第2章 非线性方程求根

主讲：纪庆革副教授

中山大学数据科学与计算机学院

E-Mail: 1024180018@qq.com

第2章 非线性方程求根

非线性科学是当今科学发展的一个重要研究方向，

而非线性方程的求根也成了一个不可缺的内容。

但是，非线性方程的求根非常复杂。

第2章 非线性方程求根

通常非线性方程的根的情况非常复杂：

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}x) = y \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$ 无穷组解

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 & \text{无解} \\ a = \frac{1}{4} & \text{一个解} \\ a = 0 & \text{两个解} \\ a = -1 & \text{四个解} \end{cases}$$

续

所以，只在某个区域内可能解存在唯一，而且经常很简单形式的方程得不到精确解：

$$e^{x}-\cos(\pi x)=0$$

因此，通常我们用迭代法解非线性方程。

学迭代法之前，先看看一种简单直观的方法（如二分法）。

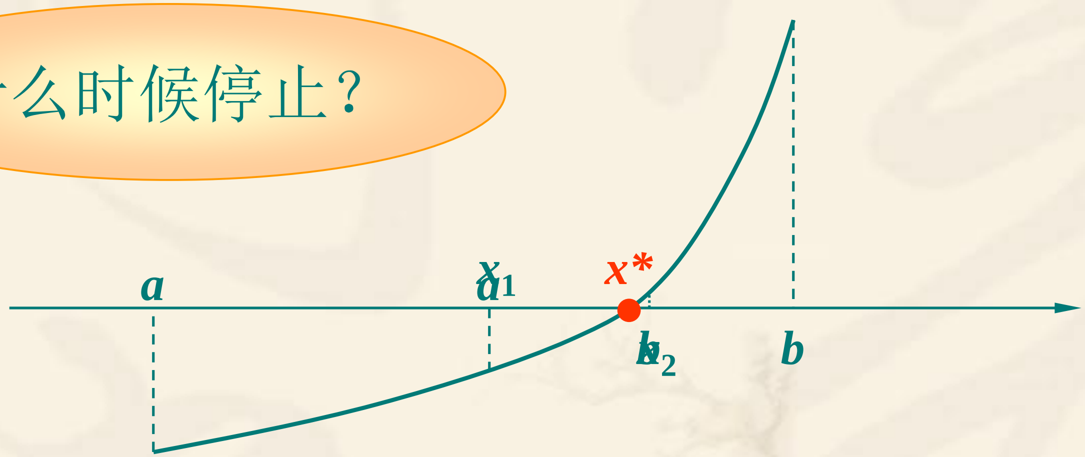
原理： $f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow \exists x, s.t., f(x)=0$

内容

- **二分法**
- 迭代法
- 牛顿法
- 弦截法（割线法）

2.1 二分法(1/2)

什么时候停止？



$$\left|x_{k+1}-x_k\right|<\varepsilon_1 \qquad \text{或} \qquad \left|f(x)\right|<\varepsilon_2$$

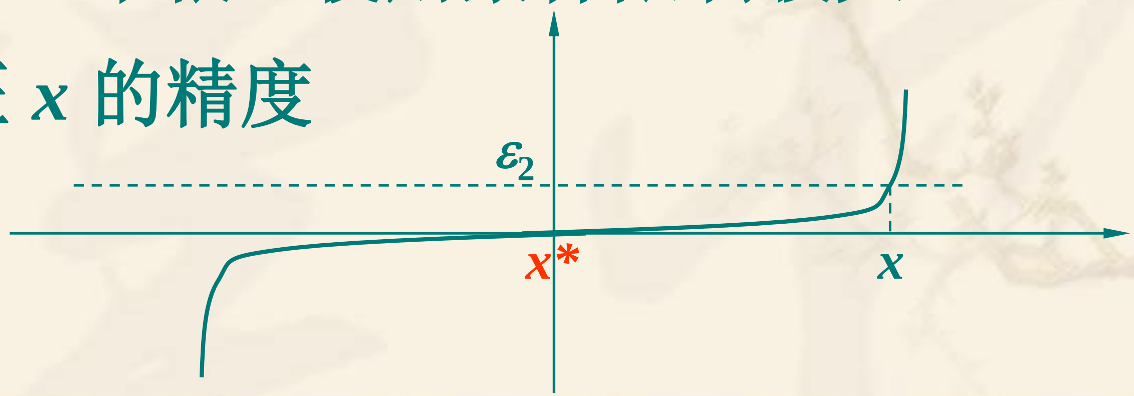
二分法(2/2)

