

第3章 线性方程组的数值方法之二

3.5 解线性方程组的迭代法

主讲：纪庆革副教授

中山大学数据科学与计算机学院

E-Mail: 1024180018@qq.com

直接法（解在理论上是准确的）：

计算时间复杂性 $O(n^3)$ ，存储量为 n^2 量级（实用范围 $n < 400$ ）

对于很大 n 的矩阵（含有大量0元素）的求解：

用直接法时就会耗费大量的时间和存储单元。

迭代法（速度快）：

构造一个等价的方程，

构造一个收敛序列，

序列的极限值就是方程组的根

对方程组 $Ax = b$ 做等价变换 $x = Gx + g$

如：令 $A = M - N$ ，则

$$Ax = b \Rightarrow (M - N)x = b \Rightarrow Mx = b + Nx \Rightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

则，我们可以构造序列 $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + g$

$$\text{若 } x^{(k)} \rightarrow x^* \Rightarrow x^* = Gx^* + g \Rightarrow Ax^* = b$$

$$\begin{aligned} \text{同时：} x^{(k+1)} - x^* &= Gx^{(k)} - Gx^* = G(x^{(k)} - x^*) \\ &= \cdots = G^{k+1}(x^{(0)} - x^*) \end{aligned}$$

所以，序列收敛 $\Leftrightarrow G^k \rightarrow 0$

与初值的选取无关

定义**3.5.1**: (收敛矩阵) $G^k \rightarrow 0$

定理: $G^k \rightarrow 0 \Leftrightarrow \rho(G) < 1$

矩阵**G**为收敛矩阵, 当且仅当**G**的谱半径 <1

由 $\rho(G) < \|G\|$ 知, 若有某种范数 $\|G\|_p < 1$, 则迭代收敛

回顾:

定义: 设 $A \in R^{n \times n}$ 的特征值为 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$,

称 $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ 为A谱半径。

3.5.1 Jacobi迭代

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1) \\ x_2 = \frac{-1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2) \\ \vdots \\ x_n = \frac{-1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1} - b_n) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{11}} (a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{22}} (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{nn}} (a_{n1}x_1^{(k)} + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} - b_n) \end{cases}$$

格式很简单：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right)$$

Jacobi迭代算法

1、输入系数矩阵A和向量b，和误差控制eps

2、 $x1=\{0,0,\dots,0\}$, $x2=\{1,1,\dots,1\}$ //赋初值

```
3、 while(  $\|A*x2-b\|>eps$  ) {  
     $x1=x2$ ;  
    for( $i=0;i<n;i++$ ) {  
         $x2[i]=0$ ;  
        for( $j=0;j<i;j++$ ) {  
             $x2[i] += A[i][j]*x1[j]$   
        }  
        for( $j=i+1;j<n;j++$ ) {  
             $x2[i] += A[i][j]*x1[j]$   
        }  
         $x2[i]=-(x2[i]-b[i])/A[i][i]$   
    }  
}
```

4、输出解x2

• 迭代矩阵

记 $A = D - L - U$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ -a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & -a_{n-1n} \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

易知，Jacobi迭代有

$$(D - L - U)x = b$$

$$Dx = (L + U)x + b$$

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

$$\therefore G = D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A \quad , \quad g = D^{-1}b$$

· 收敛条件

迭代格式收敛的充要条件是**G**的谱半径 ≤ 1 。对于**Jacobi**迭代，我们有一些保证收敛的充分条件

定理：若**A**满足下列条件之一，则**Jacobi**迭代收敛。

① **A**为行对角占优阵 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

② **A**为列对角占优阵 $|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$

③ **A**满足 $\sum_{i \neq j} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$

证明: $G = D^{-1}(L + U)$

$$\|G\|_{\infty} = \max_i \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \Leftrightarrow \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

$$\|G\|_1 = \max_i \sum_{i \neq j} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

② A 为列对角占优阵, 则 A^T 为行对角占优阵, 有

$$\rho(I - D^{-1}A^T) < 1$$

$$\therefore \rho(I - D^{-1}A) = \rho(I - D^{-1}A^T) < 1$$

证毕

3.5.2 Gauss—Seidel迭代

在Jacobi迭代中，使用最新计算出的分量值

$$\therefore \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{11}} (a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{22}} (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{nn}} (a_{n1}x_1^{(k+1)} + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} - b_n) \end{cases}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right)$$

