Диференціювання

$d[f(x)]/dx$

1. $(const)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$
5. $(e^x)' = e^x$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $(shx)' - chx$
11. $(chx)' = shx$
12. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$
13. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$
14. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
15. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
16. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\log_a x)' = (\log_a e)\frac{1}{x}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Інтегрування

$\int f(x)dx$

1. $\int 0\,dx = const$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$ $\int dx = x + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ $(x \neq 0)$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0, a \neq 1)$
5. $\int e^x dx - e^x + C$ $\forall x$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\forall x$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ $\forall x$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ (в точках неперервності $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$)
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$ (в точках неперервності $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$)
10. $\int shx\,dx = chx + C$ $\forall x$ $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
11. $\int shx\,dx = chx + C$ $\forall x$ $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
12. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$ $\forall x$ $thx = \frac{shx}{chx}$
13. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$ $(x \neq 0)$ $cthx = \frac{chx}{shx}$
14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C$ $\forall x$
15. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$ $\forall x$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$ $(|x| < 1)$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ $(|x| < a)$
18. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ $(|x| \neq a)$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$ $(|x| > a)$
20. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$ (в точках неперервності $f(x) = \frac{1}{\sin x}$)
21. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$ (в точках непер-вності $f(x) = \frac{1}{\cos x}$)
22. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$
23. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

Оберженні гіперболічні функції:

$Archx = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

$Arshx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$Arthx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

$Arcthx = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$

Методи пошуку невизначених інтегралів

- $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$, де $F'(x)=f(x)$ — первісна

- <u>Формула інтегрування частинами</u>: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

(I) $\int P_n(x)\begin{Bmatrix} e^{\alpha x} \\ \cos\beta x \\ \sin\beta x\end{Bmatrix}dx$, $\boxed{u=P_n(x)}$

(II) $\int P_n(x)\begin{Bmatrix} (\arcsin x)^m \\ (\arccos x)^m \\ (\mathrm{arctg}\,x)^m \\ (\ln x)^m\end{Bmatrix}dx = \int P_n(x)\varphi(x)dx$, $\boxed{u=\varphi(x)}$

(III) $\int e^{\alpha x}\begin{Bmatrix} \cos\beta x \\ \sin\beta x\end{Bmatrix}dx$, $\boxed{u=e^{\alpha x}}$

$I_1 = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left[\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x\right]+c$

$I_2 = \int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left[\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x\right]+c$

- <u>Інтегрування елементарних раціональних дробів</u>

Рац. дріб $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ $m<n \Rightarrow$ правильний

$m \geq n \Rightarrow$ неправильн. $\rightarrow$ виділити цілу частину

(I) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C$;

(II) $\int \frac{B}{(x-a)^k}dx = B\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C;\ k\neq 1$

$D=p^2-4q<0$ (III) $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left| d(x^2+px+q)=(2x+p)dx \right| = \frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\underbrace{\int\frac{dx}{x^2+px+q}}_{J} \boxed{=}$

$J = \int\frac{dx}{x^2+px+q} = \int\frac{d(x+p/2)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \left|\int\frac{dz}{z^2+a^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{z}{a}+c\right| = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\mathrm{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+c$

$\boxed{=}\ \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\mathrm{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$;

(IV) $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx$ $(p^2-4q<0)$: — 1 спосіб

Зведення до інтегралу вигляду

$I_n = \int\frac{dz}{(z^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{z}{(z^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right]$

рекурентна формула

— 2 спосіб (формула Остроградського):

многочл. степ. $2k-3$ з невідомими коефіцієнтами

$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{P_{2k-3}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \lambda\int\frac{dx}{x^2+px+q}$, диференціюємо праву част., прирівн. чисельники і знаходимо λ.

- <u>Раціональні ф-ції від тригонометр. ф-цій $R(\sin x, \cos x)$</u>:

I. $\begin{cases} R(-\sin x,\cos x) = -R(\sin x,\cos x) \\ R \text{ — непарна відносно } \sin x\end{cases} \Longrightarrow$ Підстановка: $\boxed{t=\cos x}$

II $\begin{cases} R(\sin x,-\cos x) = -R(\sin x,\cos x) \\ \text{непарн. відносно } \cos x\end{cases} \Longrightarrow \boxed{t=\sin x}$

III $\begin{cases} R(-\sin x,-\cos x) = R(\sin x,\cos x) \\ \text{парна відносно } \sin x, \cos x\end{cases} \Longrightarrow \boxed{t=\mathrm{tg}\,x}$

$dx=\frac{dt}{1+t^2}$; $\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$; $\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}$

$\begin{cases}\text{Універсальна підстановка:} \\ R(\sin x,\cos x) \text{ — дал. вигляду}\end{cases}$ $\boxed{t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}} \Longrightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$; $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Інтегрування деяких ірраціональних функцій

I) $\int R(x, x^{\alpha}, x^{\beta}, \dots, x^{\gamma})\,dx \Longrightarrow$ Заміна: $\boxed{x = t^s}$ раціоналізує інтегр., де s — спільний знаменник $\alpha, \beta, \dots, \gamma$

$\underbrace{\alpha = \frac{m_1}{n_1}, \beta = \frac{m_2}{n_2}, \dots, \gamma = \frac{m_k}{n_k}}_{\in \mathbb{Q}}$

II) Дробово-лін. ірраціональність

$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \longrightarrow$ Заміна: $\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^n}$ зводить підінтегр. ф-цію до раціональн. виразу

