

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

ФАКУЛЬТЕТ ИУ «Информатика, искусственный интеллект и системы управления»

КАФЕДРА ИУ-1 «Системы автоматического управления»

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №2

«Фильтр Калмана и его использование для оценивания и прогноза ошибок ИНС»

по дисциплине
«Интегрированные навигационные системы»

Выполнил: Машков И.И.
Группа: ИУ1-83
Проверил: Лукьянов В. В.
Вариант: 1

2024 г.

Цель работы: изучить оптимальный линейный фильтр Калмана и применить его для оценивания и прогноза погрешностей ИНС.

Задание:

Смоделировать поведение стационарных погрешностей ИНС в одном из горизонтальных каналов без учета перекрестных связей.

Сформировать массив скоростных измерений.

Реализовать оптимальный линейный фильтр Калмана, с помощью которого по скоростным измерениям оценить весь вектор состояния.

Реализовать режим прогноза фильтра.

В качестве эталона для определения точности оценивания и прогноза использовать смоделированные погрешности ИНС.

Практическая часть

1. Моделирование погрешностей ИНС.

Поведение стационарных погрешностей ИНС в горизонтальном канале без учета перекрестных связей описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \delta \dot{V} = -g\Phi \\ \dot{\Phi} = \frac{\delta V}{R} + \omega^{dr} \\ \dot{\omega}^{dr} = -\beta\omega^{dr} + A\sqrt{2\beta} \bullet w(t) \end{cases},$$

где g – ускорение силы тяжести;

R – радиус Земли, 6371300 м;

δV – погрешность счисления скорости;

Φ – угол отклонения гироплатформы от плоскости горизонта;

$w(t)$ – “белый” шум единичной интенсивности;

ω^{dr} – скорость гироскопического дрейфа.

При моделировании шума с использованием функции `rand()` было обеспечено его математическое ожидание $M = 0$, а дисперсия $D = 1$.

Дифференциальные уравнения в матричном виде имеют вид:

$$\dot{X} = AX + B \bullet w(t),$$

где $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta V \\ \Phi \\ \omega^{dr} \end{bmatrix}$ – вектор состояния;

$A = \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 \\ 1/R & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ – переходная матрица в непрерывном виде;

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ – матрица входного шума в непрерывном виде.

Погрешности ИНС на интервале с помощью рекуррентного матричного уравнения определяются выражением:

$$X_k = F \bullet X_{k-1} + G \bullet w(t)$$

где $F = AT + E$ – переходная матрица в дискретном виде;

T – интервал моделирования, 1 секунда;

E – единичная матрица;

$G = BT$ – матрица входного шума в дискретном виде.

Скоростные измерения были смоделированы с помощью матричного уравнения:

$$Z_k = H \bullet X_k + V \bullet w(t)$$

где H – матрица наблюдений, в данном случае $H = [1 \ 0 \ 0]$;

V – интенсивность измерительного шума, выбрать из соображения: ошибки СНС по скорости составляют 1% от истинной скорости движения.

Графики погрешностей скоростной ошибки, измерений скорости, угла отклонения гироплатформы и скорости дрейфа представлены на рисунке 1.

