

Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania **P2.8**

Prowadzący pracownię: Paweł Woźny

Łukasz Klasieński

Wrocław, 17 grudnia 2017

1 Wstęp

Problem przybliżania funkcji może być rozwiązany między innymi dzięki użyciu interpolacji wielomianowej. Głównym celem niniejszego sprawozdania będzie testowanie kilku algorytmów do obliczania wielomianu **Lagrang’a**, którego postać wygląda następująco:

Wielomian $L_n \in \Pi_n$, spełniający dla danych parami różnych liczb x_0, x_1, \dots, x_n oraz wartości funkcji f w tych punktach, taki że

$$L_n(x_k) = f(x_k), (k = 0, 1, \dots, n)$$

można zapisać w postaci

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i) \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) \quad (1)$$

gdzie

$$\lambda_i = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{(x_i - x_j)} \quad (2)$$

Zbadana zostanie stabilność różnych algorytmów na wybór węzłów oraz jaki generują błąd dla danej ich ilości.

Wszystkie testy numeryczne przeprowadzono przy użyciu języka programowania **Julia v.0.6.1** w trybie podwójnej (**Double**) precyzji, czyli 64 bitowej dokładności.

2 Postać Barycentryczna

Weźmy równanie (1) i oznaczmy l_i jako $\lambda_i * \prod_{j \neq i}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ z (2)
Zauważmy, że licznik l_i może zostać zapisany jako równość

$$l(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

dzielony przez $x - x_i$. Wtedy $\lambda_i = 1/l'(x_i)$, więc l_i można zapisać jako

$$l_i(x) = l(x) \frac{\lambda_i}{(x - x_i)}$$

Zauważmy, że składniki sumy (1) zawierają $l(x)$, który nie zależy od i . Dlatego go wyciągnąć przed sumę, aby otrzymać

$$L_n(x) = l(x) \sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{x - x_i} f(x_i) \quad (3)$$

Teraz założmy, że interpolujemy funkcję stałą = 1. Wtedy wstawiając to do (3), otrzymamy równość

$$1 = \sum_{i=0}^n l_i(x) = l(x) \sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{(x - x_i)}$$

Dzieląc to przez (3), otrzymamy barycentryczną formułę wielomianu (1)

$$L_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{x - x_i} f(x_i)}{\sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{x - x_i}} \quad (4)$$

dla λ takiej samej jak (2). Dalej, przy testowaniu będziemy go nazywać wielomianem barycentrycznym.

Zauważmy, że dzięki takiej postaci λ_i nie korzysta ze zmiennej x . Dzięki temu dla zadanych węzłów wystarczy raz ją wyliczyć i przy wyznaczaniu wartości wielomianu używać tej stałej bez ponawiania obliczeń. Ponadto jeśli dodamy nowe węzły, to w celu wyliczenia nowej wartości λ_i , wystarczy przemnożyć ją przez odpowiedni iloraz $\frac{1}{t_i - t_j}$.

2.1 Węzły Chebyszewa

Taka postać wielomianu ma również inną własność. Jeśli zaaplikujemy do niego węzły Chebyszewa pierwszego rodzaju:

$$x_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n+2}, \quad (i = 0, \dots, n) \quad (5)$$

to wzór na poszczególne wartości λ_i z (4) znacząco się upraszcza. Z własności $\lambda_i = \frac{1}{l'(x)}$, o której była mowa wcześniej, możemy uzyskać ogólną formułę na w_i . Po zaaplikowaniu do niej węzłów Chebyszewa i usunięciu czynników niezależnych od i otrzymamy

$$\lambda_i = (-1)^j \sin \frac{(2j+1)\pi}{2n+2} \quad (6)$$

Podobnie można postępować w przypadku węzłów Chebyszewa innego rodzaju.

