ЛЕКЦІЯ 4

Інтерполяція *(продовження)*

ПОВТОРЕННЯ

1. **Поліном Лагранжа для нерівновіддалених вузлів**

2. **Скорочена форма запису полінома Лагранжа для нерівновіддалених вузлів**

3. **Поліном Лагранжа для рівновіддалених вузлів**

4. **Скорочена форма запису полінома Лагранжа для рівновіддалених вузлів**

5. **Оцінка похибки полінома Лагранжа для нерівновіддалених вузлів**

6. **Оцінка похибки полінома Лагранжа для рівновіддалених вузлів**

Нерівновіддалені вузли

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

$$L_n(x) = w_{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x - x_i)\, w'_{n+1}(x_i)}$$

$$w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \quad w'_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} (x_i - x_j)$$

Рівновіддалені вузли

$$L_n\left(x\right) = L_n\left(x_0 + mh\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(-1\right)^{n-i}\frac{\prod\limits_{i\neq j, j=0}^{n}\left(m - j\right)}{i!(n-i)!}y_i$$

$$L_n\left(x\right) = L_n\left(x_0 + mh\right) = \frac{1}{n!}v_{n+1}\left(m\right)\sum_{i=0}^{n}\left(-1\right)^{n-i}\frac{C_n^i}{m-i}y_i$$

$$v_{n+1}\left(m\right) = \prod_{i=0}^{n}\left(m-i\right), \qquad m = \frac{x-x_0}{h}$$

$$C_n^i = \frac{n!}{i!\left(n-i\right)!}$$

Погрішності (похибки)

Для нерівновіддалених вузлів

$$R_n(x) = \frac{w_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \qquad w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Для рівновіддалених вузлів

$$R_n(x) = \frac{w_{n+1}(m)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = h^{n+1} \frac{v_{n+1}(m)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$w_{n+1}(m) = h_{n+1} v_{n+1}(m) \ , v_{n+1}(m) = \prod_{i=0}^{n} (m - i), \quad m = \frac{x - x_0}{h}$$

Інтерполяційний многочлен Ньютона

1. Розділені різниці першого порядку. Нехай дано набір $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, $x_i \in [a, b]$, на якому деяка функція $f(x) \in R$ набуває значень $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

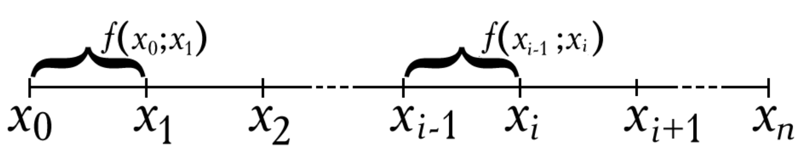
Розділені різниці першого порядку – це вирази, що визначаються для пар точок: (x_0, x_1), (x_1, x_2), $\ldots$, (x_{n-1}, x_n)

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_0; x_1) = y_{10}; \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f(x_1; x_2) = y_{21};$$

$$\ldots; \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f(x_{n-1}; x_n) = y_{n,n-1},$$

У загальному випадку для пари (x_i, x_{i+1}):

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f(x_i; x_{i+1}) = y_{i+1,i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$



2. Розділені різниці другого порядку

Розділені різниці другого порядку – це вирази, що визначаються для трьох точок: $\left(x_0,x_1,x_2\right),\left(x_1,x_2,x_3\right),\ldots$

$$\frac{f\left(x_1;x_2\right)-f\left(x_0;x_1\right)}{x_2-x_0}=f\left(x_0;x_1;x_2\right)=y_{210};$$

$$\left(f\left(x_0;x_1\right),f\left(x_1;x_2\right)\right)$$

$$\frac{f\left(x_2;x_3\right)-f\left(x_1;x_2\right)}{x_3-x_1}=f\left(x_1;x_2;x_3\right)=y_{321};\ldots$$

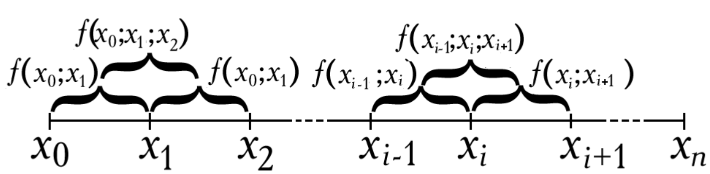
$$\left(f\left(x_1;x_2\right),f\left(x_2;x_3\right)\right)$$

$$\ldots;\frac{f\left(x_{n-1};x_n\right)-f\left(x_{n-2};x_{n-1}\right)}{x_n-x_{n-2}}=f\left(x_{n-2};x_{n-1};x_n\right)=y_{n,n-1,n-2},$$

У загальному випадку для точок: $\left(x_i,x_{i+1},x_{i+2}\right).$

$$\frac{f\left(x_{i+1};x_{i+2}\right)-f\left(x_i;x_{i+1}\right)}{x_{i+2}-x_i}=f\left(x_i;x_{i+1};x_{i+2}\right)=y_{i+2,i+1,i},$$

$$i=0,1,2,\ldots,n-2$$



3. Розділені різниці k-го порядку

Розділеними різницями k-го порядку називаються відношення (приймає участь (k+1) точка)

$$\frac{f\left(x_1;\ldots;x_k\right)-f\left(x_0;\ldots;x_{k-1}\right)}{x_k-x_0}=f\left(x_0;\ldots;x_k\right)=y_{k\ldots0};$$

$$\frac{f\left(x_2;\ldots;x_{k+1}\right)-f\left(x_1;\ldots;x_k\right)}{x_{k+1}-x_1}=f\left(x_1;\ldots;x_{k+1}\right)=y_{k+1\ldots1};\ldots$$

…

$$\frac{f\left(x_{n-k+1};\ldots;x_n\right)-f\left(x_{n-k};\ldots;x_{n-1}\right)}{x_n-x_{n-k}}=f\left(x_{n-k};\ldots;x_n\right)=y_{n\ldots n-k};$$

Загальний вигляд розділеної різниці k-го порядку.

$$\frac{f\left(x_{i+1};\ldots;x_{i+k}\right)-f\left(x_i;\ldots;x_{i+k-1}\right)}{x_{i+k}-x_i}=f\left(x_i;\ldots;x_{i+k}\right)=y_{i+k\ldots i},$$

$i=0,1,\ldots,n-k,$

які визначаються для $x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+k}.$

4. Розділена різниця n-го порядку

Розділеною різницею n-го порядку називається відношення

$$\frac{f\left(x_1;\ldots;x_n\right)-f\left(x_0;\ldots;x_{n-1}\right)}{x_n-x_0}=f\left(x_0;\ldots;x_n\right)=y_{n\ldots0},$$

яка визначається для $x_0,x_1,\ldots,x_n$.