$n \in \mathbb{N}$, $ad - bc \neq 0$

Узагальнення:

$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\gamma}\right)dx \Longrightarrow$ Заміна: $\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^s}$, де s — спільний ~~знаменник~~ дробів $\alpha, \dots, \gamma$

$\alpha, \dots, \gamma \in \mathbb{Q}$

III) Квадратична ірраціональність

$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx \Longrightarrow$ — I спосіб: Виділяємо повний квадрат під коренем і приходимо до одного з інтегралів:

ax^2+bx+c не має кратних туліб

$\int R(z, \sqrt{1-z^2})\,dz \Longrightarrow$ Заміни: $z = \sin t$; $z = \cos t$; $\sqrt{1-z^2} = t(1 \pm z)$; $\sqrt{1-z^2} = zt \pm 1$;

$\int R(z, \sqrt{1+z^2})\,dz \Longrightarrow$ Заміни: $z = \operatorname{tg} t$; $z = \operatorname{sh} t$; $\sqrt{1+z^2} = zt \pm 1$; $\sqrt{1+z^2} = z - t$.

$\int R(z, \sqrt{z^2-1})\,dz \Longrightarrow$ Заміни: $z = \frac{1}{\cos t}$; $z = \frac{1}{\sin t}$; $\sqrt{z^2-1} = t(z \pm 1)$; $\sqrt{z^2-1} = z - t$.

— 2 спосіб: Підстановки Ейлера:

Перша: $a > 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$

Друга: $c > 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$

Третя: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow$

x_1 та x_2 — дійсні корені:

$\Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1)t$.

Частинні випадки:

$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ Диф. ліву і праву частини, прирівн. коефіц.

$Q_{n-1}(x)$ — многочл. степ. $n-1$ з невід. коефіц.

λ — невідома стала

$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}} \Longrightarrow$ Заміна: $\boxed{t = \frac{1}{x-\alpha}}$ зводить інтеграл до попереднього інтегралу.

IV) Диференціальний біном.

$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$

$a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{R}$

Випадки: 1) $p \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$ заміна: $\boxed{x = t^s}$ де s — спільний дільник m і n

2) $\begin{cases} \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \\ p \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Longrightarrow$ заміна: $\boxed{a + bx^n = t^e}$, де e — знаменник p

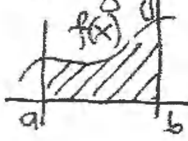
3) $\begin{cases} \frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}, p \notin \mathbb{Z} \\ \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\frac{a+bx^n}{x^n} = t^e}$

e — знаменник p.

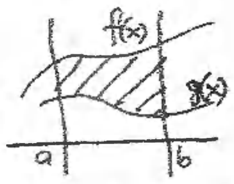
Застосування інтеграла Rimanna

(I) Площа фігури: $\overline{\Omega}=\{(x,y): y_1=f(x)\le y_2=g(x),\ a\le x\le b\}$ $\quad\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$

- Γ — задана явно

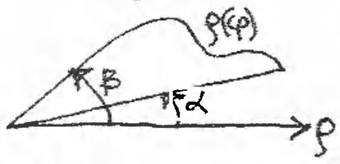


$$S=\int_a^b f(x)dx;$$



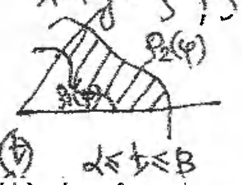
$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

- Γ — задана в полярній системі координат $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}$ $x^2+y^2=\rho^2,\ \rho\ge 0$



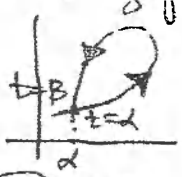
$\begin{cases}\rho=\rho(\varphi)\\ \alpha\le\varphi\le\beta\end{cases}$

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi;$$



$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[\rho_2^2(\varphi)-\rho_1^2(\varphi)]d\varphi$$

- Γ — задана параметрично („Петля"): $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$

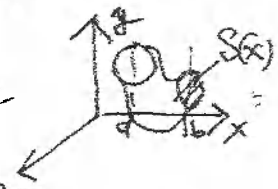


$$S=-\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt=\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt=\frac{1}{2}\left[\int_\alpha^\beta[xy'-yx']dt\right].$$

при $y(t)\ge 0,\ t\in[\alpha,\beta]$ $\quad$ при $x(t)\ge 0,\ t\in[\alpha,\beta]$

(II) Об'єм тіла

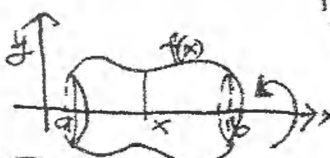
- Задана площа поперечного перерізу



$$V=\int_a^b S(x)dx$$

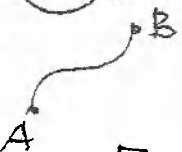
- Об'єм тіла обертання:

$$V_{0x}^{\circlearrowleft}=\int_a^b \pi f^2(x)dx,\qquad V_{0y}^{\circlearrowleft}=\int_a^b 2\pi x\cdot y(x)dx$$



$$V_{0\rho}^{\circlearrowleft}=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi;$$

