Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут”

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Частина II
Аналітична геометрія на площині та в просторі

Лекції 9–11

Викладач - к. ф.-м. н., асистент
Руновська Марина Костянтинівна

2012

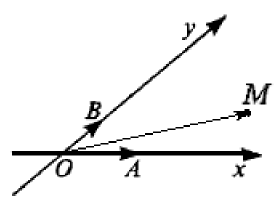
Тема 3. Аналітична геометрія на площині та в просторі

9 Система координат на площині. Рівняння лінії (кривої) на площині. Пряма на площині, різні види її рівняння

9.1 Система координат на площині.

Під системою координат на площині розуміють спосіб, що дозволяє чисельно описати положення точки на площині.

Розглянемо два неколінеарні вектори, які прикладені до спільного початку — точки O. Будь-якій точці M площини AOB поставимо у відповідність вектор $\overrightarrow{OM}$, який називають радіусом-вектором точки M.



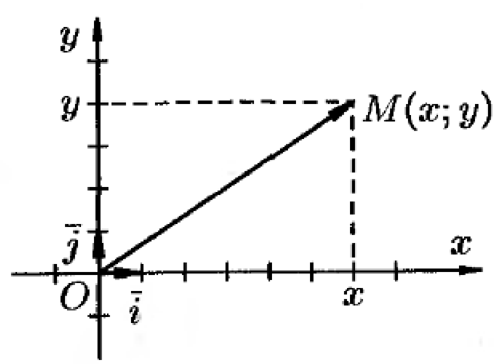
Оскільки вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM}$ компланарні, то існує єдина пара чисел (x, y) така, що $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$. Сукупність точки і двох неколінеарних прикладених до неї векторів дають змогу ввести систему координат на площині: кожній точці M площини ставиться у відповідність єдина пара (x, y) така, що $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$. Числа x та y називають координатами точки M. І навпаки, для кожної пари чисел (x, y) існує єдина точка площини з такими координатами. Вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ задають орієнтовані прямі (прямі з вибраним напрямом), які називають *осями координат*, а точку їх перетину O — *початком координат.* Якщо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ мають різну довжину, або $\overrightarrow{OA}$ не перпендикулярний до $\overrightarrow{OB}$, то таку систему координат називають *загальною афінною.*

Площина, в якій задано систему координат, називають *координатної площиною.*

Найбільш зручними для застосування є прямокутна система координат та полярна система координат.

Прямокутна (декартова) система координат на площині

Прямокутна система координат задається точкою O — початок координат, та двома взаємно перпендикулярними одиничними векторами $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ та $\overrightarrow{j} = (0, 1)$, які визначають осі координат — *вісь абсцис* Ox, та *вісь ординат* Oy.



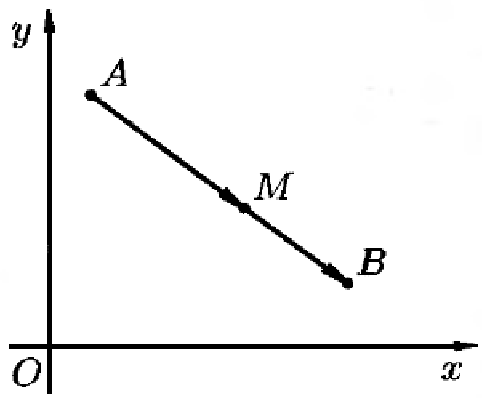
Зазвичай вісь абсцис розташована горизонтально і направлена зліва направо, а вісь ординат вертикально і направлена зверху вниз. Осі координат поділяють площину на чотири області, що називаються *чвертями* або *квадрантами*.

Розглянемо довільну точку M площини Oxy. Координатами точки M у системі координат Oxy називаються координати її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Якщо $\overrightarrow{OM} = (x, y)$, то координати точки M записують $M(x, y, z)$, причому число x називається *абсцисою* точки M, а число y — *ординатою* точки M. Ці два числа x і y повністю визначають положення точки на площині.

Відстань між двома точками у декартовій системі координат. Відстань d між точками $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$ на площині дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, тобто

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Поділ відрізка у заданому відношенні у декартовій системі координат. Нехай відрізок AB, що з'єднує точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ потрібно поділити у заданому відношенні $\lambda > 0$, тобто знайти координати точки $M(x, y)$ відрізка AB такої, що $\frac{AM}{MB} = \lambda$.



Розглянемо вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MB}$. Оскільки точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}.$$

Але $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1) = (x - x_1)\overrightarrow{i} + (y - y_1)\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{MB} = (x_2 - x, y_2 - y) = (x_2 - x)\overrightarrow{i} + (y_2 - y)\overrightarrow{j}$. Тому

$$(x - x_1)\overrightarrow{i} + (y - y_1)\overrightarrow{j} = \lambda(x_2 - x)\overrightarrow{i} + \lambda(y_2 - y)\overrightarrow{j}.$$

Звідси випливає, що

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \quad \text{і} \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y),$$

звідки

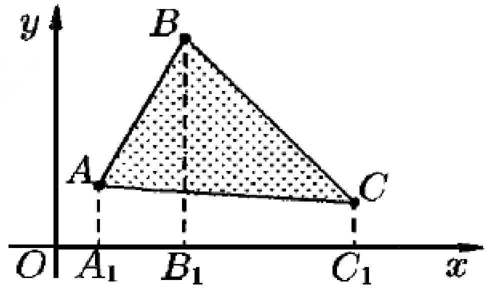
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad \text{і} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{9.1}$$

Формули (9.1) називаються *формулами поділу відрізка у заданому відношенні.*

Зокрема, якщо $\lambda = 1$, тобто $AM = MB$, то формули (9.1) набувають вигляду: $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ і $y = \frac{y_1+y_2}{2}$. В цьому випадку точка M є серединою відрізка AB.

Зауважимо також, що у випадку $\lambda = 0$ точки A та M співпадають. Якщо $\lambda < 0$, то точка M лежить зовні відрізка AB. В останньому випадку кажуть, що точка M ділить відрізок зовнішнім чином.

Площа трикутника у декартовій системі координат. Нехай на координатній площині задано три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Знайдемо площу S трикутника ABC. Для цього проведемо з вершин A, B та C трикутника ABC перпендикуляри AA_1, BB_1 і CC_1 на вісь Ox відповідно.



Очевидно, $S_{ABC} = S_{AA_1B_1B} + S_{B_1BCC_1} - S_{A_1ACC_1}$. Тому

$$S_{ABC} = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_2) - \frac{y_1 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big((y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)\Big) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Отже,

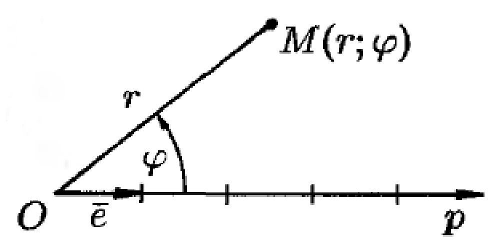
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} abs\left(\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}\right),$$

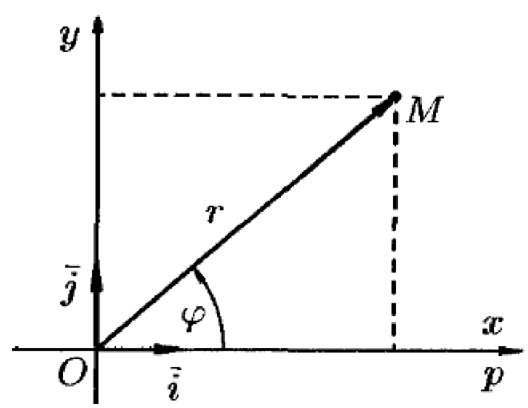
де через abs позначено абсолютну величину числа. Зауважимо, що випадок $S_{ABC} = 0$ означає, що точки A, B та C лежать на одній прямій.

Полярна система координат

Полярна система координат задається початком відліку — точкою O, що називається *полюсом*, і віссю Op, яка називається полярною віссю, з вибраним на ній ортом $\overrightarrow{e}$.

Розглянемо на площині точку M, яка не співпадає з точкою O. Положення точки M однозначно визначається двома числами — відстанню r точки M до полюса O та кутом φ, який утворює відрізок OM з віссю Op. Відлік кутів ведеться у напрямку проти годинникової стрілки.





Числа r та φ називаються *полярними координатами* точки M. Записують це так: $M(r, \varphi)$. При цьому r називається *полярним радіусом* точки M, а φ — *полярним кутом*.

Зрозуміло, що для отримання всіх точок площини достатньо вважати, що $-\pi < \varphi \leq \pi$ (або $0 \leq \varphi < 2\pi$), а $0 \leq r < \infty$. В цьому випадку кожній точці M площини відповідає єдина пара чисел (r, φ) і навпаки, кожній парі чисел (r, φ) відповідає єдина точка M площини.