Приклад. Взаємне розташування розділених різниць:

$$\begin{array}{ccccc}
f(x_0) & & & & \\
 & f(x_0;x_1) & & & \\
f(x_1) & & f(x_0;x_1;x_2) & & \\
 & f(x_1;x_2) & & f(x_0;x_1;x_2;x_3) & \\
f(x_2) & & f(x_1;x_2;x_3) & & f(x_0;x_1;x_2;x_3;x_4) \\
 & f(x_2;x_3) & & f(x_1;x_2;x_3;x_4) & \\
f(x_3) & & f(x_2;x_3;x_4) & & \\
 & f(x_3;x_4) & & & \\
f(x_4) & & & &
\end{array}$$

функція I II III IV

Вирази для розділених різниць через значення функцій

Перетворимо розділену 2-го порядку різницю $f\left(x_0;x_1;x_2\right)$ до виду:

$$f\left(x_0;x_1;x_2\right)=\frac{f\left(x_1;x_2\right)-f\left(x_0;x_1\right)}{x_2-x_0}=\frac{\dfrac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}-\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}=$$

$$\frac{f\left(x_2\right)\left(x_1-x_0\right)-f\left(x_1\right)\left(x_1-x_0\right)-f\left(x_1\right)\left(x_2-x_1\right)+f\left(x_0\right)\left(x_2-x_1\right)}{\left(x_2-x_1\right)\left(x_1-x_0\right)\left(x_2-x_0\right)}=$$

$$=\frac{f\left(x_0\right)}{\left(x_0-x_1\right)\left(x_0-x_2\right)}-\frac{f\left(x_1\right)\left(x_1-x_0+x_2-x_1\right)}{\left(x_2-x_1\right)\left(x_1-x_0\right)\left(x_2-x_0\right)}+\frac{f\left(x_2\right)}{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2-x_0\right)}=$$

$$\frac{f\left(x_0\right)}{\left(x_0-x_1\right)\left(x_0-x_2\right)}+\frac{f\left(x_1\right)}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_0\right)}+\frac{f\left(x_2\right)}{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2-x_0\right)}$$

Отже,

$$f(x_0;x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}+\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}$$

$$f(x_0;x_1;x_2)=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_0)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)}$$

Узагальнивши отриманий вираз для $k-$ої розділеної різниці, одержимо:

$$f(x_0;x_1;...;x_k)=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_k)}$$

Приклад 5. Нехай задані x_0, x_1, x_2, x_3 і відомі значення функції

$$f\left(x_0\right) = y_0, f\left(x_1\right) = y_1,\ f\left(x_2\right) = y_2,\ f\left(x_3\right) = y_3.$$

Побудувати послідовність одержання розділених різниць.

Розв'язок. У цьому випадку $n = 3$.

Послідовно будемо застосовувати формулу.

У результаті одержимо:

- розділені різниці першого порядку

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = y_{10}, \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = y_{21}, \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = y_{32}.$$

- розділені різниці другого порядку

$$\frac{y_{21} - y_{10}}{x_2 - x_0} = y_{210}, \frac{y_{32} - y_{21}}{x_3 - x_1} = y_{321}\ ;$$

- розділена різниця третього порядку

$$\frac{y_{321} - y_{210}}{x_3 - x_0} = y_{3210}.$$

Приклад 6. Скласти розділені різниці для функції $y = f\left(x\right)$, заданої таблицею

x_0=1,00	x_1=1,02	x_2=1,03	x_3=1,06	x_4=1,08
y_0=3,162	y_1=3,194	y_2=3,209	y_3=3,256	y_4=3,286

Розв'язок. Використовуючи схему побудови й позначення попереднього прикладу, будемо мати:

- розділені різниці першого порядку

$$y_{10} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{3,194 - 3,162}{1,02 - 1,00} = 1,6,$$

$$y_{21} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3,209 - 3,194}{1,03 - 1,02} = 1,5$$

$$y_{32} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{3,256 - 3,209}{1,06 - 1,03} \approx 1,566,$$

$$y_{43} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{3,286 - 3,256}{1,08 - 1,06} = 3,85$$

- розділені різниці другого порядку

$$y_{210}=\frac{y_{21}-y_{10}}{x_2-x_0}=\frac{1,5-1,6}{1,03-1,00}\approx-3,333,$$

$$y_{321}=\frac{y_{32}-y_{21}}{x_3-x_1}=\frac{1,566-1,5}{1,06-1,02}\approx 1,65,$$

$$y_{432}=\frac{y_{43}-y_{32}}{x_4-x_2}=\frac{3,85-1,566}{1,08-1.03}\approx 45,68,$$

- розділені різниці третього порядку

$$y_{3210}=\frac{y_{321}-y_{210}}{x_3-x_0}=\frac{1,65+3,333}{1,06-1,00}\approx 83,05,$$

$$y_{4321}=\frac{y_{432}-y_{321}}{x_4-x_1}=\frac{45,68-1,65}{1,08-1,02}\approx 733,83.$$

- розділена різниця четвертого порядку:

$$y_{43210}=\frac{y_{4321}-y_{3210}}{x_4-x_0}=\frac{733,83-83,05}{1,08-1,00}\approx 8134,75$$

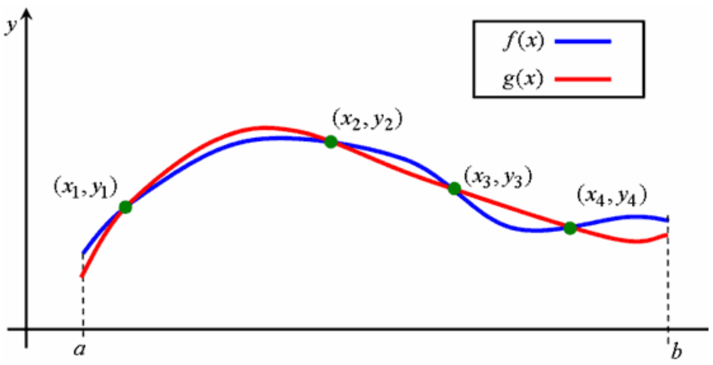
Таблиця розділених різниць для функції $y = f(x)$, *яка задана таблично*

x_0=1,00	x_1=1,02	x_2=1,03	x_3=1,06	x_4=1,08
y_0=3,162	y_1=3,194	y_2=3,209	y_3=3,256	y_4=3,286

	y_0		y_1		y_2		y_3	y_4
I		y_{10}		y_{21}		y_{32}		y_{43}
		1.6		1.5		1.566		3.85
II			y_{210}		y_{321}		y_{432}	
			-3.333		1.65		45.68	
III				y_{3210}		y_{4321}		
				83.05		733.83		
IV					y_{43210}			
					8134.75			

