实数

1 实数公理

集合 $\mathbb{R}$ 为实数集，若 I-VI 条件成立。

(I) **加法公理**

定义加法运算

$$+:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \tag{1}$$

使 $\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow\exists x+y\in\mathbb{R}$，且有:

(1) 中性元素 0:

$\exists 0\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x+0=0+x=x$

(2) 逆元素 $-x$:

$\forall x\in\mathbb{R},\exists -x\in\mathbb{R}\Rightarrow x+(-x)=(-x)+x=0$

(3) 结合律:

$\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{R}\Rightarrow x+(y+z)=(x+y)+z$

(4) 交换律:

$\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow x+y=y+x$

(II) **乘法公理**

定义乘法运算

$$\bullet:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \tag{2}$$

使 $\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow\exists x\bullet y\in\mathbb{R}$，且有:

(1) 中性元素 1:

$\exists 1\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x\bullet 1=1\bullet x=x$

(2) 逆元素 x^{-1}:

$\forall x\in\mathbb{R},\exists x^{-1}\in\mathbb{R}\Rightarrow x\bullet x^{-1}=x^{-1}\bullet x=x$

(3) 结合律:

$\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{R}\Rightarrow x\bullet(y\bullet z)=(x\bullet y)\bullet z$

(4) 交换律：

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \bullet y = y \bullet x$

(I,II) 加法公理与乘法公理

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$

(III) 序公理

$\mathbb{R}$ 中元素存在关系 $\leq$。对 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$，可判断关系 $x \leq y$ 是否成立。且有：

(1)$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq x$

(2)$(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$

(3)$(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

(4)$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq y \vee y \leq x$

(I,III) 加法公理与序公理

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

(II,III) 乘法公理与序公理

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \Rightarrow x \bullet y \geq 0$

(VI) 连续性（完备性）公理

X, Y 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集，且 $\forall x \in X, \forall y \in Y \Rightarrow x \leq y$ 则 $\exists c \in \mathbb{R}$，使

$\forall x \in X, \forall y \in Y \Rightarrow x \leq c \leq y$

2 实数公理之推论

加法公理 (I) 之推论

(1) 中性元素 0 唯一

证明. 假设有 $0_1, 0_2$ 为 $\mathbb{R}$ 中两个不同的零元素，则 $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$ □

(2) 任意实数 x 有且仅有一个逆元素 $-x$

证明. 假设 x_1, x_2 为 $x \in \mathbb{R}$ 的两个不同的逆元素，则 $x_1 = x_1 + 0 = x_1 + x + x_2 = 0 + x_2 = x_2$ □

(3) 关于 x 的方程 $a+x=b$ 在 $\mathbb{R}$ 中有唯一解 $x=b+(-a)$

证明. a 有唯一逆元素 $-a$, 使得 $a+(-a)=0$, 故 $b+(-a)$ 唯一。且有 $x=x+0=a+x+(-a)=b+(-a)$ □

乘法公理 (II) 之推论

(1) 中性元素 1 唯一

(2) 任意实数 x 有且仅有一个逆元素 x^{-1}

(3)$a \neq 0$ 时，关于 x 的方程 $a \bullet x=b$ 在 $\mathbb{R}$ 中有唯一解 $x=b \bullet a^{-1}$

(I,II) 之推论

(1) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \bullet 0=0 \bullet x=0$

证明. $x \bullet 0=x \bullet (0+0)=x \bullet 0+x \bullet 0 \Rightarrow -(x \bullet 0)+x \bullet 0=x \bullet 0=0$ □

(2) $x \bullet y=0 \Rightarrow x=0 \vee y=0$

证明. 假设 $x \neq 0$，方程 $x \bullet y=0$ 有唯一解 $y=0 \bullet x^{-1}=0$；假设 $y \neq 0$ 同理 □

(3) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-1) \bullet x=-x$

证明. 给定 $x \in \mathbb{R}$，$-x$ 唯一，且 $x+(-1) \bullet x=x \bullet (1+(-1))=x \bullet 0=0$ □

(4)$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-1) \bullet (-x)=x$

(5)$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-x) \bullet (-x)=x \bullet x$

