Розділ III. Математична логіка

Основи математичної логіки закладено в працях англійського математика Джорджа Буля (1815-1864). Це такі праці, як “Математичний аналіз логіки” (1847) і “Закони мислення” (1854), де він уперше виклав алгебру логіки – алгебру Буля. Її формули застосовні незалежно від того, що мати на увазі під літерами, які вживаються в алгебрі. В алгебрі Буля літери позначають висловлювання, а всі правила звичайної алгебри залишаються без зміни. Оскільки всі наші міркування складаються з висловлювань та думок, булева алгебра є логікою, через що вона дістала назву алгебри логіки.

Дж. Буль запропонував у формулах літерами позначати не числа, а висловлювання і показав, що можна так вибирати дії додавання та множення, щоб формули звичайної алгебри залишалися без зміни. В алгебрі логіки висловлювання розглядаються не за їхнім змістом або значенням, а тільки відносно того, істинні вони чи хибні. Приймається, що кожне висловлювання може бути тільки істинним або хибним.

Лекція 10. Булеві функції

Визначення булевої алгебри було дано в лекції 8. Оскільки довільні ґратки можна розглядати як алгебру з двома операціями, булеві ґратки, в якій кожний елемент має єдине доповнення, можна розглядати як булеву алгебру з трьома операціями. Ми розглядаємо мінімальну булеву алгебру, яка містить два елементи: 0 – хибність, 1 – істинність. Операції ґраток (об’єднання, перетин та доповнення) мають інші назви і розглядаються як алгебраїчні операції. Всі властивості булевих ґраток, звісно, зберігаються.

10.1. Основні поняття та способи задання булевих функцій

Булеві функції належать до класу двозначних однорідних функцій. Це найпростіший і водночас найважливіший клас однорідних функцій, що використовуються для опису скінченних автоматів та ЕОМ. Останні, у свою чергу, призначаються для перероблення дискретної інформації. Як модель засобів перероблення застосовується поняття автомата.

І хоча символи 0 та 1 – елементи булевої алгебри – є абстрактними, зручніше розглядати булеву алгебру як таку, що оперує висловлюваннями. Образно кажучи, висловлення – це деяке твердження, про яке можна сказати, що воно є істинним або хибним. Наприклад, “Київ – столиця України”, “Земля – третя планета від Сонця” – істинні висловлювання, “Квадрат має п’ять сторін” – хибне, а висловлювання “На вулиці сонячна погода” може бути хибним або істинним залежно від додаткових відомостей.

Будемо розглядати функції $f(x_1,\ldots,x_n)$, аргументи яких визначено на множині $E_2=\{0, 1\}$, такі, що $f(x_1,\ldots,x_n)\in E_2$, коли $x_i\in E_2$, $i=1..n$. Тобто $f\colon E_2^n \to E_2$.

<u>Означення 10.1.</u> Функції $f\colon E_2^n \to E_2$, де $E_2=\{0, 1\}$, називаються **функціями алгебри логіки** або **булевими функціями**. Множину булевих функцій від n змінних будемо позначати P_n: $P_n = \{ f \mid f\colon E_2^n \to E_2 \}$.

Логічними (булевими) змінними в булевій алгебрі називаються величини, які незалежно від їхньої конкретної суті можуть набувати лише двох значень.

<u>Означення 10.2.</u> Сукупність значень аргументів функції є **кортежем** або **набором**.

Функція, що залежить від n аргументів, називається n-місною і є повністю визначеною, якщо задано її значення для всіх наборів (кортежів) значень аргументів.

Наприклад, для булевої функції $f(x,y,z)$ сукупність значень $x=1$, $y=0$, $z=1$ записується як набір 101.

Існує три способи задання булевої функції: вербальний (або словесний), аналітичний і табличний. Аналітичне задання функції – опис її аналітичним виразом (формулою).

Наприклад, $f_1(x,y,z) = x\wedge(y\vee z)$. Одним із поширених способів задання булевої функції є її задання за допомогою таблиці відповідності (істинності).

У табл. 10.1 наведено приклад задання булевої функції від двох змінних. Перші два стовпці містять значення аргументів, а третій – значення функції при відповідних значеннях аргументів. Рядки містять всі можливі кортежі для двох булевих змінних.

