Лекция 7
План лекции

Введение в комбинаторику
Основные понятия комбинаторики
Основные правила комбинаторики
Правило суммы
Правило произведения
Правило включений и исключений
Размещения с повторениями
Размещения без повторений
Перестановки без повторений
Перестановки с повторениями
Сочетания без повторений
Сочетания с повторениями
Разбиение множества на подмножества
Тождества при сочетаниях

Введение в комбинаторику

Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова «combina», что в переводе на русский означает – «сочетать», «соединять».

Термин «**комбинаторика**» был введён в математический обиход Лейбницем, который в 1666 году опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве».

Готфрид Вильгельм фон Лейбниц

немецкий философ, математик, юрист, дипломат

Комбинаторика или комбинаторный анализ или комбинаторная математика — это ветвь математики, изучающая способы построения подмножеств некоторого конечного множества, причем таких, которые удовлетворяют наложенным ограничениям.

Упомянутые подмножества часто называют комбинаторными конфигурациями или выборками.

Комбинаторные методы лежат в основе решения многих задач теории вероятностей и ее приложений.

Комбинаторика изучает следующие виды задач:

1. Подсчет числа комбинаторных конфигураций.
2. Нахождение условий существования комбинаторной конфигурации.
3. Разработка алгоритмов построения комбинаторных конфигураций.
4. Решение оптимизационных задач (экстремальных комбинаторных задач).

Проблема подсчета числа комбинаторных конфигураций часто используется в приложениях. Такие задачи являются предметом изучения перечислительной комбинаторики.

Основные понятия комбинаторики

В комбинаторике принято говорить о множестве, указывая число его элементов. Например, если имеется множество

$$A=\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\},$$

содержащее n элементов, то в этом случае его называют n-множеством А.

Определение подмножества

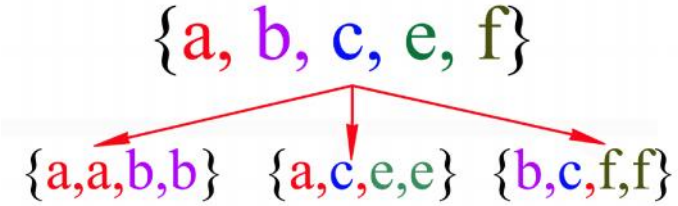
Напомним, что множество В называют подмножеством множества А и обозначают $B \subset A$, если все элементы множества являются также элементами множества А.

Определение мультимножества

Если множество С имеет несколько экземпляров одного и того же элемента, то такое множество называют мультимножеством.

Выборка

Выборкой называется всякое мультимножество, элементы которого выбираются из элементов множества А, то есть такое множество, которое, в общем случае, может содержать несколько экземпляров одного и того же элемента множества А.



5-множество *A*

Примеры 4-выборок

Объем выборки.Число элементов r в выборке (такую выборку называют также r-выборкой) определяют как ее объем.

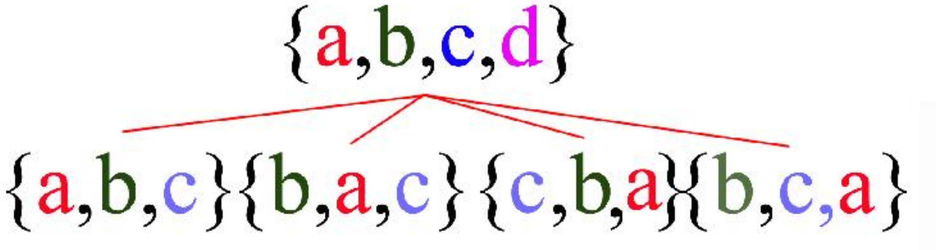
Другой смысл понятия «выборка».

Понятие «выборка» используется также для обозначения самого процесса отбора элементов подмножества из исходного множества.

Упорядоченная выборка

Выборка называется упорядоченной, если порядок следования элементов в ней задан. Две упорядоченные выборки, различающиеся лишь порядком следования элементов, считаются различными.

