

Варіант 1

1. $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}; du|_{M_0(0,-1,1)} = ?$

2. $z = x^2 y^2, x = ue^v, y = ve^u; z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці $M_0(2, 1, -1)$:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 3x + y - xy$ в області $\bar{D}: y = x, y = 4, x = 0$.

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f dx.$$

7. Обчислити:

1) $\iint_{D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=2, x=4} y \exp \frac{xy}{2} dx dy.$

2) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy.$

3) $\iiint_{V: \begin{matrix} x^2+y^2+z^2=4, \\ x,y,z \geq 0 \end{matrix}} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1) $y = \frac{3}{x}, y = 4e^x, y = 3, y = 4.$

2) $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0,$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x.$$

9. Знайти масу пластинки D з густиною

$$\mu = y^2, D: x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}, z = 0, x + z = 2.$

2) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, 9z = 2(x^2 + y^2).$

3) $z = 2 - 12(x^2 + y^2), z = 24x + 2.$

11. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: 64(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4,$$

$$y, z \geq 0; \mu = \frac{5(x^2 + y^2)}{4}.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 6(y^2 + z^2), y^2 + z^2 = 3, x = 0.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1) $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$

2) $\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}.$

14. Знайти масу кривої $x = t \cos t,$

$$y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi \text{ з густиною}$$

$$\mu = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

15. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x^2 - 2y)\mathbf{i} + (y^2 - 2x)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-4, 0)$ до точки $N(0, 2)$.

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = e^y + 2(2x + 1) \sin 2x dx + \\ + xe^y + 2y dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1) $\mathbf{a} = (x^2 - y, x, 1),$

$$\Gamma: x^2 + y^2 = 1 \cap z = 1.$$

2) $\mathbf{a} = (y, -x, z^2), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma: x = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, y = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, z = \sin t.$$

18. $S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1, \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_M = ?$
 $\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(1, 1, 1)$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних

$$\text{полів } v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3 \text{ і } u = \frac{yz^2}{x^2} \text{ у}$$

$$\text{точці } M \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції $u(M) = xyz$ у точці $M_0(0, 1, -2)$.

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля $\mathbf{a} = (x^2, -xy, z^2)$ у точці $M_0(0, 1, -2)$.

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні S (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x, y, z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 < z < 2 \end{cases}.$$

$$2) \mathbf{a} = (x, y, z), S : \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x, y, z > 0 \end{cases}.$$

$$3) \mathbf{a}(x^2, x, xz), S : \begin{cases} z = x^2 + y^2, x, y \geq 0, \\ (0 \leq z < 1). \end{cases}$$

23. Знайти потік векторного поля \mathbf{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a}(e^z + 2x, e^x, e^y),$$

$$S : x + y + z = 1, x, y, z \geq 0.$$

$$2) \mathbf{a}(x + z, 0, z + y), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = x, z \geq 0. \end{cases}$$

24. Знайти масу частини поверхні Ω , обмеженої S , з густиною $\mu = \mu_0$:

$$\Omega : z^2 = 2px,$$

$$S : \{0 < z < a, \beta z < y < \alpha z\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. e^{x+3y} dy = x dx.$$

$$26.1) y - xy' = x \sec \frac{y}{x}.$$

$$2) y' = \frac{y^2}{x^2} + 4 \frac{y}{x} + 2.$$

$$3) y' = \frac{x + 2y - 3}{2x - 2}.$$

$$27.1) (x^2 + 1)y' + 4xy = 3, y(0) = 0.$$

$$2) y^2 dx + (x + e^{\frac{2}{y}}) dy = 0, y(e) = 2.$$

$$28. y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2, y(0) = 1.$$

$$29. 3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0.$$

$$30.1) y''' = \sin x, y(0) = 1, y'(0) = 1, \\ y''(0) = y''(0) = 0.$$

$$2) y''' x \ln x = y''.$$

$$3) y'' = y' e^y, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$31.1) y'' + 4y = 0.$$

$$2) y'' - 10y' + 25y = 0.$$

$$3) y'' + 3y' + 2y = 0.$$

$$32. y''' - 7y'' + 6y' = 0, \\ y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 30.$$

$$33.1) y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2.$$

$$2) y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}.$$

$$3) y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x).$$

$$4) y'' - 2y' = 2 \operatorname{ch} 2x.$$

$$5) y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x, \\ y(0) = -2, y'(0) = 0.$$

$$34.1) y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

$$2) y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x},$$

$$y(0) = 3, y'(0) = 0.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = 2x + 3y - 3e^{2t}, \\ y' = x + y - e^{2t}. \end{cases}$$

Варіант 2

1. $u = \ln x + \frac{y}{2z}$; $du|_{M_0(1,2,1)} = ?$

2. $z = y^2 \cos x, x = u \ln v, y = v \ln u$;

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці $M_0(-2, 1, 2)$:

$z^2 = 4y^2 - x^2 - 2xy$.

4. Дослідити функцію на екстремум:

$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = xy - x - 2y$ в області $\bar{D}: x = 3, y = x, y = 0$.

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx.$$

7. Обчислити:

1) $\iint_{D: x=0, y=\sqrt{x}, y=\frac{x}{2}} y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy$.

2) $\int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

3) $\iiint_{V: \begin{matrix} z^2=4x^2+4y^2, \\ z=2, y \geq \pm x, z \geq 0 \end{matrix}} y \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$.

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1) $x = \sqrt{36 - y^2}, x = 6 - \sqrt{36 - y^2}$.

2) $x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0$,

$y = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

9. Знайти масу пластинки D з густиною

$\mu = \frac{y}{x}, D: 1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{2}{3}x$.

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $y = 5\sqrt{x}, y = \frac{5x}{3}, z = 0, z = 5 + \frac{5}{3}\sqrt{x}$.

2) $z = \frac{15}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, z = \frac{17}{2} - x^2 - y^2$.

3) $z = 10((x-1)^2 + y^2) + 1, z = 21 - 20x$.

11. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 1,$

$x \geq 0, \mu = 4|x|$.

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 = 36, y = 0$.

13. Знайти довжину дуги кривої:

1) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2$.

2) $\rho = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$.

14. Знайти масу кривої $x = \cos t, y = \sin t, z = \sqrt{3}t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = x^2 + y^2 + z^2$.

15. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x^2 + 2y)\mathbf{i} + (y^2 + 2x)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-4, 0)$ до точки $N(0, 2)$.

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$du = e^y + 2x dx +$

$+ xe^y + 4(4y + 2) \cos 4y dy$.

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1) $\mathbf{a} = (xz, -1, y)$,

$\Gamma: z = 5(x^2 + y^2) - 1 \cap z = 4$.

2) $\mathbf{a} = (-x^2y^3, 1, z), 0 \leq t \leq 2\pi$,

$\Gamma: x = \sqrt[3]{4} \cos t, y = \sqrt[3]{4} \sin t, z = 3$.

18. $S: 4z + 2x^2 - y^2 = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_M = ?$
 $\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(2, 4, 4)$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних

полів $v = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}$ і $u = x^2yz^3$ у

точці $M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції $u(M) = x^2yz$ у точці $M_0(2, 0, 2)$.

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля $\mathbf{a} = (xy, yz + xz, xz)$ у точці $M_0(2, 0, 3)$.

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні S (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x, y, -z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 < z < 4 \end{cases}.$$

$$2) \mathbf{a} = (0, y, z), S : \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x, y, z > 0 \end{cases}.$$

$$3) \mathbf{a} = (2x, 0, z), S : \begin{cases} z = 3x^2 + 2y^2 + 1, \\ x^2 + y^2 = 4 \ (z > 0). \end{cases}$$

23. Знайти потік векторного поля \mathbf{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (3z^2 + x, e^x - 2y, 2z - xy),$$

$$S : x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 4.$$

$$2) \mathbf{a} = (x^2 + y^2, y^2 + x^2, y^2 + z^2),$$

$$S : x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1.$$

24. Знайти масу частини поверхні Ω , обмеженої S , з густиною $\mu = \mu_0$:

$$\Omega : z^2 = 2px, S : \{y^2 = 2qx, x = a\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. y' \sin x = y \ln y.$$

$$26.1) (y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0.$$

$$2) xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$$

$$3) y' = \frac{x + y - 2}{2x - 2}.$$

$$27.1) y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, y \Big|_{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

$$2) (y^4 e^y + 2x)y' = y, y(0) = 1.$$

$$28. xy' + y = 2y^2 \ln x, y(1) = \frac{1}{2}.$$

$$29. \left(3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y} \right) dx - \frac{2x}{y^2} \cos \frac{2x}{y} dy = 0.$$

$$30.1) y''' = \frac{1}{x}, y(1) = \frac{1}{4}, y'(1) = y''(1) = 0.$$

$$2) 2xy'y'' + x^2y' = 0.$$

$$3) y'' = 128y^3, y(0) = 1, y'(0) = 8.$$

$$31.1) y'' - y' - 2y = 0.$$

$$2) y'' - 9y = 0.$$

$$3) y'' + 4y' + 4y = 0.$$

$$32. y^{(5)} - 9y''' = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1,$$

$$y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = 1.$$

$$33.1) y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x} \cos 2x.$$

$$2) y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x.$$

$$3) y'' - 4y' + 4y = -6e^{2x} \sin 6x.$$

$$4) y'' + y = 2 \sin x - 6 \cos x + 2e^x.$$

$$5) y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,$$

$$y(0) = -1, y'(0) = 1.$$

$$34.1) y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

$$2) y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}, y(0) = \ln 4,$$

$$y'(0) = 3(1 - \ln 2).$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = x + 4y - 4e^t, \\ y' = x + y - e^t. \end{cases}$$

Варіант 3

1. $u = (\sin x)^{yz}; du|_{M_0 \frac{\pi}{6}, 1, 2} = ?$

2. $z = x^3y - yx, x = u \cos v, y = u \sin v;$
 $z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці $M_0(1, 2, 1)$:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z - 7 = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = 15x - 2x^2 - xy - 2y^2.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в області $\bar{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

7. Обчислити:

1) $\iint_D y \cos xy dx dy.$
 $D: y = \frac{\pi}{2}, y = \pi, x = 1, x = 2$

2) $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$

3) $\iiint_V z^2 dx dy dz.$
 $V: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 36, \\ y \geq x, x, z \geq 0, z \leq 2 \end{cases}$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1) $x^2 + y^2 = 72, 6y = -x^2 (y \leq 0).$

2) $y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0,$
 $\sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$

9. Знайти масу пластинки D з густиною

$$\mu = x^2y, D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 1, y \geq 0.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $x^2 + y^2 = 2, y = \sqrt{x}, y, z = 0, z = 15x.$

2) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, 15z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

3) $z = 8(x^2 + y^2) + 3, z = 16x + 3.$

11. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 2z,$$

$$x, y \geq 0, z = 0; \mu = 10x.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 7(y^2 + z^2), x = 28.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{7}{9}.$

2) $\rho = \sqrt{2}e^\varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$

14. Знайти масу кривої $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = z^2(x^2 + y^2)^{-1}.$

15. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x^2 + 2y)\mathbf{i} + (y^2 + 2x)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = 2 - \frac{x^2}{8}$ від точки $M(-4, 0)$ до точки $N(0, 2).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = xy^2 + \operatorname{arctg} \frac{x}{3} dx + x^2y + \sin y dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1) $\mathbf{a} = (yz, 2xz, xy), (z > 0)$

$$\Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 25 \cap x^2 + y^2 = 9.$$

2) $\mathbf{a} = (y - z, z - x, x - y), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma: x = \cos t, y = \sin t, z = 2(1 - \cos t).$$

18.
$$\boxed{u = 2 \ln(x^2 - 5) + 4xyz,}$$

 $S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1, \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_M = ?$
 $\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(1, 1, 1)$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $v = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$ і

$$u = \frac{z^3}{xy^2} \text{ у точці } M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції $u(M) = xy^2z$ у точці $M_0(1, -2, 0).$

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля $\mathbf{a} = (xy^2, yz^2, -x^2)$ у точці $M_0(1, -2, 0)$.

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні S (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x, y, 2z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 < z < 3. \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (2x, y, z), \begin{cases} S : x + y + z = 1, \\ x, y, z > 0. \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (2x, 2y, z), S : y = x^2, y = 4x^2, \\ y = 1, x \geq 0 \quad (0 < z \leq y).$$

23. Знайти потік векторного поля \mathbf{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (\ln y + 7x, \sin z - 2y, e^y - 2z),$$

$$S : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1.$$

$$2) \mathbf{a} = (x^2, y^2, z^2), S : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0).$$

24. Знайти масу частини поверхні Ω , обмеженої S , з густиною $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$:
 $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, S : \{z = 0\}$.

