8.Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус та інтервал збіжності. Властивості степеневих рядів.

Степеневим рядом за степенями $(x - x_0)$ (із центром у точці x_0) називають функціональний ряд вигляду

$$c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n,$$

де $c_n, n \in \mathbb{N}$,— *коефіцієнти* ряду.

Заміною змінної $t = x - x_0$ степеневий ряд із центром у точці x_0 зводиться до ряду із центром у точці $t_0 = 0$.

Теорема 5.1 (перша теорема Абеля). Якщо степеневий ряд $\Sigma c_n t^n$ збігається в точці $t_1 \neq 0$, то він абсолютно збіжний у всіх точках t, для яких $|t| < |t_1|$.
Якщо у точці t_2 ряд розбігається, то він розбіжний у всіх точках t, для яких $|t| > |t_2|$.

▶ За умовою ряд $\Sigma c_n t_1^n$ збігається. Отже, за необхідною ознакою збіжності ряду $\lim\limits_{n\to\infty} c_n t_1^n = 0$. Звідси випливає, що існує таке число $M > 0$, що виконано нерівність

$$|c_n t_1^n| \le M, n = 0, 1, 2, \dots.$$

Нехай $|t| < |t_1|$, тоді $q = \left|\frac{t}{t_1}\right| < 1$, отже

$$|c_n t^n| = |c_n t_1^n| \cdot \left|\frac{t^n}{t_1^n}\right| \le M q^n, n = 0, 1, 2, \dots,$$

тобто модуль кожного члена ряду $\Sigma c_n t^n$ не перевищує відповідного члена збіжного геометричного ряду. Тому за ознакою порівняння ряд $\Sigma c_n t^n$ абсолютно збігається для $|t| < |t_0|$. ◀

Будь-який степеневий ряд $\Sigma c_n t^n$ збіжний в точці $t = 0$.

5.2. Область збіжності степеневого ряду

Теорема Абеля характеризує множини точок збіжності та розбіжності степеневого ряду.

Справді, якщо x_0 — точка збіжності ряду $\Sigma c_n x^n$, то весь інтервал $(-|x_0|;|x_0|)$ заповнено точками абсолютної збіжності цього ряду. Якщо x_1 — точка розбіжності ряду, то об'єднання нескінченних проміжків $(-\infty;-|x_1|)\cup(|x_1|;+\infty)$ утворено з точок розбіжності цього ряду.

Отже, для області збіжності степеневого ряду $\Sigma c_n x^n$ можливі три випадки:

1) ряд збіжний лише в точці $x = 0$;

2) ряд збіжний при всіх $x \in (-\infty;+\infty)$;

3) існує додатне число $R \in (0;+\infty)$, що при всіх $|x| < R$ степеневий ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ — розбіжний.

Число R називають *радіусом збіжності* степеневого ряду, а інтервал $(-R;R)$ — *інтервалом збіжності*.

Радіус збіжності степеневого ряду можна знаходити за формулою Коші — Адамара:

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}}.$$

5.3. Властивості степеневих рядів

Властивість 1 (друга теорема Абеля). Степеневий ряд $\Sigma c_n x^n$ абсолютно й рівномірно збігається на будь-якому відрізку $[-\rho;\rho]$, який цілком міститься в інтервалі збіжності $(-R;R)$.

Властивість 2. Сума степеневого ряду $\Sigma c_n x^n$ неперервна всередині його інтервалу збіжності.

Властивість 3. Якщо межі інтегрування α та β лежать усередині інтервалу збіжності $(-R;R)$ ряду $\Sigma c_n x^n = S(x)$, то на відрізку $[\alpha;\beta]$ цей ряд можна почленно інтегрувати:

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, x \in [\alpha;\beta] \subset (-R;R).$$

Властивість 4. Степеневий ряд $\Sigma c_n x^n$ можна почленно диференціювати всередині інтервала збіжності $(-R;R)$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, x \in (-R;R).$$