Лекция 5

План лекции

1. Отношения порядка

Примеры отношений порядка

На практике часто приходится сталкиваться с отношениями, которые определяют некоторый порядок расположения элементов множества.

1. Мы отличаем понятие «раньше» и «позже» в случаях, когда элементами множества являются состояния динамической системы $\left(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n\right)$, где

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n .$$

$$R_1 = \left\{ \left(t_i, t_j\right) \middle| t_i < t_j \text{ при } i < j \right\}$$

$$R_2 = \left\{ \left(t_j, t_i\right) \middle| t_j > t_i \text{ при } j > i \right\}$$

2. Мы также отличаем понятия «больше» или «меньше» и пользуемся при этом символами > или <, если элементы множества являются числами: (1,2,...5), где 1<2<...<5. В общем случае

$$A = \left\{ a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n \right\},$$

где $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_i < \ldots < a_j < \ldots < a_n$.

Символами «>» или «<» пользуются для сравнения чисел.

Отношение R в виде предиката, заданное на $A \times A$.

$$R_1 = \left\{ \left(a_i, a_j\right) \middle| a_i < a_j \text{ при } i < j \right\}$$

$$R_2 = \left\{ \left(a_j, a_i\right) \middle| a_j > a_i \text{ при } j > i \right\}$$

3. Мы отличаем понятия множества и подмножества, пользуясь символами $\subseteq$ или $\subset$. Во всех случаях можно расположить элементы множества A или группы элементов в некоторое порядке или, другими словами, ввести отношение порядка на множестве A.

$$A = \left\{A_0, A_1, ..., A_i, ..., A_j, ..., A_n\right\}.$$

где $A_0 \subseteq A_1 \subseteq ... \subseteq A_i \subseteq ... \subseteq A_j \subseteq ... \subseteq A_n$ или

$A_0 \subset A_1 \subset ... \subset A_i \subset ... \subset A_j \subset ... \subset A_n$.

Отношение R в виде предиката, заданное на $A \times A$.

$$R_1 = \left\{\left(A_i, A_j\right) \middle| A_i \subseteq A_j \ при\ i < j\right\}$$

$$R_2 = \left\{\left(A_i, A_j\right) \middle| A_i \subset A_j \ при\ i < j\right\}$$

Во всех случаях можно расположить элементы множества в некотором порядке или, другими словами, ввести отношение порядка на множестве.

Определения отношений порядка

Отношения порядка на множестве *A* подразделяют на:

- отношения строгого порядка;
- отношения нестрогого порядка.

Определение. Отношение R называется **отношением строгого порядка** на множестве A, если оно обладает свойствами:

- *антирефлексивности*, т. е. если xRy то $x \neq y$.
- *антисимметричности*, т. е., если xRy и yRx, то $x = y$.
- *транзитивности*, т. е., если xRy и yRz, то xRz.

Определение. Отношение R называется **отношением нестрогого порядка** на множестве A, если оно обладает свойствами:

- *рефлексивности*, т. е., xRx.
- *антисимметричности*, т. е., если xRy и yRx, то $x = y$
- *транзитивности*, т. е., если xRy и yRz, то xRz.

Терминология и обозначения

1.**Отношения нестрогого порядка** обозначают символом «$\le$ » по аналогии с отношением «меньше либо равно» на множестве действительных чисел. При этом, если $a \le b$, то говорят, что элемент *a* не превосходит *b* или *a* подчинен *b* .

2. **Отношения строгого порядка**. Если установлено отношения строгого порядка между элементами a и b, то пишут $a < b$ и говорят, что *a* меньше *b* или что *a* строго подчинен *b*.

Общий случай отношений. Иногда, чтобы отличить отношение порядка на некотором множестве от отношения порядка «$\le$» или «<» на множестве действительных чисел, используют специальные символы «$\preceq$» или «$\prec$».

