

Лекція 7

Вступ в комбінаторику

План лекції

Вступ в комбінаторику
Основні поняття комбінаторики
Основні правила комбінаторики
Правило суми
Правило добутку
Правило включень і виключень
Розміщення з повтореннями
Розміщення без повторень
Перестановки без повторень
Перестановки з повтореннями
Сполуки без повторень
Сполуки з повтореннями
Розбивка множини на підмножини
Тотожності для сполук

Вступ в комбінаторику

Термін «*комбінаторика*» походить від латинського слова «*combina*», що в перекладі українською означає – «поєднувати», «з'єднувати».



Термін «*комбінаторика*» був застосований у математиці вперше Лейбницем, який в 1666 році опублікував свою працю «Міркування про комбінаторне мистецтво».

**Готфрид Вільгельм
фон Лейбниц**

німецький філософ, математик, юрист,
дипломат

Комбінаторика сьогодні

Комбінаторика або комбінаторний аналіз або

комбінаторна математика — це галузь математики, яка вивчає **способи побудови підмножин** деякої скінченної множини, причому таких, які відповідають заданим обмеженням.

Згадані підмножини часто називають **комбінаторними конфігураціями** або **вибірками**.

Комбінаторні методи лежать в основі розв'язку багатьох задач теорії ймовірностей і її додатків.

Комбінаторика вивчає такі види задач:

1. Підрахунок числа комбінаторних конфігурацій.
2. Знаходження умов існування комбінаторної конфігурації.
3. Розробка алгоритмів побудови комбінаторних конфігурацій.
4. Розв'язок оптимізаційних задач (екстремальних комбінаторних задач).

Проблема підрахунку кількості комбінаторних конфігурацій часто використовується в програмних засобах. Такі задачі є предметом вивчення *рахункової комбінаторики*.

Основні поняття комбінаторики

У комбінаториці прийнято говорити про множину, вказуючи кількість її елементів. Наприклад, якщо є множина

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\},$$

яка складається з n елементів, то в цьому випадку її називають **n -множиною A** .

Визначення підмножини

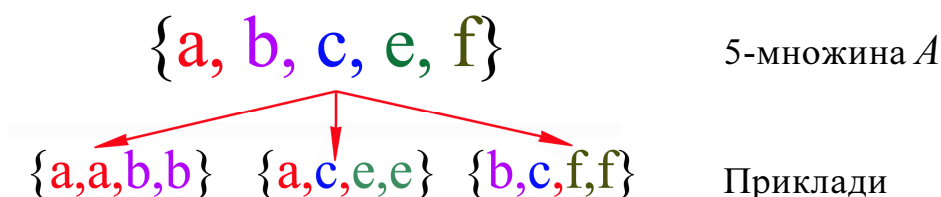
Нагадаємо, що множину B називають *підмножиною* множини A и позначають $B \subset A$, якщо всі елементи множини B є також елементами множини A .

Визначення мультимножини

Якщо множина C має кілька екземплярів одного і того самого елемента, то таку множину називають **мультимножиною**.

Вибірка

Вибіркою називають довільну мультимножину, елементи якої вибираються з елементів множини A , тобто таку множину, яка, у загальному випадку, **може містити кілька екземплярів одного і того самого елемента** множини A .



4-вибірок

Обсяг вибірки. Кількість елементів r у вибірці (таку вибірку називають також r -вибіркою) визначають як її **обсяг**.

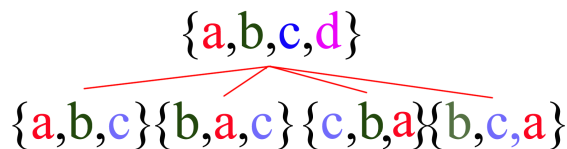
Інший зміст поняття «вибірка»

Поняття «вибірка» використовується також для позначення **самого процесу відбору** елементів підмножини з початкової множини.

Упорядкована вибірка

Вибірку називають *впорядкованою*, якщо порядок слідування елементів в ній заданий. Дві впорядковані вибірки, які різняться лише порядком проходження елементів, вважаються різними.

Визначення. Нехай $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – множина з n елементів. Упорядкованою вибіркою обсягом r з n -множини A називають будь-яку впорядковану підмножину з r її елементів.