算法

```
While(|a-b|>eps)
      x=(a+b)/2
     f(x)
    若(|f(x)|<eps) x为解
    若f(x)*f(b)<0 修正区间为[x,b]
    若f(a)*f(x)<0 修正区间为[a,x]
End while
```

每次缩小一倍的区间，收敛速度为*1/2*，较慢，且只能求一个根，使用条件限制较大

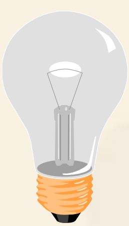
不能保证 x 的精度



2.2 迭代法(1/12)

$$f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=g(x)$$

$f(x)$ 的根 $\longleftrightarrow$ $g(x)$ 的不动点



思路

从一个初值 x_0 出发，计算 $x_1=g(x_0)$, $x_2=g(x_1)$, …, $x_{k+1}=g(x_k)$, … 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即存在 x^* 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，且 g 连续，则由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} g(x_k)$ 可知 $x^*=g(x^*)$，即x^* 是 g 的不动点，也就是f 的根。

迭代式$x_{k+1}=g(x_k)$, $k=0,1,2,\ldots$被称为基本迭代式，也被称为不动点迭代式。

迭代法(2/12)

迭代法的基本步骤如下：

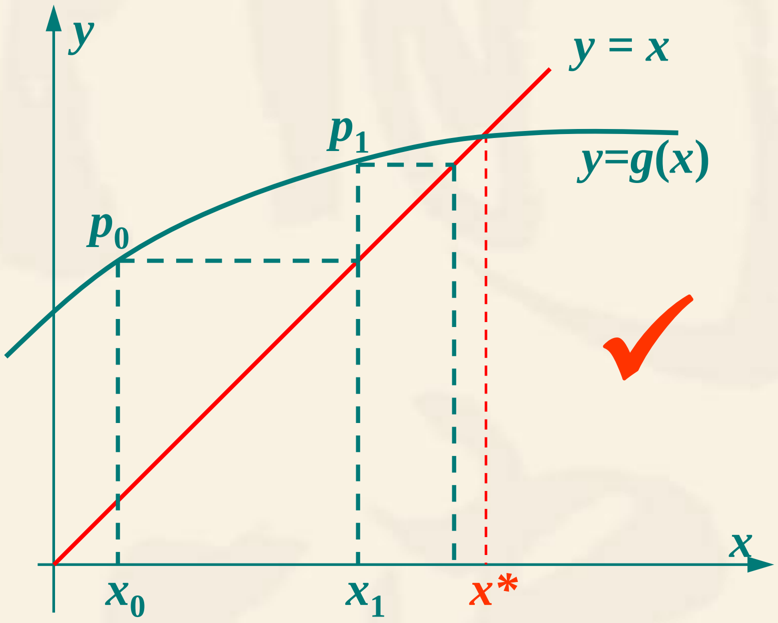
1、给出方程的局部等价形式 $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\varphi(x)$