(III) Довжина дуги: $|\Gamma|=\int_A^B dl$



- Γ — задана явно: $\begin{cases}y=f(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$

$$dl=\sqrt{1+f_x'^2}\,dx$$

- Γ — задана параметрично: $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\\ \alpha\le t\le\beta\end{cases}$

$$dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt.$$

- Γ — задана в полярній сист. коорд.: $\begin{cases}\rho=\rho(\varphi)\\ \alpha\le\varphi\le\beta\end{cases}$

$$dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$$

- Маса дуги: $m=\int_A^B \gamma(\cdot)dl,$

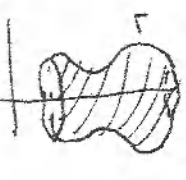
γ — густина маси

- Центр ваги: $C(x_c,y_c)$

$$x_c=\frac{1}{m}\int_A^B x\,dl;$$

$$y_c=\frac{1}{m}\int_A^B y\,dl.$$

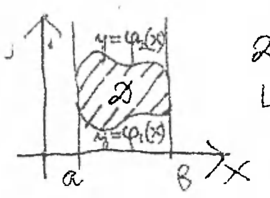
(IV) Площа поверхні обертання



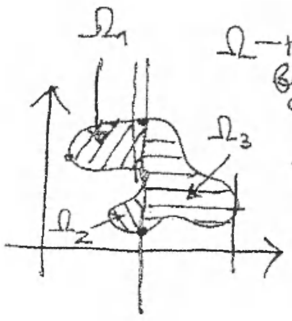
- Γ — задана явно: $\begin{cases}y=f(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$ $\quad S_{0x}^{\circlearrowleft}=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f_x')^2}\,dx$
- Γ — задана парамет.: $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ \alpha\le t\le\beta\end{cases}$ $\quad S_{0x}^{\circlearrowleft}=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$
- Γ — задана в полярній сист. коорд.: $\begin{cases}\rho=\rho(\varphi)\\ \alpha\le\varphi\le\beta\end{cases}$ $\quad S_{0\rho}^{\circlearrowleft\,0x}=2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2+(\rho_\varphi')^2}\,d\varphi$

dl

Подвійний інтеграл

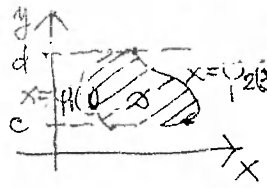


$\mathcal{D}=\{(x,y): a\leq x\leq в, \varphi_1(x)\leq y\leq \varphi_2(x)\}$
└ правильна відносно осі Oy
(∀ пряма, ∥ осі Oy, перетинає замкн. область у двох точках)



Ω — неправильна вздовж Oy.

$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3$;
Ω_i — правильні у напрямі Oy



$\mathcal{D}=\{(x,y): \psi_1(y)\leq x\leq \psi_2(y), c\leq y\leq d\}$
└ правильна відносно осі Ox

- Площа $\mathcal{D}$: $S(\mathcal{D})=\iint\limits_{\mathcal{D}} dxdy = \int\limits_a^в dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy = \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dx\int\limits_c^d dy$.
- Маса (заряд) $\mathcal{D}$: $\gamma=\gamma(x,y)$ — густина маси,
  $m=\iint\limits_{\mathcal{D}}\gamma(x,y)dxdy$
- Пластинка ($\mathcal{D}\in\mathbb{R}^2$):

— Статичні моменти відносно осей:

$$M_{ox}=\iint\limits_{\mathcal{D}} y\gamma(x,y)dxdy;$$
$$M_{oy}=\iint\limits_{\mathcal{D}} x\gamma(x,y)dxdy.$$

— Центр ваги пластинки $\mathcal{D}$: $C(x_c,y_c)$

$$x_c=\frac{1}{m}M_{oy};\quad y_c=\frac{1}{m}M_{ox};\qquad m=\iint\limits_{\mathcal{D}}\gamma(x,y)dxdy$$

— Моменти інерції відносно осей:

$$I_{ox}=\iint\limits_{\mathcal{D}} y^2\gamma(x,y)dxdy;$$
$$I_{oy}=\iint\limits_{\mathcal{D}} x^2\gamma(x,y)dxdy.$$

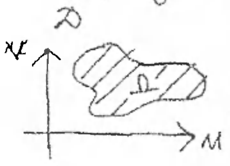
— Момент інерції відносно початку координат $O(0,0)$:

$$I_0=I_{ox}+I_{oy}=\iint\limits_{\mathcal{D}}(x^2+y^2)\gamma(x,y)dxdy.$$

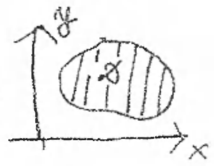
- Заміна змінних в подвійному інтегралі:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}}\gamma(x,y)dxdy=\iint\limits_{\Omega}\gamma(u,v)\cdot|J|dudv,$$ де $J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ — якобіан переходу:

$$J=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}=x'_uy'_v-x'_vy'_u.$$

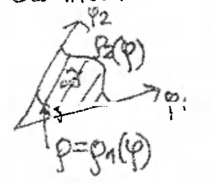


$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v)\end{cases}$

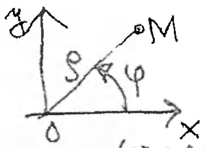


— Полярна система координат:

$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}$
$x^2+y^2=\rho^2$
$|J|=\rho.$



$$\iint\limits_{\mathcal{D}}dxdy=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\rho d\rho$$
$$\iint\limits_{\mathcal{D}}\gamma(x,y)dxdy=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\gamma(\rho,\varphi)\rho d\rho.$$



