2.6 Приклад розрахунку класичним методом перехідного процесу в електричних колах з двома реактивними елементами

2.6.1 Аперіодичний режим в колах з джерелом постійної напруги

Умова завдання: знайти струми у всіх гілках схеми, приведеної на рис.2.1, та напруги на реактивних елементах після замикання ключа.

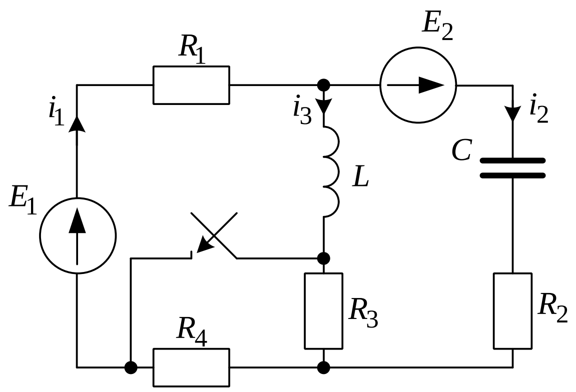

Рисунок 2.1

Вихідні дані:

$$E_1 = 100\ В$$
$$E_2 = 60\ В$$
$$R_1 = R_2 = 10\ Ом$$
$$R_3 = R_4 = 20\ Ом$$
$$L = 1\ Гн$$
$$C = 400\ мкФ$$

Розв'язок

1. Усталений режим до комутації. Визначимо незалежні початкові умови (рис.2.2).

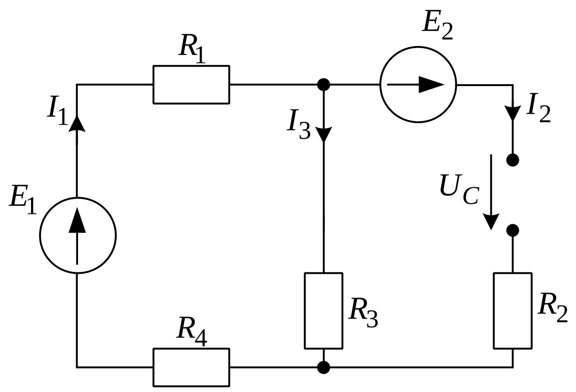

Рисунок 2.2

$$I_3 = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R_4} =$$
$$= \frac{100}{10 + 20 + 20} = 2\ \ А$$
$$U_C = I_3 R_3 + E_2 = 2 \cdot 20 + 60 = 100\ В$$

Враховуючи закони комутації запишемо незалежні початкові умови (НПУ):

$$i_3(0) = i_3(0\_) = I_3 = 2\ А$$
$$u_C(0) = u_C(0\_) = U_C = 100\ В$$

2. Для схеми після комутації складаємо систему рівнянь за законами Кірхгофа для часу t=0 (рис. 2.3):

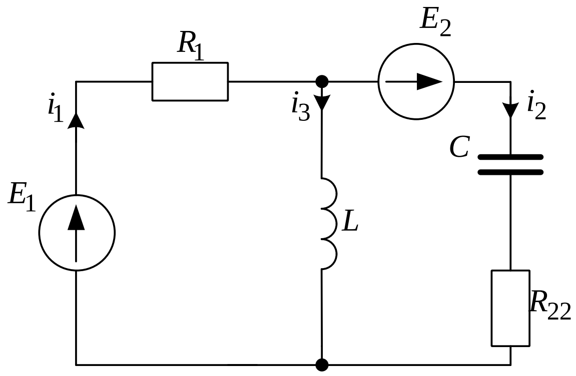

Рисунок 2.3

$$\begin{cases} i_1(0) - i_2(0) - i_3(0) = 0 \\ i_1(0)R_1 + u_L(0) = E_1 \\ i_1(0)R_1 + u_C(0) + i_2(0)R_{22} = E_1 + E_2 \end{cases} \qquad (2.1)$$

де $R_{22} = R_2 + \dfrac{R_3R_4}{R_3 + R_4} = 10 + \dfrac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 20\ Ом$

3. Підставимо відомі значення у систему рівнянь (2.1), враховуючи $i_3(0) = 2\ A$, $u_C(0) = 100\ B$:

$$\begin{cases} i_1(0) - i_2(0) - 2 = 0 \\ i_1(0) \cdot 10 + u_L(0) = 100 \\ i_1(0) \cdot 10 + 100 + i_2(0) \cdot 20 = 100 + 60 \end{cases}$$