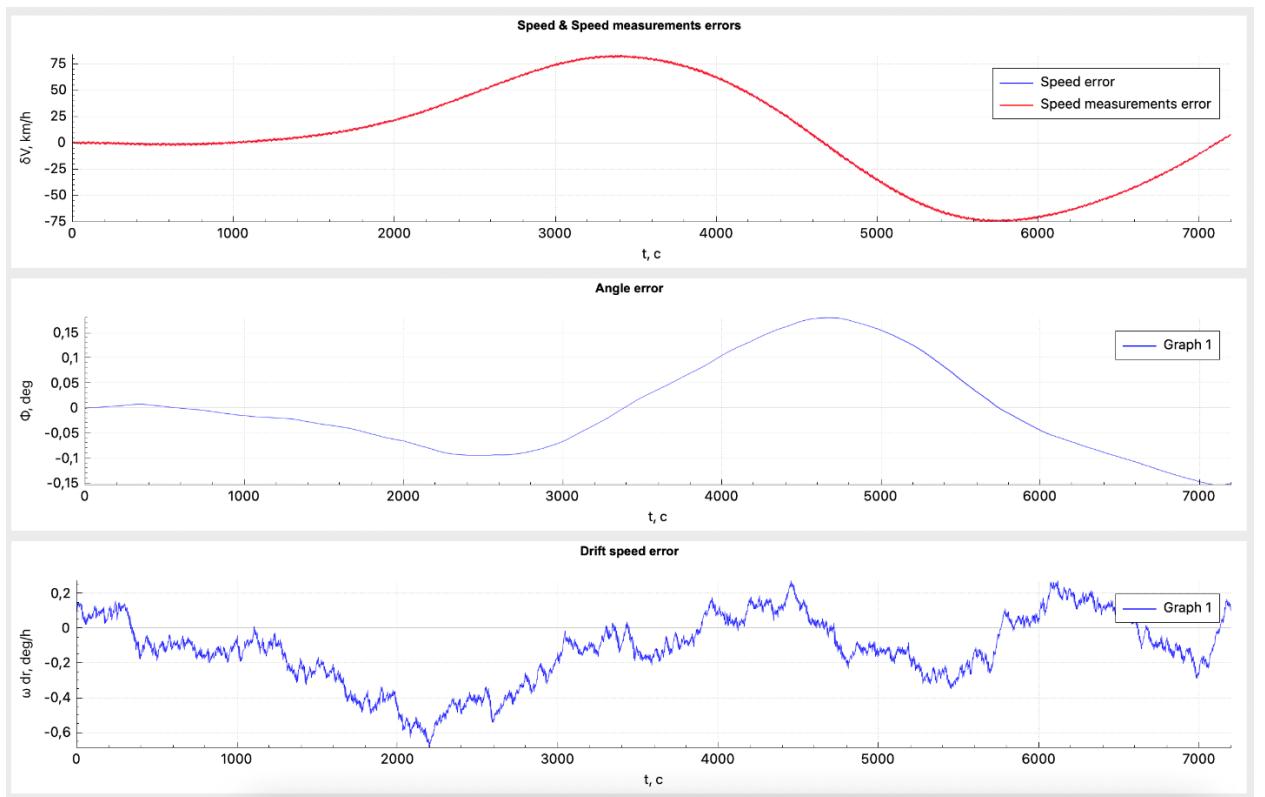


Рисунок 1 – Измеренные погрешности ИНС

2. Фильтр Калмана

Реализация алгоритма фильтра Калмана в режиме оценивания производилась согласно алгоритму, представленному на рисунке 2.

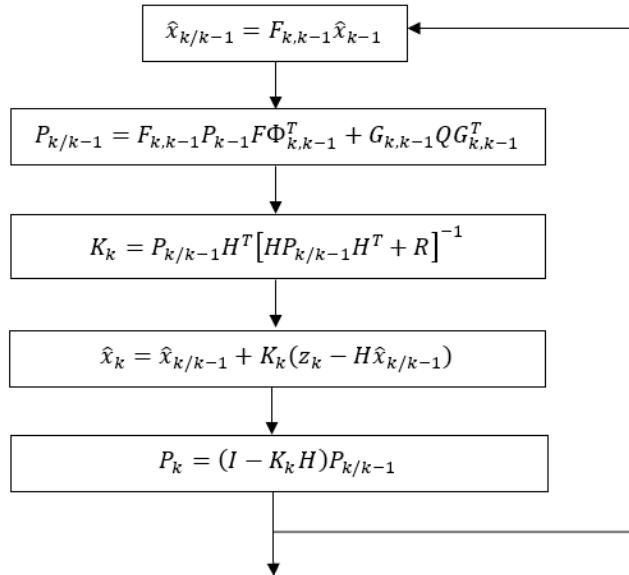


Рисунок 2 – Алгоритм оценивания фильтра Калмана

Начальные значения оценок вектора состояния были приняты равными нулю. Начальные значения диагональных элементов ковариационной матрицы ошибок оценивания P были приняты равными квадрату максимумов соответствующих эталонных компонентов вектора x . Дисперсия измерительного шума $R = V^2$. Значение ковариационной матрицы входного шума Q подобрать для каждой компоненты вектора состояния так, чтобы обеспечить минимальную дисперсию ошибки оценивания. В качестве эталона для расчета ошибки оценивания использовать смоделированные погрешности ИНС.

На рисунке 3 представлены графики истинной погрешности и ее оценки для каждой компоненты вектора состояния. Параметр Q фильтра Калмана настроен оптимально, критерием оптимальности являлась дисперсия суммы ошибок оценок фильтра по каждой компоненте вектора состояния.

