第5章　离散时间傅立叶变换

本章主要内容：

- 离散时间傅立叶变换
- 常用信号的离散时间傅立叶变换对。
- 离散时间周期信号的傅立叶变换。
- 傅立叶变换的性质。
- 系统的频率响应与系统的频域分析方法。

❖注释：

CFS (The Continuous-Time Fourier Series):

连续时间傅立叶级数

DFS (The Discrete-Time Fourier Series):

离散时间傅立叶级数

CTFT (The Continuous-Time Fourier Transform):

连续时间傅立叶变换

DTFT (The Discrete-Time Fourier Transform):

离散时间傅立叶变换

5.0 引言 Introduction

- 本章将采用与讨论CTFT完全相同的思想方法，来研究离散时间非周期信号的频域分解问题。
- DFS与CFS之间既有许多类似之处，也有一些重大差别：主要是DFS是一个有限项级数，其系数 a_k 具有周期性。

- ❖ 在采用相同方法研究如何从 DFS 引出离散时间非周期信号的频域描述时，可以看到，DTFT与CTFT既有许多相类似的地方，也同时存在一些重要的区别。

- ❖ 抓住它们之间的相似之处并关注其差别，对于掌握和加深对频域分析方法的理解具有重要意义。

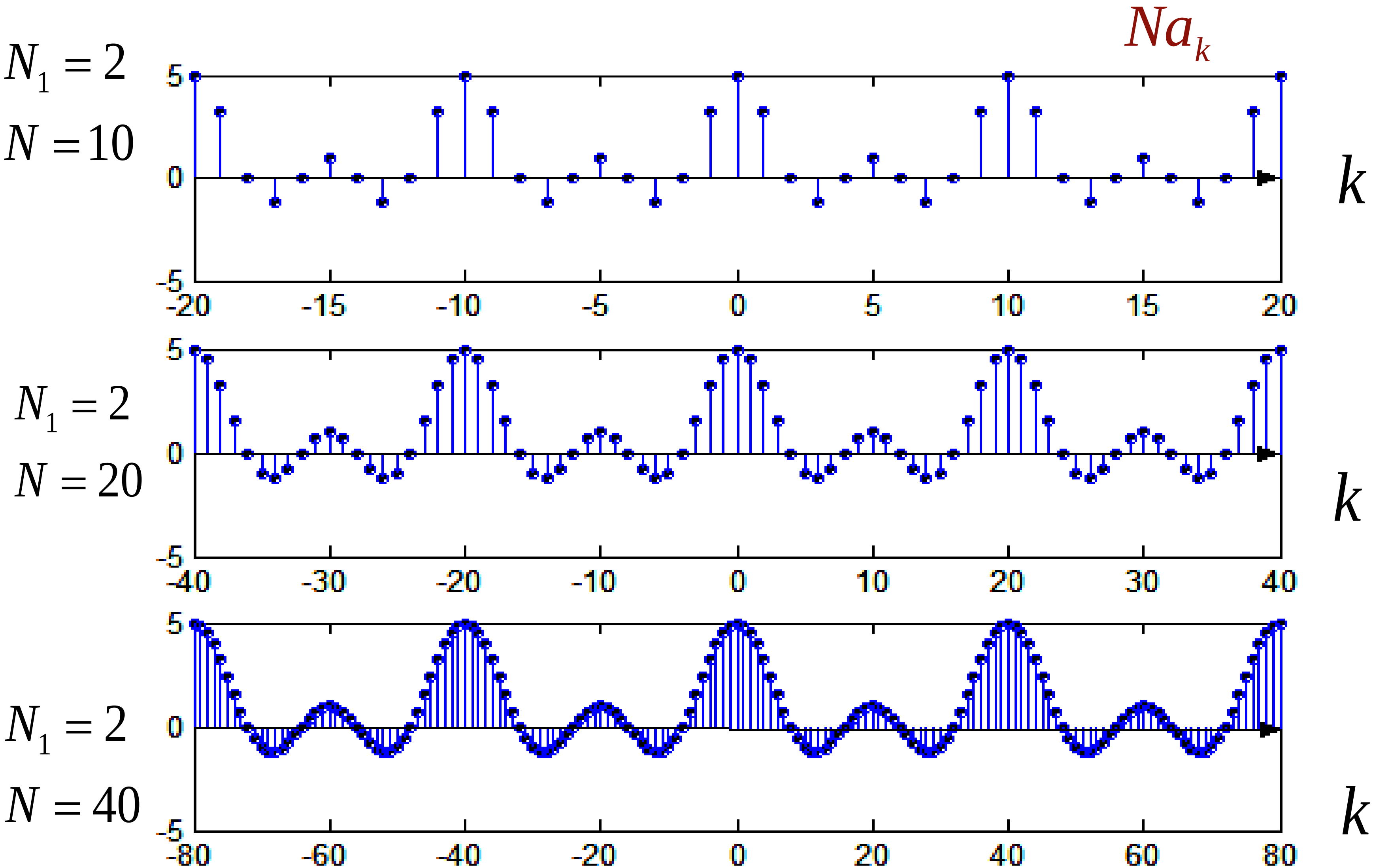
5.1 非周期信号的表示

Representation of Aperiodic Signals: The Discrete-time Fourier Thransform

一. 从DFS到DTFT:

在讨论离散时间周期性矩形脉冲信号的频谱时，我们看到：

当信号周期 N 增大时，频谱的包络形状不变，幅度减小，而频谱的谱线变密。

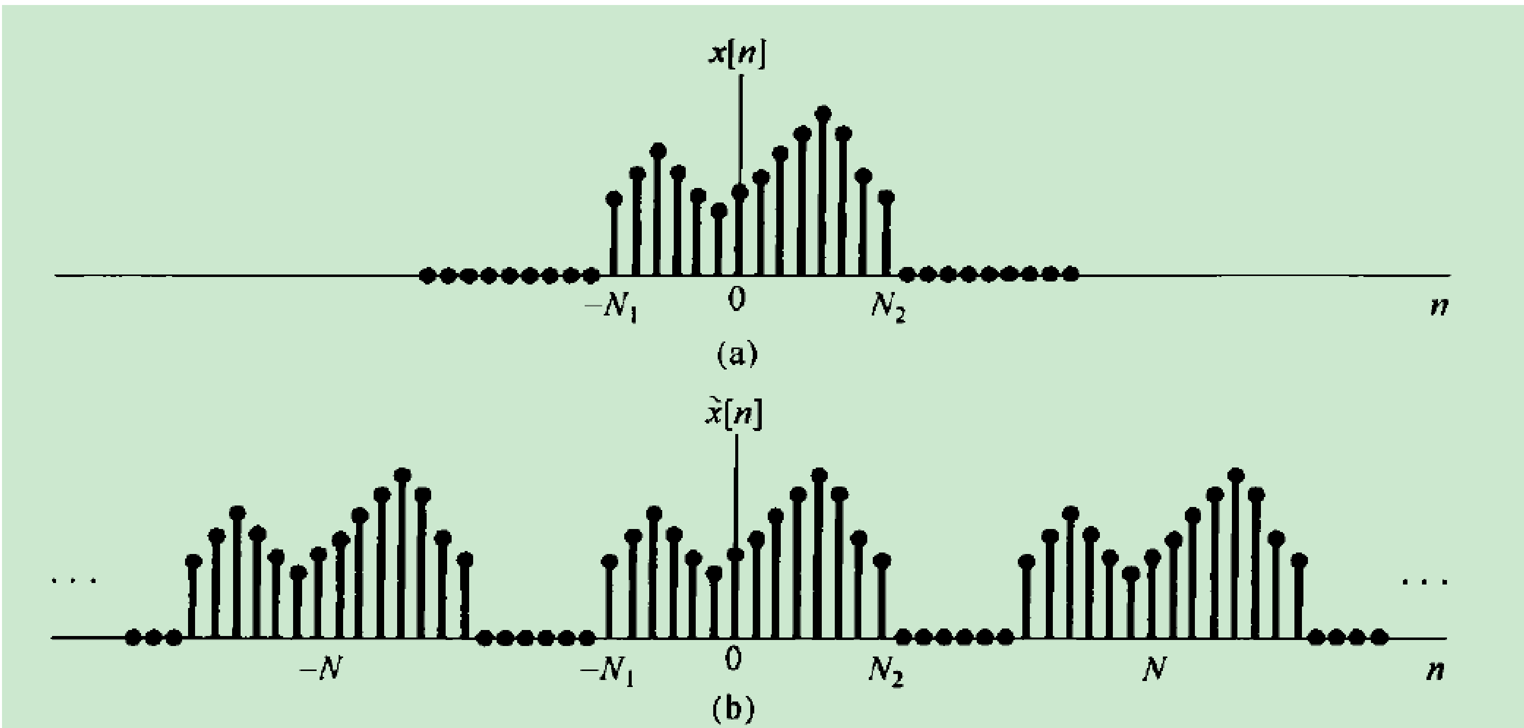


Na_k
$N_1 = 2$
$N = 10$
$N_1 = 2$
$N = 20$
$N_1 = 2$
$N = 40$
k
k
k

当$N \to \infty$时，有 $\omega_0 = (2\pi / N) \to 0$ ，将导致信号的频谱无限密集，最终成为连续频谱。

从时域看，当周期信号的周期 $N \to \infty$ 时，周期序列就变成了一个非周期的序列。

因此，可以预见，对一个非周期信号，它的频谱应该是一个连续的频谱。



$x[n]$
$-N_1$
0
N_2
n
(a)
$\tilde{x}[n]$
$-N$
$-N_1$
0
N_2
N
n
(b)

