Ortogonalidade e Não-Ortogonalidade de Funções
Cálculos Detalhados

Moisés Diego Cipriano dos Santos

11/09/2025

1 Definição de Ortogonalidade

Duas funções $f(t)$ e $g(t)$ são **ortogonais** em $[a, b]$ se:

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$$

2 Ortogonalidade de Seno e Cosseno

Para $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (período fundamental), vamos demonstrar as propriedades de ortogonalidade, assumindo que n e m são **inteiros** ($n, m \in \mathbb{Z}$).

Observação: Se $n = 0$ ou $m = 0$, então:

$$\sin(0 \cdot \omega_0 t) \equiv 0 \quad \text{e} \quad \cos(0 \cdot \omega_0 t) \equiv 1$$

portanto, os produtos envolvendo $\sin(0 \cdot \omega_0 t)$ serão sempre nulos, e os produtos envolvendo $\cos(0 \cdot \omega_0 t)$ devem ser tratados separadamente.

2.1 Produto de Senos com Frequências Diferentes

Para $n \neq m$:

$$\int_0^{T_0} \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,dt$$

Usando a identidade trigonométrica: $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

$$= \int_0^{T_0} \frac{1}{2}[\cos((n - m)\omega_0 t) - \cos((n + m)\omega_0 t)]\,dt \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n - m)\omega_0 t)}{(n - m)\omega_0} - \frac{\sin((n + m)\omega_0 t)}{(n + m)\omega_0}\right]_0^{T_0} \tag{2}$$

Como $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, temos:

- $(n - m)\omega_0 T_0 = (n - m) \cdot 2\pi$ (múltiplo inteiro de 2π)
- $(n + m)\omega_0 T_0 = (n + m) \cdot 2\pi$ (múltiplo inteiro de 2π)

Portanto: $\sin((n-m)\cdot 2\pi) = \sin((n+m)\cdot 2\pi) = 0$

Resultado: $= 0$ quando $n \neq m$

Para $n = m$:

$$\int_0^{T_0} \sin^2(n\omega_0 t)\, dt$$

Usando a identidade: $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$$= \int_0^{T_0} \frac{1-\cos(2n\omega_0 t)}{2}\, dt \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2n\omega_0 t)}{2n\omega_0}\right]_0^{T_0} \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left[T_0 - \frac{\sin(2n\omega_0 T_0)}{2n\omega_0} + 0\right] \tag{5}$$

Como $2n\omega_0 T_0 = 4n\pi$, temos $\sin(4n\pi) = 0$

Resultado: $= \frac{T_0}{2}$ quando $n = m$

2.2 Produto de Cossenos

Para $n \neq m$:

$$\int_0^{T_0} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\, dt$$

Usando a identidade trigonométrica:

$$\cos A \cos B = \tfrac{1}{2}\big[\cos(A-B) + \cos(A+B)\big]$$

$$= \int_0^{T_0} \tfrac{1}{2}\big[\cos((n-m)\omega_0 t) + \cos((n+m)\omega_0 t)\big]\, dt \tag{1}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{T_0} \cos((n-m)\omega_0 t)\, dt \;+\; \tfrac{1}{2}\int_0^{T_0} \cos((n+m)\omega_0 t)\, dt \tag{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-m)\omega_0 t)}{(n-m)\omega_0}\right]_0^{T_0} + \tfrac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)\omega_0 t)}{(n+m)\omega_0}\right]_0^{T_0} \tag{3}$$

Como $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, temos:

$$(n-m)\omega_0 T_0 = (n-m)\,2\pi \quad \text{(múltiplo inteiro de } 2\pi\text{)},$$
$$(n+m)\omega_0 T_0 = (n+m)\,2\pi \quad \text{(múltiplo inteiro de } 2\pi\text{)}.$$

