ЛЕКЦІЯ 12

МАШИНА ТЬЮРИНГА

ВСТУП

Другий тип універсальних алгоритмічних моделей

Алгоритм представлений у вигляді **детермінованого обладнання**, здатного виконувати в кожний окремий дискретний момент часу досить примітивні операції.

Це дозволяє однозначно задавати алгоритм як **послідовність елементарних кроків**.

Основна теоретична модель цього типу — ***машина Тьюринга*****.**

Машина Тьюринга є прообразом комп’ютера, значною мірою сприяла розвитку сучасної обчислювальної техніки.

Think globally, act locally.

— Attributed to Patrick Geddes, among many others.

We can only see a short distance ahead,
but we can see plenty there that needs to be done.

— Alan Turing, “Computing Machinery and Intelligence” (1950)

Never worry about theory as long as the machinery does what it’s supposed to do.

— Robert Anson Heinlein,Waldo & Magic, Inc. (1950)

Область використання машини Тьюринга

Машина Тьюринга дозволяє представити інтуїтивно відомі обчислювальні процедури за допомогою елементарних кроків.

Тьюринг довів, що повторення його елементарних операцій достатньо для проведення будь-якого можливого обчислення.

Тому **машина Тьюринга (МТ) використовується**:

1) якщо потрібно довести *можливість* алгоритмічної реалізації обчислюваної функції;

2) якщо потрібно *оцінити обчислювальну складність* або *трудомісткість* розв'язування задачі за даним алгоритмом, тобто час виконання алгоритму.

Технологія роботи з машиною Тьюринга

Задаємо машину Тьюринга, тобто

- формально описуємо правила роботи машини,
- описуємо вхідні дані,
- описуємо обмеження,

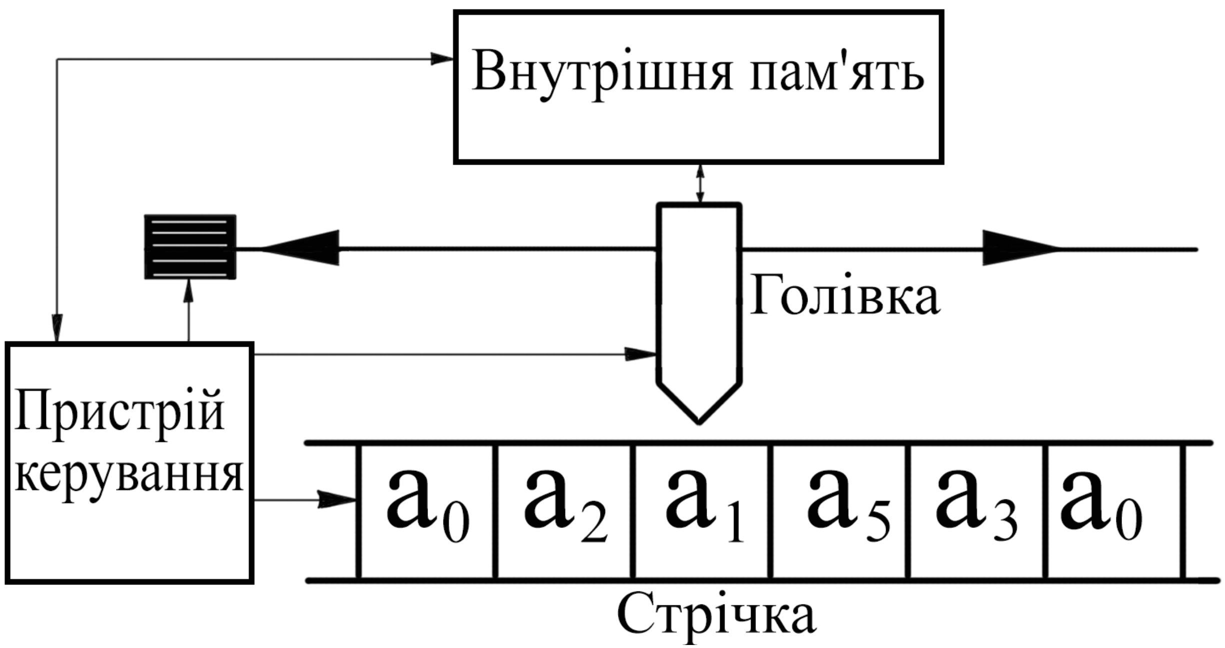
Алгоритмічна *розв’язність* зводиться до проблеми зупинки довільного алгоритму розв'язування задачі,

Оскільки будь-яка обчислювана функція реалізована на МТ, то розв'язування даної задачі необхідно звести до існуючих груп задач, для яких відомо, що вони розв’язуються на МТ.

Математична модель машини Тьюринга

МТ – це деяке обладнання, що складається із чотирьох частин:

1. **Стрічка**
2. **Зчитувальна голівка**
3. **Пристрій керування**
4. **Внутрішня пам'ять**




Turing


СТРІЧКА

1. **Стрічка** – потенційно нескінченна смуга, розбита на комірки (однакові клітинки).

За необхідності до першої або останньої клітинки, у якій перебувають символи, приєднується порожня клітинка.

	λ	a_1	a_5	a_2	a_7	

А) Машина працює в дискретному часі, моменти якого занумеровано 1, 2, 3, ...

Б) У кожний момент стрічка містить скінченне число клітинок.

В) У клітинку в дискретний момент часу може бути записаний тільки один символ (буква) із зовнішнього алфавіту А.

.

Г) Алфавіт A містить два типи символів:

- Символ a_0 — порожній символ (також позначається λ).

  Порожній символ в ALGO2000: _

- Інші символи $a_1, \ldots, a_m$ називають непустими.

$$A = \left\{ a_0, a_1, \ldots, a_m \right\}$$

В ALGO2000- множина A містить довільні символи

Д) Спосіб представлення інформації в МТ:

- у машину Тьюринга завантажується інформація у вигляді слова, що складається з букв алфавіту A.

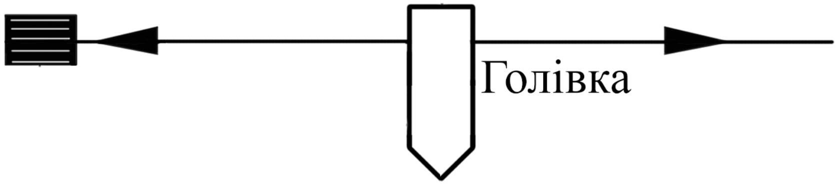
Слово – скінченний упорядкований набір символів з алфавіту A.

