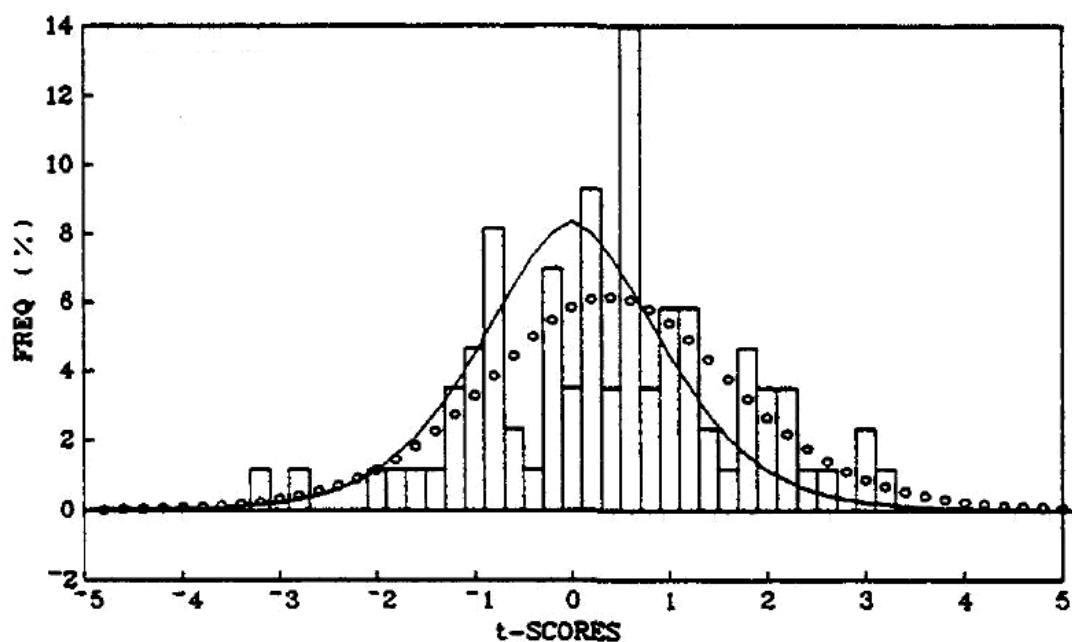


**Б.Н. Епифанцев, М.Я. Епифанцева,
Р.А. Ахмеджанов**

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ И ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ

**Часть I. Введение в теорию
случайных процессов**

Учебное пособие



Министерство образования и науки РФ
ГОУ ВПО «Сибирская государственная автомобильно-дорожная
академия (СибАДИ)»

Б.Н. Епифанцев, М.Я. Епифанцева,
Р.А. Ахмеджанов

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ
В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ И ЗАЩИТЫ
ИНФОРМАЦИИ

Часть I. Введение в теорию
случайных процессов

Учебное пособие

Омск
СибАДИ
2011

УДК 519.216,681.2
ББК 22.171,34.9
Е 67

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. Ю.А. Бурьян (Омский государственный
технический университет);
д-р физ.-мат. наук, проф. Л.М. Мартынов (Омский государственный
педагогический университет)

Работа одобрена редакционно-издательским советом академии в качестве учебного пособия для студентов факультета ИСУ.

Епифанцев Б.Н., Епифанцева М.Я., Ахмеджанов Р.А.

Е 67 Случайные процессы в задачах обработки и защиты информации:
учебное пособие. – Омск: СибАДИ, 2011. – Ч. I. Введение в теорию случайных процессов. – 80 с.

Кратко изложены основы теории случайных процессов и их применение для решения прикладных задач по обработке и защите информации в технических системах. Предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям «Информатика и вычислительная техника» и «Информационная безопасность».

Работа выполнена в рамках реализации программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы», контракт № П215 от 22.07.09 г.

Табл. 3. Ил. 24. Библиогр.: 10 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	8
1.1. Понятие случайного процесса. Плотность распределения вероятностей	8
1.2. Числовые характеристики случайных процессов	16
1.3. Классификация случайных процессов	23
1.4. Особенности оценки характеристик случайных процессов	28
1.5. Модели нестационарных случайных процессов	37
1.6. Преобразования случайных процессов	47
1.7. Потoki случайных событий	56
1.8. Зрительная и слуховая системы человека: гипотезы о принципах функционирования	65
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	79

ВВЕДЕНИЕ

Последние десятилетия характеризовались непрерывным ростом требований к эффективности управления в социальной, экономической, технической и природной системах. Реализация этих требований во многом оказалась возможной благодаря прорыву в создании систем поддержки принятия решений. В их основу положена технология вычислительного эксперимента, реализуемая через моделирование поведения изучаемых систем при различных сценариях управления ими. Математические модели, используемые для этих целей, должны учитывать фактор неопределенности поведения систем. Такую возможность дает теория случайных процессов.

По определению теория случайных процессов изучает закономерности случайных явлений в динамике их развития. Область ее применения чрезвычайно широка. Вот несколько примеров на этот счет.

После Второй мировой войны сформировалось научное направление – исследование операции. Оно закрывало потребности в теории организации боевых действий, а также прогнозировании их исхода при принятии командованием решений в условиях неполноты информации о возможных действиях противника. В настоящее время на этой основе формируется теория системной безопасности. Понятие безопасности одинаково понимается специалистами по разработке и анализу технических, экологических, социально-экономических и других систем. Исход выполнения системой целевого задания считается безопасным, если оно протекает без нарушения законов функционирования системы и оптимальной работоспособности обслуживающего и управленческого персонала. При решении задач подобного сорта используется теория случайных процессов.

К настоящему времени мировым сообществом создана мощная инфраструктура по обеспечению качества производимой продукции, что позволяет увеличить срок службы машин и механизмов, снизить их материало- и энергоемкость, повысить безопасность эксплуатации ответственных конструкций и т.д. Контроль качества является самой массовой технологической операцией в производстве и на транспорте. В связи с усложнением и требованием неуклонного повышения надежности новой техники трудоемкость контрольных операций непрерывно растет. Поэтому важная роль отводится

робототехническим комплексам контроля, в основе которых лежат автоматизированные операции обработки информации и управления. По существу, такие операции сводятся к принятию решений разного уровня автоматом. Алгоритмы его работы, как правило, формулируются на языке теории случайных процессов.

Информатизация – характерная черта современного общества. Компьютеры внедрены во все области человеческой деятельности: от управления космическими кораблями до обслуживания банковских систем. Создана мощная инфраструктура по обработке, хранению и передаче информации, а также управлению процессами производства, распределения и хранения продукции. Она призвана обеспечить доступ субъекта к информационным ресурсам (на оговоренных условиях) в любой точке земного шара. Как только информационный ресурс начал приобретать потребительскую ценность «оговоренные условия» стали нарушаться. Возникла проблема обеспечения безопасности информационных систем. Профессионально подготовленный одиночка может нанести существенный ущерб системам организационного управления через нарушение работы информационных систем. Ситуация с информационной безопасностью современного общества напоминает ситуацию функционирования живой клетки при атаке на нее вируса, который, прицепившись к клетке, проталкивает в нее одну молекулу с программой по производству вирусов. После этого акта все ресурсы клетки направляются на выполнение внедренной программы, после выполнения которой она погибает. Нужна «иммунная система» для прерывания такого процесса. В информационной сфере такая система носит название «информационная безопасность». Для ее создания используются постулаты теории случайных процессов.

В последние годы сформировалась технология строгого исследования текстовых массивов в целях выявления или измерения социальных тенденций. Применяя эту технологию, можно выявить отношение средств массовой информации к тем или иным субъектам (объектам), дифференцировать материалы по инициаторам их подачи (клиент/конкурент/посредник), отследить каналы распространения информации, провести семантический анализ текста. Технология направлена на проведение социологических исследований и известна под названием контент-анализа. В течение прошедших десяти лет она нашла применение в системах защиты компьютерной информации для предотвращения ее утечек. И в этой области знаний мы

сталкиваемся с необходимостью использования аппарата теории случайных процессов.

Поиск объектов – одна из важнейших составляющих человеческой деятельности. Перечень поисковых задач включает и разведку полезных ископаемых, и отыскание неисправностей в сложных системах, и поиск оптимальных управленческих решений, и поиск замаскированных объектов (субъектов) в различных средах. Перечисленные задачи объединяются наличием общего признака – конечной целью их является получение интересующей информации. Для их решения используются результаты теории обнаружения, теории физических полей различных объектов, теории маневрирования, исследование операции и др. При этом широкое применение находит аппарат теории вероятностей и в, первую очередь, ее хорошо развитое направление – теория случайных процессов.

На этом мы ограничимся перечислением областей применения теории случайных процессов. При необходимости его можно продолжать еще долго.

Литература по случайным процессам, опубликованная за последние 15 лет, представлена в основном монографиями. Учебники и учебные пособия относятся к классу дефицитной литературы и ориентированы на обеспечение определенных направлений и специальностей. Предлагаемое вниманию учебное пособие написано под влиянием проводимой компании по обеспечению учебно-методической литературой новых специальностей и утвержденных направлений. В значительной мере оно удовлетворяет требованиям государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлениям «Информационная безопасность» и «Информатика и вычислительная техника».

Опыт преподавания курса в «классическом варианте», когда излагаемый материал отражал вопросы теории и подкреплялся примерами абстрактного плана, признан непродуктивным. Современный студент настроен на получение ответа на вопрос: «Где пригодятся излагаемые знания?». Реакция на подобный запрос подтолкнула авторов к созданию пособия прикладного характера. На примерах решения задач в избранной области знаний иллюстрируется использование теоретического аппарата изучаемой дисциплины.

В пособие не включен раздел по программному обеспечению изучаемого предмета. С появлением компьютеров разработаны

статистические программные пакеты по анализу экспериментальных данных, выявлению закономерностей на фоне случайностей, по формированию прогнозов поведения исследуемого процесса и т.д. Современный исследователь должен освоить программное обеспечение прикладной статистики, уметь ставить задачи, определять методы их решения, интерпретировать полученные результаты. Однако документация статистических пакетов довольно объемна. Известный пакет STATGRAPHICS Plus v.7 описан в 5 книгах, имеющих объемы соответственно 100 стр.+300 стр.+450 стр.+800 стр.+600 стр. Поэтому для освоения программного обеспечения прикладной статистики необходимо вводить дополнительный курс либо изучать обозначенный раздел в рамках самостоятельной работы студентов.

Учебное пособие относится к одной из возможных версий семестрового курса объемом 36 часов. Ограничение по объему и требование о прикладной направленности дисциплины определили распределение учебного материала по частям. В первой части освещаются только вопросы описания случайных процессов и их преобразования. Во второй части рассмотрены прикладные задачи по обработке и защите информации, решение которых базируется на использовании аппарата теории случайных процессов. Вариант издания из двух частей является более технологичным и удобным в использовании. Вопросы «инструментального» плана: специализированное программное обеспечение, компьютерная проверка усвоения материала и т.д. рекомендуется освоить в рамках самостоятельной работы студентов.

Для изучения курса необходимо знать основы теории случайных событий и математической статистики.

Авторы признательны рецензентам д-ру техн наук, проф. Ю.А. Бурьяну и д-ру физ.-мат. наук, проф. Л.М. Мартынову за тщательный просмотр рукописи и сделанные замечания, устранение которых способствовало улучшению первоначальной редакции учебного пособия.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Понятие случайного процесса. Плотность распределения вероятностей

Чтобы проследить поведение сложной системы во времени и пространстве в условиях непредвиденных сбоев в циркулирующих в ней информационных потоках, используют технологию «вычислительного эксперимента». Для ее реализации необходимо располагать математическими моделями как информационных потоков, так и преобразований, совершаемых с ними в системе. Теория вероятностей и математическая статистика дают целый ряд продуктивных подходов для формирования математических моделей в условиях недостатка исходной информации.

Модели обычно строятся по следующей схеме. Вначале идет сбор информации об изучаемом объекте (процессе) с помощью специально поставленных опытов. Затем принимается решение, к какому классу статистических моделей можно отнести модель функционирования объекта (поведение процесса). Если делается вывод, что поведение объекта описывается моделью «случайная величина» $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то по данным ограниченного числа опытов n находятся эмпирические дифференциальный или интегральный закон распределения $\omega(X)$, $F(X)$ и оцениваются их числовые характеристики. Далее с помощью методов математической статистики определяется достоверность полученных моделей.

По аналогичной схеме строятся модели более сложных явлений, которые выстраиваются в следующей последовательности: *система случайных величин, функция случайных величин, случайная функция (процесс), случайное поле*.

Наиболее сложной среди перечисленных моделей является модель случайного поля. Взволнованная поверхность моря – пример случайного поля трех переменных $H(x, y, t)$, где $H(\dots)$ – высота раздела «вода – атмосфера» над уровнем моря в точке (x, y) , t – время. В различные моменты времени изображения морской поверхности не идентичны, хотя и имеют похожие черты. Каждое следующее изображение называется реализацией случайного поля, принимающего в опыте конкретный, но заранее неизвестный вид. Зафиксировав две координаты, получим одномерный процесс $H(x, y_0, t_0)$ или *реализацию* случайной функции (процесса). В

результате опыта случайный процесс (СП) принимает тот или иной заранее неизвестный вид. Проведение серии опытов позволяет получить семейство реализаций СП и по ним судить о характеристиках изучаемого процесса.

На рис. 1.1-1.3 изображены примеры случайных процессов. Графики (реализации) на первом рисунке отражают записи сигналов на выходе микрофона при произнесении диктором фонемы «и». Семейство кривых на втором рисунке дает представление об изменчивости составляющей скорости движения кончика пера при многократном обведении субъектом конкретной фигуры. Третий рисунок дает представления об отличиях длительностей нажатий клавиш при наборе пароля «Гранитный барьер» в разные часы суток.

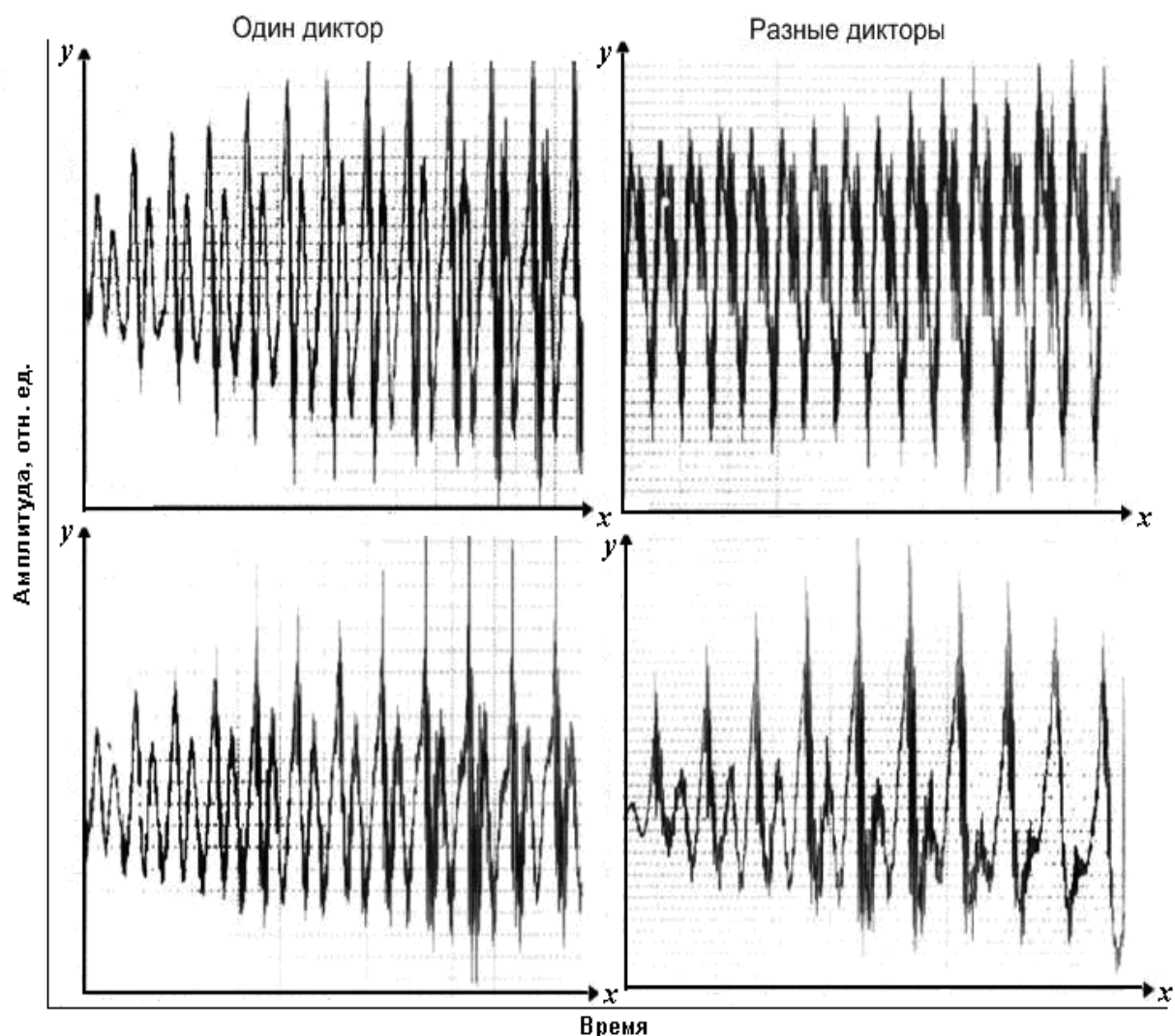


Рис. 1.1. Изображение четырех реализаций электрического сигнала на выходе микрофона при произношении фонемы «и»

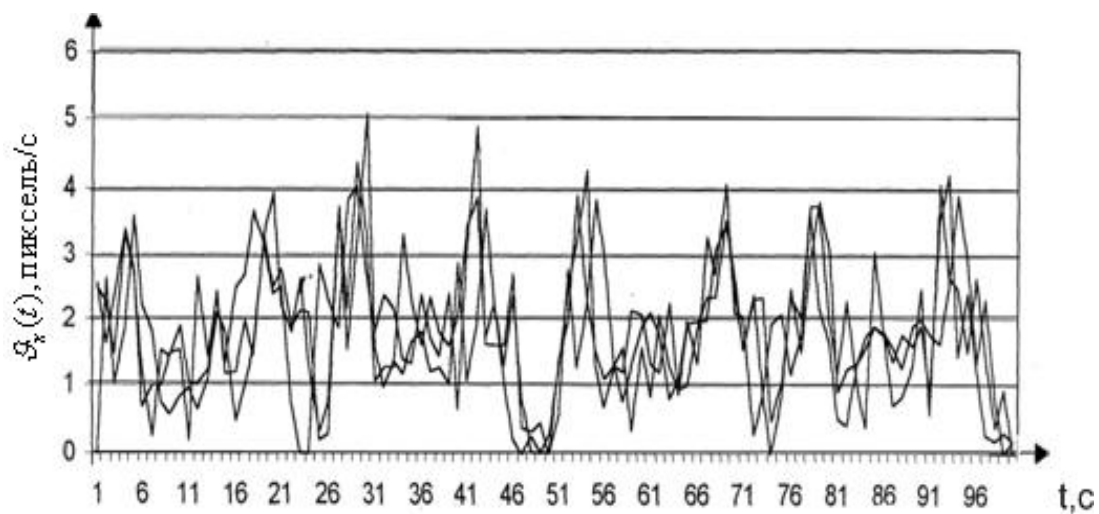


Рис. 1.2. Скорости движения кончика пера по оси x при многократном написании студентом пароля «Петр»

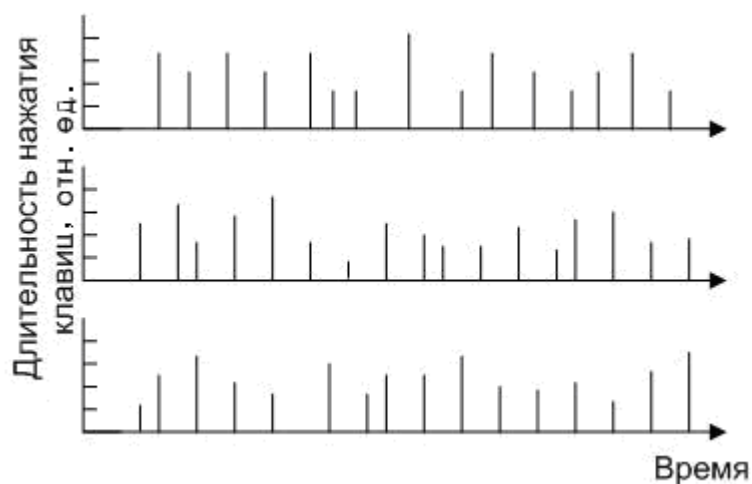


Рис. 1.3. Реализации последовательностей длительностей нажатия клавиш при наборе пароля «Гранитный барьер»

Рисунки позволяют сделать вывод о существовании непрерывных (см. рис. 1.1, 1.2) и дискретных (см. рис. 1.3) СП. Если провести измерения значений непрерывного процесса в равноотстоящих точках через интервал Δt , получим аналоги дискретного процесса на рис.1.3. Такой процесс перехода от непрерывной к дискретной функции называется *дискретизацией*, а такого рода дискретная функция получила название случайной последовательности или *импульсного*

случайного процесса. В более общей формулировке импульсный случайный процесс есть последовательность импульсов, параметры которых являются случайными величинами.

Имея множество возможных реализаций случайного процесса, можно получить исчерпывающую его характеристику – *распределение вероятностей реализаций*. При его построении принимается за основу базовое положение: при фиксированном значении аргумента значения функции есть набор значений случайной величины. При дискретизации аргумента СП через интервал Δt получим систему случайных величин. Каждая из этих величин $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, \dots, x_{im}\}$ описывается плотностью распределения вероятностей $\omega(X_i)$, $i=1, 2, \dots, n$ (рис. 1.4). Если X_1, X_2, \dots, X_n независимы, дифференциальный закон распределения вероятностей СП определяется соотношением

$$\omega(X) = \prod_{i=1}^n \omega(X_i), \quad n \rightarrow \infty, \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

Когда «условие независимости» не соблюдается, выражения для распределения вероятностей СП $\omega(X)$ становятся громоздкими. Исключением служит соотношение, получаемое при выполнении условия «нормальности» составляющих вектора X :

$$\omega(X) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sigma_{xi} \cdot \sqrt{(2\pi)^n \cdot A}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2A} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{(x_{ik} - m_{xi}) \cdot (x_{jk} - m_{xj})}{\sigma_{xi} \cdot \sigma_{xj}} \right], \quad (1.1)$$

где m_{xi} – *математическое ожидание* случайной величины X_i ; σ_{xi} – *среднеквадратичное отклонение* этой величины; A – определитель n -го порядка, составленный из *коэффициентов корреляции* случайных величин в i -м и j -м сечениях r_{ij} .

По определению:

$$m_{xi} = M[x_{ik}]; \quad \sigma_{xi} = \sqrt{M(x_{ik} - m_{xi})^2};$$

$$r_{ij} = M[(x_{ik} - m_{xi}) \cdot (x_{jk} - m_{xj}) / \sigma_{xi} \cdot \sigma_{xj}],$$

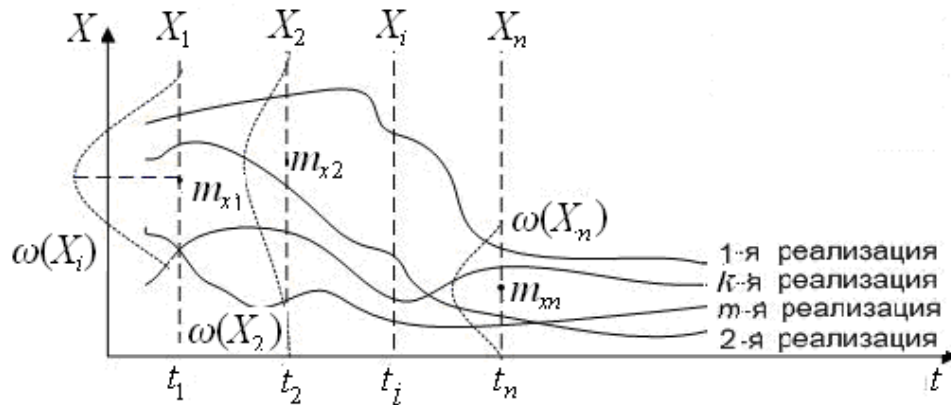


Рис. 1.4. Графики, поясняющие процедуру построения распределения вероятностей СП

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad r_{ii} = r_{jj} = 1,$$

где знак M – математическое ожидание; A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента r_{ij} , определяется через A : $A_{ij} = (-1)^{i+j} A'$, A' – определитель, получаемый из A путем вычеркивания i -строки и j -го столбца.

В выражение (1.1) входят математические ожидания случайных величин X_i и коэффициенты корреляции между ними. Поэтому, если из физических соображений можно сделать заключение о нормальности каждой из указанных величин, то для описания СП достаточно определить эти параметры.

Полагая в формуле (1.1) $n=1$ и $n=2$, получим частные соотношения для одной и двух случайных величин:

$$\omega(X_1) = \frac{1}{\sigma_{x1}\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(x_{1k} - m_{x1})^2}{2\sigma_{x1}^2}\right],$$

$$\omega(X_1, X_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x1} \cdot \sigma_{x2} \cdot \sqrt{1-r_{12}^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r_{12}^2)} \cdot \left[\frac{(x_{1k} - m_{x1})^2}{\sigma_{x1}^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2r_{12} \frac{(x_{1k} - m_{x1})(x_{2k} - m_{x2})}{\sigma_{x1} \cdot \sigma_{x2}} + \frac{(x_{2k} - m_{x2})^2}{\sigma_{x2}^2} \right] \right\}. \quad (1.2)$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ число градаций X из ряда $(1, 2, \dots, k, \dots, m)$ стремится к бесконечности и приведенные выражения переходят в непрерывные распределения вероятностей для одной или двух случайных величин. При выводе частных формул (1.2) использовались значения алгебраических дополнений:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot 1 = 1; \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot r_{21}; \quad A_{21} = (-1)^3 \cdot r_{12}; \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot 1.$$

Наряду с нормальными СП следует охарактеризовать так называемые *марковские* процессы, являющиеся частным видом СП, которые широко используются в разных научно-прикладных направлениях (радиотехнике, автоматике, теории надежности и массового обслуживания, физике, биологии, медицине и др.).

Рассмотрим процесс $x(t)$, для которого в последовательные моменты времени $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$ его значения определены: $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2), \dots, x_n = x(t_n)$. Процесс называется марковским, если условные вероятности

$$p(x_n / x_{n-1}, \dots, x_1) = \frac{\omega(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\omega(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}$$

зависят лишь от последнего значения x_{n-1} , т.е. если справедливо равенство

$$p(x_n / x_{n-1}, \dots, x_1) = p(x_n / x_{n-1}).$$

Тогда для процессов этого вида справедливы выражения:

$$\begin{aligned}\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) &= p(x_n / x_{n-1}) \cdot \omega(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \\ \omega(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &= p(x_{n-1} / x_{n-2}) \cdot \omega(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}), \\ &\vdots \\ \omega(x_1, x_2) &= p(x_2 / x_1) \cdot \omega(x_1).\end{aligned}$$

Подставляя каждое последующее выражение в предыдущее, получим

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_n / x_{n-1}) \cdot p(x_{n-1} / x_{n-2}) \cdot \dots \cdot p(x_2 / x_1) \cdot \omega(x_1).$$

Таким образом, марковский процесс определяется одномерной начальной плотностью распределения вероятности $\omega(x_1)$ и вероятностями перехода его из i -го в j -е состояние.

В литературе можно найти и такое утверждение: любой процесс можно рассматривать как марковский, если все параметры из «прошлого», от которых зависит «будущее», включить в настоящее. Так, если за настоящее состояние системы принять «исправна», то процесс не марковский, потому что вероятность ее отказа в предстоящее время t зависит от продолжительности ее работы и даты ее последнего ремонта. Но оба параметра (время работы и дата последнего ремонта), включенные в «настоящее», позволяют оценить вероятность перехода в неисправное состояние в будущем и расценивать последовательность переходов как марковский процесс. Подобный подход позволяет решить ряд практических задач.

Задача

Распределение вероятностей случайного процесса $X(t)$ описывается выражением

$$\omega(X, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} e^{2\alpha t} + \alpha t\right).$$

Определить математическое ожидание $m_x(t)$ и дисперсию $\sigma_x^2(t)$ процесса. Изобразить на графике область процесса $X(t)$ в границах $\pm 3\sigma_x(t)$, а также построить график $\omega(X, t)$ для нескольких моментов времени: $t_1 = 0$, $t_2 = 1/\alpha$, $t_3 = 2/\alpha$.

Решение

Приведем представленное выражение для плотности распределения вероятностей к виду

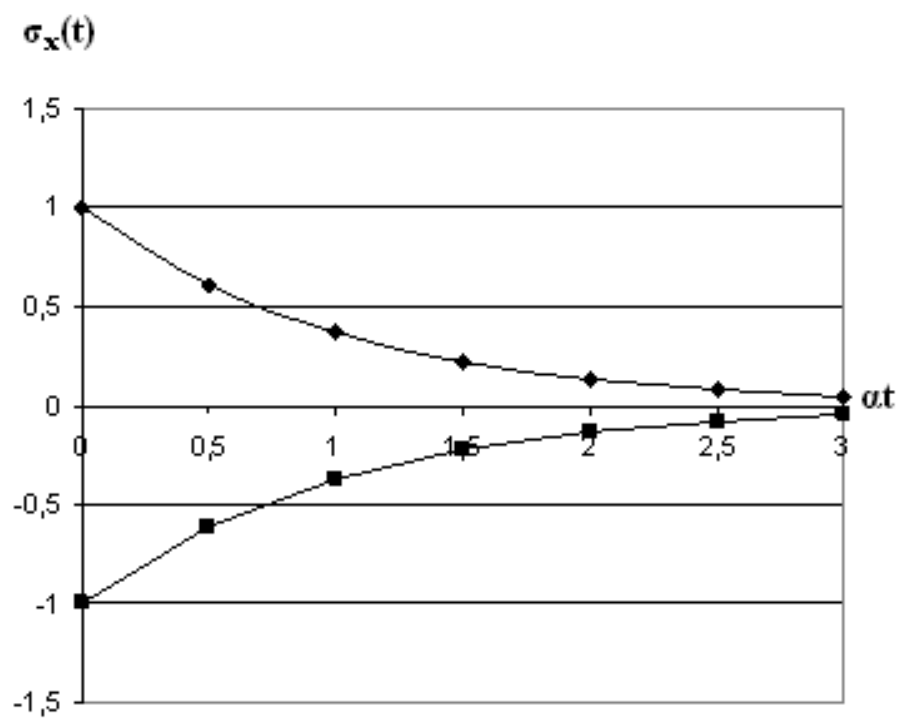
$$\begin{aligned}\omega(X, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{x^2}{2} e^{2\alpha t} + \frac{e^{-2\alpha t}}{e^{-2\alpha t}} \right] \cdot \exp(\alpha t) \cdot \frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha t}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \exp(-\alpha t)} \cdot \exp \left(-\frac{x^2}{2e^{-2\alpha t}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x(t)} \cdot \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2(t)} \right).\end{aligned}$$

Имеем выражение для нормального закона распределения вероятностей. В каждом сечении рассматриваемого случайного процесса математическое ожидание случайной величины равно $m_x(t)=0$, а дисперсия $\sigma_x^2(t)=e^{-2\alpha t}$ изменяется во времени. Связи между случайными величинами отсутствуют (коэффициенты корреляции равны нулю, определитель A имеет значимые элементы только по диагонали $r_{ij}=0$ при $i \neq j$ и $r_{ij}=1$ при $i=j$).

В обозначенных точках аргумента имеем:

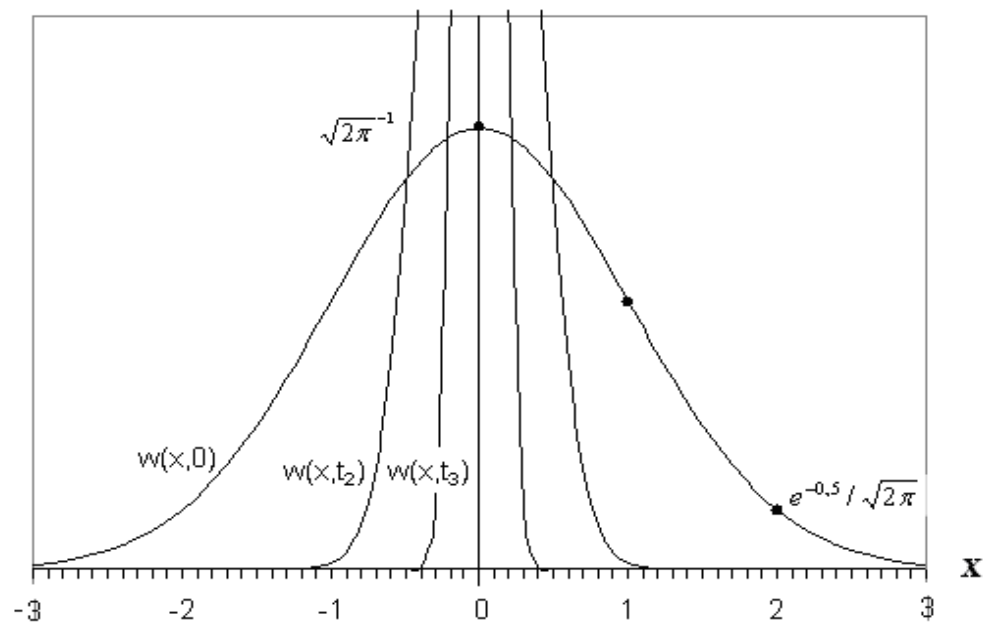
$$t_1 = 0, \delta_x(0) = 1; t_2 = 1/\alpha, \sigma_x(1/2) = e^{-1} = 0,37; t_3 = (2/\alpha) = e^{-2} \approx 0,137.$$

Этих данных достаточно, чтобы построить требуемые графики, представленные на рисунке.



a)

Иллюстрация поведения $\omega(X, t)$ и $\sigma_x(t)$ во времени (начало)



б)

Иллюстрация поведения $\omega(X, t)$ и $\sigma_x(t)$ во времени (окончание)

1.2. Числовые характеристики случайных процессов

Существует большое число задач, для решения которых оказывается достаточным использование числовых характеристик плотности распределения вероятностей. В отличие от числовых характеристик случайных величин (математического ожидания, дисперсии и др.), представляющих собой числа, характеристики СП являются функциями.

На рис. 1.4 видно, что если соединить точки m_{xi} (значение математических ожиданий в сечениях случайной функции), полученная кривая при $\Delta t \rightarrow 0$ будет одной из искомых функций $m_x(t)$:

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \cdot \omega(X) dx.$$

Она и есть *математическое ожидание СП* – неслучайная функция, около которой группируются ее конкретные реализации.

Аналогичным образом определяется *дисперсия СП* – неслучайная функция $\sigma_x^2(t)$, описываемая при $\Delta t \rightarrow \infty$ выражением

$$\sigma_x^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [X(t) - m_x(t)]^2 dx$$

и характеризующая разброс его реализаций относительно среднего.

Математическое ожидание и дисперсия – важные, но недостаточные характеристики для описания основных свойств СП. В этом можно убедиться, обратившись к рис. 1.5, на котором изображены реализации двух случайных функций $X(t)$, $Y(t)$.

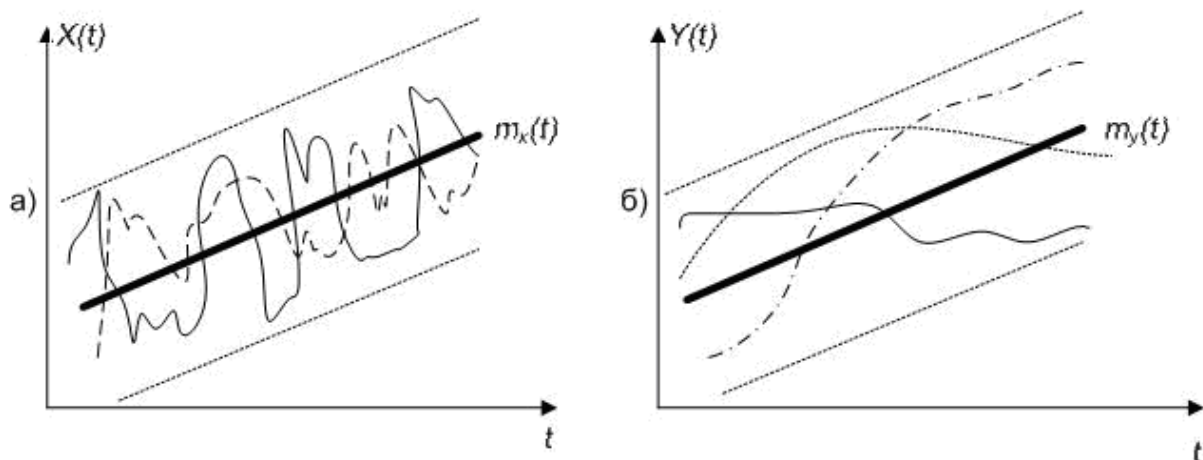


Рис. 1.5. Сопоставление двух СП с одинаковыми дисперсиями и математическими ожиданиями

Очевидно, внутренняя структура обоих СП совершенно различна, но это не отражает ни математическое ожидание, ни дисперсия. Для описания динамики изменения СП вводится специальная характеристика – *корреляционная* (другой встречающийся термин *автокорреляционная*) функция. Она характеризует степень сходства между сечениями процесса, взятого в момент t_j и удаленного от него на расстояние $\tau_{ij} = (i - j)\Delta t$, Δt – интервал между сечениями.

Из физических соображений следует, что при малом шаге τ_{ij} сходство соседних сечений будет больше для процесса на рис. 1.5, б, нежели для процесса на рис. 1.5, а. В первом случае за малый интервал времени реализации не успевают заметно измениться – сходство с сечением процесса в t_j велико. Обратное заключение можно сделать, анализируя СП на рис. 1.5, а. Поэтому процессы $X(t)$ и $Y(t)$ должны иметь различные корреляционные функции, определяемые как

$$K_x(t_j, \tau_{ij}) = M[\overset{\circ}{X}(t_j) \cdot \overset{\circ}{X}(t_j + \tau_{ij})]; \quad K_y(t_j, \tau_{ij}) = M[\overset{\circ}{Y}(t_j) \cdot \overset{\circ}{Y}(t_j + \tau_{ij})], \quad (1.3)$$

где $\overset{\circ}{X}(t_j) = X(t_j) - m_x(t_j)$, $\overset{\circ}{X}(t_j + \tau_{ij}) = X(t_j + \tau_{ij}) - m_x(t_j + \tau_{ij})$ – центрированные реализации СП, M – знак математического ожидания. Аналогично определяется $\overset{\circ}{Y}(t_j) \cdot \overset{\circ}{Y}(t_j + \tau_{ij})$.

Таким образом, корреляционной функцией СП называется неслучайная функция двух аргументов, выраженная через математическое ожидание произведения центрированных СП при тех же аргументах.

Функция, полученная аналогично, но для разных СП: $X(t)$, $Y(t)$: $K_B(t_i, t_j) = M[\overset{\circ}{Y}(t_i) \cdot \overset{\circ}{X}(t_j)]$, $i, j = 1, 2, \dots$, называется *взаимокорреляционной функцией*. Она характеризует степень сходства i -го сечения одного СП с различными сечениями другого СП.

При $\tau_{ij} = 0$, $K(t_i, t_j) = M[\overset{\circ}{X}(t_i)^2] = \sigma_x^2(t_i)$ и необходимость в дисперсии, как отдельной характеристике СП, отпадает: достаточно знать математическое ожидание и корреляционную функцию.

Так как функция $K(t_j, t_j + \tau_{ij})$ не зависит от последовательности, в которой используются сомножители $\overset{\circ}{X}(t_j)$ и $\overset{\circ}{X}(t_j + \tau_{ij})$ при ее вычислении, то она симметрична относительно своих аргументов.

На практике часто пользуются *нормированной корреляционной функцией*

$$r(t_j, t_j + \tau_{ij}) = K(t_j, t_j + \tau_{ij}) / \sigma_x(t_j) \cdot \sigma_x(t_j + \tau_{ij}),$$

которая представляет собой последовательность коэффициентов корреляции случайных величин $X(t_j)$ и $X(t_j + \tau_{ij})$. При $\tau_{ij} = 0$ $r(t_i, t_i) / \sigma_x^2(t_i) = 1$.

Информацию о СП, которую дает корреляционная функция, можно получить и через так называемую *спектральную плотность*.

В теории сигналов широко используется *преобразование Фурье* функции времени $x(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt, \quad (1.4)$$

где $F(\omega)$ называют *спектром амплитуд*, которые приписываются элементарным функциям $e^{j\omega t}$; ω – круговая частота $2\pi/T$; T – период синусоидальной функции.

Аналогичную запись можно привести и для корреляционной функции. При фиксированном t_j функция $K(t_j, \tau_{ij})$ будет зависеть только от интервала τ_{ij} . По аналогии с (1.4) при $\Delta t \rightarrow 0$ запишем:

$$K(t_j, t_j + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_j(\omega) e^{j\omega \tau} d\omega; \quad (1.5)$$

$$S_j(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(t_j, t_j + \tau) e^{-j\omega \tau} d\tau. \quad (1.6)$$

Заменяя $e^{\pm j\omega\tau} = \cos\omega\tau \pm j\sin\omega\tau$ и учитывая, что относительно нуля синусоидальная функция нечетная, а косинусоидальная – четная, получим выражения, известные как формулы Винера–Хинчина:

$$K(t_j, t_j + \tau) = 2 \int_0^{\infty} S_j(\omega) \cos \omega \tau d\omega; \quad (1.7)$$

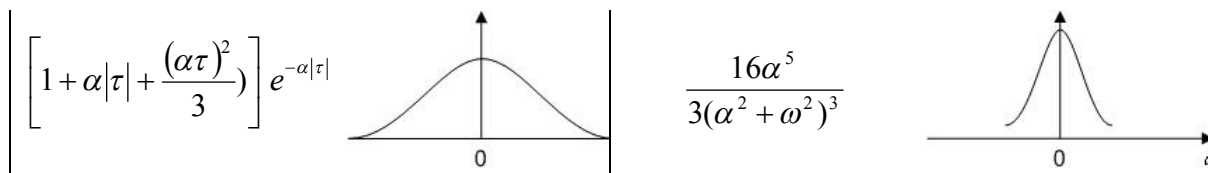
$$S_j(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(t_j, t_j + \tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (1.8)$$

Характеристика $S_j(\omega)$ в выражениях (1.6), (1.8) и есть *спектральная плотность случайного процесса*, описываемого корреляционной функцией $K_j(\tau)$. Обе характеристики $S_j(\omega), K_j(\tau)$ равноправны по объему содержащейся в них информации и в зависимости от сложности выражений на практике используют либо одну, либо другую.

Корреляционные и спектральные характеристики некоторых СП представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Примеры корреляционных и спектральных функций СП			
Корреляционная функция		Спектральная плотность	
$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$		$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$	
Аналитическое выражение	График	Аналитическое выражение	График
$e^{-\alpha \tau }$		$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$	
$(1 + \alpha \tau)e^{-\alpha \tau }$		$\frac{4\alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$	



Запись характеристик СП в виде интегралов – см. ф-лы (1.5)-(1.8) – носит формальный характер. Значительную роль играет исходный отсчет t_j . Следует также понимать, что в реальных задачах анализируемый сигнал имеет конечную длительность и речь может идти только об оценках наблюдаемых характеристик СП. Получение таких оценок мы рассмотрим позже.

Возвращаясь к выражению (1.5), положим $\tau = 0$. Тогда

$$K_j(0) = \sigma_i^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_j(\omega) d\omega.$$

Отсюда становится ясным физический смысл функции $S_j(\omega)$: она показывает, что суммарная дисперсия процесса складывается из дисперсий отдельных спектральных компонентов с частотами ω .

С ростом аргумента τ функция $r_i(\tau)$ уменьшается (удаленные сечения менее связаны друг с другом, нежели близлежащие). Площадь под кривой $r_i(\tau)$ определяет *интервал корреляции*

$r_k = \int_0^{\infty} |r_i(\tau)| d\tau$, равный основанию прямоугольника высотой 1.

Величина r_k дает представление об интервале влияния изменений случайного процесса в одном сечении на изменения в другом сечении.

Задачи

1. Случайный процесс описывается функцией $y = x \cdot e^{-t}$, $t > 0$, x – случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(-1, 1)$. Построить графики плотностей распределения вероятностей процесса $y(t)$ в моменты времени $t=0$, $t=1$, $t=2$.

Решение

Учитывая, что площадь плотности распределения вероятностей равна единице и вид ее при разных значениях t сохраняется, будем иметь:

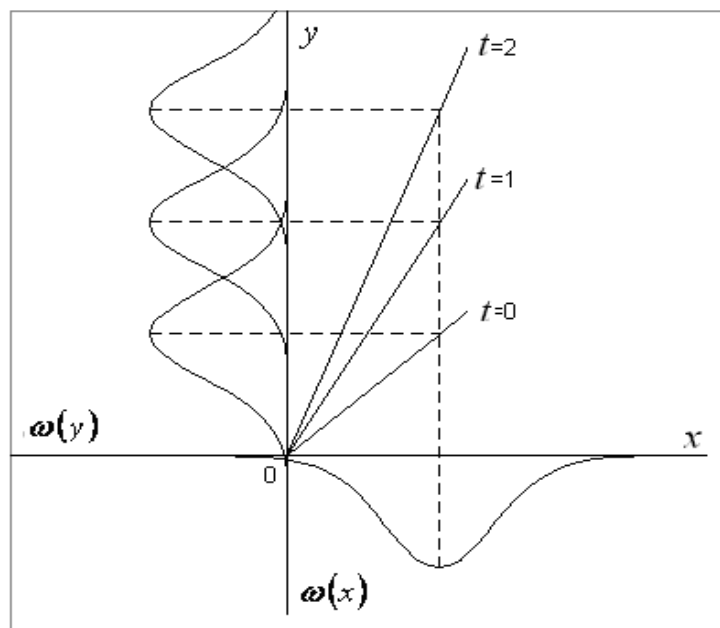
$$t = 0, \omega(y) = 0,5, y \in (-1;1); t = 1, \omega(y) = 1,38, y \in (-0,37;0,37);$$

$$t = 2, \omega(y) = 3,57, y \in (-0,139;0,139).$$

2. Случайный процесс формируется случайной величиной в соответствии с выражением $y = at + x$, где x – случайная нормально распределенная величина с математическим ожиданием $m_x = 0$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma_x = 1$, a – постоянная величина, которая > 0 , t – время. Построить графики плотностей распределения $\omega[y(t)]$ при $t=0, t=1, t=2$.

Решение

Графики строятся в трех квадрантах $\omega(x) - x$; $x - y$; $y - \omega(y)$ при разных значениях t . При $t=0$ $\omega(y)$ полностью соответствует исходному распределению $\omega(x)$. В остальные моменты времени плотность распределения вероятностей смещается по оси y (меняется m_y), дисперсия $\sigma_y^2 = \sigma_x^2$ остается неизменной.



3. Случайный процесс описывается выражением вида $y(t) = x \cdot e^{-t}$, $t > 0$, x – случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами m_x, σ_x . Требуется получить выражения для математического ожидания $m_y(t)$, дисперсии $D_y(t)$, корреляционной функции $K_x(t_j, t)$ и плотности распределения вероятностей $\omega_y(t)$ сформированного процесса $y(t)$.

Решение

По определению $m_y(t) = M[y(t)] = M[x \cdot e^{-t}] = e^{-t} \cdot m_x$;

$$D_y(t) = M[y(t) - m_y(t)]^2 = M[x \cdot e^{-t} - m_x \cdot e^{-t}]^2 = e^{-2t} \cdot \sigma_x^2;$$

$$K_y(t_j, t) = M\left[\overset{o}{y}(t) \cdot \overset{o}{y}(t_j)\right] = \left[\overset{o}{x} e^{-t} \cdot \overset{o}{x} e^{-t_j}\right] = e^{-(t+t_j)} \cdot \sigma_x^2;$$

$$\omega_y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x e^{-t}} \cdot \exp\left[-\frac{(y(t) - m_y(t))^2}{2\sigma_y^2(t)}\right].$$

1.3. Классификация случайных процессов

Методика расчета характеристик СП в основном определяется заранее принятой для него теоретической моделью. Поэтому прежде чем приступить к решению конкретной задачи, необходимо принять решение о модели изучаемого СП.

Существует большое число признаков, по которым проводится классификация случайных процессов. Общее представление об основных типах СП дает рис.1.6.



Рис. 1.6. Основные типы случайных процессов

По зависимости вероятностных характеристик от начала отчета времени процессы делятся на стационарные и нестационарные. Для нестационарных СП справедливы следующие неравенства:

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) \neq \omega(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1 - t_0, t_2 - t_0, \dots, t_n - t_0);$$

$$m_x(t) = f(t); \quad \sigma_x^2(t) = \varphi(t); \quad K(t_j, \tau_{ij}) \neq K(t_j - t_0, \tau_{ij}).$$

Что касается стационарных процессов, здесь возможны следующие варианты. Если справедливо равенство

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \omega(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1 - t_0, t_2 - t_0, \dots, t_n - t_0), \quad (1.9)$$

процесс называется *стационарным в узком смысле*. Из (1.9) следуют очевидные следствия:

$$\omega(x, t) = \omega(x); \quad \omega(x_1, x_2, t_1, t_2) = \omega(x_1, x_2, \tau); \quad \tau = t_2 - t_1;$$

$$m_x(t) = m_x = \text{const}; \quad \sigma_x^2(t) = \sigma_x^2 = \text{const}; \quad K(t_i, t_j) = K(\tau). \quad (1.10)$$

При решении ряда практических задач встречаются процессы, удовлетворяющие условиям постоянства математического ожидания и независимости корреляционной функции от начала отсчета времени, т.е.

$$m_x(t) = m_x = \text{const}; \quad K(t_i, t_j) = K(t_j - t_i) = K(\tau).$$

Такие процессы называются *стационарными в широком смысле*.

Следует помнить, что СП, стационарные в узком смысле, будут всегда стационарны в широком смысле. Обратное же утверждение не всегда справедливо.

Заметим также, что структура любых реальных СП неоднородна и наиболее адекватные аналоги для их описания могут быть найдены в классе нестационарных моделей. Отсюда не следует обязательность учета нестационарности при формировании модели процесса. Те же СП имеют протяженные участки, на которых нестационарностью процесса можно пренебречь и отнести их к стационарным.

Таким образом, один и тот же процесс в зависимости от интервала наблюдения может быть описан различными математическими моделями. Окончательный ответ на вопрос, какая модель в том или ином случае более подходит для решения стоящей задачи, может дать только экспериментальная проверка результатов ее использования.

По наличию или отсутствию связей между средними по времени и средними по множеству различают *эргодические* и *неэргодические* процессы.

Если средние характеристики, найденные по одной реализации СП (на интервале T):

$$m_x \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad \sigma_x^2 \approx \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m_x)^2 dt,$$

$$K(\tau) \approx \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} (x(t) - m_x)(x(t - \tau) - m_x) dt \quad (1.11)$$

совпадают с аналогичными характеристиками, найденными по множеству реализаций (см. ранее), такой процесс назван *эргодическим*.

На практике вопрос об эргодичности процесса решается путем анализа физической природы изучаемого явления. Если, например, удастся установить, что характеристики каждой реализации СП зависят от влияния какого-либо фактора, можно сразу сделать заключение о неэргодичности изучаемого СП. Примером служит рис.1.7, на котором отражены «колебательности» высоты полета самолета над уровнем моря в зависимости от средней высоты H_n . При малой H_n сильно сказывается турбулентные потоки воздуха, поднимающиеся от земли, и колебания ΔH могут быть значительными. С ростом H_n это влияние ослабевает и дисперсия процесса уменьшается.

По виду закона распределение различают нормальные, релевские, пуассоновские и другие процессы. Важную роль в силу своей специфики играют нормальные процессы, о которых речь шла выше.

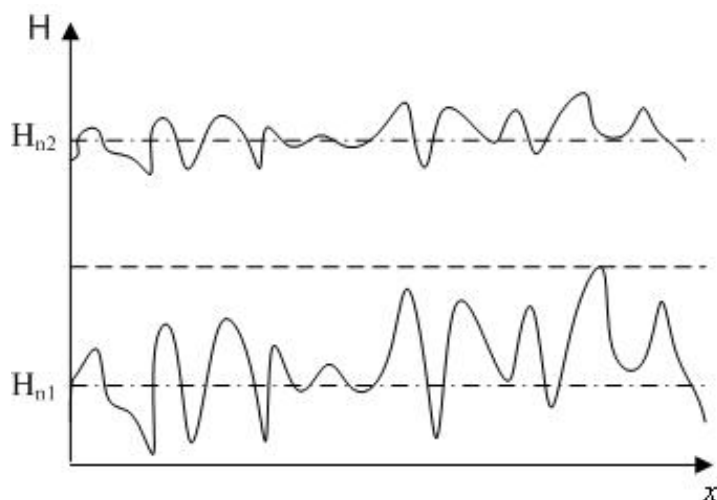


Рис. 1.7. Иллюстрация стационарного неэргодического процесса

По типу области существования различают процессы с непрерывным и дискретным временем. В первом случае аргумент t может принимать любые значения на числовой оси, во втором случае процесс задается только на дискретном множестве точек t_i . Процессы с дискретным временем называют импульсными случайными процессами, частным случаем которых являются временные ряды.

По наличию или отсутствию зависимости вероятности распределения значений процесса в будущем от предыстории различают марковские и немарковские процессы. Марковские процессы (см. выше) называют так же, как процессы *без последствия* (его вероятностные характеристики в будущем определяются его состоянием в настоящем и не зависят от прошлых состояний).

В теории связи в отдельный класс СП выделяют процессы вида

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)], \quad (1.12)$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ в отдельности или вместе являются случайными функциями времени. Случайную функцию $A(t)$ называют *огibaющей узкополосных флуктуаций*, а функцию $\varphi(t)$ - случайной фазой.

Следует отметить, что представление *квазигармонических флуктуаций* $x(t)$ в форме (1.12) не является однозначным, так как при заданных статистических характеристиках $x(t)$ имеется некоторая

степень произвола в определении статистических характеристик $A(t)$ и $\varphi(t)$.

Для выделения процессов вида (1.12) в отдельный класс будем называть их случайными процессами специального вида.

По виду функции корреляции стационарные процессы делятся на несколько классов. Два из них: экспоненциально-коррелированные и характеризующиеся экспоненциально-косинусной функцией наиболее часто встречаются в задачах обработки информации и управления.

В особый класс выделен СП типа «белый шум». Его функция корреляции равна дельта-функции, умноженной на некоторую постоянную величину

$$K(\tau) = 0,5S(\omega)\delta(\tau).$$

Дельта-функция $\delta(\tau)$ равна нулю на всей оси, за исключением точки $\tau = 0$, где $\delta(\tau) = \infty$, причем интеграл от дельта-функции по любому интервалу, содержащему точку $\tau = 0$, равен единице. Следовательно, любые два сколь угодно близкие сечения СП некоррелированы, а спектральная плотность $S(\omega)$ одинакова на всех частотах.

«Белый шум» рассматривается как идеализация, применимая в тех случаях, когда интервал корреляции СП много меньше постоянной времени системы, на которую воздействует шум.

Импульсные случайные процессы классифицируют как по признакам, присущим любым случайным процессам, так и по признакам, характерным только для этого класса процессов. Импульсные последовательности, например, различаются по случайному изменению амплитуды импульсов, их длительности, положению относительно опорных сигналов и проч.

Речевой сигнал есть пример нестационарного процесса по корреляционной функции. На фонограммах видно, как резко меняется спектр сигнала при переходе от произношения гласных к согласным звукам. Изменения температуры воздуха в течение длительного периода – пример нестационарного процесса по математическому ожиданию.

Перечисленные классы и подклассы СП встречаются в задачах, изучаемых в рамках направлений «Информатика, вычислительная техника» и «Информационная безопасность».

Задача

Случайный процесс $z(t)$ образован суммой независимых случайного процесса $x(t)$ и детерминированной функции $s(t)$, причем процесс $x(t)$ характеризуется следующими параметрами: $m_x(t) = a = \text{const}$, $\sigma_x(t) = \sigma_x = \text{const}$, а функция $s(t)$ имеет вид $s(t) = s_0 \cdot e^{-\alpha t}$. Требуется провести классификацию процессов $z(t)$ и $x(t)$.

Решение

Отсутствует информация о корреляционной функции процесса $x(t)$. Поэтому отнести этот процесс к стационарной или нестационарной функции не представляется возможным.

Математическое ожидание процесса $z(t)$

$$m_z(t) = a + s_0 e^{-\alpha t}$$

зависит от времени, процесс – нестационарный.

1.4. Особенности оценки характеристик случайных процессов

На практике приходится иметь дело с ограниченными по длительности процессами. Это обстоятельство диктует необходимость учета интервала задания функции при определении числовых характеристик СП и оценки возникающих погрешностей.

На современном этапе развития техники и технологий практически все стадии сбора, передачи, хранения, обработки и представления информации проводятся с использованием элементов цифровой вычислительной техники. Даже в том случае, когда выходной сигнал измерительного датчика имеет аналоговый вид (речевой сигнал на выходе микрофона), его преобразуют в дискретный для обработки или хранения. Отсюда следует необходимость учета погрешностей аналого-цифрового и цифроаналогового преобразований.

Краткие сведения по обозначенным вопросам изложены ниже.

Оценки параметров распределения СП должны отвечать следующим требованиям:

- оценка должна быть *состоятельной*, т.е. сходиться по вероятности к оцениваемой величине при неограниченном увеличении времени реализации процесса;
- оценка должна быть *несмещенной*, т.е. сходиться к ее математическому ожиданию;
- оценка должна быть *эффективной*, т.е. ее рассеивание относительной (оцениваемой) величины должно быть минимальным.

Для стационарного эргодического СП такой оценкой математического ожидания является получаемая из нижеприведенного выражения величина

$$m_x^* = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt,$$

где T – длина реализации, дисперсия которой

$$\sigma_{mT}^2 = \frac{2}{T^2} \int_0^T K(\tau)(T-\tau) d\tau \quad (1.13)$$

зависит от длины интервала задания реализации T и вида корреляционной функции $K(\tau)$.

При переходе к сигналу, заданному на интервале T в N последовательных точках, выражения для оценки математического ожидания и его дисперсии имеют вид:

$$m_x^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \sigma_{mN}^2 = \frac{1}{N^2} \left[K(0)N + 2 \sum_{l=1}^{N-1} (N-l) \cdot K(l\Delta t) \right], \quad l = i - j. \quad (1.14)$$

Учитывая, что $K(\tau) = \sigma_x^2 \cdot r(\tau)$, получим

$$\sigma_{mN}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N^2} \left[N + 2 \sum_{l=1}^{N-1} (N-l)(l\Delta t) \right].$$

Определим показатель эффективности оценки математического ожидания как $k_{\sigma} = \frac{\sigma_{mN}}{\sigma_x}$. Чем меньше k_{σ} , тем эффективнее оценка. Минимум k_{σ} определяется числом последовательных измерений реализации СП, заданной на интервале T , и видом корреляционной функции процесса. Для функции вида $r(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ минимум находится из соотношения

$$\sigma_{mont}^2 = \frac{1 - e^{-\alpha\Delta\tau}}{N - e^{-\alpha\Delta\tau}(N-2)}, \quad \Delta = \frac{T}{(N-1)}.$$

Принимая $\alpha = -0,1$ и $T = 50$ с, получим $\sigma_{mont}^2 = 0,286$. Используя соотношение (1.13), найдем, что $\sigma_{mT}^2 = 0,321$. В то же время формула (1.14) для разного числа регистрируемых точек на интервале T дает: по 6 точкам $\sigma_{mN}^2 = 0,310$; по 11 точкам $\sigma_{mN}^2 = 0,307$; по 21 точке $\sigma_{mN}^2 = 0,311$.

Среднеквадратичная оценка при разбиении интервала реализации на 10 участках в данном примере оказалась достаточно эффективной. Приведенный пример иллюстрирует важность вопроса выбора числа отсчетов для описания реализаций СП. К такому же выводу можно прийти при рассмотрении оценок дисперсии, корреляционной функции и спектральной плотности случайных стационарных процессов и последовательностей.

На практике, как правило, корреляционная функция неизвестна, и задача по выбору оптимального числа отсчетов СП на интервале его задания не имеет решения. С другой стороны, имеющиеся экспериментальные данные и физические законы формирования и течения различных динамических процессов позволяют достаточно точно судить о максимально возможных изменениях в исследуемом процессе в единицу времени. Другими словами, речь идет об оценке максимальной частоты в спектральной плотности СП, которая значимо влияет на его форму. В качестве примера на рис. 1.8 приведена спектральная плотность функции изменения скорости ветра, полученная экспериментальным путем. На графике четко выражены синоптический максимум, соответствующий колебаниям с

периодом около 4 суток (~100 часов), и микрометеорологический максимум колебаний с периодом ~1 минута.

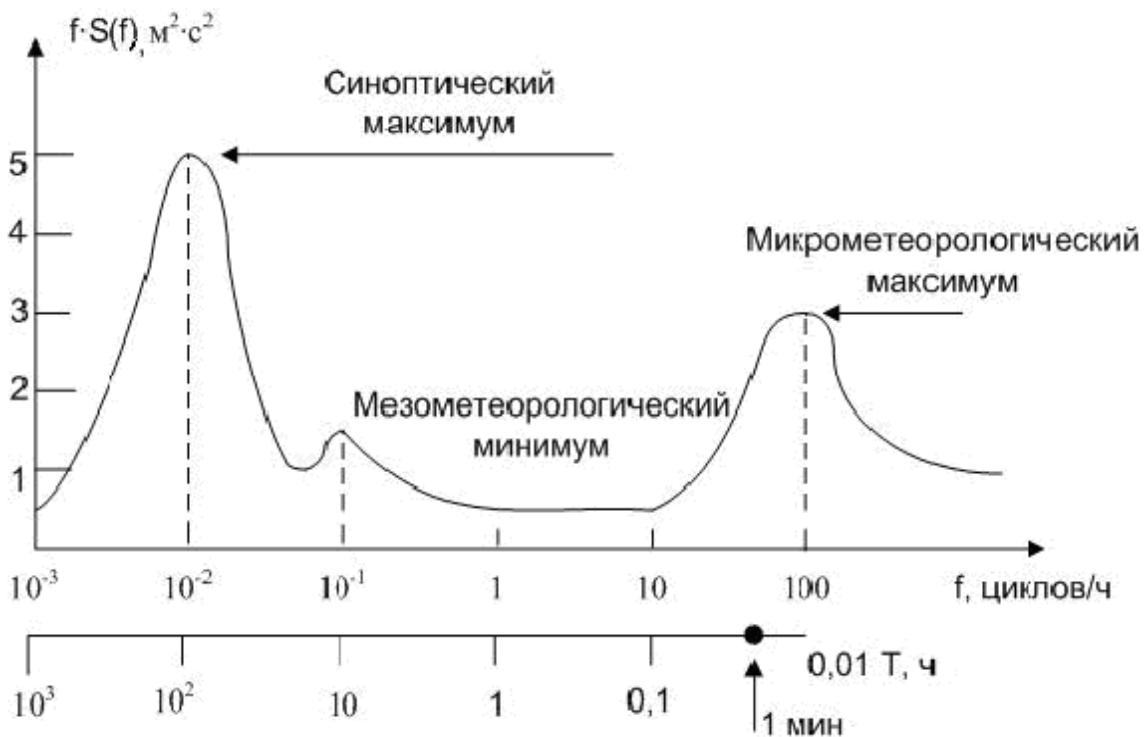


Рис. 1.8. Спектральная плотность изменений горизонтальной составляющей скорости ветра

График изображен в координатах $f \cdot S(f) = \varphi(f)$, $f = \omega/2\pi$ – частота, выражаемая в циклах в час или Гц. Такое представление позволило усилить высокочастотные составляющие процесса и увидеть наличие микрометеорологического максимума с частотой ~0,0016 Гц. Колебания с частотами более 0,3 Гц имеют ничтожную амплитуду, ими можно пренебречь, приняв за максимальную частоту процесса 0,3 Гц.

В ряде случаев информацию о максимальной частоте (частоте среза) удастся получить теоретически. К примеру, в гидромеханике выведено уравнение для максимально возможной частоты изменений метеорологических параметров атмосферы $f_{\max} \approx \frac{v}{\lambda}$, где $\lambda = \left(\frac{v^3}{\bar{\varepsilon}} \right)^{0,25}$ – колмогоровский масштаб турбулентности, выраженный через постоянные среднюю скорость диссипации кинетической энергии $\bar{\varepsilon}$ и вязкость воздуха ν . Принимая скорость ветра $v = 10$ м/с и $\bar{\varepsilon} = 1 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-3}$,

$\nu = 10^{-1} \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, получим $f_{\max} \approx 10^3 \text{ Гц}$. Эта оценка является предельно возможной на земном шаре и, как следует из приведенных выше экспериментальных данных для изучаемой местности, ее значение более чем в 1000 раз превышает используемое на практике значение f_{\max} .

Значение частоты среза f_{\max} позволяет для решения поставленной задачи воспользоваться теоремой В.А. Котельникова: функция, спектральная плотность которой отлична от нуля только в полосе $(-f_{\max}, f_{\max})$, полностью определяется своими значениями отсчетов, взятых в дискретных точках аргумента через интервалы $\Delta t = \frac{1}{2f_{\max}}$.

По этим отсчетам можно восстановить исходную функцию $x(t)$, используя выражение

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \cdot \frac{\sin \omega \cdot (t - k\Delta t)}{\omega(t - k\Delta t)}, \quad \omega = 2\pi f, \quad (1.15)$$

где $x(k\Delta t)$ – отсчеты непрерывной функции $x(t)$ в моменты времени $t_k = k\Delta t$, k – целое число. Каждый отсчет умножается на соответствующую функцию $\frac{\sin \omega \cdot (t - k\Delta t)}{\omega(t - k\Delta t)}$, сумма этих произведений есть описание исходной функции $x(t)$.

На рис. 1.9 показан процесс формирования функции $x(t)$ по отсчетам $x(k\Delta t)$.

Сигналы, с которыми приходится иметь дело на практике, ограничены по длительности. Такие функции формально можно описать усеченным рядом Котельникова:

$$x_y(t) = \sum_{k=1}^B x(k\Delta t) \cdot \frac{\sin \omega \cdot (t - k\Delta t)}{\omega(t - k\Delta t)}, \quad (1.16)$$

где $B = \frac{T}{\Delta t} + 1 = 2f_{\max} \cdot T + 1$; T – длительность реализации.

Налицо отступление от классической формулы (1.15), возникает погрешность представления исходной функции

$$\delta = \frac{\overline{[x(t) - x_y(t)]^2}}{\overline{x^2(t)}} = \frac{\int_0^{f_{\max}} S(f) df}{\int_0^{\infty} S(f) df}. \quad (1.17)$$

Здесь черточка над x означает усреднение.

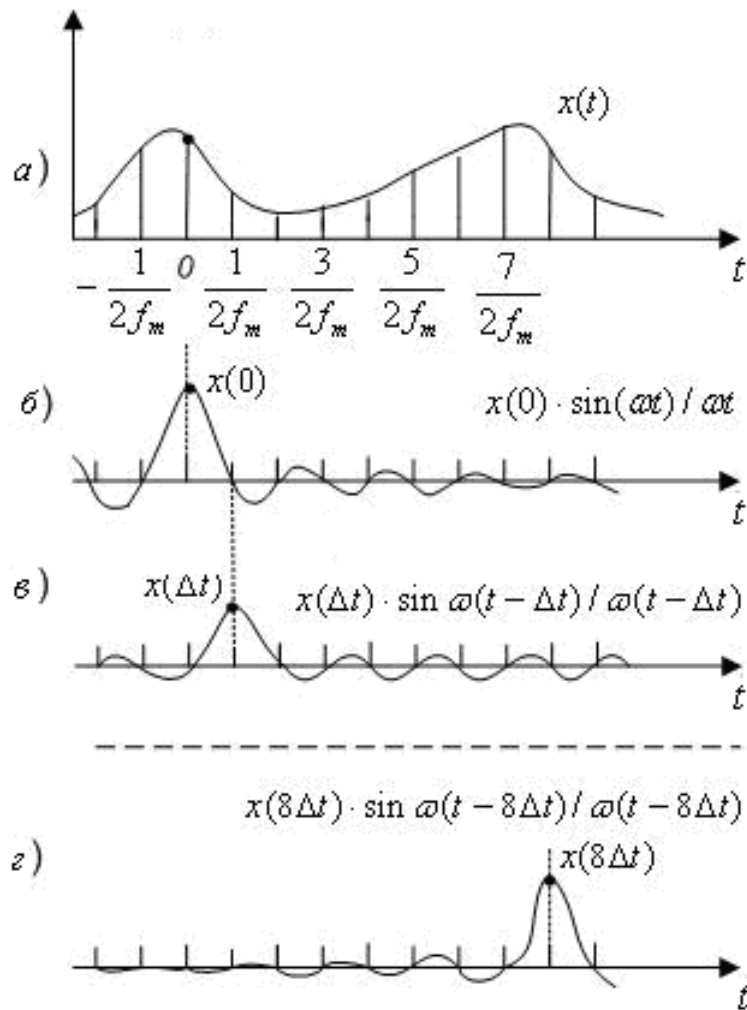


Рис. 1.9. Иллюстрация представления произвольной функции $x(t)$ рядом Котельникова:

a – взятие отсчетов $x(t_k)$ через интервал Δt в точках $(t - k\Delta t)$;

$б-г$ – формирование аппроксимирующих функций соответственно в точках $t = 0, \quad t = \Delta t, \quad t = 8\Delta t$

Таким образом, для финитных (ограниченных во времени) функций использование усеченного ряда Котельникова предполагает:

- задание допустимой относительной погрешности δ_y и вычисление по (1.17) значения f_{\max} ;
- по формуле $\Delta t = 1/2f_{\max}$ определение искомого интервала взятия отсчетов.

Вернулись к той же проблеме: заранее надо знать спектральную плотность или корреляционную функцию исследуемого процесса. Однако, если частота f_{\max} ориентировочно известна, интеграл

$\int_{f_{\max}}^{\infty} S(f) df \rightarrow 0$, тогда погрешностью δ_y можно пренебречь. Этот подход и получил распространение на практике.

Можно привести много примеров, когда ширина спектра, регистрируемого с целью обработки процесса, изменяется во времени. До

99 % мощности ураганного ветра переносится на частотах, расположенных до микрометеорологического максимума. При штиле для переноса такой же мощности необходимо расширить спектр частот на порядок. Поэтому естественным представляется метод дискретизации функции с переменной частотой взятия отсчетов, определяемый динамическими свойствами СП на текущем отрезке времени. Такой метод получил название *метод адаптивной дискретизации*.

Наибольшее распространение на практике получила следующая процедура. В точке t_i берется отсчет функции $x(t_i)$ (рис. 1.10), и начинается вычисление разности зарегистрированного значения отсчета и текущей функции: $\Delta x = x(t) - x(t_i)$. При превышении разностью установленного порога ε_0 , т.е. $\Delta x > \varepsilon_0$, берется новый отсчет. Полученная функция имеет вид ступенчатой кривой (рис. 1.10, а).

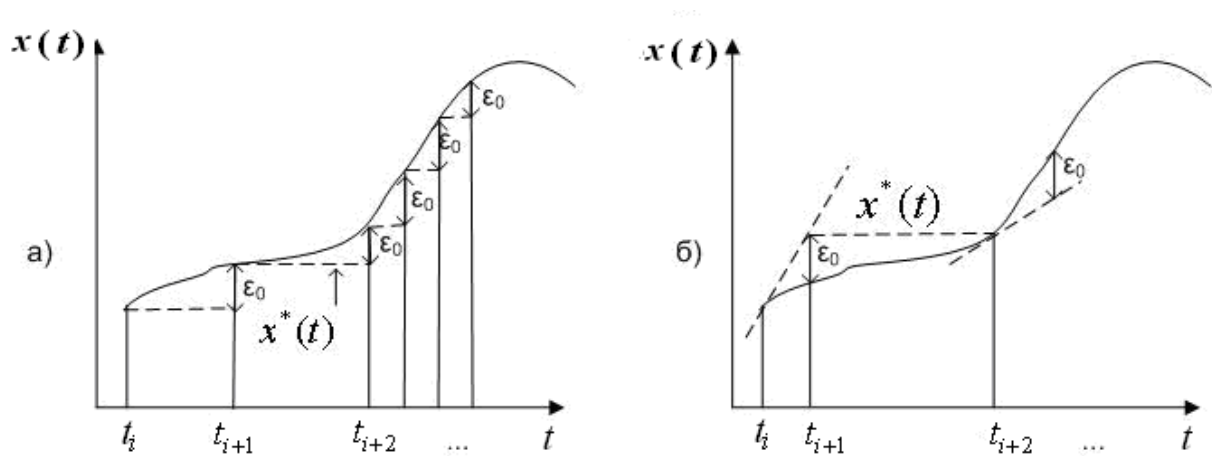


Рис. 1.10. Пояснение идеи адаптивной дискретизации:
а – без использования производной; б – с использованием производной

В другом варианте (рис. 1.10, б) после взятия очередного отсчета $x(t_i)$ формируется сигнал, $x^*(t) = x(t_i) + x'(t_i) \cdot t$, где $x'(t_i)$ – производная функции $x(t)$ в момент времени t_i . Очередной отсчет производится в точке, определяемой выполнением равенства

$$\Delta x(t) = x(t) - x(t_i) - x'(t_i) \cdot t = \epsilon_0.$$

Очевидно, при таком подходе к процессу дискретизации СП исследователь в меньшей степени зависит от априорных данных. Необходимость хранения времени взятия отсчетов, т.е. t_i , – недостаток адаптивного метода.

Задачи

1. Источник информации генерирует колокольные импульсы вида $e^{-\beta^2 t^2}$, которые через фильтр с частотой среза f_{\max} подлежат записи в память ПЭВМ. Определить интервал дискретизации сигнала Δt , если допустимая относительная погрешность последующего его восстановления не должна превышать 10%, а $\beta = 20 \text{ с}^{-1}$.

Решение

В соответствии с (1.4) спектральная плотность колокольного импульса

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2 t^2} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \cdot \exp(-0,5\omega^2 / \beta^2).$$

Принимая во внимание известное соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2}} \int_0^{\infty} \exp(-0,5\omega^2 / \beta^2) df, \quad \omega = 2\pi f$$

и умножая числитель и знаменатель в выражении (1.17) на $1/\sqrt{2\pi\beta^2}$, получим

$$\sigma = \left[\left(\int_{f_{\max}}^{\infty} S(f) df \right) / \left(\int_0^{\infty} S(f) df \right) \right] = 2\pi [1 - \Phi(2\pi f_{\max} / \beta)],$$

где $\Phi(z)$ – функция Крампа.

Учитывая, что $\delta = 0,1$, известным способом определяем аргумент функции Крампа: $(2\pi f_{\max} / \beta) = 2,4$. При $\beta = 20$ и $f_{\max} = 24 / \pi$ получим $\Delta t = (1/2 f_{\max}) = 6,56 \cdot 10^{-2}$ с.

2. Найти относительную погрешность представления случайного синхронного двоичного сигнала рядом Котельникова при произвольной граничной частоте. Определить погрешность представления δ , если граничная частота выбирается равной f_{\ominus} .

Решение

Известно, что спектр случайного синхронного телеграфного сигнала описывается формулой

$$S(f) = h^2 t \frac{\sin^2 \pi f T}{(\pi f T)^2},$$

где T – длительность посылки; h – ее амплитуда.

Подставляя это выражение в формулу (1.17), получим

$$\delta = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin^2 \pi f T}{\pi f T} + 0,5\pi - \sin(2\pi f T) \right],$$

где $\sin x = \int_0^{\infty} (\sin y / y) dy$ – интегральный синус.

При $f = f_3$, учитывая, что $f_3 \cdot T = 0,5$, будем иметь $\delta = 2[(2/\pi) + 0,5\pi - \sin \pi] / \pi = 0,23$. Если $f = f_3$, то $\delta = 2(0,5\pi - \sin 2\pi) / \pi = 0,096$.

Случайный процесс с корреляционной функцией $K(\tau) = K(0)\exp(-\alpha|\tau|)$ дискретизирован с шагом Δt . Найти погрешность представления такого процесса рядом Котельникова в зависимости от параметров α и Δt .

Решение

Энергетический спектр случайного процесса

$$S(f) = 2\alpha K(0) / (\alpha^2 + \omega^2), \quad \omega = 2\pi f.$$

При ограничении полосы такого спектра частотой f_{\max} погрешность $\delta = 1 - (2/\pi) \arctg(2\pi f_{\max} / \alpha)$.

Принимая $f_{\max} = 0,5\Delta t$, найдем $\delta = 1 - (2/\pi) \arctg(\pi / \alpha \Delta t)$.

1.5. Модели нестационарных случайных процессов

Приступая к обработке результатов наблюдений (измерений), исследователь должен принять решение о модели изучаемого процесса и прежде всего о его стационарности или нестационарности. Классический подход при решении этого вопроса строится по следующей схеме.

При наличии m реализаций $(1, 2, \dots, k, \dots, m)$ и разбиении интервала задания СП на n отрезков $(i=1, 2, \dots, n)$ можно рассчитать оценки математического ожидания $m_x^*(t_i)$, дисперсии $D^* = \sigma_x^2(t_i)^*$ корреляционной функции $K_x^*(t_i, t_j)$. Обозначим любую из рассчитанных оценок индексом $\Theta^*(t_i)$ и построим для каждого сечения t_i доверительные интервалы:

$$I_{\beta m} = m_x^*(t_i) \pm t_\beta \cdot \sigma_{m^*}, \quad I_{\beta D} = D^*(t_i) \pm t_\beta \cdot \sigma_D. \quad (1.18)$$

Что касается доверительного интервала для корреляционной функции, приводить его не будем из-за громоздкости выражения для дисперсии σ_k^2 .

В выражении (1.18) индекс t_β вычисляется через β – доверительную вероятность того, что найденная оценка попадет в доверительный интервал $t_\beta = \text{arc}\Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$, где $\text{arc}\Phi^*(x)$ – функция, обратная интегралу вероятностей

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Входящие в формулы доверительных интервалов среднеквадратические отклонения σ_{m^*} и σ_{D^*} определяются для нормального распределения величин по формулам:

$$\sigma_{m^*} = \sqrt{D^*/m}; \quad \sigma_{D^*} = \sqrt{2D^*/m-1}.$$

О характере связи $t_\beta = f(\beta)$ можно судить по данным табл. 1.2.

Таблица 1.2

Значения используемых на практике доверительных вероятностей и связанных с ними индексов t_β

β	t_β	β	t_β	β	t_β
0,80	1,282	0,87	1,513	0,94	1,880
0,81	1,310	0,88	1,554	0,95	1,960
0,82	1,340	0,89	1,597	0,96	

					2,053
0,83	1,371	0,90	1,643	0,97	2,169
0,84	1,404	0,91	1,694	0,98	2,325
0,85	1,439	0,92	1,750	0,99	2,576
0,86	1,475	0,93	1,810	0,999	3,290

На следующем этапе проводится сопоставление границ доверительных интервалов. Если, как это показано на рис. 1.11, нижняя граница какого-либо интервала оказывается выше верхней границы одного из остальных интервалов, принимается гипотеза о нестационарности исследуемого процесса на интервале T .

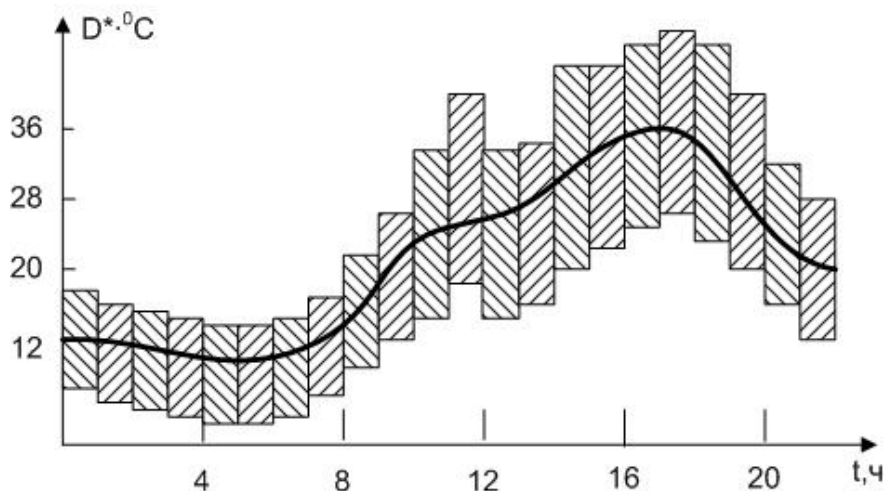


Рис.1.11. Диаграмма 95%-ных доверительных интервалов для дисперсии температуры воздуха (С-Петербург, 1 мая)

Обращаясь к рис. 1.11, можно сделать заключение, что в интервале 0-8 часов процесс является стационарным по дисперсии. Если такие заключения будут сделаны и по математическому ожиданию и корреляционной функции, СП признается стационарным на исследуемом отрезке времени.

Изложенный подход позволяет перейти от нестационарных процессов к кусочно-стационарным (состоящим из последовательных отрезков стационарных СП). Членение (исследование на нестационарность) СП осуществляют с помощью технологии отыскания «разладки процессов».

Пусть дана одномерная последовательность независимых случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_{t_0}, \dots, x_{t_0+N}$. До момента $t_0 - 1$ они имеют распределение вероятностей $\omega_1(x_{t < t_0})$, а с момента t_0 – $\omega_2(x_{t \geq t_0})$. Для нахождения точки t_0 предложен алгоритм кумулятивных сумм (АКС) – последовательный критерий отношения вероятностей для двух гипотез H_1 (нет разладки): $\theta = \theta_1$ и H_2 (есть разладка): $\theta = \theta_2$, где θ – скалярный параметр плотности распределения вероятностей $\omega(x_i / \theta)$. В качестве θ могут выступать любые моменты распределения, и если последовательность x_i гауссова, то функция разладки принимает простой вид:

$$g_t = S_t - \min_{k \leq t} S_k, \quad S_k = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^k x_i - k \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \right].$$

Кумулятивная сумма $S_t(S_k)$ в среднем дрейфует вниз (рис. 1.12), а после разладки вверх (изменяется знак суммы математических ожиданий $(\theta_2 + \theta_1)$). На каждом шаге (поступлении очередного отсчета) формируется функция g_t , и если она превышает порог h , подается сигнал разладки.

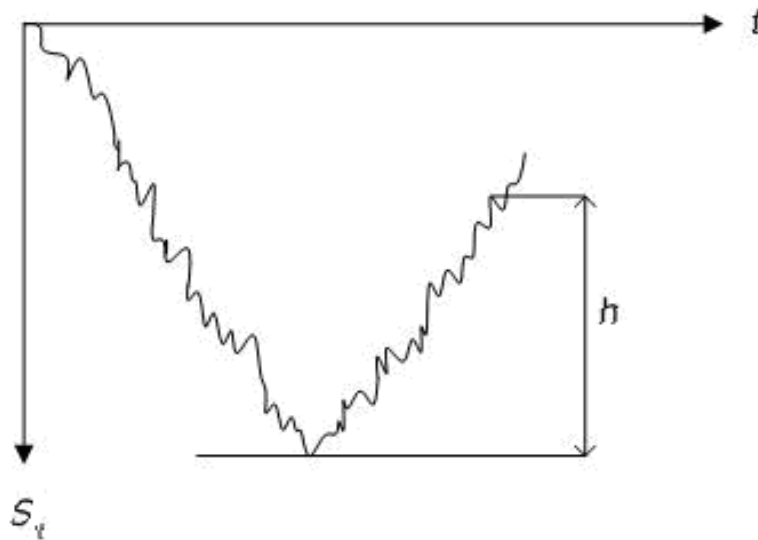


Рис. 1.12. Типичное поведение кумулятивной суммы S_t

На практике чаще встречается упрощенный вариант алгоритма рассмотренного вида. Из последовательности x_t берется выборка x_{t+N-1} чисел. По выборке вычисляется кумулятивная сумма

$$S_t = S_{t-1} + \ln(\omega(x_t / \theta_2) / \omega(x_t / \theta_1)),$$

которая сравнивается с порогом h . При $S \geq h$ выдается сигнал о разладке, при $S_t < h$ процесс наблюдения продолжается и обрабатывается выборка с вновь поступившим отсчетом. Если случайная последовательность гауссова, кумулятивная сумма вычисляется по формуле

$$S_{kN} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\sigma^2} \left[\sum_{i=t}^{t+N-1} x_i - N \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \right],$$

где N – длина выборки.

В соответствии с постановкой задачи процедура последовательных обнаружений разладки характеризуется средним

запаздыванием обнаружения момента разладки $\bar{\tau}$ и средним временем до очередной ложной тревоги \bar{T} . Если после ложной тревоги режим слежения продолжается, \bar{T} будет означать среднее время между ложными решениями.

Для рассмотренного упрощенного алгоритма обнаружения разладки получены оценки:

$$\bar{\tau} \approx \frac{N}{\Phi(k + k_1\sqrt{N}) + \Phi(k - k_1\sqrt{N})}, \quad \bar{T} \approx \frac{N}{2\Phi(k)}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

где k – расчетное значение порога; k_1 – фактическое значение отклонения среднего в долях среднеквадратичного отклонения σ .

Изменения характеристик нарушают стационарность исследуемого процесса, и используемые для выявления этого нарушения методы служат основой для принятия решения «стационарный – нестационарный процесс». Обобщенная классификация существующих методов обнаружения разладки приведена на рис. 1.13, классификация последовательных параметрических методов – на рис. 1.14.

Из 16 видов последовательных параметрических методов, приведенных на рис. 1.14, сравнительно хорошо исследованы 1 и 9 из них, а 8, 5, 7, 13, 15 мало изучены. При необходимости более подробного ознакомления с алгоритмами обнаружения разладок в случайных последовательностях можно обратиться к монографической литературе [1].

Сделав заключение, что исследуемый процесс нестационарный, его моделью может служить выражение

$$x(t) = t_r(t) + c(t) + b(t) + \xi(t) = d(t) + \xi(t) \quad (1.19)$$

или

$$x(t) = d(t) \cdot \xi(t). \quad (1.20)$$

В приведенных выражениях $t_r(t)$ – тренд – плавно изменяющаяся компонента, характеризующая тенденции изменения изучаемого явления под действием долговременных факторов. Такими факторами могут быть изменение демографических характеристик популяции (рождаемость, смертность, изменение возрастной структуры), истощение природных ресурсов, старение созданной инфраструктуры и т.д. Функция $c(t)$ отражает «сезонную» компоненту – краткосрочные колебания в течение интересующего периода (года, месяца, недели, дня и т.д.). Типичны примеры этой составляющей – объем перевозок пассажиров городским транспортом в течение суток. Утром и вечером наблюдается рост объемов, ночью этот показатель близок к нулю. На графике месячных продаж шампанского видны пики в декабре и спад в жаркие летние месяцы.

Функцию $b(t)$ называют «циклической» компонентой. По формальным признакам она описывает компоненту с длительным периодом подъема-спада. Ее можно обнаружить на реализации большой протяженности.

Появление закона о налоговых льготах, банкротство крупного банка, пожар и т.д. («стрессовая» компонента) резко меняет характеристики наблюдаемого процесса, ее обнаружение может быть реализовано в рамках теории разладки СП, а описание – в рамках построения модели тренда.

Последняя функция $\xi(t)$ – хаотичные и непредсказуемые изменения – есть случайная компонента суммы (1.19).

Выражение (1.19) описывает аддитивную модель, выражение (1.20) – мультипликативную модель временного ряда.

Анализ СП вида (1.19), (1.20) включает несколько этапов:

- графическое представление, на основании которого делается заключение о стационарности или нестационарности ряда. В последнем случае выдвигается гипотеза о возможности описания тренда;

- выделение и математическое описание составляющих временного ряда;

- формирование «гуманитарной» модели выделенных компонент, объясняющей причинно-следственные связи явлений, которые породили наблюдаемый характер изменения составляющих ряда;

- прогнозирование будущего развития процесса и формирование перечня воздействий, позволяющих корректировать это развитие.

Для стационарных процессов $d(t) = 0$, $x(t) = \xi(t)$.

Рассмотрим перечисленные этапы подробнее.

На рис. 1.15 приведен график, отражающий данные о расстояниях, преодоленных самолетами Великобритании за шесть последовательных лет [2]. Нетрудно увидеть наличие линейного тренда с тенденцией возрастания значений по времени и наличие сезонных колебаний с периодом ориентировочно 12 мес.

Сумма этих составляющих искажается случайным образом, отражая случайную компоненту наблюдаемого сигнала на рис. 1.15, а.

Выделение и вычитание тренда приводит к сигналу вида, изображенного на рис. 1.15, б. Спектральный анализ этого сигнала позволил выделить сезонную компоненту с периодом ~ 1 год и другую компоненту с периодом 3 месяца.

Пример резкого изменения тенденции изучаемого процесса приведен на рис. 1.16.

На рис. 1.16 даны разъяснения причин появления выброса. Разъяснение является важной задачей информационно-аналитической деятельности, ориентированной на получение знаний, вытекающих из анализируемого процесса.

В заключении коротко остановимся на методах выделения и описания тренда и сезонной компоненты.

Первое представление о характере тренда дает графическое представление случайной последовательности. Если имеется

множество реализаций, трендом служит изменение математического ожидания $m_x(t)$ или его оценки $m_x^*(t)$.

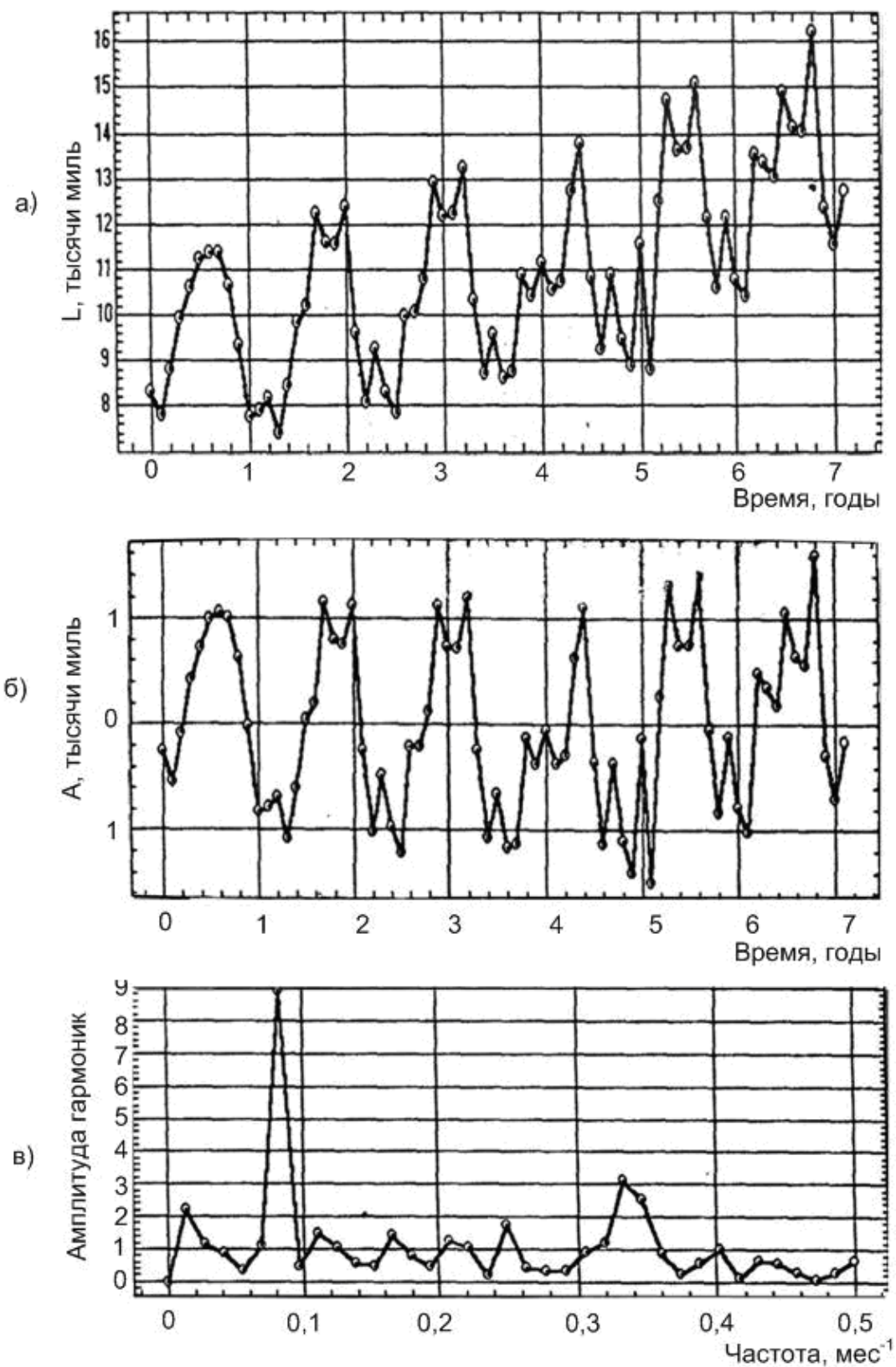


Рис. 1.15. Иллюстрация результатов преобразования СП $L(t)$:

а – исходный процесс; б – после удаления тренда; в – вид амплитудно-частотной характеристики сигнала на рис.1.15, б



Рис. 1.16. Иллюстрация изменения тенденции процесса при случайном воздействии фактора на механизм его формирования

При наличии одной реализации характер тренда выявляется с помощью регрессионного анализа. Чаще всего встречаются следующие модели:

- полиномиальная $t_r(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_nt^n$;
- логарифмическая $t_r(t) = e^{(b_0+b_1t)}$;
- s -образные формы $\log_{t_r}(T) = a - br^t, 0 < r < 1$; $t_r(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-ct}}$;
- полигармоническая модель $t_r(t) = \sum_{j,k} a_{jk} \cos(j\omega_k t + \varphi_{jk})$.

В приведенных выражениях a, b, c – коэффициенты, подлежащие определению с помощью регрессионного анализа; a_{jk} – амплитуды, φ_{jk} – фазы; ω_k – круговая частота.

Подобрав описание тренда с помощью одной из приведенных моделей, его вычитают из исходного процесса:

$$x_i - t_{ri}, x_{i+p} - t_{ri+p}, \dots, x_{i+mp} - t_{ri+mp}. \quad (1.21)$$

Для выделения сезонной составляющей из процесса (1.21) используются несколько методов, в том числе метод наименьших квадратов, опирающийся на полигармоническую модель.

Оставшаяся случайная компонента описывается через плотность распределения вероятностей или моментные функции.

Контрольные вопросы

1. На основании какой информации принимается решение о стационарности или нестационарности исследуемого процесса?
2. На какой идее реализуется алгоритм кумулятивных сумм?
3. Назовите количество последовательных параметрических методов, используемых для обнаружения разладки случайного процесса.
4. Какими составляющими представляется модель нестационарного СП?
5. Перечислите этапы анализа СП.
6. Какие модели для описания трендов СП чаще всего используются на практике?

1.6. Преобразование случайных процессов

Информационные потоки, циркулирующие в системах обработки информации и управления, подвергаются различным преобразованиям: дифференцированию, интегрированию, умножению и т.д. Искажения (шумы) сопутствуют полезной информации и также подвергаются тем или иным трансформациям. Знание изменений параметров СП при применении к ним тех или иных преобразований – необходимое условие качественного проектирования таких систем.

Использование аппарата СП в практике проектирования информационных систем в большинстве случаев сводится к следующей схеме. На вход функционального преобразователя воздействует случайная функция $X(t)$. На его выходе имеем $Y(t) = A X(t)$, где A – оператор преобразования.

Требуется оценить, насколько искажутся информационные потоки в системе при наличии неучтенных случайных возмущений на её

входе (в том числе при специально генерируемых шумах в разных её звеньях с целью блокирования работы системы в целом).

В рамках этой работы при изучении сформулированной задачи ограничимся рассмотрением простых примеров, освоение которых позволит перейти к освоению более общих (и, естественно, более сложных) задач.

Операция суммирования. При сложении детерминированной функции $\varphi(t)$ со случайным процессом $X(t)$ требуется оценить математическое ожидание $m_y(t)$ и корреляционную функцию $K_y(t_i, t_j)$ выходного процесса $Y(t) = \varphi(t) + X(t)$.

Если известны математическое ожидание $m_x(t)$ и корреляционная функция входного процесса $X(t)$, решение поставленной задачи не имеет особенностей. По теореме сложения математических ожиданий $m_y(t) = m_x(t) + \varphi(t)$, а корреляционная функция находится по общему правилу

$$K_y(t_i, t_j) = M \{ (Y(t_i) - m_y(t_i)) \cdot (Y(t_j) - m_y(t_j)) \} = K_x(t_i, t_j).$$

При добавлении неслучайного слагаемого корреляционная функция полученной суммы не меняется.

Усложним задачу, просуммировав два случайных процесса $X(t) + Y(t) = Z(t)$. Тогда

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t); \quad K_z(t_i, t_j) = M \left[\overset{0}{Z}(t_i) \cdot \overset{0}{Z}(t_j) \right],$$

где $\overset{0}{Z}(t_i)$ и $\overset{0}{Z}(t_j)$ – центрированные значения процесса $Z(t)$ в точках t_i, t_j . С учетом соотношения $\overset{0}{Z}(t) = \overset{0}{X}(t) + \overset{0}{Y}(t)$ несложно получить выражение для искомой функции

$$\begin{aligned} K_z(t_i, t_j) &= M \left[\left(\overset{0}{X}(t_i) + \overset{0}{Y}(t_i) \right) \left(\overset{0}{X}(t_j) + \overset{0}{Y}(t_j) \right) \right] = \\ &= K_x(t_i, t_j) + K_y(t_i, t_j) + K_{xy}(t_i, t_j) + K_{yx}(t_i, t_j). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Обобщая (1.22) на случай произвольного числа слагаемых

$$Z(t) = \sum_{i=1}^n X_k(t),$$

получим

$$m_z(t) = \sum_{k=1}^n m_{x_k}(t); \quad K_z(t_i, t_j) = \sum_{k=1}^n K_{x_k}(t_i, t_j) + \sum_{k \neq l}^n K_{x_k x_l}(t_i, t_j).$$

Последними формулами задача нахождения характеристик суммы СП исчерпывается.

Операция дифференцирования. Случайная функция $X(t)$ с характеристиками $m_x(t), K_x(t_i, t_j)$ связана со случайной функцией $Y(t)$ линейным однородным оператором дифференцирования: $Y(t) = dX(t)/dt$. Требуется определить характеристики $m_y(t)$ и $K_y(t_i, t_j)$.

Математическое ожидание $m_x(t)$ – неслучайная функция. Ее дифференцирование

$$m_y(t) = dm_x(t)/dt$$

есть решение первой части поставленной задачи.

Что касается корреляционной функции, она находится обычным способом через центрированные функции $\overset{0}{Y}(t_i), \overset{0}{Y}(t_j)$:

$$\begin{aligned} K_y(t_i, t_j) &= M \left[\overset{0}{Y}(t_i) \cdot \overset{0}{Y}(t_j) \right] = M \left[\frac{d \overset{0}{X}(t_i)}{dt_i} \cdot \frac{d \overset{0}{X}(t_j)}{dt_j} \right] = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t_i \cdot \partial t_j} M \left[\overset{0}{X}(t_i) \cdot \overset{0}{X}(t_j) \right] = \frac{\partial^2 K_x(t_i, t_j)}{\partial t_i \cdot \partial t_j}. \end{aligned}$$

Для стационарного процесса $m_x(t) = m_x$. Тогда $m_y = 0$, $K_x(t_i, t_j) = K_x(\tau)$, $\tau = t_j - t_i$, $dt_j = d\tau$; $dt_i = -d\tau$ и

$$K_y(\tau) = -d^2 K_x(\tau) / d\tau^2 \quad . \quad (1.23)$$

Переходя к нормированной корреляционной функции, получим

$$r_y(\tau) = K_x''(\tau) / K_x''(0) .$$

По общим правилам найдем выражение для функции взаимной корреляции процессов $X(t)$ и $Y(t)$:

$$K_{xy}(\tau) = M \left[\overset{0}{X(t_i)} \cdot \overset{0}{Y(t_j)} \right] = dK_x(\tau) / d\tau ; ,$$

$$r_{xy}(\tau) = K_x''(\tau) / \sigma_x \cdot \sqrt{-K''(0)} .$$

Операция интегрирования. Дана случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(t_i, t_j)$. Другая случайная функция $Y(t)$ связана с заданной линейным однородным оператором интегрирования:

$$Y(t) = \int_0^t X(t) dt \quad . \quad (1.24)$$

Требуется определить характеристики случайного процесса:

$$Y(t): m_y(t) \quad \text{и} \quad K_y(t_i, t_j) .$$

Исходя из формального определения математического ожидания, запишем

$$m_y(t) = M \left[\int_0^t X(t) dt \right] = \int_0^t M[X(t)] dt = \int_0^t m_x(t) dt \quad .$$

Для нахождения $m_y(t)$ необходимо проинтегрировать математические ожидания исходного процесса. Представим (1.24) в виде

$$Y(t) = \int_0^t \left[X(t) + m_x(t) \right] dt = \int_0^t X(t) dt + m_y(t) = \overset{0}{Y}(t) + m_y(t); \quad \overset{0}{Y}(t) = \int_0^t X(t) dt .$$

Тогда

$$K_y(t_i, t_j) = M \left[\overset{0}{Y}(t_i) \cdot \overset{0}{Y}(t_j) \right] = M \left[\int_0^{t_i} \int_0^{t_j} X(t_i) \cdot X(t_j) dt_i dt_j \right] = \int_0^{t_i} \int_0^{t_j} K_x(t_i, t_j) dt_i dt_j .$$

Таким образом, чтобы найти корреляционную функцию интеграла от СП, нужно дважды проинтегрировать корреляционную функцию исходного СП: сначала по одному аргументу, затем – по другому.

Нелинейные образования СП. Ограничимся рассмотрением безинерционных нелинейных функциональных преобразователей. Их особенность: значение выходной функции $Y(t)$ в любой момент времени определяется только значением входной функции $X(t)$ в тот же момент времени. Сформируем задачу исследований. По известной функциональной связи $y=f(x)$ и плотности распределения вероятностей СП $X(t)$, т.е. $\omega(X)$, определить плотность распределения вероятностей выходного процесса $\omega(Y)$.

Для стационарных процессов решение поставленной задачи элементарно. На рис. 1.17 изображены процесс $X(t)$ с плотностью распределения вероятностей $\omega(x)$ и передаточная характеристика обозначенного преобразования $y=f(x)$. Вероятность пребывания СП $x(t)$ в диапазоне $x_0 \div x_0 + dx$ равна вероятности пребывания функции $y(t)$ в диапазоне $y_0 \div y_0 + dy$

$$\int_{x_0}^{x_0+dx} \omega(x) dx = \int_{y_0}^{y_0+dy} \omega(y) dy ,$$

или при $dx \rightarrow 0$, $\omega(x) dx \approx \omega(y) dy$. Отсюда следует

$$\omega(y) \approx \omega(x) \cdot \frac{dx}{dy}.$$

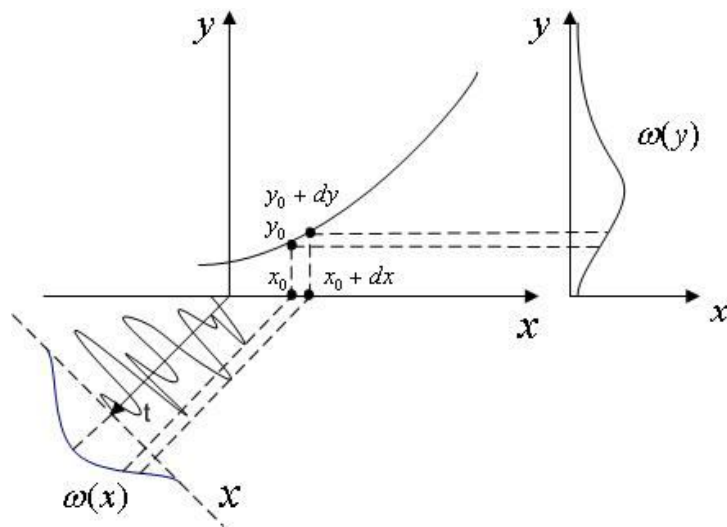


Рис. 1.17. Иллюстрация взаимнооднозначного нелинейного преобразования стационарного случайного процесса

Плотности вероятностей не могут быть отрицательными. С учетом этого обстоятельства

$$\omega(y) \approx \omega(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|. \quad (1.25)$$

Если преобразование неоднозначно (рис.1.18), то каждому значению выходной величины y соответствуют два значения входной функции x . Неравенство

$$y_0 < y < y_0 + dy$$

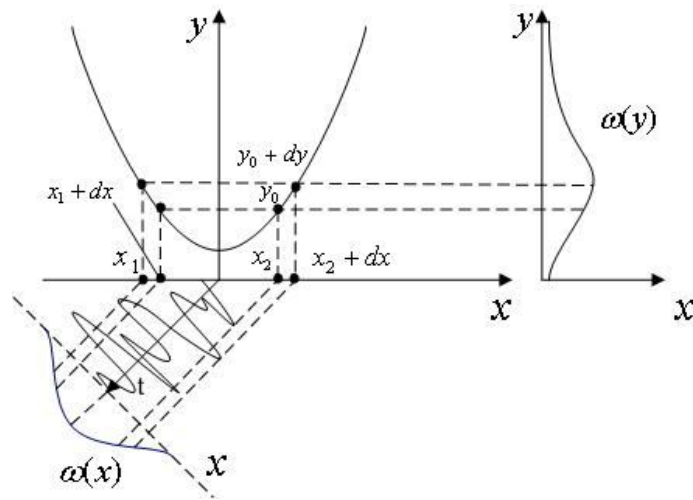


Рис. 1.18. Иллюстрация двухзначного преобразования СП

соответствует двум несовместимым событиям:

$$x \in x_1; x_1 + dx, x \in x_2; x_2 + dx.$$

По теореме сложения вероятностей

$$\text{Вер}(y \in y_0; y_0 + dy) = \text{Вер}(x \in x_1; x_1 + dx) + \text{Вер}(x \in x_2; x_2 + dx).$$

Тогда

$$\omega_y \approx \omega(x_1) \cdot \left| \frac{dx_1}{dy} \right| + \omega(x_2) \cdot \left| \frac{dx_2}{dy} \right|. \quad (1.26)$$

Выражения (1.25), (1.26) есть решение поставленной задачи.

При замене безинерционных нелинейных преобразователей инерционными задача по определению статистических характеристик выходных процессов существенно усложняется. В упрощенном варианте решение задачи сводится к решению стохастического уравнения вида

$$dy/dt = f(y) + g(y, t, x(t)),$$

где f и g – известные детермированные функции, определяющие параметры системы.

На этом завершим изложение вопроса преобразования СП нелинейными системами.

Задачи

1. Рассмотрим конкретный пример. Задан случайный процесс, имеющий корреляционную функцию

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha \tau^2}.$$

Требуется определить нормированные функции $r_y(\tau)$ и $r_{xy}(\tau)$ процесса на выходе дифференцируемого звена.

Решение

Для решения поставленной задачи необходимо найти выражения для производных:

$$K_x'(\tau) = \sigma_x^2 (-2\alpha\tau) e^{-\alpha\tau^2};$$

$$K_x''(\tau) = \sigma_x^2 (-2\alpha e^{-\alpha\tau^2} + 4\alpha^2 \tau^2 e^{-\alpha\tau^2});$$

$$K_x''(0) = -2\alpha\sigma_x^2.$$

Тогда

$$r_y(\tau) = K_x''(\tau) / K_x''(0) = (1 - 2\alpha\tau^2) \exp(-\alpha\tau^2),$$

$$r_{xy}(\tau) = -\tau \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha\tau^2}.$$

На рис. 1.19 изображено поведение найденных функций $r_y(\tau)$ и $r_{xy}(\tau)$ от τ . На рис. 1.19 также нанесена кривая $r_x(\tau) = \exp(-\alpha\tau^2)$.

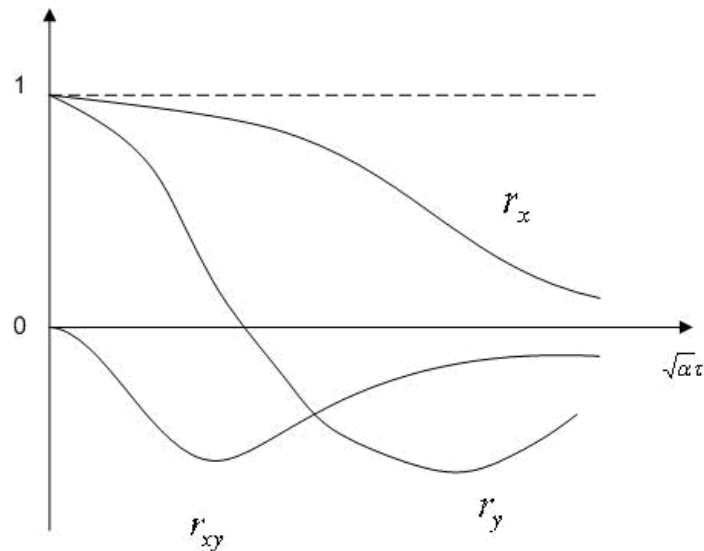


Рис. 1.19. Поведение нормированных функций корреляции $r_x(\tau)$, $r_y(\tau)$ и взаимокорреляционной функции $r_{xy}(\tau)$

Обратим внимание на равенство нулю функции $r_{xy}(\tau)$ при $\tau = 0$. Из этого факта следует вывод, что стационарная функция и ее производная в совпадающие моменты времени ($\tau = 0$) некоррелированы. Этот вывод позволяет найти совместную плотность вероятностей $\omega(X, Y)$: $\omega(X, Y) = \omega(X) \cdot \omega(Y)$. Несложно убедиться в справедливости более общего вывода: производная i -го порядка от стационарного случайного процесса, дифференцируемого несколько раз, некоррелирована с $(i+1)$ -й и $(i-1)$ -й производными, взятыми в один и тот же момент времени.

Поскольку $K_y(\tau)$ в формуле (1.23) не зависит от начала отсчета времени и это свойство распространяется и на $r_y(\tau)$, то следует сделать вывод, что в результате дифференцирования стационарного СП получаем стационарный (в широком смысле) процесс с нулевым средним значением.

2. Задан случайный стационарный процесс, характеризующийся плотностью распределения вероятностей:

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right].$$

Известна также передаточная характеристика нелинейного элемента $y = -ax^2(t)$, $a > 0$. Неизвестной является плотность распределения вероятностей $\omega(y)$.

Решение

При $a > 0$

$$x = \pm\sqrt{y/a}, \quad |dx/dy| = 1/2\sqrt{ay}.$$

Тогда

$$\omega(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{ay}} \{ \omega_1(\sqrt{y/a}) + \omega_1(-\sqrt{y/a}) \}, & y \geq 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

1.7. Потоки случайных событий

Потоком событий названа последовательность событий, следующих друг за другом в случайные моменты времени. Типичные примеры таких потоков из практики: вызовы на телефонной станции, железнодорожные составы, поступающие на сортировочную станцию, и др.

Основным потребителем теории потоков была и остается теория массового обслуживания. В 30-е годы прошлого столетия ее результаты стали использоваться в физике для описания ансамблей частиц. Важный класс процессов размножения и взаимопревращения частиц, осуществляющихся для каждой частицы независимо от ее происхождения и наличия соседей, впервые рассмотрен академиком А.Н. Колмогоровым. На этой базе позднее была развита теория ветвящихся процессов, зависящих от возраста, энергии или любой иной координаты частицы. Приложение теории случайных потоков к радиотехническим задачам рассматривались Н.М. Седякиным. Неожиданный результат зарегистрирован в практике интеллектуальных систем: последовательность узких импульсов (событий), сформированных в точках пересечения речевым сигналом нулевого уровня и поданная на громкоговоритель, воспринимается

человеком как исходный сигнал с несколько меньшей разборчивостью.

Рассмотрение данного вида СП начнем с простейшего стационарного потока событий.

Поток событий называется *стационарным*, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок временной оси длительностью τ зависит только от длины участка и не зависит от его местонахождения на этой оси. Если в таком потоке для любых неперекрывающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на предшествующие, такой поток называется *поток без последствия*. Потоки, характеризующиеся тем, что вероятность попадания на элементарный участок τ двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события, называются *ординарными*.

Если поток обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последствия, он называется *простейшим пуассоновским потоком*. Число событий n , попадающих на любой фиксированный интервал времени τ для такого потока, будет распределено по закону Пуассона

$$P_n(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} \cdot \exp(-\lambda\tau), \quad (1.27)$$

где $\lambda\tau = m_{ПП} = \sigma_{ПП}^2$; $m_{ПП}$ – математическое ожидание; $\sigma_{ПП}^2$ – дисперсия потока событий; λ – плотность потока событий (среднее число событий, приходящееся на единицу времени).

Для стационарного потока $m_{ПП} = \text{const}$, как правило, это условие соблюдается для ограниченных интервалов времени. Поток вызовов на городской телефонной станции на часовых интервалах может считаться стационарным; в течение же суток это условие нельзя признать справедливым. Признание процесса стационарным на всей временной оси – удобный прием, применяемый в целях упрощения анализа. Если продолжительность «участков стационарности» значительна, получаемые результаты анализа близки к действительным.

Условие отсутствия последействия означает независимость событий друг от друга. Это справедливо для потока пассажиров, входящих на станцию метро. Однако поток пассажиров, покидающих станцию метро, уже не может считаться потоком без последействия, так как моменты выхода пассажиров, прибывших одним поездом, зависимы между собой.

На примере с пассажирами можно пояснить и условие ординарности: через дверь пассажиры входят поодиночке, хотя возможность протиснуться через дверь одновременно двум более желающим войти в метро не равна нулю.

Важной характеристикой рассматриваемого потока является плотность распределения отрезков времени T между соседними событиями

$$\omega(T) = \lambda \exp(-\lambda T), \quad T > 0 \quad (1.28)$$

с характеристиками $M[T] = \int_0^{\infty} T \omega(T) dT = \frac{1}{\lambda}$; $\sigma^2[T] = \frac{1}{\lambda^2}$.

График плотности $\omega(T)$ приведен на рис. 1.20.

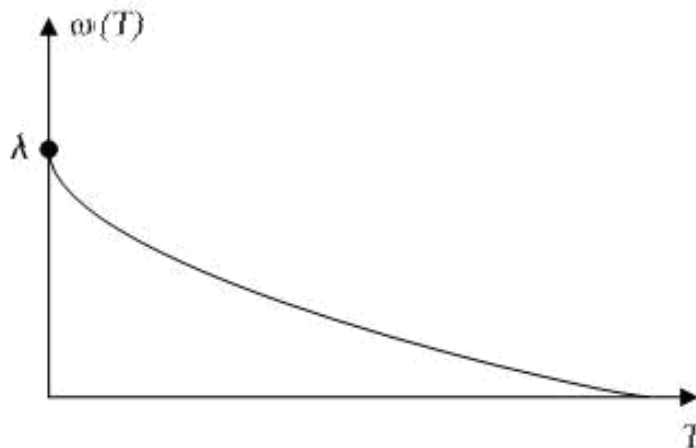


Рис. 1.20. Плотность распределения вероятности интервалов между событиями простейшего пуассоновского потока

Если простейший пуассоновский поток подвергнуть операции «просеивания», т.е. сохранить $(k+1)$ -е событие и вычеркнуть остальные, такой поток называется *поток Эрланга k -го порядка* (рис. 1.21).

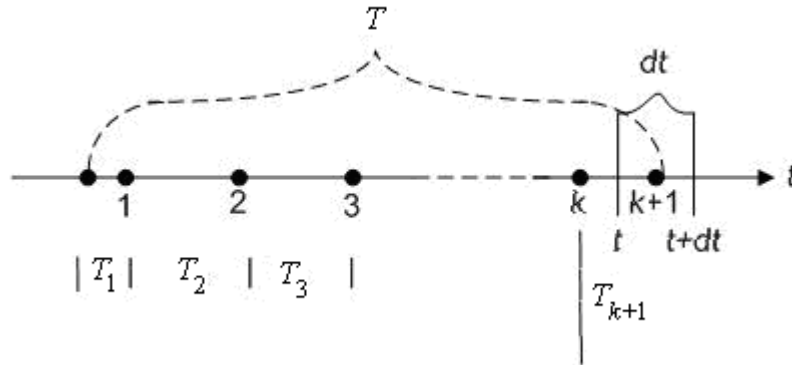


Рис. 1.21. Иллюстрация процесса формирования потока Эрланга k -го порядка

Как следует из рис. 1.21, плотность распределения $\omega_k(T)$ определяется вероятностью осуществления двух событий:

а) $(k+1)$ -е событие должно попасть в интервал $\{t, t + dt\}$, очевидно, вероятность такой ситуации равна λdt ;

б) k событий между 0 и $(k+1)$ событиями должны попасть в интервал $\{0; t\}$; вероятность осуществления такого случая (см. (1.27))

$$P_k(0; t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Вероятность совместного осуществления а) и б)

$$dt \omega_k(T) = \frac{\lambda \cdot (\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} dt$$

или, переходя к плотности распределения,

$$\omega_k(T) = \frac{\lambda \cdot (\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}, \quad T > 0. \quad (1.29)$$

Выражение (1.29) известно под названием *закона Эрланга k -го порядка*. Числовые характеристики плотности распределения вероятностей (1.29)

$$m_k(T) = \frac{k+1}{\lambda}; \quad \sigma_k^2(T) = \frac{k+1}{\lambda^2},$$

а плотность потока

$$\Lambda_k = \frac{\lambda}{k+1}.$$

При $k=0$ выражение (1.29) переходит в показательный закон, при $k \rightarrow \infty$ поток становится регулярным (не случайным), при $0 < k < \infty$ имеем реальные примеры потоков в системах массового обслуживания.

Следующей ступенью обобщения импульсных СП служит снятие условия $\lambda(t) = \text{const}$. Зависимая от времени плотность потока событий характерна для нестационарных пуассоновских потоков с плотностью распределения вероятностей

$$P_n(\tau, t_0) = \frac{a^n}{n!} e^{-a}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где a —математическое ожидание числа событий на участке от t до $(t + \tau)$,

$$a = \int_t^{t+\tau} \lambda(t) dt.$$

Простейший поток событий является частным случаем случайной последовательности прямоугольных импульсов, когда

импульсы задаются дельта-функцией $\delta(t - t_i)$, где t_i – случайный момент появления i -го импульса.

На рис. 1.22 изображена случайная последовательность прямоугольных импульсов. Такими потоками описываются процессы в радионавигационных, радиолокационных и других системах. Например, продолжительность работы любой технической системы может быть поставлена в соответствии с длительностью импульса τ_i , время ее восстановления (ремонта) – длительностью паузы T_i . Амплитудой импульса A_i характеризуют эксплуатационный показатель системы (пробег автомобиля, вес перевезенного груза и т.д.).

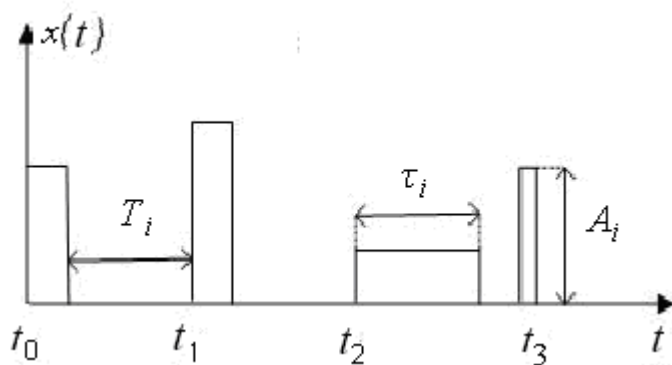


Рис. 1.22. Случайная последовательность прямоугольных импульсов

Величины A_i, τ_i, T_i являются случайными. Поэтому изображение СП на рис.1.22 следует понимать как конкретную реализацию. Функция $x(t)$ при одном и том же значении аргумента будет принимать разные значения, характеризующие случайную величину со счетным множеством значений. Общий подход к описанию функций такого сорта (нестационарных) был изложен выше.

В качестве конкретного примера построения модели прямоугольной последовательности импульсов рассмотрим случай независимости параметров A_i, τ_i, T_i . Вначале следует определить плотность распределения вероятностей $\omega(A), \omega(\tau), \omega(T)$. Обычно эти плотности находятся в результате решения самостоятельной задачи, а

именно анализа работы системы, описываемой моделью потока импульсов. Затем производится вычисление средних значений:

$$m_A = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \omega(A) dA, \quad m_\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \tau \cdot \omega(\tau) d\tau, \quad m_T = \int_{-\infty}^{\infty} T \cdot \omega(T) dT.$$

На последнем этапе находится выражение корреляционной функции (спектральной плотности) и производится анализ поведения системы.

За исключением нескольких частных случаев вычисление корреляционной функции оказывается значительно сложнее, чем спектральной плотности. Достаточно громоздким оказывается и алгоритм нахождения аналитического выражения для спектральной плотности. Широкое распространение программных продуктов по статистическому анализу экспериментальных данных сместило направление интересов исследователей на построение эмпирических зависимостей для описания функционирования исследуемых систем.

Тридцать лет назад, когда господствовал аналитический подход в построении моделей сложных систем, было получено выражение для спектральной плотности потока прямоугольных импульсов в виде

$$S(\omega) = \frac{2}{\omega^2(m_\tau + m_T)} \cdot \left\{ m_A^2 \operatorname{Re}[1 - \theta_1(\omega)] + m_A^2 \operatorname{Re} \frac{\theta_2(\omega)[1 - \theta_1(\omega)] \cdot [\theta_1(\omega) - 1]}{1 - \theta_1(\omega)\theta_2(\omega)} \right\},$$

где $\theta_1(\omega) = \int_0^{\infty} e^{j\omega\tau} \omega(\tau) d\tau, \quad \theta_2(\omega) = \int_0^{\infty} e^{j\omega T} \omega(T) dT$ —

характеристические функции длительностей импульсов $\theta_1(\omega)$ и интервалов между ними $\theta_2(\omega)$; Re — действительная часть.

Для частного случая $\tau_i = \tau_0 = \text{const}$ приведенное выражение упрощается:

$$S(\omega) = \frac{4m_A^2 \sin^2 \frac{\omega \tau_0}{2}}{\omega^2 (m_r + m_T)} \cdot \frac{1 - |\theta_0(\omega)|^2}{|1 - \theta_0(\omega)|^2},$$

где $\theta_0(\omega) = \theta_1(\omega) \cdot \theta_2(\omega)$.

Когда длительность импульсов и интервалы между ними одинаково распределены, т.е. $\theta_2(\omega) = \theta_1(\omega)$, формула для спектральной плотности принимает вид:

$$S(\omega) = \frac{2m_A^2}{\omega^2 (m_r + m_T)} \cdot \frac{1 - |\theta_1(\omega)|^2}{|1 + \theta_1(\omega)|^2}.$$

Если последовательность прямоугольных импульсов имеет одинаковую амплитуду A_0 , а вероятность того, что на достаточно большом интервале времени $\tau_{ин}$ произойдет n скачков, амплитуды задаются законом Пуассона (модель телеграфного сигнала):

$$P_n(\tau_{ин}) = \frac{(\lambda \tau_{ин})^n}{n!} e^{-\lambda \tau_{ин}},$$

где λ – среднее число скачков в единицу времени; корреляционная функция такого потока имеет исключительно простое выражение:

$$K(\tau) = 0,25 A_0^2 \exp(-2\lambda|\tau|).$$

Последовательность равноотстоящих импульсов постоянной длительности ($\tau_0 \ll T_0$) названа *временным рядом*. В этой модели наблюдаемый ряд рассматривается как сумма некоторой детерминированной последовательности чисел $B(t_i)$ и случайной последовательности $u(t_i)$, подчиняющейся некоторому вероятностному закону:

$$A(t_i) = B(t_i) + u(t_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

Случайные потоки событий широко используются для описания работы систем массового обслуживания (СМО). По принятой классификации различают СМО с отказом, с неограниченным временем ожидания и смешанного типа. В системах с отказами при отсутствии свободных обслуживающих единиц поступившая заявка получает отказ и покидает систему. Пример – телефонная станция.

Базовым показателем СМО является вероятность того, что обслуживанием занято k приборов, т.е. R_k , или среднее число загруженных приборов $N_3 = \sum_{k=1}^n k P_k$. Производными этих показателей служат вероятность отказа в обслуживании $P_{отн} = P_n$, среднее число свободных каналов $N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cdot P_k$, коэффициент простоя $k_n = N_0 / n$, коэффициент занятости приборов $k_3 = N_3 / n$, n – число обслуживающих единиц в системе.

Для систем с ожиданием основным параметром выступает среднее время ожидания заявок в очереди до начала обслуживания:

$$T_{ож} = \int_0^{\infty} \tau \sum_{k=0}^n P_k \cdot Q_k(\tau_{ож} > \tau) d\tau,$$

где $Q_k(\tau_{ож} > \tau)$ – условная вероятность того, что время ожидания $\tau_{ож} > \tau$ при условии нахождения в системе k заявок при поступлении очередной заявки.

Через перечисленные показатели определяются экономические параметры СМО. Для СМО с ожиданием

$$Q_n = (q_{ож} \cdot M_{ож} + q_{пк} \cdot N_0 + q_k N_3) T$$

есть функция потерь в системе, где $q_{ож}$ – стоимость потерь, связанных с простаиванием заявок в очереди в единицу времени, $M_{ож} = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n)pk$, $k \geq n$ – средняя длина очереди, $q_{пн}$ – стоимость единицы времени простоя прибора системы, q_k – стоимость эксплуатации каждого прибора в единицу времени, T – интервал времени работы системы.

Аналогичная функция потерь для системы с отказами

$$Q_{\Pi} = (q_k N_3 + q_y P_n \cdot \lambda) \cdot T,$$

а для смешанных СМО

$$Q_{\Pi} = (q_{пк} \cdot N_0 + q_{ож} \cdot M_{ож} + q_y D_n \cdot \lambda + q_k N_3) T,$$

где q_y – стоимость убытков, связанных с уходом из системы заявок, λ – плотность потока заявок.

Для стационарных условий работы СМО ее функционирование описывается уравнениями Эрланга:

$$P_0 = 1 / \sum_{k=0}^n \alpha_k / k! , \quad P_k = \frac{\alpha^k / k!}{\sum_{k=0}^n \alpha_k / k!} ,$$

где $\alpha_k = \lambda / \mu$ – отношение плотностей поступающих и обслуженных заявок.

Задача

На станцию текущего ремонта автомашин поступает простейший поток заявок плотностью $\lambda = 0,5$ маш./ч. Имеется одна эстакада для ремонта ($k = 1$). Во дворе станции могут одновременно находиться, ожидая своей очереди, не более трех машин. Среднее время ремонта одной машины – 2 ч.

Требуется определить:

- пропускную способность системы,
- среднее время простоя станции,
- насколько изменятся параметры системы при введении второй эстакады ремонта.

Решение

Имеем $\lambda = 0,5$ маш./ч, $\mu = (1 / 2\text{ч}) = 0,5$ маш./ч, $\alpha = 1$, $m = 3$.

Для $n = 1$ находим вероятность того, что пришедшая заявка покинет систему не обслуженной:

$$P_H = P_{l+3} = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, пропускная способность системы составляет 80 % потока.

$$\text{Доля простоя } P_{(k=0)} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

При $k = 2$ $P_H = P_{2+3} = 0,021$, т.е. только 2,1 % машин не будут обслужены, однако простой оборудования возрастет до 34 % ($P_0 = 0,34$).

На этом мы завершим изложение элементов теории случайных процессов. Объем представленного материала и уровень его изложения достаточны для понимания подходов к решению прикладных задач, изложенных во второй части учебного пособия.

2. ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ В ЗРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ЧЕЛОВЕКА

Рассмотрим вначале функционирование совершенной интеллектуальной системы «зрение - мозг».

Упрощенно зрительную систему можно представить состоящей из двух ступеней: воспринимающей излучение и принимающей решение. Первая из них характеризуется спектральным и пространственно-временным разрешением глаза, вторая – риском принятия решений, выражаемым через вероятности обнаружения и ложной тревоги.

В соответствии с теорией зрения сетчатка глаза состоит из колбочек и палочек. Колбочки имеют малую световую чувствительность, отличаются большей разрешающей способностью и способностью различать цвета. Палочки не различают цвета, характеризуются большей световой чувствительностью и малой разрешающей способностью. Центральная часть сетчатки содержит только колбочки, периферия – колбочки и палочки.

Диапазон яркости, воспринимаемый глазом, имеет порядок 10^5 . Для обеспечения работоспособности в таком диапазоне зрительная система снабжена механизмом адаптации. Адаптация заключается в снижении освещенности сетчатки путем изменения диаметра зрачка и выработке глазного пурпура, выполняющего роль нейтрального поглощающего фильтра.

Диапазон чувствительности органа зрения с известной степенью условности можно разбить на области ночного ($3 \cdot 10^{-6} - 10^{-4}$ кд/м²), сумеречного ($10^{-4} - 3$ кд/м²) и дневного ($3 - 3 \cdot 10^4$ кд/м²) зрения. Первая из них соответствует палочковому, вторая – совместному палочко-колбочковому, последняя – центральному (колбочковому) зрению.

Контрастная чувствительность глаза (способность регистрировать отличающиеся по яркости детали изображения) ограничена квантовыми флуктуациями света и собственными шумами зрительного канала. В практически встречающемся при контроле диапазоне яркостей порог восприятия $(\Delta B/B) = \text{const}$ (закон Вебера–Фехнера.) По разным оценкам значение константы лежит в пределах 0,02-0,05.

Разные по спектральному составу, но одинаковые по энергии световые раздражения вызывают различное яркостное восприятие. При раздражении сетчатки световым потоком определенной длины волны возникает ощущение цвета. Границы, разделяющие цветовые зоны, условны. В действительности каждый цвет постепенно переходит в следующий. В основе цветового зрения лежит трехкомпонентная теория цветового восприятия, допускающая существование в глазе трех видов рецепторов, настроенных соответственно на красный, зеленый и синий взаимонезависимые цвета, т.е. ни один из них не может быть получен путем смешения

других. Все остальные цвета (включая белый цвет) получаются смешением трех основных в соответствующих пропорциях.

При восприятии цветового изображения определяющую роль играет цветовой контраст. Общее число различимых глазом цветовых оттенков составляет несколько десятков тысяч. Поэтому информативность цветового изображения по сравнению с черно-белым существенно выше.

Поле зрения глаза, в котором качество видения считается удовлетворительным, составляет 30° по углу места и 40° по азимуту. Максимальная острота зрения (пространственная разрешающая способность) составляет одну обратную угловую минуту ($I' = 0,29 \text{ мрад}$). В указанном поле зрения может быть выделено более миллиона отдельных элементов изображения. То есть наибольшую информацию глаз может получить из анализа пространственных характеристик дешифрируемой картины.

С увеличением угловых размеров воспринимаемого объекта чувствительность глаза растёт. Эта зависимость получила название частотно-контрастной характеристики (ЧКХ) или реакции на изображение пространственной синусоидальной волны. Типичная ЧКХ представлена на рис. 2.1.

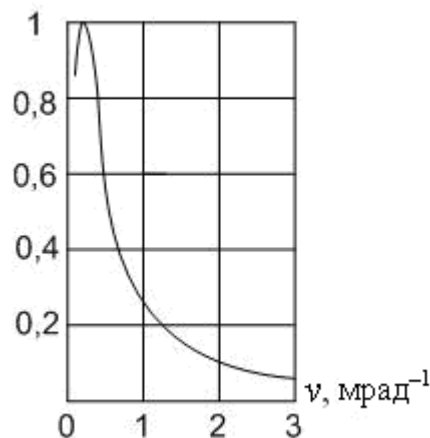


Рис. 2.1. Частотно-контрастная характеристика глаза

Наиболее высокая видимая пространственная частота $3,44 \text{ мрад}^{-1}$ соответствует периоду $0,29 \text{ мрад}$. Максимум ЧКХ приходится на частоты $0,1 - 0,4 \text{ мрад}^{-1}$ (периоды $2,5 - 10 \text{ мрад}$), чувствительность глаза к медленным изменениям поля яркости мала. Анализ ЧКХ позволяет сделать выводы о целесообразности предъявления

оператору смасштабированных изображений, когда угловые размеры обнаруживаемых объектов находились бы в области 2,5 - 10 мрад. Однако если решается задача опознавания объектов, лучшие результаты достигаются при уменьшении элемента разрешения до 0,873 мрад. Этот результат не является неожиданным. Чем больше элементов разложения приходится на объект, тем точнее пространственное описание и тем вернее он опознается.

Объяснить поведение ЧКХ органа зрения удалось после обнаружения эффекта пространственного интегрирования, который используется в зрительной системе. Угловое разрешение колбочки 0,29 мрад. Если объект имеет большие размеры, глаз суммирует сигналы от всех n возбуждаемых колбочек:

$$\sum_{k=1}^n \Delta B_c + B_{шк} = n \cdot \Delta B_c + \sum_k B_{шк},$$

где ΔB_c – величина сигнала, регистрируемая колбочкой; $B_{шк}$ – аддитивный СП.

Итоговое отношение энергии сигнала к дисперсии колебаний яркости фона

$$ОСП = \frac{n^2 \cdot \Delta B_c^2}{D\left(\sum_k B_{шк}\right)},$$

где D – дисперсия суммы помех. Для некоррелированных отчетов $B_{шк}$, как известно, дисперсия суммы равна сумме дисперсий и, учитывая, что $B_{шк}$ имеют одинаковое распределение, получим:

$$ОСП = \frac{n^2 \Delta B_c^2}{n D(B_{шк})} = n \frac{\Delta B_c^2}{\sigma_B^2}, \quad ОСП_a = \sqrt{n} \frac{\Delta B_c}{\sigma_1}, \quad (2.1)$$

где σ_B – воспринимаемое среднеквадратичное отклонение помех; индекс a означает отношение амплитуд.

Таким образом, $ОСП$ по мощности увеличилось в n раз, по амплитуде в \sqrt{n} раз. Значение n определяется числом рецепторов возбуждаемых сигналов, и растет до тех пор, пока диаметр объекта не

достигнет 11 мрад. Далее эффект пространственного накопления не проявляется, и ЧКХ начинает спадать в сторону низких частот.

