Лекція 23. Зв'язність графів

23.1. Зв'язність простих графів

Означення 23.1. Дві вершини v і w називаються **зв'язаними**, якщо існує маршрут вигляду (…, v_1, e_1, v_2, e_2, …, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n, …) із кінцями v та w. В цьому випадку також говорять, що вершина v **досяжна** з вершини w.

За означенням кожна вершина зв'язана сама з собою маршрутом довжиною 0.

Означення 23.2. Граф називається **зв'язним**, якщо будь-яка пара його вершин є зв'язаною. **Зв'язністю** графа називається мінімальна кількість вершин, вилучення яких приводить до утворення незв'язного графа.

Зв'язність – це бінарне відношення на множині вершин. Воно рефлексивне (кожна вершина зв'язана сама із собою за означенням), симетричне (для кожного маршруту є обернений маршрут) та транзитивне. Транзитивність означає, що якщо є маршрут з v до w та маршрут з w до u, то є маршрут з v до u. Це очевидно: щоб отримати такий маршрут, достатньо до послідовності ребер, які ведуть з v до w, дописати справа послідовність ребер, яка веде з w до u.

Таким чином, відношення зв'язності є відношенням еквівалентності на множині вершин графа G і розбиває цю множину на підмножини, що не перетинаються, - класи еквівалентності. Всі вершини одного класу зв'язані між собою, вершини різних класів між собою не зв'язані. Підграф, утворений всіма вершинами одного класу, називається **компонентною зв'язності** графа G.

Неважко показати, що справджується наступна лема.

Лема 23.1. Нехай G = (V, E) – граф із p компонентами зв'язності $G_1 = (V_1, E_1)$, …, $G_p = (V_p, E_p)$. Тоді

$$V = V_1\cup\ldots\cup V_p,\ E = E_1\cup\ldots\cup E_p;$$
$$V_i\cap V_j = \varnothing,\ E_i\cap E_j = \varnothing \text{ при } i\neq j;$$
$$n(G_1) + \ldots + n(G_p) = n(G);\ m(G_1) + \ldots + m(G_p) = m(G).$$

Теорема 23.1. Якщо дві вершини зв'язані між собою, то існує простий ланцюг, який їх зв'язує.

Доведення. Дійсно, якщо маршрут, який зв'язує дві вершини, не є простим ланцюгом, то в ньому є вершина v, яка інцидентна більш ніж двом ребрам цього маршруту. Нехай e_i – перше з цих ребер, e_j – останнє ($j > i+1$). Тоді з даного маршруту можна видалити ділянку від i+1-го ребра до j-1-го. Отримана послідовність залишиться маршрутом: в ній всі ребра e_i та e_j стануть сусідніми, і при цьому вони мають спільну вершину v. Якщо отриманий маршрут не є простим ланцюгом, то процес повторюється до отримання простого ланцюга. ►

Розглянемо неорієнтовані графи K_n та C_n. Обидва ці графи зв'язані, проте інтуїтивно зрозуміло, що для n>3 граф K_n «сильніше зв'язаний», ніж граф C_n. Розглянемо два поняття, які характеризують міру зв'язності простого графу.

Означення 23.3. **Числом вершинної зв'язності** $\kappa(G)$ простого графа G називають найменшу кількість вершин, вилучення яких утворює незв'язаний або одновершинний граф. Зазначимо, що вершину вилучають разом із інцидентними їй ребрами.

Наприклад, $\kappa(K_1) = 0$, $\kappa(K_n) = n-1$, $\kappa(C_n) = 2$.

Означення 23.4. Нехай G – простий граф з n>1 вершинами. **Числом реберної зв'язності** $\lambda(G)$ графа G називають найменшу кількість ребер, вилучення яких дає незв'язаний граф. Число реберної зв'язності одновершинного графа вважають рівним 0.