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34) :

$$25. \sqrt{4 + y^2} dx - y dy = x^2 y dy.$$

$$26.1) x + 2y) dx - x dy = 0.$$

$$2) y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

$$3) y' = \frac{3y - x - 4}{3x + 3}.$$

$$27.1) (1 - x)(y' + y) = e^{-x}, y(0) = 0.$$

$$2) y^2 dx + (xy - 1) dy = 0, y(1) = e.$$

$$28.2(xy' + y) = xy^2, y(1) = 2.$$

$$29. 3x^2 + 4y^2 dx + (8xy + e^y) dy = 0.$$

$$30.1) y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, y(0) = 1, y'(0) = \frac{3}{5}.$$

$$2) x^3 y'' + x^2 y' = 1.$$

$$3) y'' y^3 + 64 = 0, y(0) = 4, \\ y'(0) = 2.$$

$$31.1) y'' - 4y' = 0.$$

$$2) y'' - 4y' + 13y = 0.$$

$$3) y'' - 3y' + 2y = 0.$$

$$32. y''' - y'' = 0,$$

$$y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = -1.$$

$$33.1) y''' - y' = x^2 + x.$$

$$2) y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}.$$

$$3) y'' + 2y' = -2e^x (\sin x + \cos x).$$

$$4) y''' - y' = 2e^x + \cos x.$$

$$5) y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6,$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 4.$$

$$34.1) y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

$$2) y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = x + 8y + 10e^t, \\ y' = x + 3y + 5e^t. \end{cases}$$

Варіант 4

1. $u = \ln(x^3 + 2y^3 - z^3); du|_{M_0(2,1,0)} = ?$

2. $z = x^2 \ln y, x = \frac{u}{v}, y = 3u - 2v;$

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці $M_0(-1, 1, 2)$:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x - 8 = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = 6x - x^2 - xy - y^2.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ в області $\bar{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f dx.$$

7. Обчислити:

1) $\iint_{D: x=0, y=2, y=x} y^2 \exp - \frac{xy}{4} dx dy.$

2) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2) dy.$

3) $\iiint_{V: \begin{matrix} x^2+y^2+z^2=32, \\ y^2=x^2+z^2, y \geq 0 \end{matrix}} y dx dy dz.$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1) $x = 8 - y^2, x = -2y.$

2) $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0,$
 $y = 0, y = x.$

9. Знайти масу пластинки D з густиною

$$\mu = \frac{7x^2y}{18}, D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 1, y \geq 0.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $x + y = 2, y = \sqrt{x}, z = 12y, z = 0.$

2) $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, z = 1, x^2 + y^2 \leq 60.$

3) $2 - z = 20((x + 1)^2 + y^2),$
 $z = -40x - 38.$

11. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = \frac{16}{49} z^2, x^2 + y^2 = \frac{4}{7} z,$$

$$x, y \geq 0; \mu = 80yz.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1) $y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$

2) $\rho = 3e^{\frac{5\varphi}{12}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}.$

14. Знайти масу кривої $x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t,$

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, z = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

з густиною $\mu = \sqrt{2y^2 + z^2}.$

15. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + + 2x\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0$) від точки $M(2, 0)$ до точки $N(-2, 0).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = x\sqrt{y} + \cos x dx +$$

$$+ \left(\frac{x^2}{4\sqrt{y}} + \ln \frac{y+1}{5} \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1) $\mathbf{a} = (x, yz, -x),$

$$\Gamma: x^2 + y^2 = 1 \cap x + y + z = 1.$$

2) $\mathbf{a} = (x^2, y, -z), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma: x = \cos t, y = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, z = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}.$$

18. $S: z^2 = x^2 + 4y^2 - 4,$ $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_M = ?$

$$u = \frac{1}{4} x^2 y - \sqrt{x^2 + 5z^2},$$

$$\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(-2, \frac{1}{2}, 1)$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$ і $u = \frac{z}{x^3 y^2}$

$$\text{у точці } M(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}).$$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції $u(M) = xyz^2$ у точці $M_0(3, 0, 1)$.

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля $\mathbf{a} = (xz, z, yz)$ у точці $M_0(3, 0, 1)$.

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні S (нормаль зовнішня):

1) $\mathbf{a} = (x, y, z^3), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 < z < 1 \end{cases}$.

2) $\mathbf{a} = (x, 3y, 2z), S : \begin{cases} S : x + y + z = 1, \\ x, y, z > 0 \end{cases}$.

3) $\mathbf{a} = (x^2, y, z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (z > 0) \end{cases}$.

23. Знайти потік векторного поля \mathbf{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

1) $\mathbf{a} = (\cos z + 3x, x - 2y, 3z + y^2),$

$$S : z^2 = 36(x^2 + y^2), z = 6.$$

2) $\mathbf{a} = (3x, 0, -z), S : z = 6 - x^2 - y^2,$

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad (z \geq 0).$$

24. Знайти масу частини поверхні Ω , обмеженої S , з густиною $\mu = \mu_0$:

$$\Omega : x^2 + y^2 = R^2, S : \{x^2 + z^2 = R^2\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

25. $\sqrt{3 + y^2} dx - y dy = x^2 y dy.$

26.1) $(x - y) dx + (x + y) dy = 0.$

2) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y;$

3) $y' = \frac{2y - 2}{x + y - 2}.$

27.1) $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, y \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$

2) $2(4y^2 + 4y - x)y' = 1, y(0) = 0.$

28. $y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2,$

$$y(0) = 1.$$

29. $2x - 1 - \frac{y}{x^2} dx - 2y - \frac{1}{x} dy = 0.$

30.1) $y''' = \frac{6}{x^3}, y(1) = 0,$

$$y'(1) = 5, y''(1) = 1.$$

2) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$

3) $y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0,$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

31.1) $y'' - 5y' + 6y = 0.$

2) $y'' + 3y' = 0.$

3) $y'' + 2y' + 5y = 0.$

32. $y''' - 4y' = 0,$

$$y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 4.$$

33.1) $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x.$

2) $y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}.$

3) $y'' + y = 2 \cos 7x + 3 \sin 7x.$

4) $y'' - 3y' = 2 \operatorname{ch} 3x.$

5) $y'' - 6y' + 25y = 9 \sin 4x - 24 \cos 4x, y(0) = 2, y'(0) = -2.$

34.1) $y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$

2) $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1 + e^{-2x}},$

$$y(0) = 1 + 2 \ln 2, y'(0) = 6 \ln 2.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1) $\begin{cases} x' = -x - 3y, \\ y' = -x. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x' = 2x + 9y - 12e^{-t}, \\ y' = x + 2y - 4e^{-t}. \end{cases}$

Варіант 5

1. $u = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}; du|_{M_0(1,0,1)} = ?$

2. $z = \arcsin xy, x = u \cos v, y = u^2 v^{-1};$

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці $M_0(2, 1, -1)$:

$$2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y - 13 = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = x^3 + y^3 - 6xy - 39x + 18y.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ в області $\bar{D} : x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0$.

