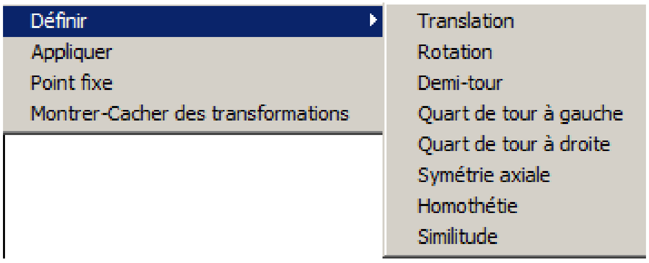
Chapitre 8 Transformations

8.1 Introduction



Les transformations géométriques les plus simples (demi-tour, quart de tour à gauche ou à droite) sont d'usage courant dans les activités quotidiennes. D'autres transformations apparaissent dans les cours de géométrie, parfois dès l'enseignement primaire, toujours dans les premières années de l'enseignement secondaire.

Les transformations constituent un puissant support pour le raisonnement et permettent de construire de nouvelles formes géométriques à partir de formes construites antérieurement.

Apprenti Géomètre permet de concrétiser une transformation de manière visuelle, en lui attribuant un « support » facilitant sa reconnaissance, son utilisation et sa réutilisation.

Les transformations mises à la disposition des utilisateurs varient selon le menu choisi.

Au menu A, l'élève n'a accès à aucune transformation. Avec le menu B, il rencontre les translations, les demi-tours, quarts de tour et les rotations d'angle quelconque ainsi que les symétries axiales. Enfin, au menu C apparaissent les homothéties et les similitudes. Depuis la version 2.4.0, le menu C propose également des déplacements, des étirements et des cisaillements. Bien entendu, les menus AB et AC donnent accès aux mêmes transformations que, respectivement, les menus B et C.

Le menu `Transformations` comporte quatre sous-menus : `Définir`, `Appliquer`, `Point fixe` et `Montre-Cacher des transformations`. Le sous-menu `Point Fixe` n'est accessible qu'aux menus C et AC.

8.2 Définir une transformation

Le principe est d'associer à chacune des transformations géométriques une forme géométrique qui lui servira de support. Pour signaler qu'une forme supporte une transformation, elle est repeinte en vert et munie dans certains cas d'une (ou même parfois deux) pointe(s) de flèches.

8.2.1 Définir/Translation

Après que l'utilisateur ait choisi `Définir/Translation`, le pointeur de la souris demande de choisir un segment ou de choisir successivement ses deux extrémités.

Un clic sur un segment (qui peut être un côté de polygone) définit une translation qui sera orientée dans le sens où le segment a lui-même été construit.

> Il est aussi possible de sélectionner un segment (déjà construit) pour servir de support à une translation en cliquant successivement sur ses deux extrémités. L'orientation de la translation est alors déterminée par cette manœuvre et peut être différente de l'orientation du segment lui-même. Un segment peut ainsi être le support de deux translations réciproques.

Dès qu'une translation est définie, son support est repeint en vert et muni d'une pointe de flèche.

Fig. 1

Le segment de gauche est le support d'une translation. Le segment de droite est le support de deux translations réciproques l'une de l'autre.

8.2.2 Définir/Rotation

Pour définir une rotation, nous choisissons un arc qui aura été tracé préalablement. Le centre et l'angle de l'arc seront respectivement le centre et l'angle de la rotation. L'arc étant orienté comme on l'a indiqué au chapitre 3, il n'est pas besoin de spécifier quelle en est l'origine et quelle en est l'extrémité. Une fois que l'arc a été choisi pour définir la rotation, il prend une couleur verte et est muni d'une pointe de flèche. Un arc ne peut être le support que d'une seule rotation.

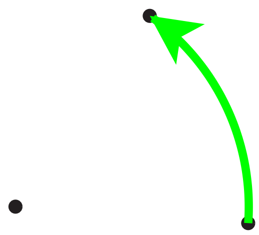


Fig. 2

8.2.3 Définir/Demi-tour

Pour définir un demi-tour, il suffit de choisir un point. Ce point doit avoir été fixé à l'écran au préalable et peut être le sommet d'une des formes dessinées. Le point choisi comme centre du demi-tour, est redessiné en vert.

Fig. 3

8.2.4 Définir/Quart de tour à gauche

Pour définir un quart de tour à gauche, la démarche est similaire à la précédente. Le centre du quart de tour est redessiné en vert.

8.2.5 Définir/Quart de tour à droite

Le processus est identique pour un quart de tour à droite.

8.2.6 Définir/Déplacement

A priori l'ajout au logiciel d'une fonctionnalité `Définir/Déplacement` n'apporte rien de nouveau puisque tout déplacement est une rotation ou une translation et que ces transformations ont toujours été disponibles. Cependant le déplacement est un concept général, son usage ne nécessite pas de connaître à l'avance si on définit une rotation ou une translation.

L'usage d'un déplacement facilite grandement le report d'une longueur sur une droite.

En fait, la définition d'un déplacement repose sur un résultat élémentaire de géométrie : *Étant donné deux demi-droites* $[AX$ *et* $[BY$*, il existe un et un seul déplacement qui applique* $[AX$ *sur* $[BY$. Ce déplacement applique le point A sur le point B mais n'applique X sur Y que si les distances $|AX|$ et $|BY|$ sont égales.

Pour définir un déplacement, deux méthodes peuvent être utilisées.

- Soit nous sélectionnons un quadrilatère (appartenant aux formes libres) déjà construit, par exemple, le quadrilatère $AXBY$ ci-dessous. Ce quadrilatère sert de support pour le déplacement δ, lequel appliquera A sur D et la demi-droite $[AX$ sur la demi-droite $[BY$. Il n'est pas indispensable de dessiner ces demi-droites elles-mêmes.

