ЛЕКЦІЯ 11
Графи й відношення, графи й відображення, числа графа

План лекції

1. **Графи й бінарні відношення**
2. Зв'язок між операціями над графами й операціями над відношеннями
3. **Багатозначні відображення**.
4. Відображення множини вершин
5. Визначення графа і його властивостей з використанням відображень
6. Досяжні й контрдосяжні вершини
7. Матриця досяжності.
8. Відображення й досяжність
9. Визначення множини досяжності через відображення
10. Побудова матриці досяжності
11. Матриця контрдосяжності
12. Співвідношення між матрицями досяжності й контрдосяжності
13. Числа, що характеризують граф
13.1. Цикломатичне число
12.1.1. Цикли в графі
13.1.2.Вектор-цикл, незалежні цикли
12.1.3. Властивості циклів
13.1.4. Визначення цикломатичного числа
14. Число внутрішньої стійкості
15. Число зовнішньої стійкості

Графи й бінарні відношення

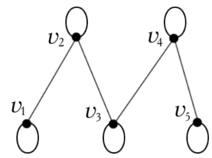
Відношенню R, заданому на множині V взаємно однозначно відповідає орієнтований граф $G(R)$ без кратних ребер з множиною вершин V, у якому ребро (v_i, v_j) існує тільки тоді, коли виконано $v_i R v_j$.

Представимо на графах деякі бінарні відношення.

1. **Рефлексивність.** Відношення R на множині V ***рефлексивне,*** якщо для кожного елемента $v \in V$ справедливе $(v, v) \in R$. На графі це зображається петлею, а матриця суміжності графа з рефлексивними відношеннями містить одиниці на головній діагоналі.

Іншими словами, якщо відношення R рефлексивне, то граф $G(R)$ без кратних ребер має петлі у всіх вершинах.

Приклад. На малюнку показаний приклад графа рефлексивного відношення.



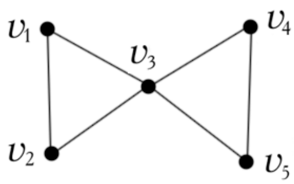
Головна діагональ матриці суміжності $G(R)$ складається з одиниць.

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} \end{Vmatrix}$$

2. **Антирефлексивність.** Якщо відношення R на множині V ***антирефлексивне***, то для всіх елементів v множини V справедливе $(v,v) \notin R$.

Якщо R антирефлексивне, то граф $G(R)$ без кратних ребер не має петель.

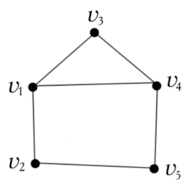
Приклад. На малюнку показаний граф антирефлексивного відношення



$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$$

Головна діагональ матриці суміжності $G(R)$ складається з нулів.

3. **Симетричність.** Відношення R на V називають ***симетричним***, якщо з $(v_i, v_j) \in R$ випливає $(v_j, v_i) \in R$ при $v_i \neq v_j$. Матриця суміжності симетричного відношення симетрична щодо головної діагоналі.



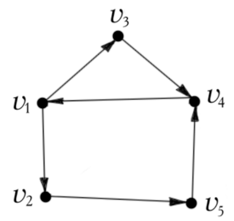
$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\left(v_1, v_2\right) \in R \to \left(v_2, v_1\right) \in R,\ \left(v_1, v_3\right) \in R \to \left(v_3, v_1\right) \in R,$$
$$\left(v_1, v_4\right) \in R \to \left(v_4, v_1\right) \in R,\ \left(v_2, v_5\right) \in R \to \left(v_5, v_2\right) \in R,$$
$$\left(v_3, v_4\right) \in R \to \left(v_4, v_3\right) \in R,\ \left(v_4, v_5\right) \in R \to \left(v_5, v_4\right) \in R.$$

4. **Антисиметричність.** Відношення R на V називають ***антисиметричним***, якщо з $\left(v_i, v_j\right) \in R$ випливає $\left(v_j, v_i\right) \notin R$ при $v_i \neq v_j$. Матриця суміжності антисиметричного відношення несиметрична щодо головної діагоналі. Антисиметричне відношення завжди представлене орграфом з дугами без повторень.