Встановимо зв'язок між декартовими та полярними системами координат. З малюнка видно, що декартові координати (x, y) точки M виражаються через полярні координати (r, φ) наступним чином:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi, \\ y = r \cdot \sin\varphi. \end{cases}$$

Полярні координати (r, φ) точки M виражаються через декартові координати (x, y) наступним чином:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

При визначенні кута φ слід враховувати чверть, де знаходить точка M, та те, що $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Приклад 9.1. У декартовій системі координат задана точка $M(-1, -\sqrt{3})$. Визначити її полярні координати.

Знайдемо r та $\operatorname{tg}\varphi$:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}.$$

Звідси випливає, що $\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Точка $M(-1, -\sqrt{3})$ знаходиться у третій чверті, а значить $n = -1$, і $\varphi = \frac{\pi}{3} - \pi = \frac{-2\pi}{3}$. Отже, точка M має такі полярні координати: $r = 2$, $\varphi = \frac{-2\pi}{3}$.

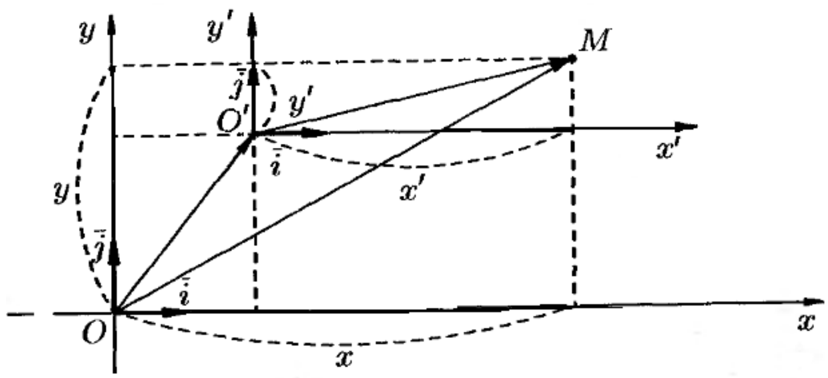
9.2 Перетворення системи координат.

Перехід від однієї системи координат до іншої називається перетворенням системи координат.

Паралельний перенос системи координат

Нехай на площині задана прямокутна декартова система координат Oxy. Під паралельним переносом осей координат розуміють перехід від системи координат Oxy до системи координат $Ox'y'$, при якому змінюється положення початку координат, а напрям та маштаб осей залишається незмінним.

Нехай новий початок координат — точка O' має у старій системі координат Oxy координати (x_0, y_0), тобто $O'(x_0, y_0)$.



Нехай (x, y) — координати довільної точки M у старій системі координат Oxy, а (x', y') — координати цієї точки у новій системі координат $Ox'y'$.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{OO'} = x_0\overrightarrow{i} + y_0\overrightarrow{j}$, і $\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$. Оскільки $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, то

$$x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = (x_0 + x')\overrightarrow{i} + (y_0 + y')\overrightarrow{j}.$$

Звідси

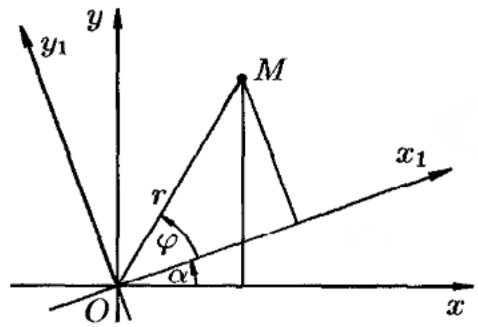
$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

Отримані формули дозволяють знаходити старі координати x, y за новими x', y', і навпаки.

Поворот системи координат

Під поворотом осей координат розуміють таке перетворення координат, при якому обидві осі повертаються на один і той самий кут, а початок координат та маштаб залишаються незмінними.

Нехай нова система координат Ox_1y_1 отримується поворотом системи координат Oxy на кут α. Нехай (x, y) — координати довільної точки M у старій системі координат Oxy, а (x_1, y_1) — координати цієї точки у новій системі координат Ox_1y_1. Позначимо довжину відрізка $|OM| = r$. Зауважимо, що вона є однаковою для обох систем координат. Нехай також φ — кут, який утворює вектор $\overrightarrow{OM}$ з віссю Ox_1 (у новій системі координат).



Тоді

$$\begin{cases} x = r\cos(\alpha + \varphi), \\ y = r\sin(\alpha + \varphi), \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi, \\ y = r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi. \end{cases}$$

Але $r\cos\varphi = x_1$, а $r\sin\varphi = y_1$. Тому

$$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha, \\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha. \end{cases}$$

Отримані формули називаються *формулами повороту осей*. Вони дозволяють визначити старі координати (x, y) точки M за новими координатами (x_1, y_1) цієї ж точки M, і навпаки.

9.3 Рівняння лінії (кривої) на площині.

Лінією (кривою) на площині називається сукупність точок (геометричне місце точок), які мають певну спільну властивість.

Нехай на площині введена прямокутна система координат Oxy.

Означення 9.1. *Рівнянням кривої* на площині називається рівняння з двома змінними $F(x, y) = 0$, яке задовольняють всі точки $M(x, y)$ кривої, і не задовольняють всі точки, що не належать цій кривій.

Якщо у заданій системі координат рівняння кривої відоме, то це дає можливість досліджувати геометричні властивості кривої та її форму.

Для того, щоб з'ясувати, чи лежить точка $A(x_0, y_0)$ на кривій, достатньо підставити координати цієї точки у рівняння кривої $F(x, y) = 0$. Якщо при цьому рівняння перетвориться на тотожність, тобто $F(x_0, y_0) = 0$, то точка A належить кривій, інакше ($F(x_0, y_0) \neq 0$) точка A не належить кривій.

Для того, щоб знайти точки перетину двох кривих, заданих своїми рівняннями $F_1(x, y) = 0$ і $F_2(x, y) = 0$, необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Якщо ця система не має розв'язків, то криві не перетинаються.

Криву на площині можна задавати за допомогою двох рівнянь:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{9.2}$$

де x та y — координати довільної точки $M(x, y)$ кривої, а t — змінна, що називається параметром. Параметр t визначає положення кожної точки $M(x, y)$ кривої на площині Oxy. Таке задання кривої на площині називається *параметричним*. Для того, щоб перейти від параметричного задання кривої до рівняння типу $F(x, y) = 0$, потрібно з якогось із двох рівнянь виключити змінну t. Проте, не завжди це доцільно робити, і не завжди це можна зробити.

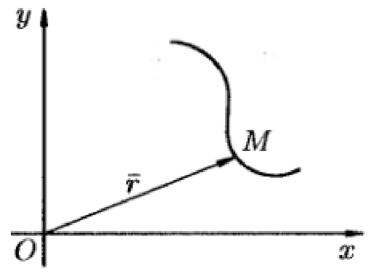
Приклад 9.2. Нехай на площині Oxy задано криву параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = t + 1, \\ y = t^2. \end{cases}$$

Параметру $t = 3$ відповідає точка кривої $(4, 9)$.

Перейдемо від параметричного задання кривої до рівняння $F(x, y) = 0$. З першого рівняння $t = x - 1$. Підставимо цей вираз замість t у друге рівняння: $y = (x - 1)^2$. Таким чином, $(x - 1)^2 - y = 0$.

Лінію на площині можна задати також *векторним рівнянням* $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, де t — скалярний параметр. Кожному значенню параметра t_0 відповідає радіус-вектор $\overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{r}(t_0)$. При зміні значення параметра t, кінець радіус-вектора буде описувати на площині криву.



Векторному рівнянню лінії $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ у системі координат Oxy відповідають два скалярних рівняння (9.2), тобто рівняння проекцій на осі координат векторного рівняння лінії є її параметричні рівняння.

Векторне рівняння кривої та її параметричні рівняння мають механічний зміст. Якщо точка рухається по площині, то вказані рівняння називаються рівняннями руху, а крива — траєкторією точки. При цьому параметр t — це час.

Якщо на площині задана полярна система координат, то рівняння кривої можна задати у полярній системі координат. Рівняння $f(r, \varphi) = 0$ називається *рівнянням даної кривої у полярній системі координат*, якщо всі точки $M(r, \varphi)$ кривої, і тільки вони, задовольняють це рівняння.

Отже, кожній кривій на площині відповідає рівняння $F(x, y) = 0$, і навпаки, кожному рівнянню $F(x, y) = 0$ відповідає якась крива на площині, властивості якої визначаються її рівнянням.

