Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Аналітична геометрія
Лінійна алгебра

Навчально-методичний посібник

Чернівці
"Рута"
2007

УДК 512.64(075.8)+514.12(075.8)
А64
ББК 22.143я73 + 22.151.54я73

Друкується за ухвалою
Вченої ради факультету прикладної математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № 10 від 02.07.07 р.)

Рецензенти:
Городецький В.В. – доктор фіз.-мат. наук, професор ЧНУ;
Горлей П.М. – доктор фіз.-мат. наук, професор ЧНУ.

А64 Аналітична геометрія. Лінійна алгебра: Навчально-методичний посібник / Укл.: І.Д.Пукальський, І.П.Лусте. – Чернівці: Рута, 2007. – 244 с.
ISBN

Книга містить основні положення векторної алгебри, геометричних образів першого та другого порядку, теорії лінійних просторів та систем лінійних алгебраїчних рівнянь, лінійних операторів, квадратичних форм, приклади та завдання для самостійної роботи.

Для студентів природничих факультетів.

ББК 22.143я73 + 22.151я73

ЗМІСТ

Вступ

Предметом аналітичної геометрії є вивчення геометричних об'єктів аналітичним методом, тобто методами алгебри. Це здійснюється за допомогою методу координат – найпростішого аналітичного образу, яким є точка, та описується впорядкованою множиною чисел, які називаються *координатами цієї точки.*

Більш складні геометричні фігури описуються алгебраїчними рівняннями, які встановлюють функціональну залежність між координатами довільної точки геометричного об'єкта, який вивчається.

У даному посібнику розглядаються основні теми двох розділів математики: "Аналітична геометрія" та "Лінійна алгебра".

Наведемо кілька прикладів застосування методів аналітичної геометрії та лінійної алгебри при вивченні фізичних процесів.

1. Задача про момент сили, яка приводить до поняття векторного добутку

Коли ми кажемо, що за допомогою коловорота витягуємо воду з криниці або крутимо кермо автомобіля, то створюємо деякий момент кручення, який діє на вісь коловорота чи керма. Міра роботи, яка при цьому виконується, залежить від прикладеної сили $\overrightarrow{F}$ та пройденого шляху. При досить малому куті $d\varphi$ можна вважати, що сила $\overrightarrow{F}$ стала, тобто напрямлена однаково для всіх точок, а пройдений шлях $ld\varphi$ наближено збігається з напрямком дії сили. Тоді робота dA, яка виконується цією силою, $dA \approx Fld\varphi$ (рис. 1).

Якщо сила $\overrightarrow{F}$ напрямлена не перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OM}$, то її можна розкласти на дві складові частини: вздовж вектора $\overrightarrow{OM}$ і перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OM}$ (рис. 2). Сила $\overrightarrow{F}_1$, яка напрямлена вздовж $\overrightarrow{OM}$, не виконує роботи при обертанні $\overrightarrow{OM}$ навколо осі, яка перпендикулярна площині векторів $\overrightarrow{F}$ та $\overrightarrow{OM}$ і проходить через точку O. Вона зрівноважується реакцією осі в точці O. Отже, роботу виконує тільки складова $\overrightarrow{F}_2$, перпендикулярна $\overrightarrow{OM}$. Тоді знаходимо

$$dA \approx (Fl\sin\alpha)d\varphi,$$

де l – довжина вектора $\overrightarrow{OM}$, F – довжина вектора $\overrightarrow{F}$.

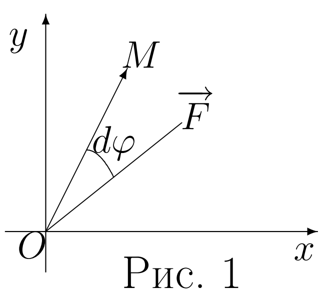


Рис. 1

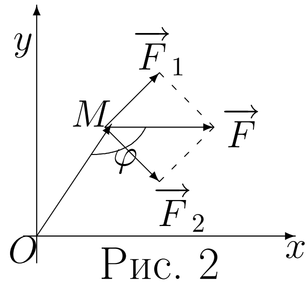


Рис. 2

Вираз $Fl\sin\alpha$ називається величиною момента сили відносно точки O. Природно вважати момент сили відносно точки величиною векторною й направити цей вектор уздовж осі обертання, тобто перпендикулярно площині векторів $\overrightarrow{F}$ та $\overrightarrow{l}$, і в той бік, щоб обертання здійснювалося проти стрілки годинника, якщо дивитися з кінця цього вектора.

Визначення 1. *Моментом сили $\overrightarrow{F}$ відносно точки O називається вектор $\overrightarrow{M}_0$ $(\overrightarrow{F}$), який визначається за формулою*

$$\overrightarrow{M}_0(\overrightarrow{F}) = [\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}],$$

де $\overrightarrow{r}$ – радіус-вектор точки прикладання сили $\overrightarrow{F}$ відносно точки O.

Якщо на абсолютно тверде тіло діють сили $\overrightarrow{F}_1$, $\overrightarrow{F}_2$, $\ldots$, $\overrightarrow{F}_n$, то кажуть, що воно знаходиться в рівновазі, якщо

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i = 0, \tag{1}$$

і сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки дорівнює нулеві. Покажемо, що для цього досить, щоб сума моментів відносно будь-якої однієї точки O дорівнювала $\overrightarrow{0}$. Нехай

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_0(\overrightarrow{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} [\overrightarrow{r}_i \times \overrightarrow{F}_i] = 0, \tag{2}$$

де $\overrightarrow{r}_i$ – радіус-вектор прикладання сили $\overrightarrow{F}_i$ відносно точки O. Нехай тепер $\overrightarrow{O}_1$ – будь-яка точка, $\overrightarrow{r}_i^{(1)} = \overrightarrow{r}_i + \overrightarrow{OO_1}$, а отже,

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_i(\overrightarrow{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} [(\overrightarrow{r}_i + \overrightarrow{OO_1}) \times \overrightarrow{F}_i] = \sum_{i=1}^{n} [\overrightarrow{r}_i \times \overrightarrow{F}_i] +$$

$$+ \left[\overrightarrow{OO_1} \times \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i \right] = 0.$$

Умови (1), (2) називаються умовами рівноваги абсолютно твердого тіла під дією сили $\overrightarrow{F}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

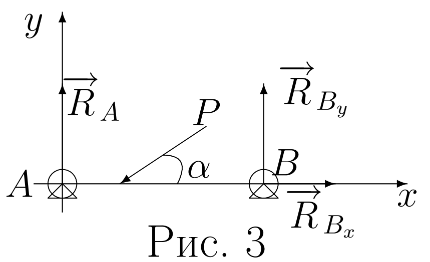


Рис. 3

Розглянемо, наприклад, балку на двох опорах, причому в точці A, яку виберемо за початок декартової системи координат, опора шарнірно-рухома.

Це означає, що вона може вільно ковзати вздовж осі Ox і має в цій точці шарнір, тому реакція такої опори зводиться до вертикальної сили $\overrightarrow{R}_A$. У точці R опора шарнірна, так що реакція опори має дві складові $\overrightarrow{R}_{B_x}$ та $\overrightarrow{R}_{B_y}$. Нехай довжина балки дорівнює l і на балку на відстані l_1 від початку координат діє сила, яка напрямлена під кутом α до осі балки.

Умови рівноваги такої балки, яку будемо вважати абсолютно твердою, мають вигляд

$$R_{B_x} - p\cos\alpha = 0,$$

$$R_A + R_{B_y} - p\sin\alpha = 0$$

і

$$\sum \overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{F}_i) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ l_1 & 0 & 0 \\ -p\cos\alpha & -p\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ l & 0 & 0 \\ R_{B_x} & R_{B_y} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

або $R_{B_x} = p\cos\alpha_1$, $R_A + R_{B_y} = p\sin\alpha$.

Розкривши визначник (поняття й властивості якого розглянуто далі у темі 2), запишемо:

$$(-Pl_1\sin\alpha + R_{B_y}l)\overrightarrow{k} = 0.$$

З останніх рівнянь знаходимо реакцію опор

$$R_{B_x} = p\cos\alpha, \quad R_{B_y} = \frac{pl_1\sin\alpha}{l},$$

$$R_A = p\sin\alpha - \frac{pl_1\sin\alpha}{l} = \frac{p(l-l_1)\sin\alpha}{l}.$$

2. Лінійна швидкість точки при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі

Якщо тверде тіло обертається навколо нерухомої осі, то кожна точка M його описує коло, радіус якого дорівнює відстані точки до нерухомої осі, а лінійна швидкість $\overrightarrow{v}$ цієї точки лежить у площині кола й напрямлена по дотичній до нього.

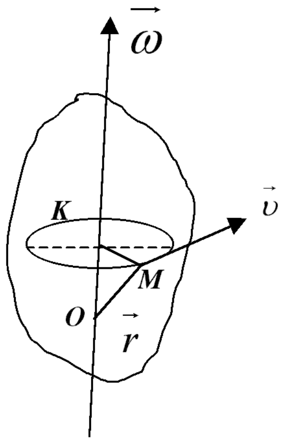


Рис. 4.

Величина $\|\overrightarrow{v}\|$ лінійної швидкості $\overrightarrow{v}$ дорівнює добутку відстані KM точки до осі обертання на кутову швидкість ω. У механіці кутову швидкість вважають векторною величиною, цей вектор напрямлений уздовж осі обертання в той бік, щоб, дивлячись із кінця вектора $\overrightarrow{\omega}$, обертання бачити таким, що здійснюється проти руху годинникової стрілки: $\|\overrightarrow{\omega}\| = \omega$.

Тоді вектор лінійної швидкості точки M буде

$$\overrightarrow{v} = [\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{KM}], \quad \overrightarrow{\omega} \perp \overrightarrow{KM} \quad \text{і} \quad \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{KM}.$$

Взявши за початок координат будь-яку точку O на осі обертання, для радіус-вектора цієї точки маємо

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM}.$$

Оскільки $\overrightarrow{OK} \parallel \overrightarrow{\omega}$, то $\overrightarrow{v} = [\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}]$. Ця формула називається *формулою Ейлера.*

Закон Біо–Савара

Якщо по провіднику протікає електричний струм, то він створює в просторі магнітне поле, вектор напруги якого позначимо через $\overrightarrow{H}$. Використовуючи магнітну стрілку, можна визначити напрямок цього вектора. Так, наприклад, у магнітному полі прямолінійного провідника магнітна стрілка встановлюється по дотичній до кола, площина якого перпендикулярна до дроту, а центр лежить на дроті. Отже, у цьому випадку вектор $\overrightarrow{H}$ напрямлений уздовж вектора $[I \times r_0]$ (рис. 5).

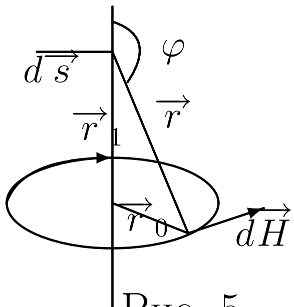


Рис. 5

За допомогою дослідів Біо і Савар у 1820 році встановили, що магнітне поле в кожній точці створюється всіма ділянками провідника, і вектор $\overrightarrow{H}$ можна подати у вигляді геометричної суми векторів $d\overrightarrow{H}$, які створюються окремими ділянками провідника.

Вони встановили, що поле нескінченно малого провідника $d\overrightarrow{s}$ дроту, по якому тече струм $\overrightarrow{I}$, має напругу

$$\|dH\| = \frac{kl \sin\varphi \|ds\|}{\|\overrightarrow{r}\|^2},$$

де $\overrightarrow{r}$ – відстань від $d\overrightarrow{s}$ точки M; φ – кут між $d\overrightarrow{s}$ і $\|\overrightarrow{r}\|$; k – коефіцієнт, який залежить від вибору системи одиниць. Напрямок вектора $d\overrightarrow{H}$ визначається за правилом Ампера (правого гвинта).

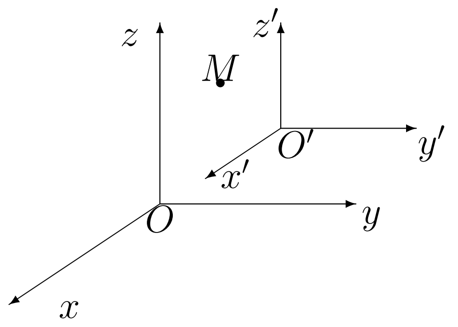
Цей закон у векторній формі записується так:

$$d\overrightarrow{H} = \frac{kl}{\|\overrightarrow{r}\|^2}[d\overrightarrow{s} \times \overrightarrow{r}]$$

і називається *законом Біо–Савара.*

Прискорення й сила Коріоліса

Нехай є дві системи координат $Oxyz$ і $Ox'y'z'$ і вони рухаються одна відносно іншої прямолінійно. Одну систему координат, наприклад, $Ox'y'z'$ будемо називати рухомою, а систему $Oxyz$ – нерухомою. Швидкість і прискорення матеріальної точки M відносно системи $Ox'y'z'$ називаються відносними й позначаються $\overrightarrow{v}_{\text{відн.}}$ та $\overrightarrow{\omega}_{\text{відн.}}$. Швидкість і прискорення тієї ж точки, що в даний момент часу збігається з матеріальною точкою M, відносно системи відліку називаються переносними й позначаються $\overrightarrow{v}_{\text{пер.}}$ і $\overrightarrow{\omega}_{\text{пер.}}$. З механіки відомо, що абсолютна швидкість v_a, тобто швидкість відносно $Oxyz$ $\overrightarrow{v}_a = \overrightarrow{v}_{\text{відн.}} + \overrightarrow{v}_{\text{пер.}}$.

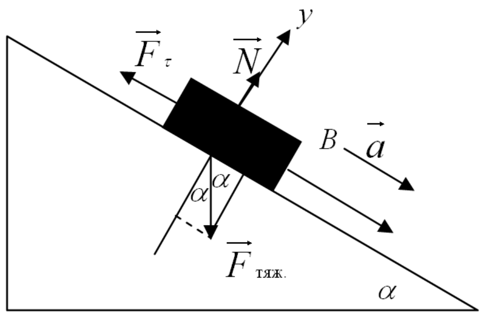


Для абсолютного прискорення $\overrightarrow{\omega}_a = \overrightarrow{\omega}_{\text{відн.}} + \overrightarrow{\omega}_{\text{пер.}} + \overrightarrow{\omega}_{\text{кор.}}$, де $\overrightarrow{\omega}_{\text{кор.}}$ – поворотне або коріолісове прискорення.

При поступальному русі системи $Ox'y'z'$ прискорення $\overrightarrow{\omega}_{\text{кор.}} = 0$. Тому воно в механіці називається поворотним. Коріолісове прискорення визначається через кутову швидкість $\overrightarrow{\omega}$ системи $Ox'y'z'$ як твердого тіла таким чином:

$$\overrightarrow{\omega}_{\text{кор.}} = [2\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v}_{\text{відн.}}].$$

Приклад 1. По похилій площині з кутом нахилу α рухається вниз брусок A масою m. Коефіцієнт тертя бруска до площини дорівнює μ. Визначити прискорення $\overrightarrow{a}$ бруска.



Розв'язування. На брусок діють три сили: сила тяжіння $\overrightarrow{F}_{\text{тяж.}} = m\overrightarrow{g}$, сила тертя $\overrightarrow{F}_\tau$ і сила реакції опори $\overrightarrow{N}$. Напрямки цих сил показано на рисунку. Разом ці сили й надають бруску прискорення $\overrightarrow{a}$, що напрямлене вздовж площини вниз.

Щоб спростити рисунок, усі сили прикладені до центра бруска. Насправді, $\overrightarrow{F}_\tau$ і $\overrightarrow{N}$ прикладені до основи бруска.

Спрямуємо осі координат x і y так, як показано на рисунку. Другий закон Ньютона запишемо у векторній формі

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F}_\tau,$$

а також у скалярній формі для проекції векторів, що входять до нього, на осі Ox і Oy.

Для проекцій на вісь Ox рівняння другого закону Ньютона запишеться так:

$$ma = mg\sin\alpha - F_\tau. \tag{3}$$

Для проекцій на вісь Oy маємо

$$0 = N - mg\cos\alpha \quad \text{або} \quad N = mg\cos\alpha. \tag{4}$$

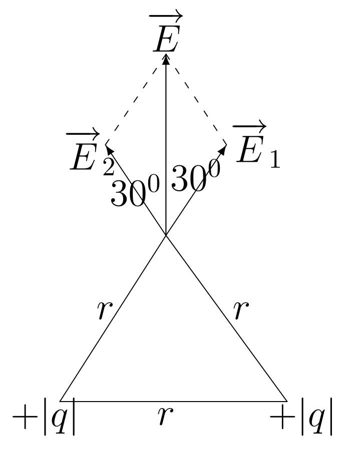
Оскільки сила тертя дорівнює μN, то, враховуючи (4), отримаємо $F_\tau = \mu mg\cos\alpha$.

Підставляючи F_τ в (3), знайдемо:

$$A = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Приклад 2. Два однакових точкових заряди розміщені на відстані r один від одного в однорідному середовищі з діелектричною проникністю ε. Знайти напруженість електричного поля в точці, що розміщена на однаковій відстані r як від одного, так і від іншого заряду.

Розв'язування. Згідно з принципом суперпозиції, шукана

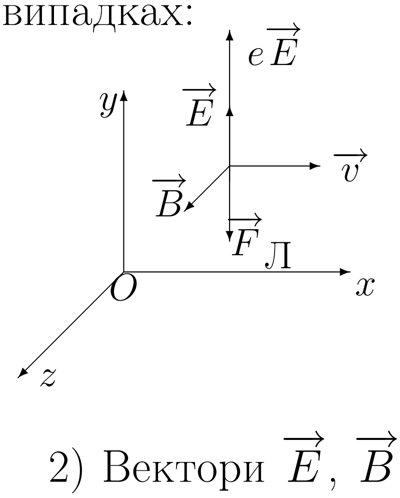


напруженість $\overrightarrow{E}$ дорівнює геометричній напруженості полів, створених кожним із зарядів. Модулі напруженостей кожного заряду дорівнюють $E_1 = E_2 = k\dfrac{|q|}{\varepsilon r^2}$. Діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{E}_1$ та $\overrightarrow{E}_2$, є напруженістю результуючого поля, модуль якої дорівнює

$$E = eE_l \cos 30^0 = 2k\frac{|q|}{\varepsilon}r^2\frac{\sqrt{3}}{2} = k\frac{|q|\sqrt{3}}{\varepsilon r^2}.$$

Приклад 3. У просторі, де існують одночасно однорідне й постійне електричне й магнітне поля, по прямолінійній траєкторії рухається протон. Відомо, що напруженість електричного поля дорівнює $\overrightarrow{E}$. Визначити індукцію $\overrightarrow{B}$ магнітного поля.

Розв'язування. Прямолінійний рух протона можливий у двох випадках:



1) Вектор $\overrightarrow{E}$ напрямлений уздовж траєкторії руху протона. Тоді вектор $\overrightarrow{B}$ теж має бути напрямлений уздовж цієї траєкторії і його модуль може бути яким завгодно, оскільки магнітне поле на частинку не діятиме.

2) Вектори $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{v}$ взаємно перпендикулярні, і сила, що діє на протон з боку електричного поля, дорівнює за модулем і протилежна за напрямком силі Лоренца, що діє на протон з боку магнітного поля. Оскільки $e\overrightarrow{E} + \overrightarrow{E}_Л = 0$, то $eE - evB = 0$ і $B = \dfrac{E}{v}$.

Приклад 4. Знайти координати центра ваги трикутника

ABC, якщо відомі координати його вершин: $A(-4,2)$, $B(2,0)$, $C(1,3)$.

Розв'язування. Центр ваги трикутника – це точка перетину його медіан. Тому спочатку знайдемо координати другого кінця однієї з медіан (CD):

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = -1, \quad y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = -1, \quad D(-1,1).$$

Центр ділить кожну медіану у відношенні $2:1$, відраховуючи від вершини трикутника, тобто

$$x_P = \frac{x_C + \frac{1}{2}x_D}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2x_C + x_D}{2+1} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3};$$

$$y_P = \frac{y_C + \frac{1}{2}y_D}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2y_C + y_D}{2+1} = \frac{6-1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Отже, $P\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Приклад 5. Вирахувати роботу, що виконується силою $\overrightarrow{F} = \{3,-5,2\}$, коли точка прикладання переміщується із початку в кінець вектора $\overrightarrow{S} == \{2,-5,7\}$.

Розв'язування. Якщо вектор зображає силу F, точка прикладання якої переміщується із початку в кінець вектора $\overrightarrow{S}$, то робота A цієї сили визначається рівністю

$$A = (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{S}) = 3\cdot 2 + (-5)\cdot(-5) + 2\cdot(-7) = 17.$$

Отже, $A = 17$, тут $(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{S})$ – скалярний добуток векторів.

Приклад 6. Сила $\overrightarrow{P} = \{2,-4,5\}$ прикладена до точки $A(2,-1,1)$. Визначити момент цієї сили відносно початку координат.

Розв'язування. Якщо вектор $\overrightarrow{f}$ зображає силу, що прикладена в деякій точці M, а вектор $\overrightarrow{S}$ виходить з деякої точки B в точку M, то вектор $[\overrightarrow{S}, \overrightarrow{f}] = M_f$ є моментом сили $\overrightarrow{f}$ відносно точки B, $[\overrightarrow{S}, \overrightarrow{f}]$ – векторний добуток векторів $\overrightarrow{S}$ і $\overrightarrow{f}$.

Оскільки вектор $\overrightarrow{OA} = \{2, -1, 2\}$, тоді момент сили

$$M_P = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{P}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -2\overrightarrow{i} - 8\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k}.$$

Отже, момент сили дорівнює $M_P = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{P}] = \{-2, -8, -6\}$.

Приклад 7. Точка $M(x, y, z)$ рухається прямолінійно і рівномірно з початкової точки $M_0(11, -21, 20)$ у напрямку вектора $\overrightarrow{s} = \{-1, 2, -2\}$ зі швидкістю $v = 12$. Визначити, за який час вона пройде відрізок своєї траєкторії, який міститься між площинами $2x + 3y + 5z - 41 = 0$, $2x + 3y + 5z + 31 = 0$.

Розв'язування. Рівняння траєкторії руху має вигляд

$$\frac{x - 11}{-1} = \frac{y + 21}{2} = \frac{z - 20}{-2} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = -t + 11, \\ y = 2t - 21, \\ z = -2t + 20. \end{cases}$$

Знайдемо координати точок перетину траєкторії з площинами. Для цього розв'яжемо системи:

$$\text{а)} \begin{cases} 2x + 3y + 5z - 41 = 0, \\ x = -t + 11, \\ y = 2t - 21, \\ z = -2t + 20. \end{cases}$$

Підставляючи значення x, y, z у перше рівняння, маємо:

$$-2t + 22 + 6t - 63 - 10t + 100 - 41 = 0 \quad \text{або} \quad 6t = 18, t = 3.$$

Отже, $x_1 = 8$, y_1, $z_t = 14$.

$$\text{б)} \begin{cases} 2x + 3y + 5z + 31 = 0, \\ x = -t + 11, \\ y = 2t - 21, \\ z = -2t + 20. \end{cases}$$

Аналогічно знаходимо $6t = 90$, $t = 15$, $x_2 = 4$, $y_2 = 9$, $z_2 = -10$.

Отже, точками перетину паралельних площин траєкторією будуть $A(8, -15, 14)$, $B(-4, 9, -10)$. Довжина відрізка

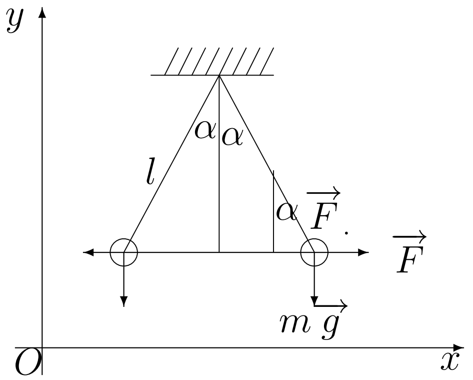
$$|AB| = \sqrt{(8+4)^2 + (-15-9)^2 + (14+10)^2} =$$

$$= \sqrt{144 + 576 + 576} = 36.$$

Оскільки час $t = \dfrac{|AB|}{v}$, то $t = \dfrac{36}{12} = 3$.

Приклад 8. Дві однакові кульки підвішено на нитках завдовжки $l = 2$ м до однієї точки. Коли кулькам надали однакових зарядів по $q = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл, то вони розійшлися на відстань $r = 16$ см. Визначити натяг кожної нитки.

Розв'язування. На кожну кульку діють три сили: сила тяжіння $m\overrightarrow{g}$, сила пружності нитки $\overrightarrow{F}_{\text{пр.}}$ і кулонівська сила $\overrightarrow{F}$.



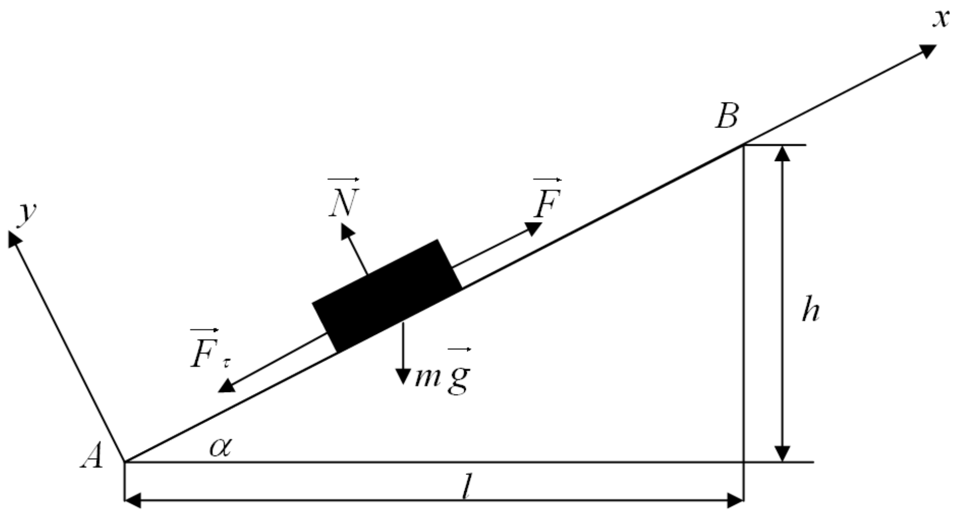
Кулька нерухома, отже, сума проекцій сил на осі Ox і Oy дорівнює нулю. Для суми проекцій сил на вісь Ox ця умова має вигляд

$$A - A_{\text{пр.}} \sin\alpha + mg\cos 90^0 = 0.$$

Оскільки $\sin\alpha = \dfrac{r}{2l}$ і $F = k\dfrac{q^2}{r^2}$, то

$$F_{\text{пр.}} = \frac{F}{\sin\alpha} = \frac{F \cdot 2l}{r} = k\frac{q^2 \cdot 2l}{r^2} \approx 3.5 \cdot 10^{-3}\,\text{Н}.$$

Приклад 9. Визначити роботу піднімання вантажу на похилій площині, якщо маса вантажу $m = 100$ кг, довжина похилої площини $l = 2$ м, кут нахилу $\alpha = 30^0$, коефіцієнт тертя $\mu = 0,1$, вантаж рухається з прискоренням $a = 1\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Яку роботу виконує при цьому сила тяжіння?



Розв'язування. Для обчислення роботи піднімання вантажу слід передусім знайти, яку силу тяги F треба прикласти до вантажу, щоб він рухався з прискоренням угору по площині. Сили, які діють на вантаж: сила тяжіння $F_{\text{тяж.}} = m\overrightarrow{g}$, сила тертя F_τ, сила реакції опори $\overrightarrow{N}$ і сила тяги $\overrightarrow{F}$. Запишемо другий закон Ньютона для прискореного руху вантажу вздовж осі Ox:

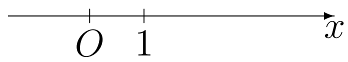
$Ma = F - mg\sin\alpha - F_{\text{тер.}}$, де $F_{\text{тер.}} = \mu mg\cos\alpha$ – сила тертя.

Звідси $F = m(g\sin\alpha + a - \mu g\cos\alpha)$. Тоді $A = Fl$ або $A = ml(g\sin\alpha + a - \mu g\cos\alpha) \approx 1350$ Дж.

Розділ I. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Тема 1. Системи координат

Визначення 1. *Пряма, на якій визначено напрямок, початок відліку O та відрізок, прийнятий за одиницю масштабу (мм, см, м і т.д), називається числовою віссю.*



Визначення 2. *Відрізок AB, для якого вказано напрямок (A – початок, B – кінець), називається напрямленим. Він позначається $\overrightarrow{AB}$, а його довжина $|\overrightarrow{AB}|$. Якщо початок і кінець відрізка збігаються, то $|\overrightarrow{AB}| = 0$.*

Визначення 3. *Величиною напрямленого відрізка називається число, яке дорівнює довжині цього відрізка, взяте зі знаком "+", якщо його напрямок збігається з напрямком осі, на якій він розміщений, та зі знаком "–", якщо він має протилежний напрямок до осі.*

Визначення 4. *Координатою x точки M на числовій осі є число, що відповідає величині напрямленого відрізка $\overrightarrow{OM}$, тобто $x = OM_x$. Відстань d між двома точками $M_1(x_1)$ та $M_2(x_2)$ осі при довільному розміщенні точок на осі визначається за формулою*

$$d = |x_2 - x_1|.$$

Якщо точки A та B лежать на осі Ox, то координата x точки $C(x)$, яка ділить у відношенні λ відрізок $\overrightarrow{AB}$ з початком $A(x_1)$ та кінцем $B(x_2)$, визначається за формулою

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{2}, \quad \lambda \neq -1.$$

Визначення 5. *Дві взаємно перпендикулярні числові осі, для яких визначено додатні напрямки, початок координат (точка*

O перетину осей), маштаби на числових осях, називаються прямокутною декартовою системою координат.

Визначення 6. *Упорядкована пара чисел (x, y), що відповідає точці M площини xOy, де $x = OM_x$, $y = OM_y$, називається декартовими прямокутними координатами точки M і позначається $M(x, y)$.*

Відстань d між двома точками $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ визначається за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Координати точки $C(x, y)$, яка ділить у відношенні λ відрізок $\overrightarrow{AB}$ між точками $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$, визначаються за формулою

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{2}.$$

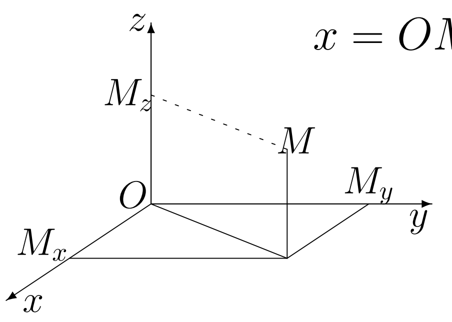
Площа трикутника з вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ визначається за формулою

$$S = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|.$$

Визначення 7. *Три взаємно перпендикулярні числові осі, для яких визначено додатні напрямки, початок координат (точка O перетину осей), маштаби на числових осях, називаються прямокутною декартовою системою координат у просторі.*

Визначення 8. *Упорядкована трійка чисел x, y, z, що відповідають точці M площини $Oxyz$, де*

$$x = OM_x, \ \ y = OM_y, \ \ z = OM_z,$$



називається декартовими координатами точки в прямокутній системі координат у просторі.

Відстань d між двома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ визначається за формулою

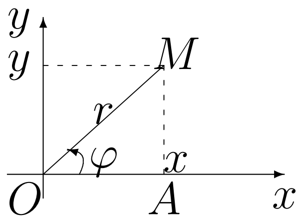
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Координати точки $C(x, y, z)$, що ділить у даному відношенні λ відрізок між точками $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$, визначаються за формулою

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{2}.$$

Полярні координати. У полярній системі координат положення точки M на площині визначається її відстанню $|OM| = \rho$ від полюса O (ρ – полярний радіус точки) і кутом φ , утвореним відрізком $|OM|$ з полярною віссю Ox (φ – полярний кут точки).

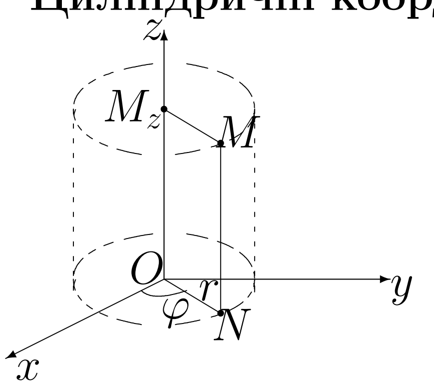
Кут φ вважається додатним при відліку від полярної осі проти годинникової стрілки.



У випадку, якщо початок декартової системи координат збігається з полюсом, а вісь Ox напрямлена вздовж полярної осі, то прямокутні декартові координати x і y точки M та її полярні координати ρ і φ зв'язані формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Циліндричні координати. Виберемо на фіксованій площині D деяку точку O і промінь Ox. Розмістимо вісь Oz, яка проходить через точку O, перпендикулярно площині D. Нехай M – довільна точка простору, N – проекція цієї точки на площину D, а M_z – проекція M на вісь Oz.

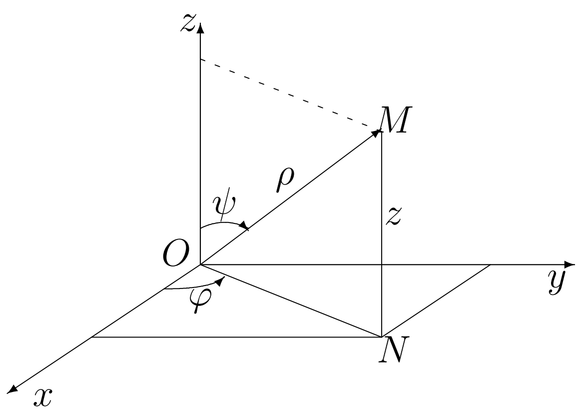


Визначення 9. *Циліндричними координатами точки M називаються три числа ρ, φ, z, перші два з яких (ρ, φ) є полярними координатами точки N у площині D відносно полюса O і полярної осі, а число z є величиною напрямленого відрізка OM_z.*

Якщо вибирати осі прямокутної декартової системи координат $Oxyz$ так, щоб початки циліндричної та декартової систем збігалися, вісь Ox збігалася з полярною віссю, то декартові координати x, y, z точки M пов'язані з циліндричними ρ, φ, z формулами

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Сферичні координати. Розглянемо три взаємно перпендикулярні осі Ox, Oy, Oz зі спільним початком O. Нехай M – довільна точка простору, N – її проекція на площину Oxy, ρ – відстань від точки M до O, ψ – кут між відрізком OM та віссю Oz, φ – кут, на який потрібно повернути вісь Ox проти годинникової стрілки, доки вона не збігатиметься з ON. Тоді декартові координати x, y, z точки M пов'язані зі сферичними координатами ρ, φ, ψ такими формулами:



$$x = \rho \cos \varphi \sin \psi, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \psi, \quad z = \rho \cos \psi.$$

Координати φ і ψ називаються відповідно широтою та довготою.

Приклад 1. Дано вершини трикутника ABC: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Визначити координати центра ваги трикутника.

Розв'язування. Центр ваги трикутника ABC знаходиться в точці перетину медіан. Знайдемо координати точки D – середини відрізка AB. Для цього скористаємося формулами $x_D = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_D = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$. Точка M, в якій перетинаються медіани, ділить відрізок CD у відношенні $2 : 1$, рахуючи від точки C. Отже, координати точки M визначаються формулами: $x_M = \dfrac{x_3 + 2x_D}{1+2}$, $y_M = \dfrac{y_3 + 2y_D}{1+2}$. Якщо підставимо координати x_D та y_D, то отримаємо: $x_M = \dfrac{x_3 + 2(x_1 + x_2)/2}{1+2}$, $y_M = \dfrac{y_3 + 2(y_1 + y_2)/2}{1+2}$. Остаточно маємо: $x_M = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_M = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

Отже, центр ваги трикутника знаходиться в точці $M\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.

Приклад 2. По горизонтальній балці, яка лежить на двох опорах, йде людина. Тиск на опору A змінюється залежно від положення людини на балці. Знайти залежність між цим тиском і відстанню людини від другого кінця балки.

Розв'язування. Нехай вага балки P, її довжина l, а вага людини G. Тиск на опору A позначимо через R. Відомо, що вага балки P розподіляється рівномірно на дві опори. Вага людини G розподіляється на опори обернено пропорційно її відстані від цих опор. Отже, $R = \frac{P}{2} + \frac{G}{l}x$, де $0 \leq x \leq l$.

Приклад 3. Довести, що трикутник з вершинами $A(-3, 3)$, $B(-1, 3)$, $C(11, -1)$ прямокутний.

Розв'язування. Знайдемо довжини сторін трикутника:

$$|AB| = \sqrt{(-1+3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40};$$

$$|BC| = \sqrt{(11+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{160};$$

$$|AC| = \sqrt{(11+3)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{200}.$$

Оскільки $|AB|^2 = 40$, $|BC|^2 = 160$, $|AC|^2 = 200$, то $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$. Отже, сума квадратів довжин двох сторін трикутника дорівнює квадрату третьої сторони. Тому трикутник ABC – прямокутний із гіпотенузою AC.

Приклад 4. Відомі координати кінців відрізка AB – точки $A(-2,5)$, $B(4,17)$. На цьому відрізку знаходиться точка C, відстань від якої до A у два рази більша, ніж до B. Визначити координати точки C.

Розв'язування. Оскільки $|AC| = 2|CB|$, то $\lambda = |AC| : |CB| = 2$. Використовуючи формули $x_c = \dfrac{x_A + 2x_B}{1+2}$, $y_c = \dfrac{y_A + 2y_B}{1+2}$, маємо $x_C = \dfrac{-2+2\cdot 4}{3}$, $y_C = \dfrac{5+2\cdot 17}{3}$. Отже, $C(2,13)$.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти площу трикутника з вершинами $A(1,5)$, $B(2,7)$, $C(4,11)$.
2. Задано три вершини $A(2,3)$, $B(4,-1)$, $C(0,5)$ паралелограма $ABCD$. Знайти його четверту вершину.
3. Знайти відстань між точками $A\left(3,\frac{\pi}{4}\right)$ та $B\left(4,\frac{3\pi}{4}\right)$.
4. Знайти площу паралелограма, вершинами якого є три точки $A(-2,3)$, $B(4,-5)$, $C(-3,1)$.
5. Задано дві вершини трикутника $A(3,8)$, $B(10,2)$ і точка перетину медіан $M(1,1)$. Знайти координати третьої вершини.
6. Знайти координати точок, симетричних точкам $P_1\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $P_2\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$, $P_3\left(4,\dfrac{\pi}{4}\right)$, $P_4\left(3,-\dfrac{\pi}{3}\right)$ щодо полярної осі.
7. У полярній системі координат дано дві вершини $A\left(3,\dfrac{4\pi}{9}\right)$ і $B\left(5,\dfrac{11\pi}{14}\right)$ паралелограма $ABCD$, точка перетину діагоналей якого збігається з полюсом. Знайти дві інші вершини цього паралелограма.

8. Як розміщені точки, полярні координати яких задовольняють одне з таких рівнянь: а) $\rho = 1$; б) $\rho = a$; в) $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$; г) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$; д) $\varphi = \varphi_0$?
9. Полюс полярної системи координат збігається з початком декартових прямокутних координат, а полярна вісь – з додатною піввіссю абсцис. Знайти полярні координати точок, якщо відомі їх декартові координати $M_1(0,5)$, $M_2(-3,0)$, $M_3(\sqrt{3},1)$, $M_4(1,-\sqrt{3})$.
10. На осі Ox знайти точку, рівновіддалену від точок $A(1,-1)$ і $B(4,2)$.
11. Знайти центр кола, описаного навколо трикутника ABC з вершинами $A(0,a)$, $B(b,0)$, $C(0,0)$.
12. Дано координати двох суміжних вершин квадрата: $A(0,1)$ і $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$. Знайти інші його вершини.
13. Яку умову повинні задовольняти координати вершин трикутника ABC для того, щоб кут C був прямим?
14. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$ з вершинами $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,3)$, $D(-1,2)$?
15. Довести, що при довільних дійсних числах a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 справедлива нерівність

$$\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}+\sqrt{(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2} \geq$$
$$\geq \sqrt{(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2}.$$

16. Точка, рухаючись прямолінійно, перемістилася з точки $A(2,-7)$ у точку $B(-3,5)$. Який шлях вона пройшла і під яким кутом до осі Ox нахилена траєкторія руху?
17. Переконатися, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(1,3)$, $B(4,7)$, $C(2,8)$ і $D(-1,4)$ є паралелограмом, та знайти його площу.

18. Знайти площу трикутника з вершинами $A(2,1)$, $B(-3,2)$ і $C(2,-2)$.
19. Обчислити площу п'ятикутника з вершинами $A(-2,0)$, $B(0-1)$, $C(2,0)$, $D(3,2)$ і $E(-1,3)$.
20. У полярній системі координат дано дві вершини правильного трикутника $A\left(4,-\dfrac{\pi}{12}\right)$ і $B\left(8,\dfrac{7\pi}{12}\right)$. Визначити його площу.
21. Одна з вершин трикутника OAB лежить у полюсі, дві інші – точки $A(\rho_1,\varphi_1)$ і $B(\rho_2,\varphi_2)$. Визначити площу цього трикутника.
22. Точки $A(-2,-1)$, $B(-1,3)$ і $C(2,-1)$ – послідовні вершини паралелограма $ABCD$. Знайти його площу.
23. Визначити відношення λ, в якому кожна з точок $A(2,-1)$, $B(3,1)$ і $C(4,3)$ поділяє відрізок, обмежений двома іншими.
24. Знайти, які з трьох точок лежать на одній прямій:
    а) $(5,1)$, $(2,3)$, $\left(\dfrac{1}{2},4\right)$; б) $(0,4)$, $(1,-2)$, $(3,1)$.
25. Показати, що координати довільної точки прямої, яка сполучає точки $A(x_1,y_1)$ і $B(x_2,y_2)$, можна зобразити у вигляді $x = tx_1+(1-t)x_2$, $y = ty_1+(1-t)y_2$. Які значення параметра t відповідають внутрішнім точкам відрізка AB прямої?
26. На прямій, що проходить через точки $A(-3,1)$ і $B(2,2)$, знайти точку перетину її з віссю Oy.
27. Довести, що точки $A(0,0)$, $B(-3,-3)$ і $C(1,1)$ лежать на одній прямій, та знайти відношення $|AC|:|CB|$.
28. Знайти координати точок, що поділяють відрізок, обмежений точками $A(-1,3)$ і $B(2,4)$, у відношенні: а) $\lambda = 2$; б) $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.
29. Знайти точку перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$ з вершинами $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,2)$ і $D(-2,3)$.
30. Знайти довжину бісектриси внутрішнього кута A трикутника ABC, заданого вершинами $A(3,-5)$, $B(-3,3)$ і $C(-1,-2)$.

31. Дано $A(-1,-1)$, $B(3,5)$ і $C(-4,1)$ – вершини трикутника. Знайти точку перетину бісектриси зовнішнього кута при вершині A з продовженням сторони BC.

Відповіді

1. 0 (три точки лежать на одній прямій).
2. $D_1(2,1)$, $D_2(-2,9)$, $D_3(6,-3)$, оскільки четверта вершина може бути протилежною будь-якій із даних.
3. $d=5$. 4. $S=20$ кв.од. 5. $C(-10,-7)$.
6. $(1,-\frac{\pi}{2})$, $(2,-\frac{\pi}{3})$, $(4,-\frac{\pi}{4})$, $(3,\frac{\pi}{3})$. 7. $(3,-\frac{5}{9}\pi)$, $(5,-\frac{3}{4}\pi)$.
8. а) на колі з центром у полюсі та радіусом 1; б) на колі з центром у полюсі та радіусом a; в) на промені, що виходить із полюса під кутом φ.
9. $M_1(5,\frac{\pi}{2})$, $M_2(3,\pi)$, $M_3(2,\frac{\pi}{6})$, $M_4(2,\frac{5}{3}\pi)$.
10. $(3,0)$. 11. $(\frac{b}{2},\frac{a}{2})$.
12. $(\frac{1}{2},\frac{2-\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{3-\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{1}{2},\frac{2+\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{3+\sqrt{3}}{2})$.
13. Якщо $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, то $(x_3-x_1)(x_3-x_2)+(y_3-y_1)(y_3-y_2)=0$.
14. Ні. 16. $S=13$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{12}{5}$. 17. 11. 18. $\frac{15}{2}$. 19. $\frac{25}{2}$.
20. $28\sqrt{3}$. 21. $S=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)$. 22. 16. 23. $-\frac{1}{2}$, 1, -2.
24. а). 25. $0<t<1$, 26. $(0,\frac{8}{5})$. 27. $\frac{1}{4}$.
28. а) $(1,\frac{11}{3})$; б) $(-4,2)$. 29. $O(\frac{6}{11},\frac{12}{11})$. 30. $\frac{14\sqrt{2}}{3}$. 31. $(-11,-3)$.

Тема 2. Визначники та їхні властивості

Визначення 1. *Прямокутна таблиця чисел, яка містить m рядків та n стовпців*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

називається матрицею розміру $m \times n$. Числа a_{ij} називаються елементами матриці A.

Якщо поміняти місцями в матриці стовпці й рядки, то отримана матриця називається *транспонованою* й позначається A^*.

Якщо $m = n$, то матриця називається *квадратною* розміру n. Для такої матриці вводиться поняття визначника матриці. Визначником матриці є число, знайдене за певним правилом, яке позначається $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Зокрема, при $n = 2$ $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$; при $n = 3$ $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{22} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{33}a_{21}a_{12} - a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Визначення 2. *Мінором* M_{ij} *елемента* a_{ij} *визначника* $\det A$ *називається визначник* $(n-1)$*-го порядку, що залишається від закреслювання в* $\det A$ i*-го рядка та* j*-го стовпця.*

Визначення 3. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} *елемента* a_{ij} *називається мінор* M_{ij} *цього елемента, помножений на* $(-1)^{i+j}$, *тобто* $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Властивості визначників

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити стовпцями, а стовпці – відповідними рядками.
2. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки або два стовпці, знак визначника зміниться на протилежний.
3. Якщо у визначнику збігаються два рядки або стовпці, то він дорівнює нулеві.
4. Якщо всі елементи рядка або стовпця мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.
5. Якщо елементи двох рядків або стовпців пропорційні, то визначник дорівнює нулеві.
6. Якщо один із рядків або стовпців містить тільки нулі, то визначник дорівнює нулеві.
7. Якщо до елементів будь-якого рядка або стовпця визначника додати елементи іншого рядка або стовпця, помножені на одне й те саме число λ, то визначник не зміниться.
8. Сума добутків елементів будь-якого рядка або стовпця визначника на відповідні алгебраїчні доповнення цього рядка або стовпця дорівнює цьому визначнику.
9. Сума добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення іншого рядка або стовпця дорівнює нулеві.

Приклад 1. Обчислити визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Розкладемо визначник за елементами першого рядка. Маємо

$$\Delta = 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 0 - 3(-34) + 2(-17) = 68.$$

Приклад 2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 134 & 20 \\ 15 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Віднімемо від елементів першого стовпця елементи останнього, помножені на 3, і запишемо на місце першого. Маємо

$$\begin{vmatrix} 1 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 17 & 134 & 20 \\ 0 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розкриємо визначник за елементами першого стовпця. Дістанемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 17 & 134 & 20 \\ 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}.$$

Віднімемо від елементів другого стовпця елементи першого, помножені на 2, і розкриємо отриманий визначник за елементами першого рядка. В результаті маємо

$$\Delta = 8\begin{vmatrix} 100 & 20 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 8(500 - 400) = 800.$$

Приклад 3. Обчислити визначник Вандермонда

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Віднімемо перший стовпець від усіх інших. Будемо мати

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & (x_2 - x_1) & \dots & (x_n - x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & (x_2^{n-1} - x_1^{n-1}) & \dots & (x_n^{n-1} - x_1^{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи визначник за елементами першого рядка, знайдемо

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) & \dots & (x_n - x_1) \\ (x_2^2 - x_1^2) & (x_3^2 - x_1^2) & \dots & (x_n^2 - x_1^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_2^{n-1} - x_1^{n-1}) & (x_3^{n-1} - x_1^{n-1}) & \dots & (x_n^{n-1} - x_1^{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Віднімемо від кожного рядка попередній рядок, помножений на число x_1. Отримаємо

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

Спільні множники у стовпцях винесемо за знак визначника, маємо

$$\Delta_n = (x_2 - x_1)\dots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1)\Delta_{n-1}.$$

Повторюючи аналогічні міркування для визначника Δ_{n-1} і т.д., остаточно дістанемо, що

$$\Delta_n = (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}).$$

Задачі для самостійної роботи

1. Як зміниться визначник n-го порядку, якщо змінити знаки всіх його елементів на протилежні?
2. Як зміниться визначник, якщо кожний його елемент a_{ik} помножити на c^{i-k}, де $c \neq 0$?
3. Що станеться з визначником n-го порядку, якщо від його першого рядка відняти другий, від другого третій, від третього рядка перший рядок, залишивши всі інші рядки без змін?
4. Обчислити визначник, розкладаючи його за елементами третього рядка
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$
5. Обчислити визначник, розкладаючи його за елементами другого стовпця
$$\begin{vmatrix} 3 & a & 1 & 3 \\ 5 & b & 8 & 1 \\ 1 & c & -1 & -1 \\ 2 & d & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$
6. Обчислити визначники:
$$\text{а)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \text{ б)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \text{ в)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

є) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & -5 & 1 & 7 \\ -4 & -6 & -7 & 1 \end{vmatrix}$.

