Задача 1

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=6}^{\infty}\frac{48}{n^2-6n+8}$$

Произведем эквивалентные преобразования ряда:

Так как n^2-6n+8 = (n-4)(n-2), то получаем, что исходный ряд мы можем переписать в следующем виде:

$$\sum_{n=6}^{\infty}\frac{48}{n^2-6n+8}=\sum_{n=6}^{\infty}\frac{48}{(n-2)(n-4)}=\left\{\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{n-4}=\right.$$

$$\left.=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-2}\right)\right\}=\sum_{n=6}^{\infty}48\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-2}\right)=$$

$$=24\sum_{n=6}^{\infty}\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-2}\right)=24\left(\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n-4}-\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n-2}\right)$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n-4}$.

Произведем замену {n-4 = k}, тогда суммирование будет производиться от k = n-4 = {n=6}= 6 –4 =2, а $\frac{1}{n-4}=\frac{1}{k}$.

Подставим полученные значения в ряд $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n-4}$:

$$\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n-4}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$$

Antigtu.ru

Произведем аналогичные преобразования и с рядом $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n-2}$. Тогда для него замена $\{n-2=k\}$:

начальное $k = n-2 = \{ n = 6 \} = 6-2=4$, а $\frac{1}{n-2}=\frac{1}{k}$.

Подставим данные в $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n-2}$:

$$\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n-2}=\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k}$$

Итак, мы получили, что исходный ряд равен разности двух рядов:

$$\sum_{n=6}^{\infty}\frac{48}{n^2-6n+8}=24\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}-\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k}\right)=$$

$$=24\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k}\right)=24\cdot\frac{5}{6}=20$$

Ответ: $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{48}{n^2-6n+8}=20$

Antigtu.ru

Задача 2

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n + \sqrt[3]{\ln^2 n}}$$

Обозначим $a_n = \dfrac{1}{n^2 \ln n + \sqrt[3]{\ln^2 n}}$.

Отметим следующую закономерность:

$$a_n \le \frac{1}{n^2 \ln n} \le \frac{1}{n^2}.$$

Докажем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Тогда из его сходимости будет следовать сходимость исходного ряда, так как тогда он будет ограничен сходящимся рядом сверху и нулем снизу (все члены ряда неотрицательны).

Обозначим $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. По признаку сравнения (говорящему, что ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ сходится только при условии, что a строго больше 1, т.е. a>1 и расходится в противном случае, при $a \le 1$) ,ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ сходится, так как выполняется условие сходимости: 2>1.

Поэтому и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n + \sqrt[3]{\ln^2 n}}$ тоже сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n + \sqrt[3]{\ln^2 n}}$ сходится.

Antigtu.ru

Задача 3

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(e^{\sqrt{n}/(n^3-1)}-1)$$

Обозначим $a_n = (e^{\sqrt{n}/(n^3-1)}-1)$.

При $n \to \infty$ $e^{\sqrt{n}/(n^3-1)} \approx 1+\sqrt{n}/(n^3-1)$ (Первые два члена из разложения e^x в ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$).

Поэтому получаем, что сходимость исходного ряда эквивалентна сходимости следующего ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(n^3-1)} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$$

Докажем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$. Тогда из его сходимости будет следовать сходимость исходного ряда, так как тогда он будет ограничен сходящимся рядом сверху и нулем снизу (все члены ряда неотрицательны).

Обозначим $b_n = \frac{1}{n^{5/2}}$. По признаку сравнения (говорящему, что ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ сходится только при условии, что a строго больше 1, т.е. $a>1$ и расходится в противном случае, при $a \le 1$), ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ сходится, так как выполняется условие сходимости: $2.5>1$.

Поэтому и исходный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}(e^{\sqrt{n}/(n^3-1)}-1)$ тоже сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=2}^{\infty}(e^{\sqrt{n}/(n^3-1)}-1)$ сходится.

Antigtu.ru

Задача 4

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n (2+n)!}$$

Обозначим $a_n = \dfrac{3^n}{4^n (2+n)!}$.

