ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

д.т.н. проф. Новотарский Михаил Анатольевич

СОСТАВ КУРСА

Курс «Дискретная математика» включает следующие разделы:

1. Теория множеств и ее приложения.
2. Основы комбинаторики.
3. Теория графов.

Курс состоит из

1. 18 лекций.
2. 5 лабораторных работ.
3. Семестровая контрольная работа.
4. Текущие контрольные работы.

Значение рейтинга кредитного модуля RD	Оценка ECTS	Традиционная зачетная оценка
95-100	A	Зачтено
85-94	B	
75-84	C	
65-74	D	
60-64	E	
<60	Fx	Незачтено
Задолженность по лабораторным работам	F	Недопущен

1. Лабораторные работы – 5 лаб. X (5 теор.+5 пр.)=50
2. Семестровая контрольная – 1х20=20
3. Текущие контрольные работы 30

1.ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Базовые понятия теории множеств созданы математиками XIX, которые работали над основами математического анализа. Начала теории множеств заложил немецкий математик Георг Кантор (1845-1918). Ему принадлежит высказывание, которое сегодня рассматривается как интуитивное определения множества: «Множество есть многое, мыслимое как единое».

Однако позже было обнаружено, что такое определение множества обладает внутренним противоречием. Примером может служить парадокс Рассела, получивший в популярной литературе название парадокса брадобрея. Суть его состоит в неразрешимости вопроса о том, должен ли бриться брадобрей, который дал обещание брить всех в его деревне, кто не бреется сам?

1.1. Определение множества.

Множество — совокупность различимых объектов, обладающих определенным свойством и объединенных в единое целое.

Примеры множеств: множество студентов, присутствующих на лекции, множество четных чисел, множество граждан Украины.

Такое определение множества требует введения следующих обозначений:

1. *Множество* обозначается прописной буквой любого алфавита.

Например: A, B, C,…, X, Y,…,Z.

2. *Элемент* множества обозначается строчной буквой любого алфавита.

Например: *a*, *b*, *c*,…,*x*, *y*,…,*z*.

3. *Принадлежность* элемента множеству обозначается символом

$\in$ - «принадлежит».

Для указания того факта, что элемент не принадлежит множеству используют обозначение

$\notin$ - «не принадлежит».

Элемент может принадлежать множеству если он является одним из объектов этого множества.

Пример: Обозначение $x \in X$ показывает, что элемент x принадлежит множеству X, т. е. x является одним из элементов множества X.

Обозначение $a \notin X$ показывает, что элемент a не принадлежит множеству X.

Упражнение.

Пусть

A - множество растений, растущих в парке КПИ,

B – множество цветов,

C - множество деревьев.

a) Назовите два элемента множества *B*, не являющихся элементами множества *A*.

b) Назовите два элемента множества *C*, не являющихся элементами множества A.

1.2.Способы задания множества.

1. ***Явная форма*** - перечисление элементов:

$$X = \left\{ x_1, x_2, x_3, ..., x_n \right\},$$

где n — количество элементов множества.

2. Здание множества ***предикатом***.

Задается условие или свойства $P(x)$, которому должны удовлетворять все элементы x множества. Свойство $P(x)$ называют предикатом. Предикат из совокупности объектов выделяет те, что принадлежат множеству. В этом случае множество записывают следующим образом:

$$X = \left\{ x \middle| P(x) \right\}.$$

Читается это выражение так:

Множество X состоит из таких элементов x, что $P(x)$

Пример: Пусть предикат задан предложением

«x есть четное число».

Тогда Множество X состоит из таких элементов x, что x есть четное число, т. е. элементы множества X — четные числа.

3. Задание множества ***рекурсивной процедурой***.

Рекурсивная процедура позволяет определить последующие элементы множества через предыдущие.

Пример: Множество натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, ...\}$ можно задать следующим образом:

$$N = \{i \mid \text{если целое } i \in N \text{ то } i+1 \in N,\ i \geq 1\}$$

Пример. Задать множество *A*={*x*| *x*∈ *N*, *x* - делитель числа 20}.

