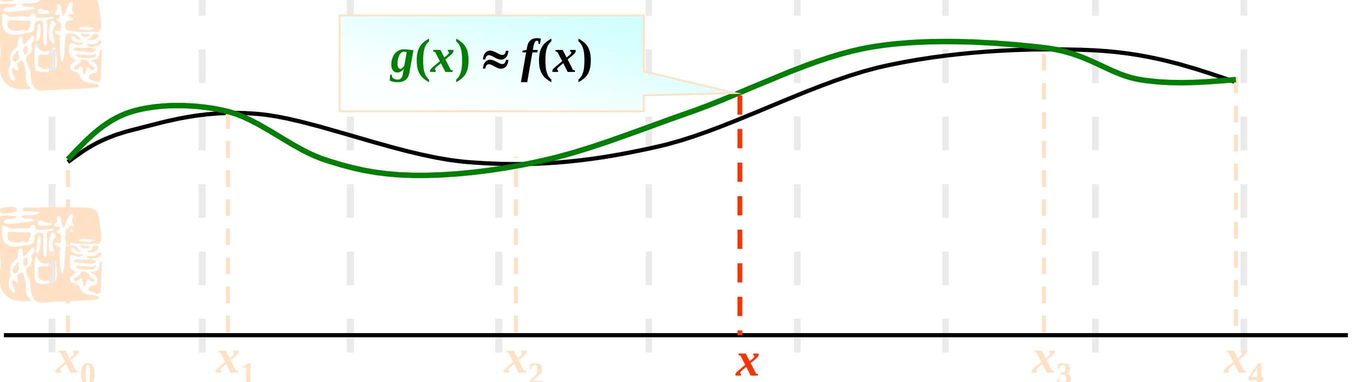
第2章 插 值

纪庆革
软件工程与应用研究所
数据科学与计算机学院
中山大学，广州
Email: 1024180018@qq.com

- 概念

实际中，$f(x)$多样，复杂，通常只能观测到一些离散数据；或者$f(x)$ 过于复杂而难以运算。这时我们要用近似函数$g(x)$来逼近$f(x)$。

自然地，希望$g(x)$通过所有的离散点



定义：$f(x)$ 为定义在区间 $[a,b]$ 上的函数，$\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 为区间上n+1个互不相同的点，Φ 为给定的某一函数类。求 Φ 上的函数 $g(x)$ 满足

$$g(x_i) = f(x_i) \quad , \quad i = 0, \cdots, n$$

问题

- 是否存在唯一
- 如何构造
- 误差估计

设 $g(x)=a_0\varphi_0(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)$ 则

$$g(x_i)=f(x_i)=a_0\varphi_0(x_i)+\cdots+a_n\varphi_n(x_i)$$

$\therefore (a_0,\cdots,a_n)$ 有解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式不为0

特点：

1. a_0, a_1, …, a_n 与基函数无关
2. 基函数与原函数 $f(x)$ 无关
- 基函数个数与点个数相同

存在唯一定理

定理1.1 ：$\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 为$n+1$个节点，$\Phi = span\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_n\}$

$n+1$维空间，则插值函数存在唯一，当且仅当

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

对应于 $\Phi = \mathrm{P}^n(x) = span\{1, x, x^2, \cdots x^n\}$

则

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} \left| x_i - x_j \right| \ne 0$$

Vandermonde行列式

多项式插值的Lagrange型

- 如何找？

在基函数上下功夫，取基函数为$\{l_i(x)\}_{i=0}^n \subset \mathrm{P}^n$

要求 $l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$ 则 $g(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$

通常写成： $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$

Lagrange插值多项式

$L_n(x)$是一次数不超过n的多项式，

并且 $L_n(x_i) = y_i = f(x_i), \quad j = 0,1,\cdots,n$

求 $\{l_i(x)\}_{i=0}^{n}$ ，易知：

$$l_i(x) = a_i(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$$

$$a_i = \frac{1}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

- 线性插值

$$l_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \quad , \quad l_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$L_1(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x)$$

