Министерство образования РФ

Государственное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

“Тверской государственный университет”

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Факультет прикладной математики и кибернетики

**ВЫПУСКНАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА**

Направление: «*Прикладная математика и информатика»*

Специализация: *Бакалавриат*

**Тема:** *«Численный анализ тепловых процессов с учетом фазового перехода с использованием метода сеток»*

**Автор:**

студент 44 группы

Доронин Виталий Евгеньевич

*Тверь – 2018*

Оглавление

[Введение 3](#_Toc512332450)

[Постановка задачи 4](#_Toc512332451)

[Решение 6](#_Toc512332452)

[Расчеты на ЭВМ 9](#_Toc512332453)

[Нахождение численного решения 9](#_Toc512332454)

[Анализ результатов 10](#_Toc512332455)

[Код программы 13](#_Toc512332456)

[Список использованной литературы 17](#_Toc512332457)

# Введение

Первой работой в данной области считают статью Г. Ламе и Б. П. Клапейрона «Об отвердевании охлаждающегося жидкого шара» 1831 года, в которой было установлено, что толщина твердой фазы, образующейся при затвердевании однородной жидкости, пропорциональна . Значительно позже в 1889 году австрийский физик и математик Йозеф Стефан опубликовал четыре статьи, посвященные задачам с фазовыми переходами. Впоследствии задачи данного класса с подвижными межфазными границами стали называть задачами Стефана. В своих работах он сформулировал и решил задачи, определяющие процессы теплопроводности и диффузии для однофазной или двухфазной областей. Кроме того Й. Стефан сформулировал уравнение теплового баланса на границе раздела фаз с учетом скрытой теплоты, и теперь подобные условия сопряжения фаз принято называть условиями Стефана.

В настоящее время приближение Стефана используется при решении узкого круга задач: затвердевание чистых металлов, рост монокристаллов, при исследовании прочности льда, при моделировании 3D-печати.

# Постановка задачи

При изменении температуры тела может происходить изменение его физического состояния, в частности при переходе температуры через точку плавления – переход из твёрдой фазы в жидкую или наоборот. На поверхности фазового перехода всё время сохраняется постоянная температура. При движении поверхности фазового перехода происходит выделение скрытой теплоты плавления (затвердевания).

Математической моделью, описывающей процесс фазового

перехода, является задача с подвижной границей (задача

Стефана).

Рассмотрим процесс замерзания воды, при котором температура фазового переходы равна нулю. Будем рассматривать массу воды , ограниченную с одной стороны плоскостью . В начальный момент вода обладает постоянной температурой . Если на поверхности всё время поддерживается постоянная температура , то граница замерзания будет со временем проникать вглубь жидкости.

Задача о распределении температуры при наличии фазового перехода и о скорости движения границы раздела фаз (например, внутри замерзающей воды) сводится к решению уравнений

(1)

с дополнительными условиями

(2)

и условиями на границе замерзания

(3)

*, (4)*

где – коэффициенты теплопроводности и температуропроводности твердой и, соответственно, жидкой фаз.

Задачу (1) – (4) часто называют задачей Стефана, задачей о фазовом переходе или задачей о промерзании.

# Решение

Предположим, что имеется две фазы 1, 2 с коэффициентами теплоёмкости .

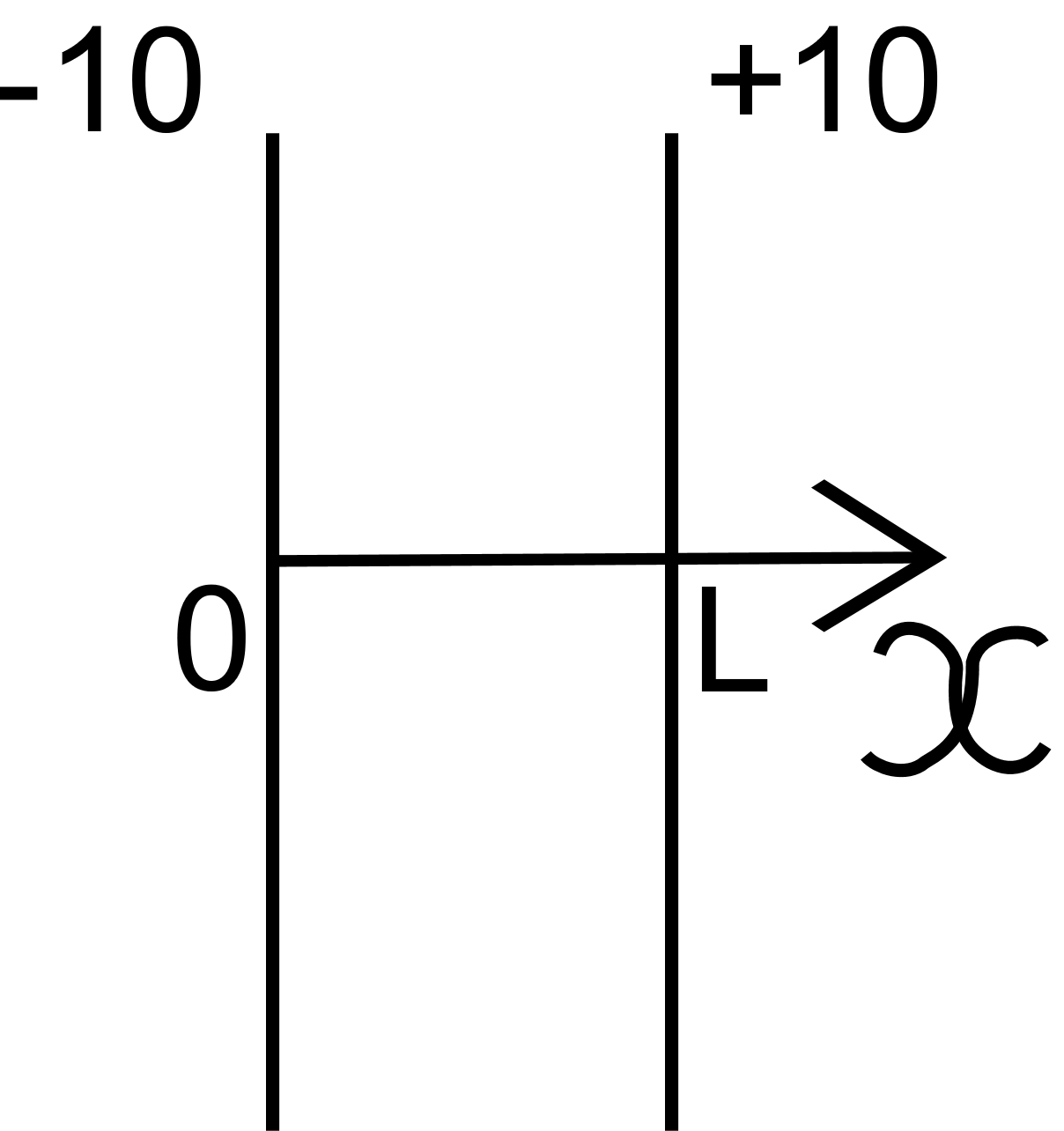
Имеем слой конечной толщины, . Температура на левой границе - ; на правой границе - . 

Рисунок 1. Схематичное изображение слоя воды.

Требуется найти поле температур :

## Метод Сеток

Мы будем искать решение уравнения (1) с помощью метода сеток. Он заключается в том, что пространство координат, к которому принадлежат неизвестные функции, покрывается «сеткой». В частности, в уравнении теплопроводности функция зависит всего от двух координат: времени и пространственной координаты. В этом случае мы получаем плоскость, изображённую на рис. 2.