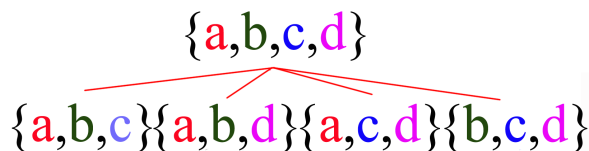


Упорядковані 3-вибірки з 4-множини

Упорядковані вибірки відрізняються порядком слідування одних і тих самих елементів.

Неупорядкована вибірка

Якщо порядок слідування елементів не є істотним, то таку вибірку називають *неупорядкованою*.

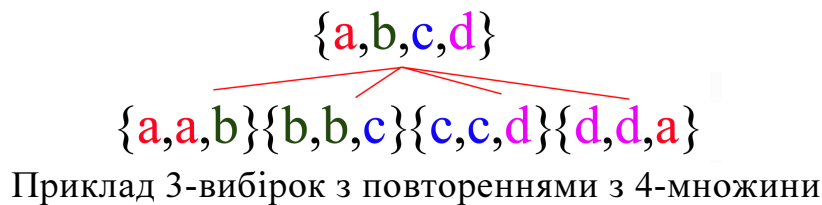


Приклад неупорядкованої вибірки
3-вибірки з 4-множини

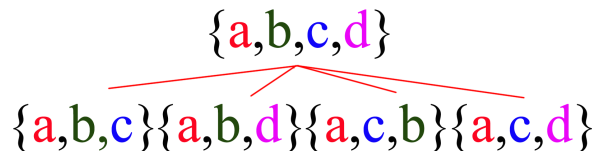
Неупорядковані вибірки відрізняються елементами, а не порядком їх слідування.

Вибірки з повтореннями й без повторень

Вибірки з повтореннями – це вибірки, які припускають повторення елементів



Вибірки без повторень – це вибірки, які не допускають повторення елементів



Загальноприйняті назви вибірок

1. Сполука (комбінація)

Вибірки, у яких не враховуються порядок запису елементів і які відрізняються між собою хоча б одним елементом, називають *сполуками* або *комбінаціями*.

2. Перестановка

Вибірки, у які складаються з одних і тих самих елементів і які відрізняються тільки порядком їх слідування, називають *перестановками*.

3. (n, k) -вбірка або розміщення

Набір елементів $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ з множини $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ називають *вбіркою обсягом k з n елементів* або, інакше, (n, k) -вбіркою.

Основні правила комбінаторики

Розглянемо два основні правила, які використовують при розв'язуванні комбінаторних задач.

1. Правило суми

Якщо елементи множини A можна вибрати n способами, а елементи множини B можна вибрати m способами, то за умови, що $A \cap B = \emptyset$, загальне число вибірок становить $n + m$.

Приклад 1. На лекції по дискретній математиці присутні 20 студентів. Квитки на концерт Лари Фабіан купило 15 студентів. Скільки всього студентів відвідали лекцію й концерт за умови, що вони відбуваються одночасно?

Розв'язок. Позначимо через X множину студентів, які були присутні на лекції, а через Y - множину студентів, які відвідали концерт. Оскільки

$n = |X| = 20$, $m = |Y| = 15$ і $X \cap Y = \emptyset$, то за правилом суми:
 $m + n = 20 + 15 = 35$

2. Правило добутку

Кількість способів вибору елементів множини $A \cdot B$ дорівнює $n \cdot m$.

Приклад. Космонавт, що працює на орбітальній станції, може зв'язатися із центром керування двома способами: за допомогою **радіозв'язку** і передачі повідомлення **космічним човником**.

У той же час працівники центру керування польотом можуть подзвонити рідним космонавта **по провідному телефону, по мобільному телефону, послати їм лист поштою, послати електронний лист, подзвонити по Skype, послати sms**.

Скількома способами може потрапити інформація від космонавта його рідним?

Розв'язок. $|m| = 2$, $|n| = 6$

Використовуючи правило множення, одержуємо $m \cdot n = 2 \cdot 6 = 12$.

3. Правило включень і виключень

Для двох множин

Нехай A і B - скінченні множини. Визначимо, чому дорівнює $|A \cup B|$ якщо відомі потужності $|A|$ і $|B|$.

Дотримуючись визначення операції об'єднання:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Пояснення. Сума $|A| + |B|$ включає всі елементи множини A й множини B .

