Зміст

1 Ряди. Властивості збіжних рядів. Необхідна умова збіжності ряду. Гармонічний ряд

Нехай задано числову послідовність $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$. Тоді вираз $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається числовим рядом; елементи послідовності − членами ряду; елемент $a_n = f(n)$ − n-м членом ряду; суму $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ − частинною сумою ряду.

Числовий ряд називається збіжним, якщо послідовність частинних сум збігається до деякого числа S, що називається сумою ряду: $S=\lim_{n\to\infty} S_n$

Якщо не існує скінченої границі послідовності, то ряд називається розбіжним.

Нехай $a_0=b,\ a_1=bq,\ a_2=bq^2,\ ...,\ a_n=bq^n$, тоді такий числовий ряд називається геометричним рядом. В цьому випадку отримаємо такі частинні суми: $S_0=b,\ S_1=b(1+q),\ S_2=b\left(1+q+q^2\right),\ ...,\ S_n=\dfrac{b\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q}$. Спрямуємо $n\to\infty$ та розглянемо два випадки: $|q|<1$ та $|q|\geq 1$. В результаті чого отримаємо в першому випадку $S_n \underset{n\to\infty}{\to} \dfrac{b}{1-q}$, а в другому випадку скінченої границі не існує, ряд є розбіжним.

Означення: Ряд – вираз вигляду $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ $n\in N$. Домовилися ряд позначати скорочено $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

a_n – загальний член ряду. $S_n= a_1+a_2+\ldots+a_n$ – часткова сума ряду. Означення: Сума ряду – число $S=\lim_{n\to\infty} S_n$ якщо вона існує, то кажуть що ряд збігається і навпаки. Якщо всі a_n – const, то ряд називають числовим. Якщо a_n – ф-ції, то ряд функціональний. $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

<u>Властивості збіжних рядів</u>

<u>Теорема (необхідна ознака збіжності):</u> Якщо ряд збігається то існує. Обернене твердження не вірне, так як умова не є достатньою.

<u>Доведення:</u> $\exists\lim_{n\to\infty} S_n=S$; $\exists\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S$

$S_n-S_{n-1}=a_n$; $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0$

<u>Наслідок:</u> Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$, то можна стверджувати, що ряд розбігається.

<u>Теорема:</u> Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, а сума дорівнює S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ має суму kS.

<u>Доведення:</u> $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$; $\sigma m=ka_1+ka_2+\ldots+ka_n=kS_n$

$\exists\lim_{n\to\infty} S_n=S \Rightarrow \exists\lim_{n\to\infty} \sigma_n=kS$

<u>Теорема:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - збігаються і їх суми дорівнюють S та σ → $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ - збігаються, то їх суми дорівнюють S±σ.

<u>Теорема:</u> Якщо ряд збігається (розбігається) і в ньому відкинути скінченну кількість членів, то одержимо збіжний (розбіжний ряд).

Доведення: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, відкинемо k будь-яких членів ряду. Позначимо їх суму через C_k. Розглянемо таке n, щоб всы відк. члени мали номер менше за n. Тоді $S_n=C_k+\sigma_n$; $\exists \lim_{n\to\infty} S_n \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n$.

Висновок: Збіжність не залежить від того з якого n починається відлік.

Ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ називається гармонічним. Таким чином маємо $\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}_{S_n}+\underbrace{\left(\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)}_{n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}}+\ldots$ в результаті чого залишок суми ряду завжди більший за $\frac{1}{2}$, а отже у відповідності до критерію Коші ряд є розбіжним. Ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ називається узагальненим гармонічним.

Будь-який ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можна записати у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n+\sigma_n$, де $n=1,\ 2,\ \ldots,\ \sigma_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots$ при цьому величина σ_n називається залишком (хвостом) ряду.

2.3. Ознаки збіжності числових рядів з додатними членами

1) . Перша ознака порівняння.

Нехай маємо ряди $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ та $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, при цьому для всіх значень k виконується нерівність $a_k \ge b_k$, тоді:

- із збіжності першого ряду випливає збіжність другого ряду.
- із розбіжності другого ряду випливає розбіжність першого ряду.

2) Гранична ознака порівняння.

Нехай для членів рядів $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ та $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ існує скінченна границя $c=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}$, причому $c \ne 0$. Тоді ці ряди збігаються або розбігаються одночасно.

Доведення: (доведемо, що, якщо другий ряд розбігається, то перший також розбігається):

Для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер N починаючи з якого $\frac{a_n}{b_n}>c-\varepsilon$, де $c-\varepsilon>0$. Таким чином $a_n>(c-\varepsilon)b_n$. Отже відповідний „хвіст" першого ряду більший за хвіст другого ряду помноженого на $(c-\varepsilon)$. Оскільки відповідно до критерію Коші „хвіст" другого ряду не прямує до нуля, то не прямує до нуля і „хвіст” першого ряду, що свідчить про його розбіжність.

3) Ознака Д'Аламбера.

Якщо для ряду $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, існує границя $D = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то при $D > 1$ - ряд розбіжний; при $D < 1$ - ряд збіжний; при $D = 1$ - ряд вимагає дослідження за допомогою інших ознак.

4) Радикальна ознака Коші.

Якщо для ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ існує границя $C = \lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k}$, то при $C > 1$ - ряд розбіжний, при $C < 1$ - ряд збіжний і при $C = 1$ - ряд потребує подальшого дослідження іншим методом.

Доведемо, що ряд збіжний при $C < 1$.

Для будь-якого $\varepsilon > 0$, існує таке N, що при $n > N$ $\sqrt[n]{a_n} < C + \varepsilon < 1$,

звідси виходить, що $a_n < (C + \varepsilon)^n$

$\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k < \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (C+\varepsilon)^n = \frac{(C+\varepsilon)^{n+1}}{1-(C+\varepsilon)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, що й треба було довести

5) Інтегральна ознака Коші.

Таким чином, якщо ряд збіжний, то збіжним є і невласний інтеграл $I = \int\limits_{1}^{+\infty} f(k)dk$

Отже, розглянутий вище ряд та невласний інтеграл першого роду збіжні чи розбіжні одночасно.

4. Знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца.

Означення: Ряд називається знакозмінним, якщо серед його членів є як невід'ємні, так і від'ємні числа.

Ознака Лейбніца: Нехай члени знакопочережного ряду прямують до нуля, складаючи при цьому спадну за абсолютною величиною послідовність, тоді такий ряд є збіжний.

Доведення: Розглянемо ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$; $a_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$; $|a_{k+1}| < |a_k|$, припустимо, що додатними є члени ряду з непарними номерами a_1, a_3, a_5,...; а від'ємними – члени ряду з парними номерами: a_2, a_4, a_6,... .

Розглянемо частинні суми окремо з парними і окремо з непарними номерами:

$S_{2n} = \underbrace{(a_1 - |a_2|)}_{>0} + \underbrace{(a_3 - |a_4|)}_{>0} + \ldots + \underbrace{(a_{2n-1} - |a_{2n}|)}_{>0}$, отже у випадку частинних сум з парними номерами ми маємо зростаючу послідовність, в той же час $S_{2n} = a_1 - (|a_2| - a_3) - (|a_4| - a_5)\ldots - |a_{2n}|) < a_1$, тобто ця послідовність обмежена зверху, і, відповідно, прямує до певної границі:

$S_{2n} \xrightarrow{n\to\infty} S^*$. Оскільки $S_{2n+1} = S_{2n} + \underbrace{a_{n+1}}_{\to 0}$ то $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S^*$, що й треба було довести.

5. Абсолютно і умовно збіжні ряди, їх властивості.

Знакозмінний ряд є *збіжним абсолютно*, якщо збігається ряд складений з абсолютних величин його членів.

