Лекция 3

План лекции

1. **Понятие отношения**
2. **Определение отношения**
3. **Область определения и множество значений**
4. **Срез отношения через элемент**
5. **Способы задания бинарных отношений**

5.1. Задание перечислением и предикатом

5.2. Задание графом

5.3. Задание матрицей (таблично)

6. **Операции над отношениями**

   6.1. Объединение, пересечение, разность, дополнение

   6.2. Операции объединения и пересечения произвольных семейств отношений

7. **Дополнительные операции**

   7.1. Обратное отношение

   7.2. Композиция отношений (Умножение отношений)

   7.2.1. Свойства композиции отношений

Понятие отношения

Отношение между парой объектов называется бинарным. Бинарное отношение используется для указания характера вида связи между парой объектов, рассматриваемых в определенном порядке. При этом отношение дает критерий для отличия одних упорядоченных пар от других. Таким образом, понятие «отношения» представляет собой дальнейшее развитие понятий упорядоченного множества, «соответствия» и «отображения».

В математике для обозначения связи между объектами или понятиями часто пользуются термином «отношения».

Пример. Такие неполные предложения (или так называемые предикаты, утверждения) могут быть рассмотрены как отношения:

- X меньше (или больше), чем Y,
- X выше (или ниже), чем Y,
- X делится на Y,
- X происходит раньше (или позже), чем Y,
- X включается (или входит) в Y,
- X параллельно (или перпендикулярно) Y,
- X равно (или эквивалентно) Y,
- X является братом Y,
- X связан (электрически или иным образом) с Y и т. д.

Определение отношения

Отношением R множеств X и Y называется произвольное подмножество $X \times Y$. Если $\left(x,y\right) \in R$, это записывают как xRy; при этом говорят, что x и y находятся в отношении R, или просто, что x

относится к y. Если $X = Y$, то отношение есть подмножество $X \times X$. Такое отношение называют ***бинарным отношением*** на X.

Примеры бинарных отношений.

1. Все множество $X \times Y$ есть отношение множеств X и Y.
2. Если X — множество действительных чисел, то
$$\left\{(a,b) \in X \times X \middle| a^2 + b^2 = 4\right\}$$
является бинарным отношением на X.
3. Пусть X — множество товаров в магазине, а Y — множество действительных чисел. Тогда $\left\{(a,b) \in X \times Y \middle| a\, price\, b\right\}$ — отношение множеств X и Y.
4. Пусть X — множество женщин, а Y — множество мужчин, тогда { $(a,b)|b$ является мужем a } есть отношение множеств X и Y.

5. Если A — множество людей, то
{ $(a,b) \in A^2 | b$ является родственником a }
есть бинарное отношение на A.

Область определения и множество значений

Область определения отношения R на X и Y есть множество всех $x \in X$ таких, что для некоторых $y \in Y$ имеем $(x,y) \in R$. Другими словами, область определения R есть множество всех первых координат упорядоченных пар из R.

Множество значений отношения R на X и Y есть множество всех $y \in Y$ таких, что $(x,y) \in R$ для некоторого $x \in X$. Другими словами, множество значений R есть множество всех вторых координат упорядоченных пар из R.

С каждым отношением R на $X \times Y$ связано отношение R^{-1} на $Y \times X$.

Способы задания бинарных отношений

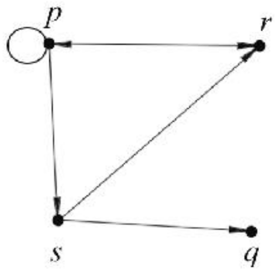
1. Бинарное отношение можно задать, перечисляя все входящие в него пары (если отношение состоит из конечного числа пар) или указав общее свойство пар, принадлежащих этому отношению, т. е. предикатом (вспомните способы задания множеств).