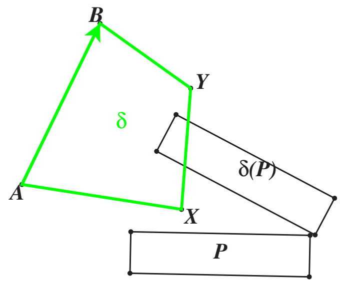


Fig. 4

  La figure précédente illustre ce théorème. Le dessin du quadrilatère-support $AXYB$ ne comporte pas de flèche de X vers Y puisque $\delta(X)$ n'est pas nécessairement égal à Y. En fait, le support du déplacement n'est pas complètement déterminé puisque les points X et Y ne servent qu'à déterminer les deux demi-droites source et image de δ. Dans le cas de cette figure, le déplacement δ est une rotation. Son centre peut être obtenu en utilisant la fonctionnalité `Transformations/Point fixe`. Si en modifiant l'un des points X ou Y on rend parallèles les droites AX et BY, le déplacement δ est automatiquement converti en translation.

- Soit nous sélectionnons (dans l'ordre) quatre points jouant le rôle de A, X, B, et Y, c'est-à-dire d'abord les deux points déterminant la demi-droite source, ensuite les deux points déterminant la demi-droite image. Le logiciel construit alors lui-même le quadrilatère $AXYB$.

8.2.7 Définir/Symétrie axiale

Pour définir une symétrie axiale, nous avons besoin d'un axe. Pour cette raison, après le choix de cette option, le pointeur de la souris demande de choisir soit un segment (qui peut être un côté de polygone), soit une droite (qui peut être un bord de bande ou de secteur), soit une demi-droite. Ces formes doivent avoir été tracées au préalable à l'écran. Lorsque l'axe a été choisi, il est repeint en vert.

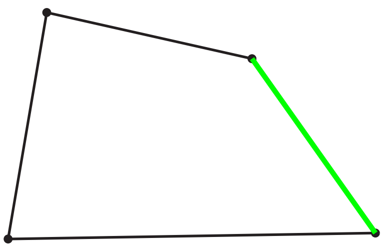


Fig. 5

Comme on le voit sur cette figure, si c'est un segment qui sert de support pour une symétrie axiale, seul ce segment est peint en vert et non l'axe complet. C'est largement suffisant.

8.2.8 Définir/Homothétie

Une homothétie est définie soit par son centre et par l'image d'un point distinct du centre, soit par deux points distincts (nous les appellerons *les points origines*) et leurs images, également distinctes. Dans ce dernier cas, la droite des images doit être parallèle à la droite des origines.

À ces deux modes de définition correspondent deux modes de construction d'une homothétie, et même trois car le logiciel prévoit deux façons de construire une homothétie à l'aide de deux points et de leurs images. Commençons par décrire cette situation.

- La méthode la plus simple consiste à sélectionner un trapèze (appartenant aux formes libres) préalablement construit. Le trapèze sert de support pour l'homothétie. Lors de la construction du trapèze, les deux premiers clics ont fixé l'une des deux bases. Les extrémités de cette base sont les points origines de l'homothétie. L'image de chacun des points origines est l'extrémité de la seconde base dont il est voisin. Les sommets d'un trapèze $abcd$ étant, conformément aux usages, énumérés dans l'ordre selon lequel on les rencontre en parcourant le bord, l'homothétie applique a sur d et b sur c. Ceci reste vrai si le trapèze est croisé.

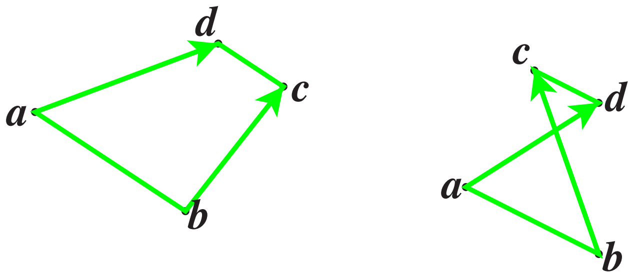


Fig. 6

  Avec ces conventions, les homothéties de rapport positif correspondent aux trapèzes convexes et les homothéties de rapport négatif aux trapèzes croisés.

- Nous pouvons aussi définir une homothétie en choisissant successivement quatre points distincts, déjà construits, qu'ils soient sommets d'une forme géométrique ou qu'ils soient isolés. Le logiciel va alors construire lui-même un nouveau trapèze qui servira de support. L'ordre de choix détermine le rôle de chaque point : les points n°1 et 2 seront les deux points origines, extrémités de la première base. Le point n°3 sera l'image du point n°1 et le point n°4 sera l'image du point n°2. Si le quadrilatère ayant ces quatre points pour sommets n'est pas un trapèze, le point n°4 sera déplacé de façon à rectifier la situation.

Le principe de cette construction est que l'on indique d'abord les deux points origines, puis leurs images, d'abord celle du premier point origine, ensuite, celle du deuxième. Cette technique est logique pour définir une homothétie, mais ne correspond pas à la façon dont on construit un trapèze à la souris. C'est pourquoi dans ce cas, c'est l'ordinateur qui construit le trapèze et non l'utilisateur.

