ЛЕКЦІЯ 10
Способи завдання й властивості графів

План лекції
1. Операції з елементами графів
2. Способи задавання графа
3. Задавання графа за допомогою матриці інцидентності
3.1. Властивості матриці інцидентності неорієнтованого графа
3.2. Властивості матриці інцидентності орієнтованого графа
4. Задавання графа за допомогою матриці суміжності
4.1. **Властивості матриці суміжності**
4.2. Матриця суміжності орієнтованого графа
4.3. Властивості матриці суміжності орієнтованого графа
5. Задавання графа за допомогою списку ребер
6. Ізоморфізм графів
6.1. Алгоритм розпізнавання ізоморфізму графа
7. Теоретико-множинні операції над графами

Операції з елементами графів

1. Операція видалення ребра. Нехай $G=(V,E)$ – граф і $e \in E$ – деяке його ребро. Граф $G_1 = G - e$ одержуємо із графа G шляхом видалення ребра e за умови, що $G_1 = \left(V, E \setminus \{e\}\right)$. Таким чином, видалення ребра графа не викликає зміни кількості його вершин.

Властивості операції видалення ребра
Нехай необхідно вилучити ребра $e \in E$ і $e_1 \in E$. Тоді справедлива тотожність: $(G-e)-e_1 = (G-e_1)-e$.
Якщо підряд виконується кілька операцій видалення ребер, то результат **не залежить від порядку видалення**.

2. Операція видалення вершини
Нехай $G=(V,E)$ і $v \in V$ – деяка вершина графа G . Граф $G_2 = G - v$ одержуємо із графа G шляхом видалення вершини v із множини вершин V і видалення всіх інцидентних з вершиною v ребер з множини ребер E.
Таким чином, видалення вершин графа може викликати зміну кількості його ребер.

Властивості операції видалення вершини

Нехай необхідно вилучити вершини $v \in V$ й $v_1 \in V$. Тоді слушна тотожність: $(G-v)-v_1=(G-v_1)-v$.

Якщо підряд виконується кілька операцій видалення вершин, то результат **не залежить від порядку видалення**.

3. Операція введення ребра

Нехай $G=(V,E)$ і існують дві вершини $u \in V$ і $v \in V$, і $(u,v) \notin E$. Тоді операція введення ребра може бути представлена виразом:

$G_3 = G + e = (V, E \cup \{e\})$, де $e=(u,v)$.

Властивості операції введення ребра

Виходячи із властивості комутативності операції об'єднання, можна стверджувати, що при введенні в граф декількох ребер результат не залежить від порядку їх додавання.

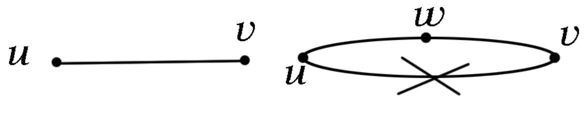
$$(G+e)+e_1=(G+e_1)+e \text{, де } e \in E \text{ і } e_1 \in E.$$

4. Операція введення вершини в ребро

Нехай дано граф $G=(V,E)$, який включає вершини $v \in V$ і $u \in V$, а також ребро $(v,u) \in E$, яке їх з'єднує. Операція введення вершини в ребро може бути представлена виразом:

$$G_4 = \left(V \cup \{w\}, \left(E \cup \{(v,w)\} \cup \{(w,u)\}\right) \setminus \{(v,u)\}\right).$$

До множини V додають вершину w, до множини E додають ребра (v,w) і (w,u), а ребро (v,u) видаляють з множини E.



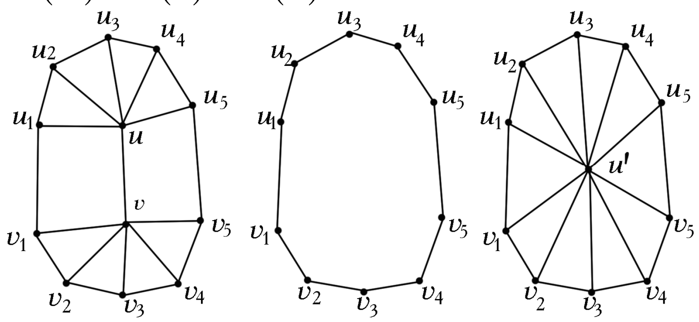
5. Ототожнення (злиття) вершин

Нехай дано граф $G=(V,E)$, що включає вершини $v \in V$ і $u \in V$ з відповідними множинами суміжності $\Gamma(v)=\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ і $\Gamma(u)=\{u_1, u_2, ..., u_k\}$.

