Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

Построение решений эллиптических систем в треугольнике

Студент ФН2-62Б (Группа) _______ (Подпись, дата) К. А. Артемьев (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы _______ (Подпись, дата) А. О. Багапш (И. О. Фамилия)

2022 г.

Содержание

Введение

Рассматривается кососимметрическая сильно эллиптическая система на плоскости, приведённая к каноническому виду $\partial\overline{\partial}f(z) + \boldsymbol{\tau}\partial^2 f(z) = 0$, где $f(z)$ — комплекснозначная функция комплексного переменного z,

$$\partial := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \overline{\partial} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

— операторы Коши — Римана, а $\boldsymbol{\tau} \in [0, 1)$ — параметр. Решение выписанного уравнения имеет вид

$$f(z) = h\left(\frac{z - \boldsymbol{\tau}\bar{z}}{1 - \boldsymbol{\tau}}\right) + g(\bar{z}),$$

где h и g — голоморфные функции.

Если $L \subset \mathbb{C}$ — прямая, то её уравнение можно записать в виде $z = a\bar{z} + b$ и тогда любая функция вида

$$f(z) = h\left(\frac{z - \boldsymbol{\tau}\bar{z}}{1 - \boldsymbol{\tau}}\right) - h\left(\frac{(a - \boldsymbol{\tau})\bar{z} + b}{1 - \boldsymbol{\tau}}\right)$$

удовлетворяет рассматриваемому уравнению и обращается в ноль на L. Используя этот факт, требуется построить в треугольнике решение $f(z)$ изучаемого уравнения, обращающееся в ноль во всех точках границы, кроме одной, выбирая в качестве функции h подходящую автоморфную функцию. Требуется построить эту автоморфную функцию в виде тета-ряда Пуанкаре, а также реализовать алгоритм суммирования ряда.

1. Кососимметричная эллиптическая система

Эллиптическая система имеет вид

$$\left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \tag{1}$$

где A, B, $C \in M_2(\mathbb{R})$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, x, y, u, $v \in \mathbb{R}$. Кососимметричность системы означает, что

$$A := \begin{pmatrix}a_1 & -a_2\\ a_2 & a_1\end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix}b_1 & -b_2\\ b_2 & b_1\end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix}c_1 & -c_2\\ c_2 & c_1\end{pmatrix}.$$

В комплексной форме матричное уравнение (1) можно представить как

$$af_{xx}(z)+2bf_{xy}(z)+cf_{yy}(z)=0, \tag{2}$$

где $a := a_1 + ia_2$, $b := b_1 + ib_2$, $c := c_1 + ic_2$, $z := x + iy$, $f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$.

Эллиптичность системы (1) означает, что корни λ_1 и λ_2 уравнения

$$a\lambda^2+b\lambda+c=0$$

имеют ненулевые мнимые части, т. е. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Сильная эллиптичность системы (1) означает, что мнимые части λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, т. е.

$$\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\lambda_1 \neq \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\lambda_2.$$

Существует такая замена переменных

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

что уравнение (2) приводится к каноническому виду

$$\partial\overline{\partial}f(z)+\tau\partial^2 f(z)=0, \quad \text{или} \quad \partial(\overline{\partial}+\tau\partial)f(z)=0, \quad \text{где} \quad \tau\in[0,1). \tag{3}$$

Решение уравнения (3) имеет вид

$$f(z)=h\left(\frac{z-\tau\bar{z}}{1-\tau}\right)+g(\bar{z}),$$

где h и g — голоморфные функции. Нетрудно установить, что

$$\left(\overline{\partial}+\tau\partial\right)h\left(\frac{z-\tau\bar{z}}{1-\tau}\right)=0 \quad \text{и} \quad \partial g(\bar{z})=0.$$

Требуется найти функцию f, принимающую нулевое значение всюду на границах ∂T произвольно заданного треугольника T, кроме одной точки $z_\partial \in \partial T$. Будем строить эту функцию, считая, что одна из сторон треугольника совпадает с отрезком $[0,\,1]$. Для выполнения этого условия отобразим произвольно заданный треугольник, используя линейное отображение $z \mapsto az + b$. Пусть z_0 и z_1 — вершины треугольника, отображаемые в 0 и 1 соответственно. Символом z_T формально обозначим другую вершину треугольника. Тогда

$$\begin{cases} az_0 + b = 0 \\ az_1 + b = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{z_1 - z_0}, \quad b = \frac{z_0}{z_0 - z_1}.$$

