УДК 62-192.003 (045)

С.В. Єгоров, асп.

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ СТАТИСТИКИ, ВИКОРИСТОВУВАНОЇ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ БЕЗВІДМОВНОСТІ

Проведено моделювання методом Монте-Карло випадкових вибірок із генеральної сукупності для визначення ймовірності безвідмовної роботи. Проведено аналіз якості статистики вигляду $\vartheta = \frac{r}{N}$.

Modeling by a method of Monte Carlo casual samples from general set is lead with the purpose of definition of probability of non-failure operation. The analysis of quality of statistics of a kind $\vartheta = \frac{r}{N}$ *is lead.*

Постановка проблеми

Кожне дослідження випадкових явищ, виконане методами теорії надійності, яка опирається на математичний апарат теорії ймовірності і математичну статистику, прямо або побічно опирається на експериментальні дані.

Оперуючи такими поняттями, як події та їх імовірності, випадкові величини, їх закони розподілу і числові характеристики, теорія надійності дає можливість теоретично визначити ймовірність одних подій, через ймовірність інших, закони розподілу і числові характеристики одних випадкових величин через закони розподілу і числові характеристики інших.

Такі непрямі методи дозволяють значно заощаджувати час і засоби, які витрачаються на експеримент, але аж ніяк не виключають самого експерименту.

Кожне дослідження у сфері випадкових явищ, як би воно не абстрагувалося, корінням своїм завжди сягає в експеримент, дослідні дані, систему спостережень.

Якість оцінної функції

Для оцінювання показників надійності типу ймовірність безвідмовної роботи $R(t)$ використовують статистику:

$R(t) = 1 - \vartheta$;

$$\vartheta = \frac{r}{N}, \tag{1}$$

де r – кількість об’єктів, які відмовили за напрацювання t з N зразків, поставлених на випробування.

У математичній статистиці якість оцінної функції визначають такими показниками:

− достатністю;
− спроможністю;
− незміщеністю;
− ефективністю.

У праці [1] установлено, що статистика вигляду (1) є достатньою.

Оцінну функцію називають спроможною, якщо зі збільшенням обсягу n вихідних статистичних даних вибіркове середнє $\tilde{\vartheta}$ збігається за імовірністю до істинного значення ϑ.

Доведемо, що статистика ϑ спроможна.

Запишемо числові характеристики статистики ϑ − середнє вибіркове значення і дисперсію − та з’ясуємо, як вони змінюються зі збільшенням кількості дослідів n.

Позначимо наявні статистичні дані випадкової величини: $\vartheta_1,\ \vartheta_2, ..., \vartheta_n$.

Очевидно, що сукупність цих величин являє собою n незалежних випадкових величин, кожна з яких розподілена за таким же законом, що й сама величина ϑ.

Уведемо позначення $M[\vartheta_i]$ для вибіркового середнього величини ϑ і $D[\vartheta_i]$ для вибіркової дисперсії величини ϑ.

У випадках, коли величини $M[\vartheta_i]$ і $D[\vartheta_i]$ входять у формули як певні числа, їх зручніше позначати одною буквою. У цих випадках позначимо вибіркове середнє величини ϑ через m_ϑ, а вибіркову дисперсію $D[\vartheta_i]$ величини ϑ через D_ϑ.

Вибіркове середнє запишемо так:

$$\tilde{\vartheta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i}{n}.$$

Випадкова величина $\tilde{\vartheta}$ − це функція незалежних випадкових величин $\vartheta_1,\ \vartheta_2, ..., \vartheta_n$. Знайдемо математичне сподівання $m_{\tilde{\vartheta}}$ і дисперсію D_ϑ цієї величини:

$$m_{\tilde{\vartheta}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[\vartheta_i] = \frac{1}{n} n m_\vartheta = m_\vartheta; \tag{2}$$

$$M[\vartheta_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i\,;$$

$$D_\vartheta = \frac{1}{n^2}D\sum_{i=1}^{n}[\vartheta_i] = \frac{D_\vartheta}{n}; \qquad (3)$$

$$D[\vartheta_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\vartheta_i - M[\vartheta_i])^2,$$

де $m_{\tilde{\vartheta}}$, D_ϑ − числа.

Отже, середнє вибіркове величини $\tilde{\vartheta}$ не залежить від кількості дослідів n і дорівнює середньому вибірковому спостережуваної величини ϑ. Щодо дисперсії величини ϑ, то вона необмежено спадає зі збільшенням кількості дослідів і за досить великого n може виявитися як завгодно малою.

Отже, середнє вибіркове − це випадкова величина з як завгодно малою дисперсією.

Спроможність оцінної функції забезпечує зростання якості оцінювання (зниження ймовірності помилок, які виходять за встановлені межі), зі збільшенням обсягу статистики.

Оцінна функція незміщена, якщо середнє вибіркове оцінки ϑ дорівнює істинному значенню ϑ .

Згідно з формулами (2), (3), оцінка $\tilde{\vartheta}$ незміщена.

Незміщеність оцінної функції забезпечує брак систематичної помилки у разі багаторазового використання $\tilde{\vartheta}$ замість ϑ.

Оцінна функція ефективна, якщо за фіксованого обсягу статистичних даних оцінка має мінімальну дисперсію серед оцінок, які забезпечуються будь-якими іншими можливими оцінними функціями.