Злиття вершин v і u виконують у два етапи:

1. Виключають вершини v і u з графа G: $G' = G - v - u$

2. Приєднують до отриманого графа вершини u' з такою множиною суміжності: $\Gamma(u') = \Gamma(v) \cup \Gamma(u)$: $H = G' + u'$.



Задавання графа в математиці

У дискретній математиці прийнято розглядати три способи задавання графів:

1. **Аналітичний спосіб**

Аналітичний спосіб припускає представлення графа $G(V, E)$ у **вигляді множин** V і E. Для задавання цих множин можуть використовуватися всі три способи задавання множин: **явно, предикатом, рекурсивною процедурою**.

2. **Графічний спосіб**

Вершини представлені **точками**, а **ребра – лініями, що** з'єднують ці точки.

3. **Матричний спосіб**

Граф задають у вигляді **матриці інцидентності** або **матриці суміжності**.

Задавання графа за допомогою матриці інцидентності

Неорієнтований граф

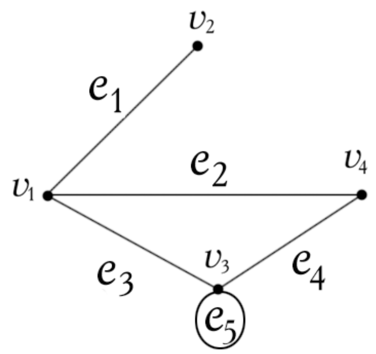
Нехай G – **неорієнтований** граф. Нехай B – матриця, кожний **рядок** якої **відповідає вершині** графа, а кожний **стовпець відповідає ребру** графа.

Будемо вважати, що вершини і ребра графа пронумеровані.

Елемент i-го рядка й j-го стовпця матриці B, який позначають b_{ij}, дорівнює 1, якщо i-а вершина інцидентна j-му ребру, і дорівнює 0 у протилежному випадку. Матрицю B називають *матрицею інцидентності* неорієнтованого графа G.

Отже, елементи матриці інцидентності $B = (b_{ij})$ задають формулою:

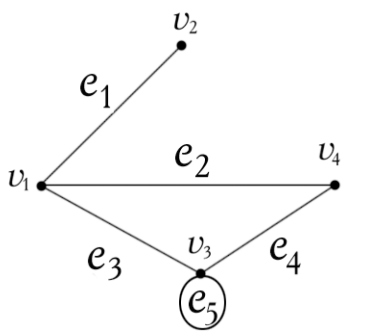
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{якщо ребро } e_i \textit{ інцидентне вершині } v_j, \\ 0, & \textit{в протилежному випадку.} \end{cases}$$



Приклад. Представимо матрицею інцидентності граф $G = (V, E)$, заданий аналітично множиною вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ і множиною ребер $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_1, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_3)\}$

Графічне представлення даного графа – на рисунку.

Матриця інцидентності графа містить інформацію, представлену на рисунку:



$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\
\hline
v_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
v_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

Звідси $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Властивості матриці інцидентності неорієнтованого графа

1. Для вершин без петель **степінь вершини дорівнює сумі одиничних елементів** відповідного рядка матриці, оскільки кожна одиниця в цьому рядку представляє інцидентність цієї вершини ребру.

2. У **кожному стовпці**, який не представляє ребро петлі, **будуть дві одиниці**, тому що кожне таке ребро інцидентне двом вершинам.

3. У рядку матриці інцидентності, який відповає вершині **з петлею**, сума **одиниць на одну більше** степеня даної вершини.

4. Стовпець, що відповідає **ребру петлі**, містить тільки **одну одиницю**.

