

实数

1 实数公理

集合 \mathbb{R} 为实数集, 若 I-VI 条件成立。

(I) 加法公理

定义加法运算

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

使 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x + y \in \mathbb{R}$, 且有:

(1) 中性元素 0:

$$\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + 0 = 0 + x = x$$

(2) 逆元素 $-x$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + (-x) = (-x) + x = 0$$

(3) 结合律:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow x + (y + z) = (x + y) + z$$

(4) 交换律:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y = y + x$$

14

(II) 乘法公理

定义乘法运算

$$\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2)$$

使 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x \bullet y \in \mathbb{R}$, 且有:

(1) 中性元素 1:

$$\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \bullet 1 = 1 \bullet x = x$$

(2) 逆元素 x^{-1} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x^{-1} \in \mathbb{R} \Rightarrow x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = 1$$

(3) 结合律:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$$

24 (4) 交换律:

25 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \bullet y = y \bullet x$

26

27 (I,II) 加法公理与乘法公理

28 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$

29

30 (III) 序公理

31 \mathbb{R} 中元素存在关系 \leq 。对 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, 可判断关系 $x \leq y$ 是否成立。且有:

32 (1) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq x$

33 (2) $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$

34 (3) $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

35 (4) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq y \vee y \leq x$

36

37 (I,III) 加法公理与序公理

38 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

39

40 (II,III) 乘法公理与序公理

41 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \Rightarrow x \bullet y \geq 0$

42

43 (VI) 连续性 (完备性) 公理

44 X, Y 为 \mathbb{R} 的非空子集, 且 $\forall x \in X, \forall y \in Y \Rightarrow x \leq y$ 则 $\exists c \in \mathbb{R}$, 使

45 $\forall x \in X, \forall y \in Y \Rightarrow x \leq c \leq y$

46

47 2 实数公理之推论

48 加法公理 (I) 之推论

49 (1) 中性元素 0 唯一

50 假设有 $0_1, 0_2$ 为 \mathbb{R} 中两个不同的零元素, 则 $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$

51 (2) 任意实数 x 有且仅有一个逆元素 $-x$

52 假设 x_1, x_2 为 $x \in \mathbb{R}$ 的两个不同的逆元素, 则 $x_1 = x_1 + 0 = x_1 + x + x_2 = 0 + x_2 = x_2$

53 (3) 关于 x 的方程 $a + x = b$ 在 \mathbb{R} 中有唯一解 $x = b + (-a)$

54 a 有唯一逆元素 $-a$, 使得 $a + (-a) = 0$, 故 $b + (-a)$ 唯一。且有 $x = x + 0 = a + x + (-a) = b + (-a)$

55

乘法公理 (II) 之推论

(1) 中性元素 1 唯一

(2) 任意实数 x 有且仅有一个逆元素 x^{-1}

(3) $a \neq 0$ 时, 关于 x 的方程 $a \bullet x = b$ 在 \mathbb{R} 中有唯一解 $x = b \bullet a^{-1}$

(I,II) 之推论

(1) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \bullet 0 = 0 \bullet x = 0$

$x \bullet 0 = x \bullet (0 + 0) = x \bullet 0 + x \bullet 0 \Rightarrow -(x \bullet 0) + x \bullet 0 = x \bullet 0 = 0$

(2) $x \bullet y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

假设 $x \neq 0$, 方程 $x \bullet y = 0$ 有唯一解 $y = 0 \bullet x^{-1} = 0$; 假设 $y \neq 0$ 同理

(3) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-1) \bullet x = -x$

给定 $x \in \mathbb{R}$, $-x$ 唯一, 且 $x + (-1) \bullet x = x \bullet (1 + (-1)) = x \bullet 0 = 0$

(4) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-1) \bullet (-x) = x$

(5) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-x) \bullet (-x) = x \bullet x$

序公理之推论

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow x < y \vee x = y \vee x > y$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}$

$x < y \wedge y \leq z \Rightarrow x < z$

$x \leq y \wedge y < z \Rightarrow x < z$

(I,III), (II,III) 之推论

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \forall w \in \mathbb{R}$

$x < y \Rightarrow x + z < y + z$

$x > 0 \Rightarrow -x < 0$

$x \leq y \wedge z \leq w \Rightarrow x + z \leq y + w$

$x \leq y \wedge z < w \Rightarrow x + z < y + w$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}$