Інтерполяційний многочлен Ньютона для довільно заданих вузлів

Постановка задачі. Нехай для функції $y = f(x)$ задані значення $y_i = f(x_i)$ в нерівновіддалених $(n+1)$ вузлах інтерполяції



$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n).$$

Потрібно побудувати многочлен $N_n(x)$ степеня, що не вище n і приймає в заданих вузлах $x_i,\ i = 0,1,2,\ldots,n$ значення, що збігаються зі значеннями y_i,

$$N_n(x_i) = y_i,\ \ i = 0,1,2,\ldots,n.$$

Теорема про існування многочлена Ньютона для довільно заданих вузлів

Нехай задані вузли x_i, $i = 0,1,2,\dots,n$, серед яких немає співпадаючих, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, і задані значення

$$y_0 = f\left(x_0\right), y_1 = f\left(x_1\right),\ y_2 = f\left(x_2\right),\dots, y_n = f\left(x_n\right)$$

функції $f\left(x\right)$ в цих вузлах. Тоді існує многочлен

$$N_n\left(x\right) = f\left(x_0\right) + f\left(x_0;x_1\right)\left(x - x_0\right) +$$
$$+ f\left(x_0;x_1;x_2\right)\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right) + \dots$$
$$\dots + f\left(x_0;x_1;\dots;x_n\right)\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\dots\left(x - x_{n-1}\right).$$

степеня не вище n, що приймає в заданих вузлах x_i, $i = 0,1,2,\dots,n$ задані значення y_i,

$$N_n\left(x_i\right) = y_i,\ i = 0,1,\dots,n.$$

Многочлен називають інтерполяційним многочленом Ньютона для нерівновіддалених вузлів.

Вивід формули многочлена Ньютона для довільно заданих вузлів

Нехай $L_n(x)$ – інтерполяційний поліном Лагранжа, побудований для функції $f(x)$ по вузлах $x_0, x_1, ..., x_n$. Тоді

$$L_n(x) = L_0(x) - L_0(x) + L_1(x) - L_1(x) + \ldots + L_{n-1}(x) - L_{n-1}(x) + L_n(x)$$

$L_n(x) = L_n(x)$:

$$L_n(x) = L_0(x) + \left[L_1(x) - L_0(x)\right] + \left[L_2(x) - L_1(x)\right] + \ldots$$

$$\ldots + \left[L_{n-1}(x) - L_{n-2}(x)\right] + \left[L_n(x) - L_{n-1}(x)\right]$$

Знайдемо різницю $L_1(x) - L_0(x)$:

$$L_1(x) - L_0(x) = \left(\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}y_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}y_1\right) - y_0 =$$

$$= \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}y_1 + \frac{(x-x_1)y_0 - (x_0-x_1)y_0}{(x_0-x_1)} = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}y_1 + \frac{(x-x_0)}{(x_0-x_1)}y_0 =$$

$$= \left[\frac{y_1}{(x_1-x_0)} + \frac{y_0}{(x_0-x_1)}\right](x-x_0) = f(x_0;x_1)(x-x_0)$$

Знайдемо різницю $L_2(x) - L_1(x)$:

$$L_2(x) - L_1(x) =$$

$$= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2 -$$

$$- \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} y_0 - \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} y_1 =$$

$$= \left(\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_0)} + \frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)} \right) \cdot$$

$$\cdot (x-x_0)(x-x_1) = f(x_0; x_1; x_2) \cdot (x-x_0)(x-x_1)$$

У загальному випадку:

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = f(x_0;x_1;\ldots;x_k)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})$$

Враховуючи, що

$$L_n(x) = L_0(x) + \left[L_1(x) - L_0(x)\right] + \left[L_2(x) - L_1(x)\right] + \ldots + \left[L_n(x) - L_{n-1}(x)\right]$$

для $L_n(x)$, одержимо:

$$L_n(x) = f_0(x) + f(x_0;x_1)(x-x_0) + f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \ldots$$
$$f(x_0;x_1;\ldots;x_n)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

Підсумок виводу інтерполяційного многочлена Ньютона

Вираз, що отриманий з полінома Лагранжа, має назву:

Інтерполяційний поліном Ньютона для нерівновіддалених вузлів:

$$N_n(x) = f_0(x) + f(x_0;x_1)(x-x_0) + f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \ldots$$
$$+ f(x_0;x_1;\ldots;x_n)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

Перевага многочлена Ньютона

Додавання чергового вузла не приводить до переобчислення всіх попередніх вузлів.

Похибка інтерполяційного многочлена Ньютона

Залишковий член такий же, як і в полінома Лагранжа, але його записують в іншій формі:

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) f(x, x_0; x_1; \dots; x_n)$$

Якщо $f(x)$ має похідну (n) порядку, то

$$f(x_0; x_1; x_2; \dots; x_{n+1}) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Звідси

$$R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Розглянемо приклад побудови й застосування многочлена Ньютона.

Приклад 7. Нехай функція $y = f\left(x\right)$ задана таблицею

i	0	1	2	3
x_i	1,00	1,03	1,05	1,09
y_i	1,00	1,015	1,034	1,044

Потрібно побудувати многочлен Ньютона та за його допомогою обчислити $f\left(1,08\right)$.

Розв'язок.