7. Обчислити визначники n-го порядку, зводячи їх до трикутного вигляду:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 5 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 5 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 5 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} x & x & \dots & x & x & 1 \\ x & x & \dots & x & 2 & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & n & \dots & x & x & x \\ n+1 & x & \dots & x & x & x \end{vmatrix}$.

8. Обчислити визначник Вандермонда $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

9. Обчислити наступні визначники, зводячи їх до визначника Вандермонда:

а) $\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \sin^{n-1}\varphi_1 & \sin^{n-2}\varphi_1 & \dots & \sin\varphi_1 \\ \sin^{n-1}\varphi_2 & \sin^{n-2}\varphi_2 & \dots & \sin\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^{n-1}\varphi_n & \sin^{n-2}\varphi_n & \dots & \sin\varphi_n \end{vmatrix}$.

Відповіді

1. Визначник змінить знак на $(-1)^n$.
2. Визначник не зміниться. **Вказівка**. Розглянути загальний член визначника.
3. Визначник дорівнюватиме нулеві.
4. $8a + 15b + 12c - 19d$. 5. $-2a + 38b - 76c - 54d$.
6. а) 0; б) -8; в) -3; г) 160; д) -1; е) 394; є) -8204; ж) 396.
7. а) $(-1)^{n-1}$; б) $n!$ в) $2n+1$. **Вказівка**. Відняти перший рядок від усіх останніх, а потім у здобутому визначнику до першого стовпця додати всі останні; г) $2^{n-1}(3n+2)$; д) $x(x-1)\dots(x-n)$.
8. $(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\dots(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1}) = \prod\limits_{i>j}(a_i - a_j)$.
9. а) $x_1x_2\dots x_n \prod\limits_{i>j}(x_i - x_j)$; б) $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod\limits_{i>j} \cos\dfrac{\varphi_i + \varphi_j}{2} \sin\dfrac{\varphi_i - \varphi_j}{2}$.

Тема 3. Вектори. Дії над векторами

Визначення 1. *Вектором називається напрямлений відрізок. Вектор, початок і кінець якого збігаються, називається нульовим вектором* $\overrightarrow{0}$*, його напрямок не визначений.*

Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони паралельні між собою або лежать на одній прямій.

Два вектори називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені й мають рівні довжини.

Вільний вектор $\overrightarrow{a}$ (тобто такий вектор, який без зміни довжини й напрямку може бути перенесений у довільну точку простору), заданий у координатному простору $Oxyz$, може бути зображений формулою

$$\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k}.$$

Таке зображення вектора $\overrightarrow{a}$ називається розкладом вектора $\overrightarrow{a}$ по осях координат, або по ортах.

a_x, a_y, a_z – проекції вектора $\overrightarrow{a}$ на відповідні осі координат (їх називають *координатами вектора* $\overrightarrow{a}$), $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ – *орти* цих осей (одиничні вектори, напрямок кожного з яких збігається з додатним напрямком відповідної осі). Вектори $a_x\overrightarrow{i}$, $a_y\overrightarrow{j}$, $a_z\overrightarrow{k}$ називають *компонентами вектора* $\overrightarrow{a}$ за осями координат.

Довжина вектора $\overrightarrow{a}$ визначається за формулою

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Напрямок вектора $\overrightarrow{a}$ визначається кутами α, β і γ, утвореними вектором з осями координат Ox, Oy, Oz. Косинуси цих кутів визначаються за формулами

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Напрямні косинуси вектора зв'язані співвідношенням

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Сумою $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ двох векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ є вектор, який сполучає початок вектора $\overrightarrow{a}$ з кінцем вектора $\overrightarrow{b}$ за умови, що вектор $\overrightarrow{b}$ відкладено від кінця вектора $\overrightarrow{a}$.

Закони додавання векторів

1) переставний: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$;
2) сполучний: $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$;
3) для кожного вектора існує протилежний вектор $(-\overrightarrow{a})$ такий, що $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$;
4) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$.

Різницею $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ є вектор $\overrightarrow{c}$ такий, що сума його з вектором $\overrightarrow{b}$ дає $\overrightarrow{a}$.

Якщо вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ задані їх розкладом по ортах, то їхня сума і різниця визначається за формулами

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_x + b_x)\overrightarrow{i} + (a_y + b_y)\overrightarrow{j} + (a_z + b_z)\overrightarrow{k},$$

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (a_x - b_x)\overrightarrow{i} + (a_y - b_y)\overrightarrow{j} + (a_z - b_z)\overrightarrow{k}.$$

Добутком вектора $\overrightarrow{a}$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ є вектор $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$.

Добуток вектора $\overrightarrow{a}$ на число визначається за формулою

$$\lambda\overrightarrow{a} = (\lambda a_x)\overrightarrow{i} + (\lambda a_y)\overrightarrow{j} + (\lambda a_z)\overrightarrow{k}.$$

Вектори $\overrightarrow{a}$ і $\lambda\overrightarrow{a}$ колінеарні і направлені в один бік, якщо $\lambda > 0$, і в протилежні боки, якщо $\lambda < 0$.

Якщо $\lambda = \dfrac{1}{|a|}$, то вектор $\dfrac{\overrightarrow{a}}{a}$ має одиничну довжину, і напрямок його збігається з напрямком вектора $\overrightarrow{a}$. Цей вектор називають одиничним вектором вектора $\overrightarrow{a}$.

Вектор $\overrightarrow{OM}$, початок якого знаходиться в початку координат, а кінець у точці $M(x, y, z)$, називається *радіус-вектором* точки M і позначається $\overrightarrow{r}(M)$:

$$\overrightarrow{r}(M) = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}\,.$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$ $(A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2))$ може бути зображений у вигляді $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r}(B) - \overrightarrow{r}(A)$, тобто

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\,\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\,\overrightarrow{j} + (z_2 - z_1)\,\overrightarrow{k}$$

і його довжина визначається

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Приклад 1. У трикутнику ABC пряма AM – бісектриса кута BAC, причому точка M лежить на стороні BC. Знайти $\overrightarrow{AM}$, якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$.

Розв'язування. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}$. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника маємо $|\overrightarrow{BM}| : |\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{b}| : |\overrightarrow{c}|$, тобто $|\overrightarrow{BM}| : |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{b}| : (|\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{c}|)$.

Отже, $\overrightarrow{BM} = \dfrac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{c}|}(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b})$. Оскільки $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AB}$, то

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{b} + \frac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{c}|}(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}) = \frac{|\overrightarrow{c}|\,\overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}\,|\overrightarrow{c}|}{|\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{c}|}.$$

Приклад 2. Радіус-векторами вершин трикутника ABC є $\overrightarrow{r}_1$, $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{r}_3$. Знайти радіус-вектор точки перетину медіан трикутника.

Розв'язування. Оскільки $\overrightarrow{BC} = r_3 - r_1$, $\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{r}_3 - \overrightarrow{r}_2)/2$ (D – середина вектора $\overrightarrow{BC}$), $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{r}_3 - \overrightarrow{r}_2)/2 + \overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1 = (\overrightarrow{r}_2 + \overrightarrow{r}_3 - 2\overrightarrow{r}_1)/2$, $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ (M – точка перетину медіан), тому $\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{r}_2 + \overrightarrow{r}_3 - 2\overrightarrow{r}_1)/3$. Отже, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}_1 + \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{r}_1 + \overrightarrow{r}_2 + \overrightarrow{r}_3)/3$.

Приклад 3. Знайти вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, якщо $A(1,3,2)$ і $B(5,8,-1)$.

Розв'язування. Проекціями вектора $\overrightarrow{AB}$ на осі координат є різниці відповідних координат точок B і A: $a_x = 5-1 = 4$, $a_y = 8-3 = 5$, $a_z = -1-2 = -3$. Отже, $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$.

Приклад 4. У трикутнику ABC сторона AB точками M і N поділена на три рівні частини: $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{NB}|$. Знайти вектор $\overrightarrow{CM}$, якщо $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{b}$.

Розв'язування. Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$, то $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}}{3}$. Враховуючи, що $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$, маємо

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{a} + \frac{\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}}{3} = \frac{2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{3}.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Задано $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CD} = -5\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$. Довести, що $ABCD$ – трапеція.
2. У чотирикутнику знайти таку точку, щоб сума векторів, що виходять з цієї точки до вершин чотирикутника, дорівнювала нулеві.
3. Чи можна з векторів $\overrightarrow{a} = \{1,2,-3\}$, $\overrightarrow{b} = \{2,-1,1\}$ та $\overrightarrow{c} = \{-3,-1,2\}$ скласти трикутник?
4. Вантаж вагою $\overrightarrow{P}$, підвішений на нитці до нерухомої точки, затримується горизонтальною силою $\overrightarrow{Q}$ у положенні, при якому нитка утворює з вертикаллю кут 45^0. Знайти величину горизонтальної сили $|\overrightarrow{Q}|$ і натягу $|\overrightarrow{T}|$ нитки.
5. На матеріальну точку діють дві сили $\overrightarrow{F}_1 = 2\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{F}_2 = 3\overrightarrow{b}$, де $\overrightarrow{a} = \{5,-2,3\}$, $\overrightarrow{b} = \{1,0,-4\}$. Знайти їх рівнодійну.
6. За даними векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ побудувати кожний із векторів:

а) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$; б) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$; в) $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$; г) $-\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$;
д) $\dfrac{3\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}}{2}$; е) $\dfrac{2\overrightarrow{b}-3\overrightarrow{a}}{2}$.

7. За яких умов вектори $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ будуть колінеарними?
8. Яку особливість повинні мати вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, щоб справедливі були рівності:
   а) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$; б) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$; в) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\lambda(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$; г) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|$; д) $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$?
9. Яку умову повинні задовольняти вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, щоб вектор $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ ділив кут між ними навпіл? (Припускаємо, що всі три вектори зведені до спільного початку).
10. Довести, що сума векторів, які сполучають центр правильного многокутника з його вершинами, дорівнює нулеві.
11. У трикутнику знайти таку точку, щоб сума векторів, що виходять з цієї точки до вершин трикутника, дорівнювала нулеві.
12. У трикутнику ABC вектор $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, а вектор $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$. Знайти вектори, що збігаються з медіанами цього трикутника.
13. Довести, що з медіан трикутника можна побудувати трикутник.
14. Визначити будь-який вектор, що ділить навпіл кут між векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$.
15. Нехай $\overrightarrow{r}_1$, $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{r}_3$ – радіус-вектори трьох послідовних вершин паралелограма $ABCD$. Знайти радіус-вектор вершини D.
16. Знайти рівнодійну п'яти компланарних сил однакової величини, прикладених до однієї і тієї ж точки, якщо кути між кожними двома послідовними силами дорівнюють 72^0.
17. Визначити, при яких значеннях x і y вектори $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$, зв'язані співвідношенням $(3x-y+2)\overrightarrow{a}+(x+2y+3)\overrightarrow{b}=0$, неколінеарні?
18. Визначити, при яких значеннях x, y та z вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$, зв'язані співвідношенням $(x+y-z-2)\overrightarrow{a}+(2x-2y+z-$

1) $\overrightarrow{b} + (x-1)\overrightarrow{c} = 0$, некомпланарні?

19. Накресліть довільний базис $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$. Побудуйте вектори $\overrightarrow{a} = \{1,2,0\}$, $\overrightarrow{b} = \{-1,3,0\}$, $\overrightarrow{c} = \{1,2,1\}$, $\overrightarrow{d} = \{1,2,-3\}$.
20. Дано вектори $\overrightarrow{a} = \{-1,3,2\}$, $\overrightarrow{b} = \{0,1,4\}$. Обчислити координати векторів $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $\frac{\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}}{3}$, $\frac{\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}}{2}$, $2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$.
21. Чи можна з векторів $\overrightarrow{a} = \{1,2,3\}$, $\overrightarrow{b} = \{2,-1,-1\}$ та $\overrightarrow{c} = \{-3,-1,-2\}$ скласти трикутник?
22. Дано вектори $\overrightarrow{a} = \{2,1\}$ і $\overrightarrow{b} = \{3,4\}$. Розкласти вектор $\overrightarrow{m} = \{-1,2\}$ за базисом $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$.
23. Дано вектори $\overrightarrow{a} = \{2,1,-3\}$, $\overrightarrow{b} = \{3,-2,1\}$ і $\overrightarrow{c} = \{-1,0,2\}$. Розкласти вектор $\overrightarrow{m} = \{-2,2,1\}$ за базисом $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$.
24. Дано точки $A(2,-3,4)$ і $B(5,6,-1)$. Обчислити координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$.
25. Початок вектора $\overrightarrow{a} = \{3,1,-2\}$ збігається з точкою $M(-2,7,1)$. Знайти точку, з якою збігається його кінець.
26. На матеріальну точку діють дві сили $\overrightarrow{F}_1 = 2\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{F}_2 = 3\overrightarrow{b}$, де $\overrightarrow{a} = \{5,-2,3\}$, $\overrightarrow{b} = \{1,0,-4\}$. Знайти їх рівнодійну.
27. Дано чотири вектори $\overrightarrow{a} = \{1,5,2\}$, $\overrightarrow{b} = \{6,-4,-2\}$, $\overrightarrow{c} = \{0,-5,7\}$ і $\overrightarrow{d} = \{-20,27,-35\}$. Підібрати числа α, β і γ так, щоб з векторів $\alpha\overrightarrow{a}$, $\beta\overrightarrow{b}$ та $\gamma\overrightarrow{c}$ можна було утворити замкнену ламану лінію.
28. Перевірити, чи чотири точки $A(-1,5,-10)$, $B(5,-7,8)$, $C(2,2,-7)$ і $D(5,-4,2)$ є вершинами трапеції.
29. Дано модуль вектора $|\overrightarrow{a}| = 5$ і кути, які він утворює з осями координат $\alpha = 120^0$, $\beta = 45^0$ та $\gamma = 60^0$. Знайти його проекції на координатні осі.
30. Дано вектори $\overrightarrow{a} = \{1,3,2\}$ та $\overrightarrow{b} = \{2,1,-1\}$. Визначити проекції на базисні вектори таких векторів: а) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$; б) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$; в) $2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$; в) $\frac{\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}}{2}$.

31. Знайти компоненту вектора $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{m} + 3\overrightarrow{n} - \overrightarrow{p}$ на вісь ординат, якщо $\overrightarrow{m} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{p} = -\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

Відповіді

2. Точка перетину діагоналей. 3. Так, оскільки $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$.
4. $|\overrightarrow{Q}| = |\overrightarrow{P}|$, $|\overrightarrow{T}| = \sqrt{2}|\overrightarrow{P}|$. 5. $\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 = \{13, -4, -6\}$.
7. $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$. 8. а) $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$; в) $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$; г) вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ – колінеарні і різнонаправлені; д) вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ – колінеарні і різнонаправлені.
9. $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$. 11. Точка перетину медіан.
12. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{a} + \frac{\overrightarrow{b}}{2}$, $\overrightarrow{BE} = \frac{\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}}{2}$, $\overrightarrow{CF} = -\frac{\overrightarrow{a}}{2} - \overrightarrow{b}$.
14. $\left(\frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} + \frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}\right)$. 15. $\overrightarrow{r}_D = \overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2 + \overrightarrow{r}_3$. 16. 0.
17. $x = -1$, $y = -1$. 18. $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$.
21. Так, оскільки $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$. 22. $\overrightarrow{m} = -2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.
23. $\overrightarrow{m} = -\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$. 24. $\overrightarrow{AB} = \{3, 9, -5\}$, $\overrightarrow{BA} = \{-3, -9, 5\}$.
25. $N(1, 8, -4)$. 26. $\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 = \{13, -4, -6\}$.
27. $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$. 29. $\overrightarrow{a} = \{-\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{2}\}$.
30. а) $(1, 4, 1)$; б) $(-3, 2, 3)$; в) $(4, 9, 1)$ г) $(-\frac{7}{2}, 0, \frac{5}{2})$. 31. $9\overrightarrow{j}$.

Тема 4. Скалярний добуток двох векторів

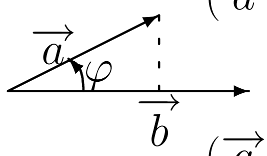
Визначення 1. *Скалярним добутком двох векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називається число $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними, тобто*

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|\cos\varphi. \tag{4.1}$$

Поняття скалярного добутку використовується у фізиці при обчисленні роботи постійної сили $\overrightarrow{F}$ при переміщенні точки вздовж вектора $\overrightarrow{S}$. Якщо вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}$ – сила, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{S}$ – шлях переміщення точки, то $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{S}) = |\overrightarrow{F}|\,|\overrightarrow{S}|\cos\varphi = A$ – робота сили $\overrightarrow{F}$ на шляху $\overrightarrow{S}$ (φ – кут між векторами $\overrightarrow{F}$ і $\overrightarrow{S}$).

Визначення 2. *Проекцією вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{b}$ (або на вісь) називається напрямлений відрізок, початком якого є проекція початку вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{b}$, а кінцем – проекція кінця вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{b}$.*

Користуючись цим означенням, можна записати скалярний добуток двох векторів у вигляді

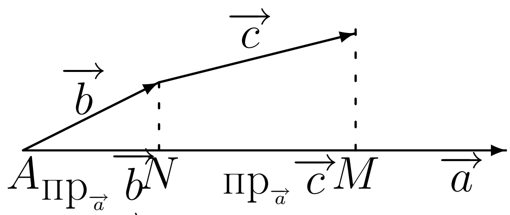


$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}|(|\overrightarrow{b}|\cos\varphi) = |\overrightarrow{a}|\text{пр}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b}, \tag{4.2}$$

або

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{b}|(|\overrightarrow{a}|\cos\varphi) = |\overrightarrow{b}|\text{пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}. \tag{4.s3}$$

Проекція на вектор суми векторів дорівнює сумі проекцій цих векторів.



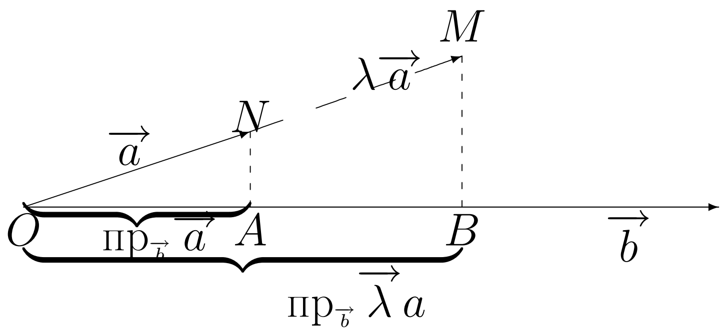
Отже,

$$\text{пр}_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \text{пр}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b} + \text{пр}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{c},$$

оскільки $AM = AN + NM$.

Проекція на вектор $\overrightarrow{b}$ добутку вектора $\overrightarrow{a}$ на число λ дорівнює добутку числа λ на проекцію вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{b}$:

$$\text{пр}_{\overrightarrow{b}}\lambda\overrightarrow{a} = \lambda\text{пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}.$$



Скалярний добуток двох векторів має властивості:

1) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a})$, це випливає із парності косинуса;

2) $(\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, де λ – скаляр, оскільки, за означенням, маємо $(\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{b}|\text{пр}_{\overrightarrow{b}}\lambda\overrightarrow{a} = \lambda|\overrightarrow{b}|\text{пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$;

3) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b})$, оскільки, за означенням скалярного добутку

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{b}|\text{пр}_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) = |\overrightarrow{b}|(\text{пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} + \text{пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{c}) =$$

$$= |\overrightarrow{b}|\text{пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} + |\overrightarrow{b}|\text{пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b});$$

4) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = |\overrightarrow{a}|^2 \geq 0$; $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 0$, якщо $\overrightarrow{a} = 0$.

Визначення 3. *Ортом ненульового вектора $\overrightarrow{a}$ називають вектор $\overrightarrow{a}_0$, який має одиничну довжину, а його напрямок збігається з напрямком вектора $\overrightarrow{a}$, тобто $\overrightarrow{a}_0 = \dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$.*

Розглянемо прямокутну декартову систему координат у просторі й деякий вектор $\overrightarrow{a}$, що виходить з початку координат. Позначимо проекції цього вектора на координатні осі відповідно через x_1, y_1, z_1. Ці проекції називають координатами вектора й записують $\overrightarrow{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ або $\overrightarrow{a} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + z_1\overrightarrow{k}$, де $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ – орти відповідно осей Ox, Oy, Oz.

Нехай $\overrightarrow{b} = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + z_2\overrightarrow{k}$, тоді, використовуючи властивості 1) – 4), маємо

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + z_1\overrightarrow{k}, x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + z_2\overrightarrow{k}) = x_1x_2(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) +$$

$$+x_1y_2(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) + x_1z_2(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) + y_1x_2(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) + y_1y_2(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}) + y_1z_2(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}) +$$

$$+z_1x_2(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}) + z_1y_2(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}) + z_1z_2(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Отже,
$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{4.4}$$
Якщо $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$, то $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Із означення скалярного добутку випливає, що для $\overrightarrow{a} \neq 0$, $\overrightarrow{b} \neq 0$ кут φ між векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ визначається формулою
$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{4.5}$$

Приклад 1. Знайти скалярний добуток векторів $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k}$ і $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$.

Розв'язування. За формулою (4.4) маємо
$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 0.$$
Оскільки $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$, то $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.

Приклад 2. Задано вектори $\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ і $\overrightarrow{b} = 4\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}$. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

Розв'язування. Знайдемо скалярний добуток цих векторів за формулою (4.4):
$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 4m + 8m - 28.$$
Оскільки $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, то $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$. Звідси $12m = 28 \Rightarrow m = \dfrac{7}{3}$.

Приклад 3. Знайти кут між векторами $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ і $\overrightarrow{b} = 6\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$.

Розв'язування. Оскільки $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\varphi$, то за формулою (4.5) маємо:
$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2)}{\sqrt{1 + 4 + 9}\sqrt{36 + 16 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{14}} = \frac{2}{7},$$
$\varphi = \arccos\dfrac{2}{7}$.

Приклад 4. Знайти орт вектора $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$.

Розв'язування. Знаходимо довжину вектора $\overrightarrow{a}$: $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{4+16+16} = 6$. Оскільки $\overrightarrow{a}_0 = \dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$, то $\overrightarrow{a}_0 = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{i} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{j} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{k}$.

Приклад 5. До точки прикладено дві сили $\overrightarrow{P}$ і $\overrightarrow{Q}$, які діють під кутом 120^0, причому $|\overrightarrow{P}| = 7$, $|\overrightarrow{Q}| = 4$. Знайти величину рівнодійної сисли $\overrightarrow{R}$.

Розв'язування. Оскільки $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q}$, то

$$|\overrightarrow{R}| = \sqrt{\overrightarrow{R}^2} = \sqrt{(\overrightarrow{P}+\overrightarrow{Q})(\overrightarrow{P}+\overrightarrow{Q})} = \sqrt{\overrightarrow{P}\overrightarrow{P} + 2\overrightarrow{P}\overrightarrow{Q} + \overrightarrow{Q}\overrightarrow{Q}} =$$

$$= \sqrt{|\overrightarrow{P}|^2 + 2|\overrightarrow{P}|\,|\overrightarrow{Q}|\cos 120^0 + |\overrightarrow{Q}|^2} = \sqrt{37}.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Подати синус і тангенс кута між векторами $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ через їхні квадрати та скалярний добуток.
2. Яку умову повинні задовольняти вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, щоб $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$?
3. До вершини куба прикладені сили з величиною 1, 2, 3 та напрямлені по діагоналях граней куба, що проходить через цю вершину. Знайти величину рівнодійної $\overrightarrow{R}$ цих сил.
4. Знайти кут між бісектрисами двох координатних кутів площин XOY та XOZ.
5. Знайти модуль вектора $\overrightarrow{a} = \{5, -7, 6\}$ та його напрямні косинуси.
6. Знайти орт вектора $\overrightarrow{a} = \{3, -4, -5\sqrt{3}\}$.
7. Визначити вектор $\overrightarrow{a}$, знаючи дві його координати $x = -3$, $y = 4$ та модуль $|\overrightarrow{a}| = 13$.
8. Знайти орти трьох векторів, які, виходячи з початку координат, ділять навпіл кути між ортами осей координат.

9. Знайти модуль вектора $\overrightarrow{a}=-3\overrightarrow{m}+\overrightarrow{n}$, якщо $|\overrightarrow{m}|=1$, $|\overrightarrow{n}|=3$, $(\widehat{\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}})=\dfrac{\pi}{3}$.
10. Знайти кут між векторами $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{m}+\overrightarrow{n}$ і $\overrightarrow{b}=-3\overrightarrow{m}+2\overrightarrow{n}$, якщо $|\overrightarrow{m}|=|\overrightarrow{n}|=2$, а $(\widehat{(\overrightarrow{m},\overrightarrow{n})})=\dfrac{\pi}{3}$.
11. Визначити внутрішні кути трикутника з вершинами $A(0,0,5)$, $B(1,1,1)$ і $C(-1,2,3)$.
12. Вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ утворюють трикутник. Обчислити $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})+(\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})$.
13. Знайти вектор $\overrightarrow{x}$, колінеарний до вектора $\overrightarrow{a}=\{1,-1,2\}$, знаючи, що $|\overrightarrow{x}|=3\sqrt{6}$ і він утворює з віссю OX тупий кут.
14. Знайти вектор, перпендикулярний до осі OY та до вектора $\overrightarrow{a}=\{1,2,-3\}$ з модулем $3\sqrt{10}$.
15. Знайти вектор $\overrightarrow{x}$, який перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{a}=\{1,1,2\}$ і $\overrightarrow{b}=\{3,1,2\}$ та задовольняє умову $(\overrightarrow{x},3\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})=-6$.
16. Обчислити проекцію вектора $\overrightarrow{a}=5\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+5\overrightarrow{k}$ на вісь, що визначається вектором $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$.
17. Дано три вектори $\overrightarrow{a}=\{3,-6,21\}$, $\overrightarrow{b}=\{1,4,-5\}$ і $\overrightarrow{c}=\{3,-4,12\}$. Обчислити $\text{пр}_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c})$.
18. Чи може вектор утворювати з координатними осями кути:
    1) $\alpha=45^0$, $\beta=30^0$, $\gamma=120^0$;
    2) $\alpha=150^0$, $\beta=90^0$, $\gamma=60^0$?
19. Вектор утворює з осями OX, OY кути $\alpha=30^0$, $\beta=90^0$. Який кут він утворює з віссю OZ?
20. Вектор $\overrightarrow{a}$ утворює з осями координат OX, OY рівні кути, а з віссю OZ – кут у два рази більший, ніж із кожною з осей OX і OY. Знайти α, β і γ.
21. Чи може вектор утворювати з віссю OX кут у 30^0, а з віссю OZ – кут у 45^0?

22. Задано дві точки $A(-1,3,2)$ і $B(1,-2,1)$. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь, яка утворює з координатними осями рівні тупі кути.
23. Задано вектори, що збігаються зі сторонами трикутника ABC, $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ і $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$. Знайти довжину висоти цього трикутника, опущеної з точки A.
24. Перевірити тотожність

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2 + (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})^2 = 2(|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2).$$

25. Обчислити роботу, що її виконує сила $\overrightarrow{f} = \{4,5,2\}$, коли точка, до якої вона прикладена, рухаючись прямолінійно, перемістилась із положення $A(3,-7,1)$ у положення $B(6,-1,-2)$.
26. Дано три сили: $\overrightarrow{f}_1 = \{3,-4,2\}$, $\overrightarrow{f}_2 = \{2,3,-5\}$, $\overrightarrow{f}_3 = \{-3,-2,4\}$, прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли точка, до якої вона прикладена, рухаючись прямолінійно, перемістилася з точки $A(5,3,-7)$ у точку $B(4,-1,-4)$.
27. Маса m, зосереджена в точці $A(x,y,z)$, притягується, згідно з законом Ньютона, до маси M, що зосереджена в початку координат. Знайти силу притягання.
28. У початку координат розміщений заряд q. Визначити в довільній точці $M(x,y,z)$ простору напругу $\overrightarrow{E}$ електростатичного поля, утвореного цим зарядом.
29. До однієї і тієї ж точки прикладені дві сили $\overrightarrow{f}_1$ та $\overrightarrow{f}_2$, кут між якими α. Знайти величину рівнодійної.
30. Дано вектор $\overrightarrow{a} = \{3,-4,12\}$. Знайти координати одиничного вектора, напрямленого однаково з вектором $\overrightarrow{a}$.
31. Дано точки $A(-2,3,-4)$, $B(3,2,5)$, $C(1,-1,2)$ та $D(3,2,-4)$. Обчислити $\text{пр}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.

Відповіді

1. $\sin\varphi = \frac{\alpha}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$, де $\alpha = \sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})^2}$.
2. **Вказівка**. Розглянемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$. Дістанемо, що $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$.
3. $|\overrightarrow{R}| = 5$.
4. $\varphi = \frac{\pi}{3}$. **Вказівка**. Одиничні вектори бісектрис розкласти по координатному базису і знайти їхній скалярний добуток.
5. $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{110}$, $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{110}}$, $\cos\beta = -\frac{7}{\sqrt{110}}$, $\cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{110}}$.
6. $\overrightarrow{a}_0 = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} = \{\frac{3}{10}, -\frac{2}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$. 7. $\overrightarrow{a} = \{-3, 4, \pm 12\}$.
8. $\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$. 9. $|\overrightarrow{a}| = 3$.
10. $\varphi = \frac{2}{3}\pi + 2\pi n$. 11. $\angle A = \angle B = 45^0$, $\angle C = 90^0$.
12. **Розв'язування**. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$, тому $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = 0$ і $2(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + 2(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) + 2(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = -\overrightarrow{a}^2 - \overrightarrow{b}^2 - \overrightarrow{c}^2$.
13. $\overrightarrow{x} = \{-3, 3, -6\}$. 14. $(\pm 9, 0, \pm 3)$. 15. $\overrightarrow{x} = \{0, -4, 2\}$.
16. 6. 17. -4. 18. 1) Ні; 2) Так. 19. $\cos\gamma = \pm\frac{1}{2}$.
20. $\alpha = \beta = 45^0$, $\gamma = 90^0$ та $\alpha = \beta = 90^0$, $\gamma = 180^0$. 21. Ні.
22. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. 23. $\frac{12}{\sqrt{5}}$. 25. 36. 26. 13.
27. $\overrightarrow{f} = -\frac{mM}{k}\frac{\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|^3} = -\frac{mM}{k}\frac{x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$. **Вказівка**. Орт вектора $\overrightarrow{f}$: $\overrightarrow{e}_f = -\overrightarrow{e}_r = -\frac{\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|}$, де $\overrightarrow{e}_r$ – орт радіус-вектора точки $M(x, y, z)$, $\overrightarrow{f} = |\overrightarrow{f}|\overrightarrow{e}_f$.
28. $\overrightarrow{E} = \pm q\frac{\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|^3}$. **Вказівка**. Розглянути два випадки: 1) $q > 0$, тоді $\overrightarrow{E} = |\overrightarrow{E}|\overrightarrow{e}_{\overrightarrow{E}} = |\overrightarrow{E}|\overrightarrow{e}_r = \frac{q\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|^3}$; 2) $q < 0$, тоді $\overrightarrow{E} = -\frac{q}{|\overrightarrow{r}|^3}\overrightarrow{r}$.
29. $\sqrt{f_1^2 + 2f_1f_2\cos\alpha + f_2^2}$. 30. $\overrightarrow{a}_0 = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} = \{\frac{3}{14}, -\frac{4}{13}, \frac{12}{13}\}$.
31. $-6\frac{5}{7}$.

Тема 5. Векторний добуток двох векторів

Визначення 1. *Три вектори* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ *називаються впорядкованою трійкою, якщо вказано, який із цих векторів перший, який – другий і який – третій.*

Визначення 2. *Трійка некомпланарних векторів* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ *називається правою (лівою), якщо після зведення до спільного початку вектор* $\overrightarrow{c}$ *розміщується по той бік від площини, де розміщені вектори* $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$, *звідки найкоротший поворот від* $\overrightarrow{a}$ *до* $\overrightarrow{b}$ *відбувається проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою).*

Визначення 3. *Векторним добутком двох векторів* $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$ *називається третій вектор* $\overrightarrow{c} \equiv [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$, *який задовольняє умови:*

1) вектор $\overrightarrow{c}$ *ортогональний (перпендикулярнний) до векторів* $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$ *(*$\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$*);*

2) утворює з векторами $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$ *праву трійку;*

3) довжина вектора $\overrightarrow{c}$ *чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах* $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$ *(*$|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\varphi$, φ *– кут між векторами* $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$*).*

Розглянемо вектор сили $\overrightarrow{F}$, прикладеної до точки B. Тоді векторний добуток $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{F}]$ є моментом $\overrightarrow{M}$ сили $\overrightarrow{F}$ відносно точки A, тобто $\overrightarrow{M} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{F}]$.

Якщо $\overrightarrow{V}$ – швидкість переміщення відносно нерухомого контура, що створює магнітну індукцію $\overrightarrow{B}$, то, згідно з законом Фарадея, напруженість електричного поля, що виникає завдяки руху, є вектор $\overrightarrow{E} = [\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{B}]$.

Властивості векторного добутку:

1. $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = -[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}]$.
2. $[\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \lambda[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$, λ – скаляр.

3. $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}] = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] + [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}]$.

4. $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}] = 0$.

Нехай $\overrightarrow{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overrightarrow{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, тоді, використовуючи властивості 1 – 4, маємо

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = [x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + z_1\overrightarrow{k}, x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + z_2\overrightarrow{k}] = x_1x_2[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}] +$$
$$+ x_1y_2[\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}] + x_1z_2[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}] + y_1x_2[\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}] + y_1y_2[\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}] + y_1z_2[\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}] +$$
$$+ z_1x_2[\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}] + z_1y_2[\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}] + z_1z_2[\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}] = x_1y_2\overrightarrow{k} - x_1z_2\overrightarrow{j} - y_1x_2\overrightarrow{k} +$$
$$+ y_1z_2\overrightarrow{i} + z_1x_2\overrightarrow{j} - z_1y_2\overrightarrow{i} = \overrightarrow{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Нехай $\overrightarrow{c}_0$ – орт вектора $\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$ $\left(\overrightarrow{c}_0 = \dfrac{[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]}{|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]|}\right)$. Тоді $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = S_{\text{пар}}\overrightarrow{c}_0$.

Якщо $\overrightarrow{a} \neq 0$ і $\overrightarrow{b} \neq 0$, то $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \Leftrightarrow [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = 0$.

Нехай задано трикутник ABC, тоді його площа

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|,$$

$$\sin(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = \sin\varphi = \frac{|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]|}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}.$$

Приклад 1. Знайти векторний добуток векторів $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ і $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

Розв'язування. Маємо

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} =$$

$$= -7\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}.$$

Приклад 2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a} = 6\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ і $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}$.

Розв'язування. Знайдемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$:

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 14\overrightarrow{i} - 42\overrightarrow{j} - 21\overrightarrow{k}.$$

Оскільки довжина векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах, то

$$S = |[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]| = \sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = 49.$$

Приклад 3. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(4, 3, 2)$.

Розв'язування. Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{AB} = (2-1)\overrightarrow{i} + (3-1)\overrightarrow{j} + (4-1)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$;
$\overrightarrow{AC} = (4-1)\overrightarrow{i} + (3-1)\overrightarrow{j} + (2-1)\overrightarrow{k} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Тому знаходимо векторний добуток цих векторів:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}.$$

Отже,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16+64+16} = \sqrt{24}.$$

Приклад 4. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$ і $3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$, якщо $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 1$, $(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = 30^0$.

Розв'язування. Маємо

$$[(\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}), (3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})] = [3\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}] + [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] + [9\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}] + [3\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}] =$$

$$= 3\cdot 0 + [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] - 9[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] + 3\cdot 0 = -8[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$$

(оскільки $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}] = 0$, $[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}] = 0$, $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = -[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}]$). Отже,

$$S = 8|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]| = 8\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 30^0 = 4.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{3}$, $|\overrightarrow{b}| = 4$. Обчислити $|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]|$.
2. Позначивши через α кут між векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, виразити $\operatorname{tg}\alpha$ через векторний і скалярний добуток цих векторів.
3. При якому значенні α вектори $\overrightarrow{p} = \alpha\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{q} = 2\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}$ колінеарні?
4. Вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$ задовольняють умову $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$. Довести, що $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = [\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}]$.
5. Дано $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}] = [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$, $\overrightarrow{c} \neq 0$. Чи можна зробити висновок, що $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$?
6. Довести, що якщо $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = [\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}]$ і $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}] = [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}]$, то вектори $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{d}$ та $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ є колінеарними.
7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a} = \{8, 4, 1\}$, $\overrightarrow{b} = \{2, -2, 1\}$.

8. Дано точки $A(3,1,2)$, $B(4,0,1)$ і $C(5,4,7)$. Обчислити площу трикутника ABC.
9. Знайти орт вектора, перпендикулярного до векторів $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ та $\overrightarrow{b} = 4\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$.
10. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}$ та $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n}$, де $\overrightarrow{m}$ і $\overrightarrow{n}$ – орти та $(\widehat{\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}}) = \dfrac{\pi}{6}$.
11. За якої умови момент сили відносно точки дорівнює нулеві?
12. З'ясувати, праву чи ліву трійку утворюють вектори:
    а) $\overrightarrow{a} = \{2,1,2\}$, $\overrightarrow{b} = \{3,-2,1\}$, $\overrightarrow{c} = \{3,-1,-2\}$;
    б) $\overrightarrow{a} = \{2,-2,-3\}$, $\overrightarrow{b} = \{2,0,3\}$, $\overrightarrow{c} = \{1,1,1\}$.
13. Знайти об'єм тетраедра за вершинами $A(-5,-4,8)$, $B(2,3,1)$, $C(4,1,-2)$ та $D(6,3,7)$.
14. Знайти довжину висоти тетраедра з вершинами $A(1,0,6)$, $B(4,5,-2)$, $C(7,3,4)$ та $D(-1,2,1)$, опущеної з вершини D.
15. Об'єм тетраедра $V = 5$, три його вершини знаходяться в точках $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$. Знайти координати четвертої вершини, якщо відомо, що вона лежить на осі OY.
16. Обчислити $[[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}], \overrightarrow{c}]$, якщо
    1) $\overrightarrow{a} = \{1,2,-1\}$, $\overrightarrow{b} = \{2,1,-2\}$, $\overrightarrow{c} = \{3,1,-1\}$;
    2) $\overrightarrow{a} = \{3,2,1\}$, $\overrightarrow{b} = \{0,1,-1\}$, $\overrightarrow{c} = \{-1,1,1\}$.
17. Обчислити $[[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}], \overrightarrow{c}] - [\overrightarrow{a}, [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]]$, якщо $\overrightarrow{a} = \{1,-1,3\}$, $\overrightarrow{b} = \{-2,2,1\}$, $\overrightarrow{c} = \{3,-2,5\}$.
18. До однієї точки A прикладено кілька сил f_1, f_2, $\ldots$, f_n. Довести, що момент рівнодійної f цих сил, обчислений відносно деякої точки, дорівнює сумі моментів складових сил f_1, f_2, $\ldots$, f_n відносно тієї ж точки.
19. Сила $\overrightarrow{f} = \{2,-4,3\}$ прикладена до точки $A(1,5,-2)$. Знайти момент цієї сили відносно точки $B(5,-3,4)$.
20. Знайти момент сили відносно точки $A(3,-2,1)$, якщо ця сила прикладена до точки $B(2,-1,3)$, причому $|\overrightarrow{f}| = 5$ і $\overrightarrow{f} \parallel \overrightarrow{a}$,

де $\overrightarrow{a} = \{2, 1, -2\}$.

21. Сила $\overrightarrow{f} = \{2, 2, 9\}$ прикладена до точки $A(4, 2, -3)$. Визначити величину та напрямні косинуси момента цієї сили відносно точки $B(2, 4, 0)$.
22. По нескінченному прямолінійному провіднику тече струм із силою $\overrightarrow{I}$. Знайти в будь-якій точці простору напруженість $\overrightarrow{H}$ магнітного поля, утвореного цим струмом, використовуючи при визначенні напрямку вектора напруженості $\overrightarrow{H}$ правило свердлика.

   Використовуючи розв'язок задачі 22, розв'язати задачі 23, 24, 25:
23. Обчислити в будь-якій точці простору напруженість $\overrightarrow{H}$ магнітного поля, утвореного струмом, що тече по прямолінійному провіднику, якщо напрямок провідника збігається з напрямком а) осі OX; б) осі OY; с) осі OZ.
24. Обчислити в точці $M(-3, 4, 2)$ напруженість $\overrightarrow{H}$ магнітного поля, утвореного струмом з силою $\overrightarrow{I} = -3\overrightarrow{k}$, який тече по прямолінійному провіднику. Знайти орт вектора $\overrightarrow{H}$.
25. Обчислити в точці $M(2, 5, 0)$ напруженість $\overrightarrow{H}$ магнітного поля, утвореного струмом з силою $\overrightarrow{I} = -2\overrightarrow{i}$, який тече по прямолінійному провіднику, та знайти напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{H}$.
26. За якої умови $[[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}], \overrightarrow{c}] = 0$?
27. Довести тотожності:

   а) $[\overrightarrow{a}, [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]] + [\overrightarrow{b}, [\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}]] + [\overrightarrow{c}, [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]] = 0$;

   б) $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}][\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}][\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}] = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})^2$.

Відповіді

1. 6. 2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}]|}{(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})}$. 3. $\alpha = -\frac{8}{5}$.

4. **Вказівка**. Помножити обидві частини рівності векторно спочатку на $\overrightarrow{a}$, а потім на $\overrightarrow{b}$.

5. Ні. 6. **Вказівка**. Розглянути векторний добуток із векторів $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{d}$ та $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$.

7. $18\sqrt{2}$. 8. $S = \frac{1}{2}\sqrt{78}$. 9. $\pm\frac{1}{3}(\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k})$.

10. $\frac{1}{2}$. 11. $\overrightarrow{r} \parallel \overrightarrow{f}$, тобто пряма, вздовж якої діє сила, проходить через точку, відносно якої знаходимо момент.

12. а) Праву; б) Ліву. 16. 1) $\{3, -12, -3\}$; 2) 0. 17. $\{2, -3, 10\}$.

18. $\overrightarrow{f} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overrightarrow{f}_k$, $\overrightarrow{M} = [\overrightarrow{r}, \overrightarrow{f}] = \sum\limits_{k=1}^{n}[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{f}_k]$. 19. 0.

20. $\overrightarrow{M} = \pm\frac{5}{3}(-4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k})$.

21. $|\overrightarrow{M}| = 28$, $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$, $\cos\beta = -\frac{6}{7}$, $\cos\gamma = \frac{2}{7}$.

22. $\overrightarrow{H} = \frac{k}{r^2}[\overrightarrow{J}, \overrightarrow{r}]$, k – const.

23. а) $\overrightarrow{H} = \frac{kJ(y\overrightarrow{k} - z\overrightarrow{j})}{y^2+z^2}$; б) $\overrightarrow{H} = \frac{kJ(-x\overrightarrow{k} + z\overrightarrow{i})}{x^2+z^2}$; в) $\overrightarrow{H} = \frac{Jk(x\overrightarrow{j} - y\overrightarrow{i})}{x^2+y^2}$.

24. $\overrightarrow{H} = \frac{3k}{25}(4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j})$, $\overrightarrow{e}_{\overrightarrow{H}} = \frac{4}{5}\overrightarrow{i} + \frac{3}{5}\overrightarrow{j}$.

25. $\overrightarrow{H} = \frac{10}{29}k \cdot \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{e}_H = \{0, 0, 1\}$.

26. Або $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$, або $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ перпендикулярні до $\overrightarrow{c}$, або один із векторів – нуль-вектор.

Тема 6. Мішаний добуток трьох векторів

Нехай задано три довільних вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$. Якщо вектор $\overrightarrow{a}$ векторно помножити на вектор $\overrightarrow{b}$ і одержаний вектор $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$ скалярно помножити на вектор $\overrightarrow{c}$, то у результаті одержимо число $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c}$, яке називається мішаним добутком векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$.

Мішаний добуток має простий геометричний зміст. Мішаний добуток $\overrightarrow{a}[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятому зі знаком "плюс якщо трійка $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ – права, і зі знаком "мінус якщо трійка $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ – ліва. Якщо вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ компланарні, то $\overrightarrow{a}[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = 0$.

Звідси одержуємо, що об'єм тетраедра, заданого вершинами $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ і $D(x_4, y_4, z_4)$, обчислюється за формулою

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Якщо $\overrightarrow{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overrightarrow{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ і $\overrightarrow{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$, то

$$[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (y_2z_3 - z_2y_3)\overrightarrow{i} - (x_2z_3 - z_2x_3)\overrightarrow{j} +$$

$$+(x_2y_3 - y_2x_3)\overrightarrow{k}.$$

Використовуючи формули обчислення скалярного добутку, маємо

$$\overrightarrow{a}[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = x_1(y_2z_3 - z_2y_3) - y_1(x_2z_3 - z_2x_3) + z_1(x_2y_3 - y_2x_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Справедлива рівність $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] \equiv \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$.

Мішаний добуток не зміниться, якщо переставити множення векторів у круговому порядку:

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}.$$

При перестановці двох векторів мішаний добуток змінює тільки знак:

$$\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}.$$

Приклад 1. Знайти мішаний добуток векторів $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$.

Розв'язування. Маємо

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 26 + 5 + 2 = 33.$$

Приклад 2. Показати, що вектори $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ компланарні.

Розв'язування. Знаходимо мішаний добуток векторів:

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 + 14 - 7 - 10 + 4 = 0.$$

Оскільки $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = 0$, то вектори копланарні.

Приклад 3. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(2, 2, 2)$, $B(4, 3, 3)$, $C(4, 5, 4)$ і $D(5, 5, 6)$.

Розв'язування. Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, які збігаються з ребрами піраміди, що виходять із вершини A: $\overrightarrow{AB} =$

$\{2,1,1\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,3,2\}$, $\overrightarrow{AD}=\{3,3,4\}$. Знаходимо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=24+6+6-9-8-12=7.$$

Оскільки об'єм піраміди дорівнює $1/6$ частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, то $V=7/6$.

Приклад 4. Обчислити $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})$.

Розв'язування. Оскільки $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})+(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})=0$, то ці вектори компланарні. Отже, мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю, тобто $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})=0$.

Задачі для самостійної роботи

1. Обчислити мішані добутки векторів:
   1) $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$; 2) $(\overrightarrow{k},\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$;
   3) $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k},\overrightarrow{j})$; 4) $(\overrightarrow{i},[\overrightarrow{j},\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}])$.
2. Довести, що при будь-яких векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ вектори $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}$ компланарні.
3. Довести, що $\overrightarrow{a}[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}]=\overrightarrow{a}[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}+\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{b}]$, де λ, μ – будь-які числа.
4. Довести що кінці радіус-векторів $\overrightarrow{r}_1=\{4,-2,-2\}$, $\overrightarrow{r}_2=\{3,1,1\}$, $\overrightarrow{r}_3=\{4,2,0\}$ і $\overrightarrow{r}_4=\{7,-1,-6\}$ лежать в одній площині.
5. Довести, що
$$\left(\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2},\frac{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}}{2},\frac{\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}}{2}\right)=\frac{1}{4}(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}).$$
6. Точки $A(-1,2,-3)$, $B(-2,5,1)$, $C(-1,6,0)$, $D(2,5,-6)$ є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник плоский, та знайти його площу.

