Лекция 4

План лекции

1. Специальные свойства отношений
1.1. ***Рефлексивность***
1.2. ***Антирефлексивность***
1.3. ***Симметричность***
1.4. ***Асимметричность***
1.5. ***Антисимметричность***
1.6. ***Транзитивность***
1.7. ***Антитранзитивность***

2. Виды отношений
2.1. Отношения эквивалентности
2.1.1. Свойства эквивалентных отношений
2.1.2. Классы эквивалентности
2.2. Отношения порядка
2.2.1. Способы задавания порядка
2.2.2. Упорядоченное множество
2.2.3. Частично упорядоченное множество
2.2.4. Вполне упорядоченное множество
2.2.5. Линейно упорядоченное множество
2.2.6. Дополнительные определения частично упорядоченных множеств
2.2.7. Диаграммы Хассе
2.2.8. Разбиение частично упорядоченного множества на цепи

Специальные свойства отношений

Рефлексивность

Отношение ***R*** на множестве ***X*** называется ***рефлексивным***, если для любого ***x***Č***X*** имеет место ***xRx***, то есть, каждый элемент ***x***Č***X*** находится в отношении ***R*** к самому себе.

Пример.

$\boldsymbol{R_1}$ — “á” на множестве вещественных чисел,

$\boldsymbol{R_2}$ — “иметь общий делитель” на множестве целых чисел.

Все диагональные элементы *матрицы* равны 1; при задании отношения *графом* каждый элемент имеет петлю – дугу **(*x*, *x*)**.

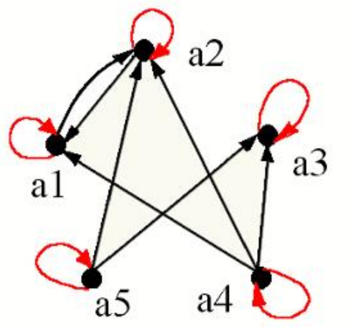
Пример задания рефлексивных отношений

Пусть задано отношение $R \subset A \times A$.

$R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3),$

$(a_4, a_1), (a_4, a_2)(a_4, a_3), (a_4, a_4),$

$(a_5, a_2), (a_5, a_3), (a_5, a_5)\}$



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	1			
a_2	1	1			
a_3			1		
a_4	1	1	1	1	
a_5		1	1		1

Антирефлексивность

Пусть задано отношение $R \subseteq X \times X$

Отношение ***R*** на множестве ***X*** называется ***антирефлексивным***, если из $x_1 R x_2$ следует, что $x_1 \div x_2$.

Пример.

R_1 — “Y” на множестве вещественных чисел,

R_2 — “быть сыном” на множестве людей.

Представление булевой матрицей:

Все **диагональные элементы являются нулевыми**.

Представление графом:

Ни одна **вершина не имеет петли** – нет дуг вида (x_i, x_i).

Симметричность

Пусть задано отношение $R \subseteq X \times X$

Отношение ***R*** на множестве ***X*** называется ***симметричным***, если для пары (x_1,x_2)ČR из $x_1 R x_2$ следует $x_2 R x_1$

(иначе говоря, для любой пары отношение ***R*** выполняется либо в обе стороны, либо не выполняется вообще).

Задание матрицей

Матрица симметричного отношения является **симметричной относительно главной диагонали**.

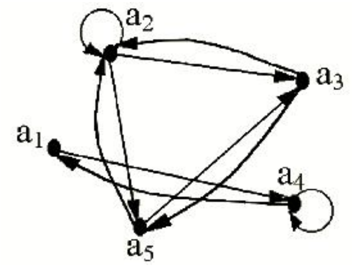
Задание графом

В графе для каждой дуги из x_i в x_k **существует противоположно направленная дуга** из x_k в x_i.

Пример задания симметричных отношений

Пусть задано отношение $R \subset A \times A$.

$$R = \{(a_1, a_4), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_2, a_5), (a_3, a_5), (a_3, a_2),$$
$$(a_4, a_4), (a_4, a_1), (a_5, a_2), (a_5, a_3)\}$$



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1				1	
a_2		1	1		1
a_3		1			1
a_4	1			1	
a_5		1	1		

Асимметричность

Отношение R называется ***асимметричным***, если для пары **(**x_1**,**x_2**)** ČR из x_1Rx_2 следует, что не выполняется x_2Rx_1**.**

(иначе говоря, для любой пары отношение R выполняется либо в одну сторону, либо не выполняется вообще).

Пример.

R_1 — “>” на множестве вещественных чисел,

R_2 — “быть сыном” на множестве людей.

Задание матрицей

Матрица асимметричного отношения не содержит единичных элементов, симметричных относительно главной диагонали.

Задание графом

В графе полностью отсутствуют противоположно направленные дуги.

Антисимметричность

Пусть задано отношение $R \subseteq X \times X$

Отношение R называется ***антисимметричным***, если из x_1Rx_2 и x_2Rx_1 следует, что x_1=x_2.

Пример.

R_1 — “á” на оси действительных чисел .

R_2 — “есть делителем”– на множестве действительных чисел.

Транзитивность.

Пусть задано отношение $R \subseteq X \times X$

Отношение ***R*** называется ***транзитивным***, если для любых $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3}$ из $\boldsymbol{x_1 R x_2}$ и $\boldsymbol{x_2 R x_3}$ следует $\boldsymbol{x_1 R x_3}$.

Пример.

