Tema 3

Variables aleatorias y modelos de distribuciones

3.1. Conceptos generales

Desarrollaremos en este tema el concepto de variable aleatoria. Como iremos viendo a lo largo del tema las variables aleatorias proporcionan una potente herramienta que nos permitirá entre otras cosas trabajar con números, en lugar de sucesos, con las ventajas que eso supone a la hora de modelar diversos fenómenos. Aunque la definición formal de variable aleatoria es más compleja, para nuestros propósitos es suficiente la siguiente definición:

Definición 3.1.1.– *Dado un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, una variable aleatoria es una función* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Esto es, una variable aleatoria no es más que una función que asigna un valor real a cada resultado del experimento o, lo que es igual, a cada suceso elemental del mismo.

Ejemplo 1. Los siguientes son ejemplos de variables aleatorias:

a) Se lanza una moneda dos veces y a cada resultado se le asigna el número de caras obtenidas. En este caso, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ siendo $\omega_1 = (c, c), \omega_2 = (c, x), \omega_3 = (x, c), \omega_4 = (x, x)$. Nótese que, en cada uno de estos pares, el primer y segundo elemento representan, respectivamente, el resultado obtenido en el primer y segundo lanzamiento de la moneda, *'c'* representa el suceso *obtener cara al lanzar la moneda* y *'x'* representa el suceso *obtener cruz al lanzar la moneda*. Entonces la variable aleatoria viene definida por

$$X(\omega_1) = 2, X(\omega_2) = 1, X(\omega_3) = 1, X(\omega_4) = 0.$$

b) Se lanzan dos dados y a cada resultado se le asigna la suma de los números que han salido.

c) Se dispara a una diana y se asigna a cada punto de impacto la distancia desde éste hasta el centro de la diana.

Definición 3.1.2.– *Una variable aleatoria se dice que es discreta cuando su recorrido (posibles valores que toma la variable) está formado por un número finito o infinito numerable de valores. En otro caso, por ejemplo si el recorrido es un intervalo, diremos que la variable es continua.*

Las variables aleatorias definidas en los ejemplos 1a) y 1b) son variables aleatorias discretas, mientras que la variable definida en el ejemplo 1c) es una variable aleatoria continua. Nótese que el carácter continuo o discreto de una variable aleatoria no lo determina el espacio muestral, sino el recorrido de la variable, esto es, el conjunto de valores que puede tomar.

Proposición 3.1.3.– *Si X es una variable aleatoria sobre Ω y f es una función continua, $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $Img(X) \subseteq D$ entonces $f \circ X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria que denotaremos $f(X)$, y se define como:*

$$f(X)(\omega) = (f \circ X)(\omega) = f(X(\omega)) \;\; \forall\, \omega \in \Omega$$

En particular, si X e Y son variables aleatorias sobre Ω y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces aX, $aX + bY$ y XY son variables aleatorias.

Ejemplo 2. Consideremos la variable aleatoria X definida en el ejemplo 1a) y la función f definida como $f(x) = x^2$. Entonces $Y = f(X)$ es una variable aleatoria que se define como:

$$Y(\omega_1) = f(X)(\omega_1) = f(X(\omega_1)) = f(2) = 4$$

$$Y(\omega_2) = f(X)(\omega_2) = f(X(\omega_2)) = f(1) = 1$$

$$Y(\omega_3) = f(X)(\omega_3) = f(X(\omega_3)) = f(1) = 1$$

$$Y(\omega_4) = f(X)(\omega_4) = f(X(\omega_4)) = f(0) = 0.$$

3.2. Variables aleatorias discretas

Definición 3.2.1.– *Dada una variable aleatoria discreta X que toma los valores*[1] $x_1, \ldots, x_n$ *se llama función de probabilidad o distribución de probabilidad de X a la función:*

$$P : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$
$$P(x) = P[X = x] = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}).$$

Se verifica que:

1. $P(x) = 0$ si $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$.
2. $\displaystyle\sum_{x_i} P(x_i) = 1$.

[1] Por simplicidad, en esta definición y en el resto de la sección y el tema, se ha denotado por $x_1, \ldots, x_n$ a los valores que toma una variable discreta. No obstante, de acuerdo a la definición de variable discreta, el recorrido de una variable de este tipo puede estar formado por una cantidad infinita, aunque numerable, de valores. En tal caso todas las definiciones y resultados que se muestran en el tema siguen siendo igualmente válidos.

Ejemplo 3. La función de probabilidad de la variable aleatoria X definida en el ejemplo 1a), viene dada por[2]:

$P(0) = P(X = 0) = P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4}$

$P(1) = P(X = 1) = P(\{\omega_2, \omega_3\}) = P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{2}$

$P(2) = P(X = 2) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$

$P(x) = P(X = x) = P(\emptyset) = 0$ si $x \notin \{0, 1, 2\}$

Definición 3.2.2.– *Dada una variable aleatoria discreta X que toma los valores $x_1, \ldots, x_n$, con $x_1 < \ldots < x_n$, se define la función de distribución asociada a X como:*

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$
$$F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} P(x_i)$$

Esto es, para cada valor $x \in \mathbb{R}$ la función de distribución nos muestra la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor menor o igual que x.

Ejemplo 4. La función de distribución asociada a la variable aleatoria X descrita en el ejemplo 1a) es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

La figura 3.1 muestra la representación gráfica de esta función:

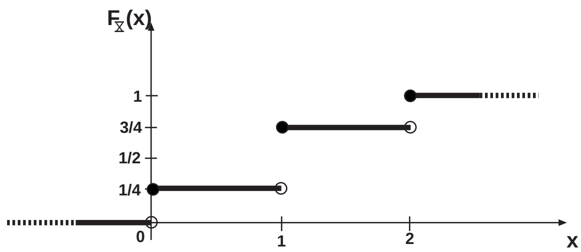

Figura 3.1: Función de distribución de la variable discreta definida en el ejemplo 1a)

Hay que hacer hincapié en que los intervalos utilizados en la definición de F no son casuales. Para que la función de distribución se encuentre definida de forma única en cada intervalo, estos deben ser de la forma $x_i \leq x < x_{i+1}$ excepto el primero, que debe ser de la forma $x < x_1$, y el último, que debe ser de la forma $x \geq x_n$.

[2] Nótese que, en cada tirada de la moneda, los sucesos "obtener cara" y "obtener cruz" son equiprobables y que, además, el resultado obtenido en la primera tirada de la moneda es independiente del resultado obtenido en la segunda, por lo que $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, para cada $i = 1, 2, 3, 4$.

Propiedades: Si F_X es la función de distribución asociada a una variable aleatoria X, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. F_X es escalonada y los puntos de salto son los x_i.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
3. F_X es no decreciente, esto es, si $x \leq y$ entonces $F_X(x) \leq F_X(y)$.
4. F_X es continua por la derecha.

3.3. Variables aleatorias continuas

Definición 3.3.1.– *Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es función de densidad de alguna variable aleatoria continua X si cumple las siguientes condiciones:*

i. $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

ii. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Además, para esa variable se verifica que $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ para $a, b \in \mathbb{R}$.

Nótese que, si X es una variable aleatoria continua, entonces para cualquier $a \in \mathbb{R}$,

$$P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Por tanto, no tiene demasiado sentido trabajar con la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un determinado valor sino que trabajaremos con intervalos, esto es, con probabilidades del tipo $P[X \geq a], P[X \leq b]$ o bien $P[a \leq X \leq b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y las variantes de que se pueden obtener usando también desigualdades estrictas.