7. У тетраедрі $OABC$ з вершини O проведені медіани бокових граней. Беручи їх за ребра нового тетраедра, довести, що об'єм його становить 1/4 об'єму тетраедра $OABC$.
8. Встановити, чи компланарні вектори:
   1) $\overrightarrow{a} = \{2, 1, 3\}$, $\overrightarrow{b} = \{1, -3, 2\}$, $\overrightarrow{c} = \{4, -5, 7\}$;
   2) $\overrightarrow{a} = \{1, -1, 2\}$, $\overrightarrow{b} = \{5, 1, 3\}$, $\overrightarrow{c} = \{0, 1, -1\}$.
9. Довести, що вектори $\overrightarrow{a} = \{3, 2, -1\}$, $\overrightarrow{b} = \{1, -1, 3\}$ і $\overrightarrow{c} = \{9, 1, 7\}$ лінійно залежні, та знайти будь-яку лінійну залежність між ними.
10. З'ясувати, чи лежать точки $A(2, 3, 1)$, $B(6, 1, 4)$, $C(0, -1, 1)$ та $D(2, -1, 3)$ в одній площині.

Відповіді

1. 1) 1; 2) −1; 3) −1; 4) 1. 6. $\sqrt{74}$. 8. 1) так; 2) ні.
9. $2h\overrightarrow{a} + 3h\overrightarrow{b} - h\overrightarrow{c} = 0$. 10. Ні.

Тема 7. Подвійний векторний добуток

Нехай вектор $\overrightarrow{a}$ множиться векторно на $\overrightarrow{b}$, після чого отриманий вектор $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$ множиться векторно на вектор $\overrightarrow{c}$. У результаті дістанемо подвійний векторний добуток.

Покажемо, що виконується рівність

$$[[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}], \overrightarrow{c}] = \overrightarrow{b}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) - \overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}).$$

Введемо для цього декартову прямокутну систему координат таким чином: вісь Ox направимо за вектором $\overrightarrow{a}$, вісь Oy помістимо у площині векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ (вважаючи, що вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ зведені до спільного початку). У цьому випадку маємо:

$$\overrightarrow{a} = \{x_1, 0, 0\}, \overrightarrow{b} = \{x_2, y_2, 0\}, \overrightarrow{c} = \{x_3, y_3, z_3\}.$$

Знаходимо

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \{0, 0, x_1y_2\}, [[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}], \overrightarrow{c}] = \{-x_1y_2y_3, x_1y_2x_3, 0\}. \quad (7.1)$$

З іншого боку,

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) = x_1x_3, \overrightarrow{b}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) = \{x_1x_2x_3, x_1y_2x_3, 0\};$$

$$(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = x_2x_3 + y_2y_3; \overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \{x_1x_2x_3 + x_1y_2y_3, 0, 0\}.$$

Отже,

$$\overrightarrow{b}(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}) - \overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \{-x_1y_2y_3, x_1y_2x_3, 0\}. \quad (7.2)$$

Порівнюючи праві частини формул (7.1) і (7.2), маємо:

$$[[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}], \overrightarrow{c}] = \overrightarrow{b}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) - \overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}).$$

Приклад 1. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(2, 2, 2)$, $B(4, 3, 3)$, $C(4, 5, 4)$ і $D(5, 5, 6)$.

Розв'язування. Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, які збігаються з ребрами піраміди, що виходять з точки A:

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}, \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}.$$

Знаходимо мішаний добуток цих векторів

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Отже, об'єм піраміди дорівнює $1/6$ частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, тобто $V = 7/6$ куб. од.

Приклад 2. Обчислити $([(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c})], (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}))$.

Розв'язування. Оскільки $(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$, то ці вектори компланарні. Отже, їхній мішаний добуток дорівнює нулю. Тобто $([\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}], \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}) = 0$.

Приклад 3. Довести тотожність $[\overrightarrow{a}[\overrightarrow{a}[\overrightarrow{a}[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]]]] = \overrightarrow{a}^4\overrightarrow{b}$ за умови, що вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язування. Скориставшись формулою $[\overrightarrow{a}[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]] = \overrightarrow{b}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) - \overrightarrow{c}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, маємо

$$[\overrightarrow{a}[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]] = \overrightarrow{a}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) - \overrightarrow{b}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = -\overrightarrow{b}\overrightarrow{a}^2,$$

оскільки $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$, бо вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ взаємно перпендикулярні.

Тоді

$$[\overrightarrow{a}[\overrightarrow{a}[\overrightarrow{a}[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]]]] = [\overrightarrow{a}[\overrightarrow{a}, -\overrightarrow{b}\overrightarrow{a}^2]] = \overrightarrow{a}(\overrightarrow{a}, -\overrightarrow{b}\overrightarrow{a}^2) - \\ -(-\overrightarrow{b}\overrightarrow{a}^2)(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}^4\overrightarrow{b}.$$

Тут ми скористалися тим, що оскільки вектори $\overrightarrow{a}$ і $-\overrightarrow{b}\overrightarrow{a}^2$ перпендикулярні, то $(\overrightarrow{a}, -\overrightarrow{b}\overrightarrow{a}^2) = 0$, і тим, що $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}^2$.

Приклад 4. Довести тотожність

$$[\overrightarrow{a}[\overrightarrow{b}[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}]]] = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}](\overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) - [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}](\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}).$$

Розв'язування. Скориставшись формулою $[\overrightarrow{a}[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]] = \overrightarrow{b}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) - \overrightarrow{c}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, маємо

$$[\overrightarrow{b}[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}]] = \overrightarrow{c}(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) - \overrightarrow{d}(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}).$$

Отже,

$$[\overrightarrow{a}[\overrightarrow{b}[\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}]]] = [\overrightarrow{a}[\overrightarrow{c}(\overrightarrow{b},\overrightarrow{d}) - \overrightarrow{d}(\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})]] =$$
$$= [\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}](\overrightarrow{b},\overrightarrow{d}) - [\overrightarrow{a},\overrightarrow{d}](\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}),$$

оскільки за властивістю векторного добутку $[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}] = [\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}] - [\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}]$.

Задачі для самостійної роботи

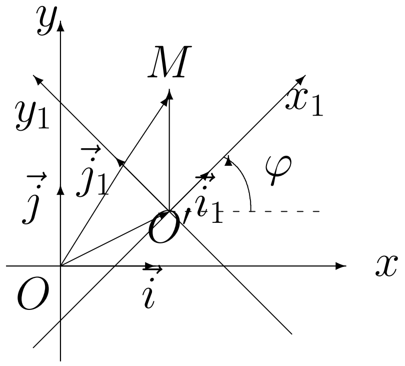
1. Вектор $\overrightarrow{c}$ перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, кут між $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ дорівнює 30^0. Знаючи, що $|\overrightarrow{a}| = 6$, $|\overrightarrow{b}| = 3$, $|\overrightarrow{c}| = 3$, знайти $([\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}],\overrightarrow{c})$.
2. Задано вершини піраміди $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$. Знайти довжину її висоти, опущеної з вершини D.
3. Довести, що чотири точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,-1,1)$ лежать в одній площині.
4. Довести, що вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ компланарні, якщо виконується умова $[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}] + [\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}] + [\overrightarrow{c},\overrightarrow{a}] = 0$.
5. Довести тотожності:
   а) $[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}][\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}][\overrightarrow{c},\overrightarrow{a}] = (\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})^2$;
   б) $[[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}][\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}]] = \overrightarrow{c}(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{d}) - \overrightarrow{d}(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$;
   в) $[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}]^2[\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}]^2 = ([\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}][\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}])^2 = \overrightarrow{a}^2(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})^2$.
6. Задано вершини трикутника $A(2,-1,-3)$, $B(1,2,-4)$ і $C(3,-1,-2)$. Знайти координати вектора $\overrightarrow{h}$, колінеарного з його висотою, опущеною з вершини A на протилежну сторону, за умови, що вектор $\overrightarrow{h}$ утворює з віссю OY тупий кут і $|\overrightarrow{h}| = 2\sqrt{34}$.

Відповіді

1. 1) ± 27, знак плюс, коли трійка $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ – права, і мінус, коли трійка $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ – ліва. 2. $h = 11$. 6. $\overrightarrow{h} = \{-6,-8,-6\}$.

Тема 8. Перетворення декартових прямокутних координат на площині

Нехай на площині π задано дві довільні декартові прямокутні системи координат: перша визначається початком O і базисними векторами $\overrightarrow{i}$ і $\overrightarrow{j}$, а друга визначається початком O' і базисними векторами $\overrightarrow{i}_1$ і $\overrightarrow{j}_1$.



Виразимо координати x і y довільної точки M відносно першої системи координат через координати x_1 і y_1 цієї ж точки відносно другої системи координат.

Оскільки $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{OO_1} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{O_1M} = x_1\overrightarrow{i}_1 + y_1\overrightarrow{j}_1$, $\overrightarrow{i}_1 = \alpha_{11}\overrightarrow{i} + \alpha_{12}\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{j}_1 = \alpha_{21}\overrightarrow{i} + \alpha_{22}\overrightarrow{j}$, то, згідно з правилом трикутника додавання векторів $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$, маємо $x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = (a + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}y_1)\overrightarrow{i} + (b + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}y_1)\overrightarrow{j}$.

Зважаючи на єдиність розкладу вектора за базисом, знаходимо:

$$x = a + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}y_1, \qquad y = b + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}y_1.$$

Позначимо символом $\cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$ косинус кута між векторами $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$. Помножимо кожну з рівностей $\overrightarrow{i}_1 = \alpha_{11}\overrightarrow{i} + \alpha_{12}\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{j}_1 = \alpha_{21}\overrightarrow{i} + \alpha_{22}\overrightarrow{j}$ скалярно спочатку на $\overrightarrow{i}$, а потім на $\overrightarrow{j}$ і, враховуючи, що $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) = 1$, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = 0$, $(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}) = 1$, одержимо

$$\alpha_{11} = \cos(\widehat{\overrightarrow{i}_1, \overrightarrow{i}}) = \cos\varphi, \;\; \alpha_{12} = \cos(\widehat{\overrightarrow{i}_1, \overrightarrow{j}}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi,$$

$$\alpha_{21} = \cos(\widehat{\overrightarrow{j}_1, \overrightarrow{i}}) = \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) = -\sin\varphi, \alpha_{22} = \cos(\widehat{\overrightarrow{j}_1, \overrightarrow{j}}) = \cos(\varphi).$$

Отже, формули перетворення координат мають вигляд:

$$x = a + x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi, \quad y = b + x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi.$$

Нехай $a = 0$, $b = 0$, тоді

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y_1 = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$$

Приклад 1. Зроблено паралельне перенесення осей координат, причому новий початок розміщено в точці $O_1(3, -4)$. Відомі старі координати точки $M(7, 8)$. Визначити нові координати цієї ж точки.

Розв'язування. Оскільки $a = 3$, $b = -4$, $x = 7$, $y = 8$, то, використовуючи формули $x' = x - a$, $y' = y - b$, маємо $x' = 7 - 3 = 4$, $y' = 8 - (-4) = 12$.

Приклад 2. На площині xOy задана точка $M(4, 3)$. Систему координат повернули навколо початку координат так, що нова вісь пройшла через точку M. Визначити старі координати точки A, якщо відомі її нові координати $x' = 5$, $y' = 5$.

Розв'язування. Оскільки $OM = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, то $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$. Одержимо формули повороту системи координат:

$$x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y', \qquad y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'.$$

Вважаючи $x' = y' = 5$, знаходимо $x = 1$, $y = 7$.

Приклад 3. Систему координат повернули на кут $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. Визначити нові координати точки $M(\sqrt{3}, 3)$.

Розв'язування. Користуючись формулами

$$x_1 = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad y_1 = -x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

знаходимо

$$x_1 = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3,$$

$$y_1 = -\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6} + 3\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Задачі для самостійної роботи

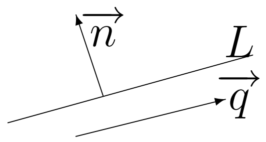
1. Знайти формули перетворення координат, якщо початок координат перенесено в одну з точок (без зміни напрямку): а) $A(-1,2)$; б) $B(3,4)$; в) $C(2,-3)$.
2. Відносно деякої системи координат точка A має координати $x = 7$, $y = -5$. Знайти її координати за умови, що початок координат перенесено в одну з таких точок: $O_1(2,3)$, $O_2(-3,-1)$, $O_3(4,-2)$.
3. Точка P відносно двох різних систем з однаково напрямленими осями має координати $(2,5)$ і (-3, 6). Визначити координати початку кожної з цих систем відносно іншої.
4. Знайти координати точки $P(-3,1)$ у новій системі, якщо осі координат повернуто на кут: а) -45^0; б) 90^0; в) 180^0.
5. Знайти кут, на який повернуто координатні осі, якщо формули перетворення координат мають вигляд $x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$.
6. Дві сторони прямокутника $ABCD$ спочатку збігалися з осями координат ($AB = 5$, $AD = 2$). Потім прямокутник був пересунутий так, що вершина A, яка раніше знаходилася у початку координат, опинилася в точці $A_1(4,-1)$, а сторона AB, що лежала на осі Ox, повернулася на кут $\alpha = 30^0$. Визначити нове положення інших вершин.
7. В яку точку потрібно перенести початок координат, щоб рівняння лінії $8x^2 - 4xy + 5y^2 + 4x - 10y + 3 = 0$ не містило членів з x та y у першому степені?

Відповіді

1. а) $x' = x + 1$, $y' = y - 2$; б) $x' = x - 3$, $y' = y - 4$; в) $x' = x - 2$, $y' = y + 3$. 2. $(5,-8)$, $(10,-4)$, $(3,-3)$. 3. $O(5,-1)$, $O(-5,1)$. 4. а) $(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; б) $(1,3)$; в) $(3,-1)$. 5. $\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.
6. $B_1(4 + \frac{5\sqrt{3}}{2})$, $C_1(3 + \frac{5\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} + \frac{3}{2})$, $D_1(3, \sqrt{3} - 1)$. 7. $(0,1)$.

Тема 9. Пряма на площині

У декартових координатах пряма на площині визначається рівнянням першого порядку, і навпаки, кожне рівняння першого порядку визначає пряму.



Справді, нехай L – деяка пряма на площині, $M_0(x_0, y_0)$ – фіксована точка цієї прямої, а $\overrightarrow{n} = \{A, B\}$ – вектор, перпендикулярний до прямої L (нормальний вектор).

Якщо $M(x, y)$ – довільна точка прямої, то вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ перпендикулярний до вектора $\overrightarrow{n} = \{A, B\}$, а тому $(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ і $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Якщо спростити це рівняння, то одержимо

$$Ax + By = C, \tag{9.1}$$

де $C = -Ax_0 - By_0$.

Покажемо, що кожне рівняння першого порядку (9.1) визначає пряму. Рівняння (9.1) має розв'язок (x_0, y_0), оскільки A і B одночасно не дорівнюють нулю, тобто існує хоча б одна точка $M_0(x_0, y_0)$, координати якої задовольняють рівняння (9.1):

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \tag{9.2}$$

Віднявши від рівняння (9.1) тотожність (9.2), одержимо рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \tag{9.3}$$

еквівалентне рівнянню (9.1).

Якщо точка $M(x, y)$ належить прямій L, то її координати задовольняють рівняння (9.3), тому що вектори $\overrightarrow{n} = \{A, B\}$ і $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ ортогональні і їхній скалярний добуток $A(x - x_0) + B(y - y_0)$ дорівнює нулю. Якщо $M(x, y)$ не лежить на L, то її координати не задовольняють рівняння (9.3).

Визначення 1. *Будь-який ненульовий вектор, паралельний заданій прямій, називається напрямним вектором цієї прямої.*

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ і має заданий напрямний вектор $\overrightarrow{q} = \{l, m\}$.

Нехай точка $M(x, y)$ лежить на вказаній прямій. Тоді вектори $\overrightarrow{M}_1M = \{x - x_1, y - y_1\}$ і $\overrightarrow{q} = \{l, m\}$ колінеарні, тобто координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}. \tag{9.4}$$

Рівняння (9.4) є шуканим рівнянням прямої й називається *канонічним* рівнянням прямої.

Нехай $M_2(x_2, y_2)$ – точка вказаної прямої. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ і вектор $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1\}$ лежать на одній прямій. Отже,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{9.5}$$

Рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, записується у вигляді (9.5).

Якщо за параметр t взяти величину лівої і правої частин рівняння (9.4), то одержимо

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt \end{cases} \tag{9.6}$$

– параметричні рівняння прямої.

Якщо рівняння (9.1) поділити на $-B \neq 0$, то одержимо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b, \tag{9.7}$$

де $k = -\dfrac{A}{B}$ – кутовий коефіцієнт прямої, який дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до осі Ox, $b = -\dfrac{C}{B}$ – величина відрізка, що відтинає пряма на осі Oy.

Якщо дві прямі задані рівняннями $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$, то один із кутів між ними обчислюється за формулою

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Ознакою паралельності таких прямих є рівність їхніх кутових коефіцієнтів: $k_1 = k_2$, а перпендикулярності – співвідношення $k_1 k_2 = -1$.

Якщо прямі задані рівняннями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то кут φ між цими прямими визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Ознакою паралельності таких прямих є рівність

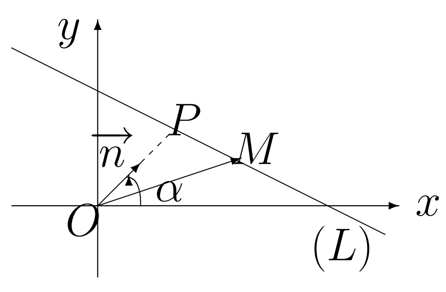
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

а перпендикулярності – співвідношення $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Нехай у загальному рівнянні прямої (9.1) жоден із коефіцієнтів не дорівнює нулю, тоді рівняння (9.1) можна звести до рівняння у відрізках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{9.8}$$

де $a = -\dfrac{C}{A}$, $b = -\dfrac{C}{B}$ – величини відрізків, які відтинає пряма на осях координат.



Нехай пряма (L) задана нормальним ортом $\overrightarrow{n} = \{\cos\alpha; \sin\alpha\}$ і відстанню p від початку координат. Тоді $\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = p$ – для довільної точки $M(x, y)$ прямої (L), або

$$(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{OM}) - p = 0. \tag{9.9}$$

У координатній формі рівняння (9.9) має вигляд

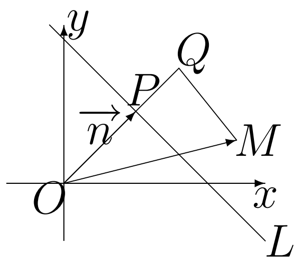
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \qquad (9.10)$$

де α – кут між $\overrightarrow{n}$ і $\overrightarrow{Ox}$.

Рівняння (9.10) називається *нормальним рівнянням прямої*.

З'ясуємо геометричний зміст лівої частини рівняння (9.10) при довільних x і y.

Теорема. *Ліва частина нормального рівняння прямої (9.10) при $x = x_0$, $y = y_0$ дорівнює відхиленню точки $M(x_0, y_0)$ від прямої L, що визначена рівнянням (9.10).*



Доведення. Спроектуємо точку M на вісь, що визначається вектором $\overrightarrow{n}$. Нехай Q – проекція точки M. Тоді відхилення δ точки M від прямої L дорівнює PQ. Оскільки $\delta = PQ = OQ - OP = OQ - p$ і $OQ = \text{пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{OM} = x\cos\alpha + y\sin\alpha$, то $\delta = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$.

Якщо точка $M(x, y)$ і початок координат розміщені по різні боки від прямої L, то $\delta > 0$, якщо ж по один бік, то $\delta < 0$.

Отже, для знаходження відхилення δ точки $M_0(x_0, y_0)$ від прямої L потрібно у ліву частину рівняння (9.10) поставити на місце x і y координати точки M_0.

Тоді відстань від прямої L до точки M_0

$$d_{M_0} = |\delta_{M_0}|.$$

Якщо пряма задана рівнянням (9.1), то відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до цієї прямої обчислюється за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Рівняння прямої (9.1) завжди можна перетворити в нормальне її рівняння. Для цього рівняння (9.1) необхідно помножити на нормувальний множник $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Знак біля кореня протилежний знаку C.

Визначення 2. *Сукупність прямих на площині, що проходять через деяку точку S цієї площини, називається пучком прямих із центром у S.*

Якщо $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$ – рівняння двох різних прямих, що перетинаються в точці S, а α і β – довільні, що не дорівнюють одночасно нулю числа, то

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0 \tag{9.11}$$

є рівнянням прямої, що проходить через точку S. Більш того, яка б не була наперед задана пряма, що проходить через точку S, вона визначається рівнянням (9.11) при деяких α і β.

Приклад 1. Задано вершини трикутника: $A(0,1)$; $B(6,5)$ і $C(12,-1)$. Скласти рівняння висоти трикутника, проведеної із вершини C.

Розв'язування. Складемо рівняння сторони AB:

$$\frac{y-1}{5-1}=\frac{x}{6} \quad \text{або} \quad 2x-3y+3=0 \quad \text{або} \quad y=\frac{2}{3}x+1.$$

Кутовий коефіцієнт сторони AB дорівнює $\frac{2}{3}$; отже (згідно з умовою перпендикулярності), кутовий коефіцієнт висоти, проведеної із вершини C, дорівнює $-\frac{3}{2}$.

Рівняння цієї висоти має вигляд

$$y+1=-\frac{3}{2}(x-12) \quad \text{або} \quad 3x+2y-34=0.$$

Приклад 2. Задано рівняння висот трикутника ABC: $x+y-2=0$, $9x-3y-4=0$ і координати вершини $A(2,2)$. Скласти рівняння сторін трикутника.

Розв'язування. Нехай $9x-3y-4=0$ – рівняння висоти BB_1 і $x+y-2=0$ – рівняння висоти CC_1. Оскільки точка A не лежить на жодній висоті, її координати не задовольняють рівняння цих висот.

Складемо рівняння сторони AC, розглянувши її як пряму, що проходить через точку A і перпендикулярна до висоти BB_1. Оскільки кутовий коефіцієнт висоти BB_1 дорівнює 3, то рівняння AC має вигляд

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-2) \quad \text{або} \quad x+3y-8=0.$$

Аналогічно отримуємо рівняння сторони AB:

$$y-2=x-2 \quad \text{або} \quad y=x.$$

Розв'яжемо системи

$$\begin{cases} y=x, \\ 9x-3y-4=0 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x+3y-8=0, \\ x+y-2=0. \end{cases}$$

Приклад 3. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $M(5,1)$ і утворюють із прямою $2x+y-4=0$ кут $\dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язування. Нехай кутовий коефіцієнт шуканої прямої дорівнює k. Кутовий коефіцієнт заданої прямої дорівнює -2. Оскільки кут між цими прямими повинен дорівнювати $\dfrac{\pi}{4}$, то $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{k+2}{1-2k}$ або $1-2k=k+2$, тобто $k=-\dfrac{1}{3}$. Прямі, що проходять через точку M і утворюють з прямою $2x+y-4$ кут $\dfrac{\pi}{4}$, перпендикулярні. Тому рівняння першої прямої має вигляд $y-1=-\dfrac{1}{3}(x-5)$ або $x+3y-8=0$, а рівняння другої прямої має вигляд $y-1=3(x-5)$ або $y-3x=-14$ або $3x-y-14=0$.

Приклад 4. Дано вершини трикутника $A(1,1)$, $B(10,13)$, $C(13,6)$. Скласти рівняння бісектриси кута A.

Розв'язування. Запишемо рівняння прямих AB і AC, які утворюють кут A:

$$AB: \ \frac{x-1}{10-1} = \frac{y-1}{13-1} \quad \text{або} \quad 4x - 3y - 1 = 0;$$

$$AC: \ \frac{x-1}{13-1} = \frac{y-1}{6-1} \quad \text{або} \quad 5x - 12y + 7 = 0.$$

Тоді рівняння бісектрис

$$\frac{4x-3y-1}{\sqrt{4^2+3^2}} = \pm\frac{5x-12y+7}{\sqrt{5^2+12^2}} = 0.$$

Звідси, спростивши, матимемо $7x-9y+2=0$ і $9x+7y-16=0$. З двох знайдених бісектрис вибираємо ту, яка лежить між точками B і C. Для цього підставимо координати точок B і C у рівняння двох прямих. Для першої прямої матимемо $70-91+2<0$, $91-54+2>0$, а для другої: $90+91-16>0$, $117+42-16>0$. Оскільки в першому випадку величини різних знаків, то рівняння бісектриси кута A трикутника ABC таке: $7x-9y+2=0$.

Задачі для самостійної роботи

1. Визначити, які з точок $A_1(1,-2)$, $A_2(1,1)$ та $A_3(3,-4)$ лежать на прямій $x+2y-3=0$.
2. Знайти відрізки, що відтинає пряма $x-3y+6=0$ на осях координат.
3. Довести, що рівняння $m^2x^2+2mnxy+n^2y^2-4l^2=0$ визначає пару прямих. Знайти рівняння кожної з цих прямих.
4. Довести, що рівняння будь-якої прямої можна подати в параметричній формі $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$.
5. Знайти рівняння геометричного місця точок, різниця квадратів відстаней яких від точок $A(-2,1)$ та $B(1,3)$ дорівнює 5.
6. Сторони AB, BC і AC трикутника ABC дано відповідно рівняннями $2x-3y-1=0$, $3x-4y-1=0$ та $x-y-1=0$. Визначати координати його вершин.

7. Скласти рівняння медіан трикутника з вершинами $A(-4,-2)$, $B(2,0)$ та $C(2,-4)$.
8. Дано дві вершини трикутника ABC: $A(2,1)$ і $B(-1,-1)$, довжину його сторони $AC=\sqrt{2}$, а центр ваги лежить на прямій $5x-7y-2=0$. Знайти його третю вершину C.
9. Скласти рівняння прямої, що проходить під кутом $\varphi=150^0$ до осі Ox і відтинає на осі Oy відрізок $b=3$.
10. Під яким кутом до осі Ox нахилена пряма, що проходить через точки $A(-1,3)$ та $B(4,-2)$?
11. Сила, прикладена в початку координат, і складові її на координатних осях відповідно дорівнюють 5 і -2. Знайти рівняння прямої, вздовж якої напрямлена сила.
12. Точка, що вийшла з початку координат, рухається у площині XOY зі швидкістю, складові якої по осях OX і OY дорівнюють відповідно V_1 і V_2. Скласти рівняння траєкторії руху.
13. Знайти кут між прямими
$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x=x_1+l_1t, \\ y=y_1+m_1t. \end{cases}$$
14. Знайти внутрішні кути трикутника ABC з вершинами $A(0,0)$, $B(2,-1)$, $C(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.
15. Довести, що чотирикутник з вершинами $A(1,1)$, $B(0,3)$, $C(2,4)$ та $D(3,2)$ є квадратом.
16. Довести, що чотирикутник, обмежений прямими $x+2y+3=0$, $x-2y+3=0$, $x+2y-3=0$ та $x-2y-3=0$, є ромбом.
17. За якої умови вісь Ox для прямих $l_1x+m_1y=0$, $l_2x+m_2y=0$ є бісектрисою утворених ними кутів?
18. Довести, що прямі, які відтинають на осях координат відрізки однакової довжини, або паралельні, або перпендикулярні.
19. Через точку $P(-1,3)$ провести пряму, перпендикулярну до прямої $4x-2y+3=0$.

20. Через точку $P(1,2)$ провести пряму, перпендикулярну до прямої $5x + 2y - 11 = 0$.
21. Скласти рівняння висот трикутника з вершинами $A(1,0)$, $B(4,5)$ та $C(7,3)$.
22. Через точки перетину прямої $x - 2y + 6 = 0$ з осями координат провести прямі, перпендикулярні до неї.
23. Знайти проекцію точки $P(1,-2)$ на пряму $3x - y - 9 = 0$.
24. Знайти точку, симетричну точці $P(8,-9)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(3,-4)$ і $B(-1,-2)$.
25. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи вершину $A(3,-4)$ та рівняння двох висот $7x - 2y - 1 = 0$ і $2x - 7y - 6 = 0$.
26. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи вершину $A(2,-4)$ та рівняння бісектрис двох його кутів $x + y - 2 = 0$, $x - 3y - 6 = 0$.
27. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи вершину $A(-4,2)$ та рівняння двох медіан $3x - 2y + 2 = 0$ і $3x + 5y - 12 = 0$.
28. Через точку $M(5,-1)$ під кутом 45^0 до прямої $5x + 2y - 11 = 0$ проведена пряма. Знайти її рівняння.
29. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо $C(5,-2)$ – вершина прямого кута, а $2x - 3y + 5 = 0$ – рівняння гіпотенузи.
30. Нехай $A(3,4)$ – вершина кута $\alpha = 30^0$ прямокутного трикутника, а $x - y + 2 = 0$ – рівняння протилежного катета. Скласти рівняння двох інших сторін трикутника.
31. Промінь світла, що має напрямок прямої $x + 5y = 0$, падає на дзеркало, що визначається рівнянням $2x - 3y + 5 = 0$. Написати рівняння відбитого променя.
32. Точка $P(1,-1)$ є центром квадрата, одна із сторін якого лежить на прямій $x - 2y + 12 = 0$. Знайти рівняння інших сторін квадрата.

33. При якому значенні параметра a три прямі $2x - y + 1 = 0$, $x + y - 4 = 0$ та $3x + ay - 2 = 0$ проходять через одну точку?
34. Через точку перетину прямих $x + 2y - 1 = 0$ і $2x + y - 4 = 0$ провести пряму:
    а) яка проходить через точку $M(-1, 3)$;
    б) паралельну осі Oy;
    в) перпендикулярну до прямої $x - 2y + 11 = 0$.
35. Через точку перетину прямих $x - 2y - 5 = 0$ і $x + y - 8 = 0$ провести дотичні до кола $x^2 + y^2 = 25$.
36. Знайти ту пряму в'язки $x + 2y - 1 + h(2x + y - 4) = 0$, яка утворює з прямою $3x - y + 17 = 0$ кут $\frac{\pi}{4}$.
37. З'ясувати, які з поданих нижче рівнянь прямих написані в нормальному вигляді:
    а) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$; б) $-\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y - 1 = 0$;
    в) $\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 2 = 0$; г) $x + y - 2 = 0$; д) $y - 2 = 0$.
38. Звести до нормального вигляду такі рівняння:
    а) $4x + 3y + 11 = 0$; б) $x + 2y - 1 = 0$; в) $x + 2 = 0$.
39. Обчислити відстань від точки P до прямої:
    а) $P(-2, 1)$, $4x - 3y - 2 = 0$;
    б) $P(3, -2)$, $12x + 5y - 3 = 0$;
    в) $P(0, 1)$, $x - 2y + 1 = 0$.
40. Нехай $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ – рівняння двох сторін прямокутника, а $A(-2, 1)$ – його вершина. Обчислити площу прямокутника.
41. Дві сторони квадрата лежать на прямих $x - 2y + 2 = 0$, $x - 2y - 5 = 0$. Обчислити його площу.
42. Знайти точку Q, симетричну точці $P(-5, 13)$ відносно прямої $2x - 3y - 3 = 0$.

Відповіді

1. A_2. 2. $a=-6$, $b=2$. 3. $mx+ny-2l=0$, $mx+ny+2l=0$.
5. $6x+4y-10=0$, $6x+4y=0$. 6. $(2,1)$, $(-1,-1)$, $(3,2)$.
7. $y+2=0$, $x-y-2=0$, $x+y+2=0$. 8. $(3,2)$, $(\frac{27}{37},\frac{14}{37})$.
9. $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+3$. 10. $\varphi=135^0$. 11. $2x+5y=0$.
12. $y=\frac{V_2}{V_1}x$. 13. $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{m_1l-ml_1}{ll_1+mm_1}$.
14. $\angle A=90^0$, $\angle B=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $\angle C=\operatorname{arctg}3$. 17. $l_1m_2+m_1l_2=0$.
19. $2x-y+5=0$. 20. $2x-5y+8=0$.
21. $3x-2y-3=0$, $2x+y-13=0$, $2x+5y-36=0$.
22. $2x+y+12=0$, $2x+y-3=0$. 23. $(\frac{11}{5},-\frac{12}{5})$. 24. $(10,-5)$.
25. $2x+7y+22=0$, $7x+2y-13=0$, $x-y+2=0$.
26. $x+7y-6=0$, $x-y-6=0$, $7x+y-10=0$.
27. $2x+y-8=0$, $x-3y+10=0$, $x+4y-4=0$.
28. $2x+7y-8=0$, $7x-3y-38=0$.
29. $5x-y-26=0$, $x+5y=0$.
30. $x+y-7=0$, $(2+\sqrt{3})x+y-10-3\sqrt{3}=0$ і $(2-\sqrt{3})x+y-10+3\sqrt{3}=0$.
31. $5x-y-26=0$.
32. $2x+y-16=0$, $2x+y+14=0$, $x-2y-18=0$.
33. $-\frac{1}{3}$. 34. а) $11x+10y-19=0$; б) $3x-7=0$; в) $2x+y-4=0$.
35. $4x-3y-25=0$, $3x+4y-25=0$.
36. $3x-6y-11=0$, $2x+y-4=0$. 37. а), д).
38. а) $-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-\frac{11}{5}$; б) $\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}$; в) $-x-2=0$.
39. а) $\dfrac{13}{15}$; б) $\dfrac{23}{13}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. 40. 6. 41. $\dfrac{49}{5}$. 42. $Q(11,-11)$.

Тема 10. Рівняння площини

Нехай у тривимірному евклідовому просторі E_3 задано площину P, яка проходить через точку M_0 з координатами (x_0, y_0, z_0), і нехай M – будь-яка точка з координатами x, y, z, яка лежить на площині P. Якщо позначити через $\overrightarrow{n}$ вектор, перпендикулярний до площини P, то лише для точок M, що лежать на площині, $\overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{n}$. Отже,

$$((\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0), \overrightarrow{n}) = 0, \tag{10.1}$$

де $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{r}_0 = x_0\overrightarrow{i} + y_0\overrightarrow{j} + z_0\overrightarrow{k}$.

Рівняння (10.1) називається векторним рівнянням площини.

Нехай вектор $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i}\cos\alpha + \overrightarrow{j}\cos\beta + \overrightarrow{k}\cos\gamma$ – одиничний вектор, що має напрямок перпендикуляра, опущеного на площину з початку координат; α, β, γ – кути, утворені цим перпендикуляром з осями координат Ox, Oy, Oz і p – довжина цього перпендикуляра. Тоді рівняння у векторній формі має вигляд

$$(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{n}) = p. \tag{10.2}$$

При переході до координатної форми запису рівняння (10.2) набуває вигляду

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{10.3}$$

Це *нормальне рівняння площини.*

Нехай вектор $\overrightarrow{n}$ має координати (A, B, C). Тоді рівняння (10.1) можна в розгорнутому вигляді записати так:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{10.4}$$

Рівняння (10.4) називається рівнянням площини, що проходить через точку M_0, а вектор $\overrightarrow{n} = \{A, B, C\}$ називається нормальним вектором площини. Якщо вважати

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0,$$

то маємо

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (10.5)$$

Це рівняння називається *загальним рівнянням площини.*

Для зведення загального рівняння площини (10.5) до нормального рівняння (10.3) необхідно всі члени рівняння (10.5) домножити на нормуючий множник $\mu = \pm(A^2 + b^2 + C^2)^{-1/2}$, а знак вибираємо протилежним знаку вільного члена D у рівнянні (10.5).

Частинні випадки розміщення площини визначаються загальним рівнянням (10.5):

$A = 0$ – площина, паралельна осі Ox;

$B = 0$ – площина, паралельна осі Oy;

$C = 0$ – площина, паралельна осі Oz;

$D = 0$ – площина проходить через початок координат;

$A = B = 0$ – площина, перпендикулярна осі Oz (паралельна площині xOy);

$A = C = 0$ – площина, перпендикулярна осі Oy (паралельна площині xOz);

$B = C = 0$ – площина, перпендикулярна осі Ox (паралельна площині yOz);

$A = D = 0$ – площина проходить через вісь Ox;

$B = D = 0$ – площина проходить через вісь Oy;

$C = D = 0$ – площина проходить через вісь Oz;

$A = B = D = 0$ – площина збігається з площиною xOy $(z = 0)$;

$A = C = D = 0$ – площина збігається з площиною xOz $(y = 0)$;

$B = C = D = 0$ – площина збігається з площиною yOz $(x = 0)$.

Якщо в загальному рівнянні площини (10.5) коефіцієнт $D \neq 0$, то, поділивши всі члени рівняння (10.5) на $-D$, рівняння площини можна звести до вигляду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (10.6)$$

де $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$. Рівняння (10.6) називається *рівнянням площини у відрізках*; у ньому a, b, c – відповідно абсциса, ордината і апліката точок перетину площини з осями Ox, Oy і Oz.

Рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, можна знайти з умови компланарності векторів $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, де $M(x, y, z)$ – довільна точка шуканої площини,

$$(\overrightarrow{M_1M}, [\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}]) = 0,$$

або в координатній формі

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{10.7}$$

Рівняння

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z) = 0 \tag{10.8}$$

при довільних значеннях α і β визначає деяку площину, що проходить через пряму перетину площин

$$A_1x + B_1y + C_1z + \ = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{10.9}$$

тобто деяку площину, що належить пучку площин, які проходять через цю пряму. Тому рівняння (10.8) називають *рівнянням пучка площин*. Якщо вектори $\overrightarrow{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ і $\overrightarrow{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ колінеарні, то пучок площин перетворюється в сукупність площин, паралельних площинам, визначених рівнянням (10.9).

Сукупність усіх площин простору, що проходять через точку M_0, називається *в'язкою площин*.

При довільних значеннях A, B, C рівняння (10.4) визначає площину, яка належить в'язці площин, що проходить через точку

M_0. Тому рівняння в'язки площин має вигляд (10.4), де A, B, C – довільні числа.

Кут φ між площинами (10.9) визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{10.10}$$

Умова паралельності площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Умова перпендикулярності площин така:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини, що визначається рівнянням (10.5), знаходиться за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C_1}}. \tag{10.11}$$

Якщо площина задана рівнянням (10.3), то

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|.$$

Відхиленням точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *від площини*, яка задана рівнянням (10.3), називається число

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p,$$

взяте зі знаком "$+$", якщо точка M_0 і початок координат лежать по різні боки від площини (10.3), і зі знаком "$-$", якщо вони лежать по один бік.

Приклад 1. Із точки $P(2, 3, -5)$ на координатні площини опущено перпендикуляри. Скласти рівняння площини, що проходить через їхні основи.

Розв'язування. Основами перпендикулярів, опущених на координатні площини, будуть точки: $M_1(2, 3, 0)$, $M_2(2, 0, -5)$,

$M_3(0,3,-5)$. Використовуючи формулу (10.7), запишемо рівняння площини, що проходить через точки M_1, M_2, M_3:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad 15x+10y-6z-60=0.$$

Приклад 2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(3,-1,-5)$ і перпендикулярна площинам $3x-2y+7=0$ і $5x-4y+3z+1=0$.

Розв'язування. Оскільки за нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ шуканої площини можна взяти векторний добуток нормальних векторів $\overrightarrow{n}_1=\{3,-2,2\}$ і $\overrightarrow{n}_2=\{5,-4,3\}$ заданих площин, то

$$\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{n}_1,\overrightarrow{n}_2]=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} -$$

$$-\overrightarrow{j}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}.$$

Скористаємося рівнянням площини, що проходить через задану точку $M(3,-1,-5)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n}=\{2,1,-2\}$. Отримаємо

$$2(x-3)+(y+1)-2(z+5)=0 \quad \text{або} \quad 2x+y-2z-15=0.$$

Приклад 3. Знайти відстань від точки $M_0(1,2,3)$, яка належить площині $2x-y+z-3=0$, до площини $\sqrt{30}x+5y+5z-\sqrt{30}=0$ і кут між цими площинами.

Розв'язування. За формулою (10.11) маємо

$$d=\frac{\sqrt{30}\cdot 1+5\cdot 2+5\cdot 3-\sqrt{30}}{\sqrt{30+25+25}}=\frac{25}{\sqrt{80}}=\frac{25}{4\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{4},$$

а використавши формулу (10.10) при $A_1 = 2$, $B_1 = -1$, $C_1 = 1$, $A_2 = \sqrt{30}$, $B_2 = 5$, $C_2 = 5$, одержимо

$$\cos\varphi = \frac{2\sqrt{30} - 5 + 5}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{30+25+25}} = \frac{2\sqrt{30}}{\sqrt{6}\sqrt{80}} = \frac{2\sqrt{30}}{4\sqrt{30}} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $\varphi = 60^0$.

Приклад 4. Скласти рівняння площини, що проходить через початок координат і перпендикулярна до площин $2x-y+3z-1 = 0$, $x + 2y + z = 0$.

Розв'язування. Нехай рівняння шуканої площини має вигляд $Ax+By+Cz = 0$, тоді нормальні вектори площин $\overrightarrow{n}_1 = \{2, -1, 3\}$ і $\overrightarrow{n}_2 = \{1, 2, 1\}$ за умовою задачі будуть перпендикулярні до вектора $\overrightarrow{n} = \{A, B, C\}$, тобто справедливі рівності

$$\begin{cases} 2A - B + 3C = 0, \\ A + 2B + C = 0. \end{cases}$$

Розв'язками системи будуть $A = -\frac{7}{5}C$, $B = \frac{C}{5}$. Отже, шукане рівняння площини має вигляд

$$-\frac{7}{5}Cx + \frac{C}{5}y + Cz = 0.$$

Оскільки $C \neq 0$, то рівняння площини $7x - y - 5z = 0$.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти рівняння площини, точки якої однаково віддалені від точок $P(1, -4, 2)$ і $Q(7, 1, -5)$.
2. Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з точки $M_0(2, 3, -5)$ на площину $4x - 2y + 5z - 12 = 0$.
3. Довести, що три площини $7x+4y+7z+1 = 0$, $2x-y-z+2 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$ проходять через одну пряму.

4. Дві грані куба лежать на площинах $2x - 2y + z - 1 = 0$, $2x + 2y + z + 5 = 0$. Знайти об'єм куба.
5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(0, 2, 1)$ і паралельна векторам $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.
6. Довести, що площина $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ перетинає відрізок, обмежений точками $M_1(3, -2, 1)$ і $M_2(-2, 5, 2)$.
7. Довести, що три площини $2x-y+3z+5 = 0$, $3x+y+2z-1 = 0$, $4x+3y+z+2 = 0$ перетинаються по трьох різних паралельних прямих.
8. Перевірити, які з точок $A(-1, 2, 3)$, $B(1, -2, 1)$, $C(0, 1, 2)$, $D(3, 0, 3)$ та $E(5, -7, 11)$ лежать на площині $2x-3y+z-9=0$.
9. Знайти об'єм тетраедра, який відтинає від координатного кута кожна з площин:

   а) $3x - 2y + z - 12 = 0$, б) $x - y + 3z - 3 = 0$;

   в) $x + 2y - 5z + 10 = 0$, г) $2x + 5y - 4z - 20 = 0$.
10. Визначити координати нормального вектора площини, яка проходить через точки $A(2, -1, 1)$, $B(3, 1, 0)$ і $C(1, 5, -2)$.
11. Скласти рівняння площини, якщо точки $A(1, -2, 0)$ і $B(3, 2, 6)$ симетричні відносно неї.
12. Скласти рівняння площини, якщо точка $A(-1, 2, 3)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину.
13. Скласти рівняння кожної площини, що проходить через точку $P(-3, 2, 5)$ і паралельно до координатної площини.
14. Скласти рівняння кожної площини, що проходить через точку $P(-1, 3, 7)$ та координатну вісь.
15. Площина проходить через точки $A(1, 2, 1)$ та $B(0, 3, -1)$ паралельно до осі Oz. Написати її рівняння.
16. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(-1, 2, 3)$ і відтинає від осей Ox та Oy відрізки $a = 2$, $b = -1$.

17. Через точку $P(1, 2, -1)$ провести площину, що відтинає від осей координат рівні відрізки.
18. Знайти точку перетину площин $x+y-z+2=0$, $2x+y-5=0$ та $4x-3y-2z+5=0$.
19. При яких значеннях l і m площини $2x-y+3z-1=0$, $x+2y-z+m=0$ та $x+ly-6z+10=0$ перетинаються: а) в одній точці; б) по прямій; г) по паралельних прямих?
20. Через точку $P(1, -1, 3)$ провести площину, перпендикулярну до площини $x-2y-23=0$, $3x+2y-z-1=0$.
21. Через лінію перетину площин $x+y-z+5=0$ та $2x+y+z-3=0$ провести площину:

    а) що проходить через точку $M(-1, 3, 4)$;

    б) паралельну осі Oy;

    в) перпендикулярну до площини $3x-y+2z-11=0$;

    г) що утворює з площиною $x-2y+2z-17=0$ кут $\alpha = \arccos\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.
22. Написати рівняння площини, яка перпендикулярна до площини $5x-y+3z-2=0$ та перетинає її по прямій, що лежить у площині xOy.
23. Довести, що площини $x-2y+3z-13=0$, $5x+y-z-11=0$ та $3x+5y-7z+15=0$ проходять через одну й ту саму пряму.
24. Через точку перетину площин $5x+8y-z-7=0$, $x+2y+3z-1=0$ та $2x-3y+2z-9=0$ провести площину, яка:

    а) проходить через точки $P_1(1, 2, 4)$ і $P_2(-1, 3, 1)$;

    б) проходить через вісь Oy;

    в) проходить через пряму $y+2=0$, $x+2z+1=0$;

    г) паралельна площині $3x-5y+8z-19=0$;

    д) перпендикулярна до площин $y=0$, $2x+3z-11=0$.
25. На осі Oy знайти точку, рівновіддалену від двох площин $x-2y+3z-6=0$ і $2x+3y+z-1=0$.

26. На відстані 5 одиниць від площини $x-2y+2z-14=0$ провести площину, паралельну до неї.
27. Знайти відстань між площинами $2x+2y-z-15=0$ і $4x+4y-2z+11=0$.
28. Дві грані куба лежать на площинах $2x-2y+z-1=0$ і $2x-2y+z+5=0$. Знайти його об'єм.
29. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох площин $x+5y-2z-3=0$ та $x+5y-2z+1=0$.
30. Довести, що точки простору, координати яких задовольняють умову $|Ax+By+Cz+D|<d^2$, розміщені між паралельними площинами $Ax+By+Cz+D\pm d^2=0$.

Відповіді

1. $6x+5y-7z-27=0$. 2. $d=3\sqrt{5}$. 4. 8 куб.од.
5. $x-y+2=0$. 8. B і D. 9. а) 48; б) $\dfrac{50}{3}$; в) $\dfrac{9}{6}$; г) $\dfrac{100}{3}$.
10. $\overrightarrow{n}=\{0,\lambda,2\lambda\}$. 11. $x+2y+3z-11=0$.
12. $x-2y-3z+14=0$. 13. $z-5=0$, $y-2=0$, $x+3=0$.
14. $7y-3z=0$, $7x+z=0$, $3x+y=0$. 15. $x+y-3=0$.
16. $3x-6y+7z-6=0$.
17. $x+y+z-2=0$, $x-y+z+2=0$, $x+y-z-4=0$.
18. $(2,1,5)$. 19. а) $l\neq 7$; б) $l=7$, $m=3$; г) $l=7$, $m\neq 3$.
20. $2x+y+8z-25=0$.
21. а) $4x+y+5z-19=0$; б) $x+2z-8=0$; в) $x+y-z+5=0$; г) $13x+7y+5z-13=0$, $7x+5y-z+9=0$.
22. $15x-3y-26z-6=0$.
24. а) $13x+14y-4z-25=0$; б) $z=0$; в) $x-4y+2z-7=0$; г) $3x-5y+8z-14=0$; д) $3x-2z-9=0$.
25. $(0,-1,0)$, $(0,7,0)$. 26. $x-2y+2z+1=0$, $x-2y+2z-29=0$.
27. $d=\dfrac{41}{6}$. 28. 8. 29. $x+5y-2z-1=0$.

