Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

Уравнение Ван дер Поля

Студент ФН2-42Б (Группа) (Подпись, дата) К. А. Артемьев (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы (Подпись, дата) А. О. Багапш (И. О. Фамилия)

2021 г.

Содержание

Введение

Уравнение Ван дер Поля является одной из базовых математических моделей и одним из наиболее полно исследованных дифференциальных уравнений. Осциллятор Ван дер Поля — одна из первых известных колебательных систем, демонстрирующих автоколебания.

Осциллятор Ван дер Поля был предложен голландским инженером и физиком Бальтазаром ван дер Полем. Уравнение было выведено при описании колебаний в электрических цепях. Впервые появившись в радиоэлектронике, уравнение Ван дер Поля на сегодняшний день широко применяется в разных областях физики и биологии. Так, например, в биологии создана модель Фитц Хью-Нагумо. Уравнение также было использовано в сейсмологии при моделировании двух плит в геологическом разломе.

К сожалению, уравнение Ван дер Поля не имеет точного аналитического решения. Для изучения его решения нужно использовать методы нахождения приближённых решений. Одним из таких методов является метод возмущений по малому параметру. Им мы и воспользуемся.

1. Решение уравнения методом возмущений

Пусть дано некоторое дифференциальное уравнение $L(x,\ t,\ \mu) = 0$, где x — задаваемая функция, t — независимая переменная, μ — малый параметр. Метод возмущений по малому параметру состоит в поиске решения в виде разложения

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \mu^3 x_3 + \ldots, \tag{1}$$

где x_n — функции от t, не зависящие от μ [1].

Цель курсовой работы состоит в изучении уравнения Ван дер Поля, имеющего вид

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}. \tag{2}$$

Это уравнение не имеет точного решения. Найдём его приближённое решение, используя метод возмущений.

1.1. Подготовка

Подставив разложение (1) в уравнение (2), будем иметь

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 + x_0 + \mu(\ddot{x}_1 + x_1) + \mu^2(\ddot{x}_2 + x_2) + \mu^3(\ddot{x}_3 + x_3) + \ldots &= \\ = \mu\left(1 - \left(x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \mu^3 x_3 + \ldots\right)^2\right) &\times \\ \times\, (\dot{x}_0 + \mu\dot{x}_1 + \mu^2\dot{x}_2 + \mu^3\dot{x}_3 + \ldots).\end{aligned} \tag{3}$$

Сгруппируем правую часть уравнения (3) по степеням μ:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 + x_0 + \mu(\ddot{x}_1 + x_1) + \mu^2(\ddot{x}_2 + x_2) + \mu^3(\ddot{x}_3 + x_3) + \ldots &= \\ = \mu(1 - x_0^2)\dot{x}_0 &+ \\ + \mu^2((1 - x_0^2)\dot{x}_1 - 2x_0 x_1 \dot{x}_0) &+ \\ + \mu^3((1 - x_0^2)\dot{x}_2 - 2x_0 x_1 \dot{x}_1 - (x_1^2 + 2x_0 x_2)\dot{x}_0) &+ \ldots\end{aligned}$$

Приравняв выражения при одинаковых степенях μ, получим линейные уравнения:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \tag{4}$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = (1 - x_0^2)\dot{x}_0, \tag{5}$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = (1 - x_0^2)\dot{x}_1 - 2x_0 x_1 \dot{x}_0, \tag{6}$$

$$\ddot{x}_3 + x_3 = (1 - x_0^2)\dot{x}_2 - 2x_0 x_1 \dot{x}_1 - (x_1^2 + 2x_0 x_2)\dot{x}_0. \tag{7}$$

$$\ldots$$

При необходимости можно составить сколь угодно много таких уравнений, каждое из которых будет иметь левую часть вида $\ddot{x}_n + x_n$, и правую часть, зависящую от решений предыдущих уравнений (если $n \neq 0$). Это означает, что для решения какого-либо из этих уравнений нужно решить все предыдущие (если $n \neq 0$). Решением всякого из этих уравнений будет функция $x_n(t)$, стоящая при μ^n в искомом разложении.

1.2. Нахождение составляющих приближённого решения

1.2.1. Нахождение младшего коэффициента

Решение уравнения (4) имеет вид

$$x_0(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

его производная:

$$\dot{x}_0(t) = ic_1 e^{it} - ic_2 e^{-it}. \tag{9}$$

Зададим начальные условия

$$x_0(0) = \alpha_0, \quad \dot{x}_0(0) = \upsilon_0, \quad \alpha_0, \upsilon_0 \in \mathbb{R},$$

тогда

$$c_1 = \frac{\alpha_0 - i\upsilon_0}{2}, \quad c_2 = \frac{\alpha_0 + i\upsilon_0}{2}.$$

Заметим, что $c_2 = \overline{c_1}$, а также

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^{-it} = \overline{e^{it}},$$

а значит,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x_0(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} = 2\,\mathrm{Re}(c_1 e^{it}),$$
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x_0(t) \in \mathbb{R}.$$