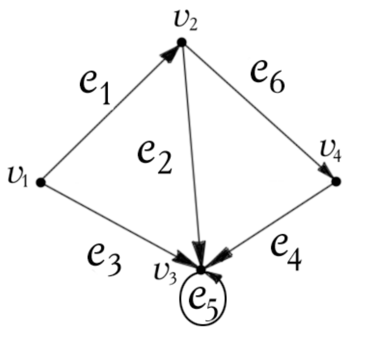
Властивості матриці інцидентності орієнтованого графа

Нехай G – **орієнтований** граф. Тоді матриця інцидентності $B = \left(b_{ij}\right)$ включає елементи, які дорівнюють 1, якщо вершина інцидентна з початком ребра, дорівнюють
-1, якщо вершина інцидентна з кінцем ребра, дорівнюють 0, якщо вершина і ребро не інцидентні, дорівнюють 2 або будь-якому числу, якщо вершина містить петлю

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & \text{якщо вершина } v_j \text{ є початком ребра } e_i,\\ -1, & \text{якщо вершина } v_j \text{ є кінцем ребра } e_i,\\ 2, & \text{якщо вершина } v_j \text{ є початком і кінцем ребра } e_i,\\ 0, & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Приклад. Нехай задано орієнтований граф $G=(V,E)$, де $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ і $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$

Графічне представлення даного орграфа:

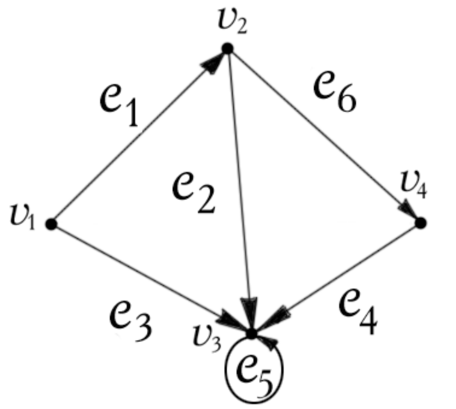


Матриця інцидентності орграфа має вигляд:

$$\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6\\ \hline v_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ v_2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ v_3 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0\\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\end{array}$$

або

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$



Задавання графа за допомогою матриці суміжності

Нехай G – неорієнтований граф.

Нехай C – матриця, **рядки якої позначені вершинами графа** і **стовпці позначені тими ж вершинами** в тому ж самому порядку.
Елемент i-го рядка й j-го стовпця матриці C позначається c_{ij}, і

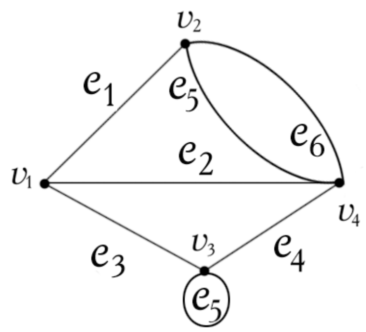
- дорівнює 1, якщо існує одне ребро з i-ої вершини в j-у вершину,
- дорівнює числу ребер з i-ї вершини в j-у вершину при наявності декількох ребер,
- дорівнює 0 якщо ребер між вершинами не існує.

Матрицю C називають *матрицею суміжності* графа G.

Формула для визначення елементів матриці суміжності графа

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо існує ребро } \left(v_i, v_j\right), \\ k, \text{ якщо існують ребра } \left\{ \overbrace{\left(v_i, v_j\right), \left(v_i, v_j\right), \ldots, \left(v_i, v_j\right)}^{k} \right\} \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Приклад. Розглянемо неорієнтований граф



Матриця суміжності даного графа має вигляд:

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	1
v_2	1	0	0	2
v_3	1	0	1	1
v_4	1	2	1	0

або

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Властивості матриці суміжності

1. Матриця суміжності неорієнтованого графа симетрична щодо головної діагоналі.

2. Якщо вершина має петлі, то їх число розміщається на головній діагоналі матриці суміжності.

3. Якщо між двома вершинами графа існує кілька ребер, то на перетині рядків і стовпців проставляється їхня кількість.

Матриця суміжності орієнтованого графа

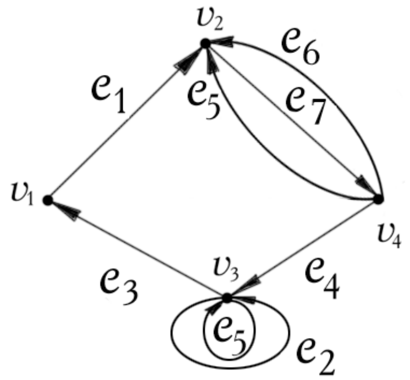
Нехай G – орієнтований граф.

