Studio della dimensione di Hausdorff del moto Browniano

Alcuni aspetti geometrici del moto Browniano: i teoremi di Taylor e Kaufman

Candidato: Domenico Mergoni
Relatore: Chiar.mo prof. Franco Flandoli

Quello che vedremo in questa presentazione:

1. Sviluppo della teoria necessaria
    1.1 Introduzione al moto Browniano
    1.2 La dimensione di Hausdorff

2. Teorema di Taylor
    2.1 Upper bound per la dimensione del moto Browniano
    2.2 Un metodo per il lower bound

3. Teorema di duplicazione di Kaufman
    3.1 Presentazione
    3.2 Dimostrazione in $d = 2$

Introduzione al moto Browniano

Definizione e una prima proprietà

Moto Browniano standard unidimensionale

Processo stocastico $\{B_t\}_{t\geq 0}$ tale che:

- se $0 \leq s < t$, allora $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$, indipendente da B_s,
- $t \longmapsto B_t$ è quasi certamente continua e $\forall \omega, \; B_0(\omega) = 0$

Hölderianità del moto Browniano

Se $\alpha \in (0, 1/2)$, quasi certamente il moto Browniano è ovunque α-Hölderiano. Questo non vale per $\alpha > 1/2$.

Proprietà scelte del moto Browniano

Alcuni aspetti che ci saranno utili

Scaling invariance

Sia $\{B_t\}_{t\geq 0}$ moto Browniano standard e $\lambda > 0$. Allora

$$\left\{\frac{B_{\lambda^2 t}}{\lambda}\right\}_{t\geq 0}$$

è ancora moto Browniano standard

Non monotonia

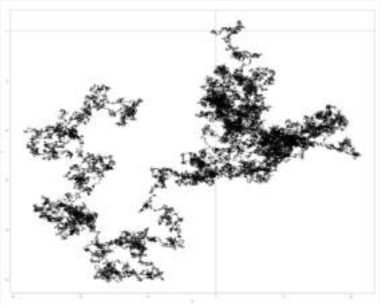
Siano $0 < a < b$, e $\{B_t\}_{t\geq 0}$ moto Browniano standard. Quasi certamente $t \longmapsto B_t$ è non monotona in $[a, b]$

Moto Browniano multidimensionale

Definizione e alcune rappresentazioni grafiche

Moto Browniano standard d-dimensionale

Siano $B^1, \dots, B^d$ moti Browniani standard unidimensionali e indipendenti. $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$ si dice moto Browniano standard d-dimensionale



La misura di Hausdorff

Misura di Hausdorff e α-valore di un ricoprimento

Sia (X, ρ) spazio metrico. Sia $\delta > 0$, allora $C_1, C_2, \ldots$ è detto δ-ricoprimento di X se vale $X \subseteq \bigcup_{n\geq 1} C_n$ e $\forall n \geq 1,\ |C_n| \leq \delta$. Sia

$$\mathscr{H}_\delta^\alpha(X) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^\alpha : C_1, \ldots \text{ è } \delta \text{ ricoprimento}\right\}$$

Misura di Hausdorff

Sia $\alpha > 0$, la misura di Hausdorff di (X, ρ) è definita come:

$$\mathscr{H}^\alpha(X) = \sup_{\delta\geq 0} \mathscr{H}_\delta^\alpha(X) = \lim_{\delta\to 0} \mathscr{H}_\delta^\alpha(X)$$

La dimensione di Hausdorff

Una interessante proprietà della misura di Hausdorff

Considerando $\mathscr{H}^{\alpha}(X)$ come funzione di α abbiamo che esiste $\xi \in (0, \infty)$ tale che:

$$\mathscr{H}^{\alpha}(X) = \begin{cases} \infty & \text{se } 0 < \alpha < \xi \\ \mathscr{H}^{\xi}(X) & \text{se } \alpha = \xi \\ 0 & \text{se } \alpha > \xi \end{cases}$$

Dimensione di Hausdorff

Sia (X, ρ) come sopra. Definiamo dimensione di Hausdorff di X:

$$dim(X) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \mathscr{H}^{\alpha}(X) = 0 \right\}$$