Решение.

$A=\{x|\ x\in N$, x - делитель числа 20$\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$;

1.3. Определение подмножества.

Пусть каждый элемент множества обладает не одним свойством, а некоторым набором свойств. Однако для принадлежности элемента к данному множеству достаточно того, чтобы только одно свойство из данного набора было общим для всех элементов.

В то же время ничто не мешает нам сгруппировать элементы по любому другому свойству. Таким образом мы можем образовать **подмножество** данного множества, т. е. совокупность элементов отличающихся от остальных элементов данного множества по какому-либо свойству.

Множество A **есть подмножеством множества** X если каждый элемент множества A есть элементом множества X, т.е. если $x \in A$ то $x \in X$. В частности, любое множество есть подмножеством самого себя.

Для определения соотношения множества и подмножества используются обозначения:

$\subseteq$ — «входит в»;

$\subset$ — «строго входит в».

$A \subseteq X$ — множество A входит в множество X. При этом не исключается случай, когда все элементы множества A и множества X совпадают.

$B \subset X$ — множество B строго входит в множество X. В данном случае подчеркивается тот факт, что в множестве X обязательно существуют элементы, не принадлежащие множеству B.

Пример.

$$X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \quad A = \{3,7,9\}.$$

1. $3 \in A$, $3 \in X$.
2. $7 \in A$, $7 \in X$.

3. $9 \in A$, $9 \in X$.

Однако, $0 \notin A$, $0 \in X$. Поэтому $A \subset X$.

Введем следующие обозначения, которые облегчают запись соотношений, связанных с подмножествами:

$\forall$ — символ, называемый квантором всеобщности (лат. quantum-сколько) и означающий «любой», «произвольный», «каждый», «для всех…», «для каждого…»;

$\exists$ — символ, называемый квантором существования и означающий «существует…» или «найдётся…»

$\to$ — символ следствия (импликации), означающий «влечет за собой», «если..., то ...»;

$\leftrightarrow$ — символ, означающий эквивалентность (в смысле «то же самое, что»).

1.4.Определение равенства множеств.

Множества X и Y будем называть равными и записывать $X = Y$ в случае, если любой элемент a принадлежит множеству X $\left(a \in X\right)$ тогда и только тогда, когда $a \in Y$.

Иными словами $X = Y$ тогда и только тогда, когда $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

Пример. $X = \left\{a, b, c, d\right\}$, $Y = \left\{c, a, b, d\right\}$. Любой элемент, принадлежащий множеству X, принадлежит множеству Y. Следовательно $X = Y$.

В то же время $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$. Следовательно $X = Y$.

1.5.Определение пустого множества.

Пустое множество — это множество, которое не содержит элементов.

Обозначения пустого множества: $\varnothing$ или $\{\ \}$.

Свойство1. *Пустое множество есть подмножеством любого множества, включая и пустое множество.*

$\forall A(\varnothing \subseteq A)$, для всех A пустое множество является подмножеством.

$\varnothing \subseteq \varnothing$ — пустое множество является подмножеством себя.

Свойство2.

Ни одно множество не является элементом пустого множества. Иначе говоря, $\forall A(A \notin \varnothing)$ и, в частности, $\varnothing \notin \varnothing$.

Упражнение.

Является ли множество, состоящее из числа 0, пустым множеством?

1.6.Определение универсального множества.

Универсальное множество U — это множество, обладающее таким свойством, что все рассматриваемые множества есть его подмножествами.

Свойство 1. Любой объект, какова бы ни была его природа, является элементом универсального множества. $\forall x\left(x \in U\right)$, в частности $U \in U$.

Свойство 2. Любое множество является подмножеством универсального множества. $\forall A\left(A \subseteq U\right)$, в частности $U \subseteq U$.

Пример.

1. Универсальное множество в теории чисел — множество целых чисел.
2. Универсальное множество в математическом анализе — множество действительных чисел.

Множество U, несмотря на то, что названо универсальным, не может быть однозначно определено, если не названа предметная область, т.е. не указано свойство объектов, по которому данное множество формируется.