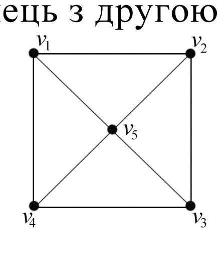
$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\left(v_1, v_2\right) \in R \to \left(v_2, v_1\right) \notin R,\ \left(v_1, v_3\right) \in R \to \left(v_3, v_1\right) \notin R,$$
$$\left(v_4, v_1\right) \in R \to \left(v_1, v_4\right) \notin R,\ \left(v_2, v_5\right) \in R \to \left(v_5, v_2\right) \notin R,$$
$$\left(v_3, v_4\right) \in R \to \left(v_4, v_3\right) \notin R,\ \left(v_5, v_4\right) \in R \to \left(v_4, v_5\right) \notin R.$$



5. **Транзитивність.** Відношення R на множині V називають ***транзитивним***, якщо з $\left(v_i, v_j\right) \in R$, $\left(v_j, v_k\right) \in R$ випливає $\left(v_i, v_k\right) \in R$ при $v_i, v_j, v_k \in V$ і $v_i \neq v_j, v_j \neq v_k, v_i \neq v_k$. У графі, що задає транзитивне відношення для всякої пари дуг, таких, що кінець першої дуги збігається з початком другий, існує транзитивно замикаюча дуга, що має спільний початок з першою і спільний кінець з другою.

$$\mathbf{C} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \end{array}$$

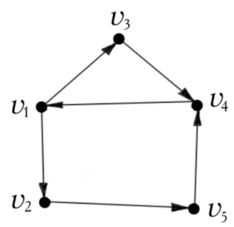


$$(v_1, v_5) \in R, (v_5, v_2) \in R \to (v_1, v_2) \in R;$$
$$(v_1, v_5) \in R, (v_5, v_4) \in R \to (v_1, v_4) \in R;$$
$$(v_3, v_5) \in R, (v_5, v_4) \in R \to (v_3, v_4) \in R; (v_2, v_5) \in R, (v_5, v_3) \in R \to (v_2, v_3) \in R \ .$$
$$\dots$$
$$(v_1, v_2) \in R, (v_2, v_5) \in R \to (v_1, v_5) \in R \ .$$
$$(v_5, v_1) \in R, (v_1, v_2) \in R \to (v_5, v_2) \in R \ .$$
$$\dots$$

Відношення R на множині вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ транзитивне, оскільки для довільного ребра в графі виконується умова транзитивності.

6. **Антитранзитивність.** Відношення R на множині V називають ***антитранзитивним***, якщо з $(v_i, v_j) \in R$, $(v_j, v_k) \in R$ випливає $(v_i, v_k) \notin R$ при $v_i, v_j, v_k \in V$ і $v_i \neq v_j, v_j \neq v_k, v_i \neq v_k$. У графі, що задає антитранзитивне відношення для всякої пари дуг, таких, що кінець першої дуги збігається з початком другої, не існує транзитивно замикаючої дуги, яка має спільний початок з першою і спільний кінець з другою.

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$



$$(v_1, v_3) \in R, (v_3, v_4) \in R \to (v_1, v_4) \notin R;$$
$$(v_4, v_1) \in R, (v_1, v_3) \in R \to (v_4, v_3) \notin R;$$
$$(v_3, v_4) \in R, (v_4, v_1) \in R \to (v_3, v_1) \notin R;$$
$$(v_4, v_1) \in R, (v_1, v_2) \in R \to (v_4, v_2) \notin R;$$
$$(v_2, v_5) \in R, (v_5, v_4) \in R \to (v_2, v_4) \notin R;$$
$$(v_5, v_4) \in R, (v_4, v_1) \in R \to (v_5, v_1) \notin R;$$
$$(v_1, v_2) \in R, (v_2, v_5) \in R \to (v_1, v_5) \notin R$$

Відношення R на множині вершин $V=\{v_1,v_2,...,v_5\}$ антитранзитивне, оскільки для довільних пар ребер виконується умова антитранзитивності.

Зв'язок між операціями над графами і операціями над відношеннями

1. Нехай $\overline{R}$ – доповнення відношення R на V:

$$\overline{R}=U\setminus R,$$

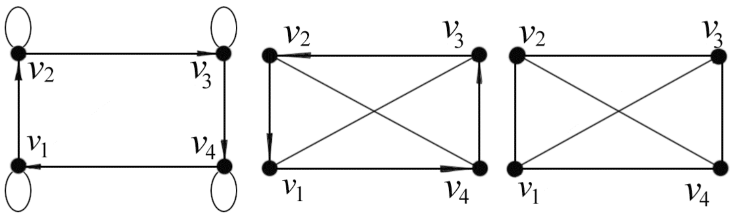
де U – універсальне (повне) відношення $U=V\times V$, тобто відношення, яке має місце між будь-якою парою елементів з V.