При цьому, загальні елементи множин A і B , а їх буде $|A \cap B|$, включаються в суму двічі. Тому для одержання суми об'єднання необхідно відняти один набір спільних елементів

Тому $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Для трьох множин

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| =$$

Застосували правило включень і виключень для множин A і $(B \cup C)$

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap (B \cup C)| =$$

Застосували правило включень і виключень для множин $(B \cup C)$

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| =$$

Застосували дистрибутивний закон

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - (|A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|) =$$

Правило включень і виключень для множин $(A \cap B)$ і $(A \cap C)$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Розкрили дужки

Правило включень і виключень

Для n множин.

Нехай $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots, A_n$ - деякі множини.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \leq i < j < k < \dots < l \leq n} |A_i \cap A_j \cap \dots \cap A_l|$$

Правило підрахунку за даною формулою полягає в послідовному виконанні операцій додавання і віднімання, які чергуються між собою.

Звідси випливає назва: **правило включень і виключень**.

Приклад. Обчислення за правилом включень і виключень

Нехай дані множини

$$A = \{1, 2, 3, 4, 9\}, B = \{3, 4, 5, 6, 9\} \text{ і } C = \{5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Обчислити 1) $|A \cup B|$ 2) $|B \cup C|$ 3) $|A \cup C|$ 4) $|A \cup B \cup C|$.

Розв'язок. $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$1) A \cap B = \{3, 4, 9\}, |A \cap B| = 3.$$

$$\text{Тому } |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5 + 5 - 3 = 7$$

$$2) B \cap C = \{5, 6, 9\}, |B \cap C| = 3.$$

$$\text{Тому } |B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C| = 5 + 5 - 3 = 7$$

$$3) A \cap C = \{9\}, |A \cap C| = 1.$$

$$\text{Тому } |A \cup C| = |A| + |C| = 5 + 5 - 1 = 9$$

$$4) (A \cap B \cap C) = \{9\}, \quad |A \cap B \cap C| = 1$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = \\ |A \cup B \cup C| = 5 + 5 + 5 - 3 - 1 - 3 + 1 = 9$$

Розміщення з повтореннями (з поверненнями)

Упорядковану (n, k) -вибірку, у якій елементи можуть повторюватися, називають (n, k) -розміщенням з повтореннями.

Іншими словами, розміщеннями з повтореннями з n елементів по k називають упорядковані вибірки довжини k , складені з n елементів множини X .

Кількість розміщень з повтореннями з n елементів по k визначають оцінкою відповідного декартового добутку X^k n -елементної множини, позначають \hat{A}_n^k і обчислюють в такий спосіб:

$$\hat{A}_n^k = n^k$$

Приклад. Нехай дано алфавіт із трьох букв а, b і с. Тоді всі розміщення з повтореннями з цих трьох букв по два $\hat{A}_3^2 = 3^2$ утворюють підмножини:

$$\{a, a\}, \{b, b\}, \{c, c\}, \{a, b\}, \{b, a\}, \{a, c\}, \{c, a\}, \{b, c\}, \{c, b\}.$$

Приклад. У нашій розпорядженні є склад з комп'ютерами чотирьох типів: 1, 2, 3, 4. Поставлена задача комп'ютеризувати 3 лабораторії, шляхом передачі їм по одному комп'ютеру довільного типу.

Скількома способами можна виконати цю задачу? Розв'язок. Кожний спосіб оснащення – це вибірка з повтореннями $(4, 3)$, тобто

$$\hat{A}_4^3 = 4^3 = 64$$

Приведемо всі можливі способи оснащення кожної із трьох лабораторій одним із чотирьох типів комп'ютерів:

$\{1,1,1\}, \{1,1,2\}, \{1,1,3\}, \{1,1,4\}, \{1,2,1\}, \{1,2,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}$
 $\{1,3,1\}, \{1,3,2\}, \{1,3,3\}, \{1,3,4\}, \{1,4,1\}, \{1,4,2\}, \{1,4,3\}, \{1,4,4\},$
 $\{2,1,1\}, \{2,1,2\}, \{2,1,3\}, \{2,1,4\}, \{2,2,1\}, \{2,2,2\}, \{2,2,3\}, \{2,2,4\},$
 $\{2,3,1\}, \{2,3,2\}, \{2,3,4\}, \{2,3,4\}, \{2,4,1\}, \{2,4,2\}, \{2,4,3\}, \{2,4,4\},$
 $\{3,1,1\}, \{3,1,2\}, \{3,1,3\}, \{3,1,4\}, \{3,2,1\}, \{3,2,2\}, \{3,2,3\}, \{3,2,4\},$
 $\{3,3,1\}, \{3,3,2\}, \{3,3,3\}, \{3,3,4\}, \{3,4,1\}, \{3,4,2\}, \{3,4,3\}, \{3,4,4\},$
 $\{4,1,1\}, \{4,1,2\}, \{4,1,3\}, \{4,1,4\}, \{4,2,1\}, \{4,2,2\}, \{4,2,3\}, \{4,2,4\},$
 $\{4,3,1\}, \{4,3,2\}, \{4,3,3\}, \{4,3,4\}, \{4,4,1\}, \{4,4,2\}, \{4,4,3\}, \{4,4,4\}$

Розміщення формуються послідовним рахунком в системі числення з основою 4.

Розміщення без повторень (без повернень)

У ряді задач необхідно визначити число вибірок довжини k з n елементів даної множини без повторення елементів.

Якщо елементи впорядкованої (n, k) -вибірки попарно різні, то їх називають (n, k) -розміщенням без повторень або просто (n, k) -розміщенням.

Кількість таких розміщень без повторень позначається A_n^k .

Вивід формули визначення кількості розміщень без повторень (без повернень)

Кожне (n, k) -розміщення без повторень є впорядкованою послідовністю довжини k , елементи якої попарно різні і вибираються із множини з n елементами.

Тоді перший елемент цієї послідовності може бути обраний n способами, після кожного вибору першого елемента послідовності другий елемент може бути обраний $(n-1)$ способами і т.д., k -й елемент вибирається $n-(k-1)$ способом:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)).$$

Перетворимо цю формулу, помноживши та поділивши її на добуток чисел $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - k)$:

$$\begin{aligned} A_n^k &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n - (n-k)) \cdot 1 \cdot 2 \cdot (n-k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k)} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k) \cdot (n - (n-k)) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k)} = \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

Окремі випадки виразів для розміщень без повторень (без повернень):

1. При $k = 0$ одержуємо $A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$.
2. При $k = n$ одержуємо $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$
3. При $k > n$ $A_n^k = 0$.

Приклад задачі на розміщення

Приклад.

Скількома способами можна розподілити 20 студентів на 5 комп'ютерів, за умови, що один студент може бути розподілений тільки на один комп'ютер?

Розв'язок.

Обчислимо розміщення без повторень, оскільки студент може бути розподілений тільки на один комп'ютер:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Для нашого випадку $n = 20, k = 5$: $A_{20}^5 = \frac{20!}{15!} = 1860480$

Перестановки без повторень

Розглянемо задачу упорядкування n -елементної множини A (формування впорядкованої вибірки довжини n , складеної з n -елементної множини). Отримані при цьому вибірки будуть відрізнятися лише порядком слідування елементів.

Такі вибірки називають *перестановками без повторень із n елементів*.

Число перестановок без повторень із n елементів позначається P_n . До перестановок без повторень можна прийти, вважаючи, що здійснюється розміщення без повторень із n елементів по n .

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Нагадаємо, що $0! = 1$. Таким чином, перестановки без повторень – це окремий випадок розміщень без повторень (див. вище).

Приклади на перестановки без повторень

Приклад. Скільки існує послідовностей перевірки контрольних робіт трьох студентів?

$$P_3 = 3! = 6.$$

Ці послідовності мають вигляд:

$$(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1).$$

Приклад. Скільки існує можливих послідовностей відвідування туристом п'яти різних країн?

$$P_n = n! \text{ При } n = 5 \text{ одержуємо } P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Перестановки з повтореннями

При визначенні **перестановок без повторень** ми розглядали ситуацію, коли у початковій n -множині A всі елементи унікальні.

Однак існують ситуації, коли *множина може містити деяку кількість однотипних елементів*.

Визначення. Число різних перестановок, які можна побудувати з n елементів, серед яких k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, ..., k_m елементів m -го типу, дорівнює:

$$P(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}.$$

Приклад для перестановок з повтореннями

Приклад. Скільки різних слів можна побудувати шляхом перестановки букв у слові «лаваш»?