3 Algorytm Wernera

Przytoczmy wielomian w postaci Newtona. Wyraża się on wzorem

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i p_i(x) \quad (7)$$

gdzie p_i jest wielomianem węzłowym

$$p_i(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})$$

natomiast współczynniki a_i obliczamy za pomocą ilorazu różnicowego

$$a_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i]$$

Główną zaletą tej formy jest mniejsza ilość operacji do wyliczenia wartości wielomianu w porównaniu do postaci Lagrang'a. Użyjemy tą postać do wyznaczenia algorytmu wyliczającego λ_i w wielomianie barycentrycznym z (4). Biorąc (1) oraz podstawiając za f funkcję stałą $f(x) = 1$, otrzymamy

$$1 = \sum_{i=0}^n \lambda_i \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) \quad (8)$$

Jeśli rozważymy lewą stronę równania (8) jako wielomian w formie Newtona, to mamy

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)$$

Możemy teraz rozwiązać ten wielomian metodą Newtona. Po przekształceniach tego równania otrzymujemy

$$a_k = \sum_{i=0}^k \lambda_i \prod_{j=k+1}^n (x_i - x_j), \quad (k = 0, \dots, n)$$

Zatem problem ogranicza się do rozwiązywania układu równań:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \prod_{j=1}^n (x_0 - x_j) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \prod_{j=2}^n (x_0 - x_j) & \prod_{j=2}^n (x_1 - x_j) & 0 & \dots & 0 \\ \prod_{j=3}^n (x_0 - x_j) & \prod_{j=3}^n (x_1 - x_j) & \prod_{j=3}^n (x_2 - x_j) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0 - x_n & x_1 - x_n & x_2 - x_n & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

Może on być rozwiązany za pomocą metody eliminacji Gauss'a, którą zastosujemy w innej kolejności niż zwykle:

1. Podzielmy pierwsze równanie z (9) przez $x_0 - x_1$, oznaczmy

$$a_0^{(1)} := a_0 / (x_0 - x_1)$$

2. Odejmijmy pierwsze równanie od drugiego, oznaczmy

$$a_1^{(1)} := a_1 - a_0^{(1)}$$

3. Podzielmy pierwsze równanie przez $x_0 - x_2$, oznaczmy

$$a_0^{(2)} := a_0^{(1)} / (x_0 - x_2)$$

4. Odejmijmy pierwsze równanie od trzeciego, oznaczmy

$$a_2^{(1)} := a_2 - a_0^{(2)}$$

5. Podzielmy drugie równanie przez $x_1 - x_2$, oznaczmy

$$a_1^{(2)} := a_1^{(1)} / (x_1 - x_2)$$

6. Odejmijmy drugie równanie od trzeciego, oznaczmy

$$a_2^{(2)} := a_2^{(1)} - a_1^{(2)}$$

Kontynuując w ten sposób otrzymujemy algorytmu

$$\begin{aligned} a_k^{(0)} &:= a_k, & (k = 0, \dots, n) \\ a_k^{(i)} &:= a_k^{(i-1)} / (x_k - x_i) \} & k = (0, \dots, i-1), i = (1, \dots, n) \\ a_i^{(k+1)} &:= a_i^{(k)} - a_k^{(i)} \\ \lambda_i &:= a_i^{(n)}, & (i = 0, \dots, n) \end{aligned} \quad (10)$$

Po zastosowaniu go do (8) dostajemy algorytm na wydajne obliczanie wartości λ_i z (4)

$$\begin{aligned} a_0^{(0)} &:= 0, a_k^{(0)} := 0, & (k = 1, \dots, n) \\ a_k^{(i)} &:= a_k^{(i-1)} / (x_k - x_i) \} & k = (0, \dots, i-1), i = (1, \dots, n) \\ a_i^{(k+1)} &:= a_i^{(k)} - a_k^{(i)} \\ \lambda_i &:= a_i^{(n)}, & (i = 0, \dots, n) \end{aligned} \quad (11)$$

Zatem otrzymaliśmy algorytm Wernera, który pozwala na szybsze obliczenie wagi barycentrycznej niż w przypadku standardowego wyrażenia. Dzięki temu wykonujemy mniej operacji i otrzymujemy mniejszy błąd przez utratę cyfr znaczących.

4 Testy i analiza

W pierwszym doświadczeniu sprawdzono jak zachowują się poszczególne algorytmy kiedy zostaną one użyte do interpolacji funkcji wielomianowej. W teorii jako, że same zwracają wielomian, to powinny interpolować ją bezbłędnie. Ale oczywiście jako że działamy na liczbach maszynowych, to zwykle otrzymujemy wynik z pewnym błędem. Ten test pokaże, które algorytmy są na niego bardziej podatne.

