ВВЕДЕНИЕ.

Тяжело в ученье, легко в бою!

М. И. Кутузов

Объектом изучения теории массового обслуживания (ТМО) являются процессы обработки поступающих потоков сообщений системами массового обслуживания, а именно их количественные характеристики. Примерами систем массового обслуживания могут служить телефонные станции, локальные и глобальные вычислительные сети и т.п.

Основы новой теории были заложены в трудах датского математика, сотрудника Копенгагенской телефонной компании А. К. Эрланга (принцип статистического равновесия) и получили дальнейшее развитие в работах многих отечественных и зарубежных ученых .

Математическая модель системы массового обслуживания (СМО) включает четыре основных элемента: поток поступающих сообщений, систему обслуживания, характеристики качества и дисциплину обслуживания.

Понятие ***потока сообщений*** включает информацию о модели потока вызовов (требований на соединение), законе распределения, длительности обслуживания (передачи) сообщений, множестве адресов источников и приемников сообщений, а так же типе занимаемого для передачи сообщений канала и способе передачи - аналоговом или дискретном. ***Система обслуживания*** характеризуется структурой построения и набором структурных параметров. Под ***дисциплиной обслуживания*** поступающих сообщений понимают: способ обслуживания (с явными потерями, ожиданием, повторением или комбинированный), порядок обслуживания (в порядке очередности, случайном порядке или с приоритетом), а также другую информацию, характеризующую взаимодействие потока сообщений с системой обслуживания. К ***характеристикам качества обслуживания*** относятся:

1. Вероятность явной или условной потери сообщения

2. Среднее время задержки сообщения
3. Средняя длинна очереди
4. Вероятность потери поступившего вызова
5. Интенсивность обслуженной нагрузки и др.

При исследовании СМО могут решаться:

1. задачи **анализа** СМО - определение характеристик качества обслуживания в зависимости от параметров и свойств входящего потока сообщений, параметров и структуры системы обслуживания и дисциплины обслуживания;
2. задачи **параметрического синтеза** - определение параметров системы обслуживания при ее заданной структуре в зависимости от параметров и свойств потока сообщений, дисциплины и качества обслуживания.
3. задачи **синтеза структуры системы с оптимизацией ее параметров** таким образом, чтобы при заданных потоках, дисциплине и качестве обслуживания стоимость СМО была минимальной, либо были минимальными потери вызовов при заданных потоках, дисциплине и стоимости системы.

Математический аппарат теории массового обслуживания информации базируется на теории вероятностей, комбинаторике и математической статистике. Методы последней применяются в основном для обработки данных, получаемых при измерении параметров потоков сообщений и показателей качества обслуживания в реальных системах, а также при моделировании таких систем на ЭВМ. Для решения конкретных задач используются также сведения из других разделов математики, а именно: линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления, теории графов, системного анализа.

Основным инструментом исследования в ТМО является метод уравнений вероятностей состояний, основанный на принципе статистического равновесия. Для системы обслуживания вводится понятие состояния. В простейшем случае состояние системы характеризуется одной случайной переменной, например числом занятых линий или вызовов, находящихся на обслуживании и в очереди.

При поступлении очередного вызова, окончании обслуживания сообщения или изменении фазы работы управляющего устройства система меняет свое состояние. Интенсивности перехода из одного состояния в другое обычно известны на основании свойств потоков вызовов и освобождений. Это позволяет построить размеченный граф состояний и составить систему уравнений, связывающих между собой вероятности соседних состояний. Систему можно решить аналитически или численно. Примером аналитического решения являются распределения Эрланга, Энгсета, Бернулли, Пуассона.

При отсутствии аналитического решения в ряде случаев удается построить вычислительный алгоритм на основе рекуррентных соотношений, получаемых непосредственно из системы уравнений.

Наиболее универсальным, пригодным для решения задач практически любой сложности, является метод статистического моделирования. Математическая модель процесса обслуживания при этом реализуется в виде программы для ЭВМ. Моделирование позволяет получить численные характеристики качества обслуживания при конкретных параметрах потока, СМО и заданной дисциплине обслуживания. Результаты моделирования используют для проверки гипотез и предположений, уточнения эмпирических коэффициентов. При моделировании получают приближенную оценку характеристик качества обслуживания, однако за счет увеличения времени, а также применения специальных методов моделирования, достигается требуемая точность.

1. СЛУЧАЙНЫЕ ПОТОКИ ВЫЗОВОВ

1.1. Свойства случайных потоков.

Случайные потоки вызовов классифицируются в зависимости от наличия или отсутствия трех следующих свойств: ***стационарности, последействия и ординарности.***

Стационарность означает, что с течением времени вероятностные характеристики потока не меняются. Стационарность потока равносильна постоянной плотности вероятности поступления вызовов в любой момент времени, иначе говоря, для стационарного потока вероятность поступления $\boldsymbol{i}$ вызовов за промежуток длиной Δt зависит только от величины промежутка и не зависит от его расположения на оси времени (1.1).

$$P_i(t + \Delta t) = P_i\left(t_1 + \Delta t\right) = P_i(\Delta t) \qquad (1.1)$$

Реально поступающий, например на ГТС или МТС, поток вызовов имеет явно выраженный нестационарный характер. Интенсивность потока — число вызовов в единицу времени — существенно зависит от времени суток, дня недели и даже времени года. Однако внутри суток всегда можно выделить одно- или двухчасовые промежутки, в течение которых поступающий поток вызовов близок к стационарному.

Любой стационарный поток можно задать семейством условных вероятностей $\boldsymbol{F_i(t)}$ поступления $\boldsymbol{i}$ (i=0, 1, 2, 3, ...) вызовов в промежутке $\boldsymbol{t}$, если в начальный момент этого промежутка поступил вызов.

Последействие означает зависимость вероятностных характеристик потока от предыдущих событий. Иными словами, вероятность поступления $\boldsymbol{i}$ вызовов в промежуток $\boldsymbol{[t_1,t_2]}$ зависит от числа, времени поступления и длительности обслуживания вызовов до момента $\boldsymbol{t_1}$. Для случайного потока без последействия условная вероятность поступления вызовов в промежутке $\boldsymbol{[t_1,t_2]}$, вычисленная при любых предположениях о течении процесса обслуживания вызовов до момента t_1, равна безусловной (1.2).

$$P_i\left(\left[t_1,t_2\right]\right)\left|t < t_1\right. = P_i\left(\left[t_1,t_2\right]\right) \qquad (1.2)$$

Поэтому подобный поток можно задать семейством безусловных вероятностей $\mathbf{P_i(t_1,t_2)}$ поступления ***i*** вызовов в промежутке $[t_1,t_2]$. Стационарный поток без последействия соответственно можно задать семейством вероятностей $P_i(t)$ поступления ***i*** вызовов в любом промежутке длиной ***t***.

Поток вызовов, поступающих от достаточно большой группы источников, близок по своим свойствам к потоку без последействия, если при этом не учитывать повторных вызовов. Поток от малой группы, наоборот, обладает заметным последействием, поскольку число свободных источников, в свою очередь, зависит от предыдущих событий, чем и определяется последействие потока.

Поток повторных вызовов также является примером потока с последействием, поскольку повторный вызов возникает как результат потери предыдущего вызова, т. е. налицо зависимость от предыдущих событий.

Ординарность означает практическую невозможность группового поступления вызовов. Иначе говоря, вероятность поступления двух или более вызовов за любой бесконечно малый промежуток времени Δt есть величина бесконечно малая более высокого порядка, чем Δt , т.е.

$$P_{i\geq 2}(\Delta t) = 0(\Delta t) \qquad (1.3)$$

1.2.Вероятностные характеристики случайных потоков

К основным характеристикам случайного потока относят ***ведущую функцию, параметр и интенсивность***. ***Ведущая функция*** случайного потока $\bar{x}(0,t)$ есть математическое ожидание числа вызовов в промежутке [0, *t)*. Функция $\bar{x}(0,t)$ - неотрицательная, неубывающая и в практических задачах теории распределения информации непрерывна и принимает только конечные значения.

Параметр потока $\lambda(t)$ в момент времени t есть предел отношения вероятности поступления не менее одного вызова в промежутке $[t, t+\Delta t]$ к величине этого промежутка Δt при $\Delta t -> 0$

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{i \geq 1}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} \qquad (1.4)$$

Параметр потока определяет плотность вероятности наступления вызывающего момента в момент *t.* Определение параметра равносильно предположению, что вероятность поступления хотя бы одного вызова в промежутке $[t, t+\Delta t]$ с точностью до бесконечно малой пропорциональна промежутку и параметру потока $\lambda(t)$:

$$P_i \geq_1 (t, t+\Delta t) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t) \qquad (1.5)$$

Для стационарных потоков вероятность поступления вызовов не

зависит от времени, т. е., $P_i \geq_1 (t, t+\Delta t) = P_i \geq_1 (\Delta t)$, поэтому параметр стационарного потока постоянный. Соответственно получаем

$$P_i \geq_1 (\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \qquad (1.6)$$

Интенсивность стационарного потока μ есть математическое ожидание числа вызовов в единицу времени. Для нестационарных потоков используются понятия средней и мгновенной интенсивности. Средняя интенсивность потока в промежутке $[t_1, t_2]$ есть математическое ожидание числа вызовов в этом промежутке в единицу времени. Среднюю интенсивность потока можно выразить через ведущую функцию:

$$\mu(t_1, t_2) = \left[\overline{x}(0, t_2) - \overline{x}(0, t_1)\right] / (t_2 - t_1). \qquad (1.7)$$

Мгновенная интенсивность потока $\mu(t)$ в момент t есть производная ведущей функции потока по *t:*

$$\mu(t) = \overline{x'}(0,t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\overline{x}(0,t+\Delta t) - \overline{x}(0,t)\right]\Big/\Delta t \quad (1.8)$$

Если мгновенная интенсивность характеризует поток вызовов, то параметр - поток вызывающих моментов. Поэтому всегда $\mu(t) \geq \lambda(t)$, а равенство имеет место только для ординарных потоков, когда в каждый вызывающий момент поступает только один вызов.

