ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΟΣ

2025-2026

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗ

Οι εργασίες θα πρέπει να είναι πλήρως συμμορφωμένες με τις οδηγίες, στην αντίθετη περίπτωση δε θα βαθμολογούνται. Οι σχετικές οδηγίες διατυπώνονται ακολούθως:

Η εκτέλεση και συγγραφή της εργασίας είναι **ατομική** όπως και η παράδοση. Συνεργασίες δεν επιτρέπονται.

Όλες οι απαντήσεις θα βρίσκονται συγκεντρωμένες σε ΕΝΑ doc αρχείο. Το αρχείο αυτό θα περιέχει :

- ✓ Τα πλήρη στοιχεία του φοιτητή
- ✓ Όλες τις **εκφωνήσεις** των ασκήσεων με τη σειρά που έχουν δοθεί. Κάτω από την εκφώνηση της άσκησης που πρόκειται να απαντηθεί θα ακολουθεί η λύση. Σε περίπτωση που μία άσκηση δεν πρόκειται να απαντηθεί θα υπάρχει σκέτη η εκφώνησή της.
- ✓ Η λύση της κάθε άσκησης θα περιλαμβάνει **υποχρεωτικά**:
    - Τον κώδικα (σε λογισμικό Matlab, Octave ...) που επιλύει – απαντά το ερώτημα.
    - Επεξήγηση των χρησιμοποιούμενων εντολών
    - Σχολιασμό της επίλυσης
    - Τα m files που θα δημιουργήσετε (copy –paste)
    - Αναλυτικό σχολιασμό των αποτελεσμάτων. Συμπεράσματα.
    - Θεωρητική επίλυση (όπου χρειάζεται)
    - Σχήματα, γραφικές παραστάσεις που σχετίζονται με την επίλυση και τα αποτελέσματα της Ασκησης

Το αρχείο αυτό θα παραδοθεί- χωρίς καμία συμπίεση- σε ειδικό κατάλογο στο eclass, στο τέλος των εργαστηριακών μαθημάτων.

Οι εργασίες θα επεξεργαστούν για έλεγχο λογοκλοπής από λογισμικό ανίχνευσης, αντιγραφής και λογοκλοπής ακαδημαϊκών εργασιών. Σε περίπτωση που βρεθεί ίδια απάντηση σε 2 ή περισσότερες εργασίες (έστω και σε ένα από τα ερωτήματα) θα μηδενίζονται όλες αυτές οι εργασίες.

Δειγματοληπτικά κάποιες εργασίες μπορεί να εξεταστούν και προφορικά.

Καλή επιτυχία

1. **Παραβολική ακολουθία μοναδιαίου βήματος.** Να δημιουργηθεί συνάρτηση που να παράγει την παραβολική ακολουθία μοναδιαίου βήματος η οποία ορίζεται ως ακολούθως:

$$p[n-k] = \begin{cases} (n-k)^2\,, & n \geq k \\ 0, & n < k \end{cases}$$

Η ίδια συνάρτηση να παράγει: με κωδικό 1 την παραβολική, με κωδικό 2 τη μοναδιαία κρουστική ακολουθία, με κωδικό 3 τη μοναδιαία βηματική ακολουθία και με κωδικό 4 τη μοναδιαία ράμπα. Στη συνέχεια, με χρήση της συνάρτησης να παραχθούν όλες οι παραπάνω ακολουθίες για $-10 \leq n \leq 10$, $k = 4$. Να δημιουργηθούν όλες οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

2. **Άρτια Περιττή συνιστώσα σήματος**. Να δημιουργηθεί το σήμα διακριτού χρόνου :

$$x[n] = u[n+3] + 5u[n-15] + 4u[n+10], \quad -20 \leq n \leq 20$$

όπου, u[n] η μοναδιαία βηματική ακολουθία.
Στη συνέχεια, να υπολογιστούν το άρτιο και περιττό μέρος της ακολουθίας του σήματος x[n]. Στο ίδιο γραφικό παράθυρο να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις του σήματος x[n] καθώς και του άρτιου και περιττού μέρους του σήματος.