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f dx.$$

7. Обчислити:

1) $\iint_D y \sin xy dx dy.$
 $D: y = \frac{\pi}{2}, y = \pi, x = 1, x = 2$

2) $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{4-x^2-y^2} dy.$

3) $\iiint_V x dx dy dz.$
 $V: x^2 + y^2 + z^2 = 8, x^2 = y^2 + z^2, x \geq 0$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1) $y = \frac{3}{x}, y = 8e^x, y = 3, y = 8.$

2) $y^2 - 8y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0,$
 $y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x.$

9. Знайти масу пластинки D з густиною

$$\mu = \frac{8y}{x^3}, D: 1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq \frac{x}{2}.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $x = 20\sqrt{2y}, x = 5\sqrt{2y}, z = 0, z + y = \frac{1}{2}.$

2) $3z = \sqrt{16 - 9x^2 - 9y^2}, 2z = x^2 + y^2.$

3) $z = 4 - 14(x^2 + y^2), z = 4 - 28x.$

11. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = 4z^2,$$

$$x, y \geq 0 (z \geq 0); \mu = 20z.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 5(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 2, z = 0.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1) $y = -\ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}.$

2) $\rho = 5e^{\frac{12\varphi}{5}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}.$

14. Знайти масу кривої $x = \frac{1}{2} \cos t,$

$$y = \frac{1}{2} \cos t, z = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

густиною $\mu = xyz.$

15. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = x^3 \mathbf{i} - y^3 \mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 4 (x, y \geq 0)$ від точки $M(2, 0)$ до точки $N(0, 2).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = x^3 y^4 + e^x (6x + 1) dx + y^3 x^4 + y \sqrt{y^2 + 2} dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1) $\mathbf{a} = (x - y, x, -z),$

$$\Gamma: x^2 + y^2 = 1 \cap z = 5.$$

2) $\mathbf{a} = (y - z, z - x, x - y), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma: x = 4 \cos t, y = 4 \sin t, z = 1 - \cos t.$$

18. $S: x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_M = ?$
 $\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(2, 2, 4)$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$ і $u = \frac{x^2}{yz^2}$ у

точці $M \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції $u(M) = x^2 y^2 z$ у точці $M_0(-1, 0, 3)$.

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля $\mathbf{a} = (xy, xyz, -x)$ у точці $M_0(-1, 0, 3)$.

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні S (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x, y, xyz), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 < z < 5. \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (2x, 3y, 0), S : \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x, y, z > 0. \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (z + y, y, -x), S : \begin{cases} x^2 + z^2 = 2y, \\ (0 \leq y < 2). \end{cases}$$

23. Знайти потік векторного поля \mathbf{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (e^{-z} - x, xz + 3y, z + x^2),$$

$$S : 2x + y + z = 2, x, y, z = 0.$$

$$2) \mathbf{a} = (xz, z, y), S : x^2 + y^2 = 1 - z, \\ z = 0.$$

24. Знайти масу частини поверхні Ω , обмеженої S , з густиною $\mu = x^2 + y^2$:
 $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, S : \{z = 0\}$.

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. (1 + e^x)ydy - e^y dx = 0.$$

$$26.1) (y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$$

$$2) 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$$

$$3) y' = \frac{x + y - 2}{3x - y - 2}.$$

$$27.1) y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, y(-1) = \frac{3}{2}.$$

$$2) (\cos 2y \cos^2 y - x)y' = \sin y \cos y,$$

$$y \frac{1}{4} = \frac{\pi}{3}.$$

$$28. xy' - y = -y^2(\ln x + 2) \ln x, \\ y(1) = 1.$$

$$29. y^2 + y \sec^2 x \, dx + \\ + 2xy + \operatorname{tg} x \, dy = 0.$$

$$30.1) y'' = 4 \cos 2x, y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

$$2) y'' x \ln x = y'.$$

$$3) y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2, y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 2.$$

$$31.1) y'' - 2y' + 10y = 0.$$

$$2) y'' + y' - 2y = 0.$$

$$3) y'' - 2y' = 0.$$

$$32. y''' + y' = 0,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = y''(0) = 1.$$

$$33.1) y^{IV} - y''' = 5(x + 2)^2.$$

$$2) y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}.$$

$$3) y'' + 2y' + 5y = -2 \sin 2x.$$

$$4) y'' + 4y = -2 \sin 2x +$$

$$+ 8 \cos 2x + e^{2x}.$$

$$5) y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 +$$

$$+ 59x - 14, y(0) = 0, y'(0) = 7.$$

$$34.1) y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}.$$

$$2) y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}},$$

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = x + 12y - 10e^{3t}, \\ y' = x + 5y - 3e^{3t}. \end{cases}$$

Варіант 6

1. $u = \ln \cos(x^2 y^2 + z); du|_{M_0(0,0,\frac{\pi}{4})} = ?$

2. $z = \operatorname{tg} x^2 y, x = u \operatorname{tg} v, y = v \operatorname{ctg} u;$

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці $M_0(2, 1, -1)$:

$x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0.$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5.$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ в області $\bar{D}: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0.$

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_{\arcsin y}^{\arcsin y} f dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f dx.$$

7. Обчислити:

1) $\iint_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=\frac{x}{2}} y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy.$

2) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{xy}{x^2 + y^2} dy.$

3) $\iiint_{V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 = 16, y \leq \sqrt{3}x, y, z \geq 0} y dx dy dz.$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1) $y = \frac{\sqrt{x}}{2}, y = \frac{1}{2x}, x = 16.$