В аналітичній геометрії на площині виникають *дві основні задачі*:

1) знаючи геометричні властивості кривої, знайти її рівняння;

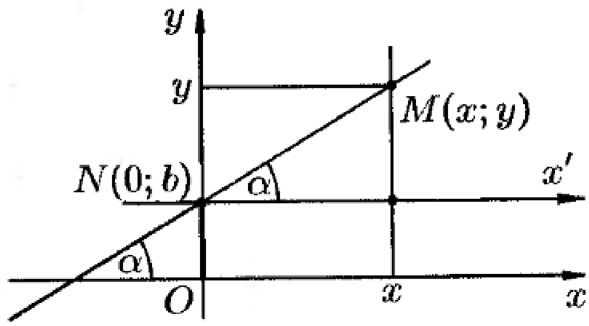
2) за відомим рівнянням кривої $F(x, y) = 0$ вивчити її властивості та форму.

9.4 Пряма на площині. Різні види її рівняння.

Найпростішою лінією на площині є пряма. Вона задається алгебраїчним рівнянням першого порядку відносно змінних x і y. Розглянемо різні види її рівняння.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Нехай на площині Oxy задана пряма, не паралельна осі Oy. Її положення на площині однозначно визначається двома параметрами: ординатою точки $N(0, b)$ перетину з віссю Oy та кутом α між віссю Ox та прямою.

Розглянемо на прямій довільну точку $M(x, y)$. Проведемо через точку N вісь Nx', паралельну та співнаправлену з віссю Ox. Зрозуміло, що кут між прямою та віссю Nx' дорівнює α. У системі координат $Nx'y$ точка M має координати x та $y - b$.



Із означення тангенса кута випливає, що $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y-b}{x}$, тобто $y = \operatorname{tg}\alpha x + b$. Позначимо $\operatorname{tg}\alpha = k$. Таким чином, ми отримали рівняння

$$y = kx + b, \tag{9.3}$$

якому задовольняють всі точки $M(x, y)$ прямої.

Число $\operatorname{tg}\alpha = k$ називається *кутовим коефіцієнтом* прямої, а рівняння (9.3) — *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.*

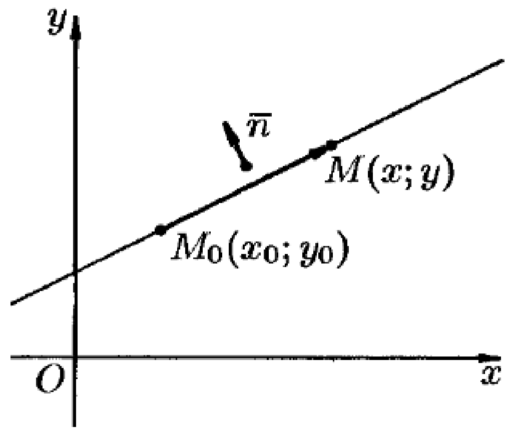
Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$, тобто $y = kx$. Якщо пряма проходить паралельно осі Ox, то $\alpha = 0$, а отже, $y = b$. Якщо пряма паралельна осі Oy, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$, і кутовий коефіцієнт k не існує. В цьому випадку рівняння прямої буде мати вигляд: $x = a$, де a — точка перетину прямої з віссю Ox.

Розглянемо поняття ***пучка прямих***. Нехай пряма на площині проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k. Рівняння цієї прямої запишемо як рівняння з кутовим коефіцієнтом: $y = kx + b$. Знайдемо коефіцієнт b з умови, що пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$. Підставляючи координати точки M_0 у рівняння прямої, матимемо $y_0 = kx_0 + b$, звідки $b = y_0 - kx_0$. Підставляючи значення b у рівняння $y = kx + b$, отримаємо $y = kx + y_0 - kx_0$, тобто

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{9.4}$$

Рівняння (9.4) при різних значеннях k називають *рівнянням пучка прямих* з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Загальне рівняння прямої. Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно даному ненульовому вектору $\overrightarrow{n} = (A, B)$. Для цього розглянемо на прямій довільну точку $M(x, y)$ і складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$.



Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M}$ та $\overrightarrow{n}$ перепендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Таким чином, ми отримали рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно даному ненульовому вектору $\overrightarrow{n} = (A, B)$. Покладаючи у цьому рівнянні $C = -Ax_0 - By_0$, отримаємо рівняння

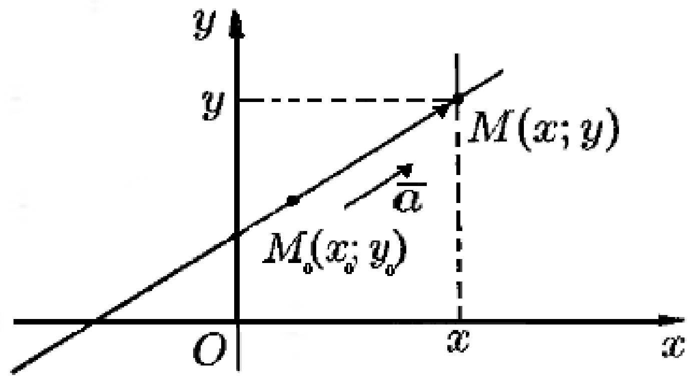
$$Ax + By + C = 0, \tag{9.5}$$

яке називається *загальним рівнянням прямої.* Вектор $\overrightarrow{n} = (A, B)$ називається *нормальним вектором прямої.*

Від загального рівняння легко перейти до рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Дійсно, якщо $B \neq 0$, то рівняння (9.5) можна переписати наступним чином: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. А це рівняння є рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом $k = -\frac{A}{B}$. Якщо ж $B = 0$, то рівняння (9.5) набуває вигляду: $Ax + C = 0$, причому $A \neq 0$, звідки $x = -\frac{C}{A}$. Останнє рівняння є рівнянням прямої, що паралельна осі Oy і проходить через точку $(-\frac{C}{A}, 0)$.

Зокрема, якщо $A = 0$, то $y = -\frac{C}{B}$, тобто пряма паралельна осі Ox. Якщо $C = 0$, то $Ax + By = 0$, тобто пряма проходить через початок координат $O(0, 0)$.

Канонічне рівняння прямої. Нехай відомо, що пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ у напрямку вектора $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y)$ прямої. Складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$.



Зрозуміло, що вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{a}$. Звідси впливає, що координати векторів $\overrightarrow{M_0M}$ та $\overrightarrow{a}$ пропорційні. Тому

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}.$$

Таким чином, ми отримали рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\overrightarrow{a}$. Це рівняння називається *канонічним рівнянням прямої*, а вектор $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$ називається *напрямним вектором* прямої.

Розглянемо два частинних випадки. Нехай $a_x = 0$. Тоді вектор $\overrightarrow{a}$ паралельний осі $0y$, звідки випливає, що пряма паралельна цій осі. Отже, рівняння прямої буде мати вигляд: $x = x_0$. Нехай тепер $a_y = 0$. Тоді вектор $\overrightarrow{a}$ паралельний осі $0x$, звідки випливає, що пряма паралельна цій осі. Отже, рівняння прямої буде мати вигляд: $y = y_0$.

Параметричне рівняння прямої. З канонічного рівняння випливає, що

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = t.$$

Виражаючи з цього рівняння змінні x та y, отримаємо рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t, \end{cases}$$

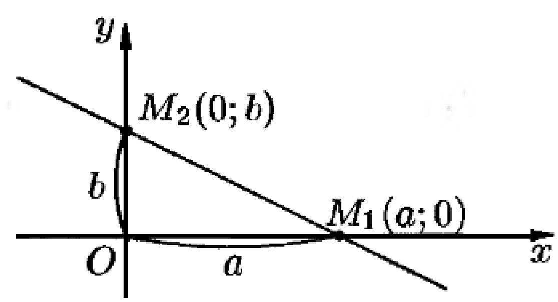
яке називається *параметричним рівнянням*.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Нехай пряма проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y)$ прямої. Складемо два вектори $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$ та $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Очевидно, вектори $\overrightarrow{M_1M}$ та $\overrightarrow{M_1M_2}$ колінеарні. Звідси випливає, що їх координати пропорційні. Тому

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{9.6}$$

Таким чином, ми отримали рівняння прямої, що проходить через дві точки. В цьому рівнянні, якщо $x_2 = x_1$, то пряма паралельна осі ординат і її рівняння має вигляд: $x = x_1$. Якщо $y_2 = y_1$, то пряма паралельна осі абсцис і її рівняння має вигляд: $y = y_1$.

Рівняння прямої "у відрізках". Нехай пряма перетинає вісь Ox у точці $M_1(a, 0)$, а вісь Oy — у точці $M_2(0, b)$.