1.7. Конечные и бесконечные множества

Конечное множество — множество, количество элементов которого конечно, то есть, существует неотрицательное целое число *k*, равное количеству элементов этого множества. В противном случае множество называется бесконечным.

Бесконечное множество — множество, включающее бесконечное количество элементов.

Бесконечное множество — множество, в котором для любого натурального числа n найдётся конечное подмножество из n элементов.

Бесконечное множество — Множество, в котором найдётся счётное подмножество.

Пример. Множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, целых чисел $\mathbb{Z}$, рациональных чисел $\mathbb{Q}$, действительных чисел $\mathbb{R}$ и комплексных чисел $\mathbb{C}$ — являются бесконечными множествами.

Счетные и несчетные множества

Счётное множество — бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами.

Счётное множество — бесконечное множество X, в котором существует взаимно-однозначное соответствие $X \leftrightarrow \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ обозначает множество всех натуральных чисел.

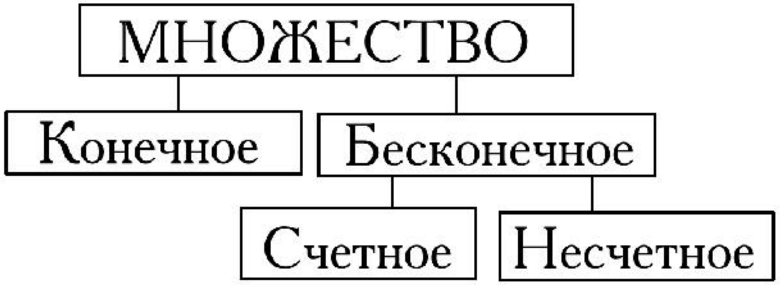
Счётное множество — это множество, равномощное множеству натуральных чисел.

Счётное множество является «наименьшим» бесконечным множеством, то есть в любом бесконечном множестве найдётся счётное подмножество.

Свойство 1. Любое подмножество счётного множества конечно или счётно.

Свойство 2. Множество всех конечных подмножеств счётного множества счётно.

Несчётное множество — такое бесконечное множество которое не является счётным.



Таким образом, любое множество является либо конечным, либо счётным, либо несчётным.

Несчетное множество – бесконечное множество, мощность которого больше, чем мощность счетного множества. Как показал Г. Кантор, множество действительных (и даже иррациональных) чисел несчетно. Множество всех подмножеств натурального ряда чисел также несчетно.

n*-множество* — это множество, состоящее из n элементов.

Мощность множества

Мощность множества определяется как количество элементов множества.

Мощность множества X обозначается $\left|X\right|$, $\# X$ или $\mathrm{card}(X)$.

Если | A | = | B |, то множества A и B называются ***равномощными.***

Для мощностей, как и в случае конечных множеств, имеются понятия: «равенство», «больше», «меньше». То есть для любых множеств A и B возможно только одно из трёх:

1. $|A| = |B|$, или A и B равномощны;
2. $|A| > |B|$, или A **мощнее** B, т. е. A содержит подмножество, равномощное B, но A и B не равномощны;
3. $|A| < |B|$, или B мощнее A — в этом случае B содержит подмножество, равномощное A, но A и B не равномощны.

Булеан

Множество всех подмножеств множества *M* называется ***булеаном*** и обозначается 2^M

$$2^M = \{A \mid A \subseteq M\}.$$

Для конечного множества M из $n = |M|$ количество его подмножеств (мощность булеана) равна $2^n = 2^{|M|}$. Следовательно $\left|2^M\right| = 2^{|M|}$.

Упражнение.

Пусть A - множество студентов вашей группы, какова его мощность?

Какова мощность булеана вашей группы?

Пусть $|M| = 25$. Тогда $\left|2^M\right| = 2^{|M|} = 2^{25} = 33554432$

Пример. $M = \{0,1,2\}$**,** $|M| = 3$**,**

$2^M = \{\varnothing, 0, 1, 2, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$**,** $\left|2^M\right| = 2^{|M|} = 2^3 = 8$

2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Операции над множествами позволяют строить новые множества, используя уже существующие.

