Lógica - Práctico 6
(Lógica de Predicados)

Ejercicio 1.

Considere un conjunto A de números reales que incluya al 0. Considere un lenguaje de primer orden con un símbolo de relación binario M que denota la relación $<$ de los reales y otro símbolo binario $='$ que denota la igualdad. Considere un símbolo de función binario m que denota la multiplicación.

Podemos definir muchos objetos usando el lenguaje de primer orden. Por ejemplo, el siguiente renglón define al cero.

Es_cero$(x_1) := ((\forall x_2)\ m(x_1,x_2) =' x_1)$

Usando solamente los símbolos dados, escriba fórmulas de primer orden que definan las siguientes nociones.

a) x_1 es el *máximo*
b) x_1 es un *sucesor inmediato* de x_2
c) No hay ningún elemento entre x_1 e x_2
d) La función cuadrado es creciente

Ejercicio 2.

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1,2; 2; 0 \rangle$ con dos símbolos de relación P_1 (unario) y P_2 (binario) y un símbolo de función f_1 (binario). Sea *FORM* el conjunto de fórmulas de dicho lenguaje.

Indique cuáles de las siguientes son fórmulas bien formadas de dicho lenguaje (o sea, cuáles cumplen la definición de *FORM*).

1. $((\forall x_1)\ ((\exists x_2)\ P_2(x_1,x_2)))$
2. $(P_1(x_1) \rightarrow (((\exists x_2\ )f_1\ (x_1,x_2) =' x_2\ ) \wedge ((\exists x_1)P_2(x_1,x_2))))$
3. $(((\exists x_1)((\exists x_2)\ f_1\ (x_1,x_2))) \leftrightarrow ((\forall x_1\ )P_1\ (f_1(x_1,x_1))))$
4. $((\forall x_1)\ ((\forall x_2)\ (\ P_1(x_1) \vee ((\exists x_1)\ P_2(x_1,x_2)\ )\ )\ )\ )$
5. $(P_1\ ((\forall x_1\ )P_2(x_1,x_2)) \leftrightarrow ((\forall x_1)\ P_1(P_2(x_1,x_2))))$
6. $((\exists x_1) \wedge ((\forall x_2)\ P_2(x_1,x_2)))$
7. $((\forall x_1)\ (P_1(x_1) \rightarrow (P_1(f_1(x_1,x_2)) \wedge ((\exists x_1)\ P_1(f_1\ (x_1,f_1\ (x_1,x_2)))))))$

Ejercicio 3.

a) Escriba el tipo de similaridad de las siguientes estructuras:

i. $\langle$ Q , < , 0 $\rangle$

ii. $\langle$ N , +, * , S , 0 , 1, 2, 3, 4, …, n, … $\rangle$ donde S(x) = x+1

iii. $\langle$ P(N) , $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, ^{c} , $\varnothing$, {1,2}$\rangle$

iv. $\langle$ N , {x$\in$N / x es impar} , {x$\in$N / x es primo} , + , ^{2}, 0, 1 $\rangle$

v. $\langle$ R , 1 $\rangle$

vi. $\langle$ R, N, < , T , 0,1,2 $\rangle$ donde T(a,b,c) es la relación “b está entre a y c”.

vii. $\langle$ {0,1,2} , {(0,1),(0,2),(1,2)} , {0,2} , 0, 1, 2 $\rangle$

b) Dé estructuras que tengan los siguientes tipos de similaridad:

$\langle$ 1,1 ; – ; 3 $\rangle$ $\quad$ $\langle$ 4 ; – ; 0 $\rangle$ $\quad$ $\langle$ 1,2 ; 1,2 ; 1 $\rangle$ $\quad$ $\langle$ – ; 2,3 ; 0 $\rangle$

c) Considere los tipos de similaridad de la parte (a). Para cada uno de ellos, escriba un alfabeto para un lenguaje de dicho tipo.

d) A partir de un tipo y de un alfabeto (considerando la definición del conjunto FORM) queda determinado un lenguaje de primer orden. Entonces:

- Escriba 3 términos pertenecientes al lenguaje del punto (a-iii).
- Escriba 3 términos pertenecientes al lenguaje del punto (a-iv).
- Escriba 3 átomos pertenecientes al lenguaje del punto (a-v).
- Escriba 3 átomos cerrados pertenecientes al lenguaje del punto (a-vi).
- Escriba 3 átomos pertenecientes al lenguaje del punto (a-vii)
- Escriba 3 sentencias pertenecientes al lenguaje del punto (a-iv).

Ejercicio 4.

Para aquellas fórmulas bien formadas del ejercicio 2, determine cuáles ocurrencias de variables son libres y cuáles son ligadas. Para aquellas que sean ligadas, señale el cuantificador al cual están ligadas. ¿Cuáles de las fórmulas anteriores son sentencias?

Ejercicio 5.

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -; 2; 1 \rangle$ con un símbolo de función f_1 y un símbolo de constante c_0 .Verifique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y realice la sustitución correspondiente cuando sea posible.

a) x_1 es libre para x_1 en la fórmula $x_2 =' x_1$
b) x_3 es libre para x_1 en la fórmula $x_1 =' x_1$
c) c_0 es libre para $f_1(x_1,c_0)$ en la fórmula $f_1(x_1,c_0) =' c_0$
d) $f_1(x_1,x_3)$ es libre para x_3 en la fórmula $x_2 =' c_0$
e) x_1 es libre para $f_1(x_1,c_0)$ en la fórmula $f_1(x_1,c_0) =' c_0$
f) x_1 es libre para $f_1(x_1,c_0)$ en la fórmula $((\forall x_1)f_1(x_1,c_0) =' c_0)$
g) $f_1(c_0,x_2)$ es libre para x_2 en la fórmula $((\exists x_2)\ x_2 =' x_1)$
h) $f_1(x_1,x_2)$ es libre para x_4 en la fórmula $((\exists x_3)\ f_1(x_3,x_1) =' c_0)$
i) $f_1(x_1,x_2)$ es libre para x_3 en la fórmula $((\exists x_2)\ f_1(x_2,x_3) =' c_0)$
j) x_2 es libre para $f_1(x_1,c_0)$ en la fórmula $((\forall x_1)f_1(x_1,c_0) =' c_0)$
k) $f_1(x_1,x_2)$ es libre para x_3 en la fórmula $(((\forall x_4)\ f_1(x_1,x_3) =' c_0) \wedge ((\exists x_2)\ x_3 =' x_1))$
l) $f_1(x_1,x_2)$ es libre para x_5 en la fórmula $(((\forall x_3)\ x_3 =' x_4) \rightarrow ((\forall x_5)\ x_5 =' x_2))$
m) $f_1(x_1,x_2)$ es libre para x_3 en la fórmula $(((\exists x_3)\ x_3 =' c_0) \vee ((\exists x_4)\ x_3 =' x_4))$
n) $f_1(c_0,x_1)$ es libre para $f_1(x_1,c_0)$ en la fórmula $((\forall x_1)f_1(x_1,c_0) =' c_0)$