1.2.2. Нахождение коэффициента при μ

Найдём решение уравнения (5). Подставив в его правую часть функцию (8) и её производную (9), получим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = ic_1(1 - c_1c_2)e^{it} - ic_2(1 - c_1c_2)e^{-it} - ic_1^3 e^{3it} + ic_2^3 e^{-3it}. \tag{10}$$

Решение соответствующего ему однородного уравнения имеет вид

$$x_{1(\text{o. o.})}(t) = d_1 e^{it} + d_2 e^{-it}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{C}.$$

Частное решение неоднородного уравнения найдём по принципу наложения решений. Чтобы получать линейное неоднородное уравнение с правой частью в форме квазимногочлена, из правой части уравнения (10) будем брать линейные комбинации экспонент с показателями, совпадающими с точностью до знака.

Найдём частное решение неоднородного уравнения

$$\ddot{x}_1 + x_1 = ic_1(1 - c_1c_2)e^{it} - ic_2(1 - c_1c_2)e^{-it}. \tag{11}$$

Поскольку характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

имеет корни $\pm i$, частное решение имеет вид

$$x_{1(\text{ч. н.})(1)}(t) = t(a_1e^{it} + a_2e^{-it}), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}.$$

Подставив его в уравнение (11), найдём коэффициенты a_1 и a_2:

$$a_1 = \frac{c_1(1 - c_1c_2)}{2}, \quad a_2 = \frac{c_2(1 - c_1c_2)}{2}.$$

Заметим, что

$$\overline{a_1} = \overline{\frac{c_1(1 - c_1c_2)}{2}} = \frac{c_2(1 - c_1c_2)}{2} = a_2,$$

а значит,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x_{1(\text{ч. н.})(1)}(t) = t(a_1e^{it} + a_2e^{-it}) = 2\operatorname{Re}(a_1te^{it}),$$
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x_{1(\text{ч. н.})(1)}(t) \in \mathbb{R}.$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -ic_1^3e^{3it} + ic_2^3e^{-3it}$$

имеет вид

$$x_{1(\text{ч. н.})(2)}(t) = b_1e^{3it} + b_2e^{-3it}, \quad b_1, b_2 \in \mathbb{C}.$$

Найдём коэффициенты b_1 и b_2:

$$b_1 = \frac{ic_1^3}{8}, \quad b_2 = -\frac{ic_2^3}{8}.$$

Как и в предыдущих случаях, $b_2 = \overline{b_1}$, значит,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x_{1(\text{ч. н.})(2)}(t) = b_1e^{3it} + b_2e^{-3it} = 2\operatorname{Re}(b_1e^{3it}),$$
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x_{1(\text{ч. н.})(2)}(t) \in \mathbb{R}.$$

Общее решение уравнения (10) имеет вид

$$x_1(t) = x_{1(\text{о. о.})}(t) + x_{1(\text{ч. н.})(1)}(t) + x_{1(\text{ч. н.})(2)}(t),$$
$$x_1(t) = (a_1 t + d_1)e^{it} + (a_2 t + d_2)e^{-it} + b_1 e^{3it} + b_2 e^{-3it}, \tag{12}$$

его производная:

$$\dot{x}_1(t) = (a_1 + id_1 + ia_1 t)e^{it} + (a_2 - id_2 - ia_2 t)e^{-it} + 3ib_1 e^{3it} - 3ib_2 e^{-3it}. \tag{13}$$

Зададим начальные условия

$$x_1(0) = \alpha_1, \quad \dot{x}_1(0) = \upsilon_1, \quad \alpha_1, \upsilon_1 \in \mathbb{R},$$

из которых найдём коэффициенты d_1 и d_2.

$$\begin{cases} d_1 + d_2 + b_1 + b_2 = \alpha_1 \\ id_1 - id_2 + a_1 + a_2 + 3ib_1 - 3ib_2 = \upsilon_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} d_1 + d_2 = -b_1 - b_2 + \alpha_1 \\ d_1 - d_2 = ia_1 + ia_2 - 3b_1 + 3b_2 - i\upsilon_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2d_1 = ia_1 + ia_2 - 4b_1 + 2b_2 + \alpha_1 - i\upsilon_1 \\ 2d_2 = -ia_1 - ia_2 + 2b_1 - 4b_2 + \alpha_1 + i\upsilon_1 \end{cases}$$

Таким образом,

$$d_1 = \frac{-4b_1 + 2b_2 + \alpha_1}{2} + i\frac{a_1 + a_2 - \upsilon_1}{2},$$
$$d_2 = \frac{2b_1 - 4b_2 + \alpha_1}{2} + i\frac{-a_1 - a_2 + \upsilon_1}{2}.$$

Видим, что $d_2 = \overline{d_1}$, значит,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x_1(t) = 2\operatorname{Re}((a_1 t + d_1)e^{it} + b_1 e^{3it}),$$
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x_1(t) \in \mathbb{R}.$$