Portanto,

$$\sin((n-m)\omega_0 T_0) = \sin((n+m)\omega_0 T_0) = 0,$$

e os termos em (3) se anulam:

$$\Rightarrow \int_0^{T_0} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\, dt = 0 \quad \text{quando } n \neq m.$$

$$\boxed{\text{Resultado: } 0 \text{ quando } n \neq m.}$$

Para $n = m$:

$$\int_0^{T_0} \cos^2(n\omega_0 t)\, dt$$

Usando a identidade trigonométrica:

$$\cos^2 A = \tfrac{1}{2}[1 + \cos(2A)]$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^{T_0} [1 + \cos(2n\omega_0 t)]\, dt = \tfrac{1}{2} \left[\int_0^{T_0} 1\, dt + \int_0^{T_0} \cos(2n\omega_0 t)\, dt \right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[T_0 + \frac{\sin(2n\omega_0 T_0)}{2n\omega_0} \right]$$

Como $2n\omega_0 T_0 = 4n\pi$, e $\sin(4n\pi) = 0$, temos:

$$\Rightarrow \int_0^{T_0} \cos^2(n\omega_0 t)\, dt = \frac{T_0}{2}.$$

$$\boxed{\text{Resultado: } \frac{T_0}{2} \text{ quando } n = m.}$$

2.3 Produto de Seno e Cosseno

$$\int_0^{T_0} \sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\, dt$$

Usando: $\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)]$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{T_0} [\sin((n + m)\omega_0 t) + \sin((n - m)\omega_0 t)]\, dt \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos((n + m)\omega_0 t)}{(n + m)\omega_0} - \frac{\cos((n - m)\omega_0 t)}{(n - m)\omega_0} \right]_0^{T_0} \tag{7}$$

Avaliando nos limites e usando que $(n \pm m)\omega_0 T_0$ são múltiplos de 2π:

Resultado: $= 0$ para todos os valores de n e m

3 Exemplo Ortogonal

3.1 Exemplo:1 (Produto de Cossenos)

Considere: $x(t) = \cos(2\pi t)\cos(6\pi t)$

Cálculo no intervalo $[0, 1]$**:**

O cálculo é análogo ao dos senos. Consideremos o produto de dois cossenos com frequências diferentes:

$$\int_0^1 \cos(2\pi t) \cdot \cos(6\pi t)\, dt \tag{8}$$

Utilizando a identidade trigonométrica para produto de cossenos:

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)] \tag{9}$$

Aplicando esta identidade com $A = 2\pi t$ e $B = 6\pi t$:

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi t) \cdot \cos(6\pi t) &= \frac{1}{2}[\cos(2\pi t + 6\pi t) + \cos(2\pi t - 6\pi t)] && (10)\\
&= \frac{1}{2}[\cos(8\pi t) + \cos(-4\pi t)] && (11)\\
&= \frac{1}{2}[\cos(8\pi t) + \cos(4\pi t)] && (12)
\end{aligned}$$

Onde utilizamos a propriedade $\cos(-x) = \cos(x)$.

Substituindo na integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos(2\pi t) \cdot \cos(6\pi t)\, dt &= \int_0^1 \frac{1}{2}[\cos(8\pi t) + \cos(4\pi t)]\, dt && (13)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(8\pi t)\, dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(4\pi t)\, dt && (14)
\end{aligned}$$

Calculando cada integral separadamente:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos(8\pi t)\, dt &= \left[\frac{\sin(8\pi t)}{8\pi}\right]_0^1 && (15)\\
&= \frac{\sin(8\pi) - \sin(0)}{8\pi} && (16)\\
&= \frac{0 - 0}{8\pi} = 0 && (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos(4\pi t)\, dt &= \left[\frac{\sin(4\pi t)}{4\pi}\right]_0^1 && (18)\\
&= \frac{\sin(4\pi) - \sin(0)}{4\pi} && (19)\\
&= \frac{0 - 0}{4\pi} = 0 && (20)
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\int_0^1 \cos(2\pi t)\cdot\cos(6\pi t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 0 \tag{21}$$

Resultado: $= 0$

Conclusão: As funções $\cos(2\pi t)$ e $\cos(6\pi t)$ são ortogonais no intervalo $[0,1]$, uma vez que sua integral é zero.