Етап 1. Формуємо розділені різниці:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1,015 - 1,00}{1,03 - 1,00} = 0,5 = y_{10},$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1,034 - 1,015}{1,05 - 1,03} = 0,5 = y_{21},$$

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{1,044 - 1,034}{1,09 - 1,05} = 0,475 = y_{32}.$$

$$\frac{y_{21} - y_{10}}{x_2 - x_0} = \frac{0,5 - 0,5}{1,05 - 1,0} = 0 = y_{210},$$

$$\frac{y_{32} - y_{21}}{x_3 - x_1} = \frac{0,475 - 0,5}{1,09 - 1,03} \approx -0,416 = y_{321},$$

$$\frac{y_{321} - y_{210}}{x_3 - x_0} = \frac{-0,416 - 0}{1,09 - 1,00} = -4,63 = y_{3210}.$$

Етап 2. Використовуючи формулу

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0;x_1)(x - x_0) +$$
$$+ f(x_0;x_1;x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$\dots + f(x_0;x_1;\dots;x_n)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

знаходимо многочлен Ньютона:

$$N_3(x) = y_0 + y_{10}(x - x_0) + y_{210}(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ y_{3210}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = 1 + 0,5(x - 1,00) - 4,63(x - 1,00)(x - 1,03)(x - 1,05)$$

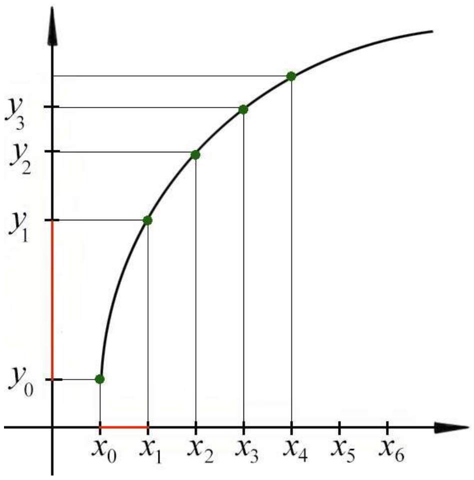
$$y = -4.63x^3 + 14.26x^2 - 14.13x + 4.5$$

Етап 3. Підставимо в даний многочлен задане значення аргументу й одержимо:

$$y = f(1,08) = 1,00 + 0,5(1,08 - 1.00) -$$
$$-4,63(1,08 - 1,00)(1,08 - 1,03)(1,08 - 1,05) \approx 1,039$$

Поняття про скінченні різниці

Нехай є набір рівновіддалених точок $x_0, x_1, \ldots, x_n,\ \ x_i \neq x_j$ при $i \neq j,\ x_i \in [a,b],\ x_{i+1} - x_i = h = const$, на якому деяка функція $f(x) \in R$ приймає значення $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.



Скінченні різниці першого порядку

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = y_1 - y_0;$$

$$\Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1; \ldots;$$

$$\Delta f(x_{n-1}) = f(x_n) - f(x_{n-1}) = y_n - y_{n-1}$$

Запис скінченної різниці першого порядку у загальному вигляді

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i),\ \ i = 0,1,2,\ldots,n-1$$

Скінченні різниці другого порядку

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta(\Delta f(x_0)) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0) =$$
$$= (f(x_2) - f(x_1)) - (f(x_1) - f(x_0)) =$$
$$= f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0) = y_2 - 2y_1 + y_0;$$

$$\Delta^2 f(x_1) = \Delta(\Delta f(x_1)) = \Delta f(x_2) - \Delta f(x_1) = f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1);$$
$$\Delta^2 f(x_{n-2}) = \Delta(\Delta f(x_{n-2})) = \Delta f(x_{n-1}) - \Delta f(x_{n-2}) =$$
$$= f(x_n) - 2f(x_{n-1}) + f(x_{n-2}).$$

Запис скінченної різниці другого порядку у загальному вигляді

$$\Delta^2 f(x_i) = \Delta(\Delta f(x_i)) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i) =$$
$$= f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i) =$$
$$= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i.$$
$$i = 0, 1, \ldots, n-2.$$

Скінченні різниці k-го порядку

$$\Delta^k f\left(x_0\right) = \Delta\left(\Delta^{k-1} f\left(x_0\right)\right) = \sum_{j=0}^{k} \left(-1\right)^{k-j} C_k^j f\left(x_j\right),$$

$$\Delta^k f\left(x_1\right) = \Delta\left(\Delta^{k-1} f\left(x_1\right)\right) = \sum_{j=0}^{k} \left(-1\right)^{k-j} C_k^j f\left(x_{j+1}\right),$$

.....

Запис скінченної різниці k –го порядку у загальному вигляді

$$\Delta^k f\left(x_i\right) = \Delta\left(\Delta^{k-1} f\left(x_i\right)\right) = \sum_{j=0}^{k} \left(-1\right)^{k-j} C_k^j f\left(x_{j+i}\right)$$

$$i = 0,1,2,\ldots,n-k,\ C_k^j = \frac{k!}{j!\left(k-j\right)!}$$

Скінченна різниця n-го порядку

Скінченна різниця n-го порядку визначається виразом

$$\Delta^n f\left(x_0\right) = \Delta\left(\Delta^{n-1} f\left(x_0\right)\right) = \sum_{j=0}^{n} \left(-1\right)^{k-j} C_n^j f\left(x_j\right)$$

Розділені і скінченні різниці

При постійному кроці h розділені і скінченні різниці зв'язані співвідношенням

$$f\left(x_i;\ldots;x_{i+k}\right) = \frac{\Delta^k f_i}{k!h^k},\ i = 0,1,\ldots,n-k$$

Інтерполяційний многочлен Ньютона для рівновіддалених вузлів

Постановка задачі. Нехай для функції $y = f(x)$ задані значення $y_i = f(x_i)$ в рівновіддалених $(n+1)$ вузлах інтерполяції

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \; y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n).$$

Потрібно побудувати многочлен $N_n(x)$ зі степенем, що не вище n, який приймає в заданих вузлах $x_i, \; i = 0,1,2,\ldots.,n$ значення, що збігаються зі значеннями y_i

$$N_n(x_i) = y_i, \;\; i = 0,1,2,\ldots,n.$$

Перший інтерполяційний многочлен Ньютона

Перший інтерполяційний многочлен Ньютона отримаємо за допомогою підстановки в многочлен

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0;x_1)(x-x_0) +$$
$$+ f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \ldots$$
$$\ldots + f(x_0;x_1;\ldots;x_n)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

замість розділених різниць їх вирази через скінченні різниці:

$$f(x_i;\ldots;x_{i+k}) = \frac{\Delta^k f_i}{k!\,h^k},\ i = 0,1,\ldots,n-k$$

Зробимо заміну $d = \dfrac{x-x_0}{h}$ – число кроків, необхідних для досягнення точки x, виходячи з x_0.