2. Граф $G(\overline{R})$ є доповненням графа $G(R)$ (до повного орграфа K з множиною вершин V і множиною ребер

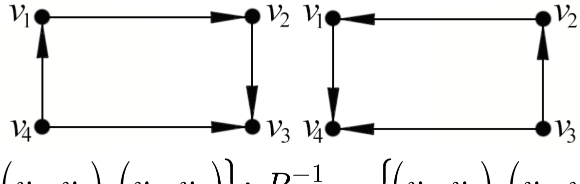
$$E(K)=V\times V).$$

Приклад. Нехай $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.

$$U=\{(v_1,v_1),(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_1,v_4),(v_2,v_1),(v_2,v_2),(v_2,v_3),(v_2,v_4),$$
$$(v_3,v_1),(v_3,v_2),(v_3,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_1),(v_4,v_2),(v_4,v_3),(v_4,v_4)\}$$
$$R=\{(v_1,v_1),(v_1,v_2),(v_2,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_1),(v_4,v_4)\}$$
$$\overline{R}=\{(v_1,v_3),(v_1,v_4),(v_2,v_1),(v_2,v_4),(v_3,v_1),(v_3,v_2),(v_4,v_2),(v_4,v_3)\}$$



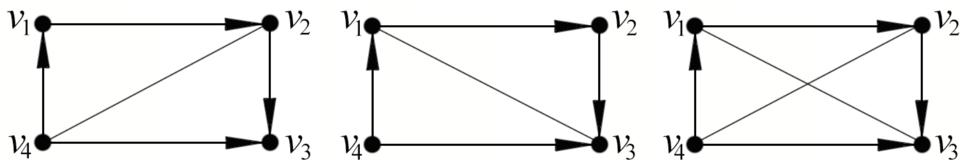
3. Граф зворотного відношення $G(R^{-1})$ відрізняється від графа $G(R)$ тим, що напрямки всіх ребер замінені на зворотні. R R^{-1}



$$R=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_4,v_1),(v_4,v_3)\};\ R^{-1}=\{(v_2,v_1),(v_3,v_2),(v_1,v_4),(v_3,v_4)\}$$

4. Граф об'єднання двох відносин, заданих на V, $G\left(R_1 \cup R_2\right)$ є графом об'єднання двох графів $G\left(R_1\right)$ і $G\left(R_2\right)$:

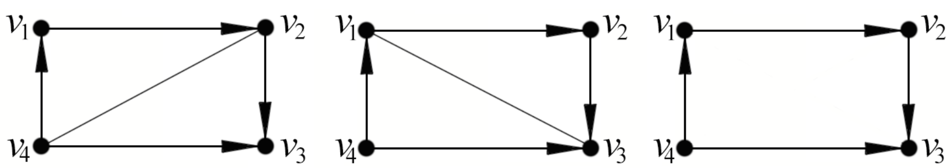
$$G\left(R_1 \cup R_2\right) = G\left(R_1\right) \cup G\left(R_2\right).$$



R_1 R_2 $R_1 \cup R_2$

5.Граф перетинання відносин $R_1 \cap R_2$ на V $G\left(R_1 \cap R_2\right)$ є графом перетинання двох графів $G\left(R_1\right)$ і $G\left(R_2\right)$:

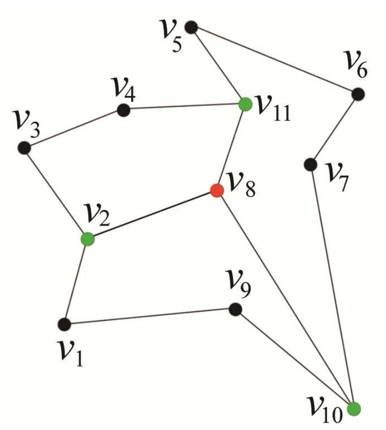
$$G\left(R_1 \cap R_2\right) = G\left(R_1\right) \cap G\left(R_2\right).$$