Таким образом, нужное нам линейное отображение найдено. Точки z_∂ и z_T отображаются в точки $z_\partial^* := az_\partial + b$ и $z_T^* := az_T + b$ соответственно. Теперь рассмотрим полученный треугольник, изображённый на рисунке:

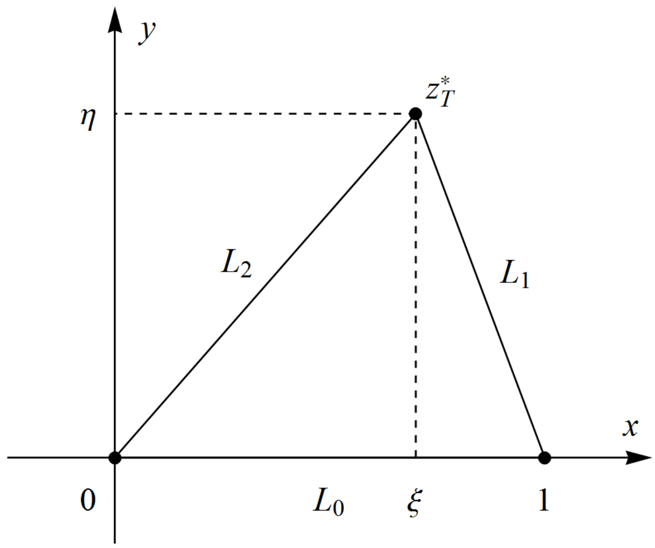

Рис. 1. Треугольник с вершинами в точках 0, 1, $z_T^* := \xi + i\eta$ и со сторонами $L_0 := [0,\,1]$, $L_1 := [z_T^*,\,1]$, $L_2 := [0,\,z_T^*]$.

Символами L_0, L_1, L_2 будем обозначать как стороны (рис. 1), так и соответствующие прямые, содержащие их. Построим уравнения этих прямых в виде $z = A_k\bar{z} + B_k$, где A_k, $B_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{0,\,2}$. Ясно, что прямая L_0 задаётся уравнением $z = \bar{z}$, т. е. $A_0 := 1$, $B_0 := 0$. Уравнение прямой L_1 в координатах x и y имеет вид

$$\frac{x-1}{\xi - 1} = \frac{y}{\eta}, \quad \text{т. е.} \quad i\frac{2x-2}{\xi-1} = \frac{2iy}{\eta}.$$

Из соотношений $2x = z + \bar{z}$ и $2iy = z - \bar{z}$ получаем

$$\frac{z + \bar{z} - 2}{\xi - 1} = \frac{z - \bar{z}}{i\eta}.$$

Выражая z через $\bar{z}$, получаем $z = A_1\bar{z} + B_1$ с коэффициентами

$$A_1 := \frac{z_T^* - 1}{\overline{z_T^*} - 1}, \quad B_1 := -\frac{2i\,\mathrm{Im}\, z_T^*}{\overline{z_T^*} - 1}.$$

Уравнение прямой L_2 имеет вид

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta}, \quad \text{или} \quad \frac{z + \bar{z}}{\xi} = \frac{z - \bar{z}}{i\eta}.$$

Выражая z через $\bar{z}$, получаем $z = A_2\bar{z} + B_2$ с коэффициентами $A_2 := z_T^*/\overline{z_T^*}$, $B_2 := 0$.