序公理之推论

(1)$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow x<y \vee x=y \vee x>y$

(2)$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}$

$x<y \wedge y \leq z \Rightarrow x<z$

$x \leq y \wedge y<z \Rightarrow x<z$

(I,III), (II,III) 之推论

(1)$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \forall w \in \mathbb{R}$

$x<y \Rightarrow x+z<y+z$

$x > 0 \Rightarrow -x < 0$

$x \leq y \wedge z \leq w \Rightarrow x + z \leq y + w$

$x \leq y \wedge z < w \Rightarrow x + z < y + w$

$(2) \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}$

$x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow xy > 0$

$x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow xy > 0$

$x > 0 \wedge y < 0 \Rightarrow xy < 0$

$x < y \wedge z > 0 \Rightarrow xz > yz$

$x < y \wedge z < 0 \Rightarrow xz < yz$

$(3) 0 < 1$

$(4) \forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

$(5) \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x > 0 \wedge x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$

界

集合 $X \subset \mathbb{R}$，若 $\exists c \in \mathbb{R}$，使得 $\forall x \in X, x \leq c (x \geq c)$，则 c 为 X 之上（下）界

有界集

既有上界又有下界的集合为有界集

最值

集合 $X \subset \mathbb{R}$，数 $a \in X$，若 $\forall x \in X, x \leq a (x \geq a)$，则 a 为 X 之最大值（最小值），记作 $\max\limits_{x \in X} x (\min\limits_{x \in X} x)$

确界

集合 $X \subset \mathbb{R}$，其最小上界为上确界，记作 $\sup\limits_{x \in X} x$；其最大下界为下确界，记作 $\inf\limits_{x \in X} x$

确界定理

实数集任何有上（下）界的子集有唯一上（下）确界

证明. 记上有界集 $X \in \mathbb{R}$，其上界集合 $Y = \{y \in \mathbb{R} : \forall x \in X, x \leq y\}$

则根据连续性公理，$\exists c, \forall x \in X, \forall y \in Y, x \leq c \leq y$

$\therefore c$ 为 X 之上界，亦为 Y 之下界，且 $c \in Y$

$\therefore c = \min Y$

$\therefore c$ 唯一，且 $c = \sup X$ $\square$

3 实数类

自然数 $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$

归纳集

集 $X \subset \mathbb{R}$ 为归纳集，若 $\forall x \in X \Rightarrow x + 1 \in X$

自然数集

包含 1 的一切归纳集之交集为自然数集 $\mathbb{N}$

数学归纳原理

$E \subset \mathbb{N}, 1 \in E$，且有 $x \in E \Rightarrow x + 1 \in E$，则 $E = \mathbb{N}$

数学归纳原理之推论

(1) 两自然数之和与积为自然数

证明. 任取 $n \in \mathbb{N}$，则 $n + 1 \in \mathbb{N}$
假设 $n + m \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$，则 $n + m + 1 \in \mathbb{N}$
$\therefore$ 两自然数之和为自然数
对自然数 n，有 $n \bullet 1 \in \mathbb{N}$
假设 $n \bullet m \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$，则 $n \bullet (m + 1) = n \bullet m + n \in \mathbb{N}$
$\therefore$ 两自然数之积为自然数 $\square$

(2)$n \in \mathbb{N} - \{1\} \Rightarrow n - 1 \in \mathbb{N}$

证明. 记 $E = \{n - 1 : n \in \mathbb{N} - 1\}$
$\therefore 1 = 2 - 1 \in E$
任取 $m \in E, m = n - 1$，则 $m + 1 = n = (n + 1) - 1 \in E$
$\therefore E = \mathbb{N}$ $\square$

(3)$\forall n \in \mathbb{N}, \{x \in \mathbb{N} : x > n\}$ 有最小元素 $n + 1$

证明. $n=1$ 时

记 $M=\{x\in\mathbb{N}: x=1 \vee x\geq 2\}$

假设 $x\in M$，则 $x=1\in M\Rightarrow x+1=2\in M$ 或 $x\geq 2\Rightarrow x+1\geq 2\Rightarrow x+1\in M$