Определение. Пусть $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – множество из n элементов. Упорядоченной выборкой объема r из n– множества A называется любое упорядоченное подмножество из r его элементов.

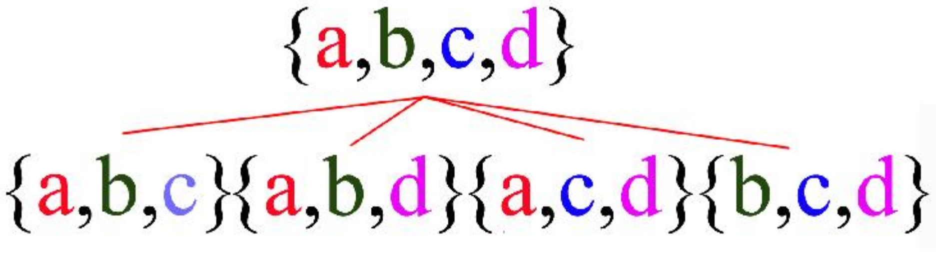


Упорядоченные 3-выборки из 4-множества

Упорядоченные выборки отличаются порядком следования одних и тех же элементов

Неупорядоченная выборка

Если порядок следования элементов не является существенным, то такая выборка называется неупорядоченной.

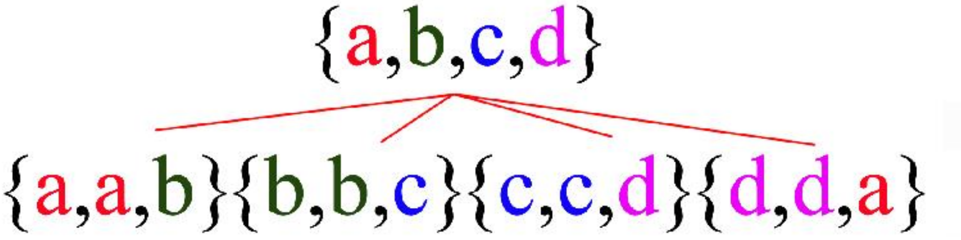


Пример неупорядоченной выборки 3-выборки из 4-множества

Неупорядоченные выборки отличаются элементами, а не порядком их следования.

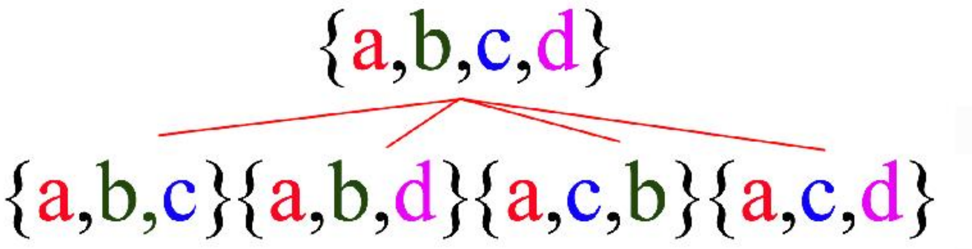
Выборки с повторениями и без повторений

Выборки с повторениями – это выборки, допускающие повторения элементов.



Пример 3-выборок с повторениями из 4-множества

Выборки без повторений – это выборки, не допускающие повторения элементов



Пример 3-выборок без повторений из 4-множества

Общепринятые названия выборок

1. *Сочетание*

Выборка, в которой не учитывается порядок записи элементов, а комбинации отличаются между собой хотя бы одним элементом, называют сочетанием.

2. *Перестановка*

Выборка, в которой комбинации могут состоять из одних и тех же элементов, отличающихся только порядком их записи, называют перестановкой.

3. (n,k)*-выборка или размещение*

Набор элементов $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$ из множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ называется выборкой (комбинацией) объема k из n элементов или, иначе, (n,k)-выборкой.

Основные правила комбинаторики

Рассмотрим два основных правила, используемых при решении комбинаторных задач.