При рассмотрении конкретных математических моделей потоков удобно, используя признак последействия, распределить все изучаемые модели по трем классам: потоки без последействия, с простым и ограниченным последействием. В класс потоков без последействия входят: простейший, пуассоновский с переменным или случайным параметром, неординарный пуассоновский и пуассоновский с неординарными вызовами. К потокам с простым последействием относятся: примитивный, сглаженный, с повторными вызовами и поток освобождений. Ограниченным последействием обладают рекуррентный поток, поток Пальма, поток Эрланга.

1.3.Простейший поток вызовов

Стационарный ординарный поток без последействия называется простейшим. Задается простейший поток семейством вероятностей $P_i(t)$ поступления $i(i=\overline{0,\infty})$ вызовов в промежутке *t.* Для определения функции $P_i(t)$ исследуем процесс поступления *i* вызовов в течение двух соседних произвольно расположенных на оси времени промежутков *t* и Δt

$$\begin{aligned} &P_i(t+\Delta t) = P(i,t;0,\Delta t) + P(i-1,t;1,\Delta t) + \\ &+ P(i-2,t;2,\Delta t) + \ldots + P(1,t;i-1,\Delta t) + P(0,t;i,\Delta t) = \\ &= \sum_{j=0}^{i} P(i-j,t;j,\Delta t) \end{aligned} \quad (1.9.)$$

Здесь $P(i-j,t;j,\Delta t)$ - вероятность следующего совместного события: в промежуток *t* поступает *(i-j)* вызовов, а в промежуток Δt поступает *j* вызовов.

Данную вероятность можно представить как произведение двух безусловных вероятностей $P_{i-j}(t)$ и $P_j(\Delta t)$, поскольку ввиду отсутствия последействия вероятность поступления вызовов в промежутке Δt не зависит от числа поступивших вызовов в промежутке t

$$P_i(t+\Delta t) = \sum_{j=0}^{i} P_{i-j}(t) P_j(\Delta t) \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) можно значительно упростить, если учесть (1.3)

$$P_i(t+\Delta t) = P_i(t) P_0(\Delta t) + P_{i-1}(t) P_1(\Delta t) + o(\Delta t) \tag{1.11}$$

Вероятность $P_1(\Delta t)$ определяем из выражения (1.6) с учетом ординарности потока:

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \tag{1.12}$$

Вероятность

$$P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t) - P_{i \geq 2}(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) \tag{1.13}$$

Подставим выражения (1.12) и (1.13) в систему уравнений (1.14), затем перенесем в левую часть уравнений $P_i(t)$ и поделим обе части уравнений на Δt

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем систему дифференциальных уравнений:

$$P_i'(t) = -\lambda P_i(t) + \lambda P_{i-1}(t) \tag{1.14}$$

Начальными условиями для системы (1.14) являются

$$P_0(0) = 1; \; P_i(0) = 0, i = \overline{1, \infty} \tag{1.15}$$

Решением (1.14) с учетом условий (1.15) служит выражение, которое носит название формулы Пуассона:

$$P_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \tag{1.16}$$

1.4. Распределение промежутка между вызовами в простейшем потоке

Выражение (1.16) является одним из возможных способов задания простейшего потока. Другим способом может служить распределение промежутка z между соседними вызовами $P(z<t)$. Определим $P(z<t)$ через вероятность противоположного события

$$P(z < t) = 1 - P(z > t) \tag{1.17}$$

Вероятность $P(z>t)$ равносильна вероятности того, что внутри промежутка длиной *t* не поступит ни одного вызова.

$$P(z>t)=P_0(t)$$

Тогда, рассчитывая $P_0(t)$ по формуле Пуассона,

$$P(z<t)=1-P_0(t)=1-e^{-\lambda t} \tag{1.18}$$

Дифференцируя (1.18) по *t,* находим плотность распределения

$$p(t)=e^{-\lambda t} \tag{1.19}$$

Закон распределения с плотностью (1.19) называется экспоненциальным, а λ – его параметром. Определим математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение промежутка z:

$$M_Z=\int_0^\infty tp(t)dt=\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt=1/\lambda \tag{1.20}$$

$$D_Z=\int_0^\infty t^2p(t)dt-M^2z=\int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}dt-1/\lambda^2=1/\lambda^2\,; \tag{1.21.}$$

$$\sigma z=\sqrt{Dz}=1/\lambda \tag{1.22.}$$

Полученное совпадение величин M_z и σ_z характерно для показательного распределения. Это свойство на практике используют как критерий для первоначальной проверки соответствия гипотезы о показательном распределении полученным статистическим данным.

1.5. Примитивный поток

Ординарный поток, параметр которого λ_i , пропорционален числу свободных источников N_i в состоянии обслуживающей системы i, называется примитивным:

$$\lambda_i = \alpha(N - i) \qquad (1.23)$$

Здесь α – параметр (интенсивность) источника в свободном состоянии;

N - общее число источников; i—число занятых источников.

Примитивный поток описывает поступление вызовов в замкнутой системе. Модель примитивного потока учитывает так называемый эффект конечного числа источников - новые вызовы могут поступать только от свободных источников. Это определяет скачкообразное изменение параметра потока, причем наибольшее значение параметр принимает, когда все источники свободны, и наименьшее, когда число занятых источников достигает максимума. Это свойство примитивного потока существенным образом влияет на процесс обслуживания и заметно повышает пропускную способность обслуживающей системы.

Математическое ожидание параметра потока

$$\lambda = \sum \lambda_i P_i \qquad (1.24)$$

где P_i—вероятность того, что занято i источников. Величина λ, отнесенная к одному источнику

$$\nu = \lambda / N \qquad (1.25.),$$

определяет среднюю интенсивность источника.

Распределение промежутка свободности подчиняется показательному закону с параметром α:

$$P(tсв < t) = 1 - e^{-\alpha t} \qquad (1.26)$$

Это равносильно предположению, что новые вызовы от источника поступают случайно, независимо от моментов возникновения и окончания обслуживания предыдущих вызовов. Примитивный поток является более общим понятием по сравнению с простейшим. С ростом числа источников N и соответствующим уменьшением α последействие примитивного потока сокращается. В пределе при ограниченном значении i и

$$N \to \infty, \text{ а } \alpha \to 0, \text{ но так, что } N\alpha = const,$$

примитивный поток переходит в простейший с параметром $\lambda = N\alpha$. Практически уже при $N \geq 300 - 500$ (в зависимости от величины α и максимального значения i) можно пользоваться более простой моделью простейшего потока. Вносимая при этом погрешность невелика.

1.6. Поток освобождений

Последовательность моментов окончания обслуживания вызовов образует поток освобождений. Свойства потока освобождений в общем случае зависят от свойств поступающего потока вызовов, качества работы СМО и закона распределения времени обслуживания.

Наиболее простым и самым распространенным законом распределения случайного времени обслуживания является показательный:

$$P(\xi < t) = 1 - e^{-t/h} \tag{1.27}$$

где h—среднее время обслуживания.

Основное свойство показательного распределения обусловливает полную независимость моментов окончания обслуживания от моментов начала обслуживания поступающих вызовов. Поэтому свойства потока освобождений в этом случае не зависят от свойств поступающего потока вызовов и от качества работы коммутационной системы и полностью определяются числом обслуживаемых вызовов. Если в коммутационной системе занято k каналов (k источников находится на обслуживании), то вероятность освобождения i каналов за промежуток t можно рассматривать как i успешных испытаний среди общего числа k независимых испытаний и определить согласно распределению Бернулли

$$P(i,k,t) = C^i_k p^i (1-p)^{k-i}$$

где p—вероятность освобождения одного канала за время t.

Учитывая (1.27), имеем:

$$P(i,k,t) = C^i{}_k \left[1 - e^{-t/h}\right]^i e^{-(k-i)t/h} \tag{1.28}$$

Вероятность того, что за время t не освободится ни один из занятых каналов,

$$P(0,k,t) = e^{-tk/h} \qquad (1.29),$$

а вероятность того, что освободится хотя бы один канал,

$$P(i \geq 1,k,t) = 1 - P(0,k,t) = 1 - e^{-kt/h} \tag{1.30}$$

По определению, параметр потока освобождений при занятости k каналов

$$\lambda_{косв} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(i \geq 1,k,\Delta t)}{\Delta t} \tag{1.31}$$

Вероятность $P(i \geq 1,k,\Delta t)$ находим из (1.30) с учетом разложения функции e^{-x} в ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^j / j!$:

$$P(i \geq 1,k,\Delta t) = 1 - \sum (-1)^j \left(\frac{k\Delta t}{h}\right)^j \Big/ j! = k\Delta t / h + o(\Delta t) \tag{1.32}$$

Тогда

$$\lambda_{осв} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[k/h + o(\Delta t)/\Delta t\right] = k/h \tag{1.33}$$

Аналогично, исследуя вероятность освобождения не менее двух линий за малый промежуток Δt, получаем, что $P(i \geq 2,k,\Delta t) = o(\Delta t)$. Таким образом, поток освобождений является ординарным и параметр его пропорционален числу занятых линий (источников). Коэффициентом пропорциональности служит величина, обратная среднему времени обслуживания, которую можно интерпретировать как интенсивность источника в занятом состоянии. Следовательно, ***поток освобождений по своим свойствам подобен примитивному потоку***.