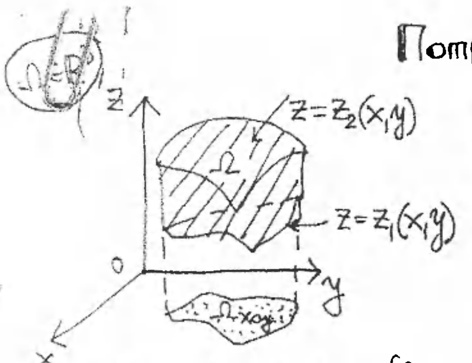
$(\rho\geq0, 0\leq\varphi\leq2\pi)$

— Узагальнена полярна система:

$\begin{cases} x=a\rho\cos\varphi, \\ y=b\rho\sin\varphi;\end{cases}$ $\quad|J|=ab\rho$

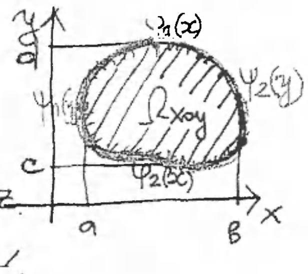
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\rho^2$

Потрійний інтеграл



$\Omega = \{(x,y,z): (x,y)\in\Omega_{xoy},\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$ — циліндрична у напрямі OZ

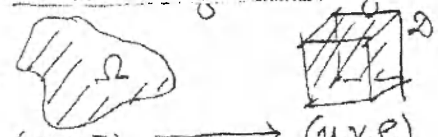
$\Omega_{xoy} = \text{пр}_{xoy}\,\Omega$ — правильна область



$$\underbrace{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz}_{\text{потрійний інтеграл}} = \underbrace{\iint\limits_{\Omega_{xoy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\,dz}_{\text{подвійний інтеграл}} = \underbrace{\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz}_{\text{повторний інтеграл}}$$

$\Omega_{xoy} = \{(x,y): a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\} = \{(x,y): \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y),\ c\le y\le d\}$.

- Заміна змінних у потрійному інтегралі:



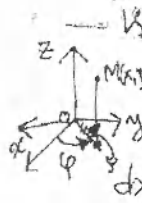
$(x,y,z) \longrightarrow (u,v,e)$

$$\begin{cases} x = x(u,v,e) \\ y = y(u,v,e) \\ z = z(u,v,e) \end{cases} \qquad dxdydz = |J|\,dudvde$$

де $J = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,e)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_e \\ y'_u & y'_v & y'_e \\ z'_u & z'_v & z'_e \end{vmatrix}$;

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} f(x(u,v,e), y(u,v,e), z(u,v,e))\cdot|J|\,dudvde.$$

— Циліндрична система:

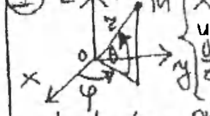


$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & \rho\ge 0, \\ y = \rho\sin\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi \\ z = z, & -\infty<z<\infty \end{cases}$$

$dxdydz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$

— Сферична система:

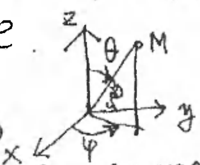
(I)



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta & (r\ge 0) \\ y = r\sin\varphi\cos\theta & 0\le\varphi\le 2\pi \\ z = r\sin\theta & \theta\in[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$dxdydz = r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$

(II)



$\rho\ge 0$, $\varphi\in[0,2\pi)$, $\theta\in[0,\pi]$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

$dxdydz = \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$

- Об'єм тіла Ω: $V_\Omega = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz$
- Маса (заряд) тіла Ω з густиною $\gamma = \gamma(x,y,z)$ маси: $m = \iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)\,dxdydz$.
- Статичні моменти відносно площин:

  $M_{xoy} = \iiint\limits_{\Omega} z\,\gamma(x,y,z)\,dxdydz$;

  $M_{yoz} = \iiint\limits_{\Omega} x\,\gamma(x,y,z)\,dxdydz$;

  $M_{xoz} = \iiint\limits_{\Omega} y\,\gamma(x,y,z)\,dxdydz$
- Центр ваги тіла Ω з густиною $\gamma(x,y,z)$: $\longrightarrow C(x_c, y_c, z_c)$

  $x_c = \frac{1}{m}M_{yoz}$; $y_c = \frac{1}{m}M_{xoz}$; $z_c = \frac{1}{m}M_{xoy}$, де $m = \iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)\,dxdydz$.
- Моменти інерції відносно площин:

  $I_{yoz} = \iiint\limits_{\Omega} x^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz$;

  $I_{xoz} = \iiint\limits_{\Omega} y^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz$;

  $I_{xoy} = \iiint\limits_{\Omega} z^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz$.
- Моменти інерції відносно осей:

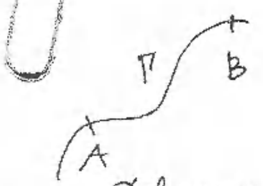
  $I_{ox} = \iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,dxdydz$;

  $I_{oy} = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,dxdydz$;

  $I_{oz} = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\gamma(x,y,z)\,dxdydz$.
- Момент інерції тіла Ω відносно початку координат:

  $I_0 = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,dxdydz$.

