1. Диференційовність функції багатьох змінних в точці. Поняття диференціалу в точці та його властивості. Наближені обчислення за допомогою диференціала.

Нехай маємо неперервну гладку функцію $y = f(x)$ на проміжку $x \in [a,b]$. Тоді вона має похідну на ньому і вона виражається залежністю

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тоді відношення приросту функції до відношення приросту аргументу рівне

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

або

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, причому α - нескінченно мала величина порядку Δx. Тому перший доданок

$$f'(x)\Delta x$$

дає найбільший вклад та є головною частиною приросту функції, також він лінійний відносно приросту аргументу. Другий доданок при обчисленнях відкидають, а перший визначають при наближених обчисленнях та називають диференціалом функції

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛУ

Властивості диференціалу слідують із властивостей похідних.

1) $dC = 0$

2) $d(au \pm b\upsilon) = adu \pm bd\upsilon, (a,b = const)$

3) $d(u \pm \upsilon) = du \pm d\upsilon$

4) $d(u \cdot \upsilon) = ud\upsilon + \upsilon du$

5) $d\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right) = \dfrac{\upsilon du - ud\upsilon}{\upsilon^2}$

Застосування диференціала в наближених обчисленнях

Приріст Δy функції y = f(x) у точці x можна наближено замінити диференціалом dy в цій точці: Δy$\approx$dy. Підставивши сюди значення Δy і dy, дістанемо

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

Абсолютна похибка величини Δy — dy є при Δx $\to$0 нескінченно малою вищого порядку, ніж Δx, тому що при f' (x) $\approx$0 величини Δy і dy еквівалентні:

$$\lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x}{f'(x)\Delta x} = 1$$

Іноді користуються наближеною рівністю

f(x + Δx)$\approx$ f(x). (2)

Якщо функція y = f (x) диференційовна в точці x, то абсолютна похибка формули (2) наближено дорівнює абсолютній величині диференціала:

$$|f(x+\Delta x) - f(x)| = |\Delta y| \approx |dy| = |f'(x)\Delta x|.$$

Відносна похибка формули (2) визначається за формулою

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left[\frac{dy}{y}\right[.$$

2. Диференціювання складних функцій багатьох змінних.

Якщо функція $u = \varphi(x)$ диференційовна в точці x_0, а функція $y = f(u)$ диференційовна в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ також диференційовна в точці x_0 та

$$y'(x_0) = f'(u_0)\varphi'(x_0), u = \varphi(x).$$

Повна похідна функції — похідна функції по часу вздовж траєкторії. Нехай функція має вигляд $f(t, u, v, \ldots, z)$ і її аргументи залежать від часу: $u = u(t, x_1, \ldots, x_n), v = v(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, z = z(t, x_1, \ldots, x_n)$. Тоді $f(t, u, v, \ldots, z) = g(t, x_1, \ldots, x_n)$, де $x_1, \ldots, x_n$ — параметри, що задають траєкторію. Повна похідна функції f (у точці $(t, u, v, \ldots, z)$) у такому випадку дорівнює частковій похідній g по часу (у відповідній точці $(t, x_1, \ldots, x_n)$) і обчислюється за формулою:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t},$$

де $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial t}$ — часткові похідні. Варто зазначити, що позначення $\frac{df}{dt}$ є умовним і не стосується операції ділення диференціалів. Окрім цього, повна похідна функції залежить не лише від самої функції, але й від траєкторії.

3. Існування неявно заданої функції та її диференціювання

Функція, задана рівнянням $F(x, y) = 0$, що не розв'язане відносно залежної змінної y, називається *неявною функцією*.

10.3. Диференціювання неявних функцій

Нехай диференційовну функцію $y = y(x)$ задано неявно рівнянням

$$F(x, y) = 0.$$

Якщо в рівнянні $F(x, y) = 0$ під y розуміти функцію $y(x)$, то це рівняння перетворюється на тотожність за аргументом x:

$$F(x, y(x)) = 0, \forall x \in X.$$

Продиференціюймо його за x, вважаючи, що y є функцією x, і дістанемо лінійне щодо y' рівняння, яке також містить змінні x та y.

Розв'язуючи його щодо y', знайдемо шукану похідну функції $y = f(x)$, заданої неявно

$$y'_x = g(x, y).$$

4. Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціалу двох змінних.

Дотичною площиною до поверхні S в точці M_0 називається площина, що містить всі дотичні до ліній, які проведені на поверхні S через точку M_0.

Нормаллю до поверхні S в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ називається пряма, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини, проведеної в точці M_0 до поверхні S.

Рівняння нормалі – це рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданої площини. А саме до дотичної площини, вектором нормалі якої є вектор з координатами $\vec{n}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}; \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}; -1\right)$.

Геометричний зміст диференціалу зрозумілий з рисунка.