Розв’язавши систему отримаємо залежні початкові умови:

$$i_1(0) = 3.33\ A;\ i_2(0) = 1.33\ A;\ u_L(0) = 66.73\ B$$

3 а. Продиференціюємо систему рівнянь (1) при $t = 0$:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{di_1}{dt}\right|_{t=0} - \left.\dfrac{di_2}{dt}\right|_{t=0} - \left.\dfrac{di_3}{dt}\right|_{t=0} = 0 \\ \left.\dfrac{di_1}{dt}\right|_{t=0} \cdot R_1 + \left.\dfrac{du_L}{dt}\right|_{t=0} = 0 \\ \left.\dfrac{di_1}{dt}\right|_{t=0} \cdot R_1 + \left.\dfrac{du_C}{dt}\right|_{t=0} + \left.\dfrac{di_2}{dt}\right|_{t=0} \cdot R_{22} = 0 \end{cases} \qquad (2.2)$$

Визначимо $\left.\frac{di_3}{dt}\right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L} = \frac{66.73}{1} = 66.73\ \frac{A}{c}$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_2(0)}{C} = \frac{1.33}{400\cdot 10^{-6}} = 3325\ \frac{B}{c}$$

Підставимо відомі значення у систему рівнянь (2.2) та знайдемо невідомі значення похідних при $t=0$

$$\begin{cases} \left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0} - \left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0} - 66.73 = 0 \\ \left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0} \cdot 10 + \left.\frac{du_L}{dt}\right|_{t=0} = 0 \\ \left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0} \cdot 10 + 3325 + \left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0} \cdot 20 = 0 \end{cases}$$

Розв’язавши систему. отримаємо:

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0} = -66.34\ \frac{A}{c};\ \left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0} = -133\ \frac{A}{c};\ \left.\frac{du_L}{dt}\right|_{t=0} = 663.5\ \frac{B}{c}$$

4. Знайдемо усталені складові шуканих величин шляхом розрахунку усталеного режиму в схемі після комутації (рис.2.4).

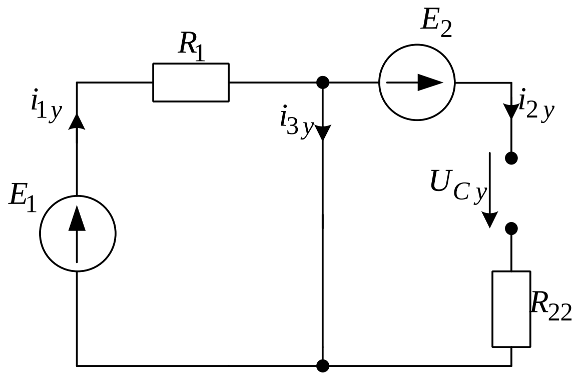

Рисунок 2.4

$$i_{1y} = i_{3y} = \frac{E_1}{R_1} = \frac{100}{10} = 10\ A$$

$$i_{2y} = 0$$

$$u_{Cy} = E_2 = 60\ B$$

$$u_{Ly} = 0$$

5. Складаємо характеристичне рівняння. Характеристичне рівняння кола можна отримати, якщо записати в залежності від *p* вхідний опір кола після виключення джерела відносно будь-якої з гілок. Так, відносно гілки з конденсатором (рис. 2.3):

$$Z(p) = \frac{1}{pC} + R_{22} + \frac{R_1 pL}{R_1 + pL},$$

отриманий вираз прирівнюємо до нуля $Z(p)=0$ та підставляємо відомі значення. Маємо

$$\frac{1}{p400\cdot10^{-6}}+20+\frac{10\cdot p}{10+p}=0, \quad \frac{30p^2+2700p+25000}{p^2+10p}=0$$

Отримуємо характеристичне рівняння:

$$30p^2+2700p+25000=0.$$

Визначаємо корені характеристичного рівняння p_1 та p_2: $p_1=-10.5\ c^{-1}$; $p_2=-79.5\ c^{-1}$. Отже, має місце аперіодичний перехідний процес.

