

# **ЛЕКЦІЯ 11**

## **КОМБІНАТОРИКА**

# КОМБІНАТОРИКА

## Вступ в комбінаторику

Термін «**комбінаторика**» походить від латинського слова «combina», що в перекладі українською означає — «поєднувати», «з'єднувати».



Термін «**комбінаторика**» був застосований у математиці вперше Лейбницем, який в 1666 році опублікував свою працю «Міркування про комбінаторне мистецтво».

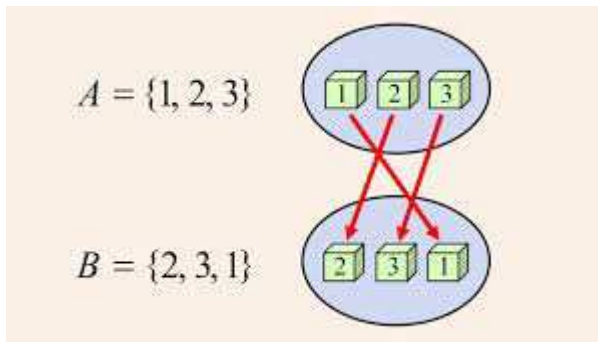
**Готфрид Вільгельм фон Лейбниц**

німецький філософ, математик, юрист, дипломат, механік, фізик, винахідник, мовознавець.

Перший описав двійкову систему числення.

# Комбінаторика сьогодні

*Комбінаторика* або *комбінаторний аналіз* або *комбінаторна математика* — це галузь математики, яка вивчає **способи побудови підмножин** деякої скінченної множини, причому таких, які відповідають заданим обмеженням.

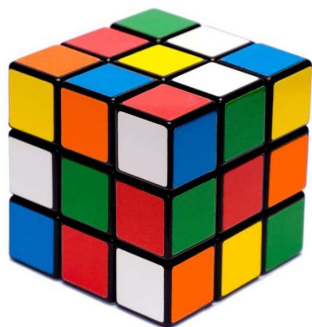
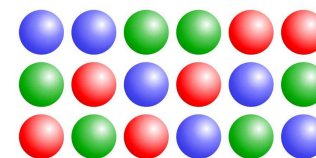


Згадані підмножини часто називають **комбінаторними конфігураціями** або **вибірками**.

Комбінаторні методи лежать в основі розв'язку багатьох задач теорії ймовірностей і її додатків.

## Комбінаторика вивчає такі види задач:

1. Підрахунок кількості комбінаторних конфігурацій.



2. Знаходження умов існування комбінаторної конфігурації.

3. Розробка алгоритмів побудови комбінаторних конфігурацій.

4. Розв'язок оптимізаційних задач (екстремальних комбінаторних задач).

Проблема підрахунку кількості комбінаторних конфігурацій часто використовується в програмних засобах. Такі задачі є предметом вивчення *рахункової комбінаторики*.

## Основні поняття комбінаторики

У комбінаториці прийнято говорити про множину, вказуючи кількість її елементів. Наприклад, якщо є множина

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\},$$

яка складається з  $n$  елементів, то в цьому випадку її називають  **$n$ -множиною  $A$** .

### Визначення підмножини

Нагадаємо, що множину  $B$  називають *підмножиною* множини  $A$  и позначають  $B \subset A$ , якщо всі елементи множини  $B$  є також елементами множини  $A$ .

### Визначення мультимножини

Якщо множина  $S$  має кілька екземплярів одного і того самого елемента, то таку множину називають **мультимножиною**.

## Вибірка (комбінаторна комбінація)

**Вибіркою** називають довільну **мультимножину**, елементи якої вибираються з елементів множини  $A$ , тобто таку множину, яка, у загальному випадку, **може містити кілька екземплярів одного і того самого елемента** множини  $A$ .