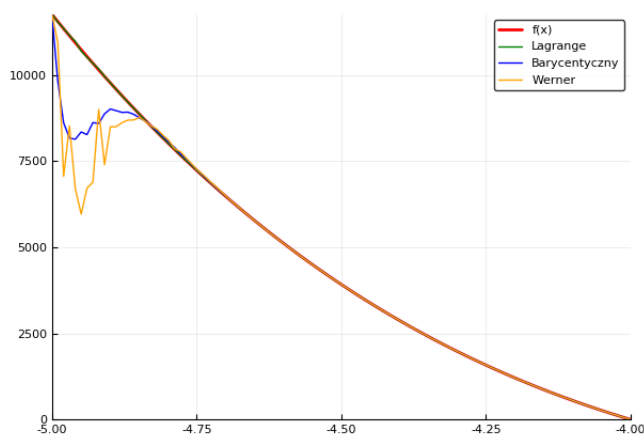
Interpolujemy funkcję $f(x) = x(x-3)(x-2)^2(x-1)(x+4)$
na przedziale $[a, b] = [-5, 5]$, dla $10 \leq n \leq 500$ węzłów

Poniższa tabelka pokazuje maksymalne błędy bezwzględne w zależności od użytego algorytmu oraz rodzaju węzłów.

TABLICA 1.

n	Węzły	Wielomian Lagrang'a	Postać barycentryczna	Algorytm Wernera
10	równoodległe	5.456968e-12	1.273293e-11	1.818989e-11
30	równoodległe	2.235829e-07	8.321922e-06	2.038176e-05
50	równoodległe	8.546869e-02	5.386728e+00	3.851245e+00
70	równoodległe	4.502152e+04	2.142437e+06	4.819431e+06
10	losowe	1.545959e-08	1.545959e-08	5.140609e-05
30	losowe	5.193228e+00	3.389305e-07	2.355376e+01
50	losowe	1.828060e+05	7.248581e+03	5.629404e+05
10	Chebyszew	5.456968e-12	5.456968e-12	9.094947e-12
30	Chebyszew	7.275958e-12	5.456968e-12	7.275958e-12
50	Chebyszew	1.637090e-11	5.456968e-12	3.829205e-06
70	Chebyszew	2.000888e-11	5.456968e-12	7.281773e+03
500	Chebyszew	5.275069e-11	9.094947e-12	inf

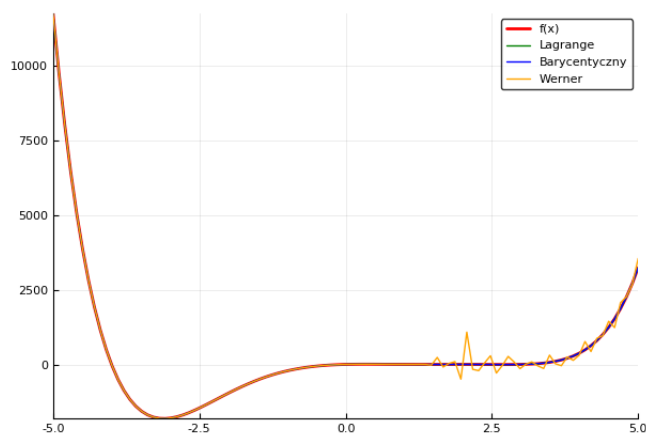
Jak można zauważyć, w przypadku węzłów równoodległych najlepiej poradził sobie wielomian Lagrang'a obliczany w standardowy sposób. Jest to prawdopodobnie spowodowane tym, że jest to "pierwotny" algorytm na znalezienie takiego wielomianu bez żadnych modyfikacji, dzięki czemu wylicza się najlepiej. Widać również zależność między ilością węzłów a błędem. Od 10 węzłów wzwyż wszystkie trzy algorytmy są obciążone coraz większym błędem. Jest on największy przy krańcach przedziału, co widać na poniższym wykresie:



Rysunek 1. $n = 60$, $[-5, -4]$, węzły równoodległe

Przy węzłach losowych, najmniejszy błąd ma postać barycentryczna. Widać także, że branie losowych węzłów nie jest najlepszym pomysłem, ponieważ

już przy 50 węzłach osiągamy wyniki o wiele gorsze niż w przypadku równoodległych. Podobnie jak wcześniej tutaj też problemy występują na krańcach przedziału. Z kolei węzły Chebyszewa, jak można się było spodziewać powodują w przypadku wielomianu Lagrang’a oraz jego barycentrycznej postaci minimalne błędy nawet przy bardzo dużej ilości węzłów. Z drugiej strony algorytm Wernera okazuje się znacząco pogarszać powyżej 30 węzłów.



Rysunek 2. $n = 60$, $[-5, 5]$, węzły Chebyszewa

Można zauważyć, że największe błędy algorytmu Wernera są skumulowane po prawej stronie wykresu.

4.1 funkcja Rungego

Kolejny test został przeprowadzony na funkcji Rungego, danej wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{(1 + 25x^2)}$$

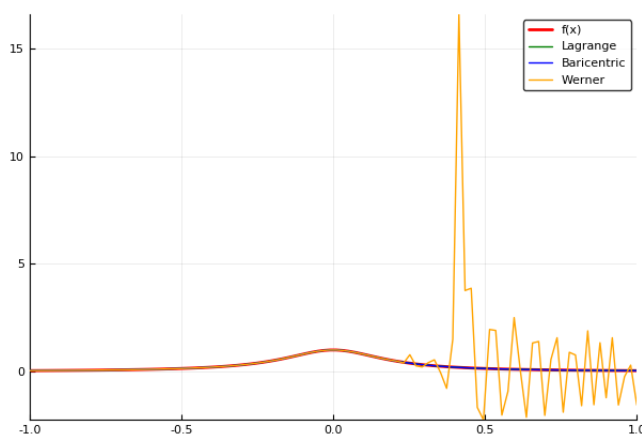
$$[a, b] = [-1, 1], 10 \leq n \leq 1000$$

Jest ona znana z tego, że pomimo zwiększenia ilości węzłów pogarsza się jakość interpolacji wielomianowej, głównie dla węzłów równoodległych. Poniżej wyniki:

TABLICA 2.

n	Węzły	Wielomian Lagrang'a	Postać barycentryczna	Algorytm Wernera
10	równoodległe	1.915643e+00	1.915643e+00	1.915643e+00
30	równoodległe	2.277742e+03	2.277742e+03	2.278585e+03
50	równoodległe	4.712420e+06	4.712025e+06	4.712548e+06
10	losowe	5.477561e+01	5.477561e+01	5.477561e+01
30	losowe	2.380647e+06	2.382197e+06	2.905441e+06
10	Chebyszew	1.089290e-01	1.089290e-01	1.089290e-01
30	Chebyszew	2.061544e-03	2.061544e-03	2.061544e-03
50	Chebyszew	3.885790e-05	3.885790e-05	3.885790e-05
70	Chebyszew	7.376980e-07	7.376980e-07	7.367889e+01
1000	Chebyszew	1.788379e+03	2.553513e-15	inf

Zatem jak można się było spodziewać, węzły równoodległe oraz losowe już od 10 węzłów wykazują tendencję do pogorszenia jakości interpolowania. Natomiast węzły Czebyszewa wręcz przeciwnie. Jest to spowodowane tym, że funkcja Rungego powoduje psucie się interpolacji na krańcach przedziału. Ponieważ węzły Czebyszewa są gęściej upakowane na końcach przedziału, to negują ten efekt i dla większego n dają rzeczywiście coraz lepsze przybliżenie. W tym przykładzie wszystkie algorytmy miały zbliżone błędy oraz zachowanie w stosunku do ilości węzłów nawet przy losowych. Wyjątkiem jest znowu algorytm Wernera, który dla dużej wartości n podobnie jak wcześniej generuje błędy po prawej stronie wykresu:



Rysunek 3. $n = 60$, $[-5, 5]$, węzły Chebyszewa

Jak widać w rozdziale (3) algorytm jest wyznaczony z odpowiednio zbudowanej macierzy. Zatem jest on podatny na błąd spowodowany zbyt dużym

wyznacznikiem zadania. Dla zbyt dużej ilości węzłów rośnie on na tyle, że powoduje takie zaburzenia, które widać na wykresie. Warto również wspomnieć o tym, że przy 1000 węzłów Lagrange zaczął się pogarszać, gdzie postać barycentryczna była wciąż bardzo dobrym przybliżeniem.