Означення 23.5. Вершину u простого графа G називають **точкою з'єднання**, якщо граф G в разі її вилучення матиме більше компонент, ніж даний граф G. Тобто кількість компонент зв'язності при вилученні цієї вершини у графа G збільшується. Множина ребер графа називається **розрізом**, якщо вилучення цих ребер з графа G приводить до збільшення кількості компонент зв'язності. Якщо розріз містить одне ребро, то його називають **мостом**.

Граф називається **роздільним**, якщо він містить хоча б одну точку з'єднання, та **нероздільним** в іншому випадку. Максимальні нероздільні підграфи графа називаються **блоками**.

Отже, точки з'єднання й мости – це своєрідні «вузькі місця» простого графа.

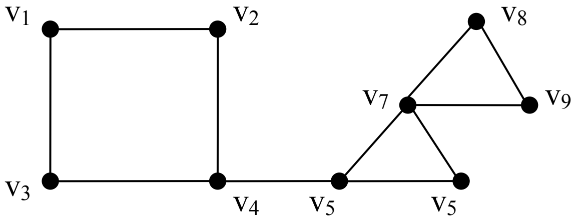

Рис. 23.1

Граф на рис. 23.1 має три точки з'єднання v_4, v_5 та v_7 й один міст (v_4, v_5).

Позначимо як $\delta(G)$ мінімальний степінь вершин графа G. Можна довести, що $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$.

<u>Означення 23.6.</u> Простий граф називається **t-зв'язним**, якщо $\kappa(G) \ge t$, тобто, якщо, вилучаючи будь-яку його t-1 вершину, не можна порушити його зв'язність, а при вилученні деяких t вершин зв'язність може порушитися. Граф називається **t-ребернозв'язним**, якщо $\lambda(G) \ge t$, тобто якщо t – максимальне з таких p, що при вилученні будь-яких p-1 ребер зв'язність графа не порушується.

<u>Теорема 23.2.</u> Вершина v є точкою з'єднання зв'язного графа G тоді й тільки тоді, коли існують такі вершини w та u, відмінні від v, що довільний маршрут між ними проходить через v.

Доведення. Нехай v – точка з'єднання. Її видалення дає новий граф G', який містить декілька компонент зв'язності. Оберемо вершини w та u таким чином, щоб вони містились в різних компонентах зв'язності. Тоді у G' між ними немає маршруту. Але в G (в силу його зв'язності) між ними є маршрути (принаймні один). Отже, саме видалення v розірвало ці маршрути, а, відповідно, всі вони проходять через v.

Нехай тепер існують вершини w та u, вказані в умові теореми. Тоді видалення v розірве всі маршрути між ними, граф стає незв'язним, і, відповідно, v – точка з'єднання. ►

Очевидно, що кількість ребер у зв'язномі графі з n вершинами не перевищує кількості ребер у графі K_n, тобто n(n-1)/2. Але скільки може бути ребер у простому графі з n вершинами й фіксованою кількістю компонент?

<u>Теорема 23.3.</u> Якщо простий граф G має n вершин і k компонент зв'язності, то кількість m його ребер задовольняє нерівності

$$n-k \le m \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1).$$

Доведення. Доведемо спочатку верхню оцінку. Нехай G – простий граф з n вершинами, k компонентами й максимальною для таких графів кількістю ребер m_{max}. Очевидно, що кожна компонента графа G – повний граф. Нехай K_p, K_q – дві компоненти, $p \ge q > 1$, v – вершина з другої компоненти. Вилучимо з графа всі ребра, інцидентні вершині v, і з'єднаємо цю вершину ребром із кожною вершиною першої компоненти. Кількість вершин і компонент при цьому не зміниться, а кількість ребер зросте на $p-(q-1) = p-q+1$, що неможливо, бо граф G має максимально можливу кількість ребер. Отже, лише одна компонента графа G являє собою повний граф із більшою ніж 1 кількістю вершин $n-(k-1) = n-k+1$. Отже, $m_{max} = (1/2)(n-k)(n-k+1)$.