Нехай C – матриця, **рядки якої позначені вершинами графа і стовпці позначені тими ж вершинами** в тому ж самому порядку.
Елемент i-ого рядка й j-го стовпця матриці C, позначається c_{ij}, і

- дорівнює 1 якщо ребро виходить із вершини v_i, представленої i-м рядком і входить у вершину v_j, представлену j-м стовпцем матриці.
- дорівнює числу ребер з i-ї вершини в j-у вершину при наявності декількох ребер,
- дорівнює 0 якщо ребер між вершинами не існує.

Матрицю C називають *матрицею суміжності* орграфа G.

Приклад. Розглянемо орієнтований граф:



Його матриця суміжності має вигляд:

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ v_4 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \text{ або } \mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Властивості матриці суміжності орієнтованого графа

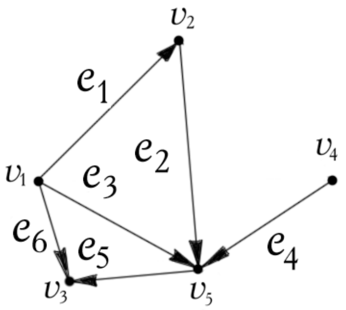
1. Матриця суміжності несиметрична щодо головної діагоналі.

2. Сума чисел у рядку матриці суміжності без урахування чисел на головній діагоналі дозволяє визначити потужність *напівстепеня виходу* для кожної вершини орграфа: $\deg^{+}(v_i)$, де $1 \le i \le n$.

3.Сума чисел у стовпці матриці суміжності без урахування чисел на головній діагоналі дозволяє визначити потужність *напівстепеня входу* для кожної вершини орграфа: $\deg^{-}(v_i)$, де $1 \le i \le n$.

Задавання графа за допомогою списку ребер

Список ребер графа (орграфа) представлено двома стовпцями. Перший стовпець містить ребра, а другий – інцидентні з ними вершини. Для неорієнтованого графа порядок проходження вершин довільний. Для орграфа першим стоїть номер вершини, з якої ребро виходить. Список ребер графа (орграфа) може також бути представлений послідовністю елементів, кожний з яких містить ребро та інцидентну йому пари вершин.

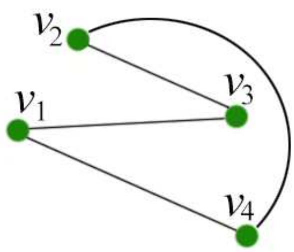


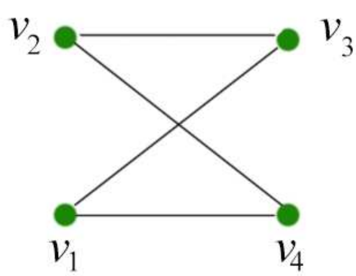
Приклад. Орграф і його список ребер.

$$e_1 \to (v_1, v_2), e_2 \to (v_2, v_3), e_3 \to (v_1, v_5),$$
$$e_4 \to (v_4, v_5), e_5 \to (v_5, v_3), e_6 \to (v_1, v_3)$$

Ізоморфізм графів

Способи задавання графа:
- графічний (рисунок),
- матрицею інцидентності,
- списком ребер,
- матрицею суміжності.





Вид рисунка залежить від форми ліній і взаємного **розташування вершин**.

Не завжди легко зрозуміти, чи однакові графи, зображені на різних рисунках.

Вид матриць і списку ребер **залежить від нумерації** вершин і ребер графа.

Граф повністю **заданий**, якщо **нумерація** його вершин **зафіксована**.

Графи, що відрізняються тільки нумерацією вершин, називають *ізоморфними.*

Визначення ізоморфізму графів

Нехай $G=(V,E)$ і $H=(V_1,E_1)$ – графи.