R — “á” и “<” на множестве действительных чисел – транзитивны.

Задание графом

В графе, задающем транзитивное отношение ***R***, для всякой пары дуг таких, что конец первой совпадает с началом второй, существует третья дуга, имеющая общее начало с первой и общий конец со второй.

Антитранзитивность

Отношение ***R*** называется ***антитранзитивным***, если для любых $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3}$ из $\boldsymbol{x_1 R x_2}$ и $\boldsymbol{x_2 R x_3}$ следует, что $\boldsymbol{x_1 R x_3}$ не выполняется.

Пример.

$\boldsymbol{R_1}$ — “быть следующим годом” на множестве лет,

$\boldsymbol{R_2}$ — “быть отцом” на множестве людей.

Пример.

Пусть $X = \{\sim,\ \ ,¥,¢\}$. Пусть $R \subseteq X \times X$ определено в виде

$R = \{(\sim,\sim),(\sim,\ \ ),(\sim,¢),(\ \ ,\sim),(¢,\sim),(¢,¢),(¥,¢),(¥,¥)\}$.

1. R не является рефлексивным, поскольку $\ \ \in X$, но $(\ \ ,\ \ ) \notin R$.
2. R не является симметричным, поскольку $(¥,¢) \in R$, но $(¢,¥) \notin R$.
3. R не является антисимметричным, поскольку $(\sim,\ \ ) \in R$ и $(\ \ ,\sim) \in R$, но $\sim \neq\ \ $.
4. R не является транзитивным, поскольку $(\ \ ,\sim) \in R$, $(\sim,¢) \in R$, но $(\ \ ,¢) \notin R$.

Виды отношений

1. Отношения эквивалентности

Некоторые элементы множества можно рассматривать как эквивалентные в том случае, когда любой из этих элементов при некотором рассмотрении может быть заменен другим. В этом случае говорят, что данные элементы находятся в отношении эквивалентности.

Отношение R на множестве X является **отношением эквивалентности,** если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

1. Свойство **рефлексивности** проявляется в том, что каждый элемент эквивалентен самому себе или $x \equiv x$.
2. Высказывание, что два элемента являются эквивалентными, не требует уточнения, какой из элементов рассматривается первым, какой вторым, т. е. имеет место $x \equiv y \to y \equiv x$ - свойство **симметричности.**
3. Два элемента, эквивалентные третьему, эквивалентны между собой, или имеет место $x \equiv y$ и $y \equiv z \to z \equiv z$ - свойство **транзитивности.**

В качестве общего символа отношения эквивалентности используется символ «$\equiv$ » (иногда символ «$\sim$»). Для отдельных частных отношений эквивалентности используются другие символы:

«=»-для обозначения равенства;

«$\|$ » - для обозначения параллельности;

«$\leftrightarrow$ » или «$\rightleftarrows$ »- для обозначения логической эквивалентности.

Пример. Пусть $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ и дано отношение R на A:

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(1,4),$
$(2,1),(2,4),(3,5),(5,3),(4,1),(4,2)\}$

Легко проверить, что данное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Поэтому оно является отношением эквивалентности на множестве A.

Отношение эквивалентности R на множестве A разбивает его на подмножества, элементы которых эквивалентны друг другу и не эквивалентны элементам других подмножеств. В контексте отношений эквивалентности эти подмножества называются ***классами эквивалентности*** по отношению R.

Это разбиение можно представлять себе следующим образом. Пусть множество A — это набор разноцветных шаров, а отношение R задается условием: $(a,b) \in R$ тогда и только тогда, когда a и b имеют одинаковый цвет. Поскольку R — отношение эквивалентности, каждый класс эквивалентности будет состоять из шаров, имеющих одинаковый цвет. Если определить отношение R условием: $(a,b) \in R$ тогда и только тогда, когда шары a и b имеют одинаковый диаметр, то каждый класс эквивалентности будет состоять из шаров одинакового размера.

Пусть $a \in A$ и R — отношение эквивалентности на $A \times A$. Пусть $[a]$ обозначает множество $\{x | xRa\} = \{x | (x,a) \in R\}$, называемое ***классом эквивалентности***, содержащим a. Символ $[A]_R$ обозначает множество всех классов эквивалентности множества A по отношению R.

Пример. Пусть $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ и дано отношение эквивалентности:

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(1,4),$
$(2,1),(2,4),(3,5),(5,3),(4,1),(4,2)\}$

Классы эквивалентности по отношению R были получены путем определения класса эквивалентности каждого элемента множества A:

$[1] = \{x \mid (x,1) \in R\} = \{x \mid xR1\} = \{1,2,4\}$

где $1 \in [1]$, поскольку $(1,1) \in R$, $2 \in [1]$ т. к. $(2,1) \in R$, $4 \in [1]$ поскольку $(4,1) \in R$, и не существует никакого иного x из A такого, что $(x,1) \in R$.

Точно так же, получаем

$[2] = \{x \mid (x,2) \in R\} = \{x \mid xR2\} = \{2,1,4\}$

$[3] = \{x \mid (x,3) \in R\} = \{x \mid xR3\} = \{3,5\}$

$[4] = \{x \mid (x,4) \in R\} = \{x \mid xR4\} = \{4,1,2\}$

$[5] = \{x \mid (x,5) \in R\} = \{x \mid xR5\} = \{5,3\}$

$[6] = \{x \mid (x,6) \in R\} = \{x \mid xR6\} = \{6\}$