Визначимо значення доданків першого многочлена Ньютона:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{h}\cdot\left(\frac{x-x_0}{h}-\frac{h}{h}\right)=d\left(d-1\right)}$$

$$y_{10}\left(x-x_0\right)=\frac{\Delta y_0\left(x-x_0\right)}{1!h}=d\Delta y_0,$$

$$y_{210}\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)=\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}\left(x-x_0\right)\left(x-x_0-h\right)=\frac{d\left(d-1\right)}{2!}\Delta^2 y_0$$

$$y_{3210}\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)=$$

$$=\frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}\left(x-x_0\right)\left(x-x_0-h\right)\left(x-x_0-2h\right)=\frac{d\left(d-1\right)\left(d-2\right)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$y_{n\ldots 0}\left(x-x_0\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-x_{n-1}\right)=$$

$$=\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}\left(x-x_0\right)\left(x-x_0-h\right)\ldots\left(x-x_0-\left(n-1\right)h\right)=\frac{d\left(d-1\right)\left(d-n+1\right)}{n!}\Delta^n y_0$$

$$N_n\left(x\right)=y_0+d\Delta y_0+\frac{d\left(d-1\right)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{d\left(d-1\right)\left(d-2\right)}{3!}\Delta^3 y_0+\ldots$$

$$\ldots+\frac{d\left(d-1\right)\ldots\left(d-n+1\right)}{n!}\Delta^n y_0,$$

ВИСНОВОК
Перший інтерполяційний многочлен Ньютона для рівновіддалених вузлів

$$N_n(x) = y_0 +$$

$$+d\Delta y_0 +$$

$$+\frac{d(d-1)}{2!}\Delta^2 y_0 +$$

$$+\frac{d(d-1)(d-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{d(d-1)\ldots(d-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

Другий інтерполяційний многочлен Ньютона

Введемо заміну $d = \dfrac{x - x_n}{h}$.

Тоді $\dfrac{x - x_{n-1}}{h} = \dfrac{x - x_n + h}{h} = \dfrac{x - x_n}{h} + \dfrac{h}{h} = d + 1,$

$\dfrac{x - x_{n-2}}{h} = \dfrac{x - x_n + 2h}{h} = d + 2.$ Підставимо в многочлен:

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) +$$
$$+ f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + f(x_0; x_1; \ldots; x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

У результаті отримаємо аналогічно:

$$N_n(x) = y_n + d\Delta y_{n-1} + \frac{d(d+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} +$$
$$+ \frac{d(d+1)(d+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots + \frac{d(d+1)\ldots(d+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

ВИСНОВОК
Другий інтерполяційний многочлен Ньютона для рівновіддалених вузлів

$$N_n\left(x\right) = y_n +$$

$$+d\Delta y_{n-1} +$$

$$+\frac{d\left(d+1\right)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} +$$

$$+\frac{d\left(d+1\right)\left(d+2\right)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{d\left(d+1\right)\ldots\left(d+n-1\right)}{n!}\Delta^n y_0,$$

Похибка інтерполяційного полінома Ньютона з рівновіддаленими вузлами

Залишковий член може бути отриманий з попередньої формули для залишкового члена полінома Ньютона з нерівновіддаленими вузлами.

$$R_n(x) = (x - x_0)(x - x_0 - h)\ldots(x - x_0 - nh)\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} =$$

$$= \frac{h^n f^{(n)}(\xi)}{n!} d(d-1)(d-2)\ldots(d-n). \quad d = \frac{x - x_0}{h}$$

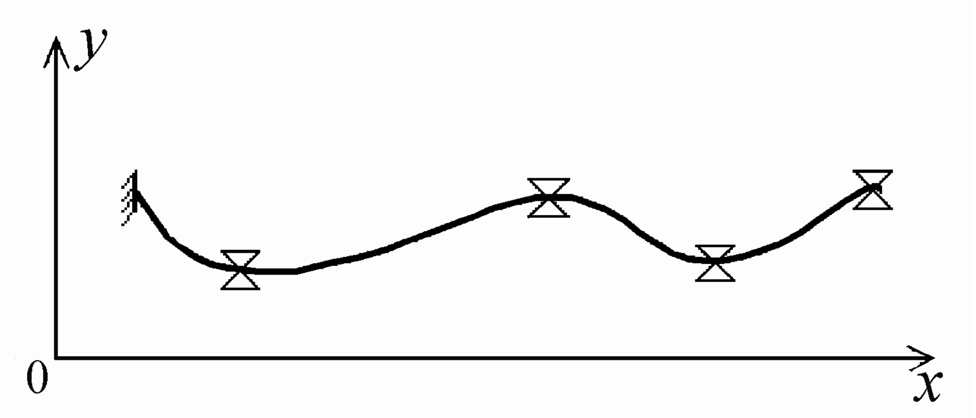
де $x - x_0 = dh$**. Або для другого многочлена аналогічно**

$$R_n(x) = \frac{h^n f^{(n)}(\xi)}{n!} d(d+1)\ldots(d+n) \quad \textbf{при} \quad d = \frac{x - x_n}{h}$$

Сплайн-інтерполяція

«Сплайн» – гнучка лінійка.

Кубічні сплайн-функції є деякою математичною моделлю гнучкого тонкого стрижня із пружного матеріалу, закріпленого в точках (сусідніх вузлах інтерполяції). Між точками закріплення цей стрижень прийме деяку форму, яка мінімізує його потенційну енергію. У загальному випадку сплайн задають у глобальний спосіб, тобто з використанням усіх вузлів при будь-якім їх розташуванні.



Локальний кубічний сплайн

Постановка задачі для сплайн-інтерполяції

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана неперервна функція $f(x)$.

Задамо розбивку відрізка:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Нехай для функції $y = f(x)$ задані значення

$y_i = f(x_i)$ у $(n+1)$ вузлах інтерполяції.