3. **Ευστάθεια Συστήματος.** θεωρήστε το σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από τη Συνάρτηση Μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{1 + 1.15z^{-1} + 0.9z^{-2}}$$

Βρείτε και απεικονίστε γραφικά την κρουστική απόκριση του συστήματος. Διερευνήστε την ευστάθεια του συστήματος α) μέσω της κρουστικής απόκρισης (απολύτως αθροίσιμη) και β) μέσω των πόλων της Συνάρτησης μεταφοράς. Εμφανίστε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Να εκτελέσετε τα ίδια βήματα για το σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από τη Συνάρτηση Μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{1 + 1.15z^{-1} + 1.9z^{-2}}$$

4. **Κυκλική συνέλιξη**. Δίνονται τα σήματα διακριτού χρόνου:

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-3]$$

$$h[n] = 2\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της κυκλικής συνέλιξης του DFT

$$DFT\big[x[n] \otimes h[n]\big] = X[k]H[k]$$

καθώς και την ακόλουθη σχέση για τον υπολογισμό του iDFT με χρήση του DFT

$$y[n] = \ idft(Y(k)) = 1/N \ dft(Y^*(k))$$

(όπου $Y^*(k)$ ο συζυγής μιγαδικός του $Y(k)$), υπολογίστε την κυκλική τους συνέλιξη, 4 σημείων α) στο πεδίο του διακριτού χρόνου β) στο πεδίο συχνοτήτων : β1) με χρήση του *fft*, β2) χωρίς χρήση *fft* αλλά με υπολογισμό του DFT με πολλαπλασιασμό με τον πίνακα παραγόντων στροφής 4x4.
Επιβεβαιώστε οτι όλα τα αποτελέσματα συμπίπτουν.

5. **Απόκριση Συχνότητας.** Δίνεται σύστημα διακριτού χρόνου με Απόκριση Συχνότητας:

$$H\left(e^{i\omega}\right) = \frac{1 + 2e^{i\omega}}{1 - 0.2e^{i\omega}}$$

Να σχεδιαστεί το πραγματικό, το φανταστικό μέρος, το μέτρο και η φάση της Απόκρισης Συχνότητας.

6. **Ιδιότητα συνέλιξης DTFT.** Σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη κρουστική απόκριση :

$$h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] - 2\delta[n-3] + \delta[n-4].$$

Εαν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα :

$$\begin{gathered} x[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] + 5\delta[n-2] + 7\delta[n-3] + 5\delta[n-4] + \cdots \\ 11\delta[n-5] + 13\delta[n-6] + 17\delta[n-7] + 18\delta[n-8] + \cdots \\ +21\delta[n-9] + 12\delta[n-10] \end{gathered}$$

Να βρεθεί ο DTFT της εξόδου του συστήματος, α) με χρήση της συνέλιξης στο πεδίο του χρόνου και β) ως γινόμενο του DTFT της κρουστικής απόκρισης επί του DTFT της εισόδου. Να αναπαρασταθούν γραφικά και στις δυο περιπτώσεις τα φάσματα πλάτους και φάσης, και να συγκριθούν τα αποτελέσματα.

7. **DFT.** Δίνεται το σήμα διακριτού χρόνου :

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-3]$$

να υπολογιστεί ο DFT 4 σημείων, του σήματος α) με χρήση *fft* β) χωρίς τη χρήση *fft*, με με πολλαπλασιασμό με τον πίνακα παραγόντων στροφής 4x4 (χρησιμοποιείστε την έτοιμη συνάρτηση dftmtx). Στη συνέχεια, υπολογίστε τον iDFT του DFT που βρήκατε (δηλαδή, το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο το σήμα) με 3 τρόπους α) με χρήση της συνάρτησης *fft*, β) χωρίς τη χρήση *fft* μέσω της σχέσης :

$$x[n] = \ idft(X(k)) = \frac{1}{N}\ dft(X^*(k))$$

και γ) χωρίς τη χρήση *fft* μέσω της σχέσης :

$$x[n] = \ idft\big(X(k)\big) = \frac{1}{N}\ \ W_N^*\ \ dft(X(k))$$

(όπου *: συζυγής μιγαδικός)

Τέλος, υπολογίστε την ενέργεια του σήματος x[n] α) στο πεδίο του χρόνου και β) στο πεδίο της συχνότητας.