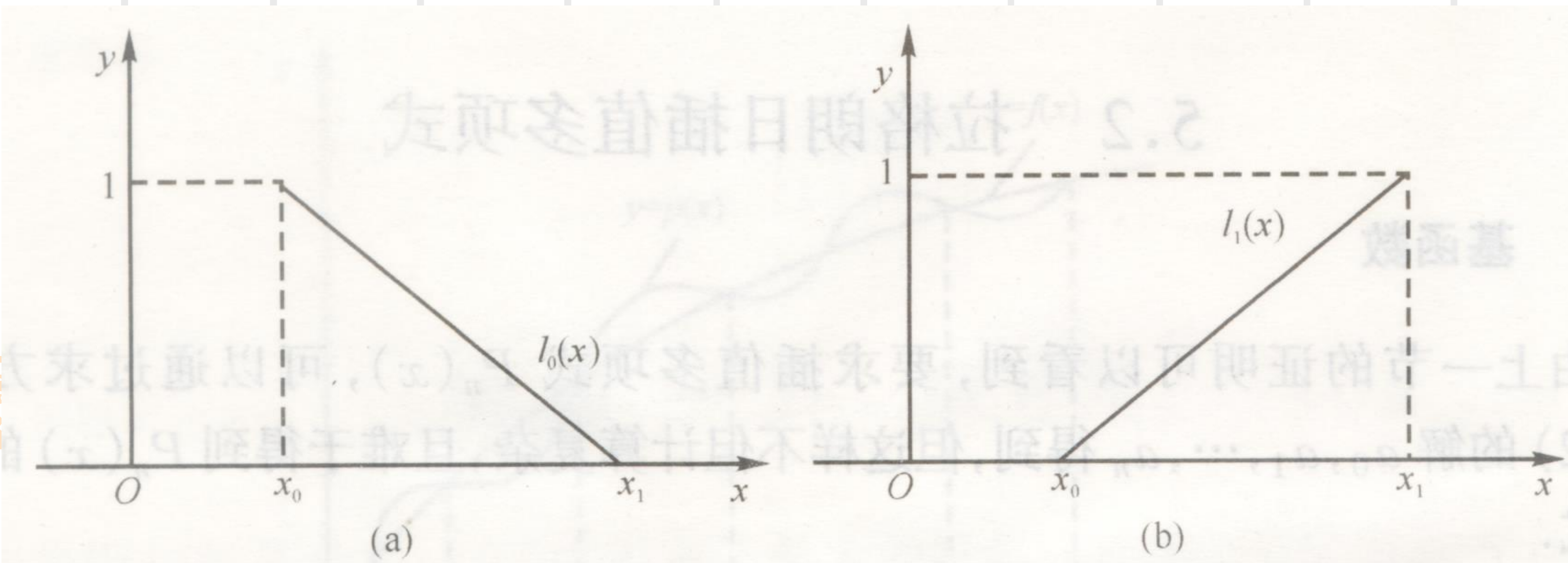


图4-2 一次基函数

- 二次插值（或抛物插值）

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$L_2(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+f(x_2)l_2(x)$$