- машина «перетворює» інформацію, подану у вигляді слова, у *нове слово*.

Приклад: $A = \left\{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \right\}$ $\quad a_1 a_2 a_3 \to a_5 a_1 a_6 a_7$

ЗЧИТУВАЛЬНА ГОЛІВКА

2. Зчитувальна голівка — елемент машини Тьюринга, має такі властивості:



1. Переміщення вздовж стрічки.

2. Запис символу з алфавіту A в клітинку стрічки.

3. Зчитування символу із клітинки стрічки.

А) Голівка переміщається уздовж стрічки так, що в кожний момент часу вона «оглядає» тільки одну клітинку стрічки.

Б) Голівка може зчитувати вміст клітинки й записувати в неї новий символ з алфавіту A.

В) В одному такті роботи голівка може переміщуватися :

- або тільки на одну клітинку вправо (R): ALGO2000: $\longrightarrow$
- або тільки на одну клітинку вліво (L) ALGO2000: $\longleftarrow$
- або залишатися на місці (E). ALGO2000: !

Отже, множина переміщень голівки

$$D = \{R, L, E\}. \quad D_{ALGO2000} = \{\rightarrow, \leftarrow, !\}$$

Г) Якщо в момент часу t голівка перебуває в крайній клітинці й переміщується у відсутню клітку, то додається нова порожня клітка, над якою з'явиться голівка в момент $t+1$.

ВНУТРІШНЯ ПАМ'ЯТЬ

3. **Внутрішня пам'ять машини** — це стан МТ, що визначається одним з елементів множини внутрішніх станів

$$Q = \left\{ q_s, q_1, \ldots, q_n \right\}.$$

В ALGO2000- множина $Q = \left\{ Q_0, Q_1, \ldots., Q_n \right\}$

Два стани мають особливе значення:

А) q_1 — початковий внутрішній стан (початкових внутрішніх станів може бути декілька),

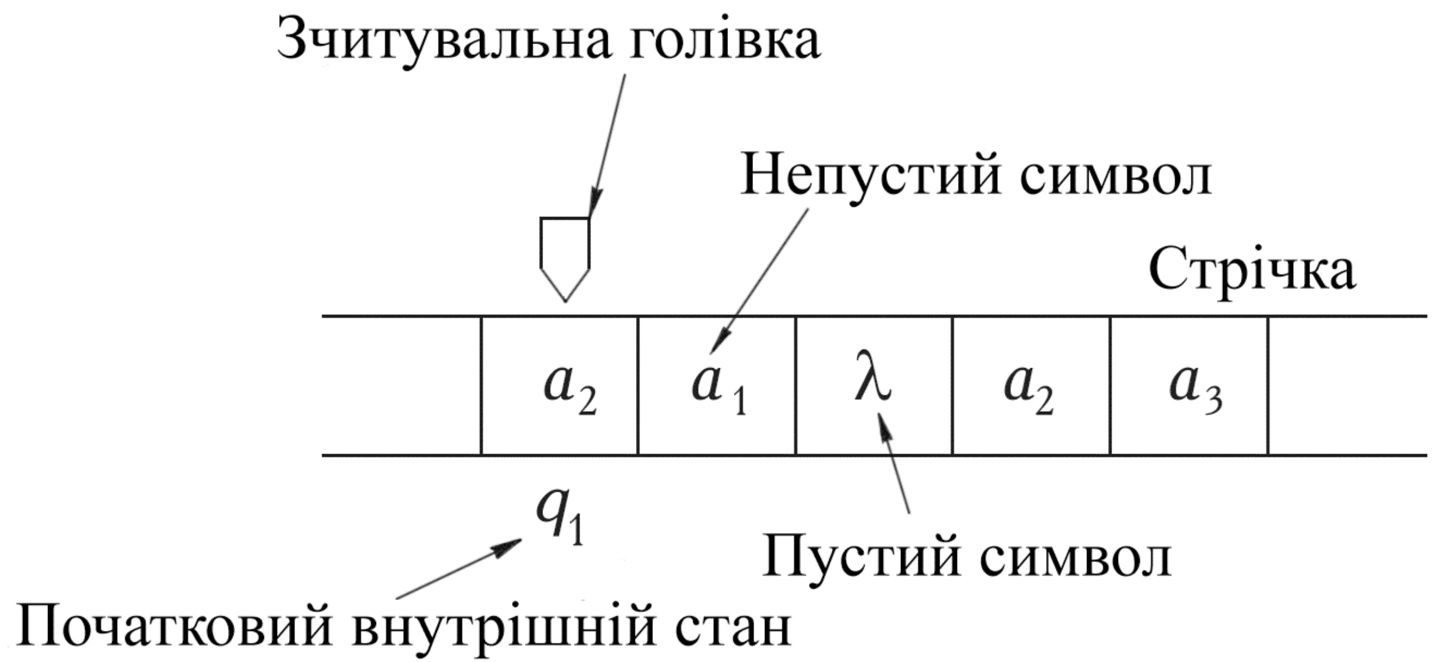
В ALGO2000 – початковий стан Q_0

Б) q_s — заключний стан або стоп-стан (заключний стан завжди один).

В ALGO2000 – заключний стан може бути довільним. Зупиняємось по команді !

В) У кожний момент часу МТ характеризується положенням голівки й внутрішнім станом.

Г) Внутрішній стан машини вказується під клітинкою, над якою перебуває голівка.



Конфігурація машини Тьюринга

ПРИСТРІЙ КЕРУВАННЯ

4. Пристрій керування – в кожний момент $t,$ залежно від зчитуваного в цей момент символу на стрічці й внутрішнього стану машини, виконує наступні дії:

1) змінює зчитуваний у момент t символ a_i на новий символ a_j (або залишає його без змін, тобто $a_i = a_j$);

2) пересуває голівку в одному з наступних напрямків: R, L, E; $\left\{\rightarrow, \leftarrow, !\right\}$

3) змінює наявний в момент t внутрішній стан машини q_i на новий q_j, у якому буде машина в момент часу $t+1$ (або залишає його без змін, тобто $q_i = q_j$).

А) Визначення команди

Сукупність дій, виконуваних пристроєм керування в момент часу t, називають командою.