对周期信号$\tilde{x}(n)$由DFS有

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

即

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N/2}^{N/2} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

当 $N \to \infty$ 时，$\frac{2\pi}{N}k \to \omega$

有：$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$ —— **DTFT**

说明: 显然 $X(e^{j\omega})$ 对 ω 是以 2π 为周期的。

Discrete-Time Fourier Transform

- The DTFT $X(e^{j\omega})$ of a sequence $x[n]$ is a continuous function of ω
- It is also a periodic function of ω with a period 2π:

$$X(e^{j(\omega_o+2\pi k)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega_o+2\pi k)n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega_o n}e^{-j2\pi kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega_o n} = X(e^{j\omega_o})$$

将其与 a_k 表达式比较有

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}}$$

于是：$\tilde{x}[n] = \dfrac{1}{N} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) \cdot e^{jk\omega_0 n}, \qquad \omega_0 = \dfrac{2\pi}{N}$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) \cdot e^{jk\omega_0 n} \cdot \omega_0$$

当 $N \to \infty$时，$\tilde{x}[n] \to x[n], \quad k\omega_0 \to \omega, \quad \omega_0 \to d\omega, \quad \sum \to \int,$

当 k 在一个周期范围内变化时，$k\omega_0$ 在 2π 范围变化，所以积分区间是 2π。

$$\therefore x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

表明:离散时间序列可以分解为频率在2π区间上分布的、幅度为 $\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})d\omega$ **的复指数分量的线性组合。**

结论:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

DTFT对

二. 常用信号的离散时间傅立叶变换

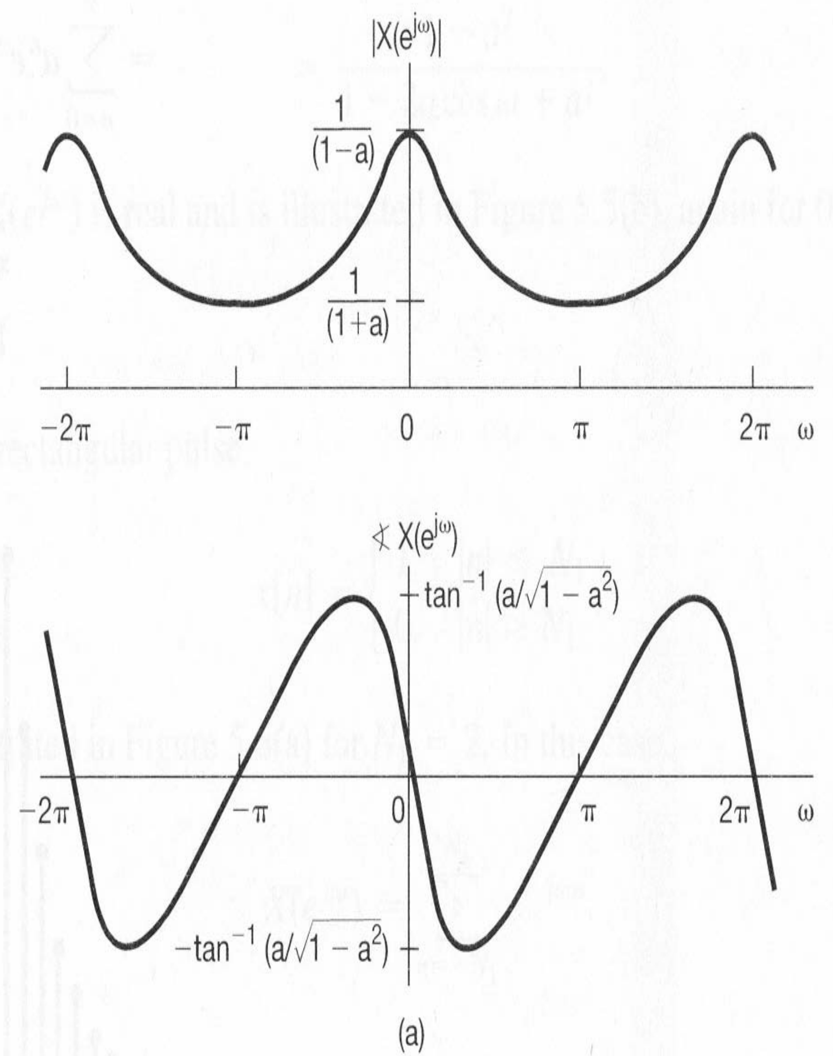
1. $x[n] = a^n u(n), \quad |a| < 1$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

通常$X(e^{j\omega})$是复函数，用它的模和相位表示：

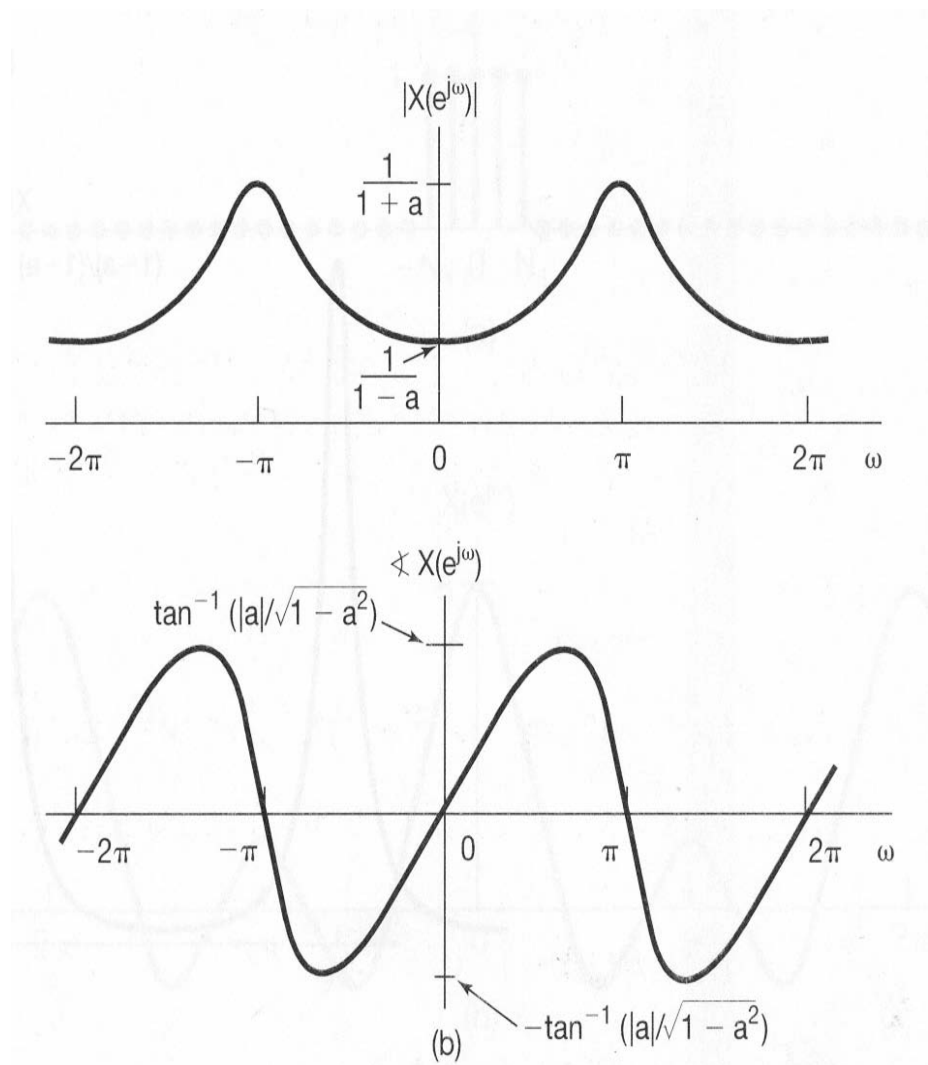
$$\left| X(e^{j\omega}) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}}$$

$$\mathrm{R}X(e^{j\omega}) = -\mathrm{tg}^{-1} \frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}$$



$|X(e^{j\omega})|$
$\frac{1}{(1-a)}$
$\frac{1}{(1+a)}$
-2π $-\pi$ 0 π 2π ω
$\sphericalangle X(e^{j\omega})$
$\tan^{-1}(a/\sqrt{1-a^2})$
$-\tan^{-1}(a/\sqrt{1-a^2})$
-2π $-\pi$ 0 π 2π ω
(a)

$0 < a < 1$



$|X(e^{j\omega})|$
$\frac{1}{1+a}$
$\frac{1}{1-a}$
-2π $-\pi$ 0 π 2π ω
$\sphericalangle X(e^{j\omega})$
$\tan^{-1}(|a|/\sqrt{1-a^2})$
$-\tan^{-1}(|a|/\sqrt{1-a^2})$
-2π $-\pi$ 0 π 2π ω
(b)

$-1 < a < 0$

由图可以得到：

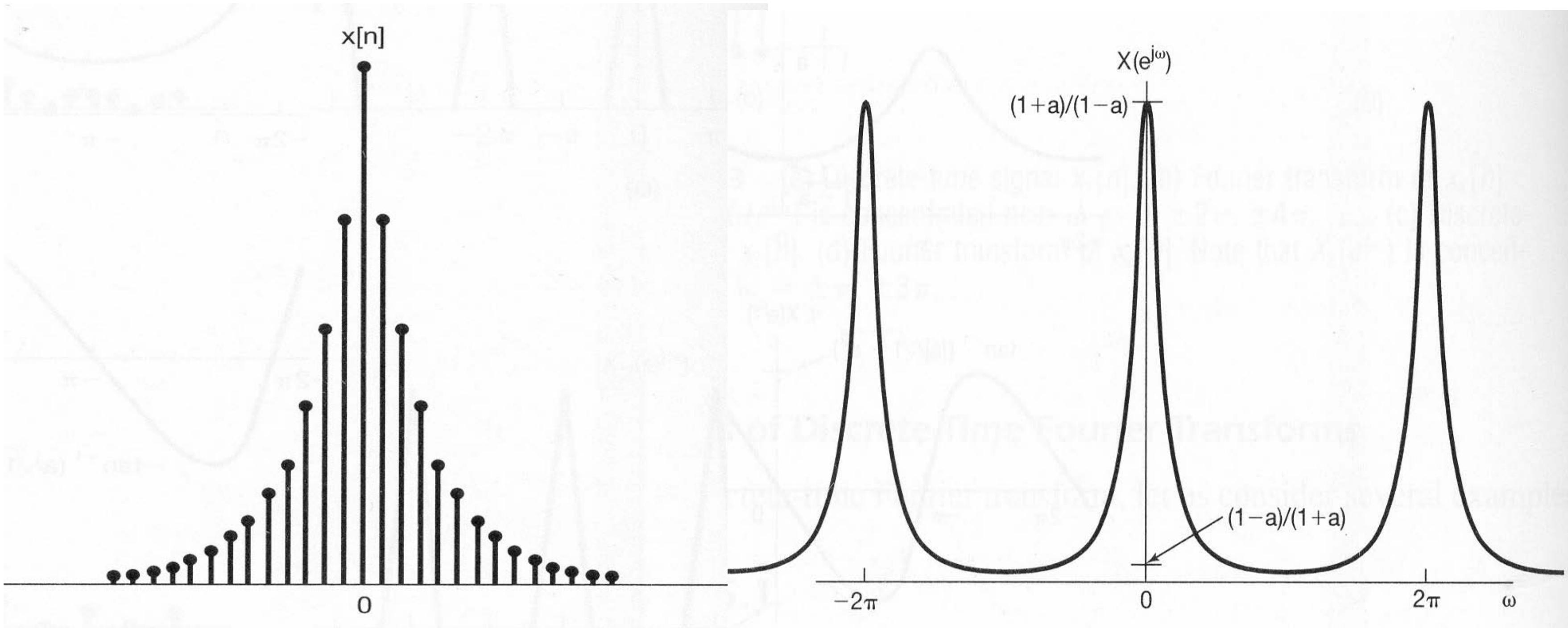
$0 < a < 1$ 时，低频特性， $x[n]$ 单调指数衰减

$-1 < a < 0$ 时，高频特性， $x[n]$ 摆动指数衰减

2. $x[n] = a^{|n|}, \quad |a| < 1$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n} e^{j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}} + \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\omega}$$



(a) (b)

可以得出结论:实偶序列 ⟷ 实偶函数

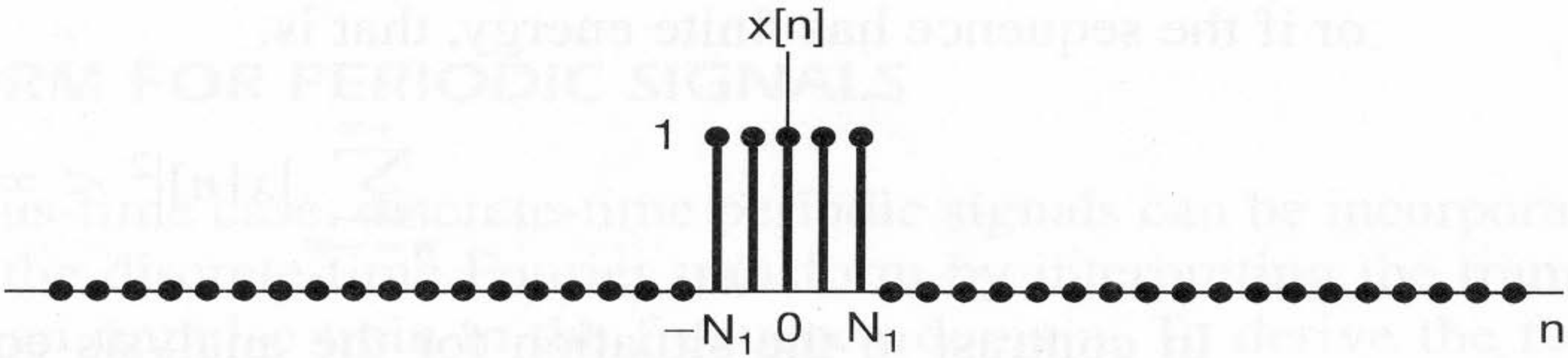
3.矩形脉冲:

$$x[n]=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases}$$

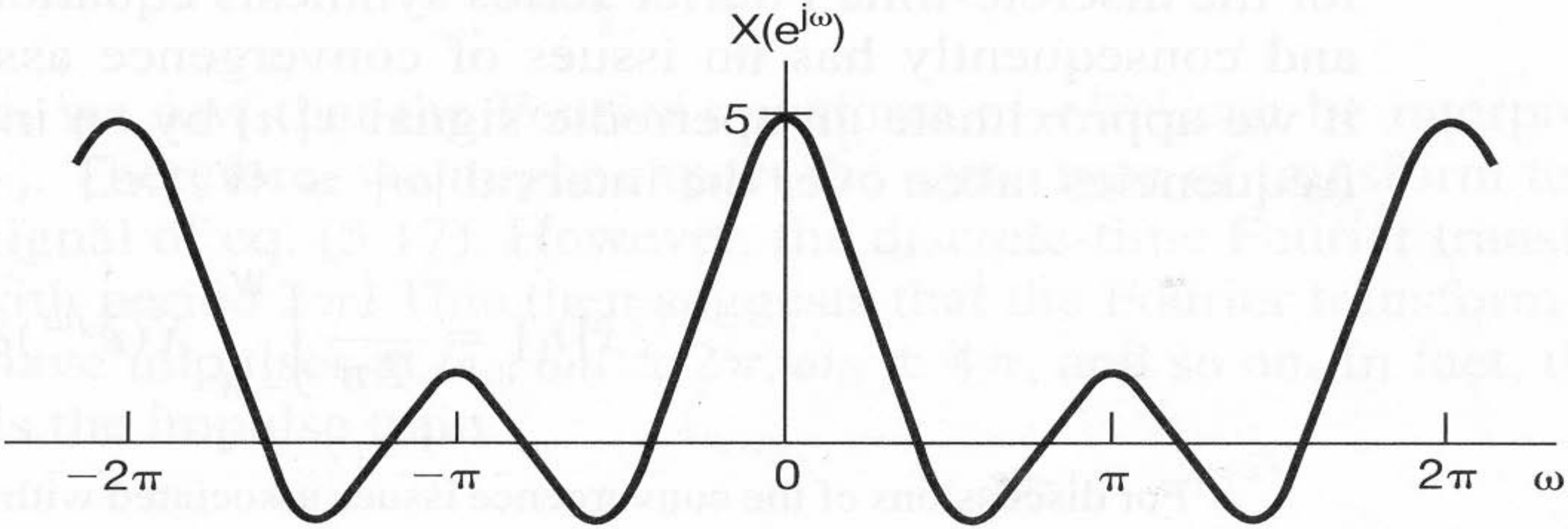
$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-N_1}^{N_1}e^{-j\omega n}=\frac{\sin(2N_1+1)\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

有同样的结论:实偶信号$\longleftrightarrow$实偶函数

当 $N_1=2$ 时,可得到:



(a)



(b)

两点比较:

1. 与对应的周期信号比较

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin(2N_1+1)\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

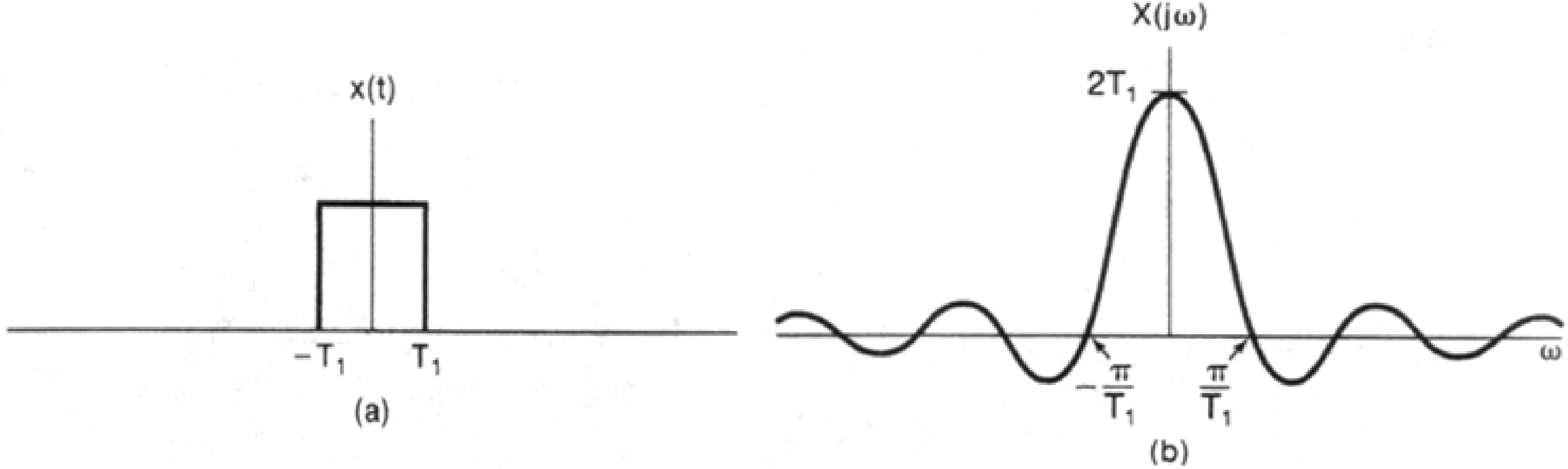
$$a_k = \frac{1}{N}\frac{\sin\frac{\pi}{N}k(2N_1+1)}{\sin\frac{\pi}{N}k},$$ 显然有

$$a_k = \frac{1}{N}X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$ 关系成立

2. 与对应的连续时间信号比较

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1 \\ 0, & |t|>T_1\end{cases} \qquad X(j\omega)=\frac{2T_1\sin\omega T_1}{\omega T_1}$$

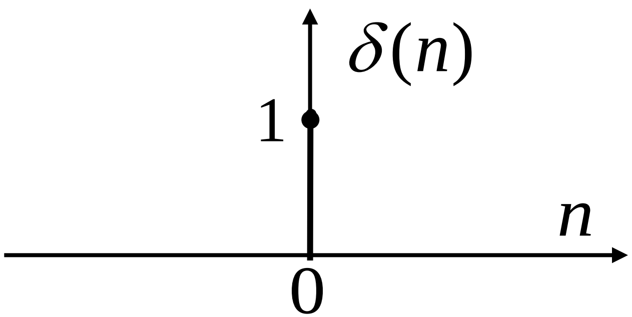
如图所示:

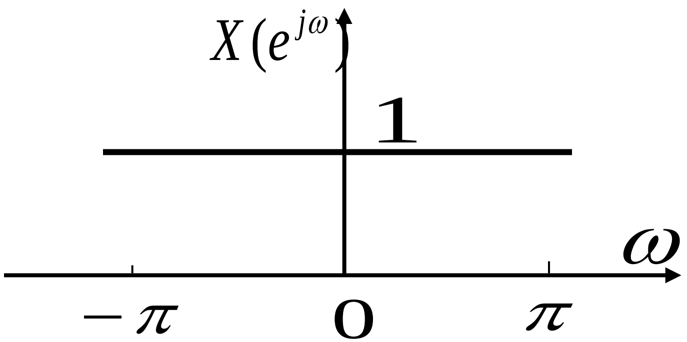


4. $x[n] = \delta[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = 1$$

如图所示：





三. DTFT的收敛问题

当$x[n]$是无限长序列时，由于$X(e^{j\omega})$的表达式是无穷项级数，当然会存在收敛问题。

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|^2<\infty$, 则级数以均方误差最小的准则收敛于$X(e^{j\omega})$。

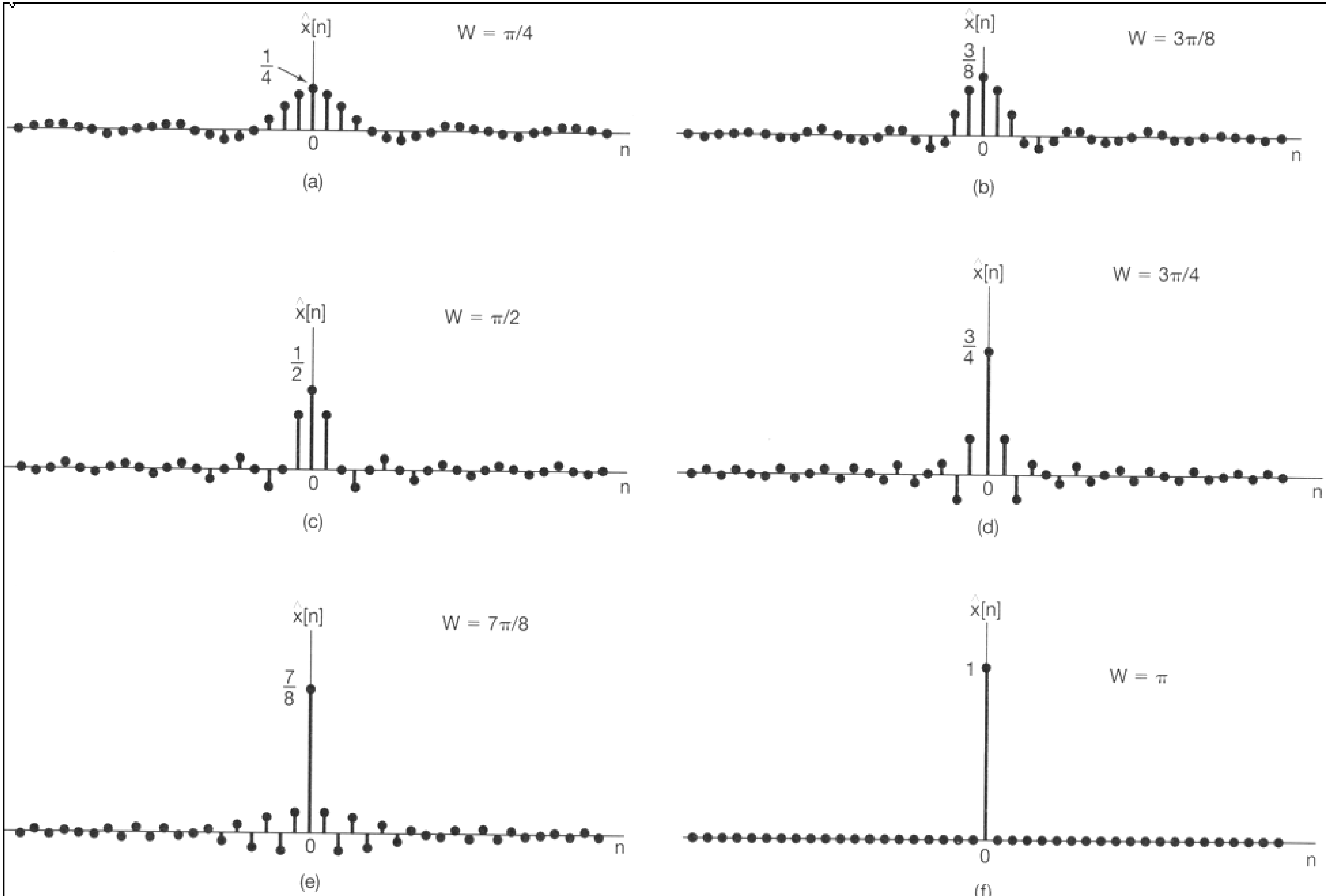
2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|<\infty$, 则 $X(e^{j\omega})$存在，且级数一致收敛于$X(e^{j\omega})$ 。

$$x[n] = \delta[n]$$

$$X(e^{j\omega}) = 1$$

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$$

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$



$\hat{x}[n]$
$W = \pi/4$
$\frac{1}{4}$
0
n
(a)
$\hat{x}[n]$
$W = 3\pi/8$
$\frac{3}{8}$
0
n
(b)
$\hat{x}[n]$
$W = \pi/2$
$\frac{1}{2}$
0
n
(c)
$\hat{x}[n]$
$W = 3\pi/4$
$\frac{3}{4}$
0
n
(d)
$\hat{x}[n]$
$W = 7\pi/8$
$\frac{7}{8}$
0
n
(e)
$\hat{x}[n]$
1
$W = \pi$
0
n
(f)

由图可以得到以下结论：

❖当以部分复指数分量之和近似信号时，也会出现起伏和振荡；

❖但随着 $W\uparrow,\ \tilde{x}(n)$ 的振荡频率变高，起伏的幅度趋小；

❖当 $W=\pi$ 时，振荡与起伏将完全消失，不会出现吉伯斯(**Gibbs**)现象，也不存在收敛问题。

5.2 周期信号的DTFT

The Fourier Transform for Periodic Signals

对连续时间信号，有 $2\pi\delta(\omega-\omega_0)\leftrightarrow e^{j\omega_0 t}$，由此推断，对离散时间信号或许有相似的情况。但由于DTFT一定是以 2π 为周期的，因此，频域的冲激应该是周期性的冲激串，即

$$X\left(e^{jwn}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi k$$

对其做反变换有：

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\int_0^{2\pi}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega n}d\omega=e^{j\omega_0 n}$$

可见, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) \leftrightarrow e^{j\omega_0 n}$

由DFS有 $\tilde{x}[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n},\quad \omega_0=\frac{2\pi}{N}$

因此，周期信号 $\tilde{x}[n]$ 可用DTFT表示为

$$\tilde{x}[n]\leftrightarrow X(e^{j\omega})=\sum_{k=<N>} a_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-k\omega_0-2\pi l)$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=<N>} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k - 2\pi l)$$

$$= \square + \sum_{k=<N>} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k) + \sum_{k=<N>} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k - 2\pi)$$

$$+ \sum_{k=<N>} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k - 4\pi) + \square$$

$$= \square + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k) + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta\left[\omega - \frac{2\pi}{N}(k+N)\right]$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta\left[\omega - \frac{2\pi}{N}(k+2N)\right] + \square$$

$$= \cdots + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) + \sum_{k=N}^{2N-1} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

$$+ \sum_{k=2N}^{3N-1} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) + \cdots$$

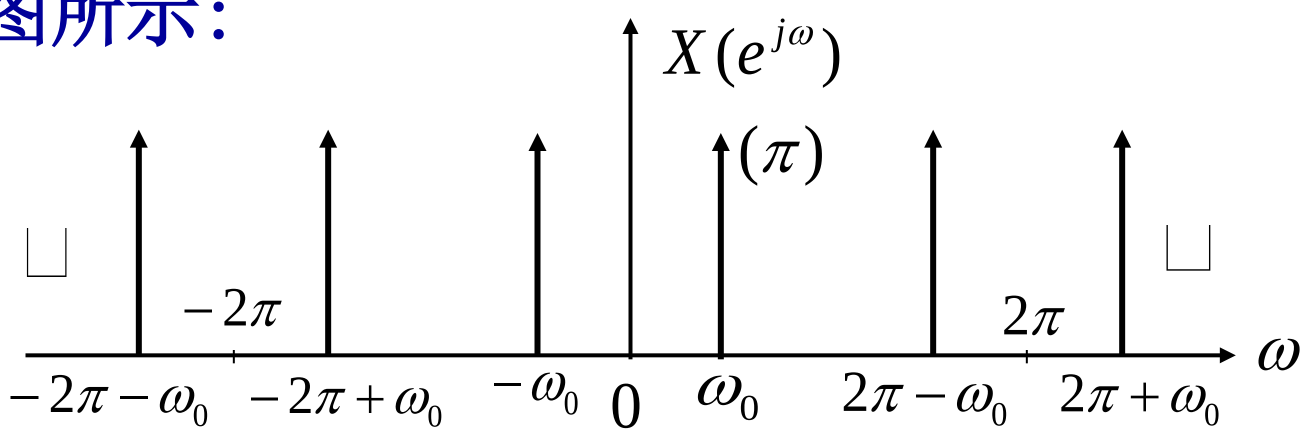
$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

比较：可以看出与连续时间傅立叶变换中相应的形式是完全一致的。

例1. $x[n]=\cos\omega_0 n=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n})$, 它不一定是周期的。 当 $\omega_0=\frac{2\pi}{N}k$ 时才具有周期性。

$$X(e^{j\omega})=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi k)\right]$$

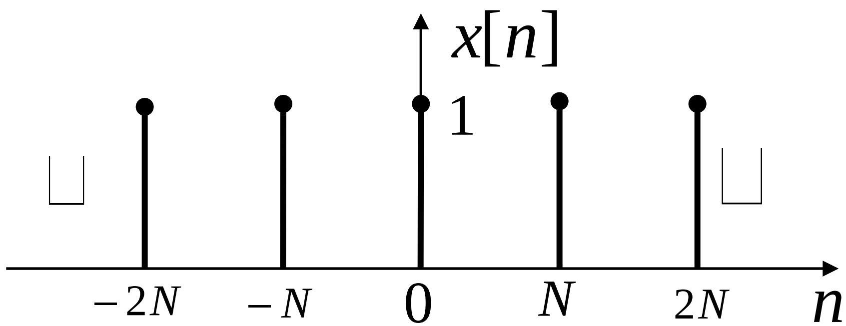
如图所示:

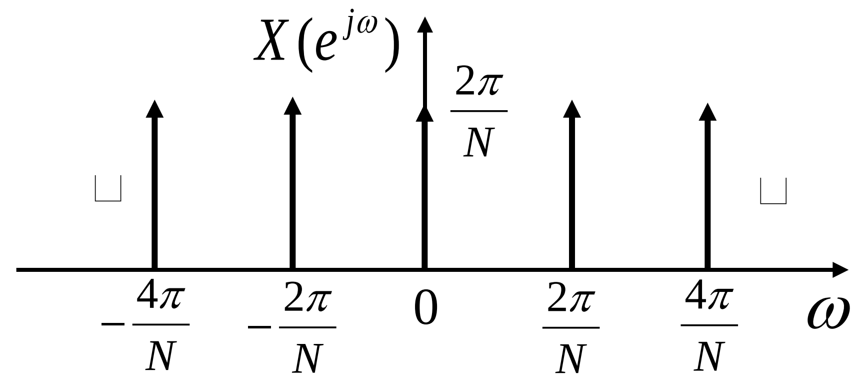


例2. $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)$ ——— 均匀脉冲串

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x(n)e^{-jk\omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n)e^{-jk\omega_0 n}=\frac{1}{N}$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$





比较:与连续时间情况下对应的相一致。

5.3 离散时间傅立叶变换的性质

Properties of the Discrete-Time Fourier Transform

DTFT也有很多与CTFT类似的性质，当然也有某些明显的差别。

通过对DTFT性质的讨论，目的在于揭示信号时域和频域特性之间的关系。

一、周期性 (periodic):

若 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$， 则 $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$

比较：这是与CTFT不同的。

二. 线性 (linearity):

$$a x_1[n] + b x_2[n] \leftrightarrow a X_1(e^{j\omega}) + b X_2(e^{j\omega})$$

三. 时移与频移 (shifiting):

若 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则

$$x[n-n_0] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n_0}$$ ——时移特性

$$x[n] e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$ ——频移特性

四. 时域反转 (reflaction):

若 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则 $x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

五. 共轭对称性 (symmetry properties):

若 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则 $x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$