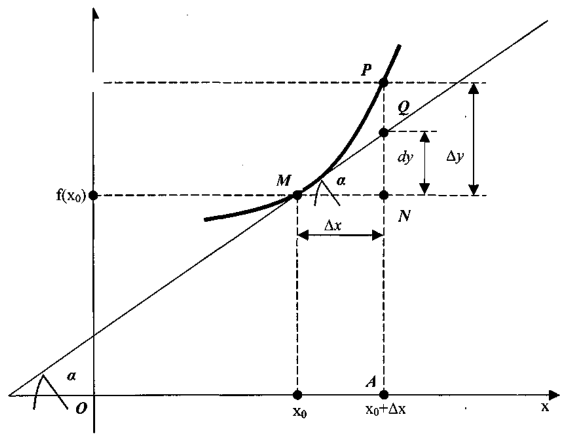


Рис. 1

Маємо PN = Δ y, QN = MN tg α = Δ xf'(x) = f′(x) dx = dy.

Отже, маємо функції f (x) при заданих значеннях x0 і Δ x дорівнюють приросту ординати дотичної до кривої y = f (x) в точці x0 . Приріст функції Δ y при цьому дорівнює приросту ординати кривої. Таким чином, заміна приросту функції на її диференціал геометричне означає заміну ординати AP кривої ординатою дотичної AQ. Зрозуміло, що така заміна доцільна для достатньо малих значень Δ x.

5. Скалярне поле. Похідна скалярного поля за напрямом. Градієнт скалярного поля та його властивості.

Нехай на області $D_f \subset R^2$ задано функцію

$$z = f(x, y). \qquad (1.1)$$

Тоді кажуть, що в області D_f задане **скалярне поле**.

Границя відношення $\frac{\Delta z}{\Delta s}$, якщо $\Delta s \to 0$ називається похідною від функції $z = f(x, y)$ в точці (x, y) за напрямком вектора $\vec{S}$ і позначається $\frac{\partial z}{\partial s}$, тобто $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\partial z}{\partial s}$.

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta.$$

Градієнт скалярного поля

Нехай у кожній точці області $D_f \subset R^2$ скалярне поле задане функцією

$$z = f(x, y). \quad (3.1)$$

Для кожної точки $M(x, y) \in D_f$ визначимо вектор, проекціями якого на осі OX та OY є значення частинних похідних $\frac{\partial f}{\partial x}$ та $\frac{\partial f}{\partial y}$ функції (3.1) у відповідній точці і позначимо його

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}. \quad (3.2)$$

Тобто, координати вектора $\operatorname{grad} z$ є такими $\left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Вектор $\operatorname{grad} z$ називається вектором-**градієнтом** функції (3.1). Кажуть, що в області D_f визначене **векторне поле градієнтів**.

6. Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Теорема Шварца.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x; y)$.

Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y незмінною, так, щоб точка $M_1(x + \Delta x; y)$ належала заданому околу.

Величина

$$\Delta_x \quad z = f(x + \Delta x; y) - f(x, y)$$

, називається частинним приростом функції $f(x, y)$ за змінною x.

Аналогічно вводиться частинний приріст $\Delta_y z$ функції за змінною y : $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Якщо існує границя $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

то вона називається частинною похідною функції $f(x, y)$ в точці $M(x; y)$ за змінною x і позначається одним із таких символів:

$$z'_x, \quad f'_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Аналогічно частинна похідна функції $f(x, y)$ за y визначається як границя

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

і позначається одним із символів: $z'_y, \quad f'_y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$.

Теорема Шварца (про мішані похідні).Якщо функція $f(x,y)$ визначена разом із своїми похідними f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$, причому похідні f''_{xy} та f''_{yx} неперервні в точці M_0, то в цій точці

$$f''_{xy}|_{M_0} = f''_{yx}|_{M_0}.$$

7. Локальний екстремум функції багатьох змінних: означення, необхідна та достатня умови існування

Точка $M_0(x_0,y_0)$ називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції (1.1), якщо існує δ -окіл цієї точки $U_\delta(M_0)\subset D_f$ такий, що для довільної відмінної від M_0 точки $M(x,y)\in U_\delta(M_0)$ виконується відповідна нерівність

$f(x_1,y_1) < f(x_0,y_0)$ – точка максимуму, (1.2)

$f(x_1,y_1) > f(x_0,y_0)$ – точка мінімуму. (1.3)

Значення функції у точках максимуму та мінімуму називають відповідно максимумом та мінімумом функції. Максимум і мінімум функції називають **екстремумами** функції.

Значення функції z у точці екстремуму (максимуму або мінімуму) називається локальним екстремумом (максимумом або мінімумом) цієї функції.

Теорема 1.1 (необхідна умова екстремуму).

Нехай функція $z=f(x,y)$ має в точці $M_0(x_0,y_0)$ екстремум. Тоді, якщо існують похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ в точці $M_0(x_0,y_0)$, то вони дорівнюють нулеві.

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = 0 \end{cases}.$$

Теорема 2.1. (Достатня умова екстремуму)

Нехай функція $z=f(x,y)$ в околі деякої стаціонарної точки $M_0(x_0,y_0)$ тричі диференційовна і двічі неперервно диференційовна в точці M_0. Тоді в точці M_0 існує другий диференціал $d^2z|_{M_0}$. Якщо

- $d^2z|_{M_0}$ – додатно визначена квадратична форма, то в точці M_0 функція досягає свого локального мінімуму;
- $d^2z|_{M_0}$ – від'ємно визначена квадратична форма, то в точці M_0 функція досягає свого локального максимуму.