Сплайном, який відповідає даній функції $f(x)$ і вузлам інтерполяції x_i, $i=0,...,n$ будемо називати деяку функцію $s_i(x)$, що задовольняє умови:

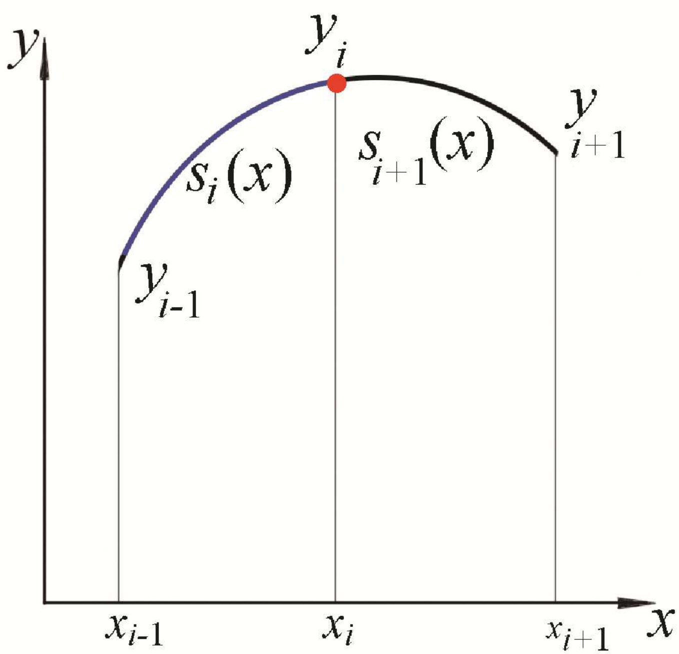
1) на кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ $i=1,2,...,n$ функція $s_i(x)$ є кубічним многочленом,

2) $s_i(x)$, а також $s_i'(x)$ і $s_i''(x)$ – неперервні на відрізку $[a,b]$:

$$s_i(x_i-0)=s_{i+1}(x_i+0),$$

$$s_i'(x_i-0)=s_{i+1}'(x_i+0),$$

$$s_i''(x_i-0)=s_{i+1}''(x_i+0),\ i=1,...,n-1$$



3) $s_{i+1}(x_i)=f(x_i)=y_i$, $i=0,1,...,n$ – умова інтерполяції,

4) $s_1''(x_0)=0,\ s_n''(x_n)=0$.

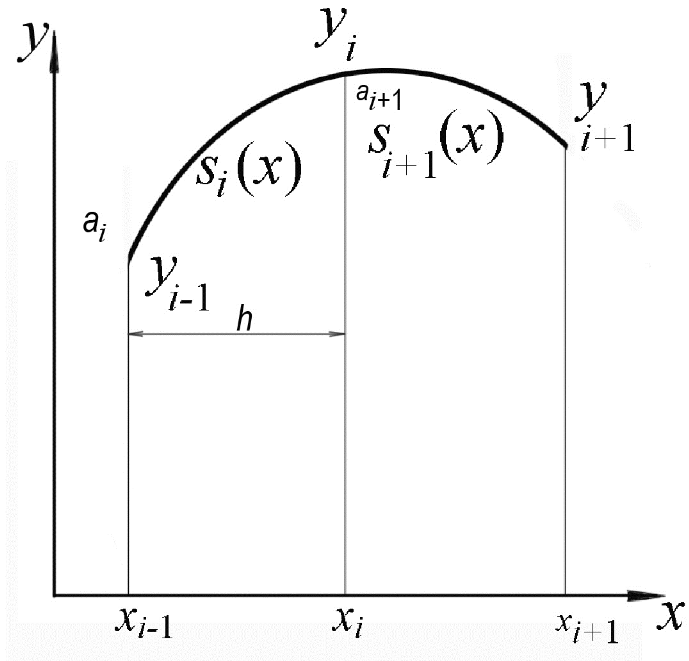
На кожному відрізку$[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ будемо шукати сплайн-функцію $s_i(x)$ у вигляді полінома третього степеня:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$$

$$x_{i-1} \le x \le x_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

Крім того в точці x_{i-1}:

$s_i(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1}$ – умова зшивки сплайнів у вузлах



Введемо позначення: $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Тоді

$$s_i(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i, \; i = 1, ..., n-1$$

(1)

де a_i, b_i, c_i, d_i – шукані коефіцієнти. $i = 1, 2, ..., n$

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \qquad (1)$$

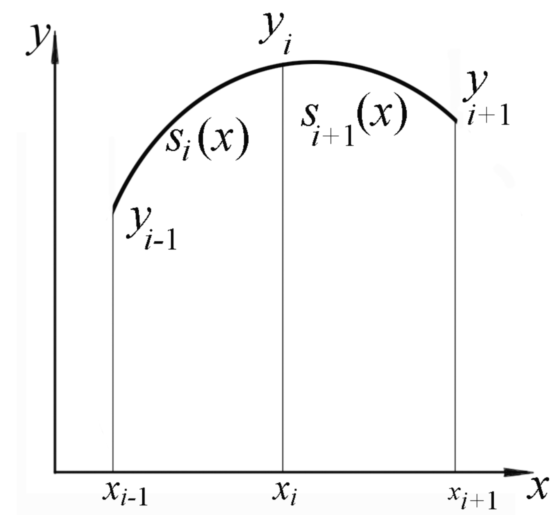
$$s_{i+1}(x) = a_{i+1} + b_{i+1}(x - x_i) + c_{i+1}(x - x_i)^2 + d_{i+1}(x - x_i)^3,$$

Знайдем похідні функцій $s_i(x)$ та $s_{i+1}(x)$:

$$s_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2, \; x \in [x_{i-1}, x_i];$$

$$s_{i+1}'(x) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_i) + 3d_{i+1}(x - x_i)^2, \; x \in [x_i, x_{i+1}];$$

Використовуючи вимогу неперервності перших похідних
у вузлах інтерполяції $s_i'(x_i - 0) = s_{i+1}'(x_i + 0)$,
одержимо:



$$b_i + 2c_ih_i + 3d_ih_i^2 = b_{i+1}; \; i = 1, ..., n-1. \qquad (2)$$

Обчислимо другі похідні на суміжних відрізках:

$s_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}),\ x \in [x_{i-1}, x_i];$

$s_{i+1}''(x) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_i),\ x \in [x_i, x_{i+1}];$

Використовуючи вимогу неперервності других похідних у вузлах інтерполяції $s_i''(x_i - 0) = s_{i+1}''(x_i + 0)$, одержимо:

$$2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1};\ i = 1, ..., n-1. \qquad (3)$$

Або після скорочення:

$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1};\ i = 1, ..., n-1.$$

Із граничних умов $s''(x_0) = 0,\ s''(x_n) = 0$ одержимо, що

$$c_1 = 0;\ c_n + 3d_n h_n = 0. \qquad (4)$$

Співвідношення (1-4) утворюють систему $4n$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $4n$ невідомими:

$$\begin{cases} a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i, \\ b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}, \\ 2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1}, \\ c_1 = 0;\ c_n + 2d_n h_n = 0, \end{cases} \quad i = 1,\dots,n-1$$

