P144 3.解：(1) 由已知，得

$$D=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&4&0\\0&0&10\end{bmatrix}\quad L=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\-2&3&0\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}0&-2&-1\\0&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \therefore D^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{10}\end{bmatrix}$$

$$\therefore B=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-2&-1\\1&0&-2\\-2&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{5}&\frac{3}{10}&0\end{bmatrix}$$

令 $det(\lambda I-B)=0$，则

$$\begin{vmatrix}\lambda&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\-\frac{1}{4}&\lambda&\frac{1}{2}\\\frac{1}{5}&-\frac{3}{10}&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+\frac{21}{100}\lambda+\frac{11}{200}=0$$ 解得 λ_1，λ_2，λ_3 的模均小于 1

即 $\rho(B)<1$，且 $I-B=\begin{bmatrix}1&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\-\frac{1}{4}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{5}&-\frac{3}{10}&1\end{bmatrix}$ 为非奇异矩阵

∴ 雅可比迭代法解此方程组时收敛

同理，$B'=(D-L)^{-1}U$

解 $det(\lambda I-B')=0$ 得 λ_1'，λ_2'，λ_3' 的模也均小于 0，且 $I-B'$ 也为非奇异矩阵

∴ 高斯-塞德尔迭代法解此方程组时收敛

(2) 由已知，得，雅可比迭代法的计算公式为：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-\frac{1}{5}(2x_2^{(k)}+x_3^{(k)})-\frac{12}{5}\\x_2^{(k+1)}=-\frac{1}{4}(-x_1^{(k)}+2x_3^{(k)})+\frac{20}{4}\\x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{10}(2x_1^{(k)}-3x_2^{(k)})+\frac{3}{10}\end{cases}$$

经过 17 次迭代，近似解为 $[-4.00002, 3.00000, 2.00000]^T$，符合题意

采用高斯-塞德尔迭代法，公式为：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-\frac{1}{5}(2x_2^{(k)}+x_3^{(k)})-\frac{12}{5}\\x_2^{(k+1)}=-\frac{1}{4}(-x_1^{(k+1)}+2x_3^{(k)})+\frac{20}{4}\\x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{10}(2x_1^{(k+1)}-3x_2^{(k+1)})+\frac{3}{10}\end{cases}$$

经过 8 次迭代，近似解为 $[-4.00002, 3.00000, 2.00000]^T$，符合题意

4.解：由已知，得，计算公式为：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(1-0.9)x_1^{(k)}+0.9(-\frac{2}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{5}x_3^{(k)}-\frac{12}{5})\\x_2^{(k+1)}=(1-0.9)x_2^{(k)}+0.9(\frac{1}{4}x_1^{(k+1)}-\frac{1}{2}x_3^{(k)}+\frac{20}{4})\\x_3^{(k+1)}=(1-0.9)x_3^{(k)}+0.9(-\frac{2}{10}x_1^{(k+1)}+\frac{3}{10}x_2^{(k+1)}+\frac{3}{10})\end{cases}$$

经过 8 次迭代，得到近似解 $[-4.00002, 3.00000, 2.00000]^T$

6、解：(1) 设 $x=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$，则

$$x^T A x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}[a\ b\ c]$$

$$= a^2+b^2+c^2+2\alpha ac$$

令 $x^TAx>0$，得 $2+2\alpha>0$ 且 $-2+2\alpha<0$

得 $-1<\alpha<1$

(2) 由已知，得

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $\det(\lambda I-B)=0$，得

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda & 0 \\ \alpha & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3-\lambda\alpha^2=0 \quad 解得\ \lambda_1=0,\ \lambda_2=\alpha,\ \lambda_3=-\alpha$$

$\therefore \rho(B)=|\alpha|$，又 $I-B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\det(I-B)=1-\alpha^2$

得 $-1<\alpha<1$ 时，雅可比迭代收敛

(3) 由已知，得

$$B'=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

令 $\det(\lambda I-B')=0$，得

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha^2 \end{vmatrix} = \lambda^3-\lambda\alpha^2=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=\alpha,\ \lambda_3=\alpha$$

$\therefore \rho(B')=|\alpha|$

$$I-B'=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha^2 \end{bmatrix} \qquad \det(I-B')=1-\alpha^2$$

$\therefore -1<\alpha<1$ 时，G-S迭代收敛