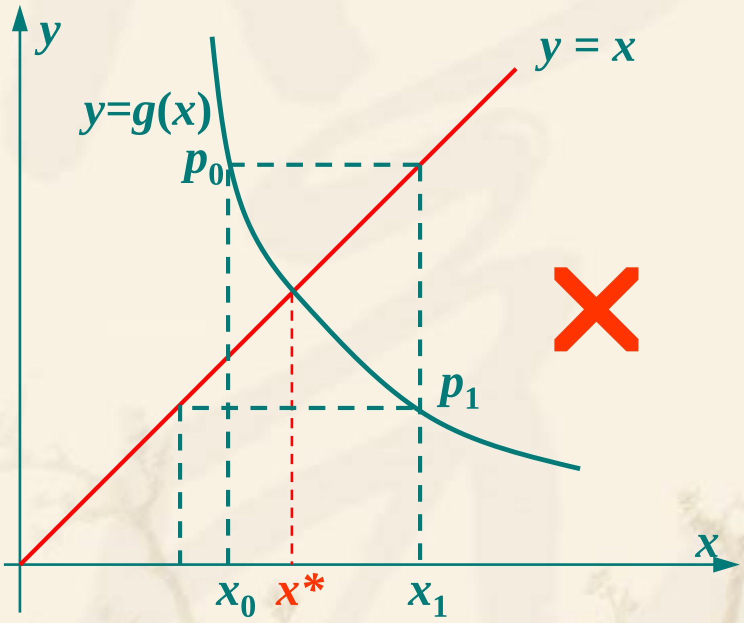
2、取合适的初值x_0，产生迭代序列 $x_{i+1}=\phi(x_i)$

3、求极限 $x^*=\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ ，易知，该值为方程的根

一定收敛吗？

迭代法(3/12)





迭代法(4/12)

- 定义1　设x^*是g(x)的不动点，若存在x^*的一个邻域B: $|x - x^*|\le\delta$, 使得对任何初值$x_0\in$B,由基本迭代法生成的序列满足$\{x_k\}\subset$B,且收敛到x^*，则称基本迭代法是局部收敛的。

迭代法(5/12)

定理2.1 $\varphi(x), x\in[a,b]$，若满足：

1、$a\le\varphi(x)\le b, x\in[a,b]$

2、$\varphi(x)$ 可导，且存在正数*L<1*，使得对任意的*x*，有 $|\varphi'(x)|\le L$

则有：

1、存在唯一的点 $x^*, x^*=\varphi(x^*)$

2、$\forall x_0\in[a,b]$，迭代序列{x_k}收敛 到 $\varphi(x)$的不动点 x*，且有误差估计

$$|x^*-x_k|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

迭代法(6/12)

证明： ①存在唯一性

做辅助函数 $\psi(x)=x-\varphi(x)$，则有 $\psi(a)\le 0,\psi(b)\ge 0$

所以，存在点 $x^*,s.t.,\psi(x^*)=0\Rightarrow x^*=\varphi(x^*)$

若 $x^{**}=\varphi(x^{**})$，则有：

$$|x^*-x^{**}|=|\varphi(x^*)-\varphi(x^{**})|=|\varphi'(\xi)(x^*-x^{**})|\le L|x^*-x^{**}|$$

又，$L<1\ \Rightarrow x^*=x^{**}$

② $\forall x_0\in[a,b]$ 则

$$x_{k+1}-x^*=\varphi(x_k)-\varphi(x^*)=\varphi'(\xi)(x_k-x^*)$$

$$|x_{k+1}-x^*|\le L|x_k-x^*|\le\cdots\le L^{k+1}|x_0-x^*|$$

所以，任意的初值都收敛

迭代法(7/12)

③误差估计

$$\left|x_{k+1}-x_k\right|=\left|\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})\right|\le L\left|x_k-x_{k-1}\right|\le\cdots\le L^k\left|x_1-x_0\right|$$

$$\therefore\left|x_{k+p}-x_k\right|\le\left|x_{k+p}-x_{k+p-1}\right|+\cdots+\left|x_{k+1}-x_k\right|$$

$$\le\left(L^{k+p+1}+\cdots+L^k\right)\left|x_1-x_0\right|$$

$$=\frac{L^k\left(1-L^p\right)}{1-L}\left|x_1-x_0\right|<\frac{L^k}{1-L}\left|x_1-x_0\right|$$