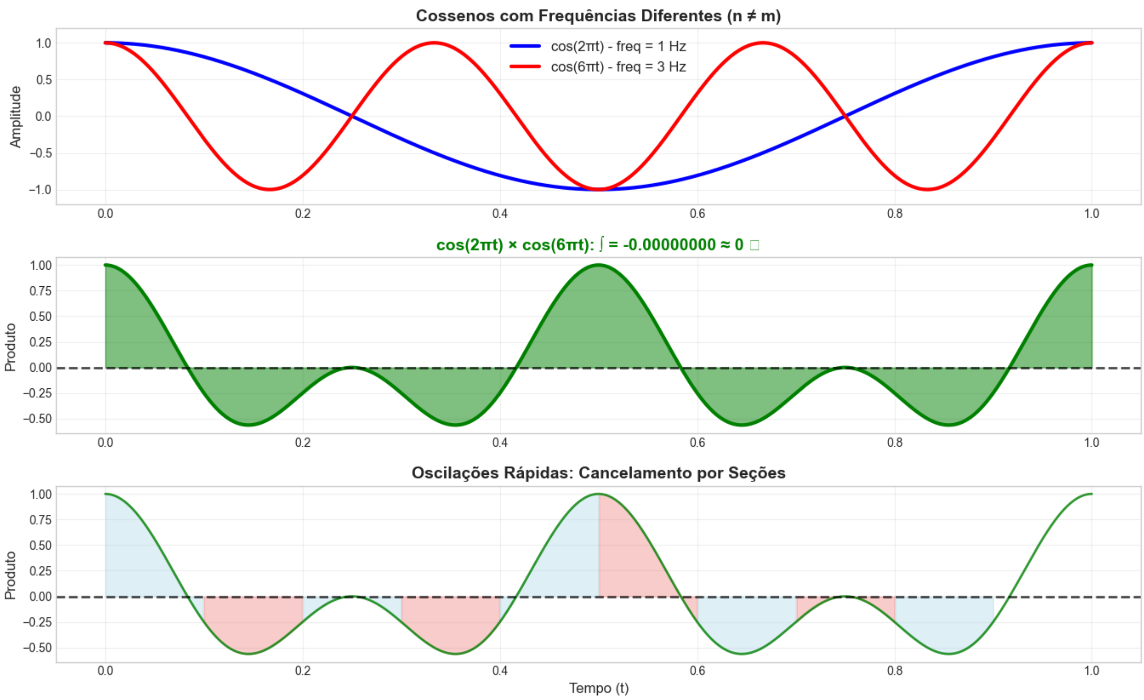

Figure 1: Função Ortogonal do Produto de Cossenos

Generalização: Para quaisquer inteiros $n \neq m$:

$$\int_0^1 \cos(n\pi t)\cdot\cos(m\pi t)\,dt = 0 \tag{22}$$

3.2 Exemplo:2 (Produto de Senos)

Considere: $x(t) = (2\pi t)(4\pi t)$

Cálculo no intervalo $[0,1]$:

Consideremos o produto de dois senos com frequências diferentes:

$$\int_0^1 \sin(2\pi t)\cdot\sin(4\pi t)\,dt \tag{23}$$

Utilizando a identidade trigonométrica para produto de senos:

$$\sin A\cdot\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)] \tag{24}$$

Aplicando esta identidade com $A = 2\pi t$ e $B = 4\pi t$:

$$\sin(2\pi t) \cdot \sin(4\pi t) = \frac{1}{2}[\cos(2\pi t - 4\pi t) - \cos(2\pi t + 4\pi t)] \tag{25}$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(-2\pi t) - \cos(6\pi t)] \tag{26}$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(2\pi t) - \cos(6\pi t)] \tag{27}$$

Onde utilizamos a propriedade $\cos(-x) = \cos(x)$.
Substituindo na integral:

$$\int_0^1 \sin(2\pi t) \cdot \sin(4\pi t)\, dt = \int_0^1 \frac{1}{2}[\cos(2\pi t) - \cos(6\pi t)]\, dt \tag{28}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(2\pi t)\, dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(6\pi t)\, dt \tag{29}$$

