ЛЕКЦИЯ 6

Функции

СООТВЕТСТВИЕ$\Rightarrow$ ОТНОШЕНИЕ$\Rightarrow$ ФУНКЦИЯ

ФУНКЦИИ

Функция — математическое понятие, отражающее связь между элементами множеств. Можно сказать, что функция — это «закон», по которому каждому элементу одного множества ставится в соответствие некоторый элемент другого множества.

Значение y в любой из пар $\left(x,y\right)\in f$ называется функцией от x, что записывается в виде $y=f\left(x\right)$.

Следовательно, функция – это множество, представленное в виде:

$$f=\left\{\left(x,y\right)\in X\times Y\middle|y=f\left(x\right)\right\}.$$

Формальное определение функции.

Отношение f на $X \times Y$ называется ***функцией*** из X в Y и обозначается через $f : X \to Y$, если для каждого $x \in X$ существует единственный элемент $y \in Y$ такой, что $\left(x, y\right) \in f$.

Если $f : X \to Y$ — функция, и $\left(x, y\right) \in f$, то говорят, что $y = f\left(x\right)$.

Как видно из определения, символ f используется в двух смыслах:

1. f – это множество, элементами которого являются пары, участвующие в отношении.
2. $f\left(x\right)$ – это обозначение для $y \in Y$, которое соответствует данному $x \in X$.

Область определения и область значений. Образ

Если задана функция $f: X \to Y$, то множество X называется ***областью определения*** функции f, а множество Y называется ***областью потенциальных значений.***

Образ множества. Образом множества $E \subseteq X$ называется множество всех значений функции f на всех элементах множества E. Оно обозначается $f\left(E\right)$:

$f\left(E\right) = \left\{ f\left(x\right) \middle| x \in E \right\}$ или равносильно

$$f\left(E\right) = \left\{ y \in Y \middle| \left(x, y\right) \in f \text{ для некоторого } x \in E \right\}$$

Образ элемента.

Элемент $f\left(x\right)$ называется **образом** элемента x.

Определение области значений через образ

Образ всего множества X называется ***областью значений*** функции f.

Прообраз. Отображение

Прообраз множества. Прообразом подмножества $F \subseteq Y$ называется множество всех элементов $x \in X$, для которых $f(x) \in F$. Оно обозначается $f^{-1}(F)$:

$$f^{-1}(F) = \{x \mid f(x) \in F\}$$

Элемент-прообраз

Элемент x называется **прообразом** $f(x)$

Определение отображения

Функция $f : X \to Y$ называется также ***отображением***; при этом говорят, что f отображает X в Y.

Следовательно, функция и отображение – синонимы.

Однако термин «функция» чаще используется для указания отношения между элементами множеств, а отображение – для определения отношения между множествами.

Свойства отображений множества

Свойство 1. Если A_1 и A_2 – подмножества X, то образ объединения равен объединению образов:

$$f\left(A_1 \cup A_2\right) = f\left(A_1\right) \cup f\left(A_2\right).$$

Свойство 2. Для взаимно-однозначного отображения образ пересечения равен пересечению образов:

$$f\left(A_1 \cap A_2\right) = f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right).$$

Свойство 3. Для произвольного образа отображения пересечения входит в пересечение образов:

$$f\left(A_1 \cap A_2\right) \subseteq f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right)$$

Обобщение свойств 1 и 3:

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f\left(A_i\right), \quad f\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} f\left(A_i\right).$$

Композиция функций

Композицией двух функций $f:A\to B$ и $g:B\to C$ называют функцию $h:A\to C$, определённую соотношением

$$h(x)=g\left(f(x)\right)$$

Другими словами, h представляет собой множество пар

$$\left\{(a,c)\middle|(a,b)\in f \text{ и } (b,c)\in g \text{ для некоторого } b\in B\right\}$$

Композиция функций обозначается $f\circ g$.

Пусть $f:A\to B$, $g:B\to C$ и $k:C\to D$

Композиция (как операция над функциями) ассоциативна, т. е.

$$f\circ(g\circ k)=(f\circ g)\circ k.$$

Поэтому в композиции нескольких подряд идущих функций можно опускать скобки.

Композиция отображений

Пусть даны отображения $Q: X \to X$ и $G: X \to X$.

Композицией этих отображений называется отображение $Q \circ G$, определяемое соотношением:

$$Q\left(G\right) = Q \circ G.$$

Данное соотношение выражает отображение Q отображения G.

