Зразок завдань на колоквіум для студентів І курсу ФІОТ (ІІ семестр) по темі «Диференціальне числення функцій багатьох змінних» з розв'язанням

1) Визначити та графічно зобразити область визначення функції $z = \arccos\frac{x+y}{x^2+y^2}$

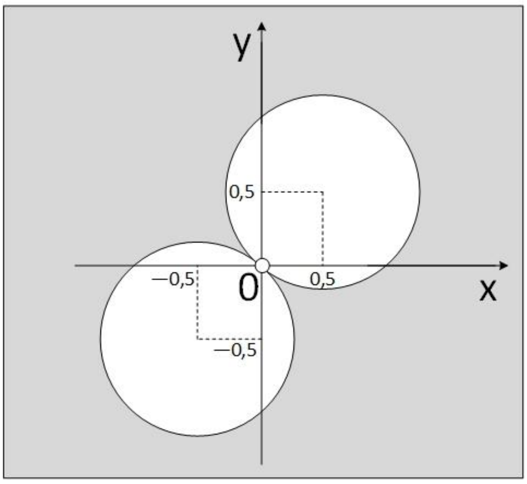
Розв'язання. Область визначення даної функції є множина точок, координат яких задовольняють нерівностям:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} \ge -1 \\ \frac{x+y}{x^2+y^2} \le 1 \end{cases}$$

Перейдемо до еквівалентної системи нерівностей:

$$\begin{cases} x+y \ge -(x^2+y^2) \\ x+y \le x^2+y^2 \\ x^2+y^2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y \ge 0 \\ x^2+y^2-x-y \ge 0 \\ x^2+y^2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2 \ge \frac{1}{2} \\ (x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2 \ge \frac{1}{2} \\ x^2+y^2 \ne 0 \end{cases}$$

Перша нерівність описує множину точок поза колом з центром в точці O_1(-0,5; -0,5) і $R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а друга – множину точок поза колом з центром в точці O_2(0,5; 0,5) і $R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$



Перетин цих точок і визначає область визначення даної функції.

Відповідь: $\begin{cases} (x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2 \ge \frac{1}{2} \\ (x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2 \ge \frac{1}{2} \\ x^2+y^2 \ne 0 \end{cases}$

2) Довести що функція $z = xy + f\left(\frac{y}{x}\right)$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$.

Розв'язання. Позначимо через $t = \frac{y}{x}$ і шукаємо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, користуючись правилом диференційованості складеної функції. Отже маємо $z = xy + f\left(t\right)$, де $t = \frac{y}{x}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dx} = y - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{y}{x^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dy} = x + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{1}{x};$$

Перевіряємо справедливість рівності обчислюючи ліву частину рівності алгебраїчними перетвореннями.

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left[y - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{y}{x^2}\right] + y\left[x + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{1}{x}\right] = 2xy + \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\right) = 2xy.$$

2′) Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x(y+z)(xy-z) + 8 = 0$ в точці *(2;1;3).*

Розв'язання. Функція $z = f(x, y)$ задана неявно рівнянням $F(x, y, z) = 0$, де $F(x, y, z) = x(y + +z)(xy - z) + 8$.

Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ шукаємо за формулою:

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

А нормаль за формулою:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}}$$

Обчислюємо:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (y+z)(xy-z) + xy(y+z) = (y+z)(2xy-z)\Big|_{(2;1;3)} = 4$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x(xy-z) + x^2(y+z) = x(2xy+xz)\Big|_{(2;1;3)} = 7$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = x(xy-z) - x(y+z) = x(xy-y-2z)\Big|_{(2;1;3)} = -10$$

Складаємо рівняння дотичної площини:

$$4(x-2) + 7(x-1) - 10(x-3) = 0$$

Остаточно:

$$4x + 7x - 10z + 15 = 0$$

Нормаль:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{-10}$$

3) Обчислити наближено за допомогою диференціала $\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98}\cdot\sqrt[4]{1.05^3}}$

Розв'язання. Шукане число є частинним значенням функції $f(x,y,z)=\frac{x^2}{\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt[4]{z^3}}$

в точці M(1,03; 0,98; 1,05)

Приймемо $x_0=1$, $y_0=1$, $z_0=1$, $M(x_0,y_0,z_0)$. Тоді прирости аргументів *x,y,z* $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, $\Delta z=z-z_0$, дорівнюють $\Delta x=0,03$, $\Delta y=-0,02$, $\Delta z=0,05$ відповідно. За формулою наближених обчислень маємо:

$$f(x,y,z)\approx f(x_0,y_0,z_0)+df(x_0,y_0,z_0),\qquad \text{де } df(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

$$f\left(x_0,y_0,z_0\right)=f\left(1,1,1\right)=1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt[4]{z^3}}\Big|_{(1,1,1)}=2\ ,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{3}\frac{x^2}{\sqrt[3]{y^2}\cdot\sqrt[4]{x^3}}\Big|_{(1,1,1)}=\frac{1}{3}\ ,\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{3}{4}\frac{x^2}{\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt[4]{z}}\Big|_{(1,1,1)}=-\frac{3}{4}$$

$$df\left(1,1,1\right)=2\cdot 0,03+\frac{1}{3}\cdot\left(-0,02\right)-\frac{3}{4}\cdot 0,05=\frac{1}{12}\left(0,72-0,08-0,45\right)=\frac{1}{12}\cdot 0,19\approx 0,015.$$

Отже, $\frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98}\cdot\sqrt[4]{1,05^3}}\approx 1+0,015=1,015$

Відповідь: $\frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98}\cdot\sqrt[4]{1,05^3}}\approx 1,015$

4) Дано функцію $z=x^2+3y^3-xy$**, точки** A(1, 1) **і** B(-2, 5). **Знайти** grad z(A) **і похідну в точці** A **за напрямом вектора** $\overrightarrow{AB}$ **та вказати фізичний зміст цих величин.**

Розв'язання. Формула для обчислення похідної функції $z=f(x,y)$ в т. $M_0(x_0,y_0)$ в напрямі одиничного вектора $\vec{L}(L_1,L_2)$,$|\vec{L}|$ =1, та градієнта має вигляд:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial L}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\overrightarrow{L_1}+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\overrightarrow{L_2}$$

$$grad\ f(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\vec{j}$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$ ={-3,4},$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{9+16}=5$, одиничний вектор $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\vec{L}=\left\{-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right\}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(2x-y)\Big|_{A(1;1)}=1;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=(9y^2-x)\Big|_{A(1;1)}=8;$$

$grad$ z(A)=$\vec{i}+8\vec{j}$

$$\frac{\partial z(A)}{\partial\vec{L}}=(grad\ z,\ \vec{L})=-\frac{3}{5}+\frac{32}{5}=\frac{29}{5};$$

Відповідь: $grad\ z(A)=\{1,8\}$; $\dfrac{\partial z(A)}{\partial \vec{L}}=\dfrac{29}{5}$; вектор $\{1,8\}$ вказує напрям найбільшої швидкості зміни функції в точці $A(1;1)$ в напрямі $\overrightarrow{AB}$ і вона дорівнює $\dfrac{29}{5}$ од., що говорить про зростання функції в напрямі цього вектора.

5) **Розв'язання задач на локальний екстремум, умовний екстремум та знаходження найменшого і найбільшого значень функції багатьох змінних** дивитись на сайті кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей.