НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«Київський політехнічний інститут»

ЕЛЕКТРОНІКИ
(назва факультету (інституту))

РЕКТОРСЬКИЙ КОНТРОЛЬ
ВЕСНА ' 2008

для студентів IV курсу

Звукотехніки та реєстрації інформації
(назва кафедри)

7.091203, 7.092401
(код спеціальності)

Відео-, аудіо- та кінотехніка, Телекомунікаційні системи та мережі
(назва спеціальності)

Математика
(назва дисципліни)

Буценко Юрій Павлович, 454-93-54
(розробник дисципліни (ПІБ), конт. телефони)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

______________ Пілінський В.В.
(підпис) **(прізвище та ініціали)**

«19» березня 2008 року

Контактні телефони: **454-90-76**

Завдання № 1

1. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Знайти похідні z'_u, z'_v, якщо

$$z(x,y) = x^3 y;\ x = u \cdot \cos(v);\ y = u^2 - \sin(2v);$$

3. Знайти критичні точки функції

$$y = x^2 - 0{,}5x^4$$

4. Електровимірювальне устаткування здатне працювати у трьох режимах: звичайному, автономному та реверсивному. Звичайний режим використовується у 65% всіх випадків роботи приладу, автономний у 25%; реверсивний у 10%. Ймовірність не спрацювання основного керуючого елементу прилада за час напрацювання 330 годин при звичайному режимі – 0,1; при автономному – 0,3; при реверсивному – 0,8. Визначити ймовірність відмови функціонування електровимірювального устаткування за час що дорівнює 330 годин.

Розв'язок:

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (10-3) - (5-1) + 3 \cdot ((-3)+2) = 7$

Відповідь: $\Delta = 7$

2. Використаємо формули похідних складеної функції:

$$z'_u = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{dy} \cdot \frac{\partial y}{\partial u};\ z'_v = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{dy} \cdot \frac{\partial y}{\partial v};$$

$$z'_u = 3x^2 y \cdot \cos(v) + 2u \cdot x^3;\ z'_v = -3x^2 y \cdot u \sin(v) - 2\cos(2v) \cdot x^3;$$

Відповідь: $z'_u = 3x^2 y \cdot \cos(v) + 2u \cdot x^3;\ z'_v = -3x^2 y \cdot u \sin(v) - 2\cos(2v) \cdot x^3;$

3. Критичні точки – це точки в яких похідна рівна 0 або не існує: $y' = 2x - 2x^3;\ 2x \cdot (1 - x^2) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \end{array}\right. \longrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1;$$

Відповідь: $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1$

4. Приймемо, що подія А – вихід з ладу устаткування під час роботи. Тоді визначимо такі 3 гіпотези, виходячи з формули повної ймовірності: H_1 – робота устаткування при звичайному режимі; H_2 – робота устаткування при автономному режимі; H_3 – робота устаткування в реверсивному режимі. Тоді з умов задачі відповідні ймовірності дорівнюють: $P(H_1)=0{,}65$; $P(H_2)=0{,}25$; $P(H_3)=0{,}1$. Умовні ймовірності виходу з ладу устаткування при різних режимах роботи дорівнюють: $P(A/H_1)=0{,}1$; $P(A/H_2)=0{,}3$; $P(A/H_3)=0{,}8$. За допомогою формули повної ймовірності отримаємо ймовірність відмови у функціонуванні електровимірювального устаткування з час 330 годин: $P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=0{,}22$

Відповідь: $P(A)=0{,}22$.

Завдання № 2

1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

2. Знайти похідні z'_u, z'_v, якщо: $z(x,y) = x^2 - 5\cdot(1/y)$; $x = e^u \cdot 5v$; $y = e^v \cdot 5u$;

3. Визначити екстремуми функції: $y = x^3 + 5x^2 + 3$.

4. Прилад для діагностування системи АРП складається з 2 головних вузлів. Ймовірність виходу з ладу першого вузла становить 0,5; другого - 0,7. Прилад після тривалої бездіяльності перевірили на справність в основних режимах, і виявилося що він не працює. Знайти ймовірність того, що причиною відмови є тільки перший вузол з двох.

Розв'язок:

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = ((-9)+6) - 4\cdot(6-18) + 2\cdot(2-9) = -3+48-14 = 31;$

Відповідь: $\Delta = 31$;

2. Використаємо формули похідних складеної функції:

$$z'_u = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};\ z'_v = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}; z'_u = 2x\cdot e^u\cdot 5v + \frac{5}{y^2}\cdot 5\cdot e^v;\ z'_v = 2x\cdot 5\cdot e^u + \frac{5}{y^2}\cdot e^v\cdot 5u;$$

Відповідь: $z'_u = 10x\cdot e^u\cdot v + \frac{25}{y^2}\cdot e^v;\ z'_v = 10x\cdot e^u + \frac{25}{y^2}\cdot e^v\cdot u;$

3. Знайдемо спочатку критичні точки функції:

$$y' = 3x^2 + 10x;\ y' = 0;\ 3x^2 + 10x = 0;\ x\cdot(3x+10) = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{10}{3};$$

$$3x^2 + 10x < 0, при\ x \in \left(-\frac{10}{3}; 0\right)\ 3x^2 + 10x > 0, при\ x \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right) \cup (0; +\infty)$$

При переході через точку $x_1 = -10/3$ похідна змінює свій знак з "+" на"-". Отже,в цій точці маємо максимум. При переході через точку $x_1 = 0$ похідна змінює свій знак з "-" на"+". Отже, це точка мінімуму.

Відповідь: $A(0;3)$ -- точка мінімуму; $B(-\frac{10}{3}; 21\frac{14}{27})$

4. Приймемо, що подія А – прилад за результатами перевірки виявився несправним. Тоді сформуємо такі 4 статистичні гіпотези: H_0 – обидва вузли приладу працюють; H_1 – перший вузол відмовив, а другий ні; H_2 – другий вузол відмовив, а перший ні; H_3 – обидва вузли приладу є несправними. З умови задачі позначимо ймовірність виходу з ладу першого вузла як q_1=0,5; другого - q_2=0,7.

Тоді $P(H_0)=(1-q_1)(1-q_2)=0{,}5\cdot0{,}3=0{,}15$; $P(H_1)=(q_1)(1-q_2)=0{,}5\cdot0{,}3=0{,}15$; $P(H_2)=(1-q_1)q_2=0{,}5\cdot0{,}7=0{,}35$; $P(H_3)=q_1\cdot q_2=0{,}5\cdot0{,}7=0{,}35$. Для того щоб скористатися формулою Байєса треба визначити відповідні умовні ймовірності. Зрозуміло, що $P(A/H_0)=0$; $P(A/H_1)=P(A/H_2)=P(A/H_3)=1$. Тоді за формулою Байєса знайдемо шукану ймовірність:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{\sum_{i=0}^{3} P(H_i)P(A/H_i)} = \frac{0{,}15}{0{,}15+0{,}35+0{,}35} = 0{,}176.$$

Відповідь: $P(H_1/A)=0{,}176$.

Завдання № 3

1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$.

2. Знайти похідні z'_u, z'_v, якщо $z(x, y) = \cos(2x) - 5\sin(y)$; $x = 5v - 2u$; $y = 5u - 2v$;

3. Визначити екстремуми функції $y = x^2 + 5x - 3$;

4. Система сигналізації складається з 6 незалежних вузлів. Ймовірність відмови будь-якого вузла дорівнює $q = 0{,}75$. Знайти ймовірність того, що внаслідок інтенсивної роботи на граничному режимі вийдуть з ладу не менше 2 вузли системи.

Розв'язок:

1. $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot((-6)+3) - 5\cdot((-4)-4) + 4\cdot((-6)-12) = -29$

Відповідь: $\Delta = -29$;

2. Використаємо формули похідних складеної функції:

$$z'_u = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};\quad z'_v = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial v};$$

$$z'_u = -2\sin(2x)\cdot(-2) - 5\cdot 5\cos(y);\quad z'_v = -2\sin(2x)\cdot 5 - 5\cos(y)\cdot(-2);$$

Відповідь: $z'_u = 4\sin(2x) - 25\cos(y)$; $z'_v = -10\sin(2x) + 10\cos(y)$;

3. Функція $y = x^2 + 5x - 3$ є параболою, вітки якої направлені вгору, отже вона має мінімум -- вершина параболи.

$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2};\quad y_в = -\frac{37}{4}$$

Відповідь: A$\left(-\frac{5}{2}; -\frac{37}{4}\right)$- точка мінімуму.

4. Згідно формули біноміального розподілу ймовірностей знаходимо, що ймовірність виходу з ладу принаймні одного вузла системи сигналізації дорівнює:

$R_{1,6} = 1 - q^6 = 1-(0{,}75)^6 = 0{,}82.$

Тоді ймовірність, з якою відмовить рівно один вузол системи за умов того ж розподілу можна знайти за формулою:

$$P_{1,6} = C_6^1(1-q)q^5 = \frac{6!}{1!5!}0{,}25\cdot(0{,}75)^5 = 0{,}355.$$

Отже, ймовірність того, що вийдуть з ладу не менше 2 вузлів системи визначаємо як

$$R_{2,6} = R_{1,6} - P_{1,6} = 0{,}82 - 0{,}355 = 0{,}465.$$

Відповідь : $R_{2,6} = 0{,}465$.

Завдання № 4

1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Знайти похідні z'_u, z'_v, якщо $z(x,y) = xy^2$; $x = \cos(v)\cdot\left(u^2-1\right)$; $y = \sin(u)\cdot\left(v^2-2\right)$;

3. Знайти скільки точок екстремуму має функція $y = 3x^4 - 4x^3 + 5$;

4. Магнітофони однієї моделі виготовляються двома фірмами-розробниками. Відомо, що перша фірма займає на ринку 75% своєї продукції, друга – 25%. Надійність магнітофону під маркою першої фірми складає 0,7; другої фірми – 0,85. Знайти за існуючих умов надійність електронного приладу, що надійшов до реалізації на ринок.

Розв'язок:

1. $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 4 + 4\cdot(1+6) + 5\cdot(-12) = -40;$

Відповідь: $\Delta = -40$

2. Використаємо формули похідних складеної функції:

$$z'_u = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};\ z'_v = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial v};$$

$$z'_u = 2u\cdot\cos(v)\cdot y^2 + 2xy\cdot\cos(u)\cdot(v^2-2);\ z'_v = -y^2\cdot\sin(v)\cdot(u^2-1) + 2xy\cdot 2v\cdot\sin(u);$$

Відповідь: $z'_u = 2u\cdot\cos(v)\cdot y^2 + 2xy\cdot\cos(u)\cdot(v^2-2);$

$z'_v = -y^2\cdot\sin(v)\cdot(u^2-1) + 4xyv\cdot\sin(u);$

3. Знайдемо спочатку критичні точки функції:

$$y' = 12x^3 - 12x^2;\ y' = 0;$$

$$12x^3 - 12x^2 = 0;\ x^2\cdot(x-1) = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = 1;$$

$$x^2\cdot(x-1) \le 0, при\ x\in(-\infty;1];\ x^2\cdot(x+1) > 0, при\ x\in(1;+\infty)$$

В точці $x_1 = 0$ похідна не змінює знак, отже, екстремуму в ній немає. В точці $x_2 = 1$ функція змінює знак з '"-" на "+", отже, в цій точці маємо мінімум.

Відповідь: n=1 (одна точка екстремуму).

4. Визначимо подію А, як те що прилад було виготовлено і він надійшов до реалізації. Тоді можна скласти 2 гіпотези: H_1 – магнітофон першої фірми-розробника; H_2 – магнітофон другої фірми розробника.

Тоді визначимо умовні ймовірності:

$P(A/H_1)$ – ймовірність появи на ринку магнітофона від першої фірми;

$P(A/H_2)$ – ймовірність появи на ринку магнітофона від другої фірми;

Тоді за формулою повної ймовірності знайдемо надійність електронного приладу:

$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=0{,}7\cdot 0{,}75+0{,}85\cdot 0{,}25= 0{,}74$.

Відповідь : P(A)=0,74.

Завдання № 5

1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

2. Знайти похідні z'_u, z'_v, якщо: $z(x,y) = 5x - 3y$; $x = \sin v \cdot e^{2u}$; $y = \cos(u) \cdot e^{v^2}$;

3. Знайти скільки точок екстремуму має функція: $y = 3x^5 + 5x^3 - 3$.

4. Функція $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$ розвинути в ряд Фур́є. $f(x) = \begin{cases} 1, -\pi < x < 0 \\ -5, 0 \le x < \pi \end{cases}$

Розв’язок:

1. $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 24 + 18 + ((-9) + 20) = -19$

Відповідь: $\Delta = -19$;

2. Використаємо формули похідних складеної функції:

$$z'_u = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{dy} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \quad z'_v = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{dy} \cdot \frac{\partial y}{\partial v};$$

$$z'_u = 5 \cdot 2\sin(v) \cdot e^{2u} + 3 \cdot \sin(u) \cdot e^{v^2}; \quad z'_v = 5\cos(v) \cdot e^{2u} - 3\cos(u) \cdot 2v \cdot e^{v^2};$$

Відповідь: $z'_u = 10\sin(v) \cdot e^{2u} + 3 \cdot \sin(u) \cdot e^{v^2}$; $z'_v = 5\cos(v) \cdot e^{2u} - 6\cos(u) \cdot v \cdot e^{v^2}$;

3. Знайдемо спочатку критичні точки функції:

$y' = 15x^4 + 15x^2;\ y' = 0;$

$15x^4 + 15x^2 = 0;\ x^2 \cdot (x^2 + 1) = 0;\ x = 0;$

$x^2 \cdot (x^2 + 1) \ge 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Оскільки похідна не змінює знак, то дана функція не має точок екстремуму.
Відповідь: n=0 (точок екстремуму немає).
4. Оскільки функція кусково-монотонною, то за теоремою Дріхле ряд Фур́є цієї функції в кожній точці збігається до значення $(f(x-0) + f(x+0))/2$.
Коефіцієнти ряда Фур́є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} dx - 5\int_{0}^{\pi} dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(x\Big|_{-\pi}^{0} - 5x\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(0 + \pi - 5\pi\right) = -4$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \cos nx dx - 5\int_{0}^{\pi} \cos nx dx\right) =$$

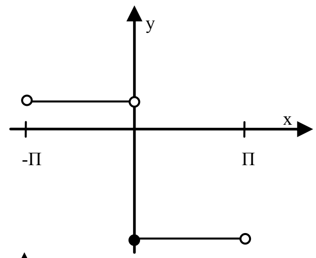
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{5}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-6}{n}\sin \pi n\right) = \frac{6}{n\pi}\sin \pi n = 0$$

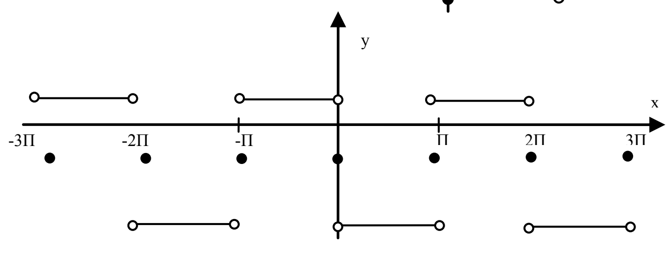
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \sin nx dx + \int_{0}^{\pi} \sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{5}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{6}{n}\cos \pi n - \frac{6}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{6}{n}(-1)^n - \frac{6}{n}\right)$$

$$f(x) \sim -2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{6}{n}(-1)^n - \frac{6}{n}\right)\sin nx$$





Графік суми ряду Фур́є:

Відповідь: $f(x) \sim -2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{6}{n}(-1)^n - \frac{6}{n}\right)\sin nx$

Завдання № 6

1. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}: $A = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$;

2. Знайти розв'язок задачі Коші: $y'' + 5y = 0$;

3. Знайти проміжки зростання функції $y = f(x)$: $f(x) = \cos 2x - x$;

4. Електронний прилад складається з 4 вузлів. Відомо, що вузли виходять з ладу незалежно один від одного. Ймовірність відмови за час t=100 год дорівнює q=0,2. Знайти ймовірність того, що не відмовить рівно один вузол приладу з чотирьох під час роботи приладу.

Розв'язок:

1. Знайдемо транспоновану матрицю алгебраїчних доповнень($A_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot M_{i,j}$, де $M_{i,j}$ - це мінор).

Тоді: $\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$; $\det A = -2 - 6 = -8$; $A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

Зробимо перевірку, перемноживши ці матриці повинна вийти одинична матриця:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Відповідь: $A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Запишемо характеристичне рівняння:

$k^2 + 5 = 0$; тоді $k = \pm i\sqrt{5}$;

Запишемо розв'язок рівняння: $y = C_1 \cdot \cos(x \cdot \sqrt{5}) + C_2 \cdot \sin(x \cdot \sqrt{5})$

Відповідь: $y = C_1 \cdot \cos(x \cdot \sqrt{5}) + C_2 \cdot \sin(x \cdot \sqrt{5})$.

3. Функція зростає на проміжку при умові, що похідна цієї функції більша нуля на цьому проміжку, тоді:

$f'(x) = -2 \cdot \sin(2x) - 1$;

$-2 \cdot \sin(2x) - 1 > 0$; тобто $\sin(2x) < -\frac{1}{2}$;

$2x \in (-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n), \quad n \in Z$; А отже $x \in (-\frac{5\pi}{12} + \pi n; -\frac{\pi}{12} + \pi n), \quad n \in Z$

Відповідь: функція зростає на $x \in (-\frac{5\pi}{12} + \pi n; -\frac{\pi}{12} + \pi n), \quad n \in Z$

4. За формулою біноміального розподілу ймовірностей можемо знайти ймовірність відмови одного вузла системи: $P_{1,4} = C_4^1 (1 - q) q^3 = 4 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}2)^3 = 0{,}025$

Відповідь: $P_{1,4} = 0{,}025$.

Завдання № 7

1. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}: $A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$;

2. Знайти розв'язок задачі Коші: $y'' - 2y = 0$;

3. Знайти проміжки спадання функції $y = f(x)$: $f(x) = \sin 2x + x\sqrt{2}$;

4. Розвинути в ряд Фур`є за косинусами функцію $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$. $f(x) = \begin{cases} 0,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 10,\ \dfrac{\pi}{2} < x < \pi; \end{cases}$

Розв’язок:

1. Знайдемо транспоновану матрицю алгебраїчних доповнень($A_{i,j}=(-1)^{i+j}\cdot M_{i,j}$, де $M_{i,j}$ - це мінор). Тоді:

$$\left(A^*\right)^T=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix};\quad \det A=-8+2=-6;\quad A^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -4\end{pmatrix};$$

Зробимо перевірку, перемноживши ці матриці повинна вийти одинична матриця:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Відповідь: $A^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -4\end{pmatrix}$

2. Запишемо характеристичне рівняння: $k^2-2=0$; звідси $k=\pm\sqrt{2}$;

Запишемо розв’язок рівняння: $y=C_1\cdot e^{x\cdot\sqrt{2}}+C_2\cdot e^{-x\cdot\sqrt{2}}$

Відповідь: $y=C_1\cdot e^{x\cdot\sqrt{2}}+C_2\cdot e^{-x\cdot\sqrt{2}}$

3. Функція спадає на проміжку при умові, що похідна цієї функції менша нуля на цьому проміжку, тоді:

$$f'(x)=2\cdot\cos(2x)+\sqrt{2};$$

$$2\cdot\cos(2x)+\sqrt{2<0};\quad \text{тобто}\quad \cos(2x)<-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2x\in(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n),\quad n\in Z;$$

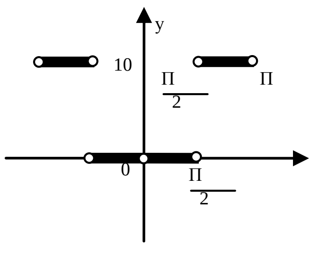
$$x\in(\frac{3\pi}{8}+\pi n;\frac{5\pi}{8}+\pi n),\quad n\in Z$$

Відповідь: функція спадає на $x\in(\frac{3\pi}{8}+\pi n;\frac{5\pi}{8}+\pi n),\quad n\in Z$

4. Оскільки функція кусково-монотонна то за теоремою Дріхле ряд Фур́є цієї функції у кожній точці збігається до значення $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Коефіцієнти Фур́є:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}0dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}10dx=\frac{2}{\pi}\left(10x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot 5\pi=10;$$



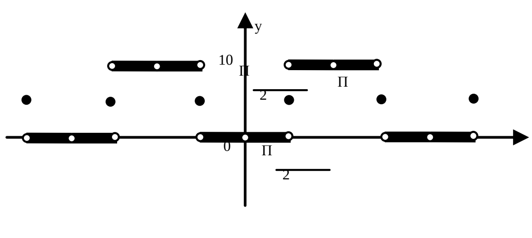
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_n(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{2}{\pi}}0\cos nxdx+\int_0^{\frac{2}{\pi}}10\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(10\int_{\frac{2}{\pi}}^{0}\cos nxdx\right)=\frac{20}{\pi n}\left(\sin\pi n-\sin\frac{\pi n}{2}\right)=-\frac{20}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}$$

$$b_n=0$$

$$f(x)\sim 5+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{20}{n\pi}\sin\frac{\pi n}{2}\cos nx$$

Графік суми ряду Фур́є.



Відповідь: $f(x)\sim 5+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{20}{n\pi}\sin\frac{\pi n}{2}\cos nx$

Завдання № 8

1. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}: $A=\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}$;

2. Знайти розв'язок задачі Коші: $y''-5y'=0$;

3. Знайти проміжки зростання функції $y=f(x)$: $f(x)=4\sin x/2+x$;

4. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом $T=2\pi$, $f(x)=\begin{cases}9, & -\pi<x<0,\\ -2, & 0\le x<\pi\end{cases}$

Розв'язок:

1. Знайдемо транспоновану матрицю алгебраїчних доповнень($A_{i,j}=(-1)^{i+j}\cdot M_{i,j}$, де $M_{i,j}$ - це мінор). Тоді:

$\left(A^*\right)^T=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ -1 & -4\end{pmatrix}$; $\det A=12-2=10$; $A^{-1}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2\\ -1 & -4\end{pmatrix}$;

Зробимо перевірку, перемноживши ці матриці повинна вийти одинична матриця:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2\\ -1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Відповідь: $A^{-1}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2\\ -1 & -4\end{pmatrix}$.

2. Запишемо характеристичне рівняння:

$k^2-5k=0$; тоді $k_{1,2}=0;5$; Далі запишемо розв'язок рівняння:

$y=C_1+C_2\cdot e^{5\cdot x}$.

Відповідь: $y=C_1+C_2\cdot e^{5\cdot x}$.

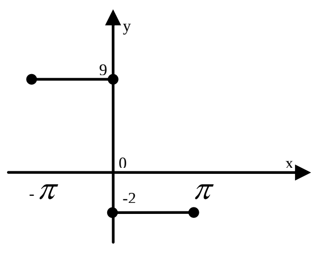
3. Функція зростає на проміжку при умові, що похідна цієї функції більша нуля на цьому проміжку, тоді: $f'(x)=2\cdot\cos(\frac{x}{2})+1$; Тоді $2\cdot\cos(\frac{x}{2})+1>0$; Звідси $\cos(\frac{x}{2})>-\frac{1}{2}$;

$\frac{x}{2}\in(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n),\quad n\in Z$; або $x\in(-\frac{4\pi}{3}+4\pi n;\frac{4\pi}{3}+4\pi n),\quad n\in Z$

Відповідь: функція зростає на $x\in(-\frac{4\pi}{3}+4\pi n;\frac{4\pi}{3}+4\pi n),\quad n\in Z$

4. Оскільки функція кусково-монотонна, то за теоремою Діріхле ряд Фур'є цієї функції в кожній точці збігається до значення: $(f(x-0)+f(x+0))/2$

Коефіцієнти ряду:



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}dx-2\int_0^{\pi}dx\right)\frac{1}{\pi}\left(9x\Big|_{-\pi}^{0}-2x\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}(0+9\pi-2\pi)=\frac{1}{\pi}\cdot 7\pi=7$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(9\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx-2\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{9}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{9}{n}\sin\pi n-\frac{2}{n}\sin\pi n\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-11}{n}\sin\pi n\right)=-\frac{11}{\pi n}\sin\pi n=0$$

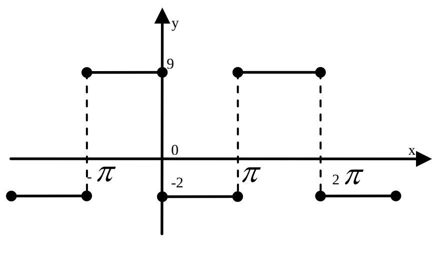
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(9\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx-2\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{9}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{9}{n}+\frac{9}{n}\cos\pi n+\left(-\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\cos\pi n\right)\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{11}{n}+\frac{11}{n}\cos\pi n\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{11}{n}+\frac{11}{n}(-1)^n\right)$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{0}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

$$f(x)\sim\frac{7}{2}+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{11}{n}+\frac{11}{n}(-1)^n\right)\sin nx$$

Графік суми ряду Фур'є:



Відповідь: $f(x)\sim\frac{7}{2}+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{11}{n}+\frac{11}{n}(-1)^n\right)\sin nx$

Завдання № 9

1. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}: $A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Знайти розв'язок задачі Коші: $y'' - 3y = 0$;

3. Знайти проміжки зростання функції $y = f(x)$: $f(x) = 4\cos x/2 - x$;

4. Розвинути в ряд Фур'є функцію f(x) з періодом $T = 2\pi$ $f(x) = \begin{cases} 17 & -\pi < x < 0 \\ -2 & 0 \le x < \pi \end{cases}$

Розв'язок:

1. Знайдемо транспоновану матрицю алгебраїчних доповнень($A_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot M_{i,j}$, де $M_{i,j}$ - це мінор).

Тоді: $\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; $\det A = 3 + 8 = 11$; $A^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

Зробимо перевірку, перемноживши ці матриці повинна вийти одинична матриця:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

Відповідь: $A^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Запишемо характеристичне рівняння:

$k^2 - 3 = 0$; Тоді $k_{1,2} = \pm\sqrt{3}$; далі запишемо розв'язок рівняння:

$$y = C_1 \cdot e^{\sqrt{3} \cdot x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{3} \cdot x}$$

Відповідь: $y = C_1 \cdot e^{\sqrt{3} \cdot x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{3} \cdot x}$.

3. Функція зростає на проміжку при умові, що похідна цієї функції більша нуля на цьому проміжку, тоді: $f'(x) = -2 \cdot \sin(\frac{x}{2}) - 1$; і $-2 \cdot \sin(\frac{x}{2}) - 1 > 0$;

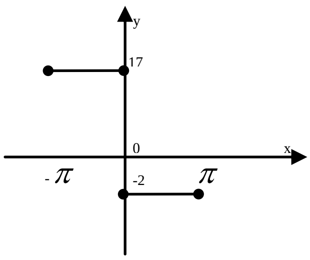
Звідки $\sin(\frac{x}{2}) < -\frac{1}{2}$;

$$\frac{x}{2} \in (-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n), \quad n \in Z;$$

$$x \in (-\frac{5\pi}{3} + 4\pi n; -\frac{\pi}{3} + 4\pi n), \quad n \in Z$$

Відповідь: функція зростає на $x \in (-\frac{5\pi}{3} + 4\pi n; -\frac{\pi}{3} + 4\pi n), \quad n \in Z$

4. Оскільки функція кусково-монотонна, то за теоремою Діріхле ряд Фур'є цієї функції в кожній точці збігається до значення $(f(x-0) + f(x+0))/2$

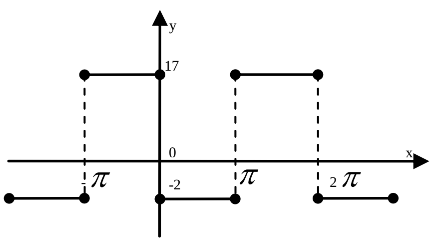


Коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} 17dx + \int_{0}^{\pi} (-2)dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[17x \Big|_{-\pi}^{0} - 2x \Big|_{0}^{\pi} \right] = \frac{1}{\pi} \left[17(0 - (-\pi)) - 2(\pi - 0) \right] = \frac{1}{\pi} \cdot 15\pi = 15$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} 17\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} (-2)\cos nx dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{17}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{n} \sin nx \Big|_{0}^{\pi} \right] =$$

$$\frac{17}{\pi n}\left(\sin 0 - \sin(-n\pi)\right) - \frac{2}{\pi n}\left(\sin 0 - \sin \pi n\right) = 0$$



$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} 17\sin nx dx - \int_{0}^{\pi} 2\sin nx dx \right] = -\frac{17}{\pi n}(\cos 0 - \cos(-\pi n)) +$$

$$+\frac{2}{\pi n}(\cos(\pi n) - \cos 0) = \frac{2}{\pi n}\left(\left((-1)^n - 1\right) - \frac{17}{\pi n}\left(1 - (-1)^n\right)\right) = \frac{19}{\pi n}((-1)^n - 1)$$

$$f(x) \sim \frac{15}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{19}{\pi n}((-1)^n - 1)\sin nx$$

Графік суми ряду Фур'є:

Відповідь: $f(x) \sim \frac{15}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{19}{\pi n}((-1)^n - 1)\sin nx$

Завдання № 10

1. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}, $A = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$
2. Знайти розв'язок задачі Коші $y'' + 3y' = 0$
3. Знайти найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізку [-1,2] $f(x) = x^3 + (3/2)x^2$
4. Розвинути в ряд Фур\`є функцію $f(x)$ з періодом T=2π $f(x) = \begin{cases} 9, & -\pi < x < 0, \\ -7, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Розв'язок:

1. Знайдемо транспоновану матрицю алгебраїчних доповнень($A_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot M_{i,j}$, де $M_{i,j}$ - це мінор).

Тоді: $\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$; $\det A = -8 - 6 = -14$; та $A^{-1} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

Зробимо перевірку, перемноживши ці матриці повинна вийти одинична матриця:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Відповідь: $A^{-1} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. Запишемо характеристичне рівняння:

$k^2 + 3k = 0$; тоді $k_{1,2} = 0; -3$. Запишемо розв'язок рівняння: $y = C_1 + C_2 \cdot e^{-3 \cdot x}$

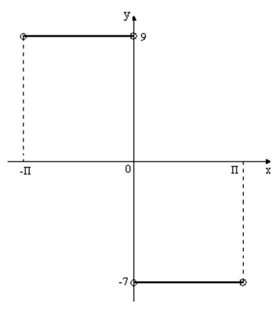
Відповідь: $y = C_1 + C_2 \cdot e^{-3 \cdot x}$.

3. Щоб знайти найменше значення функції на проміжку достатньо провірити значення функції на кінцях проміжку та в критичних точках, які належать цьому проміжку, тобто в таких токах в яких похідна рівна нулю або не існує, та порівняти значення функції в цих точках. Отже: $f(-1) = -1 + \frac{3}{2} = 0{,}5$; та $f(2) = 8 + 6 = 14$; $f'(x) = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x$; Тоді $x^2 + x = 0$; Звідси $x_{1,2} = 0; -1$; $f(0) = 0$; $\min\limits_{x \in [-1;2]} f(x) = f(0) = 0$

Відповідь: $\min\limits_{x \in [-1;2]} f(x) = f(0) = 0$

4. Оскільки ф-ція Кусково-монотонна, то за теоремою Діріхлє, ряд Фур'є цієї ф-ції в кожній точці збігається до значення $(f(x-0) + f(x+0))/2$

Коефіцієнти ряду Фур'є:



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} 9dx - 7 \int_{0}^{\pi} dx \right) = \frac{1}{\pi}(9\pi - 7\pi) = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

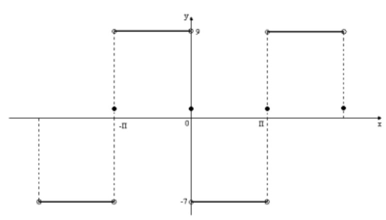
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi}(9 \int_{-\pi}^{0} \cos nx dx - 7 \int_{0}^{\pi} \cos nx dx) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{9}{n} \sin(nx) \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{7}{n} \sin(nx) \Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{9}{n} \sin \pi n - \frac{7}{n} \sin \pi n\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{16}{n} \sin \pi n\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi}(9 \int_{-\pi}^{0} \sin nx dx - 7 \int_{0}^{\pi} \cos nx dx) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{9}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{7}{n} \cos x_n \Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{9}{n}(1 - \cos \pi n) + \frac{7}{n}(\cos \pi n - 1)\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{9}{n} + \frac{9}{n} \cos \pi n + \frac{7}{n} \cos \pi n - \frac{7}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{16}{n} + \frac{16}{n} \cos \pi n\right).$$



$$f(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left(-\frac{16}{n} + \frac{16}{n} \cos n\pi\right) \sin nx$$

Графік суми ряду Фур'є

Відповідь: $f(x) \sim 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left(-\frac{16}{n} + \frac{16}{n} \cos n\pi\right) \sin nx$

Завдання № 11

1. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} 4x-2y=20 \\ 2x+y=10 \end{cases}$;

2. На координатній площині XOY зобразити множину точок M(x,y), координати яких задовольняють умовам: $|x|-|y|=1$;

3. Знайти найменше значення функції $y=f(x)$ на відрізку [-1,2] $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$;

4. Розвинути в ряд Фур’є синусами f(x) з періодом $T=2\pi$

$$f(x)=\begin{cases} 8, & 0<x<\frac{\pi}{2}, \\ 11, & \frac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$$

Розв'язок:

1. $\begin{cases} 4x-2y=20 \ \ (1) \\ 2x+y=10 \ \ (2) \end{cases}$

Помножимо рівняння (2) на 2 отримаємо: $\begin{cases} 4x-2y=20 \\ 4x+2y=20 \end{cases}$

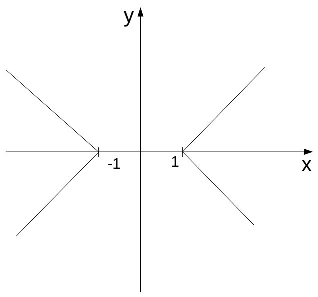
Віднімемо отримані рівняння: $-4y=0 \Rightarrow y=0;\ x=\frac{1}{2}y+5=5$

Відповідь: $\begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}$

$|x|-|y|=1$

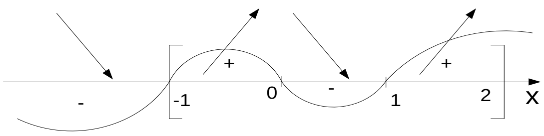
2. $|y|=|x|-1$

$\left[\begin{array}{l} y=|x|-1,\ y\ge 0 \\ y=-|x|+1,\ y\le 0 \end{array}\right.$



Відповідь:

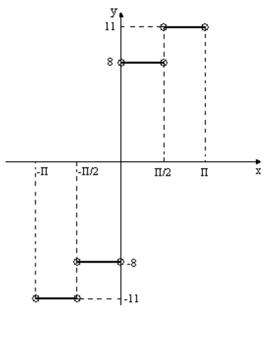
3. $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$ Тоді $f'(x)=x^3-x\ge 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)\ge 0$



$f(1)=f(-1)=-1/4;\ f(0)=0;\ f(2)=2$

Відповідь: m=-1/4

4. Кусково-монотонна, то за теоремою Діріхлє ряд Фур'є цієї функції в кожній точці збігається до значення $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$



Продовжимо функцію на проміжок (-π;0) непарним чином Коефіцієнти Фур'є знаходяться за формулами:

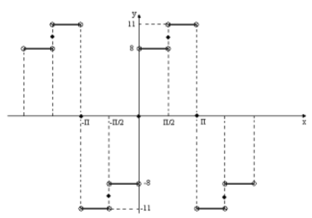
$a_0=0;\ b_0=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin nxdx+\frac{2}{\pi}\int 11\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{8}{n}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{11}{n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{8}{n}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)-\frac{11}{n}\left((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)=-\frac{2}{\pi n}\left(8\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)+11\left((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2\sin nx}{\pi n}\left(3\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)+11\left((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)$$

Графік суми ряду Фур'є:



Відповідь: $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2\sin nx}{\pi n}\left(3\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)+11\left((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)$

Завдання № 12

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+5y=10 \\ x-3y=15 \end{cases}$$

2. На координатній площині XOY зобразити множину точок M(x,y), координати яких задовольняють умовам:

$$|x|+|y|=1$$

3. Знайти найбільше значення функції $y=f(x)$ на відрізку [-3,0]

$$f(x)=-x^3+3x^2-5$$

4. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом $T=2\pi$

$$f(x)=-\begin{cases} 5, -\pi<x<0 \\ -6, 0\le x<\pi \end{cases} T=2\pi$$

Розв’язок:

1. $\begin{cases} x+5y=10 \quad (1) \\ x-3y=15 \quad (2) \end{cases}$

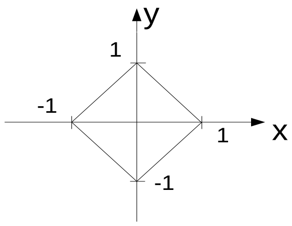
Віднімемо від рівняння (1) рівняння (2)

$$8y=-5 \Rightarrow y=-\frac{5}{8};\ x=-5y+10;\ x=10-5(-\frac{5}{8})=\frac{105}{8}$$

Відповідь: $\begin{cases} x=\dfrac{105}{8} \\ y=-\dfrac{5}{8} \end{cases}.$

$|x|+|y|=1$

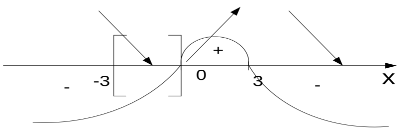
2. $\left[\begin{array}{l} y=-|x|+1,\ y\geq 0 \\ y=|x|-1,\ y<0 \end{array} \right.$



Відповідь:

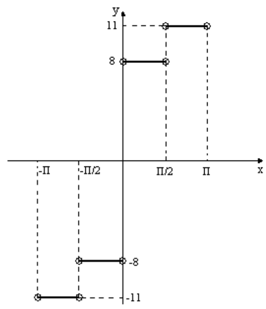
3. $f(x)=-x^3+3x^2-5;\ f'(x)=-3x^2+6x=0$. Тоді $-3x^2+6x\geq 0$ тоді $x(x-2)\leq 0$ Отже $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array} \right.$.

$f(0)=-5;\ f(2)=-1;\ f(-3)=103$



Відповідь: $M=103$

4. Оскільки функція кусково-монотонна , то за теоремою Діріхлє ряд Фур’є цієї функції в кожній точці збігається до значення $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.



Коефіцієнт ряду Фур’є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}5dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-6)dx=+5-6=-1$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}5\cos(nx)dx+\int_{0}^{\pi}(-6)\cos(nx)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(5\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)d(nx)-6\int_{0}^{\pi}\cos(nx)d(nx)\right)=\frac{1}{\pi n}\left(5\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{0}-6\sin(nx)\Big|_{0}^{\pi}\right)==\frac{1}{\pi n}(0+0)=0$$

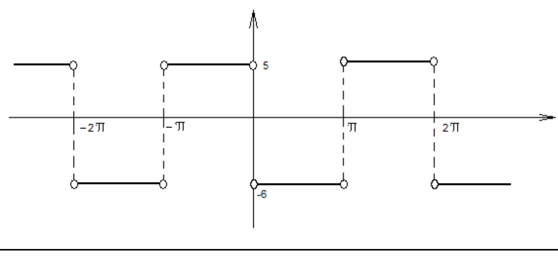
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}5\sin(nx)d(nx)+\int_{0}^{\pi}(-6)\sin(nx)d(nx)\right)==\frac{1}{\pi n}\left(5(-\cos(nx))\Big|_{-\pi}^{0}-6(-\cos(nx))\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left(+5\left((-1)+(-(-1))^n\right)-6\left(-(-1)^n-(-1)\right)\right)=$$

$$\frac{5}{\pi n}\left((-1)+(-(-1))^n\right)+\frac{6}{\pi n}\left((-1)^n+(-1)\right)=\frac{11}{\pi n}\left((-1)^n+(-1)\right)$$

$$f(x)\sim-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11}{\pi n}\left((-1)^n+(-1)\right)\sin(nx).$$

Графік суми ряду Фур’є



Відповідь: $f(x)\sim-\dfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{11}{\pi n}\left((-1)^n+(-1)\right)\sin(nx).$

Завдання № 13

1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+3y=15 \\ 2x-4y=10 \end{cases}$;

2. На координатній площині XOY зобразити множину точок M(x,y), координати яких задовольняють умовам: $|x+y|=1$;

3. Знайти найбільше значення функції $y=f(x)$ на відрізку [-3,0]: $f(x)=2x^3-9x^2+4$

4. Розвинути в ряд Фур'є синусами f(x) з періодом $T=2\pi$, $f(x)=\begin{cases} 8, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 11, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

Розв'язок:

1. $\begin{cases} x+3y=15 \quad (1) \\ 2x-4y=10 \quad (2) \end{cases}$

Помножимо перше рівняння на 2 та віднімемо від (2):

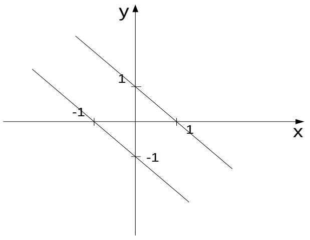
$\begin{cases} 2x+6y=30 \\ 2x-4y=10 \end{cases}$

$10y=20 \Rightarrow y=2$

$x=15-3y=15-6=9$

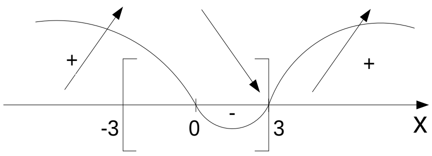
Відповідь: $\begin{cases} x=9 \\ y=2 \end{cases}$.

2. $|x+y|=1; \left[\begin{array}{l} x+y=1, x\geq -y \\ x+y=-1, x<-y \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} y=-x+1, x\geq -y \\ y=-x-1, x<-y \end{array}\right.$



Відповідь:

3. $f(x)=2x^3-9x^2+4; f'(x)=6x^2-18x=0 \Rightarrow x(x-3)\geq 0$

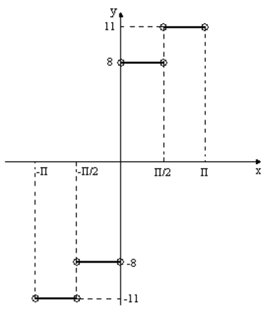


$f(-3)=-131; f(3)=-23; f(0)=4$

Відповідь: $M=f(0)=4$

4. функція Кусково-монотонна, то за теоремою Діріхлє ряд Фур'є цієї функції в кожній точці збігається до значення $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

Продовжимо функцію на проміжок (-π;0) непарним чином Коефіцієнти Фур'є знаходяться за формулами:



$a_0=0$

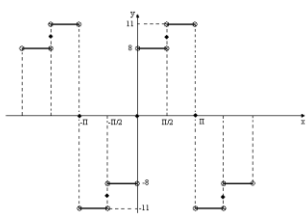
$b_0=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin nxdx+\frac{2}{\pi}\int 11\sin nxdx=\frac{2}{\pi}(-\frac{8}{n}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{11}{n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi})=$$

$$=\frac{2}{\pi}(-\frac{8}{n}(\cos\frac{\pi n}{2}-1)-\frac{11}{n}((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}))=-\frac{2}{\pi n}(8(\cos\frac{\pi n}{2}-1)+11((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}))$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2\sin nx}{\pi n}(3(\cos\frac{\pi n}{2}-1)+11((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}))$$

Графік суми ряду Фур'є:



Відповідь: $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2\sin nx}{\pi n}(3(\cos\frac{\pi n}{2}-1)+11((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}))$

Завдання № 14

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 4y = 8 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

2. На координатній площині XOY зобразити множину точок M(x,y), координати яких задовольняють умовам:

$$|x - y| = 1$$

3. Знайти найбільше M та найменше m значення функції $y = f(x)$ на даному відрізку [a,b]

$$f(x) = 2 \cdot 2^{3x} - 9 \cdot 2^{2x} + 12 \cdot 2^{x} \quad [-1;1]$$

4. Електронний прилад складається з 4 вузлів. Відомо, що вузли виходять з ладу незалежно один від одного. Ймовірність відмови за час t=100 год дорівнює q=0,2. Знайти ймовірність того, що не відмовить рівно один вузол приладу з чотирьох під час роботи приладу.

Розв’язок:

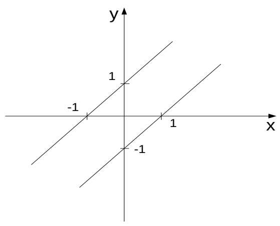
1. $\begin{cases} x-4y=8 \quad (1) \\ 2x-y=5 \quad (2) \end{cases}$

Помножимо рівняння (1) на 2 і віднімемо від нього (2) $\begin{cases} 2x-8y=16 \\ 2x-y=5 \end{cases} \Rightarrow \quad -7y=11 \Rightarrow y=-\dfrac{11}{7}$

Виразимо з першого рівняння x: $x=4y+8 \Rightarrow x=4(-\dfrac{11}{7})+8=\dfrac{12}{7}$.

Відповідь: $\begin{cases} x=12/7 \\ y=-11/7 \end{cases}$.