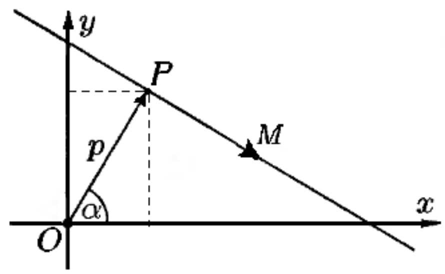


Тоді рівняння (9.6) приймає вигляд: $\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}$, тобто

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{9.7}$$

Рівняння (9.7) називається *рівнянням прямої "у відрізках"*, оскільки числа a та b показують, які відрізки відтинає пряма від координатних осей.

Нормальне рівняння прямої. Нехай на площині задано пряму. Припустимо, що відомий кут α, який утворює перпендикуляр, опущений з початку координат $O(0, 0)$ на цю пряму, та довжина цього перпендукуляра p ($p \geq 0$), тобто відстань від початку координат до прямої. Ці два параметри однозначно визначають розташування прямої на площині. Знайдемо її рівняння.



Нехай точка P є основою перпендикуляра, опущеного з точки $O(0,0)$ на пряму. Тоді $\overrightarrow{OP} = (p\cos\alpha, p\sin\alpha)$, і точка P має координати $P(p\cos\alpha, p\sin\alpha)$. Розглянемо довільну точку $M(x,y)$ на прямій і складемо вектор $\overrightarrow{PM} = (x - p\cos\alpha, y - p\sin\alpha)$. Помітимо, що вектор $\overrightarrow{PM}$ перпендикулярний вектору $\overrightarrow{OP}$, звідки випливає, що їх скалярний добуток дорівнює нулю. Отже,

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{OP} = (x - p\cos\alpha)\cos\alpha + (y - p\sin\alpha)\sin\alpha = 0.$$

Таким чином, отримали рівняння

$$\cos\alpha x + \sin\alpha y - p = 0, \tag{9.8}$$

яке називається *нормальним рівнянням* прямої.

Розглянемо, як із загального рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ можна перейти до її нормального рівняння (9.8). Помножимо рівняння $Ax + By + C = 0$ на $\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, якщо $C < 0$, і на $\lambda = \frac{-1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, якщо $C > 0$. Покладаючи $\lambda C = -p$, отримаємо рівняння

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y - p = 0,$$

де $p > 0$. Оскільки $(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1$, то числа λA та λB є відповідно косинусом та синусом одного і того самого кута. Покладемо $\lambda A = \cos\alpha$ і $\lambda B = \sin\alpha$. Тоді рівняння нашої прямої набуває вигляду:

$$\cos\alpha x + \sin\alpha y - p = 0.$$

Отже, ми звели загальне рівняння прямої $Ax+By+C = 0$ до нормального вигляду. Підкреслимо, що множник $\lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ називається нормуючим множником.

Приклад 9.3. Звести загальне рівняння прямої $-3x + 4y + 15 = 0$ до нормального рівняння. Оскільки $C = 15 > 0$, то нормуючим множником буде число

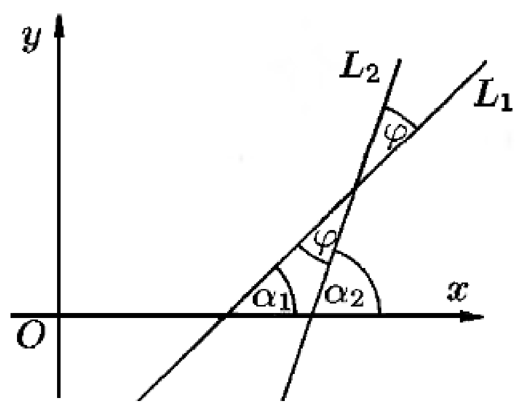
$\lambda = \frac{-1}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} = \frac{-1}{5}$. Помноживши загальне рівняння $-3x+4y+15=0$ на нормуючий множник, отримаємо шукане рівняння:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0.$$

Отже, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, а відстань від початку координат до прямої дорівнює $p = 3$.

9.5 Основні задачі для прямої на площині.

Кут між прямими. Нехай прямі L_1 та L_2 задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом $y = k_1x + b_1$, та $y = k_2x + b_2$, відповідно. Знайдемо кут φ між прямими L_1 та L_2, тобто кут, на який потрібно повернути у додатному напрямку пряму L_1 навколо точки перетину прямих L_1 та L_2 до співпадіння з прямою L_2.



Позначимо через α_1 та α_2 кути, що утворюють прямі L_1 та L_2 з віссю Ox відповідно, тобто $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ і $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$. Оскільки $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, то, якщо $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},$$

звідки легко знайти кут φ.

Для того, щоб знайти гострий кут між прямими, не досліджуючи взаємне розташування прямих, праву частину останньої рівності беруть по модулю, тобто

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

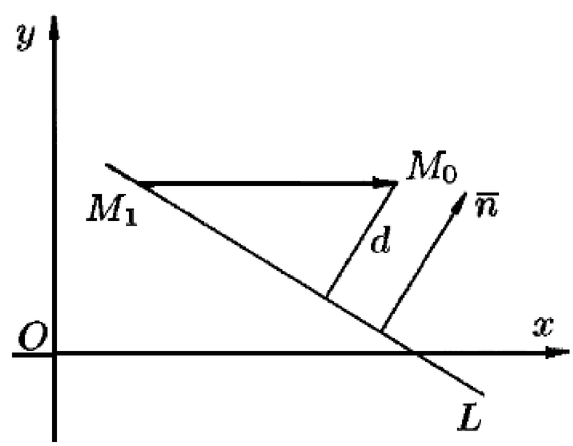
Умови паралельності та перпендикулярності прямих. З'ясуємо умову паралельності прямих L_1 та L_2, заданих рівняннями з кутовим коефіцієнтом $y = k_1x + b_1$, та $y = k_2x + b_2$, відповідно. Очевидно, прямі L_1 та L_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли $\varphi = 0$, тобто $\operatorname{tg}\varphi = 0$. Остання рівність еквівалентна тому, що $k_1 = k_2$. Отже, *дві прямі паралельні тоді і тільки тоді, коли вони мають рівні кутові коефіцієнти.*

З'ясуємо умову перпендикулярності прямих L_1 та L_2, заданих рівняннями з кутовим коефіцієнтом $y = k_1x + b_1$, та $y = k_2x + b_2$, відповідно. Прямі L_1 та L_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тобто $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1} = 0$. Остання рівність еквівалентна тому, що $1 + k_1k_2 = 0$. Звідси випливає, що *дві прямі перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх кутові коефіцієнти зв'язані співвідношенням* $k_1k_2 = -1$.

Розглянемо умови паралельності та перпендикулярності прямих L_1 та L_2, заданих загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ відповідно. Якщо прямі L_1 та L_2 паралельні, то їх нормальні вектори $\overrightarrow{n}_1 = (A_1, B_1)$ і $\overrightarrow{n}_2 = (A_2, B_2)$ колінеарні, тобто $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Якщо прямі L_1 та L_2 перпендикулярні, то їх нормальні вектори $\overrightarrow{n}_1 = (A_1, B_1)$ і $\overrightarrow{n}_2 = (A_2, B_2)$ також перпендикулярні. Звідси випливає, що $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Відстань від точки до прямої. Нехай пряма L задана своїм загальним рівнянням $Ax+By+C = 0$, і задана деяка точка площини $M_0(x_0, y_0)$. Знайдемо відстань від точки M_0 до прямої L.



Відстань d від точки M_0 до прямої L дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, де точка $M_1(x_1, y_1)$ — довільна точки прямої L, на напрям нормального вектора

$\overrightarrow{n} = (A, B)$ прямої L. Таким чином,

$$d = |\text{пр}_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{M_1 M_0}| = \left| \frac{\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|} \right| =$$

$$= \left| \frac{(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \frac{\left| Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1 \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

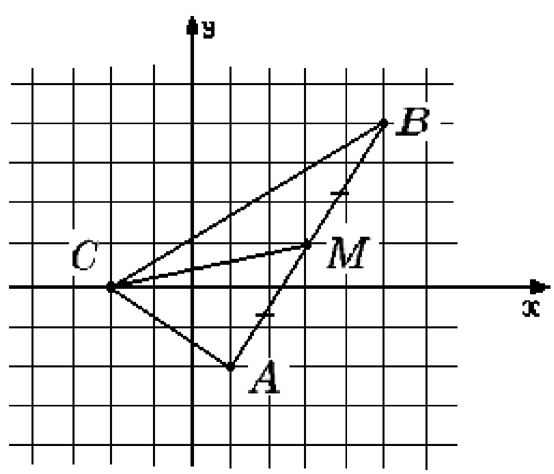
Оскільки точка $M_1(x_1, y_1)$ належить прямій L, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, звідки $-Ax_1 - By_1 = C$. Тому

$$d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Остання формула є формулою відстані від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$.

