Розділ VI. Теорія графів

Теорія графів – одна з істотних частин математичного апарату інформатики та кібернетики. У термінах теорії графів можна сформулювати багато задач, пов'язаних із дискретними об'єктами. Велику роль відіграють алгоритми на графах. Як буде показано згодом, між поняттями графа та відношення є глибокий зв'язок – в сутності це рівнозначні поняття. Виникає природне питання, чому тоді графам віддається така явна перевага? Діло в тому, що теорія графів являє собою дуже зручну мову для опису програмних та багатьох інших моделей. Струнка система спеціальних термінів та означень теорії графів дозволяють просто і доступно описувати складні та тонкі речі. Особливо важливим є наявність наглядної графічної інтерпретації поняття графа. Зображення дозволяють відразу розгледіти суть питання на інтуїтивному рівні.

Теорія графів є корисною в дуже різноманітних сферах людської діяльності: фізика, хімія, теорія зв'язку, проектування обчислювальних машин, електротехніка, машинобудування, архітектура, дослідження операцій, генетика, психологія, соціологія, економіка, антропологія, лінгвістика тощо.

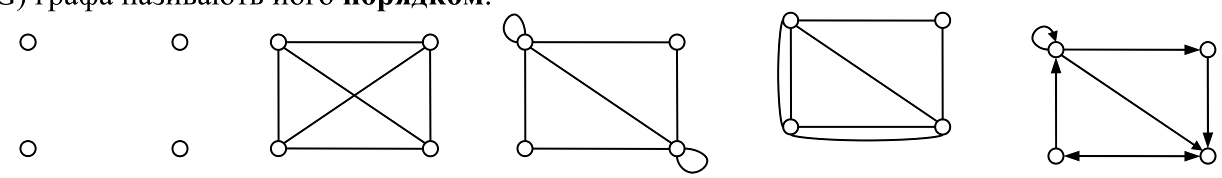
Лекція 21. Основні поняття теорії графів

21.1. Графи

З поняттям графа зазвичай пов'язують його графічне представлення, при якому він зображується як множина точок, деякі з яких з'єднані лініями. Але граф відрізняється від геометричних конфігурацій (скажімо, фігур, які також складаються з точок та ліній) тим, що в графі несуттєві відстані між точками, форма з'єднувальних ліній та кути між ними. Важливо лиш те, чи з'єднана дана пара точок лінією, чи ні. Тому граф іноді називають **топологічним об'єктом**, тобто об'єктом, властивості якого не змінюються при розтягуванні, стисненні та викривленні. За цією ж причиною (важливим є тільки наявність або відсутність з'єднань) граф – об'єкт дискретний і може бути заданий двома дискретними множинами: множиною точок, які будемо називати **вершинами**, та множиною ліній, які з'єднують деякі вершини. Лінії будемо називати **ребрами**.

Означення 21.1. **Графом** G = (V,E) називається об'єкт, який заданий парою множин (V, E), де V – множина **вершин**, $E \subseteq V \times V$ – множина **ребер**. Граф називається скінченним, якщо множини його вершин і ребер є скінченними. Множину вершин графа G позначають V(G), а множину ребер – E(G).

Кількість вершин графа n(G) = |V(G)|, а кількість ребер m(G) = |E(G)|. Кількість вершин n(G) графа називають його **порядком**.



а б в г д

Рис. 21.1.

Якщо для деякого ребра $e = (v,w) \in E(G)$, то кажуть:

- вершини v та w **суміжні**;
- вершини v та w **інцидентні** ребру e;
- ребро e **інциденте** не вершинам v і w.

Означення 21.2. Множина вершин, які суміжні з вершиною v, називається **множиною суміжності** вершини v і позначається $\Gamma^+(v)$:

$$\Gamma^+(v) = \{w \in V \mid (w,v) \in E\},\ \Gamma^*(v) = \Gamma^+(v) + v.$$

Зазвичай $\Gamma^{+}(v)$ позначається просто $\Gamma(v)$. Очевидно, $w \in \Gamma(v)$ тоді й тільки тоді, коли $v \in \Gamma(w)$.