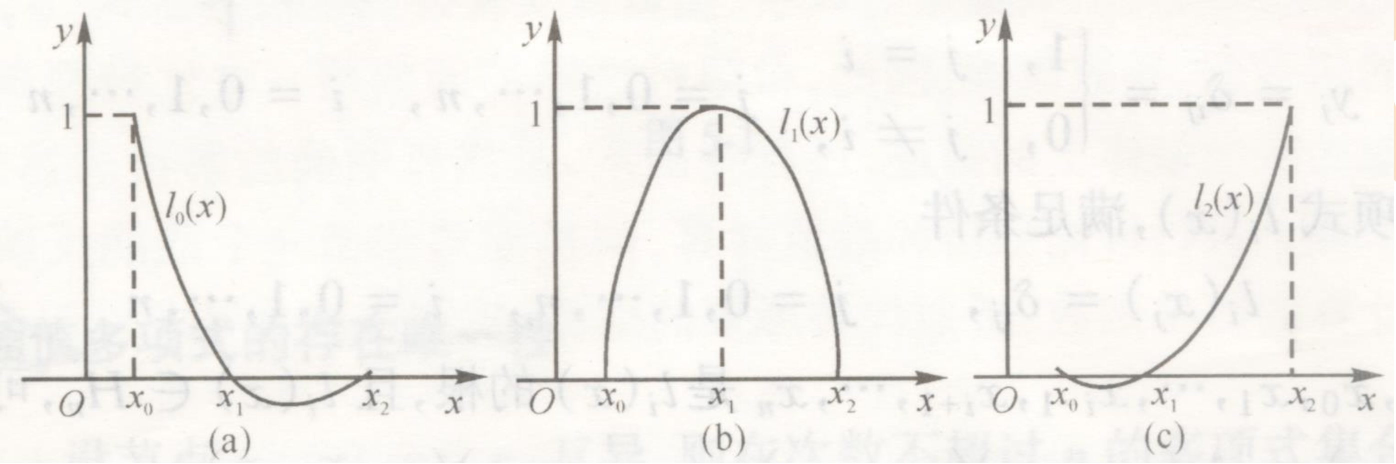


图4-3 二次基函数

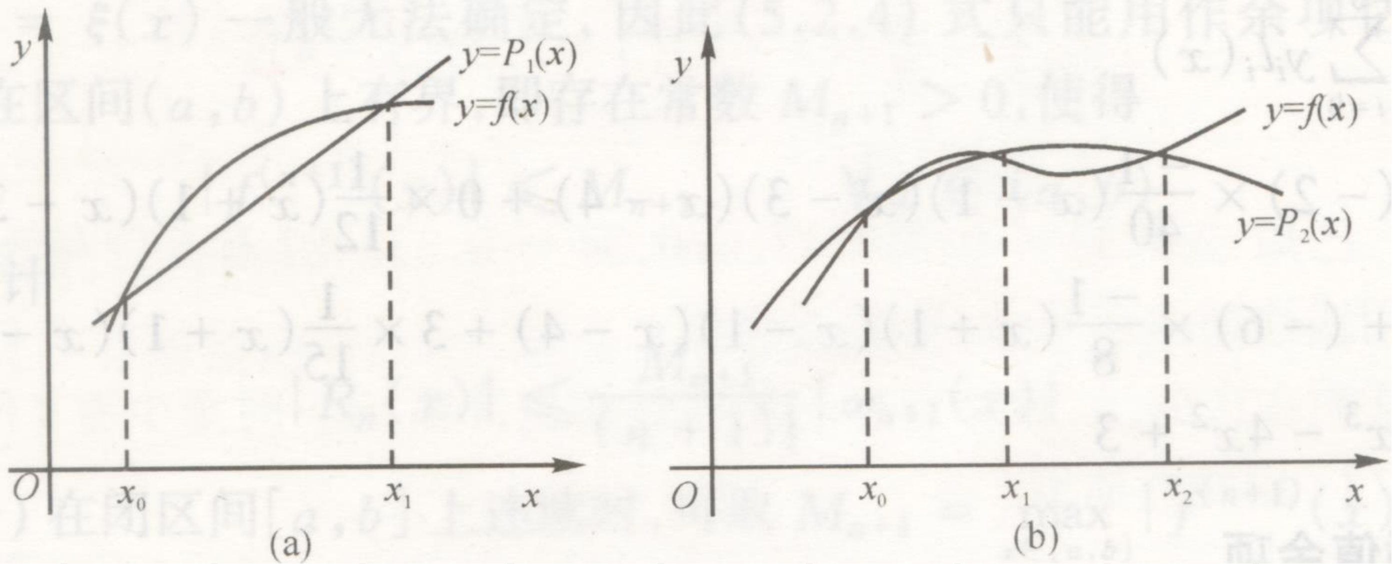


图4-4 二次插值（或抛物插值）

例： $(-1,2),(0,0),(2,1),(3,3)$

$$l_0(x)=\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)} \qquad l_1(x)=\frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(0+1)(0-2)(0-3)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x+1)(x-0)(x-3)}{(2+1)(2-0)(2-3)} \qquad l_3(x)=\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(3+1)(3-0)(3-2)}$$

$$L_3(x)=2l_0(x)+0l_1(x)+1l_2(x)+3l_3(x)$$

例： 已知 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

分别利用 $\sin x$ 的1次、2次 Lagrange 插值计算 $\sin 50°$ 并估计误差。

例： 已知 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

分别利用 $\sin x$ 的1次、2次 Lagrange 插值计算 sin 50° 并估计误差。

$$50^0=\frac{5\pi}{18}$$

x_0 x_1 x_2

解： $n=1$ 分别利用x_0, x_1 以及 x_1, x_2 计算

利用 $x_0=\frac{\pi}{6}, x_1=\frac{\pi}{4}$ ➡ $L_1(x)=\frac{x-\pi/4}{\pi/6-\pi/4}\times\frac{1}{2}+\frac{x-\pi/6}{\pi/4-\pi/6}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

si[illegible] x, $f^{(2)}(\xi_x)=-\sin\xi_x$, $\xi_x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$

[illegible] $\frac{\pi}{4})$

内插通常优于外推。选择要计算的 x 所在的区间的端点，插值效果较好。

sin 50° = 0.7660444…

外推 /* extrapolation */ 的[illegible]差 ≈ –0.01001

利用 $x_1=\frac{\pi}{4}, x_2=\frac{\pi}{3}$ ➡ sin 50° ≈ 0.7[illegible]8, $0.00538<\tilde{R}_1\left(\frac{5\pi}{18}\right)<0.00660$

内插 /* interpolation */ 的实际误差 ≈ 0.00596

$n=2$

$$L_2(x)=\frac{(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{2}+\frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 50^0 \approx L_2(\frac{5\pi}{18}) \approx 0.76543$$

$$R_2(x)=\frac{-\cos\xi_x}{3\,!}(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})\,;\qquad \frac{1}{2}<\cos\xi_x<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\quad 0.00044<R_2\left(\frac{5\pi}{18}\right)<0.00077$$