Gauss-Siedel迭代算法:

1、输入系数矩阵A和向量b, 和误差控制eps

2、 $x_2 = \{1, 1, \dots, 1\}$ //赋初值

```
3、 while(  $\|A * x_2 - b\| > \text{eps}$ ) {  
    for(i=0; i<n; i++) {  
        for(j=0; j<i; j++) {  
             $x_2[i] += A[i][j] * x_2[j]$   
        }  
        for(j=i+1; j<n; j++) {  
             $x_2[i] += A[i][j] * x_2[j]$   
        }  
         $x_2[i] = -(x_2[i] - b[i]) / A[i][i]$   
    }  
}
```

4、输出解 x_2

• 迭代矩阵

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b)$$

$$(I - D^{-1}L)x^{(k+1)} = D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = (I - D^{-1}L)^{-1} D^{-1}Ux^{(k)} + (I - D^{-1}L)^{-1} D^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b$$

$$\therefore G = (D - L)^{-1}U, \quad g = (D - L)^{-1}b$$

$$A = (D - L) - U$$

定义3.5.2.1: 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$, 若

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

则称A为严格对角占优矩阵。

定理3.5.2.1: 若A为严格对角占优矩阵, 则J法和GS法均收敛。

定理3.5.2.2: 若A为对称正定矩阵, 则GS迭代法收敛。

证明： 设G的特征多项式为 $P_s(\lambda)$ ， 则

$$P_s(\lambda) = |\lambda I - G| = |\lambda I - (D - L)^{-1}U| = |(D - L)^{-1}| \cdot |\lambda(D - L) - U|$$

$A = D - L - U$ 为对角占优阵， 则 $|\lambda| \geq 1$ 时，

$\lambda(D - L) - U$ 为对角占优阵

$$\therefore |\lambda(D - L) - U| \neq 0 \quad \text{即} \quad P_s(\lambda) \neq 0$$

$$\therefore |\lambda| < 1 \quad \text{即} \quad \rho(G) < 1 \quad \quad \quad \# \text{证毕}$$

注： 二种方法都存在收敛性问题。

Gauss-Seidel法收敛时， **Jacobi**法可能不收敛；

而**Jacobi**法收敛时， **Gauss-Seidel**法也可能不收敛。

❖ 定义3.5.2.11: 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n} (n \geq 2)$,
若存在排列阵 P 使

$$P^T A P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中 A_{11}, A_{22} 均为阶数不等于0的方阵, 则 A 为可约矩阵, 否则为不可约矩阵。

A与排列阵相乘相当于进行行列交换，若要使得 P^TAP 中含有0，则需要原矩阵A中有元素0，
而在矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 2 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -1 \end{bmatrix}$ 与矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 2 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -1 \end{bmatrix}$ 中，不含有元素0，

所以A为不可约矩阵。

P^TA 对A进行了行变换，再乘P对 P^TA 进行了列变换。

❖ 定理3.5.2.10（对角占优定理）：若矩阵 A 严格对角占优，或者是不可约的弱对角占优矩阵，则 A 非奇异。

- ❖ 定理3.5.2.11： 待求解的线性方程组 $Ax=b$,
- (1) 若矩阵 A 严格对角占优，或者是不可约的弱对角占优矩阵，则J法和G-S法均收敛；
 - (2) 若矩阵 A 严格对角占优，或者是不可约的弱对角占优矩阵，且松弛因子 $0<\omega\leq 1$ ，则相应的SOR迭代法收敛。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \\ 9 & -1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, x^{(0)} = (0, 0, 0)'$$

1、预处理

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2、格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{9}(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 7) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}(x_1^{(k+1)} + 7) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{9}(x_1^{(k+1)} + 8) \end{cases}$$

3、结果

$$x^{(1)} = (0.7778, 0.9722, 0.9753)'$$

$$x^{(2)} = (0.9942, 0.9993, 0.9994)'$$

$$x^{(3)} = (0.9999, 0.9999, 0.9999)'$$

$$x^{(4)} = (1.0000, 1.0000, 1.0000)'$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1、Jacobi迭代

$$B = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

特征值为 $|\lambda I - B| = \lambda^3 + \frac{5}{4}\lambda = 0$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}i \quad \text{发散}$$