Криволінійні інтеграли I роду (по дузі)



$$J=\int_A^B f(M)\,dl=\int_0^L f(x(l),y(l),z(l))\,dl$$, f — непер. або кусково-непер. ф-ція, задана на Γ

- Довжина дуги: $|\Gamma|=\int_\Gamma dl$:
  - Γ — явно: $y=f(x)$, $dl=\sqrt{1+f_x'^2}\,dx$;
  - Γ — в полярних координатах: $\rho=\rho(\varphi)$, $dl=\sqrt{\rho^2+\rho_\varphi'^2}\,d\varphi$;
  - Γ — параметрично: $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}$ $dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt$

- Маса дуги. $\gamma=\gamma(x,y,z)$ — густина маси:
  $m=\int_\Gamma \gamma(x,y,z)\,dl$

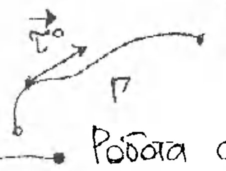
КІ I роду від орієнтації дуги не залежить

- Центр ваги $C(x_c,y_c,z_c)$ кривої Γ:
  $$\begin{Bmatrix}x_c\\ y_c\\ z_c\end{Bmatrix}=\frac{1}{m}\int_\Gamma \begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}\gamma(x,y,z)\,dl;$$
- Статичні моменти відносно осей ($\Gamma\subset\mathbb{R}^2$)
  $$\begin{Bmatrix}M_{Ox}\\ M_{Oy}\end{Bmatrix}=\int_\Gamma \begin{Bmatrix}y\\ x\end{Bmatrix}\gamma(x,y)\,dl$$
- Моменти інерції відносно осей:
  $$\begin{Bmatrix}I_{Ox}\\ I_{Oy}\end{Bmatrix}=\int_\Gamma \begin{Bmatrix}y^2\\ x^2\end{Bmatrix}\gamma(x,y)\,dl$$
- Момент інерції відносно початку координат:
  $$I_0=I_{Oy}+I_{Ox}=\int_\Gamma (x^2+y^2)\gamma(x,y)\,dl$$

Криволінійні інтеграли II роду (по координатах)

орієнтація $+$: область зліва

орієнт. $-$



$\vec F=\left(X(x,y,z),\,Y(x,y,z),\,Z(x,y,z)\right)$ — поле сили

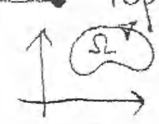
- Робота сили $$A=\underbrace{\int_\Gamma\left[X(x,y,z)dx+Y(x,y,z)dy+Z(x,y,z)dz\right]}_{\text{КІ II роду}}=\underbrace{\int_\Gamma(\vec F\cdot\vec\tau^{\,0})\,dl}_{\text{КІ I роду}}$$

$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t)\end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$
$$A=\int_\alpha^\beta\left[X(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Y(x(t),y(t),z(t))y_t'+Z(x(t),y(t),z(t))z_t'\right]dt$$

- Циркуляція — робота вздовж замкненого контура: $Ц=\oint_\Gamma(\vec F\cdot\vec\tau^{\,0})\,dl$.

Площа внутр. контура: $S=\oint_\Gamma x\,dy=-\oint_\Gamma y\,dx=\frac12\oint_\Gamma x\,dy-y\,dx$.

- Формула Гріна ($\Gamma\subset\mathbb{R}^2$):



Γ_+ $$Ц=\oint_{\Gamma+}\left[X(x,y)dx+Y(x,y)dy\right]=\iint_\Omega\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\,dy$$; $X, Y, \frac{\partial Y}{\partial x}$ і $\frac{\partial X}{\partial y}$ — непер. у замкн. обмеж. області Ω

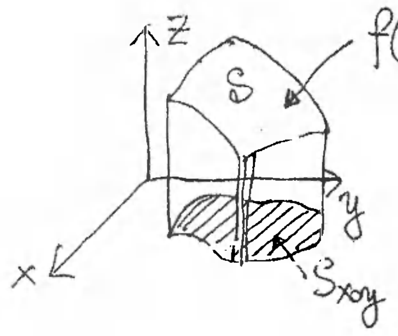
- Поле потенціальне, якщо $\begin{cases}\operatorname{rot}\vec F=\vec 0\\ \vec F(X,Y,Z)\end{cases}$, де $\operatorname{rot}\vec F=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ X & Y & Z\end{vmatrix}$

для плоского поля $\vec F=(X,Y)$ умова потенціальності: $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$.

- Потенціал поля $$u(x,y,z)=C+\int_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{M(x,y,z)}\left[X(x,y,z)dx+Y(x,y,z)dy+Z(x,y,z)dz\right],$$

(де M_0 — довільна фіксована точка; інтеграл не залежить від форми шляху).

Поверхневі інтеграли I роду



$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{S_{xoy}} f(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

Зауваження: $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \dfrac{1}{\cos(\vec{n},\vec{z})}$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{S_{xoy}} f(x,y,z(x,y))\,\frac{dxdy}{\cos(\vec{n},\vec{z})}$$

- Площа поверхні S: $z=\varphi(x,y)$

$$|S| = \iint\limits_S dS = \iint\limits_{S_{xoy}} \sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}\,dxdy$$

- Маса поверхні S з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)$:

$$m = \iint\limits_S \gamma(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{S_{xoy}} \gamma(x,y,\varphi(x,y))\cdot\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}\,dxdy.$$

- Центр ваги поверхні S: $C(x_c,y_c,z_c)$

$$\begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{Bmatrix} = \frac{1}{m}\iint\limits_S \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \gamma(x,y,z)\,dS$$