Upper bound tramite Hölderianità

Un caso particolare

Lemma

Siano $(X_1, \rho_1),\ (X_2, \rho_2)$ spazi metrici e $f : X_1 \to X_2$ α-Hölderiana con costante L e surgettiva. Allora $\forall \beta > 0$:

$$\mathscr{H}^{\beta}(X_2) \leq L^{\beta} \mathscr{H}^{\alpha\beta}(X_1)$$

Idea della dimostrazione

Sia $C_1, \ldots$ un δ-ricoprimento tale che:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^{\alpha\beta} \leq \mathscr{H}_{\delta}^{\alpha\beta}(X_1) + \varepsilon$$

Upper bound tramite Hölderianità

Applicazione al caso del moto Browniano

Allora $f(C_1), \ldots$ è un $L\delta^\alpha$-ricoprimento per X_2. Vale:

$$\mathscr{H}^{\beta}_{L\delta^\alpha}(X_2) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f(C_i)|^\beta \leq L^\beta \sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^{\alpha\beta} \leq L^\beta \mathscr{H}^{\alpha\beta}_{\delta}(X_1) + L^\beta \varepsilon$$

Corollario: upper bound per il moto Browniano

Sia $A \subseteq [0, \infty)$ e B_t un moto Browniano d-dimensionale. Allora

$$dim(B_A) \leq 2dim(A) \wedge d$$

Un metodo per il lower bound

Il metodo dell'energia

Energia di una distribuzione di massa

Sia (X, ρ) spazio metrico, $\alpha > 0$ e μ una distribuzione di massa su X.

L'α energia di μ è definita come

$$I_\alpha(\mu) = \iint \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\rho(x,y)^\alpha}$$

Metodo dell'energia

$$\forall \delta > 0, \quad \mathscr{H}^\alpha_\delta(X) \geq \frac{\mu(X)^2}{\iint_{\rho(x,y)\leq\delta} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\rho(x,y)^\alpha}}$$

Metodo dell'energia

Un'idea della dimostrazione

Sia $C_1, \ldots$ un δ-ricoprimento per cui $\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^\alpha \leq \mathscr{H}_\delta^\alpha(X) + \varepsilon$. Si ha:

$$\mu(X)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\mu(C_i)}{|C_i|^{\frac{\alpha}{2}}} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^\alpha \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(C_i)^2}{|C_i|^\alpha} \right)$$
$$\leq \left(\mathscr{H}_\delta^\alpha(X) + \varepsilon \right) \left(\iint_{\rho(x,y)\leq\delta} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\rho(x,y)^\alpha} \right)$$

Corollario

Siano (X, ρ), α come sopra. Se esiste una distribuzione di massa μ su X tale che $I_\alpha(\mu) < \infty$, allora $dim(X) \geq \alpha$

Teorema di Taylor

Valore della dimensione di Hausdorff del moto Browniano

Teorema di Taylor (1953)

Sia $d \geq 2$ e $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un MB d-dimensionale. Quasi certamente

$$dim\left(B_{[0,1]}\right) = 2$$

Idea della dimostrazione

Su $B_{[0,1]}$ si ha la misura random: $\mu_\omega(A) = \int_0^1 \mathbb{1}_A(B_t)dt$. Per il teorema di Lebesgue, data f limitata misurabile vale q.c.:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)d\mu(x) = \int_0^1 f(B_t)dt$$

Teorema di Taylor

Continuo della dimostrazione

Dato $\alpha \in (0, 2)$ e per quasi ogni $\omega \in \Omega$, vale:

$$I_\alpha(\mu_\omega) = \int \left(\int \frac{d\mu_\omega(x)}{|x - y|^\alpha} \right) d\mu_\omega(y) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dsdt}{|B_s - B_t|^\alpha}$$

E quindi vogliamo provare che vale:

$$\mathbb{E} I_\alpha(\mu) = \mathbb{E} \int_0^1 \int_0^1 \frac{dsdt}{|B_s - B_t|^\alpha} < \infty$$

Teorema di Taylor

Continuo della dimostrazione

Usando il teorema di Fubini e la scaling invariance abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} I_\alpha(\mu_\omega) &= \mathbb{E} \int_0^1 \int_0^1 \frac{dsdt}{|B_s - B_t|^\alpha} = \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E} \frac{dsdt}{|B_s - B_t|^\alpha} \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E} \frac{dsdt}{|t-s|^{1/2} |B_1|^\alpha} = K \int_0^1 \int_0^1 \frac{dsdt}{|t-s|^{\alpha/2}} \\
&\leq 2K \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha/2}} < \infty
\end{aligned}$$