8. Квадратична форма n-змінних: означення, знаковизначеність. Критерій Сільвестра.

Квадратичною формою B двох змінних x,y називається вираз

$$B = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \quad (2.1)$$

де a_{ij}, $i=1,2$, $j=1,2$ – деякі константи.

Означення 2.1. Квадратична форма називається додатно визначеною, якщо вона набуває додатні значення для всіх значень змінних x,y, за винятком $x=0, y=0$, де вона дорівнює нулю.

Квадратична форма називається від'ємно визначеною, якщо вона набуває лише від'ємні значення для всіх значень змінних x,y за винятком $x=0, y=0$.

Квадратична форма, яка набуває як від'ємні, так і додатні значення при різних значеннях змінних x,y, називається знаконевизначеною.

Твердження (критерій Сільвестра).

Квадратична форма (2.1) є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли всі головні мінори її матриці більші за нуль, тобто

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det B > 0.$$

9. Умовний екстремум функції багатьох змінних: означення, необхідна умова існування. Обчислення методом виключення і Лагранжа.

Функція має в точці $M_0(x_0, y_0)$ умовний максимум (мінімум), якщо для будь-якої точки $M(x, y) \in U_\delta(M_0)$ за умови, що координати точок M та M_0 задовольняють умови зв'язку (3.2), виконується нерівність $f(M) \le f(M_0)$; $f(M) \ge f(M_0)$.

Теорема 22. (Необхідна умова існування умовного екстремуму.) Для того щоб точка $(x_0;\ y_0)$ була точкою умовного екстремуму функції $u = f(x;\ y)$ при рівнянні зв'язку $\varphi(x;\ y) = 0$, необхідно, щоб її координати при деяких значеннях λ задовольняли систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x;y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x;y)}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x;y) = 0. \end{cases}$$

Прямий метод знаходження точок умовного екстремуму (метод виключення)

Якщо рівняння зв'язку $\varphi(x;\ y) = 0$ можна розв'язати відносно змінної y, наприклад, $y = \varphi_1(x)$, тоді дослідження функції $u = f(x;y)$ на умовний екстремум при обмеженні (5.6) зводиться до дослідження на звичайний (безумовний) екстремум функції однієї змінної x:

$u = f(x; \varphi_1(x))$.

Метод Лагранжа знаходження точок умовного екстремуму

Нехай функції $u = f(x;y)$ та $v = \varphi(x;y)$ неперервно диференційовні в околі $(x_0;y_0)$ і ранг матриці Якобі $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix}$ дорівнює 1 у точках, що задовольняють рівняння зв'язку.

Означення. Функцію $L(x;y) = f(x;y) + \lambda\varphi(x;y)$ називають функцією Лагранжа, параметр λ — множником Лагранжа.

10. Поняття подвійного інтегралу, його обчислення по прямокутній та довільній області. Геометричний зміст. Фізичні застосування подвійного інтеграла. Теорема про середнє в подвійному інтегралі.

Подвійним інтегралом *від функції* $f(x, y)$ *за областю* D *називається границя*

$$\lim_{d\to 0} V_n = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i, \qquad (1.1)$$

якщо ця границя:

а) існує;

б) не залежить від вибору розбиття $S_1, S_2, \dots, S_n$ *(при* $d \to 0$*);*

в) не залежить від вибору точок $P_i(\xi_i, \eta_i)$ *в* S_i.

Отже, подвійним інтегралом є:

$$\iint_D f(x, y)dS \overset{def}{=} \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i,$$

де $f(x, y)$ називається **підінтегральною функцією**, D – **областю інтегрування**; dS – **диференціалом площі**.

У прямокутній системі координат диференціал площі dS дорівнює: $dS = dxdy$; тоді інтеграл можна записати

$$\iint_D f(x, y)dS = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

Теорема 1.1. ***(про існування подвійного інтеграла)****. Якщо функція* $f(x, y)$ *неперервна в обмеженій замкненій області* D*, то границя (1.1) інтегральної суми існує і не залежить ні від розбиття* $S_1, S_2, \dots, S_n$*, ні від вибору точок* $P_1, P_2, \dots, P_n$*, тобто існує подвійний інтеграл* $\iint_D f(x, y)dS$.

Геометричний зміст подвійного інтеграла. Якщо $f(x, y) \ge 0$, то подвійний інтеграл від цієї функції по області D дорівнює об'єму циліндричного тіла, основою якого є область D. Це тіло зверху обмежене поверхнею $z = f(x, y)$, а збоку – циліндричною поверхнею з твірними, паралельними до осі Oz (рис. 2).