Розглянемо приклад.

Приклад 9.4. Дано вершини трикутника ABC: $A(1, -2)$, $B(5, 4)$, $C(-2, 0)$. Скласти рівняння сторони AB трикутника, рівняння бісектриси AL, рівняння висоти BN, рівняння медіани CM, рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно AB. Знайти довжину висоти BN.



Складемо рівняння прямої, на якій лежить сторона трикутника AB, як рівняння прямої, що проходить через дві точки.

$$AB: \quad \frac{x - 1}{5 - 1} = \frac{y + 2}{4 + 2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - 1}{4} = \frac{y + 2}{6},$$

звідки

$$AB: \quad 3x - 2y - 7 = 0.$$

Складемо рівняння бісектриси AL. Для цього знайдемо координати точки L, використовуючи властивість бісектриси трикутника: $\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Оскільки $|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{52}$, і $|AC| = \sqrt{(-2-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{13}$, то $\lambda = \frac{|BL|}{|LC|} = 2$. За формулами поділу відрізка у заданому відношенні:

$$x_L = \frac{x_B + \lambda x_C}{1 + \lambda} = \frac{1}{3}, \quad y_L = \frac{y_B + \lambda y_C}{1 + \lambda} = \frac{4}{3},$$

звідки $L(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$. Таким чином, рівняння прямої, на якій лежить бісектриса внутрішнього кута при вершині A трикутника ABC:

$$AL: \quad \frac{x-1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{y+2}{\frac{4}{3} + 2} \quad \Leftrightarrow \quad 5x + y - 3 = 0.$$

Перед тим як скласти рівняння висоти BN, складемо рівняння прямої, на якій лежить сторона AC, як рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$AC: \quad \frac{x-1}{-2-1} = \frac{y+2}{0+2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{2},$$

звідки

$$AC: \quad 2x + 3y + 4 = 0.$$

Тепер складемо рівняння прямої, на якій лежить висота BN, як рівняння прямої перпендикулярної AC, що проходить через точку B. Оскільки вектор $\overrightarrow{n} = (2, 3)$ — нормальний вектор прямої AC, то він є напрямним вектором прямої BN. Тому шукане рівняння висоти

$$BN: \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2y - 7 = 0.$$

Бачимо, що пряма, на якій лежить висота BN, співпадає з прямою, на якій лежить сторона AB. Таким чином, точка N співпадає з точкою A, а кут при вершині A — прямий.

Обчислимо довжину висоти BN за формулою відстані від точки до прямої:

$$d = \frac{\left|2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4\right|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}.$$

Для того, щоб скласти рівняння прямої, на якій лежить медіана CM трикутника, знайдемо координати точки M за формулами середини відрізка AB:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1.$$

Тому рівняння медіани

$$CM: \quad \frac{x+2}{3+2} = \frac{y-0}{1-0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{5} = \frac{y}{1},$$

звідки

$$CM: \quad x - 5y + 2 = 0.$$

Нарешті, складемо рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно стороні AB. Оскільки паралельні прямі мають колінеарні нормальні вектори, то нормальний вектор $\overrightarrow{n} = (3, -2)$ прямої AB можна вважати також нормальним вектором шуканої прямої. Тоді за рівнянням прямої, що проходить через задану точку $C(-2, 0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n} = (3, -2)$, рівняння шуканої прямої матиме вигляд:

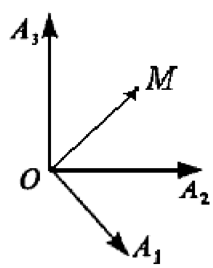
$$3(x+2) - 2(y-0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2y + 6 = 0.$$

10 Система координат у просторі. Рівняння поверхні і лінії у просторі. Площина в просторі, різні види її рівняння.

10.1 Система координат у просторі.

Під системою координат у просторі розуміють спосіб, що дозволяє чисельно описати положення будь-якої точки простору.

Аналогічно тому, як вводилась система координат на площині, введемо систему координат у просторі. Зафіксуємо впорядковану трійку некомпланарних векторів, прикладених до спільної точки O: $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$.



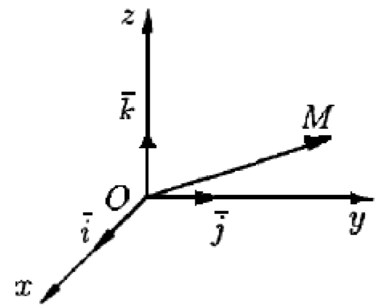
Будь-якій точці M простору поставимо у відповідність вектор $\overrightarrow{OM}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ утворюють базис, то існує єдина трійка чисел (x, y, z) така, що $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA_1} + y\overrightarrow{OA_2} + z\overrightarrow{OA_3}$.

Сукупність точки та трьох некомпланарних векторів задає систему координат у просторі: кожній точці M простору ставиться у відповідність єдина трійка чисел (x, y, z) така, що $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA_1} + y\overrightarrow{OA_2} + z\overrightarrow{OA_3}$. Числа x, y та z називають координатами точки M. І навпаки, для кожної трійки чисел (x, y, z) існує єдина точка простору з такими координатами. Вектори $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ задають орієнтовані прямі — осі, які називають *осями координат.*

Найбільш зручною для застосування є прямокутна система координат.

Прямокутна (декартова) система координат у просторі

Прямокутна система координат у просторі задається точкою O — початок координат, та трьома взаємно перпендикулярними одиничними векторами $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$ та $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$, які визначають осі координат — *вісь абсцис* Ox, *вісь* *ординат* Oy, та *вісь аплікат* Oz. Осі координат поділяють простір на вісім областей, що називаються *октантами*.



Розглянемо довільну точку M простору із заданою прямокутною системою координат $Oxyz$. Координатами точки M у системі координат $Oxyz$ називаються координати її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Якщо $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, то координати точки M записують $M(x, y, z)$, число x називається *абсцисою* точки M, число y — *ординатою* точки M, z — *аплікатою* точки M. Три числа x, y, z повністю визначають положення точки у просторі.

Відстань між двома точками у декартовій системі координат. Відстань d між точками $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$ у просторі дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, тобто

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Поділ відрізка у заданому відношенні у декартовій системі координат. Нехай відрізок AB, що з'єднує точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ потрібно поділити у заданому відношенні $\lambda > 0$, тобто знайти координати точки $M(x, y, z)$ відрізка AB такої, що $\frac{AM}{MB} = \lambda$.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MB}$. Оскільки точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}.$$

Але $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = (x - x_1)\overrightarrow{i} + (y - y_1)\overrightarrow{j} + (z - z_1)\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{MB} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z) = (x_2 - x)\overrightarrow{i} + (y_2 - y)\overrightarrow{j} + (z_2 - z)\overrightarrow{k}$. Тому

$$(x - x_1)\overrightarrow{i} + (y - y_1)\overrightarrow{j} + (z - z_1)\overrightarrow{k} = \lambda(x_2 - x)\overrightarrow{i} + \lambda(y_2 - y)\overrightarrow{j} + \lambda(z_2 - z)\overrightarrow{k}.$$

Звідси випливає, що

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z),$$

тобто

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{10.1}$$

Формули (10.1) називаються *формулами поділу відрізка у заданому відношенні.*

Зокрема, якщо $\lambda = 1$, тобто $AM = MB$, то формули (10.1) набувають вигляду: $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$, $z = \frac{z_1+z_2}{2}$. В цьому випадку точка M є серединою відрізка AB.

10.2 Рівняння поверхні і лінії у просторі.

Рівняння поверхні у просторі. Поверхні у просторі, як правило, можна розглядати як геометричне місце точок, які задовольняють деякій умові. Наприклад, сфера радіуса R з цетром в точці O_1 є геометричним місцем всіх точок простору, які знаходяться від точки O_1 на відстані R.

Прямокутна система координат $Oxyz$ дозволяє встановити взаємно однозначну відповідність між точками простору і трійками чисел x, y, z — їх координатами. Властивість, спільна для всіх точок поверхні, можна записати у вигляді рівняння, яке зв'язує координати всіх точок поверхні.

Означення 10.1. *Рівнянням даної поверхні* в прямокутній системі координат $Oxyz$ називається таке рівняння $F(x, y, z) = 0$ з трьома невідомими x, y, z, якому задовольняють координати кожної точки, що лежить на поверхні, і не задовольняють координати точок, що не лежать на поверхні.

Рівняння поверхні дозволяє вивчення геометричних властивостей поверхонь замінити дослідженням її рівняння. Наприклад, для того, щоб дізнатися, чи лежить точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на даній поверхні, достатньо підставити координати точки M_1 у рівняння поверхні замість змінних: якщо координати задовольняють рівняння, то точка лежить на поверхні, в протилежному випадку —- точка не лежить на поверхні.