Ejercicio 6.

Considere el conjunto *N* de los números naturales. Considere un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado P_1 (unario) que denota la relación "ser par", un símbolo de relación binario =' que denota la igualdad, dos símbolos de función f_1 y f_2 (binarios) que denotan la suma y el producto respectivamente y tres símbolos de constante c_0 , c_1 , c_2 que denotan las constantes 1,2,6.

Traduzca a fórmulas de primer orden (utilizando solamente los símbolos definidos) cada uno de los siguientes enunciados:

a) Todo natural n cumple que $n^2 + n$ es par.
b) Para todo natural par p existe un natural x tal que p = 2*x.
c) La suma de dos naturales impares cualesquiera es un número par.
d) Para todo natural n existe un natural x tal que n*(n+1)*(n+2) = 6*x.
e) No hay ningún natural que sea par e impar a la vez.
f) Hay un natural n que es par y que además cumple que n+n = n*n.
g) La suma posee un neutro, que además es único.

Ejercicio 7.

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle$ –; 1,2; 1 $\rangle$ con dos símbolos de función f_1 (unario) y f_2 (binario) y un símbolo de constante c_0.

a) Defina inductivamente el conjunto $TERM_C$ de los términos *cerrados* pertenecientes a dicho lenguaje.

b) Defina recursivamente la función F: $TERM_C \rightarrow N$ que calcula la cantidad de *ocurrencias* de $\underline{c_0}$ en un término $t \in TERM_C$.

c) Demuestre por inducción que para todo $t \in$ TERMC se cumple que $F(t) > 0$.

Ejercicio 8. *(2do parcial del 2010)*

Sea *L* un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad <1;1;0> cuyo alfabeto cuenta con los símbolos de relación *P* y =', el símbolo de función *f*, las variables $\{x_i : i \in N\}$, los conectivos $\neg$ y $\rightarrow$, el cuantificador universal $\forall$, y los símbolos auxiliares) y (.

a) Enuncie el PIP para las fórmulas del lenguaje *L*.
b) Para cualquier fórmula $\varphi \in L$ y variables x_i, x_j tales que x_i no aparece en φ ($x_i \notin V(\varphi)$), pruebe que : $\varphi[x_i / x_j][x_j / x_i] = \varphi$
c) Muestre que la condición sobre la variable x_i es necesaria para que se cumpla la propiedad anterior.

Ejercicio 9.

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle$ 1; –; 0 $\rangle$ con un símbolo de predicado P (unario). Sea *Var* = $\{x_1, x_2, ...\}$ el conjunto de variables del lenguaje y sea *FORM* el conjunto de fórmulas del lenguaje.

a) Defina recursivamente la función V: *FORM* $\rightarrow$ *Pot* (*Var*) tal que $V(\alpha)$ denota el conjunto de variables que ocurren en la fórmula α.

b) Defina recursivamente la función FV: FORM $\rightarrow$ Pot (Var) tal que $FV(\alpha)$ denota el conjunto de variables que ocurren libres en la fórmula α.

c) Demuestre por inducción que para todo $\alpha \in$ FORM se cumple que: $FV(\alpha) \subseteq V(\alpha)$.

<u>Ejercicio 10.</u> (Examen Diciembre de 2006)

Sea un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad <-; 1, 2,2; 0> y símbolos de función *f* de aridad 1, *g* y *h* de aridad 2.

Sea PROP* el conjunto de las fórmulas proposicionales que sólo emplean los conectivos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$.

1. Defina inductivamente el conjunto TERM de los términos del lenguaje.
2. Defina recursivamente una función biyectiva $C: TERM \rightarrow PROP^*$ que cumpla:

   $C(g(x_1, x_3)) = p_1 \wedge p_3$.
3. Defina recursivamente una función $R: TERM \rightarrow TERM$ tal que para todo término t se cumpla C(t) *eq* C(R(t)) y el conectivo $\vee$ no ocurre en C(R(t)).
4. Demuestre que para todo término t, C(t) *eq* C(R(t)).

Ejercicio 1.

A (Conjunto de los números reales)
M (<)
=' (=)
m (función multiplicación)

Usando solamente los símbolos dados, escribe fórmulas de primer orden que definan las siguientes nociones:

a). x_1 es el máximo.

$Es\_max(x_1) := (\forall x_2) M(x_2, x_1)$

b). x_1 es un sucesor inmediato de x_2

$Sucesor := (x_1 =' x_2 + x_3) \wedge ((\forall x_4) m(x_3, x_4) =' x_4) \quad (x_3 = 1)$

c). No hay ningún elemento entre x_1 e x_2

$No\_existe := \neg(\exists x_3)(M(x_1, x_3) \wedge M(x_3, x_2))$

d). La función cuadrado es creciente.

$Es\_Creciente := (\forall x_1)(\forall x_2)(M(x_1, x_2) \rightarrow M(m(x_1, x_1), m(x_2, x_2)))$

Ejercicio 2.

Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle 1,2;2;0\rangle$ con dos símbolos de relación P_1 (unario) y P_2 (binario) y un símbolo de función f_1 (binario). Sea FORM el conjunto de fórmulas de dicho lenguaje.