Розв'язок. Слово «лаваш» включає по одному екземпляру букв «л», «в» і «ш», а також два екземпляри букви «а». Загальна кількість букв у слові рівно 5.

Використовуючи формулу $P(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$

$$\text{одержимо } P(1, 1, 1, 2) = \frac{5!}{1!1!1!2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Приклад. Скільки слів з 8 букв можна побудувати з букв «а» і «б» за умови, що кількість букв «а» у цих словах не повинне перевищувати 3?

Розв'язок. Зазначеним умовам будуть задовольняти слова, які

- не мають ні однієї букви «а», $P(0, 8)$,
- мають одну букву «а», $P(1, 7)$,
- мають дві букви «а», $P(2, 6)$,
- мають три букви «а», $P(3, 5)$.

Тоді загальна кількість слів рівно:

$$\begin{aligned} &P(0, 8) + P(1, 7) + P(2, 6) + P(3, 5) = \\ &= \frac{8!}{0!8!} + \frac{8!}{1!7!} + \frac{8!}{2!6!} + \frac{8!}{3!5!} = 1 + 8 + 28 + 56 = 93 \end{aligned}$$

Сполуки (комбінації) без повторень

Сполуками без повторень з n елементів по k називають одмінні одна від другої хоча б одним елементом вибірки довжини k , складені з елементів n -множини.

Кількість сполук без повторень з n елементів по k , позначуване як C_n^k , визначають виходячи з числа розміщень без повторень A_n^k з урахуванням того, що різних неупорядкованих вибірок (підмножин вихідної множини) буде менше в число раз, відповідне до числа перестановок без повторень з k елементів P_k :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Приклад. Визначити кількість трьохелементних підмножин множини, яка складається з чотирьох елементів.

Розв'язок. Перераховуємо всі трьохелементні підмножини множини $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$:

$$\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_1, a_2, a_4\}$$

Їх кількість можна одержати, обчисливши кількість сполук з 4-х по 3.

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{24}{6} = 4$$

Приклад. Збірна команда університету по волейболу нараховує 15 людей. Скільки варіантів повинен розглянути тренер перед грою, щоб заявити список гравців на гру, за умови що в грі повинні брати участь тільки 6 гравців?

Розв'язок.

Число гравців волейбольної команди дорівнює 6. Виходить, число всіх можливих варіантів – це число різних підмножин, що складаються з шести елементів в множині з 15 елементів. Отже, використовуючи формулу

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

$$C_{15}^6 = \frac{15!}{6!(15-6)!} = \frac{15!}{6!9!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11 = 5005$$

Сполуки (комбінації) з повтореннями

Визначення. Якщо кожному елементу деякої скінченної множини поставлене у відповідність ціле ненегативне число — кратність даного елемента, то говорять, що задана **сплука з повтореннями**.

Суму k кратностей усіх елементів називають порядком сполуки.

Сполуку з повтореннями k -го порядку, що складена з множини, яка містить n елементів, називають також комбінацією з повторенням з n елементів по k .

Якщо k_1, k_2, \dots, k_n — кратності елементів a_1, a_2, \dots, a_n , то по визначенню $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ є порядок комбінації

$$\overbrace{a_1 a_1 a_1 \dots a_1}^{k_1} \overbrace{a_2 a_2 a_2 \dots a_2}^{k_2} \dots \overbrace{a_n a_n a_n \dots a_n}^{k_n}$$

Теорема. Кількість вибірок з повтореннями з n елементів по k виражають формулою

$$\widehat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Позначимо сполуки з повтореннями з n елементів по k як \widehat{C}_n^k .

Приклад. У кондитерському магазині продавалися 4 сорти тістечок: наполеони, еклери, піскові і картопля. Скількома способами можна купити 7 тістечок?

Розв'язок. Покладемо тістечка в коробку, а щоб вони не переплуталися, розділимо їх картонними роздільниками. Потрібно 3 роздільники. Позначення: 0 (картонки-роздільники) і 1 — тістечка. Зразкова покупка: 1110101101 — три наполеона, 1 еклер, 2 піскових і 1 картопля.

Отже два класи об'єктів: клас 1-(7 штук) і клас 0-(3 штуки) — покупка — 10 об'єктів.

Два способи міркування:

(1) задача зводиться до вибору місць для 7 тістечок (або для 3 роздільників) серед 10 об'єктів.

