P144

8. 证明:

由已知,得 ~~$B=I-\omega D^{-1}$~~ $B=I-D^{-1}(L+U)$

且 $\rho(B)<1$

而 $B'=I-\omega D^{-1}A=I-\omega D^{-1}(D-L-U)=(1-\omega)I+\omega D^{-1}(L+U)$

特征方程 $|\lambda I-(I-\omega D^{-1}A)|=|(\lambda-1+\omega)I-\omega D^{-1}(L+U)|$

$$=\omega^n\left|\frac{\lambda-1+\omega}{\omega}I-D^{-1}(L+U)\right|$$

$\because \rho(B)<1 \quad \therefore |\lambda I-D^{-1}(L+U)|$ 的特征值均小于1

$\therefore \left|\frac{\lambda-1+\omega}{\omega}\right|<1 \qquad \because 0<\omega\leq 1$

$\therefore |\lambda|<1 \qquad \therefore \rho(B')<1$

故 JOR法收敛

证明:设 y_i 表示第 i 次迭代的向量,$y_i[j]$ 表示 y_i 的第 j 个分量

由已知,得 $\quad y_1=y_0+\alpha_0 e_1$

其中 $\quad \alpha_0=\frac{r_0^T e_1}{e_1^T A e_1}=\frac{(b-Ay_0)^T e_1}{a_{11}}$

$\therefore y_1[1]=\frac{b[1]-\sum_{i=2}^{n}a_{1i}\,y_0[i]}{a_{11}}$

$y_1[j]=y_0[j] \qquad j=2,3,\cdots,n$

可以得到 $y_1[1]$ 与直接从 $y_0=x_k$ 做 G-S迭代一步所得的第一个分量相同

考虑第m次迭代,有 $y_m=y_{m-1}+\alpha_{m-1}e_m$

其中 $\alpha_{m-1}=\frac{(b-Ay_{m-1})^T e_m}{e_m^T A e_m}=\frac{b[m]-\sum_{i=1}^{n}a_{mi}\,y_{m-1}[i]}{a_{mm}}$

从而 $\quad y_m[m]=y_{m-1}[m]+\frac{b[m]-\sum_{i=1}^{n}a_{mi}\,y_{m-1}[i]}{a_{mm}}$

$y_m[j]=y_{m-1}[j],\ j=1,\cdots,m-1,m+1,\cdots n$

$m=2,\cdots n$

令 $x_{k+1}=y_n$,则 x_{k+1} 恰与对 x_k 经过一次 G-S迭代法后的近似解完全一致

P236.

13、证明：(1) 由余项定理，得

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

当 $f(x)=x^k$，$k\le n$ 时，$f^{(n+1)}(x)=0$

$\therefore R_n(x)=x^k-\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=0$

$\therefore f(x)=x^k=L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)$

(2) 当 $f(t)=(t-k)^k$，$k\le n$ 时，$P_n(t)=\sum_{j=0}^{n}l_j(t)(x_j-x)^k$

又 $\because f^{(n+1)}(t)=0$ $\therefore R_n(t)=0$

$\therefore (t-x)^k-\sum_{j=0}^{n}l_j(t)(x_j-x)^k=0$

将 t 替换为 x，得到 $\sum_{j=0}^{n}(x_j-x)^k l_j(x)\equiv 0$

15、解：设节点取 x_0-h，x_0，x_0+h

$$R_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\omega_3(x)=\frac{e^3}{6}(x-x_0+h)(x-x_0)(x-x_0-h)$$

$$|R_2(x)|=\left|\frac{e^3}{6}(x-x_0+h)(x-x_0)(x-x_0-h)\right|$$

令 $t=x-x_0$，则 $|R_2(t)|=\left|\frac{e^3}{6}(t^3-th^2)\right|$

当 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}h$ 时，~~B~~ 上式有最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}h^3$

则 $|R_2(t)|=\left|\frac{e^3}{6}(t^3-h^2t)\right|\le\frac{e^4}{6}\frac{2\sqrt{3}}{9}h^3\le 10^{-6}$

解得 $h\le 6.585\times10^{-3}$

17、解：由已知，得 $f^7(x)=7!$ $\therefore f[x_0,x_1\cdots x_7]=\frac{f^7(x)}{7!}=1$

$f^8(x)=0$ $\therefore f[x_0,\cdots x_8]=\frac{0}{8!}=0$