Indique cuáles de las siguientes son fórmulas bien formadas de dicho lenguaje

1_ $\underbrace{((\forall x_1)\underbrace{((\exists x_2)\underbrace{P_2(x_1,x_2)}_{\in FORM})}_{\in FORM})}_{\in FORM} \quad \in \text{FORM}$

2_ $\underbrace{(\underbrace{P_1(x_1)}_{\in FORM} \rightarrow \underbrace{(\underbrace{((\exists x_2)\underbrace{\underbrace{f_1(x_1,x_2)}_{\in TERM} =' \underbrace{x_2}_{\in TERM}}_{\in FORM})}_{\in FORM} \wedge \underbrace{((\exists x_1)\underbrace{P_2(x_1,x_2)}_{\in FORM})}_{\in FORM})}_{\in FORM})}_{\in FORM} \quad \in \text{FORM}$

3\. $(((\exists x_1)((\exists x_2)\underbrace{f_1(x_1,x_2)}_{\in TERM}))\leftrightarrow((\forall x_1)P_1(f_1(x_1,x_1)))) \quad \notin \text{FORM}$

4_ $\underbrace{((\forall x_1)\overbrace{((\forall x_2)(\underbrace{P_1(x_1)}_{\in FORM} \vee \underbrace{((\exists x_1)P_2(x_1,x_2))}_{\in FORM}))}^{\in FORM})}_{\in FORM} \quad \in \text{FORM}$

5_ $(\underbrace{P_1(\underbrace{((\forall x_1)P_2(x_1,x_2))}_{\in FORM})}_{\notin FORM} \leftrightarrow ((\forall x_1)\underbrace{P_1(\underbrace{P_2(x_1,x_2)}_{\in FORM})}_{\notin FORM}))) \quad \notin \text{FORM}$

6_ $(\overbrace{(\exists x_1)}^{\notin FORM} \wedge ((\forall x_2)P_2(x_1,x_2))) \quad \notin \text{FORM}$

7_ $\underbrace{((\forall x_1)\overbrace{(\overbrace{P_1(x_1)}^{\in FORM} \rightarrow (\underbrace{P_1(\underbrace{f_1(x_1,x_2)}_{\in TERM})}_{\in FORM} \wedge \underbrace{((\exists x_1)\underbrace{P_1(\underbrace{f_1(x_1,\underbrace{f_1(x_1,x_2)}_{\in TERM})}_{\in TERM})}_{\in FORM})}_{\in FORM}))}^{\in FORM})}_{\in FORM} \quad \in \text{FORM}$

Ejercicio 3.

a)_ Escriba el tipo de similaridad de las siguientes estructuras:

i. $\langle \mathbb{Q}, <, 0 \rangle \rightarrow \langle 2; -; 1 \rangle$

ii._ $\langle \mathbb{N}, +, *, S, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots \rangle$ donde $S(x) = x+1 \rightarrow \langle -; 2, 2, 1; \infty \rangle$

iii._ $\langle P(\mathbb{N}), \subseteq, \cup, \cap, ^c, \phi, \{1,2\} \rangle \rightarrow \langle 2; 2, 2, 1; - ; 2 \rangle$

iv._ $\langle \mathbb{N}, \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es impar}\}, \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es primo}\}, +, ^2, 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1; 2, 1; 2 \rangle$

v._ $\langle \mathbb{R}, 1 \rangle \rightarrow \langle -; -; 1 \rangle$

vi._ $\langle \mathbb{R}, \mathbb{N}, <, T, 0, 1, 2 \rangle$ donde $T(a, b, c)$ es la relación "b está entre a y c"

$\rightarrow \langle 1, 2, 3; -; 3 \rangle$

vii._ $\langle \underbrace{\{0, 1, 2\}}_{\text{Dominio}}, \underbrace{\{(0,1), (0,2), (1,2)\}}_{(x_1, x_2) \in ?}, \underbrace{\{0, 2\}}_{x_1 \in ?}, 0, 1, 2 \rangle \rightarrow \langle 2, 1; -; 3 \rangle$

b)_ Dé estructuras que tengan los siguientes tipos de similaridad:

$\langle 1, 1; -; 3 \rangle \rightarrow \langle \mathbb{N}, \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es par}\}, \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es primo}\}, 0, 1, 2 \rangle$

$\langle 4; -; 0 \rangle \rightarrow \langle \mathbb{R}, P \rangle$ donde $P(a, b, c, d)$ es la relación "b está entre a y $c \times d$"

$\langle 1, 2; 1, 2; 1 \rangle \rightarrow \langle \mathbb{N}, \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es impar}\}, <, ^2, +, 0 \rangle$

$\langle -; 2, 3; 0 \rangle \rightarrow \langle \mathbb{R}, +, f \rangle$ donde $f(a, b, c) = (a^b)^c$

c)- Considere los tipos de similaridad de la parte (a). Para cada uno de ellos, escriba un alfabeto para un lenguaje de dicho tipo.

i. $\langle 2; - ; 1 \rangle \rightarrow P_1, c_1$

ii- $\langle - ; 2,2,1,\infty \rangle \rightarrow f_1, f_2, f_3, \; c_i \; i = 0,1,\dots,n,\dots$

iii- $\langle 2; 2,2,1; 2 \rangle \rightarrow P_1, f_1, f_2, f_3, \; c_1, c_2$

iv. $\langle 1,1; 2,1; 2 \rangle \rightarrow P_1, P_2, f_1, f_2, c_1, c_2$

v- $\langle - ; - ; 1 \rangle \rightarrow c_1$

vi- $\langle 1,2,3; - ; 3 \rangle \rightarrow P_1, P_2, P_3, \; c_1, c_2, c_3$

vii- $\langle 2,1; - ; 3 \rangle \rightarrow P_1, P_2, \; c_1, c_2, c_3$

Parte fija para todos los casos:

1- Variables: $x_1, x_2, \dots, x_n$

2- Conectivos: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \perp$

3- Cuantificadores: $\forall, \exists$

4- Símbolos auxiliares: (,) " , "

d)- A partir de un tipo y de un alfabeto (considerando la definición del conjunto FORM) queda determinado un lenguaje de primer orden. Entonces:

- Escriba 3 términos pertenecientes al lenguaje del punto (a-iii)

  $c_1, \; f_1(c_1, c_2), \; f_3(c_1)$

- Escriba 3 términos pertenecientes al lenguaje del punto (a-iv)

  $c_2, \; P_1(c_2), \; f_1(c_1, c_2)$

- Escriba 3 átomos pertenecientes al lenguaje del punto (a-v)

  $\perp, \; c_1 =' c_1, \; c_1 =$

- Escriba 3 átomos cerrados pertenecientes al lenguaje del punto (a-vi)

  $\perp, \; P_1(c_1), \; P_2(c_1, c_2)$

- Escriba 3 átomos pertenecientes al lenguaje del punto (a-vii)

  $P_2(c_1), \; c_1 =' c_3, \; P_1(c_1, c_2)$

- Escriba 3 sentencias pertenecientes al lenguaje del punto (a-iv)

  $(\forall x_1) P_1(x_1), \; (\forall x_2) P_2(x_2), \; (\forall x_1) P_1(f_2(x_1))$

Ejercicio 4_

Para aquellas fórmulas bien formadas del ejercicio 2, determine cuáles ocurrencias de variables son libres y cuáles son ligadas. Para aquellas que sean ligadas, señale el cuantificador al cual están ligadas, ¿cuáles de las fórmulas son sentencias?

1_ $((\forall x_1)((\exists x_2)P_2(x_1, x_2)) = \varphi_1$

$\xrightarrow{1}$ La primer ocurrencia de x_1 es ligada al $\forall$

$\xrightarrow{2}$ La primer ocurrencia de x_2 es ligada al $\exists$

$\xrightarrow{3}$ La segunda ocurrencia de x_1 es ligada al $\forall$

$\xrightarrow{4}$ La segunda ocurrencia de x_2 es ligada al $\exists$

Como $FV(\varphi_1) = \phi \Rightarrow \varphi_1$ es sentencia

2_ $(P_1(x_1) \to (((\exists x_2) f_1(x_1, x_2) =' x_2) \wedge ((\exists x_1) P_2(x_1, x_2)))) = \varphi_2$

x_1: $\xrightarrow{1}$ Primer ocurrencia: Libre, ya que no está en el alcance de ningún cuantificador asociado a x_1.

$\xrightarrow{3}$ Segunda ocurrencia: Idem.

$\xrightarrow{6}$ Tercer ocurrencia: Ligada por el cuantificador $\exists_{(2)}$

$\xrightarrow{7}$ Cuarta ocurrencia: Idem.

x_2: $\xrightarrow{2}$ Primer ocurrencia: Ligada por el cuantificador $\exists_{(1)}$

$\xrightarrow{4}$ Segunda ocurrencia: Idem

$\xrightarrow{5}$ Tercer ocurrencia: Idem

$\xrightarrow{8}$ Cuarta ocurrencia: Libre, ya que no está al alcance de ningún cuantificador asociado a x_1.

Como $FV(\varphi_2) \neq \phi \Rightarrow \varphi_2$ no es sentencia.

4- $((\forall x_1)((\forall x_2)(P_1(x_1) \vee ((\exists x_1)P_2(x_1, x_2))))) = \varphi_4$

(1) 1 (2) 2 3 (3) 4 5 6

x_1: $\xrightarrow{1}$ Primer ocurrencia: Ligado al $\forall_{(1)}$

$\xrightarrow{3}$ Segunda ocurrencia: Idem

$\xrightarrow{4}$ Tercer ocurrencia: Ligada al $\exists_{(3)}$

$\xrightarrow{5}$ Cuarta ocurrencia: Idem

x_2: $\xrightarrow{2}$ Primer ocurrencia: Ligada al $\forall_{(2)}$

$\xrightarrow{6}$ Segunda ocurrencia: Idem

Como $FV(\varphi_4) = \phi \Rightarrow \varphi_4$ es sentencia.

7- $((\forall x_1)(P_1(x_1) \rightarrow (P_1(f_1(x_1, x_2)) \wedge ((\exists x_1)P_1(f_1(x_1, f_1(x_1, x_2))))))) = \varphi_7$

(1) 1 2 3 4 (2) 5 6 7 8

x_1: $\xrightarrow{1}$ Primer ocurrencia: Ligada al $\forall_{(1)}$

$\xrightarrow{2}$ Segunda ocurrencia: Idem

$\xrightarrow{3}$ Tercer ocurrencia: Idem

$\xrightarrow{5}$ Cuarta ocurrencia: Ligada al $\exists_{(2)}$

$\xrightarrow{6}$ Quinta ocurrencia: Idem

$\xrightarrow{7}$ Sexta ocurrencia: Idem

x_2: $\xrightarrow{4}$ Primer ocurrencia: Libre, ya que no está al alcance de ningún cuantificador asociado a x_2.

$\xrightarrow{8}$ Segunda ocurrencia: Idem.

Como $FV(\varphi_7) \neq \phi \rightarrow \varphi_7$ no es sentencia.

Ejercicio 5-

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $<-;2;1>$ con un símbolo de función f_1 y un símbolo de constante c_0. Verifique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y realice la sustitución correspondiente cuando sea posible.

a)- x_1 es libre para x_1 en la fórmula $x_2 =' x_1$

Como $x_2 =' x_1$ es atómica, por def 2.3.11 se cumple.

Sust: $(x_2 =' x_1)[{}^{x_1}/x_1] = (x_2[{}^{x_1}/x_1] =' x_1[{}^{x_1}/x_1]) = x_2 =' x_1$

b)- x_3 es libre para x_1 en la fórmula $x_1 =' x_1$.