$\{a, b, c, e, f\}$

5-множина  $A$

$\{a, a, b, b\}$     $\{a, c, e, e\}$     $\{b, c, f, f\}$

Приклади  
4-вибірок

**Обсяг  $r$ -вибірки:** Кількість елементів  $r$  у вибірці визначають як її **обсяг**.

### Інший зміст поняття «вибірка»

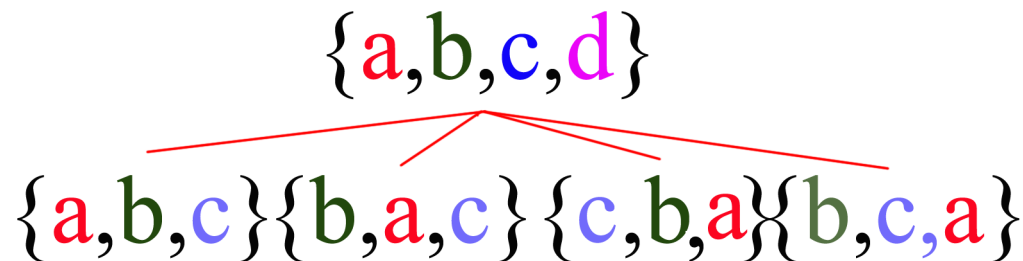
Поняття «вибірка» використовується також для позначення **самого процесу відбору** елементів підмножини з початкової множини.

# Які бувають вибірки?

## 1. Упорядкована вибірка

Вибірку називають *впорядкованою*, якщо порядок слідування елементів в ній заданий. Дві впорядковані вибірки, які різняться лише порядком проходження елементів, вважаються різними.

**Визначення.** Нехай  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  – множина з  $n$  елементів. Упорядкованою  $r$ -вибіркою з  $n$ -множини  $A$  називають будь-яку впорядковану підмножину з  $r$  її елементів.

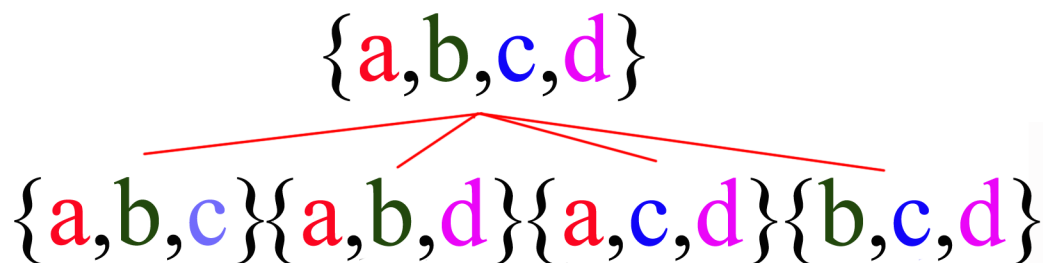


Упорядковані 3-вибірки з 4-множини

**Упорядковані вибірки відрізняються порядком слідування одних і тих самих елементів.**

## 2.Неупорядкована вибірка

Якщо порядок слідування елементів не є істотним, то таку вибірку називають *неупорядкованою*.



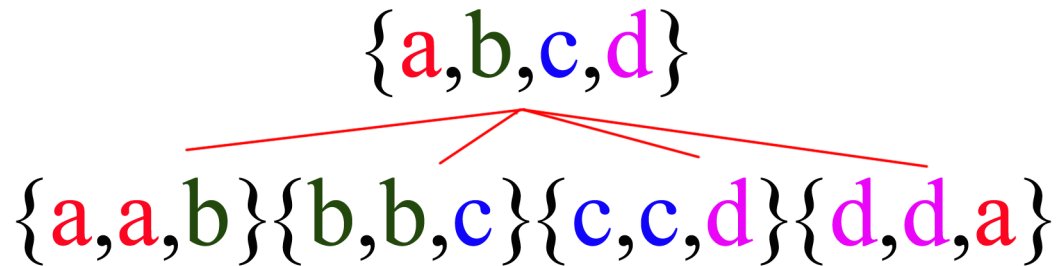
Приклад неупорядкованої вибірки  
3-вибірки з 4-множини

**Неупорядковані вибірки відрізняються елементами, а не порядком їх слідування.**



### 3.Вибірки з повтореннями й без повторень

*Вибірки з повтореннями* – це вибірки, які припускають повторення елементів



Приклад 3-вибірок з повтореннями з 4-множини

*Вибірки без повторень* – це вибірки, які не допускають повторення елементів (упорядковані або неупорядковані)



## Загальноприйняті назви вибірок

### 1. $(n, k)$ -**в**ибір**к**а або **р**озмі**щ**ен**н**я (**А**)

(упорядкована вибірка з повтореннями або без повторень)

Набір елементів  $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$  з множини  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  називають  $i$ -ю вибіркою обсягом  $k$  з  $n$  елементів або, інакше,  $(n, k)$ -розміщенням.

