

**7. Рівномірно збіжні функціональні ряди. Теорема про диференціювання рівномірно збіжних функціональних рядів.**

**Означення 4.3 (рівномірної збіжності).** Функціональний ряд  $\sum u_n(x)$  називають *рівномірно збіжним* на множині  $D_{\text{рів}}$  до суми  $S(x)$ ,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow \\ |R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D_{\text{рів}}.$$

$$\boxed{D_{\text{рів}} \subset D \subset X}$$

Використовують позначення

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow S(x), x \in D_{\text{рів}}.$$

Практично рівномірна збіжність ряду означає, що суму ряду  $S(x)$  на проміжку  $(a; b)$  можна наближено, з наперед заданою точністю, замінити однією і тією самою частковою сумою  $S_n(x)$ :

$$S(x) \approx S_n(x), x \in (a; b).$$

### 4.3. Властивості рівномірно збіжних рядів

**Властивість 1.** Сума членів рівномірно збіжного на деякому проміжку ряду неперервних функцій є функція, неперервна на цьому проміжку.

**Властивість 2.** Якщо на відрізку  $[a; b]$  функціональний ряд  $\sum u_n(x)$  рівномірно збіжний і члени ряду неперервні на відрізку  $[a; b]$ , то його можна почленно інтегрувати в межах  $(\alpha; \beta)$ , де  $(\alpha; \beta) \subset [a; b]$ :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) dx.$$

**Властивість 3.** Якщо функціональний ряд  $\sum u_n(x)$  збіжний на відрізку  $[a; b]$ , а його члени мають неперервні похідні  $u'_n(x)$ ,  $x \in [a; b]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , причому ряд  $\sum u'_n(x)$  рівномірно збіжний на  $[a; b]$ , то заданий ряд можна почленно диференціювати:

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), x \in [a; b].$$

### 63.3. Свойства степенных рядов

Сформулируем без доказательства *основные свойства* степенных рядов.

1. Сумма  $S(x)$  степенного ряда (62.3) является непрерывной функцией в интервале сходимости  $(-R; R)$ .

2. Степенные ряды  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ , имеющие радиусы сходимости соответственно  $R_1$  и  $R_2$ , можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел  $R_1$  и  $R_2$ .

3. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать; при этом для ряда

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (63.3)$$

при  $-R < x < R$  выполняется равенство

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n \cdot a_n x^{n-1} + \dots \quad (63.4)$$

4. Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости; при этом для ряда (63.3) при  $-R < a < x < R$  выполняется равенство (см. замечание 1, с. 416)

$$\int_a^x S(t) dt = \int_a^x a_0 dt + \int_a^x a_1 t dt + \int_a^x a_2 t^2 dt + \dots + \int_a^x a_n t^n dt + \dots \quad (63.5)$$