Тема 11. Рівняння прямої в просторі

Розглянемо тривимірний евклідів простір E_3, віднесений до прямокутної системи координат $Oxyz$. Нехай задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і через цю точку проходить пряма L. Якщо взяти на цій прямій будь-яку точку $M(x, y, z)$, то всі вектори $\overrightarrow{M_0M}$ для будь-якої $M \in L$ будуть колінеарні між собою, і отже, колінеарні до деякого сталого вектора $\overrightarrow{q}$, який називається напрямним вектором прямої L. Нехай $\overrightarrow{q} = \{l, m, n\}$, тоді умова $\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{q}$ аналітично може бути записана у вигляді

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{11.1}$$

Це рівняння називається канонічним рівнянням прямої в E_3. Зокрема, рівняння (11.1) може бути записане у вигляді

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma},$$

де α, β і γ – кути, утворені прямою з осями координат. Напрямні косинуси прямої знаходяться за формулами

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Від канонічного рівняння прямої можна перейти до *параметричних рівнянь прямої*:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt, \tag{11.2}$$

позначивши рівності в (1) через t.

Нехай $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ – орти координатних осей Ox, Oy і Oz відповідно. Тоді з рівнянь (11.2) знаходимо

$$\overrightarrow{i}\,x + \overrightarrow{j}\,y + \overrightarrow{k}\,z = \overrightarrow{i}\,x_0 + \overrightarrow{j}\,y_0 + \overrightarrow{k}\,z_0 + t(\overrightarrow{i}\,l + \overrightarrow{j}\,m + \overrightarrow{k}\,n).$$

Якщо позначити

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{i}\,x + \overrightarrow{j}\,y + \overrightarrow{k}\,z, \quad \overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{i}\,x_0 + \overrightarrow{j}\,y_0 + \overrightarrow{k}\,z_0,$$

то дістанемо *векторне рівняння прямої*

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + \overrightarrow{q}t. \tag{11.3}$$

Кінематичний зміст напрямного вектора $\overrightarrow{q}$ такий, що це є вектор миттєвої швидкості руху матеріальної точки, якщо закон руху задано векторним рівнянням (11.3).

Пряма може бути задана рівнянням двох площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{11.4}$$

що перетинаються по цій прямій. Виключивши змінні x і y із системи (11.4) $x = az \pm c$, $y = bz \pm d$, одержимо, що пряма визначена двома площинами, які проектують її на площину xOz і yOz.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_!(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, має вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{11.5}$$

Кут між двома прямими, заданими канонічними рівняннями $\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$ і $\dfrac{x - x_1}{l_2} = \dfrac{y - y_1}{m_2} = \dfrac{z - z_1}{n_2}$, визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{11.6}$$

Умова паралельності двох прямих

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Умова перпендикулярності двох прямих

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Необхідна й достатня умова того, що дві прямі, задані канонічними рівняннями (11.6), належать одній площині (умова компланарності двох прямих):

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{11.7}$$

Якщо величини l_1, m_1, n_1 пропорційні величинам l_2, m_2, n_2, то співвідношення (11.7) є необхідною й достатньою умовою перетину прямих у просторі.

Кут між прямою $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}};$$

умова паралельності прямої й площини

$$Al + Bm + Cn = 0; \tag{11.8}$$

умова перпендикулярності прямої й площини

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}, \tag{11.9}$$

Різні випадки розташування прямої

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \\ z = nt + z_0 \end{cases}$$

і площини $Ax + By + Cz + D = 0$ такі:

а) якщо $Al + Bm + Cn \neq 0$, то пряма перетинає площину;

б) якщо $Al+Bm+Cn=0$ і $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, то пряма паралельна площині;

в) якщо $Al+Bm+Cn=0$ і $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, то пряма лежить у площині.

Приклад 1. Задана пряма $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$ і точка $M(1,1,1)$. Знайти точку N, симетричну точці M відносно прямої.

Розв'язування. Рівняння площини, що проектує точку M на дану пряму, має вигляд

$$2(x-1)+3(y-1)-(z-1)=0 \quad \text{або} \quad 2x+3y-z-4=0,$$

оскільки напрямний вектор прямої $\overrightarrow{q}=\{2,3,-1\}$ є нормальним вектором площини.

Знайдемо проекцію точки M на пряму. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}. \end{cases}$$

Маємо $x=\dfrac{8}{7}$, $y=\dfrac{3}{14}$, $z=-\dfrac{15}{14}$.

Тоді координати симетричної точки можна знайти, використавши формули для координат середини відрізка, тобто

$$\frac{8}{7}=\frac{1+x_N}{2}, \quad \frac{3}{14}=\frac{1+y_N}{2}, \quad -\frac{15}{14}=\frac{1+z_N}{2}.$$

Звідси $x_N=\dfrac{9}{7}$, $y_N=-\dfrac{4}{7}$, $z_N=-\dfrac{22}{7}$. Отже, $N\left(\dfrac{9}{7},-\dfrac{4}{7},-\dfrac{22}{7}\right)$.

Приклад 2. Знайти рівняння проекції прямої $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$ на площину $x+y+2z-5=0$.

Розв'язування. Запишемо рівняння заданої прямої у вигляді двох площин, що проектують її на площини xOy і xOz:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2} \quad \text{або} \quad 2x-y-3=0;$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{z}{3} \quad \text{або} \quad 3x-z-3=0.$$

Рівняння пучка площин, що проходять через задану пряму, має вигляд

$$2x-y-3+\lambda(3x-z-3)=0 \quad \text{або} \quad (2+3\lambda)x-y-\lambda z-3(1+\lambda)=0.$$

Використовуючи умову перпендикулярності площини, виберемо із цього пучка площину, що проектує пряму на задану площину. Маємо

$$1(2+3\lambda)+1(-1)+2(-\lambda)=0, \quad \lambda=-1.$$

Отже, рівняння проектуючої площини $x+y-z=0$.

Шукану проекцію можна визначити як лінію перетину двох площин

$$\begin{cases} x+y+2z-5=0, \\ x+y-z=0. \end{cases}$$

Приклад 3. З початку координат опустити перпендикуляр на пряму

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

Розв'язування. Оскільки напрямний вектор прямої $\overrightarrow{q}=\{2,3,1\}$ буде нормальним до площини, що проходить через початок координат, то рівняння такої площини має вигляд

$$2x+3y+z=0.$$

Розв'язавши систему

$$2x+4y+z=0, \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1},$$

знайдемо точку перетину прямої та площини: $M\left(\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{16}{7}\right)$. Скориставшись співвідношенням (11.5), маємо рівняння прямої, що проходить через точки $O(0,0,0)$ і $M\left(\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{16}{7}\right)$: $\frac{x}{\frac{4}{7}} = \frac{y}{-\frac{8}{7}} = \frac{z}{\frac{16}{7}}$ або $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{4}$.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти проекцію точки $P(2,-1,3)$ на пряму $x = 3t$, $y = 5t-7$, $z = 2t$.
2. Знайти точку Q, симетричну точці $P(4,1,6)$ відносно прямої
$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$
3. Вирахувати відстань від точки $P(2,3,-1)$ до прямої $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z+25}{-2}$.
4. Скласти рівняння площини, що проходить через прямі
$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}, \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}.$$
5. Довести, що прямі $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ і $\begin{cases} x = 3t + 7, \\ y = 2t + 2, \\ z = -2t + 1 \end{cases}$ лежать в одній площині, і скласти рівняння цієї площини.
6. На площині $2x - y + 3z - 9 = 0$ знайти точку, сума відстаней якої від точок $A(-1,0,1)$ та $B(3,1,1)$ була б найменшою.
7. Довести, що прямі
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{-4} \quad \text{та} \quad \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$$
перетинаються, та скласти рівняння площини, на якій вони лежать.

8. Довести, що прямі $\begin{cases} x = 2t + 5, \\ y = -t + 2, \\ z = t - 7 \end{cases}$ і

$$\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

паралельні, та знайти рівняння площини, на якій вони лежать.

9. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(5, 7, -1)$ та перпендикулярна до прямої $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+3}{-2}$.

10. Знайти проекцію точки $P\left(1, 2, \dfrac{3}{2}\right)$ на пряму $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z+1}{2}$.

11. Знайти точку, симетричну точці $P(1, -2, -6)$ відносно прямої

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ x - z + 2 = 0. \end{cases}$$

12. Знайти відстань від точки $P(-1, 3, 3)$ до прямої

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}.$$

13. Знайти відстань між прямими

$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0. \end{cases} \quad \text{і} \quad \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}.$$

14. Точка $M(x, y, z)$ рухається прямолінійно й рівномірно з початкового положення $M_0(11, -21, 20)$ у напрямку вектора $\overrightarrow{s} = \{-1, 2, -2\}$ зі швидкістю $v = 12$. За який час вона пройде відрізок траєкторії між двома паралельними площинами $2x + 3y + 5z + 31 = 0$ та $2x + 3y + 5z - 41 = 0$?

15. Довести, що геометричне місце точок, рівновіддалених від вершин трикутника, є пряма. Скласти її рівняння, якщо $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ та $C(x_3, y_3, z_3)$ – вершини трикутника.
16. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\begin{cases} x + 2t + 1, \\ y = -3t + 2, \\ z = 2t - 3 \end{cases}$ і точку $M(2, -2, 1)$.
17. Знайти проекцію кожної з прямих
а) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$; б) $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0, \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$
на координатні площини.
18. Знайти проекцію прямої $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+3}{2}$ на площину $x + 4y - 2z - 11 = 0$.
19. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = 2t + 3, \\ z = -t - 2 \end{cases}$ та паралельна до прямої

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

20. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(3, -2, -4)$, паралельна до площини $3x - 2y - 3z - 4 = 0$ та перетинає пряму

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-1}{19}.$$

21. На прямій $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ 3x - y + 4z - 29 = 0 \end{cases}$ визначити точку, рівновіддалену від точок $A(3, 11, 4)$ та $B(-5, -13, -2)$.
22. При яких значеннях параметрів A і D пряма $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+3}{1}$ лежить на площині $Ax + 2y - 4z + D = 0$?

23. Знайти рівняння спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих:

а) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{-1}$ та $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$;

б) $\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$ та $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$.

24. Знайти найкоротшу відстань між прямими:

$\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-6}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$ та $\dfrac{x-4}{8}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+7}{3}$.

Відповіді

1. $M(3,-2,4)$. 2. 2. $Q(2,-3,2)$. 3. $d=21$.
4. $6x-20y-11z+1=0$. 6. $(3,\frac{4}{5},\frac{19}{5})$. 7. $9x+10y-7z-44=0$.
8. $2x+9y+5z+7=0$. 9. $2x-y-2z-5=0$. 10. $(0,-2,1)$.
11. $(-5,-4,6)$. 12. $d=\sqrt{14}$. 13. 25. 14. $t=3$.

15. $\begin{cases} 2x(x_1-x_2)+2y(y_1-y_2)+2z(z_1-z_2)+x_2^2+y_2^2+z_2^2-x_1^2-y_1^2-z_1^2=0,\\ 2x(x_1-x_3)+2y(y_1-y_3)+2z(z_1-z_3)+x_3^2+y_3^2+z_3^2-x_1^2-y_1^2-z_1^2=0.\end{cases}$

16. $4x+6y+5z-1=0$.

17. а) $\begin{cases} y+z-1=0,\\ x=0,\end{cases}$ $\begin{cases} x+2z+1=0,\\ y=0,\end{cases}$ $\begin{cases} x-2y+3=0,\\ z=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases} 3y-3z+5=0,\\ x=0,\end{cases}$ $\begin{cases} 3x-1=0,\\ y=0,\end{cases}$ $\begin{cases} 3x-1=0,\\ z=0.\end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x+z-1=0,\\ x+4y-2z-11=0.\end{cases}$ 19. $13x-14y+11z+51=0$.

20. $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z+4}{9}$. 21. $(2,-3,5)$. 22. $A=3$, $D=-23$.

23. а) $\begin{cases} x-2y+z+2=0,\\ 2x-y-z+2=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases} 16x+27y+17z-90=0,\\ 58x+6y+31z-20=0.\end{cases}$

24. $d=13$.

Тема 12. Лінії другого порядку

Еліпс

Визначення. *Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок (фокусів), – стала величина.*

Для виведення рівняння еліпса спрямуємо вісь абсцис Ox по прямій, яка проходить через фокуси, а вісь Oy – через середину відрізка, який з'єднує фокуси F_1 і F_2. Тоді $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $c > 0$. Якщо $M(x,y)$ знаходиться на еліпсі, то рівняння еліпса має вигляд $r_1 + r_2 = 2a$ $(a > 0)$, де $F_1M = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = F_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Оскільки $r_1^2 - r_2^2 = 4cx$, то маємо

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = (r_1 - r_2)2a = 4cx.$$

Отже, $r_1 - r_2 = 2\dfrac{cx}{a}$. Звідси $r_1 = a + \frac{c}{a}x$, $r_2 = a - \frac{c}{a}x$.

Далі маємо $r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = \left(a + \dfrac{c}{a}x\right)^2$.

Після розкриття дужок і спрощення дістанемо рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{де} \quad b^2 = a^2 - c^2$$

яке й називається канонічним рівнянням еліпса.

Одним із основних законів руху планет сонячної системи є те, що планети навколо Сонця рухаються по майже еліптичних орбитах, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце. Якщо через $\overrightarrow{r}(t)$ позначити радіус-вектор матеріальної точки на орбіті з полюсом у центральному світилі, то, згідно з другим законом Ньютона,

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F},$$

де a – прискорення матеріальної точки, а m – її маса. Сила $\overrightarrow{F}$ є притягання між Сонцем і планетою. Оскільки $\overrightarrow{F} \parallel \overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{a} = \dfrac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}$,

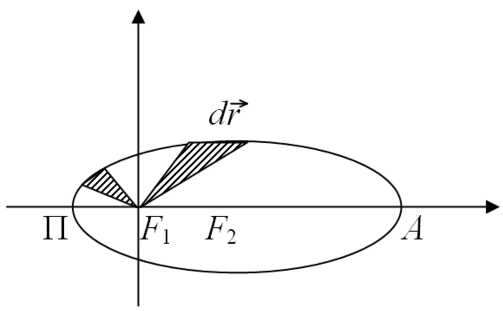
то маємо
$$m\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}=\overrightarrow{F}.$$

Домножимо це рівняння векторно на $\overrightarrow{r}$. Тоді дістанемо
$$m\left[\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}\times\overrightarrow{r}\right]=\overrightarrow{F}\times\overrightarrow{r}=\overrightarrow{0}.$$

Останню рівність можна переписати так:
$$\left[\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}\times\overrightarrow{r}\right]+\left[\frac{d\overrightarrow{r}}{dt},\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right]=\overrightarrow{0},$$

або ж
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\times\overrightarrow{r}\right]=\overrightarrow{0}.$$

Звідси випливає, що $\left[\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\times\overrightarrow{r}\right]=\overrightarrow{b}_0$, $\overrightarrow{b}_0$ не залежить від t. Таким чином,
$$\frac{1}{2}\left|[d\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{r}]\right|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{b}_0|dt.$$



Якщо є два положення планети, то за один і той же проміжок часу dt величини заштрихованих площ, які проходить радіус-вектор, будуть майже рівні, оскільки половина модуля векторного добутку є площею відповідного трикутника.

Звідси випливає, що швидкість планети біля перигею П завжди більша за швидкість біля апогею A.

Ексцентриситетом еліпса називається величина $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Прямі, перпендикулярні до фокальної осі F_1F_2, симетричні відносно центра еліпса на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$, називаються *директрисами* еліпса, їх рівняння $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Гіпербола

Визначення. *Гіперболою називається геометричне місце точок площини, абсолютне значення різниці відстаней від яких до двох фіксованих точок, що називаються фокусами, є сталою величиною.*

Прямокутну декартову систему координат виберемо так само, як і у випадку еліпса. Нехай $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокуси відносно цієї системи. Тоді рівняння гіперболи запишеться так:

$$|r_1 - r_2| = 2a, \quad \text{де} \quad r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Якщо розкрити абсолютне значення, то одержимо:
$r_1 - r_2 = 2a$, якщо $x \geq 0$,
$r_2 - r_1 = 2a$, якщо $x \leq 0$.

Таким чином, гіпербола складається з двох гілок. Розглянемо спочатку $x > 0$. Оскільки $r_1^2 - r_2^2 = 4cx$, то маємо $r_1 + r_2 = 2\dfrac{cx}{a}$, $r_1 - r_2 = 2a$. Звідси

$$r_1 = a + \frac{cx}{a}, \quad r_2 = -a + \frac{cx}{a}.$$

Далі маємо

$$(x+c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2.$$

Після спрощення дістаємо

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2.$$

Оскільки $a^2 - c^2 < 0$, то, вважаючи $b^2 = c^2 - a^2$, одержимо $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – канонічне рівняння гіперболи.

При $x \leq 0$, провівши аналогічні міркування, одержимо те ж саме канонічне рівняння гіперболи.

Зауваження. Гіпербола $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ має фокуси на осі Oy. Величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ називається ексцентриситетом гіперболи.

Пряма називається асимптотою гіперболи, якщо відстань до точки $M(x, y)$ гіперболи від цієї прямої прямує до нуля при $x \to +\infty$. Гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Для побудови асимптот гіперболи будують прямокутник зі сторонами $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$. Прямі, що проходять через протилежні вершини цього прямокутника, є асимптотами гіперболи.

Якщо $a = b$, то рівняння гіперболи має вигляд

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Така гіпербола називається *рівнобічною.* Її асимптоти утворюють прямий кут.

Парабола

Визначення. *Параболою називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки, яка називається фокусом, і даної прямої, яка називається директрисою. Припускається, що фокус не лежить на директрисі.*

Нехай F – фокус параболи, а (D) – її директриса. На площині, яка проходить через точку F і пряму (D), введемо декартову прямокутну систему координат XOY. Вісь абсцис спрямуємо по прямій, яка проходить через фокус F перпендикулярно до директриси, а вісь ординат Oy проведемо перпендикулярно до Ox так, щоб вона поділила відрізок осі Ox між фокусом і директрисою навпіл.

Нехай координати фокуса $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, причому $p > 0$. Тоді рівняння директриси (D) має вигляд $x = -\dfrac{p}{2}$ і відстань d від будь-якої точки M параболи до директриси буде виражатися формулою

$$d = \left| x + \frac{p}{2} \right|,$$

а до фокуса $d = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$.

Отже,

$$\left| x + \frac{p}{2} \right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \quad \text{або} \quad y^2 = 2px.$$

Це рівняння називається *канонічним рівнянням параболи.*

Довжина фокального радіус-вектора параболи $y^2 = 2px$ визначається за формулою $r = x + \dfrac{p}{2}$ $(p > 0)$.

Полярне рівняння еліпса, однієї гілки гіперболи та параболи за умови, що ρ, φ – полярні координати біжучої точки кривої, p – фокальний параметр, ε – ексцентриситет, а полюс знаходиться у фокусі й полярна вісь напрямлені по осі в бік, протилежний до найближчої до цього фокуса директриси, має вигляд:

$$\rho = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Пряма, що проходить через середини паралельних хорд лінії другого порядку, називається *діаметром лінії другого порядку.* Діаметр, що ділить навпіл будь-яку хорду (а отже, і всі паралельні їй), називається *спряженим цій хорді.* Всі діаметри еліпса й гіперболи проходять через центр.

Якщо еліпс заданий рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то його діаметр, спряжений хордам із кутовим коефіцієнтом k, визначається рівнянням

$$y = -\frac{b^2}{a^2 k} x.$$

Якщо гіпербола задана рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то її діаметр, спряжений хордам із кутовим коефіцієнтом k, визначається рівнянням

$$y = \frac{b^2}{a^2k}x.$$

Всі діаметри параболи паралельні її осі. Якщо парабола задана рівнянням

$$y^2 = 2px,$$

то її діаметр, спряжений хордам із кутовим коефіцієнтом k, визначається рівнянням

$$y = \frac{p}{k}.$$

Якщо один із двох діаметрів еліпса або гіперболи ділить хорди навпіл і паралельний другому, то другий діаметр ділить навпіл хорди, паралельні першому. Такі два діаметри називаються *взаємно спряженими.*

Якщо k і k_1 – кутові коефіцієнти двох взаємно спряжених діаметрів еліпса, то

$$kk_1 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Якщо k і k_1 – кутові коефіцієнти двох взаємно спряжених діаметрів гіперболи, то

$$kk_1 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Діаметр лінії другого порядку, перпендикулярний до спряжених хорд, називається *головним.*

Приклад 1. Скласти канонічне рівняння еліпса, що проходить через точки $M\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ і $N\left(-2, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

Розв'язування. Нехай $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – шукане рівняння еліпса. Це рівняння повинні задовольняти координати даних точок. Маємо

$$\frac{25}{4a^2}+\frac{3}{8b^2}=1,\quad \frac{4}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1.$$

Звідси знаходимо, що $a^2=10$, $b^2=1$. Отже, рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{1}=1.$$

Приклад 2. Задано точки $A(1,0)$ і $B(2,0)$. Точка M рухається так, що в трикутнику AMB $\angle B$ у два рази більший за $\angle A$. Знайти рівняння кривої, яку описує точка M.

Розв'язування. Візьмемо точку M з координатами x і y. Виразимо $\operatorname{tg}\angle B$ і $\operatorname{tg}\angle A$ через координати точок A, B і M:

$$\operatorname{tg}\angle B=\frac{y}{2-x};\quad \operatorname{tg}\angle A=\frac{y}{x+1}.$$

Згідно з умовою $\angle B=2\angle A$, тобто

$$\operatorname{tg}\angle B=\frac{2\operatorname{tg}\angle A}{1-\operatorname{tg}^2\angle A}\quad \text{або}\quad \frac{y}{2-x}=\frac{\frac{2y}{x+1}}{1-\frac{y^2}{(x+1)^2}}.$$

Після спрощення дістаємо $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$. Отже, шукана крива – гіпербола.

Приклад 3. Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox, з вершиною в початку координат, якщо довжина деякої хорди цієї параболи, що перпендикулярна до осі Ox, дорівнює 16, а відстань до цієї хорди від вершини дорівнює 6.

Розв'язування. Оскільки відома довжина хорди й відстань до неї від вершини, то відомі координати кінця цієї хорди – точки M, що лежить на параболі. У рівнянні параболи $y^2=2px$ покладемо

$x = 6$, $y = 8$. Тоді $2p = \frac{32}{3}$. Отже, рівняння шуканої параболи

$$y^2 = x\frac{32}{3}.$$

Задачі для самостійної роботи

1. З точки $A\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$ проведені дотичні до еліпса $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{5} = 1$. Скласти їх рівняння.
2. Знайти умову, за якої пряма $y = kx + m$ дотикається до еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
3. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$, які перпендикулярні до прямої $4x + 3y - 7 = 0$.
4. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомо її ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}$, фокус $F(2, -1)$ і рівняння відповідної директриси $3x - y + 3 = 0$.
5. Скласти рівняння параболи, якщо задано її фокус $F(4, 3)$ і директрису $y + 1 = 0$.
6. Показати, що рівняння $\rho = \dfrac{144}{13 - 5\cos\varphi}$ визначає еліпс, і знайти його півосі.
7. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо відстань між директрисами дорівнює $\frac{18}{5}$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.
8. Довести, що добуток відстаней точки гіперболи до її асимптот – стала величина щодо даної точки.
9. Скласти рівняння двох спряжених гіпербол, якщо відстань між директрисами першої з них дорівнює 7,2 і відстань між директрисами другої дорівнює 12,8.
10. Скласти рівняння параболи, якщо:

    а) фокус має координати $(5, 0)$, а вісь ординат є директрисою;

б) парабола симетрична відносно осі Ox, проходить через початок координат і через точку $M(1,-4)$;
в) парабола симетрична відносно осі Oy, фокус знаходиться в точці $(0,2)$, а вершина збігається з початком координат;
г) парабола симетрична відносно осі Oy, проходить через початок координат і через точку $M(6,-2)$.

11. Через точку $M(-1,3)$ провести прямі, паралельні до асимптот гіперболи $x^2 - \dfrac{y^2}{16} = 1$.
12. Визначити довжину хорди параболи $y^2 = 2px$, що проходить через її фокус, перпендикулярно до осі.
13. Визначити фокальний радіус точки M параболи $y^2 = 20x$, якщо її абсциса дорівнює 7.
14. Скласти рівняння кривих другого порядку з фокусом $F(x_0, y_0)$ і відповідною директрисою $ax + by + c = 0$.
15. Скласти рівняння еліпса, якщо його ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, фокус знаходиться в точці $F(1,-2)$, а відповідна директриса визначається рівнянням $x - y + 1 = 0$.
16. Точка $M\left(-\dfrac{5}{2}, 1\right)$ лежить на гіперболі $4x^2 - 5y^2 = 20$. Знайти її фокальні радіуси.
17. На еліпсі $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ знайти точку з фокальним радіусом $r = \dfrac{10}{3}$.
18. Скласти рівняння еліпса, якщо його лівий фокус знаходиться в полюсі полярної системи координат, фокальна вісь лежить на полярній осі, а точки $M_1(\rho_1, 0)$ і $M_2\left(\rho_2, \dfrac{\pi}{2}\right)$ лежать на еліпсі.
19. Відносно полярної системи координат скласти рівняння кола з радіусом R та центром: а) у полюсі; б) в точці (ρ_1, φ_1).

20. Відносно прямокутної системи координат написати рівняння кривої:

    а) $\rho = \dfrac{9}{5 - 4\cos\varphi}$; б) $\rho = \dfrac{1}{2 - \sqrt{5}\cos\varphi}$; в) $\rho = \dfrac{1}{2 - 2\cos\varphi}$.

21. На кривій $\rho = \dfrac{2}{1 - \sqrt{2}\cos\varphi}$ знайти точку з найменшим фокальним радіусом.

22. Знайти точку перетину еліпса $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ з прямою $x - 2y + 2 = 0$.

23. В еліпс $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{24} = 1$ вписано прямокутник, дві протилежні сторони якого проходять через фокуси. Обчислити площу цього прямокутника.

24. Знайти точки перетину гіперболи $\dfrac{x^2}{90} - \dfrac{y^2}{36} = 1$ з прямою $x - y + 5 = 0$.

25. Скласти рівняння спільної хорди параболи $y^2 = 18x$ і кола $(x + 6)^2 + y^2 = 100$.

26. Визначити рівняння діаметрів еліпса $x^2 + 6y^2 = 2$, довжина яких дорівнює 2.

27. Скласти рівняння прямої, яка сполучає середини паралельних хорд $3x - 4y - 6 = 0$, $3x - 4y + 12 = 0$ гіперболи $x^2 - y^2 = 1$.

28. Через точку $M_0(x_0, y_0)$ провести таку хорду еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, що ділиться в цій точці навпіл.

29. Знайти кутовий коефіцієнт тієї хорди гіперболи $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, яка проходить через точку $A(3, -1)$ та поділяється в ній навпіл.

30. Скласти рівняння діаметра гіперболи $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, який ділить навпіл її хорду, що лежить на прямій $3x + 2y - 1 = 0$.

31. Скласти рівняння діаметра еліпса $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, який проходить через середину хорди, що лежить на прямій $x + 2y - 1 = 0$.

32. Скласти рівняння двох спряжених діаметрів еліпса $4x^2+y^2=1$, один із яких нахилений під кутом $\alpha = 60^0$ до осі Ox.
33. Скласти рівняння двох спряжених діаметрів еліпса $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$, один з яких паралельний до прямої $x+2y-17=0$.
34. Скласти рівняння двох спряжених діаметрів гіперболи $x^2-2y^2=4$, один з яких перпендикулярний до прямої $x+4y-23=0$.
35. Скласти рівняння хорди параболи $y^2=8x$, що проходить через точку $M(2,3)$ і ділиться нею нівпіл.
36. Скласти рівняння діаметра параболи $x^2=2py$, спряженого з хордами, кутовий коефіцієнт яких k.
37. Знайти площу паралелограма з вершинами на кінцях спряжених діаметрів еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
38. Серед чотирикутників, вписаних в еліпс, знайти той, що має найбільшу площу.
39. Знайти рівняння дотичної до еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ у точці $M_0(x_0,y_0)$.
40. Знайти рівняння дотичної до гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ у точці $M_0(x_0,y_0)$.
41. Знайти рівняння дотичної до параболи $y^2=2px$ у точці $M_0(x_0,y_0)$.
42. Скласти рівняння дотичних до еліпса $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ у його вершинах.
43. Скласти рівняння кола, яке має центр на прямій $2x+y=0$ і дотикається до прямих $4x-3y+10=0$ і $4x-3y-30=0$.
44. Скласти рівняння нормалі до параболи $y^2=8x$ у точці, абсциса якої дорівнює 2.
45. Через точку $M(2,4)$ провести дотичні до еліпса $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

46. Скласти рівняння дотичних, проведених через точку $M\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$ до гіперболи $9x^2 - 2y^2 = 1$.
47. Знайти дотичні до гіперболи $x^2 - y^2 = 16$, паралельні до прямої $5x - 3y - 17 = 0$.
48. Знайти дотичну до параболи $y^2 = 2x$, перпендикулярну до прямої $4x + y - 23 = 0$.
49. На параболі $y^2 = 6x$ знайти найближчу точку до прямої $x - 2y + 10 = 0$.
50. Осі еліпса збігаються з осями координат. Еліпс дотикається до прямих $x + y = 5$ і $4x + y = 10$. Скласти його рівняння.
51. Довести, що дотична до гіперболи разом з асимптотами утворює трикутник зі сталою площею.
52. За якої умови пряма $Ax + By + C = 0$ дотикається до кривих $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1$?
53. З правого фокуса еліпса $\dfrac{x^2}{45} + \dfrac{y^2}{20} = 1$ під кутом α до осі Ox напрямлено промінь світла. Дійшовши до еліптичного дзеркала, промінь відбивається. Написати рівняння відбитого променя, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -2$.
54. З фокуса параболічного дзеркала $y^2 = 12x$ під кутом α напрямлено промінь світла. Дійшовши до параболи, промінь відбивається. Написати рівняння відбитого променя, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$.

Відповіді

1. $x + y - 5 = 0$, $x + 4y - 10 = 0$. 2. $k^2a^2 + b^2 = m$.
3. $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$.
4. $7x^2 - 6xy - y^2 + 26x - 18y - 17 = 0$. 5. $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$.
6. $(13, 12)$. 7. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$. 9. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$, $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$.

10. а) $y^2 = 10x - 25$; б) $y^2 = 16$; в) $x^2 = 8y$; г) $x^2 = -18y$.

11. $4x - y + 7 = 0$, $4x + y + 1 = 0$. 12. $2p$. 13. 12.

14. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + k(ax + by + c)^2 = 0$. **Вказівка.** Нехай $M(x, y)$ – довільна точка кривої. Доцільно використати фокальну властивість кривої другого порядку $\frac{r}{d} = e$, де r – відстань точки $M(x, y)$ до фокуса, d – відстань її до відповідної директриси, e – ексцентриситет кривої.

15. $7x^2 + 7y^2 + 2xy - 18x + 34y + 39 = 0$. 16. $r_1 = \frac{5\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

17. $(1, \frac{8}{3})$, $(1, -\frac{8}{3})$, $(-1, \frac{8}{3})$, $(-1, -\frac{8}{3})$.

18. $\rho = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_2 - (\rho_1 - \rho_2)\cos\varphi}$.

19. а) $\rho = R$; б) $a^2 = \rho_1^2 + \rho^2 - 2\rho\rho_1\cos(\varphi - \varphi_1)$.

20. а) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; б) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$; в) $y^2 = x$.

21. $(\frac{2}{1+\sqrt{2}}, \pi)$. 22. $(-2, 0)$ і $(\frac{8}{5}, \frac{9}{5})$. 23. $\frac{480}{7}$.

24. Дійсних точок перетину немає. 25. $x - 2 = 0$. 26. $y = \pm\frac{1}{2}x$.

27. $y = \frac{4}{3}x$. 28. $b^2x_0x + a^2y_0y - (a^2y_0^2 + b^2x_0^2) = 0$. 29. -4.

30. $y = -\frac{3}{2}x$. 31. $y = \frac{8}{9}x$. 32. $y = \sqrt{3}x$, $y = -\frac{4}{\sqrt{3}}x$.

33. $y = -\frac{1}{2}x$, $y = \frac{2}{3}x$. 34. $x - 8y = 0$, $4x - y = 0$. 35. $4x - 3y + 1 = 0$.

36. $x = pk$. 37. $2ab$.

38. Паралелограм, що має вершини в кінцях спряжених діаметрів. 39. $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. 40. $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

41. $yy_0 = p(x + x_0)$. 42. $x = \pm 4$, $y = \pm 3$.

43. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$. 44. $x + y - 6 = 0$, $x - y - 6 = 0$.

45. $x - 2 = 0$, $7x - 16y + 50 = 0$. 46. $9x - 4y - 1 = 0$, $9x + 4y + 1 = 0$.

47. $5x - 3y - 48 = 0$, $5x - 3y + 48 = 0$. 48. $x - 4y + 8 = 0$.

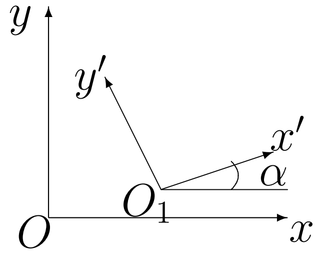
49. $(6, 6)$ 50. Це точка, в якій дотична до кривої паралельна заданій прямій.

51. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{20} = 1$. 52. $A^2a^2 \pm B^2b^2 - C^2 = 0$. 53. $x - 2y + 5 = 0$.

54. $y - 18 = 0$.

Тема 13. Спрощення рівняння кривих другого порядку

Перетворення координат. При переході від системи координат xOy до нової системи $x'O_1y'$ (напрямок осей збережений, за новий початок координат взята точка $O_1(a, b)$), зв'язок між старими й новими координатами деякої точки M на площині визначається за формулами



$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \tag{13.1}$$

$$x' = x - a, \quad y' = y - b. \tag{13.2}$$

За допомогою формул (13.1) старі координати виражаються через нові, а за допомогою формул (13.2) – нові через старі.

При повороті осей координат на кут α (початок координат незмінний, причому α завжди відкладається проти годинникової стрілки) залежність між старими координатами x, y і новими x', y' визначається формулами

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad x = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \tag{13.3}$$

$$x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha, \quad x' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha. \tag{13.4}$$

Спрощення рівняння кривої другого порядку

Визначення. Кривою другого порядку на площині називається множина точок площини, декартові координати (x, y) яких задовольняють рівняння другого степеня

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{13.5}$$

де a_{ij} – задані дійсні числа, a_{11}, a_{12}, a_{22} не можуть одночасно дорівнювати нулю.

Нехай $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = I_2 \neq 0$. Тоді система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0, \end{cases} \tag{13.6}$$

має єдиний розв'язок (x_0, y_0). Якщо систему координат xOy паралельно перенести в точку з координатами (x_0, y_0), тобто в рівнянні (13.5) зробити заміну

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0,$$

то рівняння (13.5) буде мати вигляд

$$a_{11}{x'}^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}{y'}^2 + a'_{33} = 0, \tag{13.7}$$

де $a'_{33} = F(x_0, y_0)$.

Якщо $a_{12} \neq 0$, то за допомогою повороту координатних осей

$$x' = x'' \cos\varphi - y'' \sin\varphi,$$

$$y' = y'' \sin\varphi + y'' \cos\varphi,$$

де кут φ вибрано так, що

$$a_{12}(tg^2\varphi) + (a_{11} - a_{22}) \operatorname{tg}\varphi - a_{12} = 0, \quad \text{або} \quad \operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}},$$

можна домогтися, що рівняння (13.7) буде мати вигляд

$$a'_{11}(x'')^2 + a'_{22}(y'')^2 + a'_{33} = 0, \quad (a'_{11}a'_{22} \neq 0). \tag{13.8}$$

Нехай $a'_{11}a'_{22} > 0$. Цей випадок називається еліптичним. Отже, a'_{11}, a'_{22} мають однаковий знак. Якщо знаки коефіцієнтів a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} однакові, то рівняння (13.8) називається рівнянням уявного еліпса.

Якщо знак a'_{33} протилежний знаку коефіцієнтів a'_{11}, a'_{22}, то (13.8) є рівнянням еліпса, яке можна записати у вигляді

$$\frac{(x'')^2}{-\frac{a'_{33}}{a'_{11}}} + \frac{(y'')^2}{-\frac{a'_{33}}{a'_{22}}} = 1.$$

Якщо $a'_{33} = 0$, то рівняння (13.8) має своїм розв'язком точку $x'' = 0$, $y'' = 0$ (еліпс вироджується в точку).

Нехай $a'_{11}a'_{22} < 0$. Цей випадок називається гіперболічним. Оскільки знаки коефіцієнтів a'_{11}, a'_{22} різні, то при $a'_{33} \neq 0$ маємо гіперболу.

Нехай $a'_{11} > 0$, $a'_{22} < 0$, $a'_{33} \neq 0$, тоді рівняння (13.8) можна записати у вигляді

$$\frac{(x'')^2}{-\frac{a'_{33}}{a'_{11}}} - \frac{(y'')^2}{-\frac{a'_{33}}{a'_{22}}} = 1.$$

Якщо $a'_{33} = 0$, то рівняння (13.8) має вигляд

$$(\sqrt{a'_{11}}x'' - \sqrt{-a'_{22}}y'')(\sqrt{a'_{11}}x'' + \sqrt{-a'_{22}}y'') = 0,$$

де $a'_{11} > 0$, $a'_{22} < 0$, а це дає пару прямих, що перетинаються.

Нехай $I_2 = 0$ (нецентральні криві). У цьому випадку система (13.6) або зовсім не має розв'язків, або їх нескінченно багато. Цей випадок називається параболічним.

Після повороту координатних осей одержимо таке рівняння:

$$a'_{11}{x'}^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0 \tag{13.9}$$

або

$$a'_{22}{y'}^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0. \tag{13.10}$$

Оскільки рівняння (13.9) і (13.10) зводяться аналогічно, то проаналізуємо одне з них, наприклад (13.9).

Якщо $a'_{23} = 0$, то рівняння (13.9) перетворюється у квадратне і є рівнянням пари паралельних прямих, які можуть і збігатися. При комплексних коренях рівняння кажуть, що рівняння (13.9) є рівнянням уявних паралельних прямих.

Нехай $a'_{23} \neq 0$. Тоді рівняння (13.9) має вигляд

$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 + 2a'_{23}\left(y' + \frac{a'_{33}}{2a'_{23}} - \frac{(a'_{13})^2}{2a'_{23}a'_{11}}\right) = 0.$$

Якщо

$$x'' = x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}, \quad y'' = y' + \frac{a'_{33}a'_{11} - (a'_{13})^2}{2a'_{23}a'_{11}}, \quad p = -\frac{a'_{23}}{a'_{11}},$$

то отримаємо канонічне рівняння параболи $(x'')^2 = 2py''$.

Приклад 1. Звести до канонічного вигляду рівняння $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

Розв'язування. Перетворимо рівняння за допомогою формул повороту осей координат:

$$(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 - 2(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)+$$
$$+(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 - 10(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)-$$
$$-6(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + 25 = 0$$

або

$$(\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha)x'^2 + (\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)y'+$$
$$+2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)x'y' - (10\cos\alpha + 6\sin\alpha)y' + 25 = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнт при $x'y'$, маємо $2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = 0$ або $\operatorname{tg}^2\alpha = 1$, тобто $\operatorname{tg}\alpha = \pm 1$. Візьмемо $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Отже, $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тоді рівняння набуває вигляду

$$2(y'^2 + \sqrt{2}y') - 8\sqrt{2}x' + 25 = 0.$$

Вираз у дужках доповнимо до повного квадрата

$$2\left(y'^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8\sqrt{2}\left(x' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Взявши за початок нової системи точку $O_1\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2},\right)$, застосувавши формули перетворення координат $x' = x'' - \frac{3}{\sqrt{2}}$, $y' = y'' + \frac{\sqrt{2}}{2}$, отримаємо рівняння параболи $y'' = 4\sqrt{2}x''$.

Приклад 2. Звести до канонічного вигляду рівняння $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$.

Розв'язування. Оскільки $I_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -16 < 0$, то система рівнянь

$$\begin{cases} 3x_0 + 5y_0 - 1 = 0, \\ 5x_0 + 3y_0 - 7 = 0 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $x_0 = 2$, $y_0 = -1$. Перетворимо рівняння за допомогою формул паралельного перенесення системи координат $x = x' + 2$, $y = y' - 1$. Дістанемо $3{x'}^2 + 10x'y' + 3{y'}^2 - 8 = 0$.

Зробимо поворот системи координат на кут φ так, щоб $5\operatorname{tg}^2\varphi + (3-3)\operatorname{tg}\varphi - 5 = 0$ або $\operatorname{tg}\varphi = \pm 1$. Візьмемо $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Зробивши заміну $x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'' - y'')$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'' + y'')$, дістанемо

$$ {x''}^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{10}{2} + \frac{3}{2} \right) + {y''}^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{10}{2} + \frac{3}{2} \right) - 8 = 0, $$

або $8{x''}^2 - 2{y''}^2 = 8$, або ${x''}^2 - \dfrac{{y''}^2}{4} = 1$ – рівняння гіперболи.

Задачі для самостійної роботи

1. Звести до канонічного вигляду рівняння:
   а) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;
   б) $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$;
   в) $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$;
   г) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$;
   д) $x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0$.
2. Написати рівняння кривої другого порядку, що проходить через точки $M_1(0, -3)$, $M_2(1, 0)$, $M_3\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$, $M_4(2, -1)$ та $M_5(-1, -2)$.

3. Дві криві другого порядку мають п'ять спільних точок. Довести, що вони збігаються (однакові).
4. Дано рівняння лінії $x^2 + xy + 6x + 6y + 9 = 0$. Встановити, при яких значеннях k пряма $y = kx$:
   а) перетинає цю лінію;
   б) дотикається до неї;
   в) має відносно неї асимптотичний напрямок;
   г) не має з нею спільних точок.
5. Знайти координати центра кривих:
   а) $x^2 - 2xy + 4y^2 + 5x - 7y + 12 = 0$;
   б) $x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$;
   в) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
   г) $4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y - 21 = 0$;
   д) $3x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 1 = 0$;
   е) $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 4 = 0$.
6. Скласти рівняння діаметра параболи $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$, спряженого з хордами, що паралельні до осі Ox.
7. Знайти два спряжені діаметри кривої $x^2+2xy-4y^2+2x-3 = 0$, що утворюють між собою кут у 45^0.
8. Через точку $M(5, 5)$ провести таку хорду кривої $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$, яка б у цій точці ділилися навпіл.
9. Знайти середину тієї хорди кривої $5x^2-2xy+y^2-3x+2y-5 = 0$, яка лежить на прямій $x - 2y - 1 = 0$.
10. Знайти асимптоти гіпербол:
    а) $13x^2 - 12xy - y^2 + 8x + 6y - 1 = 0$;
    б) $x^2 - 4xy + 3x - 2y - 3 = 0$;
    в) $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 2y - 2 = 0$;
    г) $4xy + 2y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$.
11. Крива другого порядку проходить через точку $M(1, -1)$, а її асимптоти визначаються рівняннями $2x+3y-5 = 0$, $5x+3y-8 = 0$. Скласти рівняння цієї кривої.

12. Знайти осі симетрії кривих:
   а) $x^2 - y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$;
   б) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
   в) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$.
13. Знайти вісь та вершину кожної з парабол:
   а) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 2y - 1 = 0$;
   б) $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 8y + 7 = 0$;
   в) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$.
14. Звести до канонічного вигляду рівняння кривої $x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$. Відшукати формули перетворення координат.
15. Віднести до головних осей рівняння лінії:
   а) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
   б) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;
   в) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$;
   г) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
   д) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$.
16. Визначити форму, розміри та розміщення ліній другого порядку, заданих рівняннями:
   а) $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$;
   б) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 12x - 12y - 23 = 0$;
   в) $4xy + 4x + 1 = 0$;
   г) $x^2 - 2xy + y^2 - 12x - 16y + 25 = 0$.
17. Визначити, які лінії зображають дані рівняння:
   а) $2xy + 4x - 2y + 3 = 0$;
   б) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$;
   в) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x + 10y - 7 = 0$;
   г) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.
18. З'ясувати особливості в розміщенні осей координат, якщо параболи мають такі рівняння:
   а) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$;
   б) $2x^2 + 6x - y - 1 = 0$;

в) $x^2 - 5y = 0$.

19. Додати до лівої частини рівняння $x^2 + 6xy + y^2 + 2y - 1 = 0$ таке число, щоб після цього рівняння зображало пару прямих.
20. Які лінії зображаються рівнянням $x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ при різних значеннях параметра λ?
21. Методом вилучення квадратів встановити тип кривої:
    а) $x^2 + 2xy + y^2 + 6x - 12y + 1 = 0$;
    б) $x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x + 4y + 18 = 0$.

Відповіді

1. а) $\frac{(x'')^2}{16} + \frac{(y'')^2}{9} = 1$ – еліпс; б) $9(x'')^2 - 16(y'')^2 = 5$ – гіпербола; в) $(x'')^2 - 4(y'')^2 = 0$ – пара прямих, що перетинаються; г) $(y'')^2 = 6x''$ – парабола; д) $(y'')^2 = 25$ – вироджена парабола (пара паралельних прямих).
2. $2xy + 3x - y - 3 = 0$.
4. а) при $k > 0$ і $k < -1$; б) $k = 0$ і $k = -1$; в) при $k = -1$ пряма дотикається до кривої у нескінченності; г) $-1 < k < 0$.
5. а) $(-\frac{13}{6}, \frac{1}{3})$; б) $(-3, 1)$; в) центра немає; г) лінія центрів $2x + y - 2 = 0$; д) $(-1, 2)$; е) лінія центрів $x + y - 1 = 0$.
6. $x - 3y - 6 = 0$.
7. $x + y + 1 = 0$, $5y + 1 = 0$, $10x - 25y + 3 = 0$, $7x - 3y + 5 = 0$.
8. $x = y$. 9. $(\frac{3}{17}, -\frac{7}{17})$.
10. а) $14x - 14y + 14 = 0$, $91x + 7y - 35 = 0$; б) $2x - 8y + 5 = 0$, $2x + 1 = 0$; в) $6x - 2y + 7 = 0$, $2x + 2y + 3 = 0$; г) $y + 1 = 0$, $2x + y - 4 = 0$.
11. $10x^2 + 21xy + 9y^2 - 41x - 39y + 4 = 0$.
12. а) $y - 2 = 0$, $x + 4 = 0$; б) $x + y - 2 = 0$, $x - y = 0$; в) $x + 2y - 8 = 0$, $2x - y - 1 = 0$.
13. а) $x - y - 2 = 0$, $(\frac{17}{12}, -\frac{17}{12})$; б) $x + y + 3 = 0$, $(-3, 1)$; в) $x + 2y - 1 = 0$, $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$.

14. $\frac{x'^2}{12}+\frac{y'^2}{4}=1$, $x'=\frac{x'\sqrt{2}}{2}-\frac{y'\sqrt{2}}{2}+2$, $y'=\frac{x'\sqrt{2}}{2}+\frac{y'\sqrt{2}}{2}+2$.

15. а) $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$; б) $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{9}=1$; в) $y'^2=2\sqrt{2}x'$; г) $\frac{x'^2}{9}+y'^2=1$; д) $y'^2=\frac{6}{\sqrt{5}}x'$.

16. а) $\frac{x'^2}{9}-y'^2=1$, $C(1,1)$ – центр кривої, $x-2y+1=0$, $2x+y-3=0$ – головні осі, $x-y=0$ і $x-7y+6=0$ – асимптоти; б) $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{16}=1$, $C(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$, $x-y=0$ і $2x+2y-3=0$, $x+3y-3=0$, $3x+y-3=0$; в) $2x'^2-2y'^2=1$, $C(0,-1)$, $x+y+1=0$, $x-y-1=0$, $y+1=0$, $x=0$; г) $y'^2=7\sqrt{2}x'$, $x-y+1=0$ – вісь, $O(\frac{5}{14},\frac{19}{14})$ – вершина.

17. а) гіпербола; б) пара паралельних прямих; в) дві прямі, що перетинаються; г) дві прямі, що збігаються.

18. а) парабола проходить через початок координат; б) вісь ординат паралельна осі параболи; в) вісь ординат збігається з віссю параболи, вершина параболи в початку координат.