Однако если коммутационная система работает таким образом, что освободившаяся линия тут же занимается новым вызовом, поток освобождений обладает постоянным параметром $\boldsymbol{v/h}$ (где v- общее число линий в системе) и по своим свойствам является простейшим. В этом случае вероятность того, что за промежуток t произойдет i освобождений,

$$P_i(t) = \left(\frac{vt}{h}\right)^i e^{\frac{vt}{h}} / i!, \qquad (1.34)$$

В теории массового обслуживания для упрощения расчетных формул ***величина h - среднее время обслуживания - принимается за условную единицу времени (у.е.в.)***

2. СМО С ЯВНЫМИ ПОТЕРЯМИ (M_R/M/V/L)

2.1.Распределение вероятностей состояний

Рассматривается следующая математическая модель. На *V*-канальную СМО поступает поток вызовов с простым последействием. Время обслуживания одного вызова - случайная величина, распределенная по показательному закону со средним значением, принятым за единицу времени *(h=1* у.е.в.). Дисциплина обслуживания - с явными потерями сообщений. Число занятых каналов $i(i=\overline{0,\nu})$ назовем состоянием исследуемой системы. Параметр потока вызовов Λ_i, выражен в выз/у.е.в. (Эрл); его можно также трактовать как интенсивность поступающей нагрузки в состоянии системы *i.,* тогда интенсивность потока освобождения равна числу занятых каналов *i.* При поступлении вызова или окончании его обслуживания система скачкообразно переходит из одного состояния в другое. Допустим, в момент времени *t=0* известно состояние ***i*** системы либо распределение вероятностей состояний *Pi(0)*.

Возникает задача: найти распределение вероятностей $P_i(t)$ в момент *t.*

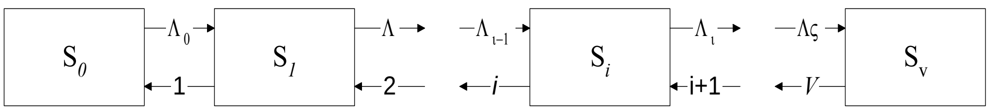


Рис.2.1. Граф состояний СМО с явными потерями

Решение дает дифференциальное уравнение

$$P_i'(t)=\Lambda_{i-1}P_{i-1}(t)+(i+1)P_{i+1}(t)-(\Lambda_i+i)P_i(t), i=\overline{0,\nu} \qquad (2.1)$$

Вероятности $P_{-1}(t)\equiv 0$ и $P_{\nu+1}(t)\equiv 0$ как вероятности несуществующих состояний.

Система уравнений (2.1) описывает переходный режим работы исследуемой системы обслуживания. Вероятности $P_i(t)$, являющиеся решением системы (2.1), зависят от начальных условий, т. е. от распределения $P_i(0)$. Однако для большинства практических задач можно ограничиться исследованием более простого установившегося режима, достигаемого системой обслуживания при $t \to \infty$.При этом вероятности $P_i(t)$ стремятся к постоянному пределу P_i, не зависящему от t и начального распределения $P_i(0)$. Соответственно $P_i' \to 0$. Система (2.1) превращается в линейную систему однородных уравнений:

$$(\Lambda_i + i)P_i = \Lambda_{i-1}P_{i-1} + (i+1)P_{i+1} \qquad (2.2)$$

Предельное распределение вероятностей P_i характеризует работу системы обслуживания в состоянии ***статистического равновесия***. В этих условиях система обслуживания по-прежнему подвержена изменениям, однако вероятности, описывающие ее поведение, не меняются со временем. Систему (2.2) можно получить непосредственно, если воспользоваться следующим правилом, справедливым для состояния статистического равновесия: сумма интенсивностей выхода из состояния системы *i,* взвешенная вероятностью P_i равна сумме взвешенных вероятностями соответствующих состояний интенсивностей входа в это состояние.

Обозначим через

$$F_i = \Lambda_i P_i - (i+1)P_{i+1} \qquad (2.3.)$$

тогда из (2.2)

$$F_i = F_{i-1} = F_{i-2} = ... = F_0 = 0.$$

Отсюда получаем простое рекуррентное соотношение для вычисления вероятностей P_i

$$(i+1)P_{i+1} = \Lambda_i P_i, i = \overline{0, \nu - 1} \qquad (2.4)$$

Задаваясь значениями *i,* последовательно равными 0, 1, 2, ..., получаем

$$P_i = \frac{\Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_2 ... \Lambda_{i-1}}{i!} P_0 = \prod_{k=0}^{i-1} \Lambda_k P_0 / i! \qquad (2.5)$$

Для определения P_0 воспользуемся условием нормировки $\sum_{j=0}^{\nu} P_j = 1$

Тогда

$$P_0 = \left[\sum_{j=0}^{v} \prod_{k=0}^{j-1} \Lambda_k / j! \right]^{-1} \tag{2.6}$$

и окончательно

$$\boxed{P_i = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \Lambda_k / i!}{\sum_{j=0}^{v} \prod_{k=0}^{j-1} \Lambda_k / j!}} \qquad i = \overline{o,v} \tag{2.7}$$

Выражение (2.7) есть искомое распределение вероятностей для установившегося режима. Оно определяет ***вероятность занятости в произвольный момент і каналов системы*** при обслуживании с явными потерями потока вызовов с простым последействием. Вероятность P_i, можно трактовать как ***долю времени (на бесконечном интервале), в течение которой в исследуемой системе занято і выходов***.

Рассмотрим четыре основных случая распределения (2.7)

1. Поток вызовов примитивный с параметром $\Lambda_i = \alpha(N-i)$ дисциплина

обслуживания с явными потерями (2.8). Система ***M_i /M/V/L***. В этом случае

$$\Lambda_0\Lambda_1\Lambda_2...\Lambda_{i-1} / i! = \alpha N \alpha(N-1)\alpha(N-2)...\alpha(N+1-i) / i! = C_N^i \alpha^i \tag{2.8}$$

Подстановка выражения (2.8) в (2.7) дает ***распределение Энгесета*** (усеченное распределение Бернулли).

$$P_i = C_N^i \alpha^i / \sum_{j=0}^{V} C_N^j \alpha^j \tag{2.9}$$

2. Поток вызовов простейший с параметрами Λ, дисциплина обслуживания с явными потерями. Система ***M/M/V/L.*** Из (2.7) непосредственно следует ***первое распределение Эрланга*** (усеченное распределение Пуассона):

$$P_i = \frac{\Lambda^i / i!}{\sum_{j=0}^{V} \Lambda^j / j!} \qquad (2.10)$$

Распределение Эрланга можно получить также из распределения Энгсета, если устремить $N \to \infty$, а $\alpha \to 0$, но так, что $N\alpha = \Lambda = const$.

3. Поток вызовов примитивный с параметром $\Lambda_i = \alpha(N - i)$, дисциплина обслуживания без потерь. Система ***Mi/M/V/LL.*** Для обслуживания N источников вызовов без потерь необходимо, чтобы число выходов в системе $v = N$. При этом выражение (2.9) с учетом бинома Ньютона $\sum_{j=0}^{N} C^j{}_N a^J b^{N-j} = (a+b)^N$ принимает вид:

$$P_i = C_N^i \alpha^i / \sum C_N^j \alpha^j = C_N^j \alpha^j / (1+\alpha)^N \qquad (2.11)$$

Обозначив $\alpha = \alpha / 1 + \alpha$, после несложного преобразования получаем ***распределение Бернулли***:

$$P_i = C_N^i \alpha^i (1-\alpha)^{N-1} \qquad (2.12)$$

При числе выходов $v = N$ каждый источник как бы закрепляется за определенным выходом и занятие любого выхода происходит независимо от других. Если в произвольный момент исследуется состояние выходов системы обслуживания, то каждый занятый выход можно рассматривать как очередное успешное испытание из общего числа N независимых испытаний. Этим объясняется, что в данном случае распределение вероятностей числа занятых выходов совпадает с известным распределением Бернулли для независимых испытаний. Величина α определяет вероятность одного успешного испытания, т.е. занятия определенного выхода.

4. Поток вызовов простейший с параметром Λ, дисциплина обслуживания без потерь. Система ***M/M/V/LL.*** В этом случае число выходов в системе должно быть ограниченным, т.е. $v \to \infty$. Из распределения (2.11) с учетом разложения функции e^{Λ} в ряд Маклорена $\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^J / J!$ получаем

распределение Пуассона:

$$P_i = \frac{\Lambda^i / i!}{\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^i / j!} = \frac{\Lambda^i}{i!} e^{-\Lambda} \tag{2.13}$$

Распределение Пуассона (2.13) можно также получить из распределения Бернулли (2.11) при $N \to \infty$ и $a \to 0$, но так что $Na \to \Lambda$. Таким образом, наиболее общим из рассмотренных четырех распределений является распределение Энгсета. Из него следует, с одной стороны, первое распределение Эрланга, а с другой - распределение Бернулли. Из последних двух разными способами можно получить распределение Пуассона. Необходимо отметить, что во всех рассмотренных распределениях параметры Λ, α, a, характеризующие поток вызовов, выражены в выз./у.е.в.(Эрл).

2.2.Характеристики качества работы системы *M/M/V/L*

2.2.1. Вероятность потерь по времени.

$$P_i = P_v = \frac{\Lambda^v / v!}{\sum_{j=0}^{v} \Lambda^j / j!} = E_v(\Lambda) \tag{2.14}$$

Формулу (2.14) (символическая запись $E_v(\Lambda)$) обычно называют ***первой формулой Эрланга.***

2.2.2. Вероятность потери вызова.