2、Gauss—Siedel迭代

$$B = (D - L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \quad \text{收敛}$$

3.5.3 松弛迭代

逐次超松弛迭代法（**successive over relation method**,简称**SOR**方法）是高斯赛德尔方法的一种加速方法，是解大型稀疏矩阵方程组的有效方法之一。

记 $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$

则 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$

可以看作在前一步上加一个修正量。若在修正量前乘以一个因子 ω ，有

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega \Delta x^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(x^{(k+1)} - x^{(k)})$$

对**Gauss—Seidel**迭代格式 $x^{(k+1)} = D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b)$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(D^{-1}Lx^{(k+1)} + D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b - x^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega(D^{-1}Lx^{(k+1)} + D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b)$$

写成分量形式，有

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega \frac{-1}{a_{11}} (a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} - \frac{\omega}{a_{22}} (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = (1-\omega)x_n^{(k)} + \omega \frac{-1}{a_{nn}} (a_{n1}x_1^{(k+1)} + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} - b_n) \end{cases}$$

松弛迭代算法

1、输入系数矩阵A、向量b和松弛因子omega，和误差控制eps

2、 $x2=\{1,1,\dots,1\}$ //赋初值

```
3、while(  $\|A*x2-b\|>eps$  ) {  
    for(i=0;i<n;i++) {  
        temp=0  
        for(j=0;j<i;j++) {  
            temp += A[i][j]*x2[j]  
        }  
        for(j=i+1;j<n;j++) {  
            temp += A[i][j]*x2[j]  
        }  
        temp = -(x2[i]-b[i])/A[i][i]  
        x2[i] = (1-omega)*x2[i]+omega*temp  
    }  
}
```

4、输出解x2

• 迭代矩阵

$$x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega(D^{-1}Lx^{(k+1)} + D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b)$$

$$(I - \omega D^{-1}L)x^{(k+1)} = ((1-\omega)I + \omega D^{-1}U)x^{(k)} + \omega D^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = (I - \omega D^{-1}L)^{-1}((1-\omega)I + \omega D^{-1}U)x^{(k)} + \omega(I - \omega D^{-1}L)^{-1}D^{-1}b$$

$$\therefore G = (I - \omega D^{-1}L)^{-1}((1-\omega)I + \omega D^{-1}U)$$

$$g = \omega(I - \omega D^{-1}L)^{-1}D^{-1}b$$

定理： 设 $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$, 且松弛迭代法收敛，则 $0 < \omega < 2$

定理： 设 **A** 对称正定，且 $0 < \omega < 2$ ，则松弛迭代法收敛

SOR方法收敛的快慢与松弛因子 ω 的选择有密切关系.

如何选取最佳松弛因子,即选取 $\omega=\omega^*$,使 G 的谱半径 $\rho(G)$ 达到最小,是一个尚未很好解决的问题.

实际上可采用试算的方法来确定较好的松弛因子.经验上可取 $1.4<\omega<1.6$.

当 $\omega=1$ 时, SOR迭代法就是Gauss-Seidel迭代法;
当 $0<\omega<1$ 时, SOR迭代法被称为低松弛法;
当 $1<\omega<2$ 时, SOR迭代法被称为超迭代法, 能够加速收敛速度。

注1: 不管是超迭代还是低松弛, 通常统称超松弛。

注2: 计算公式简单, 程序设计容易, 占用计算机内存较少; 但需要较好的加速因子。

定理： 设 $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$, 且松弛迭代法收敛, 则 $0 < \omega < 2$