2. $|x-y|=1$



$\left[\begin{array}{l} x-y=1, x\ge y \\ x-y=-1, x<y \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} y=x-1, x\ge y \\ y=x+1, x<y \end{array}\right.$

3. $f(x)=2\cdot 8^x-9\cdot 4^x+12\cdot 2^x$
$f'(x)=2\cdot 8^x\ln 8-9\cdot 4^x\ln 4+12\cdot 2^x\ln 2=6\cdot 8^x\ln 2-18\cdot 4^x\ln 2+12\cdot 2^x\ln 2=0$

$8^x-3\cdot 4^x+2\cdot 2^x=0$

$2^{3x}-3\cdot 2^{2x}+2\cdot 2^x=0$

Заміна:$2^x=t>0$

$(t^2-3\cdot t+2)\cdot t=0$

$t\ne 0$

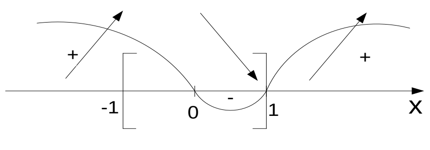
$t^2-3\cdot t+2=0$

$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$

$(t-1)(t-2)\ge 0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x\ge 1 \\ 2^x\ge 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x\le 1 \\ 2^x\le 2 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0 \\ x\ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 0 \\ x\le 1 \end{cases} \end{array}\right.$



$f(-1)=4;\ f(0)=5;\ f(1)=4$

Відповідь: $M=5; m=4$

4. За формулою біноміального розподілу ймовірностей можемо знайти ймовірність відмови одного вузла системи: $P_{1,4}=C_4^1(1-q)q^3=4\cdot 0{,}8\cdot(0{,}2)^3$=0,025

Відповідь: $P_{1,4}=0{,}025$

Завдання № 15

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x-5y=30 \\ 5x-2y=10 \end{cases}$$

2. Обчислити $\log_4 a$, якщо $a=\sin\pi/6$

3. Знайти первісну функції $y(x)$, графік якої проходить через точку А

$$y=4x^2-12x+9 \qquad \text{A}(0;1)$$

4. Розвинути в ряд Фур'є синусами f(x) з періодом $T=2\pi$

$$f(x)=\begin{cases} 8, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 11, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$$

Розв’язок:

1. $\begin{cases} 2x-5y=30 \quad (1) \\ 5x-2y=10 \quad (2) \end{cases}$

Помножимо рівняння (1) на 5 та (2) на 2:

$$\begin{cases} 10x-25y=150 \\ 10x-4y=20 \end{cases}$$

Віднімемо отримані ці рівняння. Отримаємо: $-21y=130 \Rightarrow y=-130/21$

Виразимо x з першого рівняння:

$$x=\frac{5y+30}{2}$$

$$\mathrm{x}=\frac{15\cdot 42-130\cdot 5}{2\cdot 21}=-\frac{10}{21}$$

Відповідь: $\begin{cases} x=-10/21 \\ y=-130/21 \end{cases}$

2. $a=\sin\pi/6=\frac{1}{2}$

$$\log_4 a=\log_{2^2} a=\frac{1}{2}\log_2 a=\frac{1}{2}\log_2 2^{-1}=-\frac{1}{2}$$

Відповідь: $\log_4 a=-1/2$

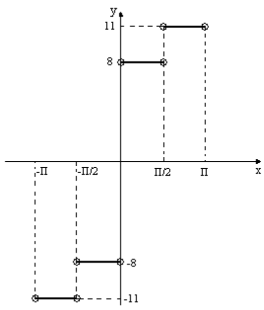
3. $F(x)=\int ydx=\int(4x^2-12x+9)dx=\frac{4}{3}x^3-\frac{12}{2}x^2+9x+C$

$$F(x)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+C$$

Підставимо в останнє рівняння координати точки A(0;1). Отримаємо: C=1

Тоді рівняння первісної матиме вигляд: $F(x)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+1$

Відповідь: $F(x)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+1$



4. Кусково-монотонна, то за теоремою Діріхлє ряд Фур’є цієї функції в кожній точці збігається до значення $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

Продовжимо функцію на проміжок (-π;0) непарним чином Коефіцієнти Фур’є знаходяться за формулами:

$$a_0=0$$

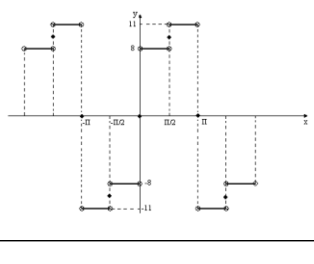
$$b_0=0$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin nxdx+\frac{2}{\pi}\int 11\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{8}{n}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{11}{n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{8}{n}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)-\frac{11}{n}\left((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)=-\frac{2}{\pi n}\left(8\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)+11\left((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2\sin nx}{\pi n}\left(3\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)+11\left((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)$$

Графік суми ряду Фур’є:



Відповідь: $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2\sin nx}{\pi n}\left(3\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)+11\left((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)$

Завдання № 16

1. Знайдіть похідну від функції $y(x)$: $y(x)=e^{2x}-1/x$;

2.Обчислити визначник: $\Delta=\begin{vmatrix}3 & 0\\ -3 & 2\end{vmatrix}$

3. Знайти первісну функції $y(x)$, графік якої проходить через точку А: $y=6x^2-8x+3$ А(-2;10)

4. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f\left(x\right)$ з періодом $T=2\pi$, $f\left(x\right)=-\begin{cases}5,-\pi<x<0\\ -6,0\le x<\pi\end{cases}T=2\pi$

Розв'язок:

1. Похідна по x відповідно до правил диференціювання: $y'(x)=2e^{2x}+1/x^2$

Відповідь: $y'(x)=2e^{2x}+1/x^2$

2. $\Delta=\begin{vmatrix}3 & 0\\ -3 & 2\end{vmatrix}=6-0=6$

Відповідь: $\Delta=6$

3. $Y(x)=\int y(x)dx=2x^3-4x^2+3x+C$

Знайдемо сталу C використовуючи координати точки : 10=-2·8-4·4-6+C

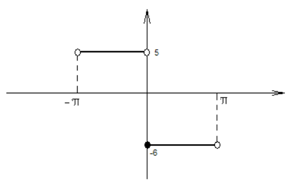
Звідси $C=48$.

Відповідь: $Y(x)=\int y(x)dx=2x^3-4x^2+3x+48$

4. Оскільки функція кусково-монотонна , то за теоремою Діріхлє ряд Фур'є цієї функції в кожній точці збігається до значення $\dfrac{f\left(x-0\right)+f\left(x+0\right)}{2}$.

Коефіцієнт ряду Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}5dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(-6\right)dx=+5-6=-1$$



$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}5\cos(nx)dx+\int_{0}^{\pi}\left(-6\right)\cos(nx)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(5\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)d(nx)-6\int_{0}^{\pi}\cos(nx)d(nx)\right)=\frac{1}{\pi n}\left(5\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{0}-6\sin(nx)\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left(0+0\right)=0$$

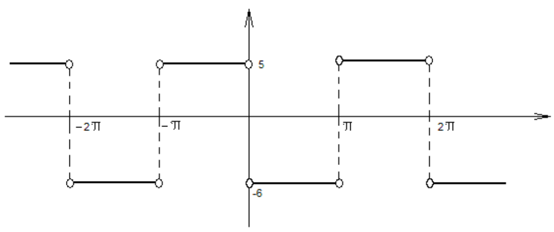
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}5\sin(nx)d(nx)+\int_{0}^{\pi}\left(-6\right)\sin(nx)d(nx)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left(5\left(-\cos(nx)\right)\Big|_{-\pi}^{0}-6\left(-\cos(nx)\right)\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left(+5\left((-1)+(-(-1))^n\right)-6\left(-(-1)^n-(-1)\right)\right)=$$

$$\frac{5}{\pi n}\left((-1)+(-(-1))^n\right)+\frac{6}{\pi n}\left((-1)^n+(-1)\right)=\frac{11}{\pi n}\left((-1)^n+(-1)\right)$$

$$f(x)\sim-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11}{\pi n}\left((-1)^n+(-1)\right)\sin(nx).$$



Графік суми ряду Фур'є

Відповідь: $f(x)\sim-\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{11}{\pi n}\left((-1)^n+(-1)\right)\sin(nx).$

Завдання № 17

1. Знайдіть похідну від функції $y(x)$: $y(x) = 5x + \cos(3x)$;
2. Знайти модуль вектора $\vec{a} = \{5; -3\}$;
3. Знайти первісну функції $y(x)$, графік якої проходить через точку А: $y = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ A(-1;1)
4. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$, $f(x) = \begin{cases} 11, -\pi < x < 0 \\ -6, 0 \le x < \pi \end{cases} T = 2\pi$

Розв'язок:

1. Похідна за змінною x: $y'(x) = 5 - 3\sin 3x$

Відповідь: $y'(x) = 5 - 3\sin 3x$

2. $|\vec{a}| = \sqrt{(5)^2 + (3)^2} = \sqrt{34}$

Відповідь: $|\vec{a}| = \sqrt{34}$

3. Первісна

$$Y = \int y dx = \frac{x^4}{2} + x^3 + 2x^2 + 5x + c$$

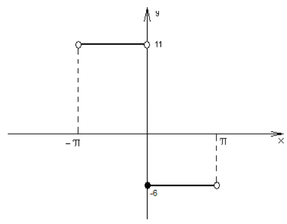
Тоді $1 = \frac{1}{2} - 1 + 2 - 5 + c$. Звідси $c = 4,5$.

Отже первісна матиме вигляд $Y = (x^4/2) + x^3 + 2x^2 + 5x + 4,5$.

Відповідь: $Y = (x^4/2) + x^3 + 2x^2 + 5x + 4\frac{1}{2}$.

4. Оскільки функція кусково-монотонна , то за теоремою Діріхлє ряд Фур'є цієї функції в кожній точці збігається до значення $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$.

Коефіцієнти ряду Фур'є:



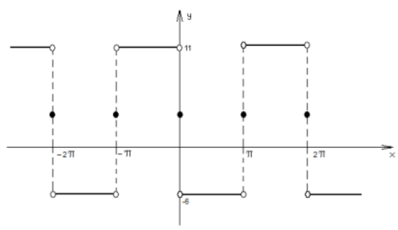
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 11dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-6)dx = \frac{1}{\pi}\left(11x\Big|_{-\pi}^{0} - 6x\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(11\pi - 6\pi) = \frac{5\pi}{\pi} = 5$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 11\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi}(-6)\cos(nx)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{11}{n}\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{6}{n}\sin(nx)\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{11}{\pi n}\left(\sin(0) - \sin(-n\pi)\right) - \frac{6}{\pi n}\left(\sin(0) - \sin(n\pi)\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 11\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi}(-6)\sin(nx)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(-\frac{11}{n}(\cos(nx))\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{6}{n}(-\cos(nx))\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$



$$= -\frac{11}{\pi n}\left(\cos(0) - \cos(-n\pi)\right) + \frac{6}{\pi n}\left(\cos(n\pi) - \cos(0)\right) =$$

$$= -\frac{11}{\pi n}\left(1 - (-1)^n\right) + \frac{6}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right) = \frac{17}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$f(x) \sim \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{17}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right)\sin(nx).$$

Графік суми ряду Фур'є

Відповідь: $f(x) \sim \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{17}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right)\sin(nx).$

Завдання № 18

1. Знайдіть похідну від функції $y(x)$: $y(x) = x^3 - 3x\sin(x) + \ln(x)$;
2. Знайти відстань між двома точками A і B, якщо $A(3;2)$ та $B(-4;1)$;
3. Знайти невизначений інтеграл $\int e^{3x}dx$;
4. розвинути в ряд Фур'є за косинусами функції $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$. $f(x) = \begin{cases} 9, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \dfrac{\pi}{2} \le x < \pi. \end{cases}$

Розв'язок:

1. Похідна $y'(x) = 3x^2 - 3\sin x - 3x\cos x + \dfrac{1}{x}$

Відповідь: $y'(x) = 3x^2 - 3\sin x - 3x\cos x + \dfrac{1}{x}$

2. Відстань між двома точками визначається як:

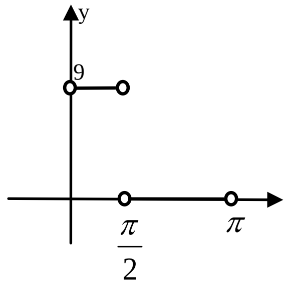
$$d = \sqrt{(7)^2 + (1)^2} = \sqrt{50}$$

Відповідь: $d = \sqrt{50}$

3. $\int e^{3x}dx = \dfrac{1}{3}\int e^{3x}d(3x) = (1/3)e^{3x} + C$

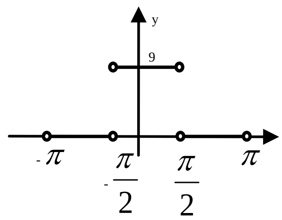
Відповідь: $(1/3)e^{3x} + C$.

4. Оскільки функція Кусково-монотонна, та за теоремою діріхле ряд Фур'є цієї функції в кожній точці збігається до значення
$\dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$



Проводимо функцію на проміжок парним чином.

Знайдемо коефіцієнти: $a^0 = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9dx + \dfrac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0dx = \dfrac{2}{\pi}\cdot 9 \cdot \dfrac{\pi}{2} = 9$



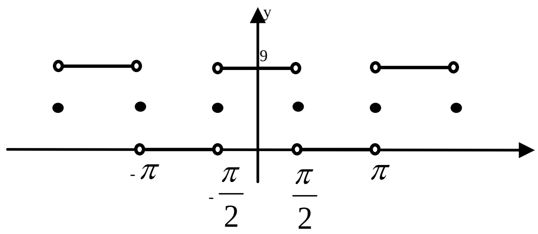
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\cdot\cos(nx)d(nx) + \frac{2}{n\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\cos nx d(nx) =$$

$$= \frac{18}{n\pi}\cdot\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{18}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - 0 = \frac{18}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$bn = 0$

$$f(x) \sim \frac{9}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{18}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\cos nx\right)$$

Графік суми ряду Фур'є.



Відповідь: $f(x) \sim \dfrac{9}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{18}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}\cdot\cos nx\right)$

Завдання № 19

1. Знайдіть похідну від функції $y(x)$: $y(x)=\dfrac{x^5-4x^3+x^2}{x^2}$
2. Знайти середину між двома точками A і B, якщо $A(1;2)$ та $B(2;4)$
3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y=x^2+x$; $y=x+1$.
4. Розвинути в ряд Фур'є функцію f(x) з періодом $T=2\pi$ $f(x)=\begin{cases}17 & -\pi<x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$

Розв'язок:

1. Вихідну функцію можемо дещо спростити, тобто $y(x)=x^3-4x+1$. Тоді похідна від цієї функції буде:

$$y'(x)=3x^2-4$$

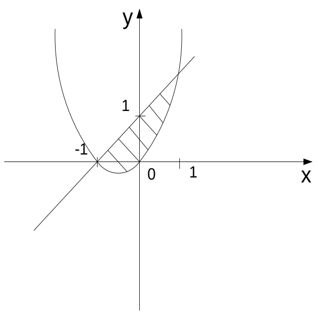
Відповідь: $y'(x)=3x^2-4$

2. Знайдемо точку середини між двома заданими точками A і B:

$$x_{сер}=\frac{1+2}{2}=3/2;\quad y_{сер}=\frac{2+4}{2}=3$$

Відповідь: Середина – це точка з координатами $x_{сер}=3/2$; $y_{сер}=3$

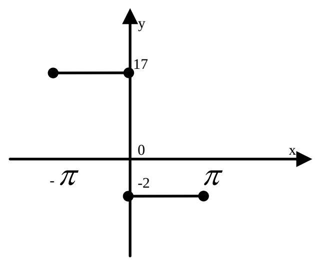
3. Знайдемо точки перетину функцій: $x^2+x=x+1\ \Rightarrow x=\pm1$. Графічне зображення має вигляд



Тоді $S=\int\limits_{-1}^{1}(x+1-(x^2+x))dx=\int\limits_{-1}^{1}(x+1-x^2-x)dx=\int\limits_{-1}^{1}(-x^2+1)dx=(-\dfrac{x^3}{3}+x)=-\dfrac{1}{3}+1-\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$

Відповідь: $S=4/3$.