Пример. Отношение порядка в R^n

1. Отношения чисел «≤ » «≥ » задают нестрогий порядок.

$(a1,...,ai-1,ai\ ,ai+1,...,an) \le (b1,...,bi-1,bi\ ,bi+1,...,bn)$ если

$a1 \le b1,..., ai-1 \le bi-1, ai \le bi\ , ai+1 \le bi+1,..., an \le bn$

2. Отношения чисел «< » «> » задают строгий порядок.

$(a1,...,ai-1,ai\ ,ai+1,...,an) < (b1,...,bi-1,bi\ ,bi+1,...,bn\ )$ если

$a1 < b1,...,ai-1 < bi-1,ai < bi\ ,ai+1 < bi+1,...,an < bn$

Однако для установления строгого порядка достаточно, чтобы условия $ai < bi$ было выполнено хотя бы по одной координате, т. е.

$(a1,...,ai-1,ai\ ,ai+1,...,an) < (b1,...,bi-1,bi\ ,bi+1,...,bn\ )$ если

$a1 \le b1,..., ai-1 \le bi-1, ai < bi\ , ai+1 \le bi+1,..., an \le bn$

(5, 1, –3) < (5, 2, –3); (5, 3, –3) и (5, 0, 0) – не сравнимы.

Виды отношений порядка:

1. Строгий полный порядок

Отношение строгого порядка задано **на всех** элементах упорядоченного множества.

2. Строгий частичный порядок

Отношение строгого порядка задано **не на всех** элементах упорядоченного множества.

3. Нестрогий полный порядок

Отношение нестрогого порядка задано **на всех** элементах упорядоченного множества.

4. Нестрогий частичный порядок

Отношение нестрогого порядка задано **не на всех** элементах упорядоченного множества.

Основные понятия об упорядоченных множествах

Упорядоченные множества образуют один из фундаментальных типов математических структур.

Определение. *Упорядоченным множеством* называется непустое множество X вместе с заданным на нем бинарным нестрогим «$\le$» *отношением порядка*, которое по определению:

1) рефлексивно: $a \le a$ *;*

2) антисимметрично: $a \le b \le a \Rightarrow a = b$ (для любых a, b, X).

3) транзитивно: $a \le b \le c \Rightarrow a \le c$ *;*

или строгим «<» *отношением порядка*, которое по определению:
1) антирефлексивно: $a < b \Rightarrow a \neq b$;
2) антисимметрично: $a < b \wedge b < a \Rightarrow a = b$
3) транзитивно: $a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq c$;

Линейно упорядоченные множества

Определение сравнимости. Элементы a и b упорядоченного множества называются *сравнимыми*, если $a < b$, $a = b$ или $a > b$. Знаки $<$, $=$ и $>$ имеют обычный смысл.
Определение (через сравнимость). Упорядоченное множество X называется *линейно упорядоченным*, или *цепью*, если любые два его элемента сравнимы.

Определение (через отношение линейного порядка).
Упорядоченное множество X называется *линейно упорядоченным*, или *цепью*, если на нем задано отношение линейного порядка.
Определение. Бинарное отношение R на множестве X называется *отношением линейного порядка*, если для любых $a \in X$ и $b \in X$ (для любых двух элементов множества X) либо aRb, либо bRa.
Иными словами, отношение порядка R на множестве X называется линейным, если любые два элемента этого множества находятся в отношении R.

Пример цепи. Цепь – это множество всех действительных чисел с обычным порядком.

Заметим, что антиподами цепей служат антицепи.

Определение
Антицепь – упорядоченное множество, в котором никакие два различных элемента не являются сравнимыми.

