MÉTODOS FORMALES EN INGENIERÍA DEL SOFTWARE

Capítulo 3

Teoría de Conjuntos

-Una introducción a la teoría de conjuntos básica-

Grado en Ingeniería Informática

Espec. Ingeniería del Software

ÍNDICE

Objetivos

✓ Revisar los conceptos de conjuntos y relaciones que hacen falta para trabajar con ALLOY

✓ Concentrarnos especialmente en el tipo de operaciones y conjuntos utilizados en ALLOY

✓Dar algunos ejemplos de cómo se utilizan los conjuntos en las especificaciones

1. CONJUNTOS

¿Qué es un conjunto?

*Un conjunto es una colección **homogénea** de **objetos distintos:***

- *Homogénea* significa que todos los elementos pertenecen a un tipo base o dominio
- *Distintos* significa que cada elemento aparece a lo sumo una vez en el conjunto

Ejemplos:

- { 1, 2, 3 }: un conjunto de números
- {rosa, juan, pablo}: un conjuntos de nombres
- {1, juan, agosto}: no es un conjunto

1. CONJUNTOS

¿Valor de un conjunto?

***Es** la colección de sus miembros, el orden de los elementos en el conjunto no es relevante.*

- Dos conjuntos A y B son iguales sii:
    - Todos los elementos de A son elementos de B
    - Todos los elementos de B son elementos de A

NOTA: Escribimos x $\in$ A para representar "x es un elemento de A"

Pertenece

DEPARTAMENTO DE TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN
ETSI
1.-Conjuntos. 2.-Subconjuntos. 3.- Particiones
4.- Relaciones. 5.-Funciones

1. CONJUNTOS

Definición de conjuntos

- ***Por extensión***, enumerando todos los elementos del conjunto.
    - ✓Ejemplo:
        - semanalab = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes}
        - pares = {…, -4, -2, 0, 2, 4}
        - amigos = {lola, juan, ramiro}
    - ✓Este tipo de definiciones funcionan bien para los conjuntos *finitos*, pero:
        - *¿qué hacemos con los conjuntos infinitos?*
        - *¿qué significa …   ?*

1. CONJUNTOS

Definición de conjuntos

- Por ***comprensión***, describiendo las propiedades que tienen los elementos del conjunto:
  - ✓ { x : D | p(x) } denota el conjunto de los elementos del dominio D que satisfacen la propiedad p.
  - ✓ Ejemplos:
    - $\{x : N \mid x < 10\}$: El conjunto de los naturales menores que 10
    - $\{x : Z \mid (\exists y : Z \mid x = 2y)\}$: El conjunto de enteros pares
    - $\{x : N \mid false\}$: El conjunto vacío

1. CONJUNTOS

Cardinalidad

- La **cardinalidad** (#) de un conjunto es el número de elementos que contiene.
- Ejemplos
  - #{lunes,martes,miercoles,jueves,viernes} = 5
  - #{lola, juan, ramiro} = 3
  - $\#\{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\} = ?$

Nota: También puede definirse la cardinalidad de los conjuntos infinitos, *pero en **ALLOY** sólo se utilizan conjuntos finitos.*

1. CONJUNTOS

Operaciones sobre conjuntos

- **Unión:**
  - $A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$
  - $\{lunes\} \cup \{martes\} = \{lunes, martes\}$

- **Intersección:**
  - $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$
  - $\{lunes, martes\} \cap \{martes\} = \{martes\}$

- **Diferencia:**
  - $A - B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}$
  - $\{lunes, martes\} - \{martes\} = \{lunes\}$

2. SUBCONJUNTOS

Subconjuntos

- Un subconjunto B de otro conjunto A es un conjunto en el que todos sus elementos son también elementos de A
  - $B \subseteq A \Longleftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$
  - $\{1,3,4\} \subseteq Z$

- Un subconjunto B propio de otro conjunto A es un subconjunto distinto de A
  - $A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B$ and $B \subseteq A$

2. SUBCONJUNTOS

Subconjuntos Potencia

NEW !!!

- El conjunto potencia de A (2^A) es el conjunto que contiene todos sus subconjuntos:

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

- Ejemplo:

$$A = \{a,b,c\} \Rightarrow$$

$$2^A = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

- Observa que como para todo conjunto A, se tiene que $\emptyset \subseteq A$, entonces para todo conjunto A, $\emptyset \in 2^A$

3. PARTICIONES

- Dos conjuntos son **disjuntos** si no tienen ningún elemento común.