$\therefore M=\mathbb{N}$

$\therefore x\neq 1\wedge x\in\mathbb{N}\Rightarrow x\geq 2$

$\therefore n=1, \min\{x\in\mathbb{N}: n<x\}=n+1=2$

假设自然数 n 使得命题成立，即 $\min\{y\in\mathbb{N}: n<y\}=n+1$

取 $x\in\{x\in\mathbb{N}: x>n+1\}$

有 $x-1>n$

$\therefore x-1\geq n+1\Rightarrow x\geq n+2$

$\therefore n+1$ 使得命题成立 $\square$

(4)$m\in\mathbb{N}\wedge m\in\mathbb{N}\wedge n<m\Rightarrow n+1\leq m$

(5) 自然数 n，不存在自然数 $x\in(n,n+1)$

(6) 自然数 n，$n\neq 1$，不存在自然数 $x\in(n-1,n)$

(7) 自然数集之非空子集有最小元素

证明. 记 $M\subset\mathbb{N}, M\neq\emptyset$

若 $1\in M$，则 $\min M=1$

若 $1\notin M$，则 $1\in\mathbb{N}-M$

则有自然数 n，使得所有小于等与 n 的自然数属于 $\mathbb{N}-M$，且 $n+1\in M$

否则 $1\in\mathbb{N}-M$ 且 $\forall n\in\mathbb{N}, n\in M\wedge n+1\in M\Rightarrow M=\mathbb{N}$

$\therefore \min M=n+1$ $\square$

整数集

自然数集、自然数的相反数集、0 的并集为整数集 $\mathbb{Z}$

算术基本定理

自然数可唯一地（不计相乘顺序）表示为有限个素数之积

有理数

形如 $\frac{m}{n}, m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}-\{0\}$ 的数为有理数

有理数集记为 $\mathbb{Q}$

无理数

不属于有理数集的实数为无理数

4 Archimedes 原理

(1) 自然数集的任何非空上有界子集有最大值

证明. 任意 $E \subset \mathbb{N}, E \neq \emptyset$ 有唯一上确界 $s = \sup E$
$\therefore \exists n \in E, s-1 < n \leq s$
$\therefore n+1 > s \Rightarrow n+1 \notin E$
$\therefore n = \max E$ $\square$

(2) 自然数集无上界
(3) 整数集的任何非空上有界子集有最大值
(4) 整数集的任何非空下有界子集有最小值
(5) 整数集无上下界

Archimedes 原理
任意固定正数 h，则 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! k \in \mathbb{Z}, (k-1)h \leq x < kh$

证明. 考虑下有界集合 $\{n \in \mathbb{Z} : n > \frac{x}{h}\}$，其唯一最小值记为 k
$\therefore k-1 \leq \frac{x}{h} < k$
$\therefore (k-1)h \leq x < kh$ $\square$

$(1) \forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{n} < \epsilon$

证明. 任意固定正数 ϵ，则 $x = 1$ 时，$\exists n \in \mathbb{N}, 0 < 1 < n\epsilon$
$\therefore 0 < \frac{1}{n} < \epsilon$ $\square$

(2) 非负实数 x，且 $\forall n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n}$，则 $x = 0$

证明. 若 $x > 0$，则 $\exists n \in \mathbb{N}, x > \frac{1}{n}$ $\square$

$(3)\forall a \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, a < b \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}, a < r < b$

证明. 取 $n \in \mathbb{N}$，使得 $b - a > \frac{1}{n}$

另取 $m \in \mathbb{Z}$，使得 $(m-1)\frac{1}{n} \leq a < m\frac{1}{n}$

假设 $b \leq \frac{m}{n}$，则 $(m-1)\frac{1}{n} \leq a < b \leq \frac{m}{n} \Rightarrow b - a \leq \frac{m}{n} - (m-1)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$

$\therefore b > \frac{m}{n}$

$\therefore \exists r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, a < r < b$ $\square$

$(4)\forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z}, k \leq x < k+1$

5 误差

绝对误差和相对误差

某量有精确值 x，近似值 $\tilde{x}$

近似值之绝对误差 $\Delta(\tilde{x}) = |x - \tilde{x}|$

相对误差 $\delta(\tilde{x}) = \frac{\Delta(\tilde{x})}{|\tilde{x}|}$

绝对误差的估计

精确值 x, y 分别有估计值 $\tilde{x}, \tilde{y}$，绝对误差 $\Delta(\tilde{x}) = |x - \tilde{x}|, \Delta(\tilde{y}) = |y - \tilde{y}|$