Якщо $A \subset V$ – множина вершин, то $\Gamma(A)$ – множина всіх вершин, суміжних з вершинами з A:

$$\Gamma(A) = \{w \in V \mid \exists v \in A, w \in \Gamma(v)\} = \bigcup_{v \in A} \Gamma(v).$$

Множина ребер E може бути порожньою (рис. 21.1,а). Такий граф називається **нуль-графом** і позначається $\varnothing$. Якщо ж множина вершин V – порожня, то порожньою є також множина E. Такий граф називається **порожнім**. Лінії, що зображують ребра графа, можуть перетинатися, але точки перетину не є вершинами (рис. 21.1, б). Ребро може з'єднувати деяку вершину саму з собою (рис. 21.1,в), таке ребро називається **петлею**. Цей випадок відповідає наявності в множині E пар вигляду (v, v). Різні ребра можуть бути інцидентними одній і тій самій парі вершин (тобто одну й ту саму пару вершин з'єднує більше ніж одне ребро), такі ребра називаються **кратними** (рис. 21.1,г).

Означення 21.3. Граф називається **простим**, якщо кожну пару вершин з'єднує не більше, ніж одне ребро. Граф називається **мультиграфом**, якщо він має кратні ребра. Граф називається **псевдографом**, якщо він має петлі та кратні ребра.

Розглядають також орієнтовані графи (до цього були розглянуті неорієнтовані графи).

Означення 21.4. **Орієнтованим графом** (орграфом) називається граф D = (V, E), де V – множина вершин, $E \subseteq V \times V$ – множина орієнтованих ребер, або **дуг**.

При зображенні орієнтованих графів напрямки ребер позначаються стрілками (рис. 21.1,д). Орієнтований граф може мати кратні ребра, петлі, а також петлі, що з'єднують одні й ті самі вершини, але у зворотних напрямках.

Кожному неорієнтованому графу можна поставити у відповідність орієнтований граф з тією самою множиною вершин, в якій кожне ребро замінено двома орієнтованими ребрами, що є інцидентними тим самим вершинам і мають зворотні напрямки.

21.2. Приклади з історії теорії графів

Теорія графів бере начало з розв'язку знаменитим математиком Ейлером задачі про кенігсбергскі мости в 1736 році. Задача виникла у пруському містечку Кенігсберг (зараз Калінінград, РФ) на річці Прегал. Мешканці Кенігсбергу полюбляли прогулюватися по стежці, яка включала сім мостів через річку Прегал. Людям було цікаво, чи могуть вони, почавши шлях з однієї ділянки суші, обійти всі мости, побувавши в кожному лиш один раз, і повернутися в точку початку шляху (перепливати річку також заборонялось). Сім мостів з'єднували два береги річки та два островки так, як показано на рис. 21.2,а.

