Министерство науки и образования Украины

Лабораторная работа №18

Моделирование нелинейного дифференциального уравнения 3-го порядка

Выполнил: студент 3-го курса
гр. ИВ-83
Пивоваров Т.

Киев 2011

Вариант 313.

Задано исходное уравнение

$$\frac{d^3y}{dt^3}+a_2 f_1(t)\frac{d^2y}{dt^2}+a_1F_1\left[y,\frac{dy}{dt}\right]+a_0F_2(y)=b_0 f_2(t)$$

с начальными условиями вида

$y(0)=C_1;$ $\quad \frac{dy}{dt}(0)=C_2;$ $\quad \frac{d^2y}{dt^2}(0)=C_3$

при заданном времени решения $t_{\max}$

1. f1(t) = $\sin(t)-sh(t)$

2. f2(t) = abs(sqrt(2t))

3. F1(y, dy/dt) = (cos(dy/dt))/(sqr(y))

4. F2(y) = y*(sqr(y))

U_max=50
C1=0.8; C2=0.8; C3=-1
t_max=40
a0=-4; a1=-7; a2=-2; b0=-3

Выполнение:

Исходное уравнение:

$$\frac{d^3y}{dt^3}-2(\sin(t)-sh(t))\frac{(d^2y)}{dt^2}-7\frac{\cos\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\mathrm{sqr}(y)}-4y*y^2=-3(|\sqrt{2\mathrm{t}}|)$$

Начальные условия:

$y(0)=0.8;$ $\quad \frac{dy}{dt}(0)=0.8;$ $\quad \frac{d^2y}{dt^2}(0)=-1$

Время решения t_{max}=40

1. Приведение исходного уравнения к универсальному виду

$y=y_1;$

$\frac{dy_1}{dt}=y_2;$

$\frac{dy_2}{dt}=y_3;$

$$\frac{dy_3}{dt}=2\big(\sin(t)-sh(t)\big)\frac{(d^2y)}{dt^2}+7\frac{\cos\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\mathrm{sqr}(y)}+4y*y^2-3(|\sqrt{2\mathrm{t}}|)$$

Новые начальные условия:

$y_1(0)=0.8;$ $\quad y_2(0)=0.8;$ $\quad y_3(0)=-1.$

2. Приведение универсального вида к виду, удобному для моделирования

Моделирование функции $\sin(t) - sh(t)$
$p_1 = j$ $p_2 = -j$ $p_3 = 1$ $p_4 = -1$
корни: $(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1) = \lambda^4 - 1$
осуществляется методом **решение определяющего дифференциального уравнения**
$\frac{dy^4}{dt^4} - y = 0$; , с начальным условием $y(0) = 0$, $\frac{dy}{dt}(0) = 0$, $\frac{d^2y}{dt^2}(0) = 0$, $\frac{d^3y}{dt^3}(0) = -2$

Приведем уравнение к универсальному виду:
$$\frac{dy_4}{dt} = y_5;$$
$$\frac{dy_5}{dt} = y_6;$$

$$\frac{dy_6}{dt} = y_7;$$

$$\frac{dy_7}{dt} = y_4;$$

Начальные условия: $y_4(0) = 0,\ \ y_5(0) = 0, y_6(0) = 0,\ \ y_7(0) = -2$.

Моделирование функции $|\sqrt{\mathbf{2t}}|$
Так так карень всегда положительный – модуль можно не моделировать
Корни:
$p_1, p_2 = 0$
$\lambda^2 = 0$
осуществляется методом **решение определяющего дифференциального уравнения**
$\frac{d^2y}{dt^2} = 0$; , с начальным условием $y(0) = 0$, $\frac{dy}{dt}(0) = 2$.
Приведем уравнение к универсальному виду:
$$\frac{dy_8}{dt} = y_9;$$
$$\frac{dy_9}{dt} = 0;$$

Начальные условия: $y_8(0) = 0,\ \ y_9(0) = 2$

Окончательная система уравнений имеет следующий вид (в скобках указывается блок, который воспроизводит данное уравнение):

$\frac{dy_1}{dt} = y_2;$ (интегрирующий)

$\frac{dy_2}{dt} = y_3;$ (интегрирующий)

$\frac{dy_3}{dt} = 2y_{14} + 7y_{12} + 4y_{13} - 3y_{15};$ (интегросуммирующий)

$\frac{dy_4}{dt} = y_5;$ (интегрирующий)

$\frac{dy_5}{dt} = y_6;$ (интегрирующий)

$\frac{dy_6}{dt} = y_7;$ (интегрирующий)

$\frac{dy_7}{dt} = y_4;$ (интегрирующий)

$\frac{dy_8}{dt} = y_9;$ (интегрирующий)

$\frac{dy_9}{dt} = 0;$ (интегрирующий)