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Табл. 10.1. Приклад задання функції за допомогою таблиці істинності.

В загальному випадку для довільного n таблицю істинності можна представити в наступному вигляді.

x_1	…	x_{n-1}	x_n	$f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)$
0	…	0	0	$f(0,\ldots,0,0)$
0	…	0	1	$f(0,\ldots,0,1)$
0	…	1	0	$f(0,\ldots,1,0)$
…	…	…	…	…
1	…	1	1	$f(1,\ldots,1,1)$

Табл. 10.2. Загальний вигляд таблиці істинності.

Множину наборів у таблиці істинності прийнято записувати у лексіграфічному порядку, так що кожний набір являє двійкове число. Відповідне йому десяткове число будемо називати **номером** набору (кортежу). Так, номер набору 101 дорівнює 5, номер набору 110 – 6.

Лема 10.1. Кількість наборів булевої функції $f(x_1,\ldots,x_n)$ від n змінних дорівнює 2^n. Кількість булевих функцій від n змінних дорівнює 2^{2^n}.

Доведення. Дійсно, множина всіх наборів булевої функції від n змінних утворена декартовим добутком $\{0,1\}^n$, потужність якого дорівнює 2^n. Множина всіх булевих функцій від n змінних є множина відображень $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$, потужність якого дорівнює 2^{2^n}. ►

Таким чином, булева функція від двох змінних повністю визначена, якщо задано її значення в кожному із чотирьох можливих наборів ($2^2 = 4$); булева функція трьох аргументів – в кожному з восьми наборів ($2^3 = 8$).

Кількість різних можливих булевих функцій від двох аргументів дорівнює 16, від трьох – 256.

Функції двох змінних відіграють важливу роль, тому що з них може бути побудована будь-яка булева функція.

10.2. Булеві функції однієї змінної

Загальна таблиця істинності для булевих функцій однієї змінної має вигляд табл. 10.3.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1

Табл. 10.3. Булеві функції однієї змінної

Тут функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ є функціями-константами: $f_1(x)$ – абсолютно істинна (константа одиниці); $f_2(x)$ – абсолютно хибна (константа нуля). $f_3(x)$ – логічне заперечення або НЕ, інверсія x (читається як “не x”, зображується $\bar{x}$), це єдина нетривіальна функція; $f_4(x)$ – змінна x (повторює значення змінної x і тому збігається з нею).

10.3. Булеві функції двох змінних

В табл. 10.4 наведено всі функції від двох змінних $f(x,y)$ з назвами.

Позначення	Назва				
	Змінна x	0	0	1	1
	Змінна y	0	1	0	1
$f_1 = 0$	Константа нуль	0	0	0	0
$f_2 = x\&y = x \wedge y$	Кон'юнкція	0	0	0	1
$f_3 = x \overline{\rightarrow} y$	Інверсія імплікації	0	0	1	0
$f_4 = x$	Повторення x	0	0	1	1
$f_5 = x \overline{\leftarrow} y$	Інверсія, обернена імплікація	0	1	0	0
$f_6 = y$	Повторення y	0	1	0	1
$f_7 = x \oplus y$	Сума за модулем 2	0	1	1	0
$f_8 = x \vee y = x+y$	Диз'юнкція	0	1	1	1
$f_9 = x \downarrow y$	Стрілка Пірса-Вебба	1	0	0	0
$f_{10} = x \equiv y = x \sim y$	Еквівалентність	1	0	0	1
$f_{11} = \overline{y} = \neg y$	Інверсія y	1	0	1	0
$f_{12} = x \leftarrow y$	Обернена імплікація	1	0	1	1
$f_{13} = \overline{x} = \neg x$	Інверсія x	1	1	0	0
$f_{14} = x \rightarrow y$	Імплікація	1	1	0	1
$f_{15} = x \vert y$	Штрих Шеффера	1	1	1	0
$f_{16} = 1$	Константа одиниця	1	1	1	1

Табл. 10.4. Булеві функції двох змінних

Як вже зазначалось, булевих функцій від двох змінних 16, з яких шість є константами або функціями одного аргументу: $f_1 = 0$, $f_4 = x$, $f_6 = y$, $f_{11} = \overline{y}$, $f_{13} = \overline{x}$, $f_{16} = 1$. Інші 10 функцій залежать від двох змінних і мають свої загальноприйняті позначення та назви.