1. Правило суммы

Если элементы множества A можно выбрать n способами, а элементы множества B можно выбрать m способами, то при условии, что $A \cap B = \varnothing$, общее число выборок составляет $n + m$.

Пример 1. На лекции по дискретной математике присутствует 20 студентов. Билеты на концерт Лары Фабиан купило 15 студентов. Сколько всего студентов посетили лекцию и концерт при условии, что они проходят одновременно?

Решение. Обозначим через X множество студентов, присутствующих на лекции, а через Y – множество студентов, посетивших концерт. Поскольку $n = |X| = 20$, $m = |Y| = 15$ и $X \cap Y = \varnothing$, то по правилу суммы: $m + n = 20 + 15 = 35$

2. Правило произведения

Число способов выбора элементов множества $A \cdot B$ равно $n \cdot m$.

Пример. Космонавт, работающий на орбитальной станции, может связаться с центром управления двумя способами: с помощью радиосвязи и передачи сообщения космическим челноком.

В то же время работники центра управления полетом могут позвонить родным космонавта по проводному телефону, по мобильному телефону, послать им письмо по почте, послать электронное письмо, позвонить по Skype, послать sms.

Сколькими способами может попасть информация от космонавта его родным?

Используя правило умножения, получаем $m \cdot n = 2 \cdot 6 = 12$.

3. Правило включений и исключений

Для двух множеств

Пусть A и B – конечные множества. Определим, чему равна $|A \cup B|$ если известны мощности $|A|$ и $|B|$.

Следуя определению операции объединения:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Пояснение. Сумма $|A| + |B|$ включает все элементы множества A и множества B. При этом, общие элементы множеств A и B, а их будет $|A \cap B|$, считаются дважды, т. е.

$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$

Для трех множеств

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| =$$
$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - \left(|A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|\right) =$$
$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Для n множеств

Пусть $A_1, A_2, A_3, ..., A_i, ..., A_n$ - некоторые множества.

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| - \sum_{1 \le i < j \le n}\left|A_i \cap A_j\right| +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \ldots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \le i < j < k < \ldots < l \le n}\left|A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_l\right|$$

Правило подсчета по данной формуле состоит в последовательном выполнении операций сложения и вычитания, чередующихся между собой.
Отсюда следует название: правило включений и исключений.
Пример. Вычисления по правилу включений и исключений

Пусть даны множества $A = \{1,2,3,4,9\}$, $B = \{3,4,5,6,9\}$ и $C = \{5,6,7,8,9\}$.
Вычислить 1) $|A \cup B|$ 2) $|B \cup C|$ 3) $|A \cup C|$ 4) $|A \cup B \cup C|$.

Решение. $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

1) $A \cap B = \{3,4,9\}$, $|A \cap B| = 3$.

Поэтому $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5 + 5 - 3 = 7$

2) $B \cap C = \{5,6,9\}$, $|B \cap C| = 3$.

Поэтому $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C| = 5 + 5 - 3 = 7$

3) $A \cap C =,$ $|A \cap C| = 1$.

Поэтому $|A \cup C| = |A| + |C| = 5 + 5 - 1 = 9$

4) $(A \cap B \cap C) = \{9\}$, $|A \cap B \cap C| = 1$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$

$|A \cup B \cup C| = 5 + 5 + 5 - 3 - 1 - 3 + 1 = 9$

Размещения с повторениями (с возвращениями)

Упорядоченная (n,k)-выборка, в которой элементы могут повторяться, называется (n,k)-размещением с повторениями.

Иными словами, размещениями с повторениями из n элементов по k называют упорядоченные выборки длины k, составленные из n элементов множества X .

Число размещений с повторениями из n элементов по k определяется оценкой соответствующего декартова произведения X^k n-элементного множества, обозначается $\widehat{A}_n^k$ и вычисляется следующим образом:

$\widehat{A}_n^k = n^k$

Пример. Пусть дан алфавит из трех букв a, b и c. Тогда все размещения с повторениями из этих трех букв по два $\widehat{A}_3^2 = 3^2$ составляют подмножества:

{a,b}, {b,a}, {a,c}, {c,a}, {a,a}, {b,c}, {b,b}, {c,b}, {c,c}.