Definición 3.3.2.– *Dada una variable aleatoria continua X y su función de densidad f_X, se define la función de distribución de X como:*

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Como se indicó anteriormente, si una variable aleatoria X es continua se verifica que $P[X = x] = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ y, por tanto,

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[X < x] + P[X = x] = P[X < x] \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propiedades: La función de distribución F_X de una variable aleatoria continua X verifica las siguientes propiedades:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
2. $P[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$.
3. F_X es no decreciente y además es continua.
4. $F'_X(x) = f_X(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$ tal que f_X es continua en x.

Ejemplo 5. Comprobar que la función $f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in (0,1) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (0,1) \end{cases}$ es función de densidad de una variable aleatoria continua X y representarla gráficamente. Determinar la función de distribución de X.

Efectivamente, f_X es función de densidad: para ello tenemos que comprobar que se cumplen las condiciones *i)* y *ii)* indicadas en el definición 3.3.1. Es inmediato comprobar que *i)* se cumple pues, por la propia definición de f_X, se verifica que $f_X(x) \geq 0$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Veamos ahora que también se cumple la condición *ii)* esto es, que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$. Para calcular esta integral es necesario descomponerla en integrales cuyos intervalos de integración coinciden con los distintos intervalos de definición de f_X. De este modo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 2x\,dx + \int_{1}^{+\infty} 0\,dx = 0 + \left(x^2 \Big|_0^1\right) + 0 = 1.$$

La figura 3.2 muestra la función de densidad de la variable aleatoria X. Como ya sabemos, la probabilidad de que la variable X tome un valor entre dos valores dados a, b, esto es $P[a \leq X \leq b]$, se calcula como $\int_a^b f(x)dx$. De esta forma, podemos decir que la probabiidad viene representada por el área que hay bajo la función de densidad de manera que, a mayor área, mayor probabilidad. De este modo, observando nuestra función de densidad podemos decir que no es probable que la variable aleatoria tome valores menores que 0 ni mayores 1 y que, al realizar una observación de la variable, es más probable obtener un valor próximo a uno que un valor próximo a cero.

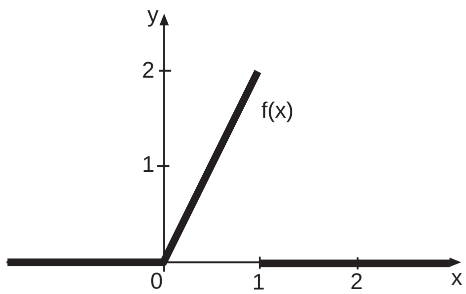

Figura 3.2: Función de densidad de la variable definida en el ejemplo 5

Calcularemos ahora la función de distribución $F_X(x)$, de la variable X. Para ello es necesario considerar distintas posibilidades en función del intervalo de definición de f_X al que pertenezca su argumento, x. De este modo,

- Si $x < 0$, $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$
- Si $0 \leq x < 1$, $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 2tdt = 0 + t^2 \Big|_0^x = x^2.$
- Si $x \geq 1$, $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} 2tdt + \int_{1}^{x} 0dt = 0 + t^2\Big|_0^1 + 0 = 1.$

Esto es, $\quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < 0 \\ x^2 & \text{si} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} & x \geq 1 \end{cases}$

Nótese que, por ser función de distribución de una variable aleatoria continua, la función anterior es una función continua. Esto hace irrelevante, a diferencia de lo que ocurre con las funciones de distribución de variables discretas, el hecho de que las desigualdades utilizadas para construir los intervalos de definición de F_X sean estrictas o no, siempre que sean exahustivas, esto es, que cubran todos los valores reales. No obstante, para evitar confusiones y homogeneizar la forma de definir las funciones de distribución, usaremos la misma estructura que en el caso discreto: intervalos de la forma $x < a$, $c \leq x < d$ y/o $x \geq b$ según sean necesarios.

3.4. Características asociadas a una variable aleatoria

Definición 3.4.1.– *Si X es una variable aleatoria* **discreta** *que toma los valores $x_1, \ldots, x_n$ se define la* **media o esperanza** *de X como:*

$$\mu_X = E[X] = \sum_{i \geq 1} x_i \cdot P[X = x_i]$$

Si X es continua, se define como:

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

La esperanza de una variable aleatoria representa el valor que, en promedio, toma la variable.

Definición 3.4.2.– *Si X es una variable aleatoria y $g(X)$ una función de dicha variable, se define la esperanza de $g(X)$ como:*

$$E[g(X)] = \sum_{i \geq 1} g(x_i) \cdot P[X = x_i] \qquad \textit{si } X \textit{ es discreta.}$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx \qquad \textit{si } X \textit{ es continua.}$$

De acuerdo a esta definición, si X es una variable aleatoria discreta, entonces

$$E[X^2] = \sum_{i \geq 1} x_i^2 \cdot P[X = x_i]; \quad E[X^3] = \sum_{i \geq 1} x_i^3 \cdot P[X = x_i], \quad \text{etc.}$$

mientras que, si X es continua, entonces

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx; \quad E[X^3] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot f_X(x) dx, \quad \text{etc.}$$

Propiedades: Dadas dos variables aleatorias X e Y y una constante $a \in \mathbb{R}$,

1. $E[X + a] = E[X] + a$.
2. $E[aX] = aE[X]$.
3. $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.

Definición 3.4.3.– *Se define la varianza de una variable aleatoria X como:*

$$Var(X) = E[(X-\mu_X)^2] = \sum_{i\geq 1}(x_i-\mu_X)^2\cdot P[X=x_i] \quad \text{si } X \text{ es discreta.}$$

$$Var(X) = E[(X-\mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_X)^2\cdot f_X(x)dx \quad \text{si } X \text{ es continua.}$$

En ambos casos se verifica: $Var[X] = E[X^2]-\mu_X^2$. También se denota $Var[X]=\sigma_X^2$. A la raíz cuadrada positiva de la varianza se le denomina desviación típica y se denota por σ_X.

Propiedades: Dadas dos variables aleatorias X e Y y una constante $a\in\mathbb{R}$,

1. $Var[X+a]=Var[X]$.
2. $Var[aX]=a^2Var[X]$.
3. Si las variables X e Y son independientes (ver definición 3.7.3) entonces se verifica que $Var[X+Y]=Var[X]+Var[Y]$. El recíproco no es, en general, cierto.

Ejemplo 6:

- Para la variable aleatoria X del ejemplo 1a),

  $$E[X] = 0\cdot P[X=0]+1\cdot P[X=1]+2\cdot P[X=2] = 0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1.$$

  Esto significa que, en el experimento descrito en el ejemplo 1a), el número medio de caras que se obtienen es igual a 1.

  Por otra parte,

  $$E[X^2] = 0^2\cdot P[X=0]+1^2\cdot P[X=1]+2^2\cdot P[X=2] = 0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2},$$

  por lo que $Var[X]=E[X^2]-E^2[X]=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$.

- Para la variable aleatoria X del ejemplo 5,

  $$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0}x\cdot 0\,dx+\int_0^1 x\cdot 2x\,dx+\int_1^{+\infty}x\cdot 0\,dx = 0+\left[\left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1\right]+0=\frac{2}{3}.$$

  y

  $$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0}x^2\cdot 0\,dx+\int_0^1 x^2\cdot 2x\,dx+\int_1^{+\infty}x^2\cdot 0\,dx = 0+\left[\left.\frac{2x^4}{4}\right|_0^1\right]+0=\frac{1}{2}.$$

  En consecuencia,

  $$Var[X]=E[X^2]-E^2[X]=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

3.5. Modelos de distribución

Describiremos en esta sección algunos de los modelos de distribuciones que con más frecuencia aparecen en la práctica y se muestran útiles a la hora de resolver problemas. En todos los casos se describirá el modelo, su función de probabilidad o de densidad, así como sus características, y se detallará en qué casos son aplicables.

3.5.1. Modelos de distribuciones discretas

Se recogen aquí algunos de los modelos, de uso más habitual, asociados a variables discretas, esto es, variables que toman una cantidad finita o infinita pero numerable de valores.

Modelo Uniforme Discreto

El modelo uniforme discreto se asocia a experimentos aleatorios con N posibles resultados, todos ellos equiprobables. Como ejemplo podríamos citar el lanzamiento de un dado ordinario. Una variable que siga un modelo discreto asocia, a los distintos sucesos elementales, números enteros de 1 a N. Definiremos, a continuación, estos conceptos de una manera más formal.

Definición 3.5.1.– *Una variable aleatoria X se distribuye según un modelo uniforme discreto de parámetro N, y se denota por $X \sim U(N)$, si su función de probabilidad es*

$$P[X=k] = \begin{cases} \frac{1}{N} & \textit{si} \quad k \in \{1, 2, \cdots, N\} \\ \\ 0 & \quad \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

Proposición 3.5.2.– *Si $X \sim U(N)$, entonces $E[X] = \frac{N+1}{2}$ y $Var[X] = \frac{(N+1)(N-1)}{12}$.*

A modo de ejemplo, calcularemos la esperanza y la varianza de X:

$$E[X] = \sum_{k=1}^{N} k \cdot P[X=k] = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{k=1}^{N} k^2 \cdot P[X=k] = \sum_{k=1}^{N} k^2 \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k^2 \\ &= \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} \end{aligned}$$

Entonces,

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = \frac{(N+1)(N-1)}{12}$$

Ejemplo 8. (Ejercicio 14) Calcular la esperanza y la varianza del número de puntos obtenidos en la tirada de un dado ordinario.

Consideramos la variable aleatoria X:*número obtenido al lanzar un dado ordinario*. La variable X toma valores en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y, además, todos ellos son equiprobables por lo que $X \sim U(6)$. La esperanza y la varianza de esta distribución son conocidas y podemos encontrarlas en la proposición 3.5.2, por lo que podemos determinarlas fácilmente sin necesidad de utilizar la definición: para su cálculo. De este modo,

$$\mathrm{E}[X] = \frac{6+1}{2} = 3.5 \ \text{ y } \ \mathrm{Var}[X] = \frac{(6+1)(6-1)}{12} = \frac{35}{12}.$$

Modelo de Bernouilli

El modelo de Bernouilli en uno de los modelos de distribuciones más sencillo; tanto es así que, por sí mismo, no tiene mucho interés. No obstante se trata de un modelo muy importante dado que es un modelo básico para la construcción de otros modelos más complejos. Para definirlo, comenzaremos por explicar qué se entiende por experimento de Bernouilli.

Definición 3.5.3.– *Un experimento de Bernouilli es aquel que sólo puede dar lugar a dos posibles resultados. Estos resultados habitualmente se denotan por "éxito"(E) y "fracaso"(F). Denotaremos por p a la probabilidad de que ocurra el suceso E y por $q = 1 - p$ a la probabilidad de que ocurra el suceso F.*

Sobre el experimento de Bernouilli, construimos ahora una variable aleatoria que asocia hace corresponder el valor 1 al suceso *éxito* y el valor 0 al suceso *fracaso*, esto es, $X(E) = 1$ y $X(F) = 0$. Entonces, dicha variable se dice que sigue una distribución de Bernouilli. Nótese que el hecho de denominar a los sucesos *éxito* y *fracaso* es algo que se hace por convenio, pero no implica que uno de los sucesos tenga que ser representar algo *bueno* y el otro suceso algo *malo*. Definiremos, a continuación, la distribución de Bernouilli de una manera más formal.

Definición 3.5.4.– *Una variable aleatoria X se distribuye según un modelo de Bernouilli de parámetro p, y se escribe $X \sim Be(p)$, si su función de probabilidad viene dada por:*

$$P[X = k] = \begin{cases} p^k \cdot (1-p)^{1-k} & \text{si } k \in \{0, 1\} \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Proposición 3.5.5.– *Si $X \sim Be(p)$, entonces $E[X] = p$ y $Var[X] = pq$, con $q = 1 - p$.*

En este caso es fácil de comprobar que, efectivamente, esas son la esperanza y la varianza de la variable:

$$E[X] = \sum_{k=0}^{1} k \cdot P[X = k] = 0 \cdot P[X = 0] + 1 \cdot P[X = 1] = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

Por otra parte,

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{1} k^2 \cdot P[X = k] = 0^2 \cdot P[X = 0] + 1^2 \cdot P[X = 1] = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

Entonces, $Var[X] = E[X^2] - E^2[X] = p - p^2 = p(1 - p) = p \cdot q$.

Modelo Binomial

Supongamos que al realizar una cantidad determinada de experimentos de Bernouilli independientes, nos preguntamos por el número de éxitos obtenidos. Evidentemente el número de éxitos será aleatorio, dado que el resultado de cada uno de los experimentos de Bernouilli es aleatorio. Podemos tratar de definir un modelo de probabilidad que nos sirva para determinar cuál es la probabilidad de obtener un cierto número de éxitos al realizar los citados experimentos. Dicho modelo es el modelo Binomial y lo describiremos a continuación.

Definición 3.5.6.– *Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según un modelo $Be(p)$. La variable aleatoria $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ se distribuye según un modelo binomial de parámetros n y p, y se escribe $X \sim B(n, p)$.*

Puesto que cada X_i vale 0 en caso de fracaso y 1 en caso de éxito la variable X, que es la suma de todas ellas, indica el número de éxitos obtenidos en la sucesión de n experimentos de Bernouilli.

Proposición 3.5.7.– *Si $X \sim B(n, p)$, entonces la función de probabilidad de X es*

$$P[X = k] = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot p^k \cdot q^{n-k} & \textit{si} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ \\ \textit{0} & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Proposición 3.5.8.– *Si $X \sim B(n, p)$, entonces $E[X] = np$ y $Var[X] \sim npq$, con $q = 1 - p$.*

Ejemplo 9. Determinar la probabilidad de obtener, a lo más, dos caras al lanzar una moneda 10 veces.

Consideramos las variables, $X_1, \ldots, X_{10}$, donde cada X_i se define como:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si al lanzar la i-ésima moneda se obtiene cara} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces cada $X_i \sim Be(p)$ con $p = P[X_i = 1] = 1/2$ y, además, el resultado que se obtiene en el lanzamiento de cada una de las monedas es independiente del obtenido en el resto.