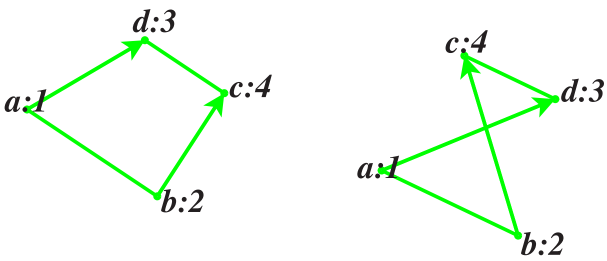


Fig. 7

- Passons au cas où l'homothétie est définie par son centre et l'image d'un point distinct de son centre. Trois points doivent être choisis. Afin que la technique de construction soit aussi proche que possible de la précédente, l'utilisateur devra cliquer non pas trois mais quatre fois : une première fois sur le centre, o, une deuxième fois sur le point origine a distinct du centre, une troisième fois à nouveau sur le centre o (puisqu'il est sa propre image) et une quatrième fois sur le point b image de a. Les trois points doivent normalement être alignés. S'ils ne le sont pas, le point b est ramené par projection orthogonale sur la droite oa. Le logiciel construit lui-même un support constitué des trois points définissant l'homothétie.

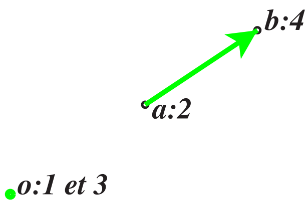


Fig. 8

8.2.9 Définir/Similitude

Il s'agit ici uniquement de définir une similitude directe, ce qui ne nécessite que quatre points placés presque n'importe où (si a, b, c et d sont quatre points du plan, dès que $a \neq b$, il existe une et une seule similitude directe qui applique a sur c et b sur d). Pour définir une similitude directe, on peut donc choisir soit un quadrilatère quelconque soit quatre points déjà placés sur la feuille de travail. Tout comme pour l'homothétie, plusieurs méthodes de construction sont disponibles.

- La méthode la plus simple consiste à sélectionner un quadrilatère (appartenant aux formes libres) préalablement construit. Le quadrilatère sert de support pour la similitude. Les deux premiers sommets du quadrilatère à avoir été construits seront les deux points origines. L'image de chacun des points origines est l'extrémité de la seconde base à laquelle il est joint par un côté. Sur la figure qui suit, le quadrilatère a été construit en fixant successivement les points a, b, c et d. La similitude applique a sur d et b sur c.

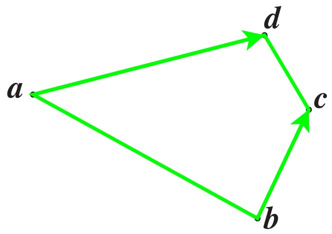


Fig. 9

- Nous pouvons aussi définir une similitude en choisissant successivement quatre points, déjà construits, qu'ils soient sommets d'une forme géométrique ou qu'ils soient isolés. Si nécessaire, le logiciel va alors construire lui-même un nouveau quadrilatère qui servira de support. L'ordre de choix détermine le rôle de chaque point : les points n°1 et 2 seront les deux points origines. Le point n°3 sera l'image du point n°1 et le point n°4 sera l'image du point n°2. Cette méthode permet aussi d'utiliser le même quadrilatère comme support de plusieurs similitudes.

Comme pour l'homothétie, le principe de cette construction est que l'on indique d'abord les deux points origines, puis leurs images, dans le même ordre alors qu'à la souris, les sommets d'un quadrilatère ne sont pas construits dans cet ordre-là.

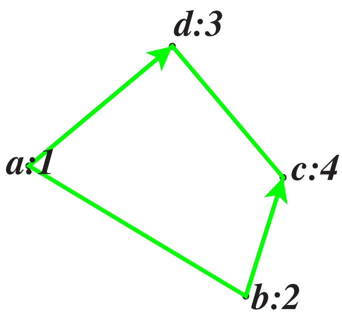


Fig. 10

Lors de cette construction, l'utilisateur peut, s'il le désire, faire coïncider les points n°2 et n°3. On construit ainsi une similitude à partir de trois points a, b et c : celle qui applique le point a sur le point b et celui-ci sur le point c. Dans ce cas, le support n'est pas un quadrilatère mais un triangle.

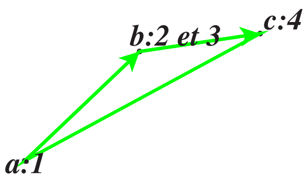


Fig. 11

- Enfin, on peut définir une similitude à partir de son centre et de l'image d'un point distinct de son centre. Trois points doivent être choisis. Comme dans le cas d'une homothétie définie de façon analogue, l'utilisateur devra cliquer non pas trois mais quatre fois : une première fois sur le centre, une deuxième fois sur le point origine distinct du centre, une troisième fois à nouveau sur le centre (puisqu'il est sa propre image) et une quatrième fois sur le point image du point n°2. Le logiciel construit lui-même un support constitué des trois points définissant la similitude.

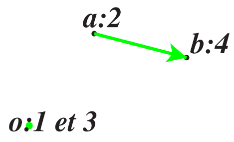


Fig. 12

8.2.10 Définir/Étirement

À la différence de toutes les transformations rencontrées jusqu'ici, les étirements NE SONT PAS des similitudes particulières mais des transformations affines particulières.

Les transformations affines, ou affinités, sont les transformations du plan qui appliquent toute droite sur une droite et qui conservent le parallélisme ainsi que les rapports de longueurs de segments parallèles. Elles ne conservent ni la perpendicularité, ni les angles. Étant donnés deux triples de points non alignés (A, B, C) (A', B', C') il existe une et une seule transformation affine qui applique A sur A', B sur B' et C sur C'. (Si nous travaillions dans l'espace de dimension 3, nous devrions remplacer « triples de points non alignés » par « quadruples de points non coplanaires ».)