19. 2. 20. При $\lambda=-24$ пара дійсних прямих, що перетинаються; при $\lambda>1$ – еліпс; $\lambda<1$, $\lambda\neq-24$ – гіпербола; $\lambda=1$ – парабола.

21. а) еліпс; б) уявний еліпс.

Тема 14. Поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку в тривимірному просторі називається множина точок простору, декартові координати (x, y, z) яких задовольняють рівняння другого степеня

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{13}xz +$$

$$+ 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \qquad (14.1)$$

де a_{ij} – відомі дійсні числа.

Група старших членів рівняння (14.1), тобто вираз $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$, називається *квадратичною формою від трьох змінних*, і матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею цієї форми.*

Характеристичним рівнянням матриці A називається рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корені цього рівняння λ_1, λ_2, λ_3 називаються *характеристичними числами матриці*; вони завжди дійсні, якщо матриця A симетрична, тобто $a_{ij} = a_{ji}$.

Система рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 = 0, \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} - \lambda)\xi_2 + a_{23}\xi_3 = 0, \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + (a_{33} - \lambda)\xi_3 = 0, \end{cases}$$

в якій λ набуває одне із значень λ_1, λ_2, λ_3 і визначник якої дорівнює нулю, визначає трійку чисел (ξ_1, ξ_2, ξ_3), що відповідає даному характеристичному числу.

Ця сукупність трьох чисел називається *власним вектором матриці*.

Квадратичну форму за допомогою лінійного перетворення змінних можна звести до форми, яка не містить добутку нових змінних, тобто до вигляду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$. Тут числа λ_1, λ_2, λ_3 є *характеристичними числами матриці* A.

Відповідне лінійне перетворення можна знайти таким чином: визначають трійку нормованих попарно ортогональних власних векторів, які відповідають власним числам матриці λ_1, λ_2, λ_3:

$$\overrightarrow{e}_1 = \alpha_1 \overrightarrow{i} + \beta_1 \overrightarrow{j} + \chi_1 \overrightarrow{k},$$

$$\overrightarrow{e}_2 = \alpha_2 \overrightarrow{i} + \beta_2 \overrightarrow{j} + \chi_2 \overrightarrow{k},$$

$$\overrightarrow{e}_3 = \alpha_3 \overrightarrow{i} + \beta_3 \overrightarrow{j} + \chi_3 \overrightarrow{k}.$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$ нормовані й ортогональні, то повинні виконуватися співвідношення

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \chi_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\alpha_1 \alpha_j + \beta_i \beta_j + \chi_i \chi_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3; i \neq j.$$

Тоді матриця перетворення змінних має вигляд

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z',$$

$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z',$$

$$x = \chi_1 x' + \chi_2 y' + \chi_3 z'.$$

Таке перетворення змінних називається *лінійним ортогональним перетворенням* і $\det S = 1$. Оскільки $\det S = 1$, то при перетворенні зберігається взаємна орієнтація координатних осей.

Перетворення рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду здійснюється за такою схемою:

а) знаходять те лінійне ортогональне перетворення координат, яке зводить квадратичну форму старших членів рівняння поверхні (14.1) до суми квадратів, і виконують у рівнянні відповідну заміну змінних. У результаті такого перетворення зникають доданки з добутком координат;

б) здійснюють паралельне перенесення нових осей координат, зводять рівняння до канонічного вигляду

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = C. \tag{14.2}$$

Тут вважаємо, що $C > 0$.

Розглянемо різні випадки отриманого канонічного рівняння (14.2).

1) Нехай $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$. Тоді рівняння (14.2) можна записати у вигляді

$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{y_3^2}{d^2} = 1, \quad \left(\frac{C}{\lambda_1} = a^2, \frac{C}{\lambda_2} = b^2, \frac{C}{\lambda_3} = d^2\right). \tag{14.3}$$

Отримали канонічне рівняння еліпсоїда.

2) Нехай $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$ (одне з чисел λ_k – від'ємне). Тоді рівняння (14.2) можна записати у вигляді

$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - \frac{y_3^2}{d^2} = 1. \tag{14.4}$$

Це рівняння однопорожнинного гіперболоїда. У випадку, якщо $C = 0$, маємо рівняння

$$\frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} = y_3^2, \quad \left(a_1^2 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}, a_2^2 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right). \tag{14.5}$$

Рівняння (14.5) визначає конус другого порядку.

3) Нехай $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$ (одне з чисел λ_k – додатне).

У цьому випадку рівняння (14.2) можна зобразити у вигляді

$$\frac{y_1^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}-\frac{y_3^2}{d^2}=1, \tag{14.6}$$

і воно визначає двопорожнинний гіперболоїд.

4) Нехай, наприклад, $\lambda_1=0$ (одне х чисел λ_k дорівнює нулеві). Тоді рівняння (14.2) набуває вигляду

$$\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2=C, \tag{14.7}$$

яке є рівнянням циліндра, твірні якого паралельні осі Oy_1. Якщо $C=0$, тобто $\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2=0$, то при $\lambda_2\lambda_3>0$ дістанемо пряму лінію $\begin{cases} y_2=0, \\ y_3=0, \end{cases}$ отже, вісь Oy_1.

Якщо $C=0$, то при $\lambda_2\lambda_3<0$ будемо мати

$$\lambda_2^2y_2^2-\lambda_3^2y_3^2=0, \tag{14.8}$$

яке розпадається на два рівняння першого порядку, тобто поверхня другого порядку вироджується у дві площини: $\lambda_2y_2-\lambda_3y_3=0$, $\lambda_2y_2+\lambda_3y_3=0$.

5) Нехай $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3>0$. Тоді рівняння (14.2) має вигляд

$$\lambda_3y_3^2=C \quad \text{або} \quad y_3=\pm\sqrt{\frac{C}{\lambda_3}}.$$

У цьому випадку поверхня другого порядку вироджується у дві площини, паралельні координатній площині y_1Oy_2.

Зауваження 1. *Якщо всі коефіцієнти λ_k від'ємні, геометричним образом будуть уявні поверхні.*

Зауваження 2. *Від доданків першого степеня можна позбутися тоді й тільки тоді, коли загальне рівняння (14.1) містить і перший степінь, і квадрат тієї ж координати.*

Отже, від рівняння (14.1) можна перейти до рівняння (14.2) тільки у випадку, коли:

а) не всі λ_k дорівнюють нулю;

б) у рівнянні відсутні одночасно перший і другий степінь деякої координати.

Якщо після вибору λ_1, λ_2, λ_3 рівняння поверхні не містить квадратів якоїсь координати, тобто деяке $\lambda_k = 0$, то з рівняння не можна виключити доданок, який містить перший степінь даної координати, наприклад z.

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \ \text{ — еліптичний параболоїд,}$$

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \ \text{ — гіперболічний параболоїд.}$$

Приклад 1. Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 12x - 10 = 0$.

Розв'язування. Випишемо матрицю коефіцієнтів біля старших членів. Вона має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Характеристичні числа цієї матриці визначаються з рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

або $(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0$. Його корені $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. При $\lambda_1 = 2$ для визначення власного вектора дістанемо систему рівнянь

$$u_1 - u_2 + u_3 = 0,$$

$$-u_1 + 3u_2 - u_3 = 0,$$

$$u_1 - u_2 + u_3 = 0.$$

Звідки знайдемо $u_2 = 0$, $u_1 = u_3$. Нехай $u_3 = -\alpha$, знайдемо власний вектор $(\alpha, 0, -\alpha)$. Після нормування маємо $\overrightarrow{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{j}$.

При $\lambda_2 = 3$ для визначення другого власного вектора будемо мати систему рівнянь

$$-v_2 + v_3 = 0,$$
$$-v_1 + 2v_2 - v_3 = 0,$$
$$v_1 - v_2 = 0.$$

Даному власному значенню відповідає власний вектор (β, β, β). Після нормування маємо $\overrightarrow{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{j} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{k}$. Вектори $\overrightarrow{e}_1$ та $\overrightarrow{e}_2$ ортогональні: $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2) = 0$.

При $\lambda_3 = 6$ для визначення третього власного вектора будемо мати систему рівнянь

$$-3w_1 - w_2 + w_3 = 0,$$
$$-w_1 - w_2 - w_3 = 0,$$
$$w_1 - w_2 - 3w_3 = 0.$$

Відповідним власним нормованим вектором буде вектор $\overrightarrow{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{i} - \dfrac{2}{\sqrt{6}}\overrightarrow{j} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{k}$, який ортогональний векторам $\overrightarrow{e}_1$ і $\overrightarrow{e}_2$: $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_3) = 0$, $(\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3) = 0$.

Використаємо власні нормовані ортогональні вектори для побудови матриці перетворення координат

$$S = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \det S = 1.$$

Звідси отримаємо формули перетворення координат

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z',$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{2}{\sqrt{6}}z',$$

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'.$$

Підставимо вирази для x, y, z у рівняння поверхні. Після спрощення отримаємо

$$2{x'}^2 + 3{y'}^2 + 6{z'}^2 - 6\sqrt{2}x' - 4\sqrt{3}y' - 2\sqrt{6}z' - 10 = 0.$$

Коефіцієнти біля x', y', z' є координатами власних векторів. Перепишемо рівняння у вигляді

$$2\left({x'}^2 - \frac{6}{\sqrt{2}}x'\right) + 3\left({y'}^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}y'\right) + 6\left({z'}^2 - \frac{2}{\sqrt{6}}z'\right) = 10.$$

Після доповнення виразів у дужках до повних квадратів маємо

$$2\left(x' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(y' - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 6\left(z' - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = 24.$$

Здійснимо паралельне перенесення осей координат за формулами

$$x' = x'' + \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad y' = y'' + \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad z' = z'' + \frac{1}{\sqrt{6}},$$

розділимо рівняння на 24, отримаємо канонічне рівняння еліпсоїда

$$\frac{(x'')^2}{12} + \frac{(y'')^2}{8} + \frac{(z'')^2}{4} = 1.$$

Приклад 2. Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz - 4x - 2y = 0$.

Розв'язування. Матриця коефіцієнтів старших членів рівняння поверхні

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичні числа матриці $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$ визначаємо з рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

При $\lambda_1 = 3$ система для знаходження координат власного вектора має вигляд

$$-u_1 - u_2 = 0,$$

$$-u_1 - 2u_2 + u_3 = 0,$$

$$u_2 - u_3 = 0.$$

Розв'язавши її, можемо записати: $\overrightarrow{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{i} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{j} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{k}$.

При $\lambda_2 = 2$ дістанемо таку систему для координат власного вектора:

$$-v_2 = 0,$$

$$-v_1 - v_2 + v_3 = 0,$$

$$v_2 = 0.$$

Тому другий власний вектор $\overrightarrow{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{k}$.

При $\lambda_3 = 0$ будемо мати систему

$$2w_1 - w_2 = 0,$$

$$-w_1 + w_2 + w_3 = 0,$$

$$w_2 + 2w_3 = 0,$$

розв'язавши яку дістанемо $\overrightarrow{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\overrightarrow{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{k}$. Вектори $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$ взаємно ортогональні: $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2) = 0$, $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_3) = 0$, $(\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3) = 0$.

Матриця перетворення координат

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Звідси дістанемо формули перетворення координат

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z',$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}z',$$

$$z = -\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{1}{\sqrt{6}}z'.$$

Оскільки $4x - 2y = \frac{6}{\sqrt{3}}x' + \frac{4}{\sqrt{2}}y'$, то рівняння заданої поверхні при переході до змінних x', y', z' набуває вигляду

$$3{x'}^2 + 2{y'}^2 + \frac{6}{\sqrt{3}}x' + \frac{4}{\sqrt{2}}y' = 0.$$

Виділимо повні квадрати у лівій частині останньої рівності. Маємо

$$3\left(x' + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2.$$

Виконавши перенесення початку системи координат у точку $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, дістанемо нову систему (x'', y'', z''), в якій рівняння поверхні набуває вигляду: $\dfrac{(x'')^2}{2/3}+(y'')^2=1$. Останнє рівняння визначає еліптичний циліндр.

Задачі для самостійної роботи

1. Звести до канонічного вигляду рівняння поверхонь:
   а) $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-6=0$;
   б) $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0$.
2. Скласти рівняння сфери, яка проходить через точку $M(2,2,2)$ та перетинає двополий гіперболоїд $3x^2-y^2-5z^2=4$ по колу.
3. Знайти точки заокруглення еліптичного параболоїда $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=z$.
4. Визначити радіуси кіл, які лежать на однополому гіперболоїді $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}-z^2=1$ і дотикаються до горлового еліпса.
5. Скласти рівняння поверхні, яка проходить через дев'ять точок: $M_1(0,0,0)$, $M_2(1,0,-1)$, $M_3(-1,0,-1)$, $M_4(0,1,1)$, $M_5(0,-1,1)$, $M_6(1,1,10)$, $M_7(1,-1,0)$, $M_8(2,1,-3)$, $M_9(1,-2,3)$.
6. Визначити точки перетину поверхні $x^2-y^2-z^2-2xy+yz+xz-5x-5y+z+6=0$ з координатними осями.
7. Визначити точки перетину прямої з поверхнею в таких випадках:
   а) $\dfrac{x-10}{7}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z}{-1}$ з $x^2+3xz-6yz-xy=0$;
   б) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-4}{1}$ з $9x^2+5y^2+9z^2-12xy-6yz+12y-36z=0$;
   в) $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{2}$ з $x^2+y^2-2z^2-2xz-yz+4xy+3x-5y=0$.
8. Скласти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні $x^2-5y^2-z^2-4xy-6yz-4x-2y-6z+8=0$ у точці $M_0(-4,0,4)$.

9. Знайти дотичні площини поверхні $6x^2+4y^2+4z^2+4yz-8x-1=0$, паралельні площині $2x+3y+8=0$.
10. На поверхні $3y^2+5z^2+2xy-6xz-12yz+2x+10z-3=0$ визначити точки, в яких нормалі паралельні осі Oz.
11. Скласти рівняння конуса, описаного навколо поверхні $x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$, вершина якого знаходиться в точці $O(0,0,0)$.
12. Знайти прямі, що проходять через початок координат і цілком лежать на поверхні $y^2+3xy+2yz-xz+3x+2y=0$.
13. Скласти рівняння асимптотичних конусів поверхонь:
а) $6x^2-2y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z+1=0$;
б) $x^2+y^2+z^2-6xy+2xz-2yz-4x+8y-12z+14=0$.
14. Визначити конус асимптотичних напрямків поверхні $x^2+y^2-z^2+2xy-3x+2y-1=0$ з вершиною в точці $M(-9,0,0)$.
15. Визначити центри поверхонь:
а) $x^2+2y^2-3z^2+2xz-2yz+4x=0$;
б) $x^2+4y^2+9z^2+4xy-6x-12y=0$;
в) $x^2+4y^2+9z^2-12yz-6xz+4xy+x+2y-3z-12=0$;
г) $4x^2+3y^2+z^2-4xz+y-3z-2=0$.
16. Знайти діаметр поверхні $x^2+9y^2+2z^2-4xy-6xz+2yz+8x-16y+1=0$, що проходить через початок координат, та скласти рівняння спряженої з ним діаметральної площини.
17. Скласти рівняння цієї діаметральної площини поверхні $6x^2+9y^2+z^2-4xz+6xy-2y-3=0$, яка паралельна площині $x+3y-z+5=0$, та знайти спряжений з нею діаметр.
18. Визначити орти головних напрямків поверхонь:
а) $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$;
б) $x^2+y^2+5z^2-6xy-2xz+2yz-6x+6y-6z+9=0$.
19. Знайти головні осі й головні діаметральні площини поверхонь:
а) $x^2+y^2+5z^2-6xy-2xz+2yz-6x+6y-6z+9=0$;
б) $x^2+y^2-3z^2-6yz-6xz-2xy+2x+2y+4z=0$.

20. Спростити рівняння поверхонь віднесенням до головних осей:

а) $7x^2+6y^2+5z^2-4yz-4xy-6x-24y+18z+30=0$;

б) $5x^2+8y^2+5z^2+4xy-8xz+4yz-27=0$.

21. Спростити рівняння поверхонь:

а) $6x^2-2y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z+1=0$;

б) $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0$;

в) $x^2+y^2+5z^2-6xy+2xz-21yz-4x+8y-12z+14=0$;

г) $4x^2+5y^2+6z^2-4xy+4yz+4x+6y+4z-27=0$;

д) $x^2+2y^2+2z^2-2xz+2xy+2x+y+z=0$;

е) $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0$.

22. Спростити рівняння параболічного циліндра $4x^2+y^2+9z^2+4xy-12xz-6yz+6x-2y-6z+2=0$.

Відповіді

1. а) $(x=\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z', y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{2}{\sqrt{6}}z', z=\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'-\frac{1}{\sqrt{2}}z')$, ${x'}^2+{y'}^2-\frac{{z'}^2}{3}=1$ – однопорожниний гіперболоїд;
б) $(x=-\frac{1}{\sqrt{6}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z', y=-\frac{2}{\sqrt{6}}x'-\frac{1}{\sqrt{3}}z', z=-\frac{1}{\sqrt{6}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z', x'=x'', y'=y''+\frac{1}{\sqrt{2}}, z'=z''+\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(y'')^2+3(z'')^2=\sqrt{6}x''$ – еліптичний параболоїд.

2. $(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=5$. 3. $M_1(0,-1,\frac{1}{2})$, $M_2(0,1,\frac{1}{2})$.

4. $r=\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$. **Вказівка.** Площини кругових перерізів визначаються рівняннями $y\pm 3z=c$. Вони паралельні осі Ox. Круговий переріз може дотикатися до горлового еліпса лише в тому випадку, коли він проходить через одну з його вершин, що лежить на осі Oy, тобто через точку $(0,2,0)$ або $(0,-2,0)$.

6. $A_1(2,0,0)$, $A_2(3,0,0)$, $B_1(0,-6,0)$, $B_2(0,1,0)$, $C_1(0,0,3)$, $C_2(0,0,-2)$.

7. а) $M_1(3,2,1)$ і $M_2(-4,-1,2)$; б) пряма лежить на поверхні; в) дотикається до поверхні в точці $M(-3,0,0)$.

8. $6x+5y+7z-4=0$, $\dfrac{x+4}{6}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-4}{7}$.

9. $2x+3y-5=0$ і $6x+9y+7=0$.

10. $M_1(3,-1,0)$, $M_2(0,2,1)$. 11. $x^2-4xz-8yz=0$.

12. Вісь Oz і пряма $\dfrac{x}{-16}=\dfrac{y}{24}=\dfrac{z}{9}$.

13. а) $6(x+1)^2-2(y+1)^2+6(-1)^2+4(x+1)(z-1)=0$; б) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-9)^2-6(x+1)(y-2)+2(x+1)(z-9)-2(y-2)(z-9)=0$.

14. $(x+y+9)^2=z^2$; розпадається на пару площин.

15. а) $(-\frac{14}{9},-\frac{2}{9},-\frac{4}{9})$; б) $x+2y-3=0$, $z=0$; в) $2x+4y-6z+1=0$; г) немає центра.

16. $x=y=z$, $x-2y+1=0$. 17. $x+3y-z-1=0$, $\dfrac{x+\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{y-\frac{2}{9}}{2}=\dfrac{z+\frac{2}{3}}{5}$.

18. а) $\overrightarrow{u}_1=\{0,0,1\}$, $\overrightarrow{u}_2=\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\}$, $\overrightarrow{u}_3=\{\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\}$; б) $\overrightarrow{u}_1=\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\}$, $\overrightarrow{u}_2=\{-\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{4}{5}\}$, $\overrightarrow{u}_3=\{\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$.

19. а) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{6}$, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$, $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$; б) $\dfrac{x-\frac{1}{6}}{-1}=\dfrac{y-\frac{1}{6}}{1}=\dfrac{z-\frac{1}{3}}{0}$, $\dfrac{x-\frac{1}{6}}{1}=\dfrac{y-\frac{1}{6}}{1}=\dfrac{z-\frac{1}{3}}{-1}$, $\dfrac{x-\frac{1}{6}}{1}=\dfrac{y-\frac{1}{6}}{1}=\dfrac{z-\frac{1}{3}}{2}$, $x-y=0$, $x+y-z=0$, $x+y+2z-1=0$.

20. а) $\dfrac{{x'}^2}{2}+{y'}^2+\dfrac{{z'}^2}{2}=0$; б) ${x'}^2+{y'}^2=3$.

21. а) $4{x'}^2+8{y'}^2-2{z'}^2=5$; б) ${x'}^2+{y'}^2-2{z'}^2=0$; в) $3{x'}^2+6{y'}^2-2{z'}^2+6=0$; г) $2{x'}^2+5{y'}^2+8{z'}^2-32=0$; д) $2{x'}^2+3{y'}^2=\sqrt{6}z'$; е) $x^2+2{y'}^2-2=0$.

22. ${y'}^2=\dfrac{\sqrt{5}}{7}x'$.

Зразки завдань підсумкової модульної контрольної роботи з аналітичної геометрії

Варіант 1

1. Через точку $P(-1, 3)$ провести пряму, паралельну прямій $4x - 2y + 3 = 0$.
2. Скласти рівняння дотичних, проведених через точку $M(0, -\frac{1}{4})$ до гіперболи $9x^2 - 2y^2 = 1$.
3. Вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ утворюють трикутник. Обчислити $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a})$.
4. Знайти відстань від точки $P(-1, 3, 5)$ від прямої
$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}.$$

Варіант 2

1. Знайти внутрішні кути трикутника ABC з вершинами $A(0, 0)$, $B(2, -1)$ і $C(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.
2. Знайти дотичну до параболи $y^2 = 2x$, перпендикулярну до прямої $4x + y - 23 = 0$.
3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a} = \{8, 4, 1\}$, $\overrightarrow{b} = \{2, -2, 1\}$.
4. Через точку $P(-1, 2, 3)$ провести пряму, паралельну прямій
$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 11 = 0, \\ x - y + 2z + 9 = 0. \end{cases}$$

Варіант 3

1. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи вершину $A(3,-4)$ та рівняння двох висот $7x-2y+1=0$ і $2x-7y-6=0$.
2. Через точку $M(2,4)$ провести дотичні до еліпса
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$
3. Встановити, чи компланарні вектори:
$$\overrightarrow{a}=\{2,1,3\},\quad \overrightarrow{b}=\{1,-3,2\},\quad \overrightarrow{c}=\{4,-5,7\}.$$
4. Знайти точку, симетричну точці $P(1,-2,-6)$ відносно прямої
$$\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-z+2=0. \end{cases}$$

Варіант 4

1. Через точку $M(5,-1)$ під кутом 45^0 до прямої $5x+2y-11=0$ проведена пряма. Знайти її рівняння.
2. Знайти осі симетрії кривої
$$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0.$$
3. Довести тотожність
$$[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}][\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}][\overrightarrow{c},\overrightarrow{a}]=(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c})^2.$$
4. Знайти відстань між прямими
$$\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}.$$

Варіант 5

1. Знайти точку, симетричну точці $P(8,-9)$ відносно прямої, що проходить через точку $A(3,-4)$ і $B(-1,-2)$.
2. Визначити форму, розміри та розміщення лінії другого порядку, заданої рівнянням

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 12 - 12y - 23 = 0.$$

3. Дано точки $A(3,1,2)$, $B(4,0,1)$ і $C(5,4,7)$. Обчислити площу трикутника ABC.
4. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = -3t + 2, \\ z = 2t - 3 \end{cases}$$

і точку $M(2,-2,1)$.

Розділ II. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 15. Матриці. Обернена матриця. Ранг матриці

Визначення 1. *Матрицею називається прямокутна таблиця чисел, яка містить m рядків і n стовпців. Числа m і n називаються порядком матриці. Якщо $m = n$, то матриця називається квадратною.*

Основні операції над матрицями

1. Сумою двох матриць A і B однакового порядку $m \times n$ називається матриця C такого самого порядку, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць A і B:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \equiv C.$$

2. Добутком матриці A на дійсне число λ називається матриця C, елементи якої дорівнюють добутку відповідних елементів матриці A, помножених на число λ:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \equiv C.$$

Очевидно, що добуток матриці на число має такі властивості:
а) $(\lambda \cdot \mu)A = \lambda(\mu A)$,
б) $\lambda(A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$,
в) $(\lambda + \mu)A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$.

3. Добутком матриці A порядку $m \times n$ і матриці B порядку $n \times k$ називається матриця C порядку $m \times k$, елементи якої визначаються за формулою $c_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pk}$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, k$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{p=1}^{n} a_{1p} b_{p1} & \sum\limits_{p=1}^{n} a_{1p} b_{p2} & \ldots & \sum\limits_{p=1}^{n} a_{1p} b_{pk} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{p=1}^{n} a_{mp} b_{p1} & \sum\limits_{p=1}^{n} a_{mp} b_{p2} & \ldots & \sum\limits_{p=1}^{n} a_{mp} b_{pk} \end{pmatrix}. \qquad (15.1)$$

З формули (15.1) випливають властивості добутку матриць:
а) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
б) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ або $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Нехай матриці A і B квадратні, порядку $n \times n$, тоді добуток $A \cdot B$ також квадратна матриця, і можна говорити про визначник матриці $\det(AB)$. Для довільних квадратних матриць правильна формула

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Визначення 2. *Матриця A^{-1} називається оберненою матрицею до матриці A, якщо виконується рівність $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A =$*

E, де E – одинична матриця вигляду

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначення 3. *Матриця* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$,
де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij}, називається оберненою до матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *і* $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}$.

Теорема 1. *Для того, щоб для матриці A існувала обернена матриця, необхідно та досить, щоб визначник матриці A не дорівнював нулю.*

Доведення. 1) Необхідність. Якщо для матриці A існує обернена матриця A^{-1}, то, використавши співвідношення $A^{-1}A = E$, одержимо:

$$\det A^{-1} \cdot \det A = \det E = 1.$$

Звідси випливає, що $\det A \neq 0$.

2) Достатність. Нехай визначник $\Delta = \det A \neq 0$. Утворимо матрицю B вигляду

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Оскільки сума добутків елементів одного рядка (або одного стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення другого рядка (або другого стовпця) дорівнює нулю, а сума добутків елементів і відповідних алгебраїчних доповнень одного рядка (одного стовпця) дорівнює величині визначника, то одержимо, що $BA = AB = E$. Отже, $B = A^{-1}$.

Нехай задана прямокутна матриця $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = B$. Виділимо з матриці B k довільних рядків і k довільних стовпців ($k \leq n$, $k \leq m$). Визначник k-го порядку, складений з елементів матриці B, розміщених на перетині виділених рядків і стовпців, називається мінором k-го порядку матриці B. Матриця B має $C_m^k C_n^k$ мінорів k-го порядку.

Визначення 4. *Рангом матриці B називаєтъся найбільший порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці. Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює нулю.*

Визначення 5. *Будь-який відмінний від нуля мінор матриці, порядок якого дорівнює рангу цієї матриці, називається базисним мінором матриці.*

Ранг матриці позначимо через $r(B)$. Якщо $r(A) = r(B)$, то матриці A і B називаються еквівалентними.

Зауважимо, що ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях. Під елементарними перетвореннями розуміють:

а) заміну рядків стовпцями, а стовпців відповідними рядками;

б) перестановку рядків матриці;

в) викреслювання рядка, всі елементи якого дорівнюють нулю;

г) множення довільного рядка на відмінне від нуля число;

д) додавання до елементів одного рядка відповідних елементів іншого рядка.

Визначення 6. *Рядки* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$*,* $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$*,* $\ldots$*,* $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *називаються лінійно залежними, якщо знайдуться такі числа* α*,* β*,* $\ldots$*,* γ*, не всі рівні нулю, що справедлива рівність*

$$\alpha a_j + \beta b_j + \cdots + \gamma c_j = 0, \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

або $\alpha A + \beta B + \cdots + \gamma C = 0$*.*

Теорема 2. *Для того, щоб рядки* A*,* B*,* $\ldots$*,* C *були лінійно залежними, необхідно та достатньо, щоб один із цих рядків був лінійною комбінацією інших.*

Доведення. Необхідність. Якщо A, B, $\ldots$, C – лінійно залежні, то існує набір чисел α, β, $\ldots$, γ, серед яких хоча б одне відмінне від нуля, наприклад β, що має місце рівність $\alpha A + \beta B + \cdots + \gamma C = 0$.

Розділивши дану рівність на β, одержимо $B = \mu A + \cdots + \lambda C$, де $\mu = -\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\ldots$, $\lambda = -\dfrac{\gamma}{\beta}$, а це означає, що рядок B є лінійною комбінацією рядків A, $\ldots$, C.

Достатність. Нехай один із рядків, наприклад A, є лінійною комбінацією інших рядків. Тоді існують такі числа μ, $\ldots$, λ, що має місце рівність $A = \mu B + \cdots + \lambda C$ або $(-1)A + \mu B + \cdots + \lambda C = 0$.

Оскільки серед чисел -1, μ, $\ldots$, λ одне точно відмінне від нуля, то рядки A, B, $\ldots$, C – лінійно залежні.

Теорема 3 (про базисний мінор). *Базисні рядки (базисні стовпці) лінійно незалежні. Будь-який рядок (будь-який стовпець) матриці* A *є лінійною комбінацією базисних рядків (базисних стовпців).*

Приклад 1. Знайти значення матричного многочлена $2A^2 + 3A + 5E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, E – одинична матриця третього порядку.

Розв'язування. Маємо

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 9 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$2A^2 = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 10 \\ 18 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{pmatrix}, \ 3A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \ 5E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

У результаті дістанемо

$$2A^2 + 3A + 5E = \begin{pmatrix} 28 & 15 & 26 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9, \\ x + 2y - 3z = 14, \\ 3x + 4y + z = 16, \end{cases}$$

зобразивши її у вигляді матричного рівняння.

Розв'язування. Перепишемо систему у вигляді $AX = B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$. Розв'язок матричного рівняння має вигляд $X = A^{-1}B$. Знайдемо обернену матрицю A^{-1}. Маємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 27 + 8 - 12 - 3 + 24 = -6.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів цього визначника $A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} =$

$-13,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10,\ A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1,$ $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$

Таким чином, запишемо

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 126+70-208 \\ -90-56+128 \\ -18+14+16 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

тобто розв'язок системи $x = 2$, $y = 3$, $z = -2$.

Приклад 3. Визначити ранг та базисні мінори матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Здійснимо елементарні перетворення над елементами матриці, дістанемо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r(A)=2$.

Базисними мінорами є мінори другого порядку цієї матриці, які відмінні від нуля, зокрема $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$. Отже, матриця A має 8 базисних мінорів.

Задачі для самостійної роботи

1. Розв'язати матричні рівняння:
   а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,
   в) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Обчислити ранг матриць:
   а) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$.
3. Довести, що будь-яку матрицю рангу r елементарними перетвореннями можна звести до вигляду, де елементи $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{rr} = 1$, а останні елементи дорівнюють нулю.
4. Довести, що елементарними перетвореннями тільки рядків або стовпців квадратну матрицю можна звести до трикутного вигляду, де всі елементи по один бік від головної діагоналі дорівнюватимуть нулю.
5. За допомогою елементарних перетворень обчислити ранг матриць:
   а) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 23 & 8 & -8 & 55 & -22 \\ 31 & 25 & 35 & 80 & -32 \\ -13 & 3 & 17 & -40 & 4 \\ 5 & 14 & 26 & 35 & -14 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 17 & 51 & 27 & 31 \\ 93 & 25 & 14 & 121 \\ 94 & 27 & 15 & 120 \\ 18 & 53 & 28 & 30 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 & 0 & -4 & 3 \\ 8 & -5 & 3 & 4 & 1 & -3 \\ 7 & -5 & 19 & 1 & -10 & 9 \\ 11 & 12 & -15 & 8 & 17 & -20 \end{pmatrix}$.

6. Додати матриці:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Помножити матрицю на число:

а) $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, б) $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Перемножити квадратні матриці:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & 7 & -4 & -1 \\ 4 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$,

е) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -1 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

є) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ж) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

з) $\begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

і) $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{pmatrix}$.

9. Обчислити степені квадратних матриць:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^3$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$, в) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n$, г) $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$,

д) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$, е) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$, є) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^n$.

10. Перемножити прямокутні матриці:

$$а)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ б)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$в)\ \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ г)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix},$$

$$д)\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Довести, що матриці A і B квадратні та одного порядку, якщо їхні добутки AB і BA визначені, а AB і BA – матриці одного порядку.
12. Як зміниться добуток AB матриць A та B, якщо:
    а) переставити i-ий та j-ий рядки матриці A;
    б) переставити i-ий та j-ий рядки матриці B?
13. Показати, що множення матриці A зліва на діагональну матрицю $B = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ зводиться до множення рядків матриці A відповідно на λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n, а множення справа – на аналогічну заміну стовпців.
14. Знайти обернені матриці для матриць:

$$а)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ б)\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},\ в)\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},\ г)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

д) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & 5 & -7 \end{pmatrix}$, є) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповіді

1. а) $\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} -8 & -14 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, в) безліч розв'язків.

2. а) 2, б) 3, в) 3. 5. а) 3, б) 2, в) 3, г) 3, д) 3, е) 4.

6. а) $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 7 & 7 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. а) $3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{pmatrix}$, б) $2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. 8. а) $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -5 \\ 33 & 1 & -10 \\ 23 & 6 & 3 \end{pmatrix}$,

б) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 16 & 16 & 16 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} -15 & -4 & -1 & 9 \\ -7 & -3 & 6 & 11 \\ 1 & 0 & 19 & 25 \\ -10 & -8 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, д) нуль-матриця, е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

є) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, ж) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 & 21 \\ 2 & 7 & 14 & 25 \\ 3 & 8 & 17 & 27 \\ 4 & 9 & 17 & 27 \end{pmatrix}$, з) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, і) $\begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3\beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4\beta_4 \end{pmatrix}$. 9. а) $\begin{pmatrix} 19 & 31 \\ 34 & 65 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$, г) $\lambda^{n-1}\begin{pmatrix} \lambda & n \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$,

е) $\lambda^{n-1}\begin{pmatrix} \lambda & n \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, є) $\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n^n \end{pmatrix}$.

10. а) 35, б) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 25 & 20 & 15 & 10 & 5 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 10 & -10 \\ 8 & -8 \\ 13 & -13 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 16 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

12. а) i-ий та j-ий рядок добутку AB поміняються місцями;
б) i-ий та j-ий стовпець добутку AB поміняються місцями.

14. а) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} -\frac{23}{3} & -\frac{34}{3} & \frac{16}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$,

є) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Тема 16. Поле. Лінійний простір. Гільбертовий простір

Нехай задана деяка множина M і відображення $M \times M \to M$ декартового добутку в множину M. Наприклад, у множині всіх чисел, сума двох чисел і добуток є таким відображенням. Кожній парі чисел (a, b) ставиться у відповідність сума чисел $a + b$, або добуток $a \cdot b$. Будь-яке таке відображення називається бінарною операцією.

Визначення 1. *Множина G елементів називається адитивною групою, якщо в ній задана бінарна операція $G \times G \to G$, яка записується як "+", та називається сумою і при цьому виконуються такі аксіоми:*

A0. Кожній упорядкованій парі елементів $(a, b) \in G$ однозначно підпорядкований елемент $c \in G$ такий, що $c = a + b$.

A1. $(a + b) + c = a + (b + c)\ \forall a, b, c \in G$.

A2. $\exists 0 \in G$, що $a + 0 = a\ \forall a \in G$.

A3. Кожному елементу $a \in G$ відповідає один елемент (позначимо його через $-a$), що задовольняє рівність $a + (-a) = 0$.

Група називається *комутативною (адитивною)*, якщо, крім аксіом A0 – A3, виконується ще й така:

A4. $a + b = b + a\ \forall a, b \in G$.

Визначення 2. *Множина елементів M називається мультиплікативною групою, якщо задана бінарна операція $M \times M \to M$, яка зветься множенням і позначається "$\cdot$", при цьому виконуються такі аксіоми:*

M1. Кожній упорядкованій парі елементів $a, b \in M$ однозначно підпорядкований елемент $c \in M$ такий, що $c = a \cdot b$.

M2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ \forall a, b, c \in M$.

M3. $\exists 1 \in M$, що $1 \cdot a = a\ \forall a \in M$.

M4. Кожному елементу $a \in M$ відповідає один елемент x, що $x \cdot a = 1$.

Група називається *комутативною (мультиплікативною)*, якщо виконується така аксіома:

М5. $a \cdot b = b \cdot a \ \forall a, b \in M$.

Прикладом мультиплікативної групи може служити множення всіх дійсних додатних чисел зі звичайною операцією множення.

1. Поняття поля. Полем називається множина F, в якій задані бінарні операції додавання й множення, виконуються аксіоми А0 – А.4 і М.1 – М.5, причому аксіома М.4 виконується для всіх елементів $a \in F$, крім $a = 0$ (0 – нейтральний елемент адитивної групи). Крім того, виконуються ще такі аксіоми дистрибутивності, які вказують на зв'язок двох бінарних операцій:

Д.1 $(a + b)c = ac + bc \ \forall a, b, c \in F$.

Д.2 $c(a + b) = ca + cb \ \forall a, b, c \in F$.

Поле називається *комутативним*, якщо

$$ab = ba \quad \forall a, b \in F.$$

Зрозуміло, що для комутативних полів аксіома Д.2 виконується автоматично.

Множина E дійсних чисел є комутативним полем відносно операцій додавання й множення.

Множина E^2, як ми показали, є також комутативним полем відносно таких операцій:

$$p_1 + p_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

$$p_1 p_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 x_2 + y_1 y_2);$$

$$p_1 = (x_1, y_1), \quad p_2 = (x_2, y_2).$$

Виникає дуже цікаве запитання: чи можна і на множині E^n $(n > 2)$ так ввести операцію множення, щоб ця множина була полем? Позитивну відповідь на це запитання незалежно один від одного дали в 1840 році німецький математик Г. Гросман (1809

– 1877) та англійський математик У. Р. Гамільтон (1805 – 1865). Вони показали, що при $n = 4$ це можна зробити, і упорядковані четвірки чисел були названі квазітерніонами.

Однак, поле квазітерніонів не є комутативним.

2. Поле комплексних чисел. Розглянемо докладніше множину упорядкованих пар чисел $z = (x, y)$ і будемо записувати її у вигляді

$$z = x + iy,$$

де i – деякий символ, який вказує на ту обставину, що y – друга проекція пари.

Якщо формально перемножити z_1 і z_2, то одержимо:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i^2 y_1 y^2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Цей вираз буде збігатися з законом множення пар, якщо формально вважати $i^2 = -1$. Величина $i = \sqrt{-1}$ називається уявною одиницею. Уявні одиниці довго мали містичне забарвлення, і великий німецький математик Г. В. Лейбніц (1646 – 1716) у 1702 році писав: ”Уявні числа – це прекрасне і чудове сховище божественного духу, майже комбінація буття з небуттям”.

Першу проекцію пари z: $\mathrm{p}r_1 z = x$ будемо називати *дійсною частиною* z, а другу проекцію пари $\mathrm{p}r_2 z = y$ будемо називати *уявною частиною* z, а саме число z – *комплексним числом.*

Для дійсної та уявної частин у теорії комплексних чисел прийнято таке позначення:

$$x = \Re e z, \quad y = \Im m z.$$

Треба зразу ж зазначити, що можна було б зовсім обійтися без символу i, але часто буває нерзручно, особливо, коли мова йде про добуток великої кількості упорядкованих пар.

Число

$$\overline{z} \stackrel{\mathrm{def}}{=} x - iy$$

називається комплексним числом, спряженим до числа z, а $\sqrt{z\overline{z}}$ – модулем комплексного числа, який виражається так:

$$|z| = \sqrt{\overline{z}\,z} = \sqrt{x^2 - iy^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0.$$

Інтерпретація комплексних чисел на площині така, як і упорядкованих пар – це точки на площині або зв'язані вектори. Тільки вісь Ox називається дійсною віссю, а Oy – уявною (Рис. 1).

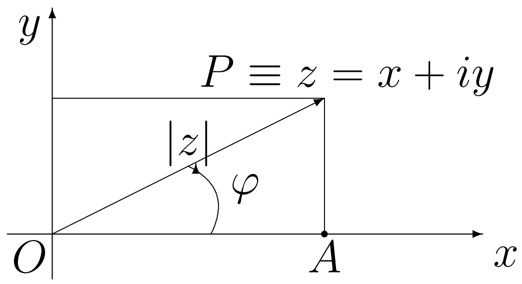


Рис. 1.

За теоремою Піфагора, довжина відрізка OP дорівнює числу $\sqrt{x^2 + y^2}$, тому модуль комплексного числа – це відстань точки P від початку координат. Сума двох комплексних чисел зображається діагоналлю паралелограма, побудованого на напрямлених відрізках, які відповідають комплексним числам.

Дійсними числами є числа з уявною частиною, що дорівнює нулю: $y = 0$. Ці пари $(x, 0)$ позначаються через x.

Аргументом відмінного від нуля комплексного числа z називається кут φ між додатним напрямком осі Ox і вектором $\overrightarrow{OP}$. Із $\triangle OPA$ маємо

$$x = OA = OP\cos\varphi = |z|\cos\varphi,$$

$$y = AP = OP\sin\varphi = |z|\sin\varphi.$$

У термінах $|z|$ і φ число z можна записати

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ця форма запису називається тригонометричною, і вона дуже зручна при розгляді добутку чисел.

Дійсно, нехай

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тоді

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 +$$
$$+ i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)],$$

Користуючись формулами

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2,$$

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1,$$

знаходимо

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Таким чином, при множенні комплексних чисел їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються. Це правило розповсюджується на будь-яку кількість співмножників. У частинному випадку,

$$z^n = |z|^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Звідси випливає формула

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

яка називається формулою Муавра (англійський математик, 1667 – 1754).

Якщо обернути формулу Муавра, то одержимо формулу для знаходження кореня n-го степеня з комплексного числа.

Коренем n-го степеня з комплексного числа називається таке комплексне число, n-ий степінь якого дорівнює підкореневому виразу. Таким чином, рівність

$$\sqrt[n]{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

рівносильна рівності

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z|(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Але у рівних комплексних чисел модулі повинні бути рівними, а аргументи можуть відрізнятися лише на кут, що кратний 2π, тобто

$$\rho^n = |z|, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},$$

звідки

$$\rho = \sqrt[n]{|z|}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

При інших k, відмінних від $0, 1, 2, \ldots, n-1$, значення кореня будуть повторюватися, бо в ψ можна не враховувати період 2π. Отже, корінь n-го степеня з комплексного числа має n різних значень.

3. Лінійний (векторний) простір над полем

Визначення. *Адитивна група G називається лінійним простором V над полем F, якщо задано відображення $F \times G \to G$, яке упорядкованій парі $(\lambda, \overrightarrow{x})$, $\lambda \in F$, $\overrightarrow{x} \in G$ ставить у відповідність елемент $\overrightarrow{y} \in G$, і при цьому виконуються такі аксіоми:*

Л1. $(\lambda\mu)\overrightarrow{x} = \lambda(\mu\overrightarrow{x})\ \forall\lambda, \mu \in F, \forall\overrightarrow{x} \in G$.

Л2. $1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}\ \forall\overrightarrow{x} \in G$.

Л3. $(\lambda + \mu)\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x} + \mu\overrightarrow{x}\ \forall\lambda, \mu \in F, \forall\overrightarrow{x} \in G$.

Л4. $\lambda(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y}\ \forall\lambda \in F, \forall\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in G$.

Елементи λ поля F називаються скалярами, а елементи $\overrightarrow{x}$ адитивної групи G називаються векторами.

Для будь-якого елемента $\overrightarrow{x} \in V$ маємо $0 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Дійсно,

$$0 \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x} = 0 \cdot \overrightarrow{x} + 1 \cdot \overrightarrow{x} = (0+1)\overrightarrow{x} = 1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}.$$

Звідси випливає, що $0 \cdot \overrightarrow{x}$ – нейтральний елемент групи G, тобто $0 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Приклад 1. Розглянемо множину E^2 упорядкованих пар дійсних чисел і визначимо множення на скаляр $\lambda \in F$ пари $\overrightarrow{p} = (x, y)$ так:

$$\lambda \overrightarrow{p} \overset{\text{def}}{=} (\lambda x, \lambda y)$$

і перевіримо справедливість аксіом Л1 – Л4.

Розв'язування.

Л1. $(\lambda\mu)\overrightarrow{p} = ((\lambda\mu)x, (\lambda\mu)y) = (\lambda(\mu x), \lambda(\mu y)) = \lambda(\mu x, \mu y) = \lambda(\mu\overrightarrow{p})$.

Л2. $1 \cdot \overrightarrow{p} = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y) = \overrightarrow{p}$.

Л3. $(\lambda + \mu)\overrightarrow{p} = ((\lambda + \mu)x, (\lambda + \mu)y) = (\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y) = (\lambda x, \lambda y) + (\mu x, \mu y) = \lambda\overrightarrow{p} + \mu\overrightarrow{p}$.

Л4. $\lambda(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{p}_1) = \lambda(x + x_1, y + y_1) = (\lambda(x + x_1), \lambda(y + y_1)) = (\lambda x + \lambda x_1, \lambda y + \lambda y_1) = (\lambda x, \lambda y) + (\lambda x_1, \lambda y_1) = \lambda\overrightarrow{p} + \lambda\overrightarrow{p}_1$.

Таким чином, множина упорядкованих пар чисел з так позначеною операцією множення на число $\lambda \in E$ є лінійним простором над полем дійсних чисел E.

Приклад 2. Нехай C – множина комплексних чисел, а C^n – множина упорядкованих комплексів з n комплексних чисел

$$\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n), \;\; z_k \in C, z_k = x_k + iy_k, x_k, y_k \in E.$$

Нехай $\lambda \in C$ і

$$\lambda\overrightarrow{z} \overset{\text{def}}{=} (\lambda z_1, \lambda z_2, \ldots, \lambda z_n).$$

Розв'язування. Як і в попередньому випадку, легко переконатися, що аксіоми Л1 – Л4 виконуються. Сума $\overrightarrow{z} + \overrightarrow{u}$ визначається так:

$$\overrightarrow{z} + \overrightarrow{u} \overset{\text{def}}{=} (z_1 + u_1, z_2 + u_2, \ldots, z_n + u_n),$$

а нейтральний елемент

$$\overrightarrow{0} \overset{\text{def}}{=} (0, 0, \ldots, 0).$$

Таким чином, множина C^n упорядкованих комплексів з n комплексних чисел з операцією

$$\lambda \overrightarrow{z} \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda z_1, \lambda z_2, \ldots, \lambda z_n)$$

є лінійним простором над полем комплексних чисел C.

4. Лінійна залежність векторів. Лінійна оболонка. Базис та вимірність простору. Нехай V – лінійний простір над полем F.

Визначення 1. *Множина векторів* $\overrightarrow{e}_1,\ \overrightarrow{e}_2,\ \ldots,\ \overrightarrow{e}_n \in V$ *називається лінійно залежною, якщо існують такі* $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,$ λ_n*, які не всі одночасно дорівнюють нейтральному елементу* 0 *поля* F*, що виконується рівність*

$$\lambda_1 \overrightarrow{e}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{e}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{e}_n = \overrightarrow{0}.$$

У протилежному випадку вектори називаються *лінійно незалежними.* Таким чином, для лінійно незалежних векторів

$$(\lambda_1 \overrightarrow{e}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{e}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{e}_n = \overrightarrow{0}) \Leftrightarrow (\lambda_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Якщо в системі векторів є хоча б один вектор $\overrightarrow{0}$, то така система завжди лінійно залежна. Дійсно, нехай $\overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{0}$.

Тоді для будь-якого $\lambda_1 \neq 0$

$$\lambda_1 \overrightarrow{0} + 0 \cdot \overrightarrow{e}_2 + \cdots + 0 \cdot \overrightarrow{e}_n = \overrightarrow{0}$$

і система лінійно залежна.

Розглянемо, наприклад, на відрізку $[a, b]$ множину функцій $f(x)$:

$$f : [a, b] \to E.$$

Якщо визначити суму $f + g$ як

$$(f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$$

і
$$(\lambda f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f(x), \quad \lambda \in E, x \in [a,b],$$
то всі аксіоми лінійного простору будуть виконуватися. Розглянемо функції $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = 1$.