Entonces, si X es el *número de caras obtenidas al lanzar las 10 monedas*, cláramente $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Puesto que cada $X_i \sim Be(p), i = 1, \ldots, 10$ y, además, $X_1, \ldots, X_{10}$ son independientes entonces $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(10, 1/2)$.

Tenemos que calcular $P(X \leq 2)$. Puesto que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(10, 1/2)$, entonces $P[X = k] = \begin{pmatrix} 10 \\ \text{k} \end{pmatrix} 0.5^k (1-0.5)^{10-k}$, para cada $k = 0, \ldots, 10$. Por lo tanto,

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} 0.5^0 (1-0.5)^{10-0} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} 0.5^1 (1-0.5)^{10-1} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} 0.5^2 (1-0.5)^{10-2} \approx 0.0547.$$

Modelo Geométrico

El modelo geométrico es otro modelo que se construye a partir del modelo de Bernouilli. Si la distribución binomial nos sirve para modelar el número de éxitos, que se producen al realizar n experimentos de Bernouilli independientes, la distribución geométrica modela el número de experimentos de Bernouilli que se deben realizar hasta conseguir el primer éxito.

Definición 3.5.9.– *Dada una sucesión de experimentos de Bernouilli independientes y con probabilidad de éxito p, definimos la variable aleatoria X como el número de realizaciones del experimento que se hacen hasta obtener el primer éxito. Entonces se dice que X se distribuye según un modelo geométrico de parámetro p, y se denota como $X \sim Ge(p)$.*

Proposición 3.5.10.– *Si $X \sim Ge(p)$, y denotamos $q = 1 - p$, entonces*

1. *La función de probabilidad de X es* $P[X = k] = \begin{cases} q^{k-1} \cdot p & si \quad k \in \{1, 2, \ldots, n, \ldots\} \\ \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$
2. $E[X] = \frac{1}{p}$ *y* $Var[X] = \frac{q}{p^2}$.

Ejemplo 10. (Ejercicio 13) Se lanza una moneda hasta que sale cara. Si X es la variable aleatoria que mide el número de lanzamientos realizados, hallar la función de probabilidad y la esperanza de X.

Consideramos la variable aleatoria X: *número de lanzamientos realizados hasta obtener cara.* Cada lanzamiento de la moneda constituye un experimento de Bernouilli en el que asociaremos la obtención de la cara al suceso *éxito.* Puesto que la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda es $1/2$ y la variable X representa el número de lanzamientos hasta obtener la primera cara, esto es, hasta obtener el primer éxito, entonces $X \sim Ge(1/2)$ y, por lo tanto, $E[X] = \dfrac{1}{1/2} = 2$ y su función de probabilidad es

$$P[X = k] = \begin{cases} (1 - \frac{1}{2})^{k-1} \cdot \frac{1}{2} & \text{si} \quad k \in \{1, 2, \ldots\} \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

esto es,

$$P[X = k] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^k & \text{si} \quad k \in \{1, 2, \ldots\} \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Modelo de Poisson

La distribución de Poisson representa un buen modelo para la distribución de probabilidad del número de ocurrencias de un fenómeno en un espacio de tiempo o una región del espacio. Por ejemplo, el número de avisos de averías que se recibe cada hora en el servicio técnico de un determinado aparato o el número de defectos en los bienes que produce una fábrica son fenómenos susceptibles de modelarse utilizando esta distribución, que pasamos a definir formalmente.

Definición 3.5.11.– *Una variable aleatoria X se distribuye según un modelo de Poisson de parámetro $\lambda > 0$, y se denota por $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si su función de probabilidad es*

$$P[X = k] = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & \text{si} \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Proposición 3.5.12.– *Si $X \sim P(\lambda)$ entonces*

1. *$E[X] = \lambda$ y $Var[X] = \lambda$.*

2. *Dadas $X_1, \dots, X_n$ independientes con $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, entonces*

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$$

Ejemplo 11. (Ejercicio 29) Un estacionamiento tiene dos entradas. Los coches llegan a la entrada I de acuerdo a una distribución de Poisson de media 3 por hora, y a la entrada II de acuerdo con una distribución de Poisson de media 4 por hora. Si las llegadas a ambas entradas se producen de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que, en una hora, lleguen exactamente dos coches al estacionamiento?

Consideramos las variables aleatorias X_I, X_{II}: *número de coches que llegan a la entrada I y II, respectivamente*. Sabemos que si una variable sigue una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$ su esperanza es λ. Entonces, de los datos del problema se obtiene que $X_I \sim \mathcal{P}(3)$ y $X_{II} \sim \mathcal{P}(4)$.

Si el número de coches que llegan al estacionamiento lo representamos mediante una variable aleatoria X, cláramente $X = X_I + X_{II}$ y, por ser X_I y X_{II} independientes, $X \sim \mathcal{P}(3+4) = \mathcal{P}(7)$. Finalmente, calculamos $P(X = 2)$ que, al seguir X una distribución $\mathcal{P}(7)$, viene dada por:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-7} \cdot 7^2}{2!} \approx 0.0223$$

Modelo Binomial Negativo

Como veremos a continuación, la distribución binomial negativa también tiene como origen la distribución de Bernouilli y es una generalización de la distribución Geométrica. Dada una secuencia de experimentos de Bernouilli, independientes, todos con la misma probabilidad p de éxito, la distribución Binomial Negativa modela el número de experimentos que se realizan hasta alcanzar un número predeterminado de éxitos.

Definición 3.5.13.– *Dada una sucesión de experimentos de Bernouilli independientes con probabilidad de éxito p, consideremos la variable aleatoria X definida como el número de realizaciones del experimento hasta obtener el r-ésimo éxito. Entonces se dice que X se distribuye según un modelo binomial negativo de parámetros r y p. Lo denotaremos como $X \sim B^{-}(r,p)$.*

Proposición 3.5.14.– *Si $X \sim B^{-}(r,p)$ y $q = 1-p$, entonces*

1. *La función de probabilidad de X es:*

$$P[X=k] = \begin{cases} \binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot q^{k-r} & si \quad k \in \{r, r+1, \ldots\} \\ \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

2. $E[X] = \frac{r}{p}$ *y* $Var[X] = \frac{r \cdot q}{p^2}$.

El modelo geométrico es un caso particular del binomial negativo con $r = 1$, esto es, $B^{-}(1,p) \equiv Ge(p)$.

Ejemplo 12. (Ejercicio 25) Se sabe que la probabilidad de que un instrumento de medición sufra una desviación excesiva es de 0.1. ¿Cuál es la probabilidad de que, de 10 instrumentos elegidos al azar, al menos dos sufran desviación excesiva? ¿Cuál es la probabilidad de que el octavo de los instrumentos utilizados sea el tercero en mostrar una desviación excesiva?

Consideramos las variables aleatorias $X_i, i = 1, \ldots 10$, definidas como

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el i-ésimo instrumento sufre desviación excesiva} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Que un instrumento presente o no desviación excesiva es independiente de que la presenten los demás. Entonces la variable $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$ representa el número de instrumentos, de los 10 elegidos, que presentan desviación excesiva y, además, $X \sim B(10, 0.1)$.

