助教

ADMM

退化建模：$y = k \otimes x + n$

优化目标：$\min_x \|y - x \otimes k\|_F^2 + \lambda R(x)$

使用ADMM展开进行求解：

构建拉格朗日乘子函数：$\mathcal{L}(x, z, \mu) = \|y - x \otimes k\|_F^2 + \lambda R(z) + \mu^T(x - z) + \frac{\rho}{2}\|x - z\|_2^2$

μ表示拉格朗日乘子，ρ是惩罚参数，λ是正则化参数

更新x

$$x^{k+1} = \arg\min_x \left(\|y - x \otimes k\|_F^2 + \frac{\rho}{2}\|x - z^k + \frac{\mu^k}{\rho}\|_2^2\right)$$

该更新式子有闭合解：

1. 问题回顾

我们在第一个子问题中需要对 x 进行求解：

$$x^{k+1} = \arg\min_x \left(\|y - x \otimes k\|_F^2 + \frac{\rho}{2} \|x - z^k + \frac{\mu^k}{\rho}\|_2^2 \right)$$

2. 推导闭合解

这个优化问题由两个项组成：

1. 数据项：$\|y - x \otimes k\|_F^2$，即卷积核的逆问题。
2. 正则化项：$\frac{\rho}{2} \|x - z^k + \frac{\mu^k}{\rho}\|_2^2$。

我们需要对 x 进行求导并得到解析解。

2.1 梯度推导

首先将目标函数对 x 求导：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\|y - x \otimes k\|_F^2 + \frac{\rho}{2} \|x - z^k + \frac{\mu^k}{\rho}\|_2^2 \right)$$

对于第一项 $\|y - x \otimes k\|_F^2$，利用卷积的性质，梯度可以表示为：

$$-2k^T \otimes (y - x \otimes k)$$

其中 k^T 是卷积核的转置。

对于第二项 $\frac{\rho}{2} \|x - z^k + \frac{\mu^k}{\rho}\|_2^2$，其梯度是：

$$\rho(x - z^k + \frac{\mu^k}{\rho})$$

将这两部分的梯度相加并令其等于 0：

$$-2k^T \otimes (y - x \otimes k) + \rho(x - z^k + \frac{\mu^k}{\rho}) = 0$$

2.2 解析解推导

为了得到 x 的闭合解，重写上述方程：

$$2k^T \otimes (y - x \otimes k) = \rho(x - z^k + \frac{\mu^k}{\rho})$$

2.2 解析解推导

为了得到 x 的闭合解，重写上述方程：

$$2k^T \otimes (y - x \otimes k) = \rho(x - z^k + \frac{\mu^k}{\rho})$$

这其实是一个典型的卷积核逆问题。我们可以通过以下两种方式得到 x 的闭合解：

- **频域方法（FFT）**：对于卷积问题，常用的方法是将问题转化到频域进行求解。在频域中，卷积操作可以转化为乘法操作。具体步骤如下：
  1. 使用傅里叶变换将 y 和 k 转化到频域。
  2. 在频域中求解 x。
  3. 使用逆傅里叶变换将解转回空间域。

  解的形式如下：

  $$X(f) = \frac{K^*(f)Y(f) + \rho Z(f)}{K^*(f)K(f) + \rho}$$

  其中，$X(f)$、$Y(f)$、$K(f)$ 分别是傅里叶变换后的 x、y 和 k，$K^*(f)$ 是 $K(f)$ 的共轭。
- **解析解方法**：如果卷积核 k 是简单的矩阵，可能通过矩阵逆或伪逆来求解 x。这适用于小型问题或特殊的卷积核，但对于较大的问题，频域方法通常更有效。

3. 闭合解形式

使用傅里叶变换的闭合解形式为：

$$x^{k+1} = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(k)^*\mathcal{F}(y) + \rho\mathcal{F}(z^k - \frac{\mu^k}{\rho})}{\mathcal{F}(k)^*\mathcal{F}(k) + \rho}\right)$$