Якщо знакозмінний ряд збіжний, але ряд складений з абсолютних величин його членів розбіжний, то такий ряд називається *збіжним умовно.*

1. Властивості АЗР, можна сказати, що вони такі ж як у рядів з додатними членами:
   - Якщо $\sum_{k=1}^{n} a_k = S$, то $\sum_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha S$

     $S_n = a_1 + \ldots + a_n \underset{n\to\infty}{\to} S$

     $\alpha S_n = \alpha a_1 + \ldots + \alpha a_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha S$
   - Якщо $\sum_{k=1}^{n} a_k = S$ і $\sum_{k=1}^{n} b_k = S^*$, то $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = S + S^*$

     $(a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n) = S_n + S_n^* \underset{n\to\infty}{\to} S + S^*$
   - $a_1 + \ldots + a_n = S_n = a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$, де $S_{n-1} \underset{n\to\infty}{\to} S$ та $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

     Це є необхідною умовою збіжності.
   - $\sum_{k=1}^{n} a_k = S = S_n + \sigma_n$, де $S_n \underset{n\to\infty}{\to} S$ та $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
   - Якщо ряд є абсолютно збіжний, то довільний ряд, утворений з нього перестановкою його членів також є абсолютно збіжний.
2. Властивості УЗР:
   - В УЗР кількість додатних та від’ємних членів нескінченна;
   - Ряди складені з сум додатних та від’ємних членів УЗР – розбіжні;
   - Теорема Рімана: якщо знакозмінний ряд є збіжним , то шляхом перестановки його членів, його суму можна зробити рівною будь-якому наперед заданому числу.

6. Функціональні ряди. Ознака Вейєрштраса

Нехай $\{U_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ послідовність функцій. Якщо при фіксованому значенні числова послідовність $\{U_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ є збіжною до числа $U(x_0)$, то кажуть, що число x_0 належить області збіжності вказаної послідовності. Сукупність значень x при яких послідовність є збіжною, називається областю збіжності даної послідовності, а функція $U(x)$ визначена для значень x із цієї області називається границею даної послідовності.

Означення: Функціональна послідовність (функціональний ряд) називається рівномірно збіжною (рівномірно збіжним) на деякому інтервалі $(a;b)$ до функції $U(x)$. Якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $N = N(\varepsilon)$ таке, що для будь-якого $x \in (a;b)$ при $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність $\left|U_n(x) - U(x)\right| < \varepsilon$ або $\left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon$.

Ознака Вейєрштраса: Нехай для ряду $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$ існує збіжний числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, такий що при всіх значеннях k і довільних x з інтервалу $(a;b)$ виконується нерівність: $|U_k(x)| \le a_k$, тоді функціональний ряд збігається рівномірно для $x \in (a;b)$.

Доведення:

1. Функціональний ряд є абсолютно збіжним на вказаному інтервалі, оскільки ряд складений з абсолютних величин його членів збігається на цьому інтервалі за мажорантно-мінорантною ознакою порівняння.
2. Для будь-якого $\varepsilon > 0$, знайдеться $N(\varepsilon)$ таке, що при $n > N(\varepsilon)$ $\left|S(x) - S_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|U_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$, що і означає його рівномірну збіжність.

Властивості рівномірно збіжних рядів

- Якщо члени функціонального ряду є неперервними функціями на деякому інтервалі і ряд рівномірно збігається на цьому інтервалі, то його сума неперервна на цьому ж інтервалі.
- Функціональний ряд, який є рівномірно збіжним на деякому інтервалі, можна почленно інтегрувати на цьому інтервалі.

Тобто, якщо $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$ - рівномірно-збіжний на $(a;b)$, інтервал $[x_0; x] \in (a;b)$, то $\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} U_k(t)dt$

- Нехай члени ряду $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$ - неперервно диференційовані функції на інтервалі $(a;b)$, ряд складений з похідних $\sum_{k=1}^{\infty} U'_k(x)$ - є рівномірно збіжний на проміжку $(a;b)$. Якщо при цьому вихідний ряд є збіжний хоча б в одній точці $x_0 \in (a;b)$ то він є:

а) рівномірно збіжний на інтервалі $(a;b)$;

б) його сума являє собою неперервно диференційовну функцію на інтервалі $(a;b)$;

в) ряд допускає почленне диференціювання, тобто похідна суми ряду дорівнює сумі похідних його членів.

7. Властивості рівномірно збіжних рядів

- Якщо члени функціонального ряду є неперервними функціями на деякому інтервалі і ряд рівномірно збігається на цьому інтервалі, то його сума неперервна на цьому ж інтервалі.
- Функціональний ряд, який є рівномірно збіжним на деякому інтервалі, можна почленно інтегрувати на цьому інтервалі.

Тобто, якщо $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$ - рівномірно-збіжний на $(a;b)$, інтервал $[x_0;x] \in (a;b)$, то $\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} U_k(t)dt$

- Нехай члени ряду $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$ - неперервно диференційовані функції на інтервалі $(a;b)$, ряд складений з похідних $\sum_{k=1}^{\infty} U'_k(x)$ - є рівномірно збіжний на проміжку $(a;b)$. Якщо при цьому вихідний ряд є збіжний хоча б в одній точці $x_0 \in (a;b)$ то він є:

а) рівномірно збіжний на інтервалі $(a;b)$;

б) його сума являє собою неперервно диференційовну функцію на інтервалі $(a;b)$;

в) ряд допускає почленне диференціювання, тобто похідна суми ряду дорівнює сумі похідних його членів.

8. Степеневі ряди. Властивості степеневих рядів. *теорема Абеляю*
Властивості степеневих рядів.

Означення: Функціональний ряд вигляду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ називається степеневим рядом в околі точки $x = x_0$.

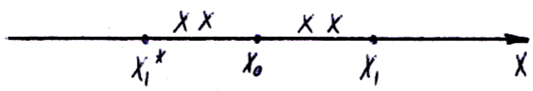
Теорема Абеля: Якщо степеневий ряд збігається при $x = x_1$, то він абсолютно збігається і при всіх значеннях $x = x_2$, таких що $|x_2 - x_0| < |x_1 - x_0|$.

Кругом збіжності степеневого ряду з комплексними членами $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ звуть такий відкритий круг $|z| < R$, що в кожній його точці ряд збігається абсолютно, а в кожній точці, за межамцього кругу – розбігається.

На межах інтегралу збіжності, в точках $x = \pm R$, ряд може збігатися, а може й розбігатися.

Перша теорема Абеля: Якщо степеневий ряд збігається при $x = x_1$, то він абсолютно збігається і при всіх значеннях $x = x_2$, таких що $|x_2 - x_0| < |x_1 - x_0|$.

Доведення:



Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ - збігається, то $a_n (x_1 - x_0)^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$, отже члени цього ряду є обмеженими величинами. В той же час

$$\left| a_n \cdot (x_2 - x_0)^n \right| = \left| a_n \cdot (x_1 - x_0)^n \cdot \left(\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} \right)^n \right| \le c \cdot \left| \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n = c \cdot q^n$$, де

$$q = \left| \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n < 1.$$

Скориставшись мажорантно-мінорантною ознакою порівняння, можемо стверджувати, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ - є збіжним, оскільки він мажорується за абсолютною величиною сумою членів нескінченно спадної геометричної прогресії.

Радіус збіжності: Для кожного степеневого ряду знайдеться число R $0 \le R < \infty$, таке що ряд є збіжним при $|x - x_0| < R$ і розбіжним при $|x - x_0| > R$, яке називається радіусом збіжності степеневого ряду.

Інтервал збіжності: Як випливає з попереднього, для знаходження області збіжності степеневого ряду досить визначити його радіус збіжності, і дослідити збіжність ряду у точках $x_1 = x_0 - R$, $x_2 = x_0 + R$.

Властивості степеневих рядів.

- Сума $S(x)$ степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ є неперервною ф-єю на інтервалі $(-R;\, R)$.
- Степеневий ряд усередині інтервалу збіжності можна почленно диференціювати.
- Степеневий ряд можна почленно інтегрувати на кожному відрізку, що міститься всередині інтервалу збіжності.

