P109

1、解：由已知，得

∞-范数：$\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 1.1$

1-范数：$\|A\|_{1} = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 0.8$

2-范数：$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)} = \sqrt{\lambda_{max}(D)}$，其中 $D = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.21 \\ 0.21 & 0.10 \end{bmatrix}$

得 $\|A\|_2 = \sqrt{0.685252} = 0.8278$

3、~~解~~证明：① ∵ P为非奇异矩阵

∴ 当 $\vec{x} \ne \vec{0}$ 时，$P\vec{x} \ne \vec{0}$ ∴ $\|x\|_p > 0$，且 $\|x\|_p = 0$ 的充要条件为 $\vec{x} = \vec{0}$

② ∵ $\|\lambda x\|_p = \|P(\lambda x)\| = \|\lambda Px\| = |\lambda| \, \|Px\| = |\lambda| \, \|x\|_p$

③ ∵ $\|x+y\|_p = \|P(x+y)\| = \|Px + Py\| \le \|Px\| + \|Py\| \le \|x\|_p + \|y\|_p$

由①②③得 $\|x\|_p$ 为 R^n 上向量的一种范数

5.证明：∵ A为正交矩阵

∴ $A^TA = I$

∴ $cond(A)_2 = \sqrt{\dfrac{\lambda_{max}(A^TA)}{\lambda_{min}(A^TA)}} = \sqrt{\dfrac{1}{1}} = 1$

7、证明：由已知，得

$A_2(ij) = a_{i+1,j+1} - \dfrac{a_{i+1,1} \cdot a_{1,j+1}}{a_{11}}$

∵ A为对称矩阵

∴ 上式 $= a_{j+1,i+1} - \dfrac{a_{j+1,1} \cdot a_{1,i+1}}{a_{11}} = A_2(ji)$

∴ $A_2(ij) = A_2(ji)$

即 A_2 也为对称矩阵

12、解：矩阵A的LU分解：

$$L:\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&-1&1\end{bmatrix}\qquad U:\begin{bmatrix}1&1&1\\0&4&-1\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

矩阵B的LU分解：

$$L:\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&-5&1\end{bmatrix}\qquad U:\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-4\\0&0&-24\end{bmatrix}$$

矩阵C的LU分解：

$$L:\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}\qquad U:\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

矩阵D的LU分解：

$$L:\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\2&0&1&0\\0&0&3&1\end{bmatrix}\qquad U:\begin{bmatrix}2&1&1&2\\0&1&1&1\\0&0&2&-1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$