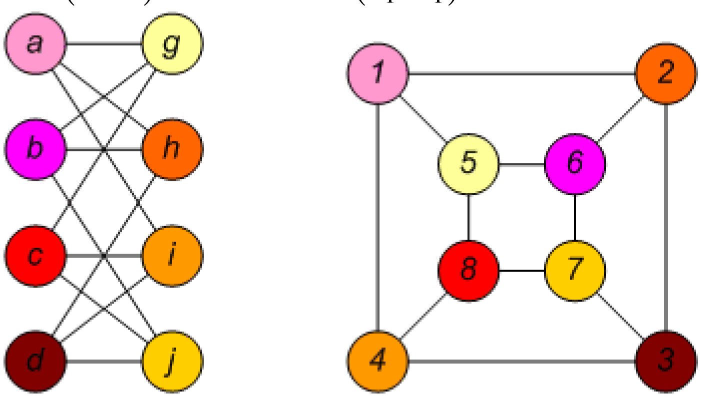
$R:V\to V_1$-взаємно однозначна відповідність,

$$(|V|=|V_1|).$$

Відображення R називають *ізоморфізмом* графів G і H, якщо для будь-яких вершин $u,v\in G$ їх образи $R(u)$ і $R(v)$ суміжні в графі H тоді і тільки тоді, коли u і v суміжні в графі G.

Якщо таке відображення R існує, то графи G і H називають *ізоморфними* графами.

Приклад. $G(V,E)$ $H(V_1,E_1)$

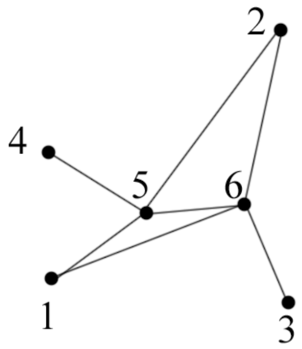


1. $|V|=8, |V_1|=8,\ |V|=|V_1|$

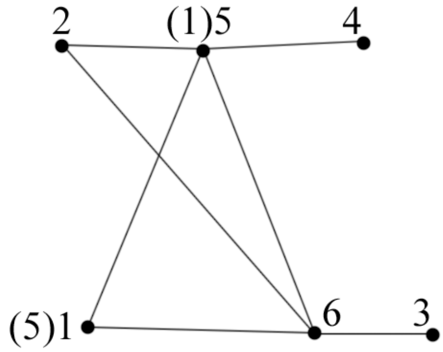
2.

$$
\begin{array}{ll}
(a,g)\to(1,5) & (c,g)\to(8,5)\\
(a,h)\to(1,2) & (c,i)\to(8,4)\\
(a,i)\to(1,4) & (c,j)\to(8,7)\\
(b,g)\to(6,5) & (d,h)\to(3,2)\\
(b,h)\to(6,2) & (d,i)\to(3,4)\\
(b,j)\to(6,7) & (d,j)\to(3,7)
\end{array}
$$

Приклад. Графи G й H – ізоморфні.



Граф G.



Граф H.

G – матриця суміжності графа G й **H** – матриця суміжності графа H

$$
\mathbf{G}=\left\|\begin{matrix}0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\1&1&0&1&0&1\\1&1&1&0&1&0\end{matrix}\right\|
\quad
\mathbf{H}=\left\|\begin{matrix}0&1&0&1&0&1\\1&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&1\\1&1&1&0&1&0\end{matrix}\right\|
$$

Властивість матриць суміжності ізоморфних графів

Якщо графи G й H **ізоморфні**, то з матриці суміжності графа G можна одержати матрицю суміжності H шляхом послідовної перестановки рядків і стовпців.

Для цього потрібно виконати максимально $n!$ перестановок, де n – число вершин графа.