9. Ряд Тейлора, Маклорена. Теорема про розвинення аналітичної ф-ї в степеневий ряд.

Ряд вигляду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ називається рядом Тейлора для ф-ї $f(x)$ в околі точки x_0, якщо $x_0 = 0$ то **рядом Маклорена**.

Ф-ю можна представити наступним розкладом:

1. Нехай: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad x \in (-R; R)$ тоді

   $f(x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$

2. Нехай: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R)$, тоді $f(\alpha x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \alpha^k (x - x_0)^k$

   при $x \in \left(\frac{x_0 - R}{|\alpha|}; \frac{x_0 + R}{|\alpha|} \right)$.

3. Нехай: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad x \in (-R; R)$, тоді $f(x^\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{\alpha k}$, де $x \in (-\sqrt[\alpha]{R}; \sqrt[\alpha]{R})$, за умови, що для ненульових a_n α_n є натуральним числом

4. Нехай: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ при $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$.

   тоді $(x - x_0)^m f(x\ ) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+m}$, $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$

10. Ортогональна система функцій. Ряд Фур'є, коефіцієнти Фур'є, теорема Діріхле. Ряд Фур'є 2П- періодичної функції

Означення: Тригонометричним рядом Фур'є на проміжку $(-l; l)$ називається ряд вигляду : $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$, причому a_0, a_n, b_n, що є дійсними числами, називаються коефіцієнтами цього ряду або коефіцієнтами Фур'є, які визначаються за відповідними формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

Теорема Діріхлє: Якщо функція $f(x)$ є періодична з періодом $T = 2l$, на проміжку $(-l;l)$ задовольняє **умовам Діріхлє:**

1) Кусково-неперервна на $(-l;l)$

2) Кусково-монотонна на $(-l;l)$

3) Обмежена на $(-l;l)$

Тоді її ряд Фур'є збігається в кожній точці відрізку. Його сума:

1) $S(x) = f(x)$, якщо $x \in (-l;l)$ і є точкою неперервності ф-ї;

2) $S(x) = \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, якщо $x \in (-l;l)$ і є точкою розриву ф-ї;

$$S(-l) = S(l) = \frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$$

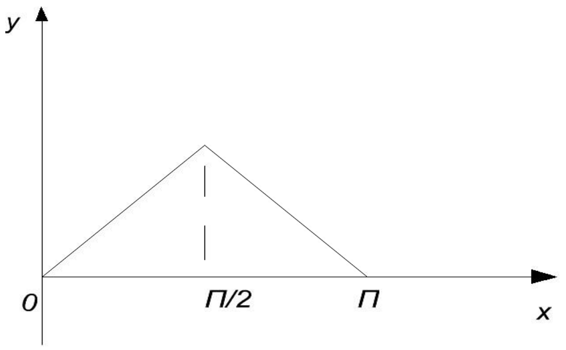
Ряд Фур'є 2П- періодичної функції:

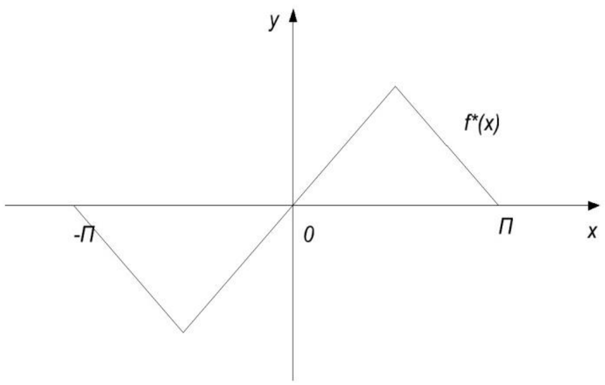
Будемо розкладати ф-цію f(x) у ряд Фур'є по синусам:

Для цього необхідно продовжити f(x) вліво непарним чином:

$$f(x) = \begin{cases} x; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \le x \le \dfrac{\Pi}{2} \\ \Pi - x; \ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{\Pi}{2} \le x \le \Pi \end{cases}$$

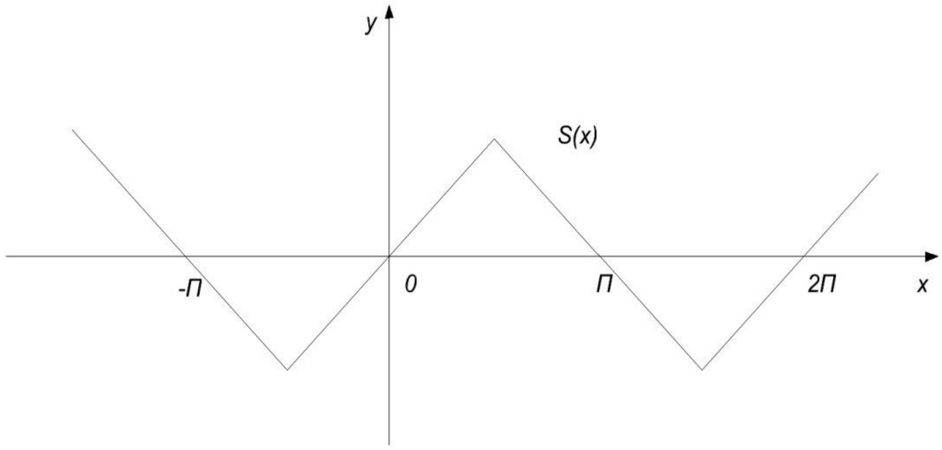
1)Намалюємо графік функції: 2)





3)Продовжимо другу ф-цію періодично з періодом 2П

Одержимо ф-цію



:

4)Функція обмежена та кусково-монотонна на [-П;П]. Отже за т. Діріхле, її ряд збігається до значення S(x), або S(x)- не має розривів.

5)Знаходимо коефіцієнти: $a_{0=}a_n$=0

$$b_n = \frac{\text{Ï}}{2}\left(\int_0^{\text{Ï}/2} \frac{x}{n}\frac{\sin xdx}{dv} + \int_{\text{Ï}/2}^{\text{Ï}} \frac{(\text{Ï} - x)}{n}\frac{\sin nxdx}{dv}\right) =$$

Проінтегруємо частинами:

$$= \frac{2}{\Pi n^2}\left(\sin\frac{\Pi n}{2} + \sin\frac{\Pi n}{2}\right).$$

$$b_n = \frac{4}{\Pi n^2}\sin\frac{\Pi n}{2}.$$

$$b_{2k} = 0; \qquad b_{2k+1} = (-1)^k\frac{4}{\Pi(2k+1)^2}.$$

6) Запишемо ряд Фур'є:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{4}{\Pi(2k+1)^2}\sin(2k+1)\cdot x$$

$S(x) = f(x)$ при $x \in [0;\Pi]$.

7)Малюэться графік функції f(x).

Ф-ція може бути задана на $\forall$ проміжку довжиною 2П. Напр.: $x \in [a; a+2\Pi]$

Можна показати, що в цьому випадку формули для коефіцієнтів мають вид:

$$a_0 = \frac{1}{\text{Ï}}\int_a^{a+2\text{Ï}} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\text{Ï}}\int_a^{a+2\text{Ï}} f(x)\cdot\cos nxdx,$$ n=1,2,3

$$b_n = \frac{1}{\ddot{I}} \int_a^{a+2\ddot{I}} f(x) \cdot \sin nx dx,$$ n=1,2,3

Ряд Фур'є для парних і непарних ф-й.

Ряд Фур'є має вигляд $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$. У випадку, якщо ф-я є парною або непарною ряд можна спростити наступним чином:

- якщо маємо парну ф-ю, то ряд розкладається за косинусами, тобто

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \qquad b_n = 0$$

- якщо маємо непарну ф-ю, то ряд розкладається за синусами, тобто

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$a_0 = a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

11. Ряд Фур'є для ф-ї періоду $T = 2l$

Ряд Фур'є має вигляд $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$.

