Лекція 4

Властивості відношень і відношення еквівалентності

План лекції

1. Спеціальні властивості відношень

1.1. ***Рефлексивність***
1.2. ***Антирефлексивність***
1.3. ***Симетричність***
1.4. ***Асимметричність***
1.5. ***Антисиметричність***
1.6. ***Транзитивність***
1.7. ***Антитранзитивність***

2. Види відношень

2.1. Відношення еквівалентності
2.1.1. Властивості еквівалентних відношень
2.1.2. Класи еквівалентності

1. Спеціальні властивості відношень

1.1. *Рефлексивність*

Відношення ***R*** на множині ***X*** називають ***рефлексивним,*** якщо для будь-якого ***x∈X*** має місце ***xRx***, тобто, кожний елемент ***x∈X*** перебуває у відношенні ***R*** до самого себе.

Приклад.

$R_1 = \{(a,b) | a \le b - \text{на множині дійсних чисел}\}$,

$R_2 = \{(a,b) | a \text{ і } b - \text{мають спільний дільник на множині цілих чисел}\}$

Для рефлексивного відношення всі діагональні елементи *матриці* дорівнюють 1.

При задаванні відношення *графом* кожний елемент має петлю – дугу **(*x, x*)**.

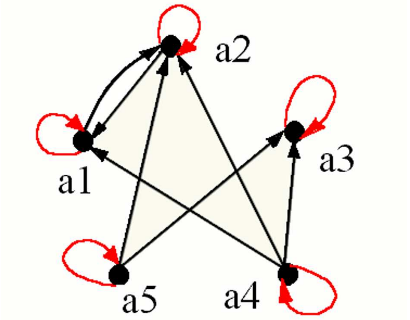
Приклад задавання рефлексивних відношень

Нехай задане відношення $R \subset A \times A$.

$R = \{(a_1,a_1),(a_1,a_2),(a_2,a_1),(a_2,a_2),(a_3,a_3),$

$(a_4,a_1),(a_4,a_2)(a_4,a_3),(a_4,a_4),$

$(a_5,a_2),(a_5,a_3),(a_5,a_5)\}$



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	1			
a_2	1	1			
a_3			1		
a_4	1	1	1	1	
a_5		1	1		1

1.2. ***Антирефлексивність***

Нехай задане відношення $R \subseteq X \times X$

Відношення $\boldsymbol{R}$ на множині $\boldsymbol{X}$ називають ***антирефлексивним***, якщо з $\boldsymbol{x_1 R x_2}$ випливає, що $\boldsymbol{x_1 \neq x_2}$.

Приклад.

$$R_1 = \{(a,b) | a < b - \text{на множині дійсних чисел}\}$$

$$R_2 = \{(a,b) | a \text{ є сином } b \text{ на множині людей.}\}$$

Представлення булевою матрицею:

Усі **діагональні елементи є нульовими**.

Представлення графом:

Жодна **вершина не має петлі** – немає дуг виду **(** $\boldsymbol{x_i, x_i}$ **).**

1.3. ***Симетричність***

Нехай задане відношення $R \subseteq X \times X$

Відношення $\boldsymbol{R}$ на множині $\boldsymbol{X}$ називається ***симетричним***, якщо для пари $\boldsymbol{(x_1,x_2) \in R}$ з $\boldsymbol{x_1 R x_2}$ випливає $\boldsymbol{x_2 R x_1}$

(інакше кажучи, для будь-якої пари відношення $\boldsymbol{R}$ виконується або в обидва боки, або не виконується взагалі).

Задавання матрицею

Матриця симетричного відношення є **симетричною відносно головної діагоналі**.

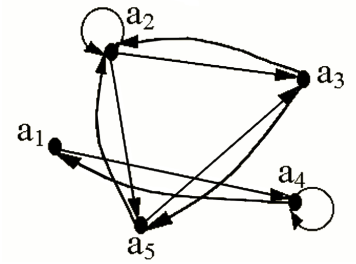
Задавання графом

У графі для кожної дуги від x_i до x_k **існує протилежно спрямована дуга** від x_k до x_i.