Calculando cada integral separadamente:

$$\int_0^1 \cos(2\pi t)\, dt = \left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\right]_0^1 \tag{30}$$
$$= \frac{\sin(2\pi) - \sin(0)}{2\pi} \tag{31}$$
$$= \frac{0-0}{2\pi} = 0 \tag{32}$$

$$\int_0^1 \cos(6\pi t)\, dt = \left[\frac{\sin(6\pi t)}{6\pi}\right]_0^1 \tag{33}$$
$$= \frac{\sin(6\pi) - \sin(0)}{6\pi} \tag{34}$$
$$= \frac{0-0}{6\pi} = 0 \tag{35}$$

Portanto:

$$\int_0^1 \sin(2\pi t) \cdot \sin(4\pi t)\, dt = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \tag{36}$$

Conclusão: As funções $\sin(2\pi t)$ e $\sin(4\pi t)$ são ortogonais no intervalo $[0, 1]$, uma vez que sua integral é zero.

Resultado: $= 0$

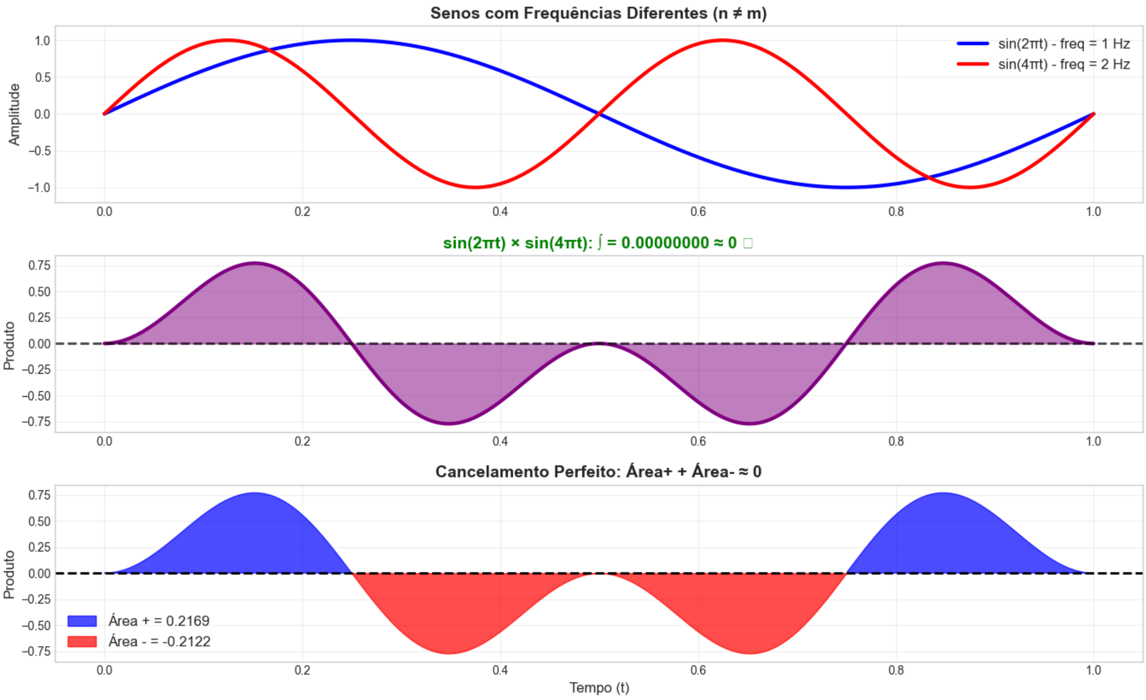

Figure 2: Função Ortogonal do Produto de Senos

Generalização: Para quaisquer inteiros $n \neq m$:

$$\int_0^1 \sin(n\pi t) \cdot \sin(m\pi t)\, dt = 0 \tag{37}$$

3.3 Exemplo:3

Considere: $x(t) = \cos(4\pi t)\sin(2\pi t)$

Cálculo no intervalo $[0, 1]$**:**

Usando a identidade: $\cos A \sin B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)]$

$$x(t) = \cos(4\pi t)\sin(2\pi t) = \frac{1}{2}[\sin(6\pi t) - \sin(2\pi t)]$$

$$\int_0^1 x(t)\, dt = \int_0^1 \frac{1}{2}[\sin(6\pi t) - \sin(2\pi t)]\, dt \tag{38}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(6\pi t)}{6\pi} + \frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}\right]_0^1 \tag{39}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{\cos(6\pi)}{6\pi} + \frac{\cos(2\pi)}{2\pi}\right) - \left(-\frac{\cos(0)}{6\pi} + \frac{\cos(0)}{2\pi}\right)\right] \tag{40}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{6\pi} + \frac{1}{2\pi}\right) - \left(-\frac{1}{6\pi} + \frac{1}{2\pi}\right)\right] \tag{41}$$

