# МАТ=МАТИКА

Искать это слово



На этой вики

Популярное

Community

📄 Вклад 🔻 Поделиться □

Вики-деятельность

Случайная статья

Видео

Новые фотографии

# 







Гиперболические функции — семейство элементарных функций, выражающихся через экспоненту и тесно связанных с тригонометрическими функциями.

Содержание [показать]

### Определение Оправить

Файл: Hyperbola-hyperbolic functions.png

#### Файл:Circle sincos.png

Гиперболические функции задаются следующими формулами:

• гиперболический синус:

$$\sinh x = rac{e^x - e^{-x}}{2}$$
 (в зарубежной литературе обозначается  $\sinh x$ )

Существует сленговые названия: «шинус», «шимус»(?). Однако их использование не научно.

• гиперболический косинус:

$$\ch x = rac{e^x + e^{-x}}{2}$$
 (в зарубежной литературе обозначается  $\cosh x$ )

Существует сленговые названия: «чосинус», «кошинус». Однако их использование не научно.

• гиперболический тангенс:

$$h x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$
 (в зарубежной литературе обозначается  $\tanh x$ ).

Существует сленговое название: «щангенс». Однако их использование не научно.

Иногда также определяются

• гиперболический котангенс:

$$cth x = \frac{1}{\th x}$$

• гиперболические секанс и косеканс:

$$sch x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

$$csch x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$$

Геометрическое определение 

Править

Ввиду соотношения  ${
m ch}^2t-{
m sh}^2t=1$  гиперболические функции дают параметрическое представление гиперболы  $x^2-y^2=1$  ( $x={
m ch}\,t$ -



 $y=\sinh t$ ). При этом аргумент t=2S, где S — площадь криволинейного треугольника OQR, взятая со знаком «+», если сектор лежит выше оси OX, и «-» в противоположном случае. Это определение аналогично определению тригонометрических функций через единичную окружность, которое тоже можно построить подобным образом.

## Свойства 🧷 Править

Связь с тригонометрическими функциями 🤌 Править

Гиперболические функции выражаются через тригонометрические функции от мнимого аргумента.

$$\operatorname{sh} x = -i\operatorname{sin}(ix), \quad \operatorname{ch} x = \operatorname{cos}(ix), \quad \operatorname{th} x = -i\operatorname{tg}(ix)$$

Важные тождества 
 Править

1. 
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

1. 
$$sh(-x) = -sh x$$

2. 
$$ch(-x) = ch x$$

3. 
$$th(-x) = -th x$$

## 3. Формулы сложения:

1. 
$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$$

2. 
$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{sh} x$$

## 4. Формулы двойного угла:

1. 
$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = \frac{2\operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th}^2 x}$$

2. 
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = \frac{1 + \sinh^2 x}{1 - \sinh^2 x}$$

3. 
$$an 2x = \frac{2 an x}{1 + an^2 x}$$

### 1. Производные:

$$1. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$^{2.}\left( \operatorname{ch}x\right) ^{\prime }=\operatorname{sh}x$$

$$3. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$4. \sinh x = \int_0^x \text{ch} t dt$$

5. 
$$\cosh x = 1 + \int_0^x \operatorname{sh} t dt$$

6. th 
$$x = \int_0^x \frac{dt}{\cosh^2 t}$$

#### 2. Интегралы:

$$1. \int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$2. \int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$3. \int th \, x \, dx = \ln ch \, x + C$$

4. 
$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + C$$

$$5. \int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + C$$

Разложение в степенные ряды 🤌 Править

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\begin{split} \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n \equiv 0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \operatorname{th} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \ldots = \sum_{n = 1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n} - 1)B_nx^{2n-1}}{(2n)!}, \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{cth} x &= \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \ldots = \frac{1}{x} + \sum_{n = 1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}B_nx^{2n-1}}{(2n)!}, \quad 0 < |x| < \pi \text{ (Ряд Лорана)} \end{split}$$

Здесь  $B_n$  — числа Бернулли.

Графики 🖉 Править

#### 500px

#### Аналитические свойства // Править

Гиперболический синус и гиперболический косинус аналитичны во всей комплексной плоскости, за исключением существенно особой точки на бесконечности. Гиперболический тангенс аналитичен везде, кроме полюсов в точках  $z=i\pi(n+1/2)$ , где n- целое. Вычеты во всех этих полюсах равны единице. Гиперболический котангенс аналитичен везде, кроме точек  $z=i\pi n$ , вычеты его в этих полюсах также равны единице.