2) $x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0,$
 $y = 0, y = x.$

9. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = 7xy^6, D: \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1, x \geq 0.$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $x = \frac{5\sqrt{y}}{2}, x = \frac{5y}{6}, z = 0, z = \frac{5}{6}(3 + \sqrt{y}).$

2) $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, z = 10 - x^2 - y^2.$

3) $z = 28(x + 1)^2 + y^2 + 3, z = 56x + 59.$

11. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$V: 36(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 1,$

$x, z \geq 0; \mu = \frac{5(x^2 + y^2)}{6}.$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$x = 6\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 = 9, x = 0.$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1) $y = e^x + 6, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$

2) $\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$

14. Знайти масу кривої $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = x^2 + y^2 + z^2.$

15. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = x^2$ від точки $M(-1, 1)$ до точки $N(1, 1).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = \left(x \cos y + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx - \left(\frac{1}{2} x^2 \sin y + \operatorname{arctg} \frac{y + 1}{3} \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1) $\mathbf{a} = (y, -x, z^2),$

$\Gamma: z = 3(x^2 + y^2) + 1 \cap z = 4.$

2) $\mathbf{a} = (2y, -3x, x), 0 \leq t \leq 2\pi, \Gamma:$

$\{x = \cos t, y = \sin t, z = 1 - \cos t - \sin t.$

18.
$$S: x^2 + y^2 = 4z, \angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(2, 1, -1) \left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_M = ?$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$ і

$$u = \frac{z^2}{xy^2} \text{ у точці } M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції $u(M) = x^2yz^2$ у точці $M_0(2, 1, -1)$.

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля $\mathbf{a} = (yz, -z^2, xyz)$ у точці $M_0(2, 1, -1)$.

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні S (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x - y, x + y, z^2), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 < z < 2. \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (x, y, z), S : \begin{cases} \frac{x}{2} + y + z = 1, \\ x, y, z > 0. \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (x, -x - 2y, y), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + 2y + 3z = 6 \ (z > 0). \end{cases}$$

23. Знайти потік векторного поля \mathbf{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (6x - \cos y, -e^x - z, -2y - 3z),$$

$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 1, z = 2. \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (3xz, -2x, y), S : \begin{cases} x + y + z = 2, \\ x = 1, x, y, z = 0. \end{cases}$$

24. Знайти масу частини поверхні Ω , обмеженої S , з густиною $\mu = \mu_0$:

$$\Omega : x^2 + y^2 = R^2,$$

$$S : \{z \pm x = 0, x, y > 0\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші

(25 – 34):

$$25. x\sqrt{3 + y^2}dx + y\sqrt{2 + x^2}dy = 0.$$

$$26.1) y^2 + x^2y' = xy y'.$$

$$2) xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}.$$

$$3) y' = \frac{2x + y - 3}{x - 1}.$$

$$27.1) y' - \frac{y}{x + 1} = e^x(x + 1), y(0) = 1.$$

$$2) (x \cos^2 y - y^2)y' = y \cos^2 y,$$

$$y(\pi) = \frac{\pi}{4}.$$

$$28.2) (y' - xy) = (1 + x)e^{-x}y^2, y(0) = 2.$$

$$29. \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}dx + \frac{e^y dy}{1 + x^2} = 0.$$

$$30.1) y'' = \frac{1}{1 + x^2}, y(0) = y'(0) = 0.$$

$$2) xy'' - y' = x^2 e^x.$$

$$3) y'' = 98y^3, y(1) = 1, y'(1) = 7.$$

$$31.1) y'' - 4y = 0.$$

$$2) y'' + 2y' + 17y = 0.$$

$$3) y'' - y' - 12y = 0.$$

$$32. y''' - y' = 0, y(0) = 0,$$

$$y'(0) = 2, y''(0) = 4.$$

$$33.1) y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1 - x).$$

$$2) y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^x.$$

$$3) y'' - 4y' + 8y =$$

$$= e^x(5 \sin x - 3 \cos x).$$

$$4) y''' - y' = 10 \sin x + 6 \cos x + 4e^x.$$

$$5) y'' + 16y = e^x(\cos 4x - 8 \sin 4x),$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 5.$$

$$34.1) y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}.$$

$$2) y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}, y\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = 2x - 3y + 5e^{4t}, \\ y' = x + 6y - 3e^{4t}. \end{cases}$$

Варіант 7

1. $u = \sqrt[3]{x + y^2 + z^3}; du|_{M_0(3,4,2)} = ?$

2. $z = x^2 2^y, x = u - \sin v, y = u + \cos v;$
 $z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці $M_0(1, 2, -3)$:

$$x^2 + z^2 - 5yz + 3y - 46 = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$ в області $\bar{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$.

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f dx.$$

7. Обчислити:

1) $\iint_D 4ye^{xy} dx dy.$

$$D: y = \ln 3, y = \ln 4, x = \frac{1}{2}, x = 1$$

2) $\int_{-R}^0 dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \cos \sqrt{x^2 + y^2} dy.$

3) $\iiint_V y dx dy dz.$
 $V: \begin{matrix} z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}, y \geq 0 \end{matrix}$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1) $x = 5 - y^2, x = -4y.$

2) $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0,$
 $x = 0, y = x.$

9. Знайти масу пластинки D з густиною

$$\mu = 4y^4, D: \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $x^2 + y^2 = 2, x = \sqrt{y}, x, z = 0, z = 30y.$

2) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}.$

3) $z = 32(x^2 + y^2) + 3, z = 3 - 64x.$

11. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 16, x^2 + y^2 \leq 4;$$

$$\mu = 2|z|.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 8(x^2 + y^2), z = 32.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1) $y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, x \in [\frac{1}{4}; 1].$

2) $\rho = 4e^{\frac{4\varphi}{3}}, 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{3}.$

14. Знайти масу кривої $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною

$$\mu = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

15. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = x^2 y \mathbf{i} - y \mathbf{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-1, 0)$ до точки $N(0, 1)$.