4.2 funkcja trygonometryczna

W następnym doświadczeniu wypróbowano interpolacji na funkcji trygonometrycznej.

$$f(x) = \arctg(x)$$

$$[a, b] = [-1, 1], 10 \leq n \leq 70$$

TABLICA 3.

n	Węzły	Wielomian Lagrang'a	Postać barycentryczna	Algorytm Wernera
10	równoodległe	1.065712e-04	1.065712e-04	1.065712e-04
30	równoodległe	2.316384e-09	2.474288e-09	2.315359e-09
70	równoodległe	2.593411e+01	1.599404e+02	7.072912e+00
10	losowe	3.956925e-04	1.176645e-02	1.185675e-04
30	losowe	1.484253e-05	7.276726e-01	4.771568e-02
70	losowe	6.075408e+06	9.657790e-01	1.613932e+00
10	Chebyszew	1.477877e-05	1.477877e-05	1.477877e-05
30	Chebyszew	1.214168e-13	1.213057e-13	1.213057e-13
70	Chebyszew	1.776357e-15	9.992007e-16	2.690387e-01
800	Chebyszew	1.398002e+03	3.387095e-08	inf

Jak widać do interpolowania po funkcji \arctg nadają się nawet węzły równoodległe. Przy $n = 30$ błąd jest bardzo niewielki i dopiero powyżej zaczyna wzrastać. Jednak w przypadku węzłów Chebyszewa mamy o wiele lepsze przybliżenie, które utrzymuje się nawet przy dużych ilościach węzłów. Reszta wniosków jest konsekwentna jak w poprzednich testach.

4.3 funkcja nieciągła

Tym razem zastosowano interpolację dla funkcji, która dla danego przedziału nie jest ciągła.

$$f(x) = \max(0, 1 - 4x)$$

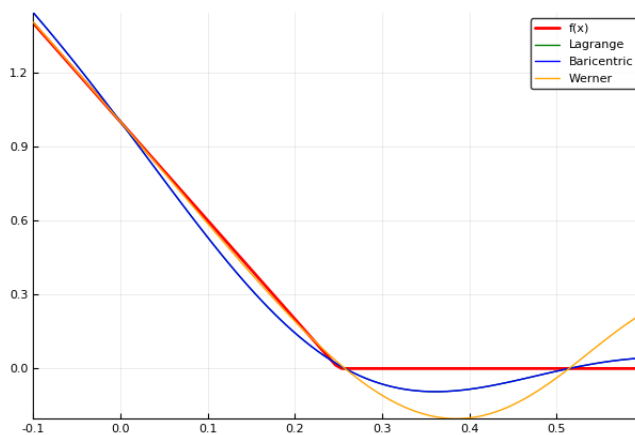
$$[a, b] = [-5, 5], 10 \leq n \leq 70$$

Przez to interpolacja będzie miała problemy w przybliżeniu funkcji właśnie w punkcie, gdzie nie istnieje pochodna. W tym przypadku $x = \frac{1}{4}$

TABLICA 4.

n	Węzły	Wielomian Lagrang'a	Postać barycentryczna	Algorytm Wernera
10	równoodległe	3.915349e+00	3.915349e+00	3.915349e+00
30	równoodległe	1.591061e+05	1.591061e+05	1.592003e+05
50	równoodległe	4.237167e+10	4.235769e+10	4.036184e+10
10	Chebyszew	4.753480e-01	4.753480e-01	4.753480e-01
30	Chebyszew	3.225152e-01	3.225152e-01	3.225152e-01
50	Chebyszew	1.091766e-01	1.091766e-01	2.927421e+00
70	Chebyszew	6.761971e-02	6.761971e-02	6.681778e+04
700	Chebyszew	6.744000e+04	7.081382e+00	inf