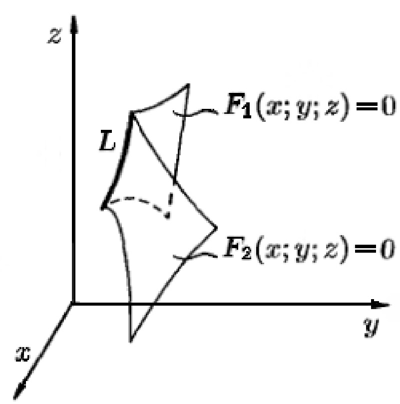
Рівняння лінії (кривої) у просторі. Лінію у просторі можна розглядати, як лінію перетину двох поверхонь або як геометричне місце точок, спільних для двох поверхонь.

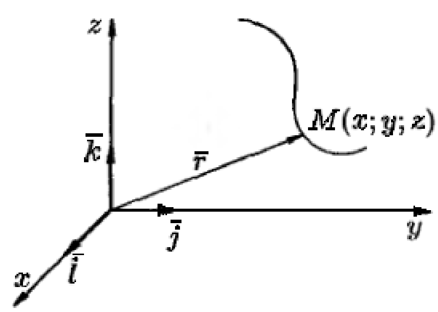
Якщо $F_1(x, y, z) = 0$ і $F_2(x, y, z) = 0$ —- рівняння двох поверхонь, які визначають лінію l, то координати точок цієї лінії задовольняють системі двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Ці рівняння називають рівнянням лінії у просторі. Наприклад, $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ – рівняння осі Ox.

Лінію у просторі можна розглядати як траєкторію руху точки. В цьому випадку її задають *векторним рівнянням* $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, де t — скалярний параметр. Кожному значенню параметра t_0 відповідає радіус-вектор $\overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{r}(t_0)$. При зміні значення параметра t, кінець радіус-вектора буде описувати у просторі криву.





Криву у просторі можна задавати за допомогою трьох рівнянь:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

де x, y та z — координати довільної точки $M(x, y, z)$ кривої, а t — змінна, що називається параметром. Параметр t визначає положення кожної точки $M(x, y, z)$ кривої у просторі $Oxyz$. Таке задання кривої у просторі називається *параметричним.*

Отже, поверхню у просторі можна задати аналітично або геометрично. Звідси випливають дві основні задачі аналітичної геометрії у просторі:

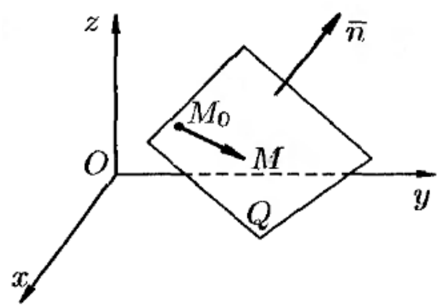
1) Задана поверхня як геометричне місце точок. Знайти рівняння цієї поверхні.

2) Задано рівняння поверхні $F(x, y, z) = 0$. Дослідити форму та геометричні властивості цієї поверхні.

10.3 Площина в просторі, різні види її рівняння.

Найпростішою поверхнею у просторі є площина. Вона задається алгебраїчним рівнянням першого порядку відносно змінних x, y, z. Площину у просторі можна задавати різними способами. Розглянемо їх.

Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Нехай у просторі з введеною прямокутною системою координат $Oxyz$ задано площину Q. Нехай відомо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через яку проходить площина, та вектор, перпендикулярний до площини $\overrightarrow{n}(A, B, C)$.



Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка площини. Складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\overrightarrow{n}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. Звідси отримуємо *рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n}(A, B, C)$*:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{10.2}$$

Вектор $\overrightarrow{n}(A, B, C)$ називається *нормальним вектором площини.*

Для заданої точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ простору та довільних дійсних чисел A,B, C рівняння (10.2) є рівнянням площини. Сукупність всіх площин, що проходять через задану точку, називається зв'язкою площин, а рівняння (10.2) рівнянням зв'язки площин.

Загальне рівняння площини. Перепишемо рівняння площини (10.2) наступним чином: $Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$. Покладемо $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$. Отримаємо рівняння першого порядку відносно змінних x, y, z:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{10.3}$$

яке називається *загальним рівнянням площини.*

Розглянемо частинні випадки рівняння (10.3):

1) Якщо $D = 0$, то рівняння (10.3) матиме вигляд $Ax + By + Cz = 0$. Це рівняння задовольняє точка $O(0, 0, 0)$. Таким чином, площина проходить через початок координат O.

2) Якщо $C = 0$, то рівняння (10.3) матиме вигляд $Ax + By + D = 0$. Вектор $\overrightarrow{n}(A, B, 0)$ є нормальним вектором цієї площини. Він перпендикулярний осі Oz. Таким чином, площина паралельна осі Oz. Аналогічно, якщо $A = 0$, то площина паралельна осі Ox, а якщо $B = 0$, то площина паралельна осі Oy.

3) Якщо $C = D = 0$, то площина $Ax + By = 0$ проходить через початок координат і паралельна осі Oz, тобто площина проходить через вісь Oz. Аналогічно, площина $Ax + Cz = 0$ проходить через вісь Oy, а площина $By + Cz = 0$ проходить через вісь Oz.

4) Якщо $A = B = 0$, то рівняння (10.3) матиме вигляд $Cz + D = 0$, тобто $z = \frac{-D}{C}$. В цьому випадку площина паралельна координатній площині Oxy. Якщо при цьому $D = 0$, тобто $z = 0$, то площина співпадає з координатною площиною Oxy. Аналогічно, площина $Ax + D = 0$ паралельна координатній площині Oyz, а якщо і $D = 0$, тобто $x = 0$, то задана площина співпадає з координатною площиною Oyz. Аналогічно, площина $By + D = 0$ паралельна координатній площині Oxz, а якщо $D = 0$, тобто $y = 0$, то задана площина співпадає з координатною площиною Oxz.

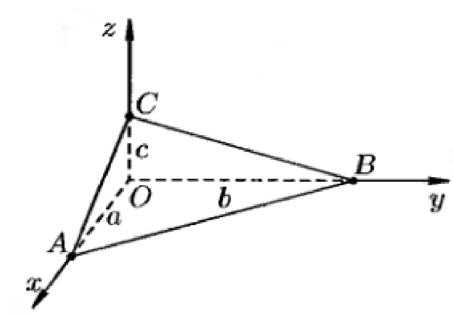
Рівняння площини, що проходить через три точки. Три точки, що не належать одній прямій однозначно визначають площину. Знайдемо рівняння площини Q, що проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не належать одній прямій.

Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка площини. Складемо три вектори $\overrightarrow{M_1M} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$. Ці вектори лежать в одній площині, а отже вони компланарні. Звідси випливає, що їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто $(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$. Таким чином,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{10.4}$$

Рівняння (10.4) є *рівнянням площини, що проходить через три точки.*

Рівняння площини "у відрізках". Нехай площина Q відтинає від координатних осей відрізки a, b, c відповідно, тобто проходить через точки $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$.



Підставляючи координати цих точок у рівняння (10.4), отримаємо

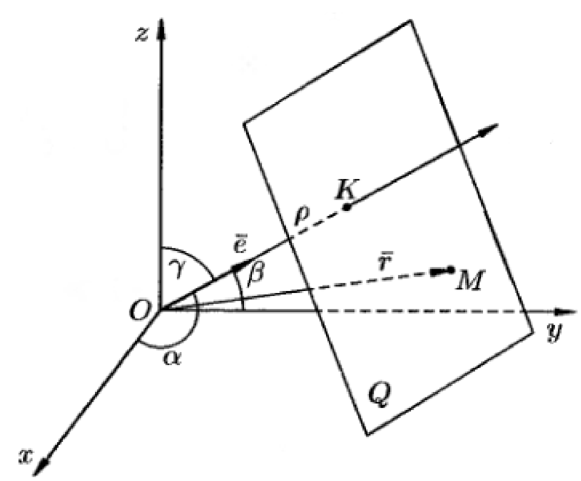
$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник за першим рядком, матимемо, $bc(x-a)+acy+abz=0$, звідки

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{10.5}$$

Рівняння (10.5) називається *рівнянням площини "у відрізках"*.

Нормальне рівняння площини. Розташування площини Q у просторі цілком визначається одиничним вектором $\overrightarrow{e}$ направленим по перпендикуляру OK, який опущено з початку координат $O(0,0,0)$ на площину Q, та довжиною p цього перпендикуляру.