由此可进一步得到以下结论：

1. 若 $x[n]$ 是实信号，则 $x^*[n] = x[n]$

$\therefore X^*(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})$, 即 $X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$

$$\therefore \begin{cases} \left|X(e^{j\omega})\right| = \left|X(e^{-j\omega})\right| \\ \mathrm{R}X(e^{j\omega}) = -\mathrm{R}X(e^{-j\omega}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right] = \mathrm{Re}\left[X(e^{-j\omega})\right] \\ \mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right] = -\mathrm{Im}\left[X(e^{-j\omega})\right] \end{cases}$$

2. 若 $x[n]$ 是实偶信号，则 $x[n]=x[-n]$,

$$x^*[n]=x[n] \quad Q\; x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

于是有： $X(e^{j\omega})=X(e^{-j\omega})=X^*(e^{j\omega})$,

即 $X(e^{j\omega})$ 是实偶函数。

3. 若 $x[n]$ 是实奇信号， $x[n]=-x[-n]$, $x^*[n]=x[n]$

于是有：$X(e^{j\omega})=-X(e^{-j\omega})=-X^*(e^{j\omega})$,

表明 $X(e^{j\omega})$ 是虚奇函数。

4. 若 $x[n]=x_e[n]+x_o[n]$, 则有:

$$x_e(n)\leftrightarrow \mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right] \qquad x_o(n)\leftrightarrow j\,\mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]$$

说明:这些结论与连续时间情况下完全一致。

六. 差分与求和 (Differencing and Accumulation):

$$x[n]-x[n-1]\leftrightarrow (1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)\leftrightarrow \frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}}+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

说明:在DTFT中 $(1-e^{-j\omega})$ 对应于CTFT中的 $j\omega$ 。

例：Q $u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$ $\qquad \delta[n]\leftrightarrow 1$

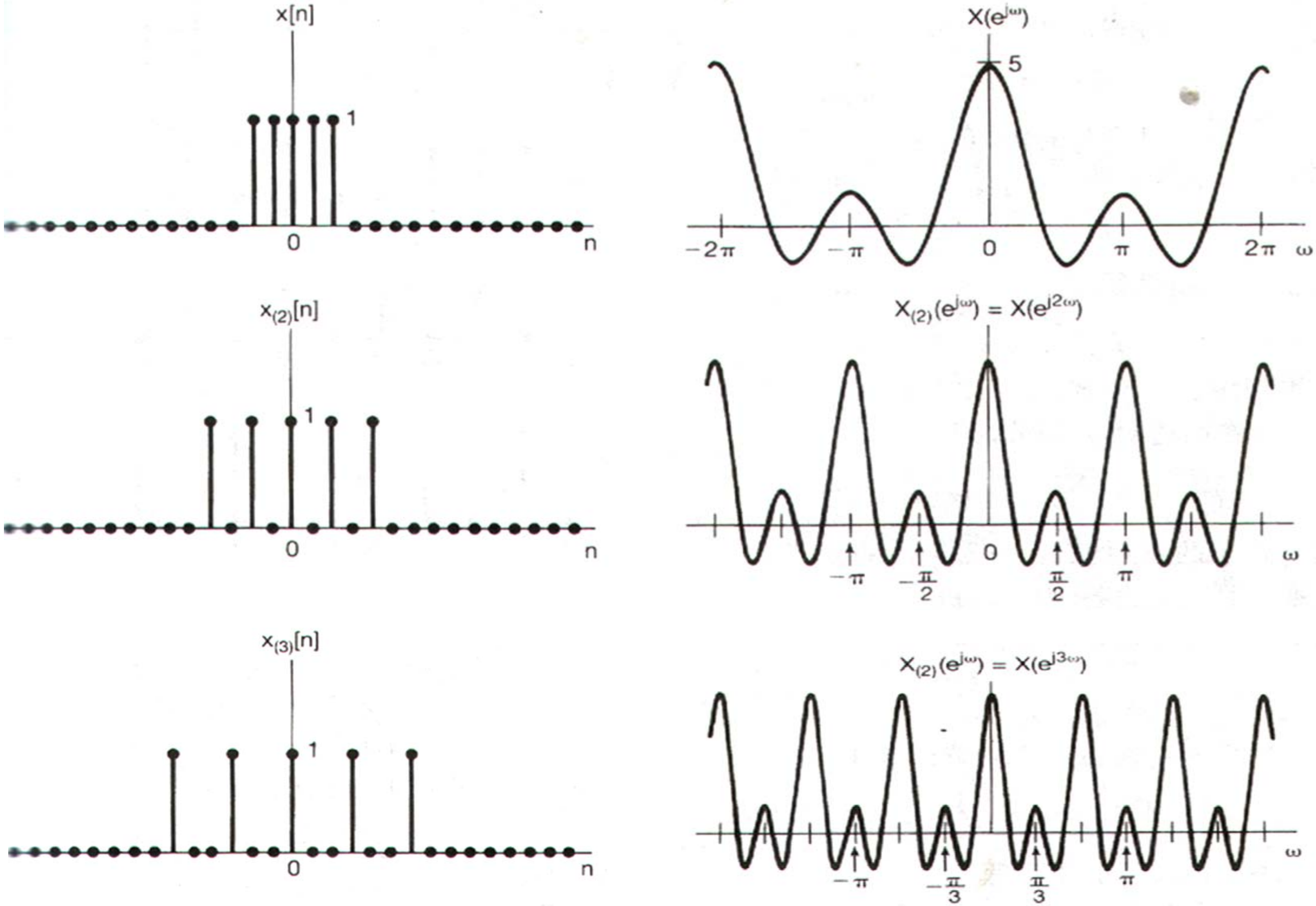
$$\therefore u[n]\leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

七. 时域扩展 (Interplation):

定义 $x_k[n]=\begin{cases} x[n/k], & n \text{ 为 } k \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$

$$X_k(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_k[n]e^{-j\omega n}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_k[rk]e^{-j\omega rk}$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[r]e^{-j\omega rk}=X(e^{jk\omega}) \qquad \therefore x_k[n]\leftrightarrow X(e^{jk\omega})$$



信号的时域与频域特性之间有一种相反的关系。

八. 频域微分(Differention in Frequency):

$$nx[n] \leftrightarrow j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

九. Parseval定理:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$|X(e^{j\omega})|^2$称为 $x[n]$ 的能量谱密度函数。

比较:在DFS中有 $\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x[n]|^2 = \sum_{k=<N>}|a_k|^2$

$|a_k|^2$称为周期信号的功率谱。

5.4 卷积特性(The Convolution Property)

若 $y[n] = x[n] * h[n]$,

则 $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$,

$H(e^{j\omega})$ 即是系统的频率特性。

说明：该特性提供了对LTI系统进行频域分析的理论基础。

例:求和特性的证明

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = x(n) * u(n)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \cdot U(e^{j\omega})$$

$$= X(e^{j\omega}) \cdot \left[\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \right]$$

$$= \frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

5.5 相乘性质（The Multiplication Property)

如果 $y[n]=x_1[n]\cdot x_2[n],$

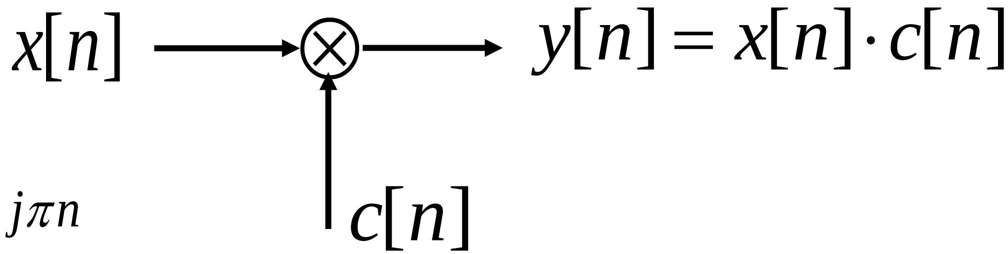
则 $Y(e^{j\omega})=\dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