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{3^{n+1}}{4^{n+1}(3+n)!}}{\dfrac{3^n}{4^n (2+n)!}}\right) = \frac{3}{4(n+3)} = 0 < 1$$

Так как по признаку Даламбера ряд сходится, если для всех достаточно больших n выполнено неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$

и расходится, когда $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то исходный ряд сходится.

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{4^n (2+n)!}$ сходится.

Antigtu.ru

Задача 5

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{e^n}$$

Воспользуемся признаком Коши:

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}\frac{2}{e}} = \frac{2}{e} < 1$$

Таким образом, по признаку Коши исходный ряд является сходящимся.

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{e^n}$ сходится.

Antigtu.ru

Задача 6

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}a_n$$

Воспользуемся предельным признаком сходимости.

Если два ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ удовлетворяют условию:

$\lim\frac{a_n}{b_n}=L$, где L – конечное число, не равное 0, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}b_n$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ – это конечное число, не равное 0

Значит, ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Для исследования сходимости второго ряда воспользуемся интегральным признаком сходимости рядов.

Antigtu.ru

Если некоторая функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(n) = b_n$, то если $\int\limits_2^{\infty} f(x)dx$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ сходится, а если $\int\limits_2^{\infty} f(x)dx$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ расходится.

Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

Если $\int\limits_2^{\infty} f(x)dx$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ сходится, если интеграл расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ расходится.

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int\limits_2^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln|\ln x| \Big|_2^{\infty} = \infty$$

Интеграл расходится, значит и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ расходится. Из этого следует, что исходный ряд тоже расходится.

Ответ: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3 + 1) \ln n}$ расходится.

Antigtu.ru

Задача 7

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\sqrt{n}|}{n\sqrt{n}}$

Для любых n верно неравенство:

$$\frac{|\sin n\sqrt{n}|}{n\sqrt{n}} \le \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ сходится, так как сходится любой ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ при a>1

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ сходится, причем абсолютно.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ сходится.

Antigtu.ru

Задача 8

Вычислить сумму ряда с точностью α:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (2n+1)} \quad \alpha = 0{,}001$$

Обозначим n-ный член ряда, как a_n:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{4^n (2n+1)}$$

Чтобы вычислить сумму ряда с заданной точностью, следует принять во внимание то, что члены ряда с ростом n монотонно убывают. Тогда нам требуется найти сумму ряда до N-го члена, где N таково, что для любыx n>N выполняется неравенство $|a_n| \leq \alpha$. Найдем N:

$$|a_1| \approx 0{,}0833 > \alpha$$

$$|a_2| = 0{,}0125 > \alpha$$

$$|a_3| \approx 0{,}0022 > \alpha$$

$$|a_4| \approx 0{,}0004 < \alpha \Rightarrow N = 4$$

Найдем сумму ряда до 4-го члена:

$$\sum_{n=1}^{4} a_n \approx -0{,}073$$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (2n+1)} = -0{,}073 \pm 0{,}001$

Antigtu.ru

Задача 9

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^{2+3x-x^2}}$$

Обозначим $a_n = \dfrac{n+1}{n^{2+3x-x^2}}$, а искомую область сходимости ряда – X.

При достаточно больших n выполняется следующее приближенное равенство:

$$a_n \approx \frac{n}{n^{2+3x-x^2}} = \frac{1}{n^{3x-x^2+1}}$$

Тогда сходимость исходного ряда эквивалентна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3x-x^2+1}}$, который сходится по признаку сравнения только при степени n>1:

$$3x - x^2 + 1 > 1;$$
$$3x - x^2 > 0;$$
$$x(3 - x) > 0;$$
$$x \in (0,3);$$

Получаем, что область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3x-x^2+1}}$ есть интервал (0,3) . Следовательно, область X сходимости исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^{2+3x-x^2}}$ – это та же самая область.

Ответ: область сходимости $X = (0,3)$.