4. функція кусково-монотонна, то за теоремою Діріхле ряд Фур'є цієї функції в кожній точці збігається до значення $(f(x-0)+f(x+0))/2$

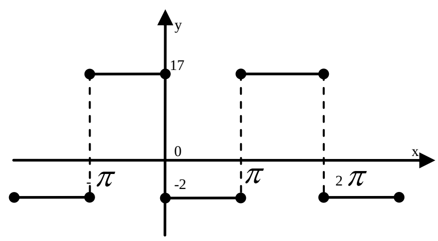


Коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0}17dx+\int\limits_{0}^{\pi}(-2)dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[17x\Big|_{-\pi}^{0}-2x\Big|_{0}^{\pi}\right]=\frac{1}{\pi}\left[17(0-(-\pi))-2(\pi-0)\right]=\frac{1}{\pi}\cdot15\pi=15$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0}17\cos nxdx+\int\limits_{0}^{\pi}(-2)\cos nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{17}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right]=$$

$$\frac{17}{\pi n}\left(\sin0-\sin(-n\pi)\right)-\frac{2}{\pi n}\left(\sin0-\sin\pi n\right)=0$$



$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}17\sin nxdx-\int_{0}^{\pi}2\sin nxdx\right]=-\frac{17}{\pi n}(\cos0-\cos(-\pi n))+$$

$$+\frac{2}{\pi n}(\cos(\pi n)-\cos0)=\frac{2}{\pi n}\left(\left((-1)^n-1\right)-\frac{17}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\right)=\frac{19}{\pi n}((-1)^n-1)$$

$$f(x)\sim\frac{15}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{19}{\pi n}((-1)^n-1)\sin nx$$

Графік суми ряду Фур'є:

Відповідь: $f(x)\sim\dfrac{15}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{19}{\pi n}((-1)^n-1)\sin nx$

Завдання № 20

1. Знайдіть похідну від функції $y(x)$: $y(x)=tg(2x)-\cos^2(4x)$.
2. Чи паралельні прямі, що описуються рівняннями $6x+4y+1=0$ та $3x+2y-7=0$?
3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=4x-x^2$; $y=x$.
4. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом $T=2\pi$, $f(x)=\begin{cases}9, & -\pi<x<0,\\ -2, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

Розв'язок:

1. $y'(x)=\dfrac{2}{\cos^2 2x}+2\cdot 4\cos 4x\sin 4x=\dfrac{2}{\cos^2 2x}+4\sin 8x$

Відповідь: $\dfrac{2}{\cos^2 2x}+4\sin 8x$.

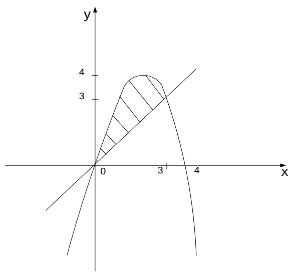
2. Умова паралельності прямих має вигляд:

$$\frac{6}{3}=\frac{4}{2}$$

Рівність справджується, отже прямі паралельні.

Відповідь: паралельні

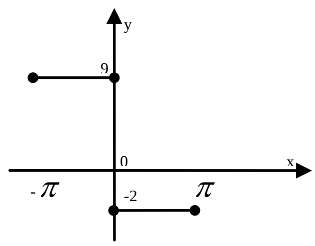
3. Знайдемо точки перетину функцій $x=4x-x^2 \Rightarrow x_1=0\;\; x_2=3$



Тоді $S=\int\limits_0^3(4x-x^2-x)dx=\int\limits_0^3(-x^2+3x)dx=(-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2)+-\dfrac{27}{3}+\dfrac{3}{2}\cdot 9=\dfrac{1}{2}$

Відповідь: $S=1/2$.

4. Оскільки функція кусково-монотонна, то за теоремою Діріхле ряд Фур'є цієї функції в кожній точці збігається до значення: $(f(x-0)+f(x+0))/2$

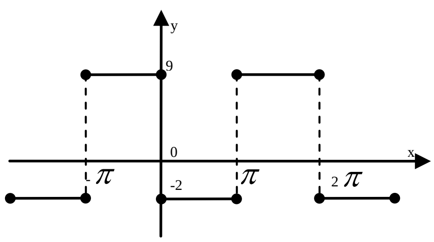


Коефіцієнти ряду:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}dx-2\int_0^{\pi}dx\right)\frac{1}{\pi}\left(9x\Big|_{-\pi}^{0}-2x\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}(0+9\pi-2\pi)=\frac{1}{\pi}\cdot 7\pi=7$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(9\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx-2\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{9}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{9}{n}\sin\pi n-\frac{2}{n}\sin\pi n\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-11}{n}\sin\pi n\right)=-\frac{11}{\pi n}\sin\pi n=0$$



$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(9\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx-2\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{9}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{9}{n}+\frac{9}{n}\cos\pi n+\left(-\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\cos\pi n\right)\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{11}{n}+\frac{11}{n}\cos\pi n\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{11}{n}+\frac{11}{n}(-1)^n\right)$$

$$f(x)\sim\frac{7}{2}+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{11}{n}+\frac{11}{n}(-1)^n\right)\sin nx$$

Графік суми ряду Фур'є:

Відповідь: $f(x)\sim\dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{11}{n}+\dfrac{11}{n}(-1)^n\right)\sin nx$

Завдання № 21

1. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \sin^2(2x)dx$$

2. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+5y-z=10 \\ x+y-2z=6 \\ 2x-y+3z=-8 \end{cases}$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=4x-x^2$; $y=4-x$.

4. Електронний прилад складається з 4 вузлів. Відомо, що вузли виходять з ладу незалежно один від одного. Ймовірність відмови за час t=100 год дорівнює q=0,2. Знайти ймовірність того, що не відмовить рівно один вузол приладу з чотирьох під час роботи приладу.

Розв’язок:

1. Знайдемо інтеграл $\int \sin^2(2x)dx=\int(1-\cos(4x))/2\, dx=0.5x-0.5\int(\cos(4x))dx=0.5x-(\sin(4x))/8+C$.

Відповідь: $0.5x-(\sin(4x))/8+C$.

2 .

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=1(3-2)-5(3+4)-1(-1-2)=-31$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 10 & 5 & -1 \\ 6 & 1 & -2 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix}=10(3-2)-5\cdot2-1\cdot2=-2;$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & 10 & -1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}=1(18-16)-10(3+4)-1(-8-12)=-48$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & -8 \end{vmatrix}=-8-10+60-20+40+6=68.$$

Отже: $x=\Delta x/\Delta=2/31$; $y=\Delta y/\Delta=48/31$; $z=\Delta z/\Delta=-68/31$

Відповідь: $x=2/31; y=48/31; z=-68/31$.

3. Знайдемо точки перетину функцій $4x-x^2=4-x$; $\Rightarrow$ $x=1$;$x=4$

$$S=\int_{4-x}^{4x-x^2} dy \int_1^4 dx=\int_1^4 (5x-x^2-4)\,dx=(5x^2/2-x^3/3-4\cdot x)\Big|_1^4=9/2$$

Відповідь: $S=9/2$

4. За формулою біноміального розподілу ймовірностей можемо знайти ймовірність відмови одного вузла системи: $P_{1,4}=C_4^1(1-q)q^3=4\cdot0{,}8\cdot(0{,}2)^3=0{,}025$

Відповідь: $P_{1,4}=0{,}025$.

Завдання № 22

1. Знайти невизначений інтеграл $\int (\cos(5x) - 4)dx$;

2. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x - 2y - 2z = 6 \\ -2x + y - z = 9 \\ x + y + z = 12 \end{cases}$;

3. Знайти первісну функції $y(x)$, графік якої проходить через точку А: $y = 3x^3 + 2x^2 - x - 1$ A(0;1)

4. Магнітофони однієї моделі виготовляються двома фірмами-розробниками. Відомо, що перша фірма займає на ринку 75% своєї продукції, друга – 25%. Надійність магнітофону під маркою першої фірми складає 0,7; другої фірми – 0,85. Знайти за існуючих умов надійність електронного приладу, що надійшов до реалізації на ринок.

Розв’язок:

1. ∫ (cox(5x)-4)dx=(sin(5x))/5-4x+*C*

Відповідь: (sin(5*x*))/5-4*x*+*C*

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ =1+2+4+2+1-4=6

$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 9 & 1 & -1 \\ 12 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ =60

$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 9 & -1 \\ 1 & 12 & 1 \end{vmatrix}$ =93

$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 12 \end{vmatrix}$ =-81

$x=\Delta x/\Delta=10$; $y=\Delta y/\Delta=31/2$; $z=\Delta z/\Delta= -27/2$;

Відповідь: $x = 10; y = 31/2; z = -27/2$

3. $F(x)=\int (3x^3+2x^2-x-1)\,dx=3\cdot x^4/4+2x^3/3-x^2/2-x+C$; Визначимо сталу C: F(0)=1 $\Rightarrow$ C=1;

Тоді $F(x) = 3\cdot x^4/4+2x^3/3-x^2/2-x+1$

Відповідь: $F(x) = 3\cdot x^4/4+2x^3/3-x^2/2-x+1$

4. Визначимо подію А, як те що прилад було виготовлено і він надійшов до реалізації. Тоді можна скласти 2 гіпотези: H_1 – магнітофон першої фірми-розробника; H_2 – магнітофон другої фірми розробника.
Тоді визначимо умовні ймовірності:
$P(A/H_1)$ – ймовірність появи на ринку магнітофона від першої фірми;
$P(A/H_2)$ – ймовірність появи на ринку магнітофона від другої фірми;
Тоді за формулою повної ймовірності знайдемо надійність електронного приладу:
$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=0{,}7\cdot 0{,}75+0{,}85\cdot 0{,}25= 0{,}74$.

Відповідь : P(A)=0,74.

Завдання № 23

1. Знайти невизначений інтеграл $\int e^{5x-1}dx$;
2. Обчислити $3\log_{1/3} a$, якщо $a = 2\cos(\pi/6)$;
3. Знайти первісну функції $y(x)$, графік якої проходить через точку А, $y = 3\sin(x) - 4\sin^3 x - 1$, A($\pi/3;2$);
4. Розвинути в ряд Фур'є за синусами функції $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$. $f(x) = \begin{cases} 3, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \dfrac{\pi}{2} \le x < \pi. \end{cases}$

Розв'язок:

1. $\int e^{5x-1}dx = 0.2\int e^{5x-1}\quad d(5x-1) = 0.2\cdot e^{5x-1} + C$

Відповідь: $0.2\cdot e^{5x-1} + C$

2. $a = 2\cos(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$ тоді

$$3\log_{\frac{1}{3}} a = -3\log_3 a = -3\log_3 (3)^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}$$

Відповідь: $-3/2$

3. F(x)= ∫ (sin(x)-4·sin³(x)-1)dx= -cos(x)-4 (0.5∫sin(x) dx-0.25∫(sin(3x)-sin(x)) dx=

= -x-cos(3x)/3+2cos(x)+C

Визначимо сталу C: F(π/3)=2; $\Rightarrow C$=(π+2)/3

Тоді F(x)= -x-cos(3x)/3+2cos(x)+(π+2)/3

Відповідь: -x-cos(3x)/3+2cos(x)+(π+2)/3.

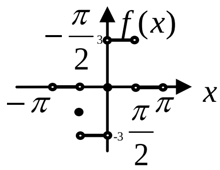
4. Оскільки функція Кусково монотонна, то за теоремою Діріхле ряд Фур'є цієї функції в кожній точці збігається до значення $\dfrac{f(x-o)+f(x+0)}{2}$

Продовжимо функцію на проміжку $(-\pi;0)$ непарним чином.

Коефіцієнти Фур'є:

$a_0 = 0$

$a_n = 0$



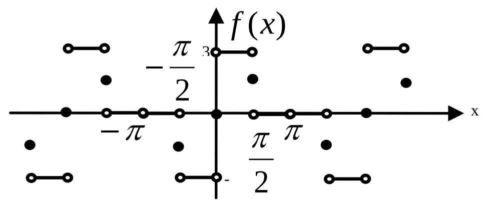
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\cdot\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{3}{n}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{6}{\pi n}\left(\cos\frac{\pi n}{2} - \cos 0\right) =$$

$$= -\frac{6}{\pi n}\left(\cos\frac{\pi n}{2} - 1\right) = \frac{6}{\pi n}\left(1 - \cos\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi n}\left(1 - \cos\frac{\pi n}{2}\right)\sin nx$$

Графік суми ряду Фур'є:



Відповідь: $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi n}\left(1 - \cos\frac{\pi n}{2}\right)\sin nx$

Завдання № 24

1. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x^3+5}{x^2}dx$$

2. Порівняти числа

$$a = \cos 55^\circ \text{ та } b = \cos 1$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - y' = t \qquad y(0) = 0, y'(0) = 2$$

4. Прилад для діагностування системи АРП складається з 2 головних вузлів. Ймовірність виходу з ладу першого вузла становить 0,5; другого - 0,7. Прилад після тривалої бездіяльності перевірили на справність в основних режимах, і виявилося що він не працює. Знайти ймовірність того, що причиною відмови є тільки перший вузол з двох.

Розв'язок:

1. $\int(x^3+5)/x^2\,dx = \int(x+5/x^2)dx = x^2/2 - 5/x + C$

Відповідь: $x^2/2 - 5/x + C$

2. 1 приблизно дорівнює 57°

Так як функція косинус на відрізку [0;90°] спадна ,то cos(55°)>cos(57°)

Тобто $a>b$

Відповідь: $a>b$

3. $y'' - y' = t;$ *Заміна* $z(t) = y'$ та $z' = y''$

Тоді $z' - z = t \Rightarrow z(t) = (\int t \cdot e^{-t} dt + C) \cdot e^t$

Інтегруючи частинами $\int t \cdot e^{-t} dt$, отримаємо: $z(t) = (-te^{-t} + \int e^{-t} dt + C) \cdot e^t = -t - 1 + Ce^t$

$z(0) = 2 \Rightarrow C = 3;$

$z(t) = -t - 1 + 3e^{-t}$

$$y(t) = \int (3e^t - t - 1)dt = 3e^t - \frac{t^2}{2} - t + C$$

$y(0) = 0 \Rightarrow C = -3;$

$$y(t) = 3e^t - \frac{t^2}{2} - t - 3$$

Відповідь: $y(t) = 3e^t - \frac{t^2}{2} - t - 3$.

4. Приймемо, що подія A – прилад за результатами перевірки виявився несправним. Тоді сформуємо такі 4 статистичні гіпотези: H_0 – обидва вузли приладу працюють; H_1 – перший вузол відмовив, а другий ні; H_2 – другий вузол відмовив, а перший ні; H_3 – обидва вузли приладу є несправними. З умови задачі позначимо ймовірність виходу з ладу першого вузла як $q_1=0,5$; другого - $q_2=0,7$.

Тоді $P(H_0)=(1-q_1)(1-q_2)=0,5\cdot 0,3=0,15$; $P(H_1)=(q_1)(1-q_2)=0,5\cdot 0,3=0,15$; $P(H_2)=(1-q_1)q_2=0,5\cdot 0,7=0,35$; $P(H_3)=q_1\cdot q_2=0,5\cdot 0,7=0,35$. Для того щоб скористатися формулою Байєса треба визначити відповідні умовні ймовірності. Зрозуміло, що $P(A/H_0)=0$; $P(A/H_1)=P(A/H_2)=P(A/H_3)=1$. Тоді за формулою Байєса знайдемо шукану ймовірність:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{\sum_{i=0}^{3} P(H_i)P(A/H_i)} = \frac{0,15}{0,15+0,35+0,35} = 0,176.$$

Відповідь: $P(H_1/A)=0,176$.

Завдання № 25

1. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{1}{5x-3}dx$$

2. Порівняти числа

$$a = \sin 1^{\circ} \text{ та } b = \sin 1$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 5y' = t^3 \qquad y(0) = 2, y'(0) = -1$$

4. Система сигналізації складається з 6 незалежних вузлів. Ймовірність відмови будь-якого вузла дорівнює $q = 0,75$. Знайти ймовірність того, що внаслідок інтенсивної роботи на граничному режимі вийдуть з ладу не менше 2 вузли системи.