$$=\frac{1}{2\pi}X_1(e^{j\omega})*X_2(e^{j\omega})$$

由于 $X_1(e^{j\omega})$和 $X_2(e^{j\omega})$ 都是以 2π 为周期的，

因此上述卷积称为周期卷积。

例：$c[n]=(-1)^n,$



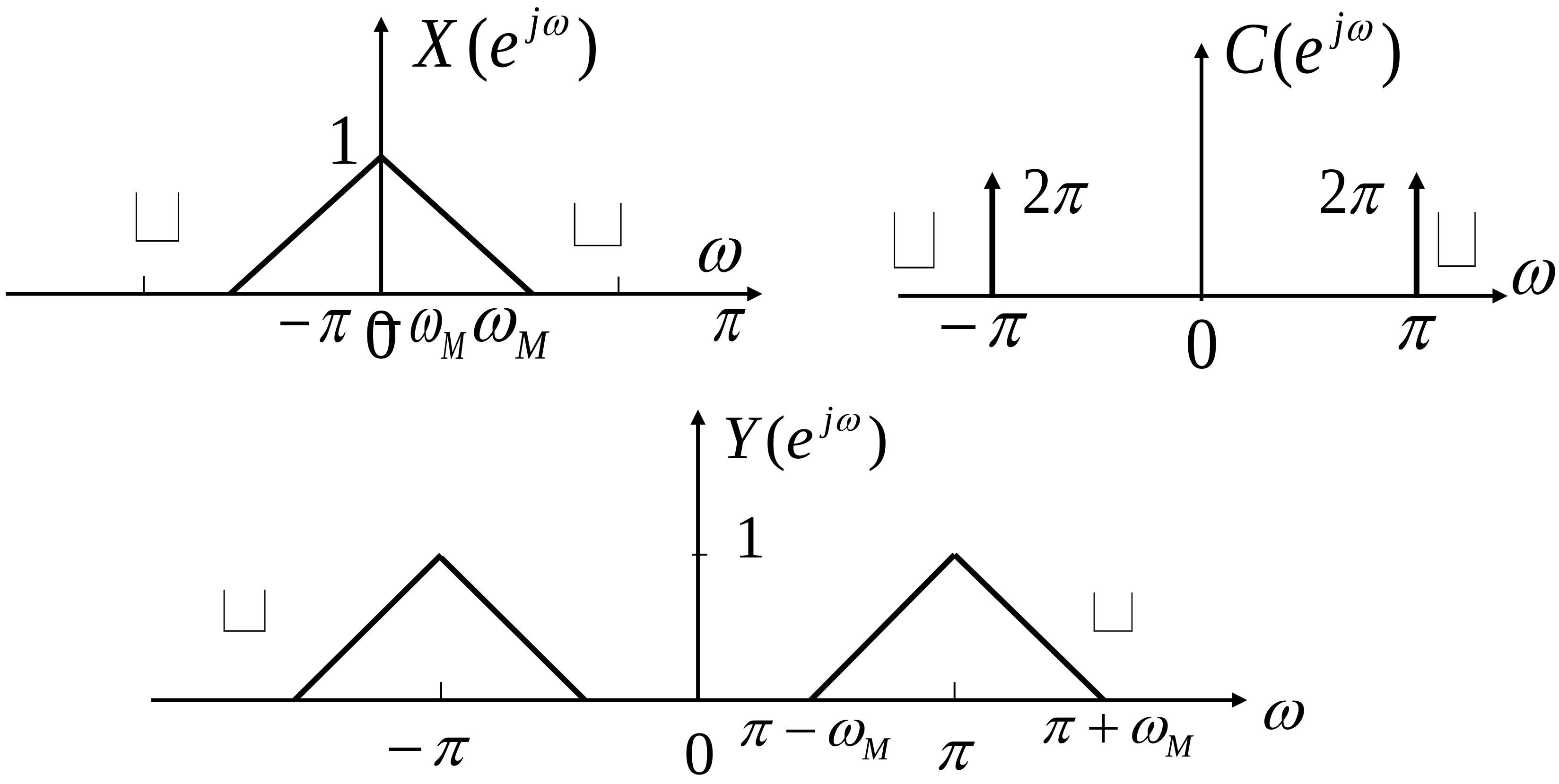
$$c[n]=(-1)^n=e^{j\pi n}$$

$$C(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\pi-2k\pi)$$

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*C(e^{j\omega})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\theta})C(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi}X(e^{j\omega})\delta(\omega-\pi)d\omega=X(e^{j(\omega-\pi)})$$



5.6 傅立叶变换的性质及基本变换对列表

（自学）

5.7 对偶性（Duality）

一. DFS的对偶

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

由于a_k本身也是以N为周期的序列，当然也可以将其展开成DFS形式。

即： $a_k=\sum_{n=<N>}\frac{1}{N}x[-n]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 或 $a_n=\sum_{k=<N>}\frac{1}{N}x(-k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

这表明： 序列 a_n的DFS系数就是 $\frac{1}{N}x(-k)$,

即：

$$x[n] \xleftrightarrow{DFS} a_k$$

$$a_n \xleftrightarrow{DFS} \frac{1}{N}x[-k]$$

利用对偶性可以很方便的将DFS在时域得到的性质，通过对偶得到频域相应的性质。

例1：从时移到频移

$$x[n] \leftrightarrow a_k \qquad a_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x[-k]$$

利用时移性质有： $$a_{n-n_0} \leftrightarrow \frac{1}{N} x(-k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}$$

由对偶性有： $$\frac{1}{N} x[-n] e^{-j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow \frac{1}{N} a_{-k-M}$$

$$\therefore\ x[-n] e^{-j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow a_{-k-M}$$

$$\text{Q}\ x[-n] \leftrightarrow a_{-k} \qquad \therefore\ x[n] e^{j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow a_{k-M}$$ 频移特性

例2: 由卷积特性到相乘特性

$$x_1(n)\otimes x_2(n)\leftrightarrow a_k\cdot b_k\cdot N$$

$$a_n\leftrightarrow\frac{1}{N}x_1(-k)\qquad b_n\leftrightarrow\frac{1}{N}x_2(-k)$$

由时域卷积性质:

$$a_n\otimes b_n\leftrightarrow\frac{1}{N}x_1(-k)\cdot\frac{1}{N}x_2(-k)\cdot N=\frac{1}{N}x_1(-k)\cdot x_2(-k)$$

由对偶性: $$\frac{1}{N}x_1(-n)x_2(-n)\leftrightarrow\frac{1}{N}\sum_{m=<N>}a_m b_{-k-m}$$

$$\therefore x_1(n)\cdot x_2(n)\leftrightarrow\sum_{m=<N>}a_m b_{k-m}=a_k\otimes b_k$$ 时域相乘性质

二. DTFT与CFS间的对偶

由 $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$ 知 $X(e^{j\omega})$ 是一个以 2π 为周期的连续函数，如果在时域构造一个以 2π 为周期的连续时间信号 $X(e^{jt})$, 则可以将其表示为CFS形式:

这表明：

若 $x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$

则 $X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x[-k]$

利用这一对偶关系，可以将**DTFT**的若干特性对偶到**CFS**中去；或者反之。

例: 从CFS的时域微分到DTFT的频域微分

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{CFS} j\frac{2\pi}{T}ka_k$$ **CFS的时域微分特性**

若 $x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$, 则 $X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x(-k)$

$$\therefore \frac{d}{dt}X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} j\frac{2\pi}{T}kx(-k) = jkx(-k), \quad (T = 2\pi)$$

$$-jnx(n) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$$ **DTFT的频域微分特性**

例: 从CFS的卷积特性到DTFT的相乘特性

$$x_1(n) \xleftrightarrow{DTFT} X_1(e^{j\omega}) \qquad x_2(n) \xleftrightarrow{DTFT} X_2(e^{j\omega})$$

$$X_1(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x_1(-k) \qquad X_2(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x_2(-k)$$

由CFS的卷积特性 $x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow Ta_k b_k$

$$X_1(e^{jt}) \otimes X_2(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} 2\pi x_1(-k) x_2(-k), (T = 2\pi)$$

由对偶性:

$$2\pi x_1(n) x_2(n) \xleftrightarrow{DTFT} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$

$$x_1(n) x_2(n) \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$

——**DTFT的相乘特性**

可以看出：信号在时域的特性和在频域的特性之间存在以下对应关系：

时域的周期性 ⟷ 频域的离散性

时域的非周期性 ⟷ 频域的连续性

时域的离散性 ⟷ 频域的周期性

时域的连续性 ⟷ 频域的非周期性

5.8 由LCCDE表征的系统

Systems Characterized by Linear Constant-Coefficient Difference Equations

相当广泛而有用的一类离散时间LTI系统可以由一个线性常系数差分方程（LCCDE）来表征:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

一. 由LCCDE描述的系统的频率响应:

对方程两边进行DTFT变换，可得到:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N} b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

可见 $H(e^{j\omega})$ 是一个有理函数。当需要得到 $h[n]$ 时，往往是先从方程得到 $H(e^{j\omega})$，进而通过反变换得到 $h[n]$。

二. 系统的频率响应:

$H(e^{j\omega})$ 刻画了**LTI**系统的频域特征，它是系统单位脉冲响应的傅立叶变换。

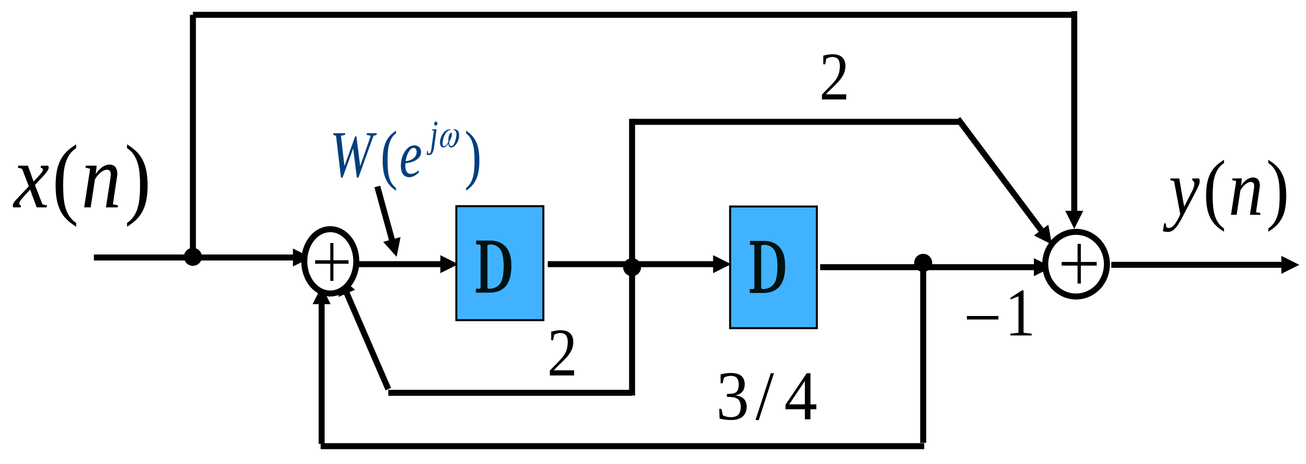
但并非所有的LTI系统都一定存在频率响应。

如果 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|<\infty$，则 $H(e^{j\omega})$ 存在。

这说明:稳定系统可以由其频率响应来描述。

由 $H(e^{j\omega})$ 所表征的系统应该是稳定系统。

三. 由方框图描述的系统:



通过对图中两个加法器的输出列方程可得到:

$$W(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2W(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \frac{3}{4}W(e^{j\omega})e^{-j2\omega}$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2W(e^{j\omega})e^{-j\omega} - W(e^{j\omega})e^{-j2\omega}$$

由上式可得:

$$X(e^{j\omega}) = (1 - 2e^{-j\omega} - \frac{3}{4}e^{-j2\omega})W(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = (1 - \frac{7}{4}e^{-j2\omega})W(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = 1 + \frac{2e^{-j\omega} - e^{-j2\omega}}{1 - 2e^{-j\omega} - \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}$$

三. LTI系统的频域分析方法:

1. 对输入信号做傅立叶变换，求得 $X(e^{j\omega})$ 。
2. 根据系统的描述，求得系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。
3. 根据卷积特性得到 $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 。
4. 对 $Y(e^{j\omega})$ 做傅立叶反变换得到系统的响应 $y(n)$ 。

做傅立叶变换或反变换的主要方法是部分分式展开、利用傅立叶变换的性质和常用的变换对。

5.9 小结 Summary

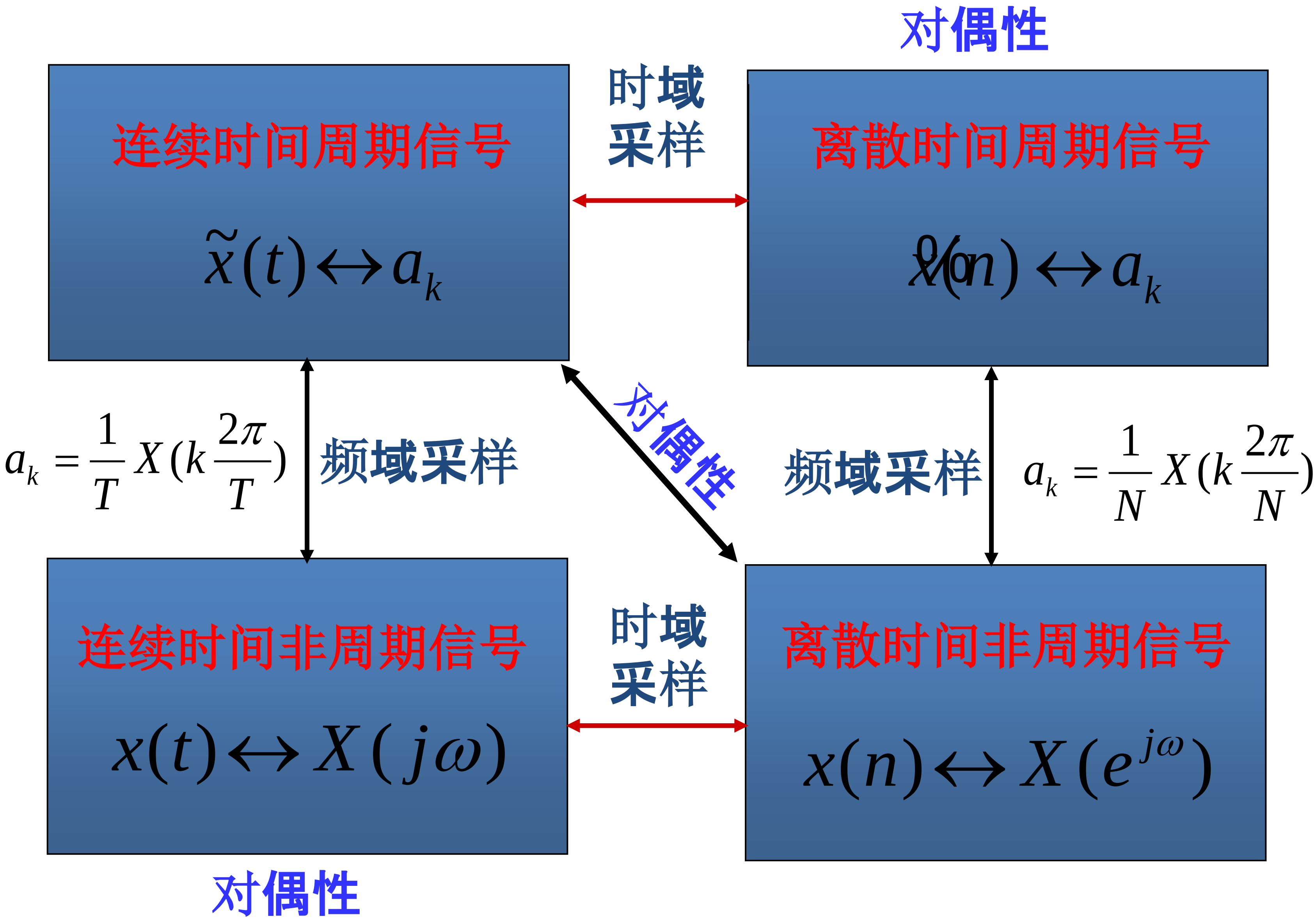
- 本章与第4章平行地讨论了DTFT，讨论的基本思路和方法与第4章完全对应，得到的许多结论也很类似。
- 通过对DTFT性质的讨论，揭示了离散时间信号时域与频域特性的关系。不仅看到有许多性质在CTFT中都有相对应的结论，而且它们也存在一些重要的差别，例如DTFT总是以2π为周期的。

❖通过卷积特性的讨论，对LTI系统建立了频域分析的方法。同样地，相乘特性的存在则为离散时间信号的传输技术提供了理论基础。

❖对偶性的讨论为进一步认识连续时间信号、离散时间信号、周期信号与非周期信号频域描述的几种工具之间的内在联系，提供了重要的理论根据。深入理解并恰当运用对偶性，对深刻掌握CFS、DFS、CTFT、DTFT的本质关系有很大帮助。

- 与连续时间LTI系统一样，对由LCCDE或由方框图描述的LTI系统，可以很方便的由方程或方框图得到系统的频率响应函数$H(e^{j\omega})$，进而实现系统的频域分析。其基本过程和涉及到的问题与连续时间LTI系统的情况也完全类似。

随着今后进一步的讨论，我们可以看到CFS、DFS、CTFT、DTFT之间是完全相通的。


对偶性
连续时间周期信号
$\tilde{x}(t) \leftrightarrow a_k$
时域
采样
离散时间周期信号
$\tilde{x}(n) \leftrightarrow a_k$
$a_k = \frac{1}{T} X(k\frac{2\pi}{T})$
频域采样
对偶性
频域采样
$a_k = \frac{1}{N} X(k\frac{2\pi}{N})$
连续时间非周期信号
$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$
时域
采样
离散时间非周期信号
$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$
对偶性