ЛЕКЦІЯ 8

Ітераційні методи розв'язування систем алгебраїчних рівнянь

Точні та ітераційні методи

Методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь поділяються на дві групи:

1. Точні методи.
2. Ітераційні методи.

Точні методи розв'язування – це методи, що дозволяють одержати точне значення всіх невідомих у результаті скінченного числа арифметичних операцій.

Ітераційні методи – це методи, що дозволяють одержати розв'язок у вигляді границі послідовності векторів, побудова яких проводиться однаковим процесом, названим процесом ітерації.

При великій кількості невідомих лінійної системи метод Гауса, який дає точний розв'язок, стає складним.

Тому для знаходження кореня системи використовують наближені чисельні методи.

Загальна схема побудови ітераційних методів

Нехай потрібно розв'язати систему

$$Ax = b; \text{ де } b, x \in R^m, \; A \in R^{m\times m}.$$

Задаємо матрицю $Q \in R^{m\times m}$ як матрицю, що апроксимує матрицю A. Матриця Q повинна мати вигляд, що дозволяє спростити розв'язування наближеної системи:

$$Ax = b; \Rightarrow Qu = d$$

На практиці така матриця найчастіше є *нижньотрикутною*, *верхньотрикутною*, *діагональною* або *добутком скінченного* числа таких простих матриць.

Отже, основною ідеєю ітераційних методів є **розв'язування системи** $Qu = d$ **шляхом послідовного наближення до розв'язку замість точного розв'язування системи** $Ax = b$,

де $Q -$ **матриця розщеплення.**

Побудова ітераційного процесу

Перепишемо систему $Ax = b$ у вигляді:

$$\left(Q - Q + A\right)x = b \Rightarrow Qx - Qx + Ax = b$$

Використовуючи еквівалентні перетворення, запишемо:

$$Qx = \left(Q - A\right)x + b$$

Введемо верхній індекс, як номер ітерації

$$Qx^{\left(n+1\right)} = \left(Q - A\right)x^{\left(n\right)} + b;\ \ n = 0,1,2,\ldots$$

Поділивши обидві частини виразу на Q, одержимо:

$$x^{\left(n+1\right)} = Bx^{\left(n\right)} + d;\ \ n = 0,1,2,\ldots, \qquad (1)$$

де $B = \dfrac{Q - A}{Q} = I - Q^{-1}A;\ \ d = Q^{-1}b$.

$I -$ одинична матриця.

Це лінійна схема першого порядку. Оскільки ітераційна матриця B на ітераціях є постійною, то таку схему називають стаціонарною.

Теорема про достатню умову збіжності ітераційного методу

Ітераційний метод

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + d; \;\; n = 0,1,2,...$$

сходиться до єдиного розв'язку початкової системи

$$Ax = b;$$

при будь-якому початковому наближенні $x^{(0)}$ зі швидкістю, не повільнішою за геометричну прогресію, якщо норма матриці B є меншою за одиницю, тобто

$$\|B\| < 1, \text{ де}$$

$\|B\|_l = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |b_{ij}|$ - l-норма,

$\|B\|_m = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}|$ - m-норма,

Приклади обчислення норм матриці

1.Обчислення $l-$ норми: $\|B\|_l = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}|$

Матриця $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & -3 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|B\|_l = \max_{1\le j\le 3}(12, 11, 9) = 12$, $\|B\|_l > 1$.

2.Обчислення $m-$норми: $\|B\|_m = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$

$$B = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.03 & 0.5 \\ 0.001 & -0.14 & 0.33 \\ -0.03 & 0.4 & -0.1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|B\|_m = \max_{1\le i\le 3} \begin{pmatrix} 0.73 \\ 0.471 \\ 0.53 \end{pmatrix} = 0.73, \ \|B\|_m < 1$$

Метод простої ітерації в координатній формі

Реалізація методу простих ітерацій складається з виконання наступних кроків:

Крок 1. Початкову $Ax = b$ перетворюють до рекурентного вигляду:

$$x = Bx + d,$$

де B – квадратна матриця порядку m;
d – вектор-стовпець.
До початку ітераційного процесу необхідно досягти виконання умови

$$\left\| B \right\| < 1, \text{ де}$$

$\left\| B \right\|_l = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{m} \left| b_{ij} \right|$ - l-норма, $\left\| B \right\|_m = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{m} \left| b_{ij} \right|$ - m-норма.

Крок 2. Стовпець d використовують як початкове наближення $x^{(0)} = d$ й далі багаторазово виконують дії з уточнення розв'язку згідно рекурентного співвідношення

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + d, \quad n = 0,1,2,... \tag{4}$$

Розглянемо принципи формування цього співвідношення. Нехай дана лінійна система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mm}x_m = b_m \end{cases} \tag{5}$$

Припустимо, що діагональні коефіцієнти

$$a_{ii} \neq 0 \quad \left(i = 1, 2, \ldots, m\right).$$

Запишемо рекурентне співвідношення

$$x^{\left(n+1\right)} = Bx^{\left(n\right)} + d$$

для системи (5) у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} x_1^{\left(n+1\right)} = \alpha_{12} x_2^{\left(n\right)} + \alpha_{13} x_3^{\left(n\right)} + \ldots + \alpha_{1m} x_m^{\left(n\right)} + \beta_1, \\ x_2^{\left(n+1\right)} = \alpha_{21} x_1^{\left(n\right)} + \alpha_{23} x_3^{\left(n\right)} + \ldots + \alpha_{2m} x_m^{\left(n\right)} + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m^{\left(n+1\right)} = \alpha_{m1} x_1^{\left(n\right)} + \alpha_{m2} x_2^{\left(n\right)} + \alpha_{m3} x_3^{\left(n\right)} + \ldots \beta_m, \end{cases} \qquad (6)$$

де $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$; $\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ при $a_{ii} \neq 0$

Представимо ітераційний процес у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \\ \dots \\ x_m^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & 0 & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \dots \\ x_m^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

Дане рівняння у загальному вигляді:

$$x = \alpha x + \beta, \qquad (7)$$

Систему (7) розв'яжемо методом послідовних наближень при нульовому наближенні $x^{(0)} = \beta$.

Далі, послідовно будуємо матриці-стовпці:

$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)} = \beta + \alpha\beta$ (*перше наближення*),

$x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)}$ (*друге наближення*).

Наближення в загальному виді обчислюють за формулою:

$$x^{(n+1)} = \beta + \alpha x^{(n)} \ (n = 0, 1, 2, \dots) \qquad (8)$$

Якщо послідовність наближень $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$. має границю

$$x = \lim_{n\to\infty} x^{(n)},$$

то переходячи до границі в рівнянні (8), одержимо:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x^{(n+1)} = \beta + \alpha \lim_{n\to\infty} x^{(n)} \text{ або} x = \beta + \alpha x}$$

Таким чином, граничний вектор x є розв'язком системи

$$x = \alpha x + \beta,$$

а отже, і системи

$$Ax = b.$$

Крок 3. Ітерації зупиняють за умови виконання нерівності:

$$\left\| x^{(n+1)} - x^{(n)} \right\| < \varepsilon$$

Загальна формула наближень за методом простої ітерації має вигляд:

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \beta_i, \\ x_i^{(n+1)} = \beta_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} \alpha_{ij} x_j^{(n)}, \\ \left(i = 1, \ldots, m; n = 0, 1, 2, \ldots \right). \end{cases} \tag{9}$$

Умови збіжності

Для того, щоб метод простої ітерації збігався, рівняння системи $Ax = b$ переставляють таким чином, щоб виконувалася умова домінування діагональних елементів:

$$\left|a_{ii}\right| \geq \left|a_{i1}\right| + ... + \left|a_{i,i-1}\right| + \left|a_{i,i+1}\right| + ... + \left|a_{im}\right|, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

і хоча б для одного i нерівність була строгою.

Модулі діагональних коефіцієнтів у кожному рівнянні системи більші за суму модулів недіагональних коефіцієнтів (вільні члени не враховують).

Для одержання збіжності систему

$$Ax = b$$

можна перетворити у систему

$x = \alpha x + \beta$ з матрицею α,

яка задовольняє умові збіжності, кількома способами.

Способи забезпечення збіжності ітераційних методів

Спосіб 1. Рівняння в системі $Ax = b$ переставляють так, щоб виконувалася умова збіжності

$$\left|a_{ii}\right| \geq \left|a_{i1}\right| + \ldots + \left|a_{i,i-1}\right| + \left|a_{i,i+1}\right| + \ldots + \left|a_{im}\right|, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Для досягнення даної мети можна використовувати й інші елементарні еквівалентні перетворення.