Antigtu.ru

Задача 10

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1)2^n}(x+3)^n$$

Приведем этот ряд к степенному:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1)2^n}(x+3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+3)^n,$$

где $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(3n-1)2^n}$

Используем формулу для нахождения радиуса сходимости, основанную на применении признака Коши:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(3n-1)2^n}{(-1)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(3n-1)2^n} = 2$$

Таким образом, интервал сходимости ряда будет выглядеть следующим образом:

$$-2 < x+3 < 2 \Rightarrow x \in (-5;-1)$$

Ответ: область сходимости $X = \{x \in (-5;-1)\}$

Antigtu.ru

Задача 11

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\operatorname{tg} x)^n$$

Приведем этот ряд к степенному, т.е. к виду: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, где $a_к$ не зависит от x и является постоянной величиной.

Положим $a_n = \frac{1}{n^2}$, тогда исходный ряд можно переписать в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\operatorname{tg} x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\operatorname{tg} x)^n$$

Теперь нам требуется найти $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = L$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}^2 (\sqrt[n]{n})}$$

Воспользуемся следующим равенством:

$\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{ak+b} = 1$, где a и b постоянные числа, a>0.

Тогда:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

Antigtu.ru

Таким образом, по теореме Коши-Адамара, область сходимости $X = \{|\operatorname{tg} x| < \frac{1}{L} = \frac{1}{1}\}$.

Решим неравенство, чтобы в явном виде записать область сходимости:

$$|\operatorname{tg} x| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x < 1, \\ \operatorname{tg} x > -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-\frac{\pi}{4} + \pi n, +\frac{\pi}{4} + \pi n), n \in N$$

Ответ: область сходимости $X = (-\frac{\pi}{4} + \pi n, +\frac{\pi}{4} + \pi n), n \in N$.

Antigtu.ru

Задача 12

Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x^5}\right)^{n-1}$$

Произведем тождественные преобразования ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x^5}\right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{x^5}\right)^{n}$$

Произведем замену переменной:

$$y = \frac{1}{x^5}:$$

$$A(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} y^k = \frac{1}{y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} y^{k+1} = \frac{1}{y} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} y^k$$

Найдем сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} y^k$:

Рассмотрим производную $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} y^k\right)'$:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} y^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{1}{1-y}$$

(Сумма убывающей геометрической прогрессии).

Antigtu.ru

Произведем обратные преобразования для нахождения суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}y^{k}$, то есть возьмем интеграл:

$$\int\frac{1}{(1-y)}dy=-\ln(1-y)+C$$

Чтобы найти константу C найдем значение ряда в некоторой фиксированной точке y, возьмем y = 0, тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}0^{k}=0=-\ln(1-0)+C\Rightarrow C=0$$

Таким образом, сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{x^{5}})^{n-1}$ есть $-(x^{5})\ln(1-\frac{1}{x^{5}})$ при $\left|\frac{1}{x^{5}}\right|<1\Leftrightarrow|x|>1$ и не существует при всех остальных x.

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{x^{5}})^{n-1}=\begin{cases}-(x^{5})\ln(1-\frac{1}{x^{5}}),|x|>1\\ \neg\exists, x\le 1\end{cases}$

Antigtu.ru

Задача 13

Найти сумму ряда:

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(x^3)^n$

Разложим этот ряд на сумму двух более простых рядов:

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}n(x^3)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(x^3)^n$

Произведем замену переменных $y = x^3$.

Найдем $A(y) = \sum_{n=0}^{\infty}ny^n$. Заметим, что $A(y)$ есть производная от функции $B(y) = \sum_{n=1}^{\infty}y^n$, умноженная на y:

$B'(y) = \sum_{n=1}^{\infty}ny^{n-1}$

$A(y) = y \cdot B'(y)$

Сумма ряда B(y) есть сумма убывающей геометрической прогрессии и поэтому равна $B(y) = \dfrac{y}{1-y}$, при условии, что $|y|<1$. Тогда производная от B(y) такова:

$$B'(y) = \frac{y'(1-y) - y(1-y)'}{(1-y)^2} = \frac{1-y+y}{(1-y)^2} = \frac{1}{(1-y)^2}.$$