由p的任意性，令$p\to+\infty$

$$\left|x^*-x_k\right|\le\frac{L^k}{1-L}\left|x_1-x_0\right|$$

证毕

迭代法(8/12)

定义2.2 设序列$\{x_n\}$收敛于x^*，令$\varepsilon_n=x^*-x_n$，若存在某实数$p\geq1$及正常数C，使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p}=C$$

则称序列$\{x_n\}$$p$阶收敛，其中$C$ 称为渐进误差常数。

如果序列$\{x_n\}$ 是由迭代$x_{n+1}=g(x_n)$产生的，且 p阶收敛，则称这种迭代过程是p阶收敛。

当$p=1$，且$C<1$时，称为线性收敛。

当$p>1$，称为超线性收敛；

当p=2，称为平方收敛(二次收敛)。

迭代法(9/12)

- 迭代收敛的加速
  - 问题的提出
    - 迭代格式$x=\varphi(x)$在收敛的情况下，收敛速度也取决于$|\varphi'(x)|$的大小，当$|\varphi'(x)|$接近于1时，收敛可能很慢。
    - 能否从$x=\varphi(x)$出发，构造新的迭代形式，使收敛速度加快？

迭代法(10/12)

- 迭代收敛的加速
  - 松弛法

$$\begin{cases} \omega_n = \dfrac{1}{1-\varphi'(x)} \\ x_{n+1} = (1-\omega_n)x_n + \omega_n\varphi(x_n) \end{cases}, n = 0,1,2,\ldots$$

  - ω_n被称为松弛因子
  - 松弛法的加速效果明显，甚至不收敛的迭代函数经加速后一般也能收敛

迭代法(11/12)

- 迭代法的加速
  - 埃特金(Altken)加速方法的计算公式:
    - 第一步：校正 $\tilde{x}_{k+1} = \varphi(x_k);$
    - 第二步：再校正 $\bar{x}_{k+1} = \varphi(\tilde{x}_{k+1});$
    - 第三步：加速 $x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \dfrac{(\bar{x}_{k+1} - \tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1} - 2\tilde{x}_{k+1} + x_k}.$

迭代法(12/12)

构造满足定理条件的等价形式一般难于做到。要构造收敛迭代格式有两个要素：

1、等价形式

2、初值选取

下面我们开始介绍若干种迭代法的构造方法:

1、切线法

2、割线法

2.3 Newton迭代法（切线法）(1/5)

将*f(x)*在初值处作Taylor展开

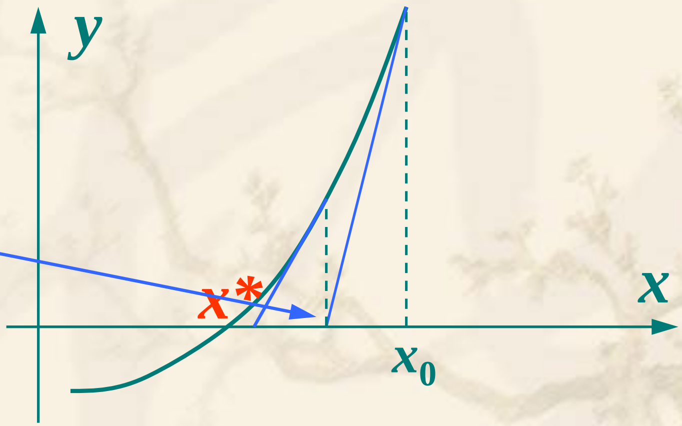
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