6. Запишемо повні рішення для шуканих величини як суму усталеної і вільної складових (таблиця 2.1)

$$i_1(t)=i_{1y}+A_1e^{-10.5t}+A_2e^{-79.5t}$$

$$i_2(t)=i_{2y}+A_3e^{-10.5t}+A_4e^{-79.5t}$$

$$i_3(t)=i_{3y}+A_5e^{-10.5t}+A_6e^{-79.5t}$$

$$u_C(t)=u_{Cy}+B_1e^{-10.5t}+B_2e^{-79.5t}$$

$$u_L(t)=u_{Ly}+B_3e^{-10.5t}+B_4e^{-79.5t}$$

7. Розрахуємо постійні інтегрування $A_1 \ldots A_6$, $B_1 \ldots B_4$. Для їх розрахунку, потрібно підставити знайдені початкові умови в вирази для шуканої величини і її похідної при $t=0$ (таблиця 2.2).

Визначимо постійні інтегрування для струму $i_1(t)$:

$$\begin{cases} A_1+A_2=i_1(0)-i_{1y} \\ A_1p_1+A_2p_2=\left.\dfrac{di_1(t)}{dt}\right|_{t=0} \end{cases}$$

Значення початкових умов $i_1(0)=3.33$ вибираємо із п. 3, похідну $\left.\dfrac{di_1(t)}{dt}\right|_{t=0}=-66.34$ із п. 3 а; усталену складову $i_{1y}=10$ із п. 4, корені характеристичного рівняння $p_1 = -10.5,\ p_2 = -79.5$ із п. 5. Після підстановки, отримаємо

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 3.33 - 10 \\ A_1 \cdot (-10.5) + A_2 \cdot (-79.5) = -66.34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -8.64 \\ A_2 = 1.97 \end{cases}$$

Постійні інтегрування для інших струмів та напруг знаходимо аналогічно.

8. Підсумовуючи розраховані усталену і вільну складову, запишемо рішення для шуканих величин

$$i_1(t) = 10 - 8.64e^{-10.5t} + 1.97e^{-79.5t}$$

$$i_2(t) = -0.39e^{-10.5t} + 1.72e^{-79.5t}$$

$$i_3(t) = 10 - 8.25e^{-10.5t} + 0.25e^{-79.5t}$$

$$u_C(t) = 60 + 94e^{-10.5t} - 54e^{-79.5t}$$

$$u_L(t) = 86.6e^{-10.5t} - 19.87e^{-79.5t}$$

Для перевірки. можна скористатися відомими співвідношеннями та законами, наприклад

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_3}{dt}$$

$$u_C(t) = E_1 + E_2 - i_1(t)R_1 - i_2(t)R_{22}$$

2.6.2 Побудова графіка зміни перехідного струму при аперіодичному режимі

Приймаючи до уваги, що в досліджуваному електричному колі діють джерела постійної напруги, вимушені складові струмів не будуть залежати від часу. Тому форма кривих перехідних струмів (напруг) визначаються тільки вільними складовими. Закон зміни вільних складових (аперіодичний чи коливальний0 залежить від коренів характеристичного рівняння вільного процесу.

Розглянемо варіант, коли корені характеристичного рівняння. дійсні:

$$i_1(t) = 10 - 8.64e^{-10.5t} + 1.97e^{-79.5t}$$

Визначаємось спочатку з інтервалом часу, для якого необхідно виконати розрахунки струму $i_1(t)$. Хоч теоретично перехідний процес існує нескінченно довго, для побудови графіка досить взяти проміжок часу $T = \dfrac{(4 \div 5)}{|p_{\min}|}$ сек. Тут $|p_{\min}|$ – мінімальний по абсолютному значенню корінь характеристичного рівняння. В нашому випадку $|p_{\min}| = 10.5$, тоді $T = 0.38 \div 0.48$ сек.

Далі вибираємо часовий крок Δt, який визначить кількість дискретних значень струму у фіксовані моменти часу на інтервалі $0 \le t \le T$. Чим менший крок Δt, тим більше буде отримано значень струму для побудови графіка. Щоб графік досліджуваної функції відображав її часові особливості. необхідно на інтервалі часу $0 \div T$ отримати $15 \div 20$ розрахункових значень $i_1(t)$.

Графік перехідного струму показаний на рис. 6. Цим графіком ілюструється монотонність зміни перехідного струму в аперіодичному режимі: досліджувана функція струму поступово наближається до усталеної (вимушеної) складової i_{1y}, яка вказана на рис. 2.5 пунктирною лінією.