Приклад 1. Нехай дана система: $\begin{cases} -2.8x_1 + x_2 + 4x_3 = 60, \\ 10x_1 - x_2 + 8x_3 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 - 0,6x_3 = 20. \end{cases}$

За допомогою перестановки приведемо її до вигляду:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 8x_3 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 - 0,6x_3 = 20, \\ -2.8x_1 + x_2 + 4x_3 = 60. \end{cases}$$

Для даної системи $\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 8x_3 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 - 0,6x_3 = 20, \\ -2.8x_1 + x_2 + 4x_3 = 60. \end{cases}$

умови збіжності мають вигляд :

$$|10| > |-1| + |8|, \qquad |2| > |-1| + |-0.6|, \qquad |4| > |-2.8| + |1|$$

Діагональні елементи мають домінування.

Виразимо x_1 з першого рівняння, x_2, x_3 – з наступних.

Одержимо систему $x = \alpha x + \beta$:

$$\begin{cases} x_1 = 0x_1 + 0.1x_2 - 0.8x_3 + 1, \\ x_2 = 0.5x_1 + 0x_2 + 0.3x_3 + 10, \\ x_3 = 0.7x_1 - 0.25x_2 + 0x_3 + 15, \end{cases} \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & -0.8 \\ 0.5 & 0 & 0.3 \\ 0.7 & -0.25 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Помітимо, що $\|\alpha\|_m = \max\{0.9, 0.8, 0.95\} = 0.95 < 1,$ тобто умова збіжності виконана.

Приклад 2. Одержання діагонального домінування шляхом додавання рівнянь системи.

Нехай дана система:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 9x_3 = -7, \\ 3x_1 + 8x_2 - 7x_3 = -6, \\ x_1 + x_2 - 8x_3 = 7. \end{cases}$$

Додамо 1-е до 3-го.

$$+\begin{array}{l} 4x_1 + x_2 + 9x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 - 8x_3 = 7 \end{array}$$

$$= 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

Віднімемо 2-е від 3-го:

$$-\begin{array}{l} 3x_1 + 8x_2 - 7x_3 = -6 \\ x_1 + x_2 - 8x_3 = 7 \end{array}$$

$$= 2x_1 + 7x_2 + x_3 = -13$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = -13, \\ x_1 + x_2 - 8x_3 = 7. \end{cases}$$

Спосіб 2. Рівняння в системі $Ax = b$ переставляють так, щоб виконувалася умова збіжності

$$\left|a_{ii}\right| \geq \left|a_{i1}\right| + \ldots + \left|a_{i,i-1}\right| + \left|a_{i,i+1}\right| + \ldots + \left|a_{im}\right|, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Перетворення виконують таким чином, щоб елементи на діагоналі переважали, але при цьому коефіцієнти a_{ii} не обов'язково дорівнювали нулю.

Приклад 1. Нехай дана система $\begin{cases} 1.02x_1 - 0.15x_2 = 2.7, \\ 0.8x_1 + 1.05x_2 = 4 \end{cases}$

Запишемо дану систему у формі:

$$\begin{cases} x_1 = -0.02x_1 + 0.15x_2 + 2.7 \\ x_2 = -0.8x_1 - 0.05x_2 + 4 \end{cases}, \text{ де } \alpha = \begin{pmatrix} -0.02 & 0.15 \\ -0.8 & -0.05 \end{pmatrix}$$

При цьому $\left\|\alpha\right\|_m = \max\left\{0.17; 0.85\right\} = 0.85 < 1$

Спосіб 3. Якщо $\det A \neq 0$, то систему $Ax = b$ можна помножити на матрицю:

$$D = A^{-1} - \varepsilon, \text{ де } \quad A^{-1} = \frac{A^*}{\det A},$$

A^*- транспонована матриця алгебраїчних доповнень матриці A.
$\varepsilon = \left(\varepsilon_{ij}\right)$ – матриця з малими за модулем елементами.

Тоді отримуємо систему $DAx = Db \Rightarrow \quad \left(A^{-1} - \varepsilon\right)Ax = Db$

або після розкриття дужок:

$$A^{-1}Ax - \varepsilon Ax = Db \text{ або } x - \varepsilon Ax = Db$$

Увівши заміни $\alpha = \varepsilon A, \beta = Db$, одержимо формулу для методу простої ітерації:

$$x = \alpha x + \beta.$$

Якщо елементи $\left|\varepsilon_{i,j}\right|, \; i, j = 1,2,\ldots,m$ достатньо малі, то умова збіжності виконується.