Функція $f_2 = x \wedge y$ – кон'юнкція (логічне множення) істинна тоді, коли x і y істинні. Кон'юнкцію називають також функцією **І**.

Функція $f_8 = x \vee y$ – диз'юнкція (логічне додавання) істинна тоді, коли істинними є або x, або y, або обидві змінні. Кон'юнкцію називають також функцією **АБО**.

Від диз'юнкції потрібно відрізняти функцію $f_7 = x \oplus y$, яка називається додаванням за модулем 2 (диз'юнктивна сума або нерівнозначність) і є істинною, коли істинні або x, або y окремо.

Наприклад, маємо два висловлювання: "Завтра буде холодна погода", "Завтра піде сніг". Диз'юнкція цих висловлювань – нове висловлення "Завтра буде холодна погода або піде сніг". З'єднувальний сполучник, що утворив нове висловлення – **АБО**.

Кон'юнкція утворюється таким чином: "Завтра буде холодна погода і піде сніг" – за допомогою сполучника **І**.

Функція Шеффера (штрих Шеффера) - $f_{15} = x|y$, є хибною тільки тоді, коли x і y є істинними. Німецький математик Д. Шеффер на основі цієї функції створив алгебру, названу алгеброю Шеффера.

Функція стрілка Пірса-Вебба – це функція $f_9 = x \downarrow y$, що є істинною тільки тоді, коли x і y є хибними. Математики Ч. Пірс та Д. Верб, які незалежно один від одного вивчали властивості цієї функції, створили алгебру, названу алгеброю Пірса-Вебба.

Імплікація – це функція $f_{14} = x \rightarrow y$, яка є хибною тоді й тільки тоді, коли x є істинним, а y – хибним.

10.4. Булевий простір

Часто для спрощення запису булевої функції замість повного переліку змінних наборів використовують двійкові значення наборів, для яких функція набуває одиничних значень. Наприклад, запис

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bigvee_{1}^{3} F(1,4,7)$$

означає, що функція набуває одиничних значень на наборах 1, 4 і 7. Таку форму запису називають числовою (табл. 10.5).

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Табл. 10.5.

Означення 10.3. **Булевим простором** називається множина всіх наборів булевих векторів: M = {X}.

Поставимо у взаємно однозначну відповідність елементам $x_1,x_2,\ldots,x_n$ множини X двійкові змінні, що позначаються тими самим літерами $x_1,x_2,\ldots,x_n$, але набувають значень із множини {0,1}, а у відповідність елементам булевого простору M поставимо набори (кортежі) змінних, вважаючи, що змінна x_i набуває значення 1 в деякому кортежі, якщо елемент x_i множини X належить відповідному простору M і набуває значення 0 в іншому випадку.

Таким чином, упорядковану сукупність двійкових змінних $x_1,x_2,\ldots,x_n$ можна розглядати як деякий змінний вектор $X = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, що набуває значення з множини M усіх сталих n-компонентних булевих векторів. Сукупність значень вектора X, на яких булева функція набуває значення 1, позначимо через M^1, а сукупність значень, на яких функція перетворюється на 0, - через M^0. Очевидно, $M^1 \cup M^0 = M$ (для повністю визначеної булевої функції).

Безпосередній перелік цих векторів можна здійснити за допомогою булевої матриці, кожний рядок якої задає один з елементів множини M^1. Наприклад, функція $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bigvee_{1}^{3} F(3,6,10)$ набуває значення 1 на трьох кортежах. Булева матриця має вигляд

$$\left\| M^1 \in X \right\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

10.5. Властивості функцій алгебри логіки

Означення 10.4. Функція $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ **суттєво залежить** від змінної x_i, якщо існує такий набір значень $a_1,\ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots,a_n$, що

$$f(a_1,\ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots,a_n) \neq f(a_1,\ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots,a_n).$$

В цьому випадку змінна x_i називається **суттєвою** змінною, інакше x_i називають **несуттєвою** (**фіктивною**) змінною.