$\sin 50° = 0.7660444…$

2次插值的实际误差 ≈ 0.00061

高次插值通常优于低次插值

误差 $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$

解：

$$\because f(x_i) = L_n(x_i) \quad , \quad i = 0, \cdots n$$

$$\therefore R_n(x_i) = 0 \quad , \quad i = 0, \cdots n$$

$$\therefore R_n(x) = k(x)(x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

求 $k(x) = ?$

$$\forall a, k(a) = ?$$

设 $\psi(t) = f(t) - L_n(t) - k(a)(t - x_0) \cdots (t - x_n)$

易知 $\psi(x_i) = 0, i = 0, \cdots n$ and $\psi(a) = 0$

$\therefore \psi(t)$ 有n+2个零点

$\therefore \exists \xi$ ，$\psi^{(n+1)}(\xi) = 0$

$$\psi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(a)(n+1)!$$

$$k(a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

由a的任意性

$$\therefore R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n)$$

事后误差估计

给定$\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$任取n+1个构造 $L_n(x)$

如：　$i=0,\cdots,n \quad \Rightarrow \quad L_n(x)$

另取　$i=1,\cdots,n+1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{L}_n(x)$

则

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

$$f(x)-\tilde{L}_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!}(x-x_1)\cdots(x-x_{n+1})$$

近似 $f^{(n+1)}(\xi_1) \approx f^{(n+1)}(\xi_2)$

则 $$\frac{f(x) - L_n(x)}{f(x) - \tilde{L}_n(x)} \approx \frac{x - x_0}{x - x_{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \frac{x - x_{n+1}}{x_0 - x_{n+1}} L_n(x) + \frac{x - x_0}{x_{n+1} - x_0} \tilde{L}_n(x)$$

$$\Rightarrow f(x) - L_n(x) \approx \frac{x - x_0}{x_0 - x_{n+1}} \left(L_n(x) - \tilde{L}_n(x)\right)$$

- Lagrange 插值的缺点

无承袭性。增加一个节点，所有的基函数都要重新计算

4.2 Newton型多项式插值

承袭性： $N_{n+1}(x) = N_n(x) + q_{n+1}(x) \quad \in P^{n+1}$

$$\underset{\{x_0, x_1 \cdots, x_{n+1}\}}{\underbrace{N_{n+1}}} \qquad \underset{\{x_0, x_1 \cdots, x_n\}}{\underbrace{N_n}}$$

且 $N_n(x_i) = N_{n+1}(x_i) = f(x_i) \quad , \quad i = 1, \cdots n$

$\therefore q_{n+1}(x) = a_{n+1}(x - x_0)\cdots(x - x_n)$

为实数

同样 $N_n(x) = N_{n-1}(x) + q_n(x)$

$\Rightarrow q_n(x) = a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$

$$\therefore \quad N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

而且有：

$$\begin{cases} N_n(x_0) = a_0 = f(x_0) \\ N_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \\ N_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2) \\ \quad\vdots \\ N_n(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + \cdots + a_n(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1}) = f(x_n) \end{cases}$$

这样：

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$a_2 = \frac{1}{x_2 - x_1}\left(\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - a_1\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\left(\frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0} - a_1\right)\frac{1}{x_1 - x_0} - a_2\right)$$

定义：差商

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$ 称为1阶差商

$$f[x_0, \cdots, x_k] = \frac{f[x_1, \cdots, x_k] - f[x_0, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$ 称为k阶差商

由归纳：

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = \frac{1}{x_2 - x_1}\left(\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - a_1\right)$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_1}\big(f[x_2, x_0] - f[x_1, x_0]\big) = f[x_2, x_1, x_0]$$

$$a_n = f[x_0, \cdots, x_n]$$

此处用到差商的一个性质：（用归纳法易证）

对称性：

$$f[x_0,\cdots,x_k]=f[x_{i_0},\cdots,x_{i_k}]$$

$i_0,\cdots,i_k$是$0,\cdots,k$的任意排列

定义关键：找不同的元素相减作分母

4.2.1 Newton插值构造

4-1 差商表

$x_0, f(x_0)$				
$x_1, f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
$x_2, f(x_2)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_2, x_1, x_0]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$x_n, f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]$		$f[x_n, \cdots, x_0]$