Якщо ф-я задана на проміжку від -1 до 1, то у випадку виконання умов Діріхлє вона може бути представлена сумою ряду:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l} \right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l} \right) \right),$$ де

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l} \right) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l} \right) dx$$

12. Інтеграл Фур'є. Теорема Фур'є.

Нехай $f(x)$ - функція, що задовольняє умовам Діріхлє на проміжку $[-l,l]$, і при цьому l може бути вибраним довільно, і при цьому $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ є збіжним

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l})=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}dt\cos\frac{k\pi x}{l}+\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}dt\sin\frac{k\pi x}{l})\right)$$

Запровадимо параметр $\lambda_k=\frac{k\pi}{l}$ та $\Delta\lambda_k=\frac{\pi}{l}$

λ_k при зміні k і l може пробігати всю додатню піввісь.

В такому випадку сума присутня у ряді Фур'є може розглядатися як інтегральна для інтеграла наступного вигляду:

$$I(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\right)d\lambda$$

$$a(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)\cos\lambda t\right)dt$$

$$b(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)\sin\lambda t\right)dt$$

Такий спосіб представлення функції називається представленням її **інтегралом Фур'є.**

Зауваження:

1. Аналогічно до рядів Фур'є в такому $I(x)=f(x)$ в її точках неперервності. $I(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ в точках розриву.
2. $\sqrt{a(\lambda)^2+b(\lambda)^2}$ визначає амплітудний спектр функції, в вираз $arctg\frac{a(\lambda)}{b(\lambda)}$ її фазовим спектром.
3. Для такого представлення функції спектр виявляється неперервним, а не лінійчастим
4. Амплітудний спектр може розглядатись як щільність розподілу енергії по частотах коливань.

$$\int_a^{è}f^2(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

5. Інтеграл Фур'є може бути записаний у вигляді $I(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda tdt\cdot\cos\lambda x+\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\lambda tdt\cdot\sin\lambda x\right)d\lambda=$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right)d\lambda$$

12. Інтеграл Фур'є для парних і непарних ф-й. Синус і косинус перетворення Фур'є.

Інтеграл Фур'є має вигляд: $f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\big(a(\lambda)\cos(\lambda x)+b(\lambda)\sin(\lambda x)\big)d\lambda$. У випадку якщо ф-я є парною або непарною його можна спростити наступним чином:

- у випадку, якщо ф-я є парною , то $a(\lambda)=2\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\cos(\lambda x)dx, \qquad b(\lambda)=0$. В результаті чого отримуємо косинус перетворення Фур'є.
- у випадку, якщо ф-я є непарною , то $b(\lambda)=2\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\sin(\lambda x)dx, \qquad a(\lambda)=0$. В результаті чого отримуємо синус перетворення Фур'є.

13. 14. Функція комплексної змінної. Границя. Неперервність Основні елементарні ф-ї КЗ Елементарні функції z^n, e^z та їх властивості

Означення: функція яка встановлює відповідність між двома множинами комплексних чисел називається функцію комплексної змінної.

Означення: Границею послідовності комплексних чисел $z_1 ... z_n, \dots$ називається таке комплексне число $z=\lim\limits_{n\to 0} z_n$, що $\forall\varepsilon>0 \ \ \exists N=N(\varepsilon)$: $n>N(\varepsilon)\Rightarrow|z-z_n|<\varepsilon$. Якщо $z_n=x_n+iy_n$, а $z=x+iy$, то $\sqrt{(x-x_n)^2+(y-y_n)^2}<\varepsilon$, тобто, для того, щоб сума невід'ємних чисел прямувала до нуля потрібно, щоб $x-x_n\to 0$ та $y-y_n\to 0$.

Таким чином збіжність послідовності комплексних чисел еквівалентна одночасній збіжності їх дійсних та уявних частин до відповідно дійсної та уявної частин комплексного числа z. Якщо хоча б одна з цих послідовностей прямує до нескінченості, то кажуть, що границею послідовності є невласне (нескінчене) комплексне число, якому на комплексній площині відповідає так звана нескінченно віддалена точка.

Функція називається неперервною в точці $z=z_0$, якщо :

1) вона визначена в деякому околі цієї точки , включаючи саму цю точку.
2) існує скінченна границя $c=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
3) $c=f(z_0)$

Основні елементарні ф-ї КЗ:

Можливість розгляду степеневих рядів з комплексними членами визначає можливість розгляду елементарних ф-й КЗ.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty$$

Використовуючи формулу Ейлера, отримаємо:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a\left(\cos b + i\sin b\right)$$

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$sh(iz) = i\sin z \qquad ch(iz) = \cos z \qquad \sin(iz) = -ishz \qquad \cos(iz) = chz$$

Важливою властивістю показникової ф-ї комплексного аргумента є те, що вона є періодичною з уявним періодом $T = 2\pi i$

$$e^{a+ib+2\pi ki} = e^a\left(\cos(b + 2\pi k) + i\sin(b + 2\pi k)\right) = e^{a+ib}$$

Оскільки для ф-й КЗ експонента є періодичною, то для оберненої до неї логарифмічної являється багатозначною (багатолистою).

$$w = e^z = e^{z+2k\pi i}$$

$$z = Lnw = Ln|w|e^{i\varphi}e^{2k\pi i} = \ln|w| + i\varphi + 2k\pi i$$

Всилу того, що в обл. КЗ показникові та тригонометрична ф-ї пов’язані через формулу Ейлера, обернені тригонометричні ф-ї виявляються пов’язаними з логарифмами.

$$w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$z = Arcs^{3}nw \qquad z = Arcc\hat{i}\,sw$$

$$w = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\bigg| e^{iz} = t \qquad w = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\bigg| e^{iz} = t$$

$$2iw = t - \frac{1}{t} \qquad 2w = t + \frac{1}{t}$$

$$t^2 - 2iwt - 1 = 0 \qquad t^2 - 2wt + 1 = 0$$

$$t_{12} = iw \pm \sqrt{1 - w^2} \qquad t_{12} = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$$

$$e^{iz} = iw + \sqrt{1 - w^2} \qquad e^{iz} = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

$$iz = Ln\left(iw + \sqrt{1 - w^2}\right) \qquad iz = Ln\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right)$$

$$z = \frac{1}{i}Ln\left(iw + \sqrt{1 - w^2}\right) \qquad z = \frac{1}{i}Ln\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right)$$

Елементарні функції z^n, e^z та їх властивості

$w = e^z$

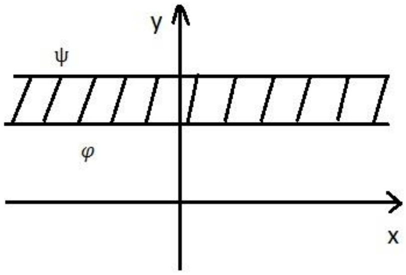
Можна вивести функції: e^z, sinz, cosz – як суми степеневих рядів.

Означення: $e^z = e^x(cosy + isiny)$

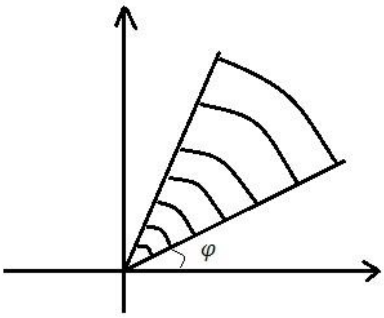
Отже, $u = e^x cosy$; $iv = e^x siny$.

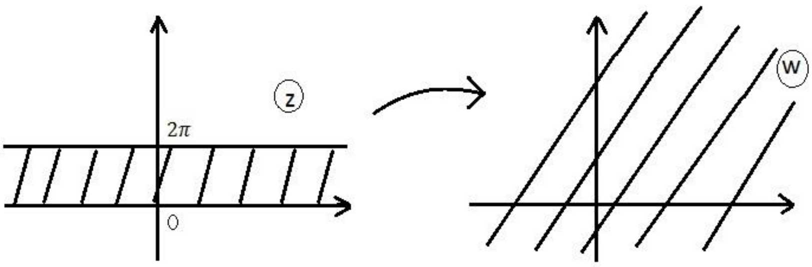
Легко перевірити, що умови Коші-Рімена виконуються в будь-якій точці, отже ця функція ціла. Неважко показати, що $(e^z)' = e^z$.