Нехай $OK = p$, а α, β, γ — кути, утворені одиничним вектором $\overrightarrow{e}$ з осями координат. Тоді $\overrightarrow{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка площини. Складемо вектор $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$. При довільному розташуванні точки M на площині Q проекція радіус-вектора $\overrightarrow{r}$ на напрямок вектора $\overrightarrow{e}$ завжди дорівнює p, тобто пр$_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{r} = p$, звідки $\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{r} = p$. Тому

$$\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{r} - p = 0.$$

Перепишемо це рівняння через координати векторів $\overrightarrow{r}$ та $\overrightarrow{e}$:

$$(\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z - p = 0. \tag{10.6}$$

Рівняння (10.6) називається *нормальним рівнянням площини.*

Загальне рівняння площини (10.3) можна звести до нормального рівняння. Для цього загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ помножимо на $\lambda = +\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, якщо $D < 0$, і на $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, якщо $D > 0$. Тоді $\lambda A = \cos\alpha$, $\lambda B = \cos\beta$, $\lambda C = \cos\gamma$, $p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Множник $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ називається нормуючим множником.

11 Основні задачі для площини у просторі. Пряма в просторі, різні види її рівняння. Задачі на пряму і площину

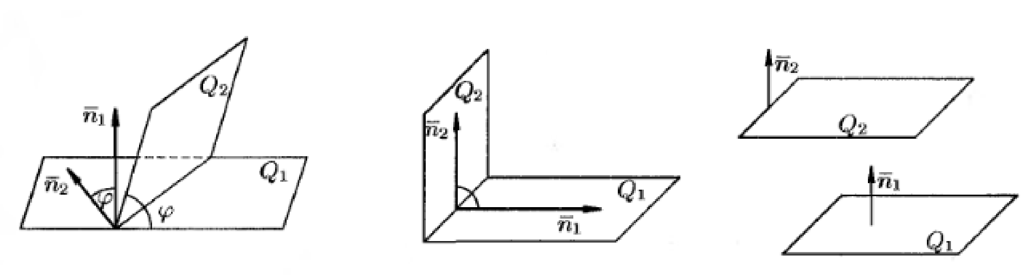
11.1 Основні задачі для площини у просторі.

Кут між площинами. Розглянемо дві площини Q_1 та Q_2, задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ відповідно.

Кутом між двома площинами Q_1 та Q_2 називається один з двогранних кутів, утворених цими площинами. Зрозуміло, що кут φ між нормальними векторами $\overrightarrow{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ та $\overrightarrow{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ площин Q_1 та Q_2 дорівнює цьому двогранному куту. Таким чином,

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2}{|\overrightarrow{n}_1| \cdot |\overrightarrow{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Для того, щоб знайти величину гострого кута, необхідно у правій частині останньої рівності взяти модуль.



Умови паралельності та перпендикулярності площин. Дві площини Q_1 та Q_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли колінеарні їх нормальні вектори $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$. Таким чином, *площини Q_1 та Q_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли*

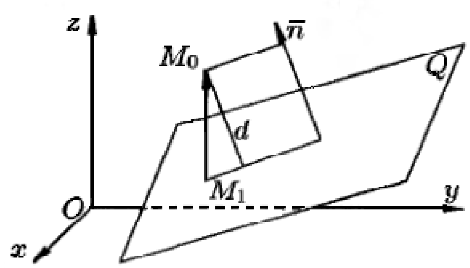
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

З'ясуємо умову перпендикулярності площин Q_1 та Q_2, заданих загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ та $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$ відповідно. Очевидно, площини Q_1 та Q_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні їх нормальні вектори $\overrightarrow{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ та $\overrightarrow{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, тобто тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток нормальних векторів $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ дорівнює нулю: $\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2 = 0$. З цих міркувань випливає, що *площини Q_1 та Q_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли*

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Відстань від точки до площини. Нехай у просторі задана площина Q загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Знайдемо відстань від точки M_0 до площини Q.

Відстань d від точки M_0 до площини Q дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, де $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — довільна точка площини Q, на напрямок нормального вектора $\overrightarrow{n}(A, B, C)$.



Тому

$$d = |\text{пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{M_1M_0}| = \left|\frac{\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}\right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Але точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ належить площині Q, а отже $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Звідси $-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D$, і

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

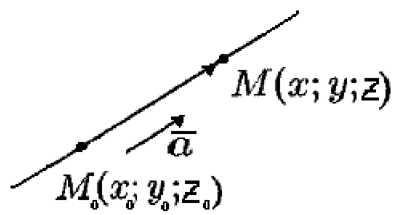
Якщо площина Q задана нормальним рівнянням $(\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z - p = 0$, то відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини Q можна знайти за формулою:

$$d = |(\cos\alpha)x_0 + (\cos\beta)y_0 + (\cos\gamma)z_0 - p|.$$

11.2 Пряма в просторі, різні види її рівняння.

Найпростішою лінією у просторі є пряма. Розглянемо різні види її рівняння.

Канонічне рівняння прямої. Складемо рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$ прямої. Складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.



Зрозуміло, що вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{a}$. Звідси випливає, що координати векторів $\overrightarrow{M_0M}$ та $\overrightarrow{a}$ пропорційні. Тому

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}. \tag{11.1}$$

Таким чином, ми отримали рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\overrightarrow{a}$. Це рівняння називається *канонічним рівнянням прямої*, а вектор $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ називається *напрямним вектором* прямої.

Розглянемо деякі частинні випадки. Якщо $a_x = 0$, то пряма перпендикулярна осі Ox і лежить у площині $x = x_0$. Якщо $a_y = 0$, то пряма перпендикулярна осі Oy і лежить у площині $y = y_0$. Аналогічно, якщо $a_z = 0$, то пряма перпендикулярна осі Oz і лежить у площині $z = z_0$.

Якщо $a_x = 0$ і $a_y = 0$, то пряма перпендикулярна площині Oxy, і перетинає цю площину в точці $(x_0, y_0, 0)$. Таким чином, пряма паралельна осі Oz.

Якщо $a_x = 0$ і $a_z = 0$, то пряма перпендикулярна площині Oxz, і перетинає цю площину в точці $(x_0, 0, z_0)$. Таким чином, пряма паралельна осі Oy.

Якщо $a_y = 0$ і $a_z = 0$, то пряма перпендикулярна площині Oyz, і перетинає цю площину в точці $(0, y_0, z_0)$. Таким чином, пряма паралельна осі Ox.

Параметричне рівняння прямої. З канонічного рівняння випливає, що

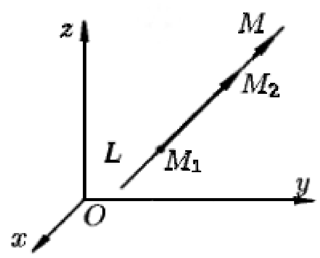
$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z} = t.$$

Виражаючи з цього рівняння змінні x, y та z отримаємо рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t, \\ z = z_0 + a_z t, \end{cases}$$

яке називається *параметричним рівнянням.*

Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Нехай пряма L проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$ прямої.



Складемо вектори $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ та $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$. Ці вектори колінеарні, а отже їх координати пропорційні. Звідси випливає рівняння прямої

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

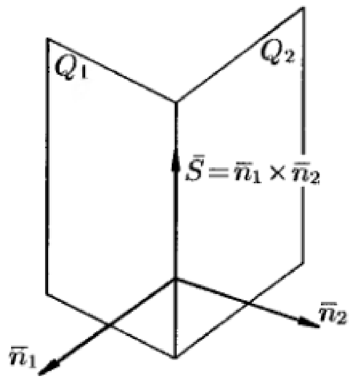
яке називається *рівнянням прямої через дві точки.*

Загальне рівняння прямої. Пряму L у просторі можна задавати як лінію перетину двох площин:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{11.2}$$

Кожне рівняння системи є рівнянням площини. Якщо площини не паралельні, тобто координати нормальних векторів $\overrightarrow{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ і $\overrightarrow{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ не пропорційні, то система (11.2) визначає пряму як геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють кожному з рівнянь системи. Рівняння (11.2) називають *загальним* рівнянням прямої.

Розглянемо, як від загального рівняння прямої перейти до її канонічного рівняння. Виберемо будь-яку точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка задовольняє обом рівнянням системи. Для цього, наприклад, можна покласти $z_0 = 0$, а координати x_0 і y_0 знайти з системи $\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + D_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + D_2 = 0. \end{cases}$



Оскільки пряма L перпендикулярна векторам $\overrightarrow{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ і $\overrightarrow{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, то її напрямний вектор $\overrightarrow{S}$ колінеарний їх векторному добутку. Таким чином, можна вважати, що напрямний вектор прямої L

$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Далі, підставляючи координати точки M_0 та координати вектора $\overrightarrow{S}$ у рівняння (11.1), отримаємо канонічний вигляд рівняння прямої.