2、利用差商表的最外一行，构造插值多项式

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

- 例子

2点Newton型插值

$$N_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

4.2.2 差商性质总结

1. $f[x_0,\cdots,x_n]=f[x_{i_0},\cdots,x_{i_n}]$ 即差商与节点的顺序无关。

2. $f[x_0,\cdots,x_n]=\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$

即n阶差商可以表示成$n+1$个函数值$f(x_0), f(x_1)\ \dots\ f(x_n)$的线性组合。

3. 若$f(x)$在$[a,b]$上存在n阶导数，且$x_i\in[a,b]$, $i=0,1,\dots,n$, 则

$$f[x_0,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\quad \xi\in[a,b]$$

4. 若$f(x)$是n次多项式，则一阶差商$f[x,x_i]$是n-1次多项式。

4.2.3　等距节点的牛顿插值公式

1.差分的定义

设插值节点为等距节点：$x_i=x_0+ih\ (i=0,1,2,\ldots,\ n)$，其中$h$称为步长，函数$y=f(x)$ 在x_i的函数值为$f_i=f(x_i)(i=0,1,2,\ldots,\ n)$，$f_{i+1}-f_i, f_i-f_{i-1}$分别称为f(x)在$x_i$的 一阶向前差分 和 一阶向后差分，记作

$$\Delta f_i=f_{i+1}-f_i,\ \nabla f_i=f_i-f_{i-1} \tag{4.3.7}$$

其中△称为向前差分算子，▽称为向后差分算子。一阶差分的差分$\Delta f_{i+1}-\Delta f_i, \nabla f_i-\nabla f_{i-1}$分别称为$f(x)$在$x_i$二阶向前差分和二阶向后差分差分，记作

$$\Delta^2 f_i=\Delta f_{i+1}-\Delta f_i, \nabla^2 f_i=\nabla f_i-\nabla f_{i-1}$$

一般地，*m*-1阶差分的差分

$$\Delta^{m-1} f_i - \Delta^{m-1} f_i, \nabla^{m-1} f_i - \nabla^{m-1} f_{i-1}$$

分别称为$f(x)$在x_i的m阶向前差分和m阶向后差，记作

$$\Delta^m f_i = \Delta^{m-1} f_i - \Delta^{m-1} f_i, \nabla^m f_i = \nabla^{m-1} f_i - \nabla^{m-1} f_{i-1} \quad (4.2.9)$$

由差分的定义知，差分计算比差商计算方便得多，因为它省去了除法运算，计算差分通常用表4-2所示的差分表。

4-2 差分表

f_i	一阶差分	二阶差分	三阶差分	四阶差分	…
f_0	$\Delta f_0(\nabla f_1)$				…
f_1	$\Delta f_1(\nabla f_2)$	$\Delta^2 f_0(\nabla^2 f_2)$			…
f_2	$\Delta f_2(\nabla f_3)$	$\Delta^2 f_1(\nabla^2 f_3)$	$\Delta^3 f_0(\nabla^3 f_3)$		…
f_3	$\Delta f_3(\nabla f_4)$	$\Delta^2 f_2(\nabla^2 f_4)$	$\Delta^3 f_1(\nabla^3 f_4)$	$\Delta^4 f_0(\nabla^4 f_4)$	…
f_4					…
…	…	…	…	…	…

2.差分的性质

性质 1　n阶差分是n+1个函数值的线性组合

$$\Delta^n f_i = f_{n+i} - C_n^1 f_{n+i-1} + \cdots + (-1)^j C_n^j f_{n+i-j} + (-1)^n C_n^n f_i$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j \; f_{n+i-j}$$

$$\nabla^n f_i = f_i - C_n^1 f_{i-1} + \cdots + (-1)^j C_n^j f_{i-j} + (-1)^n C_n^n f_{i-n}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j \; f_{i-j}$$

性质 2 在等距节点的情况下，差分和差商及导数有如下关系：

$$\Delta^m f_i = m! h^m f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+m}] = h^m f^{(m)}(\xi)$$

$$\nabla^m f_i = m! h^m f[x_i, x_{i-1}, \cdots, x_{i-m}] = h^m f^{(m)}(\xi)$$

3. 等距节点的牛顿插值公式

设等距节点$x_i=x_0+ih$，记$f_i=f(x_i)$ $(i=0,1,\ldots, n)$。当$x\in[x_0,x_n]$时，令$x=x_0+th(0\le t\le n)$，如当x为的x_2,x_3中点时，$x=x_0+2.5h$。将牛顿插值公式中的差商用差分(性质2的公式12)代替，因

$x-x_i=(x_0+th)-(x_0+ih)=(t-i)h$

从而，牛顿插值公式在等距插值节点下的形式为：

$$N_n(x_0+th)=f_0+t\Delta f_0+\frac{1}{2!}t(t-1)\Delta^2 f_0+\ldots+\frac{1}{n!}t(t-1)\ldots(t-n+1)\Delta^n f_0$$

称为牛顿前插公式。此时

$$\omega_{n+1}(x_0+th)=t(t-1)\ldots(t-n)h^{n+1}$$

余项为

$$R_n(x_0+th)=\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi),\xi\in[x_0,x_n]$$

类似有牛顿后插公式(-n≤t≤0)：

$$N_n(x_n+th)=f_n+t\nabla f_n+\frac{1}{2!}t(t+1)\nabla^2 f_n+\cdots+\frac{1}{n!}t(t+1)\cdots(t+n-1)\nabla^n f_n$$