- A veces, será necesario dividir un conjunto en una serie de subconjuntos disjuntos a los que llamamos particiones.
  - ✓ Cada elemento del conjunto original pertenece a una, y sólo a una, partición

4. RELACIONES

- A veces, los elementos de conjuntos distintos se relacionan de alguna forma, y nos interesa agruparlos de manera que se haga explícita esa relación (como un registro, o una tupla)

- ALLOY está basado en un cálculo de relaciones. De hecho los modelos en ALLOY se construyen usando relaciones (conjunto de tuplas)

Departamento de Tecnologías de la Información
ETSI
1.-Conjuntos. 2.-Subconjuntos. 3.- Particiones
4.- Relaciones. 5.-Funciones

4. RELACIONES

- Dados dos conjuntos A y B, el conjunto producto de **A × B** está formado por el conjuntos de pares de elementos de A y B:

$$\mathbf{A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}}$$

Producto Cartesiano (Producto)

- Ejemplo:

dado A = {false, true} y B = {manzana, naranja, pera} se tiene que:

A × B = {(false, manzana), (true, manzana),

(false, naranja), (true, naranja),(false, pera),

(true, pera)}

4. RELACIONES

- Una **relación binaria R** entre dos conjuntos A y B **es** un elemento de **$R \in 2^{A \times B}$**, es decir, **un subconjunto $R \subseteq A \times B$**

- Ejemplo:
  - Padres ⊆ Persona × Persona
  - Padres = {(Juan, María), (Juan, Carlos)}

DEPARTAMENTO DE TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN
1.-Conjuntos. 2.-Subconjuntos. 3.- Particiones
4.- Relaciones. 5.-Funciones

4. RELACIONES

- Una **relación ternaria R entre dos conjuntos A y B y otro conjunto C es** un elemento de **$R \in 2^{A \times BxC}$**, es decir, es un subconjunto $R \subseteq A \times BxC$

- Ejemplo:
  - RefrescoFavorito ⊆ Persona × Refresco × Precio
  - RefrescoFavorito =

  {(Juan, CocaCola, 1e), (Maria, Zumo, 1,5e), (Rosa, Fanta, 1e)}

NOTA: Una relación n-aria (n > 3) se define de la misma forma, donde n es la aridad de la relación.

4. RELACIONES

RELACIONES BINARIAS

- El **dominio** de una relación binaria *es el conjunto de todos sus primeros* elementos, es decir, dada $R \subseteq A \times B$, **dom(R) = {a : A | (∃b : B | (a,b) ∈ R) }**

- Ejemplo:

Dada la relación *Padres* ⊆ *Persona* × *Persona* definida por *Padres* = {(*Juan*, *Maria*), (*Juan*, *Rosa*)}, el dominio *dom(Padres) = {Juan}*

1.-Conjuntos. 2.-Subconjuntos. 3.- Particiones
4.- Relaciones. 5.-Funciones

4. RELACIONES

RELACIONES BINARIAS

- La **imagen** o **recorrido** de una relación binaria *es el conjunto de todos sus segundos elementos*, es decir, dada R ⊆ A × B, **imag(R) = {b : B|(∃a : A|(a,b) ∈ R)}**

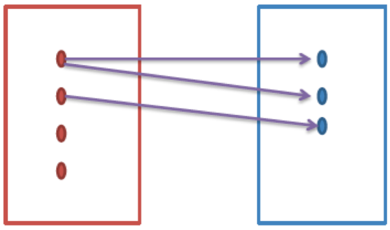
- Ejemplo:

Dada la relación Cuadrados ⊆ Z × Z definida por Cuadrados = {(−1, 1), (2, 4), (5, 25)}, la imagen de la relación Cuadrados, *imag (Cuadrados) = {1, 4, 25}*