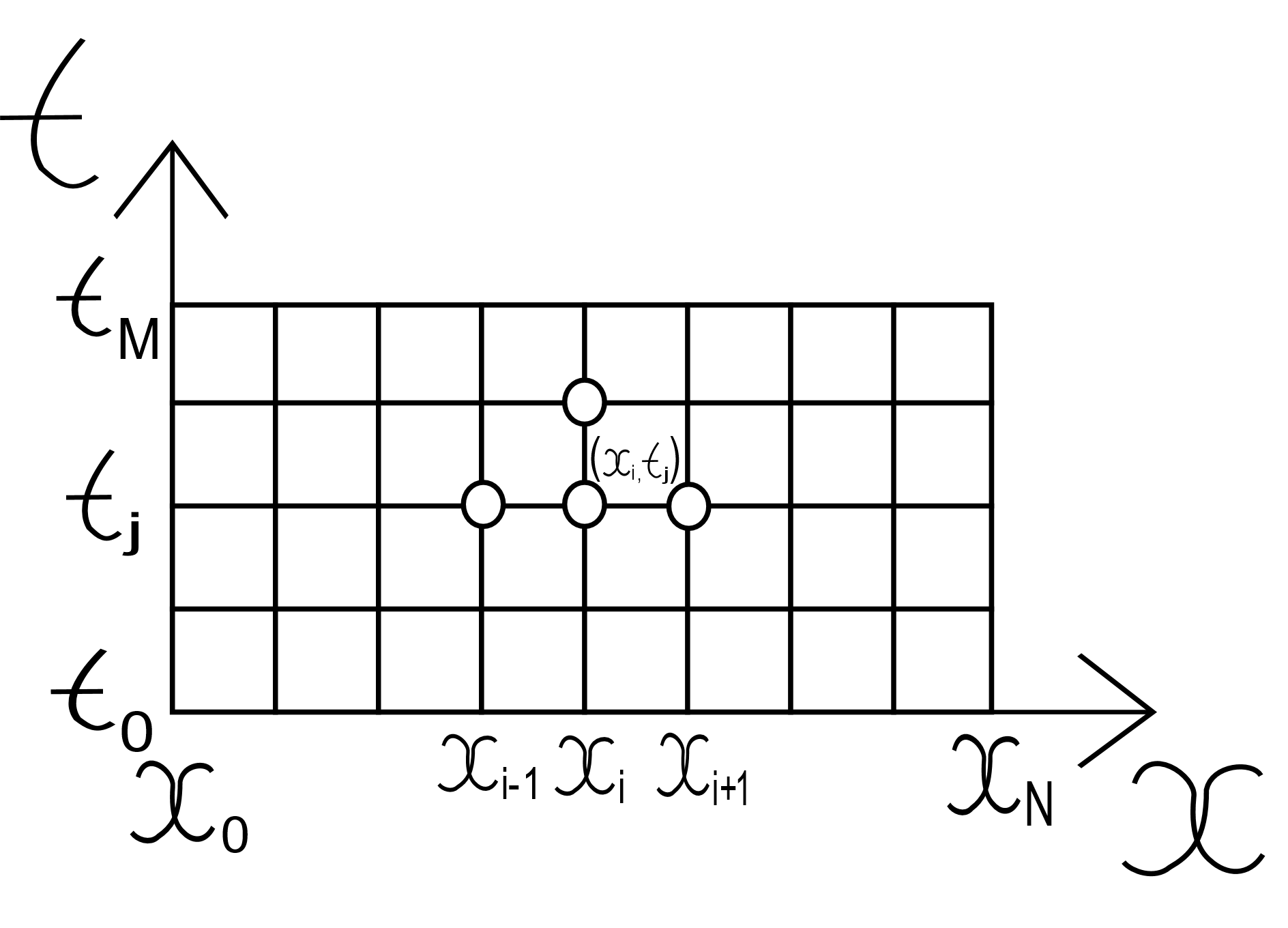


Рисунок 2. Равномерная сетка на плоскости

На рис.2 соответствует точке, в которой , – точке, в которой . Аналогично, соответствует 0-му моменту времени, а – M-му моменту времени. Такое разбиение определяет на координатной плоскости координатную сетку. Точку называют узлом сетки. Слоем сетки называют множество узлов, имеющих одну и ту же временну́ю координату. Сетка имеет шаги по Соседними узлами сетки называются узлы, лежащие на одной и той же прямой (горизонтальной или вертикальной), расстояние между которыми равно шагу сетки. Таким образом, у нас получается точка разбиения по оси и интервалов по оси . Всего имеем узлов.