Пример. Необходимо оснастить 3 лаборатории компьютерами 4-х типов: $1,2,3,4$.

Сколькими способами можно выполнить эту задачу? Каждый способ оснащения – это выборка с повторениями $(4,3)$, т.е. $\widehat{A}_4^3 = 4^3 = 64$

Приведем все возможные способы оснащения каждой из трех лабораторий одним из четырех типов компьютеров:

$\{1,1,1\},\{1,1,2\},\{1,1,3\},\{1,1,4\},\{1,2,1\},\{1,2,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\}$

$\{1,3,1\},\{1,3,2\},\{1,3,3\},\{1,3,4\},\{1,4,1\},\{1,4,2\},\{1,4,3\},\{1,4,4\},$

$\{2,1,1\},\{2,1,2\},\{2,1,3\},\{2,1,4\},\{2,2,1\},\{2,2,2\},\{2,2,3\},\{2,2,4\},$

$\{2,3,1\},\{2,3,2\},\{2,3,4\},\{2,3,4\},\{2,4,1\},\{2,4,2\},\{2,4,3\},\{2,4,4\},$

$\{3,1,1\},\{3,1,2\},\{3,1,3\},\{3,1,4\},\{3,2,1\},\{3,2,2\},\{3,2,3\},\{3,2,4\},$

$\{3,3,1\},\{3,3,2\},\{3,3,3\},\{3,3,4\},\{3,4,1\},\{3,4,2\},\{3,4,3\},\{3,4,4\},$

$\{4,1,1\},\{4,1,2\},\{4,1,3\},\{4,1,4\},\{4,2,1\},\{4,2,2\},\{4,2,3\},\{4,2,4\},$

$\{4,3,1\},\{4,3,2\},\{4,3,3\},\{4,3,4\},\{4,4,1\},\{4,4,2\},\{4,4,3\},\{4,4,4\}$

Комбинации формируются последовательным счетом в четверичной системе счисления

Размещения без повторений (без возвращений)

В ряде задач необходимо определить число выборок длины k из n элементов данного множества без повторения элементов.

Если элементы упорядоченной (n,k)-выборки попарно различны, то они называются (n,k)-размещением без повторений или просто (n,k)-размещением.

Число таких размещений без повторений обозначается A_n^k.

Вывод формулы определения количества размещений
без повторений (без возвращений)

Каждое (n,k)-размещение без повторения является упорядоченной последовательностью длины k, элементы которой попарно различны и выбираются из множества с n элементами.

Тогда первый элемент этой последовательности может быть выбран n способами, после каждого выбора первого элемента последовательности второй элемент может быть выбран $(n-1)$ способами и т. д., k-й элемент выбирается $n-(k-1)$ способом:

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)).$$

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)).$$

Преобразуем эту формулу, умножая и деля ее на произведение чисел $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k)$:

$$A_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(n-k))\cdot 1\cdot 2\cdot(n-k)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k)} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k)\cdot(n-(n-k))\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k)} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Частные случаи выражений для размещений без повторений (без возвращений):

При $k=0$ получаем $A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1.$

При $k=n$ получаем $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

При $k>n$ A_n^k =0.

Пример задачи на размещение

Пример. Сколькими способами можно распределить 20 студентов на 5 компьютеров, при условии, что один студент может быть распределен только на один компьютер?

Решение.

Вычислим размещения без повторений, поскольку студент может быть распределен только на один компьютер:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Для нашего случая $n=20, k=5$: $A_{20}^5 = \frac{20!}{15!} = 1860480$

Перестановки без повторений

Рассмотрим задачу упорядочивания n-элементного множества A (формирования упорядоченной выборки длины n, составленной из n-элементного множества). Полученные при этом выборки будут отличаться лишь порядком следования элементов.

Такие выборки называют перестановками без повторений из n элементов.

Число перестановок без повторений из n элементов обозначается P_n.

