кількості елементів кожного типу задовольняють рівнянню $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$ у цілих невід'ємних числах. Отже, кількість цілих невід'ємних розв'язків цього рівняння дорівнює

$$\tilde{C}_k^n = C_{n+k-1}^n = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}.$$

Наприклад, знайдемо кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння $x_1+x_2+x_3 = 11$. Безпосереднє використання попередньої формули дає:

$$\tilde{C}_3^{11} = C_{3+11-1}^{11} = C_{13}^{11} = \frac{13!}{11!\cdot 2!} = 78.$$

Кількість розв'язків рівняння $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$ у цілих невід'ємних числах можна визначити й тоді, коли на змінні накладено певні обмеження.

Наприклад, знайдемо кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння $x_1+x_2+x_3 = 11$ за умов $x_1\geq 1$, $x_2\geq 2$, $x_3\geq 3$. Очевидно, що ця задача еквівалентна рівнянню $x_1+x_2+x_3 = 5$ без обмежень. Справді, потрібно взяти щонайменше один елемент першого типу, два елементи другого типу, три елементи третього типу – разом 1 + 2 + 3 = 6 елементів; отже, 11 – 6 = 5 елементів залишається для довільного вибору,

$$\tilde{C}_3^{5} = C_{3+5-1}^{5} = C_{7}^{5} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = 21.$$

Визначимо кількість розв'язків нерівності $x_1+x_2+x_3 \leq 11$ у цілих невід'ємних числах. Уведемо допоміжну змінну x_4, яка може набувати цілих невід'ємних значень і перейдемо до еквівалентної задачі: визначити кількість розв'язків рівняння $x_1+x_2+x_3+x_4=11$ у цілих невід'ємних числах. Отже,

$$\tilde{C}_4^{11} = C_{4+11-1}^{11} = C_{14}^{11} = \frac{14!}{11!\cdot 3!} = 364.$$

19.4. Розбиття. Числа Стірлінга другого роду та числа Белла

Пригадаємо означення розбиття множини з лекції 1 (означення 1.10). Сукупність множин $A_1, A_2, ..., A_n$ називається **розбиттям** множини A, якщо $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ = A та $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall i\neq j$. Підмножини $A_1, A_2, ..., A_n$ множини A називаються **блоками розбиття**.

Наприклад, якщо A={a,b,c}, то є такі розбиття цієї множини на k не порожніх частин:

k=1: {{a,b,c}} (одне розбиття);

k=2: {{a,b},{c}}, {{a,c},{b}}, {{b,c},{a}} (три розбиття);

k=3: {{a}, {b}, {c}} (одне розбиття).

Означення 19.1. Кількість розбиттів n-елементної множини на k-блоків називається **числом Стірлінга другого роду** і позначається Φ(n,k). За означенням встановимо:

Φ(n, 0) = 0 при n>0?

Φ(n, n) = 1,

Φ(0, 0) = 1,

Φ(n, k) = 0 при k>n.

Теорема 19.5. Φ(n, k) = Φ(n-1, k-1) + k·Φ(n-1, k).

Доведення. Довільне розбиття множини A на k не порожніх частин можна отримати так:

- із розбиття множини $A\backslash\{a_n\}$ на (k-1) непорожню частину додаванням підмножини $\{a_n\}$ – кількість дорівнює Φ(n-1, k-1);
- із розбиття множини $A\backslash\{a_n\}$ на k непорожніх частин додаванням до однієї з цих частин елемента a_n (це можна зробити k способами) – кількість дорівнює k·Φ(n-1, k).

Звідси випливає, що Φ(n, k) = Φ(n-1, k-1) + k·Φ(n-1, k) ►

За допомогою цієї теореми можна побудувати таблицю для чисел Φ(n,k).

n \ k	1	2	3	4	5	6	…
1	1						…
2	1	1					…
3	1	3	1				…
4	1	7	6	1			…
5	1	15	25	10	1		…
6	1	31	90	65	15	1	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Теорема 19.6 (без доведення). $\Phi(n,k) = \sum_{j=k-1}^{n-1} C_{n-1}^{j} \cdot \Phi(j,k-1)$.

Означення 19.2. Кількість усіх розбиттів n-елементної множини називають **числом Белла** і позначають Φ(n). За означенням:

$$\Phi(n) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(n,k).$$

Теорема 19.7 (без доведення). $\Phi(n+1) = \sum_{j=0}^{n} C_{n}^{j} \cdot \Phi(j)$.