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = x \operatorname{arctg} y + \ln \frac{x+1}{2} dx + \left(\frac{x^2}{2(y^2+1)} + \sin 3y \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1) $\mathbf{a} = (yz, 2xz, y^2), (z > 0)$

$$\Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 25 \cap x^2 + y^2 = 16.$$

2) $\mathbf{a} = (2z, -x, y), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma: x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 1.$$

18. $S: 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7, \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_M = ?$
 $\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(1, 1, 1)$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$ і

$$u = \frac{xz^2}{y} \text{ у точці } M \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1 \right).$$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції $u(M) = xy^2z^2$ у точці $M_0(-2, 1, 1)$.

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля $\mathbf{a} = (y^2, -xy, z^2)$ у точці $M_0(-2, 1, 1)$.

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні S (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x + y, y - x, xyz), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 < z < 4 \end{cases}.$$

$$2) \mathbf{a} = (x, 2y, z), S : \begin{cases} \frac{x}{2} + y + z = 1, \\ x, y, z > 0 \end{cases}.$$

$$3) \mathbf{a} = (x^2, y^2, z^2), S : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ (z > 0). \end{cases}$$

23. Знайти потік векторного поля \mathbf{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = 4x - 2y^2, \ln z - 4y, x + \frac{3z}{4},$$

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3.$$

$$2) \mathbf{a} = (0, 2z - 2y, x - z), S : x^2 + y^2 = 1,$$

$$z = x^2 + 3y^2 + 1, z = 0.$$

24. Знайти масу частини поверхні Ω , обмеженої S , з густиною $\mu = z$:

$$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

$$S : \{a \leq z \leq a\sqrt{2}\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. (e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0.$$

$$26.1) xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

$$2) y' = \frac{x + 2y}{2x - y}.$$

$$3) y' = \frac{x + 7y - 8}{9x - y - 8}.$$

$$27.1) y' - \frac{y}{x} = x \sin x, y \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$2) e^{y^2} (dx - 2xydy) = ydy, y(0) = 0.$$

$$28. 3(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 3.$$

$$29. \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0.$$

$$30.1) y''' = \frac{2}{x}, y(1) = \frac{1}{2}, y'(1) = y''(1) = 0.$$

$$2) y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0.$$

$$3) y''y^3 + 49 = 0, y(3) = -7,$$

$$y'(3) = -1.$$

$$31.1) y'' + y' - 6y = 0.$$

$$2) y'' + 9y' = 0.$$

$$3) y'' - 4y' + 20y = 0.$$

$$32. y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0,$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = 8.$$

$$33.1) y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1.$$

$$2) y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^x.$$

$$3) y'' + 2y' = e^x (\sin x + \cos x).$$

$$4) y'' - y' = 16 \operatorname{ch} 4x.$$

$$5) y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x},$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

$$34.1) y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \cos x}.$$

$$2) y'' + \frac{1}{\pi^2} y = \frac{1}{\pi^2 \cos \frac{x}{\pi}}, y(0) = 2,$$

$$y'(0) = 0.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = 3x + 3y + 5e^{5t}, \\ y' = x + 5y - e^{5t}. \end{cases}$$

Варіант 8

1. $u = \operatorname{arctg}(xy^2 + z); du|_{M_0(2,1,0)} = ?$

2. $z = x^2y^2, x = ue^v, y = ve^u; z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці $M_0(0,2,2)$:

$$x^2 + y^2 - xz - yz = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = x^2 + xy + y^2 + x - y.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ в області $\bar{D} : x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f dx.$$

7. Обчислити:

1) $\iint_D 4y^2 \sin xy dx dy.$

$$D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=x$$

$$R \quad \sqrt{R^2 - x^2}$$

2) $\int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \operatorname{tg}(x^2 + y^2) dy.$

3) $\iiint_V \frac{y^2 dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}.$
 $V: \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, \\ x, z \geq 0, y \geq \sqrt{3x} \end{cases}$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1) $x^2 + y^2 = 12, -\sqrt{6}y = x^2 (y \leq 0).$

2) $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 10x + y^2 = 0,$

$$y = 0, y = \sqrt{3x}.$$

9. Знайти масу пластинки D з густиною

$$\mu = \frac{x}{y}, D: 1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 4, x \geq 0, y \geq \frac{3x}{2}.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $x + y = 2, x = \sqrt{y}, z = 0, 5z = 12x.$

2) $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}, z = 6,$

$$x^2 + y^2 \leq 51.$$

3) $z = 4 - 6(x-1)^2 + y^2, z = 12x - 8.$

11. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 8z,$$

$$x, y \geq 0, z = 0; \mu = 5x.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, y = 9.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1) $y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3.$

2) $\rho = \sqrt{2}e^\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$

14. Знайти масу кривої $x = t, y = \sqrt{\frac{3}{2}}t^2,$

$$z = t^3, 0 \leq t \leq 1$$
 з густиною $\mu = x + z$.

15. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (2xy - y)\mathbf{i} + (x^2 + x)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 9 (y \geq 0)$ від точки $M(3,0)$ до точки $N(-3,0)$.

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = x \sin y + e^x(8x + 4) dx +$$

$$+ \frac{1}{2}x^2 \cos y + \operatorname{tg}(y + 1) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1) $\mathbf{a} = (xy, yz, xz),$

$$\Gamma: x^2 + y^2 = 9 \cap x + y + z = 1.$$

2) $\mathbf{a} = (y, -x, z), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma: x = \cos t, y = \sin t, z = 3.$$

18.
$$\boxed{u = u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + xz,}$$

$$S: x^2 + y^2 - 2z = 10, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_M = ?$$

$$\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(2, 2, -1)$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів

$$v = \frac{\sqrt{6}}{2x} - \frac{\sqrt{6}}{2y} + \frac{2}{3z} \quad \text{і} \quad u = \frac{yz^2}{x}$$

у точці $M \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}.$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції $u(M) = y^2z - x^2$ у точці $M_0(0,1,1)$.

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля $\mathbf{a} = (xz, -xyz, x^2z)$ у точці $M_0(0,1,1)$.