Тогда $A(y) = y \cdot B'(y) = y \cdot \dfrac{1}{(1-y)^2} = \dfrac{y}{(1-y)^2}$ при $|y|<1$ и не существует при $|y| \geq 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}ny^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}y^n = \frac{y}{(1-y)^2} + 2\frac{1}{1-y} =$$

$$= \frac{y+2(1-y)}{(1-y)^2} = \frac{2-1y}{(1-y)^2} = \frac{2-1x^3}{(1-x^3)^2}$$

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{3n} = \begin{cases} \dfrac{2-1x^3}{(1-x^3)^2}, |x|<1 \\ \infty, |x| \geq 1 \end{cases}$

Antigtu.ru

Задача 14

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$\ln(1 + x - 12x^2)$$

Чтобы решить эту задачу, следует воспользоваться табличными разложениями в степенные ряды. Приведем функцию к виду, удобному для разложения:

$$\ln(1 + x - 12x^2) = \ln(1 - (-x + 12x^2))$$

Воспользуемся табличным разложением для ln(1-y):

$$\ln(1 - (-x + 12x^2)) = -\left[(12x^2 - x) + \frac{(12x^2 - x)^2}{2} + \ldots +\right.$$

$$\left. + \frac{(12x^2 - x)^n}{n} + \ldots\right] = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(12x^2 - x)^n}{n}$$

Ряд, полученный нами, еще не является рядом Тейлора по степеням x. Следует воспользоваться табличными разложениями еще раз. Для этого преобразуем функцию следующим образом:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(12x^2 - x)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(12x^2 - x)^n$$

Воспользуемся табличным разложением для $(a+b)^m$:

Antigtu.ru

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(12x^2-x)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{n}C_m^k 12^k x^{2k}x^{n-k}=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{n}C_m^k 12^k x^{k+n}$$

Положим $m = k + n$. Т.к. $k,n\in N$, то $0 \le k \le m$, $0 \le n \le m$. Из определения k следует, что $k \le n$. Теперь найдем все возможные комбинации k и n, чтобы $m = k + n$, где m – произвольное фиксированное число, $m\in N$. Т.к. $k \le n$, то $k\le(m/2)$, т.е. $k_{max}=[m/2]$.

Найдем коэффициент перед x^m: так как m раскладывается на сумму n и k несколькими способами, то $C_m=\sum\limits_{(n,k)}\frac{(-1)^m 12^k}{n}C_n^k$, где суммирование ведется по всем допустимым парам (n,k). Выразим индексы n и k через m: $n = m - k$

Итого:

$$C_m=\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^m}{m-k}12^k C_{m-k}^k$$

Тогда:

$$f(x)=-\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^m}{m-k}12^k C_{m-k}^k\right]x^m$$

Ответ: $\ln(1+x-6x^2)=-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left[\sum\limits_{k=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^m}{m-k}12^k C_{m-k}^k\right]x^m$

Antigtu.ru

Задача 15

Вычислить интеграл с точностью до 0,001:

$$I = \int_0^{0,5} \sin(4x^2)dx$$

Разложим подынтегральное выражение в ряд Тейлора по x:

$$\int_0^{0,5} \sin(4x^2)dx = \int_0^{0,5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(4x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]dx$$

Так как интеграл суммы равен сумме интегралов, то возьмем приведенный выше интеграл почленно. Результат будет выглядеть следующим образом:

$$\int_0^{0,5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(4x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{2^{4n+2}x^{4n+3}}{4n+3}\right]_0^{0,5} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{2(4n+3)}\right]}_{a_n}$$

У нас получился знакопеременный ряд. Чтобы вычислить интеграл с заданной точностью, достаточно найти сумму этого ряда до члена, по модулю меньшего, чем 0,001. Таким образом, нам нужно найти N, удовлетворяющее следующему неравенству:

$$\left|\frac{(-1)^N}{(2N+1)!}\cdot\frac{1}{2(4N+3)}\right| < 0,001$$

Antigtu.ru

Искать N будем следующим образом:

$$|a_1| \approx 0{,}012 > 0{,}001$$

$$|a_2| \approx 0{,}00038 < 0{,}001 \Rightarrow N = 2$$

Тогда:

$$I \approx \sum_{n=0}^{2}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{2(4n+3)}\right] \approx 0{,}155$$

Ответ: $I = 0{,}155 \pm 0{,}001$

Antigtu.ru