Алгоритм методу простих ітерацій

1. Перетворити систему $Ax = b$ до вигляду $x = \alpha x + \beta$ одним з розглянутих способів.

2. Задати початкове наближення розв'язку $x^{(0)}$ довільно або покласти $x^{(0)} = \beta$, а також мале додатне число ε (точність). Покласти $n = 0$

3. Обчислити чергове наближення $x^{(n+1)}$ за формулою

$$x^{(n+1)} = \alpha x^{(n)} + \beta.$$

4. Якщо виконана умова $\left\| x^{(n+1)} - x^{(n)} \right\| < \varepsilon$, то процес обчислення ітерацій завершити й установити наближений розв'язок задачі $x^* \cong x^{(n+1)}$

5. Якщо $\left\| x^{(n+1)} - x^{(n)} \right\| \geq \varepsilon$, то встановлюємо $n := n + 1$ й переходимо до п.3.

Приклад 1. Методом простих ітерацій з точністю $\varepsilon = 0.01$ розв'язати таку систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14, \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$$

Розв'язок.

Етап 1. Перевіряємо умову збіжності

$$|2| < |2| + |10|, \quad |1| < |10| + |1|, \quad |1| < |2| + |10|$$

Очевидно, що умова не виконується.

Переставимо рівняння так, щоб виконувалася умова домінування діагональних елементів.

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

Після цього одержуємо:

$$\left|10\right| > \left|1\right| + \left|1\right|, \quad \left|10\right| > \left|2\right| + \left|1\right|, \quad \left|10\right| > \left|2\right| + \left|2\right|.$$

Виразимо з 1-го рівняння x_1, а x_2, x_3 – з 2-го й 3-го.

$$\begin{cases} x_1 = -0.1x_2 - 0.1x_3 + 1.2, \\ x_2 = -0.2x_1 - 0.1x_3 + 1.3, \\ x_3 = -0.2x_1 - 0.2x_2 + 1.4 \end{cases} \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

Помітимо, що $\left\|\alpha\right\|_m = \max\left\{0.2, 0.3, 0.4\right\} = 0.4 < 1$ умова збіжності виконана.

Етап 2. Задамо $x^{(0)} = \beta = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix}$. У даній задачі $\varepsilon = 0.01$.

Етап 3. Виконаємо розрахунки за формулами обчислення:

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = -0.1x_2^{(n)} - 0.1x_3^{(n)} + 1.2, \\ x_2^{(n+1)} = -0.2x_1^{(n)} - 0.1x_3^{(n)} + 1.3, \\ x_3^{(n+1)} = -0.2x_1^{(n)} - 0.2x_2^{(n)} + 1.4. \end{cases}$$

Результати обчислень занесемо в таблицю:

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$	$\left\| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right\|$
0	1.2000	1.3000	1.4000	-
1	0.9300	0.9200	0.9000	0.5000
2	1.0180	1.0240	1.0300	0.1300
3	0.9946	0.9934	0.9916	0.0384
4	1.0015	1.0020	1.0024	0.0108
5	0.9996	0.9995	0.9993	0.0027$<\varepsilon$

Модифікація методу простих ітерацій

Відзначимо, що іноді буває зручніше обчислювати не наближення, а їх різниці. Ввівши позначення

$$\Delta^{(n)} = x^{(n)} - x^{(n-1)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

Використовуючи базовий вираз для однокрокових методів, одержуємо:

$$x^{(n+1)} = \alpha x^{(n)} + \beta \text{ і } x^{(n)} = \alpha x^{(n-1)} + \beta$$

Віднімемо першу рівність від другої:

$$x^{(n+1)} - x^{(n)} = \alpha\left(x^{(n)} - x^{(n-1)}\right).$$

Позначимо $\Delta^{(n+1)} = x^{(n+1)} - x^{(n)}$,

$$\Delta^{(n)} = x^{(n)} - x^{(n-1)},$$

Тоді $\Delta^{(n+1)} = \alpha \Delta^{(n)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$

За нульове наближення приймаємо:

$$\Delta^{(0)} = x^{(0)},$$

$$\Delta^{(0)} + \Delta^{(1)} = x^{(0)} + x^{(1)} - x^{(0)} = x^{(1)}$$

$$\Delta^{(0)} + \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} = x^{(0)} + x^{(1)} - x^{(0)} + x^{(2)} - x^{(1)} = x^{(2)}$$

$$\Delta^{(0)} + \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(3)} = x^{(0)} + x^{(1)} - x^{(0)} + x^{(2)} - x^{(1)} + x^{(3)} - x^{(2)} = x^{(3)}$$

У загальному випадку m-е наближення є

$$x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \Delta^{(i)}.$$

Нехай $\Delta^{(0)} = x^{(0)} = \beta$. Тоді рівність

$$\Delta^{(n+1)} = \alpha\Delta^{(n)} \quad \left(n = 1, 2, \ldots\right).$$

буде виконана і при $n = 0$. Звідси випливає відповідна методика обчислення цього варіанта ітерацій.

