Лекция 3
Преобразование координат

Координатный метод был введен в 17 веке французскими математиками П. Ферма и Р. Декартом. На этом методе основывается аналитическая геометрия, которую можно считать фундаментом графических и геометрических преобразований на плоскости и в пространстве.

Координатный метод широко используется при построении изображений по следующим причинам:

- каждая точка на экране имеет свои координаты;
- координаты используются для описания объектов как на плоскости, так и в пространстве;
- большинства промежуточных действий при построении изображений используются системы координат и преобразования с одной системы в другую.

Сначала рассмотрим общие вопросы преобразования координат.

Пусть будет задана n-мерная система координат. Тогда каждой точке М ставится в соответствие множество чисел (m_1, m_2, … , m_n) ее координат. Наиболее часто используется двумерная (n=2) и трехмерная (n=3) системы координат. Далее введем еще новую N-мерную систему координат. Тогда той же точке М ставится в соответствие другое множество чисел - (m^*_1, m^*_2, … , m^*_N).

Переход от n - ой системы координат к N -ой описывается следующими соотношениями:

$$m_1^* = f_1(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \ldots, \mathrm{m}_\mathrm{n}) \ ;$$
$$m_2^* = f_2(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \ldots, \mathrm{m}_\mathrm{n}) \ ;$$
$$\ldots$$
$$m_N^* \ = f_N^* \ (\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \ldots, \mathrm{m}_\mathrm{n}) \ ,$$

где f_i - функция пересчета i -ой координаты в N -мерной системе , аргументами которой являются координаты m_i .

Обратная задача, т.е. переход от N - мерной координат к n -мерной описывается соотношениями:

$$m_1 = F_1(\mathrm{m}_1^*, \mathrm{m}_2^*, \ldots, \mathrm{m}_\mathrm{N}^*) \ ;$$
$$m_2 = F_2(\mathrm{m}_1^*, \mathrm{m}_2^*, \ldots, \mathrm{m}_\mathrm{N}^*) \ ;$$
$$\ldots$$
$$m_n = F_n(\mathrm{m}_1^*, \mathrm{m}_2^*, \ldots, \mathrm{m}_\mathrm{N}^*) \ ;$$

где F_i - функция обратного пересчета i -ой координаты в n -мерной системе, аргументами которой являются координаты m_i^*.

Если размерность систем координат не совпадает ($n \neq N$), то часто такое преобразование является неоднозначным.

Если функции преобразований f_i и F_i линейные ($f_i = a_{1i}m_1 + a_{2i}m_2 + \ldots a_{ni}m_n + a_{ni+1}$, $F_i = b_{1i}m_1^* + b_{2i}m_2^* + \ldots b_{Ni}m_N^* + b_{Ni+1}^*$) и $n = N$, то такие преобразования называют аффинными.

Линейные преобразования описываются в матричной форме, например:

$$\begin{pmatrix} m_1^* & m_2^* & \ldots & m_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \ldots m_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2N} \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{3N} \\ a_{n1+1} & a_{n2+1} & \ldots & a_{nN+1} \end{pmatrix} \text{ или } M^* = M \cdot A \,.$$

Иногда в литературе используется другая запись – по столбцам:

$$\begin{pmatrix} m_1^* \\ m_2^* \\ \\ m_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ & & \ldots & & \\ a_{N1} & a_{N1} & & a_{Nn} & a_{Nn+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ .. \\ m_n \\ 1 \end{pmatrix} \text{ или } M^* = A \cdot M \,.$$

Преобразование на плоскости (2 D - преобразования)

При построении изображений все, что относится к двумерному случаю принято обозначать символом 2D.

Предположим, что на плоскости введена прямоугольная система координат. Тогда каждая точка M определяется упорядоченной парой чисел M(x,y) ее координат (рис. I). При изменении положения точки ей ставится в соответствие другая пара чисел M*(x*,y*) .

Переход от одного положения точки к другому на плоскости описывается соотношениями:

$$x^* = \alpha x + \beta y + \lambda,$$
$$y^* = \gamma x + \delta y + \mu,$$

где $\alpha, \beta, \lambda, \gamma, \delta, \mu$ - некоторые константы, причем $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ связаны неравенством

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

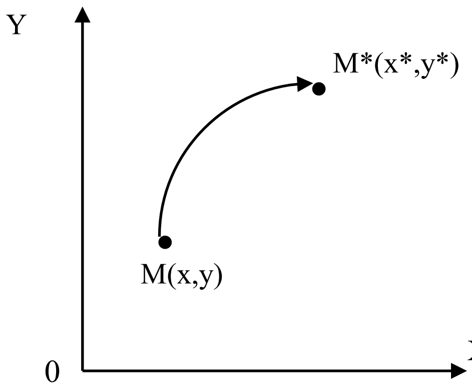

Рис. 1. Изменение положения точки

Эти формулы можно рассматривать не только как изменение координат точки, но и как переход к другой прямоугольной системе координат при неизменном положении точки (рис. 2).

В дальнейшем будем рассматривать первый случай, когда в заданной системе координат изменяются координаты точки.