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні S (нормаль зовнішня):

1) $\mathbf{a} = (x^3 + xy^2, y^3 + x^2y, z^2)$,

$$S : x^2 + y^2 = 1, \quad 0 < z < 3.$$

2) $\mathbf{a} = (0, y, 3z), S : \begin{cases} \frac{x}{2} + y + z = 1, \\ x, y, z > 0. \end{cases}$

3) $\mathbf{a} = (1 + \sqrt{z}, 4y - \sqrt{x}, xy)$,

$$S : z^2 = 4(x^2 + y^2), (0 \leq z < 3).$$

23. Знайти потік векторного поля \mathbf{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

1) $\mathbf{a} = (x, z, -y), S : z = 2(x^2 + y^2)$,

$$z = 4 - 2(x^2 + y^2).$$

2) $\mathbf{a} = (x^3, y^3, z^3), S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

24. Знайти масу частини поверхні Ω , обмеженої S , з густиною $\mu = \mu_0$:

$$\Omega : x^2 + y^2 = \pm ax,$$

$$S : \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. (y - y^2)dx + (x + xy^2)xdy = 0.$$

$$26.1) xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$$

$$2) xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$3) y' = \frac{x + 3y + 4}{3x - 6}.$$

$$27.1) y' + \frac{y}{x} = \sin x, y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$$

$$2) (104y^3 - x)y' = 4y, y(8) = 1.$$

$$28.2y' + y \cos x = \frac{\cos x(1 + \sin x)}{y},$$

$$y(0) = 1.$$

$$29. \sin 2x - 2 \cos(x + y) \, dx - \\ - 2 \cos(x + y) dy = 0.$$

$$30.1) y''' = e^{2x}, y(0) = \frac{9}{8}, \\ y'(0) = \frac{1}{4}, y''(0) = -\frac{1}{2}.$$

$$2) x^3 y''' + x^2 y'' = 1.$$

$$3) 4y'' y^3 = 16y^4 - 1,$$

$$y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$31.1) y'' - 49y = 0.$$

$$2) y'' - 4y' + 5y = 0.$$

$$3) y'' + 2y' - 3y = 0.$$

$$32. y''' + y'' - 5y' + 3y = 0,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -14.$$

$$33.1) y^V - y^{IV} = 2x + 3.$$

$$2) y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}.$$

$$3) y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x.$$

$$4) y'' + 9y = -18 \sin 3x - 18e^{3x}.$$

$$5) y'' - 12y' + 36y = 32 \cos 2x + \\ + 24 \sin 2x, y(0) = 2, y'(0) = 4.$$

$$34.1) y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin^2 x}.$$

$$2) y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}, y(0) = 4 \ln 4,$$

$$y'(0) = 3(3 \ln 4 - 1).$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = 5x + 8y + 2e^{-t}, \\ y' = x + 3y + 3e^{-t}. \end{cases}$$

Варіант 9

1. $u = \arcsin \frac{x^2}{y} - z$; $du|_{M_0(2,5,0)} = ?$

2. $z = x^2 y^2, x = ue^v, y = ve^u; z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці $M_0(1, 1, 1)$:

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2yz + y - 2z - 2 = 0$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = 6x - 6y - 3x^2 - 3y^2.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x$ в області $\bar{D}: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$.

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{y^2} f dx.$$

7. Обчислити:

1) $\iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y \cos xy dx dy.$

2) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy.$

3) $\iiint_{V: z=3x^2+3y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, z=3} \frac{y^2 z dx dy dz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1) $y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2},$

$$y = \sqrt{12 - x^2}, x \geq 0.$$

2) $y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0,$

$$y = 0, y = x.$$

9. Знайти масу пластинки D з густиною

$$\mu = \frac{x}{y}, D: 1 \leq \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \leq 4, x \geq 0, y \geq \frac{x}{2}.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $y = 7\sqrt{2x}, y = 2\sqrt{2x}, z = 0, x + z = \frac{1}{2}.$

2) $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, z = \frac{23}{2} - x^2 - y^2.$

3) $z = 2 - 4(x^2 + y^2), z = 8x + 2.$

11. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = \frac{4}{25} z^2, x^2 + y^2 = \frac{2}{5} z,$$

$$x, y \geq 0; \mu = 28xz.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$9y = x^2 + z^2, x^2 + y^2 = 4, y = 0.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x, 0 \leq x \leq \frac{8}{9}.$

2) $\rho = 5e^{\frac{5\varphi}{12}}, 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{3}.$

14. Знайти масу кривої $x = \frac{R}{\sqrt{2}} \cos t,$

$$y = \frac{R}{\sqrt{2}} \cos t, z = R \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

з густиною $\mu = x + y.$

15. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж еліпса

$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 (x, y \geq 0)$ від точки $M(1, 0)$ до точки $N(0, 3).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = e^y + 2xe^{x^2} dx + xe^y + \arccos \frac{y}{7} dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1) $\mathbf{a} = (y, 1 - x, -z), (z > 0)$

$$\Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 4 \cap x^2 + y^2 = 1.$$

2) $\mathbf{a} = (x, z^2, y), 0 \leq t \leq 2\pi, \Gamma: \{x = \cos t,$

$$y = 2 \sin t, z = 2 \cos t - 2 \sin t - 1.$$

18. $S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_M = ?$
 $\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(1, -2, 4)$

19. Знайти кут між градієнтами скаляр-

них полів $v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$ і

$$u = \frac{xy^2}{z^2} \text{ у точці } M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції $u(M) = x^2y - z^2$ у точці $M_0(0, -2, 1)$.

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля $\mathbf{a} = (xy, -y^2z, -xz)$ у точці $M_0(0, -2, 1)$.

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні S (нормаль зовнішня):

1) $\mathbf{a} = (x, y, \sin z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 < z < 5 \end{cases}$.

2) $\mathbf{a} = (x, y, z), S : \begin{cases} x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1, \\ x, y, z > 0 \end{cases}$.

3) $\mathbf{a} = (z, -4y, 2x), S : \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ (0 \leq z < 1) \end{cases}$.