$x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow xy > 0$

$x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow xy > 0$

$x > 0 \wedge y < 0 \Rightarrow xy < 0$

$x < y \wedge z > 0 \Rightarrow xz > yz$

$x < y \wedge z < 0 \Rightarrow xz < yz$

89 (3) $0 < 1$

90 (4) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

91 (5) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x > 0 \wedge x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$

92

93 **界**

94 集合 $X \subset \mathbb{R}$, 若 $\exists c \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall x \in X, x \leq c (x \geq c)$, 则 c 为 X 之上 (下) 界

95

96 **有界集**

97 既有上确界又有下确界的集合为有界集

98

99 **最值**

100 集合 $X \subset \mathbb{R}$, 数 $a \in X$, 若 $\forall x \in X, x \leq a (x \geq a)$, 则 a 为 X 之最大值 (最小值), 记作 $\max_{x \in X} x (\min_{x \in X} x)$

101

102 **确界**

103 集合 $X \subset \mathbb{R}$, 其最小上界为上确界, 记作 $\sup_{x \in X} x$; 其最大下界为下确界, 记作 $\inf_{x \in X} x$

104

105 **确界定理**

106 实数集任何有上 (下) 界的子集有唯一上 (下) 确界

107 记上有界集 $X \in \mathbb{R}$, 其上界集合 $Y = \{y \in \mathbb{R} : \forall x \in X, x \leq y\}$

108 则根据连续性公理, $\exists c, \forall x \in X, \forall y \in Y, x \leq c \leq y$

109 $\therefore c$ 为 X 之上界, 亦为 Y 之下界, 且 $c \in Y$

110 $\therefore c = \min Y$

111 $\therefore c$ 唯一, 且 $c = \sup X$

112 **3 实数类**

113 **自然数 \mathbb{N}**

114 $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots$

115

116 **归纳集**

117 集 $X \subset \mathbb{R}$ 为归纳集, 若 $\forall x \in X \Rightarrow x + 1 \in X$

118

119 **自然数集**

120 包含 1 的一切归纳集之交集为自然数集 \mathbb{N}

121

122 数学归纳原理

123 $E \subset \mathbb{N}, 1 \in E$, 且有 $x \in E \Rightarrow x + 1 \in E$, 则 $E = \mathbb{N}$

124

125 数学归纳原理之推论

126 (1) 两自然数之和与积为自然数

127 任取 $n \in \mathbb{N}$, 则 $n + 1 \in \mathbb{N}$ 128 假设 $n + m \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$, 则 $n + m + 1 \in \mathbb{N}$ 129 \therefore 两自然数之和与积为自然数130 对自然数 n , 有 $n \bullet 1 \in \mathbb{N}$ 131 假设 $n \bullet m \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$, 则 $n \bullet (m + 1) = n \bullet m + n \in \mathbb{N}$ 132 \therefore 两自然数之积为自然数133 (2) $n \in \mathbb{N} - \{1\} \Rightarrow n - 1 \in \mathbb{N}$ 134 记 $E = \{n - 1 : n \in \mathbb{N} - 1\}$ 135 $\therefore 1 = 2 - 1 \in E$ 136 任取 $m \in E, m = n - 1$, 则 $m + 1 = n = (n + 1) - 1 \in E$ 137 $\therefore E = \mathbb{N}$ 138 (3) $\forall n \in \mathbb{N}, \{x \in \mathbb{N} : x > n\}$ 有最小元素 $n + 1$ 139 $n = 1$ 时140 记 $M = \{x \in \mathbb{N} : x = 1 \vee x \geq 2\}$ 141 假设 $x \in M$, 则 $x = 1 \in M \Rightarrow x + 1 = 2 \in M$ 或 $x \geq 2 \Rightarrow x + 1 \geq 2 \Rightarrow x + 1 \in M$ 142 $\therefore M = \mathbb{N}$ 143 $\therefore x \neq 1 \wedge x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 2$ 144 $\therefore n = 1, \min\{x \in \mathbb{N} : n < x\} = n + 1 = 2$ 145 假设自然数 n 使得命题成立, 即 $\min\{y \in \mathbb{N} : n < y\} = n + 1$ 146 取 $x \in \{x \in \mathbb{N} : x > n + 1\}$ 147 有 $x - 1 > n$ 148 $\therefore x - 1 \geq n + 1 \Rightarrow x \geq n + 2$ 149 $\therefore n + 1$ 使得命题成立150 (4) $m \in \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{N} \wedge n < m \Rightarrow n + 1 \leq m$ 151 (5) 自然数 n , 不存在自然数 $x \in (n, n + 1)$ 152 (6) 自然数 $n, n \neq 1$, 不存在自然数 $x \in (n - 1, n)$