Алгоритм модифікованого методу простих ітерацій

$\Delta^{(0)} = x^{(0)} = \beta$, то

$\Delta^{(1)} = \alpha\Delta^{(0)}$; $\Delta^{(2)} = \alpha \cdot \Delta^{(1)} = \alpha \cdot \alpha \cdot \Delta^{(0)} = \alpha^2\beta$

$\Delta^{(n)} = \alpha\Delta^{(n-1)} = \alpha^n\beta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ і

$$x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \Delta^{(i)} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^i \beta \;;$$

Приклад 2. Розв'язати систему (умова збіжності виконана)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Вирішуємо рівняння щодо відповідних змінних:

$$\begin{cases} x_1 = \quad 0x_1 + 0.5x_2 - 0.5x_3 - 1.5, \\ x_2 = -0.6x_1 + \quad 0x_2 + 0.4x_3 + 0.2, \\ x_3 = -0.1x_1 + 0.4x_2 + \quad 0x_3 + 0 \end{cases}$$

Тут

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.6 & 0 & 0.4 \\ -0.1 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Користуючись формулами: $\Delta^{(0)} = \beta$

$$\Delta^{(n+1)} = \alpha \Delta^{(n)}, \qquad x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \Delta^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta, \ (n = 1, 2, \ldots)$$

одержимо:

$$\Delta^{(1)} = \alpha\Delta^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.6 & 0 & 0.4 \\ -0.1 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.9 \\ 0.23 \end{pmatrix},$$

$$\Delta^{(2)} = \alpha\Delta^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.6 & 0 & 0.4 \\ -0.1 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.9 \\ 0.23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.335 \\ 0.032 \\ 0.350 \end{pmatrix}$$

і т. д.

Виконавши, таким чином, 9 ітерацій, одержимо:

$$x^{(9)} = \sum_{k=0}^{9} \Delta^{(k)} = \begin{pmatrix} -1.235 \\ 1.089 \\ 0.560 \end{pmatrix}$$

Переваги модифікованого методу

Простий обчислювальний алгоритм, що дозволяє використовувати стандартні алгоритми прискореного множення матриць.

Недоліки модифікованого методу

1. Систематичне нагромадження помилок при збільшенні числа доданків, у результаті чого можуть виникнути значні похибки шуканого кореня.

2. Помилка, допущена в обчисленнях, впливає на остаточний результат. Тому надійніше користуватися першим варіантом ітерації.

Достатня умова збіжності процесу ітерації в координатній формі

Теорема про збіжність. *Якщо для системи* $x = \alpha x + \beta$ *виконана щонайменше одна з умов*

1) $\sum\limits_{j=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| < 1$ *або* $2) \sum\limits_{i=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| < 1 \quad \left(j = 1, 2, \ldots, n\right).$

то процес ітерації $x^{\left(n+1\right)} = \alpha x^{\left(n\right)} + \beta$ *сходиться до єдиного розв'язку цієї системи, незалежно від вибору початкового наближення.*

Наслідок. Для системи

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$$

метод ітерації сходиться, якщо виконані нерівності

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{j \neq i} \left|a_{ij}\right| \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right),$$

Метод Якобі в координатній формі

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$Ax = b,$$

де матриця $A = \left(a_{ij}\right)$ $i, j = 1, 2, \ldots, m$ має обернену матрицю,

$x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right)^T$, $b = \left(b_1, b_2, \ldots, b_m\right)^T$.

Перетворимо систему до вигляду :

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

При цьому передбачається, що всі $a_{ii} \neq 0$.

Уникнути цієї проблеми іноді вдається перестановкою рівнянь у системі $Ax = b$.