- Статичні моменти поверхні S відносно площин:

$$M_{xoy} = \iint z\,\gamma(x,y,z)\,dS;\quad M_{xoz} = \iint y\,\gamma(x,y,z)\,dS;\quad M_{yoz} = \iint\limits_S x\,\gamma(x,y,z)\,dS.$$

- Моменти інерції поверхні S відносно площин:

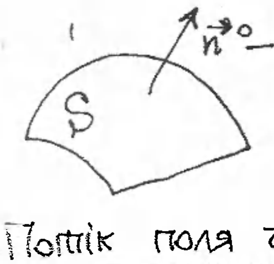
$$I_{xoy} = \iint\limits_S z^2\gamma(x,y,z)\,dS;\quad I_{xoz} = \iint\limits_S y^2\gamma(x,y,z)\,dS;\quad I_{yoz} = \iint\limits_S x^2\gamma(x,y,z)\,dS$$

- Моменти інерції поверхні S відносно осей координат:

$$I_{ox} = \iint\limits_S (y^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,dS;\quad I_{oy} = \iint\limits_S (x^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,dS;\quad I_{oz} = \iint\limits_S (x^2+y^2)\gamma(x,y,z)\,dS.$$

- Момент інерції поверхні S відносно початку координат:

$$I_0 = I_{zox} + I_{xoy} + I_{yoz} = \iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,dS.$$



Поверхневі інтеграли II роду

$\vec{n}^\circ$ — довільна нормаль до S

$$\Pi = \iint\limits_S (\vec{F}\cdot\vec{n}^\circ)\,dS = \iint\limits_S \left[X(x,y,z)\,dydz + Y(x,y,z)\,dxdz + Z(x,y,z)\,dxdy\right]$$

└ поверхн. інтегр. II роду

- Потік поля через незамкнену поверхню S (частину): $z=\varphi(x,y)$

$$\Pi = \pm\iint\limits_{S_{xoy}} \left[-X(x,y,\varphi(x,y))\,\varphi'_x - Y(x,y,\varphi(x,y))\,\varphi'_y + Z(x,y,\varphi(x,y))\cdot 1\right] dxdy$$

└ знак "+", якщо нормаль $\vec{n}_0$ утв. з OZ гострий кут; знак "−", якщо $\vec{n}^0$ утв. з OZ тупий кут.

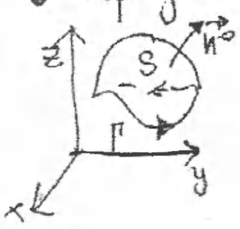
- Формула Гаусса–Остроградського (потік через замкнену поверхню):

$$\Pi = \oiint\limits_{S+} \left[X(x,y,z)\,dydz + Y(x,y,z)\,dxdz + Z(x,y,z)\,dxdy\right] = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{F}\,dxdydz,$$

$S+$ зовн. сторона поверхні тіла V

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

- Формула Стокса (зв'язок між поверхневими і криволінійними інтегралами)



$$\oint\limits_{\Gamma+} \left[X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\right] = \iint\limits_{S+} (\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}^\circ)\,dS =$$
$$= \iint\limits_{S+} \left[\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right] dydz + \left[\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right] dxdz + \left[\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right] dxdy.$$

- Поле сили $\vec{F} = (X,Y,Z)$ — соленоїдальне, якщо $\operatorname{div}\vec{F} = 0$.

Характеристики скалярних та векторних полів

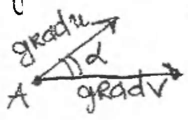
$u = u(x,y,z)$ — скалярне поле, ф-ція

$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ — градієнт ф-ції u

- Швидкість зміни поля u у т. A у напрямі вектора $\vec{e}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = (\operatorname{grad} u)\big|_A \cdot \vec{e}^\circ = (\operatorname{grad} u)\big|_A \cdot \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}; \quad \max\left|\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}\right| = \|\operatorname{grad} u(A)\|$$

- Кут між градієнтами скалярних полів u і v у т. A:



$$\begin{matrix} u = u(x,y,z) \\ v = v(x,y,z) \end{matrix} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{(\operatorname{grad} u)\big|_A \cdot (\operatorname{grad} v)\big|_A}{\left\|(\operatorname{grad} u)\big|_A\right\| \cdot \left\|(\operatorname{grad} v)\big|_A\right\|}$$

- Густина циркуляції векторного поля $\vec{a} = (X,Y,Z)$ у точці A, яка є найбільшою — це довжина ротора:

$$\max j(A) = \left\|(\operatorname{rot}\vec{a})\big|_A\right\| = \operatorname{mod}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ X & Y & Z \end{matrix}\right\|(A) = \sqrt{\left[\frac{\partial Z}{\partial y}(A) - \frac{\partial Y}{\partial z}(A)\right]^2 + \left[\frac{\partial Z}{\partial x}(A) - \frac{\partial X}{\partial z}(A)\right]^2 + \left[\frac{\partial Y}{\partial x}(A) - \frac{\partial X}{\partial y}(A)\right]^2}.$$

- Поле $\vec{F} = (X,Y,Z)$ — потенціальне, якщо $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$;
- Поле $\vec{F}$ — соленоїдальне, якщо $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$.