Эксперименты по наблюдению изменяющихся во времени изображений выявили еще одно свойство зрения – инерционность. При низкой частоте предъявляемых фрагментов глаз ощущает мигания, которые становятся неразличимыми при повышении частоты до так называемой критической $f_{кр}$. Для определения $f_{кр}$ формируется изображение вида $(B_{\phi} + B_a \sin 2\pi f)$. Установлено, что мелькания незаметны на частоте 50 Гц, на частоте 20 Гц они регистрировались операторами при $(B_a/B_{\phi}) \geq 0,3$, наибольшая чувствительность к мельканиям наблюдалась на частоте 10 Гц (порог $(B_a/B_{\phi}) \geq 0,01$). Полученные результаты можно объяснить временной инерционностью глаза, которая по разным оценкам составляет $\tau_{\Gamma} = 0,1 - 0,2$ с. Следовательно, зрительная система не воспринимает мгновенное распределение случайного шума, а регистрирует среднеквадратичную величину, усредненную за конечный отрезок времени τ_{Γ} . При постоянной мощности шума от кадра к кадру отношение сигнал/шум согласно рассмотренному выше принципу накопления должно увеличиться пропорционально корню квадратному из числа независимых кадров, укладываемых в интервал τ_{Γ} , т.е. $N_{\kappa} = \sqrt{f_{\kappa} \cdot \tau'_{\Gamma}}$, f_{κ} – кадровая частота.

В типичных задачах обработки зрительной информации изображение случайных флуктуаций яркости (помехи) в интервале времени 0,1-0,2 с постоянно. Наблюдаемые изменения яркости от кадра к кадру обусловлены внутренними шумами оптико-электронного преобразователя. Поэтому с учетом (2.1) при восприятии телевизионных изображений воспринимаемое оператором отношение сигнал/помеха

$$(ОСП_B)^2 = \frac{\Delta B_c^2 \cdot N_{\kappa}^2}{N_{\kappa} \cdot \sigma_{ш}^2 + N_{\kappa} \sigma_B^2} \cdot \frac{S_0}{S_p}, \quad (2.2)$$

где S_0 – угловая площадь объекта; S_p – угловая площадь рецептора глаза, согласованная с элементом предъявляемого изображения; $\sigma_{ш}$ – среднеквадратичное отклонение шумов на изображении.

Выражение (2.2) справедливо в случае, если шумы на каждом кадре независимы. В общем случае наблюдается межкадровая корреляция шумов, характеризующаяся экспоненциальным законом

$$r_v = \exp(-0,083v), \quad (2.3)$$

где $v = 0, 1, 2, \dots; N$ – номер последующего кадра, с которым находится коэффициент корреляции.

С учетом (2.3) несложно получить общее соотношение:

$$(ОСП_B)^2 = \frac{\Delta B_c^2 \cdot N_K^2 \cdot S_0}{\left\{ \sigma_{ш}^2 \left[N_K + 2 \cdot \sum_{v=1}^{N_K-1} (N_K - v) \exp(-0,083v) \right] + N_K^2 \sigma_B^2 \right\} S_p}.$$

Наша следующая задача – рассмотреть алгоритм работы функционирования зрительной системы на стадии принятия решений.

Многочисленными исследованиями установлена применимость известной в технике теории статистических решений для описания зрительного процесса человека при обнаружении простых объектов на различных фонах. Полученные результаты можно сформулировать в виде двух положений:

- вероятность обнаружений зависит от яркости фона, геометрических характеристик объекта и его контраста;
- при обнаружении объектов на фоне некоррелированного квазирandom шума стратегия наблюдателя определяется критериями минимума среднего риска.

Значительный вклад в разработку первого положения внесли Н.П. Травникова, Н.И. Пинегин, А.В. Луизов и др. Согласно результатам их исследований процесс обнаружения объекта начинается со случайного поиска. В течение секунды глаз совершает 3-5 скачков длительностью 0,04 с на угол 6-8° при поле обзора 30° и на угол 2° при поле обзора 9°. После очередного скачка происходит фиксация

взгляда примерно в течение 0,3 с, во время которой глаз совершает микродвижения: тремор, дрейф, микросаккады. Тремор характеризуется частотой 100 Гц и амплитудой $\sim 1'$. Плавные смещения взора (до $1,3^\circ$) определяют дрейф, резкие скачки в пределах центральной ямки называются микросаккадами. Если в зоне фиксации объект не обнаружен, делается следующий скачок.

Вероятность обнаружения одиночного объекта от длительности поиска на ровном фоне описывается выражением вида

$$P_T = 1 - \exp(-\alpha t).$$

В результате обработки большого числа экспериментальных данных удалось конкретизировать вид показателя α для «среднего» наблюдателя:

$$P_T = 1 - \exp\left(-\frac{C_\delta K^2 \gamma^3 B_\phi^{0,3} t}{(2\beta)^2}\right), \quad (2.4)$$

где $C_\delta = 16 \text{ град}^2 (\text{кд/м}^2)^{-0,3} (\text{угл.мин})^{-3} \text{с}^{-1}$ для бинокулярного зрения, $C_\delta = 12 \text{ град}^2 (\text{кд/м}^2)^{-0,3} \text{с}^{-1}$ для монокулярного зрения; $K = \Delta B / B_\phi$ – яркостный контраст объекта на фоне B_ϕ ; γ – угловой размер объекта;

t – время поиска, 2β – угловой диаметр поля обзора.

Величины вероятностей, даваемые этой формулой, можно оценить на примере. Требуется обнаружить дефект размером $10'$ на фоне яркостью 50 кд/м^2 при предъявлении изображения размером 10 град в течение 3 с. Тогда для контрастов $K=0,02$; $0,05$; $0,10$ результаты расчетов будут следующими: $P_T=0,462$; $0,979$; $0,999$.

Аналогичным способом (т.е. обработкой экспериментальных данных) получена формула для вероятности обнаружения движущихся объектов:

$$P_{дт} = 1 - \exp\left(-\frac{C_\delta K^2 \gamma^3 B_\phi^{0,3}}{\omega^2}\right), \quad (2.5)$$

где $C_0 = 4(\text{угл.мин})^{-3} (\text{кд/м}^2)^{-0,3} \text{град}^2 \text{с}^{-2}$; $\omega = 2\beta / t$ – угловая скорость движения объектов.

Кривые на рис. 2.2 позволяют судить о степени снижения вероятности обнаружения объекта при его перемещении в поле наблюдения.

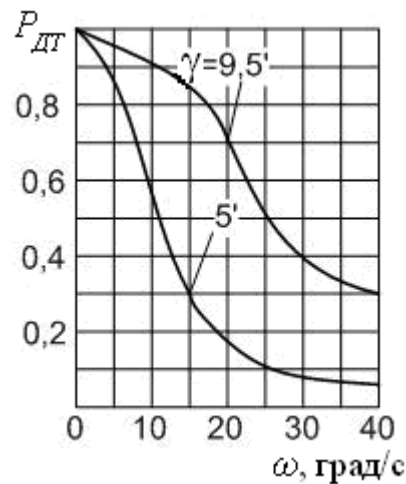


Рис. 2.2. Расчетные вероятности обнаружения движущихся объектов при яркости фона 100 кд/м^2 в поле обзора 45° при контрасте $0,2$

На сегодняшний день не выдвинуто заслуживающих внимания аргументов против использования приведенных формул для анализа изображений на экранах электронно-лучевых индикаторов, а также сформированных оптическими приборами. В последнем случае все необходимые величины следует пересчитать для пространства изображений:

$$\gamma' = \Gamma \gamma; \quad K' = K / (1 + q_p); \quad B'_\phi = \tau_0 B_\phi; \quad 2\beta' = \Gamma 2\beta,$$

где Γ – увеличение оптики; q_p – коэффициент светорассеяния ($q_p = 0,05 - 0,1$), τ_0 – коэффициент светопропускания оптики.

При использовании формул (2.4), (2.5) следует помнить о границах их применимости: $K > 0,02$; $B_\phi < 500 \text{ кд/м}^2$; $\gamma > 1'$; $t > 1_c$; $0,1 < P_T < 1$. Фон, на котором наблюдается объект, должен быть однородным, а флуктуации яркости изображения сопоставимы или ниже порога восприятия. В типичных задачах последнее условие

обычно не выполняется. Имеющиеся результаты исследований по обнаружению и опознаванию зрительной системой сигналов в условиях маскирующих помех более скромны. Интерес представляют из них, которые позволяют сопоставить надежность обнаружения (опознавания) одних и тех же сигналов в шумах человеком и автоматом.

В табл. 2.1 приведены результаты эксперимента, которые характеризуют зависимость вероятности правильного опознавания $P_{оп}$ от вероятности ошибочных решений $P_{ош}$ для группы операторов и алгоритма, реализующего правило минимума среднего риска.

Таблица
2.1

**Вероятности правильного опознавания ошибочных решений
оператора и алгоритма в однотипных экспериментах**

операторы и алгоритмы в однотипных экспериментах						
P_{OP}	$P_{Oш}$		0,175	0,205	0,225	0,260
	Положение фигуры известно	операторы	0,97	0,93	0,80	0,52
		алгоритм	0,96	0,93	0,85	0,57
	Положение фигуры неизвестно	операторы	0,92	0,70	0,55	0,41
		алгоритм	0,93	0,76	0,57	0,50

Предъявляемый материал представлял собой семь двухградационных изображений абстрактных фигур, каждое из которых подвергалось воздействию помех путем замены значений яркости случайно выбранных элементов на обратную. Операторы знали априорные вероятности предъявления каждого из изображений фигур и их точное описание. Алгоритм опознавания автоматом сводится к составлению отношений правдоподобия (по числу опознаваемых классов) и сравнению их между собой с учётом равенства цен ошибок. Обращает на себя внимание близость

полученных операторами и автоматом результатов (см. табл. 2.1), что подтверждает гипотезу о функционировании зрительной системы по алгоритму, минимизирующему средний риск решений.

Другой любопытный результат был получен при обработке данных по опознаванию изображений известными операторам предметов в условиях их маскировки аддитивным гауссовым шумом:

$$P_{оп} = 0,5[1 + \Phi(A \cdot ОСП - C)],$$

где A и C – коэффициенты; $\Phi(\dots)$ – интеграл Лапласа.

При отношении сигнал/шум $ОСП \geq 2$ указанная зависимость хорошо аппроксимируется выражением

$$P_{оп} = \frac{1}{2}[1 + \Phi(0,236 \cdot ОСП - 0,95)].$$

Это обстоятельство служит ещё одним доводом в пользу формирующейся точки зрения о функционировании зрительной системы при обнаружении и опознавании образов по правилам статистической теории принятия решений.

Из приведённых материалов следует, что вероятность правильного обнаружения объектов оператором на предъявляемых изображениях должна подчиняться зависимости вида

$$P_{по} = \int_{B_{п}}^{\infty} P_c(B) \cdot dB \quad (2.6)$$

и определяться уровнем сигнала B_c , дисперсией помех σ (или обобщенным показателем $ОСП = (B_c - B_{\phi})/\sigma$), а также выбранным порогом принятия решений $B_{п}$. Механизм выбора порога $B_{п}$ зрительной системой при изменении характеристик предъявляемых изображений не ясен.

Для установления вида кривой (2.6) можно использовать следующий приём. Создаются условия, обеспечивающие уровень P_T в (2.4), близкий к единице. Последовательное наложение на

наблюдаемую картину помех с изменяющейся интенсивностью позволяет установить вид зависимости $P_{ПО} = f(ОСП_B)$:

$$P_{ПО} \approx 1 - \exp[-0,15(ОСП_B - 1)^2]. \quad (2.7)$$

Выражение (2.7) есть результат аппроксимации экспериментальных данных, полученных при обнаружении простых объектов на однородном фоне в присутствии аддитивных гауссовых помех для случаев $ОСП_B > 1$, и должно зависеть также от угловых размеров поля поиска, его яркости, времени наблюдения. Если принять, что перечисленная группа событий не зависит от наблюдаемого $ОСП_B$, верхняя оценка вероятности обнаружения

$$P_{Об} = P_T \cdot P_{ПО}.$$

При использовании приведенных формул применительно к телевизионному изображению необходимо позаботиться о выполнении одного условия. По данным [3] число строк на высоту кадра должно превышать 232, а на объект обнаружения приходится не менее 4-х.

Еще сложнее учесть все факторы, влияющие на вероятность опознавания – вероятность отнесения обнаруженного объекта к узкому классу объектов. Оператор не испытывает затруднений при решении этой задачи.

Имеющаяся информация по данному вопросу не носит законченного характера. Тем не менее, ряд сведений по опознаванию образов, которые уже используются в практике, полезно привести.

В вопросе о необходимой детальности описания объектов классификации существует единая точка зрения: вероятность правильного опознавания увеличивается с улучшением разрешающей способности приборов. Для уверенного опознавания (вероятность 0,9) число строк тепловизионного изображения на объект должно быть порядка 8. В [4] приводится формула, описывающая результаты экспериментов по опознаванию типографских знаков на телевизионном экране:

$$P'_{op} = 1 - \exp\left(6,4 \cdot 10^{-3} \gamma_c n_c\right)^2,$$

где γ_c – угловой размер знаков, мрад; n_c – число строк, укладываемых в изображение знака.

Другое выражение:

$$P'_{on} = \exp [-(k_p \cdot n_c^{-1})^2], \quad (2.8)$$

где k_p – коэффициент формы объекта. По данным [7] $k_p = 1,42$ для круга, $k_p = 1,55$ для квадрата, $k_p = 1,74$ – для треугольника.

Формулу (2.8) можно рекомендовать для ориентировочной оценки вероятности опознавания объектов при отсутствии заметных помех на предъявляемых изображениях.

Надежные данные, характеризующие зависимость вероятности опознавания от интенсивности маскирующих помех, отсутствуют. При опознавании различных подклассов объектов кривые $P'_{on} = f(ОСП)$ не идентичны. Для простых объектов кривая $P'_{on} = f(ОСП)$ при $ОСП > 5$ входит в насыщение. В экспериментах по опознаванию объектов бронетанковой техники увеличение P_{op} наблюдалось вплоть до $ОСП = 15$ [5].

Приведенные сведения по характеристикам зрительной системы необходимо учитывать при проектировании систем, в которых функции принятия решений и управления осуществляет человек.

Задачи

1. Требуется определить время обнаружения объекта прямоугольной формы размерами 1,2x2,4 мм, наблюдаемом на экране круглой форме (диаметр экрана 650 мм) с расстояния 1 м. Яркость экрана составляет 30 кд/м². Контраст объекта с фоном $K = -0,15$. Поиск ведется бинокулярно, невооруженным глазом. Вероятность обнаружения $P_T = 0,8$, шумы не заметны для глаза.

Расчет проводится по формуле (2.4), преобразованной к виду

$$t = \frac{\lg(1 - P_T)^{-1} \cdot (2\beta)^2}{C_6 K^2 \gamma^3 B_\phi^{0,3} \lg e}.$$

По известным линейным размерам объекта и расстояния, с которого ведется наблюдение, находятся угловые размеры объекта:

$$\gamma_1 = 3440 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м / 1м} = 4,1 \text{ угл. мин};$$

$$\gamma_2 = 3440 \cdot 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м / 1м} = 8,2 \text{ угл. мин}.$$

Коэффициент 3440 вводится для получения результата в угловых минутах. Для пользования формулой (2.4) определяем γ как угловой размер стороны равновеликого квадрата: $\gamma = 5,8'$.

Угловые размеры поля поиска находятся из выражения, $\text{tg} \beta = 650 \text{ мм} / 2 \cdot 100 \text{ мм} = 0,325$. Следовательно, $\beta = 18^\circ$.

Поставив найденные величины, а также заданные по условиям задачи параметры в формулу для t , получаем $t = 10,5 \text{ с}$.

2. Требуется обнаружить дефект на рентгенограмме. Изменится ли время обнаружения, если поиск ведется с использованием увеличительной лупы?

В данном случае вероятности обнаружения в случаях работы с лупой и без лупы следует принять равными. Тогда, используя выражение (2.4), получаем

$$\left[\exp - \left(\frac{C_6 K^2 \gamma^3 B_\phi^{0,3} t}{(2\beta)^2} \right) / \exp \left(- \frac{C_6 \frac{K^2}{(1+q_p)^2} (\Gamma \gamma)^3 (\tau_0 B_\phi)^{0,3} t_\Gamma}{(2\Gamma\beta)^2} \right) \right] = 1$$

или, принимая коэффициент светорассеяния $q_p = 0,05$, коэффициент пропускания оптики $\tau = 0,9$,

$$\exp \left[- \frac{C_6 K^2 \gamma^3 B_\phi^{0,3}}{(2\beta)^2} (t - 0,87 t_\Gamma \Gamma) \right] = 1,$$

где Γ — увеличение, t_Γ — время обнаружения дефекта с использованием увеличительной оптики. Последнее равенство выполняется при $t = 0,87 t_\Gamma \Gamma$, т.е. применение увеличительной оптики с $\Gamma > 1,5^x$ сокращает время обнаружения дефекта.

3. Дефект находится в поле зрения прибора в течение 20 с. Прибор характеризуется следующими параметрами: $\Gamma=6^x$; $2\beta=8^\circ$; $\tau = 0,6$; $q_p=0,05$; $B_\phi = 200 \text{ кд/м}^2$. При каком контрасте K и угловом размере γ дефект может быть обнаружен с вероятностью $P_T = 0,8$.

Разрешая (2.4) относительно интересующих нас величин и подставляя данные, приведенные при формулировке задачи, получаем

$$(K')^2 \cdot (\gamma')^3 = \frac{\lg(1 - P_T)^{-1} (2\beta')^2}{C_6 \lg e (B_\phi')^{0,3} t} = 2,7.$$

Пусть контраст дефекта с фоном $K = 0,08$, тогда $\gamma' = 1,3'$.

Библиографический список

1. Никифоров И.В. Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов / И.В. Никифоров. – М.: Наука, 1983. – 280 с.
2. Кулаичев А.П. Методы и средства комплексного анализа данных. Форум / А.П. Кулаичев. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 512 с.
3. Об участии в международном информационном обмене: Федеральный закон от 04.07.96 № 85-ФЗ.
4. Основы информационной безопасности / Е.Б. Белов и др. – М.: Горячая линия – Телеком, 2006. – 544 с.
5. Ллойд Дж. Системы тепловидения / Дж. Ллойд: пер. с англ.; под ред. А.И. Горячева. – М.: Мир, 1978. – 417 с.
6. Об информации, информатизации и защите информации: Федеральный закон от 20.02.95 № 2-1-ФЗ.
7. Информационная безопасность систем организационного управления. Теоретические основы: в 2 т. / Н.А. Кузнецов, В.В. Кульба, Е.А. Микрин и др. – М.: Наука, 2006. – Т.1. – 495 с.; Т.2. – 437 с.
8. Светлицкий В.А. Случайные колебания механических систем / В.А. Светлицкий. – М.: Машиностроение, 1991. – 320 с.
9. Дмитриев В.И. Прикладная теория информации / В.И. Дмитриев. – М.: Высшая школа, 1989. – 320 с.
10. ГОСТ Р 50922-96. Защита информации. Основные термины и определения.

Учебное издание

Борис Николаевич Елифанцев,
Маргарита Ярополковна Елифанцева,
Равиль Абдрахманович Ахмеджанов

**СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЗАДАЧАХ
ОБРАБОТКИ И ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ**

Часть I. Введение в теорию
случайных процессов

Учебное пособие

Редактор Т.И. Калинина

Подписано к печати 27.05.2011
Формат 60×90 1/16. Бумага писчая
Оперативный способ печати
Гарнитура Times New Roman
Усл. п. л. 5,0, уч.-изд. л. 4,0
Тираж 100 экз. Заказ № ____
Цена договорная

Издательство СибАДИ
644099, г. Омск, ул. П. Некрасова, 10

Отпечатано в подразделении ОП издательства СибАДИ