Представимо вектор n-й ітерації у вигляді:

$$x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\right)^T.$$

Тоді метод Якобі для системи $Ax = b$ в координатній формі має вигляд

$$x_i^{(n+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \ i = 1, 2, \ldots, m,$$

Виключивши з суми в даному виразі елемент $j = i$, одержимо загальний вираз для методу Якобі в компактному вигляді:

$$x_i^{(n+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} a_{ij} x_j^{(n)} - b_i \right), \ \ i = 1, \ldots, m$$

Початкові значення

Початкові значення $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}\right)^T$

вибирають довільно.

У більшості випадків $x_i^{(0)} = 0, \ i = 1, 2, \dots, m$.

Умова закінчення алгоритму

Закінчення ітерацій визначають або задаванням максимального числа ітерацій $n_{\max}$, або умовою

$$\max_{1 \le i \le m} \left| x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)} \right| < \varepsilon, \text{ де } \varepsilon > 0.$$

Умова збіжності алгоритму

Теорема. *Нехай A - матриця з діагональною перевагою, тобто*

$$\left| a_{ii} \right| > \sum_{i \ne i} | a_{ij} |.$$

Тоді метод Якобі сходиться.

Приклад. Методом Якоби розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 1,8x_2 + 0,4x_3 = 1 & \left(\mathrm{I}\right) \\ 3x_1 + 2x_2 - 1,1x_3 = 0 & \left(II\right) \\ x_1 - x_2 + 7,3x_3 = 0 & \left(III\right) \end{cases}$$

попередньо привівши матрицю системи до матриці з діагональною перевагою.

Ітерації виконувати до досягнення точності $\varepsilon = 0.001$.

Розв'язок

Наведемо систему до такого вигляду, щоб елементи головної діагоналі були більшими за інші елементи рядків:

$$\begin{cases} 25x_1 + x_2 - 3,5x_3 = 5 & \left(5\mathrm{I} + 5\mathrm{II}\right) \\ -9,4x_2 + 3,4x_3 = 3 & \left(3I - 2II\right) \\ x_1 - x_2 + 7,3x_3 = 0 & \left(III\right) \end{cases}$$

Нульове наближення $x^{(0)} = 0;$

Обчислимо перше наближення

$$x_i^{(1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} a_{ij}x_j^{(0)} - b_i\right), \quad i = 1, 2, 3$$

де a_{ij} – елементи матриці

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 1 & -3,5 \\ 0 & -9,4 & 3,4 \\ 1 & -1 & 7,3 \end{pmatrix},$$

а b_i– елементи вектора $b = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T$

$$x_1^{(1)} = -\frac{1}{25}\left(x_2^{(0)} - 3.5x_3^{(0)} - 5\right) = \frac{0 - 3.5 \cdot 0 - 5}{25} = -0.2,$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{9.4}\left(3.4x_3^{(0)} - 3\right) = \frac{3.4 \cdot 0 - 3}{9.4} = -0.3191,$$

$$x_3^{(1)} = -\frac{1}{7.3}\left(x_1^{(0)} - x_2^{(0)} - 0\right) = 0$$

Виконаємо другу ітерацію

$$x_1^{(2)} = -\frac{1}{25}\left(x_2^{(1)} - 3.5x_3^{(1)} - 5\right) = \frac{-0.2 - 3.5 \cdot 0 - 5}{25} = -\frac{-5.2}{25} = 0.208$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{9.4}\left(3.4x_3^{(1)} - 3\right) = \frac{3.4 \cdot 0 - 3}{9.4} = -\frac{3}{9.4} = -0.3191,$$

$$x_3^{(2)} = -\frac{1}{7.3}\left(x_1^{(1)} - x_2^{(1)} - 0\right) = \frac{-0.2 + 0.3191}{7.3} = \frac{0.1191}{7.3} = 0.01632$$

Повторюємо ітерації, поки для вектора $x^{(i)} = \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}\right)$

буде виконана умова

$$\max_{1 \le i \le 3}\left|x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)}\right| < \varepsilon\,.$$

Метод Гауса-Зейделя в координатній формі

Метод Гауса-Зейделя – модифікація методу простої ітерації.

Основна його ідея полягає в тому, що при обчисленні $(n+1)$-го наближення невідомого x_i **враховують вже обчислені** раніше $(n+1)$-і наближення невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}$.