## Обратные гиперболические функции Обратные гиперболические функции

Читаются *apea*... (-синус и т. д.) — от лат. «area» — «площадь».

$$\begin{array}{l} \operatorname{Arsh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \operatorname{обратный гиперболический синус: sh}(\operatorname{Arsh} x) = x \\ \operatorname{Arch} x = \ln(x\pm\sqrt{x^2-1}) - \operatorname{обратный гиперболический косинуc} \\ \operatorname{Arth} x = \ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \operatorname{обратный гиперболический тангенc} \\ \operatorname{Arcth} x = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \operatorname{обратный гиперболический котангенc} \\ \operatorname{Arsch} x = \pm \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \operatorname{обратный гиперболический секанc} \\ \operatorname{Arcsch} x = \begin{cases} \ln\left(\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}\right), & x < 0 \\ \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right), & x > 0 \end{cases} \\ - \operatorname{обратный гиперболический косеканc} \\ \operatorname{Arcsch} x = \begin{cases} \ln\left(\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}\right), & x < 0 \\ \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right), & x > 0 \end{cases} \end{array}$$

Эти функции имеют следующее разложение в ряд

$$\operatorname{Arsh} x = x - \left(\frac{1}{2}\right) \frac{x^3}{3} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) \frac{x^5}{5} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}\right) \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x < 1$$

$$\operatorname{Arch} x = \ln 2 - \left(\left(\frac{1}{2}\right) \frac{x^{-2}}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) \frac{x^{-4}}{4} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) \frac{x^{-6}}{6} + \dots\right) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}\right) \frac{x^{-2n}}{2n}, \quad x > 1$$

$$\operatorname{Arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$$

## История / Править

Гиперболические функции были введены Винченцо Риккати (Vincenzo Riccati) в 1757 году («Opusculorum», том I). Он получил их из рассмотрения единичной гиперболы.

Дальнейшее исследование свойств гиперболических функций было проведено Ламбертом.

Риккати применял для гиперболических функций обозначения  $\mathbf{Sh}$  и  $\mathbf{Ch}$ . В дальнейшем в обозначениях гиперболических функций утвердился некоторый разнобой. Например, в Энциклопедии Брокгауза и Эфрона используются обозначения  $\mathbf{sinhyp}$ ,  $\mathbf{coshyp}$ , в русскоязычной литературе закрепились обозначения  $\mathbf{sh}$ ,  $\mathbf{ch}$ , в англоязычной закрепились  $\mathbf{sinh}$ ,  $\mathbf{cosh}$ , .

#### Применение / Править

Гиперболические функции часто встречаются при вычислении различных интегралов. Некоторые интегралы от рациональных функций и от функций, содержащих радикалы, довольно просто выполняются с помощью замен переменных с использованием гиперболических функций.



Аналогично тому, как матрицы вида  $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$  описывают повороты двумерного евклидова пространства, матрицы  $\begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}$ 

описывают повороты в простейшем двумерном пространстве Минковского. В связи с этим гиперболические функции часто встречаются в теории относительности.

Однородная веревка или цепочка, свободно подвешенная за свои концы, приобретает форму графика функции  $y=\ch x$  (в связи с чем график гиперболического косинуса иногда называют *цепной линией*). Это обстоятельство используется при проектировании арок, поскольку форма арки в виде перевёрнутой цепной линии наиболее удачно распределяет нагрузку.

## Ссылки / Править

- GonioLab 🗗: Интерактивная демонстрация тригонометрических и гиперболических функций на Java Web Start
- История гиперболических функций (англ) 🗗
- БСЭ: Знаки математические 🗗
- Биография Риккати (англ.)
- http://ru.wikipedia.org/wiki/Гиперболические\_функции 🗗

cs:Hyperbolická funkcehe:פונקציות היפרבוליות hu:Hiperbolikus függvények is:Breiðbogafallnl:Hyperbolische functie pl:Funkcje hiperbolicznesr:Хиперболичне функције sv:Hyperbolisk funktion

Категории: Элементарные функции

Добавить категорию

Языки: English | Deutsch | Español | Français | Italiano | Português | Suomi | 日本語 | 한국어 | Türkçe | 中文









Смотреть все фотографии >