余项为

$$R_n(x_n+th)=\frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi),\xi\in[x_0,x_n]$$

一般来说，如要计算x_0附近的$f(x)$，用牛顿前插公式；如果要计算x_n附近的$f(x)$，用牛顿后插公式。

4.3 Hermite插值

拉格朗日和牛顿插值多项式的插值条件只要求在插值节点上插值函数与被插值函数的函数值相等，即 $L_n(x_i)=f(x_i)$和$N_n(x_i)=f(x_i)$，

有时还要插值多项式的导数在这些点上与被插函数的导数值相等。

定义：满足$\{x_i, f(x_i)\}_{i=0}^n$，和$\{(x_i, f^{(k)}(x_i), k=1,\cdots,k_i),\}_{i=0}^n$条件的插值称为Hermite插值

以所有$k_i=1$为例，即每个点上还要满足一阶导条件 $\{x_i, f(x_i)\}_{i=0}^n$和$\{x_i, f'(x_i)\}_{i=0}^n$

称为二重密切Hermite插值

$\{x_i, f(x_i)\}_{i=0}^{n}$,和$\{(x_i, f^{(k)}(x_i), k=1,\cdots,k_i),\}_{i=0}^{n}$插值条件：

$H_{2n+1}(x_i) = f(x_i), H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i)), i = 0,1,\ldots,n$

三次埃尔米特插值

考虑只有两个节点的三次埃尔米特插值。设插值点为(x_0, y_0)，(x_1, y_1)，要求一次数不超过3的多项式$H_3(x)$，满足下列条件：

$$H_3(x_i) = y_i, H'_3(x_i) = m_i, \ i=0, 1 \qquad (4.3.2)$$

式中$m_i=f'(x_i)$, $i=0,1$。

类似于拉格朗日插值多项式的构造过程，仍采用基函数的方法来构造$H_3(x)$, 将 $H_3(x)$表为：

$$H_3(x) = y_0 a_0(x) + y_1 a_1(x) + m_0 \beta_0(x) + m_1 \beta_1(x) \qquad (4.3.3)$$

式中 $a_0(x), a_1(x), \beta_0(x), \beta_1(x)$ 是基函数。

为了满足插值条件，$\alpha_0(x),\alpha_1(x),\beta_0(x),\beta_1(x)$ 应满足下列条件（并且是次数不超过3的多项式）：

表4.3.1

函数 \ 条件	函数值		导数值	
	x_0	x_1	x_0	x_1
$\alpha_0(x)$	1	0	0	0
$\alpha_1(x)$	0	1	0	0
$\beta_0(x)$	0	0	1	0
$\beta_1(x)$	0	0	0	1

由上表可知，$a_0(x_1)=a'_0(x_1)=0$

故$a_0(x)$应含有$(x-x_1)^2$因子，又$a_0(x)$是次数不超过3的多项式，因而可将它写成下面公式：

$$a_0(x)=\left[a+b(x-x_0)\right](x-x_1)^2 \quad (4.3.4)$$

式中a，b为待定常数。

由$a_0(x_0)=1$，得 $a=\dfrac{1}{(x_0-x_1)^2}$

又由$a'_0(x_0)$=0，得 $b=-\dfrac{2}{(x_0-x_1)^3}$

将a，b代入式(4.3.4)式得

$$a_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

类似地，将x_0对换x_1，可得到

$$a_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

因为$\beta_0(x_0)=\beta_0(x_1)=\beta'_0(x_1)=0$

所以$\beta_0(x)$含有$(x-x_0)(x-x_1)^2$因子，

$\beta_0(x)$可表示为

$$\beta_0(x)=c(x-x_0)(x-x_1)^2 \qquad (4.3.5)$$

式中c为待定常数。

由 $\beta'_0(x_0)=1$ 可得 $c=\dfrac{1}{(x_0-x_1)^2}$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

类似地，有 $\beta_1(x)=(x-x_1)\left(\dfrac{x-x_1}{x_1-x_0}\right)^2$

于是 $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\beta_0(x)$, $\beta_1(x)$ 有下面简单形式：

$$\alpha_0(x)=[1+2l_1(x)]l_0^2(x)$$
$$\alpha_1(x)=[1+2l_0(x)]l_1^2(x)$$
$$\beta_0(x)=[x-x_0]l_0^2(x) \qquad （4.3.6）$$
$$\beta_1(x)=[x-x_1]l_1^2(x)$$

其中 $l_0(x), l_1(x)$ 为以 $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ 为插值点的拉格朗日一次基函数。

$H_3(x)$ 的表达式为

$$H_3(x) = y_0\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

$$+y_1\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$+m_0(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+m_1(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