Свойства линейно упорядоченных множеств

1. **Покрытие**
Пусть X - произвольная цепь. Если $a < b$ в X и не существует элемента $c \in X$ с условием $a < c < b$ (лежащего между a и b), то соотношение $a < b$ называется *покрытием.*

2. **Взаимное положение элементов**
Элемент a *называется предыдущим* для b.
Элемент b называется *последующим* за a.
Элемент цепи, у которого нет предыдущего элемента, называется *предельным элементом.*

3. **Плотная цепь**
Цепь называется *плотной*, если в ней нет покрытий; в плотных цепях между любыми элементами $a < b$ лежит бесконечно много элементов.

4. **Плотная подцепь**
Подцепь A цепи X называется *плотной в* X, если между любыми элементами $a < b$ из X обязательно найдется элемент из A.

5. **Полная сверху цепь**
Цепь называется *полной сверху*, если всякое ее непустое подмножество имеет sup.

6. **Полная снизу цепь**
Цепь называется *полной снизу*, если всякое ее непустое подмножество имеет inf.

7. **Полная цепь**
Цепь называется *полной*, если она полная сверху и снизу одновременно.

Вполне упорядоченное множество

Важнейший класс цепей образуют вполне упорядоченные множества

Определение. Цепь называется *вполне упорядоченным множеством,* если любое ее непустое подмножество обладает наименьшим элементом.

Пример. Цепь N всех натуральных чисел и конечные цепи дают примеры вполне упорядоченных множеств.

Пример. Любое непустое подмножество вполне упорядоченного множества вполне упорядочено.

Частично упорядоченное множество

Определение (через отношение частичного порядка).
Упорядоченное множество X называется *частично упорядоченным,* если на нем задано отношение частичного порядка.

Определение. Бинарное отношение R на множестве X называют отношением ***частичного порядка***, если для некоторых $a \in X$, $b \in X$ не имеет места ни aRb, ни bRa.

Если отношение R **на** X **есть отношение** *нестрогого частичного порядка*, то оно
рефлексивно - $\forall a\left(aRa\right)$,
антисимметрично - $\forall a,b\left(aRb\right)\wedge\left(bRa\right)\Rightarrow a=b$,
транзитивно - $\forall a,b,c\left(aRb\right)\wedge\left(bRc\right)\Rightarrow aRc$.

Если отношение R **на** X **есть отношение** *строгого частичного порядка*, то оно
антирефлексивно - $\forall a,b\left(aRb\right)\Rightarrow a\neq b$,
антисимметрично - $\forall a,b\left(aRb\right)\wedge\left(bRa\right)\Rightarrow a=b$,
транзитивно $\forall a,b,c\left(aRb\right)\wedge\left(bRc\right)\Rightarrow aRc$**.**

Пример 1. Пусть задано:

1. Множество Т положительных делителей числа 30.
$$T=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}.$$
2. Отношение «≤», согласно которого сравнимы *m* и *n*: *m* ≤ *n* *при условии, что m* делит *n* нацело.

Пусть *n*=15 и *m*=5. Тогда n и m – сравнимы, поскольку 5 делит 15 нацело.
Пусть *n*=6 и *m*=5. Тогда *n* и *m* – несравнимы, поскольку 5 не делит 6 нацело.

Вывод

1. Заданное отношение порядка на множестве Т является отношением частичного порядка.
2. Множество Т является частично упрядоченным на заданном отношении.

Разбиение частично упорядоченного множества на цепи

Пусть имеется некоторое множество A. Говорят, что множество A *разбито* на подмножества A_1, A_2, $A_3,\ldots A_m$, если:

1. $A_i\neq\varnothing,\quad\left(i=1,2,...,m\right)$;
2. $A_i\cap A_j=\varnothing$, если $i\neq j$ для всех $i,j\in\{1,2,3,...,m\}$;
3. $A=\bigcup_{i=1}^{m}A_i$

Пусть A есть частично упорядоченное множество. Разбиение множества A на цепи называется *наименьшим*, если оно имеет наименьшее число элементов m по сравнению с другими разбиениями A на цепи. Такое разбиение также называется *минимальным цепным разбиением (МЦР)* множества A.