8. **Συνέλιξη Overlap – add method.** Στην περίπτωση που η μία από τις δύο ακολουθίες που εμπλέκονται στη συνέλιξη είναι πολύ μεγαλύτερη από την άλλη χρησιμοποιείται η τεχνική του κατακερματισμού της μεγάλης ακολουθίας σε τμήματα μήκους ίσου με αυτό της μικρής. Για την τμηματική εκτέλεση της συνέλιξης μία μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι η Overlap –add method. Περιληπτικά, η μέθοδος αυτή περιγράφεται ως εξής:
Η μεγάλου μήκους ακολουθία τμηματοποιείται σε μικρότερες ακολουθίες μήκους ίσου με το μήκος της μικρότερης (έστω N). Πραγματοποιείται συνέλιξη της «μικρής» ακολουθίας με τα δημιουργηθέντα τμήματα της μεγάλης. Για να δημιουργηθεί η τελική έξοδος της συνέλιξης, προστίθενται τα τελευταία N-1 δείγματα της καθεμίας συνέλιξης με τα N-1 πρώτα της επόμενής της τμηματικής συνέλιξης. Τα υπόλοιπα δείγματα μένουν ανέπαφα. Ολες αυτές οι έξοδοι συνθέτουν την τελική έξοδο (συνέλιξη) των δύο ακολουθιών.

Σαν απλή εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου, θεωρήστε το σήμα («μεγάλη ακολουθία», για λόγους κατανόησης και οπτικοποίησης, το μήκος της ακολουθίας δεν είναι μεγάλο !)

$$x[n] = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10],\ \ 0 \le n \le 9$$

και το σήμα («μικρή ακολουθία»)

$$h[n] = [\ 1\ 2\ 3\ 4],\qquad 0 \le n \le 3$$

Γράψτε τον κατάλληλο κώδικα για την συνέλιξη των δύο ακολουθιών με τη μέθοδο Overlap – add και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με το αποτέλεσμα της conv.

9. **Moving Average filter.** Ας θεωρηθεί το σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση εισόδου εξόδου (Moving Average filter, 5th order)

$$y[n] = \frac{1}{5}(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4])$$

Να βρεθεί η Απόκριση Συχνότητας του συστήματος α) μέσω DTFT με χρήση της ιδιότητας ολίσθησης, β) μέσω μετασχηματισμού Z γ) με χρήση της συνάρτησης freqz.

Σε όλες τις περιπτώσεις να δημιουργηθούν τα γραφήματα των φασμάτων πλάτους και φάσης. Να συγκριθούν τα αποτελέσματα. Να διαπιστωθεί, μέσω του φάσματος πλάτους, ότι το σύστημα λειτουργεί ως χαμηλοπερατό φίλτρο.

10. **Απόκριση συστήματος σε ημιτονοειδή είσοδο.** Ας θεωρηθεί το σύστημα διακριτού χρόνου με Απόκριση Συχνότητας :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2 - 3e^{-j\omega} + 0.1e^{-j2\omega}}{1 - 0.3e^{-j\omega}}$$

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος όταν η είσοδος είναι το σήμα :

$$x[n] = 3\cos(\pi n/5 + \frac{\pi}{4})$$

Ποια θα είναι η σχέση του πλάτους του σήματος εισόδου με το πλάτος της εξόδου και της φάσης του σήματος εισόδου με τη φάση της εξόδου?

11. **Περιοδικότητα**. Να σχεδιαστούν τα παρακάτω σήματα και για όσα είναι περιοδικά να προσδιοριστεί η θεμελιώδης περίοδός τους και να γίνει γραφική επαλήθευση της περιοδικότητας.

a) $x_1[n] = \frac{AM}{1000} cos(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{12})$

b) $x_2[n] = 2\, cos^2(\frac{\pi}{6} n + \frac{\pi AM}{1000})$

c) $x_3[n] = e^{j\pi n/5} + e^{-j\pi n/5}$

Οπου AM τα 4 τελευταία ψηφία του Αριθμού Μητρώου σας.

12. **Συνέλιξη.** Να υπολογιστεί η έξοδος συστήματος LTI

α) με κρουστική απόκριση $h[n] = |n-3|(u[n] - u[n-6])$ και είσοδο

$$x[n] = \begin{cases} -1, & n = -1 \\ 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ -1, & n = 2 \end{cases},$$

Θέτοντας $-10 \leq n \leq 10$.

β) με κρουστική απόκριση $h[n] = 0.6^n u[n]$ και είσοδο $x[n] = u[n] - u[n-10]$

Θέτοντας $-10 \leq n \leq 30$.

13. **Ανάλυση σε απλά κλάσματα.** Να αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων η ρητή συνάρτηση:

$$X(z) = \frac{2z^2 + 3\,\mathrm{z} - 1}{\mathrm{z}^3 - 5\,\mathrm{z}^2 + 8\,\mathrm{z} - 4}$$

Να γίνει και η θεωρητική ανάλυση και να συγκριθούν τα αποτελέσματα.