Приклад задавання симетричних відношень

Нехай задано відношення $R \subset A \times A$.

$$R = \{(a_1,a_4),(a_2,a_2),(a_2,a_3),(a_2,a_5),(a_3,a_5),(a_3,a_2),$$
$$(a_4,a_4),(a_4,a_1),(a_5,a_2),(a_5,a_3)\}$$



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1				1	
a_2		1	1		1
a_3		1			1
a_4	1			1	
a_5		1	1		

1.4. ***Асиметричність***

Відношення $\boldsymbol{R}$ називають ***асиметричним***, якщо для пари $(x_1,x_2) \in R$ з того, що x_1Rx_2 випливає, що не виконується x_2Rx_1.

(інакше кажучи, для будь-якої пари відношення $\boldsymbol{R}$ виконується або в одну сторону, або не виконується взагалі).

Приклад.

$$R_1 = \{(a,b) | a > b - \text{на множині дійсних чисел}\}$$

$$R_2 = \{(a,b) | a \text{ є сином } b \text{ на множині людей.}\}$$

Задавання матрицею

Матриця асиметричного відношення не містить одиничних елементів, симетричних відносно головної діагоналі.

Задавання графом

У графі повністю відсутні протилежно спрямовані дуги.

1.5. ***Антисиметричність***

Нехай задано відношення $R \subseteq X \times X$

Відношення $\boldsymbol{R}$ називають ***антисиметричним***, якщо з x_1Rx_2 і x_2Rx_1 випливає, що $x_1=x_2$.

Приклад

$$R_1 = \{(a,b) | a \le b - \text{на множині дійсних чисел}\}$$

$$R_2 = \{(a,b) | a \text{ є дільником } b \text{ на множині дійсних чисел}\}$$

Транзитивність

Нехай задано відношення $R \subseteq X \times X$

Відношення $\boldsymbol{R}$ називають ***транзитивним***, якщо для будь-яких x_1,x_2,x_3 з x_1Rx_2 і x_2Rx_3 випливає x_1Rx_3.

Приклад.

$R_1 = \{(a,b) | a \le b - на\ множині\ дійсних\ чисел\}$

$R_1 = \{(a,b) | a < b - на\ множині\ дійсних\ чисел\}$

Задавання графом

У графі, що задає транзитивне відношення ***R***, для всякої пари дуг таких, що кінець першої збігається з початком другої, існує третя дуга, що має початок в спільній вершині з першою і кінець у спільній вершині з другою.

1.6. *Антитранзитивність*

Відношення ***R*** називають ***антитранзитивним***, якщо для будь-яких x_1, x_2, x_3 з $x_1 R x_2$ і $x_2 R x_3$ випливає, що $x_1 R x_3$ не виконується.

Приклад.

$R_1 = \{(a,b) | a\ є\ наступним\ роком\ за\ b\ на\ множині\ років\}$

$R_1 = \{(a,b) | a\ є\ батьком\ b\ на\ множині\ людей\}$

Приклад визначення властивостей відношення

Нехай $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Нехай $R \subseteq X \times X$ визначене у вигляді

$R = \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\beta),(\alpha,\delta),(\beta,\alpha),(\delta,\alpha),(\delta,\delta),(\gamma,\delta),(\gamma,\gamma)\}$.

1. R не є рефлексивним, оскільки $\beta \in X$, але $(\beta,\beta) \notin R$.
2. R не є симетричним, оскільки $(\gamma,\delta) \in R$, але $(\delta,\gamma) \notin R$.
3. R не є антисиметричним, оскільки $(\alpha,\beta) \in R$ й $(\beta,\alpha) \in R$, але $\alpha \ne \beta$.
4. R не є транзитивним, оскільки $(\beta,\alpha) \in R$, $(\alpha,\delta) \in R$, але $(\beta,\delta) \notin R$.