153 (7) 自然数集之非空子集有最小元素

154 记 $M \subset \mathbb{N}, M \neq \emptyset$
 155 若 $1 \in M$, 则 $\min M = 1$
 156 若 $1 \notin M$, 则 $1 \in \mathbb{N} - M$
 157 则有自然数 n , 使得所有小于等于 n 的自然数属于 $\mathbb{N} - M$, 且 $n + 1 \in M$
 158 否则 $1 \in \mathbb{N} - M$ 且 $\forall n \in \mathbb{N}, n \in M \wedge n + 1 \in M \Rightarrow M = \mathbb{N}$
 159 $\therefore \min M = n + 1$

160

161 整数集

162 自然数集、自然数的相反数集、0 的并集为整数集 \mathbb{Z}

163

164 算术基本定理

165 自然数可唯一地（不计相乘顺序）表示为有限个素数之积

166

167 有理数

168 形如 $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ 的数为有理数

169 有理数集记为 \mathbb{Q}

170

171 无理数

172 不属于有理数集的实数为无理数

173 4 Archimedes 原理

174 (1) 自然数集的任何非空上有界子集有最大值

175 任意 $E \subset \mathbb{N}, E \neq \emptyset$ 有唯一上确界 $s = \sup E$

176 $\therefore \exists n \in E, s - 1 < n \leq s$

177 $\therefore n + 1 > s \Rightarrow n + 1 \notin E$

178 $\therefore n = \max E$

179 (2) 自然数集无上界

180 (3) 整数集的任何非空上有界子集有最大值

181 (4) 整数集的任何非空下有界子集有最小值

182 (5) 整数集无上下界

183

184 Archimedes 原理

185 任意固定正数 h , 则 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! k \in \mathbb{Z}, (k - 1)h \leq x < kh$

186 考虑下有界集合 $\{n \in \mathbb{Z} : n > \frac{x}{h}\}$, 其唯一最小值记为 k

187 $\therefore k - 1 \leq \frac{x}{h} < k$

188 $\therefore (k - 1)h \leq x < kh$

189

190 $(1) \forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{n} < \epsilon$

191 任意固定正数 ϵ , 则 $x = 1$ 时, $\exists n \in \mathbb{N}, 0 < 1 < n\epsilon$

192 $\therefore 0 < \frac{1}{n} < \epsilon$

193 (2) 非负实数 x , 且 $\forall n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n}$, 则 $x = 0$

194 若 $x > 0$, 则 $\exists n \in \mathbb{N}, x > \frac{1}{n}$

195 $(3) \forall a \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, a < b \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}, a < r < b$

196 取 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $b - a > \frac{1}{n}$

197 另取 $m \in \mathbb{Z}$, 使得 $(m - 1)\frac{1}{n} \leq a < m\frac{1}{n}$

198 假设 $b \leq \frac{m}{n}$, 则 $(m - 1)\frac{1}{n} \leq a < b \leq \frac{m}{n} \Rightarrow b - a \leq \frac{m}{n} - (m - 1)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$

199 $\therefore b > \frac{m}{n}$

200 $\therefore \exists r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, a < r < b$

201 $(4) \forall x \in \mathbb{R}, \exists! k \in \mathbb{Z}, k \leq x < k + 1$

202

203 5 误差

204 绝对误差和相对误差

205 某量有精确值 x , 近似值 \tilde{x}

206 近似值之绝对误差 $\Delta(\tilde{x}) = |x - \tilde{x}|$

207 相对误差 $\delta(\tilde{x}) = \frac{\Delta(\tilde{x})}{|\tilde{x}|}$

208

209 绝对误差的估计

210 精确值 x, y 分别有估计值 \tilde{x}, \tilde{y} , 绝对误差 $\Delta(\tilde{x}) = |x - \tilde{x}|, \Delta(\tilde{y}) = |y - \tilde{y}|$