证 设SOR方法收敛, 根据迭代法的充要条件,

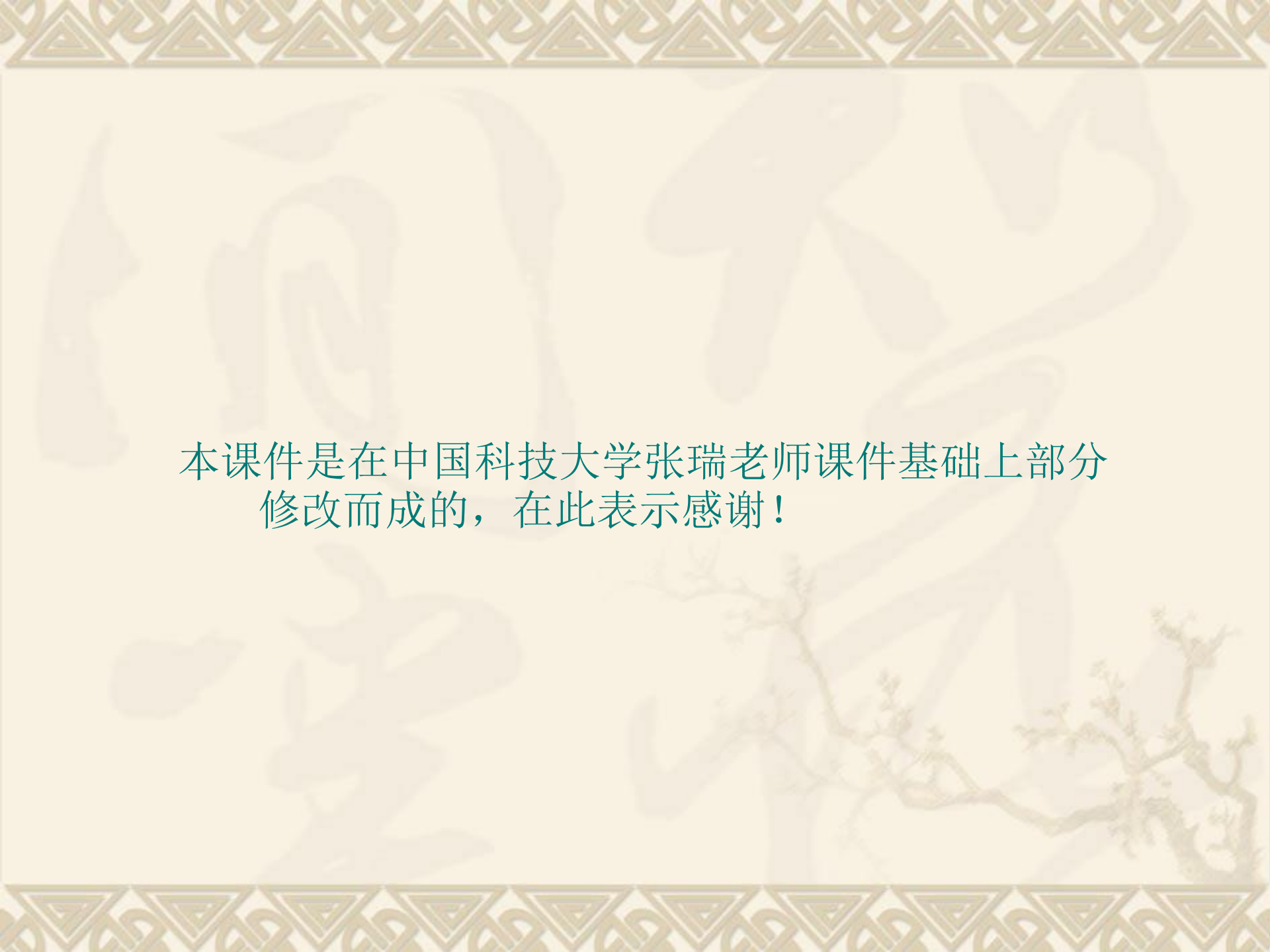
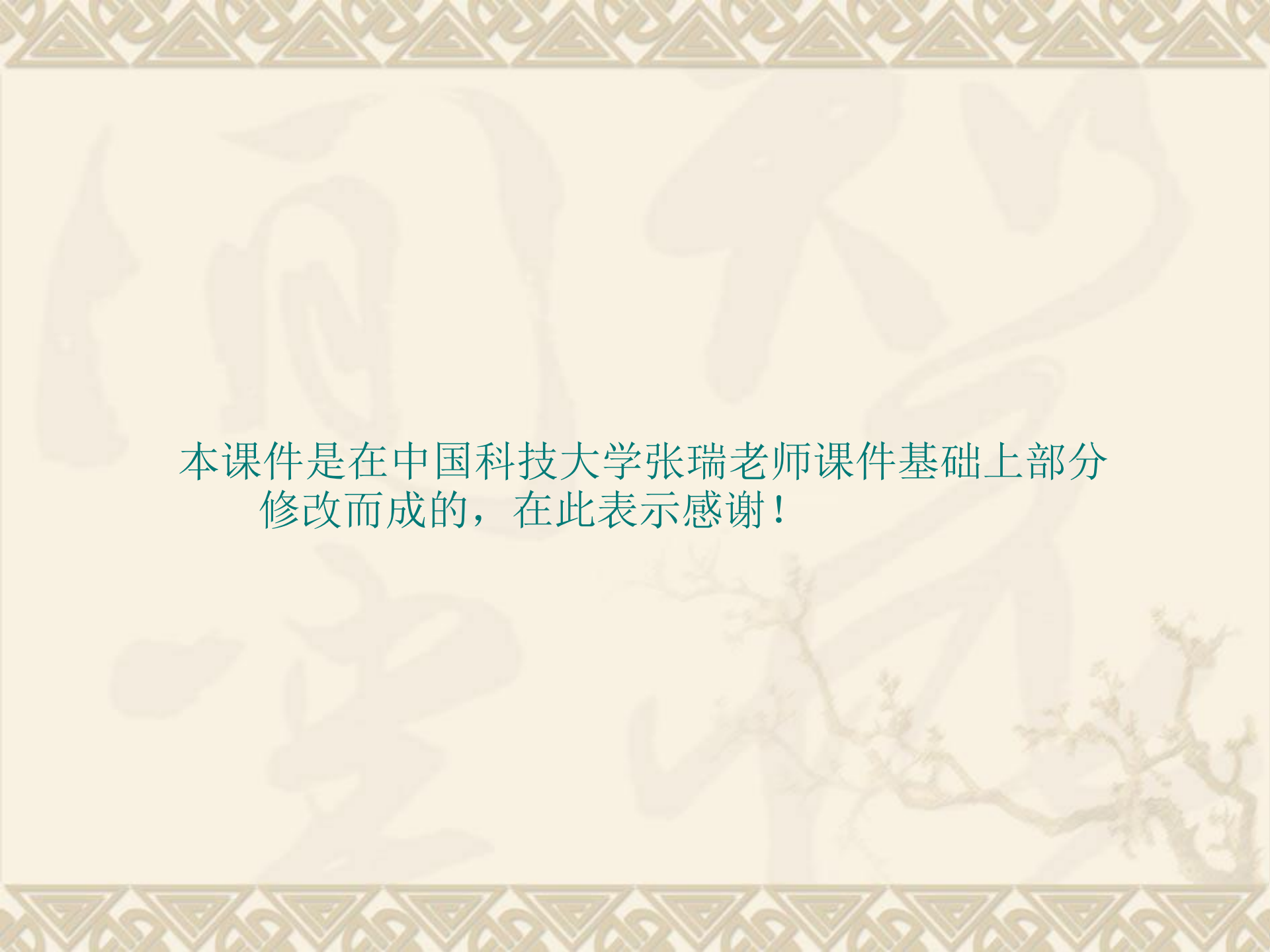

$\rho(G) < 1$, 所以 $|\det(G)| = |\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n| < 1$

$$\begin{aligned}\text{而 } \det(G) &= \det[(D - \omega L)^{-1} ((1 - \omega)D + \omega U)] \\ &= \det[(E - \omega D^{-1}L)^{-1}] \det[(1 - \omega)E + \omega D^{-1}U] \\ &= \det D^{-1} \det[(1 - \omega)D] \\ &= \frac{1}{a_{11}} \cdot \frac{1}{a_{22}} \cdots \frac{1}{a_{nn}} \cdot (1 - \omega)^n a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \\ &= (1 - \omega)^n\end{aligned}$$

于是 $|1 - \omega| < 1$, 或 $0 < \omega < 2$

定理 设 A 是对称正定矩阵, 则解方程组 $Ax=b$ 的
*SOR*方法, 当 $0<\omega<2$ 时收敛.

Thanks!



本课件是在中国科技大学张瑞老师课件基础上部分
修改而成的，在此表示感谢！