R_1 R_2 $R_1 \cap R_2$

Багатозначні відображення

Пряме відображення першого порядку вершини v_i – це множина таких вершин v_j графа $G\left(V, E\right)$, для яких існує дуга $\left(v_i, v_j\right)$, тобто



$$\Gamma^+\left(v_i\right) = \left\{v_j \middle| \left(v_i, v_j\right) \in E, i, j = 1,2,\ldots,n\right\},$$

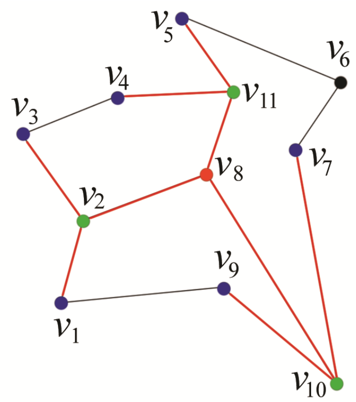
де $n = \left|V\right|$ – кількість вершин графа

$$i = 8 \quad v_i = v_8$$

$$\Gamma^+\left(v_8\right) = \left\{v_2, v_{11}, v_{10}\right\}$$

Пряме відображення другого порядку вершини v_i – це пряме відображення від прямого відображення першого порядку

$$\Gamma^{+2}(v_i) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+1}(v_i)\right).$$



$i = 8$, $v_i = v_8$

$\Gamma^{+}(v_8) = \{v_2, v_{11}, v_{10}\}$

$\Gamma^{+2}(v_8) = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_7, v_9\}$

Аналогічно можна записати відображення 3-го порядку

$$\Gamma^{+3}(v_i) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+2}(v_i)\right) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+}\left(\Gamma^{+1}(v_i)\right)\right),$$

Відображення для 4-го порядку

$$\Gamma^{+4}(v_i) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+3}(v_i)\right) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+}\left(\Gamma^{+}\left(\Gamma^{+1}(v_i)\right)\right)\right),$$

і т.д., для p-го порядку.

....

$$\Gamma^{+p}(v_i) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+(p-1)}(v_i)\right)$$

Приклад. Знайдемо прямі багатозначні відображення для графа, показаного на малюнку:

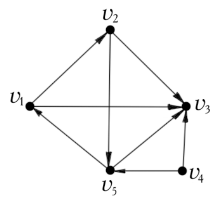
$\Gamma^{+1}(v_1) = \{v_2, v_3\}$,

$\Gamma^{+2}(v_1) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+}(v_1)\right) = \Gamma^{+}(v_2, v_3) = \{v_3, v_5\}$,

$$\Gamma^{+3}\left(v_1\right) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+2}\left(v_1\right)\right) = \Gamma^{+}\left(v_3, v_5\right) = \left\{v_3, v_1\right\},$$

$$\Gamma^{+4}\left(v_1\right) = \Gamma^{+}\left(\Gamma^{+3}\left(v_1\right)\right) = \Gamma^{+}\left(v_3, v_1\right) = \left\{v_2, v_3\right\}.$$

Далі легко помітити, що



$$\Gamma^{+1}\left(v_1\right) = \Gamma^{+4}\left(v_1\right) = \Gamma^{+7}\left(v_1\right)....$$

$$\Gamma^{+2}\left(v_1\right) = \Gamma^{+5}\left(v_1\right) = \Gamma^{+8}\left(v_1\right)....$$

$$\Gamma^{+3}\left(v_1\right) = \Gamma^{+6}\left(v_1\right) = \Gamma^{+9}\left(v_1\right)....$$

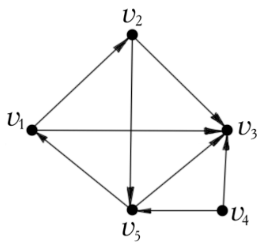
Аналогічно знаходимо відображення для інших вершин графа.

Зворотне відображення першого порядку вершини v_i – це множина таких вершин v_j графа $G\left(V, E\right)$, для яких існує дуга $\left(v_j, v_i\right)$, тобто

$$\Gamma^{-}\left(v_i\right) = \left\{v_j \middle| \left(v_j, v_i\right) \in E, i, j = 1,2,...,n\right\},$$

де $n = \left|V\right|$ – кількість вершин графа

Зворотне відображення другого й наступних порядків вершини v_i – це зворотне відображення від зворотного відображення попереднього порядку



$$\Gamma^{-2}\left(v_i\right) = \Gamma^{-}\left(\Gamma^{-1}\left(v_i\right)\right).$$

$$\Gamma^{-3}\left(v_i\right) = \Gamma^{-}\left(\Gamma^{-2}\left(v_i\right)\right) = \Gamma^{-}\left(\Gamma^{-}\left(\Gamma^{-1}\left(v_i\right)\right)\right)$$