1.2.3. Нахождение коэффициента при μ^2

Найдём решение уравнения (6). Подставив в его правую часть функции (8) и (12) и их производные (9) и (13), получим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = (A'_1 t + B'_1)e^{it} + (A'_2 t + B'_2)e^{-it} + \\ + (D'_1 t + E'_1)e^{3it} + (D'_2 t + E'_2)e^{-3it} + F'_1 e^{5it} + F'_2 e^{-5it}, \tag{14}$$

где

$$
\begin{aligned}
A_1' &= ia_1(1-2c_1c_2) - ia_2c_1^2,\\
B_1' &= (a_1+id_1)(1-2c_1c_2) - c_1^2(a_2+id_2) - ib_1c_2^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2' &= -ia_2(1-2c_1c_2) + ia_1c_2^2,\\
B_2' &= (a_2-id_2)(1-2c_1c_2) - c_2^2(a_1-id_1) + ib_2c_1^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1' &= -3ia_1c_1^2,\\
E_1' &= 3ib_1(1-2c_1c_2) - c_1^2(a_1+3id_1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2' &= 3ia_2c_2^2,\\
E_2' &= -3ib_2(1-2c_1c_2) - c_2^2(a_2-3id_2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_1' &= -5ib_1c_1^2,\\
F_2' &= 5ib_2c_2^2.
\end{aligned}
$$

Как и в предыдущем случае, решим это уравнение по принципу наложения решений.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x_{2(\text{о. о.})}(t) = H_1e^{it} + H_2e^{-it}, \quad H_1, H_2 \in \mathbb{C}.$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$\ddot{x}_2 + x_2 = (A_1't + B_1')e^{it} + (A_2't + B_2')e^{-it}$$

имеет вид

$$x_{2(\text{ч. н.})(1)}(t) = t((A_1t+B_1)e^{it} + (A_2t+B_2)e^{-it}), \quad A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathbb{C}.$$

Найдём коэффициенты A_1, B_1, A_2, B_2:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{iA_1'}{4}, & A_1 &= \frac{1}{4}(a_1(1-2c_1c_2) - a_2c_1^2),\\
B_1 &= \frac{A_1'}{4} - \frac{iB_1'}{2}, & B_1 &= \frac{1}{4}((2d_1-ia_1)(1-2c_1c_2) + c_1^2(ia_2-2d_2) - 2b_1c_2^2),\\
A_2 &= \frac{iA_2'}{4}, & A_2 &= \frac{1}{4}(a_2(1-2c_1c_2) - a_1c_2^2),\\
B_2 &= \frac{A_2'}{4} + \frac{iB_2'}{2}, & B_2 &= \frac{1}{4}((2d_2+ia_2)(1-2c_1c_2) + c_2^2(-ia_1-2d_1) - 2b_2c_1^2).
\end{aligned}
$$

Заметим, что $A_2 = \overline{A_1}$, $B_2 = \overline{B_1}$, а значит,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x_{2(\text{ч. н.})(1)}(t) = 2\,\mathrm{Re}((A_1 t + B_1) t e^{it}),$$
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x_{2(\text{ч. н.})(1)}(t) \in \mathbb{R}.$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$\ddot{x}_2 + x_2 = (D_1' t + E_1') e^{3it} + (D_2' t + E_2') e^{-3it}$$

имеет вид

$$x_{2(\text{ч. н.})(2)}(t) = (D_1 t + E_1) e^{3it} + (D_2 t + E_2) e^{-3it}, \quad D_1, E_1, D_2, E_2 \in \mathbb{C}.$$

Найдём коэффициенты D_1, E_1, D_2, E_2:

$$\begin{aligned}
D_1 &= -\frac{D_1'}{8}, & D_1 &= \frac{3}{8} i a_1 c_1^2,\\
E_1 &= -\frac{3iD_1'}{32} - \frac{E_1'}{8}, & E_1 &= -\frac{3}{8} i b_1 (1 - 2c_1 c_2) + \frac{1}{32} c_1^2 (12 i d_1 - 5 a_1),\\
D_2 &= -\frac{D_2'}{8}, & D_2 &= -\frac{3}{8} i a_2 c_2^2,\\
E_2 &= \frac{3iD_2'}{32} - \frac{E_2'}{8}, & E_2 &= \frac{3}{8} i b_2 (1 - 2c_1 c_2) + \frac{1}{32} c_2^2 (-12 i d_2 - 5 a_2).
\end{aligned}$$

Заметим, что $D_2 = \overline{D_1}$, $E_2 = \overline{E_1}$, а значит,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x_{2(\text{ч. н.})(2)}(t) = 2\,\mathrm{Re}((D_1 t + E_1) e^{3it}),$$
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x_{2(\text{ч. н.})(2)}(t) \in \mathbb{R}.$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$\ddot{x}_2 + x_2 = F_1' e^{5it} + F_2' e^{-5it}$$

имеет вид

$$x_{2(\text{ч. н.})(3)}(t) = F_1 e^{5it} + F_2 e^{-5it}, \quad F_1, F_2 \in \mathbb{C}.$$