Методи розв'язання диференціальних рівнянь

Назва Д.Р	Загальний вигляд	Метод розв'язання
Рівняння з відокремлюваними змінними	$y' = f(x)g(y)$	$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$;
	$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$	$P(x)=0, N(y)=0$ і $\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0$
Однорідне рівн.	$y' = f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$z = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z'x + z = f(z) \Rightarrow \int \frac{dz}{f(z)-z} = \int \frac{dx}{x}$;
Рівн. яке зводиться до однорідного	$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ a_i, b_i, c_i, $i=1,2$ – const	$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ (I) $\Delta \neq 0 \Rightarrow \exists!$ розв'язок: $\begin{cases} x = u + A \\ y = v + B \end{cases}$, де $\begin{cases} a_1A + b_1B + c_1 = 0 \\ a_2A + b_2B + c_2 = 0 \end{cases}$ (II) $\Delta = 0 \Rightarrow$ заміна: $a_1x + b_1y + c_1 = z$
Лінійне рівняння 1-го порядку	$y' + p(x)y = g(x)$	(I) Метод Лагранжа варіації довільної сталої: 1/ $y_0' + p(x)y_0 = 0$; $y_0 = C^* e^{-\int p(x)dx}$ 2/ $y_{ч.р.} = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ – ∀ част. розв'язок ЛНДР-т Тоді $y_{зрн} = y_0(x) + y_{ч.р} = [C(x) + C^*]e^{-\int p(x)dx}$ (II) Метод Бернуллі: $y = u \cdot v$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$ $y' = u'v + v'u$ $u'v + uv' + puv = g \Rightarrow u'v + u[v' + pv] = g$; $v' + pv = 0$; v – ∀ част. розв. $\Rightarrow u'v = g$ …
Рівняння Бернуллі	$y' + p(x)y = g(x)y^{\alpha}$ $\alpha \notin \{0, 1\}$	(I) Метод Бернуллі: $y = u(x) \cdot v(x)$ (II) Метод Лагранжа варіації довільної сталої (III) Заміна: $z = \frac{1}{y^{\alpha-1}} = y^{1-\alpha}$.
Рівняння Рікатті	$y' + p(x)y + g(x)y^2 = f(x)$	Нехай $y^*_{ч.р.}$ – ∀ част. розв'язок рівн. Рікатті, тоді $y = z + y^*_{ч.р}$ зводить рівн. до рівн. Бернуллі з $\alpha = 2$.
Рівняння у повних диференціалах	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$; $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$	$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y) \end{cases} \Rightarrow$ $U(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y)$; $\underbrace{\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \frac{d\varphi(y)}{dy} = N(x,y)}_{\text{рівн. 1-го пор. відн. } \varphi'(y)}$ Перший інтеграл: $U(x,y) = C$, тобто $\int M(x,y)dx + \varphi(y) = C$, $C \in R$
Рівняння n-го порядку, яке не міст. $y = y(x)$	$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$	Заміна: $y^{(k)} = p(x)$; $y^{(k+1)} = p'(x)$, …, $y^{(n)} = p^{(n-k)}(x)$. допускає зниж. порядку рівняння
Рівняння n-го порядку, яке не містить змінної x	$F(y, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$	Заміна: $y^{(k)} = p(y)$, $y^{(k+1)} = p'p$, $y^{(k+2)} = p(p^2 + p'^2)$, … допуск. зниж. порядку.
* Квазіоднорідне рівняння (з вагами α при x, β при y)	$y' = f(x, y)$; $f(t^{\alpha}x, t^{\beta}y) = t^{\beta-\alpha}f(x,y)$	Заміна $y = z^{\beta/\alpha}$ зводить рівн. до однорідного рівняння.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Вигляд ЛОДР-n: $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$. Заміна Ейлера: $y = e^{\lambda x}$

Характ. рівняння: $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ має рівно n коренів (теор. Гауса)

Випадок	Елемент ФСР	Доданок у заг. розв'язку
λ_j — простий дійсний корінь х.р.	$e^{\lambda_j x}$	$C_j e^{\lambda_j x}$
λ_j — дійсний корінь кратності s	$e^{\lambda_j x}, x e^{\lambda_j x}, \ldots, x^{s-1} e^{\lambda_j x}$	$C_j e^{\lambda_j x} + C_{j+1} x e^{\lambda_j x} + \ldots + C_{j+s-1} x^{s-1} e^{\lambda_j x}$
$\lambda_{j_{1,2}} = \alpha \pm i\beta$ — комплексно спряжені корені	$e^{\alpha x} \cos\beta x, e^{\alpha x} \sin\beta x$	$e^{\alpha x}(A_j \cos\beta x + B_j \sin\beta x)$
$\lambda_{j_{1,2}} = \alpha \pm i\beta$ — компл. спряжені корені кратн. s	$e^{\alpha x} \cos\beta x, x e^{\alpha x} \cos\beta x, \ldots, x^{s-1} e^{\alpha x} \cos\beta x$ $e^{\alpha x} \sin\beta x, x e^{\alpha x} \sin\beta x, \ldots, x^{s-1} e^{\alpha x} \sin\beta x$	$e^{\alpha x} \cos\beta x \left[A_{j_1} + A_{j_2} x + \ldots + A_{j_{s-1}} x^{s-1}\right] +$ $+ e^{\alpha x} \sin\beta x \left[B_{j_1} + B_{j_2} x + \ldots + B_{j_{s-1}} x^{s-1}\right]$

ФСР: $\{y_1, \ldots, y_n\} \Rightarrow y_{зр} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$ — вигляд заг. розв'язку ЛОДР-n