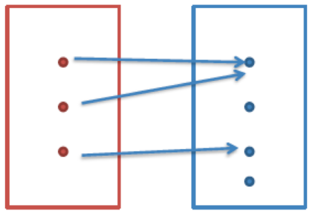
4. RELACIONES

RELACIONES BINARIAS

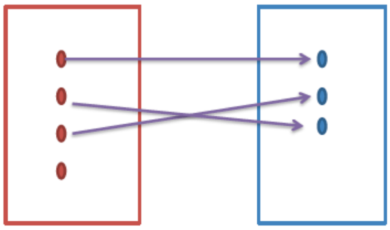
De uno a muchos



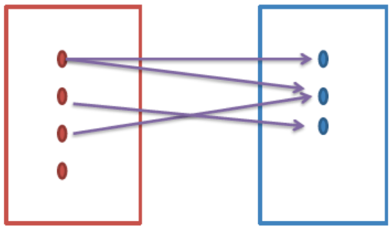
De muchos a uno



De uno a uno



De muchos a muchos



4. FUNCIONES

- Una **funcion F** es una relación de aridad n + 1 que contiene dos tuplas con los n primeros elementos iguales, es decir, si n = 1 se satisface que :

  $$\forall(a1,b1) \in F, \forall(a2,b2), \text{ si } a1 = a2 \Rightarrow b1 = b2$$

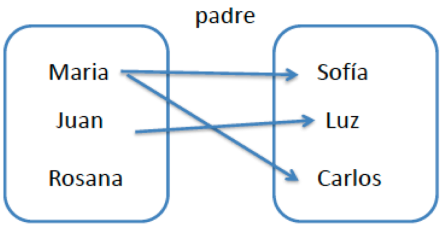
- Ejemplos:
  - {(1, verde), (2, rojo), (3, verde)}
  - {(Juan, CocaCola), (Maria, Zumo), (Rosa, Fanta)}

- En lugar de escribir

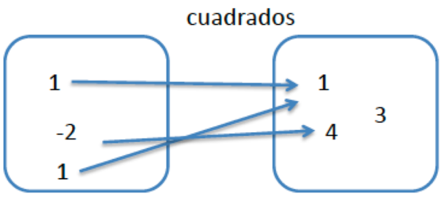
  $F : A1 \times \cdots An \times B$ escribimos $F : A1 \times \cdots An \rightarrow B$

4. RELACIONES

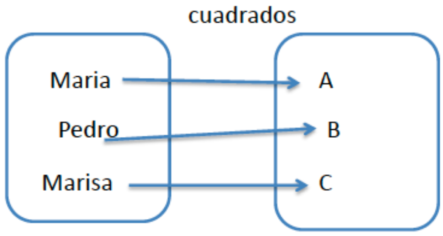
RELACIONES VERSUS FUNCIONES



Uno a muchos



Muchos a uno



Uno a uno

5. FUNCIONES

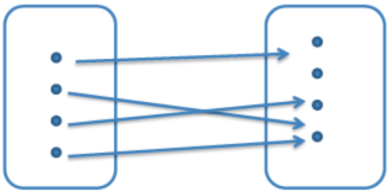
TIPOS DE FUNCIONES

- Sea una función $F : S \rightarrow T$
  - F es una función ***total*** sii está definida para todos los elementos de S
  - F es una función **parcial** sii está definida para algunos elementos de S

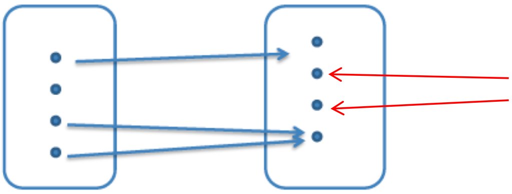
- Ejemplos:
  - cuadrados : $Z \rightarrow Z$, cuadrados $= \{(-1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$
  - valAbs $= \{(x , y) : Z \times N \mid (x > 0 \text{ and } y = x) \text{or} (x \leq 0 \text{ and } y = -x)\}$

