Диференціювання

$d[f(x)]/dx$

1. $(const)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a>0, a\neq 1)$
5. $(e^x)' = e^x$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $(shx)' = chx$
11. $(chx)' = shx$
12. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$
13. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$
14. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
15. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
16. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\log_a x)' = (\log_a e)\frac{1}{x}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Інтегрування

$\int f(x)dx$

1. $\int 0\,dx = const$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$ $\quad \int dx = x + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ $(x \neq 0)$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a>0, a\neq 1)$
5. $\int e^x dx = e^x + C$ $\forall x$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\forall x$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ $\forall x$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ (в точках неперервності $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$)
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$ (в точках неперервності $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$)
10. $\int shx\,dx = chx + C$ $\forall x$ $\quad shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
11. $\int shx\,dx = chx + C$ $\forall x$ $\quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
12. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$ $\forall x$ $\quad thx = \frac{shx}{chx}$
13. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$ $(x \neq 0)$ $\quad cthx = \frac{chx}{shx}$
14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\,x + C = -arcctg\,x + C$ $\forall x$
15. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$ $\forall x$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$ $(|x|<1)$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ $(|x|<a)$
18. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ $(|x| \neq a)$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$ $(|x|>a)$
20. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$ (в точках неперервності $f(x) = \frac{1}{\sin x}$)
21. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$ (в точках неперв-вості $f(x) = \frac{1}{\cos x}$)
22. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$
23. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

Обернені гіперболічні функції:

$Arch x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

$Arsh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$Arth x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

$Arcth x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}x^n + \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \ldots$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2^2 2!}\frac{x^5}{5} + \frac{1\times 3\times 5}{2^3 3!}\frac{x^7}{7} + \ldots$$

$$tgx = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots + \frac{2n-2}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \ldots$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0, 1, \ldots, n-1; z \neq 0$$

$z = x + iy$ $\qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ $\qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ $\qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$ $\qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})$

$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$ $\qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}$

1. Функція-оригінал $f(t)$, $t \in (-\infty; +\infty)$ справджує умови:
   a. $f(t) = 0$, при $t < 0$.
   b. Існують сталі $S \geq 0$ та $M \geq 0$ такі, що $|f(t)| < Me^{st}$, $t > 0$
   c. На будь-якому відрізку $[0;T]$ функція може мати лише скінченну кількість точок розриву I-го роду.
2. Зображення оригінала $f(t)$ функція $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\tau$

   $F(p) = \int_p^\infty e^{-pt} f(t)dt$
3. Перехід від оригіналу до зображення називають перетворенням Лапласа і позначають двома символами:

   $f(t) \to F(p)$, $\quad f(t) \doteqdot F(p)$
4. Функція Хевісайда

   $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$
5. Згортка функцій

   $f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$
6. Теорема Бореля

   $f_1(t) * f_2(t) \doteqdot F_1(p) \cdot F_2(p)$
7. Формула Дюамеля

   $pF_1(p)F_2(p) \to f_1(t)f_2(0) + f_1(t) * f_2'(t)$
8. Теорема запізнення оригінала

   $\eta(t-a)f(t-a) \to e^{-pa}F(p)$, $a > 0$
9. Друга теорема розвинення

   $f(t) = \sum_{k=1}^{n} res(e^{p_k t}F(p_k))$,

   де $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – особливі точки $F(p)$

1) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C};$

2) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in \mathbb{C};$

3) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C};$

4) $\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, |z| < 1;$

5) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \ |z| < 1;$

6) $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, |z| < 1.$

	$f(t)$	$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
7	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
8	$e^{at}\cdot\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
9	$e^{at}\cdot\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
10	$e^{at}\cdot\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
11	$e^{at}\cdot\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
12	t^n (n — целое)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
13	$e^{at}\cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
14	$t\cdot\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
15	$t\cdot\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$t\cdot\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2-\omega^2)^2}$
17	$t\cdot\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
18	$e^{at}\cdot t\cdot\sin\omega t$	$\frac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
19	$e^{at}\cdot t\cdot\cos\omega t$	$\frac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
20	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)$	$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$
21	$\frac{1}{2\omega^3}(\omega t\operatorname{ch}\omega t - \operatorname{sh}\omega t)$	$\frac{1}{(p^2-\omega^2)^2}$
22	$\sin(\omega t \pm \varphi)$	$\frac{\omega\cos\varphi \pm p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
23	$\cos(\omega t \pm \varphi)$	$\frac{p\cos\varphi \mp \omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$