В случае, когда $Q = G$ возможно получить отображения: $Q^2 = Q\left(Q\right)$, $Q^3 = Q\left(Q^2\right)$,...,$Q_X^m = Q\left(Q_X^{m-1}\right)$.

Если $Q^0 = X$ то $Q^0 = Q\left(Q^{-1}\right) = X$.

Поскольку Q^{-1} – обратное отображение, то $Q^{-1} = Q\left(Q^{-2}\right)$, $Q^{-2} = Q\left(Q^{-3}\right)$, и т. д.

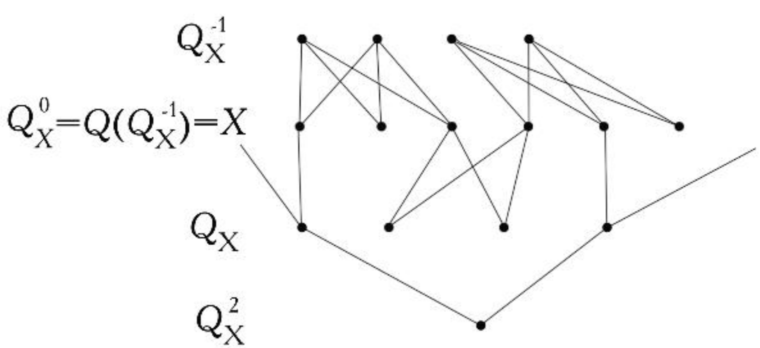
Пример. Пусть X– множество людей. Для каждого человека x из множества X множество его детей определим как Q_X.

Тогда

Q_X^2 будет представлять множество его внуков,

Q_X^3 - множество его правнуков,

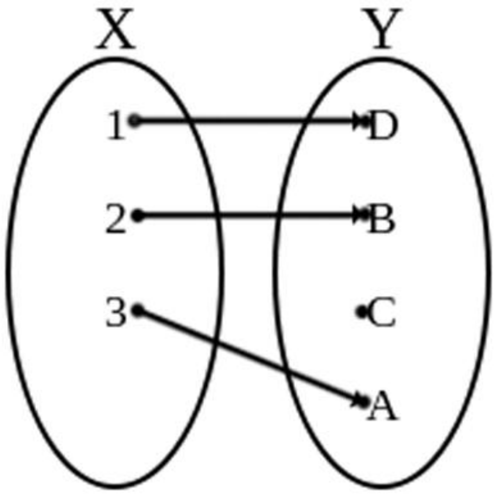
Q_X^{-1} - множество родителей.



Изобразив множество людей точками, а стрелками представив соответствия между X, Q_X, Q_X^2 и т. д., получаем родословную или генеалогическое дерево для данного множества людей.

Инъективные отображения и функции

Отображение множества X в множество Y называется **инъективным,** если образ $f\left(x\right)$ может обладать ровно одним прообразом x. Следовательно, имеет место одно-однозначное соответствие.

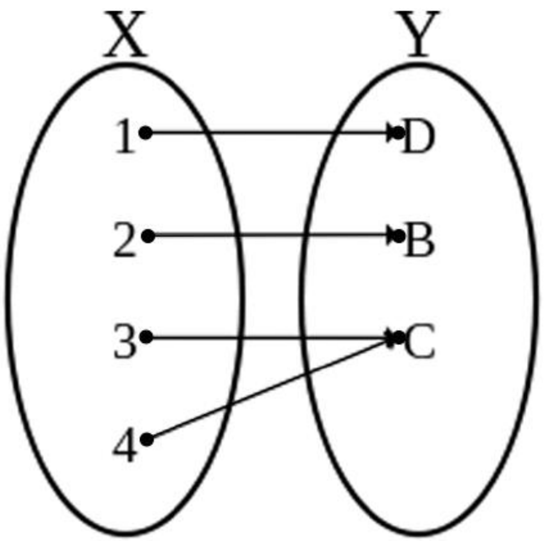


$$f : X \to Y \qquad f = \{(1, D), (2, B), (3, A)\}$$

Определение. Функция $f : X \to Y$ называется ***инъективной***, или ***инъекцией***, если из $f\left(x\right) = f\left(x'\right)$ следует $x = x'$.

Сюръективные отображения и функции

Отображение множества X в множество Y называется **сюръективным,** если каждый элемент из Y имеет по крайней мере один прообраз из X. Следовательно, имеет место одно-многозначное и много-однозначное соответствия.