$(1)\Delta(\tilde{x} + \tilde{y}) = |(x+y) - (\tilde{x} + \tilde{y})| \leq \Delta(\tilde{x}) + \Delta(\tilde{y})$

$(2)\Delta(\tilde{x}\tilde{y}) = |xy - \tilde{x}\tilde{y}| \leq |\tilde{x}|\Delta(\tilde{y}) + |\tilde{y}|\Delta(\tilde{x}) + \Delta(\tilde{x})\Delta(\tilde{y})$

(3) 若 $y \neq 0, \tilde{y} \neq 0, \delta(\tilde{y}) = \frac{\Delta(\tilde{y})}{|\tilde{y}|} < 1$，则

$\Delta(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}) = |\frac{x}{y} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}| \leq \frac{|\tilde{x}|\Delta(\tilde{y}) + |\tilde{y}|\Delta(\tilde{x})}{\tilde{y}^2} \frac{1}{1 - \delta(\tilde{y})}$

证明. 记 $x = \tilde{x} + \alpha, y = \tilde{y} + \beta$

$(1)\Delta(\tilde{x} + \tilde{y}) = |(x+y) - (\tilde{x} + \tilde{y})| = |(x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y})| \leq |x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}| = \Delta(\tilde{x}) + \Delta(\tilde{y})$

$(2)\Delta(\tilde{x}\tilde{y}) = |(\tilde{x} + \alpha)(\tilde{y} + \beta) + \alpha\beta| = |\tilde{x}\beta + \tilde{y}\alpha + \alpha\beta| \leq |\tilde{x}|\Delta(\tilde{y}) + |\tilde{y}|\Delta(\tilde{x}) + \Delta(\tilde{x})\Delta(\tilde{y})$

$(3)\Delta(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}) = |\frac{x}{y} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}| = |\frac{x\tilde{y} - y\tilde{x}}{y\tilde{y}}| = |\frac{(\tilde{x}+\alpha)\tilde{y} - (\tilde{y}+\beta)\tilde{x}}{\tilde{y}^2}||\frac{1}{1 + \frac{\beta}{\tilde{y}}}| \leq \frac{|\tilde{x}||\beta| + |\tilde{y}||\alpha|}{\tilde{y}^2} \frac{1}{1 - \delta(\tilde{y})} = \frac{|\tilde{x}|\Delta(\tilde{y}) + |\tilde{y}|\Delta(\tilde{x})}{\tilde{y}^2} \frac{1}{1 - \delta(\tilde{y})}$ $\square$

相对误差的估计

$(1)\delta(\tilde{x} + \tilde{y}) \leq \frac{\Delta(\tilde{x}) + \Delta(\tilde{y})}{|\tilde{x} + \tilde{y}|}$

$(2)\delta(\tilde{x}\tilde{y}) \leq \delta(\tilde{x}) + \delta(\tilde{y}) + \delta(\tilde{x})\delta(\tilde{y})$

$(3)\delta(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}) \le \frac{\delta(\tilde{x})+\delta(\tilde{y})}{1-\delta(\tilde{y})}$

证明. 近似值足够精确时，有

$\Delta(\tilde{x})\Delta(\tilde{y}) \approx 0, \delta(\tilde{x})\delta(\tilde{y}) \approx 0, 1-\delta(\tilde{y}) \approx 1$

所以

$\Delta(\tilde{x}\tilde{y}) \le |\tilde{x}|\Delta(\tilde{y}) + |\tilde{y}|\Delta(\tilde{x})$

$\Delta(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}) \le \frac{|\tilde{x}|\Delta(\tilde{y})+|\tilde{y}|\Delta(\tilde{x})}{\tilde{y}^2}$

$\delta(\tilde{x}\tilde{y}) \le \delta(\tilde{x}) + \delta(\tilde{y})$

$\delta(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}) \le \delta(\tilde{x}) + \delta(\tilde{y})$