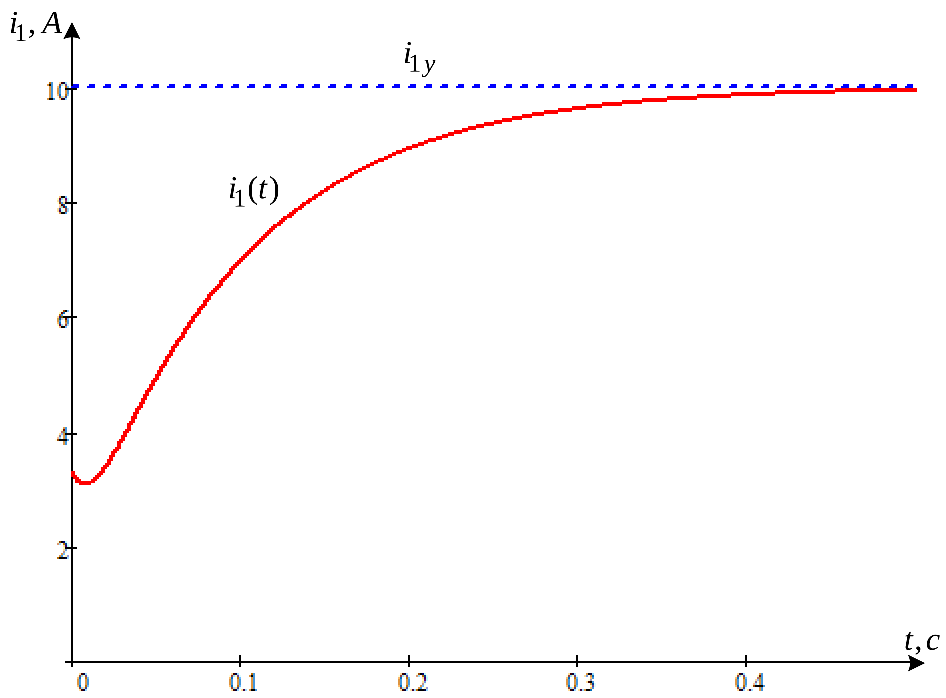

Рисунок 2.5

2.6.3 Коливальний режим в колах з джерелом постійної напруги

Умова завдання: знайти струми у всіх гілках схеми, приведеної на рис.2.1, та напруги на реактивних елементах після замикання ключа.

Вихідні дані: $E_1 = 100\ В;\ E_2 = 60\ В;\quad R_1 = 100\ Ом;\ R_2 = 10\ Ом;$ $R_3 = R_4 = 20\ Ом;\ L = 1\ Гн;\ C = 400\ мкФ.$

Розв’язок

1. Усталений режим до комутації. Визначимо незалежні початкові умови (рис.2.2).

$$I_3 = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{100}{100 + 20 + 20} = 0.714\ A$$

$$U_C = I_3 R_3 + E_2 = 0.714 \cdot 20 + 60 = 74.29\ B$$

Враховуючи закони комутації запишемо незалежні початкові умови (НПУ):

$$i_3(0) = i_3(0\_) = I_3 = 0.714\ A$$

$$u_C(0) = u_C(0\_) = U_C = 74.29\ B$$

2. Складемо для схеми після комутації систему рівнянь за законами Кірхгофа для часу $t = 0$ (рис.2.3):

$$\begin{cases} i_1(0) - i_2(0) - i_3(0) = 0 \\ i_1(0) R_1 + u_L(0) = E_1 \\ i_1(0) R_1 + u_C(0) + i_2(0) R_{22} = E_1 + E_2 \end{cases}$$

3. Підставимо відомі значення у систему рівнянь (2.1), враховуючи $i_3(0) = 0.714\ A$, $u_C(0) = 74.29\ B$

$$\begin{cases} i_1(0) - i_2(0) - 0.714 = 0 \\ i_1(0) \cdot 100 + u_L(0) = 100 \\ i_1(0) \cdot 100 + 74.29 + i_2(0) \cdot 20 = 100 + 60 \end{cases}$$

Розв’язавши систему, отримаємо залежні початкові умови:

$$i_1(0)=0.833\ A;\ i_2(0)=0.119\ \ A;\ \ u_L(0)=16.67\ B$$

3 а. Продиференціюємо систему рівнянь (2.1) при $t=0$, отримуємо систему (2.2)

Визначимо $$\left.\frac{di_3}{dt}\right|_{t=0}=\frac{u_L(0)}{L}=\frac{16.67}{1}=16.67\ \frac{A}{c}$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0}=\frac{i_2(0)}{C}=\frac{0.119}{400\cdot 10^{-6}}=298.125\ \ \frac{B}{c}$$

Підставимо відомі значення у систему рівнянь (2.2) та знайдемо невідомі значення похідних при $t=0$; розв'язавши систему, отримаємо:

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0}=0.295\ \frac{A}{c};\ \left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0}=-16.38\ \frac{A}{c};\ \left.\frac{du_L}{dt}\right|_{t=0}=-29.479\ \ \frac{B}{c}$$

4. Знайдемо усталені складові шуканих величин шляхом розрахунку усталеного режиму в схемі після комутації (рис.2.4).

$$i_{1y}=i_{3y}=\frac{E_1}{R_1}=\frac{100}{100}=1\ A;$$

$$u_{Cy}=E_2=60\ B$$

$$u_{Cy}=E_2=60\ B,\ i_{2y}=0,\ u_{Ly}=0$$

5. Складаємо характеристичне рівняння:

$$Z(p)=\frac{1}{pC}+R_{22}+\frac{R_1 pL}{R_1+pL};$$

отримуємо вираз

$$1.2p^2+45p+2500=0$$

визначаємо корені характеристичного рівняння:

$$p_{1,2}=-18.7\pm j41.6=-\delta\pm j\omega,$$

отже, має місце коливальний перехідний процес.

6. Запишемо повні рішення для шуканих величин як суму усталеної і вільної складових (таблиця 2.1):

$$i_1(t) = i_{1y} + A_1 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \gamma_1),$$

$$i_2(t) = i_{2y} + A_2 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \gamma_2),$$

$$i_3(t) = i_{3y} + A_3 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \gamma_3),$$

$$u_C(t) = u_{Cy} + B_1 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$u_L(t) = u_{Ly} + B_2 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi_2).$$

7. Розрахуємо постійні інтегрування $A_1,\ A_2,\ A_3$, $B_1,\ B_2$. Для їх знаходження, потрібно підставити знайдені початкові умови в вирази для шуканої величини і її похідної при $t = 0$ (таблиця 2.2).

Визначимо постійні інтегрування для струму $i_1(t)$:

$$\begin{cases} A_1 \sin\gamma = i_1(0) - i_{1y} \\ \omega A_1 \cos\gamma_1 + \delta A_1 \sin\gamma_1 = \left.\dfrac{di_1(t)}{dt}\right|_{t=0} \end{cases}$$

Після підстановки, отримаємо

$$\begin{cases} A_1 \sin\gamma_1 = 0.833 - 1 \\ 41.6 \cdot A_1 \cos\gamma_1 - 18.7 \cdot A_1 \sin\gamma_1 = 0.295 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 \sin\gamma_1 = -0.167 \\ 41.6 \cdot A_1 \cos\gamma_1 - 18.7 \cdot (-0.167) = 0.295 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 \sin\gamma_1 = -0.167 \\ A_1 \cos\gamma_1 = -0.068 \end{cases}$$

звідки

$$tg\gamma_1 = \frac{A_1 \sin\gamma_1}{A_1 \cos\gamma_1} = 2.457,$$

так як значення $tg\gamma_1$ знаходиться у третій четверті, то $\gamma_1 = arctg(2.457) \pm 180^o = 67.9^o \pm 180^o = 247.9^o$, або $\gamma_1 = -112.1^o$

$$A_1 = \frac{-0.167}{\sin\gamma_1} = \frac{-0.167}{\sin(-112.1^o)} = 0.18$$

Постійні інтегрування для інших струмів знаходимо аналогічно.

Визначимо постійні інтегрування для напруги $u_C(t)$:

$$\begin{cases} B_1 \sin\varphi_1 = 74.29 - 60 \\ 41.6 \cdot B_1 \cos\varphi_1 - 18.7 \cdot B_1 \sin\varphi_1 = 298.125 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 \sin\varphi_1 = 14.29 \\ 41.6 \cdot B_1 \cos\varphi_1 - 18.7 \cdot 14.29 = 298.125 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_1 \sin\varphi_1 = 14.29 \\ B_1 \cos\varphi_1 = 13.59 \end{cases}$$

звідки

$tg\varphi_1 = 1.052,\ \varphi_1 = 46.438^o.$

$$B_1 = \frac{14.29}{\sin(46.438^o)} = 19.72$$

Визначимо постійні інтегрування для напруги $u_L(t)$:

$$\begin{cases} B_2 \sin\varphi_2 = 16.67 \\ 41.6 \cdot B_2 \cos\varphi_2 - 18.7 \cdot B_2 \sin\varphi_2 = -29.479 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_2 \sin\varphi_2 = 16.67 \\ 41.6 \cdot B_2 \cos\varphi_2 - 18.7 \cdot 16.67 = -29.479 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_2 \sin\varphi_2 = 16.67 \\ B_2 \cos\varphi_2 = 6.785 \end{cases}$$