Resultado: $= 0$

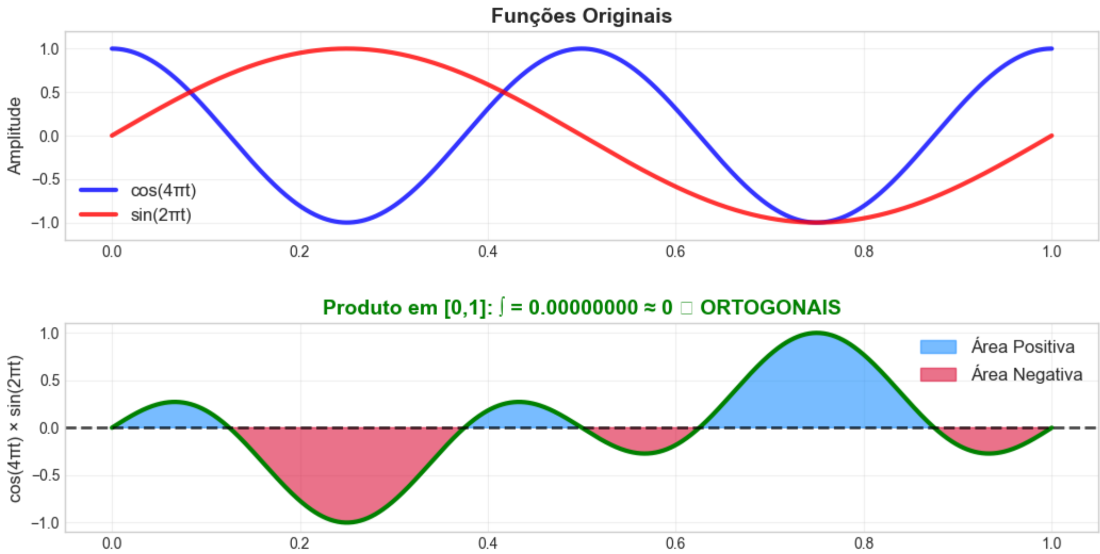

Figure 3: Função ortogonal Do Produto Entre Seno e Cosseno

Isso confirma que $\cos(4\pi t)$ e $\sin(2\pi t)$ são ortogonais no intervalo $[0, 1]$.

4 Exemplos Não Ortogonais

4.1 Caso 1: Frequências Iguais (Função consigo mesma)

$$\int_0^1 \sin^2(2\pi t)\, dt$$

Usando $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$:

$$= \int_0^1 \frac{1-\cos(4\pi t)}{2}\, dt \tag{42}$$

$$= \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(4\pi t)}{4\pi}\right]_0^1 \tag{43}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\sin(4\pi)}{4\pi}\right) - \left(0 - \frac{\sin(0)}{4\pi}\right)\right] \tag{44}$$

$$= \frac{1}{2}[1 - 0 - 0 + 0] = \frac{1}{2} \tag{45}$$

Resultado: $\neq 0$, portanto não são ortogonais.