14. **Μετατροπές σήματος διακριτού χρόνου**. Να δημιουργηθεί το σήμα διακριτού χρόνου

$$x[n] = [1\ 2\ \underset{\uparrow}{\mathbf{3}}\ 4\ 5\ 6\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1]$$

Σε έξι υποπαράθυρα του ίδιου γραφικού παράθυρου να δημιουργηθούν οι γραφικές παραστάσεις των:
$a)\ x[n],\ \ b)\ x[n-5],\ \ c)\ x[n+4],\ \ d)\ x[-n],\ \ e)\ x[n/2],\ \ f)\ x[2n]$.

15. **Συνέλιξη με πίνακα Toeplitz.** Να γραφεί συνάρτηση η οποία να υλοποιεί τη συνέλιξη δύο ακολουθιών υπολογίζοντας τη συνέλιξη ως γινόμενου διανυσματικού πίνακα Toeplitz επί διάνυσμα.

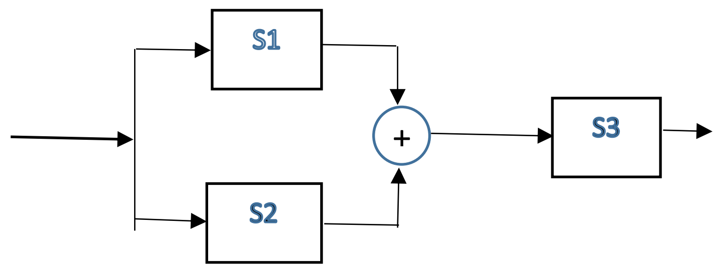
Με χρήση της συνάρτησης να υπολογιστεί η συνέλιξη των ακολουθιών $z[n] = x[n] * y[n]$, όπου:

$$x[n] = 4\delta[n+1] + 9\delta[n] - 2\delta[n-2]$$

$$y[n] = \left(\frac{n}{6}\right)(u(n+2) - u(n-3))$$

Να γίνει η γραφική παράσταση των $z[n], x[n], y[n]$ στους κατάλληλους άξονες. Τέλος, να επαληθευτεί το αποτέλεσμα με τη χρήση της *conv()*.

16. **Σύνδεση συστημάτων.** Δίνονται τα ΓΧΑ συστήματα S1, S2, S3 τα οποία είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους όπως φαίνεται στο σχήμα:



και περιγράφονται από τις εξισώσεις διαφορών:

$$S1:\ 2y[n] + y[n-1] + 0.5y[n-2] = 0.1x[n-1] + 0.1x[n-3]$$

$$S2:\ y[n] = 2x[n] + x[n-2]$$

$$S3:\ y[n] - 0.5y[n-2] + 0.8y[n-3] = x[n] + 0.4x[n-1] - 1.4x[n-2]$$

Να βρεθεί η συνολική κρουστική απόκριση της διάταξης με χρήση της impz() και να αναπαρασταθεί γραφικά.

17. **Φάσμα σήματος**. Ας θεωρηθεί το σήμα:

$$x[n] = 2cos(3\pi n/4), -10 \leq n \leq 10.$$

Να βρεθεί το φάσμα του σήματος αυτού με χρήση της *fft* σε 512 σημεία. Αναπαραστήστε το φάσμα πλάτους σε γραφικό παράθυρο. Παρατηρήστε τη διασπορά συχνοτήτων σε εύρος μεγαλύτερο από τις αναμενόμενες θεωρητικά φασματικές γραμμές του συνημιτόνου. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στον περιορισμό της άπειρης διάρκειας του συνημιτόνου και ονομάζεται φασματική διασπορά.
Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για το σήμα x[n], θεωρώντας αυτή τη φορά $-40 \leq n \leq 40$. Σχολιάστε το φάσμα που προκύπτει.

18 . **Γραμμικότητα συστήματος**. Να διερευνηθεί με γραφικό τρόπο εάν το σύστημα $y[n] = 2^{x[n]}$ είναι γραμμικό. Ως είσοδοι να θεωρηθούν τα σήματα $x_1[n] = 0.8^n$, $x_2[n] = cos[n], 0 \leq n \leq 5$. Ως σταθερές

να θεωρηθούν οι α=2 και β=3. Σε υποπαράθυρα του ίδιου γραφικού παραθύρου να σχεδιαστούν οι είσοδοι x1, x2 και οι δύο έξοδοι.