211 $(1) \Delta(\tilde{x} + \tilde{y}) = |(x + y) - (\tilde{x} + \tilde{y})| \leq \Delta(\tilde{x}) + \Delta(\tilde{y})$

212 $(2) \Delta(\tilde{x}\tilde{y}) = |xy - \tilde{x}\tilde{y}| \leq |\tilde{x}|\Delta(\tilde{y}) + |\tilde{y}|\Delta(\tilde{x}) + \Delta(\tilde{x})\Delta(\tilde{y})$

213 (3) 若 $y \neq 0, \tilde{y} \neq 0, \delta(\tilde{y}) = \frac{\Delta(\tilde{y})}{|\tilde{y}|} < 1$, 则

214 $\Delta(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}) = |\frac{x}{y} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}| \leq \frac{|\tilde{x}|\Delta(\tilde{y}) + |\tilde{y}|\Delta(\tilde{x})}{\tilde{y}^2} \frac{1}{1 - \delta(\tilde{y})}$

215 记 $x = \tilde{x} + \alpha, y = \tilde{y} + \beta$

216 $(1) \Delta(\tilde{x} + \tilde{y}) = |(x + y) - (\tilde{x} + \tilde{y})| = |(x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y})| \leq |x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}| = \Delta(\tilde{x}) + \Delta(\tilde{y})$

217 $(2) \Delta(\tilde{x}\tilde{y}) = |(\tilde{x} + \alpha)(\tilde{y} + \beta) - \tilde{x}\tilde{y}| = |\tilde{x}\beta + \tilde{y}\alpha + \alpha\beta| \leq |\tilde{x}|\Delta(\tilde{y}) + |\tilde{y}|\Delta(\tilde{x}) + \Delta(\tilde{x})\Delta(\tilde{y})$

$$(3) \Delta(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}) = |\frac{x}{y} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}| = |\frac{x\tilde{y}-y\tilde{x}}{y\tilde{y}}| = |\frac{(\tilde{x}+\alpha)\tilde{y}-(\tilde{y}+\beta)\tilde{x}}{\tilde{y}^2}| \leq \frac{|\tilde{x}||\beta|+|\tilde{y}||\alpha|}{\tilde{y}^2} \frac{1}{1-\delta(\tilde{y})} = \frac{|\tilde{x}|\Delta(\tilde{y})+|\tilde{y}|\Delta(\tilde{x})}{\tilde{y}^2} \frac{1}{1-\delta(\tilde{y})}$$

219

220 相对误差的估计

$$221 (1) \delta(\tilde{x} + \tilde{y}) \leq \frac{\Delta(\tilde{x}) + \Delta(\tilde{y})}{|\tilde{x} + \tilde{y}|}$$

$$222 (2) \delta(\tilde{x}\tilde{y}) \leq \delta(\tilde{x}) + \delta(\tilde{y}) + \delta(\tilde{x})\delta(\tilde{y})$$

$$223 (3) \delta(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}) \leq \frac{\delta(\tilde{x}) + \delta(\tilde{y})}{1 - \delta(\tilde{y})}$$

224 近似值足够精确时, 有

$$225 \Delta(\tilde{x})\Delta(\tilde{y}) \approx 0, \delta(\tilde{x})\delta(\tilde{y}) \approx 0, 1 - \delta(\tilde{y}) \approx 1$$

226 所以

$$227 \Delta(\tilde{x}\tilde{y}) \leq |\tilde{x}|\Delta(\tilde{y}) + |\tilde{y}|\Delta(\tilde{x})$$

$$228 \Delta(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}) \leq \frac{|\tilde{x}|\Delta(\tilde{y}) + |\tilde{y}|\Delta(\tilde{x})}{\tilde{y}^2}$$

$$229 \delta(\tilde{x}\tilde{y}) \leq \delta(\tilde{x}) + \delta(\tilde{y})$$

$$230 \delta(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}) \leq \delta(\tilde{x}) + \delta(\tilde{y})$$

231

232 6 几个定理

233 区间套引理

234 \mathbb{R} 中闭区间套 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$, 必有点 c 属于所有这些闭区间