Розв'язок:

1. ∫1/(5x-3)dx=0.2 ∫1/(5x-3)d(5x-3)=0.2·ln|5x-3| + *C*

Відповідь: 0.2·ln|5*x*-3| + *C*

2. 1 приблизно дорівнює 57°

Так як функція сінус на відрізку [0;90°] зростаюча ,то sin(1°)<sin(1)

Тобто *a*<*b*

Відповідь: *a*<*b*

3. $y'' - 5y' = t^3$ *Заміна* $z(t) = (\int t^3 e^{-5t}dt + C)e^{5t}$

Інтегруючи частинами $\int t^3 e^{-5t}dt$ отримаємо: $z(t) = -\frac{1}{5}(t^3 + \frac{3}{5}t^2 + \frac{6}{25}t + \frac{6}{125} + Ce^{5t})$

$$y'(0) = -1 \Rightarrow C = \frac{619}{125}$$

$$y(t) = \int z(t)dt = -\frac{1}{5}(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{5} + \frac{3t^2}{25} + \frac{6}{125}t + \frac{619}{625}e^{5t}) + C$$

$$y(0) = 2 \Rightarrow C = 2 + \frac{619}{625 \cdot 5}$$

$$y(t) = -\frac{1}{5}(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{5} + \frac{3t^2}{25} + \frac{6}{125}t + \frac{619}{625}e^{5t}) + 2 + \frac{619}{625 \cdot 5}$$

Відповідь: $y(t) = -\frac{1}{5}(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{5} + \frac{3t^2}{25} + \frac{6}{125}t + \frac{619}{625}e^{5t}) + 2 + \frac{619}{625 \cdot 5}$.

4. Згідно формули біноміального розподілу ймовірностей знаходимо, що ймовірність виходу з ладу принаймні одного вузла системи сигналізації дорівнює:

$R_{1,6} = 1 - q^6 =$ 1-(0,75)^6=0,82.

Тоді ймовірність, з якою відмовить рівно один вузол системи за умов того ж розподілу можна знайти за формулою:

$$P_{1,6} = C_6^1(1-q)q^5 = \frac{6!}{1!5!}0,25 \cdot (0,75)^5 = 0,355.$$

Отже, ймовірність того, що вийдуть з ладу не менше 2 вузлів системи визначаємо як

$$R_{2,6} = R_{1,6} - P_{1,6} = 0,82 - 0,355 = 0,465.$$

Відповідь : $R_{2,6}$ =0,465.

Завдання № 26

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\pi}(\sin 3x-5)dx$

2. Обчислити значення похідної у вказаній точці $f''(-2)$, якщо $f(x)=x^3+2x^2+x-3$

3. Розв'язати задачу Коші $y''-5y'=t^2-5 \qquad y(0)=1, y'(0)=2$;

4. Функція $f(x)$ з періодом $T=2\pi$ розвинути в ряд Фур'є. $f(x)=\begin{cases}1, -\pi<x<0\\ -5, 0\le x<\pi\end{cases}$

Розв'язок:

1. $\int_0^{\pi}(\sin(3x)-5)dx=\int_0^{\pi}\sin(3x)dx-\int_0^{\pi}5dx=-\frac{\cos(3x)}{3}-5x=-\frac{\cos(3\pi)}{3}+\frac{\cos(0)}{3}-5\pi=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-5\pi=\frac{2}{3}-5\pi$

Відповідь: $(2/3)-5\pi$

2. $y'=3x^2+4x+1, y''=(y')'$

$y''=6x+4\Rightarrow y''(-2)=-8$

Відповідь: -8

3. $y''-5y'=t^2-5$ зробимо заміну $y'=z(t), y''=z'(t)\to z'-5z=t^2-5$ це лінійне рівняння першого роду з формули $z(t)=e^{5\int dt}(\int(t^2-5)e^{-\int 5dt}dt+c)=e^{5t}(\int(t^2-5)e^{-5t}dt+c)=\int t^2dt+\frac{c}{e^t}=\frac{t^3}{3}-5t+ce^{5t}$

$y=\int z(t)dt=\int\frac{t^3}{3}dt-\int 5tdt+\int ce^{5t}dt=\frac{t^4}{12}-\frac{5t^2}{2}+5ce^{5t}+c1$.

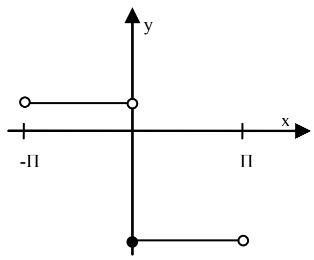
Тепер знайдемо константи підставивши аргумент 0

$\begin{cases}5c+c1=2\\ c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c1=-3\\ c=1\end{cases}$

Відповідь: $y=\frac{t^4}{12}-\frac{5t^2}{2}+5e^{5t}-3$

4. Оскільки функція кусково-монотонною, то за теоремою Дріхле ряд Фур'є цієї функції в кожній точці збігається до значення $(f(x-0)+f(x+0))/2$.

Коефіцієнти ряда Фур'є:



$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}dx-5\int_0^{\pi}dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(x\Big|_{-\pi}^{0}-5x\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}(0+\pi-5\pi)=-4$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx-5\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=$

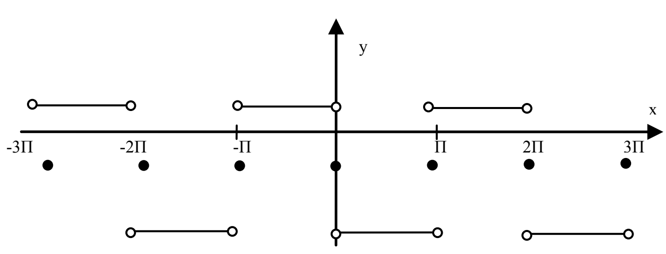
$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{5}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-6}{n}\sin\pi n\right)=\frac{6}{n\pi}\sin\pi n=0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx+\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=$

$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{5}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{6}{n}\cos\pi n-\frac{6}{n}\right)=$

$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{6}{n}(-1)^n-\frac{6}{n}\right)$

$f(x)\sim -2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(\frac{6}{n}(-1)^n-\frac{6}{n}\right)\sin nx$



Графік суми ряду Фур'є:

Відповідь: $f(x)\sim -2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(\frac{6}{n}(-1)^n-\frac{6}{n}\right)\sin nx$

Завдання № 27

1. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{3\pi/2}(\sin^2 2x-5x)dx$

2. Обчислити значення похідної у вказаній точці $f'(5)$, якщо $f(x)=(2x+1)^3$

3. Розв'язати задачу Коші $y''+y'=t^2 \qquad y(0)=0, y'(0)=2$

4. Розвинути в ряд Фур'є функцію f(x) з періодом $T=2\pi$ $f(x)=\begin{cases}17 & -\pi<x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$

Розв'язок:

1. $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}(\sin^2(2x)-5x)dx=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}(\frac{1-\cos(4x)}{2}-5x)dx=\frac{1}{2}x-\frac{\sin(4x)}{8}-\frac{5}{2}x^2=\frac{3\pi}{4}-\frac{\sin(6\pi)}{8}+\frac{\sin(0)}{8}-\frac{\pi^2 45}{8}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi^2 45}{8}$

Відповідь: $3\pi/4-\frac{\pi^2 45}{8}$.

2. $f'(x)=3\cdot(2x+1)^2=y'$

Тоді $y'(5)=3(11)^2=121\cdot 3=363$

Відповідь: 363

3. $y''+5y'=t^2$

зробимо заміну $y'=z(t), y''=z'(t)\to z'+5z=t^2$ це лінійне рівняння першого роду з формули

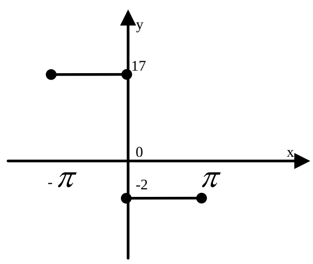
$$z(t)=e^{-\int dt}(\int t^2 e^{\int dt}dt+c)=e^{-t}(\int t^2e^t dt+c)=\int t^2dt+\frac{c}{e^t}=\frac{t^3}{3}+\frac{c}{e^t}$$

$$y=\int z(t)dt=\int\frac{t^3}{3}dt+\int ce^{-t}dt=\frac{t^4}{12}-ce^{-t}+c1$$

Тепер знайдемо константи підставивши аргумент 0

$$\begin{cases}-c+c1=0\\ c=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c1=2\\ c=2\end{cases}$$

Відповідь: $\frac{t^4}{12}-2e^{-t}+2$



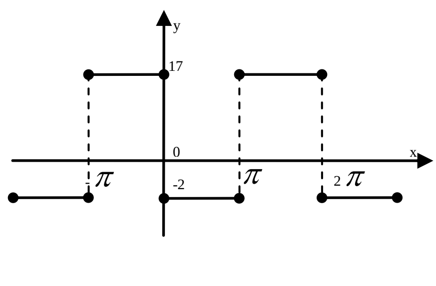
4. Оскільки функція кусково-монотонна, то за теоремою Діріхле ряд Фур'є цієї функції в кожній точці збігається до значення $(f(x-0)+f(x+0))/2$

Коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0}17dx+\int\limits_{0}^{\pi}(-2)dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[17x\Big|_{-\pi}^{0}-2x\Big|_{0}^{\pi}\right]=\frac{1}{\pi}[17(0-(-\pi))-2(\pi-0)]=\frac{1}{\pi}\cdot 15\pi=15$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0}17\cos nxdx+\int\limits_{0}^{\pi}(-2)\cos nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{17}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right]=$$

$$\frac{17}{\pi n}(\sin 0-\sin(-n\pi))-\frac{2}{\pi n}(\sin 0-\sin\pi n)=0$$



$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}17\sin nxdx-\int_0^{\pi}2\sin nxdx\right]=-\frac{17}{\pi n}(\cos 0-\cos(-\pi n))+$$

$$+\frac{2}{\pi n}(\cos(\pi n)-\cos 0)=\frac{2}{\pi n}\left(((-1)^n-1)-\frac{17}{\pi n}(1-(-1)^n)\right)=\frac{19}{\pi n}((-1)^n-1)$$

$$f(x)\sim\frac{15}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{19}{\pi n}((-1)^n-1)\sin nx$$

Графік суми ряду Фур'є:

Відповідь: $f(x)\sim\frac{15}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{19}{\pi n}((-1)^n-1)\sin nx$

Завдання № 28

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\pi} e^{x+5}dx$

2. Обчислити значення похідної у вказаній точці $f'(3)$, якщо $f(x)=(x+3)^2+1$

3. Розв'язати задачу Коші $y''+5y'=t^4 \qquad y(0)=1, y'(0)=2$

4. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом $T=2\pi$, $f(x)=\begin{cases}9, & -\pi<x<0,\\ -2, & 0\le x<\pi\end{cases}$

Розв'язок:

1. $\int_0^{\pi} e^{x+5}dx=\int_0^{\pi} e^{x+5}d(x+5)=e^{\pi+5}-e^5$

Відповідь: $e^{\pi+5}-e^5$

2. $f'(x)=2(x+3)=y'$

$y'(3)=0$

Відповідь: $y'(3)=0$

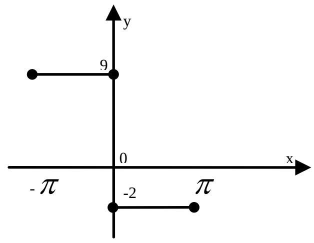
3. $y''+5y'=t^4$ зробимо заміну $y'=z(t), y''=z'(t)\to z'+5z=t^4$ це лінійне рівняння першого роду з формули $z(t)=e^{-\int 5dt}(\int t^4e^{\int 5dt}dt+c)=e^{-5t}(\int t^4e^{5t}dt+c)=\int t^4dt+\frac{c}{e^{5t}}=\frac{t^5}{5}+\frac{c}{e^{5t}}$

$$y=\int z(t)dt=\int\frac{t^5}{5}dt+\int ce^{-5t}dt=\frac{t^6}{30}-5ce^{-5t}+c1$$

Тепер знайдемо константи підставивши аргумент 0

$$\begin{cases}-5c+c1=1\\ c=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=2\\ c1=11\end{cases}$$

Відповідь: $\frac{t^6}{30}-10e^{-5t}+11$



4. Оскільки функція кусково-монотонна, то за теоремою Діріхле ряд Фур'є цієї функції в кожній точці збігається до значення: $(f(x-0)+f(x+0))/2$

Коефіцієнти ряду:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}dx-2\int_0^{\pi}dx\right)\frac{1}{\pi}\left(9x\Big|_{-\pi}^{0}-2x\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}(0+9\pi-2\pi)=\frac{1}{\pi}\cdot 7\pi=7$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(9\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx-2\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{9}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{9}{n}\sin\pi n-\frac{2}{n}\sin\pi n\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-11}{n}\sin\pi n\right)=-\frac{11}{\pi n}\sin\pi n=0$$

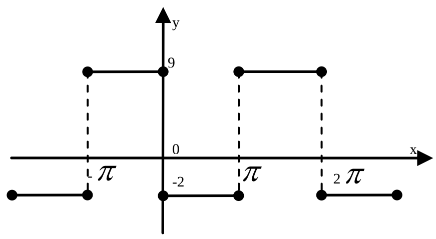
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(9\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx-2\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{9}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{9}{n}+\frac{9}{n}\cos\pi n+\left(-\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\cos\pi n\right)\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{11}{n}+\frac{11}{n}\cos\pi n\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{11}{n}+\frac{11}{n}(-1)^n\right)$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{0}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

$$f(x)\sim\frac{7}{2}+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{11}{n}+\frac{11}{n}(-1)^n\right)\sin nx$$

Графік суми ряду Фур'є:



Відповідь: $f(x)\sim\frac{7}{2}+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{11}{n}+\frac{11}{n}(-1)^n\right)\sin nx$

Завдання № 29

1. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^2 \frac{x^2+5x}{x^2}dx$$

2. Обчислити значення похідної

$$y'(x_0),\text{ якщо } y = 4\cos 2x \text{ де } x_0 = \pi/12$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 5y' = t^4 \qquad y(0) = 0, y'(0) = 2$$

4. Електровимірювальне устаткування здатне працювати у трьох режимах: звичайному, автономному та реверсивному. Звичайний режим використовується у 65% всіх випадків роботи приладу, автономний у 25%; реверсивний у 10%. Ймовірність не спрацювання основного керуючого елементу прилада за час напрацювання 330 годин при звичайному режимі – 0,1; при автономному – 0,3; при реверсивному – 0,8. Визначити ймовірність відмови функціонування електровимірювального устаткування за час що дорівнює 330 годин.

Розв'язок:

1. $\int_0^2 \frac{x^2+5x}{x^2}dx = \int_0^2 dx + \int_0^2 \frac{5}{x}dx = x + 5\ln(x) = 2 + 5\ln(2) - \ln(0) = 2 + 5\ln(2)$.

Відповідь: $2 + 5\ln(2)$

2. $y' = 8\sin(2x)$

$y'(\frac{\pi}{12}) = 8\sin(\frac{\pi}{6}) = 4$.