звідки

$tg\varphi_2 = 2.457,\ \varphi_2 = 67.85^o.$

$$B_2 = \frac{16.67}{\sin(67.85^o)} = 18$$

8. Підсумовуючи розраховані усталену і вільну складову запишемо рішення для шуканих величин

$$i_1(t) = 1 + 0.18e^{-18.7t}\sin(41.6t - 112.1^o),$$

$$i_2(t) = -0.36e^{-18.7t}\sin(41.6t - 19.3^o),$$

$$i_3(t) = 1 + 0.395e^{-18.7t}\sin(41.6t - 46.4^o),$$

$$u_C(t) = 60 + 19.72e^{-18.7t}\sin(41.6t + 46.438^o),$$

$$u_L(t) = 18e^{-18.7t}\sin(41.6t + 67.85^o).$$

2.6.4 Побудова графіка зміни перехідного струму при коливальному режимі

У випадку коливального процесу струм або напруга в загальному вигляді запишуться рівнянням:

$$x(t) = x_y + Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \gamma) \qquad (2.3)$$

де δ, ω – складові комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega$.

Швидкість згасання вільної складової рівняння (2.3) залежить від показника δ. Тому при побудові графіка перехідної функції для коливального процесу розрахунковий проміжок часу *T* визначають із співвідношення $T = \frac{4 \div 5}{(4 \div 5)\delta}$, *сек*. Виходячи з того, що для побудови якісного часового графіка досліджуваної функції на інтервалі $0 \le t \le T$ необхідно мати (15-20) дискретних значень *f*(*t*), крок Δt при розрахунках повинен становити:

$$T = \frac{4 \div 5}{(4 \div 5)\delta} = \frac{0.25 \div 0.3}{\delta}(сек)$$

Розглянемо побудову часового графіка для струму. закон зміни якого визначається рівнянням:

$$i(t) = 1 + 0.18e^{-18.7t}\sin(41.6t - 112.1^o)$$

Графік перехідного струму $i_1(t)$ зображено на рис. 2.6. Як видно із графіка, струм у цьому перехідному режимі коливається відносно свого усталеного значення $i_{1y} = 1A$, наближаючись до нього із зростанням часу.

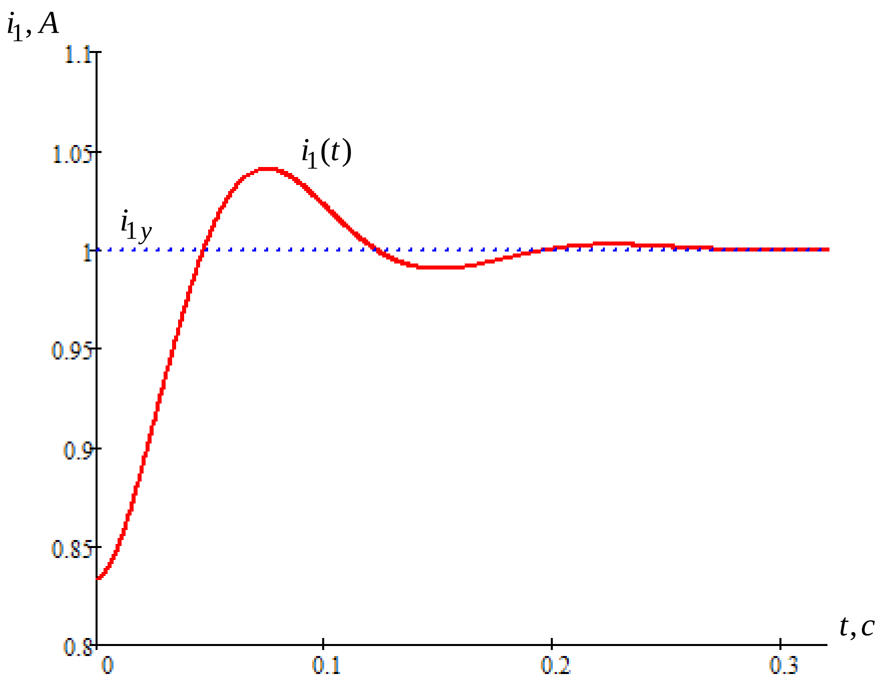

Рисунок 2.6