

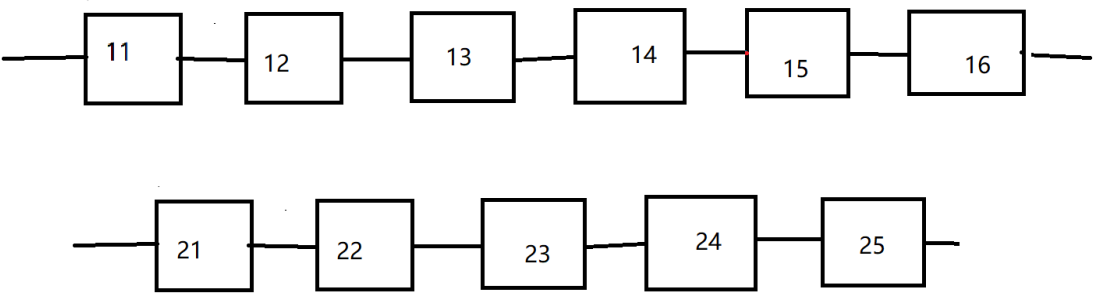
重串珠宝问题

问题描述

有两串珠链，要求将一串珠链切割成若干段后插入到另外一串中，形成一串新的长珠链，且在新链中，两串珠链原先的相对顺序不变。求新珠链的数目。

问题答案

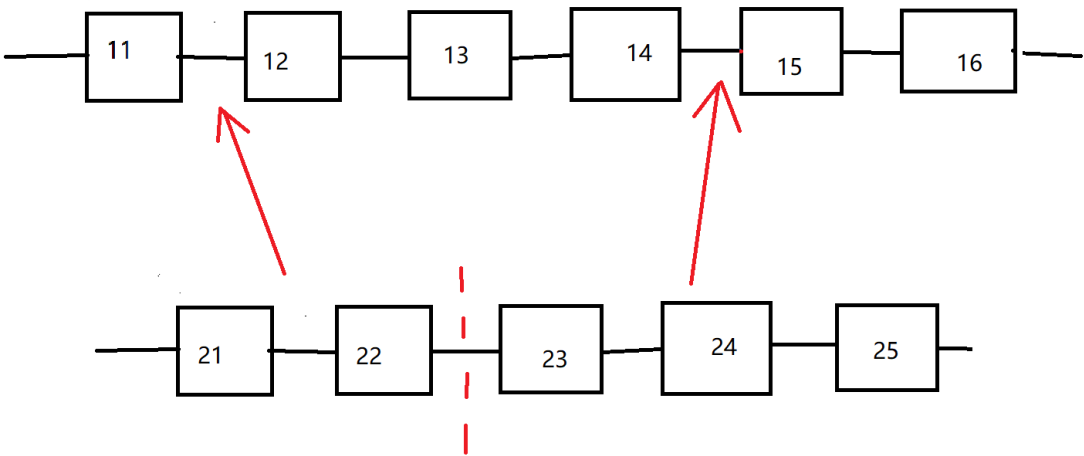
为了给出一般解法的思路，这里先给一个特例。如下面两串珠链，第1串的长度为6，第2串的长度为5。



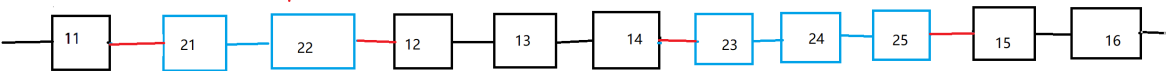
用 xy 表示第 x 串珠链的第 y 个珠子，例如11表示第1串珠链的第1个珠子。根据题目要求的相对顺序不变，则在新链中，需要保持以下条件。

对任意的 $(x, y_1), (x, y_2)$, 若 (x, y_1) 排列在 (x, y_2) 之前，则有 $y_1 < y_2$ 。

也就是说，形成新链的过程是从一个珠链的若干位置剪开，形成若干块，然后把这些块按照被剪珠链的相对顺序插入到另外一个珠链的空隙中。如下所示，在第2条珠链中剪一刀，然后将形成的两块保持相对顺序拆入到第1条珠链中的任意位置中。



形成的珠链如图所示。



那么这样的新链有多少呢？用排列组合的知识不难得到，第2条珠链中剪一刀，有 C_4^1 中剪法，然后保持相对次序插入到第1条珠链的空隙中，插入的方法有 C_7^2 种。应用分步乘法计数原理可得，新链的个数为 $C_4^1 * C_7^2$ 。

这样我们就可以使用上面的思路求解这个问题。设第1串的长度为 m ，第2串的长度为 n 。不失一般性，不妨设 $m \geq n$ ，假设在第2串中切 k 刀，形成 $k+1$ 块。显然， $0 \leq k \leq n-1$ 。然后将 $k+1$ 块插入到第一串中，有 C_{m+1}^{k+1} 中串法。所以第2串切 k 刀的新链数目为 $C_{n-1}^k * C_{m+1}^{k+1}$ 。所以，新链的总数为

$$\sum_{k=0}^{n-1} (C_{n-1}^k * C_{m+1}^{k+1}).$$

我们将这个结论应用到上面这个特例中，可得新链的总数为

$$\sum_{k=0}^4 (C_4^k * C_7^{k+1}) = C_7^1 * C_4^0 + C_7^2 * C_4^1 + \dots + C_7^5 * C_4^4 = 462.$$