其中 $\mathcal{F}$ 表示傅里叶变换，$\mathcal{F}^{-1}$ 表示逆傅里叶变换。

频域

$$x^{k+1} = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(k)^*\mathcal{F}(y) + \rho\mathcal{F}(z^k - \frac{\mu^k}{\rho})}{\mathcal{F}(k)^*\mathcal{F}(k) + \rho}\right)$$

更新z

$$z^{k+1} = \arg\min_z \left(\lambda R(z) + \frac{\rho}{2}\|x^{k+1} - z + \frac{\mu^k}{\rho}\|_2^2\right)$$

L1 正

L1正则项的话，该更新式子可以使用软阈值进行替代

优化目标写为这样的式子：$f(z_i) = z^{k+1} = \frac{\rho}{2}\|x^{k+1} - z^k + \frac{\mu^k}{\rho}\|_2^2 + \lambda|z^k|$，求解问题也就是对这个目标函数求导：

当z_i大于0

$\frac{d}{dz^k}f(z^k) = \rho(x^{k+1} - z^k + \frac{\mu^k}{\rho}) + \lambda = 0$

$z_i = x_i + u_i - \frac{\lambda}{\rho}$

当z_i小于0

$\frac{d}{dz^k}f(z^k) = \rho(x^{k+1} - z^k + \frac{\mu^k}{\rho}) - \lambda = 0$

$z^k = x^k + \frac{\mu^k}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho}$

L2正则项

该优化目标具有闭式解：$z^{k+1} = \frac{\rho}{\rho+2\lambda}\left(x^{k+1} + \frac{\mu^k}{\rho}\right)$

步骤 2：更新 z

接下来，我们对 z 进行最小化，固定 x 和 μ：

$$z^{k+1} = \arg\min_z \left(\lambda \|z\|_2^2 + \frac{\rho}{2} \|x^{k+1} - z + \frac{\mu^k}{\rho}\|_2^2 \right)$$

这个优化问题的解有一个闭合解，我们可以通过对 z 进行解析求解。由于 z 只出现在二次项中，且是一个标准的二次问题，我们可以直接求解该问题。

解析解

我们可以通过对 z 求导并令其为零来求解 z 的最优解。对目标函数求导并令其为零：

$$2\lambda z + \rho(z - x^{k+1} - \frac{\mu^k}{\rho}) = 0$$

解得：

$$z^{k+1} = \frac{\rho}{\rho + 2\lambda} \left(x^{k+1} + \frac{\mu^k}{\rho} \right)$$

这个表达式是 z 的闭合解，它表示 z 是 $x^{k+1} + \frac{\mu^k}{\rho}$ 的一个加权平均值。

步骤 3：更新拉格朗日乘子 μ

最后，更新拉格朗日乘子 μ：

$$\mu^{k+1} = \mu^k + \rho(x^{k+1} - z^{k+1})$$

这一步是标准的ADMM更新步骤，用于保证 x 和 z 的一致性。

5. 总结

在ADMM框架中处理 L_2-正则化时，主要的修改在于 z 的更新步骤。对于 L_2-正则化项 $\lambda\|z\|_2^2$，我们可以通过解析解直接更新 z，具体的闭合解为：

$$z^{k+1} = \frac{\rho}{\rho + 2\lambda} \left(x^{k+1} + \frac{\mu^k}{\rho} \right)$$

对于TV范数的变量z更新方法

$$z^{i+1} = \arg\min_z \frac{\rho}{2} \|x^{i+1} - z^i + u^i\|_2^2 + \lambda TV(z)$$

将上式作为变量z更新的损失函数进行使用梯度下降方法求解固定x和u 情况下的z

其实L2范数和L1范数也能够通过pytorch的自动求解微分功能进行求解。

更新乘子u

$$\mu^{k+1} = \mu^k + \rho(x^{k+1} - z^{k+1})$$