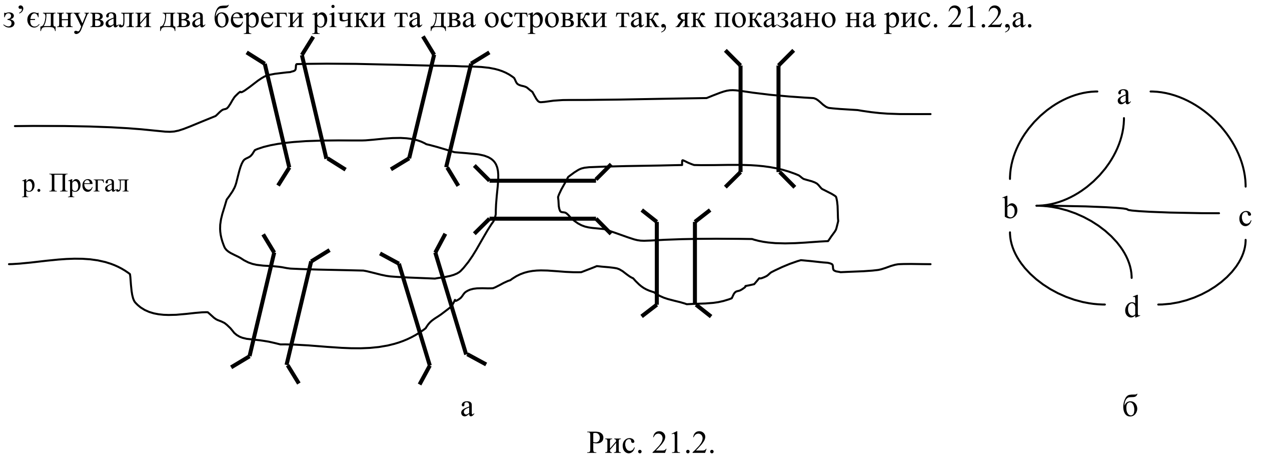


Рис. 21.2.

Ейлер побудував мультиграф, зображений на рис. 21.2,б. В цьому мультиграфі ділянки суші зображені як вершини, а стежки через мости – як ребра. В такому випадку задача здобуває наступне формулювання: починаючи з довільної вершини, проходячи по кожному ребру тільки один раз, повернутися у вихідну вершину. Як виявилось (і в наступним лекціях нами буде це показано), ця задача не має розв'язків.

Прикладом іншої проблеми, яку можна промоделювати на основі теорії графів, є задача про три будинки та три колодязі. Є три будинки та три колодязі, які якимось чином розташовані на площині. Потрібно провести від кожного будинку до кожного колодязя стежку так, щоб стежки не перетинались (рис. 21.3). Куратовський у 1930 році показав, що ця задача також не має розв'язків.

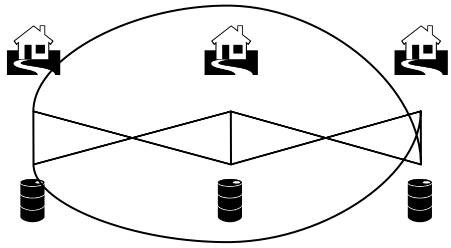


Рис. 21.3.

21.3. Способи задання графів

Задати граф означає задати множини його вершин і ребер, а також відношення інцидентності. Коли граф G – скінченний, для опису його вершин та ребер досить їх занумерувати. Нехай $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – вершини графа G; $e_1, e_2, \ldots, e_m$ – його ребра. Відношення інцидентності можна означити матрицею $E=\|\varepsilon_{ij}\|$, яка має n рядків та m стовпців. Рядки відповідають вершинам графа, а стовпці – його ребрам. Якщо ребро e_j є інцидентним вершині v_i, то $\varepsilon_{ij}=1$, в іншому випадку $\varepsilon_{ij}=0$. Це **матриця інцидентності** звичайного графа G, яка є одним із способів його визначення. Наприклад, для графа, який зображено на рис. 21.4,а матриця інцидентності має вигляд табл. 21.1,а.

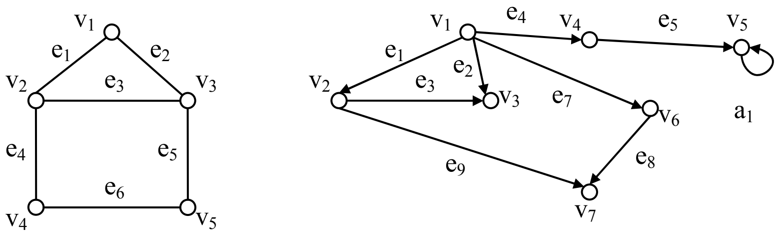


Рис. 21.4.

У матриці інцидентності $\|\varepsilon_{ij}\|$ орієнтованого графа D, якщо вершина v_i – початок дуги e_j, то $\varepsilon_{ij}=-1$, якщо v_i – кінець e_j, то $\varepsilon_{ij}=1$; якщо e_j – петля, а v_i – інцидентна їй вершина, то $\varepsilon_{ij}=2$. Наприклад, для орієнтованого графа, зображеного на рис. 21.4,б, матриця інцидентності наведена у табл. 21.1,б.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	1	0	0	0	0
v_2	1	0	1	1	0	0
v_3	0	1	1	0	1	0
v_4	0	0	0	1	0	1
v_5	0	0	0	0	1	1

а

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
v_1	-1	-1	0	-1	0	0	-1	0	0
v_2	1	0	-1	0	0	0	0	0	-1
v_3	0	1	1	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	1	2	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
v_7	0	0	0	0	0	0	0	1	1

б

Табл. 21.1.