Наприклад, нехай булеві функції $f_1(x_1,x_2)$ та $f_2(x_1,x_2)$ задані таблицею істинності:

x_1	x_2	$f_1(x_1,x_2)$	$f_2(x_1,x_2)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

Для цих функцій змінна x_1 – суттєва, а x_2 – несуттєва.

Означення 10.5. Функції f_1 та f_2 називаються рівними, якщо функцію f_2 можна одержати з f_1 додаванням і/або вилученням фіктивних аргументів.

Можна вважати, що коли задано функцію f_1, то задано також функцію f_2.

Існують два типи функцій, які не мають суттєвих змінних:

- функція, тотожна 0 (константа 0);
- функція, тотожна 1 (константа 1).

Константи 1 і 0 можна розглядати як функції порожньої множини змінних.

Означення 10.6. Булева функція $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ називається **симетричною відносно змінних** $x_1,\ldots,x_k$, якщо для будь-якої підстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_k \end{pmatrix}$$

стверджується рівність:

$$f(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_n) = f(x_{j_1},\ldots,x_{j_k},x_{k+1},\ldots,x_n).$$

Функції, тотожно рівні константам 1 та 0, є симетричними відносно будь-якої сукупності змінних.

10.6. Реалізація булевих функцій формулами

Як і в елементарній алгебрі, в алгебрі логіки, виходячи з елементарних функцій, можна будувати формули. Назвемо P множину всіх функцій.

Означення 10.7. Нехай L – деяка (не обов'язково скінченна) підмножина функцій з P, $L\subset P$ (**базис**). Кожна функція $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ з L ($f\in L$) називається **формулою**. Нехай також $A_1,\ldots,A_n$ – вирази, що є або формулами, або символами змінних. Тоді вираз $f(A_1,\ldots,A_n)$ також називається формулою.

Означення 10.8. Усяке висловлювання, що є складеним із деяких початкових висловлювань за допомогою 14 логічних операцій з 16, крім 0 та 1, також називається формулою алгебри логіки.

При утворені (побудові) формул використовуються знаки (символи) трьох категорій:

- символи змінних: x, y, a, b, c,…;
- символи логічних операцій: $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\oplus$, $\neg$;
- пари символів ( ), [ ], { }.

Приклади формул. Нехай L – множина елементарних функцій. Такі вирази є формулами:

- $\{[(x_1\wedge x_2) \oplus x_1] \vee x_2\}$;
- $[\neg x_1\wedge(x_1\vee x_3)]$;
- $\overline{\{x_1 \vee [(x_2 \to x_3) \wedge (x_3 \to x_2)]\}}$,

а ці вирази не є формулами:

- $(a\vee (x\wedge y$
- $\vee\ x\wedge y$.

На практиці дужки розділяють на внутрішні та зовнішні. Формула $F=A\wedge B$ без дужок не є формулою. Проте для скорочення запису зовнішні дужки часто пропускають, і тому цей вираз означає формулу.

Означення 10.9. Нехай F – довільна формула. Тоді формули, що використовувались для її побудови, називаються **підформулами** формули F.

Нехай формула F є формулою для множини функцій $\{ f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots, f_s(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$. Розглянемо множину функцій $\{ g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots, g_s(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$, де функція g_i має ті самі змінні, тобто залежить від тих самих змінних, що і функція f_i, i=1..s.

Розглянемо формулу Fg, що випливає з F заміною $(f_1,\ldots,f_s)$ на $(g_1,\ldots,g_s)$. У цьому випадку формула Fg має ту саму структуру, що й формула F.

<u>Означення 10.10.</u> Якщо формула $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ описує функцію $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, тобто формула F є формулою для змінних $x_1,x_2,\ldots,x_n$, де $f\in L$, то кажуть, що формулі $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ відповідає функція $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, або формулі F зіставлена функція *f*.

Якщо функція *f* відповідає формулі F, то кажуть також, що формула F реалізує функцію *f*. Оскільки функції розглядаються з точністю до фіктивних змінних, вважаємо, що формула F реалізує будь-яку функцію *f*.

Якщо функція $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, що реалізується формулою $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, має несуттєву змінну x_i, то змінну x_i можна вилучити, замінивши функцію *f* рівною їй функцією *f* ‘, а формулу F – формулою F’, яка випливає з F завдяки ототожненню змінної x_i з будь-якою із змінних, що залишилися. Очевидно, формула F’ є формулою, що реалізує функцію *f* ‘.