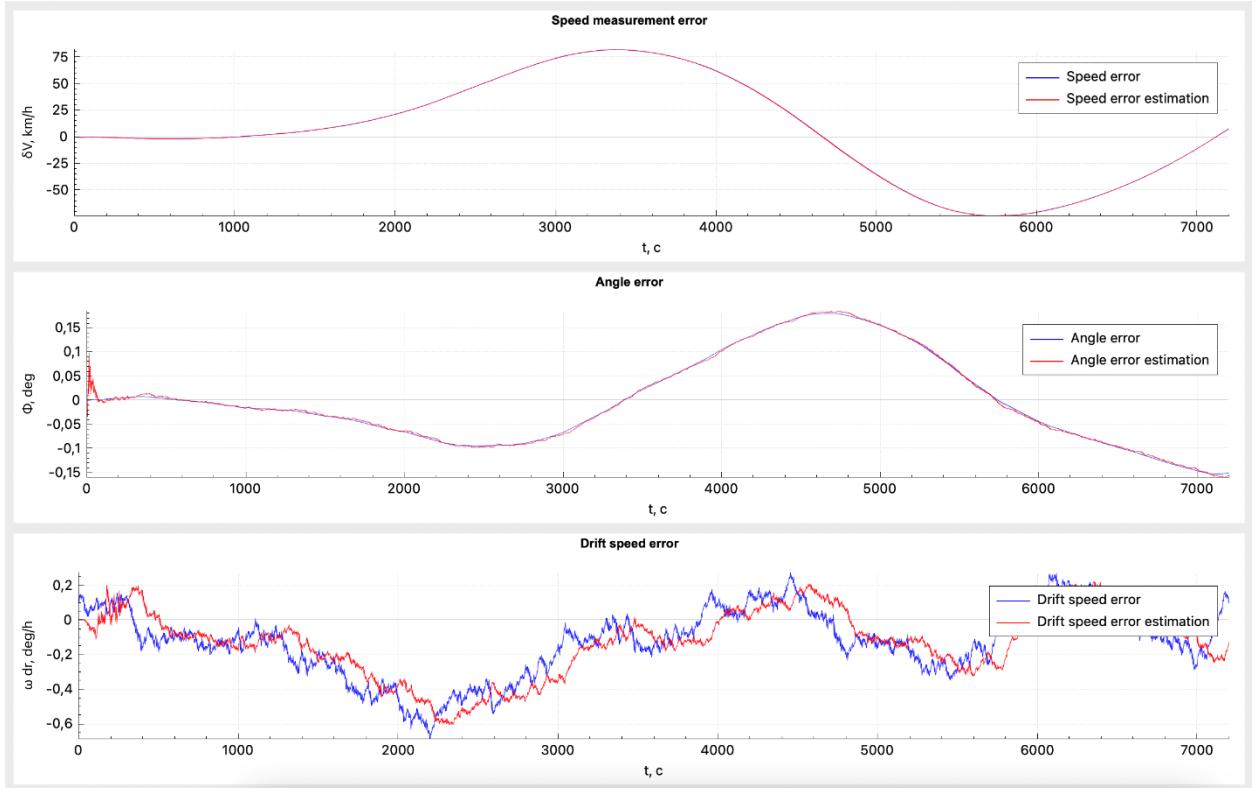


Рисунок 3 – Графики истинной погрешности и ее оценки для каждой компоненты вектора состояния при оптимизации параметра Q согласно минимизации дисперсии суммарной ошибки

В таблице 1 приведены значения параметра Q фильтра Калмана, а также значения минимальной дисперсии для каждого критерия минимизации.

Таблица 1. Результаты настройки фильтра Калмана

Критерий оптимизации	Дисперсия ошибки оценивания первой компоненты	Дисперсия ошибки оценивания второй компоненты	Дисперсия ошибки оценивания третьей компоненты
----------------------	---	---	--

Оптимальное значение параметра Q	$1 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-15}$	$1 \cdot 10^{-15}$
Значение минимальной дисперсии ошибки	0.00214919	$1.043 \cdot 10^{-8}$	$4.393 \cdot 10^{-13}$

На рисунке 4 представлены графики истинной погрешности и ее оценки для каждой компоненты вектора состояния при различных значениях элементов матрицы P .