Для простейшего потока вызовов

$$P_d = \Lambda_{пот} / \Lambda = \Lambda P_v / \Lambda = P_v = E_v(\Lambda) \tag{2.15}$$

Таким образом, вероятность потери вызова совпадает с вероятностью потерь по времени.

2.2.3. Интенсивность обслуженной нагрузки.

В соответствии с определением обслуженной нагрузки как среднего числа (математического ожидания) занятых линий, используя рекуррентные соотношения (2.4), получаем

$$Y = \sum_{i=1}^{v} iP = \Lambda \sum_{i=1}^{v} P_{i-1} = \Lambda \sum_{i=0}^{v-1} P_i = \Lambda (1 - P_v) = \Lambda \left[1 - E_v(\Lambda) \right] \quad (2.16)$$

2.2.4. Интенсивность потенциальной нагрузки.

По аналогии с предыдущим

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} iP_i = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} P_i = \Lambda \quad (2.17)$$

В (2.17) вероятность P_i определяется в соответствии с распределением Пуассона (2.13). Равенство интенсивностей потенциальной и поступающей нагрузок обусловливает равенство интенсивностей потерянной $\Lambda_{\text{пот}}$ и избыточной R нагрузок:

$$\Lambda_{пот} = R = \Lambda E_v(\Lambda) \quad (2.18)$$

Из (2.18) непосредственно следует равенство потерь по нагрузке и по вызову. Таким образом, все три вида потерь (во времени, по нагрузке, вызова) равны между собой. Объясняется это двумя свойствами простейшей потока: стационарностью и отсутствием последействия.

3. СМО С ОЖИДАНИЕМ (M/M/V/W).

3.1. Второе распределение Эрланга

Рассматриваемая здесь модель во многом аналогична первой задаче Эрланга. *V*- канальная СМО обслуживает простейший поток вызовов. Время обслуживания одного вызова случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону со средним значением, принятым за единицу времени *(h=1* у.е.в.) Параметр потока вызова Λ, выраженный в эрлангах, можно рассматривать как интенсивность поступающей нагрузки. При занятости всех v выходов поступивший вызов становится в очередь и обслуживается после некоторого ожидания. Общее число вызовов, находящихся в системе на обслуживании и в очереди, обозначим $i(i=\overline{0,\infty})$ и назовем состоянием системы. При $i=\overline{0,v}$ величина i характеризует число занятых выходов в системе, при $i=\overline{0,\infty}$ число занятых выходов равно v, а разность $i-v$ есть длина очереди. Параметр потока освобождений определяется числом занятых выходов и в первом случае $i=\overline{0,v}$ зависит от состояния системы *i,* а во втором. $i=\overline{v\infty}$ имеет постоянное значение *v*.

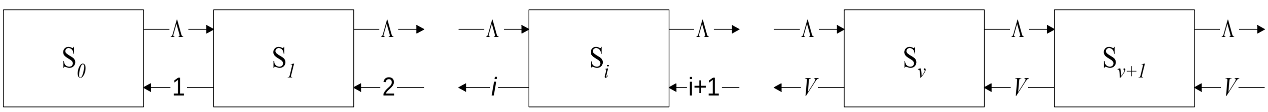


Рис.3.1. Граф состояний СМО с ожиданием

Вероятность того, что система в установившемся режиме находится в состоянии ***i***, обозначим через P_i. По аналогии с (2.2) система уравнений для состояния статистического равновесия имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}(\Lambda+i)P_i &= \Lambda P_{i-1}+(i+1)P_{i+1}, i=\overline{0,v-1};\\ (\Lambda+v)P_i &= \Lambda P_{i-1}+vP_{i+1}, i=\overline{v,\infty}.\end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Обозначим

$F =_i \Lambda P_{i-1}+(i+1)P_{i+1}$ при $i=\overline{0,v-1}$ и

$F =_i \Lambda P_{i-1}+vP_{i+1}$ при $i=\overline{v,\infty}$

Тогда из (3.1) получаем

$F_i = F_{i-1} = ... = F_0 = 0$,откуда следуют два простых рекуррентных соотношения для вычисления вероятностей *Pi:*

$$\left.\begin{aligned} (i+1)\,P_{i+1} &= \Lambda P, i = \overline{0, v-1}; \\ vP_{i+1} &= \Lambda P_i = \overline{v, \infty}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Принимая значения *i* последовательно равными 0, 1, 2,..., получаем

$$\left.\begin{aligned} P_i &= \Lambda^i P_0 / i!, i = \overline{0, v}; \\ P_i &= (\Lambda / v)^{i-v} \Lambda^v P_0 / v!, i = \overline{v, \infty}. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Для определения вероятности P_0 воспользуемся условием нормировки $\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$. При подстановке в это условие выражения (3.3) имеем

$$P_0 = \left[\sum_{j=0}^{v-1}\left(\Lambda^i / j\right)! + \frac{\Lambda^v}{v!}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\Lambda/v\right)^j\right]^{-1} \tag{3.4}$$

Выражение $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\Lambda/v\right)^j$ в (3.4) есть сумма бесконечной геометрической прогрессии. При $\Lambda \geq v$ ряд $\left(\Lambda/v\right)^j$ расходится и сумма его стремится к бесконечности. Соответственно $P_0 \to 0$, и все вероятности $P_i \to 0$ при конечном значении *i.* Можно показать, что $\lim_{\to\infty} P_i = 1 \Rightarrow P_\infty \to 1$. Это означает, что при интенсивности поступающей нагрузки Λ, равной или большей числа выходов системы *v, с* вероятностью 1 постоянно будут заняты все выходы и длина очереди будет бесконечной. Поэтому, чтобы система могла функционировать нормально и очередь не росла безгранично, необходимо выполнить условие $\Lambda < v$. В этом случае прогрессия $(\Lambda < v)^j$ будет убывающей и сумма ее $\sum(\Lambda / v)^j = v / (v - \Lambda)$. Соответственно

$$P_0 = \left\{\sum_{j=0}^{v-1}\Lambda^j / j! + \Lambda^v / \left[(v-\Lambda)(v-1)!\right]\right\}^{-1} \tag{3.5}$$

С учетом (3.3) и (3.5) получаем ***второе распределение Эрланга***:

$$P_i = \frac{\Lambda^i / i!}{\sum_{j=0}^{v-1} \Lambda^j / j! + \Lambda^v / \left[(v-\Lambda)(v-1)!\right]}, \quad i = \overline{0,v}; \tag{3.6}$$

$$P_i = \frac{(\Lambda / v)^{i-v} \Lambda^v / v!}{\sum_{j=0}^{v-1} \Lambda^j / j! + \Lambda^v / \left[(v-\Lambda)(v-1)!\right]}, \quad i = \overline{v,\infty}$$

3.2.Характеристики качества обслуживания

3.2.1. Вероятность ожидания для поступившего вызова

Для простейшего потока вызовов она совпадает с вероятностью занятости всех выходов в системе, т. е. с вероятностью потерь по времени:

$$P(\gamma > 0) = P_t = \sum_{k=v}^{\infty} P_k = \frac{\Lambda^v / (v-\Lambda)(v-1)!}{\sum \Lambda^j / j! + \Lambda^v \left[(v-\Lambda)(v-1)!\right]} = D_v(\Lambda) \tag{3.7}$$

Выражение (3.7) называется ***второй формулой Эрланга***.

Следует отметить, что всегда $D_v(\Lambda) > E_v(\Lambda)$ т. е. при одинаковой интенсивности поступающей нагрузки *вероятность ожидания в системе с ожиданием выше, чем вероятность потери вызова в системе с явными потерями.* Указанное превышение потерь объясняется тем, что при освобождении выхода в системе с явными потерями он предоставляется поступающему вызову, а в системе с ожиданием при наличии очереди - ожидающему. Вновь поступившему вызову в этом случае приходится становиться в очередь. Следует, однако, отметить, что абоненты значительно спокойнее относятся к небольшому ожиданию, чем к отказам. Поэтому при нормировании качества обслуживания можно допускать большее значение вероятности $P(\gamma > 0)$ по сравнению с величиной P_B в системе с явными потерями. В то же время проведенное сравнение несколько условно, поскольку рассматриваются принципиально разные дисциплины обслуживания: при занятости всех выходов в системе с явными потерями поступившее сообщение теряется, а в системе с ожиданием становится в очередь и обслуживается после некоторого ожидания.

3.2.2. Интенсивность обслуженной нагрузки.

В соответствии с определением, используя рекуррентные соотношения (3.2), получаем

$$Y = \sum_{i=1}^{v} iP_i + \sum_{i=v+1}^{\infty} vP_i = \Lambda \sum_{i=1}^{v} vP_{i-1} + \Lambda \sum_{i=v+1}^{\infty} P_{i-1} = \Lambda \sum_{i=v+1}^{\infty} vP_i = \Lambda \qquad (3.8)$$

Из-за отсутствия явных потерь сообщений интенсивность поступающей нагрузки совпадает с интенсивностью обслуженной и избыточная нагрузка отсутствует. Поскольку для простейшего потока интенсивность потенциальной нагрузки равна интенсивности поступающей, потерянная нагрузка также отсутствует. Однако не всегда в системе с ожиданием потери по нагрузке равны нулю. При обслуживании примитивного потока (данная модель здесь не рассматривается) источник за счет ожидания в среднем меньше находится в свободном состоянии, чем в системе без потерь. Это приводит к снижению интенсивности потока вызовов и поступающая нагрузка меньше потенциальной. И хотя все поступающие вызовы обслуживаются (равенство (3.8) сохраняется), потери по нагрузке имеют место.