2.1. Объединение

Объединением множеств X и Y называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X, Y, т. е. принадлежат X или принадлежат Y.

Определение объединения множеств X и Y может быть записано следующим образом:

$$x \in X \cup Y \leftrightarrow x \in X \text{ или } x \in Y.$$

В литературе часто используют также такое определение:

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}$$

Пример объединения множеств.

$X = \{1,2,3,4,5\}$, $Y = \{2,5,8,9\}$, $X \cup Y = \{1,2,3,4,5,8,9\}$

Объединение множеств в общем случае определяется следующим образом:

Пусть $I = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Тогда

$\bigcup\limits_{i \in I} X_i = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup ... \cup X_n = \{x$ | существует $i \in I$ такое, что $x \in X_i\}$.

2.2. Пересечение

Пересечением множеств X и Y называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству X, так и множеству Y. Пересечение множеств X и Y обозначается так:

$X \cap Y$ «пересечение X и Y ».

Определение пересечения множеств X и Y может быть записано следующим образом:

$$x \in X \cap Y \leftrightarrow x \in X \text{ и } x \in Y.$$

Часто используется также определение:

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}.$$

Пример.

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \; Y = \{2, 5, 8, 9\}, \; X \cap Y = \{2, 5\}.$$

Пересечение множеств в общем случае определяется следующим образом:

Пусть $I = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Тогда

$$\bigcap_{i \in I} X_i = X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap ... \cap X_n = \{x \mid x \in X_i \text{ для всех } i \in I\}.$$

Упражнение.

Старейший математик среди шахматистов и старейший шахматист среди математиков - это один и тот же человек или (возможно) разные?

Лучший математик среди шахматистов и лучший шахматист среди математиков - это один и тот же человек или (возможно) разные?

2.3. Разность.

Разностью множеств X и Y называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат X, но не принадлежат Y.

Разность множеств X и Y обозначается $X \setminus Y$ или $X - Y$. Определение разности множеств X и Y может быть записано так:

$$x \in X \setminus Y \leftrightarrow x \in X \text{ и } x \notin Y.$$

Разность можно также определить следующим образом:

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \notin Y\}.$$

Пример:
Если $X = \{1,2,3,4,5\}$ и $Y = \{2,4,6,7\}$, то $X \setminus Y = \{1,3,5\}$, $Y \setminus X = \{6,7\}$.

2.4. Симметрическая разность.

Симметрическая разность множеств X и Y определяется выражением $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

Пример: Пусть $X = \{1,2,4,6,7\}$ и $Y = \{2,3,4,5,6\}$. Тогда $X \setminus Y = \{1,7\}$, $Y - X = \{3,5\}$, $X \Delta Y = \{1,3,5,7\}$.

2.5. Дополнение.

Дополнение множества X, обозначаемое как $\overline{X}$, определяется как множество элементов универсального множества, не принадлежащих множеству X. Следовательно

$$\overline{X} = U \setminus X = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin X\}$$

Множество $\overline{X}$ читается как НЕ *X* и включает все элементы универсального множества, не вошедшие в множество *X.*

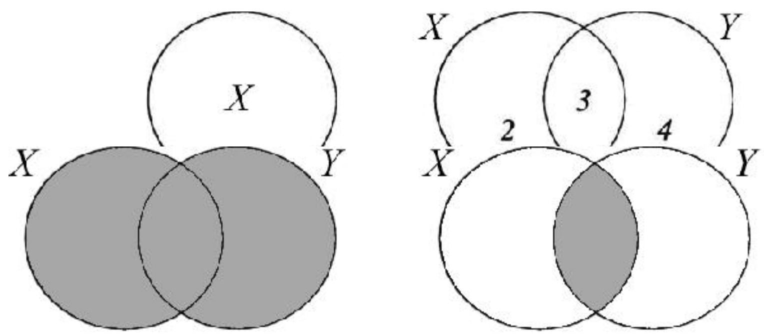
Часто используемым эквивалентным обозначением множества $\overline{X}$ является обозначение $\neg X$. Следовательно $\overline{X} = \neg X$.