23. Знайти потік векторного поля \mathbf{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

1) $\mathbf{a} = (\sqrt{z} - x, x - y, y^2 - z),$

$S : 3x - 2y + z = 6, x, y, z = 0.$

2) $\mathbf{a} = (zx + y, zy - x, -x^2 - y^2),$

$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0.$

24. Знайти масу частини поверхні Ω , обмеженої S , з густиною $\mu = z$:

$\Omega : x^2 + y^2 = 2z, S : \{z \leq 1\}.$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

25. $y' + 2y = y^2.$

26.1) $xy' - y = (x + y) \ln 1 + \frac{y}{x}.$

2) $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$

3) $y' = \frac{3y + 3}{2x + y - 1}.$

27.1) $y' + \frac{y}{2x} = x^2, y(1) = 1.$

2) $dx + (xy - y^3)dy = 0, y(-1) = 0.$

28. $y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1 - x^3),$

$y(0) = -1.$

29. $\left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2y - \frac{x^2}{y^3}\right)dy = 0.$

30.1) $y''' = \cos^2 x, y(0) = 1,$

$y'(0) = -\frac{1}{8}, y''(0) = 0.$

2) $y'y'' = -x.$

3) $y'' = 1 - y'^2, y(0) = y'(0) = 0.$

31.1) $y'' + 7y' = 0.$

2) $y'' - 5y' + 4y = 0.$

3) $y'' + 16y = 0.$

32. $y''' + y'' = 0, y(0) = 0,$

$y'(0) = 1, y''(0) = -1.$

33.1) $3y^{IV} + y''' = 6x - 1.$

2) $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^x.$

3) $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x.$

4) $y''' - 4y' =$

$= 24e^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x.$

5) $y'' + y = x^3 - 4x^2 +$

$+ 7x - 10, y(0) = 2, y'(0) = 3.$

34.1) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \operatorname{ctg} x.$

2) $y'' + y = 4 \operatorname{ctg} x,$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4.$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1) $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x' = 4x + 4y + e^t, \\ y' = x + 4y + 2e^t. \end{cases}$

Варіант 10

1. $u = \sqrt{z} \sin \frac{y}{x}; du|_{M_0(2,0,4)} = ?$

2. $z = x^2 y^2, x = ue^v, y = ve^u; z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці $M_0(1,1,1)$:

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2xz + 2x - z = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = 4x - 4y - x^2 - y^2.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 10$ в області $\bar{D} : y = 0, y = x^2 - 4$.

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^0 f dx + \int_{-\sqrt{3}}^0 dy \int_{\sqrt{4-y^2}-2}^0 f dx.$$

7. Обчислити:

1) $\iint_D y^2 \exp -\frac{xy}{8} dx dy.$
 $D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}$

2) $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin \sqrt{x^2+y^2} dy.$

3) $\iiint_{V: \substack{x^2+y^2+z^2=16, \\ z \geq 0}} \frac{x^2 dx dy dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1) $y = \frac{3\sqrt{x}}{2}, y = \frac{3}{2x}, x = 9.$

2) $y^2 - 2x + x^2 = 0, y^2 - 4x + x^2 = 0,$
 $\sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$

9. Знайти масу пластинки D з густиною

$$\mu = x^3 y, D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, x, y \geq 0.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $y = \frac{5\sqrt{x}}{3}, y = \frac{5x}{9}, z = 0, z = \frac{5(3+\sqrt{x})}{9}.$

2) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, 6z = x^2 + y^2.$

3) $z = 22(x-1)^2 + y^2, z = 44 - 44x.$

11. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2,$$

$$x, y \geq 0 (z \geq 0); \mu = 6z.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$3z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 4, z = 0.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1) $y = \ln(1 - x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{4}.$

2) $\rho = 12e^{\frac{12\varphi}{5}}, 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{3}.$

14. Знайти масу кривої $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}.$

15. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 1$ ($y \geq 0$) від точки $M(1,0)$ до точки $N(-1,0).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = \sqrt{xy} + \frac{1}{3x+5} dx + \left(\frac{1}{3} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \arcsin \frac{y}{6} \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1) $\mathbf{a} = (y, -x, z^2),$

$$\Gamma: x^2 + y^2 = 1 \cap z = 4.$$

2) $\mathbf{a} = (3y, -3x, x), 0 \leq t \leq 2\pi, \Gamma:$

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 1 - \cos t - \sin t.$$

18.
$$\left[\begin{array}{l} u = \sqrt{x^2 + y^2} - z, \\ S: x^2 + y^2 = 24z, \\ \angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(3, 4, 1) \end{array} \right] \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_M = ?$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$ і $u = \frac{x^3 y^2}{z}$

у точці $M(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції $u(M) = xy + xz$ у точці $M_0(0,1,2)$.

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля $\mathbf{a} = (xz, -y, -zy)$ у точці $M_0(0,1,2)$.

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні S (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x, y, 1), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 < z < 1. \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (2x, y, z), S : \begin{cases} x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1, \\ x, y, z > 0. \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (y^2x, z^2y, x^2z),$$

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (z > 0).$$

23. Знайти потік векторного поля \mathbf{a} крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (yz + x, x^2 + y, xy^2 + z),$$

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$$

$$2) \mathbf{a} = (4x, -2y, -z), S : 3x + 2y = 12,$$

$$3x + y = 6, y, z = 0, x + y + z = 6.$$

24. Знайти масу частини поверхні Ω , обмеженої S , з густиною $\mu = \mu_0$:

$$\Omega : x^2 + y^2 = 2ax, S : \{z^2 = 2a(2a - x)\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. x\sqrt{5 + y^2}dx + y\sqrt{4 + x^2}dy = 0.$$

$$26.1) xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}.$$

$$2) xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}.$$

$$3) y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}.$$

$$27.1) y' + \frac{2xy}{1 + x^2} = \frac{2x^2}{1 + x^2}, y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$2) (3y \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x)y' = y,$$

$$y(16) = \frac{\pi}{4}.$$

$$28. 3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, y(0) = -1.$$

$$29. (3x^2 + 6xy^2)dx +$$

$$+ (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

$$30.1) y'' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, y(0) = 2,$$

$$y'(0) = 3.$$

$$2) xy'' = y'.$$

$$3) y'' = 72y^3, y(2) = 1, y'(2) = 6.$$

$$31.1) y'' - 6y' + 8y = 0.$$

$$2) y'' + 4y' + 5y = 0.$$

$$3) y'' + 5y' = 0.$$

$$32. y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0,$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0.$$

$$33.1) y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2.$$

$$2) y''' - 3y' - 2y = -4xe^x.$$

$$3) y'' + y = 2 \cos 3x - 3 \sin 3x.$$

$$4) y'' - 5y' = 50 \operatorname{ch} 5x.$$

$$5) y'' - y = (14 - 16x)e^{-x},$$

$$y(0) = 0, y'(0) = -1.$$

$$34.1) y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin x}.$$

$$2) y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2 + e^{-2x}},$$

$$y(0) = 1 + 3 \ln 3, y'(0) = 10 \ln 3.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = x - 7y + 7e^t, \\ y' = x + 9y - 10e^t. \end{cases}$$