Нехай дана лінійна система

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_j + \beta_i \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Виберемо початкові наближення коренів $x_1^{(0)} \neq 0$

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)},$$

намагаючись, звичайно, щоб вони деякою мірою відповідали шуканим невідомим $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Далі, якщо відоме n-е наближення $x_i^{(n)}$ коренів, згідно методу Гауса-Зейделя будують $(n+1)$-е наближення коренів за наступними формулами:

$$x_1^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j} x_j^{(n)} + \beta_1;$$

$$x_2^{(n+1)} = \alpha_{21} x_1^{(n+1)} + \sum_{j=2}^{m} \alpha_{2j} x_j^{(n)} + \beta_2;$$

$$x_3^{(n+1)} = \alpha_{31} x_1^{(n+1)} + \alpha_{32} x_2^{(n+1)} + \sum_{j=3}^{m} \alpha_{2j} x_j^{(n)} + \beta_2;$$

....

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(n+1)} + \sum_{j=i}^{m} a_{ij} x_j^{(n)} + \beta_i;$$

....

Приклад 3. Методом Гауса-Зейделя розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

Розв'язок. Приведемо цю систему до вигляду, зручного для ітерації,

$$\begin{cases} x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3, \\ x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3, \\ x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2. \end{cases}$$

Як нульові наближення коренів візьмемо:

$$x_1^{(0)} = 1.2;\ x_2^{(0)} = 0;\ x_3^{(0)} = 0.$$

Застосовуючи процес Гауса-Зейделя, послідовно одержимо:

1-я ітерація
$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1.2 - 0.1 \cdot 0 - 0.1 \cdot 0 = 1.2, \\ x_2^{(1)} = 1.3 - 0.2 \cdot 1.2 - 0.1 \cdot 0 = 1.06, \\ x_3^{(1)} = 1.4 - 0.2 \cdot 1.2 - 0.2 \cdot 1.06 = 0.948. \end{cases}$$

2-я ітерація
$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1.2 - 0.1 \cdot 1.06 - 0.1 \cdot 0.948 = 0.9992, \\ x_2^{(2)} = 1.3 - 0.2 \cdot 0.9992 - 0.1 \cdot 0.948 = 1.00536, \\ x_3^{(2)} = 1.4 - 0.2 \cdot 0.9992 - 0.2 \cdot 1.00536 = 0.999098. \end{cases}$$

Виконавши подібним чином 5 ітерацій, одержимо:
$$x_1 = 1; \ \ x_2 = 1; \ \ x_2 = 1.$$

Метод релаксації в координатній формі

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m = b_m. \end{cases}$$

Перетворимо цю систему в такий спосіб: перенесемо вільні члени вліво і розділимо перше рівняння на $-a_{11}$, друге на $-a_{22}$ і т. д. Тоді одержимо систему, *приготовлену до релаксації*,

$$\begin{cases} -1x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1m}x_m + c_1 = 0, \\ b_{21}x_1 - 1x_2 + \dots + b_{2m}x_m + c_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \dots - 1x_m + c_m = 0. \end{cases}$$

$b_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$ $(i \neq j)$ і $c_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$

Нехай $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\right)$ – початкове наближення розв'язку системи, одержимо *нев'язки:*

$$\begin{cases} -1x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1m}x_m + c_1 = 0, \\ b_{21}x_1 - 1x_2 + \ldots + b_{2m}x_m + c_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \ldots - 1x_m + c_m = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1^{(0)} = c_1 - x_1^{(0)} + \sum\limits_{j=2}^{m} b_{1j} x_j^{(0)}, \\ R_2^{(0)} = c_2 - x_2^{(0)} + \sum\limits_{\substack{j \neq 2 \\ j=1}}^{m} b_{2j} x_j^{(0)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_m^{(0)} = c_m - x_m^{(0)} + \sum\limits_{j=1}^{m-1} b_{mj} x_j^{(0)}. \end{cases}$$

Якщо одному з невідомих $x_j^{(0)}$ дати приріст $\delta_{x_j^{(0)}}$, то відповідна нев'язка $R_i^{(0)}$ $(i=j)$ зменшиться на величину $\delta_{x_j^{(0)}}$, а всі інші нев'язки $R_i^{(0)}$ $(i \neq j)$ збільшаться на величину $b_{ij}\delta_{x_i^{(0)}}$.

$$x_j^{(0)} \to x_j^{(0)} + \delta_{x_j^{(0)}} \Rightarrow \begin{cases} R_i^{(0)} \to R_i^{(0)} - \delta_{x_j^{(0)}} \;\; npu \;\; i=j, \\ R_i^{(0)} \to R_i^{(0)} + \delta_{x_j^{(0)}} \;\; npu \;\; i \neq j, \end{cases}$$

Таким чином, щоб перетворити чергову нев'язку $R_j^{(1)}$ на нуль, достатньо величині $x_j^{(0)}$ дати приріст $\delta_{x_j^{(0)}} = R_j^{(0)}$, і ми будемо мати: $R_j^{(1)} = 0$ і $R_i^{(1)} = R_i^{(0)} + b_{ij}\delta_{x_j^{(0)}}$ при $i \neq j$.

