P110

13.解：(1) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}$ 初始化数组 $P=[1,2,3]$

则交换A的行：$A=\begin{bmatrix}3&5&6\\2&4&5\\1&2&3\end{bmatrix}$ $P=[3,2,1]$

消去A第一列对角线下方的元素，得

$$A=\begin{bmatrix}3&5&6\\0&\frac{2}{3}&1\\0&\frac{1}{3}&1\end{bmatrix},\quad m_{21}=-\frac{2}{3}\quad m_{31}=-\frac{1}{3}$$

$\therefore A=\begin{bmatrix}3&5&6\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&1\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}$，消去第二列对角线下方的元素，得

$$A=\begin{bmatrix}3&5&6\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&1\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad m_{32}=-\frac{1}{2}\quad \therefore A=\begin{bmatrix}3&5&6\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&1\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\therefore L=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{2}{3}&1&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}3&5&6\\0&\frac{2}{3}&1\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\quad P=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

(2)
$$B=\begin{bmatrix}2&1&1&2\\2&2&2&3\\4&2&4&3\\0&0&6&-1\end{bmatrix}$$

同理，由(1)可得

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\\frac{1}{2}&1&0&0\\0&0&1&0\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}&1\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}4&2&4&3\\0&1&0&\frac{3}{2}\\0&0&6&-1\\0&0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\quad \cancel{A}=P=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

15.解：(1) $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\1&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}$

下面只列出矩阵A下三角部分情况

$$\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&0\\\frac{\sqrt{3}}{3}&3&0\\0&1&3\end{bmatrix}\quad \cancel{a_{22}}\ l_{22}=\sqrt{3-(\tfrac{\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\quad l_{23}=\frac{a_{32}-l_{31}l_{21}}{l_{22}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{即}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&0\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{2\sqrt{6}}{3}&0\\0&\frac{\sqrt{6}}{4}&3\end{bmatrix}\quad l_{33}=\sqrt{a_{33}-l_{31}^2-l_{32}^2}=\sqrt{3-(\tfrac{\sqrt{6}}{4})^2}=\frac{\sqrt{42}}{4}$$

$$\therefore L=\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&0\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{2\sqrt{6}}{3}&0\\0&\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{42}}{4}\end{bmatrix}$$

即 $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\1&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt3&0&0\\\frac{\sqrt3}{3}&\frac{2\sqrt6}{4}&0\\0&\frac{\sqrt6}{4}&\frac{\sqrt{42}}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt3&\frac{\sqrt3}{3}&0\\0&\frac{2\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt6}{4}\\0&0&\frac{\sqrt{42}}{4}\end{bmatrix}$

(2) $B=\begin{bmatrix}4&2&4&2\\2&10&8&1\\4&8&9&5\\2&1&5&19\end{bmatrix}$

由(1)，同理可得

$B=\begin{bmatrix}4&2&4&2\\2&10&8&1\\4&8&9&5\\2&1&5&19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\1&3&0&0\\2&2&1&0\\1&0&3&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&2&1\\0&3&2&0\\0&0&1&3\\0&0&0&9\end{bmatrix}$

17.解：对于 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&1\\4&6&7\end{bmatrix}$

$D_1=1\neq0\qquad D_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=4\times1-2\times2=0$

A的2阶顺序主子式为0，由顺序高斯消元法得

$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&1\\4&6&7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&-5\\0&-2&-5\end{bmatrix}$，无法形成上三角阵

∴矩阵A ~~声~~不可以进行LU分解

对于 $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&1\\3&3&1\end{bmatrix}$

$D_1=1>0\qquad D_2=\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=2\times1-2\times1=0$

B的2阶顺序主子式为0，由顺序高斯消元法，得

$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&1\\3&3&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\0&0&-2\end{bmatrix}$，可以形式上三角阵

∴B可以进行LU分解，但分解不唯一。