3. ДИАГРАММЫ ВЕННА-ЭЙЛЕРА

Диаграммы Венна-Эйлера —инструмент, позволяющий изображать множества и операции над ними. На рис. 2.1 приведена диаграмма Венна для множества X, которое изображено внутренней частью круга. Внешняя часть круга, находящаяся внутри прямоугольника, изображает $\overline{X}$.

На рис. 2.2 приведена диаграмма Венна для двух множеств: X и Y. Каждое множество изображено кругом, и круги пересекаются.

На рис.2.2 видны 4 области: 1 – область универсального множества, 2 – область, принадлежащая только множеству X, 3 – область, принадлежащая совместно множествам X и Y, 4 – область, принадлежащая только множеству Y.



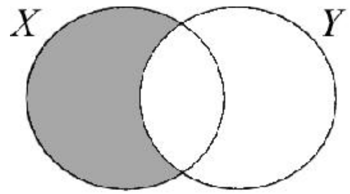
2.2

$X \cup Y$ $\qquad$ $X \cap Y$

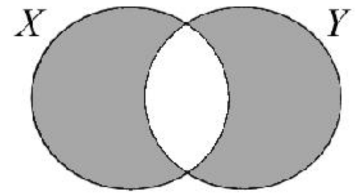
Ниже приведены иллюстрации операций над множествами.

4.ТОЖДЕСТВА АЛГЕБРЫ МНОЖЕСТВ

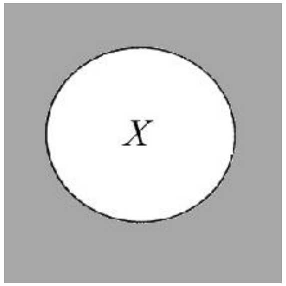
Тождества алгебры множеств, сформулированные в приведенных ниже теоремах, могут быть проверены



$X \setminus Y$



$X \Delta Y$



$\bar{X}$

путем формальных доказательств или на диаграммах Венна.

Таблица 1

1. Коммутативность объединения $X \cup Y = Y \cup X$	1. Коммутативность пересечения $X \cap Y = Y \cap X$
2. Ассоциативность объединения $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$	2. Ассоциативность пересечения $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$
3. Дистрибутивность объединения относительно пересечения $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$	3. Дистрибутивность пересечения относительно объединения $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
4. Законы действия с пустым и универсальным множествами $X \cup \varnothing = X$ $X \cup \overline{X} = U$; $X \cup \neg X = U$	4. Законы действия с пустым и универсальным множествами $X \cap U = X$ $X \cap \overline{X} = \varnothing$; $X \cap \neg X = \varnothing$

$X \cup U = U$	$X \cap \varnothing = \varnothing$
5.Закон идемпотентности объединения Термин **идемпотентность** означает свойство математического объекта, которое проявляется в том, что повторное действие над объектом *не изменяет* его $X \cup X = X$	5. Закон идемпотентности пересечения $X \cap X = X$
6. Закон де Моргана $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ $\neg\left(X \cup Y\right) = \neg X \cap \neg Y$	6. Закон де Моргана $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ $\neg\left(X \cap Y\right) = \neg X \cup \neg Y$
7. Закон поглощения $X \cup \left(X \cap Y\right) = X$	7. Закон поглощения $X \cap \left(X \bigcup Y\right) = X$

8. Закон склеивания $(X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) = X$ $(X \cap Y) \cup (X \cap \neg Y) = X$	8. Закон склеивания $(X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y}) = X$ $(X \cup Y) \cap (X \cup \neg Y) = X$
9. Закон Порецкого $X \cup (\overline{X} \cap Y) = X \cup Y$ $X \cup (\neg X \cap Y) = X \cup Y$	9. Закон Порецкого $X \cap (\overline{X} \cup Y) = X \cap Y$ $X \cap (\neg X \cup Y) = X \cap Y$
10. Закон двойного дополнения $\overline{\overline{X}} = X$ $\neg\neg X = X$	