На основании (3.8) величину Λ можно рассматривать как математическое ожидание числа занятых выходов, в $v-\Lambda$-соответственно как математическое ожидание числа свободных выходов.

3.2.3. Вероятность превышения длиной очереди заданной величины *n*.

Используя последовательно (n+1) раз второе рекуррентное соотношение (3.2), получаем

$$P(S>n) = \sum_{i=v+n+1}^{\infty} P_i = \left(\Lambda/v\right)^{n+1} \sum_{i=v+n+1}^{\infty} P_{i-n-1} = \left(\Lambda/v\right)^{n+1} \sum_{i=v1}^{\infty} P = \\ = \left(\Lambda/v\right)^{n+1} D_v\left(\Lambda\right) \qquad (3.9)$$

3.2.4. Средняя длина очереди.

С учетом равенства $\sum_{i=0}^{\infty} iq^i = q/(1-q)^2$, получаем

$$\overline{S} = \sum_{i=v}^{\infty}(i-v)P_i = \sum_{i=0}^{\infty} iP_{i+v} = P_v \sum_{i=0}^{\infty} i(\Lambda/v)^i = P_v \Lambda / v(1-\Lambda/v)^2 = \\ = \Lambda D_v(\Lambda)/(v-\Lambda). \tag{3.10}$$

Величина $\overline{S}$ есть интенсивность нагрузки, создаваемой ожидающими вызовами, а $\Lambda P(j>0)$ - интенсивность потока задержанных вызовов, где каждый задержанный вызов в среднем ждет $\overline{\gamma_3}$. Тогда

$$\overline{S} = \Lambda P(\gamma > 0)\overline{y_3} \tag{3.11}$$

3.2.5. Средняя длительность ожидания.

Из (3.10) и (3.11) следует

$$\overline{\gamma_3} = 1/(v-\Lambda) \tag{3.12}$$

Средняя длительность ожидания для любого поступившего вызова

$$\overline{\gamma} = \overline{\gamma_3} P(\gamma > 0) = D_v(\Lambda)/(v-\Lambda) \tag{3.13}$$

Величины $\overline{\gamma}_3$ и $\overline{\gamma}$ выражены в условных единицах времени.

3.2.6. Вероятность ожидания свыше допустимого времени $t_д$

Величину $P(\gamma > t_д)$ часто называют условными потерями. В отличие от предыдущих характеристик, вероятность $P(\gamma > t_д)$ зависит от вида очереди. Наиболее простое выражение $P(\gamma > t_д)$ получается при упорядоченной очереди. Рассмотрим этот случай. Вероятность $P(\gamma > t_д)$ можно представить в виде следующей суммы:

$$P(\gamma > t_д) = \sum P_i(\gamma > t_д)P_i \ , \tag{3.14.}$$

где $P_i(\gamma > t_д)$ - вероятность ожидания свыше $t_д$ при поступлении вызова в состоянии системы i. Очевидно, $P_i(\gamma > t_\partial) > 0$только при. $i = \overline{v,\infty}$ Для того чтобы поступивший вызов в состоянии системы i (длина очереди равна $i - v$) ждал начала обслуживания больше времени $t_д$, необходимо, чтобы за время $t_д$ освободилось не более $1 - v$ линий. Параметр потока освобождений при наличии очереди - постоянный и равен v. В этом случае в соответствии с (1.34) поток освобождений является простейшим и вероятность освобождения k линий за время $t_д$

$$P_k(t_\partial) = (vt_\partial)^k e^{-vt_\partial} / k! \tag{3.15}$$

Тогда

$$P_i(\gamma > t_\partial) = \sum_{k=0}^{i-v} P_k(t_\partial) = \sum_{k=0}^{i-v} \frac{(vt_\partial)^k}{k!} e^{-vt_\partial} \tag{3.16}$$

Подстановка (3.15) и (3.16) в (3.14) после ряда преобразовании дает

$$P(\gamma > t_\partial) = D_v(\Lambda) e^{-(v-\Lambda)t_\partial} \tag{3.17}$$

Величина t_∂ в (3.17) выражена в условных единицах времени.

4.МОДЕЛИРОВАНИЕ СМО ПО СХЕМЕ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ.

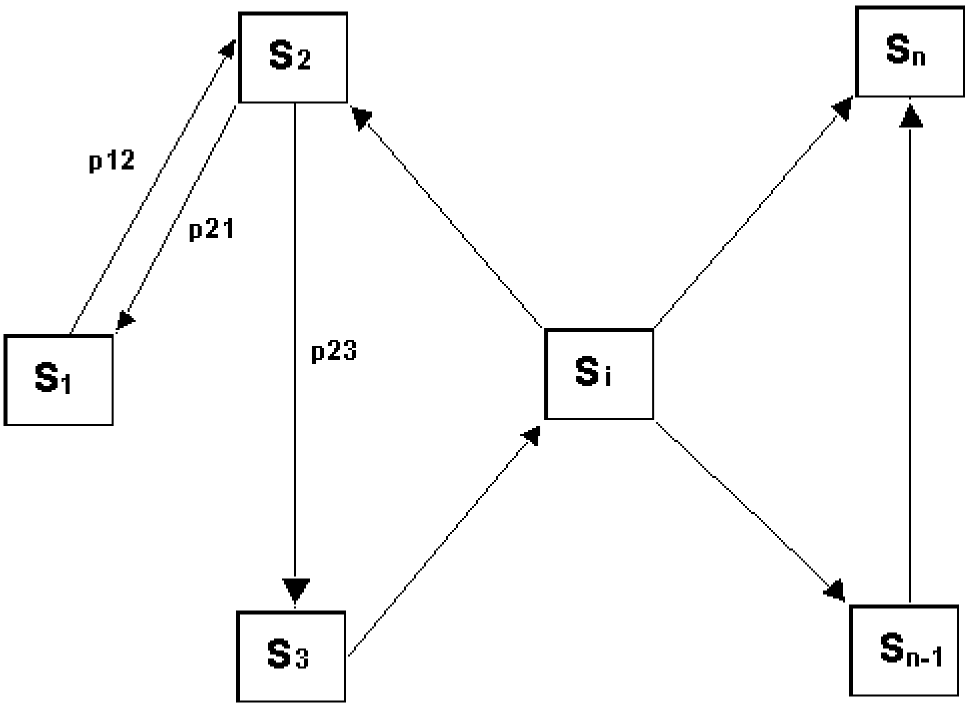
4.1. Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем

Случайный процесс, протекающий в некоторой системе S, называется марковским (“процесс без последствия”), если он обладает следующими свойствами:

для t_0 вероятность любого состояния в будущем ($t>t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем ($t=t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (от предыстории процесса).

Случайный процесс называется процессом с дискретными состояниями, если возможные состотяния системы можно перечислить S_1, S_2, S_3 ... , а сам процесс состоит в том, что время от времени S скачком (мгновенно) из первого состояния в другие.

Для такой системы можно изобразить “граф состояний”



Если переходы системы из S_i в S_j возможны только в строго определенные, заранее фиксированные моменты t_1, t_2, ..., имеем процесс с дискретным временем.

Если переходы возможны в любой, заранее неизвестный, случайный момент времени, имеем процесс с непрерывным временем.

Рассмотрим Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем как функцию целочисленного аргумента 1, 2, .., k (номер шага).

Обозначим $S_i^{(k)}$- после k шагов система в S_i для k события $S_1^{(k)}$, $S_2^{(k)}$, .., $S_i^{(k)}$, .., $S_n^{(k)}$- полная группа событий.

Процесс, происходящий в системе, можно представить как цепь событий:

$$S_1^{(0)},\ \ S_2^{(1)}, S_3^{(2)}, S_4^{(3)}, S_5^{(4)}, ...$$

такая цепь называется Марковской, если для любого шага вероятность перехода из S_i в S_j не зависит от того, когда и как система пришла в S_i.

$P_{ij}^{(k)}$-переходная вероятность: вероятность того, что на k шаге система перейдет из S_i в S_j.

Марковская цепь называется **однородной** если, переходная вероятность не зависит от номера шага k.

В противном случае- неоднородной.

Рассмотрим однородную Марковскую цепь S_1, S_2, .., S_n с заданной матрицей перехода.

$$[P_{ij}]= \begin{matrix} P_{11} & P_{12} & ... & P_{1j} & ... & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & ... & P_{2j} & ... & P_{2n} \\ .... & .... & ... & .... & ... & .... \\ P_{i1} & P_{i2} & ... & P_{ij} & ... & P_{in} \\ .... & .... & ... & .... & ... & .... \\ P_{n1} & P_{n2} & ... & P_{nj} & ... & P_{nn} \end{matrix} \qquad (4.1)$$

Если за 1 шаг система не может перейти из S_i в S_j то соответственно P_{ij}=0, P_{ii}- вероятность того, что система останется в S_i. Очевидно, что P_{ij}- условная вероятность

$$P_{ij}=P(S_j^{(k)}/S_i^{(k-1)}),$$

$$\sum_{j=1}^{n} Pij = 1 \text{ для i=1-n}$$

Найдем <u>вероятности состояний</u> $p_1(k)$, $p_2(k)$, ..., $p_n(k)$ после любого k шага.

Пусть в начальный момент система находится в состоянии S_m тогда $p_1(0)=0$, $p_2(0)=0$, $p_n(0)=0$.

За первый шаг система перейдет в одно из состояний $S_{1,} S_{2,} S_{m,} S$ с вероятностями $P_{m1,} P_{m2,} P_{mm,} P_{mn}$ следовательно

$$P_1(1)=P_{m1}, P_2(2)=P_{m2}, ..., P_m(1)=P_{mm}, ...,P_n(1)=P_{mn} \ (4.2)$$

Вероятности состояний после 2 шага вычислим по формуле полной вероятности.