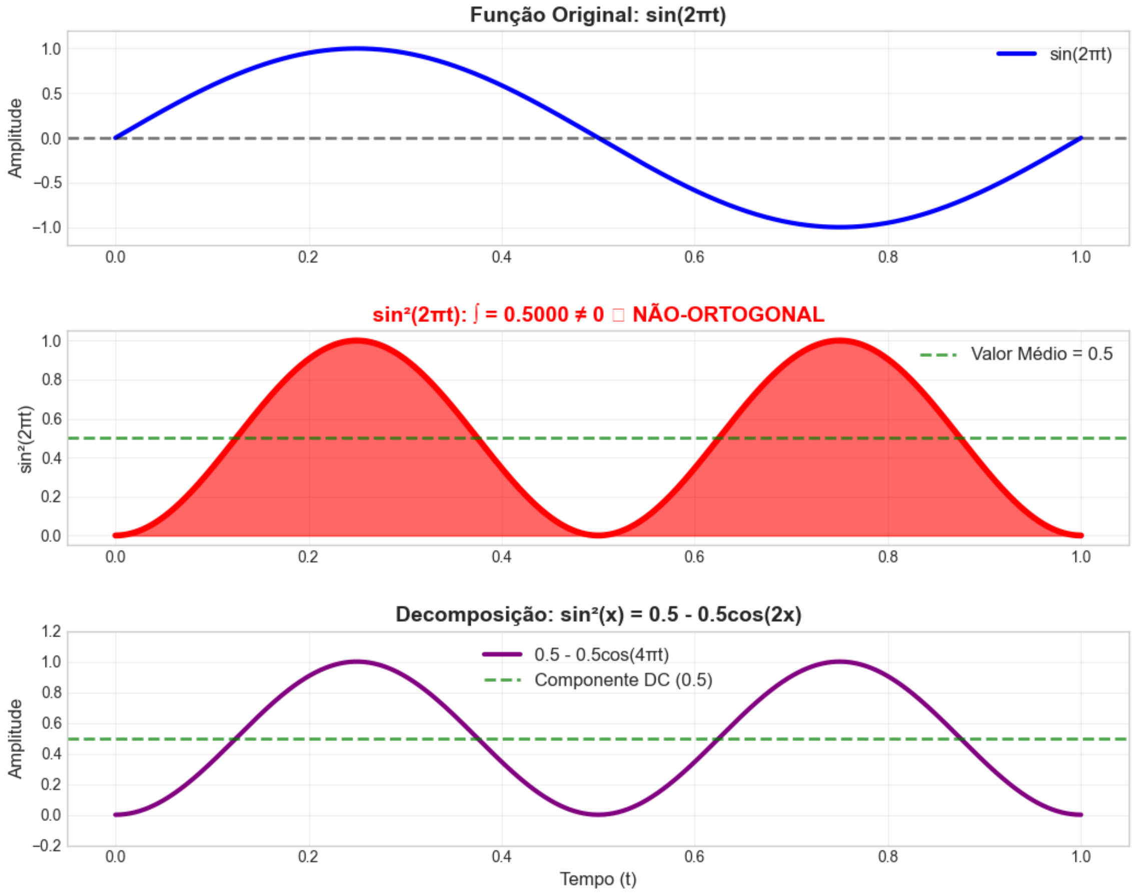

Figure 4: Função Não Ortogonal

4.2 Caso 2: Intervalo Inadequado

Para $x(t) = \cos(4\pi t)\sin(2\pi t)$ no intervalo $[0, 0.5]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{0.5} \cos(4\pi t)\sin(2\pi t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^{0.5} [\sin(6\pi t) - \sin(2\pi t)]\,dt && (46)\\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(6\pi t)}{6\pi} + \frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}\right]_0^{0.5} && (47)\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{\cos(3\pi)}{6\pi} + \frac{\cos(\pi)}{2\pi}\right) - \left(-\frac{1}{6\pi} + \frac{1}{2\pi}\right)\right] && (48)\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{(-1)}{6\pi} + \frac{(-1)}{2\pi}\right) - \left(-\frac{1}{6\pi} + \frac{1}{2\pi}\right)\right] && (49)\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6\pi} - \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{6\pi} - \frac{1}{2\pi}\right] && (50)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6\pi} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2\pi} = \frac{1}{6\pi} - \frac{1}{2\pi} && (51)\\
&= \frac{1-3}{6\pi} = -\frac{2}{6\pi} = -\frac{1}{3\pi} && (52)
\end{aligned}$$

Resultado: $\neq 0$, confirmando que no intervalo inadequado a ortogonalidade não se mantém.