....

$$\Gamma^{-p}\left(v_i\right) = \Gamma^{-}\left(\Gamma^{-(p-1)}\left(v_i\right)\right)$$

Приклад. Знайдемо зворотні багатозначні відображення для графа, показаного на рисунку :

$$\Gamma^{-}\left(v_1\right) = \left\{v_5\right\},$$

$$\Gamma^{-2}\left(v_1\right) = \Gamma^{-}\left(\Gamma^{-1}\left(v_1\right)\right) = \Gamma^{-}\left(v_5\right) = \left\{v_2, v_4\right\},$$

$$\Gamma^{-3}\left(v_1\right) = \Gamma^{-}\left(\Gamma^{-2}\left(v_1\right)\right) = \Gamma^{-}\left(v_2, v_4\right) = \left\{v_1\right\},$$

$\Gamma^{-4}\left(v_1\right) = \Gamma^{-}\left(\Gamma^{-3}\left(v_1\right)\right) = \Gamma^{-}\left(v_1\right) = \left\{v_5\right\}$ і т.д.

Відображення множини вершин

Якщо розглянуте раніше відображення застосовується одночасно до всіх вершин графа, то воно може бути отримане з виразу:

$$\Gamma^{+}\left(V\right)=\bigcup_{v\in V}\Gamma^{+}\left(v\right).$$

Якщо $V=\left\{V_1,V_2,\ldots,V_n\right\}$, то слушні співвідношення:

$$\Gamma^{+}\left(\bigcup_{i=1}^{n}V_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}\Gamma^{+}\left(V\right)_i$$

Визначення графа і його властивостей з використанням відображень

Граф. Говорять, що граф $G\left(V,\Gamma\right)$ заданий однозначно, якщо задані:

1. Непуста множина V.
2. Відображення $\Gamma : V \to V$.

Пари вершин v_i і v_j з'єднують ребром за умови, що $v_j\in\Gamma^{+}\left(v_i\right)$.

Підграф. Підграфом графа $G\left(V,\Gamma\right)$ називають граф виду $G\left(A,\Gamma_A\right)$, де $A\subset V$, а відображення Γ_A визначене в такий спосіб:

$$\Gamma_A^{+}\left(v\right)=\Gamma^{+}\left(v\right)\cap A,$$

Тобто, відображеня Γ_A включає тільки ті вершини, що входять в множину A

Компонента зв'язності графа

Компонента зв'язності – деяка множина вершин графа, у якій між довільними двома вершинами **існує шлях** з однієї в іншу, і не існує жодного шляху з вершини цієї множини у вершину не з цієї множини.

Компонента зв'язности – це граф, породжений деякою множиною C_v, де C_v – множина, що включає вершину v і усі ті вершини графа, які можуть бути з'єднані з нею ланцюгом.

Теорема про розбиття графа. Різні компоненти графа $G\left(V,\Gamma\right)$ утворюють розбиття множини V, тобто

1. $C_v\neq\varnothing$,
2. $v_i,v_j\in V, C_{v_i}\neq C_{v_j}\Rightarrow C_{v_i}\cap C_{v_j}=\varnothing$,
3. $\bigcup C_v=V$.

Теорема про зв'язний граф. Граф є зв'язним графом тоді й тільки тоді, коли він складається з одного компонента зв'язності.

Між будь-якою парою вершин зв'язного графа існує як мінімум один шлях.

Досяжні і контрдосяжні вершини

Визначення. Вершину w графа D (або орграфа) називають **досяжною** з вершини v, якщо $w = v$, або існує шлях з v у w (маршрут від v у w).

Визначення. Вершину w графа D (або орграфа) називають **контрдосяжною** з вершини v, якщо існує шлях з w у v (маршрут від w у v).

Матриця досяжності

Матрицею досяжності називається матриця $n \times n$ $R = \left(r_{ij}\right), i, j = 1, 2, \ldots, n$, де n – число вершин графа, а кожний елемент визначається в такий спосіб:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{якщо}\ \text{вершина}\ v_j\ \textit{досяжна}\ \text{з}\ v_i, \\ 0, & \textit{у}\ \ \text{проти}\textit{лежному}\ \ \textit{випадку}. \end{cases}$$

Множина досяжних вершин $R\left(v_i\right)$ графа G. Множина $R\left(v_i\right)$ вершин, досяжних із заданої вершини v_i, складається з таких елементів v_j, для яких елемент r_{ij} в матриці досяжності дорівнює 1.