Із третього рівняння знайдемо d_i :

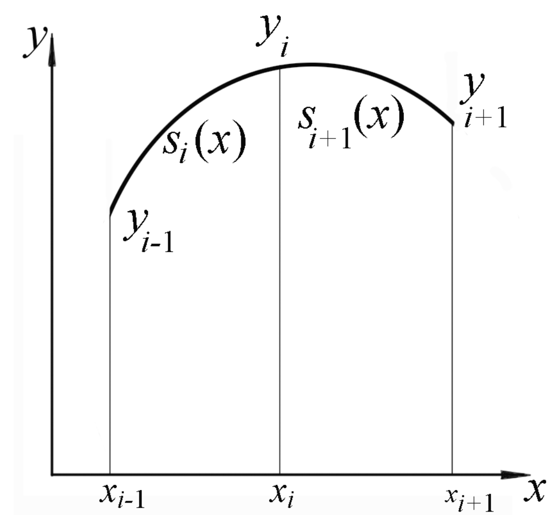
$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i};$$

d_i підставимо в перше рівняння системи:

$$y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + \frac{c_{i+1} - c_i}{3} h_i^2, \quad i = 1,\dots,n-1 \qquad (5)$$

Знову ж з умов неперервності $y_{i-1} = a_i, \quad i = 1,\dots,n$. Тоді

$$y_i = y_{i-1} + b_i h_i + c_i h_i^2 + \frac{c_{i+1} - c_i}{3} h_i^2, \quad i = 1,\dots,n-1$$



Виразимо із цього співвідношення b_i:

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}\left(c_{i+1} + 2c_i\right); \ i = 1,\dots,n-1 \tag{6}$$

Підставимо тепер значення

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}\left(c_{i+1} + 2c_i\right), \ b_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3}\left(c_{i+2} + 2c_{i+1}\right) \text{ і } d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

у друге рівняння системи: $b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1};$

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}\left(c_{i+1} + 2c_i\right) + 2h_i c_i + 3h_i^2 \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} =$$

$$= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3}\left(c_{i+2} + 2c_{i+1}\right), \ i = 1,\dots,n-1$$

Домножимо обидві частини співвідношення на 3, згрупуємо доданки й зведемо подібні члени:

$$3\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right]=-h_i c_{i+1}-2h_i c_i+6h_i c_i+3h_i c_{i+1}-3h_i c_i+h_{i+1}c_{i+2}+2h_{i+1}c_{i+1},$$

$$3\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right]=h_i c_i+2\left(h_i+h_{i+1}\right)c_{i+1}+h_{i+1}c_{i+2}, \qquad (7)$$

$$i=1,...,n-1$$

Одержали систему $(n-1)$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $(n+1)$ невідомими $c_1, c_2, ..., c_{n+1}$.

Для однозначного визначення всіх невідомих скористаємося граничними умовами:

$$c_1=0,\ c_{n+1}=c_n+3d_n h_n=0,$$

Отриману систему (7) представимо у вигляді

$$3\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right]=h_i c_i+2\left(h_i+h_{i+1}\right)c_{i+1}+h_{i+1}c_{i+2},\quad i=1,...,n-1$$

$$\alpha_{12}c_2+\alpha_{13}c_3=\beta_1,$$
$$\alpha_{22}c_2+\alpha_{23}c_3+\alpha_{24}c_4=\beta_2,$$
$$\alpha_{33}c_3+\alpha_{34}c_4+\alpha_{35}=\beta_3,$$
.....
$$\alpha_{n-2,n-2}c_{n-2}+\alpha_{n-2,n-1}c_{n-1}+\alpha_{n-2,n}c_n=\beta_{n-2},$$
$$\alpha_{n-1,n-1}c_{n-1}+\alpha_{n-1,n}c_n=\beta_{n-1}.$$

Обчисливши коефіцієнти $c_2,...,c_n$

1) знаходимо з (5) $d_i=\dfrac{c_{i+1}-c_i}{3h_i}$,
2) знаходимо з (4) $d_n=-c_n/3h_n$,
3) знаходимо з (6) $b_i=\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\dfrac{h_i}{3}\left(c_{i+1}+2c_i\right)$

$b_n=\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_n}-\dfrac{2h_nc_n}{3}$, оскільки $c_{n+1}=0$.

Коефіцієнти a_i, $i=1,...,n$ відомі з умови зшивки $a_i=y_{i-1}$. Таким чином, існує і знайдений єдиний кубічний сплайн, оскільки однозначно визначені a_i,b_i,c_i,d_i для інтервалу $[x_{i-1},x_i]$.

Послідовність обчислень функції $f(x)$ методом сплайн-інтерполяції

1. За описаною методикою обчислюють коефіцієнти $a_i, b_i, c_i, d_i;\ i = 1, \ldots, n$ кубічних сплайнів.

2. Шукають інтервал $[x_{i-1}, x_i]$, якому належить дане x. Значення функції $f(x)$ на цьому інтервалі обчислюється з кубічного сплайна:

$$f(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3$$

с параметрами a_i, b_i, c_i, d_i для інтервалу $[x_{i-1}, x_i]$

Тригонометрична інтерполяція

Тригонометрична інтерполяція полягає в тому, що за інтерполяційну функцію беруть тригонометричний многочлен виду

$$p(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos(mx) + \sum_{m=1}^{n} b_m \sin(mx) \qquad (1)$$

де n, m – натуральні числа.

Рівняння містить $2n+1$ невідомих коефіцієнтів:

$$a_0,\ a_1,\ ...,\ a_n\ ;\ b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n.$$

Завдання полягає в тому, щоб обчислити ці коефіцієнти за умови, що значення функції $f(x)$ відомі в N точках:

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 1, ..., N.$$

Оскільки тригонометричний поліном періодичний з періодом 2π, доцільно розглядати функцію на періоді:

$$0 \le x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_N \le 2\pi$$

Розв'язування задачі тригонометричної інтерполяції

1. При $N \le 2n+1$ задача має розв'язок для будь-якої множини впорядкованих пар $\left(x_k, p\left(x_k\right)\right)$

2. При $N > 2n+1$ розв'язок іноді може не існувати.

3. При $N = 2n+1$ задача завжди має єдиний розв'язок.

