Інтегральна теорема Коші для однозв'язної області

Теорема Коші : Нехай функція $f(z)$ *аналітична* в *однозв'язній області* D, γ - довільна замкнена крива, що цілком лежить в області D. Тоді

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Припустимо, не втрачаючи загальності, що:

1) $\gamma\gamma$ — замкнений кусково-гладкий контур;

2) похідна $f'(z)f'(z)$ — неперервна.

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma} udx - vdy + i\oint\limits_{\gamma} vdx + udy$$

достатньо показати, що $\oint\limits_{\gamma} udx - vdy = 0, \quad \oint\limits_{\gamma} vdx + udy = 0.$

Позначимо область, обмежену контуром $\gamma\gamma$, через G. Оскільки функція $f'(z)$ неперервна в області $G \subset D$, то функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ в цій області мають неперервні частинні похідні першого порядку. Завдяки кусковій гладкості контуру $\gamma\gamma$ виконано всі умови, що дозволяють застосувати до інтегралів формулу Остроградського - Гріна. Маємо

$$\oint\limits_{\gamma} udx - vdy = \iint\limits_{G}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy,$$

$$\oint\limits_{\gamma} vdx + udy = \iint\limits_{G}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

На підставі аналітичності $f(z)f(z)$ виконуються *умови Коші —Рімана* і підінтегральні вирази в кожному з подвійних інтегралів тотожно дорівнюють нулеві.

Інтегральна теорема Коші справджується і у випадку замкненого контуру, який є границею області аналітичності.

Узагальнення теореми коші : Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D,D, яка обмежена кусково-гладким контуром Γ, і неперервна в замкненій області $\overline{D}$. Тоді

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$