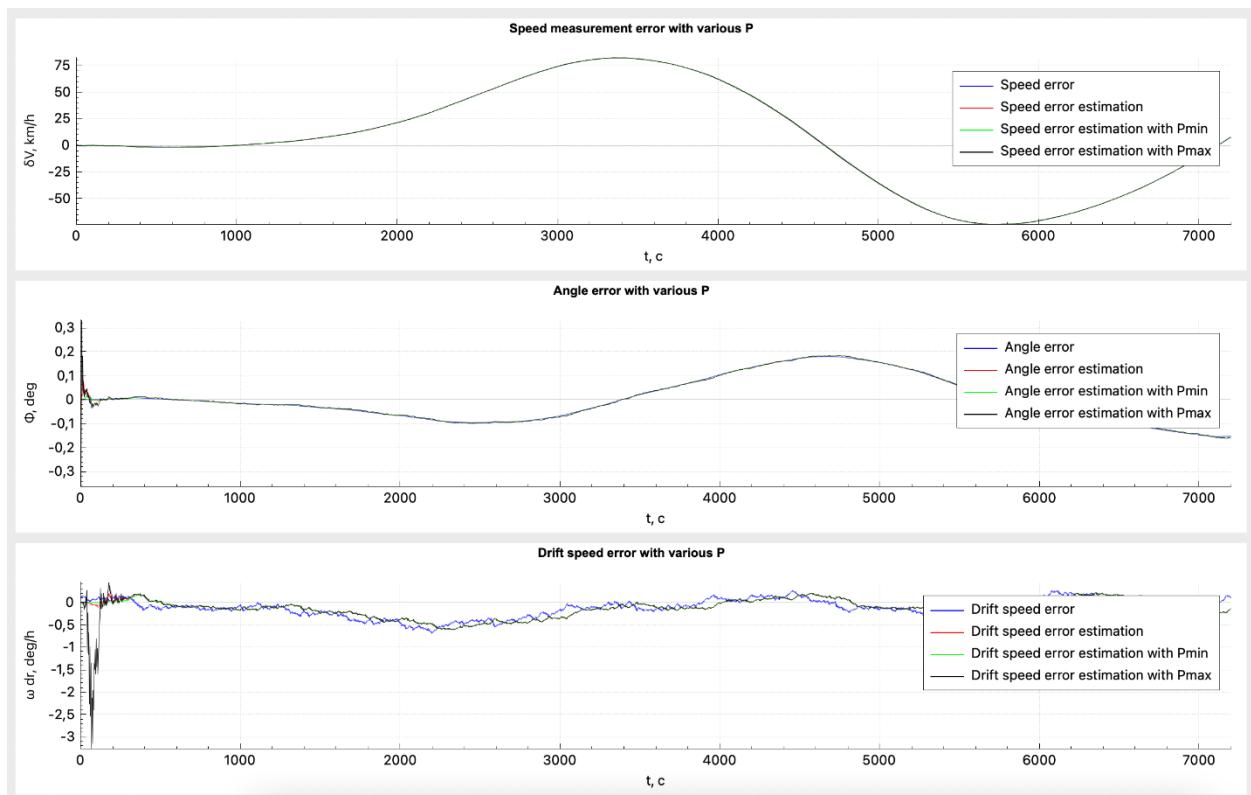


Рисунок 4 – Графики истинной погрешности и ее оценки для каждой компоненты вектора состояния при разных значениях элементов матрицы P

На рисунке 5 представлены графики истинной погрешности и ее оценки для каждой компоненты вектора состояния при различных значениях элементов матрицы R .

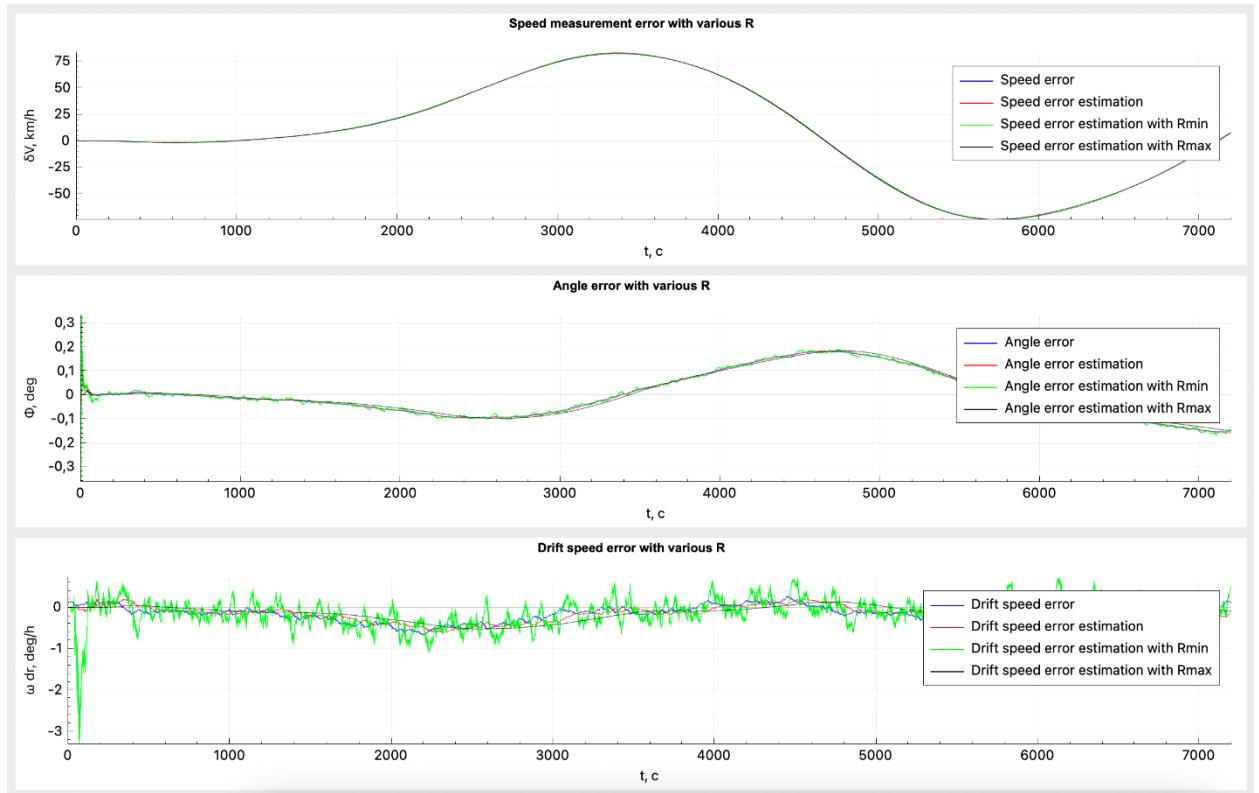


Рисунок 5 – Графики истинной погрешности и ее оценки для каждой компоненты вектора состояния при разных значениях элементов матрицы R

На рисунке 6 представлены графики истинной погрешности и ее оценки для каждой компоненты вектора состояния при различных значениях элементов матрицы Q .