取线性部分作为*f(x)*的近似，有：

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\approx 0$$

若 $f'(x_0)\neq 0$ ，则有

$$x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$ 记为x_1



类似，我们可以得到

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

2.3 Newton迭代法(2/5)

这样一直下去，我们可以得到迭代序列

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

***Newton*迭代的等价方程为：**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

所以

$$\varphi'(x) = (x - \frac{f(x)}{f'(x)})' = \frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

若$f(x)$在a处为单根，则

$$f(a) = 0, f'(a) \neq 0, \therefore \varphi'(a) = 0$$

所以，迭代格式收敛

2.3 Newton迭代法(3/5)

若*a*为*p*重根，取迭代格式为：

$$x_{k+1} = x_k - p\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

函数在*a*处作
*Taylor*展开

收敛速度

$$x_{n+1} - a = \varphi(x_n) - \varphi(a) = (x_n - a)\varphi'(a) + \frac{(x_n - a)^2}{2}\varphi''(\xi_n)$$

$$= \frac{(x_n - a)^2}{2}\varphi''(\xi_n) \approx \frac{(x_n - a)^2}{2}\varphi''(a)$$

即 $\dfrac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = M$

Newton迭代收敛速度快，格式简单，应用广泛

2.3 Newton迭代法(4/5)

例 用*Newton*迭代法求方程$xe^x-1=0$在0.5附近的根, 精度要求$\varepsilon=10^{-5}$.

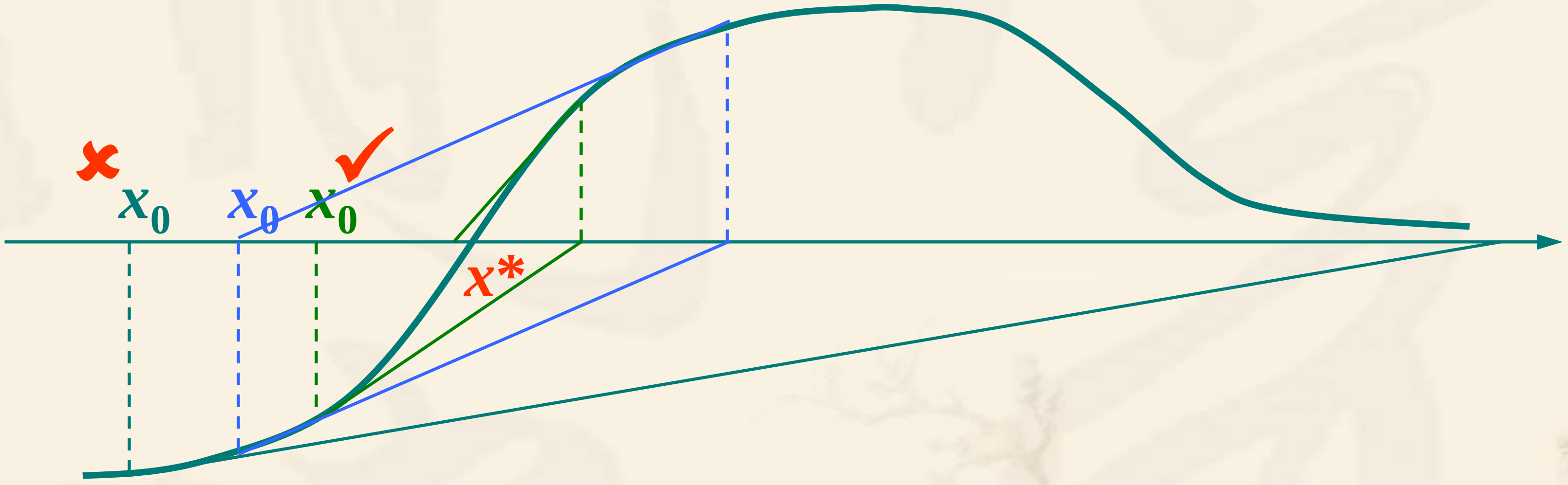
解 *Newton* 迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k e^{x_k}-1}{e^{x_k}+x_k e^{x_k}}=x_k-\frac{x_k-e^{-x_k}}{1+x_k}\qquad ,k=0,1,2,\cdots$$

k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$
0	0.5	-0.17563936	
1	0.57102044	0.01074751	0.07102044
2	0.56715557	0.00003393	0.00386487
3	0.56714329	0.0000000003	0.00001228
4	0.56714329	0.0000000003	0.00000000

