Лекція 17. Числення предикатів

17.1. Формальна теорія К

У логіці предикатів, на відміну від логіки висловлювань, немає ефективного способу для розпізнавання, чи є формула загальнозначущою. Тому аксіоматичний метод стає істотним при вивченні формул, які містять квантори. Визначення загальнозначущих формул, так само, як і в численні висловлювань, здійснюється введенням деякої сукупності формул, що називаються аксіомами, а також правил виведення, які дають змогу з одних загальнозначущих формул одержувати інші.

Означення 17.1. Числення предикатів К (теорія першого порядку К) – це аксіоматична теорія, символами якої є:

- пропозиційні зв'язки $\neg$, $\rightarrow$;
- квантори загальності $\forall$ та існування $\exists$;
- допоміжні символи: кома ",", та дужки "(", ")";
- предметні змінні $x_1, x_2, \ldots$;
- предметні константи $a_1, a_2, \ldots$;
- функціональні символи $f_1, f_2, \ldots$;
- предикатні символи $P_1, P_2, \ldots$

Означення формули 16.4 поширюється на числення предикатів, з тією різницею, що тут використовуються тільки два символи пропозиційних зв'зок: $\neg$ та $\rightarrow$.

Аксіоми числення К розбиваються на **логічні** аксіоми та **власні**. Наступні формули є логічними аксіомами числення К.

A1. $A\rightarrow (B\rightarrow A)$;

A2. $(A\rightarrow(B\rightarrow C)) \rightarrow ((A\rightarrow B) \rightarrow (A\rightarrow C))$;

A3. $(\neg B\rightarrow\neg A) \rightarrow ((\neg B\rightarrow A) \rightarrow B)$.

A4. $\forall xA(x) \rightarrow A(y)$, якщо y вільно для x в формулі A(x).

A5. $\forall x(A\rightarrow B(x)) \rightarrow (A\rightarrow\forall xB(x))$, якщо A не містить вільних входжень x.

Власні аксіоми формулюються окремо для кожної конкретної предметної області.

Правилами виведення у численні К є наступні:

1) modus ponens (MP): $A, A\rightarrow B \models B$.
2) правило **узагальнення** Gen: з $\Gamma\models A(x)$ слідує $\Gamma\models\forall xA(x)$, якщо x не входить вільно в жодну з формул Г.

Як і в численні висловлювань L, наведені аксіоми числення К є не конкретними аксіомами, а схемами аксіом.

Моделлю теорії першого порядку К називається довільна інтерпретація, в якій істинні всі аксіоми теорії К. Якщо правила виведення MP та Gen застосовуються до істинних в даній інтерпретації формул, то результатом є формули, які також істинні в тій самій інтерпретації.

Множина формул, які виводяться за правилами виведення з аксіом теорії К, є теоремами теорії К. Аксіоми A1, A2, A3 теорії К та правило MP визначені в теорії L, відповідно, всі теореми теорії L включаються у множину теорем теорії К.

Теорема 17.1. Формула $\forall xA(x) \rightarrow A(y)$, де змінна y вільна для x в формулі A(x), - загальнозначуща.

Доведення. Нехай $x, x_1,\ldots,x_n$ – усі вільні змінні формули A(x). Тоді $y, x_1,\ldots,x_n$ – перелік вільних змінних формули $\forall xA(x) \rightarrow A(y)$. Розглянемо довільну інтерпретацію з областю інтерпретації D.

Нехай $[b, a_1,\ldots,a_n]$, де b, $a_i \in D$ $(1\le i\le n)$ – довільний набір значень вільних змінних формули $\forall xA(x) \rightarrow A(y)$. Доведемо, що на цьому наборі формула $\forall xA(x) \rightarrow A(y)$ набуває значення істина (T). Справді, для формули A(x) або існує елемент $a_0\in D$ такий, що в наборі $[a_0, a_1,\ldots,a_n]$ значень вільних змінних $x, x_1,\ldots,x_n$ формула A(x)=F, або для будь-якого елемента $a\in D$ у наборі $[a, a_1,\ldots,a_n]$ значень вільних змінних $x, x_1,\ldots,x_n$ формула A(x)=T.

У першому випадку $\forall xA(x) = F$ і тоді $\forall xA(x) \rightarrow A(y) = T$.