Найдём коэффициенты F_1 и F_2:

$$\begin{aligned}
F_1 &= -\frac{F_1'}{24}, & F_1 &= \frac{5}{24} i b_1 c_1^2,\\
F_2 &= -\frac{F_2'}{24}, & F_2 &= -\frac{5}{24} i b_2 c_2^2.
\end{aligned}$$

Заметим, что $F_2 = \overline{F_1}$, а значит,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x_{2(\text{ч. н.})(3)}(t) = 2\,\mathrm{Re}(F_1 e^{5it}),$$
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x_{2(\text{ч. н.})(3)}(t) \in \mathbb{R}.$$

Общее решение уравнения (14) имеет вид

$$x_2(t) = x_{2(\text{о. о.})}(t) + x_{2(\text{ч. н.})(1)}(t) + x_{2(\text{ч. н.})(2)}(t) + x_{2(\text{ч. н.})(3)}(t),$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = (A_1t^2 + B_1t + H_1)e^{it} + (A_2t^2 + B_2t + H_2)e^{-it} + \\ + (D_1t + E_1)e^{3it} + (D_2t + E_2)e^{-3it} + F_1e^{5it} + F_2e^{-5it}, \end{aligned}$$

его производная:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) = (iA_1t^2 + (2A_1 + iB_1)t + B_1 + iH_1)e^{it} + \\ + (-iA_2t^2 + (2A_2 - iB_2)t + B_2 - iH_2)e^{-it} + \\ + (3iD_1t + D_1 + 3iE_1)e^{3it} + (-3iD_2t + D_2 - 3iE_2)e^{-3it} + 5iF_1e^{5it} - 5iF_2e^{-5it}. \end{aligned}$$

Зададим начальные условия

$$x_2(0) = \alpha_2, \quad \dot{x}_2(0) = \upsilon_2, \quad \alpha_2, \upsilon_2 \in \mathbb{R},$$

из которых найдём коэффициенты H_1 и H_2.

$$\begin{cases} H_1 + H_2 + E_1 + E_2 + F_1 + F_2 = \alpha_2 \\ iH_1 - iH_2 + B_1 + B_2 + D_1 + D_2 + 3iE_1 - 3iE_2 + 5iF_1 - 5iF_2 = \upsilon_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_1 + H_2 = -E_1 - E_2 - F_1 - F_2 + \alpha_2 \\ H_1 - H_2 = iB_1 + iB_2 + iD_1 + iD_2 - 3E_1 + 3E_2 - 5F_1 + 5F_2 - i\upsilon_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2H_1 = iB_1 + iB_2 + iD_1 + iD_2 - 4E_1 + 2E_2 - 6F_1 + 4F_2 + \alpha_2 - i\upsilon_2 \\ 2H_2 = -iB_1 - iB_2 - iD_1 - iD_2 + 2E_1 - 4E_2 + 4F_1 - 6F_2 + \alpha_2 + i\upsilon_2 \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{i}{2}(B_1 + B_2 + D_1 + D_2 - \upsilon_2) - 2E_1 + E_2 - 3F_1 + 2F_2 + \frac{\alpha_2}{2}, \\ H_2 &= -\frac{i}{2}(B_1 + B_2 + D_1 + D_2 - \upsilon_2) + E_1 - 2E_2 + 2F_1 - 3F_2 + \frac{\alpha_2}{2}. \end{aligned}$$

Видим, что $H_2 = \overline{H_1}$, значит,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x_2(t) = 2\,\mathrm{Re}((A_1t^2 + B_1t + H_1)e^{it} + (D_1t + E_1)e^{3it} + F_1e^{5it}),$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x_2(t) \in \mathbb{R}.$$

Нахождение функции $x_3(t)$, т. е. решение уравнения (7), предполагает существенно большие по объёму вычисления, чем те, что были произведены для нахождения функций $x_0(t)$, $x_1(t)$ и $x_2(t)$, поэтому искать её аналитически мы не будем. Это относится также ко всем $x_n(t)$, $n > 3$.

Таким образом, будем считать функцию

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) \tag{15}$$

приближённым решением уравнения Ван дер Поля.

2. Проблема секулярных членов

Всякая колебательная система, подчиняющаяся уравнению Ван дер Поля, по прошествии достаточно большого промежутка времени выходит на предельный цикл. Однако в системе, подчиняющейся закону (15), этого не произойдёт.

Из-за того, что в функции $x_1(t)$ содержатся члены a_1te^{it} и a_2te^{-it}, а в функции $x_2(t)$ — члены $A_1t^2e^{it}$, B_1te^{it}, $A_2t^2e^{-it}$, B_2te^{-it}, D_1te^{3it} и D_2te^{-3it}, функция (15) (как и её производная) не является ограниченной. Поскольку показатели всех экспонент являются чисто мнимыми, можно сказать, что в функциях $x_1(t)$ и $x_2(t)$ содержатся секулярные члены. Секулярными членами иногда (в частности, в небесной механике) называются произведения алгебраических и тригонометрических функций [2].