Будем искать функцию f, считая, что она имеет вид

$$f(z) = h\left(\frac{z - \tau\bar{z}}{1 - \tau}\right) - h(\bar{z}), \tag{4}$$

где h — голоморфная функция. Потребуем, чтобы $f(z) = 0$ на отрезках L_0, L_1, L_2. Прямая L_0 задаётся уравнением $z = \bar{z}$, значит,

$$\frac{z - \tau\bar{z}}{1 - \tau} = z = \bar{z}.$$

Таким образом, функция f, имеющая вид (4), принимает нулевое значение на L_0 без каких-либо дополнительных условий. Прямые L_k ($k = \overline{1, 2}$) задаются уравнениями вида $z = A_k\bar{z} + B_k$, значит,

$$\frac{z - \tau\bar{z}}{1 - \tau} = \frac{(A_k - \tau)\bar{z} + B_k}{1 - \tau} = a_k\bar{z} + b_k, \quad \text{где} \quad a_k := \frac{A_k - \tau}{1 - \tau}, \quad b_k := \frac{B_k}{1 - \tau}.$$

Получаем, что $f(z) = h(a_k\bar{z} + b_k) - h(\bar{z})$ при $z \in L_k$. Итак, для обнуления значения функции f на границах треугольника достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} h(z) = h(T_1(z)), \\ h(z) = h(T_2(z)), \end{cases} \tag{5}$$

где $T_1(z) := a_1 z + b_1$, $T_2(z) := a_2 z + b_2$, т. е. инвариантности функции h относительно линейных преобразований T_1 и T_2.

2. Построение автоморфных функций

2.1. Основные положения

Для дальнейших рассуждений определим ряд важных понятий.

Определение 1. Множество $G := \{G_1, G_2, \ldots\}$ дробно-линейных отображений (ДЛО) называется *группой*, если оно обладает следующими свойствами:

1. Тождественное преобразование $I \in G$.
2. Если $g \in G$, то и $g^{-1} \in G$.
3. Если φ, $\psi \in G$, то и композиция (произведение) $\varphi\psi \in G$.

Определение 2. Преобразования $G_1, G_2, \ldots, G_N$ называются *образующими* группы G, если любое преобразование из G является конечным произведением положительных или отрицательных степеней некоторых из преобразований G_k, $k = \overline{1, N}$.

Определение 3. Окружность $|cz + d| = 1$ с центром в точке $-d/c$ и с радиусом $1/|c|$ $(c \neq 0)$, представляющая собой геометрическое место всех точек, в окрестности которых длины и площади остаются неизменными при преобразовании

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

называется *изометрической окружностью* преобразования.

Определение 4. Точка сгущения центров изометрических окружностей преобразований группы называется *предельной точкой* группы. Всякая точка, не являющаяся предельной, называется *обыкновенной точкой* группы.

Определение 5. Пусть $G := \{G_0, G_1, G_2, \ldots\}$ — группа ДЛО,

$$G_k(z) := \frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}, \quad a_k d_k - b_k c_k = 1, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

— её элементы. Пусть H — рациональная функция, ни один полюс которой не является предельной точкой группы G. Функциональный ряд вида

$$\theta(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (c_k z + d_k)^{-2m} H(G_k(z)) \tag{6}$$

называется *тета-рядом Пуанкаре.*

Нетрудно установить, что

$$\theta(G_n(z)) = (c_n z + d_n)^{2m} \theta(z), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{7}$$

С помощью таких рядов можно строить функции, являющиеся инвариантными относительно преобразований группы G (иными словами, автоморфные по отношению к группе G). Пусть θ_1 и θ_2 — два тэта-ряда с одним и тем же целым m,

$F(z) := \theta_1(z)/\theta_2(z)$. Тогда, учитывая (7),

$$F(G_n(z)) := \frac{\theta_1(G_n(z))}{\theta_2(G_n(z))} = \frac{(c_n z + d_n)^{2m}\theta_1(z)}{(c_n z + d_n)^{2m}\theta_2(z)} = F(z),$$

т. е. функция F автоморфна по отношению к группе G.

Теорема. Пусть $m > 2$ и $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ — обыкновенная точка группы. Пусть, далее, $S \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, внутри которой нет ни одной предельной точки группы. Тогда функция, определяемая тета-рядом (6), аналитична всюду в области S за исключением некоторых точек, являющихся её полюсами.

2.2. Практическая часть

В предыдущем разделе мы получили условия (5), согласно которым функция h инвариантна относительно линейных преобразований T_1 и T_2. Следовательно, она инвариантна относительно любой композиции T_1, T_2, T_1^{-1}, T_2^{-1} и их степеней. Символом $\langle T_1, T_2\rangle$ обозначим группу, порождённую элементами T_1 и T_2. Итого, функция h инвариантна относительно преобразований группы $\langle T_1, T_2\rangle$, иными словами, автоморфна по отношению к группе $\langle T_1, T_2\rangle$.