Если некоторое событие A может произойти вместе с некоторыми событиями H_1, H_2, ..., H_n, образующими полную группу несовместных событий (H_i - гипотезы), то

$$\mathbf{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_I)}$$

В нашем случае, гипотезы:

- после 1 шага система в S_1
- после 2 шага система в S_2
- после n шага система в S_n

Их вероятность дает (4.2.).

Условие вероятности события (система после 2 шага в S_i) дает матрица перехода (4.1.).

$$\mathbf{P_1(2) = P_1(1) * P_{11} + P_2(1) * P_{21} + ... + P_n(1) P_{n1} = \sum_{j=1}^{n} P_j(1) * P_{j1}}$$

$$\mathbf{P_i(2) = \sum_{j=1}^{n} P_j(1) * P_{ij}}, \ i=1,n$$

Формально, суммируются все P_{ij}, фактически неравные 0.

Аналогично для 3 шага.

$$\mathbf{P_I(3) = \sum_{j=1}^{n} P_j(2) * P_{ij}}, \ i=1,n$$

и для k шага

$$\mathbf{P_i(k) = \sum_{j=1}^{n} P_j(k-1) P_{ij}}, \ i=1,n$$

рекуррентная формула для k шага через k-1.

Пример4.1 По некоторой цели ведется стрельба четырьмя выстрелами в моменты t_1, t_2, t_3, t_4.

Возможные состояния цели:

S_1 - цель невредима

S_2 - цель незначительно повреждена

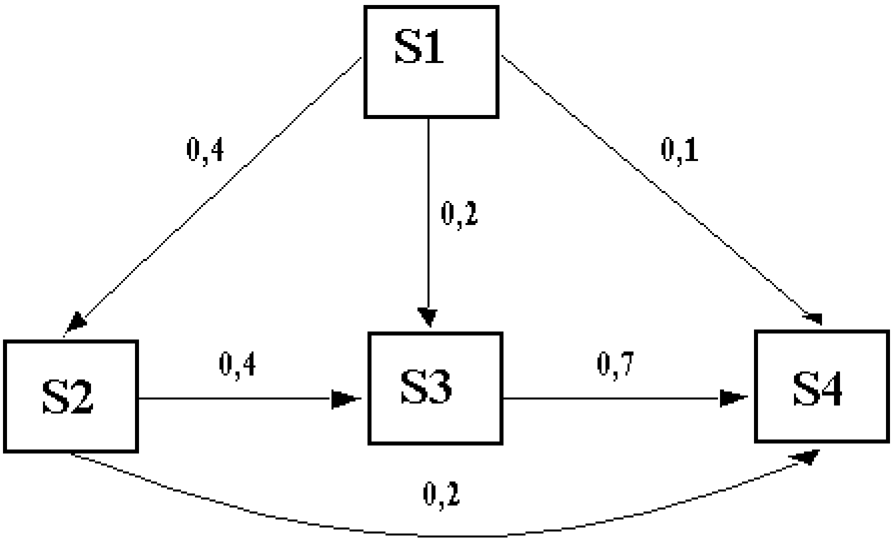
S_3 - цель имеет существенные повреждения

S_4 - цель разрушена

Задан граф состояний (рис.)

В начальный момент времени цель в S_1.

Определить вероятности состояний после 4х выстрелов.



$$[P_{ij}] = \begin{matrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 \end{matrix}$$

$P_1(0)=1$

1 шаг - 1 строка , $P_1(1)=0.3$, $P_1(1)=0.4$, $P_3(1)=0.2$, $P_4(1)=0.1$

2 шаг $P_1(2)=P_1(1)*P_{11}=0.3*0.3=0.09$

$P_2(2)=P_1(1)*P_{12}+P_2(1)P_{22}=0.3*0.4+0.4*0.4=0.28$

$P_3(2)=P_1(1)*P_{13}+P_2(1)*P_{23}+P_3(1)P_{33}=0.28$

$P_4(2)=P_1(1)*P_{14}+P_2(1)*P_{24}+P_3(1)P_{34}+P_4(1)P_{44}=$
$=0.3*0.1+0.4*0.2+0.2*0.7+0.1*1=0.35$

3 шаг $P_1(3)=P_1(2)*P_{11}=0.09*0.3=0.027$

$P_2(3)=P_1(2)*P_{12}+P_2(2)*P_{22}=0.09*0.4+0.28*0.4=0.14$

$P_3(3)=0.214$

$P_4(3)=0.611$

4 шаг $P_1(4)=0.0081$ S_1

$P_2(4)=0.07$ S_2

$P_3(4)=0.1288$ S_3

$P_4(4)=0.7931$ S_4

Рассмотрим более общий случай - неоднородной марковской цепи, для которой переходные вероятности меняются от шага к шагу.

Если нам задана матрица перехода для любого шага $[P_{ij}^{(k)}]$, а $P_{ij}^{(k)}=P(S_j^{(k)}/S_i^{(k)})$, то (4.3.) примет вид

$$\mathbf{P_i(k) = \sum_{j=1}^{n} P_J^{k-1} P_{ij}^{k}}$$

4.2. Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Уравнение Колмогорова.

Пусть некоторая система S может переходить из состояния в состояние

$S_1, S_2, ..., S_n$

в любой момент времени t.

Обозначим $P_i(t)$ - вероятность того, что в момент времени S будет в S_i, i=1,n

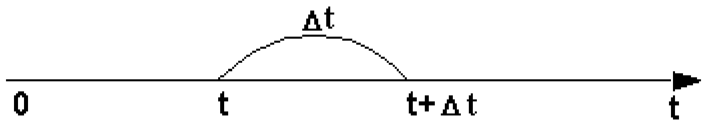
Очевидно для любого времени $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$

Поставим задачу (аналогично дискретному случаю), для любого момента времени вероятности состояний:

$P_1(t), P_2(t), ..., P_n(t)$.

Поскольку точно неизвестны моменты перехода из S_i в S_j, зададим не вероятности перехода P_{ij}, а <u>плотности вероятностей перехода</u> λ_{ij}.

Пусть система в момент времени находится в S_i, рассмотрим элементарный промежуток Δt, тогда плотностью вероятности перехода называется предел отношения вероятности перехода системы за Δt из S_i в S_j к длине Δ t.



$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}$$

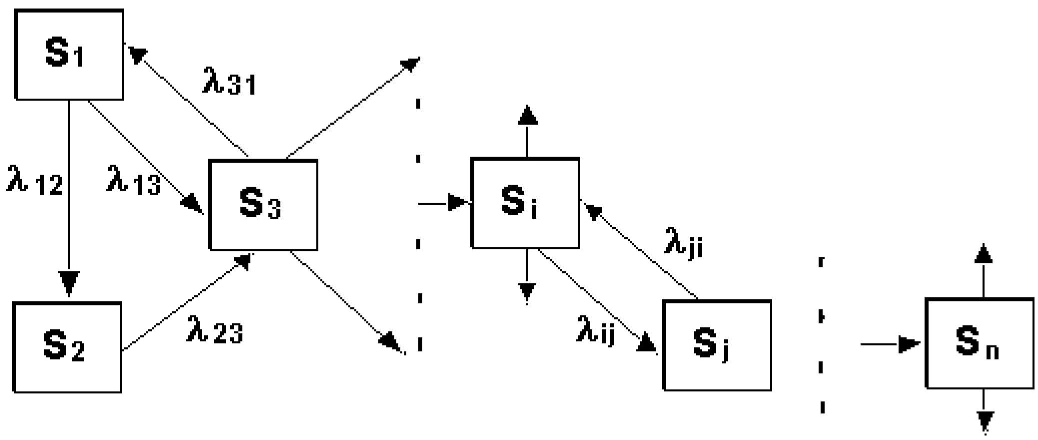
определяется для $i \neq j$.

(4.5) ⇒ при малых Δt с точностью

$$P_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij}\Delta t$$

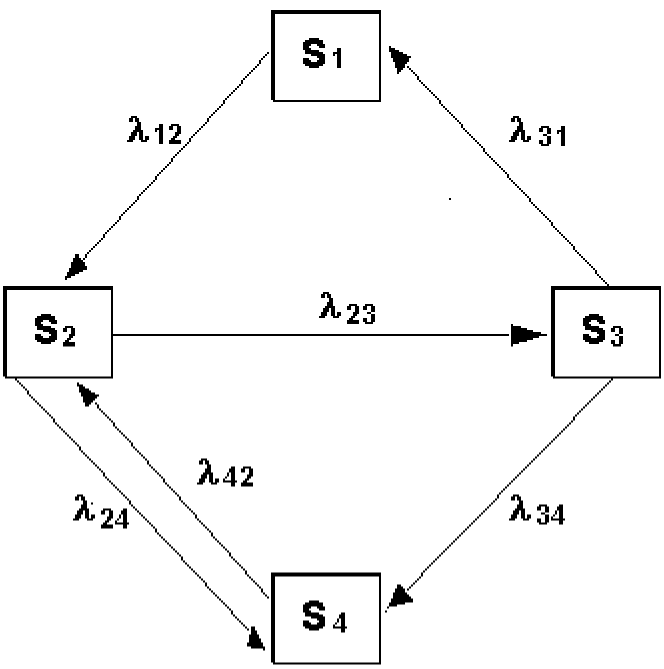
Если все λ не зависят от t (т.е. от того, в какой момент начинается Δt), Марковский процесс называется <u>однородным</u>, если функция времени $\lambda_{ij}=\lambda_{ij}(t)$ - <u>неоднородным</u>.