Функція проходить полосу:



у кут:



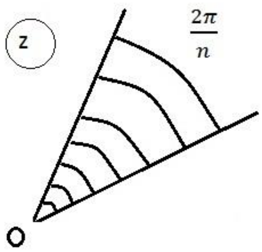


$2\pi n < Imz \leq 2\pi + 2\pi k\ , n \in Z\ \rightarrow C\backslash\{0\}$ (без точки нуль)

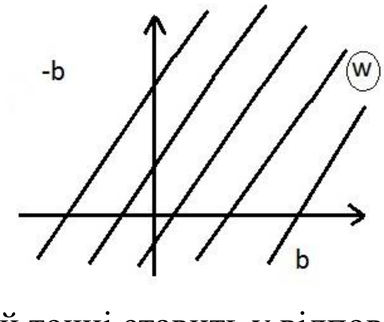
$w = \sqrt[n]{z}\ , n \in N$ – функція обернена до функції $w = z^n$

Ця функція має рівно n – значень.

Дійсно, функція z^n



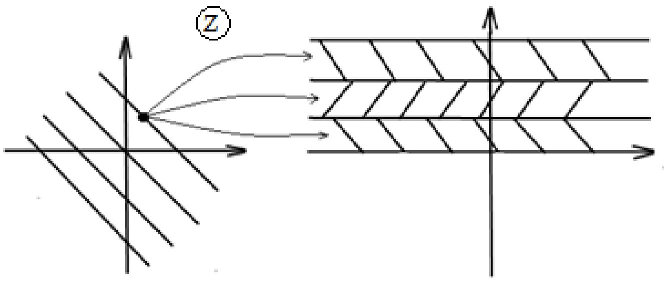
переходить в



Отже, обернена функція в кожній точці ставить у відповідність n – значень.

15. ln z

Розглянемо функцію обернену до e^{+z}. Вона має безліч значень, тому що має відповідне значення у кожній полосі.



Нехай $-\pi \leq Im\, w < \pi$

$w = U + iV;\ \ z = x + iy$

$e = x + iy \ \rightarrow\ e^U \cdot e^{iV} = x + iy$

$\begin{cases} e^U = |z| \ \rightarrow\ U = \ln|z| \\ V = \arg z \end{cases}$

Позначимо обернену функцію e^z слідуючим чином:

$\mathbf{\ln z = \ln|z| + i \arg z \ \rightarrow\ Arg\, z = \arg z + 2\pi n}$

$\boldsymbol{Ln\, z = ln\,|z| + i\, Arg\, z}$ ***або***

$\boldsymbol{Ln\, z = ln\,|z| + i\,(arg\, z + 2\pi n)}$

$\boldsymbol{Ln\, z = ln\, z + 2\pi}$

16. Зв'язок між тригонометричними і гіперболічними функціями

Елементарні функції ***sinz;cosz;lnz***

1). За означенням: $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};$

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$

<u>При $y = 0$</u>: $e^z = e^x$ - необмежена.

<u>При $x = 0$</u>: $e^z = e^{iy},\ |e^{iy}| = 1$ – обмежена, періодична.

$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z};\ ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z};$

<u>При y = 0</u> : $\cos z = \cos x,\ \sin z = \sin x, \ldots$ – періодичні, обмежені.

<u>При x = 0</u> : $\cos z, \sin z, \ldots$ – неперіодичні, необмежені.

2). $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2};\ \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$

$th\, z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z};\ cth\, z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z};$

Зв'язок між тригонометричними і гіперболічними функціями:

$ch\, z = \cos(iz)$

$sh\, z = -i \sin(iz)$

Отже, з гіперболічними функціями σ_k відбувається навпаки.

<u>При x = 0</u> : $sh\, z; ch\, z$ – періодичні.

При $y = 0$: $sh\, z = sh\, x$ - необмежена, періодична.3). $\ln z$(див. вище)

17. Диференціювання ф-ї комплексної змінної (ФКЗ). Умови Коші-Рімана

Ф-я $w = f(z)$ назив. аналітичною за Коші в деякій обл., якщо її похідна неперервна в цій обл.

ФКЗ $w = f(z)$ називається диференційовною в точці $z = z_0$, якщо вона визначена в цій точці та деякому її околі і має місце рівність: $f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z)\Delta z$, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha(z_0, \Delta z) = 0$. Похідною ф-ї $f(z)$ називається: $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$.

- існування скінченої похідної ф-ї в точці рівносильне її диференційовності;
- якщо ф-я диференційовна, то вона неперервна в точці, проте не напаки;

Теор.: Для того, щоб ф-я $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ була диференційовною в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ необхідно і достатньо виконання наступних умов:

- ф-ї $u(x, y)$ та $v(x, y)$ повинні бути неперервно диференційовними в точці $M_0(x_0, y_0)$
- Справедливі умови Коші-Рімана: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

Доведення:

Покладемо $\Delta z = \Delta x$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) + iv(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0(x_0, y_0)} + i\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{M_0(x_0, y_0)}$$

Тепер покладемо $\Delta z = \Delta iy$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) + iv(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y}$$

$$= -\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{M_0(x_0, y_0)} - i\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0(x_0, y_0)}$$

18. Інтегра від функції комплексної змінної. Його властивості,формула обчислення(довести 4 власт)

Нехай в кожній точці деякої гладкої кривої L з початком в точці z0 і кінцем в точці Z визначена неперервна функція f(z). Розібємо криву L на n частин в напрямку від z0 до z точками $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$. В кожній елементарній дузі $z_{k-1}z_k$ $k = 1,2 \dots n$ виберемо довільну точку C_kі зіставимо інтегральну сумму $\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta Z_k$ де $\Delta Z_k = z_k - z_{k-1}$. Границя такої інтегральної сумми при прямуванні до нуля найбільшої з елементарних дуг, якщо він існує, **називаеться інтегралом від функції** f(z) по кривій L і позначаеться символом $\int_L f(z)$. Таким чином

$$\int_l f(z)dz = \lim_{\max|\Delta Z_k| \xrightarrow[(n\to 0)]{} 0} \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta Z_k$$

Покажемо що якщо L – гладка крива , а f(z) –неперервна і однозначна ф-я, то інтерал існує. Дійсно нехай

$f(z) = u(x;y) + iv(x;y), z = x + iy, C_k = \hat{x}_k + i\hat{y}_k$ тоді

$f(C_k) = u(\hat{x}_k;\hat{y}_k) + iv(\hat{x}_k;\hat{y}_k)$,

$\Delta z_k = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k$тому

$$\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta Z_k = \sum_{k=1}^{n} u(\hat{x}_k;\hat{y}_k) + iv(\hat{x}_k;\hat{y}_k)\cdot(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \sum_{k=1}^{n}(u(\hat{x}_k;\hat{y}_k)\,\Delta x_k - v(\hat{x}_k;\hat{y}_k)\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(v(\hat{x}_k;\hat{y}_k)\,\Delta x_k - u(\hat{x}_k;\hat{y}_k)\Delta y_k)$$

Обидвісумми , що знаходяться в правій частині останньої рівності, являються інтегральними суммами для відповідних криволінійних інтегралів. При зроблених припущенняхпро криву L і функції f(z) границі цих сумм існують . Тому при переході до границі в останній рівності при $\max|\Delta z_k| \to 0$ отримаємо

$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_l vdx + udy$ Остання формула показує що обчислення комплексних інтегралів зводиться до обчислення криволінійих інтегралів в дійсній площині.

