P273

1、(2) 解：令 $f(x)=1$，则

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2 = \frac{[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]}{3}$$

令 $f(x)=x$，则

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 = f(\cancel{-1})^{-1} + 2f(x_1) + 3f(x_2)$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{3} = \frac{1+\cancel{2x}\,2x_1^2+3x_2^2}{3}$$

解得 $\begin{cases} x_1 = 0.6899 \\ x_2 = 0.1266 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 = -0.2899 \\ x_2 = 0.5266 \end{cases}$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0,\ \frac{f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)}{3} \neq 0$$

∴ 原求积公式具有2次代数精度

3. 解：令 $f(x)=1$，则 $C = \frac{b-a}{90}(7+32+12+32+7) = b-a = \int_a^b f(x)\,dx$

当 $f(x)=x, x^2, x^3, x^4, x^5$ 时，均存在

$$\frac{b^2-a^2}{2} = \int_a^b f(x)\,dx \quad (f(x)=x)$$

$$\frac{b^3-a^3}{3} = \int_a^b f(x)\,dx \quad (f(x)=x^2)$$

$$\frac{b^4-a^4}{4} = \int_a^b f(x)\,dx \quad (f(x)=x^3)$$

$$\frac{b^5-a^5}{5} = \int_a^b f(x)\,dx \quad (f(x)=x^4)$$

$$\frac{b^6-a^6}{6} = \int_a^b f(x)\,dx \quad (f(x)=x^5)$$

当 $f(x)=x^6$ 时，有

$$C = \frac{b-a}{90}\left[7a^6 + 32\left(\frac{3a+b}{4}\right)^6 + 12\left(\frac{a+b}{2}\right)^6 + 32\left(\frac{a+3b}{4}\right)^6 + 7b^6\right]$$

$$= \frac{b-a}{90}\left(\frac{825}{64}a^6 + \frac{405}{32}a^5b + \frac{1710}{128}a^4b^2 + \frac{195}{16}a^3b^3 + \frac{1710}{128}a^2b^4 + \frac{405}{32}ab^5 + \frac{825}{64}b^6\right) \neq \frac{b^7-a^7}{7} = \int_a^b x^6\,dx$$

二、柯特斯公式最高具有5次代数精度

5、(2) 证明：由微分中值定理，有：

$f(x)=f(b)+f'(\eta)(x-b)$

$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [f(b)+f'(\eta)(x-b)]\,dx$

$= f(b)(b-a) - \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$

证毕

7、解. 由已知得

$|R_n(f)| = \left|\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta)\right| \le \left|\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 e\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}$

解得 $n=213 \ge 212.849$

改用复合辛普森公式，得

$R_n(f) = -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\eta)$　　$f^{(4)}(\eta)=e^{\eta}$　　$\eta\in(0,1)$

$|R_n(f)| = \left|\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\eta)\right| \le \left|\frac{1}{2880}\left(\frac{1}{n}\right)^4 e\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}$

解得 $n=4 \ge 3.71$，