Les étirements sont les transformations affines qui admettent une droite AB de points fixes et pour lesquelles il existe au moins un point C, extérieur à AB dont l'image C' n'appartient pas à la parallèle à AB passant par C. La droite AB sera appelée l'*axe de l'étirement*.

Le support d'un étirement est un quadrilatère. Comme les déplacements ou les similitudes, on peut définir un étirement soit en sélectionnant un quadrilatère soit en sélectionnant quatre points, mais les fonctions de ces quatre points sont différentes. Les deux premiers sommets du quadrilatère, A et B sur la figure suivante, sont deux points fixes. Tous les points de la droite AB sont donc fixes. Le points C' est l'image du point C.

Si on définit l'étirement en sélectionnant quatre points, il convient de les choisir dans l'ordre A, B, C, C'.

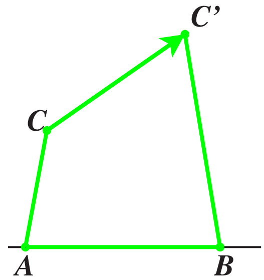


Fig. 13

Construisons l'image d'un point P du plan par l'étirement ϵ défini dans la figure précédente.

On remarque d'abord que la droite parallèle à CC' passant par P est invariante par l'étirement. En effet cette parallèle à CC' coupe la droite AB en un point Q, fixe pour ϵ. Comme ϵ respecte le parallélisme, la droite $P'Q'$ est la parallèle à CC' passant par Q', et puisque $Q' = Q$, on a $P'Q' = PQ$. Autrement dit l'image P' de P appartient à PQ.

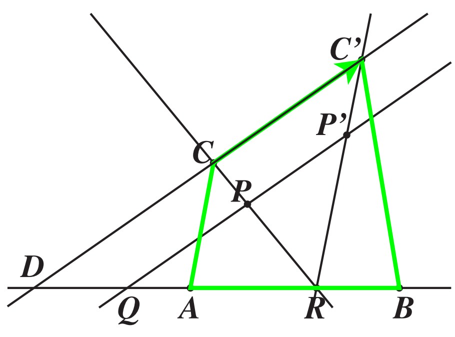


Fig. 14

Joignons ensuite P au point C dont nous connaissons l'image par ϵ. La droite CP coupe AB

en un point R fixe pour ϵ. Le point P' appartient à la droite RC'. Ainsi le point P' est le point d'intersection de PQ et de RC'.

En utilisant le théorème de Thalès, ou une homothétie, on vérifiera facilement l'egalité de rapports

$$\frac{|DC'|}{|DC|} = \frac{|QP'|}{|QP|}$$

laquelle figure dans la définition de toute transformation affine (la conservation des rapports de longueurs de segments parallèles).

Pour un étirement, la direction de CC' joue un rôle particulier puisque toutes les droites ayant cette direction sont invariantes. On parlera ainsi de la *direction* de l'étirement. Quand on restreint l'étirement à une quelconque de ces droites invariantes, on obtient sur cette droite une homothétie ayant pour centre son point d'intersection avec l'axe de l'étirement. Et le rapport de cette homothétie est le même pour toutes les droites ayant la direction de l'étirement. On parlera donc du *rapport de l'étirement*. Le rapport d'un étirement joue un rôle important dans le calcul des aires : si P est une forme géométrique quelconque et si P' est son image par un étirement, l'aire de P' est égale au produit de l'aire de P par le rapport de l'étirement. Par exemple, une ellipse étant l'image d'un cercle par un étirement, on obtient pour l'ellipse une aire égale à πab si a et b sont les demi-longueurs des axes.

Il est à noter que le rapport d'un étirement peut être inférieur à 1. On continue à parler d'étirement, mais il s'agit alors plutôt d'une contraction. Le rapport peut même être négatif, tout point extérieur à l'axe et son image sont alors de part et d'autre de l'axe. En particulier, une *symétrie oblique* est un étirement de rapport -1.

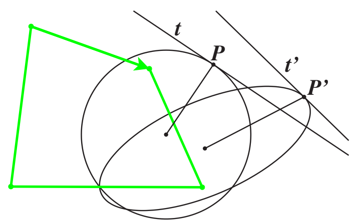


Fig. 15

L'image d'un cercle par un étirement est une *ellipse*. Et effectivement, le logiciel dessine une ellipse dans une telle situation. Néanmoins le concept d'ellipse n'a — jusqu'à présent — jamais été incorporé à *Apprenti Géomètre*. L'ellipse dessinée n'est donc pas reconnue comme telle par le logiciel, mais uniquement comme image d'un cercle par une transformation. Cette circonstance peut empêcher que certaines fonctionnalités puissent être appliquées à une ellipse. Par exemple, il n'est pas possible de lui appliquer une seconde transformation (translation, rotation, etc). Certaines opérations peuvent être réalisées, à condition de repasser par le cercle $\mathscr{C}$ dont l'ellipse $\mathscr{E}$ est l'image. Ainsi pour placer un point mobile P' sur le bord de $\mathscr{E}$, on place un point P sur le cercle $\mathscr{C}$ et on applique l'étirement au point P. Le déplacement de P sur $\mathscr{C}$ permettra de faire circuler P' sur $\mathscr{E}$. De même, la tangente en P' à l'ellipse est l'image par l'étirement de la tangente au cercle en P.

8.2.11 Définir/Cisaillement

Comme les étirements, les cisaillements sont des transformations affines qui admettent une droite AB de points fixes. La différence entre cisaillement et étirement réside dans le fait que pour un cisaillement, l'image C' de tout point C extérieur à la droite AB se trouve sur la parallèle à AB passant par C. La droite AB sera appelée l'*axe du cisaillement*.