$Y_{10} = cos\ (y_2);$ (ДУФП)

$y_{11} = y_1^2;$ (ДУФП)

$y_{12} = y_{10}/y_{11};$ (делительный)

$y_{13} = y_{11} * y_1;$

$y_{14} = y_3 * y_4;$ (множительный)

$y_{15} = \sqrt{y_8};$

3. Выполнить масштабирование переменных. Получение масштабированных уравнений и формул для расчета напряжений начальных условий и напряжений постоянного внешнего возмущения.

$$U_1(0) = \frac{y_1(0)}{M_1} = \frac{0.8}{M_1}$$

$$U_2(0) = \frac{y_2(0)}{M_2} = \frac{0.8}{M_2}$$

$$U_3(0) = \frac{y_3(0)}{M_3} = \frac{-1}{M_3}$$

$$U_4(0) = \frac{y_4(0)}{M_4} = \frac{0}{M_4}$$

$$U_5(0) = \frac{y_5(0)}{M_5} = \frac{0}{M_5}$$

$$U_6(0) = \frac{y_6(0)}{M_6} = \frac{0}{M_6}$$

$$U_7(0) = \frac{y_7(0)}{M_7} = \frac{-2}{M_7}$$

$$U_8(0) = \frac{y_8(0)}{M_8} = \frac{0}{M_8}$$

$$U_9(0) = \frac{y_9(0)}{M_9} = \frac{2}{M_9}$$

В соответствии с соотношениями

$$y_k = M_k \cdot U_k, \qquad t = M_\tau \cdot \tau, \qquad \frac{d(M_i \cdot U_i)}{d(M_\tau \cdot \tau)} = \frac{M_i}{M_\tau} \cdot \frac{dU_i}{d\tau}$$

выполняем масштабирование переменных:

$$\frac{dU_1}{dt} = M_2 \frac{M_\tau}{M_1} U_2;$$

$$\frac{dU_2}{dt} = M_3 \frac{M_\tau}{M_2} U_3;$$

$$\frac{dU_3}{dt} = 2M_{14} \frac{M_\tau}{M_3} U_{14} + 7M_{12} \frac{M_\tau}{M_3} U_{12} + 4M_{13} \frac{M_\tau}{M_3} U_{13} - 3M_{15} \frac{M_\tau}{M_3} U_{15};$$

$$\frac{dU_4}{dt} = M_5 \frac{M_\tau}{M_4} U_5;$$

$$\frac{dU_5}{dt} = M_6 \frac{M_\tau}{M_5} U_6;$$

$$\frac{dU_6}{dt} = M_7 \frac{M_\tau}{M_6} U_7;$$

$$\frac{dU_7}{dt} = M_4 \frac{M_\tau}{M_7} U_4;$$

$$\frac{dU_8}{dt} = M_9 \frac{M_\tau}{M_8} U_9;$$

$$\frac{dU_9}{dt} = 0;$$

$$U_{10} = \frac{1}{M_{10}} \cos(M_2 U_2);$$

$$U_{11} = \frac{1}{M_{11}} \operatorname{sqr}(M_1 U_1);$$

$$U_{12} = \frac{M_{10}}{M_{12} M_{11}} * \frac{U_{10}}{U_{11}};$$

$$U_{13} = \frac{M_{11} M_1}{M_{13}} U_{11} U_1;$$

$$U_{14} = \frac{M_3 M_4}{M_{13}} U_3 U_4;$$

4. Составить первоначальную структурную схему из отдельных операционных блоков (ОБ) и осуществить упрощение полученной структурной схемы.

5. Получить структурные машинные уравнения (описать работу каждого ОБ структурной схемы)

$$\frac{d(-U_1)}{d\tau} = -(k_{1,2}U_2)$$

$$\frac{d(U_2)}{d\tau} = -(k_{2,3}(-U_3))$$

$$\frac{d(-U_3)}{d\tau} = -(k_{3,14}U_{14} + k_{3,12}U_{12} + k_{3,13}U_{13} + k_{3,15}(-U_{15}))$$

$$\frac{d(-U_4)}{d\tau} = -(k_{4,5}U_5)$$

$$\frac{d(U_5)}{d\tau} = -(k_{5,6}(-U_6))$$

$$\frac{d(-U_6)}{d\tau} = -(k_{6,7}U_7)$$

$$\frac{d(U_7)}{d\tau} = -(k_{7,4}(-U_4))$$

$$\frac{d(-U_8)}{d\tau} = -(k_{8,9}U_9)$$

$$\frac{d(U_9)}{d\tau} = 0$$

$$U_{10} = k_{10}Fn_1(U_2)$$

$$U_{11} = k_{11}Fn_2(U_1)$$

$$U_{12} = (k_{12}U_{10}/(U_{11}))$$

$$U_{13} = k_{13}U_{11} * U_1$$

$$U_{14} = k_{34}U_3 * U_4$$

Раскроем скобки:

$$\frac{d(U_1)}{d\tau} = (k_{1,2}U_2)$$

$$\frac{d(U_2)}{d\tau} = (k_{2,3}(-U_3))$$

$$\frac{d(U_3)}{d\tau} = (k_{3,14}U_{14} + k_{3,12}U_{12} + k_{3,13}U_{13} + k_{3,15}(-U_{15}))$$

$$\frac{d(U_4)}{d\tau} = (k_{4,5}U_5)$$

$$\frac{d(U_5)}{d\tau} = (k_{5,6}(U_6))$$

$$\frac{d(U_6)}{d\tau} = (k_{6,7}U_7)$$

$$\frac{d(U_7)}{d\tau} = (k_{7,4}(U_4))$$

$$\frac{d(U_8)}{d\tau} = (k_{8,9}U_9)$$

$$\frac{d(U_9)}{d\tau} = 0$$

$$U_{10} = k_{10}Fn_1(U_2)$$

$$U_{11} = k_{11}Fn_2(U_1)$$

$$U_{12} = (k_{12}U_{10}/(U_{11}))$$

$$U_{13} = k_{13}U_{11} * U_1$$

$$U_{14} = k_{34}U_3 * U_4$$

6. Сопоставить масштабированные и структурные машинные уравнения (проверить совпадение по форме масштабированных и структурных уравнений, приведя знаки в нелинейных масштабированных уравнениях в соответствие со знаками в структурных машинных уравнениях).
Сопоставляя масштабированные и структурные машинные уравнения находим, что они совпадают по форме.

7. Записать уравнения эквивалентности (приравнять соответствующие коэффициенты структурных и масштабированных машинных уравнений).

$$k_{1,2} = M_2\frac{M_\tau}{M_1}$$

$$k_{2,3} = M_3\frac{M_\tau}{M_2}$$

$$k_{3,14} = 2M_{14}\frac{M_\tau}{M_3}$$

$$k_{3,12} = 7M_{12}\frac{M_\tau}{M_3}$$

$$k_{3,13} = 4M_{13}\frac{M_\tau}{M_3}$$

$$k_{3,8} = 3M_8\frac{M_\tau}{M_3}$$

$$k_{4,5} = M_5\frac{M_\tau}{M_4}$$

$$k_{5,6} = M_6\frac{M_\tau}{M_5}$$

$$k_{6,7} = M_7\frac{M_\tau}{M_6}$$

$$k_{7,4} = M_4\frac{M_\tau}{M_7}$$

$$k_{8,9} = M_9\frac{M_\tau}{M_8}$$

$$k_{10} = \frac{1}{M_{10}}$$

$$k_{11} = \frac{M_1^2}{M_{11}}$$

$$k_{12} = \frac{M_{10}}{M_{12}M_{11}}$$

$$k_{13} = \frac{M_{11}M_1}{M_{13}}$$

$$k_{14} = \frac{M_3M_4}{M_{14}}$$

.

8. Получить уравнения тождественности

$$Fn_1(U_2) = \frac{1}{M_{10}}\cos(M_2U_2)$$

$$Fn_2(U_1) = \frac{M_1^2}{M_{11}}(U_1)^2$$

9. Выбрать масштаб независимой переменной

При использовании математического моделирования с помощью операционных блоков необходимо задать масштаб независимой переменной – соотношение между реальным и машинным временем. Масштаб времени может выбираться на основе компромисса между стремлением ускорить процесс вычисления и требованием использовать тот частотный диапазон, в котором обеспечивается оптимальная точность работы ОБ. В нашем случае (t_{max} = 40) можно выбрать M_τ = 1.

10. Определить значения масштабов представления зависимых переменных для значения U_{max}

Найдем максимальные значения зависимых переменных, которые можно определить аналитически.

$y_{4\max} = -28.047$

$y_{5max} = -27.96$

$y_{6max} = -25.53$

$y_{7max} = -26.2$

$y_{8\max} = 8.94$

$y_{9max} = 0.112$

Вычисляем соответствующие масштабы:

M4 = 28.047 / 40 = 0.7011

M5 = 27.96 / 40 = 0.7

M6 = 25.53 / 40 = 0.638

M7 = 26.2 / 40 = 0.655

M8 = 8.94 / 40 = 0.2235

M9 = 0.112 / 40 = 0.0028

Поскольку точные значения y_{max} для остальных зависимых переменных аналитически определить нельзя, выбираем пробные значения масштабов:

$y_1(0) = 0.8$ => $y_1^{/} = 1.6$

$y_2(0) = 0.8$ => $y_2^{/} = 1.6$

$y_3(0) = -1$ => $y_3^{/} = 2$

Будем считать $y_{2min} = y_2(0) = 1.6$, тогда $y_{13min} = 0.565,\ y_{13max} = 0.932$