Итак, при больших значениях t полученное приближённое решение становится бесполезным из-за появления секулярных членов. Для решения этой проблемы придётся наложить некоторые ограничения на начальные условия, при которых коэффициенты в секулярных членах обратятся в нуль.

Коэффициенты

$$a_1 = \frac{c_1(1 - c_1c_2)}{2}, \quad a_2 = \frac{c_2(1 - c_1c_2)}{2}$$

обращаются в нуль в двух случаях. Первый случай тривиален — $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$. Однако нам он не подходит, поскольку тогда наше решение обращается в тождественный нуль. Другой случай — это $c_1c_2 = 1$, и он подходит нам больше. Это условие можно записать как

$$\alpha_0^2 + \upsilon_0^2 = 4. \tag{16}$$

Из обращения в нуль коэффициентов a_1 и a_2 следует также обращение в нуль коэффициентов A_1, A_2, D_1 и D_2.

Однако, остаются отличными от нуля коэффициенты

$$B_1 = \frac{1}{4}((2d_1 - ia_1)(1 - 2c_1c_2) + c_1^2(ia_2 - 2d_2) - 2b_1c_2^2),$$
$$B_2 = \frac{1}{4}((2d_2 + ia_2)(1 - 2c_1c_2) + c_2^2(-ia_1 - 2d_1) - 2b_2c_1^2).$$

Преобразуем их, принимая во внимание условие (16):

$$B_1 = -\frac{1}{32}(16\alpha_1 + \upsilon_0 - 4\alpha_1\upsilon_0^2 - 4\upsilon_0^3 + \upsilon_0^5 + 4\alpha_0\upsilon_0\upsilon_1 + i(\alpha_0 - 4\alpha_0\alpha_1\upsilon_0 + \alpha_0\upsilon_0^4 - 4\upsilon_0^2\upsilon_1)),$$
$$B_2 = -\frac{1}{32}(16\alpha_1 + \upsilon_0 - 4\alpha_1\upsilon_0^2 - 4\upsilon_0^3 + \upsilon_0^5 + 4\alpha_0\upsilon_0\upsilon_1 - i(\alpha_0 - 4\alpha_0\alpha_1\upsilon_0 + \alpha_0\upsilon_0^4 - 4\upsilon_0^2\upsilon_1)).$$

Поскольку $B_2 = \overline{B_1}$, обе величины обращаются в нуль при одних и тех же условиях.

Найдём условия, при которых B_1 обращается в нуль.

$$\begin{cases} 16\alpha_1 + \upsilon_0 - 4\alpha_1\upsilon_0^2 - 4\upsilon_0^3 + \upsilon_0^5 + 4\alpha_0\upsilon_0\upsilon_1 = 0 \\ \alpha_0 - 4\alpha_0\alpha_1\upsilon_0 + \alpha_0\upsilon_0^4 - 4\upsilon_0^2\upsilon_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (16 - 4\upsilon_0^2)\alpha_1 + 4\alpha_0\upsilon_0\upsilon_1 = -\upsilon_0 + 4\upsilon_0^3 - \upsilon_0^5 \\ 4\alpha_0\upsilon_0\alpha_1 + 4\upsilon_0^2\upsilon_1 = \alpha_0 + \alpha_0\upsilon_0^4 \end{cases}$$

$$M\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \upsilon_1\end{pmatrix} = K, \quad M = \begin{pmatrix} 16 - 4\upsilon_0^2 & 4\alpha_0\upsilon_0 \\ 4\alpha_0\upsilon_0 & 4\upsilon_0^2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -\upsilon_0 + 4\upsilon_0^3 - \upsilon_0^5 \\ \alpha_0 + \alpha_0\upsilon_0^4 \end{pmatrix}$$

$$\det M = 16\upsilon_0^2(4 - \alpha_0^2 - \upsilon_0^2)$$

Учитывая условие (16), получаем $\det M = 0$. С другой стороны, условие (16) не гарантирует обнуления столбца K. Значит, полученная НСЛАУ несовместна и коэффициенты B_1 и B_2 не могут обращаться в нуль при выполнении условия (16). Таким образом, обнулить все секулярные члены в решении (15) нельзя. В этом и выражается ограниченность применимости метода возмущений: чем больше значение t, тем менее точно решение.

Тем не менее, выполнение условия (16) существенно увеличивает точность решения (15), поскольку из $x_1(t)$ секулярные члены изчезают вовсе, а в $x_2(t)$ обнуляется коэффициент при t^2. Следует заметить, что линейное относительно μ приближённое решение, т. е. решение

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t), \tag{17}$$

при выполнении условия (16) не содержит секулярных членов, а значит, является (как и его производная) ограниченным и периодическим с периодом 2π, т. е. может использоваться для нахождения приближения предельного цикла (но не для выхода на него).

Для обнуления секулярных членов в решениях нелинейных уравнений нередко также пользуются приёмом, называемым методом перенормировки [2]. Рассмотрим его на примере решения (17).

