Лекція 2
План лекції «Властивості множин»

Тотожності алгебри множин (повторення з лекції 1)

1. **Розбиття множин**
2. **Покриття множин**
3. **Упорядкований набір або кортеж**

4.1. Визначення й загальне поняття кортежу
4.2. Довжина кортежу
4.3. Упорядкована пара

4. **Алгоритм упорядкування множини**
5. **Декартовий добуток множин**
   - 5.1. Визначення декартового добутку
   - 5.2. Графічна інтерпретація декартового добутку
   - 5.3. Зворотний декартовий добуток множин
6. **Проектування**
   - 6.1. Проектування кортежу і його графічна інтерпретація
   - 6.2. Проектування на осі координат
   - 6.3. Проектування на координатні площини
   - 6.4. Проектування на n-вимірний простір
   - 6.5. Проекція множини кортежів
7. **Відповідність. Основні поняття**
   - 8.1. Визначення відповідності
   - 8.2. Область визначення й область значень
8. **Типи відповідностей**
   - 9.1. Одно-однозначна відповідність
   - 9.2. Одно-багатозначна відповідність
   - 9.3.Багато-однозначна відповідність
   - 9.4. Багато-багатозначна відповідність

4. ТОТОЖНОСТІ АЛГЕБРИ МНОЖИН

Тотожності алгебри множин, сформульовані в наведених нижче теоремах, можуть бути перевірені шляхом формальних доказів або на діаграмах Венна.

Таблиця 1

1. Комутативність об'єднання $X \cup Y = Y \cup X$	1. Комутативність перетину $X \cap Y = Y \cap X$
2. Асоціативність об'єднання $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$	2. Асоціативність перетину $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$
3. Дистрибутивність об'єднання відносно перетину $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$	3. Дистрибутивність перетину відносно об'єднання $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
4. Закони дії з порожніми і універсальними множинами $X \cup \varnothing = X$ $X \cup \overline{X} = U$ $X \cup U = U$	4. Закони дії з порожніми і універсальними множинами $X \cap U = X$ $X \cap \overline{X} = \varnothing$ $X \cap \varnothing = \varnothing$
5.Закон ідемпотентності об'єднання Термін і**демпотентність** означає властивість математичного об'єкта, яка проявляється в тому, що повторна дія над об'єктом *<u>не змінює</u>* його $X \cup X = X$	5. Закон ідемпотентності перетину $X \cap X = X$
6. Закон де Моргана $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$	6. Закон де Моргана $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$
7. Закон поглинання $X \cup (X \cap Y) = X$	7. Закон поглинання $X \cap (X \cup Y) = X$
8. Закон склеювання $(X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) = X$	8. Закон склеювання $(X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y}) = X$
9. Закон Порецького $X \cup (\overline{X} \cap Y) = X \cup Y$	9. Закон Порецького $X \cap (\overline{X} \cup Y) = X \cap Y$
10. Закон подвійного доповнення $\overline{\overline{X}} = X$	

У справедливості перерахованих властивостей можна переконатися різними способами. Наприклад, намалювати діаграми Ейлера для лівої й правої частин тотожностей й переконатися, що вони збігаються, або ж провести формальне міркування для кожного тотожності. Розглянемо для прикладу першу тотожність: $A \cup A = A$. Візьмемо довільний елемент *x*, що належить до лівої частини тотожності, $x \in A \cup A$. За визначенням операції об'єднання маємо: $x \in A$ або $x \in A$. У кожному разі $x \in A$. Візьмемо тепер довільний елемент з множини в лівій частині тотожності. Виявляється, що він належить множині в правій частині. Звідси за визначенням включення множин одержуємо, що $A \cup A \subseteq A$. Нехай тепер $x \in A$. Тоді, очевидно, вірно, що $x \in A$ або $x \in A$. Звідси за визначенням операції об'єднання маємо $x \subseteq A \cup A$. Таким чином, $A \subseteq A \cup A$.

Отже, за визначенням тотожності множин: $A \cup A = A$. Аналогічні міркування неважко провести й для інших тотожностей.

Для доведення можна використовувати тотожності алгебри логіки.
Доведемо в такий спосіб властивість дистрибутивності множин.

ТЕОРЕМА

Для множин X і Y справджується тотожність:

$$X \cap \left(Y \cup Z\right) = \left(X \cap Y\right) \cup \left(X \cap Z\right)$$

ДОВЕДЕННЯ

При доведенні скористаємося операціями алгебри логіки, оскільки для доведення співвідношень на множинах необхідно довести, що ці співвідношення справедливі для всіх його елементів.