Para responder a la primera pregunta tenemos que calcular $P(X \geq 2)$. Para que el cálculo sea más sencillo, recurriremos a su complementario. Hay que tener en cuenta, además, que al seguir X una distribución binomial toma valores enteros de cero a diez. De esta forma,

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) \\ &= 1 - \binom{10}{0} 0.1^0 \cdot (1-0.1)^{10-0} - \binom{10}{1} 0.1^1 \cdot (1-0.1)^{10-1} \\ &= 1 - 1 \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^{10} - 10 \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^9 \approx 0.2639. \end{aligned}$$

Responderemos ahora a la segunda pregunta. Para ello tenemos que calcular la probabilidad de que el octavo de los instrumentos utilizados sea el tercero que muestra una desviación excesiva. Consideramos ahora la variable aleatoria Y :*número de instrumentos utilizados hasta encontrar el tercero que muestra una desviación excesiva.* Entonces, puesto que la probabilidad de que un instrumento presente desviación excesiva es 0.1, se verifica que $Y \sim B^{-}(3, 0.1)$ y la probabilidad pedida viene dada por

$$P(Y = 8) = \binom{8-1}{3-1} \cdot 0.1^3 \cdot (1 - 0.1)^{8-3} = 21 \cdot 0.1^3 \cdot 0.9^5 \approx 0.0124.$$

Modelo Multinomial

El modelo multinomial es la generalización del modelo binomial al caso de un experimento aleatorio con más de dos resultados: supongamos que el experimento tiene s posibles resultados, $A_1, A_2, \ldots, A_s$, con probabilidades $p_1, \ldots, p_s$ respectivamente, $(p_1 + p_2 + \ldots + p_s = 1)$ y sea n el número de veces que se realiza el experimento (suponiendo realizaciones independientes). Definimos las variables aleatorias X_i, $i = 1, \ldots, s$ como el número de ocurrencias del resultado A_i en las n observaciones realizadas.

Definición 3.5.15.– *Las variables aleatorias $(X_1, \ldots, X_s)$ descritas anteriormente siguen una distribución de probabilidad multinomial de parámetros $(p_1, p_2, \ldots, p_s; n)$. Lo denotaremos por $(X_1, \ldots, X_s) \sim M(p_1, p_2, \ldots, p_s; n)$.*

Proposición 3.5.16.– *La función de probabilidad de $(X_1, \ldots, X_s)$ viene dada por*

$$P[X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_s = k_s] = \begin{cases} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!} p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s} & \text{si } k_i \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{i=1}^{s} k_i = n \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Es importante notar que las X_i no son independientes entre sí, ya que el conocimiento del valor que toman $s - 1$ de ellas determina el de la restante. En el caso particular en que $s = 2$ resulta la distribución binomial.

Ejemplo 13. (Ejercicio 26) Las probabilidades de que una lamparilla de cierto tipo de proyector de transparencias dure menos de 40 horas, entre 40 y 80 horas o más de 80 horas de uso continuo, son 0.3, 0.5 y 0.2, respectivamente. Calcular la probabilidad de que de 8 de tales lamparillas, dos duren menos de 40 horas, cinco duren entre 40 y 80 horas y una dure más de 80 horas.

Consideramos las variables X_1, X_2 y X_3 definidas como:

- X_1 : número de lamparillas, de las 8 elegidas, que duran menos de 40 horas.
- X_2 : número de lamparillas, de las 8 elegidas, que duran entre 40 y 80 horas.
- X_3 : número de lamparillas, de las 8 elegidas, que duran más de 80 horas.

Tenemos que calcular $P[X_1 = 2, X_2 = 5, X_3 = 1]$. Al ser $(X_1, X_2, X_3) \sim M(0.3, 0.5, 0.2; 8)$, resulta:

$$P[X_1 = 2, X_2 = 5, X_3 = 1)] = \frac{8!}{2! \cdot 5! \cdot 1!} \cdot 0.3^2 \cdot 0.5^5 \cdot 0.2^1 = 0.0945.$$

3.5.2. Modelos de distribuciones continuas

Los modelos que veremos en esta sección están asociados a variables que son continuas y, por lo tanto, toman valores en un intervalo de la recta real.

Modelo Uniforme Continuo

El modelo uniforme continuo es, en cierto modo, la versión continua del modelo uniforme discreto. Corresponde a una variable que toma valores en un intervalo en el que la probabilidad se 'reparte' por igual a lo largo de todo el intervalo. Lo definimos, a continuación, de una manera más formal.

Definición 3.5.17.– *Una variable aleatoria continua se distribuye según un modelo Uniforme continuo en el intervalo (a, b), y se denota por $X \sim U(a, b)$, si su función de densidad es constante dentro del intervalo, y nula fuera de él, esto es*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad x \in (a, b) \\ \\ 0 & \quad \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Proposición 3.5.18.– *Si $X \sim U(a, b)$, entonces $E[X] = \frac{a+b}{2}$ y $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$.*

Ejemplo 13. (Ejercicio 16) Una variable aleatoria continua X viene dada por la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} & \text{si} \quad x \in (a - \alpha, a + \alpha) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (a - \alpha, a + \alpha) \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$ y $a \in \mathbb{R}$. Hallar la esperanza y la varianza de X.

La función de densidad de la variable aleatoria X está definida como un valor constante en el intervalo $(a - \alpha, a + \alpha)$ y 0 fuera de él. Más aún, podemos observar que se escribe como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(a+\alpha)-(a-\alpha)} & \text{si} \quad x \in (a - \alpha, a + \alpha) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (a - \alpha, a + \alpha) \end{cases}$$

que es la función de densidad de una variable aleatoria continua definida en el intervalo $(a - \alpha, a + \alpha)$ y, por lo tanto, podemos decir que $X \sim U(a - \alpha, a + \alpha)$. En consecuencia,

$$E[X] = \frac{(a - \alpha) + (a + \alpha)}{2} = a \text{ y } Var[X] = \frac{((a + \alpha) - (a - \alpha))^2}{12} = \frac{\alpha^2}{3}$$

Modelo Exponencial

La distribución exponencial es de gran utilidad cuando se desea modelar el tiempo que transcurre entre las ocurrencias de un determinado fenómeno; por ejemplo: el tiempo entre dos averías consecutivas de un dispositivo. Guarda una estrecha relación con el modelo de Poisson: si el número de veces que ocurre un fenómeno en un determinado intervalo de tiempo sigue una distribución de Poisson, entonces el tiempo entre ocurrencias de ese fenómeno sigue una distribución exponencial y viceversa.

Definición 3.5.19.– *Una variable aleatoria X se distribuye según un modelo exponencial de parámetro $\lambda > 0$, y se denota por $X \sim Exp(\lambda)$, si su función de densidad es*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & si \quad x > 0 \\ \\ 0 & en \ caso \ contrario \end{cases}$$

Proposición 3.5.20.– *Si $X \sim Exp(\lambda)$ entonces*

- $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ *y* $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$.
- *La función de distribución de X viene dada por* $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$

Ejemplo 14. (Ejercicio 17) El tiempo de espera en el taller, necesario para que a un automóvil se le realice la ITV, sigue una distribución exponencial de media 0.2 horas. Hallar

a) La probabilidad de que el tiempo de espera sea inferior a 12 minutos.

b) La probabibilidad de que el tiempo de espera esté entre 15 y 30 minutos.

Consideramos la variable aleatoria X: *tiempo de espera en el taller, en horas.* De los datos del problema sabemos que $X \sim Exp(\lambda)$ y por tratarse de una distribución exponencial, de la proposición 3.5.20, sabemos que $E[X] = 1/\lambda$.