Можназаписати у вигляді $\int_L f(z)dz = \int_L (u + iv)(dx + idy)$

Якщо z=z(t)=x(t)+iy(t) то можна записати у вигляді

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u + iv)(dx + idy) = \int_{t1}^{t2}(u + iv)\left(x_t' + y_t'\right)dt = \int_{t1}^{t2} f\big(z(t)\big)z'(t)dt$$

Основні власт. Інттегр функ коплекс змінної 1. $\int_L dz = z - z0$

2. $\int_L (f1(z) \pm f2(z))dz = \int_L f1(z)dz \pm \int_L f2(z)dz$

3. $\int_L af(z)dz = a\int_L f(z)dz$ а-комплексне

4. $\int_L f(z)dz = -\int_{L-} f(z)dz$ 5. $\int_L f(z)dz = \int_{L1} f(z)dz + \int_{L2} f(z)dz$

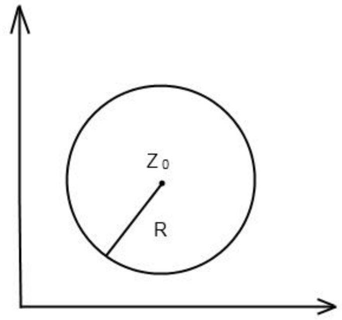
18. Теорема Коші для однозв'язної області

Якщо ф-я $f(z)$ аналітична в однозв'язній обл. D, то інтеграл від цієї ф-ї по будь-якому замкнутому контуру L, що лежить обл. D, рівний нулю $\oint_L f(z)dz = 0$.

Доведення: Припустимо що похідна $f'(z)$ неперервна. Маємо $\oint_L f(z)dz = \oint_L udx - vdy + i\oint_L vdx + udy$. В силу аналітичності $f(z) = u + iv$ і неперервності $f'(z)$ в однозв'язній обл. D, то ф-ї $u = u(x;y)$ і $v = v(x;y)$ неперервні і диференційовні в цій обл. і задовольняють умовам Коші-Рімана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Ці умови означають рівність нулю інтегралів $\oint_L udx - vdy$ і $\oint_L vdx + udy$. Звідси слідує, що $\oint_L f(z)dz = 0$.

19. Ряд Тейлора(ФКЗ). Формула Коші для похідної.

Теорема: $\sum_1^\infty Cn(z - z_0)^n$ – аналітична ф-ія. Область збіжності цього ряду – круг: $|z - z_0| < R$



Теорема: якщо f(z) - аналітична в області : $|z - z_0| < R$, то її можна представити у вигляді:

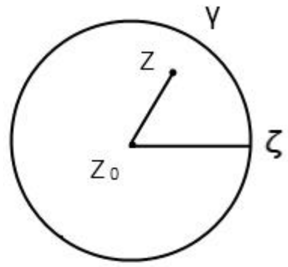
$f(z) = \sum_1^\infty Cn(z - z_0)^n$. Цей ряд – ряд Тейлора, бо $Cn = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Доведення: Запишемо інтегральну формулу Коші:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Розкладемо в степеневий ряд ф-цію, користуючись формулою неск. Складної геометричної прогресії:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} * \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_0^\infty \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$



Підставимо цей ряд в інтеграл та про інтегруємо його почленно. Одержимо:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta\right) * (z - z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

Наслідок: Якщо порівняти коефіцієнти з різних формул, одержимо формулу Коші для похідної:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

20. Класифікація ізольованих особливих точок ф-ї.

Особливі точки аналітичної ф-ї:

z_0 – називається ізольованою особливою точкою аналітичної ф-ї f(z), якщо в точці z_0 вона не є аналітичною, але існує окіл в кожній точці якого f(z) – аналітична.

Класифікація особливих точок:

1)Усувний

$\exists \lim_{z\to z_0} f(z)$.

$\lim_{z\to z_0} \frac{sinz}{z} = 1$.

$\lim_{z\to 0} \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \cdots}{z} = 1$.

2)Полюс

$\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

f(z)=1/z; z_0 =0 – полюс

3)Істотно-особлива:

$\nexists \lim_{z\to z_0} f(z)$.

$f(z) = sin\frac{1}{z}$, z_0=0 – істотно-особлива.

4)Полюс має порядок.

Кажуть, що z_0 – полюс порядка n, якщо

$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} f(z) \cdot (z - z_0) =$

$\lim_{z\to z_0} f(z)\,(z - z_0)^2 = \cdots = \lim_{z\to z_0} f(z)\,(z - z_0)^{n-1} = \infty$;

$\lim_{z\to z_0} f(z)\,(z - z_0)^n \neq 0$;

Характер особливої точки залежить від вигляду ряда Лорана ф-ї f(z) в околі точки z_0.

Теорема: якщо z_0 – усувна, то ряд Лорана має вигляд

f(z)=$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$

Дов-ня: покажемо, що коефіцієнти : $c_{-1}=c_{-2}=\ldots=0$

$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$.

Нехай γ – це коло радіуса r:

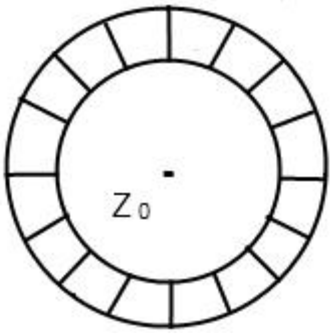
$|z-z_0|=r$

Оскільки існує limf(z)⇒|f(z)|<M

$\left|\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \le M\int_\gamma \frac{dl}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^{n+1}}\int_L dl = \frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r = \frac{2M\pi}{r^n} \xrightarrow{r\to\infty} 0 \Rightarrow c_n =$
0

, n<0

21. Ряд Лорана. аналітична в кільці



Ряд Лорана

Нехай f(z) – аналітична в кільці: $r < \ |z - \ z_0| < R =>$ $f(z) = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ - цей ряд наз. Рядом Лорана

Ряд Лорана має дві частини:

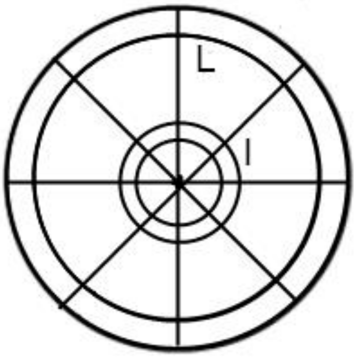
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$$

Правильна *головна*

Коефіцієнти знаходяться за формулами:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \qquad z < \ \rho < R, \qquad |z-z_0| = \rho$$

Доведення: розглянемо кільце, яке лежить всередині нашого кільця:

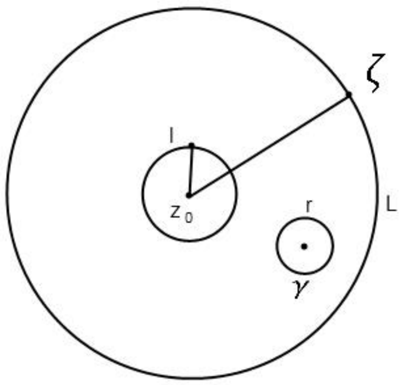


$r < r_1 < |z-z_0| < R_1 < R$

$L: |z-z_0| = R_1$

$l: |z-z_0| = r_1$

Розглянемо довільну точку Z всередині кільця:



За узагальненою теоремою Коші:

$$\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_l + \int_\gamma$$

$$\int_\gamma = \int_L + \int_l$$

$$l:\ \frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n};\ \ z, z_0 - \text{фіксовані}$$

$$L:\ \frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(\zeta - z_0)^{n+1}};$$

Підставимо ці ряди в інтеграли. Проінтегруємо почленно і за інтегрально формулою Коші:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

22. Лишки, їх обчислення. Обчислення лишків в полюсі.

Лишки

Якщо z_0 – особлива точка ф-ції $f(z_0)$, толишок $f(z)$ в точці z_0 – це число, яке позначається $Res(f(z);z_0) \equiv res_{z=z0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} * \oint_{\gamma}^{0} f(z)dz$, де γ-коло з центром в z_0.