Усі *діагональні елементи* r_{ii} в матриці R дорівнюють 1, оскільки кожна вершина досяжна з себе самої зі шляхом довжиною 0.

Відображення і досяжність

Пряме відображення 1-го порядку $\Gamma^{+1}\left(v_i\right)$ – це множина таких вершин v_j, які досяжні з v_i з використанням шляхів довжиною 1.

Пряме відображення 2-го порядку – це множина $\Gamma^{+}\left(\Gamma^{+1}\left(v_i\right)\right) = \Gamma^{+2}\left(v_i\right)$, яка складається з вершин, досяжних з v_i з використанням шляхів довжиною 2.

Пряме відображення p-го порядку – це множина $\Gamma^{+p}\left(v_i\right)$, яка складається з вершин, досяжних із v_i за допомогою шляхів довжини p.

Визначення множини досяжності через відображення

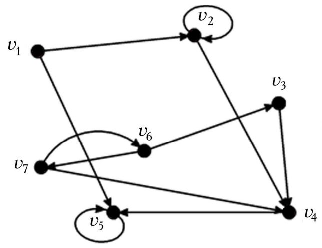
Будь-яка вершина графа G, яка досяжна з v_i, повинна бути досяжна з використанням шляху (або шляхів) довжиною 0 або 1, або 2, ..., або p. Тоді множина вершин, досяжних з вершини v_i, можна представити у вигляді

$$R\left(v_i\right) = \left\{v_i\right\} \cup \Gamma^{+1}\left(v_i\right) \cup \Gamma^{+2}\left(v_i\right) \cup \ldots \cup \Gamma^{+p}\left(v_i\right).$$

Побудова матриці досяжності

Будуємо матрицю по рядках.

1. Знаходимо досяжні множини $R(v_i)$ для всіх вершин $v_i \in V$.
2. Для $i-$го рядка $r_{ij} = 1$, якщо $v_j \in R(v_i)$, а якщо ж $v_j \notin R(v_i)$, то $r_{ij} = 0$.



а

$$\mathbf{C}=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0&1&0&0&1&0&0 \\ \hline 0&1&0&1&0&0&0 \\ \hline 0&0&0&1&0&0&0 \\ \hline 0&0&0&0&1&0&0 \\ \hline 0&0&0&0&1&0&0 \\ \hline 0&0&1&0&0&0&1 \\ \hline 0&0&0&1&0&1&0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

б

$$\mathbf{R}=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1&1&0&1&1&0&0 \\ \hline 0&1&0&1&1&0&0 \\ \hline 0&0&1&1&1&0&0 \\ \hline 0&0&0&1&1&0&0 \\ \hline 0&0&0&0&1&0&0 \\ \hline 0&0&1&1&1&1&1 \\ \hline 0&0&1&1&1&1&1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

в

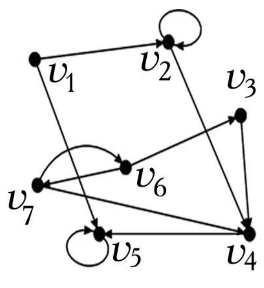
$$\mathbf{Q}=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1&0&0&0&0&0&0 \\ \hline 1&1&0&0&0&0&0 \\ \hline 0&0&1&0&0&1&1 \\ \hline 1&1&1&1&0&1&1 \\ \hline 1&1&1&1&1&1&1 \\ \hline 0&0&0&0&0&1&1 \\ \hline 0&0&0&0&0&1&1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

г

Рисунок. Досяжність у графі: а – граф; б – матриця суміжності; в – матриця досяжності; г – матриця контрдосяжності.