$y_{12max} = 0.717,\qquad y_{14max} = \frac{y_{12max}}{y_{13min}} = \frac{0.717}{0.565} = 1.27$

M1 = 0.8 / 40 = 0.02

M2 = 0.8 / 40 = 0.02

M3 = 1 / 40 = 0.025

M11 = 3.72*0.4 / 40 = 0.0372

M12 = 0.717 / 40 = 0.017925

M13 = 0.932 / 40 = 0.0233

M14 = 1.27 / 40 = 0.03175

M15 = 1.2*1.2 / 40 = 0.036

11. Определить значения коэффициентов передач линейных операционных усилителей и множительно-делительных блоков.

$$k_{1,2} = M_2 \frac{M_\tau}{M_1} = 0.02 * \frac{1}{0.06} = 0.33$$

$$k_{2,3} = M_3 \frac{M_\tau}{M_2} = 0.01 * \frac{1}{0.04} = 0.25$$

$$k_{3,14} = 2 \frac{M_\tau}{M_3} = 3 * 0.0372 * \frac{1}{0.02} = 12.16$$

$$k_{3,12} = 7M_{14} \frac{M_\tau}{M_3} = 2 * 0.03175 * \frac{1}{0.0233} = 2.725$$

$$k_{3,13} = 4M_{16} \frac{M_\tau}{M_3} = 7 * 0.0432 * \frac{1}{0.01} = 30.24$$

$$k_{3,15} = 3M_7 \frac{M_\tau}{M_3} = 5 * 0.03 * \frac{1}{0.01} = 15$$

$$k_{4,5} = M_5 \frac{M_\tau}{M_4} = 0.093 * \frac{1}{0.093} = 1$$

$$k_{5,6} = M_6 \frac{M_\tau}{M_5} = 0.093 * \frac{1}{0.093} = 1$$

$$k_{6,6} = M_\tau = 1$$

$$k_{6,5} = \ 3M_9 \frac{M_\tau}{M_{10}} = 3 * 0.0751 * \frac{1}{0.05375} = 4.19$$

$$k_{6,4} = M_4 \frac{M_\tau}{M_6} = 0.093 * \frac{1}{0.093} = 1$$

$$k_{7,8} = \ M_8 \frac{M_\tau}{M_7} = 0.0275 * \frac{1}{0.03} = 0.917$$

$$k_{8,9} = \ \ M_9 \frac{M_\tau}{M_8} = 0.075 * \frac{1}{0.0275} = 2.73$$

$$k_{9,10} = M_{10} \frac{M_\tau}{M_9} = 0.05375 * \frac{1}{0.075} = 0.717$$

$$k_{10,10} = \ 2M_\tau = 2 * 1 = 2$$

$$k_{10,9} = \ 3M_9 \frac{M_\tau}{M_{10}} = 3 * 0.075 * \frac{1}{0.05375} = 4.186$$

$$k_{10,8} = 2M_8 \frac{M_\tau}{M_{10}} = 2 * 0.0275 * \frac{1}{0.05375} = 1.02$$

$$k_{10,7} = M_7 \frac{M_\tau}{M_{10}} = 0.03 * \frac{1}{0.05375} = 0.558$$

$$k_{11} = \ \frac{M_4 M_3}{M_{11}} = \frac{0.093 * 0.01}{0.0372} = 0.025$$

12. Рассчитать значения напряжений начальных условий и значения напряжений постоянных внешних возмущений U_0.

Напряжения начальных условий определяются по формулам:

$$U_i(0) = \frac{y_i(0)}{M_i}$$

$$U_1(0) = \frac{y_1(0)}{M_1} = \frac{0.6}{0.03} = 50 \text{ В}$$

$$U_2(0) = \frac{y_2(0)}{M_2} = \frac{0.4}{0.02} = 50 \text{ В}$$

$$U_3(0) = \frac{y_3(0)}{M_3} = \frac{-0.2}{0.01} = -50 \text{ В}$$

$$U_4(0) = \frac{y_4(0)}{M_4} = \frac{0}{0.093} = 0 \text{ В}$$

$$U_5(0) = \frac{y_5(0)}{M_5} = \frac{5}{0.263} = 0 \text{ В}$$

$$U_6(0) = \frac{y_6(0)}{M_6} = \frac{1}{0.263} = 0 \text{ В}$$

$$U_7(0) = \frac{y_7(0)}{M_7} = \frac{-2}{0.263} = -7.5 \text{ В}$$

$$U_8(0) = \frac{y_8(0)}{M_8} = \frac{0}{0.263} = 0 \text{ В}$$

$$U_9(0) = \frac{y_9(0)}{M_9} = \frac{2}{0.263} = 7.5 \text{ В}$$