También nos proporcionan como dato que la esperanza de la variable es 0.2 y, por tanto, $E[X] = 1/\lambda = 0.2$. En consecuencia, $\lambda = 1/0.2 = 5$ y $X \sim Exp(5)$.

Puesto que la variable viene expresada en horas, no podemos olvidar expresar los tiempos de espera en horas. Usaremos también la función de distribución de la variable, que está definida en la proposición 3.5.20. Calcularemos ahora las probabilidades pedidas:

a) $P[X \leq 0.2] = F_X(0.2) = 1 - e^{-5 \cdot 0.2} = 1 - e^{-1} \approx 0.6321.$

b) $P[0.25 \leq X \leq 0.5] = F_X(0.5) - F_X(0.25) = 1 - e^{-5 \cdot 0.5} - (1 - e^{-5 \cdot 0.25})$

$$= e^{-1.25} - e^{-2.5} \approx 0.2044.$$

Modelo Normal

El *modelo Normal* es el modelo continuo de mayor importancia ya que son muchos los fenómenos naturales y sociales que se pueden modelar mediante una distribución normal. Asimismo, bajo ciertas condiciones, supone una buena aproximación de ciertas distribuciones discretas como la distribución binomial y la distribución de Poisson. Por último es necesario comentar que también proporciona la base de la inferencia estadística básica.

Definición 3.5.21.– *Una variable aleatoria X se distribuye según un modelo Normal de media $\mu \in \mathbb{R}$ y varianza $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$, y se denota por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ si su función de densidad es*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Propiedades. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces su función de densidad cumple las siguientes condiciones:

a) Es simétrica respecto a la recta vertical $x = \mu$.

b) Tiene un máximo en μ y puntos de inflexión en $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$.

c) La recta horizontal $y = 0$ es una asíntota horizontal.

d) La densidad de probabilidad de X está concentrada en torno a μ y en el intervalo $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$. De hecho, $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.

La figura 3.3 muestra la representación gráfica de la función de densidad de una variable aleatoria $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ y en ella se pueden observar las propiedades expuestas anteriormente. Más concretamente, en lo que respecta a las propiedades c) y d), podemos observar que el eje horizontal definido por la ecuación $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función y que el área bajo la curva de la función y fuera del intervalo $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ es muy pequeña. De este modo, aunque la variable puede tomar cualquier valor real con independependencia de cuál sea su media μ y su varianza σ^2, es poco probable que tome valores fuera del intervalo $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

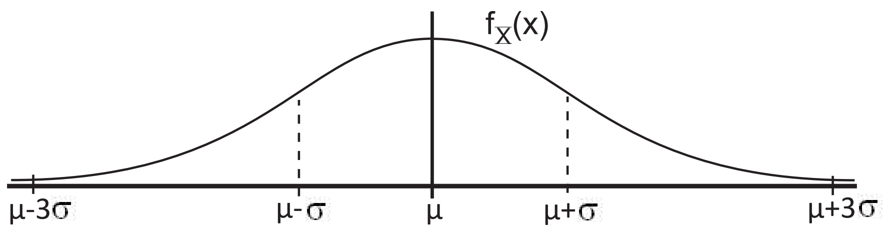

Figura 3.3: Función de densidad de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$

Proposición 3.5.22.– *Si* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$*, entonces*

a) $E[X] = \mu$ *y* $Var[X] = \sigma^2$.

b) $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

c) Dadas $X_1, \ldots, X_n$ *independientes con* $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$*, entonces*

$$b + a_1X_1 + \cdots + a_nX_n \sim N(b + \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2)$$

d) Si $Z \sim N(0,1)$ *entonces* $P[Z \leq a] = P[Z \geq -a]$*,* $\forall a \in \mathbb{R}$.

La propiedad a) nos dice cuál es la esperanza y la varianza de una variable aleatoria normal. Como puede verse, los valores de estas características corresponden exactamente con los parámetros de la distribución. Así pues, el primer parámetro es la esperanza de la distribución y puede tomar cualquier valor real. El segundo parámetro es la varianza y, como tal, sólo puede tomar valores positivos.

El apartado b) nos describe una importante propiedad de cualquier variable aleatoria normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$: si tipificamos la variable, procedimiento que consiste en restarle su media μ y dividir el resultado por su desviación típica σ, obtenemos una variable aleatoria $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ que sigue una distribución $N(0,1)$. Esto es así, con independencia del valor de μ y de σ^2 y es una propiedad fundamental, tanto para el desarrollo de ciertos resultados teóricos, como para determinar probabilidades en las que intervienen variables aleatorias normales.

Supongamos, por ejemplo, que para una variable aleatoria $X \sim N(1,16)$, se desea calcular $P[X \leq 4]$. Entonces $P[X \leq 4] = \int_{-\infty}^{4} f_X(x)dx$, donde $f_X(x)$ es la función de densidad de la variable. El problema que surge en este punto es que no es posible determinar una primitiva de $f_X(x)$ ni, por lo tanto, dar un valor exacto de esa integral definida. La alternativa es utilizar algún procedimiento para obtener una aproximación numérica de la integral pero para ello es necesario el uso de un ordenador.

Para tener la posibilidad de calcular o, al menos, aproximar manualmente probabilidades de distribuciones normales necesitaríamos tablas en las que encontrar dichas probabilidades. Gracias a la propiedad del apartado b), no necesitamos tener una tabla para cada valor de μ y de σ^2 (cosa que, por otra parte, sería imposible), sino que es suficiente con tabular la función de distribución de la distribución $N(0,1)$.

De este modo, para calcular $P[X \leq 4]$ para $X \sim N(1,16)$, procedemos como sigue: partiendo de la desigualdad $X \leq 4$ tipificamos la variable X restando su media 1 y dividiendo el resultado por su[3] desviación típica: $\sqrt{16} = 4$. Para que la desigualdad resultante sea equivalente, esa misma transformación se aplica al lado derecho de la desigualdad. Obtenemos

[3]Recuérdese que para definir una distribución normal hemos usado la notación $N(\mu, \sigma^2)$. De este modo, en nuestro ejemplo, la varianza viene dada por $\sigma^2 = 16$ y la desviación típica por $\sigma = 4$.

entonces que $P[X \leq 4] = P\left(\frac{X-1}{\sqrt{16}} \leq \frac{4-1}{\sqrt{16}}\right) = P[Z \leq 0.75]$, donde $\frac{X-1}{\sqrt{16}} = Z \sim N(0,1)$.[4]

¿Como calculamos ahora $P[Z \leq 0.75]$? Anexa al tema podemos encontrar, tabulada, la función de distribución del modelo $N(0,1)$. Dicha tabla contiene los valores aproximados, al cuarto decimal, de dicha función de distribución, esto es, de $F_z(x) = P(Z \leq x)$ con $Z \sim N(0,1)$. El valor de su argumento, expresado a través de la variable x, se encuentra aproximado al segundo decimal. Las cifras correspondientes a la unidad y al primer decimal de x lo encontramos en las filas de la tabla y el segundo decimal en las columnas.

Volviendo a nuestro problema, tenemos que determinar $P[Z \leq 0.75]$. Para ello, en la tabla de la distribución $N(0,1)$ buscamos el valor que se encuentra en la fila del 0.7 y en la columna del 5, tal y como de se indica en la figura 3.4. Encontramos entonces que $P[Z \leq 0.75] = 0.7734$.