Множини досяжностей знаходять у такий спосіб:

$$R(v_1) = \{v_1\} \cup \Gamma^{+1}(v_1) \cup \Gamma^{+2}(v_1) \cup \Gamma^{+3}(v_1) =$$
$$= \{v_1\} \cup \{v_2, v_5\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$$



$$R(v_2) = \{v_2\} \cup \Gamma^{+1}(v_2) \cup \Gamma^{+2}(v_2) =$$
$$= \{v_2\} \cup \{v_2, v_4\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} = \{v_2, v_4, v_5\}$$

$$R(v_3) = \{v_3\} \cup \Gamma^{+1}(v_3) \cup \Gamma^{+2}(v_3) \cup \Gamma^{+3}(v_3) =$$
$$= \{v_3\} \cup \{v_4\} \cup \{v_5\} \cup \{v_5\} = \{v_3, v_4, v_5\}$$

$$R(v_4) = \{v_2\} \cup \Gamma^{+1}(v_2) \cup \Gamma^{+2}(v_2) =$$
$$= \{v_4\} \cup \{v_5\} \cup \{v_5\} = \{v_4, v_5\}$$

$$R(v_5) = \{v_5\} \cup \Gamma^{+1}(v_5) = \{v_5\} \cup \{v_5\} = \{v_5\}$$

$$R(v_6) = \{v_6\} \cup \{v_3, v_7\} \cup \{v_4, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \cup \ldots$$
$$\cup \{v_4, v_5, v_6\} = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\},$$

$$R(v_7) = \{v_7\} \cup \{v_4, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}.$$

Матриця контрдосяжності

Матриця контрдосяжності – це матриця $n \times n$

$\mathbf{Q} = (q_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$, де n – число вершин графа, визначається в такий спосіб:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо з вершини } v_j \text{ може бути досягнута вершина } v_i, \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Контрдосяжною множиною $Q(v_i)$ називають множину вершин, з яких можна досягти вершину v_i. Контрдосяжну множину $Q(v_i)$ визначають з виразу:

$$Q(v_i) = \{v_i\} \cup \Gamma^{-1}(v_i) \cup \Gamma^{-2}(v_i) \cup \ldots \cup \Gamma^{-p}(v_i).$$

Співвідношення між матрицями досяжності і контрдосяжності

Визначення. Матриця контрдосяжності дорівнює транспонованій матриці досяжності $Q = R^T$.

Дане співвідношення походить з визначення матриць, оскільки стовпець v_i матриці Q збігається з рядком v_i матриці R.

Слід зазначити, що оскільки всі елементи матриць R і Q дорівнюють 1 або 0, те кожний рядок можна зберігати у двійковій формі, заощаджуючи витрати пам'яті комп’ютера. Матриці R і Q зручні для обробки на комп’ютері, тому що з обчислювальної точки зору основними операціями є швидкодіючі логічні операції.

Числа, що характеризують граф

Цикломатичне число

Цикломатичним числом графа $G = (V, E)$ називається число

$$m = N - n + p,$$

де $N = \left|E\right|$ – число ребер графа,

$n = \left|V\right|$ – число вершин графа,

p – число компонентів зв’язності графа.

Для зв'язного графа $m = N - n + 1$.

Теорема. Цикломатичне число графа дорівнює найбільшій кількості незалежних циклів.

Цикли в графі

Циклом називають шлях, у якім перша й остання вершини збігаються.

Довжина циклу – число складових його *ребер*.

Простий цикл – це цикл без повторюваних ребер. **Елементарний цикл –** це простий цикл без повторюваних вершин.

Наслідок

Петля – елементарний цикл.

Вектор-цикл, незалежні цикли

Поставимо у відповідність циклу μ графа G деякий вектор.

Для цього додамо кожному ребру графа довільну орієнтацію.

Якщо цикл μ проходить через ребро e_k, де $1 \le k \le N$, у напрямку його орієнтації r_k раз і в протилежному напрямку s_k раз, то вважаємо $c^k = r_k - s_k$.

Вектор $\mathbf{c} = \left(c^1, c^2, c^3, ..., c^k, ..., c^N\right)$ називають вектором-**циклом**, відповідним до циклу μ.

Цикли μ_1 й μ_2 називають **незалежними**, якщо відповідні їм вектори $\mathbf{c}_1 = \left(c_1^1, c_1^2, c_1^3, ..., c_1^k, ..., c_1^N\right)$ і $\mathbf{c}_2 = \left(c_2^1, c_2^2, c_2^3, ..., c_2^k, ..., c_2^N\right)$ лінійно незалежні.

Властивості циклів

1. Зв'язний граф G не має циклів тоді й тільки тоді, коли цикломатичне число $m = 0$. Такий граф є деревом.