2.3 Newton迭代法(5/5)

注：Newton’s Method 收敛性依赖于x_0 的选取。



2.4 弦截法（割线法）(1/3)

将*Newton*迭代中的导数，用差商代替，有格式

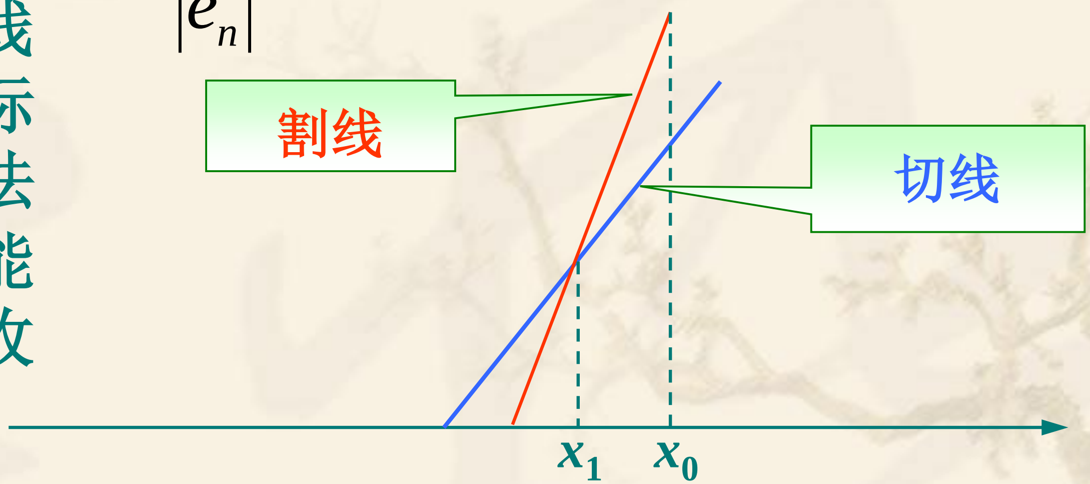
$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

又称双点割线法，也称有记忆割线法

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{1.618}} = M$$

双点割线法是超线性收敛的 (p=1.618>1))

几何解释：通过$(x_k, f(x_k))$和$(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$作$y=f(x)$的割线，割线与x轴交点的横坐标就是x_{k+1}. 注：该方法是两步迭代法，不能直接用单步迭代法收敛性分析的结果。



弦截法（割线法）(2/3)

把上式中的x_{n-1}换为x_0，则得迭代公式：

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)}$$

该式称为单点割线法。

单点割线法在单根附近是线性收敛的。

注：双点割线法、单点割线法都需要x^*邻近的两个初始近似值x_0, x_1才能开始计算。

弦截法(3/3)

定理：设方程 $f(x)=0$ 的根为**x*. 若f(x)** 在**x***附近有连续的二阶导数， $f'(x)\neq 0$ ， 而初值x_0,x_1充分接近**x***， 则双点割线法的迭代过程收敛，收敛速度为

$$\left|x_{n+1}-x^*\right| \approx \left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right|^{0.618} \left|x_n-x^*\right|^{1.618}$$

实验2 非线性方程求根（未启用页）

1.分别编写用Newton迭代和弦截法求根的通用程序

2.用如上程序求根

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x = 0$$

取初值x_0 为 *0.1,0.2,0.9,9.0*

3.简单分析你得到的数据

本课件是在中国科技大学张瑞老师课件基础上修改而成的，在此表示感谢！