MODELO NORMAL TIPIFICADO
FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	$\boxed{0,7734}$	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133

Figura 3.4: Búsqueda de $P(Z \leq 0.75)$

La propiedad del apartado c) nos indica qué distribución de probabilidad sigue la suma de variables aleatorias normales, así como su producto por números reales. Una primera conclusión que obtenemos al observar la propiedad es que, si multiplicamos una variable aleatoria normal por un número, el resultado será una variable que sigue una distribución normal. Lo mismo ocurrirá si, a una variable aleatoria, le sumamos un valor real o si sumamos variables aleatorias independientes.

¿Qué ocurre con los parámetros de la distribución? Lo veremos con un ejemplo en el que es necesario aplicar la propiedad c): supongamos que X_1 y X_2 son variables aleatorias idependientes tales que $X_1 \sim N(1,4)$ y $X_2 \sim N(2,3)$, ¿qué distribución sigue la variable $Y = 2 + 3X_1 - 4X_2$?

Por ser X_1 y X_2 variables aleatorias normales e independientes sabemos que la variable aleatoria Y también seguirá una distribución normal. ¿Cómo determinar sus parámetros?

[4]Desde este momento, la notación Z quedará reservada para denotar una variable aleatoria con distribución $N(0,1)$

Podemos aplicar directamente la propiedad c) o, como vamos a hacer en este caso, determinar los parámetros razonadamente: el primer parámetro de una distribución normal es su esperanza. De este modo, aplicando las propiedades de la *esperanza*[5]:

$$E[Y] = E[2+3X_1-4X_2] = 2+E[3X_1]+E[-4X_2] = 2+3E[X_1]-4E[X_2] = 2+3\cdot 1-4\cdot 2 = -3$$

por otra parte, y teniendo en cuenta que X e Y son independientes,

$$\begin{aligned} Var[Y] &= Var[2+3X_1-4X_2] = Var[3X_1-4X_2] = Var[3X_1]+Var[-4X_2] = \\ &= 3^2 \cdot Var[X_1] + (-4)^2 \cdot Var[X_2] = 9\cdot 4 + 16 \cdot 3 = 84, \end{aligned}$$

y, por tanto, $Y \sim N(-3, 84)$.

Recuérdese que, en general, si X e Y son dos variables cualesquiera entonces se verifica que $E[X+Y] = E[X]+E[Y]$ y que $E[X-Y] = E[X]-E[Y]$. Si, además, X e Y son independientes entonces $Var[X+Y] = Var[X]+Var[Y]$ y $Var[X-Y] = Var[X]+Var[Y]$. En consecuencia, si $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ y ambas variables son independientes, entonces $X+Y \sim N(\mu_x+\mu_y, \sigma_X^2+\sigma_Y^2)$ y $X-Y \sim N(\mu_x-\mu_y, \sigma_X^2+\sigma_Y^2)$.

Finalmente, la propiedad d) es consecuencia de la simetría, con respecto al eje vertical $x = 0$, de la función de densidad de la distribución $N(0, 1)$. Las figuras 3.5 y 3.6 muestran esta propiedad de manera gráfica, en los casos $a > 0$ y $a < 0$ respectivamente. En cada caso las probabilidades indicadas corresponden con el área de las regiones sombreadas.

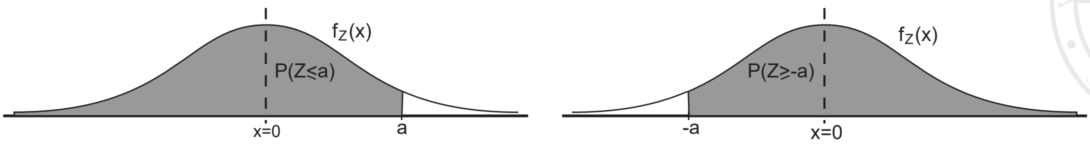

Figura 3.5: Representación de $P(Z \leq a)$ y $P(Z \geq -a)$ para $a > 0$

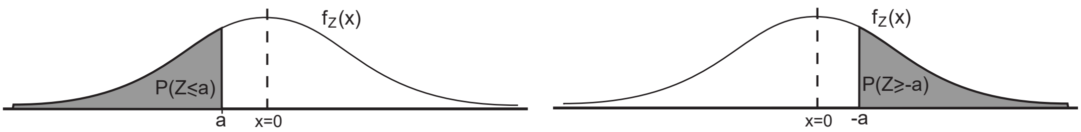

Figura 3.6: Representación de $P(Z \leq a)$ y $P(Z \geq -a)$ para $a < 0$

Asimismo, en ciertos casos, esta propiedad es fundamental para determinar probabilidades asociadas a una variable $Z \sim N(0, 1)$, mediante la tabla que tenemos anexa al tema. Puesto que dicha tabla únicamente tiene tabulada la función de distribución $F_Z(x)$ para

[5]Recuérdese que esperanza de la suma de dos variables aleatorias es la suma de sus esperanzas y que la esperanza de una constante por una variable es la constante por la esperanza de la variable. En consecuencia, si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y X e Y son variables aleatorias, entonces $E[aX+bY+c] = E[aX]+E[bY]+c = aE[X]+bE[Y]+c$. Si además X e Y son independientes entonces la varianza de la suma es la suma de las varianzas y aplicando, junto con esta, las restantes propiedades de la varianza resulta que $Var[aX+bY+c] = Var[aX+bY] = a^2Var[X]+b^2Var[Y]$.

valores positivos de x, si deseamos calcular $P(Z \leq x)$ para algún $x < 0$ podemos hacerlo utilizando la simetría de la función de densidad de Z.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular el valor de $P(Z \leq -2)$. Por la simetría de f_Z, se verifica que $P(Z \leq -2) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$. De manera similar, haciendo uso de la simetría de f_Z, $P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) = 0.8413$.

3.6. Función generatriz de momentos

Definición 3.6.1.– *Dada una variable aleatoria X, se dirá que $M_X(t) = E[e^{tX}]$ es la función generatriz de momentos asociada a X si existe un $t_0 > 0$ tal que $M_X(t)$ está definida cuando $|t| < t_0$.*

Para calcular la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X procederemos como sigue: si X es una variable aleatoria discreta que toma valores $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, entonces $M_X(t) = \sum_{x_i} e^{tx_i} \cdot P[X = x_i]$. Si X es una variable continua con función de densidad $f_X(x)$ entonces $M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) e^{tx} dx$.

Ejemplo 3.6.2.– Ejemplos de funciones generatriz de momentos

- Si $X \sim B(n, p)$ entonces $M_X(t) = (pe^t + q)^n$.
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ entonces $M_X(t) = e^{(e^t - 1)\lambda}$.
- Si $X \sim Ge(p)$ entonces $M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}$.
- Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $M_X(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$.
- Si $X \sim Exp(\lambda)$ entonces $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$.
- Si $X \sim U(a, b)$ entonces $M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$

El siguiente resultado nos muestra cómo, partir de la derivada de orden k de la función generatria de momentos, podemos calcular el momento de orden k de una variable aleatoria, esto es $E(X^k)$.

Teorema 3.6.3.– *Dada una variable aleatoria X, si existe $M_X^{k)}(0)$, entonces se verifica que $E(X^k) = M_X^{k)}(0)$.*

La función generatriz de momentos también puede utilizarse para determinar qué distribución sigue la suma de variables aleatorias independientes. El siguiente teorema nos muestra cómo.