Основная идея метода сеток состоит в том, что решение уравнения в частных производных (в нашем случае, решение уравнения (1)) ищется не для всех непрерывных значений , а для дискретного количества, то есть для значений в узлах сетки.

Для того чтобы найти значения , нужно их «дискретизировать» для узлов сетки. Для этого нужно аппроксимировать производные с помощью их разностных аналогов.

;

Таким образом, запишем решение уравнения (1) в узлах сетки:

Выражение дискретизируем с помощью левой разностной производной в точке (. Если точка фиксирована, а шаг , то разностное выражение стремится к значению функции в точке . Аналогично, аппроксимируем выражение  с помощью второй разностной производной:

*.*

Запишем систему алгебраических уравнений относительно , :

*(4)*

*(5)*

*(6)*

Мы получили шаблон чисто неявной схемы:

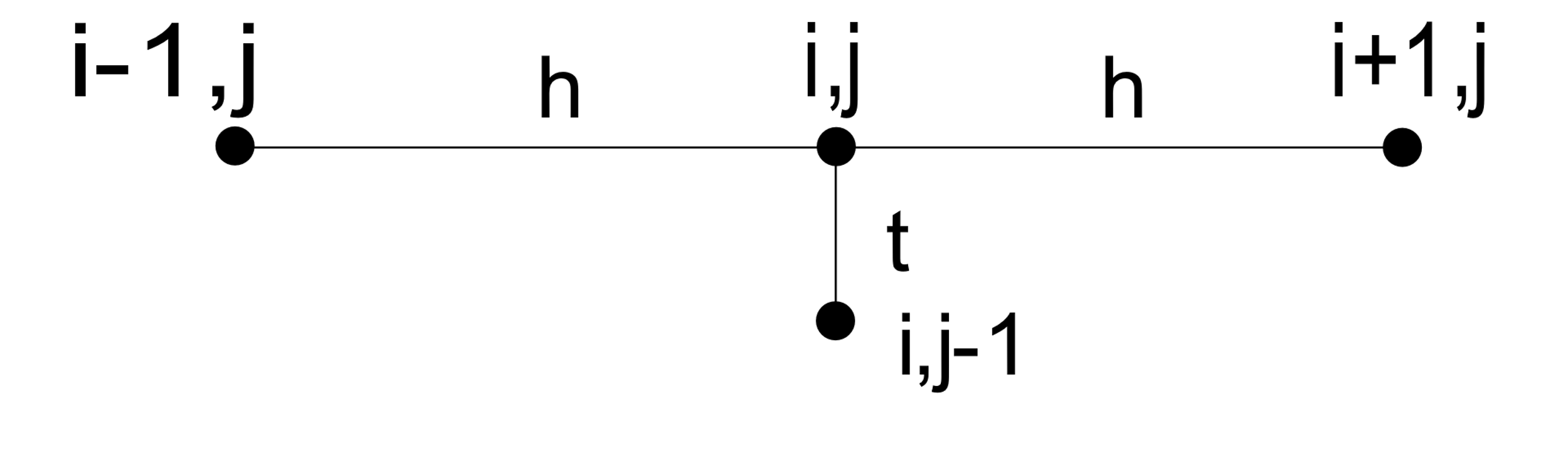


Рисунок 3. Чисто неявная схема

Схема имеет первый порядок аппроксимации по и второй - по h.

Решение системы (4) находится по слоям с помощью метода прогонки, который представляет собой метод последовательного исключения неизвестных.

В уравнении (4) заменим на , ; ;

В уравнении (5) и (6) заменим , .