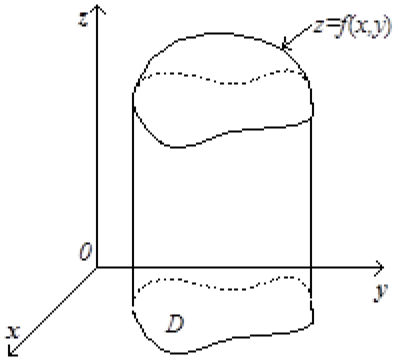


Рис. 2. Геометричний зміст подвійного інтеграла

Теорема 1.2 ***(про середнє значення).*** *Подвійний інтеграл від неперервної в області* D *функції* $f(x,y)$ *дорівнює добутку площі цієї області на значення функції в деякій точці* P *цієї області, тобто*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(P)\cdot S.$$

Число $f(P)=\dfrac{\iint_D f(x,y)dxdy}{S}$ називається **середнім значенням функції в області** D**.**

Фізичні застосування

1) Матеріальна пластина, що займає область D у площині Oxy і характеризується поверхневою густиною $\mu(x,y)$, має масу:

$$m=\iint_D \mu(x,y)\,dxdy.$$

2) Середня густина пластини: $\mu_{сер}=\dfrac{m}{S}=\iint_D \mu(x,y)\,dxdy\Big/\iint_D dxdy.$

3) Статичні моменти пластини відносно осей Ox, Oy відповідно

$$M_x=\iint_D y\,\mu(x,y)\,dxdy;\quad M_y=\iint_D x\,\mu(x,y)\,dxdy.$$

4) Координати центра маси пластини відповідно

$$x_c=M_y/m;\quad y_c=M_x/m.$$

5) Моменти інерції пластини відносно осей Ox, Oy та відносно початку координат:

$$I_x=\iint_D y^2\,\mu(x,y)\,dxdy;\quad I_y=\iint_D x^2\,\mu(x,y)\,dxdy;$$

$$I_0=\iint_D (x^2+y^2)\,\mu(x,y)\,dxdy=I_x+I_y.$$

Зауваження. Якщо пластина однорідна, то $\mu=\mu_0=\text{const}$.

11. Поняття подвійного інтегралу Рімана по області, необхідна умова існування, класи інтегрованих функцій, геометричний та фізичний зміст. Властивість лінійності в подвійному інтегралі.

Означення (подвійний інтеграл за областю)

Нехай f - дійсна функція, визначена в обмеженій замкненій області $D \subset R^2$, а P - довільний прямокутник зі сторонами, паралельними до координатних осей, який містить D. Визначимо в прямокутнику P функцію f^* наступним чином:

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases}.$$

Якщо функція f^* інтегровна за прямокутником P, то говоримо, що функція f інтегровна за областю D, а значення $\iint_D f^*(x,y)dxdy$ називаємо **подвійним інтегралом (Рімана) функції** ***f*** **за областю** ***D*** та позначаємо $\iint_D f(x,y)dxdy$ або $\iint_D f$.

Класи інтегрованих функцій

Теорема (Інтегрованість неперервних функцій).

Функція f(x), що неперервна на відрізку (a,b), інтегрована на (a,b) за Ріманом.

Означення. Функція, що неперервна на X, за винятком, може бути, скінченої кількості точок розриву називається кусочно-неперервною.

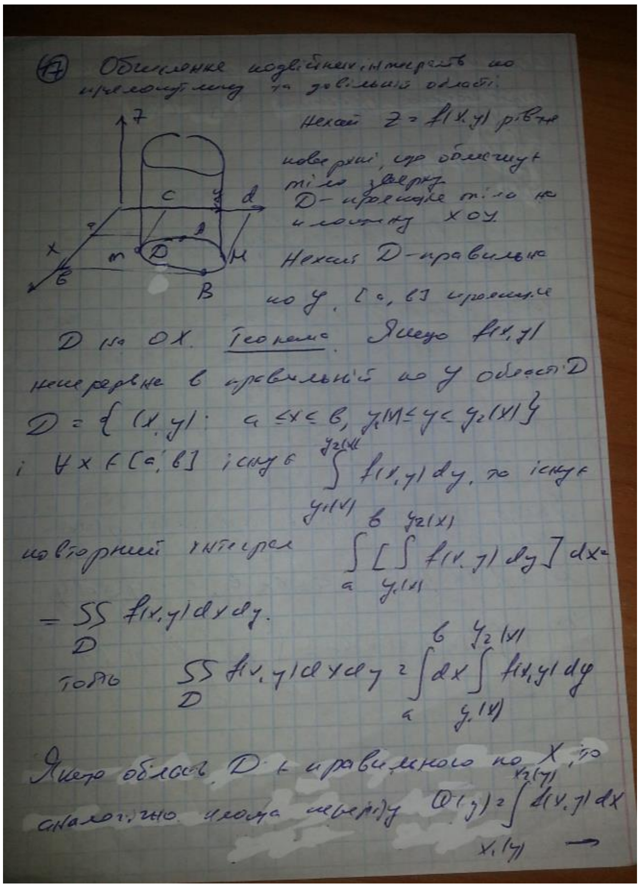
Теорема (Інтегрованість кусочно-неперервних функцій). Обмежена, кусочно-неперервна на відрізку функція, інтегрована на відрізку за Риманом.

Теорема (Інтегрованість монотонних функцій). Монотонна на відрізку функція інтегрована на ньому.

Лінійність. *Для* будь-яких $\alpha, \beta \in R$ і будь-яких інтегрованих в області D функцій f, g справедлива рівність

$$\iint_D (\alpha f(P) + \beta g(P))d\sigma = \alpha \iint_D f(P)d\sigma + \beta \iint_D f(P)d\sigma.$$

12. Обчислення подвійних інтегралів по прямокутнику та в довільній області.