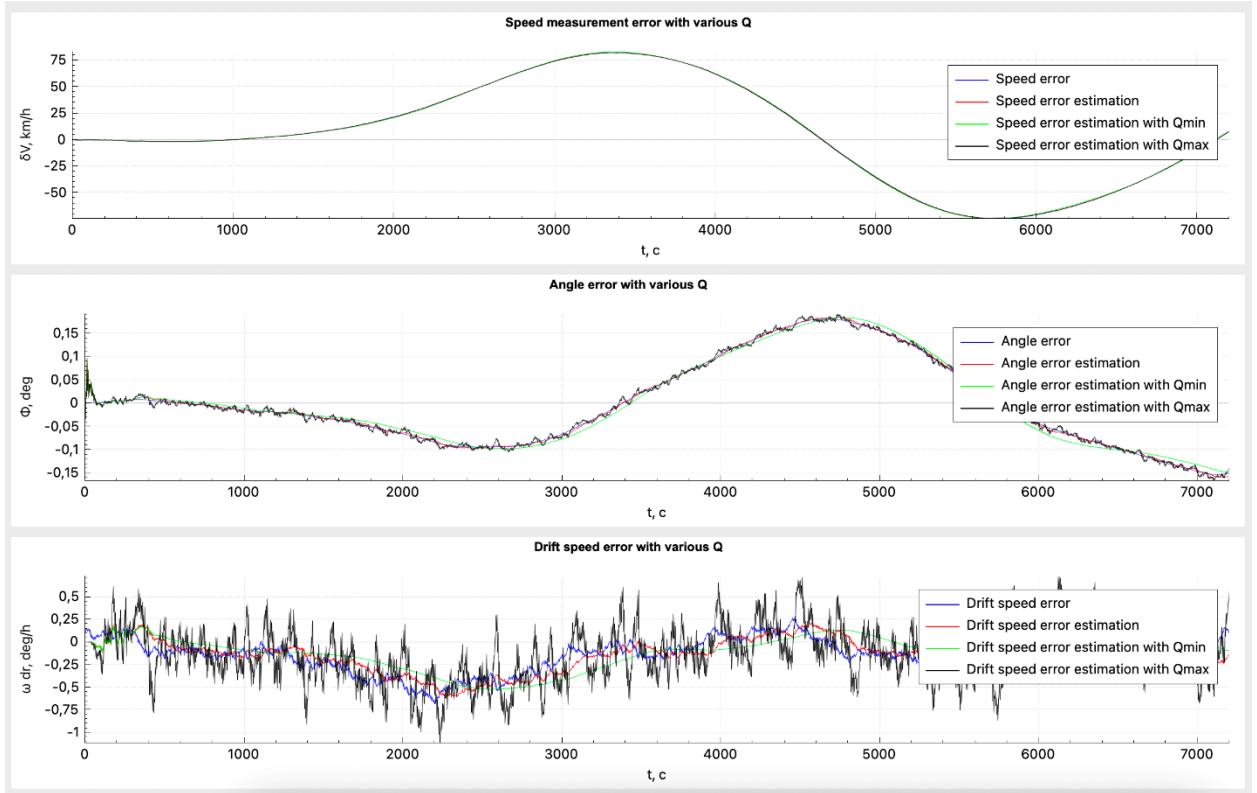


Рисунок 6 – Графики истинной погрешности и ее оценки для каждой компоненты вектора состояния при разных значениях элементов матрицы Q

На рисунке 7 представлены графики истинной погрешности и ее оценки для каждой компоненты вектора состояния при использовании фильтра Калмана в долгосрочном прогнозе с 90 минуты.