Como $x_1 =' x_1$ es atómica, por def 2.3.11 se cumple

Sust: $(x_1 =' x_1)[{}^{x_3}/x_1] = (x_1[{}^{x_3}/x_1] =' x_1[{}^{x_3}/x_1]) = x_3 =' x_3$

c)- $\underbrace{c_0}_{t}$ es libre para $\underbrace{f_1(x_1, c_0)}_{t}$ en la fórmula $\underbrace{f_1(x_1, c_0) =' c_0}_{\alpha}$

Como $f_1(x_1, c_0)$ es un término y no una variable, no se puede realizar sustitución

d)- $f_1(x_1, x_3)$ es libre para x_3 en la fórmula $x_2 =' c_0$

Como $x_2 =' c_0$ es atómica, por def 2.3.11 se cumple.

Sust: $(x_2 =' c_0)[{}^{f_1(x_1,x_3)}/x_3] = (x_2[{}^{f_1(x_1,x_3)}/x_3] =' c_0[{}^{f_1(x_1,x_3)}/x_3]) = x_2 =' c_0$

e)- $\underbrace{x_1}_{x}$ es libre para $\underbrace{f_1(x_1, c_0)}_{t}$ en la fórmula $\underbrace{f_1(x_1, c_0) =' c_0}_{\alpha}$

Idem c)

f)- x_1 es libre para $f_1(x_1, c_0)$ en la fórmula $((\forall x_1) f_1(x_1, c_0) =' c_0)$

Idem c)

g)- $f_1(c_0, x_2)$ es libre para x_2 en la fórmula $((\exists x_2)\, x_2 =' x_1)$

$$FV((\exists x_2)x_2 =' x_1) = FV(x_2 =' x_1) - \{x_2\} = FV(x_2) \cup FV(x_1) - \{x_2\}$$
$$= \{x_2\} \cup \{x_1\} - \{x_2\} = \{x_1\}$$

Como $x_2 \notin FV((\exists x_2)x_2 =' x_1)$ por def 2.3.11 se cumple g)

<u>Sustitución</u>: $((\exists x_2)x_2 =' x_1)\left[{}^{f_1(c_0,x_2)}\!/\!_{x_2}\right] \underset{(i=j)}{=} ((\exists x_2)x_2 =' x_1)$

h)- $f_1(x_1, x_2)$ es libre para x_4 en la fórmula $((\exists x_3) f_1(x_3, x_1) =' c_0)$

$$FV((\exists x_3)f_1(x_3,x_1) =' c_0) = FV(f_1(x_3,x_1) =' c_0) - \{x_3\} = FV(f_1(x_3,x_1)) \cup FV(c_0) - \{x_3\}$$
$$= FV(x_3) \cup FV(x_1) \cup \phi - \{x_3\} = \{x_3\} \cup \{x_1\} - \{x_3\} = \{x_1\}$$

Como $x_4 \notin FV((\exists x_3)f_1(x_3,x_1) =' c_0)$ por def 2.3.11 se cumple h)

<u>Sustitución</u>: $((\exists x_3)f_1(x_3,x_1) =' c_0)\left[{}^{f_1(x_1,x_2)}\!/\!_{x_4}\right] \underset{(i\neq j)}{=} (\exists x_3)\left(f_1(x_3,x_1)\left[{}^{f_1(x_1,x_2)}\!/\!_{x_4}\right] =' c_0\left[{}^{f_1(x_1,x_2)}\!/\!_{x_4}\right]\right)$

$$= (\exists x_3)\left(f_1\left(x_3\left[{}^{f_1(x_1,x_2)}\!/\!_{x_4}\right], x_1\left[{}^{f_1(x_1,x_2)}\!/\!_{x_4}\right]\right)\right) =' c_0 = (\exists x_3)(f_1(x_3,x_1) =' c_0)$$

i)- $f_1(x_1, x_2)$ es libre para x_3 en la fórmula $((\exists x_2) f_1(x_2, x_3) =' c_0)$

$$FV((\exists x_2)f_1(x_2,x_3) =' c_0) = FV(f_1(x_2,x_3) =' c_0) - \{x_2\} = FV(f_1(x_2,x_3)) \cup FV(c_0) - \{x_2\}$$
$$= FV(x_2) \cup FV(x_3) \cup \phi - \{x_2\} = \{x_2\} \cup \{x_3\} - \{x_2\} = \{x_3\}$$

Como $x_3 \in FV((\exists x_2)f_1(x_2,x_3) =' c_0)$, hay que verificar la segunda parte de la definición ($x_i \notin FV(t)$ y t está libre para x en α_1, con $x_i = x_2$ y $t = f_1(x_1,x_2)$)

$$FV(f_1(x_1,x_2)) = FV(x_1) \cup FV(x_2) = \{x_1, x_2\}$$

Como $x_2 \in FV(f_1(x_1,x_2))$ no se cumple i).

j)- x_2 es libre para $f_1(x_1, c_0)$ en la fórmula $((\forall x_1) f_1(x_1, c_0) =' c_0)$. Idem e).

k)- $\overbrace{f_1(x_1, x_2)}^{t}$ es libre para $\overbrace{x_3}^{x}$ en la fórmula $(\overbrace{((\forall x_4) f_1(x_1,x_3) =' c_0)}^{\alpha_1} \wedge \overbrace{((\exists x_2)\, x_3 =' x_1)}^{\alpha_2})$

α es de la forma $\alpha = \alpha_1 \square \alpha_2$ (parte ii de la definición 2.3.11) hay que ver que t está libre para x en α_1 y en α_2.

① $f_1(x_1,x_2)$ es libre para x_3 en la fórmula $((\forall x_4) f_1(x_1,x_3) =' c_0)$?

$$FV((\forall x_4)f_1(x_1,x_3) =' c_0) = FV(f_1(x_1,x_3) =' c_0) - \{x_4\} = FV(f_1(x_1,x_3)) \cup FV(c_0) - \{x_4\}$$
$$= FV(x_1) \cup FV(x_3) \cup \phi - \{x_4\} = \{x_1\} \cup \{x_3\} - \{x_4\} = \{x_1, x_3\}$$

Como $x_3 \in FV((\forall x_4)f_1(x_1,x_3) =' c_0)$, hay que verificar la segunda parte de la def.

$FV(f_1(x_1,x_2)) = FV(x_1) \cup FV(x_2) = \{x_1\} \cup \{x_2\} = \{x_1, x_2\}$

Como $x_4 \notin FV(f_1(x_1,x_2))$ se cumple α_1.