Очевидно, що коли $f(z)$ – аналітична в точці z_0,то її лишок в цій точці =0.

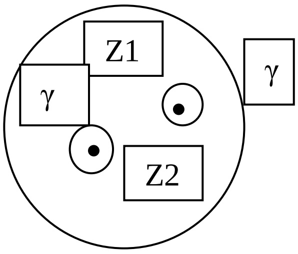
<u>Теорема Коші</u>

Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в замкненій області D, обмежена контуром L, за винятком скінченного числа особливих точок z_k(k=1,2,3…), що лежать в середині області D, то

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\, f(z_k)$$

<u>Дов-ня</u>

<u>Навколо кожної особливої точки z_k опишемо</u> кого l_k так, щоб вона повністю містилась в області D, не містила всередині інших особливих точок і щоб ніякі з цих кіл не мали спільних точок.



Тоді за теоремою Коші для багато зв'язної області маємо:

$$\oint_L f(z)dz = \oint_{l1} f(z)dz + \oint_{l2} f(z)dz + \cdots$$

Де при інтегруванні всі контури обходяться проти годинникової стрілки

$$\oint_{l1} f(z)dz = 2\pi i\ \ Res\, f(z1)$$

$$\oint_{l2} f(z)dz = 2\pi i\ \ Res\, f(z2) \ldots\ldots\ldots i\ m\ \partial$$

Відповідно

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i\ \ Res\, f(z1) + 2\pi i Res\, f(z2) + \cdots$$

$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\, f(z_k)$ ▲

<u>Обчилення лишків</u>

1)Усувна res(f(z))=0

2) Полюс

А) порядок N=1

Представимо $\oint$ у вигляді ряду Лорана:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z0} + c0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z0)^n$$
$$\lim_{z \to z0} f(z) * (z - z0) = c_{-1}$$
$$res_{z=z0}(f(z)) = \lim_{z \to z0} f(z) * (z - z0)$$
Б) N>1 (порядок полюса)
$$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z - z0)^N} + \frac{c_{-N+1}}{(z - z0)^{N+1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z0)^1} \pm \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z0)^n$$
Помножимо рівність на $(z - z0)^n$
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) * (z - z0)^{N-1} = c_{-N} + c_{-N+1}(z - z0) + \cdots + c_{-1}(z - z0)^{N-1} + \cdots$$
Продиференціюєм N-1 раз, отримаємо:
$$res_{z=z0} f(z) = \frac{1}{(N-1)!} * \lim_{z \to z0} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \left(f(z) * (z - z0)^N\right)$$

23. Означення функції-оригіналу. Означення перетворення Лапласа. Теорема існування. Необхідна умова існування зображення.

- Ф-я $f(t)$ називається оригіналом, якщо вона задовольняє наступним вимогам:

- $f(t) = 0, \ t < 0$
- $f(t)$ - неперервна при $t \geq 0$ за винятком можливо скінченої кількості точок розриву першого роду на кожному скінченому інтервалі
- існують такі числа $A > 0, \ M \geq 0$, що $\left|f(t)\right| \leq Ae^{Mt}$

Означення: інтегральний оператор , який переводить функцію-оригінал $f(t)$ у функцію-зображення $F(p)$, визначену за допомогою інтеграла Лапласа ($F(p) \leftarrow f(t)e^{-pt}dt$) називається оператором або перетворенням Лапласа.

Теорема проіснування зображення. Для всякого оригіналу $f(t)$ зображення $F(p)$ існує в півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$, де s_0-показник росту функції $f(t)$, причому ф-я $F(p)$ є аналітична в цій півплощині ($s > s_0$)

Доведення першої частини теореми. Нехай $p = s + i\sigma$ довільна точка півплощини $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

Враховуючи що $|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}$ знаходимо:
$$\left|\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt\right| \leq \int_0^{\infty} |f(t) \cdot e^{-pt}| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{s_0 t} \cdot |e^{-pt}| dt = M \int_0^{\infty} e^{s_0 t} \cdot e^{-st} dt =$$
$$M \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s - s_0},$$
Так як $s - s_0 > 0$ і $|e^{-pt}| = |e^{-st} \cdot e^{-i\sigma t}| = e^{-st} \cdot |\cos\sigma t - i \sin\sigma t| = e^{-st}$. Таким чином
$|F(p)| = \left|\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt\right| \leq \frac{M}{s - s_0}$. Звідси випливає абс. Збіжність інтегралу

$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-pt}dt$, тобто зображення $F(p)$ існує і однозначне в півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

Необхідна умова існування зображення. Якщо ф-я $F(p)$ являє собою зображення ф-ї $f(t)$, то $\lim F(p)=0$ при $p\to\infty$. Це твердження витікає безпосередньо з нерівності $|F(p)|=\left|\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-pt}dt\right| \le \frac{M}{s-s_0}$, коли $\operatorname{Re} p = s \to +\infty$. Так як $F(p)$-аналітична ф-я в півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$, то $f_2(t)$ при $p\to\infty$ по любому напрямку.

24-27 Властивості перетворення Лапласа

- **лінійність**: нехай $f_1(t)\text{Ђ } F_1(p);\ f_2(t)\text{Ђ } F_2(p)$, тоді
  $\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\text{Ђ } \alpha F_1(p)+\beta F_2(p)$ - випливає з лінійності інтеграла
- **подібність**: нехай $f(t)\text{Ђ } F(p)$, тоді $f(\alpha t)\text{Ђ } \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$

  Доведення: $\int_0^{+\infty} f(\alpha t)e^{-pt}dt = \left|\begin{matrix}\tau=\alpha t\\ dt=\frac{1}{\alpha}d\tau\end{matrix}\right| = \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\frac{p}{\alpha}\tau}\frac{1}{\alpha}d\tau = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
- **зсуву:** нехай $f(t)\text{Ђ } F(p)$ ðî ä³ $f(t)e^{-pt}\text{ Ђ } F(p-\alpha)$

  Доведення: $\int_0^{+\infty} f(\alpha t)e^{\alpha t}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-\alpha)t}dt = F(p-\alpha)$
- **запізнення:** $f(t)\text{Ђ } F(p)$ ðî ä³ $f(t-\alpha)\eta(t-\alpha)\text{Ђ } F(p)e^{-\alpha p}$

  Доведення:

$$\int_0^{\infty} f(t-a)\eta(t-a)e^{-pt}dt=\int_0^{\infty} f(t-a)e^{-pt}dt=\left|\begin{matrix}\tau=t-a\\ d\tau=dt\end{matrix}\right|=\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p(\tau+a)}d\tau=e^{-ap}\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau$$

- **диференціювання оригіналу:**
  $f(t)\text{Ђ } F(p)$ ðî ä³ $f'(t)\text{Ђ } pF(p)-f(0)$

  $$f^{(n)}(t)\text{Ђ } p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

  Доведення:

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt=\left|\begin{matrix}u=e^{-pt} & du=-pe^{-pt}dt\\ dv=f'(t)dt & v=f(t)\end{matrix}\right|=f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}+p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=pF(p)-f(0)$$

- **диференціювання зображення:** $f(t)\text{Ђ } F(p)$ ðî ä³ $(-t)f(t)\text{Ђ } F'(p)$

  $$(-t)^n f(t)\text{Ђ } F^{(n)}(p)$$

Доведення: $F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ òî ä³ $F'(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)(-t)e^{-pt}dt$

- **інтегрування оригіналу:**
  $f(t)$ Ђ $F(p)$ òî ä³

$$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \text{ Ђ } \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right)e^{-pt}dt=\begin{vmatrix} u=\int\limits_0^t f(\tau)d\tau & du=f(t)dt \\ dv=e^{-pt}dt & v=-\dfrac{1}{p}e^{-pt}\end{vmatrix}=-\frac{1}{p}e^{-pt}\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\Bigg|_0^{+\infty}+$$

$$+\frac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=\frac{F(p)}{p}$$

- **інтегрування зображення:** $f(t)$ Ђ $F(p)$ òî ä³ $\dfrac{f(t)}{t}$ Ђ $\int\limits_p^{+\infty} F(\pi)d\pi$ - випливає з властивості диференціювання зображення.