$\square$

6 几个定理

区间套引理

$\mathbb{R}$ 中闭区间套 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$，必有点 c 属于所有这些闭区间

若 $\forall \epsilon > 0 \exists I_k, |I_k| < \epsilon$，则 c 为闭区间套唯一公共点

证明. $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, I_m = [a_m, b_m], I_n = [a_n, b_n] \Rightarrow a_m < b_n$

$\forall a_m \in \{a_m : m \in \mathbb{N}\}, \forall b_n \in \{b_n : n \in \mathbb{N}\}, \exists c \in \mathbb{R}, a_m < c < b_n$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}, \exists c, a_n < c < b_n \Rightarrow c \in I_n$

$\therefore \forall \epsilon > 0 \exists I_k, |I_k| < \epsilon$，假设 c_1, c_2 为闭区间套的两个半不同公共点且 $c_1 < c_2$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}, c_1 \in I_n, c_2 \in I_n \Rightarrow a_n \le c_1 < c_2 \le b_n$

$\therefore |I_n| = b_n - a_n > c_2 - c_1$，与 $I_n < \epsilon$ 矛盾 $\square$

覆盖

集合族 $S = \{X\}$，若 $Y \subset \sum\limits_{X \in S} X$，则集合族 S 覆盖 Y

有限覆盖引理

覆盖闭区间的开区间族总有覆盖该闭区间的有限子族

证明. 记开区间族 $S = \{U\}$ 覆盖闭区间 $I_1 = [a, b]$

假设 S 无覆盖 I_1 的有限子族

$\therefore$ 将 I_1 等分为两个闭区间，其中至少有一个不能被任何 S 的有限子族覆盖，记为 I_2

继续均分 I_2，取其中不能被任何 S 的有限子族覆盖者，记为 I_3

重复此操作，得闭区间套 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$

且 $|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}}$

$\therefore$ 闭区间套 $\{I_n, n \in \mathbb{N}\}$ 有唯一公共点 c

$\therefore \exists U = (\alpha, \beta) \in S, c \in U$

取 I_n，使得 $|I_n| < \min\{c-\alpha, \beta - c\}$

又 $\because c \in I_n$

$\therefore I_n \subset U$，与 I_n 不能被任何 S 的有限子族覆盖矛盾 $\square$

极限点

(1) 若点 $p \in \mathbb{R}$ 的任何邻域与集 X 的交集均有不等于 p 的元素，则 p 为 X 之极限点

(2) 若点 $p \in \mathbb{R}$ 的任何邻域与集 X 的交集为无穷集，则 p 为 X 之极限点

(1)$\longleftrightarrow$(2)

证明. 若点 $p \in \mathbb{R}$ 的任何邻域与集 X 的交集为无穷集，则此交集中必有不等于 p 的元素 ((2)$\rightarrow$(1))

若点 $p \in \mathbb{R}$ 的任何邻域与集 X 的交集均有不等于 p 的元素

任取 p 的 Δ 邻域 $U(p,\Delta) = (p-\Delta, p+\Delta), \Delta > 0$

假设 $U(p,\Delta)X = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 为有限集

则集合 $\{|p-a_1|, |p-a_2|, |p-a_3|, \dots, |p-a_n|\}$ 有最小值 m

则取 $\delta < m$，邻域 $U(p,\delta)$ 与集 X 的交集没有不等于 p 的元素

$\therefore$(1)$\rightarrow$(2) $\square$

极限点引理

无穷有界数集至少有一个极限点

证明. 记 $X \subset \mathbb{R}$ 为无穷有界集

取闭区间 $I = [a,b]$ 覆盖 X

假设 I 中无 X 的极限点

对每个 $x \in I$，取其邻域 $U(x)$，使 $U(x)$ 与 X 之交集为空集或非空有限集

由此得开区间族 $\{U(x)\}$ 覆盖 I

$\therefore$ 可选出有限个开区间 $U(x_1), U(x_2), U(x_3), \dots, U(x_n)$ 覆盖 I，亦覆盖 $X \subset I$

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{n} U(x_i)$ 为空集或有限集，与包含无穷集 X 矛盾 $\square$