### 2. **С**полу**к**а (**к**омб**і**на**ц**ія) (**С**)

(неупорядкована вибірка з повтореннями або без повторень)

Вибірки, у яких не враховуються порядок запису елементів і які відрізняються між собою хоча б одним елементом, називають сполуками або комбінаціями.

### 3. **П**ерестанов**к**а (**Р**)

(упорядкована вибірка без повторень)

Вибірки, у які складаються з одних і тих самих елементів і які відрізняються тільки порядком їх слідування, називають перестановками.

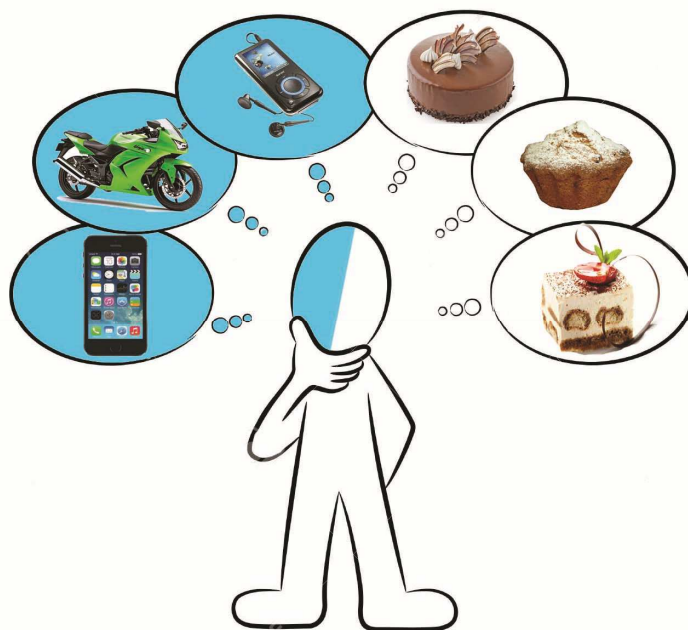
# Основні правила комбінаторики

Розглянемо два основні правила, які використовують при розв'язуванні комбінаторних задач.

## 1. Правило суми

**Правило суми** — це основний комбінаторний принцип.

Ідея в тому, що якщо у нас  $A$  способів зробити щось одне і  $B$  способів зробити щось інше, і ми не можемо робити їх одночасно, то існує  $A + B$  способів вибрати одну з дій.



## Визначення правила суми

**Правило суми** — сума кількостей елементів скінченного набору попарно неперетинних множин дорівнює кількості елементів об'єднання цих множин. Тобто, якщо попарно неперетинні множин, то ми маємо:

$$|A| + |B| = |A \cup B| \text{ при } A \cap B = \emptyset$$

**Приклад 1.** Студенська група зробила такий вибір:

на концерт «Океану Ельзи» пішли 15 студентів,  
на лекції присутні 20 студентів.

Скільки всього студентів у групі, якщо концерт та лекція відбуваються одночасно?

**Розв'язок.** Позначимо через  $X$  множину студентів, які були присутні на лекції, а через  $Y$  - множину студентів, які відвідали концерт. Оскільки  $n = |X| = 20$ ,  $m = |Y| = 15$  і  $X \cap Y = \emptyset$ , то за правилом суми:  $m + n = 20 + 15 = 35$

## 2. Правило добутку

Кількість способів вибору елементів множини  $A \times B$  дорівнює  $n \cdot m$ .

**Приклад.** Космонавт, що працює на орбітальній станції, може зв'язатися із центром керування двома способами: за допомогою **радіозв'язку** і передачі повідомлення **космічним човником**.

У той же час працівники центру керування польотом можуть подзвонити рідним космонавта **по провідному телефону, по мобільному телефону, послати їм лист поштою, послати електронний лист, подзвонити по Skype, послати sms, подзвонити по Viber**.

Скількома способами може потрапити інформація від космонавта його рідним?

**Розв'язок.**  $|m| = 2, |n| = 7$

Використовуючи правило множення, одержуємо  $m \cdot n = 2 \cdot 7 = 14$ .

### 3.Правило включень і виключень

#### Для двох множин

Нехай  $A$  і  $B$  - скінченні множини. Визначимо, чому дорівнює потужність  $|A \cup B|$  якщо відомі потужності  $|A|$  і  $|B|$ .