28. Теорема Бореля. Згортка функцій. Зображення згортки.

Теорема Бореля: Зображення згортки оригіналів дорівнює добутку їх зображень.

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)d\tau\right)e^{-pt}dt=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^t f_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau\, f_2(t-\tau)e^{-p(t-\tau)}dt=\left|t-\tau=u\right|=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty} f_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau\int\limits_0^{+\infty} f_2(u)e^{-pu}du$$

Інтеграл вигляду $\int\limits_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)d\tau$ називають згорткою функцій $f_1(t)$ та $f_2(t)$ і позначають $f_1(t)*f_2(t)$. Зображення згортки ф-й відповідно до теор. Бореля: $f_1(t)*f_2(t)$ Ђ $F_1(p)F_2(p)$

Згортка ф-й має властивість комутативності та асоціативності.

29. Інтеграл Дюамеля. Зображення періодичного сигналу.

Якщо $f_1(t)$ Ђ $F_1(p)$; $f_2(t)$ Ђ $F_2(p)$, то оригінал зображення $pF_1(p)F_2(p)$ має вигляд $f_1(0)\,f_2(t)+\int\limits_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ - формула (інтеграл) Дюамеля.

Доведення: Спираючись на теорему про диференціювання зображення отримаємо:

$pF_1(p)F_2(p)=\left(pF_1(p)\right)F_2(p)=\left(pF_1(p)-f_1(0)\right)F_2(p)+f_1(0)F_2(p)$ Ъ $\left(f_1'(t)*f_2(t)\right)+$

$+f_1(0)\,f_2(t)$ çîäíîãî áîêó, à çäðóãî îòðèìàºìî:

$pF_1(p)F_2(p)=F_1(p)\left(pF_2(p)\right)=\left(pF_2(p)-f_2(0)\right)F_1(p)+f_2(0)F_1(p)$ Ъ $\left(f_2'(t)*f_1(t)\right)+$

$+f_2(0)\,f_1(t)$

В результаті маємо два інтеграли Дюамеля:

$$f_1(0)\,f_2(t)+\int_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau \qquad\qquad f_1(t)\,f_2(0)+\int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)\,d\tau$$

Нехай оригінал $f(t)$ є ф-я періодична з періодом T. Тоді

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt= =\int_0^{T} f(t)e^{-pt}dt+\int_T^{2T} f(t)e^{-pt}dt+\ldots=$$

Позначимо інтеграл $\int_0^T f(t)e^{-pt}dt=F_1(p)$ і зауважимо, що

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-pt}dt=\left|\begin{matrix}\tau=t-nT\\ d\tau=dt\\ t=\tau+nT\end{matrix}\right|=\int_0^T f(\tau+nT)e^{-p(\tau+nT)}d\tau=\int_0^T f(\tau)e^{-p\tau}e^{-pnT}d\tau=e^{-npT}F_1(p)$$

.

$$=\frac{F_1(p)}{1-e^{-pT}}$$

30. Формула Рімана-Мелліна

Теорема Якщо ф-я F(p) - зображення ф-ї-оригіналу f(t), то f(t) може бути знайдена за формулою $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)e^{pt}dp$

Ця рівність має місце в кожній точці, в якій f(t) неперервна. В точках разриву ф-ї f(t) значення правої частини рівне : $\dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$

Інтеграл в правій частині формули називають інтегралом Мелліна; інтегрування може проводитись по любій вертикальній прямій p = σ + i ω, σ = const > σ0, − ∞ < ω < ∞, і інтеграл розуміється в смислі головного значення:

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\lim_{\omega\to+\infty}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}F(p)e^{pt}dp\,.$$

Доведення:

Запишемо інтеграл Фурє для функції: $e^{-st}\cdot f(t)$

$(p = S + iy), S = \operatorname{Re} p$

$$e^{-st} \cdot f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{yt} dy \int\limits_{0}^{\infty} e^{-s\tau} \cdot F(\tau) \cdot e^{-y\tau i} d\tau$$

Помножимо ліву і праву частину на e^{st}

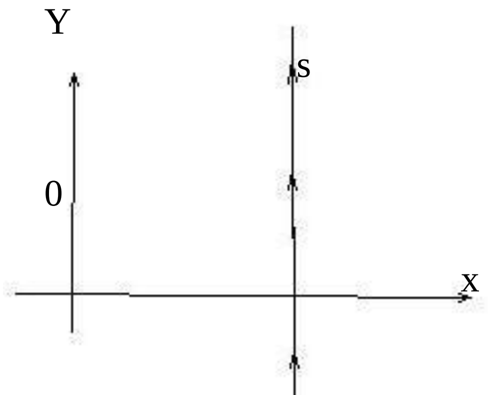
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int e^{(s+yt)t} dy \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(S+yi)t} \cdot f(\tau) d\tau.$$

Зробимо заміну:

$S + iy = p, (S - const)$

$dy = \dfrac{dp}{i} \rightarrow (формула*)$

Інтегрування ведеться вхдовж вертикальної прямої.



Знаходження оригіналів за допомогою лишків.

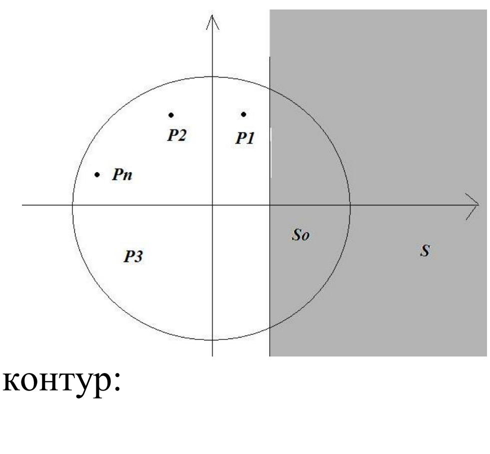
Теорема:в умовах виконання теореми(формули Рімана-Меліна):

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \underset{p=p_k}{Res}(F(p)e^{pt}) \quad p_k \text{ -особливі точки} \neq p$$

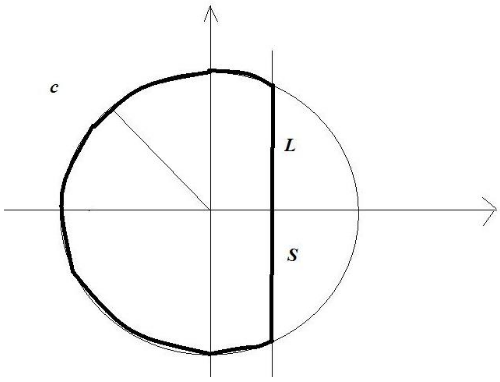
Доведення

Оскільки відомо, що F(p)-аналітична в півплощині $\operatorname{Re} p > S_0$

Розглянемо коло з центром в точці 0, такого великого радіуса, щоб в нього попали точки p_n



Розглянемо замкнутий контур:



$$\gamma = CUL$$

За теоремою лишки :

$$\int_{\gamma} F(p)e^{pt}dp = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{p=p_k}{\mathrm{Res}}(F(p)e^{pt})$$

$$\int_{\gamma} \cdot \int_{c} + \int_{L}$$

Лема Жордана: якщо $F(p) \xrightarrow{p\to\infty} 0$ рівномірно відносно p, тоді:

$$\int_{c} F(p)e^{pt}dp \xrightarrow{|p|\to\infty} O \quad (t > o)$$

Отже за лемою Жордана:

$$\int_{c} \to 0; \int_{L} \to \int_{S-i\infty}^{S+i\infty} \qquad \blacksquare$$

CreateByVova