Ізоморфізм орграфів

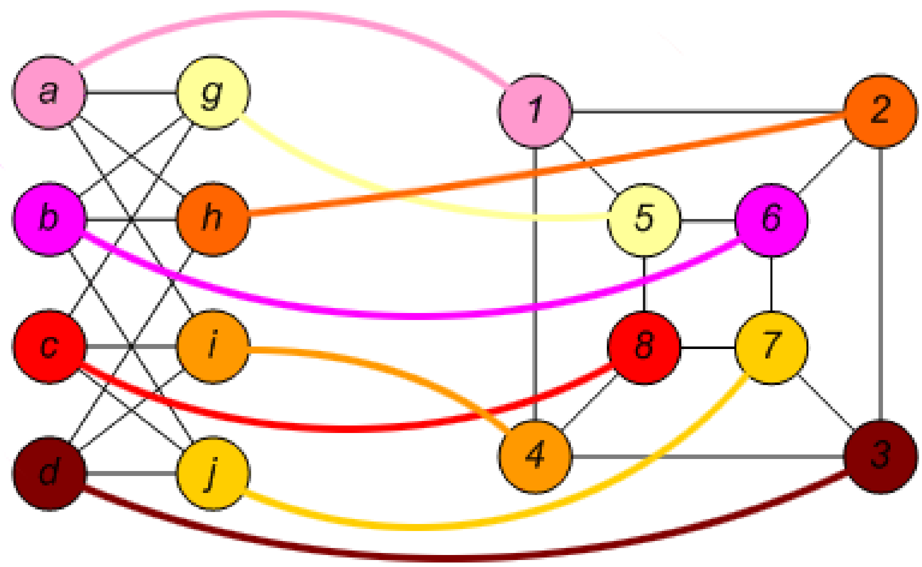
Для того, щоб два *орграфа* були *ізоморфні*, додатково до розглянутих раніше умов потрібно, щоб напрямки їх ребер збігалися.

Алгоритм розпізнавання ізоморфізму графів
$G(V,E)$ і $H(W,X)$

1. Перевіряємо умову $|V|=|W|=n$. **Якщо кількість вершин графа $|V|$ не дорівнює кількості вершин графа $|W|$, то графи однозначно неізоморфні**.
2. **Сортуємо елементи** множин $V=\{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ і $W=\{w_1,w_2,w_3,...,w_n\}$ за критерієм величини потужностей множин напівстепені виходу і напівстепені входу для кожної вершини.

3. В отриманих упорядкованих послідовностях вершин шукаємо **вершини, з однаковими значеннями критерія упорядкування**, тобто шукані вершини повинні мати однакову кількість вихідних ребер і однакову кількість вхідних.

4. Якщо такі **вершини знайдені**, то **з'єднуємо їх ребром** з метою побудови графа взаємно однозначної відповідності. Якщо такої відповідності немає, тобто одна зі знайдених вершин уже включена в граф відповідності, то вихідні графи G й H неізоморфні.
5. Якщо **граф взаємно однозначної відповідності побудований**, **то розглянуті графи ізоморфні**, а його ребра вказують на перестановки, які потрібно зробити для ізоморфного перетворення графа G в граф H.



Теоретико-множинні операції над графами

1. Операція об'єднання графів

Граф F називається об'єднанням графів $G=(V,E)$ і $H=(V_1,E_1)$ якщо

$$F=G\cup H=(V\cup V_1,E\cup E_1).$$

Якщо $V \cap V_1 = \varnothing$ й $E \cap E_1 = \varnothing$, то об'єднання графів називають диз'юнктивним.

З властивостей операції об'єднання випливає, що $G \cup H = H \cup G$.

Граф є зв'язним, якщо його не можна представити у вигляді диз'юнктивного об'єднання двох графів і незв'язним – у протилежному випадку.

2. Операція перетину графів

Граф F називають перетином графів
$G = (V, E)$ і $H = (V_1, E_1)$ якщо

$$F = G \cap H = (V \cap V_1, E \cap E_1).$$

3. Операція доповнення

Доповненням графа $G = (V, E)$ називають граф $\bar{G} = (V, \bar{E})$, множиною вершин якого є множина V, а множина ребер формується відповідно до правила $\bar{E} = \{ e \in V \times V \,|\, e \notin E \}$

4. Декартовий добуток графів

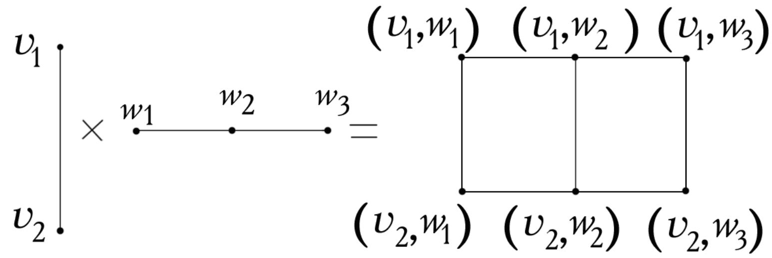
Декартовым добутком графів $G_1(V_1, E_1)$ і $G_2(W_2, E_2)$ називають граф $G(\Omega, E)$, множиною вершин якого є декартовий добуток $\Omega = V_1 \times V_2$, де