② $f_1(x_1,x_2)$ es libre para x_3 en la fórmula $((\exists x_2) x_3 =' x_1)$?

$$FV((\exists x_2) x_3 =' x_1) = FV(x_3 =' x_1) - \{x_2\} = FV(x_3) \cup FV(x_1) - \{x_2\}$$
$$= \{x_3\} \cup \{x_1\} - \{x_2\} = \{x_3, x_1\}$$

Como $x_3 \in FV((\exists x_2) x_3 =' x_1)$, hay que verificar la segunda parte de la definición

$FV(f_1(x_1, x_2)) = \{x_1, x_2\}$

Como $x_2 \in FV(f_1(x_1,x_2))$ no se cumple α_2

Finalmente como se cumple α_1 y no se cumple α_2, no se cumple $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$, por lo tanto no se cumple k).

l) $\overbrace{f_1(x_1,x_2)}^{t}$ es libre para $\overset{x}{x_5}$ en la fórmula $(\overbrace{((\forall x_3) x_3 =' x_4)}^{\alpha_1} \rightarrow \overbrace{((\forall x_5) x_5 =' x_2)}^{\alpha_2})$

① t es libre para x en α_1?

$$FV((\forall x_3) x_3 =' x_4) = FV(x_3 =' x_4) - \{x_3\} = FV(x_3) \cup FV(x_4) - \{x_3\}$$
$$= \{x_3\} \cup \{x_4\} - \{x_3\} = \{x_4\}$$

Como $x_5 \notin FV((\forall x_3) x_3 =' x_4)$ se cumple ①

② t es libre para x en α_2?

$$FV((\forall x_5) x_5 =' x_2) = FV(x_5 =' x_2) - \{x_5\} = FV(x_5) \cup FV(x_2) - \{x_5\}$$
$$= \{x_5\} \cup \{x_2\} - \{x_5\} = \{x_2\}$$

Como $x_5 \notin FV((\forall x_5) x_5 =' x_2)$ se cumple ②

Luego, como se cumplen ① y ② se cumple l).

Sustitución: $(((\forall x_3) x_3 =' x_4) \rightarrow ((\forall x_5) x_5 =' x_2)) \left[\frac{f_1(x_1,x_2)}{x_5}\right]$:

$$= (((\forall x_3) x_3 =' x_4)\left[\frac{f_1(x_1,x_2)}{x_5}\right] \rightarrow ((\forall x_5) x_5 =' x_2))\left[\frac{f_1(x_1,x_2)}{x_5}\right] \underset{(i=j)}{=} (((\forall x_3) x_3 =' x_4) \rightarrow ((\forall x_5) x_5 =' x_2)$$

m)- $\overbrace{f_1(x_1,x_2)}^{t}$ es libre para $\overbrace{x_3}^{x}$ en la fórmula $(\overbrace{((\exists x_3)x_3 =' c_0)}^{\alpha_1} \vee \overbrace{((\exists x_4)x_3 =' x_4)}^{\alpha_2})$

① ¿t es libre para x en α_1?

$FV((\exists x_3)x_3 =' c_0) = FV(x_3 =' c_0) - \{x_3\} = FV(x_3) \cup FV(c_0) - \{x_3\} = \{x_3\} - \{x_3\} = \phi$

Como $x_3 \notin FV((\exists x_3)x_3 =' c_0)$ se cumple ①

② ¿t es libre para x en α_2?

$FV((\exists x_4)x_3 =' x_4) = FV(x_3 =' x_4) - \{x_4\} = FV(x_3) \cup FV(x_4) - \{x_4\} = \{x_3\}$

Como $x_3 \in FV((\exists x_4)x_3 =' x_4)$, hay que verificar la segunda parte de la def.

$FV(f_1(x_1,x_2)) = FV(x_1) \cup FV(x_2) = \{x_1, x_2\}$

Como $\underset{(x_i)}{x_4} \notin FV(f_1(x_1,x_2))$ se cumple ②

Finalmente, como se cumple ① y ②, se cumple m).

Sustitución. $(((\exists x_3)x_3 =' c_0) \vee ((\exists x_4)x_3 =' x_4))\left[\frac{f_1(x_1,x_2)}{x_3}\right]$

$\underset{(i=j)}{(((\exists x_3)x_3 =' c_0)}\left[\frac{f_1(x_1,x_2)}{x_3}\right] \vee ((\exists x_4)x_3 =' x_4)\left[\frac{f_1(x_1,x_2)}{x_3}\right] = (((\exists x_3)x_3 =' c_0) \vee ((\exists x_4) f_1(x_1,x_2) =' x_4)$

n)- $f_1(c_0,x_1)$ es libre para $f_1(x_1,c_0)$ en la fórmula $((\forall x_1) f_1(x_1,c_0) =' c_0)$

Idem c).

Obs: las sustituciones siempre se realizan (cuando sea posible) por variables!

Ejercicio 6.

N	"conjunto de los números naturales"
P_1 (unario)	"ser Par"
$='$	"igualdad"
f_1 (binario)	"+"
f_2 (binario)	"*"
c_0	1
c_1	2
c_2	6

Traduzca a fórmulas de primer orden (utilizando solamente los símbolos definidos) cada uno de los siguientes enunciados:

a). Todo natural n cumple que n^2+n es par

$(\forall x_1) P_1(f_1(f_2(x_1,x_1),x_1))$

b). Para todo natural par p existe un natural x tal que $p = 2 * x$.

$(\forall x_1)(P_1(x_1) \rightarrow (\exists x_2)\, x_1 =' f_2(c_1,x_2))$

c). La suma de dos naturales impares cualesquiera es un número par

$(\forall x_1)(\forall x_2)(\neg P_1(x_1) \wedge \neg P_1(x_2) \rightarrow P_1(f_1(x_1,x_2)))$

d). Para todo natural n existe un natural x tal que $n^*(n+1)^*(n+2) = 6 * x$

$(\forall x_1)(\exists x_2)(f_2(f_2(x_1, f_1(x_1,c_0)), f_1(x_1,c_1)) =' f_2(c_2,x_2))$

e) - No hay ningún natural que sea par e impar a la vez.