Пример. Пусть дано множество $X = \{p, r, s, q\}$. Зададим отношение $R \subseteq X \times X$ перечислением пар $R = \{(p,r),(s,q),(r,p),(p,p),(s,r),(p,s)\}$

Пример. Пусть дано N – множество натуральных чисел. Зададим отношение, указав общее свойство пар, принадлежащих отношению:

$R_1 = \{(n,m) \in N \times N \mid n \text{ является делителем } m\}$

2. Способ задания бинарного отношения с помощью графа. Пусть R – бинарное отношение на множестве X. Изобразим элементы множества X в виде точек на плоскости (их называют вершинами графа). Для двух точек x_i, x_j проводим стрелку $\rightarrow$ из x_i в x_j тогда и только тогда, когда $(x_i, x_j) \in R$. При этом, если одновременно $(x_i, x_j) \in R$ и $(x_j, x_i) \in R$ то точки x_i и x_j соединяются стрелкой $\leftrightarrow$, а если $(x_j, x_j) \in R$, то в точке x_j изображается петля. На рисунке изображен граф бинарного отношения $R = \{(p,r),(s,q),(r,p),(p,p),(s,r),(p,s)\}$.



3. Способ задания бинарного отношения с помощью булевых матриц. Пусть $R \subseteq X \times Y$, где $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$; $Y = \{y_1, y_2, y_3, ..., y_m\}$. Рассмотрим $n \times m$-матрицу (таблицу), в которой в первый столбец выписаны элементы множества X, а в начальную строку – элементы множества Y. На пересечении строки элемента x_i и столбца элемента y_j записывается 1, если пара $(x_i, y_j) \in R$, и 0 – в противном случае. Такая таблица называется **булевой матрицей отношения.** Булева матрица отношения

$R = \{(p,r),(s,q),(r,p),(p,p),(s,r),(p,s)\}$ имеет вид:

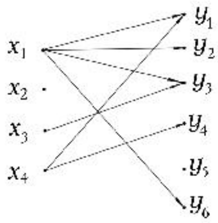
R	*p*	*q*	*r*	*s*
p	1	0	1	1
q	0	0	0	0
r	1	0	0	0
s	0	1	1	0

Срез отношения через элемент

Пусть *R* – произвольное бинарное отношение между элементами множеств *X* и *Y*, $x \in X$. Множество тех элементов, с которыми элемент x находится в отношении *R*, называется **срезом** (или **сечением)** отношения *R* через элемент *x* и обозначается *R*(*x*). Если бинарное отношение R представлено с помощью графа, то *R*(*x*) состоит из тех вершин, в которые из вершины *x* идет стрелка. Подчеркнем, что срез отношения через элемент – это некоторое множество, которое может содержать несколько элементов, один элемент и ни одного элемента (пустое).

Пример задания среза отношения R через элемент x_i

Пусть даны множества $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ и $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6\}$ и отношение $R\subset X\times Y$, заданное графом.



Срез отношения R через элемент x_1: $R(x_1)=\{y_1,y_2,y_3,y_6\}$

Срез отношения R через x_2: $R(x_2)=\{\varnothing\}$

Срез отношения R через x_3: $R(x_3)=y_3$

Срез отношения R через x_4: $R(x_4)=\{y_1,y_4\}$

Операции над отношениями

Так как бинарные отношения представляют множества (пар), то к ним применимы понятия равенства, включения, а также операции объединения, пересечения и дополнения.

Для двух бинарных отношений R и S определим такие операции:

Включение $R\subset S$ понимается таким образом, что всякая упорядоченная пара элементов, принадлежащая отношению R, принадлежит и отношению S.

Равенство $R=S$ означает, что отношения R и S состоят из одних и тех же упорядоченных пар.

Объединение $R\cup S$ отношений R и S состоит из упорядоченных пар, принадлежащих хотя бы одному из этих отношений.

Пересечение $R\cap S$ отношений R и S есть новое отношение, состоящее из упорядоченных пар, принадлежавших обоим отношениям одновременно.

Разность $R-S$ отношений R и S есть множество упорядоченных пар, принадлежащих отношению R и не принадлежащих отношению S.

Дополнение. Если R – бинарное отношение между элементами множеств X и Y, то его **дополнением** (относительно $X\times Y$) называется разность $(X\times Y)-R$

Операции объединения и пересечения произвольных семейств отношений

Если $\left(R_i\right)_{i\in I}$ – семейство отношений, то **объединение этого семейства** есть отношение $\bigcup_{i\in I} R_i$, состоящее из упорядоченных пар, принадлежащих хотя бы одному из отношений R_i.