(2) інший спосіб міркування (еквівалентний). Треба розбити 10 місць на дві групи: для 7 тістечок і 3 роздільників.

У чому особливість: об'єкти повторюються, причому один еклер на смак не відрізнимо від іншого. Звідси назва: комбінації з повтореннями. Можна уявляти собі, що тістечка безупинно печуть, так що вони не переводяться, скільки не їж. Це зовсім інша ситуація, ніж у звичайних комбінаціях!!!

Приклад. Скількома способами 12 кульок можна розподілити по 3 урнах?

Розв'язок.

Представимо, що три урни —це одна коробка із двома простінками. Тоді одержуємо два типи об'єктів:

Тип перший: кульки(12 штук)- кульку позначимо 1

Тип другої: простінки (2 штуки) – простінок позначимо 0.

Приклади розміщення:

11111011101111- $\{5,3,4\}$

10110111111111- $\{1,2,9\}$

11101110111111- $\{3,3,6\}$

$$\hat{C}_n^k = \hat{C}_{12}^3 = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(12+3-1)!}{3!(12-1)!} = \frac{14!}{3!11!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14}{6} = 364$$

Приклади для комбінацій з повтореннями

Приклад. Нехай дана множина $A = \{a, b, c, d\}$. Тоді підмножини комбінацій з повтореннями \hat{C}_4^2 включають:

$$\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, c\}, \{c, d\}, \{d, d\}$$

Їхня кількість

$$\hat{C}_n^k = \hat{C}_4^2 = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(4+2-1)!}{2!(4-1)!} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

Розбиття множини на підмножини

Нехай дана n -множина A . Говорять, що множина A розбита на k підмножин A_i , де $(1, 2, \dots, k)$, якщо:

1. $A_i \neq \emptyset, i \in \{1, 2, \dots, k\};$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset, i, j \in \{1, 2, \dots, k\};$
3. $\bigcup_{i=1}^k A_i = A.$

Позначимо число елементів у підмножині A_i через $n(A_i) = n_i$

Очевидно, що $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

Кількість розбиттів множини на підмножини позначимо

$$C(n; n_1, n_2, \dots, n_k).$$

Визначимо кількість розбиттів

Кількість способів вибору елементів підмножини A_1 , дорівнює кількості сполук $C_n^{n_1}$.

Кількість способів вибору елементів підмножини A_2 дорівнює кількості сполук $C_{n-n_1}^{n_2}$.

Кількість способів вибору цих двох підмножин дорівнює $C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2}$ і так далі.

Таким чином, кількість вибору всіх розбиттів дорівнює

$$\begin{aligned} C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \dots \cdot C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k} &= \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\dots-n_{k-1})!} = \\ &= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}. \end{aligned}$$

Порівняємо даний вираз з формулою для перестановок з повтореннями. Можна зробити висновок, що **явище розбивки множини на підмножини й перестановки з повтореннями** – це та сама комбінаторна дія з різною інтерпретацією.

Тотожності для сполук

Основна формула для кількості сполук

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

дозволяє одержати ряд простих тотожностей.
Розглянемо деякі з них.

Теорема 1. $C_n^r = C_n^{n-r}$

Доведення. $C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_n^r.$

Теорема 2. $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}.$

Доведення.

$$\begin{aligned} C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1} &= \\ &= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-(r-1))!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)(n-r-1)!} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(n-r)(n-1)! + r(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!} = \frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r$$

Теорема 3. $C_n^i C_i^r = C_n^r C_{n-r}^{i-r}$

Доведення.

$$\begin{aligned} C_n^i \cdot C_i^r &= \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{i!}{r!(i-r)!} = \frac{n!}{r!(i-r)!(n-i)!} = \\ &= \frac{n!(n-r)!}{r!(i-r)!(n-i)!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r)!}{(i-r)!(n-i)!} = C_n^r \cdot C_{n-r}^{i-r} \end{aligned}$$

Теорема 5. Біном Ньютона: $(x+y)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r x^r y^{n-r}.$

Наслідок 1: $\sum_{r=0}^n C_n^r = 2^n.$

Наслідок 2: $\sum_{r=0}^n (-1)^r C_n^r = 0.$

Теорема 6. $\sum_{r=0}^n r C_n^r = n 2^{n-1}$

Теорема 7. $C_{n+r}^k = \sum_{i=0}^k C_n^i \cdot C_r^{k-i}$