Переходим к новой независимой переменной

$$\tau = \omega t = (1 + \mu\omega_1 + \ldots)t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\tau}{1 + \mu\omega_1 + \ldots}$$

с условием, что $|\mu\omega_1 + \ldots| < 1$. Поскольку

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \left(|z| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}\right),$$

$$t = \tau(1 - (\mu\omega_1 + \ldots) + \ldots) = \tau(1 - \mu\omega_1 + \ldots). \tag{18}$$

Подставив выражение (18) в решение (17), получим

$$
\begin{aligned}
x_0(\tau) &= c_1 \exp(i\tau - \mu\omega_1 i\tau + \ldots) + c_2 \exp(-i\tau + \mu\omega_1 i\tau + \ldots),\\
x_1(\tau) &= (a_1(\tau - \mu\omega_1\tau + \ldots) + d_1) \exp(i\tau - \mu\omega_1 i\tau + \ldots) +\\
&\quad + (a_2(\tau - \mu\omega_1\tau + \ldots) + d_2) \exp(-i\tau + \mu\omega_1 i\tau + \ldots) +\\
&\quad + b_1 \exp(3i\tau - 3\mu\omega_1 i\tau + \ldots) + b_2 \exp(-3i\tau + 3\mu\omega_1 i\tau + \ldots),\\
x(\tau) &= x_0(\tau) + \mu x_1(\tau).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Экспоненты можно разложить следующим образом:

$$
e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},
$$

$$
\begin{aligned}
\exp(i\tau - \mu\omega_1 i\tau + \ldots) = e^{i\tau} \exp(-\mu\omega_1 i\tau + \ldots) = e^{i\tau}(1 - \mu\omega_1 i\tau + \ldots),\\
\exp(-i\tau + \mu\omega_1 i\tau + \ldots) = e^{-i\tau} \exp(\mu\omega_1 i\tau + \ldots) = e^{-i\tau}(1 + \mu\omega_1 i\tau + \ldots),\\
\exp(3i\tau - 3\mu\omega_1 i\tau + \ldots) = e^{3i\tau} \exp(-3\mu\omega_1 i\tau + \ldots) = e^{3i\tau}(1 - 3\mu\omega_1 i\tau + \ldots),\\
\exp(-3i\tau + 3\mu\omega_1 i\tau + \ldots) = e^{-3i\tau} \exp(3\mu\omega_1 i\tau + \ldots) = e^{-3i\tau}(1 + 3\mu\omega_1 i\tau + \ldots).
\end{aligned}
$$

Подставив эти соотношения в разложение (19), получим

$$
\begin{aligned}
x(\tau) &= c_1(e^{i\tau} - \mu\omega_1 i\tau e^{i\tau} + \ldots) + c_2(e^{-i\tau} + \mu\omega_1 i\tau e^{-i\tau} + \ldots) +\\
&\quad + \mu(a_1(\tau - \mu\omega_1\tau + \ldots) + d_1)(e^{i\tau} - \mu\omega_1 i\tau e^{i\tau} + \ldots) +\\
&\quad + \mu(a_2(\tau - \mu\omega_1\tau + \ldots) + d_2)(e^{-i\tau} + \mu\omega_1 i\tau e^{-i\tau} + \ldots) +\\
&\quad + \mu b_1(e^{3i\tau} - 3\mu\omega_1 i\tau e^{3i\tau} + \ldots) + \mu b_2(e^{-3i\tau} + 3\mu\omega_1 i\tau e^{-3i\tau} + \ldots).
\end{aligned}
$$

Сгруппируем по степеням μ:

$$
\begin{aligned}
x(\tau) = c_1 e^{i\tau} + c_2 e^{-i\tau} + \mu\big[\omega_1 i\tau(-c_1 e^{i\tau} + c_2 e^{-i\tau}) +&\\
+(a_1\tau + d_1)e^{i\tau} + (a_2\tau + d_2)e^{-i\tau} +&\\
+b_1 e^{3i\tau} + b_2 e^{-3i\tau}\big] + \ldots&
\end{aligned}
$$

Чтобы секулярные члены обнулились, должны выполниться условия

$$
\omega_1 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0,
$$

что равносильно (при нетривиальных решениях) ранее полученному условию (16).

3. Фазовый портрет

Приведём точные фазовые портреты осциллятора Ван дер Поля в виде векторных полей для разных μ, полученные средствами системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