К перестановкам без повторений можно прийти, полагая, что осуществляется размещение без повторений из n элементов по n.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Напомним, что $0! = 1$. Таким образом, перестановки без повторений – это частный случай размещений без повторений (см. выше).

Примеры на перестановки без повторений

Пример. Сколько существует последовательностей проверки контрольных работ трех студентов?

$P_3 = 3! = 6$.

Вот эти последовательности:

$$(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2),(2,1,3),(1,3,2),(3,2,1).$$

Пример. Сколько существует возможных последовательностей посещения туристом пяти различных стран:

$P_n = n!$ При $n = 5$ получаем $P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$

Перестановки с повторениями.

При определении перестановок без повторений мы рассматривали ситуацию, когда в исходном n-множестве A все элементы уникальны.

Однако существуют ситуации, когда множество может содержать некоторое количество однотипных элементов.

Определение. Число различных перестановок, которые можно построить из n элементов, среди которых k_1 элементов первого типа, k_2 элементов второго типа,…, k_m элементов m-го типа, равно

$$P(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Пример. Сколько различных слов можно построить путем перестановки букв в слове «лаваш»?

Решение. Слово «лаваш» включает по одному экземпляру букв «л», «в» и «ш», а также два экземпляра буквы «а». Общее количество букв в слове равно 5.

Используя формулу $P\left(k_1,k_2,...,k_m\right)=\dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot ...\cdot k_m!}$

получим $P\left(1,1,1,2\right)=\dfrac{5!}{1!1!1!2!}=5\cdot 4\cdot 3=60$

Пример. Сколько слов из 8 букв можно построить из букв «а» и «б» при условии, что количество букв «а» в этих словах не должно превышать 3?

Решение. Указанным условиям будут удовлетворять слова, которые

- не имеют ни одной буквы «а», $P\left(0,8\right)$,
- имеют одну букву «а», $P\left(1,7\right)$,
- имеют две буквы «а», $P\left(2,6\right)$,
- имеют три буквы «а», $P\left(3,5\right)$.

Тогда общее количество слов равно:

$$P\left(0,8\right)+P\left(1,7\right)+P\left(2,6\right)+P\left(3,5\right)=$$

$$=\frac{8!}{0!8!}+\frac{8!}{1!7!}+\frac{8!}{2!6!}+\frac{8!}{3!5!}=1+8+28+56=93$$

Сочетания без повторений

Сочетаниями без повторений из n элементов по k называются отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом выборки длины k, составленные из n-элементного множества.

Число сочетаний без повторений из n элементов по k, обозначаемое как C_n^k определяется исходя из числа размещений без повторений A_n^k с учетом того, что различных неупорядоченных выборок (подмножеств исходного множества) будет меньше в число раз, соответствующее числу перестановок без повторений из k элементов P_k:

$$C_n^k=\frac{A_n^k}{P_k}=\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}.$$

Пример. Определить число трехэлементных подмножеств множества, состоящего из четырех элементов.

Решение. Перечисляем все трехэлементные подмножества множества $A=\left\{a_1,a_2,a_3,a_4\right\}$:

$$\left\{a_1,a_2,a_3\right\},\ \left\{a_2,a_3,a_4\right\},\ \left\{a_1,a_3,a_4\right\},\ \left\{a_1,a_2,a_4\right\}$$

Их количество можно получить, вычислив количество сочетаний из 4-х по 3.

$$C_4^3=\frac{4!}{3!\left(4-3\right)!}=\frac{24}{6}=4$$

Пример. Сборная команда университета по волейболу насчитывает 15 человек. Сколько вариантов должен рассмотреть тренер перед игрой, чтобы заявить список игроков на игру?

Решение.

Число игроков волейбольной команды равно 6. Значит, число всех возможных вариантов – это число различных подмножеств, состоящих из шести элементов в множестве из 15 элементов. Следовательно, используя формулу

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!};\quad C_{15}^6 = \frac{15!}{6!(15-6)!} = \frac{15!}{6!9!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 5\cdot 7\cdot 13\cdot 11 = 5005$$

Сочетания с повторениями

Пусть дано неупорядоченное $n-$множество A, элементы которого разбиты на n классов (в каждом классе находится по одному элементу).