Відповідь: 4

3. $y'' + 5y' = t^4$ зробимо заміну $y' = z(t), y'' = z'(t) \to z' + 5z = t^4$ це лінійне рівняння першого роду з формули $z(t) = e^{-\int 5dt}(\int t^4 e^{\int 5dt}dt + c) = e^{-5t}(\int t^4 e^{5t}dt + c) = \int t^4 dt + \frac{c}{e^{5t}} = \frac{t^5}{5} + \frac{c}{e^{5t}}$

$$y = \int z(t)dt = \int \frac{t^5}{5}dt + \int ce^{-5t}dt = \frac{t^6}{30} - 5ce^{-5t} + c1$$

Тепер знайдемо константи підставивши аргумент0

$$\begin{cases} -5c + c1 = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c1 = 10 \end{cases}$$

Відповідь: $\frac{t^6}{30} - 10e^{-5t} + 10$

4. Приймемо, що подія А – вихід з ладу устаткування під час роботи. Тоді визначимо такі 3 гіпотези, виходячи з формули повної ймовірності: H_1 – робота устаткування при звичайному режимі; H_2 – робота устаткування при автономному режимі; H_3 – робота устаткування в реверсивному режимі. Тоді з умов задачі відповідні ймовірності дорівнюють: $P(H_1)=0{,}65$; $P(H_2)=0{,}25$; $P(H_3)=0{,}1$. Умовні ймовірності виходу з ладу устаткування при різних режимах роботи дорівнюють: $P(A/H_1)=0{,}1$; $P(A/H_2)=0{,}3$; $P(A/H_3)=0{,}8$. За допомогою формули повної ймовірності отримаємо ймовірність відмови у функціонуванні електровимірювального устаткування з час 330 годин: $P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=0{,}22$

Відповідь: P(A)=0,22.

Завдання № 30

1. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{2\pi} (\cos 3x - 5)dx$$

2. Знайти критичні точки функції

$$y = 3x^4 - 4x^3$$

3. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{2}\sin(x) - \int_0^x \cos 2t dt = 0$$

4. Прилад для діагностування системи АРП складається з 2 головних вузлів. Ймовірність виходу з ладу першого вузла становить 0,5; другого - 0,7. Прилад після тривалої бездіяльності перевірили на справність в основних режимах, і виявилося що він не працює. Знайти ймовірність того, що причиною відмови є тільки перший вузол з двох.

Розв'язок:

1. $\int_0^{2\pi} (\cos(3x) - 5)dx = \int_0^{2\pi} \cos(3x)dx - \int_0^{2\pi} 5dx = \frac{\sin(3x)}{3} - 5x = \frac{\sin(6\pi)}{3} - \frac{\sin(0)}{3} + 10\pi - 0 = 10\pi$

Відповідь: 10π

2. Критичні точки це внутрішні точки області визначення в яких похідна перетворюється в 0 або не існує $y' = 12x^3 - 12x^2$, тоді $12x^3 - 12x^2 = 0$, $x^2(x-1) = 0$

Отже $x = 0, x = 1$

Відповідь: $x = 0, x = 1$

3. $\frac{1}{2}\sin(x) - \int_0^x \cos(2t)dt \Rightarrow \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2t) \to \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x)$

Тоді $\frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$. Отже $\sin(x) - \sin(2x) = 0$.

Таким чином $\sin(x)(1 - 2\cos(x)) = 0$. Звідси $\sin(x) = 0, \cos(x) = \frac{1}{2}$ $\quad x = \pi n, n \in z$

Або $\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in z$

Відповідь: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in z$.

4. Приймемо, що подія А – прилад за результатами перевірки виявився несправним. Тоді сформуємо такі 4 статистичні гіпотези: H_0 – обидва вузли приладу працюють; H_1 – перший вузол відмовив, а другий ні; H_2 – другий вузол відмовив, а перший ні; H_3 – обидва вузли приладу є несправними. З умови задачі позначимо ймовірність виходу з ладу першого вузла як q_1=0,5; другого - q_2=0,7.
Тоді $P(H_0)=(1-q_1)(1-q_2)=0{,}5\cdot0{,}3=0{,}15$; $P(H_1)=(q_1)(1-q_2)=0{,}5\cdot0{,}3=0{,}15$; $P(H_2)=(1-q_1)q_2=0{,}5\cdot0{,}7=0{,}35$; $P(H_3)=q_1\cdot q_2=0{,}5\cdot0{,}7=0{,}35$. Для того щоб скористатися формулою Байєса треба визначити відповідні умовні ймовірності. Зрозуміло, що $P(A/H_0)=0$; $P(A/H_1)=P(A/H_2)=P(A/H_3)=1$. Тоді за формулою Байєса знайдемо шукану ймовірність:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{\sum_{i=0}^{3} P(H_i)P(A/H_i)} = \frac{0{,}15}{0{,}15 + 0{,}35 + 0{,}35} = 0{,}176.$$

Відповідь: $P(H_1/A)=0{,}176$.

Завдання № 31

1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

2. Знайти критичні точки функції $y = 3x^4 - 4x^3$

3. Знайти критичні точки функції

$y = x^2 - 0{,}5x^4$

4. Система сигналізації складається з 6 незалежних вузлів. Ймовірність відмови будь-якого вузла дорівнює $q = 0{,}75$. Знайти ймовірність того, що внаслідок інтенсивної роботи на граничному режимі вийдуть з ладу не менше 2 вузли системи.

Розв'язок:

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = ((-9)+6) - 4\cdot(6-18) + 2\cdot(2-9) = -3 + 48 - 14 = 31;$

Відповідь : $\Delta = 31;$

2. Критичні точки це внутрішні точки області визначення в яких похідна перетворюється в 0 або не існують

$$y' = 12x^3 - 12x^2$$

Тоді $12x^3 - 12x^2 = 0$

$$x^2(x-1) = 0$$

Отже $x = 0, x = 1$

Відповідь: $x = 0, x = 1$

3. Критичні точки – це точки в яких похідна рівна 0 або не існує: $y' = 2x - 2x^3$; $2x\cdot(1-x^2) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \end{array}\right. \longrightarrow x_1 = 0;\ \ x_2 = 1;\ \ x_3 = -1;$$

Відповідь: $x_1 = 0;\ \ x_2 = 1;\ \ x_3 = -1$

4. Згідно формули біноміального розподілу ймовірностей знаходимо, що ймовірність виходу з ладу принаймні одного вузла системи сигналізації дорівнює:

$R_{1,6} = 1 - q^6 = 1\text{-}(0{,}75)^6 = 0{,}82.$

Тоді ймовірність, з якою відмовить рівно один вузол системи за умов того ж розподілу можна знайти за формулою:

$$P_{1,6} = C_6^1(1-q)q^5 = \frac{6!}{1!5!}0{,}25\cdot(0{,}75)^5 = 0{,}355.$$

Отже, ймовірність того, що вийдуть з ладу не менше 2 вузлів системи визначаємо як

$R_{2,6} = R_{1,6} - P_{1,6} = 0{,}82 - 0{,}355 = 0{,}465.$

Відповідь : $R_{2,6} = 0{,}465$.

Завдання № 32

1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити значення похідної

$$y'(x_0),\ \text{якщо}\ y = 4\cos 2x\ \text{де}\ x_0 = \pi/12$$

3. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{2}\sin(x) - \int_0^x \cos 2t dt = 0$$

4. Електронний прилад складається з 4 вузлів. Відомо, що вузли виходять з ладу незалежно один від одного. Ймовірність відмови за час t=100 год дорівнює q=0,2. Знайти ймовірність того, що не відмовить рівно один вузол приладу з чотирьох під час роботи приладу.

Розв'язок:

1. $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 4 + 4\cdot(1+6) + 5\cdot(-12) = -40;$

Відповідь : $\Delta = -40$

2. $y' = 8\sin(2x)$

$y'(\frac{\pi}{12}) = 8\sin(\frac{\pi}{6}) = 4$.

Відповідь: 4

3. $\frac{1}{2}\sin(x) - \int_0^x \cos(2t)dt \Rightarrow \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2t) \to \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x)$

Тоді $\frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$. Отже $\sin(x) - \sin(2x) = 0$.

Таким чином $\sin(x)(1 - 2\cos(x)) = 0$. Звідси $\sin(x) = 0, \cos(x) = \frac{1}{2}$ $\quad x = \pi n, n \in z$

Або $\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in z$

Відповідь: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in z$.

4. За формулою біноміального розподілу ймовірностей можемо знайти ймовірність відмови одного вузла системи: $P_{1,4} = C_4^1(1-q)q^3$ $= 4\cdot 0{,}8\cdot(0{,}2)^3$=0,025

Відповідь: $P_{1,4} = 0{,}025$.

Завдання № 33

1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

2. Обчислити значення похідної у вказаній точці
$f''(-2)$, якщо $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$

3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - y' = t \qquad y(0) = 0, y'(0) = 2$$

4. Електровимірювальне устаткування здатне працювати у трьох режимах: звичайному, автономному та реверсивному. Звичайний режим використовується у 65% всіх випадків роботи приладу, автономний у 25%; реверсивний у 10%. Ймовірність не спрацювання основного керуючого елементу прилада за час напрацювання 330 годин при звичайному режимі – 0,1; при автономному – 0,3; при реверсивному – 0,8. Визначити ймовірність відмови функціонування електровимірювального устаткування за час що дорівнює 330 годин.

Розв'язок:

1. $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 24 + 18 + ((-9) + 20) = -19$

Відповідь: $\Delta = -19$;

2. $y' = 3x^2 + 4x + 1, y'' = (y')'$

$y'' = 6x + 4 \Rightarrow y''(-2) = -8$

Відповідь: -8

3. $y'' - y' = t;$ *Заміна* $z(t) = y'$ та $z' = y''$

Тоді $z' - z = t \Rightarrow z(t) = (\int t \cdot e^{-t} dt + C) \cdot e^{t}$

Інтегруючи частинами $\int t \cdot e^{-t} dt$, отримаємо: $z(t) = (-te^{-t} + \int e^{-t} dt + C) \cdot e^{t} = -t - 1 + Ce^{t}$

$z(0) = 2 \Rightarrow C = 3;$

$z(t) = -t - 1 + 3e^{-t}$

$y(t) = \int (3e^{t} - t - 1) dt = 3e^{t} - \frac{t^2}{2} - t + C$

$y(0) = 0 \Rightarrow C = -3;$

$y(t) = 3e^{t} - \frac{t^2}{2} - t - 3$

Відповідь: $y(t) = 3e^{t} - \frac{t^2}{2} - t - 3$.

4. Приймемо, що подія A – вихід з ладу устаткування під час роботи. Тоді визначимо такі 3 гіпотези, виходячи з формули повної ймовірності: H_1 – робота устаткування при звичайному режимі; H_2 – робота устаткування при автономному режимі; H_3 – робота устаткування в реверсивному режимі. Тоді з умов задачі відповідні ймовірності дорівнюють: $P(H_1)=0{,}65$; $P(H_2)=0{,}25$; $P(H_3)=0{,}1$. Умовні ймовірності виходу з ладу устаткування при різних режимах роботи дорівнюють: $P(A/H_1)=0{,}1$; $P(A/H_2)=0{,}3$; $P(A/H_3)=0{,}8$. За допомогою формули повної ймовірності отримаємо ймовірність відмови у функціонуванні електровимірювального устаткування з час 330 годин: $P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=0{,}22$

Відповідь: P(A)=0,22.

Завдання № 34

1. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}**:** $A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$**;**

2. Порівняти числа

$$a = \cos 55^\circ \text{ та } b = \cos 1$$

3. Знайти первісну функції $y(x)$, графік якої проходить через точку А: $y = 3x^3 + 2x^2 - x - 1$ A(0;1)

4. Магнітофони однієї моделі виготовляються двома фірмами-розробниками. Відомо, що перша фірма займає на ринку 75% своєї продукції, друга – 25%. Надійність магнітофону під маркою першої фірми складає 0,7; другої фірми – 0,85. Знайти за існуючих умов надійність електронного приладу, що надійшов до реалізації на ринок.

Розв'язок:

1. Знайдемо транспоновану матрицю алгебраїчних доповнень($A_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot M_{i,j}$, де $M_{i,j}$ - це мінор). Тоді:

$$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \det A = -8 + 2 = -6; \quad A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix};$$

Зробимо перевірку, перемноживши ці матриці повинна вийти одинична матриця:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Відповідь*:* $A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

2. 1 приблизно дорівнює 57°

Так як функція косинус на відрізку [0;90°] спадна ,то cos(55°)>cos(57°)

Тобто *a*>*b*

Відповідь: *a*>*b*

3. $F(x) = \int (3x^3+2x^2-x-1)\,dx = 3 \cdot x^4/4+2x^3/3-x^2/2-x+C$; Визначимо сталу C: $F(0)=1 \Rightarrow C=1$;

Тоді $F(x) = 3 \cdot x^4/4+2x^3/3-x^2/2-x+1$

Відповідь: $F(x) = 3 \cdot x^4/4+2x^3/3-x^2/2-x+1$

4. Визначимо подію А, як те що прилад було виготовлено і він надійшов до реалізації. Тоді можна скласти 2 гіпотези: H_1 – магнітофон першої фірми-розробника; H_2 – магнітофон другої фірми розробника.
Тоді визначимо умовні ймовірності:
$P(A/H_1)$ – ймовірність появи на ринку магнітофона від першої фірми;
$P(A/H_2)$ – ймовірність появи на ринку магнітофона від другої фірми;
Тоді за формулою повної ймовірності знайдемо надійність електронного приладу:
$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=0{,}7\cdot 0{,}75+0{,}85\cdot 0{,}25= 0{,}74$.

Відповідь : P(A)=0,74.

Завдання № 35

1. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}**:** $A=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$**.**

2. Чи паралельні прямі, що описуються рівняннями $6x+4y+1=0$ та $3x+2y-7=0$?

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y=4x-x^2$$

$y=4-x$

4. Прилад для діагностування системи АРП складається з 2 головних вузлів. Ймовірність виходу з ладу першого вузла становить 0,5; другого - 0,7. Прилад після тривалої бездіяльності перевірили на справність в основних режимах, і виявилося що він не працює. Знайти ймовірність того, що причиною відмови є тільки перший вузол з двох.

Розв'язок:

1. Знайдемо транспоновану матрицю алгебраїчних доповнень($A_{i,j}=(-1)^{i+j}\cdot M_{i,j}$, де $M_{i,j}$ - це мінор).

Тоді: $\left(A^*\right)^T=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; $\det A=3+8=11$; $A^{-1}=\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

Зробимо перевірку, перемноживши ці матриці повинна вийти одинична матриця:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E;$$

Відповідь: $A^{-1}=\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Умова паралельності прямих має вигляд:

$$\frac{6}{3}=\frac{4}{2}$$

Рівність справджується, отже прямі паралельні.

Відповідь: паралельні

3. Знайдемо точки перетину функцій 4x-x²=4 – x; $\Rightarrow$ x=1;x=4

$$S=\int_{4-x}^{4x-x^2} dy \int_1^4 dx=\int_1^4 (5x-x^2-4)\,dx=(5x^2/2-x^3/3-4\cdot x)\Big|_1^4=9/2$$

Відповідь:

4. Приймемо, що подія А – прилад за результатами перевірки виявився несправним. Тоді сформуємо такі 4 статистичні гіпотези: H_0 – обидва вузли приладу працюють; H_1 – перший вузол відмовив, а другий ні; H_2 – другий вузол відмовив, а перший ні; H_3 – обидва вузли приладу є несправними. З умови задачі позначимо ймовірність виходу з ладу першого вузла як $q_1=0,5$; другого - $q_2=0,7$.