Определение наибольшего элемента множества

Наибольшим элементом линейно упорядоченного множества X относительно строгого «$<$» или нестрогого «$\leq$» упорядочения будем называть такой элемент $a \in X$, что для любого $x \in X$ верно $x < a$ или $x \leq a$.

Теорема о единственности наибольшего элемента.

Если существует наибольший элемент линейно упорядоченного множества, то он является единственным.

Доказательство. Предположим, что существуют два наибольших элемента a и a'. Тогда для всякого x выполняется $x \leq a$ и $x \leq a'$. В частности, $a \leq a'$ или $a' \leq a$.

Поскольку все отношения порядка обладают свойством антисимметричности, то из $(aRa') \wedge (a'Ra)$ следует $a = a'$.

Из $a = a'$ следует, что если в линейно упорядоченном множестве существует наибольший элемент, то он единственен. Поэтому, говоря о наибольшем элементе множества, имеют в виду **вполне определенный** его элемент.

Пример. Необходимо найти наибольший элемент линейно упорядоченного множества $X = \{1, 2, 15, 18\}$, заданного на отношении нестрогого порядка $a \leq b$.

Согласно определению:

1. **Все** элементы данного множества **должны быть меньше** или равны наибольшему.
2. Наибольший элемент – **единственный**.

Сравним элементы множества X:

1)$1 \geq 1$, $1 \ngeq 2$, $1 \ngeq 15$, $1 \ngeq 18$.

2) $2 \geq 1$, $2 \geq 2$, $2 \ngeq 15$, $2 \ngeq 18$.

3) $15 \geq 1$, $15 \geq 2$, $15 \geq 15$, $15 \ngeq 18$.

4) $18 \geq 1$, $18 \geq 2$, $18 \geq 15$, $18 \geq 18$.

Необходимым условиям соответствует только элемент 18.

Определение максимального элемента множества

Максимальным элементом частично упорядоченного множества X относительно строгого «<» или нестрогого «$\leq$» называют такой его элемент $a \in X$, что имеет место одна из двух ситуаций:

- либо $x < a$ и $x \leq a$,
- либо a и x – несравнимы.

Замечание

На одном и том же множестве могут быть заданы **различные отношения** порядка.

По одному из них множество может быть линейно упорядочено, а по другому – частично упорядочено.

Тогда по первому отношению будем говорить **о наибольшем элементе**, а по второму – **о максимальном**.

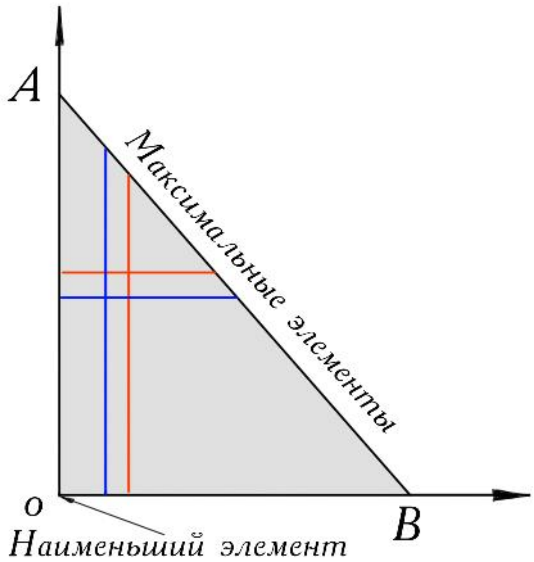
Определение наименьшего и минимального элементов множества

Наименьшим элементом линейно упорядоченного множества X относительно строгого «<» или нестрогого «$\leq$» упорядочения будем называть такой элемент $a \in X$, что для всех $x \in X$ верно $a < x$ или $a \leq x$.

