1、解：(1) 记 $x=\sqrt{2003}-\sqrt{2001}$ $x^*=44.7549-44.7325=0.0224$

$e(x)=x-x^*$ 则

$|e(x)|\approx 5.049\times10^{-5}=0.5049\times10^{-4}\le\frac{1}{2}\times10^{-3}$

由 $e(\frac{1}{2}x)\approx\frac{1}{2}e(x)$ 得

$|e(\frac{1}{2}x)|\approx|\frac{1}{2}e(x)|\le\frac{1}{2}\times10^{-3}\times\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\times10^{-3}$

因而算式 (1)

$\frac{1}{2}(\sqrt{2003}-\sqrt{2001})\approx 0.0112$

至少具有3位有效数字

(2) 记 $x_1=\sqrt{2003}+\sqrt{2001}$ $x_1^*=44.7549+44.7325=89.4874$

$e(x)=x-x^*$，则

$|e(\frac{1}{x})|\approx|\frac{e(x)}{x^2}|$

因而有：

$|e(\frac{1}{x})|\approx|\frac{e(x)}{x^2}|\le\frac{\frac{1}{2}\times10^{-3}}{(89.4874)^2}\approx 0.624376\times10^{-7}\le\frac{1}{2}\times10^{-6}$

∴ 算式(2) $\frac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2001}}\approx\frac{1}{89.4874}=0.0111747575 6\cdots$

至少具有6位有效数字

2、证明：∵ $1^2+\ln1-4=-3<0$

$2^2+\ln2-4=\ln2>0$

∴ $[1,2]$ 为有根区间

令 $f(x)=x^2+\ln x-4$ 则 $f'(x)=2x+\frac{1}{x}>0$ 在 $[1,2]$ 上恒成立

∴ 方程在区间 $[1,2]$ 内有唯一根 $x^*$

由题可知迭代公式为：$x=\sqrt{4-\ln x}$

令 $\varphi(x)=\sqrt{4-\ln x}$

∴ $|\varphi'(x)|=|\frac{1}{2x\sqrt{4-\ln x}}|\le|\frac{1}{2\sqrt{4}}|=\frac{1}{4}<1$

∴ 迭代公式 $x=\sqrt{4-\ln x}$ 收敛

则：$x_1=\sqrt{4-\ln1}=2$ $x_2=\sqrt{4-\ln x_1}=\sqrt{4-\ln2}\approx1.818475$

$x_3=\sqrt{4-\ln x_2}\approx1.8444515$ $x_4=\sqrt{4-\ln x_3}\approx1.8406026$

$x_5=\sqrt{4-\ln x_4}\approx1.8411699997$ $x_6=\sqrt{4-\ln x_5}\approx1.841086299$

$x_7 = \sqrt{4 - \ln x_6} \approx 1.841098645$

$\therefore x^* \approx 1.841$

3、解：由已知，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 1 & 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 2 & -2 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 2 & -3 & \vdots & -5 \\ 0 & -4 & -1 & \vdots & -11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 2 & -3 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & -7 & \vdots & -21 \end{bmatrix}$$

$\therefore x_3 = 3$，代入可得 $x_2 = 2$ $x_1 = 1$