Доведемо нижню оцінку математичною індукцією за кількістю ребер m. Для m=0 твердження очевидне, оскільки тоді k=n і, отже, $0 \le 0$. Нехай тепер m>0, і нижня оцінка справджується для графів із меншою кількістю ребер, ніж m. Припустимо, що граф G має найменшу можливу кількість ребер m_{min} серед усіх простих графів з n вершинами й k компонентами. Вилучивши довільне ребро отримаємо граф з n вершинами, k+1 компонентою й $m_{min} - 1$ ребром. Для нього справджується припущення індукції: $n - (k + 1) \le m_{min} - 1$, звідки випливає нерівність $n - k \le m_{min}$. ►

Наслідок. Всякий граф порядку n, який має більше $(n - 1)(n - 2)/2$ ребер, зв'язний.

Доведення. Дійсно, в цьому випадку число компонентів зв'язності такого графа повинне бути строго менше двох. Отже, k=1, тобто граф зв'язний. ►

Теорема 23.4. Для будь-якого графа G або він сам, або його доповнення $\overline{G}$ є зв'язним.

Доведення. Нехай G=(V, E) – незв'язний граф, A – одна із його компонент зв'язності і B = V\A. Тоді для будь-яких вершин u із A і v із B в графі $\overline{G}$ є маршрут довжиною 1, оскільки ці вершини зв'язані ребром (u,v). Отже, всяка вершина із B зв'язана з вершиною u маршрутом довжини 1, а всяка вершина із A – з u маршрутом довжини, не більше 2. Тобто всяка вершина u зв'язана з будь-якою вершиною v маршрутом. Значить, $\overline{G}$ - зв'язний граф. ►

Теорема 23.5. Нехай G=(V, E) – зв'язний граф і $e \in E$ – деяке його ребро. Тоді якщо e належить деякому циклу, то G-e зв'язний. Якщо ж e не належить жодному циклу, то граф G-e має рівно дві компоненти зв'язності.

Доведення. Нехай e=(v,u) належить деякому циклу C графа G. Виконаємо заміну в кожному ланцюгові, який з'єднує вершини x та y і включає ребро e, ланцюгом C-e. Отримаємо маршрут з вершин x в вершину y, який не має ребра e. Тобто в графі G всякі дві вершини, які не співпадають між собою, з'єднані маршрутом. А це означає, що G-e зв'язний.

Нехай тепер e=(v,u) не входить в жодний цикл графа G. Тоді очевидно, що вершини u і v належать різним компонентам зв'язності, наприклад: G_v і відповідно G_u графа G-e. Для довільної вершини $x \ne v$ в G існує маршрут із x в v в силу зв'язності G. Якщо e в цей маршрут не входить, то $x \in G_u$. Тобто G_v і G_u – компоненти зв'язності. ►

Ці теореми дають деяку характеристику операцій вилучення ребра по відношенню до властивості зв'язності. Ясно, що обернена операція – операція введення ребра – не порушує цієї властивості.

23.2. Зв'язність орієнтованих графів

Означення 23.7. Орієнтований граф називається **сильнозв'язним**, якщо для будь-яких двох його вершин v та w існує шлях в обох напрямках. Орієнтований граф називається **однобічно-зв'язним**, якщо для будь-яких двох його вершин v та w існує шлях хоча б в одному напрямку.

Означення 23.8. Псевдографом, асоційованим з орієнтованим псведографом $D_1(V)$, називається псевдограф $D_2(V)$ такий, коли кожну дугу графа D_1 замінено на ребро графа D_2. Орієнтований граф називається **слабкозв'язним**, якщо зв'язним є асоційований з ним псевдограф. Якщо граф (орієнтований граф) не є зв'язним (слабкозв'язним), то він називається **незв'язним**.

Перевірка сильної, слабкої або однобічної зв'язності шляхом безпосереднього перебору може виявитись дуже трудомісткою, оскільки в орграфі з n вершинами є n(n-1)/2 пар вершин, тобто дуг. Тут ми наведемо деякі теореми, які дозволяють віднести орграф до одного з трьох класів.

