12.Тригонометричний ряд Фур’є для 2π та 2l -періодичних функцій. Частинні випадки: парні та непарні функції. Теорема Діріхле. Амплітудний та частотний спектр. Ряд Фур’є для неперіодичних функцій та функцій заданих на проміжку [0;π] і [0; l]

Означення 7.3 (ряду Фур’є). Тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega_1 x)+b_n\sin(n\omega_1 x)),\ \omega_1=\frac{2\pi}{T},$$

коефіцієнти якого визначаються через функцію $f(x)$ за формулами

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos\left(n\omega_1 x\right)dx,$$
$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\sin\left(n\omega_1 x\right)dx,\ n\in\mathbb{N}.$$

називають *тригонометричним рядом Фур’є функції* $f(x)$, а коефіцієнти цього ряду називають *коефіцієнтами Фур’є функції* $f(x)$.

8.1.1. Розвинення в ряд Фур’є парних функцій

Нагадаємо, що функцію $f(x)$, означену на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$, $T>0$, називають **парною**, якщо

$$f(-x)=f(x),\ x\in\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right].$$

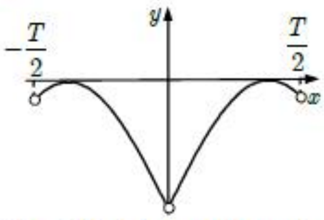

Рис. 8.1. Парна функція

Графік парної функції симетричний щодо осі ординат.

Нехай функція $f(x)$, що справджує умови Діріхле, є парною на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$. Тоді

$$f(-x)\cos\left(-n\frac{2\pi}{T}x\right)=f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right),$$
$$f(-x)\sin\left(-n\frac{2\pi}{T}x\right)=-f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right),\ x\in\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right],$$

тобто $f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)$ — парна функція, а $f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)$ — непарна функція. Тому коефіцієнти Фур’є парної функції $f(x)$ рівні

$$a_0=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(x)dx,\ a_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(x)\cos\left(n\omega_1 x\right)dx,\ b_n=0,\ n\in\mathbb{N}.$$

Отже, ряд Фур’є парної функції має вигляд

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_n\cos\left(n\omega_1 x\right).$$

8.1.2. Розвинення в ряд Фур'є непарних функцій

Нагадаємо, що функцію $f(x)$, означену на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right], T>0$, називають **непарною**, якщо

$$\boxed{f(-x)=-f(x), x\in\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right].}$$

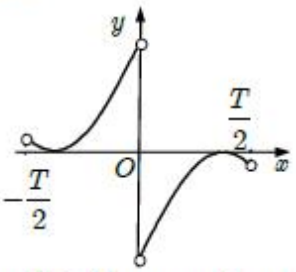

Рис. 8.2. Непарна функція

Графік непарної функції симетричний щодо початку координат.

Нехай функція $f(x)$, що справджує умови Діріхле, є непарною на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$. Тоді

$$f(-x)\cos\left(-n\frac{2\pi}{T}x\right)=-f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right),$$
$$f(-x)\sin\left(-n\frac{2\pi}{T}x\right)=f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right), x\in\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right],$$

тобто $f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)$ — непарна функція, а $f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)$ — парна функція. Тому коефіцієнти Фур'є непарної функції $f(x)$ рівні

$$\boxed{a_0=0, a_n=0, b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(n\omega_1 x\right)dx, n\in\mathbb{N}.}$$

Отже, ряд Фур'є непарної функції має вигляд

$$\boxed{f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_n\sin\left(n\omega_1 x\right).}$$

Теорема 7.2 (Діріхле). Якщо T-періодична функція $f(x)$ справджує *умови Діріхле* на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$, тобто є на цьому відрізку:

1) кусково-монотонною;
2) обмеженою,

то її ряд Фур'є збігається у кожній точці x цього відрізку, причому для суми

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega_1 x)+b_n\sin(n\omega_1 x)), \omega_1=\frac{2\pi}{T},$$

цього ряду виконано умови:

1) $S(x)=f(x)$, якщо x є точкою неперервності функції $f(x)$;
2) $S(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, якщо x є точкою розриву функції $f(x)$;
3) $S\left(-\frac{T}{2}\right)=S\left(\frac{T}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(-\frac{T}{2}+0\right)+f\left(\frac{T}{2}-0\right)\right).$

8.5. Амплітудний і фазовий спектри ряду Фур'є

Розгляньмо ряд Фур'е (у дійсній формі)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_1 x) + b_n \sin(n\omega_1 x)\right)$$

T-періодичної функції $f(x)$, для якої виконано умови Діріхле на відрізку $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$.

Для n-ої гармоніки ряді Фур'е

$$a_n \cos(n\omega_1 x) + b_n \sin(n\omega_1 x)$$

можна розглянути:
амплітуду

$$\boxed{A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2};}$$

початкову фазу

$$\varphi_n : \begin{cases} \cos\varphi_n = \dfrac{a_n}{A_n}, \\ \sin\varphi_n = \dfrac{b_n}{A_n} \end{cases}$$

і частоту

$$\omega_n = n\omega_1.$$

Запроваджуючи ще позначення

$$A_0 = \frac{a_0}{2},$$

7.6. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичної функції

Часто виникає потреба розвинути у тригонометричний ряд неперіодичну функцію $f(x)$ означену лише на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$. Оскільки у формулах для коефіцієнтів Фур'є інтеграли обчислюють за відрізком $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$, то для такої функції також можна записати тригонометричний ряд Фур'є. Разом з тим, якщо продовжити функцію $f(x)$ періодично на всю вісь Ox, то дістаємо функцію $F(x)$, періодичну з періодом T, що збігається з функцією $f(x)$ в інтервалі $\left(-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right)$:

$$F(x) = f(x)\ \forall x \in \left(-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right).$$

Цю функцію $F(x)$ називають *періодичним продовженням* функції $f(x)$. При цьому функція $F(x)$ може бути й неозначеною в точках $k\frac{T}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Ряд Фур'є для функції $F(x)$ тотожній ряду Фур'є для функції $f(x)$. До того ж, якщо ряд Фур'є для функції $f(x)$ збігається до неї, то його сума, періодична функція, дає періодичне продовження функції $f(x)$ з відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ на всю числові вісь.

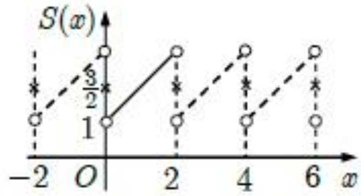

Рис. 7.4. Періодична функція