Минимальным элементом частично упорядоченного множества X относительно строгого «<» или нестрогого «$\leq$» упорядочения называют такой его элемент $a \in X$, что имеет место одна из двух ситуаций:
- либо $a < x$ и $a \leq x$,
- либо a и x – несравнимы.

Замечание. Если на множестве есть наименьший элемент, то он является единственным минимальным. Аналогично, если на множестве есть наибольший элемент, то он является единственным максимальным.

Пример. Рассмотрим множество X точек треугольника OAB со следующим отношением порядка: $(a,b) \leq (c,d)$ если и только если $a \leq c$ и $b \leq d$.



Точка $(0,0)$ является наименьшим элементом данного множества.

Минимальный элемент множества X – единственный и совпадает с наименьшим элементом.

Максимальными элементами множества X являются все точки, лежащие на стороне AB треугольника OAB.

Наибольший элемент множества X отсутствует.

Определение верхней и нижней граней множества

Определение верхней грани

Если A есть частично упорядоченное множество и $B \subseteq A$, то элемент $a \in A$ называется **верхней гранью** множества B, если для любого $b \in B$ имеет место $b \le a$.

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$**,** $B = \{1,2,3,4,5\}$. Верхние грани: 5,6,7,8,9

Определение нижней грани

Если A есть частично упорядоченное множество и $B \subseteq A$, то элемент $a \in A$ называется нижней гранью множества B, если для любого $b \in B$ имеет место $a \le b$.

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$**,** $B = \{5,6,7,8,9\}$**.** Нижние грани: 1,2,3,4,5

Определение точной верхней грани множества

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$.

Элемент $a \in A$ называется **наименьшей верхней гранью**, если $a = \min\limits_i a_i$, где a_i – произвольная верхняя грань множества *B*. $a = \min\{5,6,7,8,9\} = 5$

Наименьший элемент a множества всех верхних граней называется точной верхней гранью или *супремумом* и обозначается $\sup B$.
$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$. $\sup B = 5$

Иными словами, наименьшая верхняя грань есть верхняя
грань, являющаяся нижней гранью множества всех верхних граней.

Определение точной нижней грани множества

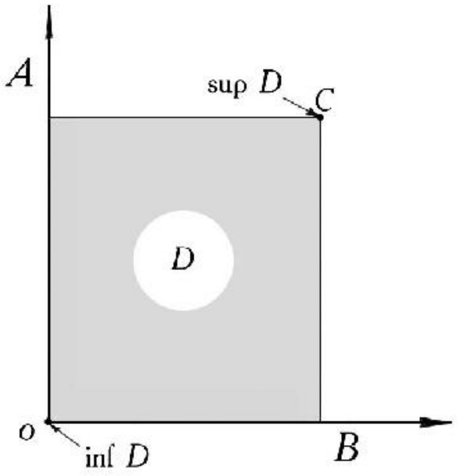
$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{5,6,7,8,9\}$.

Элемент $a \in A$ называется **наибольшей нижней гранью,** если $a = \max\limits_i a_i$, где a_i – произвольная нижняя грань множества *B*.
$a = \max\{1,2,3,4,5\}$ =5

Наибольший элемент множества всех нижних граней называется точной нижней гранью или *инфимумом* и обозначается $\inf B$.
$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{5,6,7,8,9\}$. $\inf B = 5$.

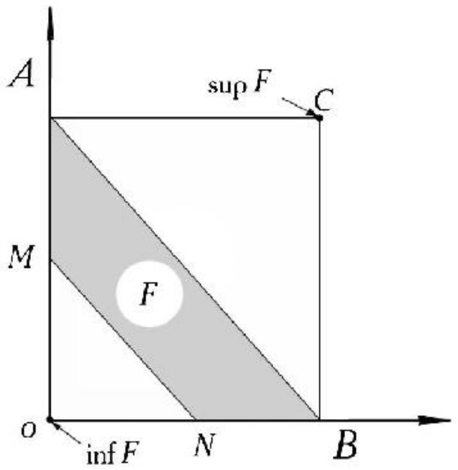
Иными словами, наибольшая нижняя грань есть нижняя грань, являющаяся верхней гранью множества всех нижних граней.