Дотримуючись визначення операції об'єднання:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad \text{при } A \cap B \neq \emptyset$$

**Пояснення.** Сума  $|A| + |B|$  включає всі елементи множини  $A$  й множини  $B$ . При цьому, загальні елементи множин  $A$  і  $B$ , а їх буде  $|A \cap B|$ , включаються в суму двічі. Тому для одержання суми об'єднання необхідно відняти один набір спільних елементів

Тому  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

## Для трьох множин

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| =$$

Застосували правило включень і виключень для множин  $A$  і  $(B \cup C)$

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap (B \cup C)| =$$

Застосували правило включень і виключень для множин

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$$

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| =$$

Застосували дистрибутивний закон  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - (|A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|) =$$

Правило включень і виключень для множин  $(A \cap B)$  і  $(A \cap C)$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Розкрили дужки

## Правило включень і виключень

Для  $n$  множин.

Нехай  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots, A_n$  - деякі множини.

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| = & \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \\ & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \leq i < j < k < \dots < l \leq n} |A_i \cap A_j \cap \dots \cap A_k \cap \dots \cap A_l \cap A_n| \end{aligned}$$

Правило підрахунку за даною формулою полягає в послідовному виконанні **операцій додавання і віднімання**, які чергуються між собою.

Звідси випливає назва: **правило включень і виключень**.



**Приклад.** Обчислення за правилом включень і виключень  
Нехай дані множини

$$A = \{1, 2, 3, 4, 9\}, B = \{3, 4, 5, 6, 9\} \text{ і } C = \{5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Обчислити 1)  $|A \cup B|$  2)  $|B \cup C|$  3)  $|A \cup C|$  4)  $|A \cup B \cup C|$ .

**Розв'язок.**  $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

1)  $A \cap B = \{3, 4, 9\}, |A \cap B| = 3, |A| = 5, |B| = 5$

Тому  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5 + 5 - 3 = 7$

2)  $B \cap C = \{5, 6, 9\}, |B \cap C| = 3. |B| = 5, |C| = 5$

Тому  $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C| = 5 + 5 - 3 = 7$

3)  $A \cap C = \{9\}, |A \cap C| = 1.$

Тому  $|A \cup C| = |A| + |C| - |A \cap C| = 5 + 5 - 1 = 9$

4)  $(A \cap B \cap C) = \{9\}, |A \cap B \cap C| = 1$

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = \\ &= |A \cup B \cup C| = 5 + 5 + 5 - 3 - 1 - 3 + 1 = 9 \end{aligned}$$

**Приклад. Записати правило включень і виключень для множин  $A, B, C$  і  $D$ .**

**Розв'язок.** Скористаємося загальною формулою:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \leq i < j < k < \dots < l \leq n} |A_i \cap A_j \cap \dots \cap A_k \cap \dots \cap A_l \cap A_n|$$

$$|A + B + C + D| = |A| + |B| + |C| + |D| -$$

$$- |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| +$$

$$+ |A \cap B \cap C| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| -$$

$$- |A \cap B \cap C \cap D|$$

## Розміщення з повтореннями (з поверненнями)

Упорядковану  $(n, k)$ -вибірку, у якій елементи можуть повторюватися, називають  $(n, k)$ -розміщенням з повтореннями.

Іншими словами, розміщеннями з повтореннями з  $n$  елементів по  $k$  називають упорядковані вибірки довжини  $k$ , складені з  $n$  елементів множини  $X$ .

Кількість розміщень з повтореннями з  $n$  елементів по  $k$  дорівнює кількості елементів декартового добутку  $X^k$   $n$ -елементної множини  $X$ , позначають  $\widehat{A}_n^k$  і обчислюють в такий спосіб:

$$\widehat{A}_n^k = n^k$$

**Приклад.** Нехай дано алфавіт із трьох букв  $X = \{a, b, c\}$ .

Тоді всі розміщення з повтореннями з цих трьох букв по два  $\widehat{A}_3^2 = 3^2$  утворюють підмножини:

$$X \times X = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$$

**Приклад.** У нашій розпорядженні є склад з комп'ютерами чотирьох типів: 1, 2, 3, 4. Поставлена задача комп'ютеризувати 3 лабораторії, шляхом передачі їм по одному комп'ютеру довільного типу.

Скількома способами можна виконати цю задачу?