Le support d'un cisaillement est un trapèze (un parallélogramme est un trapèze). On peut définir un cisaillement soit en sélectionnant un trapèze $ABC'C$, soit en sélectionnant quatre points. Sur la figure suivante, les deux premiers sommets du trapèze, A et B, sont deux points fixes. Tous les points de la droite AB sont donc fixes. Le points C' est l'image du point C.

Si on définit le cisaillement en sélectionnant quatre points, il convient de les choisir dans l'ordre A, B, C, C'.

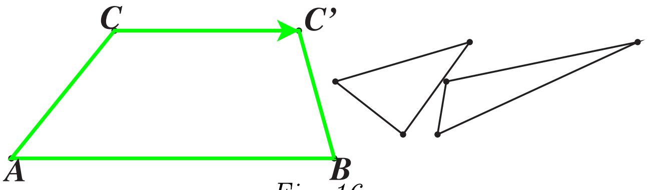


Fig. 16

Construisons l'image d'un point P du plan par le cisaillement γ défini dans la figure précédente.

Comme dans le cas des étirements, la droite PQ, parallèle à CC' passant par P est invariante par le cisaillement. Ainsi, tous les points du plan se « déplacent » sur des parallèles à l'axe du cisaillement.

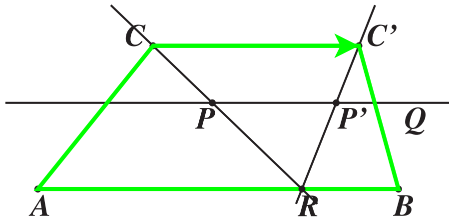


Fig. 17

À nouveau, le même raisonnement que dans le cas des étirements permet de déterminer l'image P' de P : la droite CP coupe AB en un point R fixe pour γ. Le point P' appartient à la droite RC'. Ainsi le point P' est le point d'intersection de PQ et de RC'.

En utilisant le théorème de Thalès, ou une homothétie, on vérifiera facilement que le rapport $\frac{|PP'|}{|CC'|}$ est le même pour tous les points P d'une parallèle à AB. De plus, tous les vecteurs $\overrightarrow{PP'}$ en question sont orientés de la même façon (comme $\overrightarrow{CC'}$ si les points P et C sont du même côté de AB, en sens contraires sinon). Il en résulte que la restriction d'un cisaillement à une droite parallèle à son axe est une translation. Il est remarquable que les aires d'une forme géométrique F et de son image F' par un cisaillement sont égales.

Les remarques faites à la fin de la section précédente pour l'image d'un cercle par un étirement sont également valables pour l'image d'un cercle par un cisaillement.

8.3 Appliquer

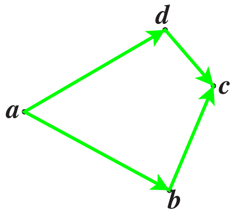
Lorsqu'on clique sur le bouton `Appliquer`, le pointeur de la souris nous demande de choisir une transformation. Cela donne le choix entre toutes les transformations définies au préalable. Rappelons qu'elles sont visibles grâce au fait que leurs supports sont de couleur verte.

Pratiquement

Pour appliquer une transformation à une forme géométrique :

- Cliquer sur le menu *Transformations/Appliquer*.
- Choisir une transformation, en cliquant sur son support. Ce support est alors redessiné en magenta. Simultanément, les supports des autres transformations — s'il en existe — ne sont plus coloriés en vert. Seule la transformation choisie reste donc visible.
- Choisir la forme dont on désire que l'image soit créée (les transformations s'appliquent aux formes, pas aux figures).

Comme on l'a déjà remarqué, il peut se faire qu'une forme géométrique soit le support de plusieurs transformations. À la section 8.2.1, nous avons vu l'exemple d'un segment support de deux translations. Voici un autre exemple :



Une première similitude ayant le quadrilatère *abcd* comme support a été définie en sélectionnant le quadrilatère lui-même. Elle applique a sur d et b sur c. Une seconde similitude a été définie en cliquant sur les quatre points séparément, dans l'ordre a, d, b c. Elle applique donc a sur b et d sur c.

Fig. 18

Pour sélectionner celle de ces deux transformations que l'on désire appliquer, on utilise la méthode de la barre d'espacement décrite à la page 37. Après avoir choisi *Transformations/Appliquer*, on positionne donc la souris au-dessus du quadrilatère *abcd*. Des pressions successives sur la barre d'espacement permettent alors de passer de la figure 19 à la figure 20, et retour. Un clic du bouton gauche, SANS DÉPLACER LA SOURIS, sélectionne la transformation souhaitée.

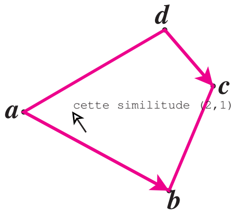


Fig. 19

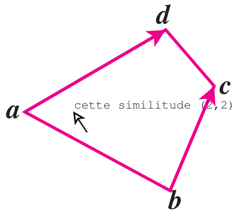


Fig. 20

Remarques

1. Après la construction de l'image d'une forme par une transformation, l'ordinateur se souvient de la transformation qui a été utilisée.

   Pour demander l'image d'une autre forme par la même transformation, on clique donc directement sur cette autre forme.

   Par contre, pour appliquer une autre transformation à une forme, on repasse par le menu *Transformations/Appliquer*.

2. L'opération `Appliquer` accepte la sélection multiple.

3. Ainsi qu'il a déjà été signalé, il peut être intéressant d'utiliser l'option resélection automatique. Mais après l'application d'une transformation, si cette option a été activée, ce sont les formes images qui sont sélectionnées et non les formes sources.