У кожному рядку матриці інцидентності для неорієнтованого або орієнтованого графа тільки два елементи відмінні від 0 (або один, якщо ребро є петлею). Тому такий спосіб задання графа – не досить економний. Відношення інцидентності можна задати ще **списком ребер** графа. Кожний рядок цього списку відповідає ребру, в ньому записано номери вершин, інцидентних йому. Для неорієнтованого графа порядок цих вершин у рядку довільний, для орієнтованого першим записується номер або інше найменування початку ребра, а другим – його кінця. У табл. 21.2,а та б наведено списки ребер відповідно для графів з рис. 21.4, а та б.

За списком ребер графа можна легко визначити матрицю інцидентності. Справді, кожний рядок цього списку відповідає стовпцю матриці з тим самим номером. Для неорієнтованого графа в рядку списку записуються номери елементів стовпця матриці інцидентності, що дорівнюють 1, а для орієнтованого графа в цьому рядку першим зазначається номер елемента стовпця матриці, який дорівнює -1, другим – номер елемента, що дорівнює 1.

Поняття матриці інцидентності та списку ребер можна легко узагальнити на випадок мультиграфа.

Ребро	Вершини
e_1	v_1, v_2
e_2	v_1, v_3
e_3	v_2, v_3
e_4	v_2, v_4
e_5	v_3, v_5
e_6	v_4, v_5

а

Ребро	Вершини
e_1	v_1, v_2
e_2	v_1, v_3
e_3	v_2, v_3
e_4	v_1, v_4
e_5	v_4, v_5
e_6	v_5, v_5
e_7	v_1, v_6
e_8	v_6, v_7
e_9	v_2, v_7

Б

Табл. 21.2.

Розглянемо третій спосіб задання графів – **матриця суміжності** – це квадратна матриця $\Delta\|\delta_{ij}\|$, стовпцям і рядкам якої відповідають вершини графа. Для неорієнтованого графа δ_{ij} дорівнює кількості ребер, інцидентних i- та j-й вершинам, для орієнтованого – цей елемент матриці відповідає кількості ребер з початком в i-й вершині й кінцем у j-й вершині. Таким чином, матриця суміжності неорієнтованого графа є симетричною ($\delta_{ij}= \delta_{ji}$), а орієнтованого – необов’язково. Якщо вона все ж симетрична, то для кожного ребра орієнтованого графа існує ребро, яке з’єднує ті самі вершини, але йде у зворотному напрямку. Очевидно, орієнтований граф із симетричною матрицею суміжності відповідає неорієнтованому графу, який має ту саму матрицю суміжності.

Матриці суміжності розглянутих вище графів (див. рис. 21.4) наведено в табл. 21.3.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	1	0	0
v_2	1	0	1	1	0
v_3	1	1	0	0	1
v_4	0	1	0	0	1
v_5	0	0	1	1	0

а

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	0	1	1	1	0	1	0
v_2	0	0	1	0	0	0	1
v_3	0	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0	0
v_5	0	0	0	0	1	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	1
v_7	0	0	0	0	0	0	0

б

Табл. 21.3

21.4. Ізоморфізм графів

Отже, граф можна задати різними способами. Він може бути зображений на кресленні (рисунку), заданий матрицею інцидентності, списком ребер або матрицею суміжності. Вигляд креслення залежить від форми ліній і взаємного розташування вершин. Іноді не так легко зрозуміти, чи однакові графи, зображені різними кресленнями, як, наприклад, на рис. 21.5. Вигляд матриць та списку ребер залежить від нумерації вершин і ребер графа. Строго кажучи, граф вважається повністю заданим, якщо нумерацію його вершин зафіксовано.