(17) Обчислення подвійних інтегралів по прямокутнику та довільній області.

Нехай $z = f(x,y)$ рівняння поверхні, що обмежує тіло зверху. D – проекція тіла на площину XOY.

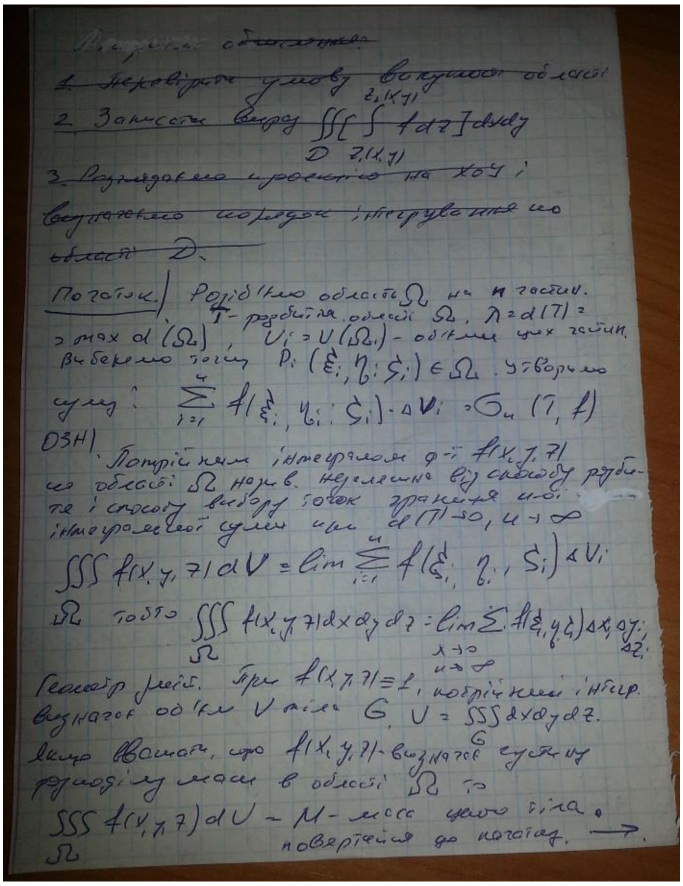
Нехай D – правильна по y. $[a, b]$ проекція D на OX. <u>Теорема</u>. Якщо $f(x,y)$ неперервна в правильній по y області D

$D = \{(x,y):\ a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$

і $\forall x \in [a,b]$ існує $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$, то існує повторний інтеграл $\int\limits_a^b \Big[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\Big]dx = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$.

тобто $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$

Якщо область D є правильною по X, то аналогічно маємо перехід $Q(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$ →



~~Потрійні обчислення:~~

~~1. Перевірити умову випуклості області~~

~~2. Записати вираз $\iint\limits_D \Big[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\,dz\Big]dx\,dy$~~

~~3. Розглядаємо проекцію на XOY і визначаємо порядок інтегрування по області D.~~

<u>Початок.</u> Розіб'ємо область Ω на n частин. T – розбиття області Ω, $\lambda = d(T) = \max d(\Omega_i)$, $V_i = V(\Omega_i)$ – об'єми цих частин. Виберемо точки $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Omega_i$. Утворимо суму: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cdot\Delta V_i = \sigma_n(T, f)$

ОЗН) Потрійним інтегралом ф-ї $f(x,y,z)$ по області Ω назив. незалежно від способу розбиття і способу вибору точок границя n-ої інтегральної суми при $d(T) \to 0$, $n \to \infty$

$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,dV = \lim \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$

тобто $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$

Геометр. зміст. При $f(x,y,z) \equiv 1$, потрійний інтегр. визначає об'єм V тіла G, $V = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz$.

Якщо вважати, що $f(x,y,z)$ – визначає густину розподілу маси в області Ω то $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,dU$ – M – маса цього тіла.

повертаємся до початку. →

13. Заміна змінних в кратних інтегралах. Подвійний інтеграл в полярній системі координат.

Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай в подвійному інтегралі

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

де $f(x,y)$ – неперервна області D функція, необхідно зробити заміну змінних за формулами

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v).$$

Припустимо, що функції $x = \varphi(u,v)$ і $y = \psi(u,v)$ задані і неперервні в деякій області G по сукупності змінних u і v, так що кожній парі чисел $(x,y) \in D$ відповідає єдина точка $(u,v) \in G$. Тоді змінні u і v називається *криволінійними координатами*.

Формула заміни змінних у подвійному інтегралі має вигляд

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_G f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J|dudv,$$

де визначник

$$J = \begin{vmatrix} \varphi'_u(u,v) & \psi'_u(u,v) \\ \varphi'_v(u,v) & \psi'_v(u,v) \end{vmatrix}.$$

називається якобіаном.

У випадку полярної системи координат

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta;$$

якобіан має вигляд:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

Таким чином, остаточно маємо формулу переходу у випадку полярної системи координат.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_G f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

Зауважимо, що полярну систему координат зручно використовувати, коли область інтегрування обмежена дугами кіл із центром упочатку координат та прямими, які проходять через початок координат.