4. Lorsqu'on applique une transformation à une forme faisant partie d'un groupe de formes liées (par l'opération `Lier`), les images de toutes les formes du groupe sont construites. De plus, elles constituent un nouveau groupe de formes liées.

5. Toute modification d'une forme source se répercute automatiquement sur les formes images. Celles-ci ont donc le statut de formes construites, ce qui implique qu'il est impossible de les modifier directement : on ne peut « tirer » sur un sommet d'une forme construite. On ne peut pas non plus dupliquer une forme image.

6. Si c'est le support d'une transformation qui est modifié, il en va de même : les formes qui ont été obtenues par application de cette transformation sont automatiquement adaptées.

   Il est bon que l'utilisateur soit conscient de ce que certaines modifications de certaines formes sont sans influence sur les transformations supportées par ces formes. C'est notamment le cas des arcs de cercle, lorsqu'on modifie la position de l'origine de l'arc. Considérons la figure suivante, présentant un arc de cercle dont les trois points de définition sont libres, et qui supporte une rotation ρ.

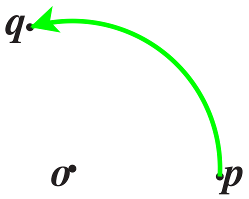


Fig. 21

- Si on modifie le centre o de l'arc, le point p ne change pas, le point q change mais l'angle de l'arc ne change pas. Quant à la rotation ρ, elle change puisque son centre change.
- Si on modifie le point p, le point o ne change pas, le point q change mais l'angle de l'arc ne change pas. Donc la rotation ρ ne change pas.
- Si on modifie le point q, les points o et p ne changent pas, mais l'angle change et la rotation ρ aussi.

Cette particularité peut être exploitée pour montrer que si une figure $\mathscr{F}'$ est l'image d'une figure $\mathscr{F}$ par une rotation ρ, de centre c, tous les arcs de centre c joignant un point de $\mathscr{F}$ au point homologue de $\mathscr{F}'$ ont même angle : on déplace l'origine p de l'arc qui définit la rotation successivement en tous les points de $\mathscr{F}$. (Tous ces arcs ont été tracés sur la figure suivante.)

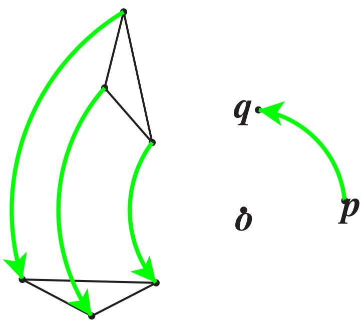


Fig. 22

Des remarques similaires peuvent être faites pour d'autres transformations, notamment pour les homothéties et similitudes définies par trois points : leur centre, un point et son image.

8.4 Transformations et mouvements

Lorsqu'une figure, ou une partie de figure, est l'image d'un ou plusieurs objets par une transformation, l'utilisateur peut rencontrer des difficultés s'il désire appliquer un mouvement (`Glisser`, `Tourner`, `Retourner`, ainsi que `Zoomer`) à cette figure.

Le principe général, déjà rencontré au point n°5 ci-dessus, est qu'on ne peut ni modifier, ni appliquer un mouvement à un point ou une forme image d'un(e) autre par une transformation.

Ainsi, dans la figure proposée par le fichier `tsf1.fag`(1), il est impossible de faire glisser, tourner... le quadrilatère $a'b'c'd'$, image de $abcd$ par la translation τ.

`tsf1.fag`

Essayez de faire glisser ou tourner le quadrilatère $a'b'c'd'$. Puis, faites glisser ou tourner $abcd$ et enfin le support de la translation τ. Que concluez-vous ?

- Quand on fait tourner la forme source $abcd$, son image tourne également et du même angle. Même chose si on fait glisser $abcd$. De façon générale, les mouvements appliqués à la forme source se transmettent à la forme image.

(1) Ce fichier doit s'ouvrir en cliquant sur l'icone d'*Apprenti Géomètre*

- Si c'est au support de la transformation (ici τ) qu'on applique un mouvement, les choses sont plus compliquées et il convient de distinguer l'effet de la transformation τ avant le mouvement et après le mouvement de son support.

  Dans la figure ci-contre, vous retrouvez les quadrilatères $abcd$, $a'b'c'd'$ et la translation τ, ayant pour support le segment $[p, q]$. De plus on y a fait tourner ce segment $[p, q]$ jusqu'à ce qu'il occupe la position $[r, s]$. Pour simplifier, nous désignons par σ la transformation τ *après le mouvement de son support*. Et nous notons ρ la transformation géométrique (une rotation) correspondant au mouvement appliqué au support. La translation τ est alors remplacée par la translation σ et $a"b"c"d"$ est la nouvelle image de $abcd$.

