Лекція 29. Планарні графи. Розфарбування графів

29.1. Планарні графи

Розглянемо неорієнтовані графи. Часто не має значення, як зобразити граф на рисунку, бо ізоморфні графи несуть одну й ту саму інформацію. Проте інколи важливо, чи можна подати граф на площині так, щоб його зображення задовольняло певним вимогам. Наприклад, у радіоелектроніці в процесі виготовлення мікросхем друкованим способом електричні ланцюги наносять на плоску поверхню ізоляційного матеріалу. Оскільки провідники не ізольовані, то вони не мають перетинатись. Аналогічна задача виникає під час проектування залізничних та інших шляхів, де переїзди небажані. Так виникає поняття плоского графа.

Означення 29.1. **Плоским графом** називається граф, який зображено на площині так, що ніякі два його ребра геометрично не перетинаються ніде, окрім інцидентних їм вершин. Граф, ізоморфний до плоского графа, називають **планарним**.

Означення 29.2. Область, обмежена ребрами в плоскому графі, називається **гранню**. Грань не містить інших граней. Кількість граней плоского графа G позначається r(G).

Відмітимо, що зовнішня частина графа також утворює грань.

На рис. 29.1 зображені планарні графи, але лише другий і третій із них плоскі. Для них також визначені грані.

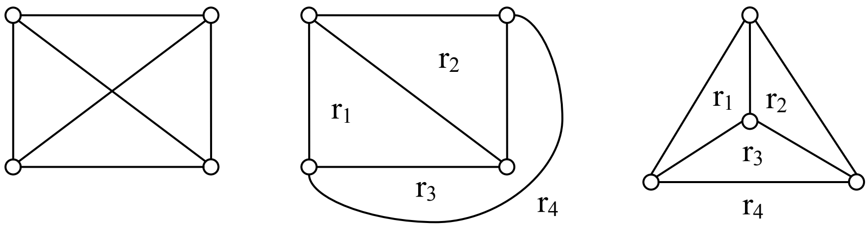

Рис. 29.1.

Теорема 29.1 (Ейлера про плоскі графи). Нехай зв'язаний граф G має n вершин, m ребер і r граней. Тоді n + r = m + 2.

Доведення. Індукцією за кількістю ребер у графі G. Якщо m=0, то n = 1, r = 1, і теорема справджується. Допустимо, що теорема вірна для довільного плоского графа G, який має m–1 ребро, і додамо до G нове ребро e. Можливі три випадки:

1. Ребро e – петля; тоді виникне нова грань, а кількість вершин залишиться незмінною.
2. Ребро e з'єднує дві різні вершини графа G; у такому разі одна з граней розпадеться на дві, тому кількість граней збільшиться на одну, а кількість вершин не зміниться.
3. Ребро e інцидентне лише одній вершин в G; тоді потрібно додати ще одну вершину; отже, кількість вершин збільшиться на одну, а кількість граней не зміниться.

Твердження теореми залишається правильним у кожному з цих випадків. ►

Наслідок 1. Якщо G – зв'язаний планарний граф з n≥3 вершинами, то кількість ребер в ньому задовольняє нерівності m ≤ 3n – 6.

Доведення. Кожна грань обмежена принаймні трьома ребрами, кожне ребро обмежує не більше двох граней, звідси 3r ≤ 2n. Маємо:

$$2 = n - m + r \le n - m + \frac{2n}{3} \Rightarrow 3n - 3m + 2n \ge 6 \Rightarrow m \le 3n - 6 \,. ►$$

Наслідок 2. Графи K_5 та $K_{3,3}$ непланарні.

Доведення. Для графа K_5 маємо n=5, m=10. Якщо K_5 планарний, то за попереднім наслідком маємо m = n(n – 1)/2 = 10 ≤ 3n – 6 = 9 – протиріччя.

Для графа $K_{3,3}$ маємо n=6, m=9. В цьому граф немає трикутників, отже, якщо цей граф планарний, то кожна його грань обмежена не менше ніж чотирма ребрами і, відповідно,

$4r \le 2m$ або $2r \le m$. За формулою Ейлера $6 - 9 + r = 2$, звідси $r = 5$. Маємо $2r = 10 \le q = 9$ – протиріччя. ►

Наслідок 3. У довільному планарному графі існує вершина, степінь якої не більше 5.

Означення 29.3. Два графи називають **гомеоморфними**, якщо їх можна отримати з одного графа додаванням до його ребер нових вершин степеня 2 (рис. 29.2).

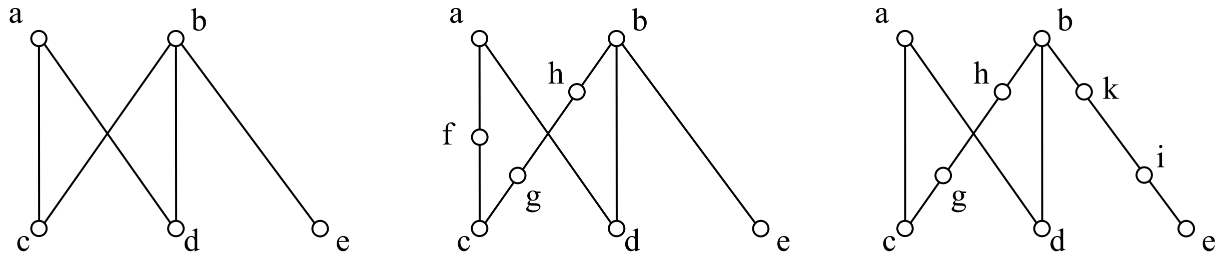

Рис. 29.2.

Наступна теорема дає критерій (необхідну й достатню умову) планарності графа.

Теорема 29.2 (Куратовський). Граф планарний тоді й лише тоді, коли він не містить підграфів, гомеоморфних графам K_5 або $K_{3,3}$.

Необхідність умов теореми вже доведено, бо доведено непланарність графів K_5 та $K_{3,3}$, а доведення достатності складне і виходить за рамки цього курсу.

Окрім теореми Куратовського є й інші критерії планарності графів. Практично перевірити умови, якими характеризуються планарні графи, не завжди просто. Проте розроблено ефективні алгоритми, які дають змогу для будь-якого заданого графа знайти його зображення на площині безе перетину ребер або переконатись, що це неможливо (якщо граф непланарний).

29.2. Розфарбування графів

У цьому підрозділі розглянуто лише прості графи.

Означення 29.4. **Розфарбуванням простого графа** G називають таке приписування кольорів (або натуральних чисел) його вершинам, що ніякі дві суміжні вершини не набувають однакового кольору. Найменшу можливу кількість кольорів у розфарбуванні називають **хроматичним числом** і позначають $\chi(G)$. Множину вершин, розфарбованих в один колір називають **одноколірним класом**. Такі класи утворюють незалежні множини вершин, тобто ніякі дві вершини в одноколірному класі не суміжні.

Очевидно, що існує розфарбування графа G в k кольорів (k-розфарбування) для будь-якого k в діапазоні $\chi(G) \le k \le n$, де n – кількість вершин графа. Очевидно, що $\chi(K_n) = n$, і, отже, легко побудувати графи з як завгодно великим хроматичним числом. З іншого боку, $\chi(G) = 1$ тоді й лише тоді, коли G – вироджений граф (тобто в ньому немає ребер); $\chi(G) = 2$ тоді й тільки тоді, коли G – дводольний граф (тому дводольний граф називають **біхроматичним**).

Теорема 29.3. Якщо найбільший зі степенів вершин графа дорівнює p, то цей граф можна розфарбувати в p+1 колір.