Команду записують у такому вигляді:

$$\underset{t \Rightarrow t+1}{q_i a_i \Rightarrow a_j R q_j} \text{ або } \underset{t \Rightarrow t+1}{q_i a_i \Rightarrow a_j L q_j} \text{ або } \underset{t \Rightarrow t+1}{q_i a_i \Rightarrow a_j E q_j}$$

де q_i – внутрішній стан машини в цей момент;

a_i – зчитуваний у цей момент символ;

q_j – внутрішній стан машини в наступний момент (може бути $q_i = q_j$).

a_j – символ, на який заміняється символ a_i (може бути $a_i = a_j$);

Б) **Опис команди**. У виразі команди

$$q_i a_i \Rightarrow a_j R q_j \text{ або } q_i a_i \Rightarrow a_j L q_j \text{ або } q_i a_i \Rightarrow a_j E q_j$$

$q_i a_i$ – ліва частина команди.

$a_j R q_j$ –Варіант1 правої частини команди.

$a_j L q_j$ –Варіант2 правої частини команди.

$a_j E q_j$ –Варіант3 правої частини команди.

$\Rightarrow$ – символ виконання команди.

В) **Кількість команд**, у яких ліві частини різні, є скінченним числом, тому що множини $Q \setminus \{q_s\}$ і A скінченні.

ПРОГРАМА МАШИНИ ТЬЮРИНГА

Програма машини Тьюринга — послідовність конфігурацій, необхідних для розв'язування задачі.

А) Максимально можлива кількість команд у програмі машини Тьюринга дорівнює: n **×** m,

$$\left(q_s, q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_{n-1}\right) \times \left(\lambda, \ldots, a_j, \ldots a_{m-1}\right),$$

де $\left\{q_i \,\middle|\, 0 \le i < n\right\}$ і $\left\{a_j \,\middle|\, 1 \le j < m\right\}$.

Для ALGO2000: $\left(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\right) \times \left(a_0, a_1, \ldots, a_m\right)$

Б) Заключний стан q_s або заключна команда !

q_s може стояти тільки в правій частині команди.

Максимально можлива кількість заключних станів:

$\left(q_s\right) \times \left(\lambda, a_1, \ldots, a_j, \ldots a_{m-1}\right)$

При застосуванні заключної команди заключний стан може бути довільним.

В) Початковий стан q_1 може стояти як у лівій, так і в правій частині команди.

Г) Виконання однієї команди називається кроком.

Д) Обчислення (або робота) машини Тьюринга є послідовністю кроків одного за іншим без пропусків, починаючи з першого.

ПІДСУМОК

МТ задана, якщо відомо:

-зовнішній алфавіт A,

-внутрішній алфавіт Q,

-система команд,

-програма у вигляді скінченної послідовності конфігурацій.

Робота машини Тьюринга

Робота машини повністю визначається задаванням у початковий момент:

1) слова на стрічці, тобто послідовності символів, записаних у клітинках стрічки (слово будується з цих символів пересуванням по клітинках стрічки);

2) положення голівки, у початковий момент часу зчитувальна голівка повинна позиціонуватися на одному із символів слова, записаного на стрічці,

3) внутрішнього стану машини, робота машини починається з початкового стану.

ТРИ УМОВИ: слово на стрічці, положення голівки, внутрішній стан машини

Сукупність трьох умов (у конретний момент) називається **конфігурацією** (для даного моменту).

- зазвичай **початковий внутрішній стан** машини—$q_0, \left(Q_0\right)$
- зазвичай **початкове положення голівки**:

або **над першою зліва** клітинкою стрічки,
(над довільною порожньою клітинкою зліва)
або **над першою справа** клітинкою стрічки.
(над довільною порожньою клітинкою справа)

Дано початкове слово. Дано початковий стан $q_0, \left(Q_0\right)$,

*Голівка перебуває **над першим символом**, або над порожньою клітинкою.*

Таку конфігурацію називають **початковою конфігурацією**.

Іншими словами:

У початковий момент конфігурація представлена в наступному виді:

- на стрічці кожній клітинці записано один із символів зовнішнього алфавіту A,

- голівка перебуває над першою ліворуч або першою праворуч клітинкою стрічки (або над порожнім символом зліва або справа),

- внутрішній стан машини представлений станом $q_0 \left(Q_0 \right)$.

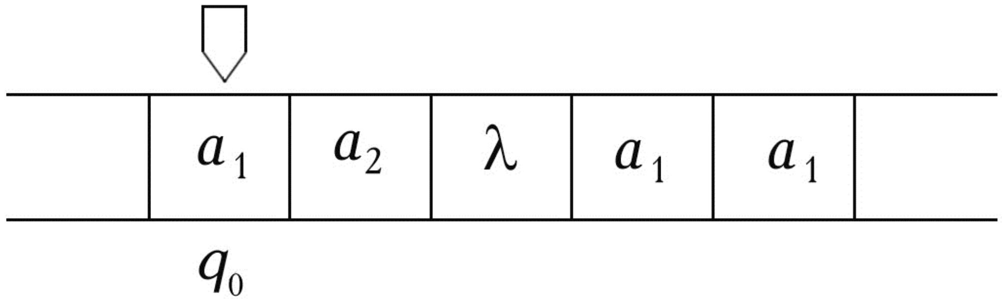
Слово на стрічці, положення голівки та **внутрішній** стан утворюють **поточну конфігурацію**.

Приклад початкової конфігурації

Нехай у початковий момент на стрічці записано слово

$$a_1 a_2 \lambda a_1 a_1.$$

Тоді початкова конфігурація буде мати вигляд:



$$q_0 a_1 a_2 \lambda a_1 a_1$$

Над першою ліворуч клітинкою стрічки перебуває зчитувальна голівка

Під клітинкою, над якою перебуває голівка, вказується внутрішній стан машини.

Робота машини Тьюринга

Робота машини Тьюринга **полягає в** послідовному **застосуванні команд**, причому, застосування тієї або іншої команди визначається поточною конфігурацією.

Отже, знаючи програму й задавши початкову конфігурацію, повністю визначаємо роботу машини над словом з початкової конфігурації.

Закінчення алгоритму

Якщо в роботі машини Тьюринга в деякий момент t виконується команда, права частина якої містить q_s, то в такий момент робота машини вважається закінченою, і говорять, що **машина застосовна до слова на стрічці в початковій конфігурації.**

Для ALGO2000 алгоритм закінчується в довільному стані за умови зупинки головки при виконанні дії !

Результатом роботи машини в такому випадку вважається слово, яке буде записано на стрічці в заключній конфігурації, тобто в конфігурації, у якій внутрішній стан машини є q_s.

(Або виконана дія ! в ALGO2000)

Якщо ж у роботі машини в жоден з моментів не реалізується команда із заключним станом, то процес обчислення буде нескінченним.

(В ALGO2000 процес обчислення буде нескінченним, якщо не виникне дія !)

У цьому випадку говорять, що машина не застосовна до слова на стрічці в початковій конфігурації.

Приклади машин Тьюринга, що працюють в алфавіті $A=\{a, b\}$

Проілюструємо роботу машини Тьюринга на наступному прикладі.

Приклад 1. **Циклічний зсув**

Побудувати машину Тьюринга T_1, яка застосовна до всіх слів із зовнішнім алфавітом $A=\{a,b\}$ і виконує наступне:

будь-яке слово $x_1, x_2, \ldots, x_n$, де $x_i = a$ або $x_i = b$, $\left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$ перетворить у слово $x_2, \ldots, x_n, x_1$, тобто, починаючи працювати при слові $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на стрічці в початковій конфігурації, машина зупиниться, і в заключній конфігурації на деякій ділянці стрічки буде записане слово $x_2, \ldots, x_n, x_1$, а всі інші клітинки стрічки (якщо такі будуть) виявляться порожніми.

Розв'язок.

1. Задаємо зовнішній алфавіт машини T_1: $A = \{\lambda, a, b\}$,
2. Множина внутрішніх станів – $Q = \{q_s, q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$.
3. Команди визначимо в такий спосіб:

$q_0 a \Rightarrow aLq_1, q_0 b \Rightarrow bLq_1$, - стартові команди;

$q_1 a \Rightarrow aLq_1$, $q_1 b \Rightarrow bLq_1$ - поточні вліво;

$q_1 \lambda \Rightarrow \lambda Rq_2, q_2 a \Rightarrow \lambda Rq_3, q_2 b \Rightarrow \lambda Rq_4$ - обробка зліва;

$q_3 b \Rightarrow bRq_3, q_4 b \Rightarrow bRq_4, q_3 a \Rightarrow aRq_3, q_4 a \Rightarrow aRq_4$ - поточні вправо.

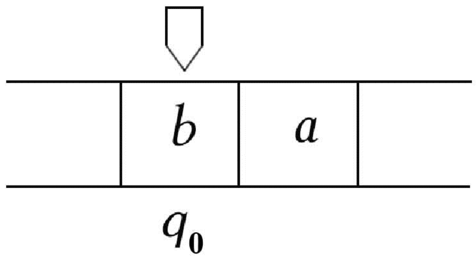
$q_3 \lambda \Rightarrow aEq_s$, $q_4 \lambda \Rightarrow bEq_s$- заключні команди.

4. Виберемо початкове слово: ba

Роботу машини Тьюринга можна продемонструвати у вигляді послідовності конфігурацій:

Конфігурація 1 записується у вигляді наступного слова в алфавіті $A \cup Q$: q_0ba (вміст клітинки, що оглядає голівка, записують праворуч від внутрішнього стану машини).

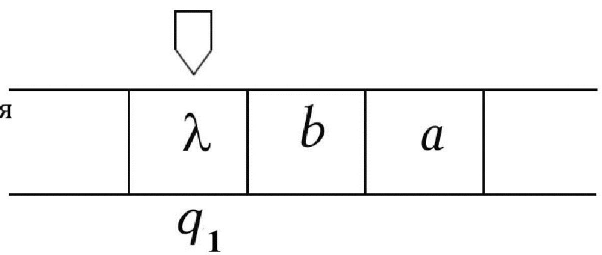
Конфигурация 1



$$q_0b \Rightarrow bLq_1 \qquad b \leftarrow Q_1$$

Конфігурація 2: $q_1\lambda ba$.

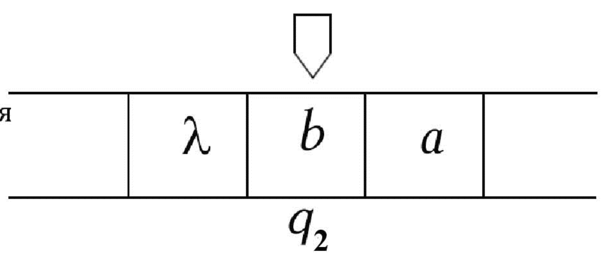
Конфигурация 2



$$q_1\lambda \Rightarrow \lambda Rq_2 \qquad \_ \rightarrow Q_2$$

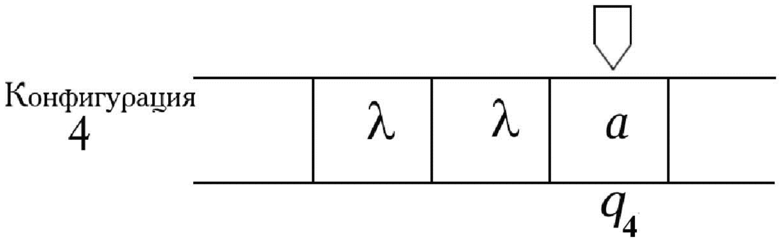
Конфігурація 3: λq_2ba.

Конфигурация 3



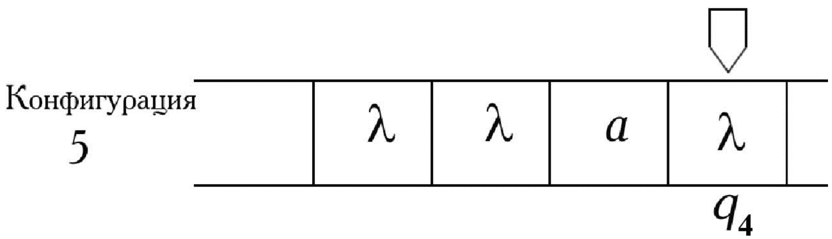
$$q_2b \Rightarrow \lambda Rq_4 \qquad \_ \rightarrow Q_4$$

Конфігурація 4: $\lambda\lambda q_4 a$.

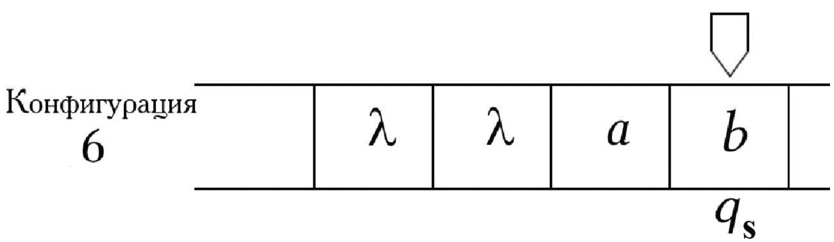


$$q_4 a \Rightarrow aRq_4 \qquad a \to Q_4$$

Конфігурація 5: $\lambda\lambda a q_4 \lambda$.



$$q_4\lambda \Rightarrow bEq_s \qquad b!Q_0$$



Конфігурація 6: $\lambda\lambda a q_s b$.

Уся послідовність конфігурацій записується так:

$$q_0 ba \Rightarrow q_1\lambda ba \Rightarrow \lambda q_2 ba \Rightarrow \lambda\lambda q_4 a \Rightarrow \lambda\lambda a q_4\lambda \Rightarrow \lambda\lambda a q_s b.$$

Робота машини Тьюринга на ALGO2000 (файл 1.tur)

$$A = \{a, b, \_\}$$

$$Q_0 ab$$

$$Q = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$$

	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
a	$a \leftarrow Q_1$	$a \leftarrow Q_1$	$\_ \rightarrow Q_3$	$a \rightarrow Q_3$	$a \rightarrow Q_4$
b	$b \leftarrow Q_1$	$b \leftarrow Q_1$	$\_ \rightarrow Q_4$	$b \rightarrow Q_3$	$b \rightarrow Q_4$
$\_$	$\_ \leftarrow Q_1$	$\_ \rightarrow Q_2$		$a\,!\,Q_0$	$b\,!\,Q_0$

Приклад 2. **Циклічний зсув у слові довільної довжини (файл 2.tur)** Розглянемо знову машину Тьюринга T_1 із прикладу 1, що перетворить будь-яке слово $x_1, x_2, \ldots, x_n$, де $x_i = a$ або $x_i = b$, $\left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$ у слово $x_2, \ldots, x_n, x_1$,

Застосуємо дану машину Тьюринга до слова $bbabb$.

Початкове положення голівки: крайня ліва клітинка,

Початковий стан: q_0

Більш короткий запис цієї послідовності конфігурацій, тобто процесу роботи машини:

$$q_0 bbabb \xRightarrow{q_0 b \Rightarrow bLq_1} q_1 \lambda bbabb \xRightarrow{q_1 \lambda \Rightarrow \lambda R q_2} \lambda q_2 bbabb \xRightarrow{q_2 b \Rightarrow \lambda R q_4} \lambda\lambda q_4 babb \xRightarrow{q_4 b \Rightarrow bRq_4} \lambda\lambda b q_4 abb \xRightarrow{q_4 a \Rightarrow aRq_4}$$

$$\Rightarrow \lambda\lambda ba q_4 bb \xRightarrow{q_4 b \Rightarrow bRq_4} \lambda\lambda bab q_4 b \xRightarrow{q_4 b \Rightarrow bRq_4} \lambda\lambda babb q_4 \lambda \xRightarrow{q_4 \lambda \Rightarrow bEq_0} \lambda\lambda babb q_0 b$$

Таким чином, слово $bbabb$ перетворено машиною в слово $babbb$.

Приклад машини Тьюринга на алфавіті $A = \{b, +\}$

Приклад 3. Додавання

1. Задаємо зовнішній алфавіт $A = \{b, +\}$,
2. Алфавіт внутрішніх станів $Q = \{q_s, q_0, q_1, q_2, q_3\}$,
3. Система команд

$$q_0 b \Rightarrow bLq_0, q_1 b \Rightarrow \lambda Rq_2, q_2 b \Rightarrow bRq_2, q_3 b \Rightarrow bLq_3$$

$$q_1 + \Rightarrow \lambda Eq_s, q_2 + \Rightarrow +Rq_2, q_0 + \Rightarrow +Lq_0, q_2 b \Rightarrow bRq_2,$$

$$q_0 \lambda \Rightarrow \lambda Rq_1, q_2 \lambda \Rightarrow bLq_0.$$

4.Система команд може бути записана у вигляді таблиці:

	q_0	q_1	q_2
b	bLq_0	λRq_2	bRq_2
$+$	$+Lq_0$	λEq_s	$+Rq_2$
λ	λRq_1		bLq_0

Застосуємо машину до слова $bb + bb$.

5. Початкова конфігурація: q_0bb+bb

Послідовність конфігурацій

	1	2	3	4	5	6
Конф.	q_0bb+bb	$q_0\lambda bb+bb$	λq_1bb+bb	$\lambda\lambda q_2b+bb$	$\lambda\lambda bq_2+bb$	$\lambda\lambda b+q_2bb$
Ком.	bLq_0	λRq_1	λRq_2	bRq_2	$+Rq_2$	bRq_2

$$q_0bb+bb \Rightarrow q_0\lambda bb+bb \Rightarrow \lambda q_1bb+bb \Rightarrow \lambda\lambda q_2b+bb \Rightarrow \lambda\lambda bq_2+bb \Rightarrow \lambda\lambda b+q_2bb$$

	7	8	9	10	11
Конф.	$\lambda\lambda b+bq_2b$	$\lambda\lambda b+bbq_2\lambda$	$\lambda\lambda b+bq_0bb$	$\lambda\lambda b+q_0bbb$	$\lambda\lambda bq_0+bbb$
Ком.	bRq_2	bLq_0	bLq_0	bLq_0	$+Lq_0$

$$\Rightarrow \lambda\lambda b+bq_2b \Rightarrow \lambda\lambda b+bbq_2\lambda \Rightarrow \lambda\lambda b+bq_3bb \Rightarrow \lambda\lambda b+q_3bbb \Rightarrow \lambda\lambda bq_3+bbb$$

	12	13	14	15	16
Конф.	$\lambda\lambda q_0b+bbb$	$\lambda q_0\lambda b+bbb$	$\lambda\lambda q_1b+bbb$	$\lambda\lambda\lambda q_2+bbb$	$\lambda\lambda\lambda+q_2bbb$
Ком.	bLq_0	λRq_1	λRq_2	$+Rq_2$	bRq_2

$$\Rightarrow \lambda\lambda q_0b+bbb \Rightarrow \lambda q_0\lambda b+bbb \Rightarrow \lambda\lambda q_1b+bbb \Rightarrow \lambda\lambda\lambda q_2+bbb \Rightarrow \lambda\lambda\lambda+q_2bbb$$

	17	18	19	20
Конф.	$\lambda\lambda\lambda + bq_2bb$	$\lambda\lambda\lambda + bbq_2b$	$\lambda\lambda\lambda + bbbq_2\lambda$	$\lambda\lambda\lambda + bbq_0bb$
Ком.	bRq_2	bRq_2	bLq_0	bLq_0

$$\Rightarrow \lambda\lambda\lambda + bq_2bb \Rightarrow \lambda\lambda\lambda + bbq_2b \Rightarrow \lambda\lambda\lambda + bbbq_2\lambda \Rightarrow \lambda\lambda\lambda + bbq_3bb$$

	21	22	23	24
Конф.	$\lambda\lambda\lambda + bq_0bbb$	$\lambda\lambda\lambda + q_0bbbb$	$\lambda\lambda\lambda q_0 + bbbb$	$\lambda\lambda q_0\lambda + bbbb$
Ком.	bLq_0	bLq_0	$+Lq_0$	λRq_1

$$\Rightarrow \lambda\lambda\lambda + bq_3bbb \Rightarrow \lambda\lambda\lambda q_3 + bbbb \Rightarrow \lambda\lambda q_0\lambda + bbbb$$

	25	26
Конф.	$\lambda\lambda\lambda q_1 + bbbb$	$\lambda\lambda\lambda q_0\lambda bbbb$
Ком.	λEq_s	

$$\Rightarrow \lambda\lambda\lambda q_1 + bbbb \Rightarrow \lambda\lambda\lambda q_0\lambda bbbb$$

Приклад машини Тьюринга на алфавіті $A=\{b,+\}$ в ALGO2000

(файл 3qw.tur)

$$A=\{b,+,\_\}$$
$$Q=\{Q_0,Q_1,Q_2,Q_3\}$$

$$Q_0 bb+bb$$

	Q_0	Q_1	Q_2
b	$b \leftarrow Q_0$	$\_ \rightarrow Q_2$	$b \rightarrow Q_2$
$+$	$+ \leftarrow Q_0$	$\_ ! Q_0$	$+ \rightarrow Q_2$
$\_$	$\_ \rightarrow Q_1$		$b \leftarrow Q_0$

ВИСНОВОК

Дана МТ реалізує операцію додавання:

у результаті її роботи на стрічці записано підряд стільки букв b, скільки їх було всього записано по обидві сторони від символа $+$ перед початком роботи машини.

$$bb+bb \to \ldots \to bbbb$$

З наведених прикладів випливає

МТ — це деяке правило (алгоритм) для перетворення слів алфавіту $A \cup Q$.

Таким чином, для визначення (побудови) машини Тьюринга потрібно задати:

зовнішній і внутрішній алфавіти,

систему команд,

програму.

Функції, обчислювані за Тьюрингом

Опис класу функцій

З розвитком науки і практики з'явилися задачі, для яких не були знайдені методи їх розв'язування. Виникло запитання: відсутність іншого ефективнішого алгоритму для розв'язування певної задачі є результатом недостатнього знання про задачі цього класу чи алгоритму розв’язування для даного класу взагалі не існує?

Для розв'язання цієї проблеми, за аналогією із уже розглянутими нами задачами, описуваними алгоритмічними моделями першого типу (рекурсивними функціями),

введено поняття обчислюваної функції і для даного класу задач.

Поняття функції для машини Тьюринга

Будемо розглядати $n-$місні функції f, задані на множині $N_0 = \{0,1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ всіх невід'ємних цілих чисел.

Область визначення функції f : D_f

Підмножина множини $N_0^n = N_0 \times N_0 \times \ldots \times N_0$:

$$D_f = \left\{ \left(x_1,\ldots,x_n \right) \in N_0^N \,\middle|\, f\left(x_1,\ldots,x_n \right) \in N_0 \right\}$$

Область значень функції f: N_0.

Для всіх значень кортежу $(x_1,\ldots,x_n) \in D_f$ функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ існує й набуває значень $f(x_1,\ldots,x_n) \in N_0$

Визначення. Значення функції $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ на наборі $\left(x_1,\ldots.,x_n\right) \in N_0^n$ визначено, якщо $f\left(x_1,\ldots,x_n\right) = k$, де $k \in N_0$, а якщо ні, то функція f вважається невизначеною на заданому наборі.

Числові функції

Під *числовими функціями* будемо розуміти функції:
1.Значеннями яких і невід'ємні цілі числа.
2. Значеннями їх аргументів є також невід'ємні цілі числа

При обчисленні числових функцій на машинах Тьюринга часто користуються спеціальним кодуванням чисел.

Приклад. натуральне число m задають набором з $m+1$ одиниць, який будемо позначати через 1^{m+1}.

У такий спосіб:
Число 0 будемо позначати як 1 (однієї одиницею);
Число 1 будемо позначати як 11 (двома одиницями);
Число 2 будемо позначати як 111 (трьома одиницями) і т. д.

КОДУВАННЯ В МАШИНАХ ТЬЮРИНГА

Десятковий код	Числовий код	Унарний код	Двійковий код
0	1	0	0000
1	11	10	0001
2	111	110	0010
3	1111	1110	0011
4	11111	11110	0100
5	111111	111110	0101
6	1111111	1111110	0110
7	11111111	11111110	0111
8	111111111	111111110	1000
9	1111111111	1111111110	1001

Обчислювана числова функція

Визначення. Числова функція $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ *називається* *обчислюваною за Тьюрингом*, якщо існує машина Тьюринга T_f, що задовольняє наступним двом умовам:

1) для будь-якого набору $\left(m_1,\ldots,m_n\right)\in D_f\subset N^n$ такого, що $f\left(m_1,\ldots,m_n\right)=k, k\in N$, машина Тьюринга застосовна до слова

$$\lambda 1^{m_1+1}\lambda 1^{m_2+1}\lambda\ldots\lambda 1^{m_n+1}\lambda \qquad (1)$$

і в заключній конфігурації на деякій ділянці стрічки буде записане слово 1^{k+1}, а інші ділянки стрічки, якщо такі будуть, виявляться порожніми.

2) якщо $\left(m_1,\ldots,m_n\right)\notin D_f$ машина Тьюринга T_f не застосовна до слова (1).

Якщо функція f *обчислювана за Тьюрингом* за допомогою машини T_f, то будемо говорити, що машина T_f обчислює функцію f.

Спрощене визначення *обчислюваної за Тьюрингом* функції

Функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ називається *обчислюваною за Тьюрингом*, якщо виконані наступні дві умови:

1) Якщо значення функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ визначене, то машина, починаючи роботу з конфігурації

$$\lambda q_0 1 \underbrace{1\ldots1}_{x_1} \lambda 1 \underbrace{1\ldots1}_{x_2} \ldots \lambda 1 \underbrace{1\ldots1}_{x_n} \lambda$$

закінчує роботу на конфігурації

$$\lambda 1 \underbrace{111\ldots111}_{\substack{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ k}} q_s \lambda$$

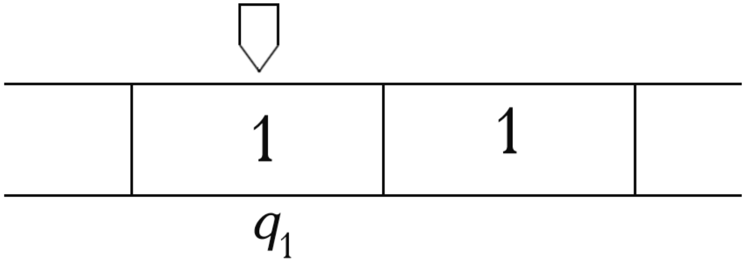
2) Якщо значення функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ не визначено, то машина працює нескінченно.

Приклади функцій, обчислюваних за Тьюрингом

Приклад 4. Реалізація функції слідування

Побудувати машину Тьюринга T_3 із зовнішнім алфавітом $\{\lambda, 1\}$, яка обчислює функцію слідування $S(x) = x + 1$.

Розв'язок. Припустимо, що перед початком роботи на стрічці машини записані вхідні значення аргументу й зчитувальна голівка оглядає перший зліва значущий символ



Початкова конфігурація: $q_1 11$

Визначимо порядок роботи МТ для одержання результату:

Спосіб 1 Нарощування справа

Початковий стан: головка зліва

У нашому випадку після закінчення роботи машини на стрічці повинно бути зайнято на одну клітинку більше, ніж на ній зайнято клітинок перед початком роботи.

Команди машини для нарощування одиниці справа можуть бути визначені в такий спосіб:

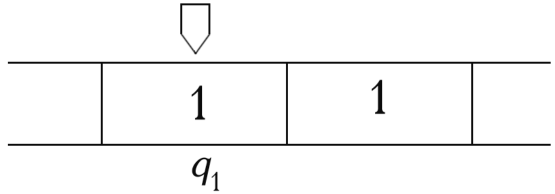
$$q_1 1 \Rightarrow 1Rq_1, q_1\lambda \Rightarrow 1Eq_s$$

Робота машини T_3 при обчисленні $f(1)$ складається з конфігурацій:

$A = \{\lambda, 1\};\ Q = \{q_s, q_1\}.$

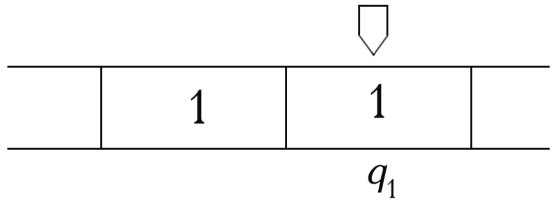
$q_1 1 \Rightarrow 1Rq_1, q_1\lambda \Rightarrow 1Eq_s$

Конфігурація 1



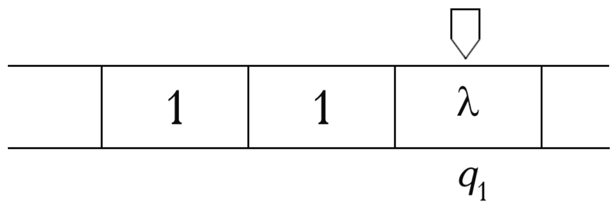
$$q_1 1 \Rightarrow 1Rq_1$$

Конфігурація 2



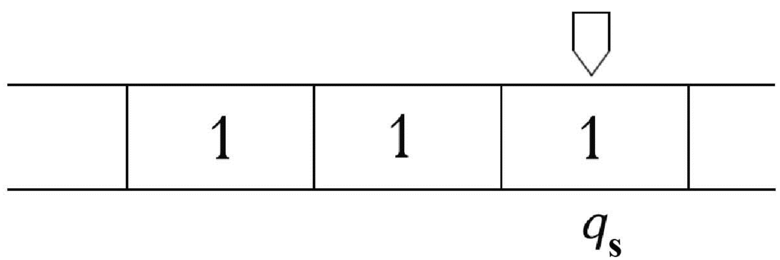
$$q_1 1 \Rightarrow 1Rq_1$$

Конфігурація 3



$$q_1 \lambda \Rightarrow 1Eq_s$$

Конфігурація 4



Спосіб 2 Нарощування зліва

Початковий стан: головка зліва

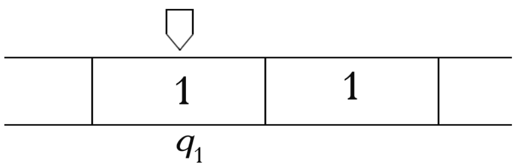
Простіше виконати умови прикладу шляхом переміщення голівки вліво.

Команди машини для нарощування одиниці зліва:

$$q_1 1 \Rightarrow 1Lq_1,\ q_1\lambda \Rightarrow 1Eq_s$$

Після початку роботи зчитувальна голівка машини повинна переміститися на одну клітинку вліво, записати в порожню клітинку 1 і зупинитися.

Конфігурація 1

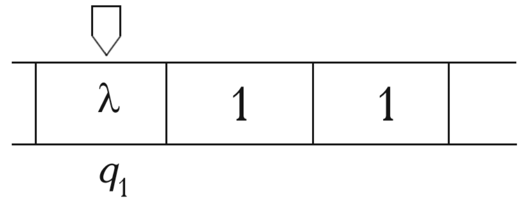


Перша команда має вигляд: $q_1 1 \Rightarrow 1Lq_1$.

Дії машини Тьюринга:

1) Зчитує символ 1 з клітинки, що оглядається

2) Залишає символ 1 незмінним
3) Переміщується вліво на створену порожню клітинку.

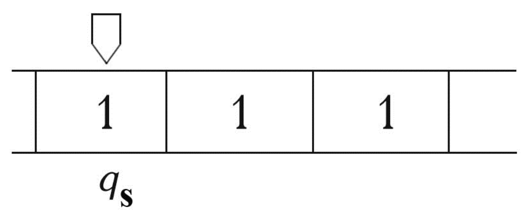


Конфігурація 2

Друга команда має вигляд: $q_1\lambda \Rightarrow 1Eq_s$.

Дії машини Тьюринга:

1) Зчитує порожній символ λ з клітинки, що оглядається
2) Записує замість λ символ 1.
3) Переходить у стан q_s і зупиняється.



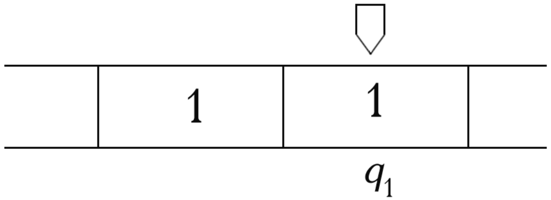
Конфігурація 3

Спосіб 3 Нарощування справа (файл 4.tur)

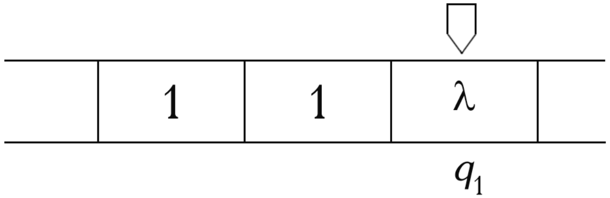
Початковий стан: головка справа

Нарощування відбувається переміщенням вправо, але початковий стан вибирається на крайній правій позиції.

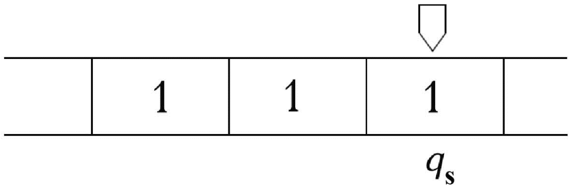
Команди машини: $q_1 1 \Rightarrow 1Rq_1, q_1\lambda \Rightarrow 1Eq_s$.



Конфігурація 1



Конфігурація 2



Конфігурація 3

Приклад 5. Реалізація нуль-функції (файл 5.tur)

Побудувати машину Тьюринга, що обчислює нуль-функцію **0** (x) = 0.

Оберемо зовнішній алфавіт: $A = \{\lambda, 1\}$.

Оберемо алфавіт внутрішніх станів: $Q = \{q_s, q_1\}$

Оберемо систему команд так, щоб машина замість усіх одиниць підставляла символ λ.

Якщо голівка буде оглядати символ λ, то замість нього поставити 1 і зупинитися.

$$q_1 1 \Rightarrow \lambda R q_1, \; q_1 \lambda \Rightarrow 1 E q_s$$

Нехай задано початкове слово 1111, що еквівалентно 3.

Програма роботи машини Тьюринга:

$$q_1 1111 \Rightarrow \lambda q_1 111 \Rightarrow \lambda\lambda q_1 11 \Rightarrow \lambda\lambda\lambda q_1 1 \Rightarrow \lambda\lambda\lambda\lambda q_1 \lambda \Rightarrow \lambda\lambda\lambda\lambda q_s 1$$

Число 1 представляє 0 у кодуванні числових функцій.

Приклад 6. (файл 6.tur)**Реалізація функції проектування**

Обчислимо функцію проектування $I_1^2\left(x_1, x_2\right)$.

Оберемо зовнішній алфавіт: $A=\{\lambda, 1\}$.

Оберемо алфавіт внутрішніх станів: $Q=\{q_s, q_1, q_2\}$

Оберемо систему команд так, щоб машина замість усіх одиниць підставляла символ λ після першого оглядання символу λ в клітинці на стрічці.

Якщо стан машини набуде значення $q_2\lambda$, то необхідно перейти до заключного стану.

$$q_1 1 \Rightarrow 1Rq_1, \quad q_1\lambda \Rightarrow \lambda Rq_2, \quad q_2 1 \Rightarrow \lambda Rq_2, \quad q_2\lambda \Rightarrow \lambda Eq_s$$

Нехай задане початкове слово $11\lambda\ 111$, що еквівалентно $I_1^2\left(1,2\right)$.

Програма роботи машини Тьюринга:

$$q_1 11\lambda 111 \Rightarrow 1q_1 1\lambda 111 \Rightarrow 11q_1\lambda 111 \Rightarrow 11\lambda q_2 111 \Rightarrow$$

$$11\lambda\lambda q_2 11 \Rightarrow 11\lambda\lambda\lambda q_2 1 \Rightarrow 11\lambda\lambda\lambda\lambda q_2\lambda \Rightarrow 11\lambda\lambda\lambda\lambda q_s\lambda$$

Приклад 7. **(файл 7.tur)** Побудувати машину T_4, *що* обчислює числову функцію $f\left(x,y\right)=x+y$.

Розв'язок. Нехай зовнішнім алфавітом даної машини є алфавіт $A=\left\{\lambda,1\right\}$.

Алфавіт внутрішніх станів $Q=\left\{q_s,q_1,q_3,q_4\right\}$.

Роботу машини забезпечує набір команд:

	λ	1
q_1	$1Rq_2$	$1Rq_1$
q_2	λLq_3	$1Rq_2$
q_3		λLq_4
q_4		λLq_s

Нехай задане початкове слово $11\lambda 11$, що еквівалентно $f(x,y)=1+1$

	λ	1
q_1	$1Rq_2$	$1Rq_1$
q_2	λLq_3	$1Rq_2$
q_3		λLq_4
q_4		λLq_s

$q_1 11\lambda 11 \Rightarrow 1q_1 1\lambda 11 \Rightarrow 11q_1\lambda 11 \Rightarrow 111q_2 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1111q_2 1 \Rightarrow 11111q_2\lambda \Rightarrow 1111q_3 1\lambda \Rightarrow 111q_4 1\lambda\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow 111q_0\lambda\lambda\lambda$

Результат обчислення: 111=$1^{2+1} \Rightarrow$ 2

Аналогічно можна побудувати машини Тьюринга для обчислення інших арифметичних операцій

Зауваження. Усі арифметичні операції є функціями, обчислюваними за Тьюрингом.