Вони лінійно залежні, бо
$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0 \quad (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1).$$

Визначення 2. *Вектор $\overrightarrow{x} \in V$, за визначенням, є лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, ..., $\overrightarrow{e}_n \in V$, якщо існують такі λ_1, λ_2, ..., $\lambda_n \in F$, що*
$$\overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{e}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{e}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{e}_n.$$
Це скорочено можна записати, застосовуючи знак суми Σ, так:
$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{e}_i.$$

Визначення 3. *Лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, ..., $\overrightarrow{e}_n$ називається множина всіх лінійних комбінацій вигляду*
$$\lambda_1 \overrightarrow{e}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{e}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{e}_n, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F.$$

Лінійна оболонка сама є лінійним простором, який часто позначається $[\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n]$.

Визначення 4. *Максимальна кількість лінійно незалежних векторів лінійного простору V називається його вимірністю, а самі ці вектори називаються базисом лінійного простору V. Якщо базис складається зі скінченної кількості векторів, то простір називається скінченновимірним, а в протилежному випадку – нескінченновимірним.*

Теорема. *Нехай V – скінченновимірний і нехай n – його вимірність, а $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, ..., $\overrightarrow{e}_n \in V$ – його базис. Тоді $\overrightarrow{x} \in V$ є лінійною комбінацією базисних векторів.*

Доведення. Розглянемо вектори $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, ..., $\overrightarrow{e}_n$. Кількість цих векторів $(n+1)$, отже, вони лінійно залежні, а тому існують такі α_0, α_1, ..., $\alpha_n \in F$, які не всі одночасно дорівнюють нейтральному елементу 0 поля F, що виконується рівність

$$\alpha_0 \overrightarrow{x} + \alpha_1 \overrightarrow{e}_1 + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{e}_n = \overrightarrow{0}. \tag{16.1}$$

Покажемо, що $\alpha_0 \neq 0$. Припустимо протилежне, тобто що $\alpha_0 = 0$. Тоді

$$\alpha_1 \overrightarrow{e}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{e}_2 + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{e}_n = \overrightarrow{0},$$

і серед скалярів α_i є хоча б один, відмінний від нейтрального елемента 0. Але це суперечить лінійній незалежності базисних векторів.

Помноживши ліворуч рівність (16.1) на α_0^{-1} та скориставшись аксіомою 5 ($1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$), отримаємо:

$$\overrightarrow{x} = (-\alpha_0^{-1}\alpha_1)\overrightarrow{e}_1 + (-\alpha_0^{-1}\alpha_2)\overrightarrow{e}_2 + \cdots + (-\alpha_0^{-1}\alpha_n)\overrightarrow{e}_n.$$

Позначивши $(-\alpha_0^{-1}\alpha_i)$ через λ_i, знаходимо:

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{e}_i.$$

Теорема доведена.

Скаляри λ_i називаються координатами вектора $\overrightarrow{x}$ в базисі $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, ..., $\overrightarrow{e}_n$.

Розглянемо, наприклад, множину C^n упорядкованих комплексів з n комплексних чисел $\overrightarrow{x} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, де $z_i \in C$. Вектори

$$\overrightarrow{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \overrightarrow{e}_1 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \overrightarrow{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

лінійно незалежні в C^n. Дійсно, рівність

$$\lambda_1 \overrightarrow{e}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{e}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{e}_n = \overrightarrow{0}$$

рівносильна такій:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0).$$

Далі, для вектора $\overrightarrow{z}$ має місце формула

$$\overrightarrow{z} = (z_1, 0, \dots, 0) + (0, z_2, \dots, 0) + (0, 0, \dots, z_n).$$

Таким чином,

$$\overrightarrow{z} = z_1(1, 0, \dots, 0) + z_2(0, 1, \dots, 0) + z_n(0, 0, \dots, 1)$$

або

$$\overrightarrow{z} = z_1 \overrightarrow{e}_1 + z_2 \overrightarrow{e}_2 + \dots + z_n \overrightarrow{e}_n.$$

Ми показали, що n векторів $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\dots$, $\overrightarrow{e}_n$ в C^n лінійно незалежні, а будь-який вектор $\overrightarrow{z}$ є лінійною комбінацією цих векторів. Отже, вимірність простору C^n дорівнює n, а $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\dots$, $\overrightarrow{e}_n$ – базис цього простору. Цей базис називається канонічним. У випадку C^2 він позначається так:

$$\overrightarrow{i} = (1, 0), \quad \overrightarrow{j} = (0, 1).$$

а у випадку C^3 відповідно

$$\overrightarrow{i} = (1, 0, 0), \quad \overrightarrow{j} = (0, 1, 0), \quad \overrightarrow{k} = (0, 0, 1).$$

5. Гільбертові простори. Приклади. В подальшому вважатимемо, що поле F є множиною всіх дійсних або комплексних чисел.

Визначення. *Лінійний простір H називається гільбертовим, якщо будь-яким елементам $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y} \in H$ поставлено у відповідність деяке комплексне число, яке називається скалярним добутком, позначається $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ або $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$ і при цьому виконуються такі аксіоми:*

H1. $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \overline{(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})}\ \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in H.$

H2. $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}) + (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})\ \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in H.$
H3. $(\lambda \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\ \forall \lambda \in F, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in H.$
H4. $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) \geq 0\ \forall \overrightarrow{x} \in H.$

$$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}).$$

$\sqrt{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})}$ *називається нормою або довжиною вектора й позначається так:*

$$\|\overrightarrow{x}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})}.$$

З аксіом H1 і H3 випливає, що

$$(\overrightarrow{x}, \lambda \overrightarrow{y}) = \lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}).$$

Дійсно

$$(\overrightarrow{x}, \lambda \overrightarrow{y}) = \overline{(\lambda \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})} = \overline{\lambda(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})} = \overline{\lambda}\overline{(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})} = \overline{\lambda}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}),$$

бо операція спряження має властивість

$$\overline{\lambda \cdot \mu} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\mu} \quad \forall \lambda, \mu \in C.$$

Наприклад, у лінійному просторі C^n двом векторам

$$\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad \overrightarrow{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

поставимо у відповідність комплексне число

$$(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} z_k u_k$$

і перевіримо справедливість аксіом

H1: $(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{u}) = \sum_{k=1}^{n} z_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{u_k z_k} = \overline{\sum_{k=1}^{n} u_k z_k} = \overline{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{z})},$

оскільки для будь-яких комплексних чисел a, $b \in C$ маємо

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}, \quad \overline{\overline{a}} = a.$$

$$H4: \quad (\overrightarrow{z}, \overrightarrow{z}) = \sum_{k=1}^{n} z_k z_k = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \geq 0,$$

і дорівнює нулю, коли всі $z_k = 0$.

Те, що виконуються аксіоми H2 і H3, очевидно.

Тепер розглянемо множину неперервних функцій на відрізку $[a, b]$ й поле $F = E$ – множину дійсних чисел. Нехай для двох функцій $f(x)$ і $g(x)$

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Легко перевірити, що простір із таким скалярним добутком гільбертів. Це дійсний гільбертів простір: тут скалярний добуток $(f, g) \in E$.

6. Нерівності Шварца і Мінковського. Кут між векторами в гільбертовому просторі

Теорема 1. *Для будь-яких векторів $\overrightarrow{x}$ і $\overrightarrow{y}$ з гільбертового простору H має місце нерівність*

$$|(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})| \leq \|\overrightarrow{x}\| \cdot \|\overrightarrow{y}\|,$$

яка називається нерівністю Шварца.

Доведення. Візьмемо будь-яке дійсне число λ і розглянемо вектор

$$\overrightarrow{x} + \lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\overrightarrow{y} \in H \quad \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in H.$$

Нехай

$$f(\lambda) = (\overrightarrow{x} + \lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} + \lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\overrightarrow{y}).$$

За аксіомою H4 $f(\lambda) \geq 0$ при будь-яких $\lambda \in E$.

Згідно з аксіомою H2, маємо:

$$f(\lambda) = (\overrightarrow{x} + \lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} + \lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\overrightarrow{y}) =$$

$$= (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) + (\overrightarrow{x}, \lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\overrightarrow{y}) + (\lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}) +$$
$$+ (\lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\overrightarrow{y}, \lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\overrightarrow{y}).$$

Використовуючи H1 і H3, одержимо:

$$f(\lambda) = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) + \overline{\lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) + \lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}) +$$
$$+ \lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\overline{\lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})}(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y}) \geq 0,$$

і далі

$$f(\lambda) = \|\overrightarrow{x}\|^2 + 2\lambda|(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})|^2 + \lambda^2|(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})|^2\|\overrightarrow{y}\|^2 \geq 0 \quad \forall \lambda \in E.$$

Таким чином, квадратний тричлен $f(\lambda)$ невід'ємний при всіх $\lambda \in E$. Отже, його дискримінант недодатний:

$$4|(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})|^4 - 4|(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})|^2\|\overrightarrow{x}\|^2\|\overrightarrow{y}\|^2 \leq 0.$$

Якщо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0$, то нерівність Шварца справджується, бо $\|\overrightarrow{x}\| \cdot \|\overrightarrow{y}\| \geq 0$. Тому припустимо, що $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \neq 0$, і, скорочуючи нерівність на додатне число $|(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})|^2$, знаходимо:

$$|(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})|^2 \leq \|\overrightarrow{x}\|^2\|\overrightarrow{y}\|^2.$$

Добуваючи квадратний корінь з обох частин останньої нерівності та враховуючи, що $|(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})| > 0$, $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0$ і $\|\overrightarrow{y}\| \geq 0$, приходимо до нерівності Шварца.

Кут $(\widehat{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}})$ між векторами $\overrightarrow{x}$ і $\overrightarrow{y}$ ($\overrightarrow{x} \neq 0$, $\overrightarrow{y} \neq 0$) у дійсному гільбертовому просторі визначається за формулою

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})}{\|\overrightarrow{x}\| \cdot \|\overrightarrow{y}\|}.$$

Це означення коректне, оскільки модуль чисельника не більший, ніж знаменник, і $|\cos(\widehat{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}})| \leq 1$.

Теорема 2. *Для будь-яких $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y} \in H$ справедлива нерівність*

$$\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|,$$

яка називається нерівністю трикутника, або нерівністю Мінковського.

Доведення. Дійсно,

$$\|\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\|^2=(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y},\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})=\|\overrightarrow{x}\|^2+(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})+\overline{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})}+\|\overrightarrow{y}\|^2.$$

Згідно з нерівністю Шварца,

$$|(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})|=|\overline{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})}|\leq\|\overrightarrow{x}\|\cdot\|\overrightarrow{x}\|.$$

Таким чином,

$$\|\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\|^2\leq\|\overrightarrow{x}\|^2+2\|\overrightarrow{x}\|\cdot\|\overrightarrow{y}\|+\|\overrightarrow{y}\|^2=(\|\overrightarrow{x}\|+\|\overrightarrow{y}\|)^2.$$

Звідси

$$\|\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\|\leq\|\overrightarrow{x}\|+\|\overrightarrow{y}\|.$$

7. Ортонормований базис у гільбертовому просторі та розклад вектора за базисом

Визначення 1. *Вектори $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}\in H$ називаються ортогональними, якщо скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю.*

У цьому випадку $\cos(\widehat{\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}})=0$, якщо жодний із векторів не є нейтральним елементом: $\|\overrightarrow{x}\|\neq 0$, $\|\overrightarrow{y}\|\neq 0$.

Визначення 2. *У скінченновимірному гільбертовому просторі вимірності n базис $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, ..., $\overrightarrow{e}_n$ називається ортонормованим, якщо вектори базису взаємно ортогональні й мають одиничну норму, тобто*

$$(\overrightarrow{e}_i,\overrightarrow{e}_j)=\begin{cases}0, & \text{якщо } i\neq j \ \ \forall i,j=1,2,\ldots,n,\\ 1, & \text{якщо} i=j.\end{cases}$$

Нехай тепер $\overrightarrow{x}$ – будь-який вектор із гільбертового простору H, а $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, ..., $\overrightarrow{e}_n$ – ортонормований базис в H. Тоді вектор $\overrightarrow{x}$ розкладається за цим базисом

$$\overrightarrow{x}=\lambda_1\overrightarrow{e}_1+\lambda_2\overrightarrow{e}_2+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{e}_n.$$

Як же знайти координати вектора в цьому базисі? Для знаходження цих координат треба вектор $\overrightarrow{x}$ послідовно помножити на $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, …, $\overrightarrow{e}_n$. Матимемо

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}_1) &= \lambda_1(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_1) + \lambda_2(\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_1) + \dots + \lambda_n(\overrightarrow{e}_n, \overrightarrow{e}_1),\\
(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}_2) &= \lambda_1(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2) + \lambda_2(\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_2) + \dots + \lambda_n(\overrightarrow{e}_n, \overrightarrow{e}_2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (16.2)\\
(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}_n) &= \lambda_1(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_n) + \lambda_2(\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_n) + \dots + \lambda_n(\overrightarrow{e}_n, \overrightarrow{e}_n).
\end{aligned}$$

Враховуючи, що базис ортонормований, знаходимо:

$$\lambda_1 = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}_1), \quad \lambda_2 = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}_2), \quad \dots, \quad \lambda_n = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}_n).$$

Таким чином,

$$\overrightarrow{x} = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}_1)\overrightarrow{e}_1 + (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}_2)\overrightarrow{e}_2 + \dots + (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}_n)\overrightarrow{e}_n,$$

або, у скороченому вигляді,

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}_i)\overrightarrow{e}_i. \qquad (16.3)$$

Ми бачимо, що ортонормований базис найзручніший для розкладу вектора. Якщо базис не був би ортонормованим, то співвідношення (16.2) привели б до системи n рівнянь відносно невідомих λ_1, λ_2, …, λ_n.

У тому випадку, коли базис $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, …, $\overrightarrow{e}_n$ ортогональний, із формул (16.2) знаходимо

$$\lambda_i = \frac{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}_i)}{(\overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_i)}.$$

Наприклад, нехай на відрізку $[-\pi, \pi]$ задані 2π-періодичні функції зі звичайними операціями додавання й множення на дійсне число. Скалярний добуток двох функцій $f(x)$ і $g(x)$ визначаємо так:

$$(f,g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

8. Підпростори. Підпростори, утворені розв'язками однорідної системи рівнянь. Лінійний простір R називається *підпростором лінійного простору* V, якщо елементами простору R є тільки елементи простору V.

Наприклад, множина всіх векторів, паралельних одній площині, є підпростором усіх геометричних векторів простору.

Якщо $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$, $\ldots$, $\overrightarrow{u}$ – деякі вектори лінійного простору V, то всі вектори $\alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y} + \cdots + \lambda\overrightarrow{u}$, де α, β, $\ldots$, λ – дійсні числа, утворюють підпростір простору V. Множина всіх лінійних комбінацій векторів $\alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y} + \cdots + \lambda\overrightarrow{u}$ називається *лінійною оболонкою векторів* $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$, $\ldots$, $\overrightarrow{u}$.

Якщо R_1 – підпростір лінійного простору V, то виконується нерівність для їхніх розмірностей $d(R_1) \leq d(V)$.

Нехай у лінійному просторі V є два підпростори R_1 та R_2. *Перетином* підпросторів R_1 та R_2 називається множина R_3 всіх елементів, які належать одночасно R_1 і R_2. Він позначається $R_3 = R_1 \bigcap R_2$.

Сумою підпросторів R_1 та R_2 називається множина R_4 всіх елементів вигляду $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$, де $\overrightarrow{x} \in R_1$, $\overrightarrow{y} \in R_2$, $R_4 = R_1 + R_2$.

Потрібно пам'ятати, що $d(R_1) + d(R_2) = d(R_3) + d(R_4)$.

Розглянемо лінійну однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{16.4}$$

Нехай $x_i = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$, – довільний розв'язок системи. Запишемо його у вигляді $f = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Сукупність лінійно незалежних розв'язків $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \ldots, \overrightarrow{f}_n$ системи рівнянь (16.4) називається *фундаментальною системою розв'язків (ФСР)*, якщо довільний розв'язок цієї системи можна зобразити у вигляді лінійної комбінації векторів $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \ldots, \overrightarrow{f}_n$.

Розглянемо матрицю системи (16.4)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо її ранг менший за n, то система (16.4) має ненульові розв'язки. Кількість векторів, що визначають ФСР, дорівнює $n - r = k$, де r – ранг матриці A.

Якщо розглянемо лінійний простір R^n, векторами якого є можливі системі n дійсних чисел, то сукупність усіх розв'язків системи (16.4) є підпростором простору R^n. Його розмірність дорівнює k.

Приклад 1. Знайти базис і розмірність підпростору розв'язків лінійної однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 = 0, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0, \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Ранг матриці даної системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3/2 & 2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 4/3 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

дорівнює 1, оскільки всі мінори, крім мінорів першого порядку, дорівнюють нулю.

Система має 4 невідомих, тому розмірність підпростору розв'язків $k = n - r = 4 - 1 = 3$.

Оскільки $r = 1$, то достатньо розглянути одне довільне рівняння системи. Для визначеності візьмемо перше й запишемо його $x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4$. Якщо покладемо довільні значення $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то знайдемо, що $x_1 = -2$. При інших значеннях $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ знайдемо, що $x_1 = -4$, при $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ маємо $x_1 = -3$. Отже, дістали лінійно незалежні вектори $\overrightarrow{f}_1 = (-2, 1, 0, 0)$, $\overrightarrow{f}_2 = (-3, 0, 1, 0)$, $\overrightarrow{f}_3 = (-4, 0, 0, 1)$. Вони утворюють базис тривимірного підпростору розв'язків даної системи.

Приклад 2. Знайти базис, розмірність підпростору розв'язків та загальний розв'язок лінійної однорідної системи рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Визначимо ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Віднімаючи від третього рядка другий, а від четвертого перший, дістанемо:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки елементи 3-го рядка пропорційні відповідним елементам першого рядка, а елементи четвертого рядка пропорційні елементами другого, то третій і четвертий рядок можна викреслити, отже, $A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Таким чином, ранг матриці A дорівнює 2, а $k = n - r = 4 - 2 = 2$. Тому розмірність підпростору розв'язків дорівнює 2. Оскільки $r = 2$, то з системи візьмемо два рівняння

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - x_4, \\ x_1 - x_2 = -x_3 + x_4. \end{cases}$$

Покладемо $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, знайдемо $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ і $\overrightarrow{f}_1 = (0, 1, 1, 0)$. Тепер покладемо $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, знайдемо $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ і $\overrightarrow{f}_2 = (0, -1, 0, 1)$. Загальний розв'язок системи визначається вектором $\overrightarrow{f} = c_1\overrightarrow{f}_1 + c_2\overrightarrow{f}_2 = (0, c_1 - c_2, c_1, c_2)$.

Приклад 3. Нехай задана множина можливих дійсних чисел $(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$, $(\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n)$, $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, $\ldots$. Сума двох довільних елементів визначається рівністю

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) + (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n),$$

а добуток довільного елемента на будь-яке число – рівністю

$$\lambda(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n) = (\lambda\xi_1; \lambda\xi_2; \ldots; \lambda\xi_n).$$

Довести, що ця множина є лінійним простором.

Розв'язування. Позначимо

$$\overrightarrow{x} = (\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n), \quad \overrightarrow{y} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), \quad \overrightarrow{z} = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n).$$

Перевіримо виконання аксіом А1 – А4 та Л1 – Л4.

А4:

$$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n),$$
$$\overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} = (\eta_1 + \xi_1, \eta_2 + \xi_2, \ldots, \eta_n + \xi_n),$$

тобто $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{y}+\overrightarrow{x}$.

А1:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}&=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\ldots,\xi_n+\eta_n),\\ \overrightarrow{y}+\overrightarrow{z}&=(\eta_1+\tau_1,\eta_2+\tau_2,\ldots,\eta_n+\tau_n),\\ (\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})+\overrightarrow{z}&=(\xi_1+\eta_1+\tau_1,\xi_2+\eta_2+\tau_2,\ldots,\xi_n+\eta_n+\tau_n),\\ \overrightarrow{x}+(\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z})&=(\xi_1+\eta_1+\tau_1,\xi_2+\eta_2+\tau_2,\ldots,\xi_n+\eta_n+\tau_n).\end{aligned}$$

Отже, $(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})+\overrightarrow{z}=\overrightarrow{x}+(\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z})$.

А2: Нульовим елементом є $\overrightarrow{0}=(0,0,\ldots,0)$:

$$\overrightarrow{x}+\overrightarrow{0}=(\xi_1+0,\xi_2+0,\ldots,\xi_n+0)=\overrightarrow{x}.$$

А3: Елемент $(-\xi_1,-\xi_2,\ldots,-\xi_n)$ є протилежним елементу $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$. Оскільки $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)+(-\xi_1,-\xi_2,\ldots,-\xi_n)=(0,0,\ldots,0)=\overrightarrow{x}$.

Л2: $1\cdot\overrightarrow{x}=(1\cdot\xi_1;1\cdot\xi_2;\ldots;1\cdot\xi_n)=\overrightarrow{x}$.

Л1:

$$\lambda(\mu\overrightarrow{x})=\lambda(\mu\xi_1;\mu\xi_2;\ldots;\mu\xi_n)=(\lambda\mu\xi_1;\lambda\mu\xi_2;\ldots;\lambda\mu\xi_n)=(\lambda\mu)\overrightarrow{x}.$$

Л3:

$$(\lambda+\mu)\overrightarrow{x}=((\lambda+\mu)\xi_1;(\lambda+\mu)\xi_2;\ldots;(\lambda+\mu)\xi_n)=$$
$$=(\lambda\xi_1;\lambda\xi_2;\ldots;\lambda\xi_n)+(\mu\xi_1;\mu\xi_2;\ldots;\mu\xi_n).$$

Л4:

$$\lambda(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})=\lambda(\xi_1+\eta_1;\xi_2+\eta_2;\ldots;\xi_n+\eta_n)=$$
$$=(\lambda(\xi_1+\eta_1),\lambda(\xi_2+\eta_2),\ldots\lambda(\xi_n+\eta_n))=(\lambda\xi_1;\lambda\xi_2;\ldots;\lambda\xi_n)+$$
$$+(\lambda\eta_1;\lambda\eta_2;\ldots;\lambda\eta_n)=\lambda\overrightarrow{x}+\lambda\overrightarrow{y}.$$

Приклад 4. Нехай заданий лінійний простір многочленів степеня не вище за 2. Довести, що вектори $\overrightarrow{p}_1=1+2t+3t^2$, $\overrightarrow{p}_2=2+3t+4t^2$, $p_3=3+5t+7t^2$ лінійно залежні.

Розв'язування. У даному випадку можна відразу побачити, що $\overrightarrow{p}_3=1\cdot\overrightarrow{p}_2+1\cdot\overrightarrow{p}_1$. Отже, вектори лінійно залежні.

Задачі для самостійної роботи

1. Як зміниться матриця переходу від одного базису до іншого, якщо:
   а) поміняти місцями два вектори першого базису;
   б) поміняти місцями два вектори другого базису;
   в) записати вектори обох базисів у зворотному порядку.
2. Вектори $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$, $\overrightarrow{e}_4$ та x задані в деякому базисі. Показати, що вектори $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$ самі утворюють базис та знайти координати вектора $\overrightarrow{x}$ у цьому базисі:
   а) $\overrightarrow{e}_1 = (2, 3, 4)$, $\overrightarrow{e}_2 = (3, -2, 1)$, $\overrightarrow{e}_3 = (-1, 2, 1)$, $\overrightarrow{x} = (4, 3, 6)$;
   б) $\overrightarrow{e}_1 = (-1, 1, 1, 1)$, $\overrightarrow{e}_2 = (1, -1, 1, 1)$, $\overrightarrow{e}_3 = (1, 1, -1, 1)$, $\overrightarrow{e}_4 = (1, 1, 1, -1)$, $\overrightarrow{x} = (2, 4, 2, 4)$.
3. Визначити розмірність підпростору розв'язків, базис та загальний розв'язок системи рівнянь:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$
4. Задано простір, який складається з усіх геометричних векторів. Чи буде підпростором цього простору множина векторів із початком у початку координат і розміщених у першому октанті?

   Чи буде лінійним простором кожна з поданих сукупностей векторів:
5. Усі вектори n-вимірного простору, координати яких – цілі числа?
6. Усі вектори площини, кожний з яких лежить на одній з осей координат?
7. Усі вектори площини, кінці яких лежать на даній прямій (за початок будь-якого вектора, якщо не сказано протилежне, береться початок координат)?

8. Усі вектори площини, початки й кінці яких лежать на даній прямій?
9. Усі вектори тривимірного простору, кінці яких не лежать на даній прямій?
10. Усі вектори площини, кінці яких лежать у першій чверті системи координат?
11. Усі вектори з R_n, координати яких задовольняють рівняння $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$?
12. Усі вектори з R_n, координати яких задовольняють рівняння $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$?
13. Усі многочлени $P_n(x)$ степеня n, якщо за операції простору взяти звичайне додавання многочленів і множення многочлена на число?
14. Усі многочлени степеня $\leq n$?
15. Усі вектори, що утворюються лінійними комбінаціями векторів $\overrightarrow{x}_1$, $\overrightarrow{x}_2$, ..., $\overrightarrow{x}_n$ з R_n?

Знайти лінійну комбінацію:

16. $2\overrightarrow{a}_1 - 3\overrightarrow{a}_2 + 5\overrightarrow{a}_3$ системи векторів $\overrightarrow{a}_1 = (1, 0, 2)$, $\overrightarrow{a}_2 = (3, 0, 1)$, $\overrightarrow{a}_3 = (1, 2, 3)$;
17. $3\overrightarrow{a}_1 - \overrightarrow{a}_2 + 2\overrightarrow{a}_3 - \overrightarrow{a}_4$ системи векторів $\overrightarrow{a}_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\overrightarrow{a}_2 = (2, 1, -1, 3)$, $\overrightarrow{a}_3 = (4, 3, 1, -1)$, $\overrightarrow{a}_4 = (9, 2, 3, 1)$.
18. Розв'язати рівняння:

а) $2\overrightarrow{a}_1 + 3\overrightarrow{a}_2 - 2\overrightarrow{a}_3 - 5\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a}_4$, де $\overrightarrow{a}_1 = (-1, 0, -3, 4)$, $\overrightarrow{a}_2 = (1, 2, 4, 0)$, $\overrightarrow{a}_3 = (0, 1, 2, -1)$, $\overrightarrow{a}_4 = (2, 3, 1, 2)$;

б) $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} - \overrightarrow{z} = \overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{a}_2$, $2\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + 3\overrightarrow{z} = \overrightarrow{a}_3$, де $\overrightarrow{a}_1 = (0, 5, 2, 1)$, $\overrightarrow{a}_2 = (2, -3, 0, 1)$, $\overrightarrow{a}_3 = (13, -10, 3, -2)$.

З'ясувати, які системи векторів (подані нижче) лінійно залежні, а які лінійно незалежні:

19. $\overrightarrow{a}_1 = (1, 2, 4, 3)$, $\overrightarrow{a}_2 = (4, 1, 3, 2)$, $\overrightarrow{a}_3 = (5, 3, 7, 5)$;
20. $\overrightarrow{a}_1 = (1, -2, 1, -3)$, $\overrightarrow{a}_2 = (1, 4, 1, 2)$, $\overrightarrow{a}_3 = (1, -3, 1, 4)$;

21. $\overrightarrow{a}_1 = (1, 0, 2, 0, 6)$, $\overrightarrow{a}_2 = (0, 1, 0, 3, 5)$, $\overrightarrow{a}_3 = (0, 0, 1, 2, 7)$, $\overrightarrow{a}_4 = (3, 5, 7, 9, 11)$;
22. $\overrightarrow{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\overrightarrow{a}_2 = (4, 3, 2, 1)$, $\overrightarrow{a}_3 = (4, 3, 1, 2)$, $\overrightarrow{a}_4 = (3, 4, 2, 1)$.
23. Довести, що система векторів, яка має два рівних вектори, лінійно залежна.
24. Довести, що система векторів, два вектори якої відрізняються скалярним множником, лінійно залежна.
25. Довести, що система векторів, яка містить нульовий вектор, лінійно залежна.
26. Довести, що коли частина системи векторів лінійно залежна, то і вся система лінійно залежна.

Вектори $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\ldots$, $\overrightarrow{e}_n$ та $\overrightarrow{x}$ задані координатами в деякому базисі. Показати, що вектори $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\ldots$, $\overrightarrow{e}_n$ самі утворюють базис та знайти координати вектора $\overrightarrow{x}$ у цьому базисі.

27. $\overrightarrow{e}_1 = (-1, 2, 1)$, $\overrightarrow{e}_2 = (2, 1, -1)$, $\overrightarrow{e}_3 = (1, 2, -1)$, $\overrightarrow{x} = (7, 9, -4)$;
28. $\overrightarrow{e}_1 = (2, 3, 4)$, $\overrightarrow{e}_2 = (3, -2, 1)$, $\overrightarrow{e}_3 = (-1, 2, 1)$, $\overrightarrow{x} = (4, 3, 6)$;
29. $\overrightarrow{e}_1 = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{e}_2 = (2, 1, 1)$, $\overrightarrow{e}_3 = (1, 3, 1)$, $\overrightarrow{x} = (3, -4, 2)$;
30. $\overrightarrow{e}_1 = (1, 1, 1, 2)$, $\overrightarrow{e}_2 = (1, 1, 2, 3)$, $\overrightarrow{e}_3 = (3, 2, 1, 1)$, $\overrightarrow{e}_4 = (1, 3, 2, 1)$, $\overrightarrow{x} = (-2, -3, 0, 3)$;
31. $\overrightarrow{e}_1 = (-1, 1, 1, 1)$, $\overrightarrow{e}_2 = (1, -1, 1, 1)$, $\overrightarrow{e}_3 = (1, 1, -1, 1)$, $\overrightarrow{e}_4 = (1, 1, 1, -1)$, $\overrightarrow{x} = (2, 4, 2, 4)$.

Довести, що кожна з систем векторів утворює базис простору та знайти зв'язок між координатами довільного вектора в цих двох базисах:

32. $\overrightarrow{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{e}_2 = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{e}_3 = (1, 1, 3)$, $\overrightarrow{e}'_1 = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{e}'_2 = (2, 1, 3)$, $\overrightarrow{e}'_3 = (3, 2, 1)$.
33. $\overrightarrow{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{e}_2 = (1, -1, 2)$, $\overrightarrow{e}_3 = (1, 3, -1)$, $\overrightarrow{e}'_1 = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{e}'_2 = (1, 2, -1)$, $\overrightarrow{e}'_3 = (2, 2, -1)$.

34. $\overrightarrow{e}_1 = (1,2,1)$, $\overrightarrow{e}_2 = (2,3,3)$, $\overrightarrow{e}_3 = (3,7,1)$, $\overrightarrow{e}'_1 = (3,1,4)$, $\overrightarrow{e}'_2 = (5,2,1)$, $\overrightarrow{e}'_3 = (1,1,-6)$.
35. Знайти координати многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ у базисі:
а) 1, x, x^2, $\dots$, x^n;
б) 1, $(x-a)$, $(x-a)^2$, $\dots$, $(x-a)^n$.
Знайти базис і розмірність системи векторів, що утворюють підпростори:
36. Усі n-вимірні вектори, в яких перша й остання координати рівні між собою.
37. Усі n-вимірні вектори вигляду $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta, \dots)$, де α і β – довільні числа.
38. Сукупність усіх многочленів степеня $\leq n$ від одного невідомого.
39. Довести, що всі квадратні матриці порядку n утворюють векторний простір, якщо за операції в ньому взяти додавання матриць і множення матриць на число. Знайти базис і розмірність цього простору.
40. Чи буде простір тривимірних рядків евклідовим, якщо за скалярний добуток взяти вираз $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$?
41. Переконатися, що вектори наступних систем попарно ортогональні й доповнити їх до ортогональних базисів:
а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.
42. Застосовуючи процес ортогоналізації, побудувати ортогональний базис підпростору, який містить дану систему векторів:
а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 & -7 \end{pmatrix}$;
б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$;
в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Відповіді

1. а) поміняються місцями два рядки; б) поміняються місцями два стовпці; в) матриця симетрично відобразиться відносно її центра.
2. а) $(1,1,1)$; б) $(2,1,2,1)$.
3. $k = 3$, $\overrightarrow{f}_1 = \{-1,0,1,0,0\}$, $\overrightarrow{f}_2 = \{-1,0,0,1,1\}$, $\overrightarrow{f}_3 = \{0,-\frac{1}{2},0,0,1\}$, $\overrightarrow{f} = c_1\overrightarrow{f}_1 + c_2\overrightarrow{f}_2 + c_3\overrightarrow{f}_3$.
4. Не буде. 5. Не буде. 6. Не буде.
7. Буде, якщо пряма проходить через початок координат, не буде в інших випадках.
8. Буде. 9. Не буде. 10. Не буде. 11. Буде. 12. Не буде.
13. Не буде. 14. Буде. 15. Буде. 16. $(-2,10,16)$.
17. $(0,0,0,0)$.
18. а) $\overrightarrow{x} = (-\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{8}{5})$;
    б) $\overrightarrow{x} = (1,1,1,1)$, $\overrightarrow{y} = (2,0,1,-1)$, $\overrightarrow{z} = (3,-4,0,-1)$.
19. Лінійно залежні. 20. Лінійно незалежні.
21. Лінійно незалежні. 22. Лінійно незалежні.
27. **Вказівка. Перший спосіб.** Визначник, складений із координат векторів $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$, дорівнює 4; тому вектори $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$ лінійно незалежні й утворюють базис. Базис, в якому задані вектори, позначимо через $\overrightarrow{f}_1$, $\overrightarrow{f}_2$, $\overrightarrow{f}_3$, тоді $\overrightarrow{e}_1 = -\overrightarrow{f}_1 + 2\overrightarrow{f}_2 + \overrightarrow{f}_3$, $\overrightarrow{e}_2 = 2\overrightarrow{f}_1 + \overrightarrow{f}_2 - \overrightarrow{f}_3$, $\overrightarrow{e}_3 = 7\overrightarrow{f}_1 + 9\overrightarrow{f}_2 - 4\overrightarrow{f}_3$. Матрицею переходу від базису $\{f\}$ до базису $\{e\}$ є матриця $T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, а обернена до неї $T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$; тоді за формулою $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ або

$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$. Звідси $x_1' = 1$, $x_2' = 3$, $x_3' = 2$, тобто $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e}_1 + 3\overrightarrow{e}_2 + 2\overrightarrow{e}_3 = \{1, 3, 2\}$. **Другий спосіб.** Координати вектора $\overrightarrow{x}$ у базисі $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$ є коефіцієнтами лінійної комбінації $\overrightarrow{x} = x_1'\overrightarrow{e}_1 + x_2'\overrightarrow{e}_2 + x_3'\overrightarrow{e}_3$. Ця рівність у базисі, в якому задано координати всіх векторів, має вигляд: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$. Звідси $x_1' = 1$, $x_2' = 3$, $x_3' = 2$.

28. $(1, 1, 1)$. 29. $(2, 1, -1)$. 30. $(1, 1, -1, -1)$. 31. $(2, 1, 2, 1)$.

32. **Доведення.** Нехай вектори задано в деякому базисі $\{\overrightarrow{f}\}$. Обчислюючи визначники, складені з координат системи векторів, бачимо, що вони не дорівнюють нулеві. Тому системи векторів лінійно незалежні й утворюють базиси. Позначимо координати довільного вектора $\overrightarrow{x}$ у базисі $\{\overrightarrow{e}\}$ через $\overrightarrow{x}_1$, $\overrightarrow{x}_2$, $\overrightarrow{x}_3$, а в базисі $\{\overrightarrow{e}'\}$ – через $\overrightarrow{x}'_1$, $\overrightarrow{x}'_2$, $\overrightarrow{x}'_3$, тоді $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e}_1 + x_2\overrightarrow{e}_2 + x_3\overrightarrow{e}_3$. Ця рівність у базисі $\{\overrightarrow{f}\}$ набуває вигляду $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$. Помноживши останню рівність із лівого боку на матрицю $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, дістанемо $x_1 = \frac{5}{2}x_2' + 5x_3'$, $x_2 = x_1' - x_2' - x_3'$, $x_3 = -\frac{1}{2}x_2' - x_3'$.

33. $x_1' = 3x_1 + 3x_2 + x_3$, $x_2' = 6x_1 + 4x_2 + 4x_3$, $x_3' = -4x_1 - 3x_2 - 2x_3$.

34. $x_1 = -27x_1' - 71x_2' - 41x_3'$, $x_2 = 9x_1' + 20x_2' + 9x_3'$, $x_3 = 4x_1' + 12x_2' + 8x_3'$.

35. а) a_0, a_1, a_2, …, a_n; б) $f(a)$, $f'(a)$, $\dfrac{f''(a)}{2!}$, …, $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

36. Базис утворюють, наприклад, вектори $(1,0,0,\dots,0,1)$, $(0,1,0,\dots,0,0)$, $(0,0,1,\dots,0,0)$, …, $(0,0,0,\dots,1,0)$. Розмірність дорівнює $n-1$.

37. Базис утворюють, наприклад, вектори $(1,0,1,0,1,0,\dots)$ і $(0,1,0,1,0,1,\dots)$. Розмірність дорівнює 2.

38. Базис утворюють, наприклад, 1, x, x^2, …, x^n. Розмірність дорівнює $n+1$.

39. Базис утворюють, наприклад, матриці E_{ij} $(i,j = 1,2,3,\dots,n)$, де E_{ij} – матриця, елемент якої в i-му рядку і j-му стовпці дорівнює одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулеві. Розмірність дорівнює n^2.

40. Не буде, бо для вектора $\overrightarrow{a} = \{0,1,0\}$ $(\overrightarrow{\Rightarrow} a) = -1$.

41. а) **Вказівка**. Вектори $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$ – ортогональні, бо $(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2) = 0$. Решту векторів базису знаходимо з умови попарної ортогональності. Шуканий вектор позначимо через $\overrightarrow{x} = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$. Дістанемо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}_1) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0$, $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}_2) = 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0$. Розв'язки $(2x_3 - 17x_4, 2x_3 - 10x_4, x_3, x_4)$ цієї системи утворюють двовимірний підпростір, ортогональний до векторів $\overrightarrow{a}_1$ і $\overrightarrow{a}_2$, а тому будь-які два взаємно ортогональні вектори цього підпростору задовольняють поставлені вимоги. Візьмемо довільний частинний розв'язок $\overrightarrow{a}_3 = \{2,2,1,0\}$. Другий розв'язок знаходимо з умови ортогональності до $\overrightarrow{a}_3$: $2(2x_3 - 17x_4) + 2(2x_3 - 10x_4) + x_3 = 0$, звідки $x_3 = 6x_4$. Поклавши $x_4 = 1$, дістаємо шуканий розв'язок $\overrightarrow{a}_4 = \{-5,2,6,1\}$. б) Можна додати вектори $\overrightarrow{a}_3 = \{1,-2,1,0\}$ і $\overrightarrow{a}_4 = \{25,4,-17,-6\}$.

42. а) Візьмемо $\overrightarrow{b}_1 = \overrightarrow{a}_1 = \{1,2,2,-1\}$. Вектор $\overrightarrow{b}_2$ шукаємо у вигляді $\overrightarrow{b}_2 = \overrightarrow{a}_2 + \alpha \overrightarrow{b}_1$, де α знаходимо з умови ортогональності векторів $\overrightarrow{b}_1$ і $\overrightarrow{b}_2$, тобто $(\overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_1) = 0$. Звідси

$\alpha = -\dfrac{(\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{b}_1)}{(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_1)} = 1$; тоді $\overrightarrow{b}_2 = \{2, 3, -3, 2\}$. Вектор $\overrightarrow{b}_3$ шукаємо у вигляді $\overrightarrow{b}_3 = \overrightarrow{a}_3 + \alpha_1 \overrightarrow{b}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{b}_2$, де α_1 і α_2 знаходимо з умови ортогональності вектора $\overrightarrow{b}_3$ до $\overrightarrow{b}_1$ і $\overrightarrow{b}_2$, тобто $(\overrightarrow{b}_3, \overrightarrow{b}_1) = 0$, $(\overrightarrow{b}_3, \overrightarrow{b}_2) = 0$. Звідси $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 1$, тоді $\overrightarrow{b}_3 = \{2, -1, -1, -2\}$;

б) $\{1, 1, -1, -2\}$, $\{2, 5, 1, 3\}$;

в) $\{2, 1, 3, -1\}$, $\{3, 2, -3, -1\}$, $\{1, 5, 1, 10\}$.

Тема 17. Дослідження системи m лінійних рівнянь з n невідомими

Система m лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{17.1}$$

де a_{ij} – задані числа, які називаються *коефіцієнтами системи рівнянь*, а $b_1, \dots, b_m$ – вільні члени.

Розв'язком цієї системи називається сукупність n чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, які при підстановці замість невідомих у рівняння системи (17.1) перетворюють ці рівняння в тотожності.

Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Якщо система не має жодного розв'язку, то вона називається *несумісною*.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має тільки один розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має більше одного розв'язку.

Матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

називаються відповідно *матрицею* і *розширеною матрицею* системи (17.1).

Для сумісності системи (17.1) необхідно й досить, щоб ранг матриці цієї системи дорівнював рангу її розширеної матриці (теорема Кронекера–Капеллі). Отже, система (17.1) сумісна тоді й тільки тоді, коли $r(A) = r(\tilde{A}) = r$. У цьому випадку r називається *рангом* системи (17.1).

Якщо $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, то система лінійних рівнянь (17.1) називається *однорідною*. Однорідна система рівнянь завжди сумісна.

Якщо ранг сумісної системи дорівнює кількості невідомих (тобто $r = n$), то система є *визначеною*.

Якщо ранг сумісної системи менший за кількість невідомих, то система *невизначена*.

Нехай $r < n$. Розглянемо будь-який базисний мінор матриці A. Виділимо в цьому мінорі довільний рядок. Елементи цього рядка є коефіцієнтами при r невідомих в одному з рівнянь системи (17.1). Ці r невідомих називаються *базисними невідомими* системи рівнянь. Інші $n-r$ невідомих системи (17.1) називаються *вільними*.

Виділимо з системи (17.1) систему r рівнянь, серед коефіцієнтів яких містяться елементи базисного мінора. Базисні невідомі у виділеній системі запишемо у лівих частинах рівнянь, а доданки, які містять вільні невідомі, перенесемо вправо. З отриманої системи знайдемо базисні невідомі через вільні невідомі.

Отже, надаючи вільним змінним довільних значень, можна знайти відповідні значення базисних змінних. У цьому випадку система (17.1) має безліч розв'язків.

Розглянемо деякі методи розв'язання системи (17.1).

1. Розв'язання системи лінійних рівнянь методом Гаусса. Обґрунтуємо зміст цього методу на системі чотирьох рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, & \text{(а)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, & \text{(б)} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, & \text{(в)} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45}. & \text{(г)} \end{cases}$$

Будемо вважати, що $a_{11} \neq 0$ (якщо $a_{11} = 0$, то, помінявши порядок рівнянь, виберемо таке рівняння, в якому коефіцієнт при x_1 не дорівнює нулю).

Перший крок: поділимо рівняння (а) на a_{11}, помножимо отримане рівняння на a_{21} і віднімемо від (б); потім помножимо на a_{31} і віднімемо від (в); нарешті, помножимо на a_{41} і віднімемо від (г). У результаті першого кроку маємо систему

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, & \text{(д)} \\ \qquad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_{25}, & \text{(е)} \\ \qquad b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4 = b_{35}, & \text{(є)} \\ \qquad b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4 = b_{45}. & \text{(ж)} \end{cases}$$

Причому b_{ij} знаходимо за формулами

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \;\; j = \overline{1,5}, \quad b_{ij} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \;\; (j = \overline{2,5}, i = \overline{2,4}).$$

Другий крок: поступимо з рівняннями (е), (є), (ж) так само, як із рівняннями (а), (б), (в), (г) і так далі. Остаточно вихідна система буде мати так званий "східчастий" вигляд

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \\ \qquad\qquad x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 = c_{25}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_3 + d_{34}x_4 = d_{35}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_4 = e_{45}. \end{cases}$$

У процесі перетворень системи всі невідомі визначаються послідовно.

Якщо система має єдиний розв'язок, то східчаста система рівнянь зведеться до трикутної, тобто такої, в якій останнє рівняння має одну невідому змінну. У випадку невизначеної системи, тобто такої, в якій кількість невідомих більша за кількість лінійно незалежних рівнянь, трикутна система не отримається, оскільки останнє рівняння містить більше ніж одну змінну.

Коли система несумісна, то після зведення до східчастого вигляду вона містить хоча б одне рівняння вигляду $0 = 1$, тобто рівняння, в якому всі невідомі мають нульові коефіцієнти, а права частина відмінна від нуля. Така система не має розв'язків.

На практиці зручніше зводити до східчастого вигляду не саму систему рівнянь, а матрицю коефіцієнтів при невідомих і вільних членах.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 5, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

Розв'язування. Складемо матрицю з коефіцієнтів при невідомих і вільних членах, ввівши 5-й, так званий контрольний стовпець, кожний елемент якого дорівнює сумі всіх елементів даного рядка:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right).$$

При лінійних перетвореннях елементів матриці таке ж перетворення повинно виконуватися і з елементами контрольного стовпця. Кожен елемент контрольного стовпця перетвореної матриці дорівнює сумі елементів відповідного рядка. Перехід від однієї матриці до іншої будемо записувати за допомогою знака еквівалентності ($\sim$).

Для спрощення обчислень поміняємо місцями перше і друге рівняння

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right).$$

Віднімемо від інших двох рядків 1-й рядок, помножений на 3 і

4:

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 9 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

Домноживши другий рядок на -5 і додавши до третього, одержуємо:

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Система рівнянь звелася до трикутного вигляду

$$\begin{cases} x + y - z = 5, \\ -y + 4z = 5, \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = -11, \\ y = 3, \\ z = 2, \end{cases}$$

2. Метод Жордана–Гаусса розв'язання системи лінійних рівнянь. Нехай задана система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{17.2}$$

У матриці A цієї системи виберемо відмінний від нуля елемент a_{qp}. Цей елемент називається розв'язуючим елементом, p-ий стовпець матриці A – розв'язуючим стовпцем, а q-ий рядок – розв'язуючим рядком.

Розглянемо нову систему рівнянь

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \tag{17.3}$$

з матрицею A', коефіцієнти і вільні члени якої визначаються за формулами

$$\left.\begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} - \frac{a_{ip}a_{qi}}{a_{qp}}, \\ b'_i &= b_i - \frac{a_{ip}b_q}{a_{qp}}, \end{aligned}\right\}, \quad \text{якщо} \quad i \neq q.$$

Зокрема, $a'_{ip} = 0$, якщо $i \neq p$. Якщо $i = q$, то беремо $a'_{qi} = a_{qp}$, $b'_q = b_q$. Отже, q-те рівняння в системах (17.2) і (17.3) одне й те саме, а коефіцієнти при x_p у всіх рівняннях системи (17.3), крім q-го, дорівнюють нулю. Системи (17.2) і (17.3) одночасно сумісні або несумісні. У випадку сумісності їх розв'язки збігаються.