Получим систему линейных алгебраических уравнений:

(7)

Эту систему приведём к виду (10), причём

В (7) уравнении перенесём в правую часть, все остальные слагаемые – в левую:

и сгруппируем слагаемые относительно :

*.*

В уравнении выше выражения, стоящие при , и правую часть уравнения заменим на коэффициенты :

.

Получили систему уравнений вида (10): .

Будем находить слои итерационным методом с помощью линейной функции:

, где – неизвестные пока коэффициенты.

Подставим в систему (10):

,

И сгруппируем слагаемые относительно :

(12)

Воспользуемся соотношением :

;

Последнее уравнение будет выполнено, если коэффициенты выбрать такими, чтобы выражения квадратных скобках обращались в нуль.

;

Получили

Мы исходили из соотношения (11).

Для граничных условий:

# Расчеты на ЭВМ

## Нахождение численного решения

Для численного значения интеграла будем использовать R – язык программирования для статистической обработки данных и работы с графикой, а также свободная программная среда вычислений с открытым исходным кодом в рамках проекта GNU. R широко используется как статистическое программное обеспечение для анализа данных и фактически стал стандартом для статистических программ.

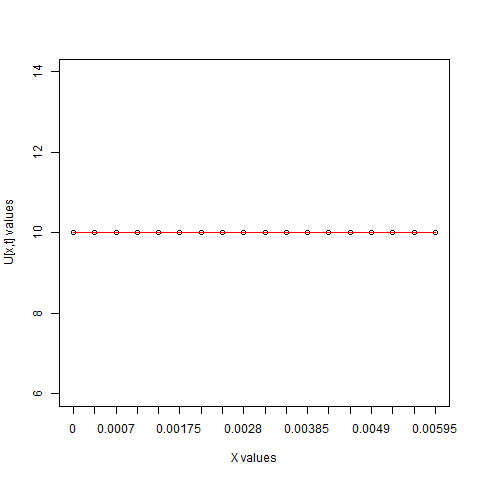
Для расчётов будем использовать начальные значения:

h = 0.00045 #шаг по x

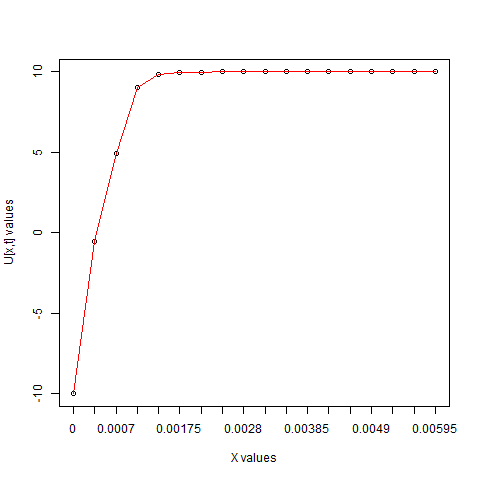
L = 0.008 #длина отрезка

## Анализ результатов

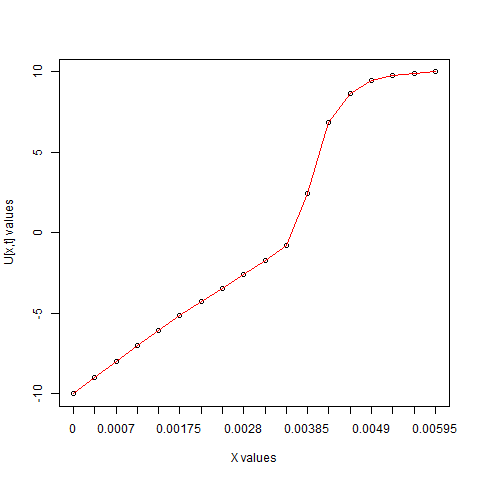
При = 1 :