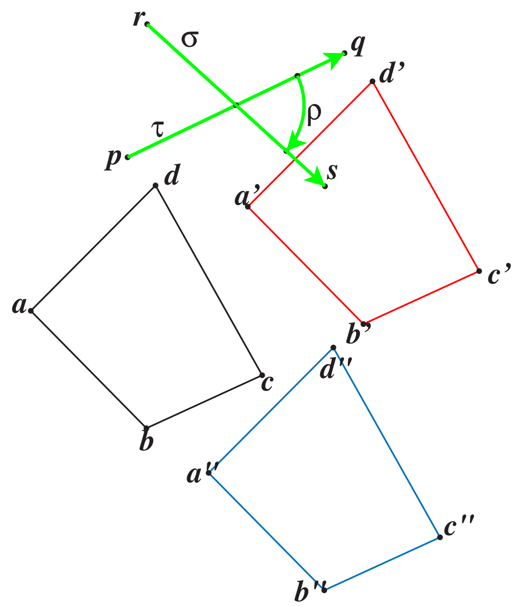
  

  Fig. 23

  Il s'agit d'exprimer σ à partir de τ et ρ. σ applique r sur s. Mais $r = \rho(p)$, donc $p = \rho^{-1}(r)$ et $q = \tau(p) = \tau(\rho^{-1})(r))$. Enfin

  $$s = \rho(q) = \rho(\tau(\rho^{-1})(r)))$$

  Comme $\rho \circ \tau \circ \rho^{-1}$ est une translation et applique r sur s, on a nécessairement

  $$\sigma = \rho \circ \tau \circ \rho^{-1}$$

  σ est la *transformation conjuguée* de τ par ρ. Cette formule est tout à fait générale :

Si un des mouvements `Glisser`, `Tourner`, ou `Retourner` est appliqué au support S d'une transformation τ, et si le mouvement en question a le même effet géométrique qu'une transformation ρ, alors dans la nouvelle position du support, la transformation τ a le même effet qu'aurait eu la transformation $\rho \circ \tau \circ \rho^{-1}$ avant l'application du mouvement au support.

  Ci-dessous, on a fait tourner le support d'une similitude :

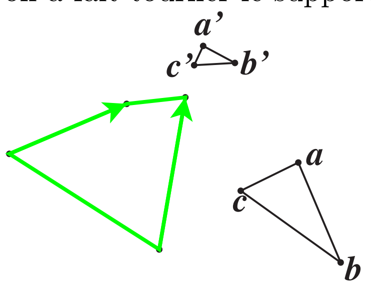
  

  Fig. 24

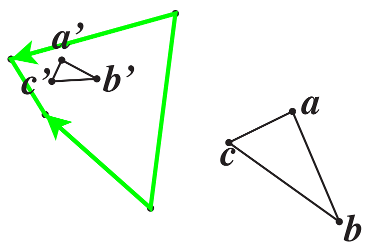
  

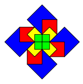
  Fig. 25

  Comme on le voit, l'image ne subit aucune déformation ; c'est en effet un mouvement que nous avons appliqué au support de la similitude, il entraîne un mouvement de l'image. Du point de vue géométrique, la similitude est remplacée par sa conjuguée par le mouvement appliqué au support([2]).

  On note aussi que si ρ commute avec τ, la conjuguée σ de τ par ρ est identique à τ. Il en résulte que faire glisser le support d'une translation ne provoque aucune modification aux images de celle-ci. Il en est de même si on fait tourner le support d'une rotation autour de son centre.

([2]) L'effet est le même si on utilise `Zoomer` au lieu d'un mouvement.

- Il peut aussi apparaître des impossibilités.



`tsf2.fag`

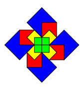
Ouvrez le fichier `tsf2.fag` et essayez de faire tourner le quadrilatère $abcd$, dont l'image par la translation τ est $a'b'c'd'$.

Vous constatez que vous ne pouvez même pas sélectionner le quadrilatère « source » $abcd$ en vue de le faire tourner. Bien sûr, vous ne pouvez pas non plus sélectionner le quadrilatère « image » $a'b'c'd'$, mais même le support $[p, q]$ de la translation τ ne peut être tourné.

La seule différence entre les fichiers `tsf1.fag` et `tsf2.fag` est la présence dans le second du segment $[c, a']$. Ce segment crée un lien entre deux quadrilatères qui dans `tsf2.fag` appartiennent à la même figure alors que dans `tsf1.fag`, ils constituent deux figures différentes.

Or les mouvements s'appliquent en bloc à une figure : impossible d'appliquer un mouvement à un des deux quadrilatères sans l'appliquer en même temps à l'autre. Mais ici, les deux quadrilatères ne peuvent pas non plus tourner en bloc, car la translation τ cesserait d'appliquer $abcd$ sur $a'b'c'd'$. Pour la même raison il n'est pas non plus possible de faire tourner le support de τ : on peut concevoir que l'image $a'b'c'd'$ soit repositionné en fonction du mouvement du support de τ, mais la forme « source » n'a aucune raison de changer de place, ce qu'elle devrait faire puisqu'elle fait bloc avec $a'b'c'd'$.

Remarquez que dans `tsf2.fag`, vous pouvez quand même faire glisser soit le bloc des deux quadrilatères, soit le support de la translation. En effet, comme nous l'avons remarqué plus haut, le glissement du support de la translation n'a pas d'impact sur les positions relatives d'une forme et de son image par cette translation. En fait, la translation ne change pas si on fait glisser son support. De même une rotation ne change pas si son support tourne autour de son centre.

- 

  `tsf3.fag`

  Ouvrez à présent le fichier `tsf3.fag` et essayez de faire glisser, ou tourner, ou retourner, les trois objets présents à l'écran : les quadrilatères $abcd$ et $a'b'c'd'$, et le segment $[p, q]$.

Vous constatez que plus rien ne bouge. La raison est la même qu'au point précédent : le quadrilatère $a'b'c'd'$ étant attaché au segment $[p, q]$ par le segment $[q, d']$, ce quadrilatère et le support de la translation devraient se mouvoir en bloc, ce qui détruirait la propriété pour $a'b'c'd'$ d'être l'image par τ de $abcd$.