Розв'язок даної задачі може бути презентовано у формі полінома Лагранжа:

$$p\left(x\right) = \sum_{k=1}^{2n+1} y_k \prod_{m=1, m\ne k}^{2n+1} \frac{\sin \frac{x - x_m}{2}}{\sin \frac{x_k - x_m}{2}}$$

Існує теорема, що доводить еквівалентність даного виразу й виразу (1), що підтверджує дотримання даним поліномом умови інтерполяції $p\left(x_i\right) = f\left(x_i\right) = f_i, i = 1, 2, ...$

Пошук коефіцієнтів тригонометричного полінома

$$p(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos(mx) + \sum_{m=1}^{n} b_m \sin(mx)$$

виконують методом невизначених коефіцієнтів, що приводить до системи:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos x_1 & \sin x_1 \ldots & \cos nx_1 & \sin nx_1 \\ 1 & \cos x_2 & \sin x_2 \ldots & \cos nx_2 & \sin nx_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \cos x_{2n+1} & \sin x_{2n+1} .. & \cos nx_{2n+1} & \sin nx_{2n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_{2n+1} \end{pmatrix}$$

Ця система однозначно розв'язна відносно $2n+1$ коефіцієнта:

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n\ ;\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$$

Формули коефіцієнтів для рівновіддалених вузлів

Якщо взяти рівновіддалені вузли інтерполяції:

$$x_j = \frac{2(j-1)\pi}{2n} \text{ при } j \in \{1, 2, ..., 2n+1\}$$

то коефіцієнти знайдемо по формулах:

$$a_0 = \frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1} y_j\,, \quad a_k = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1} y_i \cos\left(kx_j\right), \; k = 1, \ldots, n$$

$$b_k = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1} y_i \sin\left(kx_j\right), \; k = 1, 2, \ldots n$$

Формули коефіцієнтів рівновіддалених вузлів при переміщенні на величину π

Розглянемо нумерацію вузлів інтерполяції:

$$x_j = \frac{2\pi j}{2n} \text{ при } j \in \{-n, (-n+1), \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Коефіцієнти на інтервалі $[-\pi, \pi]$ знайдемо по формулах:

$$a_0 = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} y_j, \quad a_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} y_i \cos\left(kx_j\right), \; k = 1, \dots, n$$

$$b_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} y_i \sin\left(kx_j\right), \; k = 1, 2, \dots n$$

Приклад 8. Нехай функція, що описує деякий коливальний процес, задана таблицею

x_j	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$f(x_j)$	-2	-0,92	0,83	2	2,32	-1,11	-2

Потрібно побудувати тригонометричний многочлен другого степеня.

$$p(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{3} a_m \cos(mx) + \sum_{m=1}^{3} b_m \sin(mx)$$

Розв'язок.

Визначимо вузли інтерполяції з формули:

$$x_j = \frac{2(j-1)\pi}{2\cdot 3} \text{ при } j \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{3}, x_3 = \frac{2\pi}{3}, x_4 = \pi, x_5 = \frac{4}{3}\pi, x_6 = \frac{5\pi}{3},\ x_7 = 2\pi$$

$$x_1 = 0^{\circ}, x_2 = 60^{\circ}, x_3 = 120^{\circ}, x_4 = 180^{\circ}, x_5 = 240^{\circ}, x_6 = 300^{\circ}, x_7 = 360^{\circ},$$

Функція $f(x)$ визначена на дискретній множині рівновіддалених точок із кроком $h = \frac{\pi}{3} = 60^{\circ}$,

Випишемо вирази для коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, b_1, b_2:

$$a_0 = \frac{1}{2\cdot 3+1}\sum_{j=1}^{2\cdot 3+1} y_j,\ a_0 = \frac{1}{7}\left(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7\right);$$

$$a_1 = \frac{2}{2 \cdot 3 + 1} \sum_{j=1}^{2 \cdot 3 + 1} y_i \cos\left(x_j\right),$$

$$a_1 = \frac{2}{7}\left(y_1 \cos x_1 + y_2 \cos x_2 + y_3 \cos x_3 + y_4 \cos x_4 + y_5 \cos x_5 + y_6 \cos x_6 + y_7 \cos x_6\right);$$

$$a_2 = \frac{2}{2 \cdot 3 + 1} \sum_{j=1}^{2 \cdot 3 + 1} y_i \cos\left(2x_j\right),$$

$$a_2 = \frac{2}{7}\left(y_1 \cos 2x_1 + y_2 \cos 2x_2 + y_3 \cos 2x_3 + y_4 \cos 2x_4 + y_5 \cos 2x_5 + y_6 \cos 2x_6 + y_7 \cos 2x_7\right);$$

$$a_3 = \frac{2}{2 \cdot 3 + 1} \sum_{j=1}^{2 \cdot 3 + 1} y_i \cos\left(3x_j\right),$$

$$a_3 = \frac{2}{7}\left(y_1 \cos 3x_1 + y_2 \cos 3x_2 + y_3 \cos 3x_3 + y_4 \cos 3x_4 + y_5 \cos 3x_5 + y_6 \cos 3x_6 + y_7 \cos 3x_7\right);$$

$$b_1 = \frac{2}{2 \cdot 3 + 1} \sum_{j=1}^{2 \cdot 3 + 1} y_i \sin\left(x_j \right),$$

$$b_1 = \frac{2}{7}\left(y_1 \sin x_1 + y_2 \sin x_2 + y_3 \sin x_3 + y_4 \sin x_4 + y_5 \sin x_5 + y_6 \sin x_6 + y_7 \sin x_7 \right);$$

$$b_2 = \frac{2}{2 \cdot 3 + 1} \sum_{j=1}^{2 \cdot 3 + 1} y_i \sin\left(2x_j \right),$$

$$b_2 = \frac{2}{7}\left(y_1 \sin x_1 + y_2 \sin 2x_2 + y_3 \sin 2x_3 + y_4 \sin 2x_4 + y_5 \sin 2x_5 + y_6 \sin 2x_6 + y_7 \sin 2x_7 \right);$$

$$b_3 = \frac{2}{2 \cdot 3 + 1} \sum_{j=1}^{2 \cdot 3 + 1} y_i \sin\left(3x_j \right),$$

$$b_3 = \frac{2}{7}\left(y_1 \sin x_1 + y_2 \sin 3x_2 + y_3 \sin 3x_3 + y_4 \sin 3x_4 + y_5 \sin 3x_5 + y_6 \sin 3x_6 + y_7 \sin 3x_7 \right);$$