5. FUNCIONES

TIPOS DE FUNCIONES



Función Total

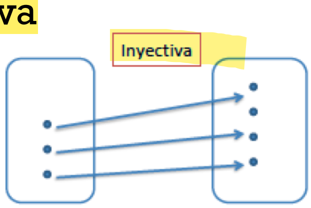


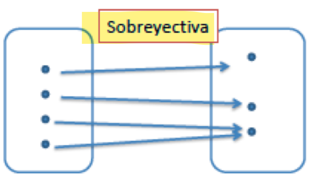
Función parcial

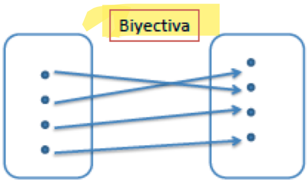
5. FUNCIONES

TIPOS DE FUNCIONES

- Sea una función $F : S \rightarrow T$
  - F una **función inyectiva** (uno-a-uno) sii $\forall(s1,t1),(s2,t2) : t1 = t2 \Rightarrow s1 = s2$
  - F es una **función sobreyectiva** sii $\forall t : T \mid (\exists s : S \mid (s,t) \in F)$
  - F es una **función biyectiva** sii es inyectiva y sobreyectiva



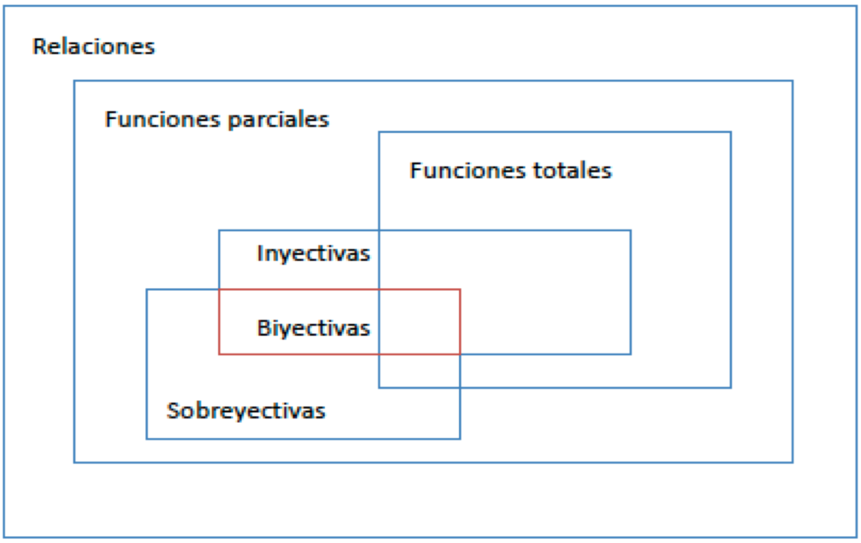




5. FUNCIONES

TIPOS DE FUNCIONES -RESUMEN-

Menos a más raro



5. FUNCIONES

TIPOS DE FUNCIONES

- La **composición** de relaciones permite construir una nueva relación a partir de dos relaciones que pueden componerse

- Dada $r \subseteq A \times B$ y $s \subseteq B \times C$, la composición **r.s** es una relación de dominio A y recorrido C , es decir, $\mathbf{r.s \in A \times C}$ definida como:

$$(a,c)\in r.s \Longleftrightarrow \exists b\in B \mid (a,b)\in r \text{ y } (b,c)\in s$$

Ejemplo:

Dadas $r = \{(a, 1), (b, 2)\}$ y $s = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$

$r.s = \{(a,2),(b,4)\}$

5. FUNCIONES

TIPOS DE FUNCIONES

Lo conceptos más difíciles

- Intuitivamente, la **clausura transitiva (r^+)** de una relación

$r \subseteq S \times S$ es el conjunto de pares que se obtiene aplicando una y otra vez r hasta que ya no se puede más.

$$r^+ = r + r.r \cup r.r.r \cup \cdots$$

Por ejemplo,
- Abuelos = Padres · Padres
- Antepasados=Padres$^+$

- La **clausura reflexivo-transitiva (r^*)** de una relación $r \subseteq S \times S$ es la menor relación transitiva que contiene a r y que es también reflexiva

$$r^* = r^+ \cup \{ (s, s) \mid s \in S \}$$

5. FUNCIONES

TIPOS DE FUNCIONES

Intuitivamente, **la relación transpuesta ($\sim r$)** de una relación $r \subseteq A \times B$ es la relación que se obtiene invirtiendo los pares de r :

$$\sim r = \{ (b,a) : B \times A \mid (a,b) \in r \}$$

Por ejemplo,
- HijoDe =∼ Padres
- DescendientesDe = (∼ Padres)$^+$

BIBLIOGRAFIA

- Estas transparencias has sido extraídas del curso sobre "Métodos Formales" impartido en la Universidad de Iowah y de la Universidad de Málaga