У випадку узагальнено полярної системи координат

$$x = a\rho\cos\theta, \quad y = b\rho\sin\theta;$$

якобіан має вигляд:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & b\sin\theta \\ -a\rho\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Таким чином, остаточно маємо формулу переходу для випадку узагальнено полярної системи координат

$$\iint_D f(x,y)dxdy = ab\iint_G f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

14. Потрійний інтеграл: означення та обчислення зведенням до повторного. Геометричний та фізичний зміст. Застосування потрійних інтегралів в механіці

Означення

Нехай $f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in U$ — функція від трьох змінних, U — обмежений тривимірний простір. Розіб'ємо U на частини: $\triangle U_1, \triangle U_2, \ldots, \triangle U_n$, в кожній із яких візьмемо точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$ та складемо інтегральну суму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\triangle V_i$$

, тоді, якщо існує границя функції:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\triangle V_i = I$$

, що не залежить від способу розбиття U на n частин $\triangle U_1, \triangle U_2, \ldots, \triangle U_n$, та від вибору точок $M_i \in U_i$, то границя I називається потрійним інтегралом від функції $f(x;y;z)$ по об'єму U.

Теорема

Якщо функція $f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in U$ — неперервна, то вона інтегровна по U.

Зведення до повторного інтегралу

Нехай функція $f(x,y,z)$ — неперервна в області T, область $T = [a,b;c,d;e,f]$ (прямокутний паралелепіпед), що проектується на площину yz в прямокутник $R = [c,d;e,f]$, тоді:

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \iint_R f(x,y,z)dydz$$

, замінюючи подвійний інтеграл повторним отримуємо:

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x,y,z)dz$$

.

15. Заміна змінних в кратних інтегралах. Потрійний інтеграл в циліндричних і сферичних координатах.

Заміна змінних у кратному інтегралі

Пусть у нас задано биективное отображение $\mathbb{R}^d \leftrightarrow \mathbb{R}^d$, переводящее область D' в D:

$$\begin{cases} t_1 = \psi_1(x_1, \ldots, x_d) \\ t_2 = \psi_2(x_1, \ldots, x_d) \\ \ldots \\ t_d = \psi_d(x_1, \ldots, x_d) \end{cases},$$

где t — «старые» координаты, а x — «новые» координаты. Пусть также функции, задающие отображение, имеют в области D' непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля Якобиан $\dfrac{D(t)}{D(x)} = \dfrac{D(t_1, \ldots, t_d)}{D(x_1, \ldots, x_d)}$. Тогда при условии существования интеграла

$$\int\limits_D f(T)\,dT = \int\int\limits_D \ldots \int f(t_1, \ldots, t_d)\,dt_1 \ldots dt_d$$

справедлива формула замены переменных:

$$\int\int\limits_D \ldots \int f(t_1, \ldots, t_d)\,dt_1 \ldots dt_d = \int\int\limits_{D'} \ldots \int f(\psi_1(x_1, \ldots, x_d), \ldots, \psi_d(x_1, \ldots, x_d)) \left| \frac{D(t_1, \ldots, t_d)}{D(x_1, \ldots, x_d)} \right| dx_1 \ldots dx_d$$

Перехід до циліндричних координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{cases}$$

Модуль якобиана отображения равен r. Таким образом получаем, что

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{D'} f(r, \varphi, h)\,r dr d\varphi dh$$

Здесь $r dr d\varphi dh$ является элементом объема в цилиндрических координатах.

Перехід до сферичних координат

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Модуль якобиана отображения равен $r^2\sin\theta$. Таким образом получаем, что

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{D'} f(r, \varphi, \theta)\,r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta$$

Здесь $r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta$ является элементом объема в сферических координатах.

16. Застосування кратних інтегралів у механіці: статичні моменти та моменти інерції плоских та просторових областей відносно координатних осей та площин відповідно, маса і центр мас.

Пусть $\mu(x,y,z)$ — объемная непрерывная плотность тела V. Тогда:

- масса тела V

$$m = \iiint\limits_V \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

- статические моменты относительно координатных плоскостей:

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad M_{xz} = \iiint\limits_V y\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

- координаты центр масс тела:

$$x_c = \frac{Myz}{m}, \quad y_c = \frac{Mxz}{m}, \quad z_c = \frac{Mxy}{m},$$

- момент инерции тела:
- относительно координатных плоскостей

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad M_{yz} = \iiint\limits_V x^2\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_V y^2\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

- относительно координатных осей

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad M_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2)\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$M_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

- относительно начала координат

$$I_0 = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

17. Властивості кратних інтегралів

- Властивість 1 *(однорідність потрійного інтеграла)*. Сталий множник можна винести за знак потрійного інтеграла:

$$\iiint\limits_G cf(x,y,z)\,dV = c\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV, \quad c = \text{const}.$$

- Властивість 2. Потрійний інтеграл від алгебраїчної суми скінченної кількості інтегровних в області G G функцій дорівнює алгебраїчній сумі потрійних інтегралів від цих функцій:

$$\iiint\limits_G (f_1(x,y,z) \pm f_2(x,y,z) \pm \cdots \pm f_n(x,y,z))\,dV =$$

$$= \iiint\limits_G f_1(x,y,z)\,dV \pm \iiint\limits_G f_2(x,y,z)\,dV \pm \cdots \pm \iiint\limits_G f_n(x,y,z)\,dV.$$