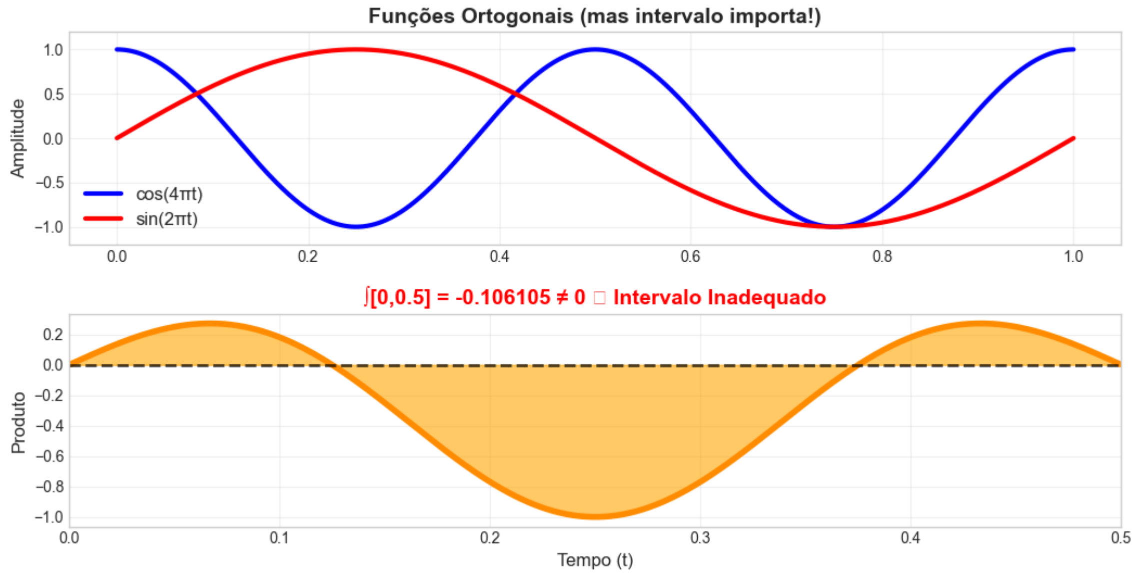

Figure 5: Função Não-Ortogonal, por conta que o intervalo não é um múltiplo inteiro do período fundamental de x(t)

5 Ortogonalidade das Exponenciais Complexas

Para exponenciais complexas $e^{jn\omega_0 t}$ e $e^{jm\omega_0 t}$:

$$\int_0^{T_0} e^{jn\omega_0 t}\overline{e^{jm\omega_0 t}}\,dt = \int_0^{T_0} e^{jn\omega_0 t}e^{-jm\omega_0 t}\,dt \tag{53}$$

$$= \int_0^{T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t}\,dt \tag{54}$$

Para $n \neq m$:

$$= \frac{e^{j(n-m)\omega_0 t}}{j(n-m)\omega_0}\bigg|_0^{T_0} = \frac{e^{j(n-m)\omega_0 T_0} - 1}{j(n-m)\omega_0} \tag{55}$$

Como $(n-m)\omega_0 T_0 = (n-m)\cdot 2\pi$, temos $e^{j(n-m)\cdot 2\pi} = 1$

Resultado: $= 0$ quando $n \neq m$

Para $n = m$:

$$\int_0^{T_0} e^0\,dt = \int_0^{T_0} 1\,dt = T_0$$

Resultado: $= T_0$ quando $n = m$

6 Relação entre Exponenciais e Funções Trigonométricas

As fórmulas de Euler:

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \tag{56}$$

$$\sin(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \tag{57}$$

Mostram que as propriedades de ortogonalidade dos senos e cossenos derivam diretamente da ortogonalidade das exponenciais complexas, uma vez que qualquer combinação linear de funções ortogonais mantém as propriedades de ortogonalidade quando apropriadamente normalizada.

7 Resumo das Propriedades de Ortogonalidade

$$\int_0^{T_0} \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ T_0/2, & n = m, \end{cases} \tag{58}$$

$$\int_0^{T_0} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ T_0/2, & n = m, \end{cases} \tag{59}$$

$$\int_0^{T_0} \sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,dt = 0 \tag{60}$$

$$\int_0^{T_0} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} T_0, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \tag{61}$$