Доведення. Застосуємо індукцію за кількістю вершин графа. Нехай граф G має n вершин; вилучимо з нього довільну вершину v разом з усіма інцидентними їй ребрами. Отримаємо граф з n – 1 вершиною; степінь кожної вершини не більше ніж p. За прпущенням індукції цей граф можна розфарбувати в p+1 колір. Отже, у p+1 колір можна розфарбувати й граф G, якщо розфарбувати вершину v кольором, що відрізняється від тих, якими розфарбовано суміжні з нею вершини (а їх разом не більше ніж p). ►

Із середини 19 ст. відкритою лишалась проблема, відома під назвою гіпотеза чотирьох фарб. Її формулюють так: будь-який планарний граф можна розфарбувати в чотири кольори, тобто $\chi(G) \le 4$ для будь-якого планарного графа G. Ця гіпотеза була «фактично» доведена у 20 ст., але ще у 1890 році Хейвуд довів, що будь-який планарний граф можна розфарбувати у п’ять кольорів.

Теорема 29.4 (Хейвуда). Будь-який планарний граф можна розфарбувати в п'ять кольорів, тобто $\chi(G) \le 5$ для будь-якого планарного графа G.

Доведення. В будь-якому простому планарному графі є вершина, степінь якої не більше за п'ять.

Застосуємо математичну індукцію за кількістю вершин графа. Теорема справджується для графів із не більше ніж п'ятьма вершинами. Припустимо, що вона справджується для графів із не більш ніж n вершинами, де $n \ge 5$. Розглянемо довільний плоский граф G з n+1 вершиною. Він містить вершину v_0, степінь якої не більше ніж п'ять. Нехай $W = \Gamma(v_0)$ – множина вершин, суміжних із вершиною v_0 в графі G. Окремо розглянемо два випадки.

Випадок 1. $|W| \le 4$. Позначимо як $G-v_0$ граф, отриманий із графа G вилученням вершини v_0 та всіх інцидентних їй ребер. За індуктивним припущенням граф $G-v_0$ можна розфарбувати в п'ять кольорів. Зафіксуємо одне з таких розфарбувань і зафарбуємо вершину v_0 в той із п'яти кольорів, який не використано для фарбування вершин із множини W.

Випадок 2. $|W|=5$. У множині W є дві несуміжні вершини v_1 та v_2, а ні, то граф G(W), породжений множиною вершин W, - це K_5, і тоді граф G непланарний (теорема 29.2). Граф G', отриманий із графа $G-v_0$ злиттям вершин v_1 та v_2 в одну вершину v (рис.29.3), плоский, і за індуктивним припущенням його можна розфарбувати в п'ять кольорів. Зафіксуємо одне з таких розфарбувань графа G'. Тепер у графі G розфарбуємо вершини v_1 і v_2 в колір вершини v, а решту вершин, відмінних від v_0 – у ті самі кольори, що й відповідні вершини графа G'. Нарешті, припишемо вершині v_0 колір, не використаний для розфарбування вершини із W. ►

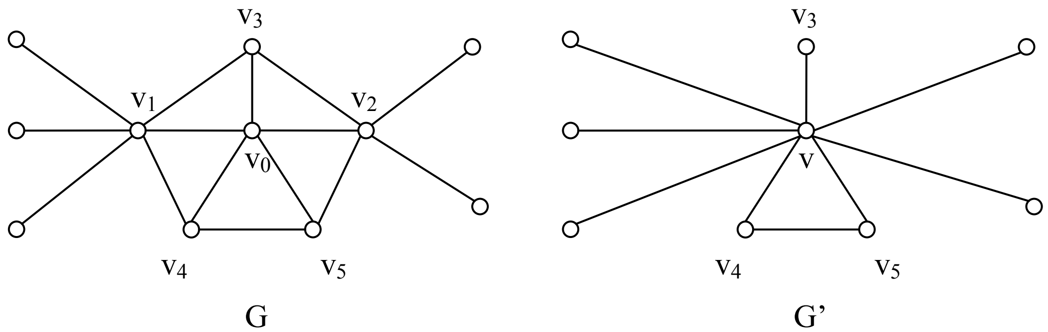

Рис. 29.3.