Розв'язок. Кожний спосіб оснащення – це вибірка з повтореннями  $(4, 3)$ , тобто  $\widehat{A}_4^3 = 4^3 = 64$

**Приведемо всі можливі способи оснащення кожної  
із трьох лабораторій одним із чотирьох типів  
комп'ютерів:**

$\{1,1,1\}, \{1,1,2\}, \{1,1,3\}, \{1,1,4\}, \{1,2,1\}, \{1,2,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}$   
 $\{1,3,1\}, \{1,3,2\}, \{1,3,3\}, \{1,3,4\}, \{1,4,1\}, \{1,4,2\}, \{1,4,3\}, \{1,4,4\},$   
 $\{2,1,1\}, \{2,1,2\}, \{2,1,3\}, \{2,1,4\}, \{2,2,1\}, \{2,2,2\}, \{2,2,3\}, \{2,2,4\},$   
 $\{2,3,1\}, \{2,3,2\}, \{2,3,4\}, \{2,3,4\}, \{2,4,1\}, \{2,4,2\}, \{2,4,3\}, \{2,4,4\},$   
 $\{3,1,1\}, \{3,1,2\}, \{3,1,3\}, \{3,1,4\}, \{3,2,1\}, \{3,2,2\}, \{3,2,3\}, \{3,2,4\},$   
 $\{3,3,1\}, \{3,3,2\}, \{3,3,3\}, \{3,3,4\}, \{3,4,1\}, \{3,4,2\}, \{3,4,3\}, \{3,4,4\},$   
 $\{4,1,1\}, \{4,1,2\}, \{4,1,3\}, \{4,1,4\}, \{4,2,1\}, \{4,2,2\}, \{4,2,3\}, \{4,2,4\},$   
 $\{4,3,1\}, \{4,3,2\}, \{4,3,3\}, \{4,3,4\}, \{4,4,1\}, \{4,4,2\}, \{4,4,3\}, \{4,4,4\}$

**Алгоритм формування розміщення з повтореннями:**

Розміщення формуються послідовним рахунком в системі числення з основою 4.

## Розміщення без повторень ( без повернень)

У ряді задач необхідно визначити число вибірок довжини  $k$  з  $n$  елементів даної множини без повторення елементів.

*Якщо елементи впорядкованої  $(n, k)$ -вибірки попарно різні, то їх називають  $(n, k)$ -розміщенням без повторень або просто  $(n, k)$ -розміщенням.*

**Кількість таких розміщень без повторень**

**позначається  $A_n^k$  .**

## Вивід формули визначення кількості розміщень без повторень ( без повернень)

*Кожне  $(n, k)$ -розміщення без повторень є впорядкованою послідовністю довжини  $k$ , елементи якої попарно різні і вибираються із множини з  $n$  елементами.*

**Тоді перший елемент цієї послідовності може бути обраний  $n$  способами, після кожного вибору першого елемента послідовності другий елемент може бути обраний  $(n - 1)$  способами і т.д.,  $k$ -й елемент вибирається  $n - (k - 1)$  способом:**

$$A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)).$$

$$A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)).$$

Перетворимо цю формулу, помноживши та поділивши її на добуток чисел  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - k)$ :

$$\begin{aligned} A_n^k &= \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - (n - k)) \cdot 1 \cdot 2 \cdot (n - k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - k)} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - k) \cdot (n - (n - k)) \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - k)} = \\ &= \frac{n!}{(n - k)!} \end{aligned}$$



## Окремі випадки виразів для розміщень без повторень ( без повернень):

1. При  $k = 0$  одержуємо  $A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1.$

2. При  $k = n$  одержуємо  $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

3. При  $k > n$   $A_n^k = 0.$

4. При  $k < n$   $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

## Приклад задачі на розміщення

### Приклад.

Скількома способами можна розподілити 20 студентів на 5 комп'ютерів, за умови, що один студент може бути розподілений тільки на один комп'ютер?

### Розв'язок.

Обчислимо розміщення без повторень, оскільки студент може бути розподілений тільки на один комп'ютер:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Для нашого випадку  $n = 20, k = 5$ :  $A_{20}^5 = \frac{20!}{15!} = 1\,860\,480$

## Перестановки без повторень

Розглянемо задачу **упорядкування  $n$ -елементної множини  $A$**  (формування впорядкованої вибірки довжини  $n$ , складеної з  $n$ -елементної множини). Отримані при цьому вибірки будуть відрізнятися лише порядком слідування елементів.

Такі вибірки називають *перестановками без повторень із  $n$  елементів*.

Число перестановок без повторень із  $n$  елементів позначається  $P_n$ . **До перестановок без повторень можна прийти, вважаючи, що здійснюється розміщення без повторень із  $n$  елементів по  $n$ .**

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n - n)!} = n!$$

Нагадаємо, що  $0! = 1$ . Таким чином, перестановки без повторень – це окремий випадок розміщень без повторень (див. вище).