Любое преобразование на плоскости можно представить как последовательность 4 простейших преобразований:

1. Поворот
2. Растяжение
3. Отражение
4. Перенос

Выбор этих 4-х базовых преобразований определяется следующими обстоятельствами:

- Преобразования имеют простой и наглядный геометрический смысл.
- Любое преобразование можно представить как последовательность этих базовых преобразований.

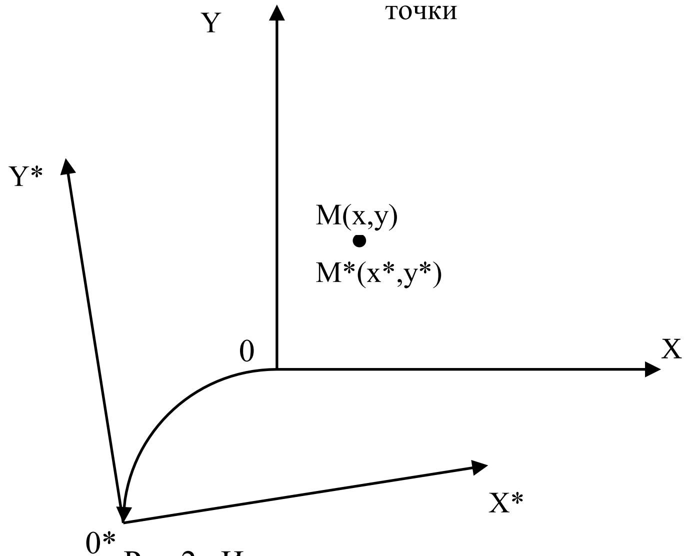

Рис.2 . Изменение системы координат

Данные преобразования могут описываться с помощью математических моделей, основанных на использовании матриц. При этом следует отметить, что первые три преобразования (поворот, растяжение и отражение) могут быть описаны двумерной матрицей, тогда как четвертое преобразование (перенос) двумерной матрицей представить невозможно. Поэтому для описания указанных геометрических преобразований используют метод однородных координат.

В основе этого метода лежит представление о том, что каждая точка в N - мерном пространстве может рассматриваться как проекция точки из (N + 1) - мерного пространства. В частности, точка в 2-х мерном пространстве представляется тремя составляющими hx, hy, h , где $h \neq 0$. На практике обычно принимают h=1, что соответствует нормализованным координатам (x,y,1).

Однородные координаты позволяют выражать с помощью 3-х мерных матриц 4 основные преобразования на плоскости, а также любые сочетания этих преобразований в виде произведения соответствующих матриц. Поэтому возможно применение единого математического аппарата для пространственных преобразований на плоскости. Если операции переноса не используются, то необходимость в однородных координатах отпадает.

Математическая запись 2 D – преобразований в матричном виде с использование однородных координат выглядит следующим образом:

$$(X^*, Y^*, 1) = (X, Y, 1) * A ,$$

где (X, Y, 1) - координаты исходной точки, A - матрица преобразования, (X^*, Y^*, 1) - координаты точки после преобразования.

Отрезок на плоскости в однородных координатах задается матрицей

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ треугольник – матрицей} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ а } n\text{-угольник – матрицей} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_i & y_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}.$$

В общем виде преобразования на плоскости можно записать:

$$S=Q*A,$$

где Q – матрица исходных координат двумерной фигуры, S - матрица координат двумерной фигуры после преобразований, A - матрица преобразований.

Если известны начальные Q и конечные S координаты двумерной фигуры, то можно найти матрицу преобразования, умножив на Q^{-1} обе части выражения $S=Q*A$, т.е.

$$Q^{-1}*S=Q^{-1}Q*A$$

или

$$A=Q^{-1}*S.$$

При выполнении последовательности преобразований на плоскости:

$$S=Q*A1*A2*\ldots*An,$$

результирующее преобразование будет равно:

$$S=Q*A,$$

где A=A1*A2*…*An.

Рассмотрим выражения и матричные представления основных преобразований на плоскости с использованием однородных координат.

Вращение

Уравнения вращения	Матрица вращения
$x^* = x\cdot \cos\varphi - y\sin\varphi$ $y^* = x\cdot \sin\varphi + y\cos\varphi$	$R=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Растяжение

Уравнения растяжения	Матрица растяжения
$x^* = \alpha x$ $y^* = \beta y$ $\alpha>0,\quad \beta>0$	$D=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Отражение

(относительно оси абсцисс и ординат)

Уравнения отражения относительно оси		Матрица растяжения относительно оси	
абсцисс	ординат	абсцисс	ординат
$x^* = x$ $y^* = -y$	$x^* = -x$ $y^* = y$	$M_Y=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$M_X=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Перенос

Уравнения переноса	Матрица переноса
$x^* = x+\lambda$ $y^* = y+\mu$	$T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \lambda & \mu & 1\end{pmatrix}$

В качестве примера преобразований на плоскости рассмотрим задачу.