Назовем данные классы типами элементов.

Сочетанием из n элементов по m элементов с повторениями называется $m-$ подмножество множества A, каждый элемент которого принадлежит одному из n типов.

Такие подмножества называются сочетаниями с повторениями из n элементов по k.

Обозначим сочетания с повторениями из n элементов по k как $\widehat{C}_n^k$.

Тогда $$\widehat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Пример. Пусть дано множество $A=\{a,b,c,d\}$. Тогда подмножества сочетаний с повторениями включают:

$\{a,a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,b\},\{b,c\}\{b,d\},\{c,c\},\{c,d\},\{d,d\}$

Их количество $\widehat{C}_n^k = \widehat{C}_4^2 = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(4+2-1)!}{2!(4-1)!} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$

Пример. Сколькими способами 12 шариков можно распределить по 3 урнам?

Решение.

$$\widehat{C}_n^k = \widehat{C}_{12}^3 = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(12+3-1)!}{3!(12-1)!} = \frac{14!}{3!11!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14}{6} = 364$$

Разбиение множества на подмножества

Пусть дано n-множество A. Говорят, что множество A разбито на k подмножеств A_i, где $(1,2,...,k)$, если:

1. $A_i \neq \varnothing,\ i \in \{1,2,...,k\}$;
2. $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i,\ j \in \{1,2,...,k\}$;

3. $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$.

Обозначим число элементов в подмножестве A_i через $n(A_i) = n_i$ Очевидно, что $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$

Число разбиений множества на подмножества обозначим $C(n; n_1, n_2, ..., n_k)$.

Определим число разбиений.

Число способов выбора элементов подмножества A_1 равно числу сочетаний $C_n^{n_1}$.

Число способов выбора элементов подмножества A_2 равно числу сочетаний $C_{n-n_1}^{n_2}$.

Число способов выбора этих двух подмножеств равно $C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2}$ и так далее.

Таким образом, число выбора всех разбиений равно

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot ... \cdot C_{n-n_1-...-n_{k-1}}^{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot ... \cdot \frac{(n-n_1-...-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-...-n_{k-1})!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_{k!}}.$$

Сравним данное выражение с формулой для перестановок с повторениями.

Можно сделать вывод, что *разбиение множества на подмножества* и *перестановки с повторениями* – это одно и то же комбинаторное действие с различной интерпретацией.

Тождества при сочетаниях

Основная формула для числа сочетаний

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

позволяет получить ряд простых тождеств.

Рассмотрим некоторые из них.

Теорема 1. $C_n^r = C_n^{n-r}$

Доказательство. $C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_n^r$.

Теорема 2. $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$.

Доказательство.

$C_{n-1}^{r} + C_{n-1}^{r-1} =$

$$= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-(r-1))!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)(n-r-1)!} =$$

$$= \frac{(n-r)(n-1)! + r(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!} = \frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r$$

Теорема 3. $C_n^i C_i^r = C_n^r C_{n-r}^{i-r}$

Доказательство.

$C_n^i \cdot C_i^r =$

$$= \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{i!}{r!(i-r)!} = \frac{n!}{r!(i-r)!(n-i)!} =$$

$$= \frac{n!(n-r)!}{r!(i-r)!(n-i)!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r!)}{(i-r)!(n-i)!} = C_n^r \cdot C_{n-r}^{i-r}$$

Теорема 5. Бином Ньютона: $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r y^{n-r}$ **.**

Следствие 1: $\sum_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n$ **.**

Следствие 2: $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_n^r = 0$**.**

Теорема 6. $\sum_{r=0}^{n} r C_n^r = n 2^{n-1}$

Теорема 7. $C_{n+r}^{k} = \sum_{i=0}^{k} C_n^i \cdot C_r^{k-i}$