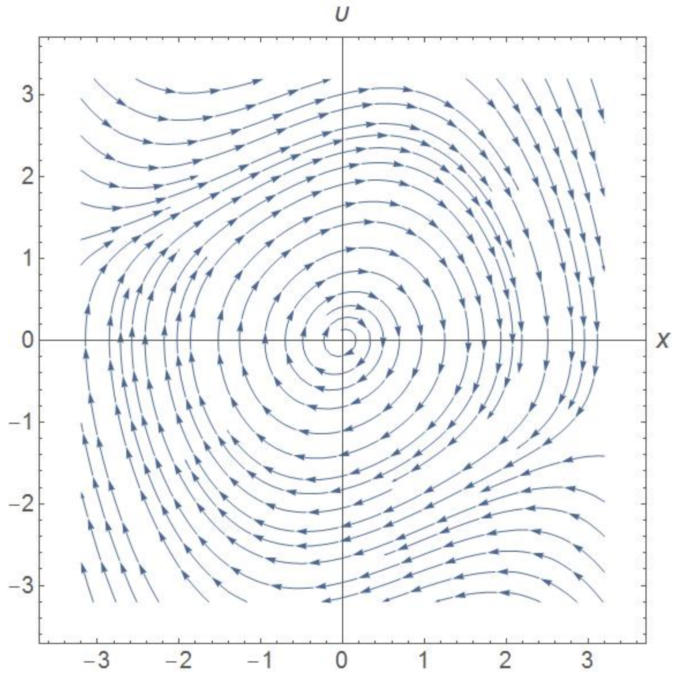

Рис. 1. Фазовый портрет осциллятора Ван дер Поля при $\mu = 0{,}25$.

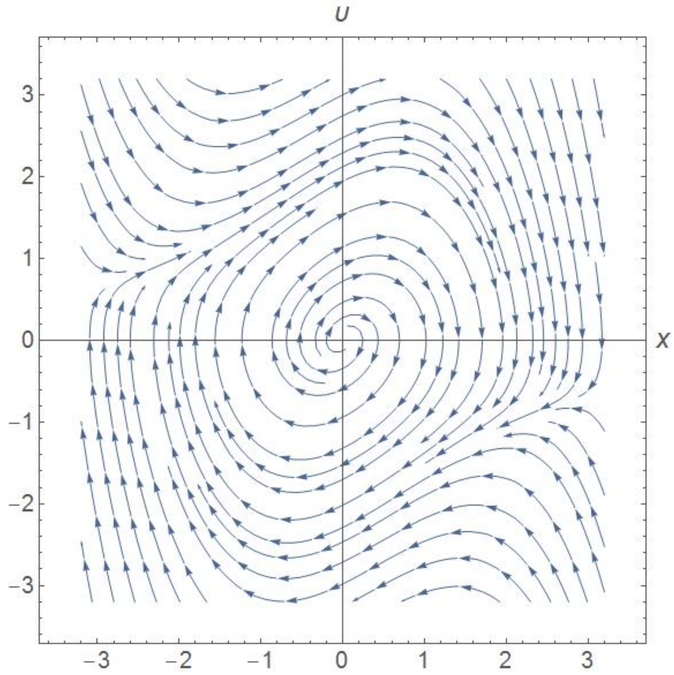

Рис. 2. Фазовый портрет осциллятора Ван дер Поля при $\mu = 0{,}5$.

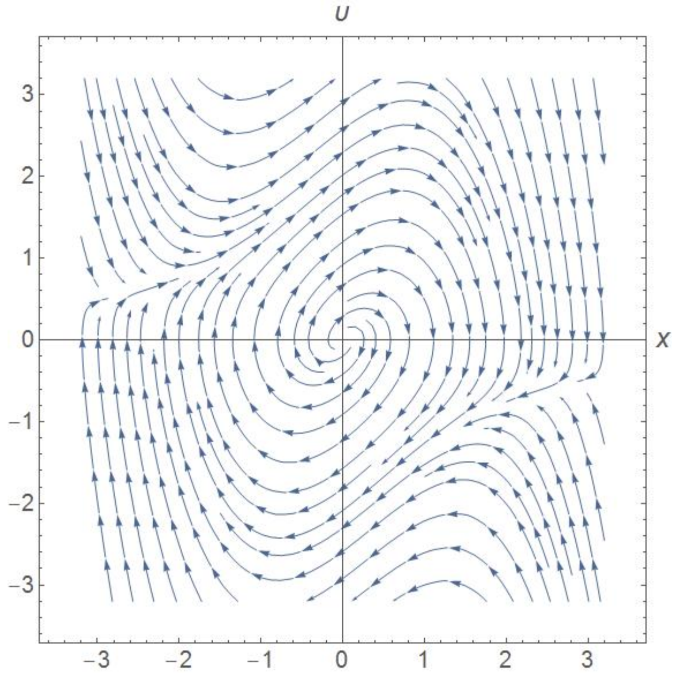

Рис. 3. Фазовый портрет осциллятора Ван дер Поля при $\mu = 0{,}75$.