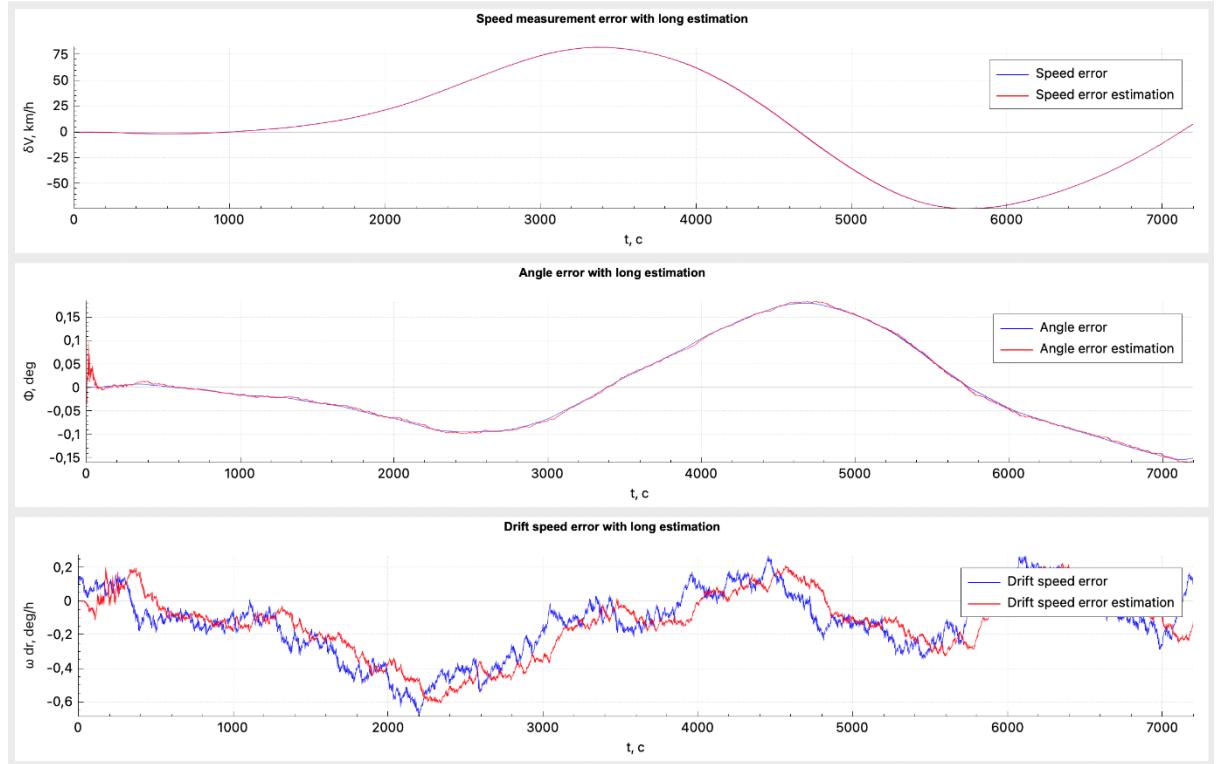


Рисунок 7 – Графики истинной погрешности и ее оценки для каждой компоненты вектора состояния при использовании фильтра Калмана в долгосрочном прогнозе

На рисунке 8 представлены графики истинной погрешности и ее оценки для каждой компоненты вектора состояния при использовании фильтра Калмана в режиме многократного краткосрочного прогноза, с регулярным обновлением матрицы P до первоначального значения.

