1. Згортка функцій. Нехай функції $f(t)$ та $\varphi(t)$ означені й неперервні для всіх t. *Згорткою* $(f*\varphi)(t)$ цих функцій називають нову функцію від t, яку означують рівністю

$$(f*\varphi)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau$$

якщо цей інтеграл існує.

Для функцій-оригіналів $f(t)$ та $\varphi(t)$ згортання завжди виконуване, причому

$$\boxed{(f*\varphi)(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau.}$$

Згортання функцій комутативне, тобто

$$\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau = \int\limits_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Теорема Бореля:

2. Теорема множення. Якщо $f(t) \to F(p), \varphi(t) \to \Phi(p)$, то згортка $(f*\varphi)(t)$ має зображення $F(p)\Phi(p)$:

$$(f*\varphi)(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \to F(p)\Phi(p).$$

$$\blacktriangleright \int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \to \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\left\{\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\right\}dt =$$

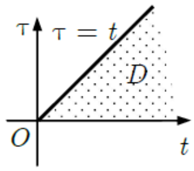

Рис. 16.5

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\left\{\int\limits_0^{+\infty} f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\right\}dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} f(\tau)\left\{\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\varphi(t-\tau)dt\right\}d\tau = \int\limits_0^{+\infty} f(\tau)\Phi(p)e^{-p\tau}d\tau = \Phi(p)F(p).\blacktriangleleft$$

3. Інтеграл Дюамеля. Нехай $f(t)$ та $\varphi(t)$ — функції-оригінали, причому функція $f(t)$ неперервна на $[0;+\infty)$, а $\varphi(t)$ — неперервно диференційовна на $[0;+\infty)$. Тоді якщо $f(t) \to F(p), \varphi(t) \to \Phi(p)$, то

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \to pF(p)\Phi(p).$$

$$\blacktriangleright \frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\right) = f(t)\varphi(0) + \int\limits_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau \to pF(p)\Phi(p).\blacktriangleleft$$