Зауважимо також, що від загального рівняння прямої до її канонічного рівняння можна перейти, вибравши дві різні точки, що задовольняють систему (11.2), та скориставшись рівнянням прямої через дві точки.

Приклад 11.1. Звести загальне рівняння прямої $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$ до канонічного вигляду.

Знайдемо координати довільної точки M_0, що лежить на прямій. Нехай $z_0 = 0$. Тоді

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + 1 = 0, \\ 2x_0 - y_0 + 5 = 0, \end{cases}$$

звідки $M_0(-2,1,0)$. Тепер знайдемо координати напрямного вектора прямої:

$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}.$$

Отже, канонічне рівняння прямої має вигляд:

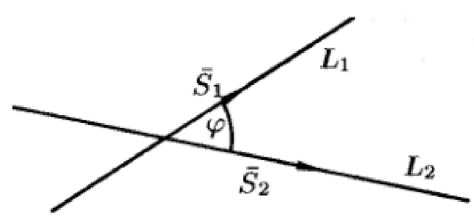
$$\frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-3}.$$

11.3 Основні задачі на пряму у просторі.

Кут між прямими. Нехай у просторі прямі L_1 і L_2 задані канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

відповідно. Під кутом між прямими L_1 і L_2 розуміють кут між напрямними векторами $\overrightarrow{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ та $\overrightarrow{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ прямих L_1 і L_2.



Тому

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{S}_1 \cdot \overrightarrow{S}_2}{|\overrightarrow{S}_1| \cdot |\overrightarrow{S}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Для знаходження гострого кута між прямими L_1 і L_2 у правій частині останньої рівності чисельник необхідно взяти по модулю.

Умови паралельності та перпендикулярності прямих. Нехай прямі L_1 і L_2, задані канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

відповідно.

Прямі L_1 і L_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли колінеарні їх напрямні вектори $\overrightarrow{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ та $\overrightarrow{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$. Таким чином, дві прямі у просторі паралельні тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

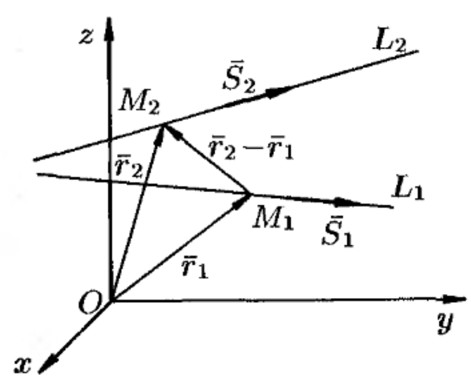
Прямі L_1 і L_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні їх напрямні вектори, тобто $\cos\varphi = 0$. В свою чергу, ця умова рівносильна тому, що

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Умова, при якій дві прямі лежать в одній площині. Нехай як і раніше прямі L_1 і L_2 задані канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

відповідно. Напрямними векторами цих прямих є вектори $\overrightarrow{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ та $\overrightarrow{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ відповідно. З'ясуємо, за якої умови прямі L_1 і L_2 лежать в одній площині.



Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ належить прямій L_1. Позначимо її радіус-вектор $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{r}_1$. Аналогічно, точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ належить прямій L_2. Позначимо її радіус-вектор $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{r}_2$. Тоді $\overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Зрозуміло, що прямі L_1 і L_2 лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\overrightarrow{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ та $(\overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1)$ компланарні, тобто

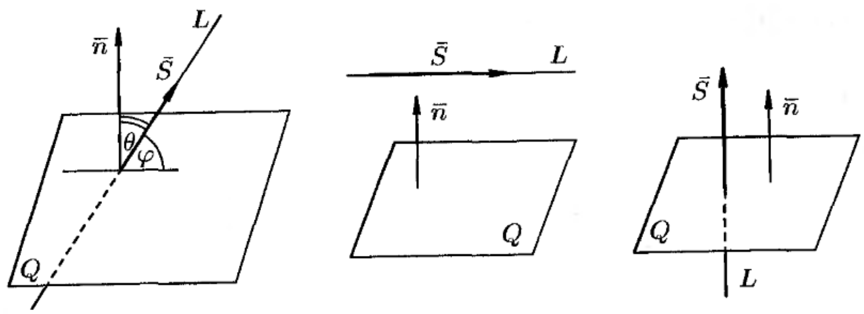
$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо ця умова виконується, то прямі L_1 і L_2 лежать в одній площині (або паралельні, або перетинаються).

11.4 Основні задачі на пряму і площину у просторі.

Кут між прямою і площиною. Нехай у просторі площина Q задана загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і пряма L задана канонічним рівнянням $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$. *Кутом між прямою і площиною* називається кут між прямою та проекцією цієї прямої на площину. Нехай φ — кут між прямою L і площиною Q, а θ — кут між напрямним вектором прямої $\overrightarrow{S} = (m, n, p)$ і нормальним вектором площини $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$. Тоді $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{S}|\cdot|\overrightarrow{n}|}$. Але, зрозуміло, що $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$. Тому $\sin\varphi = \cos\theta$, і оскільки $\sin\varphi \geq 0$, то

$$\sin\varphi = \cos\theta = \frac{|\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{S}|\cdot|\overrightarrow{n}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$



Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини. *Пряма L паралельна площині Q* тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{S} = (m, n, p)$ і $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ перпендикулярні, тобто $\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{n} = 0$. Таким чином, пряма паралельна площині тоді і тільки тоді, коли

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Пряма L перпендикулярна площині Q тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{S} = (m, n, p)$ і $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ колінеарні ($\overrightarrow{S}\|\overrightarrow{n}$), тобто

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Перетин прямої і площини. Умова, при якій пряма лежить у площині. Для того, щоб знайти точку перетину прямої L:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

з площиною Q:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Найпростіше це зробити, записавши рівняння прямої у параметричному вигляді. В результаті остання система набуває вигляду:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0, \end{cases}$$

звідки

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0. \tag{11.3}$$

Якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, то розв'язуючи це рівняння відносно параметра t, отримаємо

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Далі, підставляючи значення параметра t у координати $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, $z = z_0 + pt$, отримаємо точку перетину $M(x, y, z)$ прямої L з площиною Q.

Розглянемо окремо випадок, коли $Am + Bn + Cp = 0$. Якщо при цьому $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то рівняння (11.3) набуває вигляду $0 \cdot t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0$, тобто рівняння не має розв'язків. В цьому випадку пряма L і площина Q не мають спільних точок, тобто пряма L паралельна площині Q.

Якщо $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то рівняння (11.3) набуває вигляду $0 \cdot t + 0 = 0$, тобто має безліч розв'язків. В цьому випадку пряма і площина мають безліч спільних точок, тобто пряма L лежить у площині Q. Отже, умова

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \end{cases}$$

є умовою, при якій пряма L лежить у площині Q.

Приклад 11.2. Знайти точку, симетричну точці $M(3, 4, 5)$ відносно площини Q: $x - 2y + z - 6 = 0$.

Спочатку складемо рівняння прямої L, що проходить через точку $M(3, 4, 5)$ перпендикулярно до площини Q. Оскільки нормальний вектор площини $\overrightarrow{n} = (1, -2, 1)$ є паралельним шуканій прямій, то можна вважати, що вектор $\overrightarrow{S} = (1, -2, 1)$ є напрямним вектором прямої L. Підставляючи координати точки $M(3, 4, 5)$ та координати напрямного вектора $\overrightarrow{S}$ у канонічне рівняння прямої (11.1), отримаємо

$$L: \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-5}{1} = t.$$

Знайдемо точку O перетину прямої L з площиною Q. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 4 - 2t, \\ z = 5 + t, \\ x - 2y + z - 6 = 0. \end{cases}$$

Підставляючи змінні x, y, z у останнє рівняння системи, матимемо

$$3 + t - 2(4 - 2t) + 5 + t - 6 = 0.$$

Звідси $t = 1$, а отже, $x = 3 + 1 = 4$, $y = 4 - 2 = 2$, $z = 5 + 1 = 6$. Таким чином, $O(4, 2, 6)$ — точка перетину прямої L з площиною Q.

Нарешті, знайдемо координати точки $N(x_N, y_N, z_N)$, симетричної точці M відносно площини Q. Оскільки точка O є серединою відрізка MN, то

$$x_O = \frac{x_M + x_N}{2}, \quad y_O = \frac{y_M + y_N}{2}, \quad z_O = \frac{z_M + z_N}{2},$$

звідки

$$x_N = 2x_O - x_M = 5, \quad y_N = 2y_O - y_M = 0, \quad z_N = 2z_O - z_M = 7.$$

Остаточно, $N(5, 0, 7)$ — точка, симетрична точці M відносно площини Q.