Алгоритм методу релаксації

1. Перетворити систему до вигляду, зручного для релаксації.

2. Обчислити нев'язки для кожного рівняння на ітераційному кроці (n).

3. Вибрати максимальну з отриманих нев'язок.

4. Обчислити нев'язки на ітераційному кроці $(n+1)$, виконавши наступні дії:
   - максимальну нев'язку покласти рівною нулю;
   - інші нев'язки збільшити на величину $b_{ij}R_j^{(n)}$ при $j \neq i$

5. Якщо величини всіх нев'язок не дорівнюють нулю із заданою точністю, то перейти до п. 3.

6. Розв'язок для кожного x_i дорівнює сумі приростів для кожної з відповідних нев'язок

Приклад 4. Методом релаксації розв'язати систему

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7, \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 = 8. \end{cases}$$

виконуючи обчислення із двома десятковими знаками.

Розв'язок. Приводимо дану систему до вигляду, зручного для релаксації:

$$\begin{cases} -x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 0.6 = 0, \\ -x_2 + 0.1x_1 + 0.2x_3 + 0.7 = 0, \\ -x_3 + 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.8 = 0. \end{cases}$$

Вибираючи як початкові наближення коренів нульові значення

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0,$$

знаходимо відповідні їм нев'язки

$$R_1^{(0)} = 0.60;\ R_2^{(0)} = 0.70;\quad R_3^{(0)} = 0.80.$$

Згідно із загальною теорією вважаємо:

$\delta x_3^{(0)} = 0.80$-максимальна нев'язка.

Звідси одержуємо нев'язки

$$R_1^{(1)} = R_1^{(0)} + b_{13}R_3^{(0)} = R_1^{(0)} + 0.2\cdot 0.8 = 0.60 + 0.16 = 0.76;$$

$$R_2^{(1)} = R_2^{(0)} + b_{23}R_3^{(0)} = R_2^{(0)} + 0.2\cdot 0.8 = 0.70 + 0.16 = 0.86;$$

$$R_3^{(1)} = 0.$$

$$R_1^{(1)} = 0.76;\ R_2^{(1)} = 0.86;\quad R_3^{(1)} = 0.$$

Далі вважаємо $\delta x_2^{(1)} = 0.86$ - максимальна нев'язка

$$R_1^{(2)} = R_1^{(1)} + b_{12}R_2^{(1)} = 0.76 + 0.2 \cdot 0.86 = 0.932;$$
$$R_2^{(2)} = 0;$$
$$R_3^{(2)} = R_3^{(1)} + b_{32}R_2^{(1)} = 0 + 0.1 \cdot 0.86 = 0.086$$
$$R_1^{(2)} = 0.932;\ R_2^{(2)} = 0;\quad R_3^{(2)} = 0.086$$

Далі вважаємо $\delta x_1^{(2)} = 0.932$ - максимальна нев'язка.

$$R_1^{(3)} = 0;$$
$$R_2^{(3)} = R_2^{(2)} + b_{21}R_1^{(2)} = 0 + 0.1 \cdot 0.932 = 0.093$$
$$R_3^{(3)} = R_3^{(2)} + b_{31}R_1^{(2)} = 0.086 + 0.1 \cdot 0.932 = 0.179$$

$$R_1^{(3)} = 0;\ R_2^{(3)} = 0.093;\quad R_3^{(3)} = 0.179$$

Далі вважаємо $\delta x_3^{(3)} = 0.179$ і т. д. до одержання заданої точності нев'язок.

Фінальний етап

Додавши усі прирости $\delta x_i^{(n)}$ $\left(i = 1,2,3;\ n = 0,1,\ldots\right)$, одержимо значення коренів

$$x_1 = 0 + 0.93 + 0.07 = 1.0,$$
$$x_2 = 0 + 0.86 + 0.13 + 0.01 = 1.00,$$
$$x_3 = 0 + 0.80 + 0.18 + 0.02 = 1.00.$$