Тоді $P(H_0)=(1-q_1)(1-q_2)=0,5\cdot 0,3=0,15$; $P(H_1)=(q_1)(1-q_2)=0,5\cdot 0,3=0,15$; $P(H_2)=(1-q_1)q_2=0,5\cdot 0,7=0,35$; $P(H_3)=q_1\cdot q_2=0,5\cdot 0,7=0,35$. Для того щоб скористатися формулою Байєса треба визначити відповідні умовні ймовірності. Зрозуміло, що $P(A/H_0)=0$; $P(A/H_1)=P(A/H_2)=P(A/H_3)=1$. Тоді за формулою Байєса знайдемо шукану ймовірність:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{\sum_{i=0}^{3}P(H_i)P(A/H_i)}=\frac{0{,}15}{0{,}15+0{,}35+0{,}35}=0{,}176.$$

Відповідь: $P(H_1/A)=0,176$.

Завдання № 36

1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 4x - 2y = 20 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$;

2. Знайти відстань між двома точками A і B, якщо $A(3;2)$ та $B(-4;1)$;

3. Знайти первісну функції $y(x)$, графік якої проходить через точку А: $y = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ A(-1;1)

4. Система сигналізації складається з 6 незалежних вузлів. Ймовірність відмови будь-якого вузла дорівнює $q = 0{,}75$. Знайти ймовірність того, що внаслідок інтенсивної роботи на граничному режимі вийдуть з ладу не менше 2 вузли системи.

Розв'язок:

1. $\begin{cases} 4x - 2y = 20 \ (1) \\ 2x + y = 10 \ (2) \end{cases}$

Помножимо рівняння (2) на 2 отримаємо: $\begin{cases} 4x - 2y = 20 \\ 4x + 2y = 20 \end{cases}$

$$-4y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Віднімемо отримані рівняння: $x = \frac{1}{2}y + 5 = 5$

Відповідь: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$

2. Відстань між двома точками визначається як:

$$d = \sqrt{(7)^2 + (1)^2} = \sqrt{50}$$

Відповідь: $d = \sqrt{50}$

3. Первісна

$$Y = \int y dx = \frac{x^4}{2} + x^3 + 2x^2 + 5x + c$$

Тоді $1 = \frac{1}{2} - 1 + 2 - 5 + c$. Звідси $c = 4\frac{1}{2}$.

Отже первісна матиме вигляд $Y = (x^4/2) + x^3 + 2x^2 + 5x + 4\frac{1}{2}$.

Відповідь: $Y = (x^4/2) + x^3 + 2x^2 + 5x + 4\frac{1}{2}$.

4. Згідно формули біноміального розподілу ймовірностей знаходимо, що ймовірність виходу з ладу принаймні одного вузла системи сигналізації дорівнює:

$R_{1,6} = 1 - q^6 =$ 1-$(0{,}75)^6$=0,82.

Тоді ймовірність, з якою відмовить рівно один вузол системи за умов того ж розподілу можна знайти за формулою:

$$P_{1,6} = C_6^1 (1 - q) q^5 = \frac{6!}{1!5!} 0{,}25 \cdot (0{,}75)^5 = 0{,}355.$$

Отже, ймовірність того, що вийдуть з ладу не менше 2 вузлів системи визначаємо як

$$R_{2,6} = R_{1,6} - P_{1,6} = 0{,}82 - 0{,}355 = 0{,}465.$$

Відповідь : $R_{2,6}$ =0,465.

Завдання № 37

1. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases}2x-5y=30\\5x-2y=10\end{cases}$

2. Обчислити визначник: $\Delta=\begin{vmatrix}3 & 0\\-3 & 2\end{vmatrix}$

3. Знайти первісну функції $y(x)$, графік якої проходить через точку А

$y=4x^2-12x+9 \quad A(0;1)$

4. Магнітофони однієї моделі виготовляються двома фірмами-розробниками. Відомо, що перша фірма займає на ринку 75% своєї продукції, друга – 25%. Надійність магнітофону під маркою першої фірми складає 0,7; другої фірми – 0,85. Знайти за існуючих умов надійність електронного приладу, що надійшов до реалізації на ринок.

Розв’язок:

1. $\begin{cases}2x-5y=30 \quad (1)\\5x-2y=10 \quad (2)\end{cases}$

Помножимо рівняння (1) на 5 та (2) на 2:

$\begin{cases}10x-25y=150\\10x-4y=20\end{cases}$

Віднімемо отримані ці рівняння. Отримаємо: $-21y=130 \Rightarrow y=-130/21$

Виразимо x з першого рівняння:

$x=\frac{5y+30}{2}$

$x=\frac{15\cdot42-130\cdot5}{2\cdot21}=-\frac{10}{21}$

Відповідь: $\begin{cases}x=-10/21\\y=-130/21\end{cases}$

2. $\Delta=\begin{vmatrix}3 & 0\\-3 & 2\end{vmatrix}=6-0=6$

Відповідь: $\Delta=6$

3. $F(x)=\int ydx=\int(4x^2-12x+9)dx=\frac{4}{3}x^3-\frac{12}{2}x^2+9x+C$

$F(x)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+C$

Підставимо в останнє рівняння координати точки A(0;1). Отримаємо: C=1

Тоді рівняння первісної матиме вигляд: $F(x)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+1$

Відповідь: $F(x)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+1$

4. Визначимо подію А, як те що прилад було виготовлено і він надійшов до реалізації. Тоді можна скласти 2 гіпотези: H_1 – магнітофон першої фірми-розробника; H_2 – магнітофон другої фірми розробника.

Тоді визначимо умовні ймовірності:

$P(A/H_1)$ – ймовірність появи на ринку магнітофона від першої фірми;

$P(A/H_2)$ – ймовірність появи на ринку магнітофона від другої фірми;

Тоді за формулою повної ймовірності знайдемо надійність електронного приладу:

$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=0,7\cdot0,75+0,85\cdot0,25=0,74$.

Відповідь : P(A)=0,74.

Завдання № 38

1. Знайдіть похідну від функції $y(x)$: $y(x)=5x+\cos(3x)$**;**
2. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y''+3y'=0$$

3. Знайти найменше значення функції $y=f(x)$ на відрізку [-1,2]

$$f(x)=x^3+(3/2)x^2$$

4. Розвинути в ряд Фур'є синусами f(x) з періодом $T=2\pi$, $f(x)=\begin{cases}8, & 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ 11, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$

Розв'язок:

1. Похідна за змінною x: $y'(x)=5-3\sin 3x$

Відповідь: $y'(x)=5-3\sin 3x$

2. Запишемо характеристичне рівняння:

$k^2+3k=0$; тоді $k_{1,2}=0;-3$. Запишемо розв'язок рівняння: $y=C_1+C_2\cdot e^{-3\cdot x}$

Відповідь: $y=C_1+C_2\cdot e^{-3\cdot x}$.

3. Щоб знайти найменше значення функції на проміжку достатньо провірити значення функції на кінцях проміжку та в критичних точках, які належать цьому проміжку, тобто в таких токах в яких похідна рівна нулю або не існує, та порівняти значення функції в цих точках. Отже:

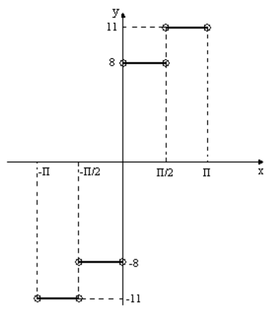
$f(-1)=-1+\dfrac{3}{2}=0,5$; та $f(2)=8+6=14$;

$f'(x)=3\cdot x^2+3\cdot x$; Тоді $x^2+x=0$; Звідси $x_{1,2}=0;-1$;

$f(0)=0$;

$$\min_{x\in[-1;2]} f(x)=f(0)=0$$

Відповідь: $\min\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=f(0)=0$



4. Оскільки функція Кусково-монотонна, то за теоремою Діріхлє ряд Фур'є цієї функції в кожній точці збігається до значення $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

Продовжимо функцію на проміжок (-π;0) непарним чином Коефіцієнти Фур'є знаходяться за формулами:

$a_0=0$

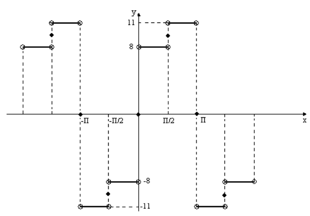
$b_0=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin nx dx+\frac{2}{\pi}\int 11\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{8}{n}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{11}{n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{8}{n}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)-\frac{11}{n}\left((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)=-\frac{2}{\pi n}\left(8\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)+11\left((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2\sin nx}{\pi n}\left(3\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)+11\left((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)$$

Графік суми ряду Фур'є:



Відповідь: $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\dfrac{2\sin nx}{\pi n}\left(3\left(\cos\dfrac{\pi n}{2}-1\right)+11\left((-1)^n-\cos\dfrac{\pi n}{2}\right)\right)$

Завдання № 39

1. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \sin^2(2x)dx$$

2. Знайти розв'язок задачі Коші: $y'' - 3y = 0$;
3. Знайти проміжки зростання функції $y = f(x)$: $f(x) = 4\cos x/2 - x$;
4. Функція $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$ розвинути в ряд Фур'є. $f(x) = \begin{cases} 1, -\pi < x < 0 \\ -5, 0 \le x < \pi \end{cases}$

Розв'язок:

1. Знайдемо інтеграл ∫ sin²(2*x*)dx=∫(1-cos(4*x*))/2 d*x*=0.5*x*-0.5∫(cos(4*x*))d*x*=0.5*x*-(sin(4*x*))/8+C.

Відповідь: 0.5*x*-(sin(4*x*))/8+C.

2. Запишемо характеристичне рівняння:

$k^2 - 3 = 0$; Тоді $k_{1,2} = \pm\sqrt{3}$; Далі запишемо розв'язок рівняння:

$$y = C_1 \cdot e^{\sqrt{3}\cdot x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{3}\cdot x}$$

Відповідь: $y = C_1 \cdot e^{\sqrt{3}\cdot x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{3}\cdot x}$.

3. Функція зростає на проміжку при умові, що похідна цієї функції більша нуля на цьому проміжку, тоді: $f'(x) = -2 \cdot \sin(\frac{x}{2}) - 1$; і $-2 \cdot \sin(\frac{x}{2}) - 1 > 0$;

Звідки $\sin(\frac{x}{2}) < -\frac{1}{2}$;

$\frac{x}{2} \in (-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n), \quad n \in Z$;

$x \in (-\frac{5\pi}{3} + 4\pi n; -\frac{\pi}{3} + 4\pi n), \quad n \in Z$

Відповідь: функція зростає на $x \in (-\frac{5\pi}{3} + 4\pi n; -\frac{\pi}{3} + 4\pi n), \quad n \in Z$

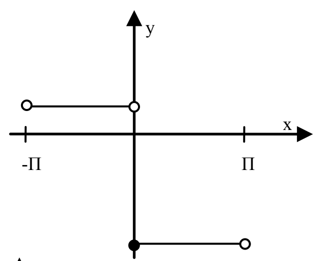
4. Оскільки функція кусково-монотонною, то за теоремою Дріхле ряд Фур́є цієї функції в кожній точці збігається до значення $(f(x-0) + f(x+0))/2$.

Коефіцієнти ряда Фур́є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} dx - 5\int_{0}^{\pi} dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(x\Big|_{-\pi}^{0} - 5x\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(0 + \pi - 5\pi\right) = -4$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \cos nxdx - 5\int_{0}^{\pi} \cos nxdx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{5}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-6}{n}\sin \pi n\right) = \frac{6}{n\pi}\sin \pi n = 0$$

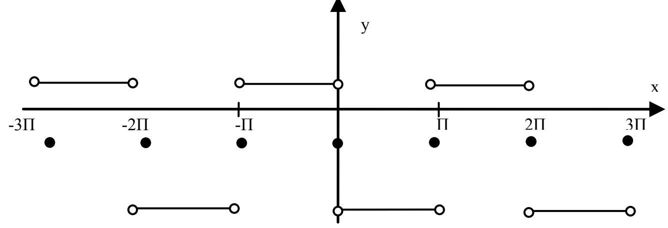


$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \sin nxdx + \int_{0}^{\pi} \sin nxdx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{5}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{6}{n}\cos \pi n - \frac{6}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{6}{n}(-1)^n - \frac{6}{n}\right)$$

$$f(x) \sim -2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{6}{n}(-1)^n - \frac{6}{n}\right)\sin nx$$



Графік суми ряду Фур́є:

Відповідь: $f(x) \sim -2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{6}{n}(-1)^n - \frac{6}{n}\right)\sin nx$

Завдання № 40

1. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^3+5}{x^2}dx$
2. Знайти розв'язок задачі Коші: $y''-5y'=0$;
3. Знайти проміжки зростання функції $y=f(x)$: $f(x)=\cos 2x - x$;
4. Розвинути в ряд Фур'є функцію f(x) з періодом $T=2\pi$ $f(x)=\begin{cases}17 & -\pi<x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$

Розв'язок:

1. 1. $\int(x^3+5)/x^2\,dx=\int(x+5/x^2)dx=x^2/2-5/x+C$

Відповідь: $x^2/2-5/x+C$

2. Запишемо характеристичне рівняння:

$k^2-5k=0$; тоді $k_{1,2}=0;5$; Далі запишемо розв'язок рівняння:

$y=C_1+C_2\cdot e^{5\cdot x}$.

Відповідь: $y=C_1+C_2\cdot e^{5\cdot x}$.

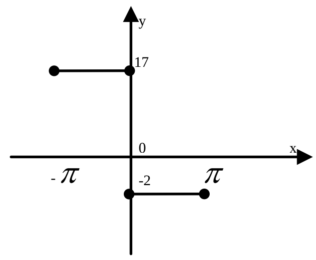
3. Функція зростає на проміжку при умові, що похідна цієї функції більша нуля на цьому проміжку, тоді:

$f'(x)=-2\cdot\sin(2x)-1$;

$-2\cdot\sin(2x)-1>0$; тобто $\sin(2x)<-\frac{1}{2}$;

$2x\in(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;-\frac{\pi}{6}+2\pi n),\quad n\in Z$; А отже $x\in(-\frac{5\pi}{12}+\pi n;-\frac{\pi}{12}+\pi n),\quad n\in Z$

Відповідь: функція зростає на $x\in(-\frac{5\pi}{12}+\pi n;-\frac{\pi}{12}+\pi n),\quad n\in Z$



4. Оскільки функція кусково-монотонна, то за теоремою Діріхле ряд Фур'є цієї функції в кожній точці збігається до значення $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

Коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}17dx+\int_{0}^{\pi}(-2)dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[17x\Big|_{-\pi}^{0}-2x\Big|_{0}^{\pi}\right]=\frac{1}{\pi}\left[17(0-(-\pi))-2(\pi-0)\right]=\frac{1}{\pi}\cdot15\pi=15$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}17\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}(-2)\cos nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{17}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right]=$$

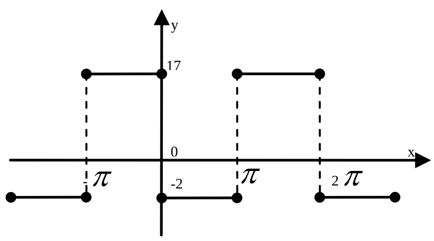
$$\frac{17}{\pi n}\left(\sin 0-\sin(-n\pi)\right)-\frac{2}{\pi n}\left(\sin 0-\sin\pi n\right)=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}17\sin nxdx-\int_{0}^{\pi}2\sin nxdx\right]=-\frac{17}{\pi n}(\cos 0-\cos(-\pi n))+$$

$$+\frac{2}{\pi n}(\cos(\pi n)-\cos 0)=\frac{2}{\pi n}\left(\left((-1)^n-1\right)-\frac{17}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\right)=\frac{19}{\pi n}((-1)^n-1)$$

$$f(x)\sim\frac{15}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{19}{\pi n}((-1)^n-1)\sin nx$$

Графік суми ряду Фур'є:



Відповідь: $f(x)\sim\frac{15}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{19}{\pi n}((-1)^n-1)\sin nx$