## Приклади на перестановки без повторень

**Приклад.** Скільки існує послідовностей перевірки контрольних робіт 130 студентів?

$$P_3 = 130! = 6.466855489220473672573043955365e + 219.$$

Скільки існує послідовностей перевірки контрольних робіт 3 студентів?

$$P_3 = 3! = 6$$

$$(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1).$$

**Приклад.** Скільки існує можливих послідовностей відвідування туристом п'яти різних країн?

$$P_n = n! \text{ При } n = 5 \text{ одержуємо } P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

## Перестановки з повтореннями

При визначенні перестановок без повторень ми розглядали ситуацію, коли у початковій  $n$ -множині  $A$  всі елементи унікальні.

Однак існують ситуації, коли *множина може містити деяку кількість однотипних елементів*.

**Визначення.** Число різних перестановок, які можна побудувати з  $n$  елементів, серед яких  $k_1$  елементів першого типу,  $k_2$  елементів другого типу, ...,  $k_m$  елементів  $m$ -го типу, дорівнює:

$$P(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}.$$

## Приклад для перестановок з повтореннями

**Приклад.** Скільки різних слів можна побудувати шляхом перестановки букв у слові «лаваш»?

**Розв'язок.** Слово «лаваш» включає по одному екземпляру букв «л», «в» і «ш», а також два екземпляри букви «а». Загальна кількість букв у слові дорівнює 5.

Використовуючи формулу  $P(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$

$$\text{одержимо } P(1, 1, 1, 2) = \frac{5!}{1!1!1!2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

**Приклад.** Скільки слів з 8 букв можна побудувати з букв за умови, що кількість букв «а» у цих словах не повинне перевищувати 3?

**Розв'язок.** Зазначеним умовам будуть задовольняти слова, які

- не мають ні однієї букви «а»,  $P(0,8)$ ,
- мають одну букву «а»,  $P(1,7)$ ,
- мають дві букви «а»,  $P(2,6)$ ,
- мають три букви «а»,  $P(3,5)$ .

Тоді загальна кількість слів рівно:

$$\begin{aligned} &P(0,8) + P(1,7) + P(2,6) + P(3,5) = \\ &= \frac{8!}{0!8!} + \frac{8!}{1!7!} + \frac{8!}{2!6!} + \frac{8!}{3!5!} = 1 + 8 + 28 + 56 = 93 \end{aligned}$$

## Сполуки (комбінації) без повторень

**Сполуками без повторень з  $n$  елементів по  $k$**  називають одмінні одна від одної хоча б одним елементом вибірки довжини  $k$ , складені з елементів  $n$ -множини.

Кількість сполук без повторень з  $n$  елементів по  $k$ , позначуване як  $C_n^k$ , визначають виходячи з числа розміщень без повторень  $A_n^k$  з урахуванням того, що різних неупорядкованих вибірок (підмножин вихідної множини) буде менше в число раз, яке дорівнює перестановці без повторень з  $k$  елементів  $P_k$ :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$



**Приклад.** Визначити кількість трьохелементних підмножин множини, яка складається з чотирьох елементів.

**Розв'язок.** Перераховуємо всі трьохелементні підмножини множини  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ :

$$\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_1, a_2, a_4\}$$

Їх кількість можна одержати, обчисливши кількість сполук з 4-х по 3.

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{24}{6} = 4$$

**Приклад.** Збірна команда університету по волейболу нараховує 15 людей. Скільки варіантів повинен розглянути тренер перед грою, щоб заявити список гравців на гру, за умови що в грі повинні брати участь тільки 6 гравців?

**Розв'язок.**

Число гравців волейбольної команди дорівнює 6. Виходить, число всіх можливих варіантів – це число різних підмножин, що складаються з шести елементів в множині з 15 елементів. Отже, використовуючи формулу

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

$$C_{15}^6 = \frac{15!}{6!(15-6)!} = \frac{15!}{6!9!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11 = 5005$$

## Сполуки (комбінації) з повтореннями

**Визначення.** Якщо кожному елементу деякої скінченної множини поставлена у відповідність кратність даного елемента, то говорять, що задана **сплука з повтореннями**.