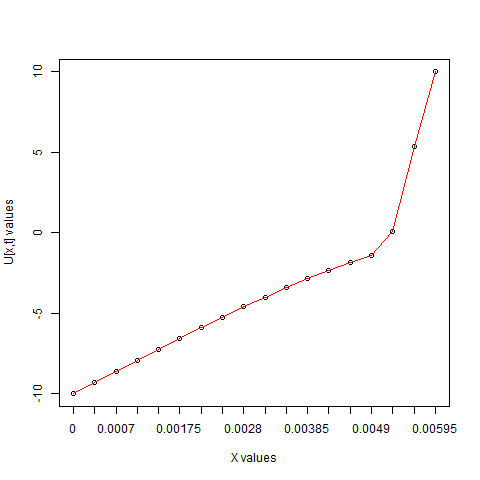
При = 2 :



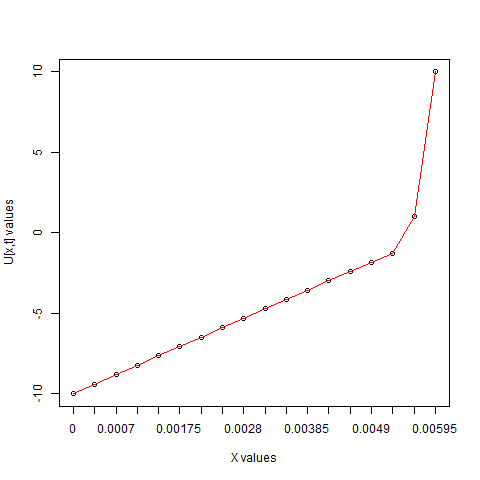
При =25 :



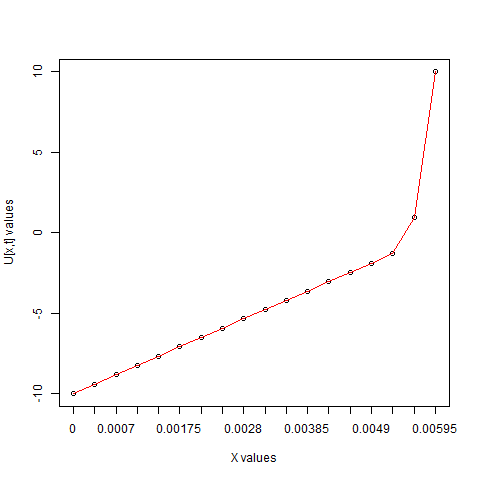
При = 50 :



При = 75:



При = 100:



## Сравнение численного и аналитического решения

Для нахождения аналитического решения мы будем использовать программный пакет, систему компьютерной математики Maple, предназначенный для символьных вычислений.

Решение будем находить в виде:

где , , – неизвестные постоянные, а

*–* интеграл ошибок.

Движение границы замерзания определяется по закону:

Для постоянных , , получаются выражения (см. [1]) :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Аналитическое решение | Численное решение / погрешность | Численное решение с меньшим шагом / погрешность |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

# Список использованной литературы

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Москва, 1977 c. 259 – 264, 617-619

[2] Самарский А.А. Теория разностных схем, Москва, 1977, c.68 – 71

[3] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы, Москва «Наука» // Главная редакция физико-математической литературы, 1989, c.34 – 36

[4] https://ru.wikipedia.org/wiki/Задача\_Стефана

## Приложение 1

## Код программы

rm**(**list **=** ls**())**

#k1=k2=1

k1**=**k2**=**0

k1\_U **=** 2.3

#k2\_U = k1\_U

k2\_U **=** 0.58

density\_1 **=** 918.7

density\_2 **=** 999.7

#mean\_density= mean(c(density1,density2))

c1\_U **=** 2000 **\*** density\_1

c2\_U **=** 4195 **\*** density\_2

mean\_K **=** mean**(**c**(**k1\_U,k2\_U**))**

mean\_C **=** mean**(**c**(**c1\_U,c2\_U**))**

#c2\_U = c1\_U

a**=(**mean\_K**/**mean\_C**)^(**1**/**2**)**

h **=** 0.00035 #шаг по x

tau **=** h**^**2**/**a**^**2

L **=** 0.006 #длина

N **=** round**(**L**/**h**)** #Число шагов

n **=** 150 #Число шагов по времени

tj **=** numeric**(**n**)** #tau j

nj **=** numeric**(**n**)** #ветор моментов времени

kU **=** **function(**U\_i**)**

**{**

**if(** U\_i **<** 0**)**

return**(**k1\_U**)**

**else** return**(**k2\_U**)**

**}**

CU **=** **function(**U\_i**)**

**{**

**if(** U\_i **<** 0**)**

return**(**c1\_U**)**

**else** return**(**c2\_U**)**

**}**

A **=** **function(**t**)**

**{**

#0

#1/(1+t)