$x \in X \cap \left(Y \cup Z\right) \leftrightarrow \left(x \in X\right) \wedge \left(x \in \left(Y \cup Z\right)\right) \leftrightarrow$ Визначення перетину

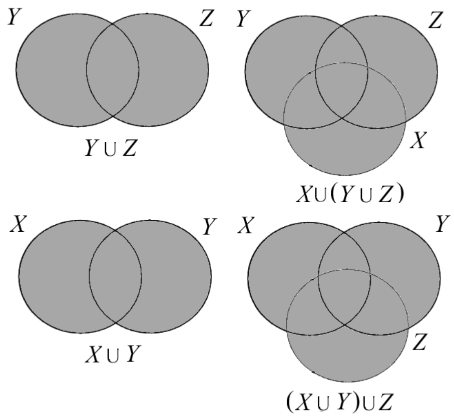
$\leftrightarrow \left(x \in X\right) \wedge \left(x \in \left(\left(x \in Y\right) \vee \left(x \in Z\right)\right)\right) \leftrightarrow$ Визначення об'єднання

$\leftrightarrow \left(\left(x \in X\right) \wedge \left(x \in Y\right)\right) \vee \left(\left(x \in X\right) \wedge \left(x \in Z\right)\right) \leftrightarrow$ Закон логіки де Моргана

$\leftrightarrow \left(x \in \left(X \cap Y\right)\right) \vee \left(x \in \left(X \cap Z\right)\right) \leftrightarrow$ Визначення перетину

$\leftrightarrow x \in \left(\left(X \cap Y\right) \cup \left(X \cap Z\right)\right)$ Визначення об'єднання

Для доведення також використовують діаграми Венна (Ейлера)
Доведемо властивість асоціативності за допомогою діаграм Венна



1. Будуємо $\left(Y \cup Z\right)$ й потім $X \cup \left(Y \cup Z\right)$
2. Будуємо $\left(X \cup Y\right)$ й потім $\left(X \cup Y\right) \cup Z$

Для доведення тотожностей алгебри множин можна використовувати інші тотожності алгебри множин.

ТЕОРЕМА. Для множин X і Y справедлива тотожність

$$\left(X \cap Y\right) \cup \left(X \cap \bar{Y}\right) = X$$

ДОКАЗ. Доведемо цю тотожність двома способами: аналітично (використовуючи алгебру множин) і конструктивно (використовуючи діаграми Ейлера-Венна).

$(X \cap Y) \cup \left(X \cap \bar{Y}\right) =$ початковий вираз

$= \left(X \cup \left(X \cap \bar{Y}\right)\right) \cap \left(Y \cup \left(X \cap \bar{Y}\right)\right) =$ застосували закон дистрибутивності відносно $\left(X \cap \bar{Y}\right)$

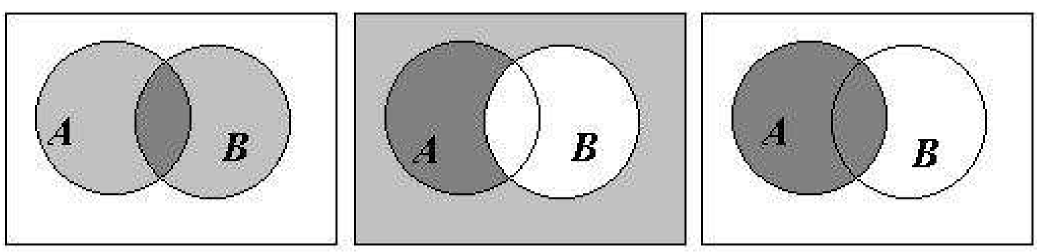
$= \left(X \cup \left(X \cap \bar{Y}\right)\right) \cap \left(Y \cup X\right) =$ застосували закон Порецького

$= X \cap \left(Y \cup X\right) =$ застосували закон склеювання для об'єднання

$= X$ застосували закон склеювання для перетину

2. Побудуємо відповідні діаграми Ейлера-Венна.