Il teorema di Kaufman e il teorema di McKean

Un confronto

Sia $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto Browniano d-dimensionale, $d \geq 2$. Valgono:

Teorema di McKean

Fissato $A \subseteq [0, \infty)$ insieme chiuso, quasi certamente vale:

$$dim(B_A) = 2dim(A)$$

Teorema di duplicazione di Kaufman

Quasi certamente, per ogni $A \subseteq [0, \infty)$, vale:

$$dim(B_A) = 2dim(A)$$

Dimostrazione del teorema di Kaufman per $d = 2$

Un risultato preliminare

Fissato R, sia $\tau_R = \min\{t : |B_t| = R\}$ tempo di arresto. Mostriamo che quasi certamente $\forall A \subseteq [0, \infty)$, $dim(B_A) \geq 2dim(A \cap [0, \tau_R])$

Lemma

Sia $Q = \mathscr{B}_\infty(x, r)$ e R tale che $Q \subseteq \mathscr{B}(0, R)$. Se chiamiamo

$$\tau_{k+1}^Q = \inf\left\{t \geq \tau_k^Q + r^2 : B_t \in Q\right\}$$

Allora esiste una costante M dipendente solo da r e R tale che:

$$\mathbb{P}_z\left\{\tau_k^Q < \tau_R\right\} \leq (1 - M)^k \leq e^{-kM}$$

Dimostrazione del teorema di Kaufman per $d = 2$

Continuo della dimostrazione

$$\mathbb{P}_z\left\{\tau^Q_{k+1} \geq \tau_R | \tau^Q_k < \tau_R\right\} \geq \mathbb{P}_z\left\{\tau^Q_{k+1} \geq \tau_R \middle| \left|B_{\tau^Q_k + R^2} - x\right| > 2r,\, \tau^Q_k < \tau_R\right\} \cdot$$

$$\cdot\, \mathbb{P}_z\left\{\left|B_{\tau^Q_k + R^2} - x\right| > 2r | \tau^Q_k < \tau_R\right\}$$

Corollario

Esiste una v.a.r. C tale che, quasi certamente,
$\forall m,\ \forall Q = \mathscr{B}\left(x, 2^{-m}\right) \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$, si ha:

$$\tau^Q_{\lceil mC+1 \rceil} \geq \tau_R$$

Dimostrazione del teorema di Kaufman per $d = 2$

Continuo della dimostrazione

Idea della dimostrazione del Corollario

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{Q \in \mathfrak{C}_m} \mathbb{P}\left\{ \tau^{Q}_{\lceil mC+1 \rceil} < \tau_R \right\} \leq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{dm} \theta^{cm}$$

Dimostrazione Kaufman in $n = 2$

Ci basta dimostrare che vale, se $S = B_A \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$:

$$2dim\left(B_S^{-1}\right) \leq dim\,(S)$$

Dimostrazione del teorema di Kaufman per $d = 2$

Continuo della dimostrazione

Sia $\gamma : t \mapsto B_t$ cammino di B_t che rispetta le ipotesi del corollario, $\beta > dim(S)$. Sia $E_1, \ldots$ ricoprimento di S formato da N_m cubi diadici di diametro 2^{-m} e tale che $\sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^{\beta} < \varepsilon$. Allora vale anche $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m\beta} N_m < \varepsilon$. Dato un qualsiasi $\eta > \beta$ possiamo scrivere:

$$\mathscr{H}^{\eta/2}\left(B_S^{-1}\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} CmN_m(d2^{-2m})^{\frac{\eta}{2}} = Cd^{\frac{\eta}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} mN_m 2^{-2m}$$

La tesi si ottiene per $\eta \to dim(S)$.

Bibliografia

Sono stati utilizzate le seguenti pubblicazioni:

[1] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry*, Wiley, Chichester, 2003.

[2] Peter Mörters and Yuval Peres, *Brownian Motion*, Cambridge Univerity Press, 2010

[3] Jean Jacod and Philip Protter, *Probability essentials*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[4] Ioannis Karatzas and Steven Shreve, *Brownian motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

Grazie per l’attenzione