235 若 $\forall \epsilon > 0 \exists I_k, |I_k| < \epsilon$, 则 c 为闭区间套唯一公共点

$$236 \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, I_m = [a_m, b_m], I_n = [a_n, b_n] \Rightarrow a_m < b_n$$

$$237 \forall a_m \in \{a_m : m \in \mathbb{N}\}, \forall b_n \in \{b_n : n \in \mathbb{N}\}, \exists c \in \mathbb{R}, a_m < c < b_n$$

$$238 \therefore \forall n \in \mathbb{N}, \exists c, a_n < c < b_n \Rightarrow c \in I_n$$

$$239 \therefore \forall \epsilon > 0 \exists I_k, |I_k| < \epsilon, \text{ 假设 } c_1, c_2 \text{ 为闭区间套的两个不同公共点且 } c_1 < c_2$$

$$240 \therefore \forall n \in \mathbb{N}, c_1 \in I_n, c_2 \in I_n \Rightarrow a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n$$

$$241 \therefore |I_n| = b_n - a_n > c_2 - c_1, \text{ 与 } |I_n| < \epsilon \text{ 矛盾}$$

242

243 覆盖

244 集合族 $S = \{X\}$, 若 $Y \subset \sum_{X \in S} X$, 则集合族 S 覆盖 Y

245

246 有限覆盖引理

247 覆盖闭区间的开区间族总有覆盖该闭区间的有限子族

248 记开区间族 $S = \{U\}$ 覆盖闭区间 $I_1 = [a, b]$

249 假设 S 无覆盖 I_1 的有限子族

250 \therefore 将 I_1 等分为两个闭区间, 其中至少有一个不能被任何 S 的有限子族覆盖, 记为 I_2
 251 继续均分 I_2 , 取其中不能被任何 S 的有限子族覆盖者, 记为 I_3
 252 重复此操作, 得闭区间套 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$
 253 且 $|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}}$
 254 \therefore 闭区间套 $\{I_n, n \in \mathbb{N}\}$ 有唯一公共点 c
 255 $\therefore \exists U = (\alpha, \beta) \in S, c \in U$
 256 取 I_n , 使得 $|I_n| < \min\{c - \alpha, \beta - c\}$
 257 又 $\because c \in I_n$
 258 $\therefore I_n \subset U$, 与 I_n 不能被任何 S 的有限子族覆盖矛盾

259

260 极限点

261 (1) 若点 $p \in \mathbb{R}$ 的任何邻域与集 X 的交集均有不等于 p 的元素, 则 p 为 X 之极限点
 262 (2) 若点 $p \in \mathbb{R}$ 的任何邻域与集 X 的交集为无穷集, 则 p 为 X 之极限点
 263 (1) \longleftrightarrow (2)
 264 若点 $p \in \mathbb{R}$ 的任何邻域与集 X 的交集为无穷集, 则此交集中必有不等于 p 的元素 ((2) \rightarrow (1))
 265 若点 $p \in \mathbb{R}$ 的任何邻域与集 X 的交集均有不等于 p 的元素
 266 任取 p 的 Δ 邻域 $U(p, \Delta) = (p - \Delta, p + \Delta), \Delta > 0$
 267 假设 $U(p, \Delta) \cap X = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 为有限集
 268 则集合 $\{|p - a_1|, |p - a_2|, |p - a_3|, \dots, |p - a_n|\}$ 有最小值 m
 269 则取 $\delta < m$, 邻域 $U(p, \delta)$ 与集 X 的交集没有不等于 p 的元素
 270 $\therefore (1) \rightarrow (2)$

271

272 极限点引理

273 无穷有界数集至少有一个极限点
 274 记 $X \subset \mathbb{R}$ 为无穷有界集
 275 取闭区间 $I = [a, b]$ 覆盖 X
 276 假设 I 中无 X 的极限点
 277 对每个 $x \in I$, 取其邻域 $U(x)$, 使 $U(x)$ 与 X 之交集为空集或非空有限集
 278 由此得开区间族 $\{U(x)\}$ 覆盖 I
 279 \therefore 可选出有限个开区间 $U(x_1), U(x_2), U(x_3), \dots, U(x_n)$ 覆盖 I , 亦覆盖 $X \subset I$
 280 $\therefore \sum_{i=1}^n U(x_i)$ 为空集或有限集, 与包含无穷集 X 矛盾