2. Види відношень

2.1. Відношення еквівалентності

Деякі елементи множини можна розглядати як еквівалентні в тому випадку, коли кожний із цих елементів при деякому розгляді може бути замінений іншим. У цьому випадку говорять, що дані елементи перебувають у відношенні еквівалентності.

Відношення R на множині X є **відношенням еквівалентності,** якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне.

2.1.1.Властивості еквівалентних відношень

1. Властивість **рефлексивності** проявляється в тому, що кожний елемент еквівалентний самому собі або $x \equiv x$.
2. Висловлювання про те, що два елементи є еквівалентними, не вимагає уточнення, який з елементів розглядається першим, який другим, тобто має місце $x \equiv y \to y \equiv x$ – властивість **симетричності.**

3. Два елементи, еквівалентні третьому, еквівалентні між собою, або має місце $x \equiv y$ і $y \equiv z \to z \equiv z$ – властивість **транзитивності.**

Як загальний символ відношення еквівалентності використовується символ «$\equiv$ » (іноді символ «$\sim$ »). Для окремих відношень еквівалентності використовуються інші символи:

«=» – для позначення рівності;

« $\|$ » – для позначення паралельності;

«$\leftrightarrow$ » або «$\rightleftarrows$ » – для позначення логічної еквівалентності.

Приклад. Нехай $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ і дано відношення R на A:

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(1,4),$
$(2,1),(2,4),(3,5),(5,3),(4,1),(4,2)\}$

Легко перевірити, що дане відношення рефлексивне, симетричне і транзитивне. Тому воно є відношенням еквівалентності на множині A.

2.1.2.Класи еквівалентності

Відношення еквівалентності R на множині A розбиває його на підмножини, елементи яких еквівалентні один одному й не еквівалентні елементам інших підмножин. У контексті відношень еквівалентності ці підмножини називаються ***класами еквівалентності*** по R.
Це розбиття можна уявляти собі в такий спосіб.
Нехай множина A — це набір різнобарвних куль, а відношення R задають умовою: $(a,b) \in R$ тоді й тільки тоді, коли a й b мають однаковий колір. Оскільки R — відношення еквівалентності, кожний клас еквівалентності буде складатися з куль, що мають однаковий колір.
Якщо визначити відношення R умовою: $(a,b) \in R$ тоді й тільки тоді, коли кулі a й b мають однаковий діаметр, то кожний клас еквівалентності буде складатися з куль однакового розміру.

Нехай $a \in A$ і R — відношення еквівалентності на $A \times A$. Нехай $[a]$ позначає множину $\{x | xRa\} = \{x | (x,a) \in R\}$, яку називають ***класом еквівалентності***, який містить a . Символ $[A]_R$ позначає множину всіх класів еквівалентності множини A по відношенню R.

Приклад. Нехай $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ і дане відношення еквівалентності:

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(1,4),$
$(2,1),(2,4),(3,5),(5,3),(4,1),(4,2)\}$

Класи еквівалентності по відношенню R були отримані шляхом визначення класу еквівалентності кожного елемента множини A:

$[1] = \{x | (x,1) \in R\} = \{x | xR1\} = \{1,2,4\}$

де $1 \in [1]$, оскільки $(1,1) \in R$, $2 \in [1]$ тому що $(2,1) \in R$, $4 \in [1]$ оскільки $(4,1) \in R$, і не існує ніякого іншого x з A такого, що $(x,1) \in R$.

Точно так само, одержуємо

$[2] = \{x | (x,2) \in R\} = \{x | xR2\} = \{2,1,4\}$

$[3] = \{x | (x,3) \in R\} = \{x | xR3\} = \{3,5\}$

$[4] = \{x | (x,4) \in R\} = \{x | xR4\} = \{4,1,2\}$

$[5] = \{x | (x,5) \in R\} = \{x | xR5\} = \{5,3\}$

$[6] = \{x | (x,6) \in R\} = \{x | xR6\} = \{6\}$