Предположим, нам известны плотности вероятностей перехода λ_{ij} для всех пар S_i, S_j (задан размеченный граф состояний).



Тогда вероятности состояний $P_1(t)$, $P_2(t)$, ..., $P_n(t)$, представляют собой функции времени, удовлетворяющие уравнениям Колмогорова. Выведем на примере системы S, которая может находится в одном из 4х. состояний.

S_1, S_2, S_3, S_4. Задан размеченный граф состояний $P_1(t)$- неизвестен (в момент времени t в S_1). Дадим t приращение Δt, найдем вероятность в $t+\Delta t$ в S_1.



$P_1(t+\Delta t)=P_1(t)*(1-\lambda_{12}\Delta t)+P_3(t)\lambda_{31}\Delta t=P_1(t)-P_1(t)\lambda_{12}\Delta t+P_3(t)\lambda_{31}\Delta t*(P_1(t+\Delta t)/\Delta t=$
$=-P_1\lambda_{12}+P_3(t)\lambda_{31}$

$$\lim_{\Delta t\to 0} (P_1(t+\Delta t)-P_1(t))/\Delta t=-\lambda_{12}P_1(t)+\lambda_{31}P_3(t)$$

$$dP_1(t) / dt = -\lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{31}P_3(t)$$

Аналогичное уравнение можно вывести для других состояний. Получим систему уравнений Колмогорова.

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -\lambda_{12}p_1 + \lambda_{31}p_3 \\ \frac{dp_2}{dt} = -\lambda_{23}p_2 - \lambda_{24}p_2 + \lambda_{12}p_1 + \lambda_{42}p_4 \\ \frac{dp_3}{dt} = -\lambda_{31}p_3 - \lambda_{34}p_3 + \lambda_{23}p_2 \\ \frac{dp_4}{dt} = -\lambda_{42}p_4 + \lambda_{24}p_2 + \lambda_{34}p_3 \end{cases} \qquad (4.6)$$

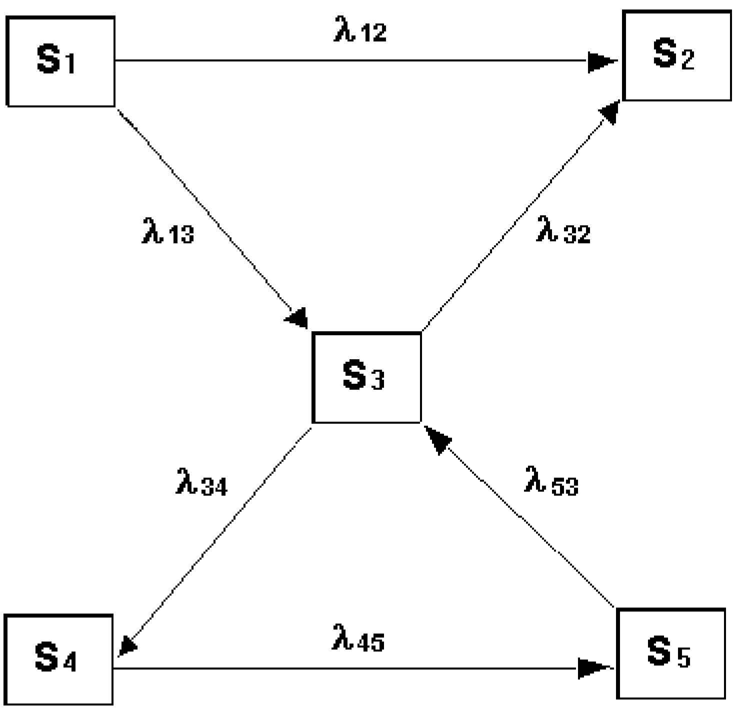
Интегрирование (4.6) даст нам искомые вероятности как функции времени. Начальные условия берутся из начальных состояния системы. Если при t=0 система в S_1, то при t=0 $P_1=1$, $P_2=P_3=P_4=0$.

Кстати 4 уравнение можно не писать: $P_4=1-(P_1+P_2+P_3)$.

Из (4.6) вытекает общее правило:

левая часть любого уравнения представляет собой произведение вероятности состояния, а в правой части столько слагаемых, сколько стрелок связано с этим состоянием. Если стрелка направлена “из” состояния, соответственно член имеет знак “-”, “в” состояния - “+”. Каждый член равен произведению плотности вероятности переходя по данной стрелке на вероятность состояния, из которой исходит стрелка.

Пример: 4.2: Размечен граф состояний системы S, он имеет вид, показанный на рисунке. Написать СДУ Колмогорова, если известно, что в начальный момент времени система находится в S_1.



$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})p_1 \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3 \\ \dfrac{dp_3}{dt} = -(\lambda_{34} + \lambda_{32})p_3 + \lambda_{13}p_1 + \lambda_{53}p_5 \\ \dfrac{dp_4}{dt} = \lambda_{34}p_3 - \lambda_{45}p_4 \\ \dfrac{dp_5}{dt} = \lambda_{45}p_4 - \lambda_{53}p_5 \end{cases}$$

Начальные условия: при t=0, $P_1=1$, $P_2=P_3=P_4=P_5=0$.

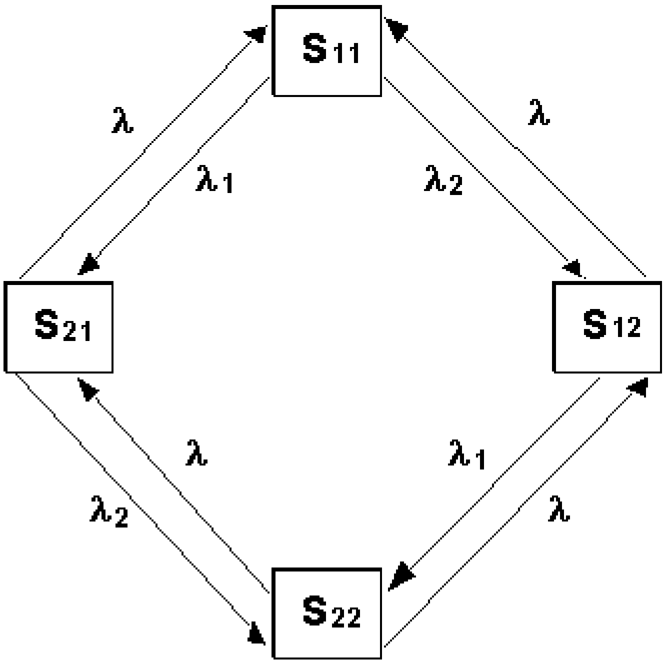
В начале примера 4.2 мы отметили, что система S может совершать переходы из S_i в S_j в некоторые моменты времени. Но под влиянием чего совершаются эти переходы? Очевидно, происходят какие-то события(выстрелы, отказы, заявки),-потоки.

Пусть система S переходит из S_i в S_j под влияниями пуассоновского потока с интенсивностью λ. Тогда плотность вероятности перехода λ_{ij} представляет собой интенсивность потока, переводящего систему по соответствующей стрелке.

$$\lambda_{ij}=\lambda$$

Пример 4.3. Техническая система состоит из 2 узлов, каждый из которых может отказать независимо от другого. Потоки отказов - пуассоновские с интервалом λ_1 и λ_2. Любой узел сразу после отказа начинает ремонтироваться. Поток восстановлений - пуассоновский с интервалом λ.

Составить граф состояний и написать СДУ Колмогорова, если в начальный момент система работает исправно.



$$\begin{cases} \frac{dp_{11}}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2)p_{11} + \lambda(p_{21} + p_{12}) \\ \frac{dp_{21}}{dt} = -(\lambda + \lambda_2)p_{21} + \lambda p_{22} + \lambda_1 p_{11} \\ \frac{dp_{12}}{dt} = -(\lambda + \lambda_2)p_{12} + \lambda p_{22} + \lambda_2 p_{11} \\ \frac{dp_{22}}{dt} = -2\lambda p_{22} + \lambda_1 p_{12} + \lambda_2 p_{21} \end{cases}$$

$t=0,\ P_{11}=1,\ P_{12}=P_{21}=P_{22}=0$

4.3.Предельные вероятности состояний.

Рассмотрим однородную непрерывную цепь Маркова (т.е. интенсивность событий, переводящих систему из состояния в состояние постоянна) λ_{ij}=const следовательно все потоки событий- простейшие.

Записав систему ДУ для вероятностей состояния и проинтегрировав их при заданных начальных условиях, получим n функций времени: для вероятностей состояния $P_1(t)$, $P_2(t)$, ..., $P_n(t)$, при любом t, дающих в сумме единицу:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$$

Рассмотрим поведение системы при **$t \to \infty$**. Будут ли функции- $P_i(t)$ стремится к некоторым пределам? т.е. существуют ли для этой системы предельные вероятности. Если число событий системы S конечно и из каждого состояния можно перейти (за то или иное число шагов) в любое другое, то предел вероятности состояний существует и не зависит от начального состояния системы.

Пример 4.1, 4.2- не удовлетворяет этим условиям, а 4.3-удовлетворяет.

