5. Функціональні ряди. Область збіжності, сума ряду. Рівномірна збіжність функціонального ряду. Необхідна і достатня умови. Рівномірно збіжні функціональні ряди. Означення рівномінорної збіжності. Критерій Коші. Теорема Вейєрштрасса.

4.1. Функціональний ряд і його область збіжності

Функціональним рядом називають ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

членами якого є функції $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, означені на деякій множині X числової осі.

$$\boxed{X = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(u_n(x)).}$$

Якщо числовий ряд $\Sigma u_n(x_0)$ збігається (розбігається), то точку $x_0 \in X$ називають *точкою збіжності* (*розбіжності*) функціонального ряду $\Sigma u_n(x)$.

Означення 4.1 (області збіжності). Сукупність точок збіжності функціонального ряду $\Sigma u_n(x)$ називають *областю збіжності* D цього ряду.

Частковою сумою функціонального ряду $\Sigma u_n(x)$ називають

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

Залишок функціонального ряду $\Sigma u_n(x)$

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

В області збіжності D функціонального ряду $\Sigma u_n(x)$ визначено його *суму*

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), x \in D.$$

Використовують позначення

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \to S(x), x \in D.$$

Означення 4.3 (рівномірної збіжності). Функціональний ряд $\Sigma u_n(x)$ називають *рівномірно збіжним* на множині $D_{\text{рів}}$ до суми $S(x)$,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow$$
$$\left|R_n(x)\right| = \left|S(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon \quad \forall x \in D_{\text{рів}}.$$

$$\boxed{D_{\text{рів}} \subset D \subset X}$$

Використовують позначення

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x), x \in D_{\text{рів}}.$$

Практично рівномірна збіжність ряду означає, що суму ряду $S(x)$ на проміжку $(a;b)$ можна наближено, з наперед заданою точністю, замінити однією і тією самою частковою сумою $S_n(x)$:

$$S(x) \approx S_n(x), x \in (a;b).$$

Теорема 4.1 (ознака Веєрштраса). Функціональний ряд $\Sigma u_n(x)$ абсолютно й рівномірно збіжний на відрізку $[a;b]$, якщо існує знакододатний збіжний числовий ряд Σa_n такий, що

$$\left|u_n(x)\right| \le a_n \quad \forall x \in [a;b], n \in \mathbb{N}.$$

Ряд Σa_n називають *мажорантою* для ряду $\Sigma u_n(x)$.