À présent, supprimez le segment $[q, d']$ et remplacez-le par le segment $[p, d]$. Vous créez ainsi une figure de deux objets, $abcd$ et $[p, q]$, qui devront se mouvoir en bloc. Quelques essais vous montreront que ce bloc accepte de se mouvoir et que le quadrilatère « image » $a'b'c'd'$ est repositionné de façon correcte.

Enfin, redessinez le segment $[q, d']$, sans effacer $[p, d]$. Vous constituez ainsi une figure contenant à la fois la source, l'image et le support de la transformation. Le tout accepte de se mouvoir en bloc car dans un tel mouvement les positions relatives des trois objets ne sont pas modifiées.

- En conclusion :

Étant donnés une forme géométrique A, une transformation τ et la forme A', image de A par τ, alors, sauf deux situations exceptionnelles,
– si A et A' sont assemblés dans une même figure, sans que le support de τ soit dans cette figure,
– ou si A' et le support de τ sont dans une même figure sans que A s'y trouve,
les figures contenant A, A' et le support de τ ne peuvent faire l'objet d'aucun mouvement.
Les situations exceptionnelles sont
– celle où A et A' sont dans une même figure, τ est une translation et le mouvement appliqué est un glissement,
– celle où A et A' sont dans une même figure, τ est une rotation et le mouvement consiste à tourner autour du centre de τ.
Par contre le fait que la source A et le support de τ fassent partie d'une même figure est sans influence sur la possibilité d'appliquer un mouvement à la figure contenant ces deux objets, et cela même si l'image A' appartient également à cette figure.

Remarque Un problème analogue se pose si la forme A' est une droite ou un segment construit comme étant parallèle ou perpendiculaire à un autre objet A. On ne peut mouvoir A' (sans mouvoir A) en même temps que si le mouvement est un glissement. Dans ce cas, les relations de parallélisme et de perpendicularité ne sont pas perturbées.

8.5 Point fixe

L'usage de cette opération est aisé à décrire : il s'agit de construire le point fixe d'une transformation... dans le cas où il en existe un et un seul.

Or

- Les translations n'ont aucun point fixe.
- Les rotations (non identiques), y compris les demi-tours et quarts de tour sont construites en connaissant leur centre (qui est leur seul point fixe).
- Les symétries axiales ont une infinité de points fixes, et ils sont connus dès leur construction.
- Il en est de même pour les étirements et les cisaillements.

Il ne reste donc que les déplacements, les homothéties et les similitudes, et pas dans tous les cas puisqu'on peut définir une homothétie et une similitude en incorporant le centre à la définition.

La procédure est simple :

Pratiquement

- Choisir le menu *Transformations/Point fixe*
- Cliquer sur la transformation dont on veut construire le point fixe.

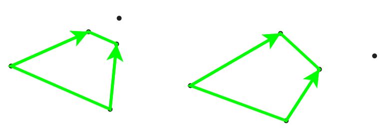


Fig. 26

Pour vous convaincre que le point construit est bien le point fixe de la transformation, vous pouvez lui appliquer cette transformation : aucun point nouveau ne doit apparaître (en réalité deux points sont superposés). Vous pouvez aussi marquer arbitrairement un point p et lui appliquer la transformation. Un nouveau point p' apparaît. Déplacez alors p en essayant de le superposer à p' : vous entrez dans une course-poursuite qui s'achève quand les points p et p' sont — ensemble — superposés au point construit par le logiciel en tant que point fixe.

Une dernière remarque : toute modification apportée au support de la transformation entraîne automatiquement le repositionnement du point fixe, lequel a le statut de « point construit ».

8.6 Montrer-cacher des transformations

Cette opération ressemble comme deux gouttes d'eau à l'opération `Montrer-Cacher des formes` décrite au chapitre 10.

Il s'agit de sélectionner la ou les transformations à cacher ou montrer, en appliquant éventuellement la technique de la barre d'espacement. Une fois la sélection faite, un clic amène la transformation à être repeinte en bleu pâle. En quittant l'opération, la transformation disparaît mais reste active. Son support reste visible.

Bibliographie

[1] CREM, *Apprenti Géomètre. Grandeurs, fractions et mesures.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2003).

[2] CREM, *Apprenti Géomètre. Rapport de recherche 2003-2004.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2004).

[3] N. Rouche et Ph. Skilbecq, *Apprenti Géomètre, un nouveau logiciel*, Mathématique et Pédagogie, 149, 68–84, (2004).

[4] CREM, *Apprenti Géomètre. Un outil de différenciation des apprentissages en mathématique.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2005).

[5] N. Rouche et Ph. Skilbecq, *Apprenti Géomètre ; pourquoi un nouveau logiciel*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2006).

[6] N. Rouche et Ph. Skilbecq, *Apprenti Géomètre, un atelier pour travailler les mathématiques*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2006).

[7] CREM, *Impact du logiciel Apprenti Géomètre sur certains apprentissages.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2007).

[8] B. Honclaire et G. Noël, *Barycentres.* Losanges, N°4, 19–25, (2009).

[9] G. Noël, *Activités avec Apprenti Géomètre.* Losanges, N°5, 35–39, (2009).

[10] B.Honclaire et Y. Noël-Roch *Astricas.* Losanges, N°7, 52–60, (2010).

[11] B.Honclaire *Touche à mon pote... AG.* Losanges, N°12, 47–52, N°13, 49–56, N°14, 52–58, N°15, 55–62, (2011).

[12] M.-F. Guissard, V. Henry, P. Lambrecht, P. Van Geet et S. Vansimpsen *Aires et agrandissements, Math & Manip avec le logiciel de géométrie Apprenti Géomètre.* Losanges N°18, 15–23, (2012).

[13] G. Noël, *Dessiner une conique.* Losanges, N°18, 54–57, (2012).

Index