Пусть, данное условие выполнено и $\exists$:

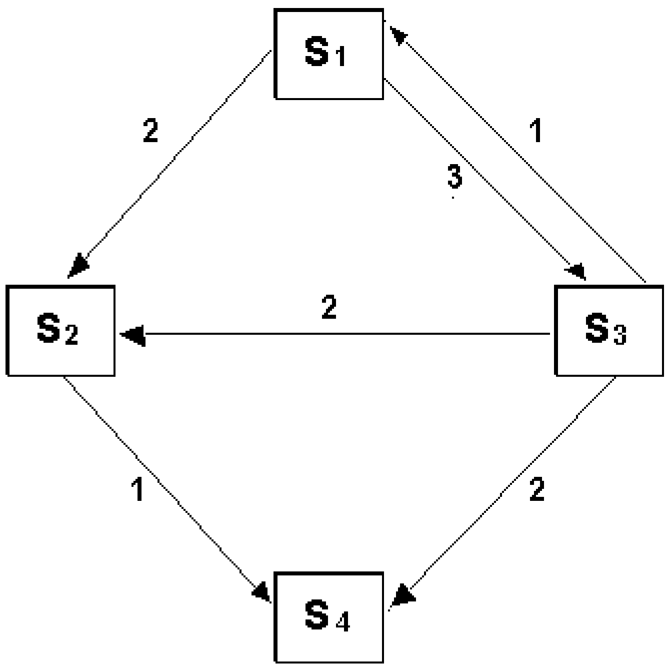
$$\lim_{t\to\infty} p_i(t) = p_i, \qquad i = 1,\dots,n \qquad (4.7)$$

т.е. при $t\to\infty$ в системе устанавливается стационарный (установившийся) режим. Система по <u>прежнему</u> случайным образом переходит из состояния в состояние, но вероятность любого состояния уже не зависит от времени и является **const**. Физический смысл предельной вероятности P_i- среднее время пребывания системы в S_i.

Для определения P_i достаточно в СДУ Колмогорова прировнять к нулю все и решить полученную систему алгебраических линейных уравнений, используя условие

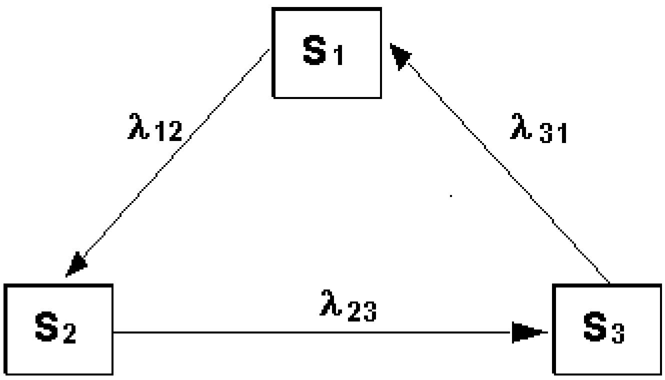
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \text{ - нормированное условие. } (4.8)$$

<u>Пример 4.4</u> Задан размеченный граф состояний системы S. Вычислить предельные вероятности ее состояний.



$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = -5p_1 + p_3 = 0 \\ \dfrac{dp_2}{dt} = -p_2 + 2p_1 + 2p_3 = 0 \\ \dfrac{dp_3}{dt} = -3p_3 + 3p_1 + 2p_3 = 0 \\ \dfrac{dp_4}{dt} = -2p_4 + p_2 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

<u>Пример4.5</u> Найти пределы вероятности для системы.



$$p_1\lambda_{12} = p_3\lambda_{32} \qquad p_3 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}p_1$$

$$p_2\lambda_{23} = p_1\lambda_{12} \qquad p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}p_1$$

$$p_3\lambda_{31} = p_2\lambda_{23} \qquad p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Таким образом, зная размеченный граф состояний системы, можно сразу записать алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний Если системы имеют одинаковые графы, то можно, решив полученную систему, получить буквенное выражение для P_i.

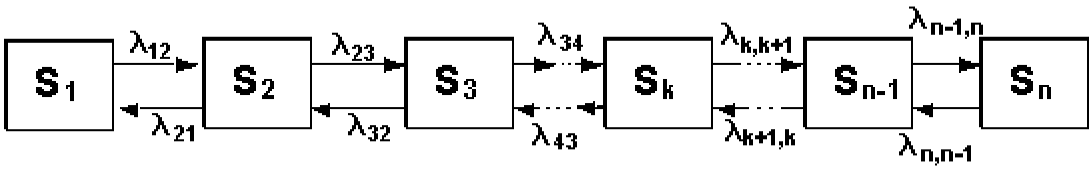
Рассмотрим некоторые типичные схемы Марковских цепей и выведем для них формулы вычисления P.

$$p_1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}} p_1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} p_1 = 1 \qquad p_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}}$$

$$p_3 = \frac{\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}} \qquad p_2 = \frac{\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}}$$

4.4.Процесс размножения и гибели.

Рассмотрим типичную схему непрерывных Марковских цепей - ”схему гибели и размножения”, в которой все состояния, кроме крайних, связаны прямой и обратной связью с любым из двух соседних состояний, а крайние S_1, S_n-только с одним соседним.



Найдем предел вероятности для такой системы.

$$\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2 \qquad \lambda_{23} p_2 + \lambda_{21} p_1 = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3$$

учитывая вышеупомянутое, получим: $\lambda_{23} p_2 = \lambda_{32} p_3$ аналогично: $\lambda_{34} p_3 = \lambda_{43} p_4$

$\lambda_{k-1,k} p_{k-1} = \lambda_{k,k-1} p_k$,для **k=2,...,n**

таким образом предел вероятности состояний P_1, P_2,...., P_n в схеме гибели и размножения удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} \lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2 \\ \lambda_{23} p_2 = \lambda_{32} p_3 \\ \quad \vdots \\ \lambda_{k-1,k} p_{k-1} = \lambda_{k,k-1} p_k \\ \quad \vdots \\ \lambda_{n-1,n} p_{n-1} = \lambda_{n,n-1} p_n \end{cases} \qquad \textbf{(4.10)}$$

и нормированному условию $P_1+P_2+....+P_n$ (4.11.)

Из уравнений системы (4.10) выразим все P_k, k=2,n через p_1

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1 \qquad p_3 = \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{32}} p_2 \qquad p_3 = \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} p_1$$

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1,k}\lambda_{k-2,k-1}\cdots\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{k,k-1}\lambda_{k-1,k-2}\cdots\lambda_{32}\lambda_{21}} p_1$$

В числителе стоит произведение всех интервалов λ_{ij} стрелок направленных вперед от начальной до входящей в S_k, в знаменателе- всех идущих назад от S_k до S_0 .

При k=n, в числители

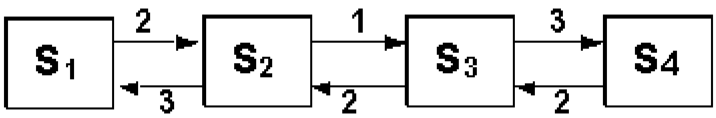
Подставляя (4.12) в (4.11) получим

$$\mathbf{p_1} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}}\mathbf{p_1} + \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}}\mathbf{p_1} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1,n}\lambda_{n-2,n-1}\cdots\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{n,n-1}\lambda_{n-1,n-2}\cdots\lambda_{32}\lambda_{21}}\mathbf{p_1} = 1$$

$$\mathbf{p_1} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1,n}\lambda_{n-2,n-1}\cdots\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{n,n-1}\lambda_{n-1,n-2}\cdots\lambda_{32}\lambda_{21}}}$$

Это дает нам общий вид предела вероятностей схемы размножения и гибели.

Пример 4.6 найти предельные вероятности для системы:



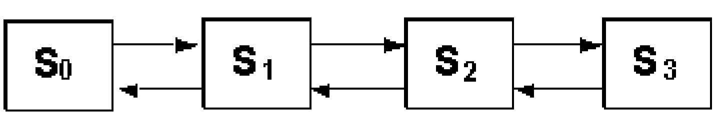
по (4.13) и (4.12): $\mathbf{p_1} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} + \frac{2*1}{3*2} + \frac{2*1*3}{2*2*3}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$

$$\mathbf{p_2} = \frac{2}{3} * \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \qquad \mathbf{p_3} = \frac{2*1}{2*3} * \frac{2}{5} = \frac{2}{15} \qquad \mathbf{p_4} = \frac{2*1*3}{2*2*3} * \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

<u>Пример 4.7</u> Прибор состоящий из 3х узлов, поток отказов - простейший, среднее время б/о работы любого узла $t_б$. Отказавший узел сразу начинает ремонтироваться, среднее время ремонта $t_р$ (поток восстановления простейший). Найти среднюю прочность прибора, если при 3 работающих узлах она=100%, при 2х=50%, а при 1 прибор не работает.

Решение.

Для потока отказов $\lambda=1/t_б$, восстановлений - $1/t_{р.}$



S_0 - работают 3 узла, на каждом действующий поток $\lambda=1/t_б$ значит, поток отказов системы в 3 раза интенсивнее $\lambda_{01}=3/t_б$.

$$\mathbf{p_0 = \frac{1}{1+3\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_б}+3\left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_б}\right)^2+\left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_б}\right)^3} \quad p_1 = 3\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_б}p_0 \quad p_2 = 3\left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_б}\right)^2 \quad p_3 = \left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_б}\right)^3}$$

$$\mathbf{P_1 = 3\frac{\overline{t_p}}{\overline{\overline{t_б}}}P_0, \qquad P_2 = 3\left(\frac{\overline{t_p}}{\overline{\overline{t_б}}}\right), \qquad P_3 = \left(\frac{\overline{t_p}}{\overline{\overline{t_б}}}\right)^3}$$

Пусть $\overline{\mathbf{t_б = 10(2)}}$, $t_p=5*2$, тогда $p_0=8/27$; $p_1=12/27$,$p_2=6/27$, $p_3=1/27$

Средняя плотность в установившемся режиме 100% p_0+50% p_1=(300/27+600/27)%=51.9%.