Teorema 3.6.4.– *Si X e Y son dos variables aleatorias independientes, se verifica que $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$.*

La función generatriz de momentos de una variable caracteriza su distribución de probabilidad. Esto significa que, por ejemplo, cualquier variable aleatoria X cuya función generatriz sea de la forma $M_X(t) = (pe^t + q)^n$ seguirá una distribución $B(n, p)$. Por indicar un ejemplo más concreto, si $M_{X_1} = (0.2e^t + 0.8)^5$ entonces tenemos garantizado que $X \sim B(5, 0.2)$. Estos resultados se expresan, de manera más formal, en el siguiente teorema.

Teorema 3.6.5.– *Si X e Y son dos variables aleatorias que tienen función generatriz de momentos $M_X(t)$ y $M_Y(t)$, respectivamente, entonces X e Y tienen la misma distribución de probabilidad sí y sólo si $M_X(t) = M_Y(t)$.*

Ejemplo 3.6.6.– Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, siendo ambas variables aleatorias independientes, determinar la distribución de $X + Y$.

De acuerdo al ejemplo 3.6.2, por ser X e Y variables aleatorias que siguen distribuciones de Poisson de parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente, sus funciones generatriz de momentos serán $M_X(t) = e^{(e^t-1)\lambda_1}$ y $M_Y(t) = e^{(e^t-1)\lambda_2}$. Puesto que, además, ambas variables son independientes, entonces

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t) = e^{(e^t-1)\lambda_1} \cdot e^{(e^t-1)\lambda_2} = e^{(e^t-1)(\lambda_1+\lambda_2)}$$

Así pues, esa es la función generatriz de momentos de $X + Y$ pero, además, es fácil comprobar que se trata de la función generatriz de momentos de la distribución $\mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$. En consecuencia, por el teorema 3.6.5, podemos afirmar que $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$, tal y como se indicó en el apartado dedicado a la distribución de Poisson.

3.7. Variables bidimensionales

Supongamos que en una población queremos estudiar dos características que vienen descritas por dos variables aleatorias X e Y. La observación conjunta de ambas características sobre cada individuo se traduce en una variable aleatoria bidimensional (X, Y) que es discreta (continua) si X e Y son discretas (continuas).

Si X e Y son discretas, denotaremos por $\{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$ al conjunto de valores que puede tomar X y por $\{y_1, \ldots, y_j, \ldots\}$ al conjunto de valores que puede tomar Y.

Definición 3.7.1.– *Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta se define su función de probabilidad conjunta como:*

$$P_{X,Y}(x, y) = P[X = x \cap Y = y] \qquad \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Propiedades: Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta, entonces

- Si $x \notin \{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$ o bien $y \notin \{y_1, \ldots, y_j, \ldots\}$, entonces $P[X = x \cap Y = y] = 0$.
- $\displaystyle\sum_{x_i, y_j} P[X = x_i \cap Y = y_j] = 1$.

Definición 3.7.2.– *Una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es función de densidad conjunta de alguna variable aleatoria bidimensional continua (X, Y) si cumple:*

1. $f(x, y) \geq 0 \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = 1.$

   Además, para esa variable se verifica que

3. $P[a \leq X \leq b \cap c \leq Y \leq d] = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \qquad \forall \ a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Definición 3.7.3.– *Dos variables X e Y son independientes si y sólo si*

$P[X = x \cap Y = y] = P[X = x] \cdot P[Y = y]$ *si X e Y son discretas.*

$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ *si X e Y son continuas.*

Propiedades: Si X e Y son independientes, entonces:

1. $E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$.
2. $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$.

Los recíprocos no son, en general, ciertos. Esto es, si se cumple que $E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$ o $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$, no tenemos garantizado que las variables X e Y sean independientes.

MODELO NORMAL TIPIFICADO
FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

V. a. discretas	Interpretación	Función de probabilidad	Esperanza y Varianza	Relación con otras variables
Uniforme discreta U(N)	Resultado de un experimento aleatorio con N posibles resultados equiprobables.	P[X=k]=1/N k=1,2,...,N	E[X]= (N+1)/2 Var[X]= (N+1)(N-1)/12	-----------------------
Bernouilli Be(p)	Experimento aleatorio con dos posibles resultados: E, F. P(E) = p ; P(F) =1-p = q.	$P[X=k]= p^k q^{1-k}$ k=0,1	E[X]= p Var[X]= pq	Si $X_1,\ldots,X_n \sim Be(p)$ independientes, entonces $X_1+\ldots+X_n \sim B(n,p)$
Binomial B(n,p)	Número de éxitos en la realización de *n* experimentos de Bernouilli independientes.	$P[X=k]=\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ k=0,1,...n	E[X]= np Var[X]= npq	
Binomial Negativo $B^-(r,p)$	Número de realizaciones de un experimento de Bernouilli hasta la obtención del r-ésimo éxito.	$P[X=k]=\binom{k-1}{r-1}\cdot p^r \cdot q^{k-r}$ para k = r, r+1,…	E[X]= r/p $Var[X]=rq/p^2$	Si r=1 se obtiene el modelo geométrico
Geométrica Ge(p)	Número de ensayos hasta la obtención del primer éxito en una sucesión de experimentos de Bernouilli.	$P[X=k]=q^{k-1}p$ k=1,2,3,...	E[X]= 1/p $Var[X]=q/p^2$	--------------------------
Poisson P(λ)	Número de ocurrencias de un fenómeno en un intervalo de tiempo o región del espacio.	$P[X=k]=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ k=0,1,2,3,...	E[X]= λ Var[X]= λ	Si $X_1 \sim P(\lambda_1)$ y $X_2 \sim P(\lambda_2)$ independientes, entonces $X_1+X_2 \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$
Multinomial $M(p_1,\ldots,p_n ; n)$ $p_1+\ldots+p_s = 1$	Dado un experimento con *s* posibles resultados que se realiza *n* veces, la variable X_i representa el número de veces que se obtiene el resultado i-ésimo.	$P[X_1=k_1,\ldots,X_s=k_s]=\frac{n!}{k_1!\cdots k_s!}\cdot p_1^{k_1}\cdots p_s^{k_s}$ $k_i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{s} k_i = n$	---------------------------------	Si s=2, resulta la distribución binomial

V.a. continuas	Interpretación	Función de densidad	Esperanza y Varianza	Relación con otras variables
Uniforme continua U(a,b)	Densidad de probabilidad repartida uniformemente en el intervalo (a,b).	f(x) = 1/(b-a) $x \in (a,b)$	$E[X]=\frac{a+b}{2}$ $Var[X]=\frac{(b-a)^2}{12}$	---------------
Exponencial Exp(λ)	Tiempo entre ocurrencias de un determinado fenómeno.	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ x > 0	$E[X]=\frac{1}{\lambda}$ $Var[X]=\frac{1}{\lambda^2}$	----------------
Normal $N(\mu,\sigma^2)$	Densidad de probabilidad concentrada en torno a μ y en el intervalo $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$ $\forall x \in R$	E[X]= μ Var[X]= σ^2	$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ Si $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ independientes, entonces $aX_1+bX_2+c \sim N(a\mu_1 + b\mu_2+c , a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$