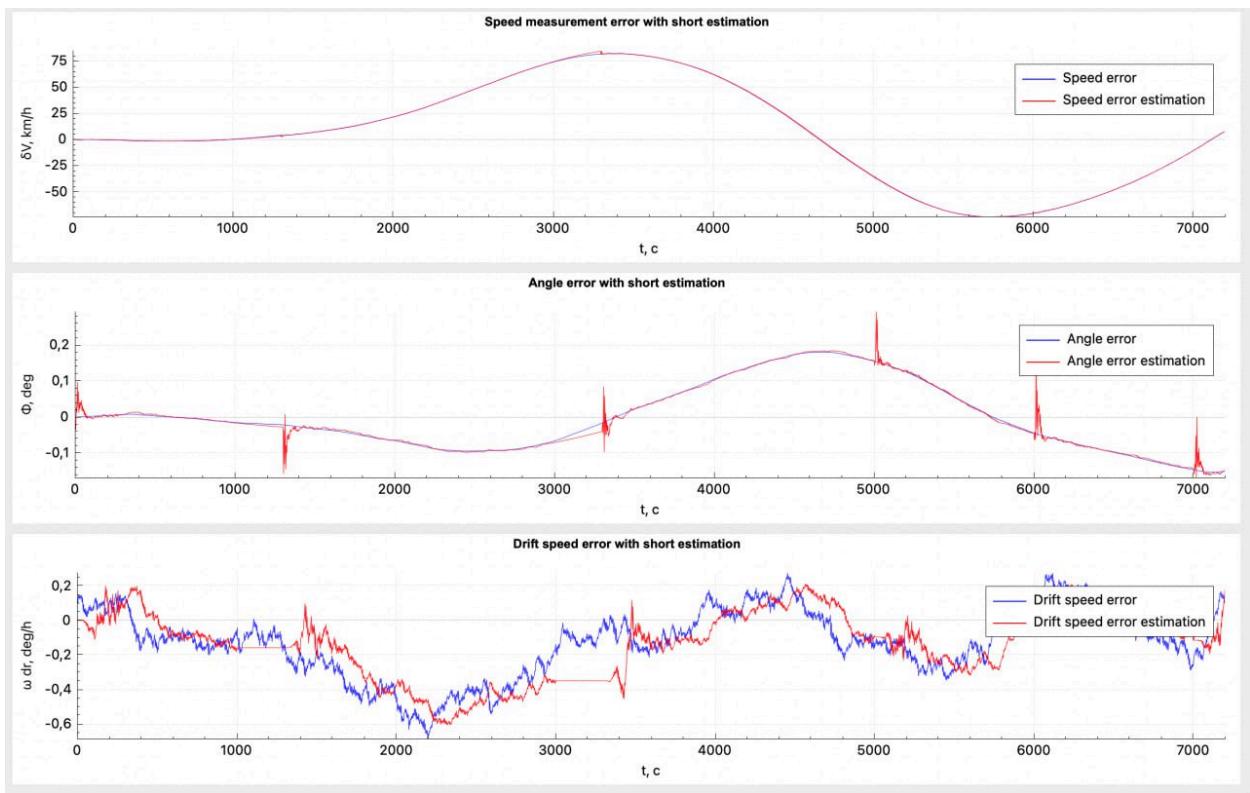


Рисунок 8 – Графики истинной погрешности и ее оценки для каждой компоненты вектора состояния при использовании фильтра Калмана в режиме многократного краткосрочного прогноза

Вывод

В лабораторной работе моделируется поведение стационарных погрешностей ИНС, реализуется линейный фильтр Калмана в режиме оценивания и прогнозирования.

Вследствие анализа результатов моделирования работы фильтра Калмана в режиме оценивания было выяснено, что при оптимальной настройке параметра Q фильтра Калмана следует обращать внимание критерий оптимизации, так как при минимизации суммарной ошибки параметр Q будет найден исходя из того, каким будет значение данного параметра в точке оптимума для той компоненты вектора состояния, ошибка в оценивании которой вносит наибольший вклад в суммарную ошибку.

Также были обнаружены следующие зависимости:

- скорость схождения оценочных значений фильтра Калмана к истинным значениям в начале работы фильтра прямо пропорциональна величине диагональных элементов матрицы P ;
- при отклонении соотношения значений параметров R и Q в сторону большего влияния последнего замечается повышенная зашумленность сигнала, что приводит к потере точности. При отклонении соотношения в сторону большего влияния параметра R наблюдается усиление эффекта сглаживания фильтра, что в свою очередь также приводит к ухудшению точности.

В следствие анализа результатов моделирования работы фильтра Калмана в режиме прогноза было выяснено, что величина временного участка прогнозирования обратно влияет на конечную точность прогноза.

Контрольные вопросы

1. Постановка задачи оптимального фильтра Калмана, смысл термина «оптимальный».

Зная математическое описание объекта и измерения (матрицы Φ , G , H), статистическую информацию о входных и измерительных шумах (Q , R), и измеряя часть вектора x (z) оценить полный вектор состояния \hat{x} так, чтобы след ковариационной матрицы ошибок оценивания P принимал минимальное значение. След - сумма диагональных элементов матрицы. Для матрицы P - сумма дисперсий ошибок оценивания погрешностей ИНС.

$$tr \left[M \left(x_k^{tr} - \hat{x}_k \right) \left(x_k^{tr} - \hat{x}_k \right)^T \right] = min$$

Фильтр Калмана называют оптимальным, так как он обеспечивает выполнения критерия оптимальности: $\frac{dP}{dK} = 0$ (то есть такой усилитель фильтра, при котором производная матрицы P по этому K равна нулю)

2. Обосновать уравнение оценивания фильтра.

Основное уравнение обновления состояния в фильтре Калмана имеет следующий вид:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k/k-1} + K_k(z_k - H\hat{x}_{k/k-1})$$

где \hat{x}_k – предполагаемое (априорное) состояние системы в момент времени k ;

$\hat{x}_{k/k-1}$ – состояние системы в момент времени k ;

K_k – матрица Калмана, вычисленная на шаге k ;

z_k – измерение системы в момент времени k ;

H – матрица наблюдений (измерений).

3. Физический смысл уравнений Риккати.

$$\begin{cases} P_{k/k-1} = F_{k,k-1}P_{k-1}F\Phi_{k,k-1}^T + G_{k,k-1}QG_{k,k-1}^T \\ K_k = P_{k/k-1}H^T[H P_{k/k-1}H^T + R]^{-1} \\ P_k = (I - K_k H)P_{k/k-1} \end{cases}$$

Уравнения Риккати представляют собой систему нелинейных ДУ второго порядка, которые описывают динамику системы и используются для решения задачи оптимального управления. Они позволяют найти такое управление (оптимальное), которое переводит систему из одного состояния в другое за минимальное время (минимизация функционала качества).

Уравнения Риккати в фильтре Калмана минимизируют дисперсию оценки состояния системы для улучшения качества фильтрации.

4. Использование фильтра Калмана в режиме прогноза.

Данный режим реализуется на интервалах пропадания измерений от внешней системы, либо при низком качестве этих измерений. При этом состояние системы определяется выражением:

$$\hat{x}_{k/k-1}^{pr} = \Phi \hat{x}_{k/k-1}$$

При выходе из режима прогнозирования может произойти расхождение фильтра. Чтобы этого не допустить нужно либо каждый раз пересчитывать P , $P = \Phi P \Phi^T + G Q G^T$, либо увеличивать значение P в момент выхода из режима прогноза.