Для визначення елемента a_{ij} матриці A' користуються правилом прямокутника. Розглянемо чотири елементи матриці A: a_{ij} (елемент, який перетворюємо), a_{qp} – розв'язуючий елемент і елементи a_{ip} та a_{qj}. Для знаходження елемента a'_{ij} потрібно від елемента a_{ij} відняти добуток елементів $a_{ip}a_{qj}$, поділений на a_{qp}, де a_{qp}, a_{ip}, a_{qj} – розміщені в протилежних вершинах прямокутника

Аналогічно можна перетворити систему (17.3), взявши за розв'язуючий елемент матриці A', a'_{sr}, причому $s \neq q$, $r \neq p$. Після цього перетворення всі коефіцієнти при x_r, крім a_{sr}, перетворяться на нуль. Отриману систему знов можна перетворити і т.д. Якщо $r = n$, то після перетворення маємо систему

$$\begin{cases} k_1x = l_1, \\ k_2x_2 = l_2, \\ k_nx_n = l_n, \end{cases}$$

з якої знаходимо x_j.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язування. Запишемо коефіцієнти, вільні члени, суми коефіцієнтів і вільних членів (Σ – контрольний стовпець) у таблицю.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
$\boxed{1}$	1	-3	2	6	7
1	-2	0	-1	-6	-8
0	1	1	3	16	21
2	-3	2	0	-6	7

Візьмемо за розв'язуючий елемент коефіцієнт при x_1 в першому рівнянні. Перепишемо без зміни рядок таблиці, що містить цей елемент (розв'язуючий рядок), а всі елементи першого стовпця, крім розв'язуючого, замінимо нулями. Застосувавши правило прямокутника, заповнимо інші клітини таблиці. Дістанемо

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	-3	2	6	7
0	-3	3	-3	-12	-15
0	1	1	3	16	21
0	-5	8	-4	-6	-7

Поділимо на -3 елементи другого рядка й візьмемо за розв'язуючий другий елемент другого рядка, перший стовпець перепишемо без змін, елементи другого стовпця, крім розв'язуючого, замінимо нулями. Елементи інших клітинок таблиці, крім другого рядка, перетворимо за правилом прямокутника. Маємо

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	-2	1	2	2
0	1	-1	1	4	5
0	0	2	2	12	16
0	0	3	1	14	18

Розділивши третій рядок на 2 і взявши за розв'язуючий третій елемент третього стовпця, отримаємо таблицю:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	3	1	4
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	-2	-4	-6

Розділимо елементи четвертого рядка на -2 і перетворимо таблицю, взявши за розв'язуючий елемент четвертий елемент четвертого рядка:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	0	8	9
0	1	0	0	6	7
0	0	1	0	4	5
0	0	0	1	2	3

У результаті виписуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 1\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=8, \\ 0\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=6, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3+0\cdot x_4=4, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+1\cdot x_4=2 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1=8, \\ x_2=6, \\ x_3=4, \\ x_4=2. \end{cases}$$

3. Формули Крамера. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{17.4}$$

Визначником системи (17.4) назвемо визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Позначимо через Δ_j визначники, які одержуються з Δ, якщо замість j-го стовпця підставити стовпець вільних членів. При цих позначеннях має місце таке твердження.

Правило Крамера. Якщо визначник системи n лінійних рівнянь з n невідомими відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, що знаходиться за формулами Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{17.5}$$

4. Матричний метод розв'язування систем. Запишемо систему (17.4) в матричному вигляді

$$AX = B,$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Оскільки $\Delta \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1}. Отже, $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Оскільки $A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця ($EX = X$), то $X = A^{-1}B$.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 3x + 2y + z = 10, \\ 4x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$$

Розв'язування. За формулами (17.5) знаходимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 8 + 9 - 8 + 12 - 3 = 14,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -32 + 8 + 30 - 8 + 40 - 24 = 14,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -20 + 32 + 12 - 40 + 48 - 4 = 28,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 80 + 72 - 64 - 24 - 30 = 42.$$

Отже, $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{14}{14} = 1$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{28}{14} = 2$, $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{42}{14} = 3$.

5. Дослідження загальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розглянемо загальну систему m лінійних рівнянь з n невідомими (17.1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Позначимо основну матрицю системи (17.1) через A, а розширену – $\tilde{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Будемо вважати, що система (17.1) сумісна і що ранг її основної та розширеної матриці дорівнює r. Для простоти вважаємо, що базисний мінор основної матриці A знаходиться у лівому верхньому куті цієї матриці. Тоді перші r рядків як основної, так і розширеної є базисними рядками. Далі виділимо базисний мінор і всі змінні x_k, $k = \overline{1, r}$, назвемо основними змінними, а змінні x_k,

$k = \overline{r+1, n}$, – вільними. Тоді систему (17.1) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases} \tag{17.6}$$

де всі вільні змінні перенесемо у праву частину.

Визначник цієї системи відмінний від нуля, тому розв'язуємо її за допомогою формул Крамера.

Позначимо через

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \quad -$$

базисний мінор, а M_j – визначник, який одержується із базисного мінора M матриці A заміною його j-го стовпця на праву частину системи (17.6). Тоді

$$x_j = \frac{1}{M} M_j(b_i - a_{ir+1}x_{r+1} - \cdots - a_{in}x_n) = \tag{17.7}$$

$$= \frac{1}{M}[M_j(b_i) - x_{r+1}M_j(a_{ir+1}) - \cdots - x_n M_j(a_{in})] \quad (j = 1, 2 \dots, r).$$

Формули (17.7) містять будь-який розв'язок системи (17.1) і виражають значення невідомих x_j $(j = 1, 2, \dots, r)$ через коефіцієнти при невідомих, вільні члени й довільно задані змінні x_{r+1}, $\dots$, x_n.

Якщо $b_i = 0$, $i \in \{1, m\}$, то формули

$$x_j = -\frac{1}{M}[x_{r+1}M_j(a_{i(r+1)}) + \cdots + x_n M_j(a_{in})] \quad (j = 1, 2 \dots, r). \tag{17.8}$$

містять будь-який ров'язок однорідної системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{17.9}$$

Покажемо, що сукупність усіх розв'язків однорідної системи утворює лінійний простір. Нехай $X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ і $X_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ – два довільні розв'язки однорідної системи (17.9), а λ – довільне дійсне число. Оскільки $X_1 + X_2$ і λX_1 є розв'язками однорідної системи, то сукупність усіх розв'язків однорідної системи утворює лінійний простір розмірності $n - r$. Тому довільна сукупність із $(n - r)$ лінійно незалежних розв'язків однорідної системи утворює базис у цьому просторі й називається *фундаментальною сукупністю розв'язків однорідної системи (17.9).*

Фундаментальна сукупність розв'язків однорідної системи (17.9), що відповідає базису $\overrightarrow{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\overrightarrow{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\overrightarrow{e}_{n-r} = (0, 0, \dots, 0, 1)$, називається *нормальною фундаментальною системою розв'язків однорідної системи (17.9).*

При зроблених припущеннях про ранг і розміщення базисного мінора і за допомогою формул (17.8) нормальна фундаментальна сукупність розв'язків однорідної системи (17.9) має вигляд

$$\begin{cases} X_1 = \Big(-\dfrac{M_1(a_{i(r+1)})}{M}, \dots, -\dfrac{M_r(a_{i(r+1)})}{M}, 1, 0, \dots, 0\Big), \\ X_2 = \Big(-\dfrac{M_1(a_{i(r+2)})}{M}, \dots, -\dfrac{M_r(a_{i(r+2)})}{M}, 0, 1, \dots, 0\Big), \\ \dots . X_{n-r} = \Big(-\dfrac{M_1(a_{in})}{M}, \dots, -\dfrac{M_r(a_{in})}{M}, 0, 0, \dots, 1\Big). \end{cases} \tag{17.10}$$

Отже, довільний розв'язок системи (17.9) зображається у вигляді

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_{n+r}X_{n-r}, \tag{17.11}$$

де C_1, C_2, ..., C_{n-r} – деякі сталі. Оскільки у формулі (17.11) міститься довільний розв'язок системи (17.9), то ця формула визначає загальний розв'язок однорідної системи.

Установимо зв'язок між розв'язками неоднорідної системи (17.1) і відповідної однорідної системи (17.9).

Справедливі такі твердження:

Твердження 1. *Сума довільного розв'язку неоднорідної системи (17.1) з довільним розв'язком відповідної однорідної системи (17.9) є розв'язком системи (17.1).*

Твердження 2. *Різниця двох довільних розв'язків неоднорідної системи (17.1) є розв'язком відповідної однорідної системи (17.9).*

Отже, сума частинного розв'язку неоднорідної системи (17.1) і загального розв'язку відповідної однорідної системи (17.9) задає загальний розв'язок неоднорідної системи (17.1).

За частинний розв'язок неоднорідної системи (17.1) можна взяти $X_0 = \Big(\dfrac{M_1(b_i)}{M}, \ldots, -\dfrac{M_r(b_i)}{M}, 0, 0, \ldots, 0\Big)$, який одержується із формул (17.8) при $x_j = 0$ $(j = r+1, \ldots, n)$.

Тоді загальний розв'язок неоднорідної системи (17.1) має вигляд

$$X = X_0 + C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_{n+r}X_{n-r}, \tag{17.12}$$

де C_1, C_2, ..., C_{n-r} – довільні сталі, а X_1, X_2, ..., X_{n-r} – елементи нормальної фундаментальної сукупності розв'язків (17.10) відповідної однорідної системи.

Приклад 4. Знайти всі розв'язки лінійної системи

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4. \end{cases} \tag{17.13}$$

Розв'язування. Оскільки ранг основної матриці A і ранг розширеної матриці $\tilde{A}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 10 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

дорівнює 2, то будемо вважати, що базисний мінор M, розміщений у лівому верхньому куті основної матриці,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Відкинувши два останні рівняння й задаючи довільними x_3 і x_4, одержимо систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 - C_3 - C_4, \\ x_1 + x_2 = 8 - 2C_3 - 3C_4, \\ x_2 = C_3, \quad x_4 = C_4, \end{cases}$$

із якої за формулами Крамера одержимо

$$\begin{aligned} x_1 = C_1 = 6 - \frac{3}{2}C_3 - C_4, \\ x_2 = C_2 = 2 - \frac{1}{2}C_3 = 2C_4. \end{aligned} \tag{17.14}$$

Таким чином, чотири числа

$$\left(6 - \frac{3}{2}C_3 - C_4, 2 - \frac{1}{2}C_3 - 2C_4, C_3, C_4\right)$$

при довільному заданні значень C_3 і C_4 утворюють розв'язок системи.

За частинний розв'язок неоднорідної системи (17.13) візьмемо $X_0 = (6, 2, 0, 0)$, який одержується із формули (17.14) при $C_3 = 0$, $C_4 = 0$.

Нормальною фундаментальною сукупністю двох розв'язків однорідної системи

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

є $X_1 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ і $X_2 = (-1, -2, 0, 1)$.

Отже, загальний розв'язок системи (17.13) має вигляд

$$X = X_0 + C_1X_1 + C_2X_2 =$$
$$= (6, 2, 0, 0,) + C_1\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) + C_2(-1, -2, 0, 1),$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Задачі для самостійної роботи

1. Користуючись методом Гаусса, розв'язати системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0, \\ 5x_1 + 21x_3 + 13x_4 = 3. \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

2. Користуючись методом Жордана–Гаусса, розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 3, \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 9x_3 + 12x_4 = -1, \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -4. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$

3. Користуючись правилом Крамера, розв'язати системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9. \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4-x_5=2, \\ x_1+3x_2+2x_3+3x_4-x_5=1, \\ x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1-2x_2-3x_3-4x_4-5x_5=-8. \end{cases}$

4. Дослідити сумісність системи рівнянь та знайти їх загальний розв'язок:

а) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+x_4-3=0, \\ 3x_1+x_2-5x_3+5x_4-5=0, \\ x_1-x_2+x_3+3x_4+1=0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1+x_2-5x_3-2x_4+2=0, \\ x_1+5x_2-17x_3+2x_4-10=0, \\ x_1-x_2+x_3+4x_4+8=0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x_1-9x_2-x_3+x_4=8, \\ x_1+2x_2-x_4=4, \\ 7x_1-20x_2-2x_3+3x_4=12, \\ 3x_1-11x_2-x_3+2x_4=4. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2, \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+15x_5=3, \\ 4x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9, \\ 4x_1-2x_2-x_3+x_4+2x_5=1. \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3+x_4=1, \\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=5, \\ 4x_1+3x_2+x_3-2x_4=3. \end{cases}$ є) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_4=2, \\ 3x_1-x_2-2x_3+3x_4=1, \\ 4x_1+3x_2+x_3-2x_4=-1, \\ 9x_1+3x_2-x_3+2x_4=2, \\ x_1+3x_2+2x_3-x_4=3. \end{cases}$

5. Дослідити розв'язки систем у залежності від значень параметра:

а) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2. \end{cases}$

г) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$

Користуючись теорією лінійних рівнянь, розв'язати подані нижче задачі (розглядаючи лише прямокутні декартові системи координат):

6. Знайти умови, необхідні й достатні для того, щоб n площин $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ проходили через одну пряму, але не зливалися в одну площину.
7. Яка система лінійних рівнянь визначає три різні прямі на площині, що проходять через одну точку?
8. Яка система лінійних рівнянь визначає три прямі на площині, що утворюють трикутник?
9. Яка система лінійних рівнянь визначає три площини простору, що не мають спільної точки, але перетинаються попарно?
10. Яка система лінійних рівнянь визначає чотири площини простору, що утворюють тетраедр?
11. Знайти нормальну фундаментальну систему розв'язків систем лінійних рівнянь та записати їх загальний розв'язок:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 + 9x_2 - 11x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 9x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 9x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3-x_4=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3-3x_4=0, \\ 8x_1+4x_2-8x_3-6x_4=0, \\ 2x_2-2x_3+x_4=0. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1-5x_2+3x_3-4x_4=0, \\ 3x_1-4x_2+5x_3+x_4=0, \\ 5x_1-9x_2+4x_3-x_4=0, \\ 4x_1-6x_2+3x_3+x_4=0. \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-6x_4-x_5=0, \\ x_1-2x_2+6x_3-6x_4+10x_5=0, \\ 3x_1+4x_2+4x_3-x_4+17x_5=0, \\ x_1+x_2-4x_3+3x_4-4x_5=0. \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+x_4+x_5=0, \\ x_1-x_2+x_3+3x_4-3x_5=0, \\ x_1-2x_2+3x_3+4x_4-5x_5=0, \\ x_1-x_3+2x_4-x_5=0, \\ x_1+3x_2-7x_3-x_4+5x_5=0. \end{cases}$

12. За допомогою нормальної фундаментальної системи розв'язків відповідної їм однорідної системи та частинного розв'язку неоднорідної системи знайти загальний розв'язок систем лінійних неоднорідних рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=0, \\ x_1-x_3+3x_4=1, \\ x_1-x_2+2x_4=2, \\ x_2-x_3-x_4=-1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+3x_4=2, \\ x_1-x_2-3x_3+x_4=4, \\ 2x_1-x_2-5x_3+3x_4=7, \\ x_1-2x_3+2x_4=3. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-3x_3-x_4=-3, \\ 6x_1+2x_2-3x_3+x_4=0, \\ 3x_1-4x_2+x_3+3x_4=5, \\ 9x_1-4x_2-x_3+5x_4=7. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-x_4+2x_5=1, \\ 2x_1+x_2-3x_3+x_5=3, \\ x_1-x_3+x_4-x_5=2, \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4-7x_5=4. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3-4x_4-2x_5= \ 2, \\ 2x_1+3x_2-2x_3-2x_4+2x_5=-4, \\ 4x_1+3x_2+2x_3-5x_4- \ x_5 \ = \ 3, \\ 2x_1+6x_2+2x_3-6x_4-3x_5= \ 0. \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3- \ 6x_4 \qquad\quad +2x_6=2, \\ 2x_1-3x_2+4x_3- \ 4x_4 \ -4x_5+4x_6=0, \\ 2x_1+6x_2+4x_3- \ 7x_4 \ +2x_5+ \ x_6 \ =3, \\ 4x_1+3x_2+8x_3-11x_4-2x_5+5x_6=3, \\ \qquad\qquad\quad 4x_3- \ 3x_4 \ - \ x_5 \ +2x_6=2. \end{cases}$

Відповіді

1. а) $x_1=-\dfrac{97}{96}$, $x_2=-\dfrac{7}{16}$, $x_3=\dfrac{15}{16}$, $x_4=\dfrac{5}{4}$; б) $x_1=\dfrac{21}{5}$, $x_2=-4$, $x_3=-\dfrac{33}{5}$, $x_4=\dfrac{16}{5}$; в) $x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{1}{8}$, $x_3=\dfrac{3}{8}$, $x_4=\dfrac{1}{2}$; г) Система несумісна; д) $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=1$, $x_4=-1$.
2. а) Система несумісна; б) $x_1=0,4+0,6x_3$, $x_2=0,25+0,75x_3$, $x_4=0,35+0,65x_3$, x_3 – довільне.
3. а) $x_1=x_2=x_3=x_4=1$; б) $x_1=x_2=-1$, $x_4=x_4=1$; в) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-1$, $x_4=-2$, $x_5=1$; г) $x_1=5$, $x_2=-4$, $x_3=3$, $x_4=-2$, $x_5=-1$; д) $x_1=\dfrac{91}{11}$, $x_2=-\dfrac{50}{11}$, $x_3=\dfrac{25}{11}$, $x_4=\dfrac{16}{11}$, $x_5=\dfrac{28}{11}$.
4. а) Наприклад, загальний розв'язок $x_1=x_3-2x_4+1$, $x_2=2x_3+x_4+2$; б) Наприклад, загальний розв'язок $x_1=2x_3+3x_4-5$, $x_2=3x_3-x_4+3$; в) Наприклад, загальний розв'язок $x_3=5x_1-7x_2-12$, $x_4=x_1+2x_2-4$; г) Система несумісна; д) Наприклад, загальний розв'язок $x_3=-8x_1+4x_2-1$, $x_4=0$, $x_5=2x_1-x_2+1$; е) Система несумісна; є) Наприклад, загальний розв'язок $x_1=6x_4-11$, $x_2=-13x_4+24$, $x_3=17x_4-29$.

5. а) При $(1-\lambda)(2+\lambda) \neq 0$ $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{1}{\lambda+2}$. При $\lambda = 1$ розв'язок залежить від двох параметрів, наприклад, $x_1 = 1 - x_2 - x_3$. При $\lambda = -2$ система несумісна; б) При $(\lambda - 1)(\lambda+2) \neq 0$ $x_1 = -\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2}$, $x_2 = \dfrac{1}{\lambda+2}$, $x_3 = \dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$. При $\lambda = 1$ розв'язок залежить від двох параметрів. При $\lambda = -2$ система несумісна; в) При $\lambda(\lambda+3) \neq 0$ $x_1 = \dfrac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}$, $x_2 = \dfrac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda+3)}$, $x_3 = \dfrac{\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda(\lambda+3)}$. При $\lambda = 0$ і при $\lambda = -3$ система несумісна; г) При $(\lambda - 1)(\lambda+3) \neq 0$ $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dfrac{1}{\lambda+3}$. При $\lambda = 1$ загальний розв'язок має вигляд $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$. При $\lambda = 3$ система несумісна.
6. Ранг матриці $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix}$ дорівнює двом і не змінюється при викресленні останнього стовпця.
7. Система трьох лінійних рівнянь із двома невідомими, для якої розширена матриця та три матриці з коефіцієнтів при невідомих для будь-якої пари рівнянь мають ранг 2.
8. Система трьох лінійних рівнянь із двома невідомими, в якій ранги матриць із коефіцієнтів при невідомих у будь-якій парі рівнянь дорівнює двом, а ранг розширеної матриці дорівнює трьом.
9. Система трьох рівнянь із трьома невідомими, в якій ранг усіх матриць із коефіцієнтів при невідомих довільних двох, а також усіх трьох рівнянь дорівнює двом, а ранг розширеної матриці дорівнює трьом.
10. Система чотирьох лінійних рівнянь із трьома невідомими, в якій ранги матриць із коефіцієнтів при невідомих будь-яких

трьох рівнянь дорівнюють трьом, а ранг розширеної матриці дорівнює чотирьом.

11. а) $\overrightarrow{x}^{(1)} = (\frac{5}{2}, \frac{2}{3}, 1, 0)$, $\overrightarrow{x}^{(2)} = (-2, \frac{1}{3}, 0, 1)$. Загальний розв'язок $\overrightarrow{x} = C_1\overrightarrow{x}^{(1)} + C_2\overrightarrow{x}^{(2)}$, де C_1 і C_2 – довільні сталі; б) $\overrightarrow{x}^{(1)} = (1, 1, 1, 0)$, $\overrightarrow{x}^{(2)} = (1, -1, 0, 1)$. Загальний розв'язок $\overrightarrow{x} = C_1\overrightarrow{x}^{(1)} + C_2\overrightarrow{x}^{(2)}$; в) $\overrightarrow{x}^{(1)} = (\frac{1}{2}, 1, 1, 0\Big)$, $\overrightarrow{x}^{(2)} = (1, -\frac{1}{2}, 0, 1)$. Загальний розв'язок $\overrightarrow{x} = C_1\overrightarrow{x}^{(1)} + C_2\overrightarrow{x}^{(2)}$; г) Система має єдиний нульовий розв'язок; д) $\overrightarrow{x}^{(1)} = (1, 2, \frac{3}{2}, 1, 0)$, $\overrightarrow{x}^{(2)} = (-1, 3, -\frac{1}{2}, 0, 1)$. Загальний розв'язок $\overrightarrow{x} = C_1\overrightarrow{x}^{(1)} + C_2\overrightarrow{x}^{(2)}$; е) $\overrightarrow{x}^{(1)} = (1, 2, 1, 0, 0)$, $\overrightarrow{x}^{(2)} = (-2, 1, 0, 1, 0)$, $\overrightarrow{x}^{(3)} = (1, -2, 0, 0, 1)$. Загальний розв'язок $\overrightarrow{x} = C_1\overrightarrow{x}^{(1)} + C_2\overrightarrow{x}^{(2)} + C_3\overrightarrow{x}^{(3)}$.

12. а) $\overrightarrow{x}^{(0)} = (1, -1, 0, 0)$, $\overrightarrow{x}^{(1)} = (1, 1, 1, 0)$, $\overrightarrow{x}^{(2)} = (-1, 1, 0, 1)$. Загальний розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{(0)} + C_1\overrightarrow{x}^{(1)} + C_2\overrightarrow{x}^{(2)}$; б) $\overrightarrow{x}^{(0)} = (3, -1, 0, 0)$, $\overrightarrow{x}^{(1)} = (2, -1, 1, 0)$, $\overrightarrow{x}^{(2)} = (-2, -1, 0, 1)$. Загальний розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{(0)} + C_1\overrightarrow{x}^{(1)} + C_2\overrightarrow{x}^{(2)}$; в) $\overrightarrow{x}^{(0)} = \left(\frac{1}{3}, -1, 0, 0\right)$, $\overrightarrow{x}^{(1)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$, $\overrightarrow{x}^{(2)} = \Big(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0, 1)$. Загальний розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{(0)} + C_1\overrightarrow{x}^{(1)} + C_2\overrightarrow{x}^{(2)}$; г) $\overrightarrow{x}^{(0)} = \Big(2, -1, 0, 0, 0\Big)$, $\overrightarrow{x}^{(1)} = \Big(1, 1, 1, 0, 0\Big)$, $\overrightarrow{x}^{(2)} = \Big(-1, 2, 0, 1, 0)$, $\overrightarrow{x}^{(3)} = \Big(1, -3, 0, 0, 1)$. Загальний розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{(0)} + C_1\overrightarrow{x}^{(1)} + C_2\overrightarrow{x}^{(2)} + C_3\overrightarrow{x}^{(3)}$; д) $\overrightarrow{x}^{(0)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 0, 0\right)$, $\overrightarrow{x}^{(1)} = \Big(1, 1, 1, 0, 0\Big)$, $\overrightarrow{x}^{(2)} = \Big(-1, 2, 0, 1, 0)$, $\overrightarrow{x}^{(3)} = \Big(1, -3, 0, 0, 1)$. Загальний розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{(0)} + C_1\overrightarrow{x}^{(1)} + C_2\overrightarrow{x}^{(2)} + C_3\overrightarrow{x}^{(3)}$; е) $\overrightarrow{x}^{(0)} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$, $\overrightarrow{x}^{(1)} = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1, 0, 0\right)$, $\overrightarrow{x}^{(2)} = \Big(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 0, 1, 0)$, $\overrightarrow{x}^{(3)} = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 1)$. Загальний розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{(0)} + C_1\overrightarrow{x}^{(1)} + C_2\overrightarrow{x}^{(2)} + C_3\overrightarrow{x}^{(3)}$.

Тема 18. Лінійне відображення векторних та гільбертових просторів

1. Матриця лінійного відображення векторних просторів. Нехай E^n і E^m – скінченновимірні лінійні простори над полем F вимірності n і m відповідно (Рис. 1).

Відображення A простору E^n в простір E^m

$$A: \ E^n \to E^m$$

називається *лінійним*, якщо виконуються такі властивості:

Л1. $A(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = A(\overrightarrow{x}) + A(\overrightarrow{y}) \ \forall \overrightarrow{x}, \ \overrightarrow{y} \in E^n$.

Л2. $A(\lambda \overrightarrow{x}) = \lambda A(\overrightarrow{x}) \ \forall \overrightarrow{x}, \ \overrightarrow{y} \in E^n$.

Лінійне відображення називають ще лінійним оператором і круглі дужки часто опускають, а образ елемента $\overrightarrow{x}$ записують так:

$$A\overrightarrow{x} \in E^m.$$

Покажемо, що лінійний оператор A повністю визначається його дією на базисні вектори $\overrightarrow{e}_1, \ \overrightarrow{e}_2, \ \ldots, \ \overrightarrow{e}_n$ простору E^n.

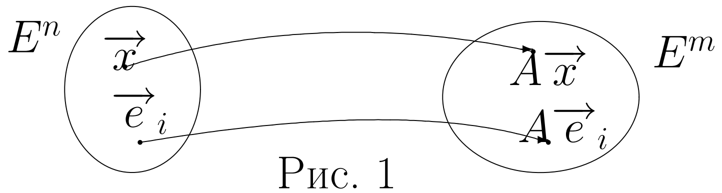


Рис. 1

Дійсно, нехай $\overrightarrow{e}_1, \ \overrightarrow{e}_2, \ \ldots, \ \overrightarrow{e}_n$ – базис простору E^n. Тоді будь-який елемент $x \in E^n$ розкладається за базисом, тобто

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e}_i.$$

Використовуючи властивості Л1 і Л2, послідовно одержуємо:

$$A\overrightarrow{x} = A\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e}_i\right| = \sum_{i=1}^{n} A(x_i \overrightarrow{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i A\overrightarrow{e}_i.$$

Таким чином, щоб визначити оператор A, досить його визначити на базисних векторах $\overrightarrow{e}_i$. Нехай $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \ldots, \overrightarrow{f}_m$ – базис лінійного простору E^m. Тоді вектори $A\overrightarrow{e}_i \in E^m$ розкладаються за цим базисом.

Отже,

$$\begin{aligned} A\overrightarrow{e}_1 &= a_{11}\overrightarrow{f}_1 + a_{21}\overrightarrow{f}_2 + \cdots + a_{m1}\overrightarrow{f}_m, \\ A\overrightarrow{e}_2 &= a_{12}\overrightarrow{f}_1 + a_{22}\overrightarrow{f}_2 + \cdots + a_{m2}\overrightarrow{f}_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A\overrightarrow{e}_n &= a_{1n}\overrightarrow{f}_1 + a_{2n}\overrightarrow{f}_2 + \cdots + a_{mn}\overrightarrow{f}_m, \end{aligned} \tag{18.1}$$

де a_{ik} – координати вектора $A\overrightarrow{e}_k$ відносно базису $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \ldots, \overrightarrow{f}_m$.

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею, що породжена лінійним оператором* A і позначається тією самою літерою. Термін "матриця" походить від латинського слова matrix – "матка", бо перші матриці в математику були впроваджені як матриці, які породжували лінійний оператор. Таким чином, будь-який оператор визначається матрицею і, навпаки, будь-яка матриця породжує лінійний оператор.

Одержимо тепер формулу для перетворення координат вектора

$$\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}.$$

Маємо

$$\overrightarrow{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j \overrightarrow{f}_j = A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i A\overrightarrow{e}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_j \overrightarrow{f}_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \right) \overrightarrow{f}_j$$

Звідси знаходимо

$$\sum_{j=1}^{m} \left(y_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \right) \overrightarrow{f}_j = 0,$$

а оскільки $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \ldots, \overrightarrow{f}_m$ – базис, то

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$$

або в розгорненому вигляді

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{aligned} \tag{18.2}$$

Таким чином,

$$\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x},$$

де A – матриця оператора A. Треба звернути увагу на те, що базисні вектори перетворюються, згідно з формулами (18.1), за допомогою транспонованої матриці A^*.

2. Ядро лінійного оператора. Розв'язання системи лінійних однорідних рівнянь. Сукупність елементів $\overrightarrow{x} \in E^n$, які відображаються оператором A в нейтральний елемент $\overrightarrow{0}$ простору E^m, називається *ядром оператора* A і позначається $\operatorname{Ker} A$. Множина $\operatorname{Ker} A$ сама буде лінійним простором, який міститься в просторі E^n. Для того, щоб показати це, досить лише перевірити справедливість аксіоми замкненості і що $\overrightarrow{0} \in \operatorname{Ker} A$.

Дійсно,
$$A\overrightarrow{0} = A(0\overrightarrow{x}) = 0A(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0},$$
а отже, $A\overrightarrow{0} \in \mathrm{Ker}A$. Далі, якщо $\overrightarrow{x}$ і $\overrightarrow{y}$ належать ядру, то
$$A(\overrightarrow{x}) = A(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{0}.$$
Тоді лінійна комбінація цих векторів $\lambda_1\overrightarrow{x} + \lambda_2\overrightarrow{y}$ теж належить до $\mathrm{Ker}A$, бо
$$A(\lambda_1\overrightarrow{x} + \lambda_2\overrightarrow{y}) = \lambda_1 A(\overrightarrow{x}) + \lambda_2 A(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{0}.$$

Щоб знайти ядро оператора A, треба розв'язати таку систему рівнянь:
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{aligned} \tag{18.3}$$
яка називається *однорідною системою лінійних рівнянь*. Ця система завжди має розв'язок
$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0,$$
що виражає той факт, що $\overrightarrow{0} \in \mathrm{Ker}A$. Цей розв'язок називається тривіальним. Коли система має нетривіальний розв'язок? Насамперед, треба сказати, що якщо система має один нетривіальний розв'язок $\overrightarrow{x}_0$, то вона має їх і нескінченно багато, бо тоді для будь-якого скаляра λ вектор $\lambda\overrightarrow{x}_0$ теж буде розв'язком системи (18.3).

Отже, система (18.3) матиме нетривіальні розв'язки, якщо при її розв'язуванні є хоча б одна вільна змінна, тобто коли
$$\mathrm{rang}A = r < n.$$
Це, наприклад, завжди буде виконуватися, якщо $m < n$, тобто коли вимірність простору E^n більша за вимірність простору E^m.

Якщо ж $m = n$, то для існування нетривіального розв'язку необхідно й досить, щоб $\det A = 0$.

Отже, нехай $r < n$ і базисними стовпцями і рядками є перші r рядків і стовпців матриці A. Тоді систему (18.3) можна записати так:

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n, \\
(r \le m),
\end{gathered} \tag{18.4}$$

де x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n – вільні змінні, які можуть набувати будь-яких значень.

Розв'язуючи цю систему за формулами Крамера, одержуємо:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{1r+1}x_{r+1} + \lambda_{1r+2}x_{r+2} + \cdots + \lambda_{1n}x_n \\ \lambda_{2r+1}x_{r+1} + \lambda_{2r+2}x_{r+2} + \cdots + \lambda_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{rr+1}x_{r+1} + \lambda_{rr+2}x_{r+2} + \cdots + \lambda_{rn}x_n \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

де λ_{ij} є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1j}, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = -a_{2j}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (r + 1 \le j \le n), \\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{rj}.
\end{gathered}$$

Цей розв'язок єдиний, оскільки визначник матриці відмінний від нуля, як базисний мінор.

Отже,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+2} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \lambda_{2n} \\ \vdots \\ \lambda_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

де x_{r+1}, x_{r+1}, ..., x_n довільні. Таким чином, будь-який вектор $\overrightarrow{x}$ є лінійною комбінацією векторів

$$\overrightarrow{a}_{r+1} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{a}_{r+2} = \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \overrightarrow{a}_n = \begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \lambda_{2n} \\ \vdots \\ \lambda_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

які незалежні. Ці вектори можна вибрати за базис простору $\mathrm{Ker}A$ і, таким чином, вимірність ядра оператора A буде дорівнювати $n-2$.

3. Перетворення матриці лінійного відображення при переході до нового базису. Якщо є два лінійні простори E^n і E^m і є лінійне відображення

$$A: \quad E^n \to E^m,$$

то елементи матриці цього перетворення знаходяться зі співвідношення

$$A\overrightarrow{e}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\overrightarrow{f}_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

де $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, ..., $\overrightarrow{e}_n$ – базис в E^n, а $\overrightarrow{f}_1$, $\overrightarrow{f}_2$, ..., $\overrightarrow{f}_m$ – базис у просторі E^m. Отже, матриця лінійного оператора залежить як від базису простору E^n, так і від базису простору E^m; а тому зручно її записати у вигляді A_{ef}. Якщо ж у просторах E^n і E^m є інші базиси: $\overrightarrow{q}_1$, $\overrightarrow{q}_2$, ..., $\overrightarrow{q}_n$ та $\overrightarrow{s}_1$, $\overrightarrow{s}_2$, ..., $\overrightarrow{s}_m$ відповідно, то той же лінійний оператор буде, взагалі кажучи, мати іншу матрицю A_{qs}. Як же пов'язані матриці A_{ef} і A_{qs} одного й того ж оператора в різних базисах? Нехай x_{ei} – координати вектора $\overrightarrow{x}_e \in E^n$ у базисі $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, ..., $\overrightarrow{e}_n$, $\mathcal{P}$ – матриця переходу від базису $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, ..., $\overrightarrow{e}_n$ до базису $\overrightarrow{q}_1$, $\overrightarrow{q}_1$, ..., $\overrightarrow{q}_n$, а x_q – координати вектора $\overrightarrow{x}_q \in E^n$ у базисі $\overrightarrow{q}_1$, $\overrightarrow{q}_2$, ..., $\overrightarrow{q}_n$.

Тоді

$$\overrightarrow{x}_q = \mathcal{P}\overrightarrow{x}_e$$

і матриця $\mathcal{P}$ невироджена, бо базисні вектори лінійно незалежні. Отже, має місце і така формула:

$$\overrightarrow{x}_e = \mathcal{P}^{-1}\overrightarrow{x}_q.$$

Так само, нехай Q – матриця перетворення базису $\overrightarrow{f}_1$, $\overrightarrow{f}_2$, ..., $\overrightarrow{f}_m$ до базису $\overrightarrow{s}_1$, $\overrightarrow{s}_2$, ..., $\overrightarrow{s}_m$ в просторі E^m. Тоді вектор $\overrightarrow{y}_j$ у базисі $\overrightarrow{f}_1$, $\overrightarrow{f}_2$, ..., $\overrightarrow{f}_m$ виражається через вектор $\overrightarrow{y}_s$ у базисі $\overrightarrow{s}_1$, $\overrightarrow{s}_2$, ..., $\overrightarrow{s}_m$ так:

$$\overrightarrow{y}_l = Q\overrightarrow{f}_l, \quad \overrightarrow{f}_j = Q^{-1}\overrightarrow{y}_q.$$

Далі маємо

$$\overrightarrow{y}_f = A_{sf}\overrightarrow{x}_s, \quad \overrightarrow{y}_s = A_{qs}\overrightarrow{x}_q,$$

а тому

$$\overrightarrow{y}_s = Q\overrightarrow{y}_f = QA_{sf}\overrightarrow{x}_s = QA_{sf}\mathcal{P}^{-1}\overrightarrow{x}_q = A_{qs}\overrightarrow{x}_q.$$

Таким чином,

$$A_{qs} = QA_{sf}\mathcal{P}^{-1}. \tag{18.5}$$

Це і є формула перетворення матриці лінійного оператора при переході від одного базису до іншого. Обернену формулу можна одержати за допомогою множення матриць, а можна і безпосередньо, а саме:

$$\overrightarrow{y}_f = Q^{-1}\overrightarrow{y}_s = Q^{-1}A_{qs} \cdot \overrightarrow{x}_q = Q^{-1}A_{qs}\mathcal{P}\overrightarrow{x}_l.$$

Отже,

$$A_{sf} = Q^{-1}A_{qs}\mathcal{P}. \tag{18.6}$$

Формули (18.5) і (18.6) легко одержати формально за допомогою такої схеми. Той факт, що вектор $\overrightarrow{x}_q = \mathcal{P}\overrightarrow{x}_s$, будемо зображати стрілкою, напрямленою від $\overrightarrow{x}_q$ до $\overrightarrow{x}_s$, і поряд зі стрілкою будемо писати літеру $\mathcal{P}$. Матимемо таку схему (Рис. 2):

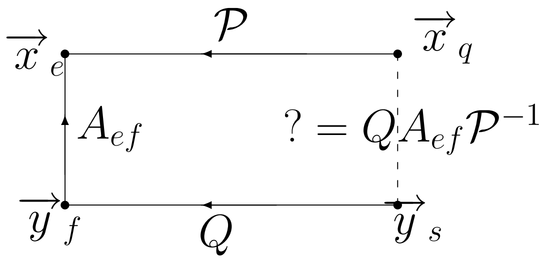


Рис. 2

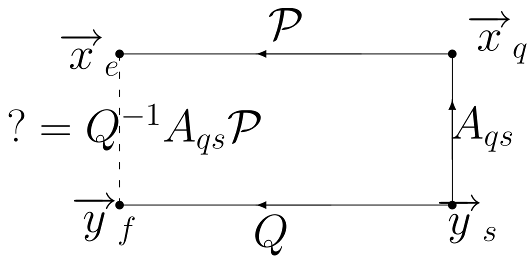


Рис. 3

Тоді, щоб одержати формулу (18.5), треба від $\overrightarrow{y}_s$ по схемі йти до $\overrightarrow{x}_q$, і якщо хід по схемі відбувається проти стрілки на нашій схемі, треба брати обернене перетворення на цій ланці схеми. Щоб одержати формулу (18.6), треба скористатися тією ж схемою, але вважати, що перетворення від $\overrightarrow{y}_s$ до $\overrightarrow{x}_s$ задане, а на схемі $\overrightarrow{y}_s$ і $\overrightarrow{x}_e$ не з'єднані. Матимемо таку схему (Рис. 3), а з нею – і формулу $A_{sf} = Q^{-1}A_{qs}\mathcal{P}$.

4. Лінійний оператор у гільбертовому просторі. Спряжений оператор та його матриця. Нехай H^n – гільбертів простір вимірності n і нехай $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n$ – ортонормований базис. Припустимо, що A є лінійним відображенням простору H^n в себе:

$$A: \ H^n \to H^n.$$

Тоді як вектор $\overrightarrow{x}$, так і вектор $A\overrightarrow{x}$ лежать в одному просторі й можна говорити про скалярний добуток

$$(A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \quad \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in H^n.$$

Визначення 1. *Оператор A^* називається спряженим до оператора A, якщо виконується рівність*

$$(A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{x}, A^*\overrightarrow{y})$$

для всіх векторів $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y} \in H^n$.

Легко перевірити, що A^* є дійсно лінійним відображенням простору H^n в H^n.

Нехай далі $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n$ – ортонормований базис у гільбертовому просторі H^n, а

$$A\overrightarrow{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\overrightarrow{e}_j.$$

Тоді

$$(A\overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\overrightarrow{e}_j, \overrightarrow{e}_k\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}(\overrightarrow{e}_j, \overrightarrow{e}_k) = a_{ki},$$

оскільки базис ортонормований. Так само, нехай

$$A^*\overrightarrow{e}_k = \sum_{j=1}^{n} a^*_{jk}\overrightarrow{e}_j$$

і, отже,

$$a_{ki} = (A\overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_k) = (\overrightarrow{e}_i, A^*\overrightarrow{e}_k) = \left(\overrightarrow{e}_i, \sum_{j=1}^{n} a^*_{jk}\overrightarrow{e}_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\overrightarrow{e}_i, a_{jk}^* \overrightarrow{e}_j) = \overline{a_{ik}^*}.$$

Отже,

$$a_{ik}^* = \overline{a_{ki}}.$$

Якщо всі a_{ki} дійсні числа, то

$$a_{ik}^* = a_{ki}$$

і матриця спряженого оператора є транспонованою матрицею A^* до матриці A.

Визначення 2. *Оператор називаєтъся самоспряженим або симетричним, якщо $a_{ik}^* = a_{ik}$, тобто коли $a_{ik} = \overline{a_{ki}}$.*

При дійсних a_{ik} матриця самоспряженого оператора симетрична відносно головної діагоналі.

5. Власні значення та власні вектори лінійного оператора. Властивість власних значень та власних векторів самоспряженого оператора. Нехай V – лінійний простір, A – лінійне відображення цього простору в себе.

Визначення. *Вектор $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ називаєтъся власним вектором оператора A, якщо існує, взагалі кажучи, комплексне число λ, що*

$$A\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{x}.$$

Число λ називається *власним числом оператора A, яке відповідає вектору $\overrightarrow{x}$.*

Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Лінійна комбінація власних векторів, які відповідають власному значенню λ, є власним вектором із тим самим власним значенням.*

Доведення. Нехай $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \ldots, \overrightarrow{x}_n$ – власні вектори, які відповідають власному значенню λ, і нехай $\overrightarrow{x}$ – лінійна комбінація цих векторів, тобто

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{x}_i, \quad \alpha_i \in C.$$

Тоді

$$A\overrightarrow{x}_i = \lambda \overrightarrow{x}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

і, використовуючи лінійність оператора A, матимемо:

$$A\overrightarrow{x} = A\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i A\overrightarrow{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda \overrightarrow{x}_i = \lambda \overrightarrow{x}.$$

Теорема доведена.

Таким чином, якщо об'єднати множину власних векторів, які відповідають одному й тому значенню λ, з нейтральним елементом $\overrightarrow{0}$, то одержимо підпростір лінійного простору V, який називається *власним підпростором*, що відповідає власному значенню λ, і позначається V_λ.

Припустимо тепер, що оператор A діє в гільбертовому просторі H і що він самоспряжений. Тоді мають місце такі твердження.

Теорема 2. *Власні значення самоспряженого оператора A в гільбертовому просторі H – дійсні числа.*

Доведення. Нехай $\lambda \in C$ – власне значення оператора A, яке відповідає власному вектору $\overrightarrow{x}$. Тоді

$$A\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{x}.$$

Помноживши рівність скалярно на $\overrightarrow{x}$, маємо:

$$(\lambda \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = (A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$$

і

$$\lambda = \frac{(A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})}{\|\overrightarrow{x}\|^2}.$$

Оскільки $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$, то $\|\overrightarrow{x}\|^2 > 0$, а

$$(A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}) = \overline{(A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})}.$$

Отже, величина $(A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ збігається зі своєю спряженою, а це означає, що $(A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ – дійсне число, тоді λ – теж дійсне число.

Теорема 3. *Власні вектори самоспряженого оператора, що відповідають різним власним значенням, ортогональні.*

Доведення. Нехай $\overrightarrow{x}$ – власний вектор самоспряженого оператора A, який відповідає власному числу λ, а $\overrightarrow{y}$ – власний вектор із власним числом μ. Тоді

$$A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}, \quad A\overrightarrow{y} = \mu\overrightarrow{y}.$$

Нехай $\lambda \neq \mu$. Розглянемо

$$(A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}).$$

Користуючись тим, що A самоспряжений і що вектор $\overrightarrow{y}$ власний, маємо:

$$(A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{x}, \mu\overrightarrow{y}) = \mu(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}).$$

За теоремою 2 $\overline{\mu} = \mu$ і

$$\lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \mu(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \quad \text{або} \quad (\lambda - \mu)(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0.$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0$, і теорема доведена.

6. Знаходження власних значень та власних векторів лінійних операторів. Матриця оператора в базисі з власних векторів. Нехай вимірність гільбертового простору дорівнює n. Тоді матриця лінійного оператора A має розмір $n \times n$, і задача знаходження власних значень зводиться до такої системи лінійних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Або в розгорненому вигляді

$$(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0,$$

$$a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0.$$

Для того, щоб ця система мала відмінний від нуля розв'язок, необхідно й досить, щоб визначник її дорівнював нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо ввести до розгляду одиничну матрицю I розміру $n \times n$, то остаточно рівність у скороченому вигляді можна записати так:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Вона називається дискримінантним рівнянням. Це алгебраїчне рівняння n-го степеня. Воно має n коренів λ_1, λ_2, $\dots$, λ_n, серед яких можуть бути і однакові: якщо збігаються k коренів $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = a$, то корінь $\lambda = a$ називається *коренем кратності* k.

Якщо матриця A симетрична, то, як ми показали, всі корені дійсні, а власні вектори, які відповідають різним власним значенням, ортогональні.

Припустимо, що всі власні значення самоспряженого оператора однакові. Позначимо через $\overrightarrow{e}_i$ власний вектор, що відповідає власному значенню λ_i. Тоді $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\dots$, $\overrightarrow{e}_n$ взаємно ортогональні, і, отже, лінійно незалежні. Ці вектори можна вибрати за базис простору H, і матриця оператора в цьому базисі буде діагональною

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Її позначають через I_λ. У тому випадку, коли є кратні корені, не завжди можна ввести базис із власних векторів. Треба, щоб цих векторів було n. Тоді, якщо $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\dots$, $\overrightarrow{e}_k$ відповідають одному й тому самому власному значенню λ, то ці вектори можна, як кажуть, ортогоналізувати в такий спосіб.

Позначимо через $\overrightarrow{e}'_2 = \overrightarrow{e}_1 - \alpha_2 \overrightarrow{e}_2$ і підберемо α_2 так, щоб $\overrightarrow{e}'_2 \perp \overrightarrow{e}_1$. Тоді

$$(\overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}_1) = (\overrightarrow{e}_1 - \alpha_2 \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_1) = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_1) - \alpha_2(\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_1) = 0.$$

Отже,

$$\alpha_2 = \frac{(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_1)}{(\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_1)}.$$

Далі візьмемо вектор

$$\overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{e}_1 - \beta_2 \overrightarrow{e}'_2 - \beta_3 \overrightarrow{e}_3$$

і підберемо β_2 і β_3 так, щоб $\overrightarrow{e}'_3$ був ортогональний до $\overrightarrow{e}_1$ і $\overrightarrow{e}'_2$. Тоді

$$(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_1) - \beta_2(\overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}_1) - \beta_3(\overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{e}_1) = 0,$$

$$(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}'_2) - \beta_2(\overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}'_2) - \beta_3(\overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{'} e_2) = 0.$$

Звідси

$$\beta_3 = \frac{(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_1)}{(\overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{e}_1)}, \quad \beta_2 = -\beta_3 \frac{(\overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{e}'_2)}{(\overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}'_2)}.$$

Після такої процедури, що називається *методом ортогоналізації Шмідта*, одержимо ортогональну систему $\overrightarrow{e}'_1$, $\overrightarrow{e}'_2$, $\dots$, $\overrightarrow{e}'_n$, яка взаємно ортогональна, і кожен із векторів є власним вектором, що відповідає одному й тому власному значенню λ.

7. Квадратична форма та її матриця. Перетворення матриці квадратичної форми при переході до нового базису. Нехай A – лінійне відображення гільбертового простору H в себе. Вираз

$$(\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x})$$

називається *квадратичною формою*, асоційованою з лінійним оператором A.

Нехай простір H дійсний, має розмірність n, а $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\ldots$, $\overrightarrow{e}_n$ – його базис. Тоді

$$(\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \overrightarrow{e}_i, A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \overrightarrow{e}_j\right)\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (\overrightarrow{e}_i, A\overrightarrow{e}_j) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

де введено позначення

$$a_{ij} = (\overrightarrow{e}_i, A\overrightarrow{e}_j).$$

Якщо базис ортонормований, то a_{ij} є елементами матриці A в цьому базисі.

Нехай тепер у просторі H є другий базис, і матрицю переходу до цього базису позначимо Q. Нехай

$$\overrightarrow{x} = Q\overrightarrow{y}.$$

Тоді

$$(\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}) = (Q\overrightarrow{y}, AQ\overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{y}, Q^* AQ\overrightarrow{y}).$$

Отже, при переході до нового базису матриця A_Q квадратичної форми пов'язана з матрицею A і матрицею переходу Q співвідношенням

$$A_Q = Q^* AQ.$$

Якщо ж обидва базиси ортонормовані, то, як ми знаємо, $Q^* = Q^{-1}$, і формула набиває вигляду $A_Q = Q^{-1}AQ$.

Приклад 1. З'ясувати, чи буде лінійним перетворення φ і знайти його матрицю в тому базисі, в якому задано координати векторів $\overrightarrow{x}$ і $\varphi\overrightarrow{x}$: $\varphi\overrightarrow{x} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$.

Розв'язування. Оскільки $\varphi(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \varphi\overrightarrow{x} + \varphi\overrightarrow{y}$, $\varphi(\alpha\overrightarrow{x}) = \alpha\varphi\overrightarrow{x}$, де α – довільне число, то відображення φ – лінійне.