（4.3.7）

定理1 满足条件式(4. 3. 2)的三次埃尔米特插值多项式存在且唯一。

定理2 当$f(x)$的四阶导数在(x_0,x_1)上存在时，三次埃尔米特插值余项为

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x)$$

$$= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2, \quad \xi = \xi(x) \in (x_0, x_1)$$

（4.3.8）

记 $M_4=\max\limits_{x_0\le x\le x_1}|f^{4}(x)|$，则当x∈($x_0$,$x_1$)，有如下余项估计式：

$$|R_3(x)|=|f(x)-H_3(x)|\le\frac{M_4}{24}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

$$\le\frac{M_4}{384}(x_1-x_0)^4$$

（4.3.9）

仿照Lagrange插值的做法，首先确定多项式插值空间的维数，注意到，我们的条件共有2(n+1)个条件，所以，最高次数为2n+1

设，$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}h_i(x)f(x_i)+\sum_{i=0}^{n}g_i(x)f'(x_i)$

问题变为求函数$\{h_i(x)\}_{i=0}^{n},\{g_i(x)\}_{i=0}^{n}\in P^{2n+1}(x)$

同样：$\begin{cases}h_i(x_j)=\delta_{ij}\\ h_i'(x_j)=0\end{cases}$，$\begin{cases}g_i(x_j)=0\\ g_i'(x_j)=\delta_{ij}\end{cases}$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & h_0 & \cdots & h_n & g_0 & \cdots & g_n \\
\hline
x_0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_n & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
x'_0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x'_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}
$$

- 整个构造步骤如下：

1、确定多项式的最高项次数，就是函数空间的维数

2、假设一组基函数，列出插值多项式

3、列出基函数满足的公式（画表），求基函数

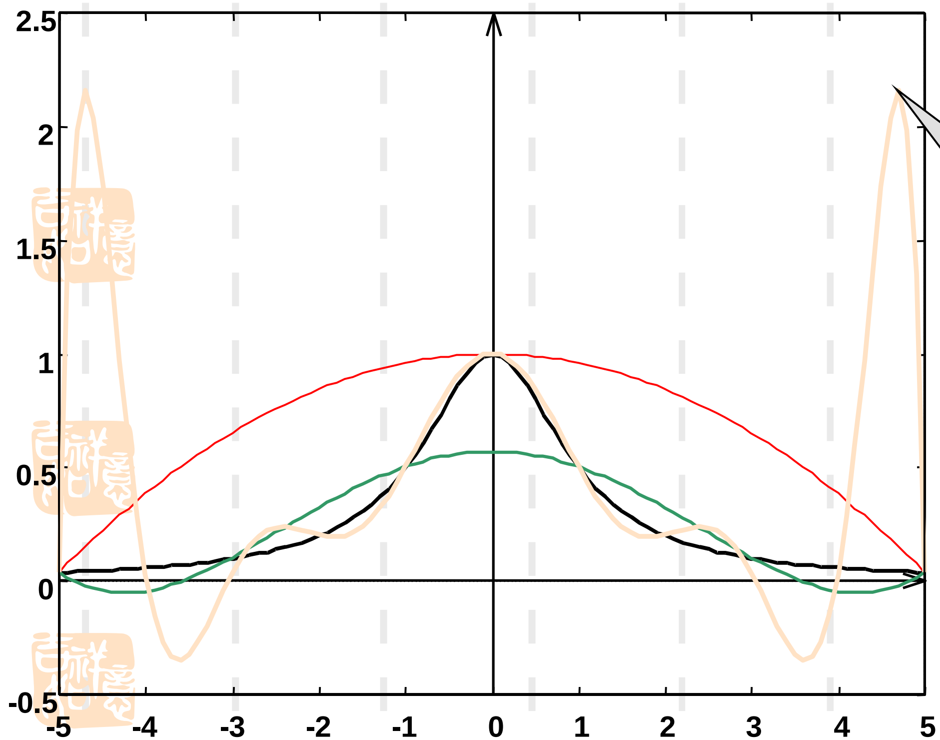
称为 构造基函数方法

定理3 设H(x)是过$x_0, x_1, \ldots, x_n$的2n+1次 Hermite 插值多项式，$f(x) \in C_{[a,b]}^{2n+1}$, $f^{(2n+2)}(x)$ 在 $[a,b]$ 存在，其中$[a,b]$是包含点的$x_0, x_1, \ldots, x_n$任一区间，则对任意给定的 $x \in [a,b]$，总存在 $\xi \in (a,b)$（依赖于x）使

$$R(x) = f(x) - H(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega^2(x)$$

是否次数越高越好呢？

例：在[–5, 5]上考察 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ **的** $L_n(x)$。**取** $x_i=-5+\dfrac{10}{n}i \quad (i=0,\dots,n)$