Так как T_1 и T_2 — линейные преобразования, то и все остальные преобразования из группы $\langle T_1, T_2\rangle$ также линейны. Это означает, что бесконечно удалённая точка является предельной для группы $\langle T_1, T_2\rangle$, что противоречит условиям сформулированной выше теоремы. По этой причине для получения сходящихся тета-рядов Пуанкаре понадобится перейти от группы $\langle T_1, T_2\rangle$ к группе нелинейных ДЛО.

Согласно полученным ранее условиям (5), $h(z) = h(T_k(z))$, $k = \overline{1, 2}$. Пусть P — произвольное ДЛО. Введём замену переменной $z = P(\zeta)$, то есть $\zeta := P^{-1}(z)$. Также введём замену искомой функции $g(\zeta) := h(z)$, то есть

$$g(\zeta) = h(P(\zeta)) \quad \text{или} \quad h(z) = g(P^{-1}(z)).$$

Точка z_∂^* отображается в точку $\zeta_\partial := P^{-1}(z_\partial^*)$. Из условий (5) следует, что

$$g(P^{-1}(z)) = g(P^{-1}T_k(z)), \quad k = \overline{1, 2}.$$

Учитывая, что $P^{-1}(z) = \zeta$ и $z = P(\zeta)$, получим

$$g(\zeta) = g(P^{-1}T_k P(\zeta)), \quad k = \overline{1, 2}.$$

Обозначим $S_1 := P^{-1}T_1P$, $S_2 := P^{-1}T_2P$. Тогда $g(\zeta) = g(S_k(\zeta))$, $k = \overline{1, 2}$. Это означает, что функция g автоморфна по отношению к группе $\langle S_1, S_2\rangle$. Таким образом, следует выбирать отображение P так, чтобы отображения S_1 и S_2 получились нелинейными.

Итак, решение поставленной задачи — это функция f, имеющая вид

$$f(z) = h\left(\frac{z - \tau\bar{z}}{1 - \tau}\right) - h(\bar{z}), \quad \text{где} \quad h(z) = \left.\frac{\theta_1(\zeta)}{\theta_2(\zeta)}\right|_{\zeta = P^{-1}(z)},$$

где

$$\theta_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (c_k z + d_k)^{-2m} H_n(G_k(z)), \quad n = \overline{1,\, 2}.$$

Отображение H_1 для ряда θ_1 подбираем так, чтобы точка ζ_∂ была полюсом H_1. Численными приближениями сумм рядов θ_1 и θ_2 будем считать их частичные суммы. Для вычисления частичных сумм будем генерировать конечный набор элементов $\{G_0,\, G_1,\, \ldots,\, G_N\}$ группы $G := \langle S_1,\, S_2\rangle$.

Алгоритм генерации представляет собой последовательное выполнение похожих друг на друга этапов. Результатом каждого этапа является набор, полученный умножением элементов с предыдущего этапа на элементы S_1, S_2, S_1^{-1}, S_2^{-1}. Рассмотрим этот процесс подробнее.

Изначально имеем элемент I — тождественное преобразование. Действия на первом этапе тривиальны: $IS_1 = S_1$, $IS_2 = S_2$, $IS_1^{-1} = S_1^{-1}$, $IS_2^{-1} = S_2^{-1}$, т. е. получены элементы S_1, S_2, S_1^{-1}, S_2^{-1}.

На следующем этапе имеем

$$\begin{array}{ccccc}
S_1 & \longmapsto & S_1^2, & S_1 S_2, & S_1 S_2^{-1}; \\
S_2 & \longmapsto & S_2 S_1, & S_2^2, & S_2 S_1^{-1}; \\
S_1^{-1} & \longmapsto & S_1^{-1} S_2, & S_1^{-2}, & S_1^{-1} S_2^{-1}; \\
S_2^{-1} & \longmapsto & S_2^{-1} S_1, & S_2^{-1} S_1^{-1}, & S_2^{-2}.
\end{array}$$

Замечание. Произведения $S_1 S_1^{-1}$, $S_2 S_2^{-1}$, $S_1^{-1} S_1$, $S_2^{-1} S_2$ пропускаем, поскольку они дают уже имеющийся элемент I. Подобных ситуаций будем избегать и на всех последующих этапах. Так, например, произведение $S_2 S_1^{-1} S_1$ даёт элемент S_2, полученный на первом этапе.