Американські математики Апель і Гайкен у 1976 році довели гіпотезу чотирьох фарб, суттєво використавши комп'ютерні обчислення. Це перший випадок, коли настільки відому математичну проблему було розв'язано за допомогою комп'ютера. Спочатку проблему було зведено до розгляду скінченної (хоча й великої) кількості випадків. Надалі список «підозрілих» графів було зменшено й за допомогою комп'ютера розфарбовано в чотири кольори планарні графи з цього списку. За різними джерелами, 1976 року це можна було зробити за 1500-2000 годин роботи потужного комп'ютера. Отже, проблему чотирьох фарб було розв'язано. Хоча сам по собі метод доведення являє собою видатне досягнення й цілком достатній, щоб припинити пошуку контрприкладу, було б добре, щоб хтось знайшов елегантніше доведення гіпотези. Найцікавіше в цьому доведенні те, що воно розширило наше уявлення про математичне доведення. Проте не всі поділяють таку думку. Опоненти вважають, що важко погодитись із таким доведенням, бо й зведення загального випадку до скінченної множини графів, і розфарбування останніх дуже важко повторити.

Означення 29.5. Нехай G – простий граф, а $P_G(k)$ – кількість способів, якими можна розфарбувати вершини графа G в k кольорів. $P_G(k)$ називають **хроматичною функцією** графа G.

Для повного графа K_n виконується рівність $P_G(k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$. Справді, для першої вершини є k варіантів кольору. Оскільки друга вершина суміжна з першою, то її можна розфарбувати в один з $(k-1)$ кольорів. Третя вершина суміжна з першою і другою, тому для неї є $(k-2)$ варіантів кольорів. Продовжуючи ці міркування, доходимо висновку, що для останньої вершини залишиться $(k-n+1)$ варіантів вибору кольору.

Якщо $k<\chi(G)$, то $P_G(k) = 0$, а для $k\geq\chi(G)$ виконується нерівність $P_G(k)>0$. Гіпотеза чотирьох фарб еквівалентна такому твердженню: якщо G – простий планарний граф, то $P_G(4)>0$. Якщо задано довільний простий граф, то в загальному випадку важко отримати його хроматичну функцію за допомогою простих міркувань. Наступна теорем й наслідок з неї дають систематичний метод отримання хроматичної функції простого графа у вигляді суми хроматичних функцій повних графів.

Теорема 29.5. Нехай G – простий граф, а v та w – його несуміжні вершини. Якщо граф G_1 отримано з G за допомогою з'єднання вершин v та w ребром, а граф G_2 – ототожненням вершини v та w (і кратних ребер, якщо їх буде одержано), то $P_G(k) = P_{G1}(k) + P_{G2}(k)$.

Доведення. За будь-якого допустимого розфарбування вершин графа G існує альтернатива: v та w мають або різні кольори, або той самий. Кількість розфарбувань, за яких v та w мають різні кольори, не зміниться, якщо долучити ребро (v, w). Отже, ця кількість дорівнює $P_{G1}(k)$. Аналогічно, кількість розфарбувань, за яких v та w мають один колір, не зміниться, якщо ототожнити v та w. Отже, ця кількість дорівнює $P_{G2}(k)$. Залишилося застосувати комбінаторне правило суми. Теорему доведено. ►

На рис. 29.4 зображено графи G, G_1 та G_2.

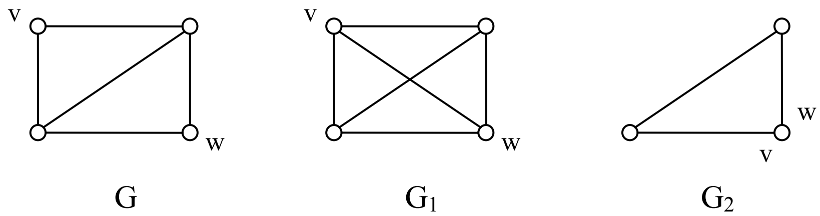

Рис. 29.4.