Пример 1. Пусть задан треугольник Q с начальными координатами (1,1), (2,2) и (3,1). После некоторого преобразования A к исходному треугольнику он превратился в некоторый треугольник S с координатами (2,3), (4,5), (6,3). Требуется найти матрицу преобразования A.

По формуле $A=Q^{-1}*S$ выполняем вычисления. Матрица исходного треугольника Q в однородных координатах равна $Q=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, а результирующего $S=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 1\\ 6 & 3 & 1\end{pmatrix}$. Обратная матрица Q^{-1} будет равна $Q^{-1}=\begin{pmatrix}-0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Тогда подставляем значения в формулу $A=Q^{-1}S$ и находим матрицу преобразования $A=\begin{pmatrix}-0,5 & 0 & 0,5\\ -0,5 & 1 & -0,5\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Таким образом, координаты X и Y треугольника Q преобразовались в координаты треугольника S в соответствии с выражениями $X_S = 2*X_Q$, а $Y_S = 2*Y_Q + 1$

Преобразование в пространстве (3 D - преобразования)

Использование однородной системы координат позволяет применять единый математический аппарат для пространственных преобразований.

При использовании метода однородных координат точка в 3-х мерном пространстве представляется четырьмя составляющими hx, hy, hz, h , где h - может принимать любое значение. На практике h=1, что соответствует нормализованным координатам (x, y, z, 1).

Для 3D - преобразования $(X^*, Y^*, Z^*, 1) = (X, Y, Z, 1) * | A |$,
где (X, Y, Z, 1) - координаты исходной точки, | A | - матрица преобразования, $(X^*, Y^*, Z^*, 1)$ - координаты точки после преобразования.

Матрица вращения вокруг оси X $| R_x | =$ $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

Матрица вращения вокруг оси Y $| R_y | =$ $\begin{vmatrix}\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

Матрица вращения вокруг оси Z $| R_z | =$ $\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

Матрица растяжения | D | = $\begin{vmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

Матрица отражения относит. . плоск. XY $| M_z | =$ $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

Матрица отражения относит. . плоск. YZ $| M_x | =$ $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

Матрица отражения относит. . плоск. ZX $| M_y | =$ $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

Матрица переноса | T | = $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \lambda & \mu & \nu & 1\end{vmatrix}$

В качестве примера преобразований в пространстве рассмотрим задачу.

Пример 2. Совместить единичный вектор $OA(p,m,n)$, проходящий через начало координат с осью Z, где $p^2+m^2+n^2=1$. При этом выполнить поворот вектора вокруг оси X на угол ψ (вектор совмещается с плоскостью XOZ) и поворот вокруг оси Y на угол θ (в плоскости XOZ вектор совмещается с осью Z).

Пространственный угол поворота вектора вокруг оси равен соответствующему углу образованному проекцией вектора на плоскость, перпендикулярной оси вращения. Угол ψ находится из проекции вектора $OA(p,m,n)$ на плоскость XOZ (рис.3). Поскольку поворот осуществляется против часовой стрелки, то угол ψ положительный и $\cos\psi=\frac{n}{d}$, $\sin\psi=\frac{m}{d}$, где $d=\sqrt{m^2+n^2}$. Матрица такого вращения будет:
$R_x(\psi)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{n}{d}&\frac{m}{d}&0\\0&-\frac{m}{d}&\frac{n}{d}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. Под действием преобразования, описываемого матрицей $R_x(\psi)$, координаты вектора изменятся, т.е. $(p,m,n,1)\cdot R_x(\psi)=(p,0,d,1)$. Угол θ находится из положения вектора $OA(p,0,d,1)$ на плоскости XOZ (рис.4). Поскольку поворот осуществляется по часовой стрелке, то угол θ отрицательный ($\cos\theta=d$, $\sin\theta=p$. Матрица такого вращения $R_y(-\theta)=\begin{pmatrix}d&0&p&0\\0&1&0&0\\-p&0&d&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. Под действием преобразования, описываемого матрицей $R_y(\theta)$, координаты вектора $OA(p,0,d,1)$ изменятся, т.е. $(p,0,d,1)\cdot R_y(-\theta)=(0,0,p^2+d^2,1)$, где $p^2+d^2=1$. Таким образом, вектор стал с координатами $OA(0,0,1,1)$, т.е. он совместился с осью Z. Подобные преобразования используют в начертательной геометрии, когда требуется найти натуральную длину отрезка, причем повороты отрезка выполняются графически.

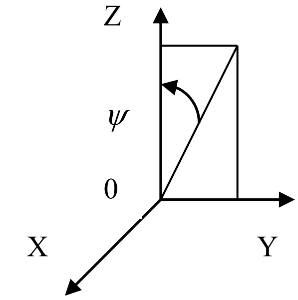

Рис.3. Совмещение с плоскостью XOZ

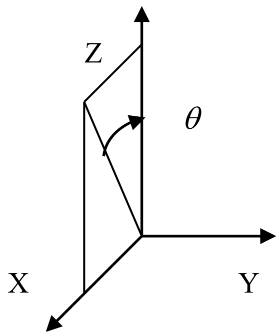

Рис.4. Совмещение с осью Z