**-**10

**}**

B **=** **function(**t**)**

**{**

#0

#1/(1+t)

10

**}**

x **=** numeric**(**N**+**1**)**

fij **=** numeric**(**N**+**1**)** #сила

Ai **=** numeric**(**N**)** #коэффициенты

Bi **=** numeric**(**N**)**

Ci **=** numeric**(**N**)**

Fi **=** numeric**(**N**-**1**)**

alpha **=** numeric**(**N**)**

beta **=** numeric**(**N**)**

**for(**j **in** 1**:**n**)**

**{**

tj**[**j**]=(**j**-**1**)\***tau

nj**[**j**]=**j**-**1

**}**

Ux0**=function(**x**)**

**{**

#A(tj[1]) + (B(tj[1])-A(tj[1]))\*(x/L)^2;

#1

10

**}**

**for(**i **in** 1**:**N**+**1**)**

**{**

x**[**i**]=** **(**i**-**1**)\***h

fij**[**i**]=**0

**}**

U **=** matrix**(**data**=NA**,nrow**=**n,ncol**=**N**+**1**)**

colnames**(**U**)=**x

row.names**(**U**)=** c**(**0**:(**n**-**1**))**

**for(**i **in** 0**:**N**+**1**)** #Считаем 0-й слой

**{**

U**[**1,i**]** **=** Ux0**(**x**[**i**])**

**}**

CoeffF **=** **function(**j**)** #Поправка на коэфф

**{**

alpha**[**1**]** **=** k1

beta**[**1**]** **=** A**(**tj**[**j**])**

Ai**[**1**]** **=** **-** kU**(**U**[**j,1**])** **/** h**^**2

Bi**[**1**]** **=** **-** kU**(**U**[**j,1**])** **/** h**^**2

Ci**[**1**]** **=** CU**(**U**[**j,1**])** **/** tau **+** 2 **\*** kU**(**U**[**j,1**])** **/** h**^**2

**for(**i **in** 2**:(**N**-**1**))** # Считаем очередные Ai, Bi , Ci

**{**

Ai**[**i**]** **=** **-** kU**(**U**[**j,i**-**1**])** **/** h**^**2

Bi**[**i**]** **=** **-** kU**(**U**[**j,i**+**1**])** **/** h**^**2

Ci**[**i**]** **=** CU**(**U**[**j,i**])** **/** tau **+** **(**kU**(**U**[**j,i**+**1**])** **+** kU**(**U**[**j,i**-**1**]))** **/** h**^**2

**}**

# for(i in 1:(N-1)) # Считаем очередные Ai, Bi , Ci

# {

# Ai[i] = - kU(U[j,i]) / h^2

# Bi[i] = - kU(U[j,i]) / h^2

# Ci[i] = CU(U[j,i]) / tau + 2 \* kU(U[j,i]) / h^2

# }

**for(**i **in** 1**:(**N**-**1**))** #Считаем Fi

Fi**[**i**]** **=** CU**(**U**[**j,i**])** **\*** U**[**j**-**1,i**+**1**]** **/** tau

**for(**i **in** 2**:**N**)** #Считаем альфа и бета коэффициенты

**{**

alpha**[**i**]=-**Bi**[**i**-**1**]/(**Ci**[**i**-**1**]+**Ai**[**i**-**1**]\***alpha**[**i**-**1**])**

beta**[**i**]=** **(**Fi**[**i**-**1**]-**Ai**[**i**-**1**]\***beta**[**i**-**1**])/(**Ci**[**i**-**1**]+**Ai**[**i**-**1**]\***alpha**[**i**-**1**])**