Наслідок. Хроматична функція простого графа – поліном.

Тепер ми будемо називати $P_G(k)$ **хроматичним поліномом**. Зазначимо деякі властивості хроматичного полінома.

- Якщо граф G має n вершин, то степінь полінома $P_G(k)$ дорівнює n.
- Коефіцієнт при k^n дорівнює 1, а при k^{n-1} дорівнює –m, де m – кількість ребер графа G.
- Знаки коефіцієнтів чергуються.
- Вільний член хроматичного полінома дорівнює 0.

Хроматичний поліном будують на основі теореми 29.5 у вигляді суми хроматичних поліномів повних графів.

Наприклад, на рис. 29.5 зображено процес побудови хроматичного полінома, де знаки «=» та «+» мають умовний зміст

$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)(k-3) + 2k(k-1)(k-2) + k(k-1) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k.$$

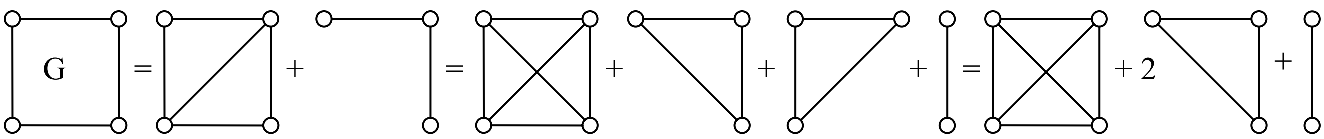

Рис. 29.5.

29.3. Практичне застосування розфарбування графів

Нарешті розглянемо деякі практичні задачі, які зводяться до розфарбування графів.

Задача складання розкладу

Припустимо, що потрібно прочитати декілька лекцій у найкоротший термін. Кожна лекція окремо займає одну годину, але деякі лекції не можна читати одночасно (наприклад, якщо це робить один і той самий лектор, або лекції читаються одній та тій самій групі студентів). Побудуємо граф G, вершини якого взаємно однозначно відповідають лекціям, і дві вершини суміжні тоді й тільки тоді, коли відповідні лекції не можна читати одночасно. Очевидно, що будь-яке розфарбування цього графа задає можливий розклад: лекції, які відповідають вершинам одноколірного класу, читають одночасно. Навпаки, будь-який можливий розклад задає розфарбування графа G. Оптимальні розклади відповідають розфарбуванням мінімальною кількістю кольорів, а час, потрібний для читання всіх лекцій, дорівнює $\chi(G)$.

Задача розподілу обладнання

Задано множину $V = \{v_1,\dots, v_n\}$ і $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ відповідно робіт і механізмів. Для виконання кожної роботи потрібен певний час, однаковий для всіх робіт, і якісь механізми. Жоден з механізмів не може бути зайнятий на декількох роботах одночасно. Потрібно розподілити механізми так, щоб загальний час виконання всіх робіт був мінімальним. Побудуємо граф G з множиною вершин V, вершини v_i та v_j ($i\neq j$) якого суміжні тоді й лише тоді, коли для виконання робіт v_i та v_j потрібний хоча б один спільний механізм. Розфарбуємо граф G. Роботи, що відповідають вершинам одного кольору, можна виконувати одночасно, а мінімальний час виконання всіх робіт відповідає розфарбуванню мінімальною кількістю кольорів.

Задача призначення телевізійних каналів

Передавальні станції зображають вершинами графа. Якщо відстань між будь-якими двома станціями менша за l, то відповідні вершини графа з’єднують ребром. Граф розфарбовують зіставляючи різним кольорам вершин різні канали. Мінімальна кількість каналів відповідає розфарбуванню графа мінімальною кількістю кольорів.