Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2021
Práctico 9

Estimación Puntual

Consistencia de un estimador

Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *iid* con distribución F_θ donde θ es un parámetro. Se considera la familia $\{T_n(X_1,\ldots,X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde T_n es una función de los n datos (que cumple ciertas hipótesis). $T_n(X_1,\ldots,X_n)$ se llama un estimador de θ. Un estimador se dice *consistente* si $T_n(X_1,\ldots,X_n) \xrightarrow[n]{c.s.} \theta$.

Ejercicio 1
Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *iid* tales que $\mathbf{E}(X_1) = \mu$ y $\mathbf{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$ $(\sigma > 0)$.

1. Demostrar que $\overline{X}_n$ es un estimador consistente de μ, esto es que $\overline{X}_n \xrightarrow[n]{c.s.} \mu$.

2. Demostrar que si $\sigma_n^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$ y $s_n^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$ entonces

$$\sigma_n^2 \xrightarrow[n]{c.s.} \sigma^2 \qquad s_n^2 \xrightarrow[n]{c.s.} \sigma^2 \qquad \sigma_n \xrightarrow[n]{c.s.} \sigma \qquad s_n \xrightarrow[n]{c.s.} \sigma$$

Sugerencia: $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\right)^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$ y usar los siguientes resultados:

Si $X_n \xrightarrow[n]{c.s.} X$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua entonces $g(X_n) \xrightarrow[n]{c.s.} g(X)$

Si $X_n \xrightarrow[n]{c.s.} X$ e $Y_n \xrightarrow[n]{c.s.} Y$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua entonces $g(X_n, Y_n) \xrightarrow[n]{c.s.} g(X, Y)$

Ejercicio 2
Sean $X_1, X_2, \ldots X_n iid \sim F$ Encontrar estimadores para los siguientes parámetros por el método de los momentos:

1. p si la distribución es Ber(p)
2. λ si la distribución es $\mathcal{P}(\lambda)$
3. p si la distribución es Geo(p)
4. μ y σ^2 si la distribución es $N(\mu, \sigma^2)$
5. a y b si la distribución es $\mathcal{U}[a, b]$.

Ejercicio 3
Una pieza de una máquina se verifica al final de cada hora de producción y se cambia por una nueva en caso de encontrarse rota. El tiempo de vida en horas de la pieza se puede modelar con una variable aleatoria T con distribución exponencial de parámetro λ ($T \sim \exp(\lambda)$), por lo tanto el tiempo en horas que transcurre hasta el recambio de la pieza se puede modelar con una variable aleatoria $X = [T] + 1$, donde $[T]$ es la parte entera de T (esto es, $X = n$ si y sólo si $n - 1 \leq T < n$).

1. Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria X y probar que tiene distribución geométrica de parámetro $1 - e^{-\lambda}$ ($X \sim \text{Geo}(1 - e^{-\lambda})$).

2. A partir de los tiempos en los que se realiza el recambio de las piezas se desea estimar el parámetro λ del tiempo de vida de dichas piezas.

   a) Calcular λ en función de μ siendo $\mu = \mathbf{E}(X)$.

b) ¿Cómo estimaría μ a partir de las observaciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de los tiempos de recambio de las piezas?

c) Construir un estimador consistente para λ en función de las observaciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de los tiempos de recambio de las piezas.

Ejercicio 4

Sea una sucesión de variables aletorias $X_1, X_2, \ldots X_n$, *iid* tal que $P\{X_1 = 1\} = P\{X_1 = -1\} = a$ y $P\{X_1 = 0\} = 1 - 2a$ donde $0 < a < 1/2$. Dar por el método de los momentos un estimador consi8stente del parámetro a.

Estimación por máxima verosimilitud

Ejercicio 5

Sean $X_1, X_2, \ldots X_n iid \sim F$ Encontrar los estimadores de máxima verosimilitud para los siguientes parámetros y compararlos con los respectivos estimadores por el método de los momentos:

1. p si la distribución es Ber(p)
2. λ si la distribución es $\mathcal{P}(\lambda)$
3. p si la distribución es Geo(p)
4. μ y σ^2 si la distribución es $N(\mu, \sigma^2)$
5. a y b si la distribución es $\mathcal{U}[a, b]$.

Sesgo de un estimador

Sean $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *iid* con distribución F_θ. Se define el *sesgo* de un estimador de θ, $T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n)$ como $\mathbf{E}(T_n - \theta)$. Un estimador T_n se dice *insesgado* si su sesgo es cero, es decir $\mathbf{E}(T_n) = 0 \; \forall \; n \in \mathbb{N}$. Decimos que es *asintóticamente insesgado* si $\mathbf{E}(T_n - \theta) \underset{n}{\to} 0$.

Ejercicio 6

Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *iid* tales que $\mathbf{E}(X_1) = \mu$ y $\mathbf{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$ $(\sigma > 0)$.

Mostrar que $\overline{X}_n$ es insesgado como estimador de μ, que σ_n^2 no es insesgado como estimador de σ^2 y que s_n^2 es insesgado para σ^2.

Ejercicio 7

Se considera una muestra $X_1, X_2, ..., X_n$ *iid* con media $\mathbf{E}(X) = \mu$ y varianza $\mathbf{Var}(X) = \sigma^2$. Se considera el estimador $\widehat{\mu} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i$ (una combinación lineal de las observaciones).

1. Hallar la relación que tienen que cumplir los coeficientes a_i para que $\widehat{\mu}$ sea un estimador insesgado de la media μ.
2. Entre todos los estimadores lineales e insesgados de la media μ hallar el de varianza mínima.

   Sugerencia: usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para vectores en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 8

Sean $X_1, \ldots, X_n$ *iid* $\sim \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Estimar λ por el método de los momentos. Observar que es insesgado.
2. Probar que s_n^2 también es un estimador insesgado para λ.
3. Encontrar el estimador de máxima verosimilitud para λ y observar que coincide con el estimador obtenido por el método de los momentos.

Ejercicio 9

Sean $X_1, \ldots, X_n$ *iid* $\sim \mathcal{U}[0, \theta]$. Interesa estimar el valor de θ.

1. Hallar el estimador de θ por el método de los momentos.
2. Estudiar su sesgo, varianza y error cuadrático medio.
3. Demostrar que el estimador de máxima verosimilitud de θ es X_n^*, el máximo de los valores muestrales.