4) Знакозмінні числові ряди. Теорема Лейбніца, наслідок. Абсолютно та умовно збіжні числові ряди та їх властивості. Теорема Рімана.

Ряд називають *знакозмінним*, якщо серед його членів є як від'ємні, так і додатні. Знакопочережний ряд є окремим випадком знакозмінного ряду.

Розгляньмо разом із знакозмінним рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ряд, утворений з модулів його членів

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right|.$$

Зауважимо, що існують збіжні ряди, що ряди, утворені з модулів їх членів розбігаються:

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ збігається, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — розбігається.

Теорема 3.1 **(ознака Лейбніца).** Знакопочережний ряд $\Sigma(-1)^{n-1} a_n$, $a_n > 0$, збігається, якщо виконано умови:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

2) $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

При цьому сума ряду S справджує нерівність

$$0 < S < a_1.$$

Наслідок. Абсолютна похибка від заміни суми збіжного знакопочережного ряду $\Sigma(-1)^{n-1} a_n$ його частковою сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто

$$\left|S - S_n\right| = \left|R_n\right| \le a_{n+1}.$$

Означення 3.1 **(абсолютної і умовної збіжності).** Знакозмінний ряд Σa_n називають *абсолютно збіжним*, якщо ряд $\Sigma\left|a_n\right|$, утворений з модулів його членів, збігається.

Якщо ряд Σa_n збіжний, а ряд $\Sigma\left|a_n\right|$ розбігається, то ряд Σa_n називають *умовно збіжним*.

Властивості абсолютно й умовно збіжних рядів

Властивість 1 (теорема Діріхле). Абсолютно збіжний ряд Σa_n після будь-якого переставлення його членів залишається абсолютно збіжним і його сума не міняється.

Властивість 2. Якщо ряди Σa_n та Σb_n збігаються абсолютно до сум S та T, то ряд $\Sigma(\alpha a_n + \beta b_n)$ збігається абсолютно до суми $\alpha S + \beta T$.

Властивість 3. Якщо ряд Σa_n збігається умовно, то обидва ряди, утворені лише з додатних і лише з від'ємних членів ряду, розбігаються.

Властивість 4 (теорема Рімана). Якщо ряд збігається умовно, то для будь-якого числа A, можна так переставити члени цього ряду, що перетворений ряд збігатиметься до A.

Зауважимо, що члени умовно збіжного ряду можна переставити так, що одержаний ряд буде розбіжним.