$X \cap Y$ $\qquad$ $X \cap \bar{Y}$ $\qquad$ $\left(X \cap Y\right) \cup \left(X \cap \bar{Y}\right) = X$



Приклад. Доведемо тотожність:

$$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$$

Доведення:

1 спосіб

1) Доведемо, що $A\setminus(B\cup C)\subseteq(A\setminus B)\setminus C$. Розглянемо довільний елемент множини $A\setminus(B\cup C)$:

$x\in A\setminus(B\cup C)\Rightarrow x\in A$ і $x\notin B\cup C\Rightarrow x\in A$ і $x\notin B$ і $x\notin C\Rightarrow x\in A\setminus B$ й $x\notin C\Rightarrow x\in(A\setminus B)\setminus C$.

2) Доведемо, що $(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\cup C)$. Нехай $x\in(A\setminus B)\setminus C$:

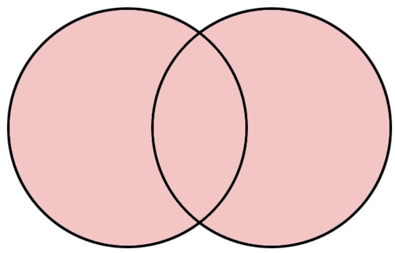
$x\in(A\setminus B)\setminus C\Rightarrow x\in A\setminus B$ і $x\notin C\Rightarrow x\in A$ і $x\notin B$ і $x\notin C\Rightarrow x\in A$ й $x\notin B\cup C\Rightarrow$
$\Rightarrow x\in A\setminus(B\cup C)$.

2 спосіб

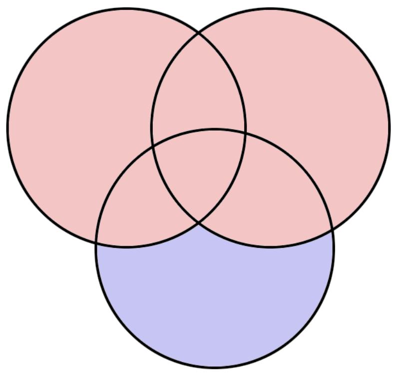
Перетворимо ліву частину тотожності в праву за допомогою властивостей операцій над множинами:

$$A\setminus(B\cup C)=A\cap\left(\overline{B\cup C}\right)=A\cap\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right)=\left(A\cap\overline{B}\right)\cap\overline{C}=(A\setminus B)\cap\overline{C}=(A\setminus B)\setminus C$$

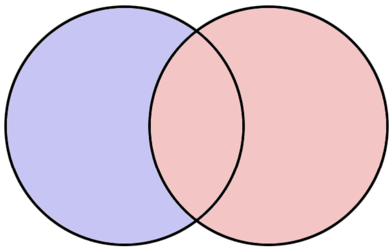
Зобразимо обидві частини тотожності за допомогою кіл Ейлера-Венна:



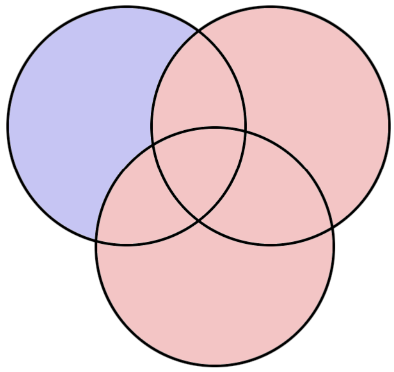
$(B\cup C)$



$A\setminus(B\cup C)$



$(A\setminus B)$



$(A\setminus B)\setminus C$

Розбиття множини

Множина X може бути розбита на класи множин X_j, які не перетинаються, якщо:

- об'єднання всіх підмножин X_j збігається з множиною X:

$$X = \bigcup_{j \in J} X_j$$

- перетин двох різних підмножин порожній, тобто для будь-яких двох $i \in J$ і $j \in J$ при $i \neq j$ виконується умова: $X_i \cap X_j = \varnothing$.

Приклад

1. Довільна множина X може бути розбита на дві підмножини, які доповнюють одна одну X_1 і $X_2 = X \setminus X_1$. Для цих підмножин справедливі співвідношення: $X_1 \cup X_2 = X$ і $X_1 \cap X_2 = \varnothing$.
2. Множину двозначних чисел $X = \left\{10, 11, 12, ..., 98.99\right\}$ можна розбити на класи за ознакою остачі від ділення на 4:

клас, породжений остачею 0 - $X_0 = \left\{12, 16, 20, ..., 96\right\}$;

клас, породжений остачею 1 - $X_1 = \left\{13, 17, 21, ..., 97\right\}$;

клас, породжений остачею 2 - $X_2 = \left\{10, 14, 18, ..., 98\right\}$;

клас, породжений остачею 3 - $X_3 = \left\{11, 15, 19, ..., 99\right\}$.