З метою виявлення ефективності оцінної функції було проведено ряд експериментів для різних значень коефіцієнтів варіації v_r та емпіричних імовірностей появи відмов F.

Крім дисперсій досліджуваної статистики ϑ, були піддані оцінюванню дисперсії оцінних функцій (імовірностей відмов) на основі ряду теоретичних розподілів [1−5]:

− емпірична дисперсія статистики (1):

$$D_\vartheta = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\vartheta_i - \tilde{\vartheta})^2}{n};$$

− дисперсія дифузійного немонотонного розподілу DN:

$$D(\vartheta) = D_\vartheta;$$

− дифузійний монотонний розподіл DM:

$$D(\vartheta) = D\left(1 + \frac{5\breve{v}^2}{4}\right);$$

$$D = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\vartheta_i - S)^2;$$

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i\,;$$

$$\breve{v} = \left(\frac{2\left(\sqrt{S^2+3D} - S\right)}{4S - \sqrt{S^2+3D}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

де D − вибіркова дисперсія;

S − вибіркове середнє;

$\breve{v}$ − коефіцієнт варіації;

− дисперсія нормального розподілу N:

$$D(\vartheta) = \hat{\sigma}^2;$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{n}\left(\vartheta_i - \hat{\mu}\right)^2}\sqrt{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

де $\hat{\sigma}$ − середньоквадратичне відхилення;

$\Gamma(\cdot)$ − гамма-функція;

− дисперсія експонентного розподілу EXP:

$$D(\vartheta) = \frac{1}{\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i}\right)^2};$$

− дисперсія логарифмічно нормального розподілу LN:

$$D(\vartheta) = \left(e^{\hat{\sigma}^2} - 1\right)\left(e^{2\mu+\hat{\sigma}^2}\right);$$

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\vartheta_i - \hat{\mu}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\vartheta_i\right),$$

де $\hat{\mu}$ − параметр масштабу;

− дисперсія розподілу Вейбулла:

$$\mathrm{D}(\vartheta) = \hat{a}^2\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\hat{b}}\right) - \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\hat{b}}\right)\right)^2\right),$$

де параметри $\hat{a}$ й $\hat{b}$ визначають, розв'язуючи таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \left(\left(\frac{n}{\hat{b}}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln\vartheta_i\right)\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i^{\hat{b}} - n\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i^{\hat{b}}\ln\vartheta_i = 0; \\ n\hat{a}^{\hat{b}} - \sum_{i=1}^{n}\vartheta_i^{\hat{b}} = 0. \end{cases}$$

Результати експериментів і оцінки дисперсій, досліджуваної статистики з використанням ряду теоретичних функцій наведено в таблиці.

Значення дисперсій для законів розподілів випадкової величини

F	v_r	D_ϑ	DN	N	DM	W	LN	EXP
0,1	0,18	1,0078E-3	1,0078E-3	1,0232E-3	1,13E-3	2,159E-3	2,16E-3	9,92E-3
0,1	0,22	1,1053E-3	1,1053E-3	1,1222E-3	1,23E-3	2,338E-3	1,36E-3	0,01129
0,1	0,57	7,132E-4	7,132E-4	7,2409E-4	8,49E-4	1,484E-3	1,11E-3	4,543E-
0,15	0,15	1,29299E-3	1,293E-3	1,3127E-3	1,39E-3	3,265E-3	1,56E-3	0,02099
0,15	0,18	1,40475E-3	1,4048E-3	1,4261E-3	1,49E-3	3,676E-3	1,65E-3	0,02640
0,15	0,47	1,00784E-3	1,0078E-3	1,0232E-3	1,13E-3	2,159E-3	1,23E-3	9,92E-3
0,2	0,13	1,61216E-3	1,6122E-3	1,5756E-3	1,69E-3	4,423E-3	1,76E-3	0,03888
0,2	0,16	1,813E-3	1,813E-3	1,8406E-3	1,89E-3	4,827E-3	1,99E-3	0,04708
0,2	0,41	1,27144E-3	1,27144E-3	1,29079E-3	1,38E-3	3,959E-3	1,57E-3	0,01732

Аналіз даних таблиці показує, що емпіричне значення дисперсії D_ϑ, статистики вигляду (1) і дисперсія розподілу DN збігаються і мають найменше значення серед розподілів, наведених у таблиці.

Висновки

Результати аналізу якості статистики вигляду $\vartheta = r / N$ показали, що ця статистика є достатньою, спроможною, незміщеною і ефективною.

Література

1. *Горбань І.І.* Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів. – К.: МПБП «Крамар», 2003. – 244 с.

1. *Стрельников В.П., Федухин А.В.* Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем. – К.: Логос, 2002. – 486 с.

2. *ГОСТ 27.005-97.* Надёжность в технике. Модели отказов. Основные положения. − Введ. 01.01.99. – 43 с.

3. *РД 50-690-89* Методические указания. Надёжность в технике. Методы оценки показателей надёжности по экспериментальным данным. – Введ. 01.01.91. − 131 с.

4. *ДСТУ 3004* Надёжность в технике. Методы оценки показателей надёжности по экспериментальным данным. – Введ. 01.01.97. – 123 с

Стаття надійшла до редакції 12.11.07.