Нетрудно заметить, что при заданном алгоритме на всяком этапе (кроме первого) генерируется втрое большее число элементов, чем на предыдущем. Таким образом, при выполении N этапов будет получено

$$1 + 4 + 12 + 36 + \ldots + 4 \cdot 3^{N-1} = 1 + 4\left(1 + 3 + 9 + \ldots + 3^{N-1}\right) = 1 + 4\sum_{k=0}^{N-1} 3^k \qquad (8)$$

элементов. Однако, даже учитывая сделанное выше замечание, среди получаемых элементов всё равно могут попадаться повторяющиеся. Это означает, что величину (8) следует считать *максимальным* количеством (или *оценкой сверху* количества) различных элементов, сгенерированных при выполнении N этапов алгоритма.

3. Примеры задач и их решений

В рамках курсовой работы написана реализация решения задачи на языке C++. Результатом работы программы является двоичный файл, содержащий значения искомой функции на некоторой прямоугольной сетке. Визуализация результата выполняется средствами для чтения двоичных файлов и построения графиков в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

В ходе написания и тестирования реализации выяснилось, что построенный алгоритм позволяет получить корректное решение далеко не при любых условиях задачи. Для получения корректного результата задаваемый треугольник должен иметь одну из трёх допустимых форм:

- прямоугольный равнобедренный, т. е. с углами 90°, 45°, 45°;
- равносторонний, т. е. с углами 60°, 60°, 60°;
- прямоугольный с углами 90°, 60°, 30°.

Также корректность решения сильно зависит от параметра τ: отклонение от нулевых граничных условий быстро растёт с увеличением τ; решение удовлетворяет граничным условиям при $\tau = 0$.

Во всех примерах решения задач будем использовать $\tau = 0$, $m = 3$ и отображения

$$P(\zeta) = \frac{(2+7i)\zeta + 9}{6i\zeta + 11}, \quad H_1(\zeta) = \frac{1}{\zeta - \zeta_\partial}, \quad H_2(\zeta) = \zeta.$$

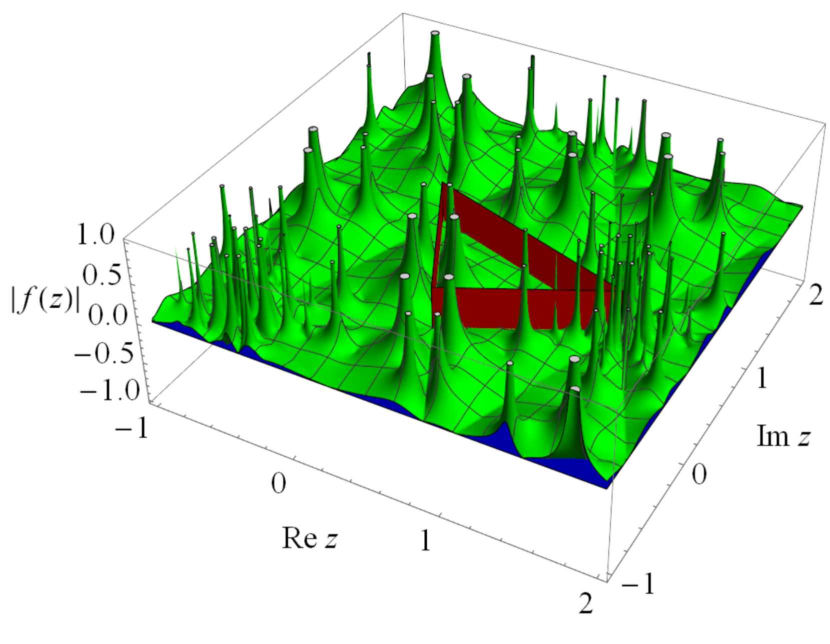

Рис. 2. Поверхность модуля функции f при треугольнике с вершинами в точках $z_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}i$, $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}i$, $z_T = \frac{3}{4}i$. На границе треугольника точка $z_\partial = 1$.