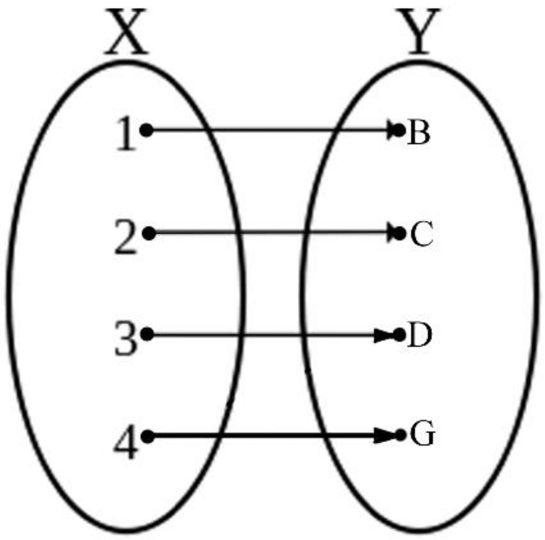


Функция $f : X \to Y$ называется ***отображением «на»,*** или ***сюръективной функцией***, или ***сюръекцией***, если каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента множества X, т. е.

$$\forall y \in Y \exists x \in X : y = f\left(x\right)$$

Биекция

Функция, которая является одновременно и инъективной, и сюръективной, называется ***взаимно однозначным соответствием***, или ***биекцией.***



$$f : X \to Y$$

$$f = \{(1, B), (2, C), (3, D), (4, G)\}$$

Если $X = Y$ и $f : X \to X$ является взаимно однозначным соответствием, то f называется ***перестановкой*** множества X.

Способы задания функций.

1. Табличный способ задания функции.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	4	9	16	25	36	49	64	81

В данной таблице столбцы представляют собой множество упорядоченных пар:

$$y = f(x) = \{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25),(6,36),(7,49),(8,64),(9,81)\},$$

что соответствует определению функции, представленному ранее.

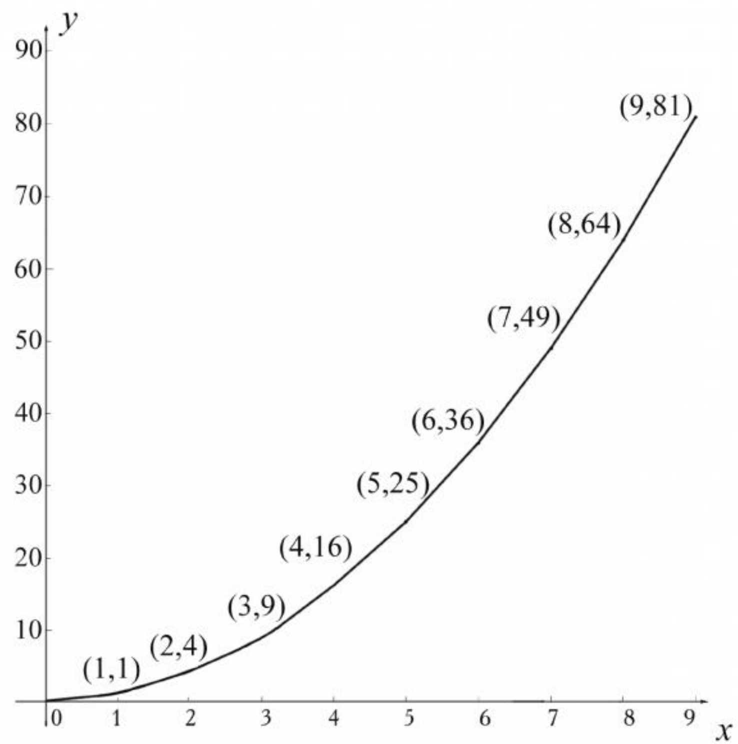
2. Аналитический способ задания функции

При аналитическом задании функция представлена в виде формулы, т. е. математического выражения, включающего математические операции, которые необходимо выполнить над $x \in X$, чтобы получить $y \in Y$:

$$y = f\left(x\right) = \left\{\left(x, y\right) \in R^2 \middle| y = x^2\right\}$$

3. Графический способ задания функции.

Если $X \subseteq R$ и $Y \subseteq R$, т. е. X и Y являются подмножествами множества вещественных чисел, то пары $\left(x, y\right) \in R^2$ возможно представить в виде точек на плоскости. Полная совокупность точек будет представлять собой график функции.