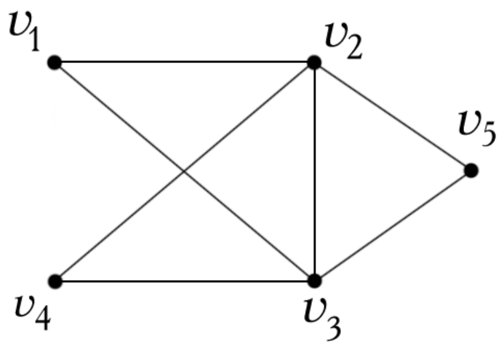
2. Зв'язний граф G має єдиний цикл тоді й тільки тоді, коли цикломатичне число $m = 1$.

Визначення цикломатичного числа

Цикломатичне число зв'язного графа можна визначити як число ребер, яке потрібно вилучити, щоб граф став деревом.

Визначення лінійної незалежності векторів-циклів.

З курсу лінійної алгебри випливає, що вектори $_1 \quad \left({}^1_1, {}^2_1, {}^3_1, \ldots, {}_1, \ldots, {}_1 \right)$



У розглянутому графі число вершин $n=5$, число ребер $N=7$.
Оскільки граф є зв'язним, то число компонентів зв'язності $p=1$.

Таким чином, $m=N-n+p=7-5+1=3$.

Число внутрішньої стійкості

Нехай дано граф $G(V,\Gamma)$. Множину $S\subset V$ називають внутрішньо стійким, якщо ніякі дві вершини, що входять в S, не є суміжними. Іншими словами сформулюємо цю умову, використовуючи відображення першого порядку:

$$\Gamma^{+}(S)\cap S=\varnothing .$$

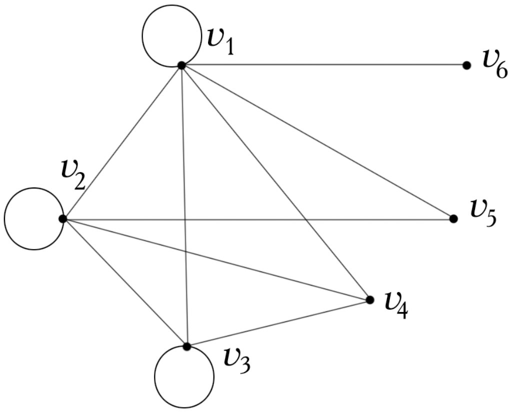
Якщо позначити через Φ сімейство всіх внутрішньо стійких множин графа, то для нього будуть справедливі співвідношення:

1. $\varnothing\in\Phi$, $S\in\Phi$.
2. Якщо $A\subset S$, то $A\in\Phi$.

Визначення. Числом *внутрішньої стійкості* графа G є величина, яку визначають з виразу:

$$a=\max_{S\in\Phi}|S|.$$

Визначення *$S\subset V$ називають множиною внутрішньої стійкості, якщо всі вершини з S не суміжні між собою. Потужність найбільшої множини внутрішньої стійкості називають числом внутрішньої стійкості.*



Приклад. Знайдемо числа внутрішньої й стійкості графа.
Найбільша множина внутрішньої стійкості для нашого графа має вигляд $S=\{v_4,v_5,v_6\}$ (при додаванні будь-яких інших вершин будемо одержувати суміжні вершини). Відповідно, *число внутрішньої стійкості* графа G рівно $a=3$.

Число зовнішньої стійкості

Нехай даний граф $G\left(V,\Gamma\right)$. Говорять, що множина $T \subset V$ зовні стійка, якщо для кожної вершини $v \notin T$ маємо $\Gamma^{+}\left(v\right) \cap T \neq \varnothing$, інакше кажучи $V \setminus T \subset \Gamma^{-1}\left(T\right)$.

Якщо Ψ – сімейство всіх зовні стійких множин графа, то для нього слушні такі співвідношення:

1. $T \in \Psi$.
2. Якщо $T \subset A$, то $A \in \Psi$.

Визначення

Число *зовнішньої стійкості* b графа G є величина, яку одержують з виразу:

$$b = \min_{T \in \Psi}\left|T\right|.$$

Зовні стійка множина – множина вершин Т таких, що будь-яка вершина графа або належить Т або суміжна з вершиною з Т.

Приклад. Для представленого графа найменша множина зовнішньої стійкості має вигляд $T = \left\{v_1\right\}$ (тому що будь-яка інша вершина (не приналежна T) з'єднана з вершиною v_1 з T).

Число зовнішньої стійкості графа *G* рівно $b = 1$.