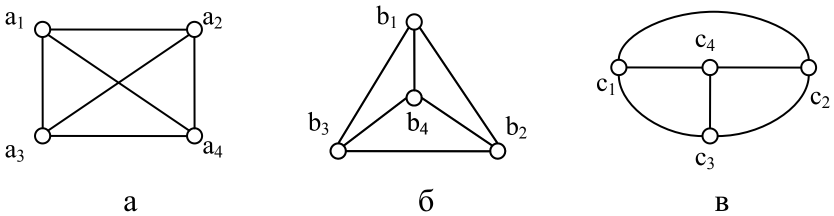


Рис. 21.5.

Означення 21.5. Нехай існує бієкція φ, яка діє з множини вершин графа G на множину вершин графа H так, що для будь-яких вершин v_1 та v_2 графа G їх образи $\varphi(v_1)$ і $\varphi(v_2)$ є суміжними в H тоді й тільки тоді, коли v_1 та v_2 – суміжні в G. Така бієкція називається **ізоморфізмом** графа G на граф H, а графи G і H є **ізоморфними**.

Таким чином, графи, зображені на рис. 21.5, – ізоморфні. Іншими словами, графи є ізоморфними, якщо вони різняться тільки нумерацією вершин.

Перенумерація вершин графа задається рядком $a_1,\ldots,a_n$ нових номерів вершин, розташованих у початковому порядку. Нова матриця суміжності утворюється з початкової переміщенням кожного елемента δ_{ij} в a_i-й рядок та a_j-й стовпець, тобто внаслідок перестановки $(a_1,\ldots,a_n)$ рядків і стовпців початкової матриці. Тому, щоб дізнатися, чи зображують дві матриці суміжності ізоморфні графи, можна, наприклад, здійснити всілякі перестановки рядків та стовпців першої матриці. Якщо після однієї з цих перестановок виникне матриця, що тотожно збігається з другою, графи, які зображаються цими матрицями, є ізоморфними. Проте, щоб пересвідчитися таким способом у тому, що графи не є ізоморфними, доведеться виконати всі n! перестановок рядків і стовпців, а це – досить трудомістка операція.

Матриця інцидентності графа та список його ребер залежать від нумерації ребер і вершин. Перехід від однієї пари нумерації до іншої визначається перестановками $(v_1,\ldots,v_n)$ вершин та $(e_1,\ldots,e_m)$ ребер графа, який розглядається. Матриця інцидентності утворюється з початкової внаслідок перестановки стовпців (j-й на e_j-те місце) і рядків (і-й на v_i-те). Рядки списку ребер переставляються так само, як і рядки матриці інцидентності, причому кожний номер j в рядках списку замінюється номером v_j.

21.5. Графи та бінарні відношення

Між простими (без кратних ребер) орієнтованими графами та бінарними відношеннями існує взаємно однозначне співставлення. Довільний граф з множиною вершин $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ визначає бінарне відношення на множині V – відношення суміжності. Матриця суміжності цього графа – це матриця бінарного відношення суміжності. Справедливо й обернене – довільне бінарне відношення R на довільній множині $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ можна зобразити графом G, вершини якого відповідають елементам A, а ребро (a_i, a_j) в цьому графі існує, тоді й тільки тоді, коли виконується a_iRa_j. Бінарна матриця відношення R одночасно є матрицею суміжності графа G, а сам граф називається графом відношення R.

За матрицею суміжності графа можна визначити властивості відношення R. Граф рефлексивного відношення містить петлі у всіх вершинах і, відповідно, одиниці на всіх елементах головної діагоналі матриці суміжності. Симетричному відношенню відповідає граф із симетричною матрицею суміжності. Як було зазначено вище, такий граф рівнозначний простому неорієнтованому графу. Граф транзитивного відношення має наступні властивості: якщо є ребра (v_i, v_j) і (v_j, v_k), то існує ребро (v_i, v_k).

Оскільки довільний граф представляє певне відношення, можна визначити операції об'єднання та перетину над графами так само, як і над відношеннями. Доповненню R' відношення R (тобто відношенню, яке істинно, коли R хибне) відповідає доповнення графа G до повного графа, тобто граф G', в якому є ті й тільки ті дуги, яких немає в G. Оберненому відношенню R^{-1} відповідає граф G^{-1}, який отримується з графа G зміною орієнтації всіх його дуг на протележні.