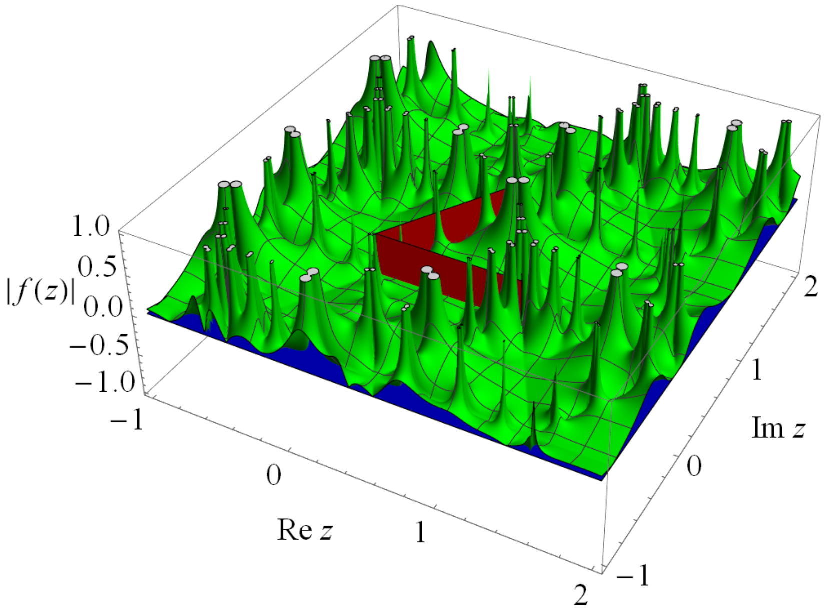

Рис. 3. Поверхность модуля функции f при треугольнике с вершинами в точках $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_T = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. На границе треугольника точка $z_\partial = \frac{1}{2}$.

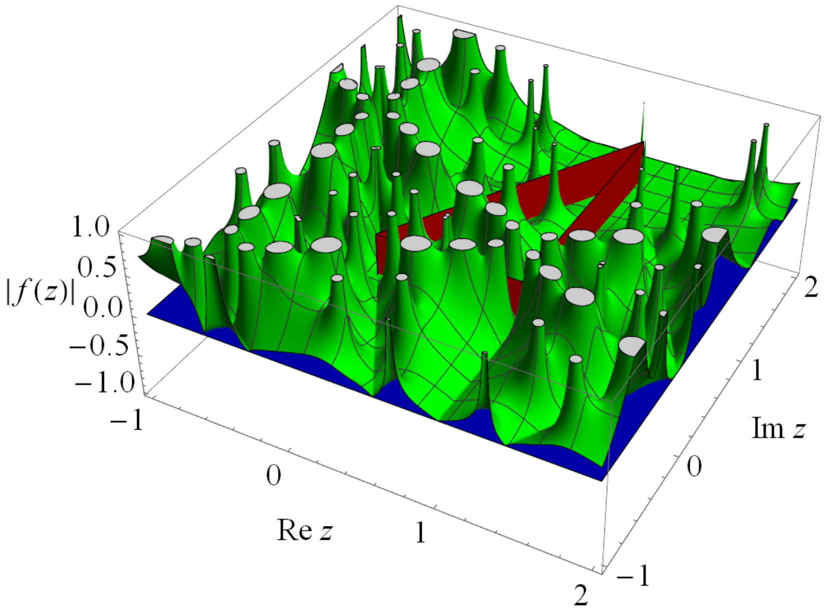

Рис. 4. Поверхность модуля функции f при треугольнике с вершинами в точках $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_T = 1 + \sqrt{3}i$. На границе треугольника точка $z_\partial = \frac{1}{2}$.

Заключение

В ходе выполнения курсовой работы был получен алгоритм построения приближённого решения уравнения $\partial\overline{\partial}f(z) + \tau\partial^2 f(z) = 0$, обращающегося в ноль во всех точках границы произвольного треугольника, кроме одной наперёд задаваемой. Установлены границы применимости полученного алгоритма, разработана реализация на языке C++.

Список использованных источников

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. Москва: Издательство «Наука», 1967 г., 300 с.
2. Форд Р. Автоморфные функции. Москва: Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, 1936 г.