Покриття множини. Покриттям множини X називається сімейство множин $C = \left\{Y_j\right\}_{j \in J}$ таких, що їх об'єднання містить множину X:

$$X \subset \bigcup_{j \in J} Y_j$$

Якщо C — покриття множини X, то будь-яка множина $D \subset C$, що також є покриттям множини X, називається **підпокритям** множини C.

Приклад. Нехай $X = \left\{i \middle| i = 2n + 1, n = 0, 1, 2, ...\right\}$,

$J = \left\{1, 2\right\}, C = \left\{Y_1, Y_2\right\}, Y_1 = \left\{-k \middle| k = 1, 2, ...\right\}$, $Y_2 = \left\{k \middle| k = 0, 1, 2, ...\right\}$.

Тоді $X \subset Y_1 \cup Y_2$, а, отже, сімейство множин C є покриттям множини X.

Упорядкований набір

Упорядкованим набором (або кортежем) називають таку сукупність елементів, у послідовності яких кожний елемент займає певне місце.

Самі елементи при цьому називають компонентами кортежу.

Приклади:

1) Множина людей, що стоять у черзі;
2) множина букв у слові;
3) числа, що виражають довготу й широту точки на місцевості;
4) координатна пара (або трійка) в аналітичній геометрії.

Число елементів кортежу називають його **довжиною.** Таким чином, корте́ж або n-***ка*** (**упорядкована n-*ка***) — упорядкований скінченний набір елементів довжини *n* (де *n* — будь-яке натуральне число або 0). Кожний з елементів набору $x_i, 1 \le i \le n$ належить деякій множині X.

Для позначення впорядкованого набору (або кортежу) використовують

<u>**круглі дужки**</u>

(на відміну від фігурних дужок для позначення довільної множини):

$$X = \left(x_1, x_2, x_3, ..., x_n\right)$$

Відповідно до визначення, кортежі довжини 2 називаються парами або впорядкованими парами, кортежі довжини 3 - трійками, 4 - четвірками і т. д.

Окремі випадки кортежу:

1) $\left(x_1\right)$ кортеж з одного елемента;

2) $\left(\quad\right)$ порожній кортеж, тобто кортеж з кількістю елементів 0.

На відміну від довільної множини елементи кортежу можуть повторюватися. Багато математичних об'єктів формально визначаються як кортежі.

Наприклад.

1. Орієнтований граф визначається як кортеж (*V*, *E*), де *V* — це набір вершин, а *E* — підмножина *V* × *V*, що позначає ребра.

2. Точка в *n*-вимірному просторі дійсних чисел визначається як кортеж довжини *n*, що складається з елементів множини дійсних чисел.

Упорядкована пара $\left(a, b\right)$ – часто вживаний математичний об'єкт. Основна її властивість – **єдиність**. Ця властивість виражається в наступному:

якщо $\left(a, b\right)$ та $\left(x, y\right)$ – упорядковані пари і стверджується, що $\left(a, b\right) = \left(x, y\right)$, то $a = x$ і $b = y$.

Будь-яку множину можна зробити впорядкованою, якщо, наприклад, переписати всі елементи множини в деякий список $\left(a, b, c, ...\right)$, а потім поставити у відповідність кожному елементу номер місця, на якому він розміщений в списку. Очевидно, що довільну множину, яка містить більше одного елемента, можна впорядкувати не єдиним способом. Упорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються або своїми елементами, або їх порядком.

Різні впорядковані множини, що відрізняються лише порядком елементів (тобто можуть бути отримані з тієї ж самої множини), називаються **перестановками** цієї множини.

Число різних способів, якими може бути впорядкована дана множина, дорівнює числу перестановок цієї множини. Число перестановок множини з n елементів дорівнює

$$P_n = n!$$

Приклад. $X = \{a,b,c\}, n = 3, P_3 = 3! = 6.$

Перестановки мають вигляд: $(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)$.

Алгоритм упорядкування множини

Нехай є неупорядкована множина $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, елементами якої є цілі числа. У деяких програмах потрібно впорядкувати елементи множини A, наприклад, у порядку зростання значень цих чисел. Таку операцію називають *сортуванням*, а множину A визначають *як масив.*

Одним з методів сортування масиву чисел є «Швидке сортування» (Quicksort).