19**. Ενέργεια σήματος.** Με βάση το θεώρημα Parseval για τον DFT η ενέργεια ενός σήματος διακριτού χρόνου μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$$

Θεωρήστε το σήμα $x[n] = \frac{1}{n+1}$, $0 \leq n \leq 10$ και επιβεβαιώστε ότι η ενέργεια του σήματος μπορεί να βρεθεί από τον παραπάνω τύπο.

20. **Ευστάθεια συστήματος.** Δίνεται σύστημα Γραμμικό Χρονικά Αναλλοίωτο με κρουστική απόκριση $h[n] = 0.7^n\, u[n]$. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του, να διερευνηθεί αν είναι ευσταθές και να γίνει το διάγραμμα πόλων μηδενικών.

21. **Μετασχηματισμός Ζ**. Έστω σήμα διακριτού χρόνου, το οποίο περιγράφεται από τη σχέση:

$$x[n] = (3 + 2n)\ u[n]$$

Να υπολογιστούν θεωρητικά : (i) ο μετασχηματισμός z του σήματος $x[n]$ (ii) οι πόλοι και τα μηδενικά του μετασχηματισμού z του σήματος. Να δημιουργηθεί κώδικας για τον υπολογισμό των (i) & (ii). Επίσης, να γίνει το διάγραμμα πόλων μηδενικών.

22. **Σχέση DTFT & DFT.** Όπως είναι γνωστό ο DFT μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από τη δειγματολήπτιση του DTFT πάνω στις συχνότητες $\omega = 2\pi k/N, k = 0, \dots N-1$, δηλαδή σε Ν ισαπέχοντα σημεία (συχνότητες) στο διάστημα 0 έως 2π (μία περίοδος). Οσο περισσότερα δείγματα παίρνουμε τόσο πυκνώνουν οι γραμμές του διακριτού φάσματος.
Θεωρήστε το διακριτό σήμα $x[n] = n,\ 0 \leq n \leq 15$. Να σχεδιαστούν στο ίδιο σχήμα το μέτρο του DTFT για $0 \leq \omega \leq 2\pi$ και του DFT (με χρήση του αλγορίθμου fft) πάνω στις συχνότητες $\omega = 2\pi k/N, k = 0, \dots N-1$ όπου N=16.

Στο ίδιο σχήμα να σχεδιαστεί και το μέτρο του DFT του σήματος για N=32 σημεία.

23. **Κυκλική και Γραμμική συνέλιξη**. Δίνονται οι ακολουθίες:

$$x[n] = 3\delta[n] + \ \delta[n-1] - \delta[n-5]$$

$$\kappa\alpha\iota \;\; w[n] \; = [1, 0, 1, -2\,]. \;\; 0 \le n \le 3$$

Ζητούνται:

1) Να υπολογιστεί η κυκλική τους συνέλιξη α) στο πεδίο του χρόνου β) με χρήση fft(), ifft()

2) Να υπολογιστεί η κυκλική τους συνέλιξη 9 σημείων α) στο πεδίο του χρόνου β) με χρήση fft(), ifft()

3) Να βρεθεί η γραμμική συνέλιξη α) στο πεδίο του χρόνου β) με χρήση fft(), ifft()

24. **Εκτίμηση περιόδου από αυτοσυσχέτιση.** Ας θεωρηθούν τα σήματα:

$$x[n] = 3\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$y[n] = \; 2cos^2\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

Να βρεθεί η ακολουθία αυτοσυσχέτισης του κάθε σήματος με τη συνάρτηση xcorr. Να γίνει η γραφική παράσταση του κάθε σήματος καθώς και της ακολουθία αυτοσυσχέτισής του. Στη συνέχεια, με χρήση της xcorr να γίνει εκτίμηση της περιόδου του κάθε σήματος.

25**. Ετεροσυσχέτιση.** Να δημιουργηθεί το σήμα:

$$x_1[n] = \begin{cases} n, & 0 \le n \le 30 \\ 0, & 31 \le n \le 100 \end{cases}$$

Να δημιουργηθεί το σήμα $x_2[n]$ από την κυκλική ολίσθηση του $x_1[n]$ κατά 25 δείγματα (χρήση της circshift). Να βρεθεί η συσχέτιση των δύο σημάτων με τη συνάρτηση xcorr. Να γίνει η γραφική παράσταση του κάθε σήματος καθώς και της ακολουθία ετεροσυσχέτισής τους. Σε ποιο σημείο μεγιστοποιείται η ετεροσυσχέτιση?