$V_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $W_2 = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ і $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n \cdot m}\}$,

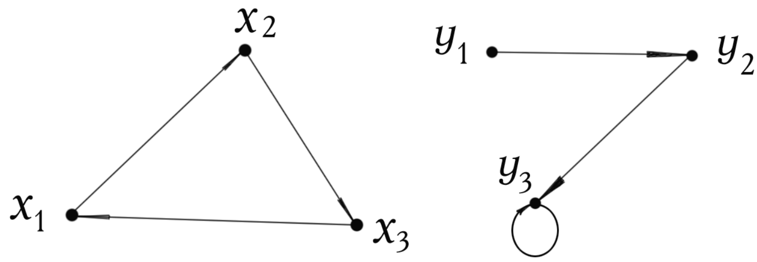
$$\omega_1 = (v_1, w_1),\ \omega_2 = (v_1, w_2), ...$$

Причому вершина (v_i, w_j) суміжна з вершиною (v_a, w_b) при $1 \le i, a \le n, 1 \le j, b \le m$ тоді й тільки тоді, коли в графі G_1 суміжні відповідні вершини v_i і v_a, а в графі G_2 суміжні вершини w_j і w_b.

Приклад 1. На рисунку показаний приклад добутку $G = G_1 \times G_2$.
$G_1 = (V_1, E_1)$, де $V_1 = \{v_1, v_2\}$ й $E_1 = \{(v_1, v_2)\}$.
$G_2 = (W_2, E_2)$, де $W_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ й
$E_2 = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3)\}$.



Приклад. Знай ти декартовий добуток орграфів, які задані графічно



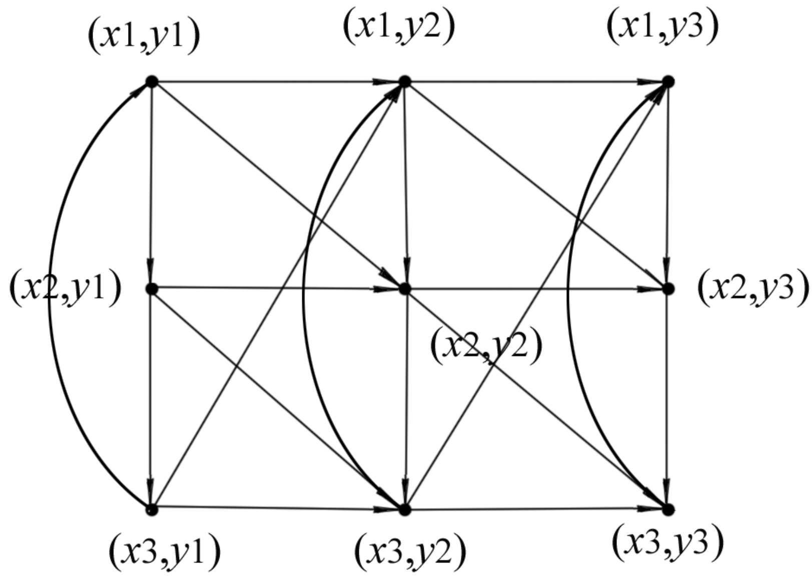
Розв'язок.

$G_1(X,E_1)$**:** $X=\{x_1,x_2,x_3\},\ E_1=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_1)\}$

$G_2(Y,E_2)$**:** $Y=\{y_1,y_2,y_3\},\ E_1=\{(y_1,y_2),(y_2,y_3),(y_3,y_3)\}$

Построим множество вершин декартового произведения графов:

$$\{(x_1,y_1),(x_{1,}y_2),(x_1,y_3),(x_2,y_1),(x_{2,}y_2),(x_2,y_3),(x_3,y_1),(x_{3,}y_2),(x_3,y_3)\}$$



Паросполучення ребер графа

Довільну підмножину попарно несуміжних ребер графа $G(V,E)$ називають його ***паросполученням.***
Комбінацію називають досконалим ***паросполученням*** якщо кожна вершина графа інцидентна хоча б одному ребру з паросполучення.

Приклад. Граф, показаний на рисунку, має досконале паросполучення $\{(v_1,v_4),(v_2,v_5),(v_3,v_6)\}$