$L_n(x) \not\to f(x)$

n 越大，
端点附近抖动
越大，称为
Runge (龙格)现象

注：黑实线是$y=f(x)$

4.4 分段低阶插值

- Runge现象

等距高次插值，
数值稳定性差，
本身是病态的。

例： $f(x)=\frac{1}{1+25x^2}$ $x\in[-1,1]$

等距节点构造10次Lagrange插值多项式 $L_{10}(x)$

x	-0.90	-0.70	-0.50	-0.30
$f(x)$	0.04706	0.07547	0.13793	0.30769
$L_{10}(x)$	1.57872	-0.22620	0.25376	0.23535

采用分段低阶插值的理由：

1．避免龙格现象（高次插值容易带来剧烈振荡，带来数值不稳定）；

2．避免盲目地使用多的插值节点构造高次插值多项式，降低舍入误差的影响；

分段低次插值

- 4.4.1 分段线性插值

每个小区间上，作线性插值

$$s_i(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}f(x_i)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(x_{i+1}),x\in[x_i,x_{i+1}]$$

$$p_n(x)=\{S_i(x),x\in[x_i,x_{i+1}]$$

特性

(1) $p_n(x)\in C[a,b]$

(2) $p_n(x)$ 在每个小区间上为一个不高于1次的多项式

● 误差

$$\left|f(x)-p_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|$$

$$\le \frac{M_2}{2}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)^2 \qquad x\in[x_i, x_{i+1}]$$

$$\therefore \left|f(x)-p_n(x)\right| \le \frac{M_2}{8}h^2$$

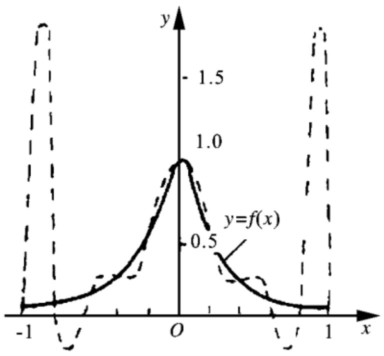
可以看出 $p_n(x)\to f(x), n\to+\infty$

收敛，可惜只一阶精度，不够光滑。

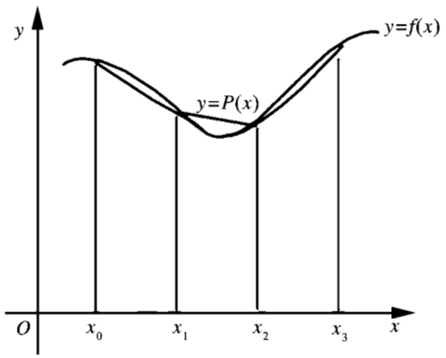
类似，可以作二重密切Hermite插值

关键:

分段、低阶插值



图a 龙格现象



图b 分段线性插值

4.4.2 分段三次埃尔米特插值

已知函数$y=f(x)$在给定节点$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$的函数值及导数值分别为$y_i=f(x_i)$, $m_i=f'(x_i)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$,求一个分段函数$H(x)$, 使其满足:

(1) $H(x_i)=y_i$, $H'(x_i)=m_i$ $(i=0, 1, \ldots, n)$;

(2) 在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上, $H(x)$是一次数不超过3的多项式。

称满足上述条件的函数 $H(x)$ 为分段三次埃尔米特插值函数。

易知分段三次埃尔米特插值函数$H(x)$及其导数$H'(x)$都是区间［a，b］上的连续函数，因而是一种光滑的分段插值，在每个小区间［x_i，x_{i+1}］上，

$$H(x)=y_i\left(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2$$

$$+y_{i+1}\left(1+2\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2$$

$$+m_i(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2+m_{i+1}(x-x_{i+1})\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2$$

$$,\quad i=0,1,\cdots,\quad n-1$$

$H(x)=$

$$\frac{y_i}{h_i^3}[h_i+(x-x_i)](x-x_{i+1})^2+\frac{y_{i+1}}{h_i^3}[h_i-2(x-x_{i+1})](x-x_i)^2$$

$$+\frac{m_i}{h_i^3}(x-x_i)(x-x_{i+1})^2+\frac{m_{i+1}}{h_i^3}(x-x_{i+1})(x-x_i)^2$$

(i=0，1，…，n-1)

4.4.3分段插值的余项

定理4 设$H(x)$ 是 $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ 上的分段三次Hermite 插值函数， $f(x)\in C^3_{[a,b]}$, $f^{(4)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在，对任一给定的 $x\in[a,b]$ ，总存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使

$$R(x)=|f(x)-H(x)|\le\frac{h^4}{384}M_4$$

其中，$h=\max\limits_{0\le i\le n-1}\left|x_{i-1}-x_i\right|, M_4=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$

Thanks!