$\neg(\exists x_1)(P_1(x_1) \wedge \neg P_1(x_1))$

f) - Hay un natural n que es par y que además cumple que $n+n = n * n$

$(\exists x_1)(P_1(x_1) \wedge (f_1(x_1, x_1) =' f_2(x_1, x_1)))$

g) - La suma posee un neutro, que además es único.

Neutro $(\exists x_1)(\forall x_2)(((f_1(x_1, x_2) =' x_2) \wedge (f_1(x_2, x_1) =' x_2) \wedge$

Único $(\forall x_3)((f_1(x_2, x_3) =' x_2) \wedge (f_1(x_3, x_2) =' x_2) \rightarrow (x_1 =' x_3)))$

Ejercicio 7.

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -;1,2;1\rangle$ con dos símbolos de función f_1 (unario) y f_2 (binario) y un símbolo de constante c_0.

a). Defina inductivamente el conjunto $TERM_c$ de los términos cerrados pertenecientes a dicho lenguaje.

i). $c_0 \in TERM_c$

ii). Si $t_1 \in TERM_c$ entonces $f_1(t_1) \in TERM_c$

iii). Si $t_1, t_2 \in TERM_c$ entonces $f_2(t_1, t_2) \in TERM_c$

b). Defina recursivamente la función $F: TERM_c \to \mathbb{N}$ que calcula la cantidad de ocurrencias de c_0 en un término $t \in TERM_c$

$F: TERM_c \to \mathbb{N}$

$F(c_0) = 1$

$F(f_1(t_1)) = F(t_1)$

$F(f_2(t_1, t_2)) = F(t_1) + F(t_2)$

c). Demuestre por inducción que para todo $t \in TERM_c$ se cumple que $F(t) > 0$

$(\forall t \in TERM_c)\, F(t) > 0$ Propiedad a mostrar $P(t) := F(t) > 0$

Paso base:

T). $P(c_0) = F(c_0) > 0$

Demostración:

$F(c_0) > 0$

$\overset{\text{def } F}{\Leftrightarrow}$ $1 > 0$ ✓

Paso Inductivo 1.

H) - $P(t_1) = F(t_1) > 0$

T) - $P(f_1(t_1)) = F(f_1(t_1)) > 0$

Demostración:

$F(f_1(t_1)) > 0$

$\Rightarrow$ (def F)

$F(t_1) > 0$

$\Rightarrow$ (HI)

$P(t)$

Paso Inductivo 2.

H) - $P(t_1) = F(t_1) > 0$

$P(t_2) = F(t_2) > 0$

T) - $P(f_2(t_1, t_2)) = F(t_1) + F(t_2) > 0$

Demostración.

$F(f_2(t_1, t_2))$

$\Rightarrow$ (Def F)

$F(t_1) + F(t_2)$

$\Rightarrow$ (HI)

$F(t_1) > 0$ y $F(t_2) > 0$

$\Rightarrow$ (suma de términos positivos)

$F(t_1) + F(t_2) > 0$

Entonces $F(t) > 0 \quad \forall t \in TERM_c$.

Ejercicio 9.

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $<1;-;0>$ con un símbolo de predicado P (unario). Sea $Var = \{x_1, x_2, \ldots\}$ el conjunto de variables del lenguaje y sea FORM el conjunto de fórmulas del lenguaje.

a). Defina recursivamente la función $V: FORM \to Pot(Var)$ tal que $V(\alpha)$ denota el conjunto de variables que ocurren en la fórmula α.

TERM: Conjunto de Variables libres

$F: TERM \to Pot(Var)$

$F(x_i) = \{x_i\} \quad \forall i \in \mathbb{N}$

FORM: $V: FORM \to Pot(Var)$

$V(\bot) = \phi$

$V(P(t)) = F(t)$

$V(t_1 \doteq t_2) = F(t_1) \cup F(t_2)$

$V(\alpha \square \beta) = V(\alpha) \cup V(\beta)$

$V(\neg \alpha) = V(\alpha)$

$V((\forall x_i)\alpha) = V(\alpha) \cup \{x_i\}$

$V((\exists x_i)\alpha) = V(\alpha) \cup \{x_i\}$

b). Defina recursivamente la función $FV: FORM \to Pot(Var)$ tal que $FV(\alpha)$ denota el conjunto de variables que ocurren libres en la fórmula α.

$FV: FORM \to Pot(Var)$

$FV(\bot) = \phi$

$FV(P(t)) = F(t)$

$FV(t_1 \doteq t_2) = F(t_1) \cup F(t_2)$

$FV(\alpha \square \beta) = FV(\alpha) \cup FV(\beta)$

$FV(\neg \alpha) = FV(\alpha)$

$FV((\forall x_i)\alpha) = FV(\alpha) - \{x_i\}$

$FV((\exists x_i)\alpha) = FV(\alpha) - \{x_i\}$

⊕ Por PB 1, 2 y 3, Pasos inductivos 1, 2, 3 y 4. El PIP de FORM nos asegura que $\forall \alpha \in FORM : FV(\alpha) \subseteq V(\alpha)$.

d. Demuestre por inducción que para todo $\alpha \in FORM$ se cumple que: $FV(\alpha) \subseteq V(\alpha)$

PB1. $FV(\perp) \subseteq V(\perp) \overset{\circledast}{\Leftrightarrow} \phi \subseteq \phi$

PB2. $FV(P(t)) \subseteq V(P(t)) \overset{\circledast}{\Leftrightarrow} F(t) \subseteq F(t)$

PB3. $FV(t_1 =' t_2) \subseteq V(t_1 =' t_2) \overset{\circledast}{\Leftrightarrow} F(t_1) \cup F(t_2) \subseteq F(t_1) \cup F(t_2)$