У другому випадку $\forall x A(x) = T$ та $A(y)=T$ на наборі $[b, a_1,\ldots,a_n]$ і тоді $\forall x A(x) \to A(y) = T$. ►

<u>Теорема 17.2.</u> Формула $\forall x(A\to B(x)) \to (A\to\forall x B(x))$, де A не містить вільних входжень x, - загальнозначуща.

Доведення. Доведення аналогічно попередній теоремі. ►

Таким чином, ми показали, що схеми аксіом A4 та A5 є загальнозначущими в теорії K. Загальнозначущість схем A1 – A3 була розглянута раніше (див. лекцію 15) при розгляді числення висловлювань L.

<u>Теорема 17.3.</u> Формула, яка отримується із загальнозначущої формули за допомогою правил виведення MP та Gen, є загальнозначущою.

Доведення. Для правила MP це автоматично випливає з того, що воно зберігає логічне слідування (див. теорему 14.3).

Розглянемо правило Gen. Нехай, множина Г містить одну формулу B (доведення досить легко узагальнити на довільну кількість формул з Г). Припустимо, що ми обрали область інтерпретації D та провели заміну в формулі A всіх вільних змінних на елементи з D, наприклад, $x=b$, $b\in D$. З $B \models A(b)$ отримуємо $B\to A(b)=T$ за теоремою 14.1. Це виконується для всіх x, тобто $\forall x(B\to A(x)) = T$. Змінна x не входить вільно у формулу B, отже формула $\forall x(B\to A(x)) \to (B\to\forall x A(x))$ – загальнозначуща (за теоремою 17.2). Таким чином, з формул $\forall x(B\to A(x))$ та $\forall x(B\to A(x)) \to (B\to\forall x A(x))$ за правилом MP отримуємо $B\to\forall x A(x) = T$, тобто $B \models \forall x A(x)$. ►

Розглянемо приклади виведень у численні K.

$\models \forall x\forall y A(x,y) \to \forall y\forall x A(x,y)$

1. $\forall y A(x,y) \to A(x,y)$ аксіома A4
2. $\forall x\forall y A(x,y) \to \forall y A(x,y)$ аксіома A4
3. $\forall x\forall y A(x,y) \to A(x,y)$ наслідок 1 з теореми дедукції числення L
4. $\forall x\ (\forall x\forall y A(x,y) \to A(x,y)) \to (\forall x\forall y A(x,y) \to \forall x A(x,y))$ аксіома A5
5. $\forall x\ (\forall x\forall y A(x,y) \to A(x,y))$ за правилом Gen з 3
6. $\forall x\forall y A(x,y) \to \forall x A(x,y)$ за правилом MP з 4 та 5
7. $\forall y\ (\forall x\forall y A(x,y) \to \forall x A(x,y)) \to (\forall x\forall y A(x,y) \to \forall y\forall x A(x,y))$ аксіома A5
8. $\forall y\ (\forall x\forall y A(x,y) \to \forall x A(x,y))$ за правилом Gen з 6
9. $\forall x\forall y A(x,y) \to \forall y\forall x A(x,y)$ за правилом MP з 7 та 8

Розглянемо виведення правила екзистенціонального узагальнення: $A(y) \models \neg\forall x\neg A(x)$, де x вільно для y в A(x).

1. $A(y)$ гіпотеза
2. $(\neg\neg\forall x\neg A(x) \to \neg A(y)) \to (A(y) \to \neg\forall x\neg A(x))$ теорема L7
3. $\forall x\neg A(x) \to \neg A(y)$ аксіома A4
4. $\neg\neg\forall x\neg A(x) \to \forall x\neg A(x)$ теорема L4
5. $\neg\neg\forall x\neg A(x) \to \neg A(y)$ наслідок 1 з теореми дедукції числення L
6. $A(y) \to \neg\forall x\neg A(x)$ за правилом MP з 2 та 5
7. $\neg\forall x\neg A(x)$ за правилом MP з 1 та 6

17.2. Теорема дедукції

Теорема дедукції в численні K відрізняється від теореми дедукції для числення L. Для формулювання цієї теореми нам потрібні будуть деякі додаткові означення та результати.