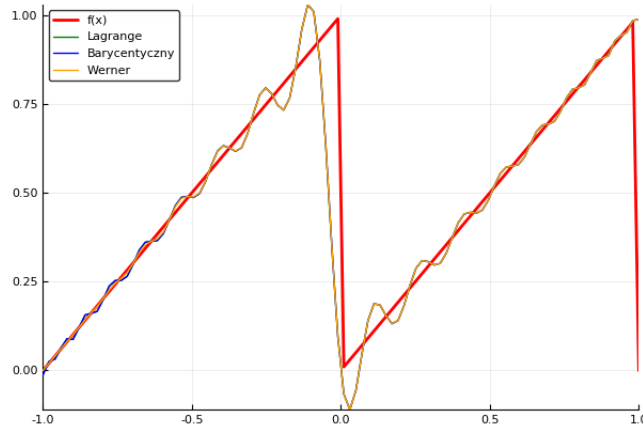
Przez to, że funkcja nie jest ciągła, to nawet węzły Chebyszewa nie były w stanie osiągnąć błędu mniejszego niż 0.07. Poza tym spowodowało to, że znacznie szybciej niż w poprzednich doświadczeniach węzły równoległe zaczęły generować szybko rosnący błąd. Poniżej wykres przedstawiający interpolację wokół punktu nieciągłości:

Rysunek 4. $n = 60$, $[-0.1, 0.6]$, węzły Chebyszewa

Widać z niego, że nasz największy błąd był właśnie na prawo od miejsca, gdzie nie istnieje pochodna. Pokazuje to zatem, że bardzo ciężko jest interpolować takiego typu funkcji, które nie są ciągłe na danym przedziale. Poniżej inny ciekawy przykład interpolowania po części ułamkowej x :

$$f(x) = x - \text{floor}(x)$$

który ukazuje problem interpolacji funkcji nieciągłej:



Rysunek 5. $n = 40$, $[-1, 1]$, węzły Chebyszewa

Można zauważyć podobne zachowanie interpolacji jak w przypadku funkcji Rungego - dla węzłów innych niż Chebyszewa przybliżenie interpolacji wraz ze zwiększeniem węzłów rośnie. I rzeczywiście takie zachowanie można zauważyć zawsze kiedy funkcja jest nieciągła na danym przedziale.

5 Podsumowanie

Po przeprowadzonych eksperymentach, można wywnioskować, że o ile interpolacja wielomianem Lagrang'a nie jest najlepszą - można to zrobić z bardzo dobrym przybliżeniem np. funkcjami sklejanyymi, to przy odpowiednio dobranych węzłach oraz ich ilości, można otrzymać całkiem zadowalające rezultaty. Widać to z tablicy (1), (2) oraz (3). Udało się uzyskać błąd maksymalny rzędu 10^{-15} . Niestety w przypadku funkcji, które nie są ciągłe, nie jesteśmy już w stanie uzyskać dobrego przybliżenia, co zostało pokazane w 4.3. Poza tym postać Lagrang'a szybciej od postaci barycentrycznej zaczyna zwiększać błąd związany ze zbyt dużą liczbą węzłów. Jest to ukazane w każdej tabelce. Natomiast algorytm Wernera szybko przestawał polepszać przybliżenie funkcji gdy zaaplikowaliśmy do niego więcej niż 50 węzłów. Powoduje to, że ma on najlepsze zastosowanie, kiedy nie zależy nam na bardzo precyzyjnych wynikach, ale na szybkości, ponieważ jak pozaliśmy w rozdziale 3, wykonuje się on znacznie szybciej w porównaniu do postaci barycentrycznej, a już tym bardziej niż postać Lagrang'a. W przypadku kiedy chcemy najlepsze przybliżenie, to należy zastosować algorytm barycentryczny, ponieważ jest szybszy od Lagrang'a a uzyskuje podobne bądź lepsze rezultaty i jest bardziej stabilny.

Literatura

- [1] C. Schneider and W. Werner, Some New Aspects of Rational Interpolation 1986
- [2] J. Berrut and L. N. Trefethen, Baricentric Lagrange Interpolation 2004
- [3] W. Werner, Polynomial Interpolation: Lagrange versus Newton 1984