Как задать функцию в R^3

Специальные функции

1. Тождественная функция.

Пусть $I : X \to X$ определено соотношением $f\left(x\right) = x$ для всех $x \in X$. Функция I называется ***тождественной функцией*** на X**.**

2. Округление до нижнего целого

Функция $f : X \to Y$, где X — множество действительных чисел, а Y — множество целых чисел, называется ***округлением до нижнего целого*** и обозначается $f\left(x\right) = \left\lfloor x \right\rfloor$, если она каждому $x \in X$ ставит в соответствие наибольшее целое число, меньшее или равное x.

Пример: $\left\lfloor 2,3 \right\rfloor = 2$; $\left\lfloor 3,899 \right\rfloor = 3$

3. Округление до верхнего целого

Функция $f: F \to B$ называется ***округлением до верхнего целого*** и обозначается $f\left(x\right) = \left\lceil x \right\rceil$, если она каждому $x \in X$ ставит в соответствие наименьшее целое число, большее или равное x.

Пример: $\left\lceil 11{,}1 \right\rceil = 12$; $\left\lceil 45{,}4 \right\rceil = 46$

4. Факториал

Пусть X и Y совпадают со множеством неотрицательных целых чисел. ***Факториалом*** назовем функцию $f: X \to Y$, обозначаемую через $f\left(n\right) = n!$ и определяемую следующими соотношениями:

$0!=1$

$1!=1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$

5. Бинарная операция

Пусть X, Y, Z — тройка непустых множеств. **Бинарной операцией** или **двуме́стной опера́цией** в паре (x, y), $x \in X$ и $y \in Y$ со значением в $z \in Z$ называется функция $b : P \to Z$, где $P \subset X \times Y$.

Бинарная операция обозначается знаком действия, который ставится обычно между операндами.

Пусть $\bullet$ – произвольная операция. Тогда существуют виды записей:

1. Инфиксная форма записи: $x \bullet y$
2. Префиксная (польская запись): $\bullet xy$
3. Постфиксная(обратная польская запись): $xy \bullet$

Пример: «+», «-», «$\cdot$» – бинарные операции на множестве рациональных чисел.

Последовательность

Определение. Пусть дано множество $X = \{x_1, ..., x_i, ..., x_n\}$ произвольной природы. Всякое отображение $f : N \to X$ множества натуральных чисел N в множество X называется **последовательностью** (элементов множества X).

Образ натурального числа i, а именно, элемент $x_i = f(i)$, называется i**-м членом** или **элементом последовательности**, а порядковый номер члена последовательности – её индексом.

Обозначения

Последовательность $x_1, x_2, ..., x_i, ...$ записывают в виде $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, иногда $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Для конечных последовательностей: $(x_i)_{i=1}^{n}$ или $\{x_i\}_{i=1}^{n}$

Сумма элементов последовательности: $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Функция двух переменных

Определение. Если **каждой паре** (x, y) элементов некоторого множества $D = X \times Y$ **соответствует единственный элемент** $z \in Z$, а **каждому элементу** z **соответствует хотя бы одна пара** (x, y), то мы говорим, что z есть функция двух независимых переменных x и y, определенная в D.

Функция двух переменных $f : D \to Z$ является отображением декартова произведения $D = X \times Y$ в множество Z.

Формальное определение функции двух переменных имеет такой вид:

$$f = \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z \mid z = f(x, y)\}.$$

Матрица

Пусть есть два конечных множества $M = \{1, 2, ..., m\}$ и $N = \{1, 2, ..., n\}$, где m и n — натуральные числа.

Назовем матрицей размера $m \times n$, или ***массивом*** $m \times n$(m на n) функцию:

$$A : M \times N \to D,$$

где D — это, как правило, множество действительных, комплексных, рациональных или целых чисел.

Элементы D называются ***скалярами.***

Таким образом, для каждого $i, 1 < i < m$, и каждого $j,\ 1 < j < n$, имеется элемент $A(i, j) \in D$, который находится в i-й строке и j-м столбце соответствующей прямоугольной таблицы.

Образ $A(i,j)$ элемента области определения (i,j) сокращенно обозначается через $A_{i,j}$. Следовательно, $m\times n$ матрица A изображается прямоугольной таблицей, где образы упорядоченных пар $(i,j)\in\{1,2,...,m\}\times\{1,2,...,n\}$ могут быть представлены в таком виде:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

Матрица A содержит m строк и n столбцов и является матрицей размера $m\times n$. Сокращенно матрицу записывают $A=\left[A_{ij}\right]$ или $A=\left[a_{ij}\right]$.