<u>Означення 17.2.</u> Нехай A, B_1, ..., B_n – формули числення предикатів. Нехай B_1, ..., B_n – це виведення в численні предикатів. Будемо говорити, що формула B_i залежить у виведенні від формули A, якщо виконується одна з умов:

а) B_i є сама формула A і включена у вивід на цій підставі;

б) B_i отримана за одним із правил виведення із попередніх формул, з яких хоча б одна залежить від формули A.

Теорема 17.4. Нехай Г, А $\models$ В і при цьому у виводі формула В не залежить від формули А. Тоді Г $\models$ В.

Доведення. Доведення будемо проводити по індукції за довжиною виводу.

1) n = 1. Тоді очевидно, що формула В може бути або аксіомою, або належати Г і за означення Г $\models$ В.

2) Нехай теорема виконується для виводу довжиною n-1.

3) Покажемо, що теорема виконується для виводу довжиною n. Якщо вивід має вигляд $B_1, ..., B_n$, то B_n може бути отримана як аксіома, як формула із Г або виведена із попередніх за правилами виводу, де ні одна із попередніх не залежить від А. В перших двох випадках, очевидно, Г $\models$ В. В третьому, оскільки B_n отримана за правилами виводу із попередніх формул, то за індуктивним припущенням ні одна з $B_1, ..., B_{n-1}$ не залежить від А і існує вивід $B_1, ..., B_{n-1}$ з Г, і, оскільки застосування правил виводу не виводить нас за рамки множини Г, то таким чином Г $\models$ В. ►

З використання цього результату можна показати, що теорема дедукції виконується, якщо в виводі не зв'язується квантором вільна змінна, яка переноситься вправо.

Теорема 17.5 (теорема дедукції Ербрана). Якщо Г, А $\models$ В і при цьому в виводі при застосуванні правила узагальнення Gen до формул, залежних в виводі від А, не зв'язується квантором ніяка вільна змінна формули А, то Г $\models$ А$\rightarrow$В.

Наслідок 1. Якщо Г, А $\models$ В і при цьому в виводі не використовується правило узагальнення, то Г $\models$ А$\rightarrow$В.

Наслідок 2. Якщо Г, А $\models$ В і при цьому А замкнена формула, то Г $\models$ А$\rightarrow$В.

17.3. Прикладні теорії першого порядку

В даному підрозділі будуть представлені дві прикладні теорії першого порядку: теорія рівностей та формальна арифметика.

Розглянемо теорію першого порядку Т, у числі предикатних символів якої міститься предикат рівності $A^2(t,s)$, який для скорочення будемо позначати t=s, а замість $\neg A^2(t,s)$ відповідно будемо писати $t \neq s$.

Означення 17.3. Теорія Т називається **теорію першого порядку з рівністю**, якщо наступні формули є аксіомами теорії Т:

A6. $\forall x\ (x=x)$ — рефлективність рівності;

A7. $(x=y) \rightarrow (A(x) \rightarrow A(x)\{y/x\})$ — підстановка рівності,

де х та у – предметні змінні, A(x) – довільна формула, A(x){y/x} отримується заміною яких-небудь (не обов'язково всіх) вільних входжень х на у, якщо у вільно для тих входжень х, які замінюються.

Доведемо основні теореми теорії К.

Теорема 17.6. $\models t=t$ для довільного терму t.

Доведення. З А6: $\models \forall x\ (x=x)$ та А4: $\models \forall x\ (x=x) \rightarrow (t=t)$ за правилом МР отримуємо t=t. ►

Теорема 17.7. $\models x=y \rightarrow y=x$.

Доведення. Нехай A(x) є x=x, A(x){y/x} є y=x. Тоді:

1) $\models (x=y) \rightarrow ((x=x) \rightarrow (y=x))$ аксіома А7;
2) $\models x=x$ теорема 17.6;
3) $\models (x=y) \rightarrow (y=x)$ за наслідком 2 теореми дедукції для числення L. ►

Теорема 17.8. $\models x=y \rightarrow (y=z \rightarrow x=z)$.

