ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Двойственная задача линейного программирования.

Рассмотрим пример задачи об оптимальном использовании ресурсов. Ее математическая модель имеет вид:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Запишем эту задачу в матричном виде:

$$\max \{cx | Ax \le b, x \ge 0\}$$

Обозначим через $u_i, i = \overline{1,m}$ цену единицы i-го ресурса. Тогда $\sum_{i=1}^{m} b_i x_i$ – общая стоимость использованных ресурсов, а $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i$ – затраты на производство продукции j-го вида, $j = \overline{1,n}$. Тогда можно сформулировать задачу: определить цены ресурсов, чтобы стоимость производства была минимальной. Эта задача называется ***двойственной***к исходной и имеет математическую модель:

$$G = \sum_{i=1}^{m} b_i x_i \to min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \ge c_j, j = \overline{1,n} \\ u_i \ge 0, i = \overline{1,m} \end{cases}$$

Запишем двойственную задачу в матричном виде:

$$\min\{bu | A^T u \ge c, u \ge 0\}$$

Правила построения двойственной пары:

1) привести знаки неравенств-ограничений прямой задачи в соответствие с ее целевой функцией, т.е. если она минимизируется, то неравенства должны иметь вид «≥», а если максимизируется, то «≤»;

2) принять число неизвестных переменных двойственной задачиравным числу ограничений прямой;

3) преобразовать матрицу коэффициентов ограничений прямой задачи в матрицу коэффициентов двойственной путем транспонирования;

4) каждому i-му ограничению-неравенству исходной задачи поставить в соответствие неотрицательнуюi-ую переменную двойственной, а каждому i-му ограничению-равенству - i-ую переменную двойственной, неограниченную по знаку;

5) определить правые части системы ограничений двойственной задачи как коэффициенты при неизвестныхцелевой функции прямой;

6) каждой неотрицательной j-ой переменной исходной задачи поставить в соответствие j-ое ограничение-неравенство двойственной, а каждойj-ой переменной исходной задачи, неограниченной по знаку, - j-ое ограничение-равенство двойственной задачи;

7) определить коэффициенты при неизвестных целевой функции двойственной задачи равными свободным числам системы ограничений прямой задачи;

8) вид экстремума двойственной задачи – противоположный по смыслу.

Примеры построения двойственных задач для разных типов ограничений приведены в таблице 2.3.1.

Первая теорема двойственности

Если одна из пары двойственных задач разрешима, то разрешима и другая, причем значения целевых функций на оптимальных планах совпадают: $F(x^*) = G(u^*)$, *где* x^*, u^* *- оптимальные решения прямой и двойственной задач.*

Вторая (основная) теорема двойственности

Если x^*, u^* *- допустимые решения прямой и двойственной задач и если* $\mathrm{c}^T x^* = b^T u^*$, *то* x^*, u^* *– оптимальные решения пары двойственных задач.*

Замечание.

Если в оптимальном решении прямой (двойственной) задачи какое-то ограничение выполняется как строгое неравенство, оптимальное значение соответствующей переменной двойственной (прямой) задачи должно быть равно нулю.

Таблица 2.3.1

Примеры двойственных задач

Прямая	Двойственная
$F = x_1 + 2x_2 \to max$ $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ 8x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$	$G = 18u_1 + 24u_2 + 12u_3 \to min$ $\begin{cases} 3u_1 + 8u_2 + 4u_3 \geq 1 \\ 6u_1 + 4u_2 + 3u_3 \geq 2 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{cases}$
$F = x_1 + 2x_2 \to max$ $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ 8x_1 + 4x_2 = 24 \\ 4x_1 + 3x_2 = 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$	$G = 18u_1 + 24u_2 + 12u_3 \to min$ $\begin{cases} 3u_1 + 8u_2 + 4u_3 \geq 1 \\ 6u_1 + 4u_2 + 3u_3 \geq 2 \\ u_1 \geq 0 \end{cases}$
$F = x_1 + 2x_2 \to max$ $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ 8x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$	$G = 18u_1 + 24u_2 + 12u_3 \to min$ $\begin{cases} 3u_1 + 8u_2 + 4u_3 \geq 1 \\ 6u_1 + 4u_2 + 3u_3 = 2 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{cases}$
$F = x_1 + 2x_2 \to max$ $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ 8x_1 + 4x_2 = 24 \\ 4x_1 + 3x_2 = 12 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$	$G = 18u_1 + 24u_2 + 12u_3 \to min$ $\begin{cases} 3u_1 + 8u_2 + 4u_3 \geq 1 \\ 6u_1 + 4u_2 + 3u_3 = 2 \\ u_1 \geq 0 \end{cases}$