**Суму  $k$  кратностей** усіх елементів називають порядком сполуки.

Сполуку з повтореннями  $k$ -го порядку, що складена з множини, яка містить  $n$  елементів, називають також комбінацією з повторенням з  $n$  елементів по  $k$ .

Якщо  $k_1, k_2, \dots, k_n$  — кратності елементів  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , то по визначенню  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  є порядок комбінації

$$\overbrace{a_1 a_1 a_1 \dots a_1}^{k_1} \overbrace{a_2 a_2 a_2 \dots a_2}^{k_2} \dots \overbrace{a_n a_n a_n \dots a_n}^{k_n}$$

**Теорема.** Кількість вибірок з повтореннями з  $n$  елементів по  $k$  виражають формулою

$$\widehat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Позначимо сполуки з повтореннями з  $n$  елементів по  $k$  як  $\widehat{C}_n^k$ .

**Приклад.** У кондитерському магазині продавалися 4 сорти тістечок: наполеони, еклери, бісквітні і картопля. Скількома способами можна купити 7 тістечок?

**Розв'язок.** Покладемо тістечка в коробку, а щоб вони не переплуталися, розділимо їх картонними роздільниками. Потрібно 3 роздільника. Позначення: 0 ( картонки-роздільники) і 1 — тістечка.

**Приклад покупки:** 1110101101 — три наполеона, 1 еклер, 2 бісквітних і 1 картопля.

Отже **два класи** об'єктів: **клас 1**-(7 штук) і **клас 0**-(3 штуки) — покупка — 10 об'єктів.



Задача зводиться до вибору місць для 7 тістечок (або для 3 роздільників) серед 10 об'єктів.

№	Наполеони		Еклери		Бісківтні		Картоплі	Усього
1	1	0	1	0	1	0	1111	7
2	1	0	1	0	11	0	111	7
3	1	0	1	0	111	0	11	7
4	1	0	1	0	1111	0	1	7
5	1	0	11	0	111	0	1	7
6	1	0	111	0	11	0	1	7
7	1	0	1111	0	1	0	1	7
7	11	0	111	0	1	0	1	7
9	111	0	11	0	1	0	1	7
10	1111	0	1	0	1	0	1	7
11	111	0	1	0	1	0	11	7
12	11	0	1	0	1	0	111	7
210	11	0	1	0	111		1	7

$$\hat{C}_n^k = \hat{C}_7^4 = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(7+4-1)!}{4!(7-1)!} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{24} = 210$$

**Приклад.** Скількома способами 12 кульок можна розподілити по 3 урнах?

**Розв'язок.**

Представимо, що три урни—це одна коробка із двома простінками. Тоді одержуємо два типи об'єктів:

Тип перший: кульки(12 штук)- кульку позначимо 1

Тип другої: простінки (2 штуки) – простінок позначимо 0.

Приклади розміщення:

11111011101111- $\{5,3,4\}$

10110111111111- $\{1,2,9\}$

11101110111111- $\{3,3,6\}$

$$\hat{C}_n^k = \hat{C}_{12}^3 = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(12+3-1)!}{3!(12-1)!} = \frac{14!}{3!11!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14}{6} = 364$$

## Приклади для комбінацій з повтореннями

**Приклад.** Нехай дана множина  $A = \{a, b, c, d\}$ . Тоді підмножини комбінацій з повтореннями  $\hat{C}_4^2$  включають:

$\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, c\}, \{c, d\}, \{d, d\}$

Їхня кількість

$$\hat{C}_n^k = \hat{C}_4^2 = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(4+2-1)!}{2!(4-1)!} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$



## **Розбиття множини на підмножини**

Нехай дана  $n$ -множина  $A$ . Говорять, що множина  $A$  розбита на  $k$  підмножин  $A_i$ , де  $(1, 2, \dots, k)$ , якщо:

1.  $A_i \neq \emptyset, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\};$
2.  $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, k\};$
3.  $\bigcup_{i=1}^k A_i = A.$

Позначимо число елементів у підмножині  $A_i$  через  $n(A_i) = n_i$ . Очевидно, що  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ .

Кількість розбиттів множини на підмножини позначимо

$$C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) .$$

## Визначимо кількість розбиттів

Кількість способів вибору елементів підмножини  $A_1$ , дорівнює кількості сполук  $C_n^{n_1}$ .

Кількість способів вибору елементів підмножини  $A_2$  дорівнює кількості сполук  $C_{n-n_1}^{n_2}$ .

Кількість способів вибору цих двох підмножин дорівнює  $C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2}$  і так далі.