Пересечением этого семейства – отношение $\bigcap_{i\in I} R_i$, состоящее из упорядоченных пар, принадлежащих всем отношениям R_i.

Дополнительные операции

Для отношений вводятся некоторые **дополнительные операции**, которые связаны с их специфической структурой, проявляющейся в том, что **все элементы отношений суть упорядоченные пары**. Рассмотрим две такие операции.

1. Обратное отношение

Если в каждой упорядоченной паре, принадлежащей отношению R поменять местами первую и вторую компоненту, то получим новое отношение, которое называется **обратным** для отношения R и обозначается через R^{-1} . Например, для отношения R

$$R=\{(p,r),(s,q),(r,p),(p,p),(s,r),(p,s)\}$$

обратное отношение R^{-1} имеет вид:

$$R^{-1}=\{(r,p),(q,s),(p,r),(p,p),(r,s),(s,p)\}$$

Ясно, что тогда и граф отношения R^{-1} получается из графа отношения R путем переориентации всех стрелок; если же отношение R задано с помощью булевой матрицы, то, поменяв в ней строки и столбцы, получим булеву матрицу отношений R^{-1}.

Пусть $R\subseteq X\times Y$ есть отношение на $X\times Y$. Тогда отношение R^{-1} на $Y\times X$ определяется следующим образом:

$$R^{-1}=\left\{(y,x)\,\middle|\,(x,y)\in R\right\}.$$

Другими словами, $(y,x)\in R^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(x,y)\in R$ или, что равносильно, $yR^{-1}x$ тогда и только тогда, когда xRy.

Отношение R^{-1} называется ***обратным отношением*** к данному отношению R.

Пример.

Пусть $R=\{(1,r),(1,s),(3,s)\}$,

тогда $R^{-1}=\{(r,1),(s,1),(s,3)\}$.

Пусть $R=\{\,(a,b)\big|b$ является мужем $a\}$, тогда $R^{-1}=\{\Big(b,a\Big)\Big|a$ является женой $b\}$

Пусть
$R=\{\,(a,b)\big|b$ является родственником $a\}$, тогда $R=R^{-1}$

Пусть
R — отношение $\left\{(a,b)\big|a^2+b^2=4\right\}$, тогда также $R^{-1}=R$.

2. Композиция отношений (Умножение отношений)

Пусть $R\subseteq X\times Y$ — отношение на $X\times Y$,
а $S\subseteq Y\times Z$ — отношение на $Y\times Z$.

Композицией отношений S и R называется отношение

$$T\subseteq X\times Z,$$

определенное таким образом:
$T=\{\,(x,z)\big|$существует такой элемент $y\in Y$, что $(x,y)\in R$ и $(y,z)\in S$ $\}$.

Это множество обозначается $T=S\circ R$.

Пример.
Пусть $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b\}$ и $Z=\{\sim,\ \ ,ª,«\}$.
Также заданы отношения
$R=X\times Y$ и $S=Y\times Z$. $R=\{(1,a),(2,b),(3,b)\}$,
$S=\{(a,\sim),(a,\ \ ),(b,ª),(b,«)\}$,
Тогда $S\circ R=\{(1,\sim),(1,\ \ ),(2,ª),(2,«),(3,ª),(3,«)\}$ поскольку
из $(1,a)\in R$ и $(a,\sim)\in S$ следует, что $(1,\sim)\in S\circ R$,
из $(1,a)\in R$ и $(a,\ \ )\in S$ следует, что $(1,\ \ )\in S\circ R$,
…..
из $(3,b)\in R$ и $(b,«)\in S$ следует, что $(3,«)\in S\circ R$.

Свойства композиции отношений

Композиция отношений **ассоциативна**; т. е., если $X,Y,Z,$D — множества и если $R\subseteq X\times Y$, $S\subseteq Y\times Z$ и $T\subseteq Z\times D$ тогда $R\circ(S\circ T)=(R\circ S)\circ T$.