- Властивість 3. Якщо в області G G функція $f(x,y,z) \geq 0$, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV \geq 0.$$

• Властивість 4 *(інтегрування нерівності)*. Якщо $f(x,y,z) \le \varphi(x,y,z)$ у довільній точці $(x;y;z) \in G$ то

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV \le \iiint_G \varphi(x,y,z)\,dV.$$

• Властивість 5 *(адитивність по області інтегрування)*. Якщо область інтегрування G функції $f(x,y,z)$ є об'єднанням областей $G_1, G_2, \ldots, G_n$, що не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV =$$

$$= \iiint_{G_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint_{G_2} f(x,y,z)\,dV + \cdots + \iiint_{G_n} f(x,y,z)\,dV.$$

• Властивість 6 *(оцінка потрійного інтеграла)*. Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в замкненій обмеженій області G, яка має об'єм V, то

$$mV \le \iiint_G f(x,y,z)\,dV \le MV,$$

• де m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x,y,z)$ в області G.

• Властивість 7 *(теорема про середнє значення)*. Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в замкненій обмеженій області G, яка має об'єм V, то в цій області існує така точка $(x_0;y_0;z_0)$, що

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = f(x_0,y_0,z_0)V.$$

• Величину $$f(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{V}\iiint_G f(x,y,z)\,dV$$ називають *середнім значенням функції* $f(x,y,z)$ в області G.

18. Задача про обчислення маси матеріальної кривої. Криволінійні інтеграли І роду (по довжині дуги). Означення та обчислення, фізичний зміст та властивості.

Нехай L - гладенька крива скінченної довжини, а $f(x,y,z)$ - функція, визначена і неперервна в точках цієї кривої. Подрібнимо криву L на n криволінійних шматочків (дуг) ΔL_i, оберемо на кожному з них по одній точці (x_i,y_i,z_i) позначимо через Δs_i довжину дуги ΔL_i. Через Λ позначимо найбільше зпоміж чисел s_i.

Утворимо суму

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i,y_i,z_i)\Delta s_i \qquad (1)$$

Можна довести, що при ущільненні подрібнень кривої L (тобто коли $\lambda \longrightarrow 0$) суми (1) прямуватимуть до певного числа, яке не залежить ні від вибору точок,
які розтинають криву на дуги ΔL_i, ні від вибору точок (x,y,z) вздовж кривої L за довжиною дуги або ж криволінійним інтегралом першого типу і позначається так:

$$\int_l f(x,y,z)\,ds \qquad (2)$$

Найважливіші інтерпретації криволінійного інтеграла першогог типу (за довжиною дуги

а) Якщо вздовж кривої L розподілено масу з лінійною густиною $f(x,y,z) \le 0$ то сума (1) наближено виражає всю масу кривої, а інтеграл (2) дає точне значення маси.

б) за умов попереднього пункту інтеграли

$$M_{x,y} = \int_l zf(x,y,z)\,ds$$

$$M_{x,z} = \int_l yf(x,y,z)\,ds$$

$$M_{y,z} = \int_l xf(x,y,z)\,ds$$

виражають відповідно статичні моменти кривої L выдносно координатних площин xOy, xOz та yOz. Координати центра мас кривої формулюються за формулами: $x_0 = \dfrac{M_(y,z)}{m}, y_0 = \dfrac{M_(x,z)}{m}, z_0 = \dfrac{M_(x,y)}{m}$,
де **m** - маса кривої.

Зокрема при $f(x,y,z) \equiv 1$ звідси тістаємо формули для обчислення координат геометричного центра мас кривої L.

в) за умов пункту а) інтеграли

$$J_x = \int_l (y^2 + z^2) f(x,y,z)\,ds$$

$$J_y = \int_l (x^2 + z^2) f(x,y,z)\,ds$$

$$J_z = \int_l (y^2 + y^2) f(x,y,z)\,ds$$

виражають моменти інерції кривої L відносно відповідних координатних осей.

г) Нехай L - плоска крива, що лежить у площині xOy, а $f(x,y)$ - невід`ємна функція, визначена і неперервна в точках цієї кривої. Уявімо собі, що в кожній точці кривої L відкладено перпендикулярний площині xOy відрізок завздовжки f(x,y). Ці відрізки утворять циліндричну поверхню. Цілком зрозуміло, що сума

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$$

дає наближене означення площі цієї поверхні. Граничне значення суми, тобто

$$\int_l f(x,y)\,ds$$

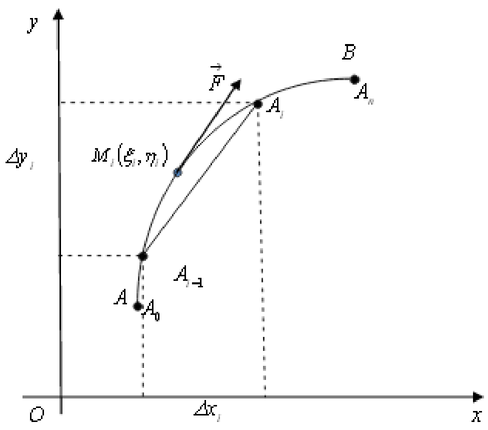
виражає її площу. Більш загально - нехай циліндрична поверхня $\Phi(x,y) = 0$ перетинає площину xOy вздовж кривої L, а $z = g(x,y)$ і $z = h(x,y)$ - функції, визначені і неперервні в усіх точках цієї кривої, причому $g(x,y) \leq h(x,y)$ для всіх $(x,y) \in L$; тоді інтеграл

$$\int_l [g(x,y,) - h(x,y)]\,ds$$

виражає площу всієї тієї частини циліндричної поверхні $\Phi(x,y) = 0$, яка затиснута між двох поверхонь $z = g(x,y)$ та $z = h(x,y)$.