У наведеному алгоритмі використані наступні позначення:

`a[k]`- масив чисел, у якому проводиться сортування.

Процедура дозволяє сортувати довільну підмножину масиву `a[k]`

`g` – номер мінімального елемента масиву, з якого починається сортування.

`r` – номер максимального елемента масиву, на якому закінчується сортування.

Суть методу

1. На кожній ітерації виділяють частину масиву чисел — робочий масив.

На першій ітерації – це весь масив чисел `a[k]`, у якому проводиться сортування. Встановлюємо границі робочого масиву $g = 1$ і $r = n$.

2. Вибирають елемент x:=a[(g+r)div2], який розміщений посередині робочого масиву.

3. Далі, починаючи з $i = 1$, послідовно збільшуємо значення i на одиницю й порівнюємо кожний елемент a_i з x, поки не буде знайдено елемент a_i такий, що $a_i > x$.

4. Потім, починаючи з $j = r$, послідовно зменшуємо значення j на одиницю, поки не буде знайдений елемент a_j такий, що $x > a_j$.

5. Якщо для знайдених елементів a_i і a_j виконується умова $i \le j$, то ці елементи в робочому масиві міняються місцями.

6. Описана процедура закінчиться знаходженням головного елемента й поділом масиву на дві частини: одна частина буде містити елементи, менші за x, а інша — більші за x.

$\leqslant x$	x	$x \geqslant$

Далі для кожної такої частини знову застосовується описана вище процедура.

Паскаль-Програма, що реалізує даний алгоритм для 10-елементного масиву, має такий вигляд:

```
Program Q_sort;
 const N=10;
 var
  a:array[1..N] of integer; (* початковий масив *)
   k:integer;
 procedure Quicksort(g,r:integer);
 (* Процедура швидкого сортування *)
 var i,j,x,y: integer;
 begin
   i : = g; j : = r ;
   x:= a[(g+r) div 2];
   repeat
     while (a[i]<x) do inc(i);
     while (x<a[j]) do dec(j);
      if (i<=j) then
      begin
        в:=a[i]; a[i]:=a[j]; a[j]:=y; inc(i); dec(j);
    end;
   until (i>j);
   (*Рекурсивне використання процедури Quicksort *)
   if (g<j) then Quicksort(g,j);
   if (i<r) then Quicksort(i,r);
 end;

begin
  writeln('Уведіть',N, 'елементів масиву:') ;
  for k:=1 to N do readln(a[k]);
   Quicksort(1,N); (* на вході ліва й права границя
                      сортування *)
   writeln('Після сортування:');
   for k:=1 to N do write(a[k],' ');
end.
```

Декартовий добуток множин

Декартовым (прямим) добутком множин A і B називають множину $C = A \times B,$ що складається із усіх упорядкованих пар $\left(a,b\right)$ таких, що $a \in A, b \in B$, тобто

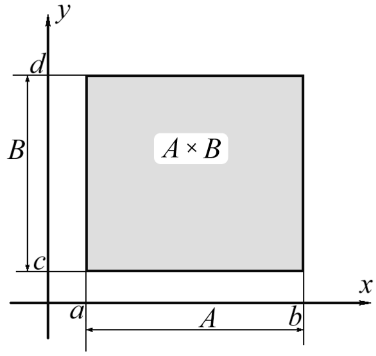
$$C = A \times B = \left\{\left(a,b\right) \middle| a \in A, b \in B\right\}.$$

Приклад. Нехай $A = \left\{x,y,z\right\}$, $B = \left\{1,2\right\}$.

Тоді $C = \left\{\left(x,1\right),\left(x,2\right),\left(y,1\right),\left(y,2\right),\left(z,1\right),\left(z2\right)\right\}$.

Графічна інтерпретація декартового добутку

Існує графічна інтерпретація прямого добутку множин. Нехай множина $A = \left\{x \middle| a \le x \le b\right\}$ – це інтервал значень змінної x і $B = \left\{y \middle| c \le y \le d\right\}$ – це інтервал значень змінної y. Ясно, що множини A і B мають нескінченне число елементів. Тоді прямий декартовий добуток $A \times B$ – це множина точок прямокутника, зображеного на рисунку.



Отже, $C = A \times B = \left\{ \left(x, y \right) \middle| x \in A, y \in B \right\}$.