Знаючи таблиці істинності для функцій базису, можна побудувати таблицю істинності тієї функції, яку реалізує дана формула.

Наприклад, $F_1=(x_1 \wedge x_2)\vee((x_1 \wedge \overline{x_2})\vee(\overline{x_1} \wedge x_2))$.

x_1	x_2	$x_1 \wedge \overline{x_2}$	$\overline{x_1} \wedge x_2$	$(x_1 \wedge \overline{x_2})\vee(\overline{x_1} \wedge x_2)$	$x_1 \wedge x_2$	F_1
0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1

Таким чином, формула F_1 реалізує диз’юнкцію. Розглянемо іншу формулу , $F_2=(x_1 \wedge x_2)\to x_1$.

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	F_2
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Таким чином, формула F_2 реалізує константу 1.

При складанні логічного висловлювання із простих використовується принцип суперпозиції, тобто підстановка у функцію замість її аргументу інших функцій. Замість будь-якої змінної використовується як власне незалежна змінна, аргумент, так і змінна, що є функцією інших змінних. Цей принцип є правильним також у звичайній алгебрі. За допомогою принципу суперпозиції з двомісних булевих функцій можна побудувати будь-яку булеву функцію.

Принцип суперпозиції дає змогу на основі трьох основних елементарних функцій (заперечення, кон’юнкція та диз’юнкція) здобути складне логічне висловлювання, що описує функціонування цифрових систем й автоматів.

При перетворенні формул використовуються такі операції підстановки змінних і безповторної підстановки функцій:

- операція підстановки змінних

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_{i1} & x_{i2} & \ldots & x_{in} \end{pmatrix}$$

  що дає змогу виконати підстановку змінних у функцію $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ та здобути в результаті функцію $f(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{in})$. Очевидно, підстановка змінних включає їх перейменування, перестановку й ототожнення;
- операція безповторної підстановки функцій дає можливість будувати вирази $f(A_1,\ldots,A_n)$, де A_i – або формула, або змінна, причому хоча б одне з A відмінне від змінної, а множини змінних, що входять в A_i й A_j не перетинаються ($i\neq j$).

Очевидно, кожна формула може бути здобута з функцій, що належать їх множині, застосуванням спочатку операції безповторної підстановки функції, а потім операції підстановки змінних. Уведена мова формул зручна для запису функцій алгебри логіки, які описують різні умови для висловлювань.

10.7. Рівносильні формул

Означення 10.11. Формули F_1 та F_2 називаються **рівносильними**, якщо при будь-яких значеннях змінних $x_1,\ldots,x_n$, що входять у ці формули, вони набувають однакових значень.

Наприклад:

- $\bar{\bar{x}}$ рівносильне x;
- $x \vee x$ рівносильне x;
- $(x \vee y) \wedge x$ рівносильне x.

Між поняттям рівносильності й еквівалентності існує зв’язок: формули F_1 та F_2 – рівносильні тоді і тільки тоді, коли формула $(F_1 \sim F_2)$ набуває значення істини.

При визначенні рівносильності формул не обов’язково передбачати, що вони містять одні й ті самі значення змінних.

Приклади важливих рівносильних формул:

- $x \vee x = x$, $\quad x \wedge x = x$;
- $x \vee y = y \vee x$, $\quad x \wedge y = y \wedge x$;
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $\quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
- $(x \wedge y) \vee x = x$, $\quad (x \vee y) \wedge x = x$;
- $x \vee (y \wedge c) = (x \wedge y) \vee (x \wedge c)$, $\quad x \wedge (y \vee c) = (x \vee y) \wedge (x \vee c)$;
- $x \vee 1 = 1$, $\quad x \wedge 1 = x$;
- $x \wedge 0 = 0$, $\quad x \vee 0 = x$;
- $\bar{\bar{x}} = x$;
- $\overline{(x \wedge y)} = \bar{x} \vee \bar{y}$, $\quad \overline{(x \vee y)} = \bar{x} \wedge \bar{y}$;
- $x \vee x' = 1$, $\quad x \wedge x' = 0$.