Доведення. Нехай A(y) є y=z, A(y){x/y} є x=z. Тоді:

1) $\models (y=x) \rightarrow ((y=z) \rightarrow (x=z))$ аксіома А7;
2) $\models (x=y) \rightarrow (y=x)$ за теоремою 17.7;
3) $\models x=y \rightarrow (y=z \rightarrow x=z)$ за наслідком 1 теореми дедукції для числення L. ►

Наведемо тепер означення формальної арифметики А, яка була вперше введена Пеано.

Означення 17.4. **Формальна арифметика** А – це числення предикатів, в якому є:

1. Предметна константа 0.
2. Двомісні функціональні символи + та ×, одномісний функціональний символ '.

3. Двомісний предикат = (.¬= позначатимемо через ≠).
4. Власні схеми аксіом:
   E1. $(P(0) \wedge \forall x(P(x) \to P(x'))) \to \forall x P(x)$
   E2. $t_1' = t_2' \to t_1 = t_2$
   E3. $t' \neq 0$
   E4. $t_1 = t_2 \to (t_1 = t_3 \to t_2 = t_3)$
   E5. $t_1 = t_2 \to t_1' = t_2'$
   E6. $t + 0 = t$
   E7. $t_1 + t_2' = (t_1 + t_2)'$
   E8. $t \times 0 = 0$
   E9. $t_1 \times t_2' = t_1 \times t_2 + t_1$

Тут P – довільна формула, а t, t_1, t_2 – довільні терми теорії А. Схема аксіом Е1 виражає принцип математичної індукції.

17.4. Модельні властивості числення К

Розглянемо модельні властивості теорії першого порядку К.

Теорема 17.9. Формальна теорія першого порядку К є несуперечливою.

Доведення. Для всякої формула А з К нехай h(A) означає формулу, яка отримана з формули А шляхом опускання в ній всіх кванторів і термів разом зі всіма відповідними дужками і комами. Наприклад:

$$h(\forall x P(y,x) \to Q(y)) = P \to Q;$$
$$h(\neg \forall z P(x,a,z) \to Q(f(y))) = \neg P \to Q.$$

Із визначення h випливає, що $h(\neg A) = \neg h(A)$ та $h(A \to B) = h(A) \to h(B)$. А звідси маємо, що всяка аксіома А1 – А5 перетворюється на тавтологію. Дійсно, це очевидно для А1 та А3, а для А4 маємо:

$$h(\forall x A(x) \to A(t)) = A \to A,$$

що теж є тавтологією. Далі

$$h(\forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x))) = (A \to B) \to (A \to B).$$

Значить, якщо h(A) – тавтологія, то і $h(\forall x)$ – тавтологія, крім того, як ми впевнились, коли h(A) і $h(A \to B)$ – тавтології, то і h(B) – тавтологія.

Таким чином, якщо А є теоремою у К, то h(A) – тавтологія. Якби існувала така формула В, що $\models_K B$ і $\models_K \neg B$, то формули В та ¬В одночасно були б тавтологіями, що неможливо в силу того, що числення висловлювань є несуперечливою теорією. ►

На відміну від логіки висловлювань, логіка предикатів є нерозв'язуваною. Наведемо це твердження без доведення.

Теорема 17.10 (теорема Черча). Не існує алгоритму, який для будь-якої формули логіки предикатів установлює, чи є вона загальнозначущою, чи ні.

Теорема 17.11 (теорема про повноту – без доведення). Теоремами числення предикатів К є ті й тільки ті формули, які є загальнозначущими.

Теорії першого порядку мають певні обмеження. Ці обмеження встановлюють дві теореми Геделя про неповноту. Доведення цих теорем виходить далеко за межі цього курсу, тож тут вони наводяться тільки у вигляді формулювань

Теорема 17.12 (перша теорема Геделя про неповноту). У будь-якій достатньо багатій теорії першого порядку (зокрема, в довільній теорії, яка включає формальну арифметику), існує така істинна формула А, що ні А, ні ¬А не виводяться в цій теорії.

Твердження про теорію першого порядку також могуть бути сформульовані у вигляді формул теорії першого порядку. Так твердження о властивостях формальної арифметики можуть бути сформульовані як арифметичні вирази.

Теорема 17.13 (друга теорема Геделя про неповноту). У будь-якій достатньо багатій теорії першого порядку (зокрема, в довільній теорії, яка включає формальну арифметику), формула А, яка стверджує несуперечність цієї теорії, в ній не виводиться.