У випадку декартового добутку декількох множин використовуємо показник степеня:

$A \times A = A^2, A \times A \times A = A^3, \underbrace{A \times A \times A \times ... \times A}_{n} = A^n$.

Таким чином, $n = 2,3,\ldots$

Однак таке представлення добутку множини може бути розширене на $A^1 = A, A^0 = \left\{ \Lambda \right\}$, де Λ – проекція кортежу на порожню множину осей, тобто порожній кортеж.

Зворотний декартовий добуток

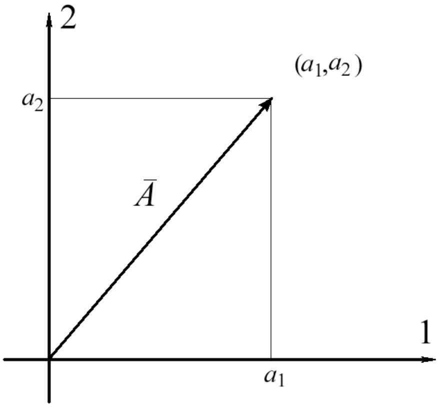
Нехай $C = A \times B$ – прямий декартовий добуток множин.

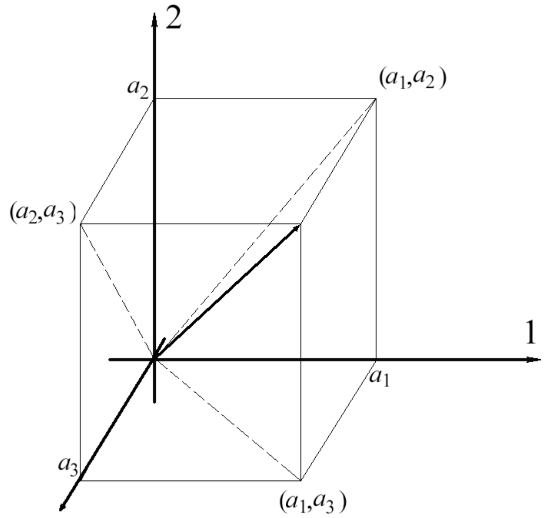
Тоді $C^{-1} = B \times A$ буде називатися **зворотним** декартовым добутком до прямого добутку C .

Проектування кортежу і його графічна інтерпретація

У математиці прийнято позначати через R множину дійсних чисел. Тоді $R^2 = R \times R$ є площина дійсних чисел, а $R^3 = R \times R \times R$ представляє тривимірний простір дійсних чисел.

Розглянемо площину дійсних чисел або двовимірний простір дійсних чисел:





Кортеж $\left(a_1, a_2\right)$ – це точка на площині або вектор, проведений з початку координат у дану точку. Компоненти a_1 і a_2 – це **проекції** вектора $\overline{A} = \left(a_1, a_2\right)$ на осі 1 і 2. Цей факт скорочено записують так:

$$proj_1\overline{A} = proj_1\left(a_1, a_2\right) = a_1,$$
$$proj_2\overline{A} = proj_2\left(a_1, a_2\right) = a_2.$$

Кортеж $\left(a_1, a_2, a_3\right)$ – це точка в тривимірному просторі або тривимірний вектор, проведений з початку координат у точку з координатами $\left(a_1, a_2, a_3\right)$. Проекції вектора на осі координат у цьому випадку записуються так:

$$proj_1\overline{A} = proj_1\left(a_1, a_2, a_3\right) = a_1,$$
$$proj_2\overline{A} = proj_2\left(a_1, a_2, a_3\right) = a_2,$$
$$proj_3\overline{A} = proj_3\left(a_1, a_2, a_3\right) = a_3.$$

Проектувати можна не тільки на осі, але й на координатну площину. У цьому випадку проекція є двоелементним кортежем:

$$proj_{1,2}\overline{A} = proj_{1,2}\left(a_1, a_2, a_3\right) = \left(a_1, a_2\right),$$
$$proj_{1,3}\overline{A} = proj_{1,3}\left(a_1, a_2, a_3\right) = \left(a_1, a_3\right),$$
$$proj_{2,3}\overline{A} = proj_{2,3}\left(a_1, a_2, a_3\right) = \left(a_2, a_3\right).$$

Узагальнюючи поняття проекції на n-вимірний простір, можна n-елементну впорядковану множину $\left(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\right)$ розглядати як точку в n-вимірному просторі. У цьому випадку

$$proj_i\overline{A} = proj_i\left(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots, a_n\right) = a_i,$$

$$proj_{i,j}\overline{A} = proj_{i,j}\left(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n\right) = \left(a_i, a_j\right),$$

$$proj_{i,j,k}\overline{A} = proj_{i,j,k}\left(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots, a_n\right) = \left(a_i, a_j, a_k\right),$$

……………………………………………………………..