5. Использование фильтра Калмана в режиме сглаживания погрешностей.

Данный режим реализуется при после маршрутной обработке измерений в направлениях forward и backward. При этом состояние системы определяется выражением:

$$\hat{x} = \frac{P^b}{P^f + P^b} x^f + \frac{P^f}{P^f + P^b} x^b$$

6. Физический смысл переходной матрицы как одного из вариантов реализации математической модели системы, понятие наблюдаемости. Стратегия выбора размерности и состава вектора состояния x .

Физический смысл матрицы перехода заключается в том, что она описывает изменение состояния динамической системы с течением времени. Используя эту матрицу, можно определить как система переходит из одного состояния в другое при изменении времени. Это важно для моделирования и анализа динамических систем, а также для разработки алгоритмов управления такими системами.

Наблюдаемость выражается в том времени, за которое оценка компоненты сходится к своему истинному значению.

При увеличении размера вектора состояния в них попадают не только хорошо наблюдаемые компоненты, но и слабо наблюдаемые компоненты, что приводит к следующему:

- увеличение времени сходимости
- ухудшение точности даже хорошо наблюдаемых компонент.

Таким образом, размер вектора состояния не следует сильно увеличивать, так как это напрямую связано с понятием наблюдаемости вектора состояния.

7. Назначение матрицы наблюдений H и методика заполнения ее элементов.

Матрица H – матрица наблюдений. Элементы этой матрицы показывают, как измеренные значения связаны с координатами состояния системы. Заполнение матрицы происходит по логике:

1 - измеряемая компонента

0 – не измеряемая компонента

8. Физический смысл ковариационной матрицы ошибок оценивания, матриц входных и измерительных шумов. Как определить близкими к оптимальным начальные значения перечисленных матриц при

инициализации фильтра? К каким эффектам приводит выбор значений матриц существенно выше/ниже оптимальных, в частности, эффект временного сдвига оценок фильтра? Возникающие эффекты объяснить с помощью уравнения матрицы коэффициента усиления фильтра.

Ковариационная матрица ошибок оценивания содержит информацию о дисперсиях и корреляциях ошибок оценки каждого состояния. Чем меньше элементы ковариационной матрицы, тем точнее оценка состояния.

$$\text{Физический смысл уравнения } K_k = P_{\frac{k}{k}-1} H^T \left[H P_{\frac{k}{k}-1} H^T + R \right]^{-1} \rightarrow$$

$$K = \frac{P + Q}{P + Q + R} \simeq \frac{Q}{Q + R},$$

где Q – мощность полезного сигнала;

R – мощность вредного сигнала.

K равен отношению мощности полезного сигнала Q к мощности всего сигнала $Q + R$.

Способы подбора матриц для реальных измерений:

– Исходя из опыта;

– Методом подбора.

При $(Q > > R) K > > K_{\text{опт}}$, следовательно слишком большая реакция на измерения, в которых содержатся шумы, из-за чего возникают большие высокочастотные ошибки оценивания. Т.о. с одной стороны сглаживание шумов пропадает, но с другой стороны обеспечивается сходимость фильтра. А при $(Q < < R)$ следует обратное.

Эффект временного сдвига ФК:

По измеряемым компонентам $K \in (0,1)$. В общем случае $K < 1$, то есть коэффициент усиления недовзвешен, из-за чего оценка фильтра ФК отстает от истинных значений.

9. Почему для отдельно выбранной компоненты вектора состояния возможно подобрать параметры фильтра, обеспечивающие точность ее оценивания выше, чем при использовании оптимальных параметров?

Более точную оценку отдельной компоненты вектора состояния можно обеспечить с помощью параметров ФК отличных от оптимальных параметров, обеспечивающих минимальную дисперсию суммы ошибок всех компонентов так как при минимизации дисперсии ошибки отдельно взятой компоненты на нее (дисперсию) не оказывают влияние дисперсии ошибок остальных компонентов вектора состояния, которые по величине могут превышать дисперсию отдельной компоненты и иметь оптимум в точке, где рассматриваемая компонента оптимума не имеет.

Таким образом при оптимизации параметров ФК по сумме дисперсий ошибок всех компонентов определяются параметры обеспечивающий минимизацию дисперсии наиболее значимой по величине компоненты так как сумма дисперсий тем меньше, чем меньше значение наибольшей дисперсии.

10. Оценить целесообразность и эффективность применения фильтра Калмана для сглаживания измерительного шума.

Основным достоинством применения ФК для сглаживания измерительного шума является то, что с математической точки зрения обеспечивается оптимальность оценок.

Недостатки применения ФК для сглаживания измерительного шума:

– Необходимо запоминать не только массивы оценок (X^f , X^b), но и массивы матриц (P^f , P^b).

- Требуется учитывать временной сдвиг оценки ФК по сравнению с истинными значениями.