Базис, в якому задано координати векторів $\overrightarrow{x}$ і $\varphi\overrightarrow{x}$, позначимо через $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$, тоді координати базисних векторів $\{\overrightarrow{e}\}$ у цьому базисі: $\overrightarrow{e}_1 = \{1, 0, 0\}$, $\overrightarrow{e}_2 = \{0, 1, 0\}$, $\overrightarrow{e}_3 = \{0, 0, 1\}$ і $\varphi\overrightarrow{e}_1 = \{1, 0, 1\}$, $\varphi\overrightarrow{e}_2 = \{1, 1, 1\}$, $\varphi\overrightarrow{e}_2 = \{0, 1, -1\}$, а матриця перетворення φ буде такою:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. З'ясувати, чи буде лінійним перетворення φ: $\varphi\overrightarrow{x} = \{x_1 + 1, x_2, x_3\}$.

Розв'язування. Нехай $\overrightarrow{x}$ і $\overrightarrow{y}$ – довільні вектори, тоді $\varphi\overrightarrow{x} = \{x_1+1, x_2, x_3\}$, $\varphi\overrightarrow{y} = \{y_1+1, y_2, y_3\}$ і $\varphi(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \{x_1+y_1+1, x_2+y_2, x_3+y_3\}$, а $\varphi\overrightarrow{x} + \varphi\overrightarrow{y} = \{x_1 + y_1 + 2, x_2 + y_2, x_3 + y_3\}$. Оскільки $\varphi(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \neq \varphi\overrightarrow{x} + \varphi\overrightarrow{y}$, то перетворення φ не є лінійним.

Приклад 3. Показати, що існує єдине лінійне перетворення тривимірного простору, яке переводить вектори $\overrightarrow{a}_1 = \{1, 0, 3\}$, $\overrightarrow{a}_2 = \{2, 1, 0\}$, $\overrightarrow{a}_3 = \{0, 0, 1\}$ відповідно у вектори $\overrightarrow{b}_1 = \{2, 2, 1\}$, $\overrightarrow{b}_2 = \{2, 1, 0\}$, $\overrightarrow{b}_3 = \{1, 2, 3\}$. Знайти матрицю цього перетворення в базисі, в якому задано координати всіх векторів.

Розв'язування. Щоб переконатися в існуванні єдиного лінійного перетворення, досить показати, що вектори $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$, $\overrightarrow{a}_3$ лінійно незалежні. Оскільки система $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0, \\ \beta = 0, \\ 3\alpha + \gamma = 0 \end{cases}$ має тільки тривіальний розв'язок $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, то вектори $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$, $\overrightarrow{a}_3$ лінійно незалежні. Позначимо базис, в якому задані всі вектори, через $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$, а матрицю шуканого перетворення в цьому базисі через A, тоді $A\overrightarrow{a}_1 = \overrightarrow{b}_1$, $A\overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{b}_2$, $A\overrightarrow{a}_3 = \overrightarrow{b}_3$, або в матричній формі

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язуючи це матричне рівняння, дістанемо шукану матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -4 & 9 & 2 \\ -8 & 16 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Лінійне перетворення φ у базисі $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$ має матрицю $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю цього перетворення в базисі $\overrightarrow{f}_1 = \overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{f}_2 = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{f}_3 = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3$.

Розв'язування. Матриця переходу від базису $\{\overrightarrow{e}\}$ до базису $\{\overrightarrow{f}\}$ є $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а обернена до неї $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Тоді за формулою $A_f = T^{-1}A_eT$ дістанемо

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Знайти власні значення й власні вектори лінійних перетворень, заданих у деякому базисі матрицею $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Складаємо характеристичне рівняння перетворення

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корені його $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ є власними значеннями. Позначимо через $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$ базис, в якому задане лінійне перетворення матрицею A, а через x_1, x_2, x_3 – координати власного вектора. Складемо систему однорідних рівнянь

$$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

фундаментальні розв'язки якої і будуть власними векторами. Для кореня $\lambda = 1$ дана система набуває вигляду

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 \qquad\quad = 0. \end{cases}$$

Ранг матриці системи дорівнює двом, тому фундаментальна система має один розв'язок, наприклад $(1, 0, 1)$. Власні вектори для $\lambda = 1$: $c(1, 0, 1)$, де $c \neq 0$. Для кореня $\lambda = -1$ система однорідних рівнянь набуває вигляду

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 \qquad\quad = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальна система має один розв'язок, наприклад $(1, 0, -1)$, а власні вектори для $\lambda = -1$ будуть: $c(1, 0, -1)$, де $c \neq 0$.

Задачі для самостійної роботи

З'ясувати, які з перетворень φ є лінійними, і для лінійних знайти їх матриці в тому базисі, в якому задано координати векторів $\overrightarrow{x}$ і $\varphi\overrightarrow{x}$:

1. $\varphi\overrightarrow{x} = (x_1, x_3, x_2 - 2x_3)$;
2. $\varphi\overrightarrow{x} = (x_1, x_2^3, x_1 + x_2)$;
3. $\varphi\overrightarrow{x} = (x_3, x_2, x_1 + 3x_2 - x_3)$;
4. $\varphi\overrightarrow{x} = (x_4 + x_3, x_2 + x_4, x_3 + x_1, 2x_1 + x_1)$.

   Показати, що існує єдине лінійне перетворення тривимірного простору, яке переводить вектори $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$, $\overrightarrow{a}_3$ відповідно у вектори $\overrightarrow{b}_1$, $\overrightarrow{b}_2$, $\overrightarrow{b}_3$. Знайти матрицю цього перетворення в базисі, в якому задано координати всіх векторів:

5. $\overrightarrow{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{b}_1 = (-2, 4, 9)$;
   $\overrightarrow{a}_2 = (1, 1, 2)$, $\overrightarrow{b}_2 = (-1, 2, 6)$;
   $\overrightarrow{a}_3 = (3, 1, 1)$, $\overrightarrow{b}_3 = (2, -1, 6)$;
6. $\overrightarrow{a}_1 = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{b}_1 = (1, 2, 0)$;
   $\overrightarrow{a}_2 = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{b}_2 = (4, 1, 1)$;
   $\overrightarrow{a}_3 = (0, 0, 2)$, $\overrightarrow{b}_3 = (1, 2, 3)$;
7. $\overrightarrow{a}_1 = (-1, 2, 3)$, $\overrightarrow{b}_1 = (6, 9, 8)$;
   $\overrightarrow{a}_2 = (1, -2, -1)$, $\overrightarrow{b}_2 = (-4, -3, -6)$;
   $\overrightarrow{a}_3 = (2, 1, 1)$, $\overrightarrow{b}_3 = (5, 8, 6)$.
8. Нехай лінійне перетворення φ простору R_n переводить лінійно незалежні вектори $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \ldots, \overrightarrow{a}_n$ відповідно у вектори $\overrightarrow{b}_1$, $\overrightarrow{b}_2, \ldots, \overrightarrow{b}_n$. Показати, що матрицю A_φ цього перетворення в деякому базисі $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n$ можна знайти за формулою $A_\varphi = BA^{-1}$, де стовпці матриць A та B складаються з координат векторів $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \ldots, \overrightarrow{a}_n$ та відповідно $\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \ldots$, $\overrightarrow{b}_n$ у базисі $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n$.
9. Показати, що диференціювання є лінійним перетворенням простору всіх многочленів степеня $\leq n$ від одного невідомого.

Знайти матрицю цього перетворення в базисі:

а) $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$;

б) $1,\ x-a,\ \dfrac{(x-a)^2}{2},\ \ldots,\ \dfrac{(x-a)^n}{n!}$, де a – дійсне число.

10. Як зміниться лінійне перетворення, якщо в базисі $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\ldots$, $\overrightarrow{e}_n$ поміняти місцями два вектори $\overrightarrow{e}_i$ і $\overrightarrow{e}_j$?

11. Лінійне перетворення φ у базисі $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$ має матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю цього перетворення в базисі $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_3$, $\overrightarrow{e}_2$.

12. Лінійне перетворення φ в базисі $\overrightarrow{a}_1 = (8,-6,7)$, $\overrightarrow{a}_2 = (-16,7,-13)$, $\overrightarrow{a}_3 = (9,-3,7)$ має матрицю $\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$.

Знайти його матрицю в базисі $\overrightarrow{b}_1 = (1,-2,1)$, $\overrightarrow{b}_2 = (3,-1,2)$, $\overrightarrow{b}_3 = (2,1,2)$.

13. Знайти власні значення та власні вектори лінійних перетворень, заданих у деякому базисі матрицями:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

14. З'ясувати, які з наступних матриць лінійних перетворень можна звести до діагонального вигляду. Знайти діагональну матрицю, відповідний до неї базис та матрицю переходу до базису з власних векторів:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

Відповіді

1. φ – лінійне перетворення, його матриця $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
2. φ – не є лінійним перетворенням.
3. φ – лінійне перетворення, його матриця $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.
4. φ – лінійне перетворення, його матриця $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. 7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
9. а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
10. У матриці поміняються місцями i-й та j-й рядки та i-ий та j-ий стовпці.

11. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

13. а) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$. Власні вектори: $C(2,-3,2)$ для $\lambda = 1$, $C(2,0,1)$ для $\lambda = 2$, $C(2,0,-1)$ для $\lambda = -2$, $C \neq 0$; б) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Власні вектори: $C_1(2,1,0) + C_2(1,0,-1)$ для $\lambda = 1$, $C(3,5,0)$ для $\lambda = -1$, де C_1 і C_2 не дорівнюють нулю одночасно, $C \neq 0$; в) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Власні вектори: $C(1,1,1)$ для $\lambda = 1$, $C(1,2,3)$ для $\lambda = 0$, де $C \neq 0$; г) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Власні вектори: $C(0,0,0,1)$ для $\lambda = 1$, $C_1(0,1,0,0) + C_2(0,0,1,0)$ для $\lambda = 0$, де C_1 і C_2 не дорівнюють нулю одночасно, $C \neq 0$; д) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Власні вектори: $C(1,2,2)$ для $\lambda = 3$, $C(1,2,1)$ для $\lambda = -1$, де $C \neq 0$.

14. а) Характеристичне рівняння $|A - \lambda E| = \lambda^2(1-\lambda) - 4(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4) = 0$ має три різні корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$. Отже, матриця A подібна до діагональної матриці $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Ця матриця є матрицею лінійного перетворення в базисі $\{\overrightarrow{f}\}$, який складають власні вектори. Власні вектори, що відповідають власним значенням 1, 2, -2 відповідно, запишемо у вигляді $\overrightarrow{f}_1 = \{5,-3,2\}$, $\overrightarrow{f}_2 = \{2,0,1\}$, $\overrightarrow{f}_3 = \{2,0,-1\}$. Координати цих векторів записані в базисі $\{\overrightarrow{e}\}$, в якому перетворення має матрицю A. Записуючи координати власних векторів матриці B, дістаємо перетворену матрицю $T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

б) **Вказівка.** Характеристичне рівняння $|A - \lambda E| = \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0$ має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. Власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda = -1$, знаходимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 0, \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальна система складається з одного розв'язку, наприклад $(1, 2, 1)$; власні вектори $C(1, 2, 1)$, де $C \neq 0$. Оскільки двократному кореню $\lambda = -1$ відповідає лише один лінійно незалежний власний вектор, то матрицю A лінійного перетворення не можна звести до діагонального вигляду. Власні вектори, що відповідають $\lambda = 3$, мають вигляд $C(1, 2, 2)$, де $C \neq 0$. **Зауваження.** Якщо хоча б для одного кореня λ кратності m фундаментальна система розв'язків містить менше за m розв'язків, то матриця A не може бути зведена до діагональної; перетвореної матриці T не існує;

в) Матриця до діагонального вигляду не зводиться й перетвореної матриці не існує;

г) $\overrightarrow{f}_1 = \{1, 0, -1\}$, $\overrightarrow{f}_2 = \{1, 3, 8\}$, $\overrightarrow{f}_3 = \{-1, 3, -8\}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 8 \end{pmatrix}$;

д) Матриця до діагонального вигляду не зводиться й перетвореної матриці не існує;

е) $\overrightarrow{f}_1 = \{2, 1, 0\}$, $\overrightarrow{f}_2 = \{1, 0, -1\}$, $\overrightarrow{f}_3 = \{3, 5, 6\}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Тема 19. Білінійні та квадратичні форми

1. Білінійні форми

Визначення 1. *Числова функція* $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, *аргументом якої є всеможливі вектори* $\overrightarrow{x}$ *і* $\overrightarrow{y}$ *дійсного лінійного простору* L, *називається білінійною формою, якщо для довільних векторів* $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ *і* $\overrightarrow{z}$ *із* L *і довільного дійсного числа* λ *виконуються співвідношення*

$$A(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}, \overrightarrow{y}) = A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) + A(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{y}),$$

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) + A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}),$$

$$A(\lambda\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \lambda A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}),$$

$$A(\overrightarrow{x}, \lambda\overrightarrow{y}) = \lambda A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}).$$

Визначення 2. *Білінійна форма* $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ *називається симетричною (кососиметричною), якщо для довільних векторів* $\overrightarrow{x}$ *і* $\overrightarrow{y}$ *лінійного простору* L *виконується співвідношення*

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = A(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}) \quad (A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = -A(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})).$$

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Білінійна форма* $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ *при заданому у* n-*мірному лінійному просторі базисі* $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n$ *може бути однозначно зображена у вигляді*

$$B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \sum_{ij=1}^{n} b_{ij}\xi_i\eta_j, \tag{19.1}$$

де $b_{ij} = B(\overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j)$, *а* ξ_i, η_j *координати у базисі* $\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n$ *векторів* $\overrightarrow{x}$ *і* $\overrightarrow{y}$ *відповідно.*

Доведення. Нехай $\overrightarrow{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \overrightarrow{e}_i$ і $\overrightarrow{y} = \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j \overrightarrow{e}_j$ – розвинення векторів $\overrightarrow{x}$ і $\overrightarrow{y}$ за базисом $\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n$. Оскільки форма

$B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ лінійна за кожним із аргументів $\overrightarrow{x}$ і $\overrightarrow{y}$, то

$$B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = B\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \overrightarrow{e}_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j \overrightarrow{e}_j\right) = \sum_{ij=1}^{n} B(\overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j)\xi_i \eta_j.$$

Отже, для форми $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ справедливе зображення (19.1).

Визначення 3. *Матриця* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$, *де* $b_{ij} = B(\overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j)$, *називається матрицею білінійної форми* $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ *у заданому базисі* $\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n$.

Визначення 4. *Рангом білінійної форми, заданої у скінченновимірному лінійному просторі* L, *називається ранг матриці цієї форми в довільному базисі простору* L.

Визначення 5. *Білінійна форма* $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, *задана у скінченновимірному лінійному просторі* L, *називається невиродженою (виродженою), якщо її ранг дорівнює (менше) розмірності простору* L.

2. Квадратичні форми. Нехай $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ – симетрична білінійна форма, задана на лінійному просторі L.

Визначення 6. *Квадратичною формою називається числова функція* $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ *одного векторного аргумента* $\overrightarrow{x}$, *яка одержується з білінійної форми* $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ *при* $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$.

Симетрична білінійна форма $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ називається *полярною до квадратичної форми* $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$.

Нехай у скінченновимірному лінійному просторі L задано симетричну білінійну форму $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, полярну до квадратичної форми $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$. Крім того, у L заданий базис $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n$.

Поклавши у (19.1) $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ (тобто $\xi_i = \eta_i$), одержимо зображення квадратичної форми $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ у скінченновимірному просторі

L із заданим базисом $\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n$:

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j. \tag{19.2}$$

Матриця (a_{ij}) називається *матрицею квадратичної форми* $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ у заданому базисі $\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n$. Ранг матриці квадратичної форми $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ називається *рангом квадратичної форми.*

Визначення 7. *Квадратична форма* $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ *називається:*

1) додатно (від'ємно) визначеною, якщо для будь-якого ненульового $\overrightarrow{x}$ *виконується нерівність*

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) > 0 \quad (A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) < 0)$$

(такі форми називаються знаковизначеними);

2) знакозмінною, якщо існують такі $\overrightarrow{x}$ *і* $\overrightarrow{y}$, *що*

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) > 0, \quad A(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y}) < 0;$$

3) квазізнаковизначеною, якщо для всіх $\overrightarrow{x}$

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) \geq 0, \quad \text{або} \quad A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) \leq 0,$$

але існує відмінний від нуля вектор $\overrightarrow{x}$, *для якого* $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0$.

3. Зведення квадратичної форми до суми квадратів. Нехай квадратична форма $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ у базисі $\overrightarrow{f}_1, \dots, \overrightarrow{f}_n$ зводиться до вигляду

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \cdots + \lambda_n\eta_n^2 \tag{19.3}$$

який називається *канонічним виглядом квадратичної форми*, де $(\eta_1, \eta_1, \dots, \eta_n)$ – коефіцієнти $\overrightarrow{x}$ у базисі $\overrightarrow{f}_1, \dots, \overrightarrow{f}_n$.

Коефіцієнти $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ у формулі (19.3) називаються *канонічними коефіцієнтами.*

Розглянемо деякі методи зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

а) Метод Лагранжа.

Теорема 2. *Довільна квадратична форма $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$, задана у n-вимірному лінійному просторі L, за допомогою невиродженого лінійного перетворення координат може бути зведена до канонічного вигляду (19.3).*

Доведення. Основна ідея цього методу полягає в послідовному доповненні квадратного тричлена за кожним аргументом до повного квадрата. Будемо вважати, що $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) \neq 0$ і в деякому базисі $\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n$ зображена у вигляді

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\xi_i\eta_j. \tag{19.4}$$

У випадку, коли $a_{ii} = 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, але відмінний від нуля коефіцієнт $a_{ij} \neq 0$, то після невиродженого перетворення координат

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j, \\ x_j = y_i + y_j, \\ x_k = y_k, \;\; k \neq i, k \neq j \end{cases}$$

коефіцієнт при y_i^2 буде дорівнювати $2a_{ij} \neq 0$.

Отже, будемо вважати, що у співвідношенні (19.4) $a_{11} \neq 0$. Тому запишемо квадратичну форму $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ у вигляді

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = a_{11}\xi_1^2 + 2\xi_1 \sum_{j=2}^{n} a_{1j}\xi_j + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j =$$

$$= a_{11}\left(\xi_1 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^{n} a_{1j}\xi_j\right)^2 + \sum_{ij=2}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j - \frac{1}{a_{11}}\left(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}\xi_j\right)^2 =$$

$$= a_{11}\left(\xi_1 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^{n} a_{1j}\xi_j\right)^2 + \sum_{ij=2}^{n} b_{ij}\xi_i\xi_j.$$

За допомогою невиродженого перетворення

$$\begin{cases} t_1 = \xi_1 + \frac{1}{a_{11}} \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j}\xi_j, \\ t_k = \xi_k, \ \ k = \{2, 3, \dots, n\} \end{cases}$$

для $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ одержимо

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = a_{11}t_1^2 + \sum_{ij=2}^{n} b_{ij}t_it_j.$$

Продовжуючи виділяти повні квадрати для квадратичної форми $\sum\limits_{ij=2}^{n} b_{ij}t_it_j$, одержимо формулу (19.3).

б) Метод Якобі.

Визначення 8. *Перетворення базисних векторів $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \dots, \overrightarrow{e}_n$ називається трикутним, якщо воно має вигляд*

$$\begin{cases} \overrightarrow{f}_1 = \overrightarrow{e}_1, \\ \overrightarrow{f}_2 = \alpha_{21}\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2, \\ \overrightarrow{f}_3 = \alpha_{31}\overrightarrow{e}_1 + \alpha_{32}\overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overrightarrow{f}_n = \alpha_{n1}\overrightarrow{e}_1 + \alpha_{n2}\overrightarrow{e}_2 + \dots + \overrightarrow{e}_n. \end{cases} \tag{19.5}$$

Запишемо матрицю квадратичної форми $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ у базисі $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \dots, \overrightarrow{e}_n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Мінори

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det A$$

будемо називати *кутовими мінорами матриці A.*

Теорема 3. *Нехай мінори Δ_1, Δ_2, $\ldots$, Δ_{n-1} матриці (a_{ij}) квадратичної форми $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ відмінні від нуля. Тоді існує єдине трикутне перетворення базисних векторів $\overrightarrow{e}_1$, $\ldots$, $\overrightarrow{e}_n$, за допомогою якого форму $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ можна звести до канонічного вигляду.*

Доведення. Оскільки коефіцієнти b_{ij} форми $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ у базисі $\overrightarrow{f}_1$, $\overrightarrow{f}_2$, $\ldots$, $\overrightarrow{f}_n$ вираховуються за формулами

$$b_{ij} = A(f_i, f_j),$$

то форма $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ у цьому базисі матиме канонічний вигляд, коли $b_{ij} = 0$, $i \neq j$. Тому для доведення теореми досить побудувати за допомогою трикутного перетворення (19.5) такий базис $\overrightarrow{f}_1$, $\ldots$, $\overrightarrow{f}_n$, в якому будуть виконуватися співвідношення

$$A(e_1, f_j) = 0, A(e_2, f_j) = 0, \ldots, A(e_{j-1}, f_j) = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n. \tag{19.6}$$

Позначимо через $a_{ij} = A(e_i, e_j)$ і запишемо систему (19.6) у розгорнутому вигляді. Маємо

$$\begin{cases} \alpha_{j1}a_{11} + \alpha_{j2}a_{12} + \cdots + \alpha_{j,j-1}a_{1,j-1} + a_{1j} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{j1}a_{j-1,1} + \alpha_{j2}a_{j-1,2} + \cdots + \alpha_{j,j-1}a_{j-1,j-1} + a_{j-1,j} = 0. \end{cases} \tag{19.7}$$

Визначник цієї системи Δ_{j-1}. За умовою $\Delta_{j-1} \neq 0$. Отже, система (19.7) має єдиний розв'язок і можна побудувати єдине трикутне перетворення базисних векторів, за допомогою якого форма $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ зводиться до канонічного вигляду.

Позначимо символом $\Delta_{j-1,i}$ мінор матриці (a_{ij}), розміщений на перетині рядків цієї матриці з номерами 1, 2, $\ldots$, $j-1$ і стовпців з номерами 1, 2, $\ldots$, $i-1$, $i+1$, $\ldots$, j. Тоді, використовуючи формули Крамера, маємо:

$$\alpha_{ji} = (-1)^{i+j}\frac{\Delta_{j-1,i}}{\Delta_{j-1}}. \tag{19.8}$$

Оскільки $\lambda_j = A(f_i, f_j) = \alpha_{j1}a_{1j} + \alpha_{j2}a_{2j} + \cdots + \alpha_{j,j-1}a_{j-1,j} + a_{jj}$, то, використавши формули (19.8), знаходимо:

$$\lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}, \quad j = 2, 3, \ldots, n, \tag{19.9}$$

$$\lambda_1 = A(f_1, f_1) = A(e_1, e_1) = a_{11} = \Delta_1.$$

4. Закон інерції квадратичних форм. Нехай квадратична форма за допомогою невиродженого перетворення координат зведена до канонічного вигляду

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_q y_q^2 - \lambda_{q+1} y_{q+1}^2 - \cdots - \lambda_k y_k^2, \quad \lambda_i > 0.$$

Розглянемо невироджене перетворення координат

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} z_1, \ldots, y_q = \frac{1}{\sqrt{\lambda_q}} z_q, y_{q+1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{q+1}}} z_{q+1}, \ldots,$$

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} z_k. \tag{19.10}$$

У результаті перетворення (19.10) квадратична форма $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ має нормальний вигляд

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = z_1^2 + \cdots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \cdots - z_k^2. \tag{19.11}$$

Правильна така теорема.

Теорема 4 (закон інерції квадратичних форм). *Кількість доданків із додатними (від'ємними) коефіцієнтами в нормальному вигляді квадратичної форми не залежить від способу зведення форми до цього вигляду.*

Доведення. Нехай квадратична форма за допомогою невироджених перетворень зведена до (19.11) і

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_p^2 - \xi_{p+1}^2 - \cdots - \xi_k^2. \tag{19.12}$$

Покажемо, що $p = q$. Нехай $p > q$. Покажемо, що існує $\overrightarrow{x} \neq 0$, що по відношенню до базисів, в яких форма $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ має вигляд (19.11) і (19.12), координати

$$z_1 = 0, \ldots, z_q = 0, \xi_{p+1} = 0, \ldots, \xi_k = 0. \tag{19.13}$$

Оскільки координати z_i і ξ_j одержані шляхом невиродженого перетворення координат $x_1, \ldots, x_n$, то співвідношення (19.13) можна розглядати як систему лінійних алгебраїчних рівнянь, кількість яких менша за n. Тому існує ненульовий розв'язок такої системи $\overrightarrow{x}^*$, для якого виконано співвідношення (19.13). Отже,

$$A(\overrightarrow{x}^*, \overrightarrow{x}^*) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_p^2 = -z_{q+1}^2 - \cdots - z_k^2. \tag{19.14}$$

Співвідношення (19.14) мають місце лише у випадку $\xi_1 = 0, \ldots, \xi_p = 0$, $z_{q+1} = 0, \ldots, z_k = 0$. Отже, всі координати ненульового вектора $\overrightarrow{x}^*$ дорівнюють нулю. Тому при $p > q$ одержано протиріччя. Таким чином, $p = q$.

Визначення 9. *Індексом інерції квадратичної форми називається кількість відмінних від нуля канонічних коефіцієнтів цієї форми. Додатним індексом інерції – кількість додатних канонічних коефіцієнтів. Від'ємним індексом інерції – кількість від'ємних канонічних коефіцієнтів.*

Правильні твердження.

1^0. *Для того, щоб квадратична форма $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$, задана в n-мірному лінійному просторі L, була знаковизначеною, необхідно та достатньо, щоб або додатний індекс інерції p або від'ємний індекс інерції q дорівнював розмірності n простору L.*

При цьому, якщо $p = n$, то форма додатно визначена; якщо $q = n$, то форма від'ємно визначена.

Доведення. 1) Необхідність. Нехай форма $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ додатно визначена. Тоді вираз (19.11) має вигляд

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2. \tag{19.15}$$

Якщо $p < n$, то із (19.15) випливає, що для вектора $\overrightarrow{x} \neq 0$ з координатами $z_1 = 0, \ldots, z_p = 0, z_{p+1} \neq 0, \ldots, z_n \neq 0$ форма $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0$, а це суперечить нерівності $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) > 0$ для всіх $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$. Отже, $p = n$.

2) Достатність. Нехай $p = n$, тоді

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = z_1^2 + \cdots + z_n^2.$$

Отже, $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) \geq 0$, причому якщо $A = 0$, то $z_1 = 0, \ldots, z_n = 0$, тобто $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Тому $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ додатно визначена. Аналогічно можна розглянути випадок від'ємно визначеної квадратичної форми.

2^0. *Для того, щоб квадратична форма була знакозмінною, необхідно й достатньо, щоб додатний і від'ємний індекс інерції цієї форми були відмінні від нуля.*

Доведення. 1) Необхідність. Оскільки знакозмінна квадратична форма набуває як додатного, так і від'ємного значення, то її зображення (19.11) у нормальному вигляді повинно містити як додатні, так і від'ємні доданки (в іншому випадку ця форма набувала б або невід'ємних, або недодатних значень). Отже, додатний і від'ємний індекс інерції відмінний від нуля.

2) Достатність. Нехай $q \neq 0$, $k - q \neq 0$. Тоді для вектора $\overrightarrow{x}^*$ з координатами $z_1 \neq 0, \ldots, z_q \neq 0, z_{q+1} = 0, \ldots, z_k = 0$ маємо $A(\overrightarrow{x}^*, \overrightarrow{x}^*) > 0$, а для вектора $\overrightarrow{y}$ з координатами $z_1 = 0, \ldots, z_q = 0, z_{q+1} \neq 0, \ldots, z_k \neq 0$ маємо $A(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y}) < 0$. Отже, форма $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ – знакозмінна.

5. Критерій Сільвестра знаковизначенності квадратичної форми. Нехай форма $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ у базисі $\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n$ визначена матрицею $A(e) = (a_{ij})$:

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

і

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

– кутові мінори матриці $A(e)$.

Теорема 5 (критерій Сільвестра). *Для того, щоб квадратична форма $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ була додатно визначеною, необхідно й достатнъо, щоб виконувалися нерівності*

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Для того, щоб квадратична форма була від'ємно визначеною, необхідно й достатнъо, щоб знаки кутових мінорів чергувалися, причому $\Delta_1 < 0$.

Доведення. 1) Необхідність. Покажемо, що $\Delta_k \neq 0$. Доведення проведемо від супротивного. Нехай $\Delta_k = 0$. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k = 0, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2k}x_k = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kk}x_k = 0. \end{cases} \tag{19.16}$$

Оскільки $\Delta_k = 0$, то система (19.16) має ненульовий розв'язок $x_1, \dots, x_k$. Помножимо перше рівняння на x_1, друге – на x_2 і т.д., останнє на x_k і додамо. Одержимо

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = 0.$$

Одержаний вираз є значенням квадратичної форми $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ для ненульового вектора з координатами $(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$. Це суперечить знаковизначенності квадратичної форми. Отже, $\Delta_k \neq 0$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тому, скориставшись методом Якобі, маємо

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

де
$$\lambda_1=\Delta_1, \lambda_k=\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, k\in\{2,3,\ldots,n\}. \qquad (19.17)$$
Якщо $A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})>0$, то $\lambda_k>0$, а тому $\Delta_k>0$. Якщо $A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})<0$, то $\lambda_k<0$, а тому
$$\Delta_1<0, \Delta_2>0, \Delta_3<0, \Delta_4>0, \ldots$$

2) Достатність. Нехай виконані умови, накладені на кутові мінори з формулювання теореми. Оскільки $\Delta_k\neq 0$, то форму $A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})$ можна звести до суми квадратів Якобі, причому канонічні коефіцієнти визначаються за формулами (19.17). Якщо $\Delta_k>0$, то $\lambda_k>0$, тобто $A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})>0$. Якщо знаки Δ_j чергуються і $\Delta_1<0$, то з формул (19.17) випливає, що $A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})<0$.

Приклад 1. Методом утворення повних квадратів звести квадратичну форму до нормального вигляду
$$A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3.$$

Розв'язування. Запишемо квадратичну форму у вигляді
$$A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})=x_1^2+x_1(2x_2+x_3)+(2x_2+x_3)^2-(2x_2+x_3)^2+x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3.$$
Виділивши повний квадрат відносно доданків зі змінною x_1, маємо:
$$A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})=(x_1+2x_2+x_3)^2-3x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2.$$
Аналогічно виділяємо повний квадрат відносно доданків, що містять змінну x_2, одержимо:
$$A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})=(x_1+2x_2+x_3)^2-3(x_2^2+\frac{2}{3}x_2x_3+\frac{x_3^2}{9})+\frac{x_3^2}{3}+2x_3^2=$$
$$=(x_1+2x_2+x_3)^2-3(x_2+\frac{1}{3}x_3)^2+\frac{7}{3}x_3^2.$$

Зробивши невироджене перетворення

$$\begin{cases} t_1 = x_1 + 2x_2 + x_3, \\ t_2 = \sqrt{3}(x_2 + \frac{1}{3}x_3), \\ t_3 = \sqrt{\frac{7}{3}}x_3 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = t_1 - \frac{2}{\sqrt{3}}t_2 + (\frac{2}{\sqrt{21}} - \sqrt{\frac{3}{7}})t_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}t_2 - \frac{1}{\sqrt{21}}t_3, \\ x_3 = \sqrt{\frac{3}{7}}t_3 \end{cases}$$

маємо:

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = t_1^2 - t_2^2 + t_3^2.$$

Приклад 2. Методом утворення повних квадратів звести квадратичну форму до нормального вигляду

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + 4x_1x_3.$$

Розв'язування. Зробимо невироджене перетворення

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \\ y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2), \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

Одержимо

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3 = y_1^2 - y_2^2 + 5y_1y_3 - 3y_2y_3.$$

Виділимо повний квадрат відносно доданків, що містять змінну y_1, маємо:

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = (y_1^2 + 5y_1y_3 + \frac{25}{4}y_3^2) - \frac{25}{4}y_3^2 - y_2^2 - 3y_2y_3 =$$

$$= (y_1 + \frac{5}{2}y_3)^2 - y_2^2 - 3y_2y_3 - \frac{25}{4}y_3^2.$$

Аналогічно виділяємо квадрат відносно доданків, що містять змінну y_2. Одержимо

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = (y_1^2 + \frac{5}{2}y_3)^2 - (y_2^2 + 3y_2y_3 + \frac{9}{4}y_3^2) - \frac{9}{4}y_3^2 - \frac{25}{4}y_3^2 =$$

$$= (y_1 + \frac{5}{2}y_3)^2 - (y_2 + \frac{3}{2}y_3)^2 - 4y_3^2.$$

Зробивши невироджене перетворення

$$\begin{cases} t_1 = y_1 + \frac{5}{2}y_3, \\ t_2 = y_2 + \frac{3}{2}y_3, \\ t_3 = 2y_3 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 - 2t_3, \\ x_2 = t_1 - t_2 - t_3, \\ x_3 = \frac{1}{2}t_3, \end{cases}$$

маємо:

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = t_1^2 - t_2^2 - t_3^2.$$

Приклад 3. Знайти ортогональне перетворення, яке зводить квадратичну форму до канонічного вигляду, та написати цей канонічний вигляд

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

Розв'язування. У нашому прикладі матриця квадратичної форми має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix};$$

характеристичні числа матриці визначаються із рівняння

$$A = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

яке зводиться до вигляду $(6-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 27) = 0$. Звідси знаходимо $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 3$.

Поклавши $\lambda_1 = 6$, для визначення відповідного власного вектора одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \xi_1 - 2\xi_2 = 0, \\ -2\xi_2 - 2\xi_3 = 0, \\ -2\xi_2 - \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\xi_1 = 2\xi_2$, $\xi_3 = -2\xi_2$; поклавши $\xi_2 = \alpha$, знаходимо $\xi_1 = 2\alpha$, $\xi_3 = -2\alpha$ і $\overrightarrow{r}_1 = 2\alpha\overrightarrow{i} + \alpha\overrightarrow{j} - 2\alpha\overrightarrow{k}$. Нормуючи вектор $\overrightarrow{r}_1$, знаходимо:

$$\overrightarrow{e}_1 = \frac{\overrightarrow{r}_1}{|\overrightarrow{r}_1|} = \frac{2}{3}\overrightarrow{i} + \frac{1}{3}\overrightarrow{j} - \frac{2}{3}\overrightarrow{k}.$$

Поклавши $\lambda_2 = 9$, для визначення другого власного вектора одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -2\eta_1 - 2\eta_2 = 0, \\ -2\eta_1 - 3\eta_2 - 2\eta_3 = 0, \\ -2\eta_2 - 4\eta_3 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\eta_2 = -2\eta_3$, $\eta_1 = 2\eta_3$ і $\overrightarrow{r}_2 = \beta(2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$. Нормуючи вектор $\overrightarrow{r}_2$, маємо:

$$\overrightarrow{e}_2 = \frac{2}{3}\overrightarrow{i} - \frac{2}{3}\overrightarrow{j} + \frac{1}{3}\overrightarrow{k}.$$

При $\lambda_3 = 3$ для визначення третього власного вектора одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 4t_1 - 2t_2 = 0, \\ -2t_1 + 3t_2 - 2t_3 = 0, \\ -2t_2 + 2t_3 = 0. \end{cases}$$

Звідси $t_2 = t_3$, $t_2 = 2t_1$. Поклавши $t_1 = \gamma$, маємо $\overrightarrow{r}_3 = \gamma(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k})$.

Нормуючи вектор $\overrightarrow{r}_3$, маємо:

$$\overrightarrow{e}_3 = \frac{1}{3}\overrightarrow{i} + \frac{2}{3}\overrightarrow{j} + \frac{2}{3}\overrightarrow{k}.$$

Вектори $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$ – ортогональні:

$$(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2) = 0, \quad (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_3) = 0, \quad (\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3) = 0.$$

Використаємо власні нормовані вектори для побудови матриці перетворення координат

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \quad \det S = 1.$$

Звідси

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_3 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3. \end{cases}$$

Значення x_1, x_2, x_3 підставимо у $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$, маємо

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = \frac{7}{9}(2y_1+2y_2+y_3)^2+\frac{6}{9}(y_1-2y_2+2y_3)^2+\frac{5}{9}(-2y_1+y_2+2y_3)^2-$$

$$-\frac{4}{9}(2y_1+2y_2+y_3)(y_1-2y_2+2y_3)-\frac{4}{9}(y_1-2y_2+2y_3)(-2y_1+y_2+2y_3) =$$

$$= y_1^2(\frac{28}{9} + \frac{6}{9} + \frac{20}{9} - \frac{8}{9} + \frac{8}{9}) + y_2^2(\frac{28}{9} + \frac{24}{9} + \frac{5}{9} + \frac{16}{9} + \frac{8}{9})+$$

$$+y_3^2(\frac{7}{9} + \frac{24}{9} + \frac{20}{9} - \frac{8}{9} - \frac{16}{9}) + y_1y_2(\frac{56}{9} - \frac{24}{9} - \frac{20}{9} + \frac{8}{9} - \frac{20}{9})+$$

$$+y_1y_3(\frac{28}{9} + \frac{24}{9} - \frac{40}{9} - \frac{20}{9} + \frac{8}{9}) = 6y_1^2 + 9y_2^2 + 3y_3^2.$$

Отже, канонічний вигляд квадратичної форми має вигляд

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 6y_1^2 + 9y_2^2 + 3y_3^2,$$

де коефіцієнти при y_1^2, y_2^2, y_3^2 – власні числа $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 3$. Ортогональне перетворення при цьому має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(2y_1 + 2y_2 + y_3), \\ x_2 = \frac{1}{3}(y_1 - 2y_2 + 2y_3), \\ x_3 = \frac{1}{3}(-2y_1 + y_2 + 2y_3). \end{cases}$$

Приклад 4. Знайти ортогональне перетворення, яке зводить квадратичну форму до канонічного вигляду, та написати цей канонічний вигляд

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Розв'язування. Матриця квадратичної форми має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

характеристичні числа матриці визначаються із рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ або

$$A = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

яке зводиться до вигляду $\lambda^2 - 27\lambda - 54 = 0$. Звідси знаходимо $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$, $\lambda_1 = 6$.

Поклавши $\lambda_1 = 6$, для визначення власного вектора одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -5\xi_1 + 2\xi_2 - 4\xi_3 = 0, \\ 2\xi_2 - 8\xi_2 - 2\xi_3 = 0, \\ -4\xi_1 - 2\xi_2 - 5\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\xi_3 = -2\xi_2$, $\xi_1 = 2\xi_2$; поклавши $\xi_2 = \alpha$, знаходимо $\xi_1 = 2\alpha$, $\xi_3 = -2\alpha$ і $\overrightarrow{r}_1 = \alpha(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k})$. Нормуючи вектор $\overrightarrow{r}_1$, маємо:

$$\overrightarrow{e}_1 = \frac{2}{3}\overrightarrow{i} + \frac{1}{3}\overrightarrow{j} - \frac{2}{3}\overrightarrow{k}.$$

Поклавши $\lambda_2 = 3$, для визначення другого власного вектора одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 4\eta_1 + 2\eta_2 - 4\eta_3 = 0, \\ 2\eta_1 + \eta_2 - 2\eta_3 = 0, \\ -4\eta_2 - 2\eta_2 + 4\eta_3 = 0. \end{cases}$$

Звідки $\eta_2 = -2\eta_1 + 2\eta_3$. Поклавши $\eta_1 = \beta$, $\eta_3 = 0$. Маємо $\overrightarrow{r}_2 = \beta(\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j})$. Нормуючи вектор $\overrightarrow{r}_2$, одержимо:

$$\overrightarrow{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{j}.$$

Вектори $\overrightarrow{e}_1$ і $\overrightarrow{e}_2$ ортогональні: $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2) = 0$. Оскільки корені $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$, то власний вектор $\overrightarrow{r}_3$ шукаємо у вигляді: $\overrightarrow{r}_3 = z_1\overrightarrow{i} + z_2\overrightarrow{j} + z_3\overrightarrow{k}$. Оскільки $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{r}_3) = 0$, $(\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{r}_3) = 0$, маємо:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 - \frac{2}{3}z_3 = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{5}}z_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}z_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси $z_1 = 2z_2$, $z_3 = \dfrac{5}{2}z_2$. Тому $\overrightarrow{r}_3 = z_2(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \frac{5}{2}\overrightarrow{k})$. Нормуючи вектор $\overrightarrow{r}_3$, знаходимо:

$$\overrightarrow{e}_3 = \frac{4}{3\sqrt{5}}\overrightarrow{i} + \frac{2}{3\sqrt{5}}\overrightarrow{j} + \frac{5}{3\sqrt{5}}\overrightarrow{k}.$$

Використаємо власні нормовані ортогональні вектори для побудови матриці перетворення координат

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{4}{3\sqrt{5}}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{2}{3\sqrt{5}}y_3, \\ x_3 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{5}{3\sqrt{5}}y_3. \end{cases}$$

Значення x_1, x_2, x_3 підставимо в $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$, одержимо

$$A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = (\frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{4}{3\sqrt{5}}y_3)^2 - 2(\frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{2}{3\sqrt{5}}y_3)^2 +$$

$$+(-\frac{2}{3}y_1 + \frac{5}{3\sqrt{5}}y_3)^2 + 4(\frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{4}{3\sqrt{5}}y_3)(\frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{2}{3\sqrt{5}}y_3) -$$

$$-8(\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}y_2+\frac{4}{3\sqrt{5}}y_3)(-\frac{2}{3}y_1+\frac{5}{3\sqrt{5}}y_3)-4(\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{\sqrt{5}}y_2+\frac{2}{3\sqrt{5}}y_3)\times$$

$$\times(-\frac{2}{3}y_1+\frac{5}{3\sqrt{5}}y_3)=y_1^2(\frac{4}{9}-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}+\frac{8}{9}+\frac{32}{9}+\frac{8}{9})+y_2^2(\frac{1}{5}-\frac{8}{5}-\frac{8}{5})+$$

$$+y_3^2(\frac{16}{45}-\frac{8}{45}+\frac{25}{45}+\frac{32}{45}-\frac{160}{45}-\frac{40}{45})+$$

$$+y_1y_2(\frac{4}{3\sqrt{5}}+\frac{8}{3\sqrt{5}}-\frac{12}{3\sqrt{5}}+\frac{16}{3\sqrt{5}}-\frac{16}{3\sqrt{5}})+$$

$$+y_1y_3(\frac{16}{9\sqrt{5}}-\frac{8}{9\sqrt{5}}-\frac{20}{9\sqrt{5}}+\frac{32}{9\sqrt{5}}-\frac{16}{9\sqrt{5}}-\frac{4}{9\sqrt{5}})+$$

$$+y_2y_3(\frac{8}{15}+\frac{16}{15}-\frac{24}{15}-\frac{40}{15}+\frac{40}{15})=6y_1^2-3y_2^2-3y_3^2.$$

Отже, канонічний вигляд квадратичної форми має вигляд

$$A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})=6y_1^2-3y_2^2-3y_3^2,$$

де коефіцієнти при y_1^2, y_2^2, y_3^2 – власні числа $\lambda_1=6$, $\lambda_2=\lambda_3=-3$. Ортогональне перетворення при цьому має вигляд

$$\begin{cases} x_1=\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}y_2+\frac{4}{3\sqrt{5}}y_3,\\ x_2=\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{\sqrt{5}}y_2+\frac{2}{3\sqrt{5}}y_3,\\ x_3=-\frac{2}{3}y_1+\frac{5}{3\sqrt{5}}y_3. \end{cases}$$

Задачі для самостійної роботи

1. Методом утворення повних квадратів звести квадратичні форми до нормального вигляду:
   а) $A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$;
   б) $A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})=x_1^2-3x_2^2+2x_1x_3-2x_1x_2-6x_2x_3$;
   в) $A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$;
   г) $A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})=4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$;
   д) $A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$;
   е) $A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})=2x_1^2+18x_2^2+8x_3^2-12x_1x_2+8x_1x_3-27x_2x_3$;
   є) $A(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$.

2. У наступних прикладах знайти ортогональне перетворення, яке зводить квадратичні форми до канонічного вигляду, та написати цей канонічний вигляд:

а) $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;
б) $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
в) $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;
г) $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
д) $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
е) $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$;
є) $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2$;
ж) $A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

Відповіді

1. а) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; б) $y_1^2 - y_2^2$; в) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; г) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; д) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^3$; е) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; є) $y_1^2 - y_2^2$.

2. а) $y_1^2+3y_2^2-3y_3^2$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}y_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_3$;

б) $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$, $x_1 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3$, $x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$, $x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$;

в) $9y_1^2+18y_2^2-9y_3^2$, $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$, $x_2 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$, $x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$;

г) $3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_2$;

д) $5y_1^2-y_2^2-y_3^2$, $x_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_1-\dfrac{2}{\sqrt{6}}y_2$;

е) $2y_1^2+4y_2^2-2y_3^2-4y_4^2$, $x_1=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2+y_3+y_4)$, $x_2=\dfrac{1}{2}(-y_1+y_2+y_3-y_4)$, $x_3=\dfrac{1}{2}(-y_1-y_2+y_3+y_4)$, $x_4=\dfrac{1}{2}(y_1-y_2+y_3-y_4)$;

є) $2y_1^2-4y_2^2$, $x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_1+y_2)$, $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_1-y_3)$, $x_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_2+y_4)$, $x_4=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_2-y_4)$;

ж) $y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$, $x_1=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2+y_3+y_4)$, $x_2=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2-y_3-y_4)$, $x_3=\dfrac{1}{2}(y_1-y_2+y_3-y_4)$, $x_4=\dfrac{1}{2}(y_1-y_2-y_3+y_4)$.

Зразки завдань підсумкової модульної роботи з лінійної алгебри

Варіант 1

1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 & 0 & -4 & 3 \\ 8 & -5 & 3 & 4 & 1 & -3 \\ 7 & -5 & 19 & 1 & -10 & 9 \\ 11 & 12 & -15 & 8 & 17 & -20 \end{pmatrix}$.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

4. Знайти матрицю, обернену до даної $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Звести квадратичну форму до нормального вигляду

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Варіант 2

1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити ранг матриці $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 215 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

4. Знайти матрицю, обернену до даної $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & 5 & -7 \end{pmatrix}$.

5. Звести квадратичну форму до нормального вигляду

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

Варіант 3

1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити ранг матриці $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

4. Знайти матрицю, обернену до даної $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Звести квадратичну форму до нормального вигляду

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

Варіант 4

1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити ранг матриці $\begin{pmatrix} 17 & 51 & 27 & 31 \\ 93 & 25 & 14 & 121 \\ 94 & 27 & 15 & 120 \\ 18 & 53 & 28 & 30 \end{pmatrix}$.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0, \\ 5x_1 + 21x_3 + 13x_4 = 3. \end{cases}$$

4. Знайти матрицю, обернену до даної $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Звести квадратичну форму до нормального вигляду

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

Варіант 5

1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-2x_4=1, \\ x_1-2x_2-3x_3+x_4=2, \\ 3x_1+x_2-5x_3-x_4=0. \end{cases}$$

4. Знайти розмірність і базис лінійного простору, який утворює система векторів $\overrightarrow{a}_1 = (-1,-1,-1,0,0)$, $\overrightarrow{a}_2 = (0,1,1,1,1)$, $\overrightarrow{a}_3 = (-1,0,0,1,1)$, $\overrightarrow{a}_4 = (-1,-2,-2,-1,-1)$, $\overrightarrow{a}_5 = (-1,1,1,2,2)$.

5. Звести квадратичну форму до нормального вигляду

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_3 - 27x_2x_3.$$

Список рекомендованої літератури

1. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1981. – 232 с.

2. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. – М.: Наука, 1978. – 304 с.

3. *Шестопал А.Ф.* Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 164 с.

4. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1967. – 254 с.

5. Основи аналітичної геометрії та лінійної алгебри. Навчальний посібник // Укл. *Пукальський І.Д., Перун Г.М.*. – Чернівці: Рута, 2002. – 108 с.

6. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. – М.: Наука, 1980. – 385 с.

7. *Ф.С.Гудименко та інші.* Збірник задач з вищої математики. Видавництво Київського університету, 1963. – 352 с.

8. *Минорский В.П.* Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

Навчальне видання

Пукальський Іван Дмитрович,
доктор фізико-математичних наук,

Лусте Ірина Петрівна,
кандидат фізико-математичних наук

Аналітична геометрія
Лінійна алгебра

Навчально-методичний посібник

Редактор – О.П.Макарова
Комп'ютерний набір і верстка – Н.В.Романенко