**}**

U**[**j,N**+**1**]=(**B**(**tj**[**j**])+**k2**\***beta**[**N**])/(**1**-**k2**\***alpha**[**N**])**

**for(**i **in** N**:**1**)** #Считаем Uj

U**[**j,i**]=** alpha**[**i**]** **\*** U**[**j,i**+**1**]** **+** beta**[**i**]**

return**(**U**[**j,**])**

**}**

IterF **=** **function(**j**)** #Считаем остальные слои

**{**

alpha**[**1**]** **=** k1

beta**[**1**]** **=** A**(**tj**[**j**])**

**for(**i **in** 1**:(**N**-**1**))** # Считаем очередные Ai, Bi , Ci

**{**

Ai**[**i**]** **=** **-** kU**(**U**[**j**-**1,i**])** **/** h**^**2

Bi**[**i**]** **=** **-** kU**(**U**[**j**-**1,i**])** **/** h**^**2

Ci**[**i**]** **=** CU**(**U**[**j**-**1,i**])** **/** tau **+** 2 **\*** kU**(**U**[**j**-**1,i**])** **/** h**^**2

**}**

**for(**i **in** 1**:(**N**-**1**))** #Считаем Fi

Fi**[**i**]** **=** CU**(**U**[**j**-**1,i**])\***U**[**j**-**1,i**+**1**]/**tau

**for(**i **in** 2**:**N**)** #Считаем альфа и бета коэффициенты

**{**

alpha**[**i**]=-**Bi**[**i**-**1**]/(**Ci**[**i**-**1**]+**Ai**[**i**-**1**]\***alpha**[**i**-**1**])**

beta**[**i**]=** **(**Fi**[**i**-**1**]-**Ai**[**i**-**1**]\***beta**[**i**-**1**])/(**Ci**[**i**-**1**]+**Ai**[**i**-**1**]\***alpha**[**i**-**1**])**

**}**

U**[**j,N**+**1**]=(**B**(**tj**[**j**])+**k2**\***beta**[**N**])/(**1**-**k2**\***alpha**[**N**])**

**for(**i **in** N**:**1**)** #Считаем Uj

U**[**j,i**]=** alpha**[**i**]** **\*** U**[**j,i**+**1**]** **+** beta**[**i**]**

#U[j,1]=k1\*U[j,2]-h\*A(tj[j])

return**(**U**[**j,**])**

**}**

**for(**j **in** 2**:**n**)**

**{**

U**[**j,**]** **=** IterF**(**j**)**

U**[**j,**]** **=** CoeffF**(**j**)**

**}**

options**(**scipen **=** 999**)** # Disable exponential notation (e.g. 1.81e+09)

#print("Численное решение")

#print(U)

#print("Точное решение")

#print(Uacc)

library**(**animation**)**

oopt **=** ani.options**(**interval **=** 0.3**)**

ani.record**(**reset **=** **TRUE)**

**for(**j **in** 1**:**n**)**

**{**

plot**(**U**[**j,**]**, xaxt**=**"n", xlab **=** 'X values', ylab **=** 'U[x,t] values'**)**

lines**(**U**[**j,**]**,col**=**"red"**)**

#lines(Uacc[j,],col="blue")

axis**(**1, at **=** c**(**1**:(**N**+**1**))**, labels **=** x**)**

ani.pause**()**

ani.record**()**

**}**

# while(TRUE)

# {

# ani.replay()

# ani.options(oopt, loop = 100)

# }

## Приложение 2.

**> **

**> **

**> **

**> **

**> **

**> **



**> **



**> **



**> **



**> **



**> **



**> **



**> **

**> **

**> **

**> **

**> **

**> **

**> **

**> **

**> **



**> **

**> **



**> **



**> **



**> **





**> **

**> **

**> **

**> **

**> **

**> **

**> **

**> **

**> **

**> **

**> **

**> **

**> **