Таким чином, кількість вибору всіх розбиттів дорівнює

$$\begin{aligned} & C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \dots \cdot C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k} = \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\dots-n_{k-1})!} = \\ &= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}. \end{aligned}$$

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \dots \cdot C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Порівняємо даний вираз з формулою для перестановок з повтореннями.

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

**Можна зробити висновок, що явище розбиття множини на підмножини й перестановки з повтореннями – це та сама комбінаторна дія з різною інтерпретацією.**

## Тотожності для сполук

Основна формула для кількості сполук

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

дозволяє одержати ряд простих тотожностей.  
Розглянемо деякі з них.

**Теорема 1.**  $C_n^r = C_n^{n-r}$

**Доведення.**  $C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_n^r.$

**Теорема 2.**  $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$ .

**Доведення.**

$$\begin{aligned}
 & C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1} = \\
 &= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-(r-1))!} = \\
 &= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = \\
 &= \frac{(n-1)!}{r \cdot (r-1)!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-r) \cdot (r-1)!(n-r-1)!} = \\
 &= \frac{(n-r)(n-1)! + r(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!} = \frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r
 \end{aligned}$$

**Теорема 3.**  $C_n^i C_i^r = C_n^r C_{n-r}^{i-r}$

**Доведення.**

$$\begin{aligned}
 C_n^i \cdot C_i^r &= \\
 &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{i!}{r!(i-r)!} = \frac{n!}{r!(i-r)!(n-i)!} = \\
 &= \frac{n!(n-r)!}{r!(i-r)!(n-i)!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r)!}{(i-r)!(n-r-i+r)!} = \\
 &= C_n^r \cdot \frac{(n-r)!}{(i-r)!((n-r)-(i-r))!} = C_n^r \cdot C_{n-r}^{i-r}
 \end{aligned}$$

**Теорема 4. Біном Ньютона:**  $(x + y)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r x^r y^{n-r}.$

$$(x + y)^2 = \sum_{r=0}^2 C_2^r x^r y^{2-r} = C_2^0 x^0 y^2 + C_2^1 x^1 y^1 + C_2^2 x^2 y^0 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$C_2^0 = \frac{2!}{0!(2-0)!} = 1; \quad C_2^1 = \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2; \quad C_2^2 = \frac{2!}{2!(2-2)!} = 1$$

$$(x + y)^3 = \sum_{r=0}^3 C_3^r x^r y^{3-r} = C_3^0 x^0 y^3 + C_3^1 x^1 y^2 + C_3^2 x^2 y^1 + C_3^3 x^3 y^0 = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + y^3$$

$$C_3^0 = 1; \quad C_3^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{6}{2} = 3; \quad C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3; \quad C_3^3 = 1$$

$$(x + y)^4 = \sum_{r=0}^4 C_4^r x^r y^{4-r} = C_4^0 x^0 y^4 + C_4^1 x^1 y^3 + C_4^2 x^2 y^2 + C_4^3 x^3 y^1 + C_4^4 x^4 y^0$$

$$= y^4 + 4x^1 y^3 + 12x^2 y^2 + 24x^3 y^1 + x^4$$

$$C_4^0 = 1; \quad C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4!}{3!} = 4; \quad C_4^2 = \frac{4!}{1!(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12; \quad C_4^3 = \frac{4!}{1!(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24;$$

## Наслідки теореми про біном Ньютона

**Наслідок 1:** Нехай  $x = 1$  і  $y = 1$

$$(1+1)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r 1^r 1^{n-r} = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

Отже  $\sum_{r=0}^n C_n^r = 2^n$

**Наслідок 2:** Нехай  $x = -1$  і  $y = 1$

$$(-1+1)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r (-1)^r 1^{n-r} = 0. \text{ Отже } \sum_{r=0}^n (-1)^r C_n^r = 0.$$

Отже  $\sum_{r=0}^n (-1)^r C_n^r = 0.$



**Наслідок 3.** Нехай  $y = 1$

$$(x+1)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r x^r. \text{ Продиференціюємо: } n(x+1)^{n-1} = \sum_{r=0}^n r x^{r-1} C_n^r$$

Підставимо  $x = 1$ . Одержимо:  $\sum_{r=0}^n r C_n^r = n 2^{n-1}$

**Теорема 5.**  $C_{n+r}^k = \sum_{i=0}^k C_n^i \cdot C_r^{k-i}$