Пример. Рассмотрим множество D точек прямоугольника $OACB$ с заданным отношением порядка:
$(a,b) \le (c,d)$ если и только если $a \le c$ и $b \le d$.



Точка O является точной нижней гранью $\inf D \in D$.
Точка C является точной верхней гранью $\sup D \in D$.
Из рисунка видно, что обе точки принадлежат множеству D.

Пример. Рассмотрим множество F точек трапеции $ABNM$ с заданным отношением порядка: $(a,b) \le (c,d)$ если и только если $a \le c$ и $b \le d$.



Пример показывает, что существует точная верхняя грань $\sup F$ и точная нижняя грань $\inf F$.
Однако ни одна из граней не принадлежит множеству F.

Диаграмма Хассе

Для графического представления упорядоченного множества R используют *диаграмму Хассе*. Эта диаграмма строится следующим образом.

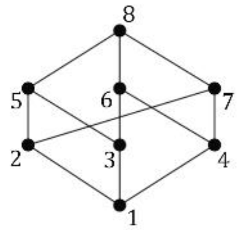
Каждому элементу множества X ставится в соответствие точка (кружок) на плоскости, причем, если aRb, точку, соответствующую элементу a, располагают ниже точки, соответствующей элементу b. Точки, $a \in X$, $b \in X$

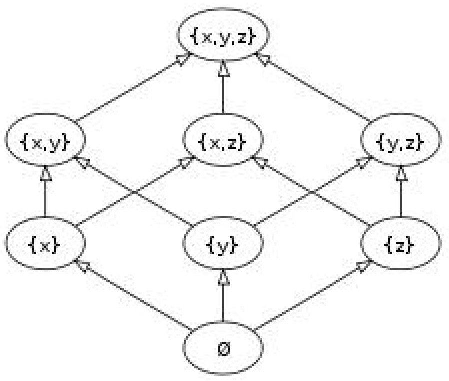
соединяют линией (ребром), если aRb и не существует элемента $c \in X$ такого, что aRc и cRb.

Пример. Пусть дано множество $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, на котором задано отношение

$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(\mathbf{1,5}),(\mathbf{1,6}),(\mathbf{1,7}),(\mathbf{1,8}),$
$(2,5),(2,7),(\mathbf{2,8}),(3,5),(3,6),(\mathbf{3,8}),(4,6),(4,7),(\mathbf{4,8}),$
$(5,8),(6,8),(7,8)\}$

Диаграмма Хассе данного отношения представлена на рисунке.





Пример.

Пусть $C = \{x, y, z\}$, а X – **булеан** множества C:

$X = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}, \{z, y, z\}\}$

Определим отношение R на X посредством $(T,V) \in R$, если $T \subseteq V$.

Например, $(\{y\}, \{x, y\}) \in R$, поскольку $\{y\} \subseteq \{x, y\}$. Однако $(\{y, z\}, \{z\}) \notin R$, поскольку $\{y, z\} \not\subset \{z\}$.

Построив отношение R, можно легко проверить, что (X, R) – ЧУ– множество.

Пример.

На рисунке представлен частичный порядок, порожденный бинарным отношением

$$R = \{(a_1, a_2),(a_1, a_3),(a_1, a_5),(a_4, a_2),(a_5, a_2)\}.$$

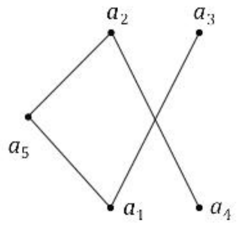


Диаграмма Хассе помогает лучше понимать взаимосвязь элементов, принадлежащих одному и тому же упорядоченному множеству (например, принадлежность одной и той же цепи или одной и той же антицепи).