$= sh\,x \cos y + i \sin y\, ch\,x = u + iv$

$u(x,y) = sh\,x \cos y$

$v(x,y) = \sin y\, ch\,x$

$u'_x = ch\,x \cos y$

$v'_y = \cos y\, ch\,x$ $\qquad u'_x = v'_y$

$u'_y = -sh\,x \sin y$

$v'_x = \sin y\, sh\,x$ $\qquad u'_y = -v'_x$

Функція аналітична для всіх z

$$\int_0^{\pi i} sh\,z\,dz = ch\,x \Big|_0^{\pi i} = -1-1 = -2$$

Відповідь: $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = -2$

ст. 37 №2

Розкласти в ряд Лорана в заданій області

$$\frac{z+4}{z^2+3z+2} \qquad (1<|z|<2)$$

$$\frac{z+4}{(z+2)(z+1)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z+1}$$

$A(z+1) + B(z+2) = z+4$

$z = -1$; $B = 3$

$z = -2$; $-A = 2$

$A = -2$

$$\frac{z+4}{z^2+3z+2} = \frac{3}{z+1} - \frac{2}{z+2} = \frac{3}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} - \frac{1}{1+\frac{z}{2}}$$

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad , \quad |t| \leq 1$$

$t_1 = -\frac{1}{z}$, $t_2 = -\frac{z}{2}$; $|t| \leq 1$ при $1 < |z| < 2$

$$\frac{z+4}{z^2+3z+2} = \frac{3}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$$

Відповідь: $\frac{z+4}{z^2+3z+2} = 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$

Ст. 44 N1

Знайти особливі точки, визначити їх характер

$$f(z) = \frac{\sin z - 3\cos^2 z}{z(z^2+9)^2}$$

$z_1 = 0$

$z_{2,3} = \pm 3i$ – подвійної кратності

$$\lim_{z \to z_1} f(z) = \left[\frac{\sin(0) - 3\cos^2(0)}{0 \cdot (0^2+9)^2}\right] = \left[\frac{-3}{9^2 \cdot 0}\right] = -\infty$$

z_1 – полюс

N 1

$$\oint\limits_{|z|=N+1} \frac{4+z^2}{z^2-Nz}\,dz$$

$$\oint\limits_{|z|=16} \frac{4+z^2}{z^2-15z}\,dz = \oint\limits_{|z|=16} \frac{z^2+4}{z(z-15)}\,dz$$

$z_1 = 0$ – простий полюс

$z_2 = 15$ – простий полюс

$$\oint\limits_{|z|=16} \frac{z^2+4}{z^2-15z}\,dz = 2\pi i\left(\lim_{z\to 0} \frac{z(z^2+4)}{z(z-15)} + \lim_{z\to 15} \frac{(z^2+4)(z-15)}{z(z-15)}\right.$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{4}{15} + \frac{229}{15}\right) = 30\pi i$$

Відповідь: $\oint\limits_{|z|=16} \frac{z^2+4}{z^2-15z} = 30\pi i$

N 2

$$\oint\limits_{|z-N|=N} \frac{e^{iz}}{z^2+N^2}$$

$$\oint\limits_{|z-15|=15} \frac{e^{iz}}{z^2+15^2} = ?$$

Нема особливих точок у області, $I=0$

Відповідь: $\oint\limits_{|z-N|=N} \frac{e^{iz}}{z^2+N^2}=0$

N3

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+2x+5)^2}=2\pi i\sum_{k=0}^{n} \underset{z_k}{\mathrm{Res}}\left(\frac{z}{(z^2+2z+5)^2}\right)$$

Функція загального вигляду

$z^2+2z+5=0$

$z_{1,2}=-1\pm 2i$ – полюс 2 порядку

$z_2=-1-2i$ – не здовільняє, $Im(z)<0$

$z_0=-1+2i$

$$\underset{z_0}{\mathrm{Res}}\frac{z}{(z^2+2z+5)^2}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to-1+2i}\left(\frac{z(z+1-2i)^2}{(z+1-2i)^2(z+1+2i)^2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to-1+2i}\left(\frac{z}{(z+1+2i)^2}\right)'=\lim_{z\to-1+2i}\frac{(z+1+2i)^2-2z(z+1+2i)}{(z+1+2i)^4}=$$

$$=\lim_{z\to-1+2i}\frac{-z+1+2i}{(z+1+2i)^3}=\left[\frac{1-2i+1+2i}{(-1+2i+1+2i)^3}\right]=$$

$$=\frac{2}{4^3\cdot i^3}=-\frac{1}{32i}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+2x+5)^2}=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{32i}\right)=\frac{-\pi}{16}$$

Відповідь: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+2x+5)^2}=-\frac{\pi}{16}$

$$f(z)=\frac{e^z}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)$$

$$\oint\limits_{|z|<2}\frac{e^z}{z^2-1}\,dz=\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|<2}\frac{e^z}{z-1}\,dz-\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|<2}\frac{e^z}{z+1}\,dz.$$

За т. Коші

$$\oint\limits_{|z|<2}\frac{e^z}{z^2-1}\,dz=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i e^{1}-\frac{1}{2}\cdot 2\pi i e^{-1}=$$

$$=\pi i(e-e^{-1})=\frac{\pi i(e^2-1)}{e}$$

Відповідь: $\oint\limits_{c} f(z)\,dz=\frac{\pi i(e^2-1)}{e}$

№ 4

Застосувавши формулу Ньютона-Лейбніца для обчислення інтеграла $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$, попередньо показавши, що функція $f(z)$ є аналітичною в однозв'язній області, яка містить точки z_1 та z_2

$f(z)=\operatorname{sh} z$; $z_1=0$, $z_2=\pi i$

$f(x,y)=\operatorname{sh}(x+iy)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}iy+\operatorname{sh}iy\operatorname{ch}x=$

CreateByVova