19. Задача про роботу змінної сили по переміщенню матеріальної точки вздовж кривої. Криволінійні інтеграли II роду (за координатами). Означення та фізичний зміст, властивості. Криволінійні інтеграли II роду загального виду.

Розглянемо задачу про роботу змінної сили. Нехай матеріальна точка під дією сили $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ рухається вздовж кусково-гладкої кривої AB. Необхідно визначити роботу W сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із A в B.



Для розв'язання даної задачі розіб'ємо криву AB на n частин точками $A = A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$. Силу $\vec{F}$ на дузі $A_{i-1}A_i$ замінимо її значенням в точці $M_i(\xi_i,\eta_i)$ дуги $A_{i-1}A_i$, а рух по дузі $A_{i-1}A_i$ – рухом по вектору $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}(\Delta x_i, \Delta y_i)$. Тоді наближене значення роботи W_i на $A_{i-1}A_i$ можна знайти як скалярний добуток векторів сили та переміщення: $W_i \approx \vec{F} \cdot \vec{S} = \overrightarrow{F(M_i)} \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = (P(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta y_i)$. Наближене значення роботи W на AB у такому випадку буде рівне: $W \approx \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F(M_i)} \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \sum_{i=1}^{n} (P(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta y_i)$.

За точне значення роботи приймемо граничне значення наближеного при $\max \Delta x_i \to 0$ i $\max \Delta y_i \to 0$: $W = \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (P(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta y_i)$. (1)

Знаходження границі такого виду сум зустрічається і в інших задачах. Абстрагуючись від змісту конкретної задачі, розглянемо вектор $\vec{a} = (P(x,y), Q(x,y))$, $(x,y) \in D$. Нехай функції $P(x,y), Q(x,y)$ неперервні в D і крива AB належить області D. Розіб'ємо криву AB на n частин і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} (P(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta x_i \vec{+} Q(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta y_i),$$

яку назвемо інтегральною сумою.

Означення. Криволінійним інтегралом II роду по координатах від функцій $P(x,y), Q(x,y)$ по кривій AB ($\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$) називається границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} (P(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta x_i \vec{+} Q(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta y_i)$ при $\max \Delta x_i \to 0$ i $\max \Delta y_i \to 0$, якщо вона не залежить ні від способу розбиття кривої AB на частини, ні від вибору проміжних точок M_i:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (P(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta y_i). \quad (2)$$

Криволінійний інтеграл II роду також називають інтегралом від вектора по кривій і позначають $\int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r}$, $d\,r = (dx, dy)$.

Із формул (1) та (2) випливає *фізичний зміст криволінійного інтеграла II роду*:

$$W = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}.$$

Криволінійний інтеграл II роду вздовж деякої кривої дорівнює роботі змінної сили $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ при переміщенні матеріальної точки вздовж даної кривої.

<u>2.Властивості криволінійного інтеграла II роду.</u>

Криволінійний інтеграл II роду має властивості аналогічні властивостям визначеного інтеграла. Наведемо лише найважливіші із них:

1. $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.
2. $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{CB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

20. Зв'язність області. Формула Гріна: формулювання та доведення

Формула Гріна пов'язує подвійний інтеграл по області D з криволінійним інтегралом по межі L цієї області.

Теорема. *Нехай D – деяка правильна область, обмежена замкненим контуром L, і функції P(x,y) і Q(x,y) неперервні разом зі своїми частинними похідними* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *і* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *в цій області. Тоді справджується формула Гріна*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \oint_L Pdx + Qdy \qquad (1)$$

Нехай область $D = y_1(x) \le y \le y_2(x), \qquad a \le x \le b$ обмежена додатно орієнтованим контуром L – межею деякою області MPNQM (мал. внизу). Покажемо, що

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint_L Pdx \qquad (2)$$

Для цього зведемо подвійний інтеграл до повторного, виконаємо інтегрування по змінній y і до знайдених визначених інтегралів застосуємо формулу обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial x} dy = \int_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int_a^b [P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))]dx =$$

$$= \int_a^b P(x,y_2(x))dx - P(x,y_1(x))dx = \int_{MPN} P(x,y)dx - \int_{NQM} P(x,y)dx = -\oint_L Pdx$$

Аналогічно, вважаючи, що область D правильна в напрямку осі Ox:

$D = x_1(y) \le x \le x_2(y), \qquad c \le y \le d$, можна впевнитися, що

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = -\oint_L Qdy \qquad (4)$$

Якщо від рівності (4) відняти рівність (3), отримаємо (1)