Лінійні неоднорідні диф. рівн. n-го порядку зі сталими коеф. і правою част. спец. вигляду

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$

Вигляд правої частини	Вигляд частинного розв'язку ($y_{грн}$) без резонансу	з резонансом
$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$	$y_{грн} = \overline{P}_n(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$	$y_{грн} = x^s \cdot \overline{P}_n(x)$
$f(x) = a e^{\lambda x}$	$y_{грн} = A e^{\lambda x}$	$y_{грн} = x^s \cdot A e^{\lambda x}$
$a \cos\beta x + b \sin\beta x$	$A \cos\beta x + B \sin\beta x$	$x^s (A \cos\beta x + B \sin\beta x)$
$e^{\alpha x}(a \cos\beta x + b \sin\beta x)$	$e^{\alpha x}(A \cos\beta x + B \sin\beta x)$	$x^s e^{\alpha x}(A \cos\beta x + B \sin\beta x)$
$e^{\alpha x}(P_n(x) \cos\beta x + Q_m(x) \sin\beta x)$	$e^{\alpha x}(\overline{P}_l(x) \cos\beta x + \overline{Q}_l(x) \sin\beta x)$, $l = \max(n, m)$	$x^s e^{\alpha x}(\overline{P}_l(x) \cos\beta x + \overline{Q}_l(x) \sin\beta x)$, $l = \max(n, m)$

Загальний розв'язок ЛНДР-n:

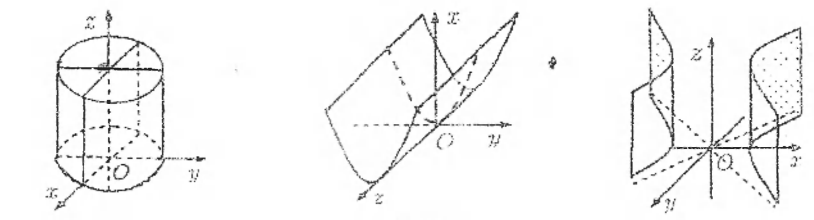
$y(x) = y_{зро} + y_{грн}$, де $y_{зро}$ — заг. розв'язок ЛОДР-n, що відп. даному

$y_{грн}$ — част. розв'язок ЛНДР-n.

Рівняння, що зводяться до ЛНДР-n (ЛОДР-n) зі сталими коефіцієнтами

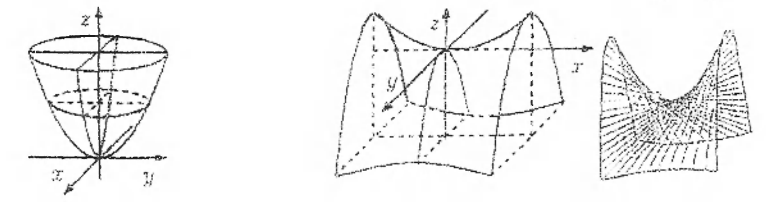
Назва ДР	Вигляд	Метод розв'язання
Рівняння Ейлера	$x^n y^{(n)} + x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + x y' + y = f(x)$,	$y = e^{-t}$; $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = e^{-t} y'_t$, $y'' = \frac{d}{dx}(e^{-t} y'_t) = \frac{(e^{-t} y'_t)'_t}{x'_t} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$; зводиться до ЛНДР-n зі стал. коеф.
Рівняння Лагранжа	$(ax+b)^n y^{(n)} + (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + (ax+b) y' + y = f(x)$	$ax + b = e^t \Rightarrow x = \frac{1}{a}(e^t - b)$ $y' = \frac{y'_t}{x'_t} = a e^{-t} y'_t$, ...

Визначні поверхні



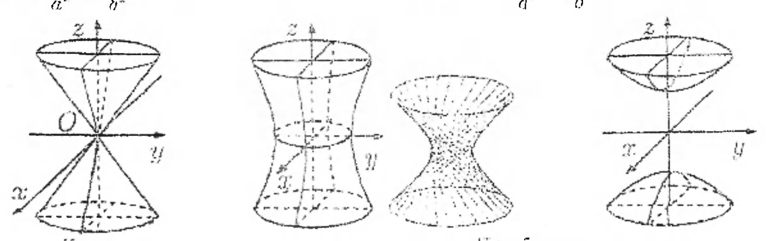
Циліндри

еліптичний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ параболічний $x^2 = 2py$ гіперболічний $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Параболоїди

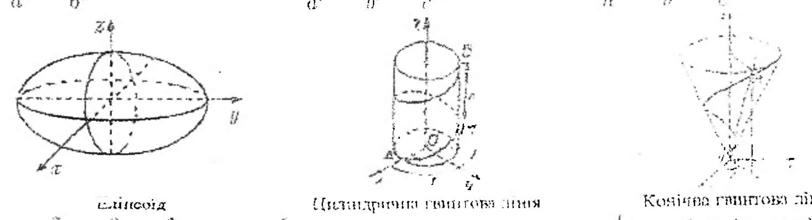
еліптичний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ гіперболічний $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$



Конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$

Гіперболоїди

однопорожнинний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ двопорожнинний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$



Еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Циліндрична гвинтова лінія $\left\{ x = a\cos t, y = a\sin t, z = \frac{ht}{2\pi} \right.$

Конічна гвинтова лінія $\begin{cases} x = at\cos t, y = at\sin t, \\ z = bt \end{cases}$