У сильнозв'язаному орграфі довільна вершин v входить принаймні в один цикл, утворений шляхами з v до деякої іншої u та назад з u до v. Цикли, які проходять через v та інші вершини графа, не обов'язково всі різні. Так, сильнозв'язний граф, який містить n вершин, може представляти собою один простий цикл, який проходить скрізь всі вершини.

Теорема 23.6. Орграф є сильнозв'язаним тоді й тільки тоді, коли в ньому є повний цикл, тобто цикл, який проходить через всі вершини.

Теорема 23.7. Орграф є однобічно-зв'язаним тоді й тільки тоді, коли в ньому є повний шлях.

Для введення критеріє слабкої зв'язності нам буде потрібне наступне означення.

Означення 23.9. **Півшлях** в орієнтованому графі – це послідовність дуг, така, що будь-які дві сусідні дуги різні й мають спільну інцидентну їм вершину. Іншими словами, півшлях – це шлях без уражування орієнтації дуг.

Теорема 23.8. Орграф є слабкозв'язаним тоді й тільки тоді, коли в ньому є повний півшлях.

23.3. Метричні характеристики графів

Означення 23.10. Довжина найменшого ланцюга між вершинами v і w звичайного зв'язного графа G називається відстанню d(v, w) між цими вершинами, а сам найкоротший ланцюг називається **геодезичним**.

Очевидно, вона задовольняє всі аксіоми метрики:

- $d(v, w) \geq 0$;
- $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v=w$;
- $d(v, w) = d(w, v)$;
- $d(v, w) + d(w, u) \geq d(v,u)$.

Множина вершин, які знаходяться на однаковій відстані n від вершини v (позначається D(v, n)), називається **ярусом**:

$$D(v, n) = \{ w \in V : d(v, w) = n \}.$$

Означення 23.11. **Діаметром** графа G називається довжина найдовшої геодезичної.

$$D(G) = \max_{v,w \in V} d(v, w).$$

Оберемо деяку фіксовану вершину c і позначимо $r(c) = \max_{v \in V} d(c, v)$. Величина r(c) називається максимальною віддалю від вершини c, або **ексцентриситетом**. Назвемо c_0 **центральною** вершиною графа G, якщо

$$R(G) = r(c_0) = \min_{c \in V} r(c).$$

Величина r(G) називається **радіусом** графа G, а будь-який найкоротший ланцюг від центра c_0 до максимально віддаленої від нього вершини – **радіальним**. Множина центральним вершин називається центром та позначається C(G):

$$C(G) = \{ v \in V : r(v) = R(G) \}.$$

Наприклад, на рис. 23.2 вказані ексцентриситети вершин та центри двох графів. Вершини, які складають центр, виділені.

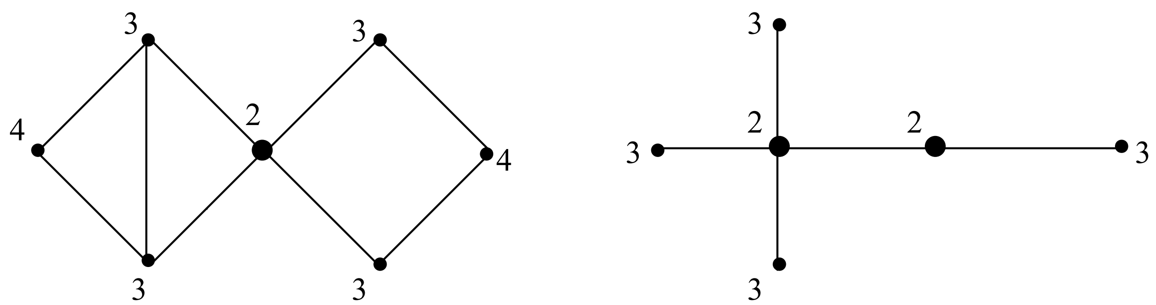

Рис. 23.2.