⊛. Def FV y V

PI1). H). $FV(\alpha) \subseteq V(\alpha)$ y $FV(\beta) \subseteq V(\beta)$

T). $FV((\alpha \square \beta)) \subseteq V((\alpha \square \beta))$

Dem: $FV((\alpha \square \beta)) \overset{\text{Def FV}}{=} FV(\alpha) \cup FV(\beta)$

$\overset{(HI)}{\Leftrightarrow}$

$FV(\alpha) \cup FV(\beta) \subseteq V(\alpha) \cup V(\beta)$

$\Leftrightarrow$

$FV((\alpha \square \beta)) \subseteq V(\alpha) \cup V(\beta) \underset{\text{def V}}{=} V((\alpha \square \beta))$

PI2). H). $FV(\alpha) \subseteq V(\alpha)$

T). $FV(\neg \alpha) \subseteq V(\neg \alpha)$

Dem: $FV(\neg \alpha) \overset{\text{Def FV}}{=} FV(\alpha) \overset{H)}{\subseteq} V(\alpha) \overset{\text{Def V}}{=} V(\neg \alpha) \overset{\text{transitividad}}{\Rightarrow} FV(\neg \alpha) \subseteq V(\neg \alpha)$

PI3). H). $FV(\alpha) \subseteq V(\alpha)$

T). $FV((\forall x_i)\alpha) \subseteq V((\forall x_i)\alpha)$

Dem: $FV((\forall x_i)\alpha) \overset{\text{Def FV}}{=} FV(\alpha) - \{x_i\} \subseteq FV(\alpha) \overset{H)}{\subseteq} V(\alpha) \subseteq V(\alpha) \cup \{x_i\} \overset{\text{def V}}{=} V((\forall x_i)\alpha)$

Luego (transitividad $\subseteq$) $FV((\forall x_i)\alpha) \subseteq V((\forall x_i)\alpha)$

PI4). H). $FV(\alpha) \subseteq V(\alpha)$

T). $FV((\exists x_i)\alpha) \subseteq V((\exists x_i)\alpha)$

Dem: $FV((\exists x_i)\alpha) \overset{\text{def FV}}{=} FV(\alpha) - \{x_i\} \subseteq FV(\alpha) \overset{H)}{\subseteq} V(\alpha) \subseteq V(\alpha) \cup \{x_i\} \overset{\text{def V}}{=} V((\exists x_i)\alpha)$

Luego $FV((\exists x_i)\alpha) \subseteq V((\exists x_i)\alpha)$ por transitiva de $\subseteq$

⊕

Ejercicio 10. (Examen Diciembre de 2006

Sea un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle -; 1, 2, 2; 0 \rangle$ y símbolos de función f de aridad 1, g y h de aridad 2.

Sea PROP* el conjunto de las fórmulas proposicionales que sólo emplean los conectivos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$.

1. Defina inductivamente el conjunto TERM de los términos del lenguaje

i. $x_i \in TERM$, $i \in \mathbb{N}$

ii. Si $t \in TERM$ entonces $f(t) \in TERM$

iii. Si $t_1, t_2 \in TERM$ entonces $g(t_1, t_2) \in TERM$

iv. Si $t_1, t_2 \in TERM$ entonces $h(t_1, t_2) \in TERM$

2. Defina recursivamente una función biyectiva $C: TERM \to PROP^*$ que cumpla: $C(g(x_1, x_3)) = p_1 \wedge p_3$.

$C: TERM \to PROP^*$

$C(x_i) = p_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$C(f(t)) = \neg C(t)$

$C(h(t_1, t_2)) = C(t_1) \vee C(t_2)$

$C(g(t_1, t_2)) = C(t_1) \wedge C(t_2)$

3. Define recursivamente una función $R: TERM \to TERM$ tal que para todo término t se cumpla $C(t)$ eq $C(R(t))$ y el conectivo $\vee$ no ocurre en $C(R(t))$.

$R: TERM \to TERM$

$R(x_i) = x_i, \ \forall i \in \mathbb{N}$

$R(f(t)) = f(R(t))$

$R(h(t_1, t_2)) = f(g(f(R(t)), f(R(t_1))))$

$R(g(t_1, t_2)) = g(R(t), R(t))$

$C(h(t_1, t_2)) = C(t_1) \vee C(t_2)$ eq $\neg(\neg C(t_1) \wedge \neg C(t_2))$

Ejercicio 10. (Examen Diciembre de 2006

Sea un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle -; 1,2,2; 0 \rangle$ y símbolos de función f de aridad 1, g y h de aridad 2.

Sea PROP* el conjunto de las fórmulas proposicionales que sólo emplean los conectivos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$.

1- Defina inductivamente el conjunto TERM de los términos del lenguaje

i- $x_i \in TERM$, $i \in \mathbb{N}$

ii- Si $t \in TERM$ entonces $f(t) \in TERM$

iii- Si $t_1, t_2 \in TERM$ entonces $g(t_1, t_2) \in TERM$

iv- Si $t_1, t_2 \in TERM$ entonces $h(t_1, t_2) \in TERM$

2- Defina recursivamente una función biyectiva $C: TERM \rightarrow PROP^*$ que cumpla: $C(g(x_1, x_3)) = p_1 \wedge p_3$.

$$C: TERM \longrightarrow PROP^*$$

$$C(x_i) = p_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

$$C(f(t)) = \neg C(t)$$

$$C(h(t_1,t_2)) = C(t_1) \vee C(t_2)$$

$$C(g(t_1,t_2)) = C(t_1) \wedge C(t_2)$$

3- Defina recursivamente una función $R: TERM \rightarrow TERM$ tal que para todo término t se cumpla $C(t)$ eq $C(R(t))$ y el conectivo $\vee$ no ocurre en $C(R(t))$.

$$R: TERM \rightarrow TERM$$

$$R(x_i) = x_i, \; \forall i \in \mathbb{N}$$

$$R(f(t)) = f(R(t))$$

$$R(h(t_1,t_2)) = f(g(f(R(t)), f(R(t_1))))$$

$$R(g(t_1,t_2)) = g(R(t), R(t))$$

$C(h(t_1,t_2)) = C(t_1) \vee C(t_2)$ eq $\neg(\neg C(t_1) \wedge \neg C(t_2))$