Значение a_{ij} называется ***компонентой***, или ***элементом*** матрицы А.

Виды матриц

1. ***Матрица-столбец.*** Матрица размера $m \times 1$ называется ***матрицей-столбцом или вектором-столбцом***

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

2. ***Матрица-строка.*** Матрица размера $1 \times n$ называется ***матрицей-строкой или вектором-строкой.***

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Если A — матрица-строка или матрица-столбец, то индекс строки или, соответственно, столбца, обычно опускают.

3. ***Квадратичная матрица.*** Если в матрице число строк и число столбцов совпадает $m = n = k$, то она называется ***квадратной матрицей.***

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}$$

4**. Диагональная матрица.** Это квадратичная матрица, все элементы которой, кроме диагональных, нулевые.

$$\forall (i \neq j) \Rightarrow A_{ij} = 0. \qquad A = diag(A_1, A_2, ..., A_k).$$

5. **Единичная матрица.** Это диагональная матрица с единичными элементами на диагонали.

$$\begin{cases} \forall (i \neq j) \Rightarrow A_{ij} = 0, \\ \forall (i = j) \Rightarrow A_{ij} = 1 \end{cases} \qquad A = diag(1,1,...,1)$$

Операции над матрицами

Равенство матриц

Две матрицы $A = \left[A_{ij} \right]$ и $B = \left[B_{ij} \right]$ размера $m \times n$ ***равны***, если равны их соответствующие элементы; т. е. $A = B$ тогда и только тогда, когда $A_{ij} = B_{ij}$ для всех $i, 1 < j < m$, и всех $j, 1 < j < n$.

Умножение матрицы на скаляр

Если d — скаляр, а $A = \left[A_{ij} \right]$ — матрица $m \times n$, то dA есть матрица $D = \left[D_{ij} \right]$ размера $m \times n$, где $D_{ij} = dA_{ij}$, т. е. каждая компонента есть произведение соответствующей компоненты A на d . Произведение числа d и матрицы A называется ***умножением матрицы на скаляр.***

Сумма и разность матриц

Складывать и вычитать можно только матрицы одного размера !!

Сумма

Если $A = \left[A_{ij} \right]$ и $B = \left[B_{ij} \right]$ — $m \times n$-матрицы, тогда $A + B$ есть $m \times n$ матрица $C = \left[C_{ij} \right]$, где $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$, другими словами, матрицы складываются покомпонентно. Матрица C называется ***суммой матриц*** A и B**.**

Разность

Разность двух матриц определим через их сумму.

Запись $A - B$ означает $A + \left(-1 \right) \cdot B$.

Следовательно, если $A = \left[A_{ij} \right]$ и $B = \left[B_{ij} \right]$ — $m \times n$-матрицы, тогда $A - B$ есть $m \times n$ матрица $C = \left[C_{ij} \right]$, где $C_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$**.**

Произведение матриц

1. **Умножение матрицы на матрицу-столбец**

Матрица должна быть слева, а матрица-столбец – справа:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 + \ldots A_{1n}B_n \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 + \ldots A_{2n}B_n \\ \vdots \\ A_{m1}B_1 + A_{m2}B_2 + \ldots A_{mn}B_n \end{bmatrix}$$

2. **Умножение матрицы-строки на матрицу**

Матрица-строка должна быть слева, а матрица-справа:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \ldots A_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m1} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} A_k B_{k1} & \sum_{k=1}^{m} A_k B_{k2} & \ldots & \sum_{k=1}^{m} A_k B_{kn} \end{bmatrix}$$

Б) Пусть A матрица $m \times p$: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{mp} \end{bmatrix}$

Пусть B матрица $p \times n$: $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & B_{p3} & \cdots & B_{pn} \end{bmatrix}$

Тогда произведением матриц A и B называется матрица $C = \left[C_{ij} \right]$ размера $m \times n$, где C_{ij} - это скалярное произведение i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B. *C=AB*

$$C_{i,j} = \begin{bmatrix} A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} & \cdots & A_{ip} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ B_{3j} \\ \vdots \\ B_{pj} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj} .$$

Транспонированная матрица

Пусть A — матрица $m \times n$.
Ее ***транспонированной матрицей*** называется матрица A^t размера $n \times m$ такая, что

$$A^t_{ij} = A_{ji},$$

где A_{ij} — элемент i-ой строки и j-го столбца матрицы A.