Очевидно, що загальна кількість осей, на які припустиме проектування, дорівнює $n-1$.

Нехай множина D складається з кортежів довжини m. Тоді проекцією множини D називається множина проекцій кортежів з D.

Приклад: $D = \left\{\left(1,2,3,4,5\right),\left(3,2,1,5,4\right),\left(2,3,6,7,1\right),\left(8,1,1,4,6\right)\right\}$.

Проектування кортежів на одну вісь:

$proj_1 D = \left\{\left(1\right),\left(3\right),\left(2\right),\left(8\right)\right\}$,

$proj_2 D = \left\{\left(2\right),\left(2\right),\left(3\right),\left(1\right)\right\}$,

$proj_3 D = \left\{\left(3\right),\left(1\right),\left(6\right),\left(1\right)\right\}$,

$proj_4 D = \left\{\left(4\right),\left(5\right),\left(7\right),\left(4\right)\right\}$,

$proj_5 D = \left\{\left(5\right),\left(4\right),\left(7\right),\left(6\right)\right\}$.

Проектування кортежів на дві осі:

$proj_{1,2} D = \left\{\left(1,2\right),\left(3,2\right),\left(2,3\right),\left(8,1\right)\right\}$,

$proj_{1,3} D = \left\{\left(1,3\right),\left(3,1\right),\left(2,6\right),\left(8,1\right)\right\}$,

……………………………………..

$proj_{2,3} D = \left\{\left(2,3\right),\left(2,1\right),\left(3,6\right),\left(1,1\right)\right\}$,

$proj_{1,3} D = \left\{\left(1,3\right),\left(3,1\right),\left(2,6\right),\left(8,1\right)\right\}$,

……………………………………….

Проектування кортежів на три осі:

$proj_{1,2,3} D = \left\{\left(1,2,3\right),\left(3,2,1\right),\left(2,3,6\right),\left(8,1,1\right)\right\}$

………………………………………..

$proj_{3,4,5} D = \left\{\left(3,4,5\right),\left(1,5,4\right),\left(6,7,7\right),\left(1,4,6\right)\right\}$

………………………………………

Операція проектування може застосовуватися тільки до тих множин, які містять кортежі однакової довжини.

Відповідність. Основні поняття

Розглянемо множини X і Y. Елементи цих множин можуть зіставлятся один з одним яким-небудь чином, утворюючи впорядковані пари $\left(x, y\right)$.

Якщо спосіб такого зіставлення визначений, тобто для кожного елемента $x \in X$ вказано елемент $y \in Y$, з яким зіставляється елемент x, то говорять, що між множинами X та Y установлена відповідність.

Для того, щоб задати відповідність, необхідно вказати:

1) Множину X, елементи якої зіставляють з елементами іншої множини;

2) Множину Y, елементи якої ставлять у відповідність елементам першої множини;

3)Множину $Q \subseteq X \times Y$, що визначає закон (правило), за яким здійснюють відповідність, тобто таке правило, що перераховує всі пари $\left(x, y\right)$, які беруть участь у зіставленні.

Таким чином, відповідність (позначимо її через q) є трійкою множин

$$q = \left\langle X, Y, Q \right\rangle$$

де $Q \subseteq X \times Y$ – підмножина декартового добутку множин X і Y, яку ще називають графіком відповідності;

X – множина відправлення відповідності;

Y – множина прибуття відповідності;

Крім того, з кожною відповідністю зв'язані нерозривно ще дві множини:

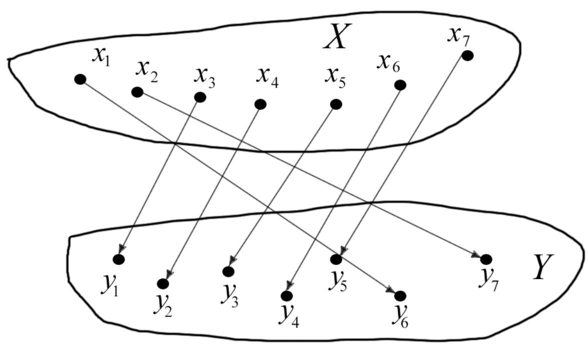
1. множина $proj_x Q$, яку називають **областю визначення** відповідності. В цю множину входять елементи множини X, що беруть участь у зіставленні;

2. множина $proj_y Q$, яку називають **областю значень** відповідності. В цю множину входять елементи множини Y, що беруть участь у зіставленні.