Симметричная матрица

Если A — матрица $n \times n$ и $A_{ij} = A_{ji}$ для всех $1 \leq i$, $j \leq n$, то матрица A называется ***симметричной.*** Иными словами, матрица A симметрична тогда и только тогда, когда $A = A^t$.

Матричное представление отношения

Пусть $A = \left\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\right\}$ и $B = \left\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\right\}$, и пусть R — отношение на $A \times B$.

Матричным представлением R называется матрица $M = \left[M_{ij}\right]$ размера $m \times n$, определенная соотношениями

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \left(a_i, b_j\right) \in R, \\ 0, & \left(a_i, b_j\right) \notin R. \end{cases}$$

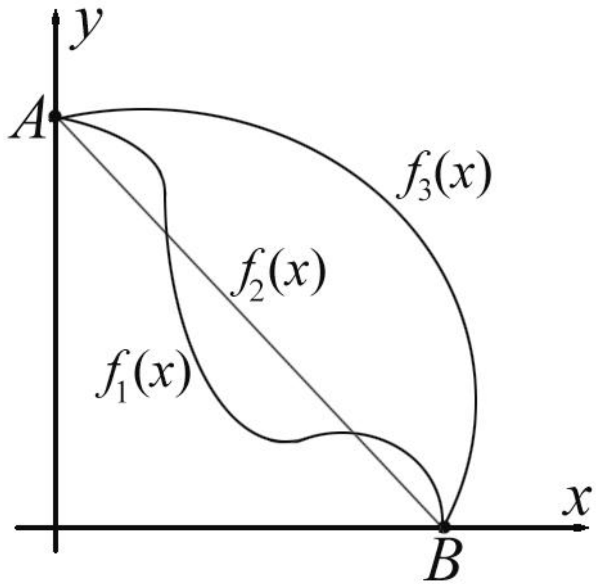
Пусть M — матрица размера $n \times n$, в каждой строке и в каждом столбце которой только один элемент равен 1, а все остальные равны 0. Такая матрица M называется ***матрицей перестановок.***

Понятие функционала

Понятие функционала является более широким, чем понятие функции.

Когда мы говорим об отображении $f: X \to Y$ как о функции с вещественными значениями, мы не накладываем на характер элементов множества X каких-либо ограничений.
В простейших задачах множество X, как и множество Y, представляет собой множества вещественных чисел. Каждая пара $\left(x, y\right) \in f$ ставит в соответствие одному вещественному числу x другое вещественной число y. Однако для практики важным является случай, когда множество X представляет собой множество функций, а множество Y – множество вещественных чисел. Этот случай приводит к понятию функционала.

Представим себе некоторый набор кривых (траекторий) $y = f_i(x)$, соединяющих фиксированные точки A и B, как показано на рисунке.



Пусть по каждой из этих траекторий может происходить свободное перемещение точки. Обозначим через t время, которое требуется на перемещение из точки A в точку B.

Это время очевидно зависит от характера траектории AB, т. е. от вида функции $f_i(x)$.

Обозначим через $F(x)$ множество из n различных функций, изображающих траекторию AB,

$$F(x) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_i(x), \ldots, f_n(x)\},$$

а через T множество вещественных чисел $t \in T$, определяющих время перемещения точки, то зависимость времени движения от вида функции может быть записана как отображение.

Функционал – это отображение J, которое имеет такое формальное представление:

$$J : F(x) \to T,$$

или $J = \{(f(x), t) \mid f(x) \in F(x), t \in T, t = J[f(x)]\}$.

Оператор

Понятие оператора. Оператор представляет более общее понятие по сравнению с функционалом.

Оператором называется отображение

$$L : X \to Y,$$

где множества X и Y являются множествами функций с элементами $x(t) \in X$ и $y(t) \in Y$.

Отсюда следует, что элементами множества L являются пары $(x(t), y(t))$, а оператор L преобразует функцию

$$y(t) = L[x(t)],$$

Таким образом, оператор устанавливает соответствие между двумя множествами функций, так, что каждой функции из одного множества соответствует функция из другого множества.

Пример. Обозначим через p оператор дифференцирования. Тогда связь между производной $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$ и функцией $f(x)$ может быть представлена в операторном виде $f'(x) = p[f(x)]$.