Якщо $\left(x, y\right) \in Q$, то говорять, що елемент y відповідає елементу x. Геометрично це зображають у вигляді стрілки, спрямованої від x до y:

На рисунку показано дві множини X і Y з установленими відповідностями між їх елементами. При цьому графік відповідності має вигляд:

$Q = \left\{\left(x_1, y_6\right), \left(x_2, y_7\right), \left(x_3 . y_1\right), \left(x_4, y_2\right), \left(x_5, y_3\right), \left(x_6, y_4\right), \left(x_7, y_5\right)\right\}$



Для кожної відповідності $q = \left\langle X, Y, Q \right\rangle$, $Q \subseteq X \times Y$ існує зворотна відповідність, яка утворюється у випадку, коли дану відповідність розглядають у зворотному напрямку, тобто визначають елементи $x \in X$, з якими зіставляються елементи $y \in Y$.

Зворотна відповідність позначається: $q^{-1} = \left\langle X, Y, Q^{-1} \right\rangle$, де $Q^{-1} = Y \times X$. Геометрично зворотну відповідність можна одержати шляхом зміни напрямку стрілок прямої відповідності.

Типи відповідностей

Відповідності можуть бути різних типів: одно-однозначні, одно-багатозначні, багато-однозначні, багато-багатозначні.

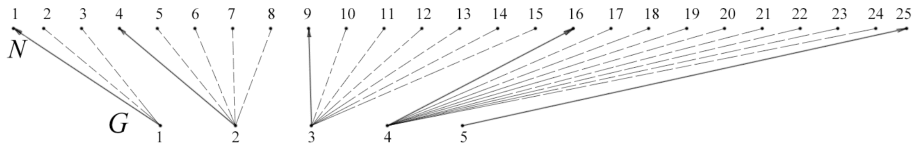
А) **Одно-однозначна** (або **взаємно-однозначна)** відповідність – це така попарна відповідність між елементами двох множин X і Y, коли один елемент з X зіставлено з єдиним елементом з Y і навпаки.

Приклад. Нехай існує множина натуральних чисел N і множина квадратів натуральних чисел P. Кожному натуральному числу можна поставити у відповідність його квадрат і навпаки – кожному квадрату цілого числа відповідає саме натуральне число. Тому між множинами N й P існує взаємно-однозначна відповідність.

Б) **Одно-багатозначна** відповідність – це така відповідність між елементами двох множин X і Y, коли з одним елементом першої множини X зіставлено більше одного елемента другої множини Y, але кожний елемент другої множини відповідає тільки одному елементу першої множини.

Приклад. Нехай існує множина квадратних коренів з цілих чисел
$G = \left\{1, 2, 3, 4, 5\right\}$ і множина цілих чисел
$N = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, ..., 25\right\}$.

Кожному елементу множини G однозначно відповідає один елемент множини N. Зворотна відповідність може бути багатозначною за умови, що ми будемо виділяти цілу частина від взяття квадратного кореня для кожного елемента множини N.



В) **Багато-однозначна** відповідність – це така відповідність між елементами двох множин X і Y, коли з елементом першої множини зіставлено тільки один елемент другої множини, але кожний елемент другої множини відповідає більше, ніж одному елементу першої множини.

Приклад. Нехай $X = \{1,2,3,...,25\}$ множина студентів у групі, а $Y = \{2,3,4,5\}$ – припустима множина оцінок. Кожний студент, під час здачі іспиту, може одержати тільки одну оцінку. У той же час, та сама оцінка може бути поставлена деякій підмножині студентів.

Г) **Багато-багатозначна** відповідність – це така відповідність між елементами двох множин X і Y, коли з одним елементом першої множини зіставлено більш ніж один елемент другої множини і навпаки.

Приклад. Нехай X – множина театральних постановок, а Y – множина глядачів. Кожний глядач може подивитися деяку підмножину театральних постановок. У той же час, кожну з театральних постановок відвідує деяка підмножина глядачів.