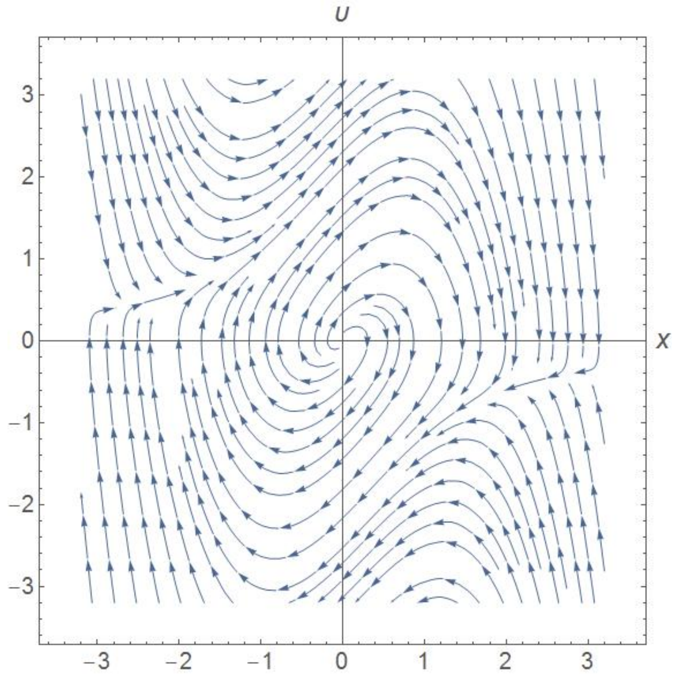

Рис. 4. Фазовый портрет осциллятора Ван дер Поля при $\mu = 1$.

Наблюдается предельный цикл. Заметно также, что чем больше значение параметра μ, тем сильнее фазовый портрет отличается от системы концентрических окружностей.

Теперь рассмотрим фазовые портреты найденных приближённых решений при разных начальных условиях. Будем рассматривать осцилляторы со значением параметра $\mu = 0{,}5$, т. е. будем сравнивать получаемые фазовые портреты с рис. 2.

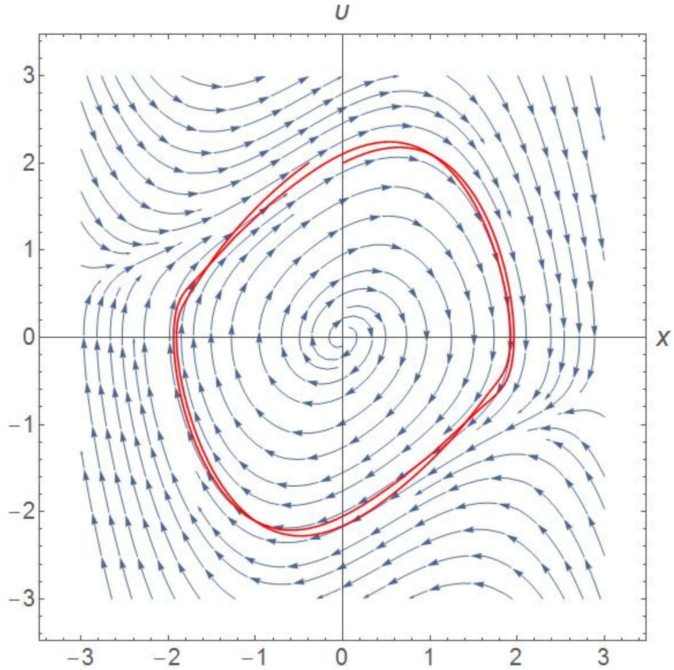

Рис. 5. Фазовый портрет решения (15) при $t \in [0; 4\pi]$ и начальных условиях $\alpha_0 = 0$, $\upsilon_0 = 2$, $\alpha_1 = 0$, $\upsilon_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\upsilon_2 = 0$.

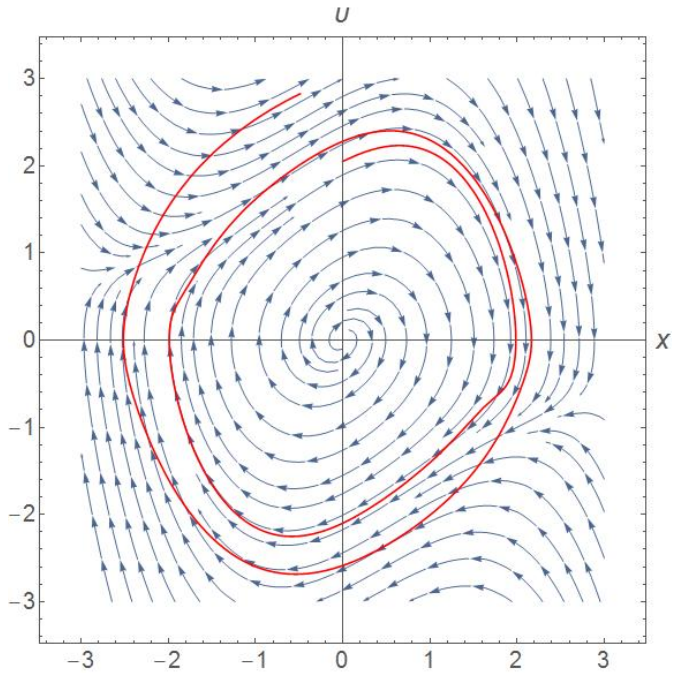

Рис. 6. Фазовый портрет решения (15) при $t \in [0; 4\pi]$ и начальных условиях $\alpha_0 = 0$, $\upsilon_0 = 2{,}05$, $\alpha_1 = 0$, $\upsilon_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\upsilon_2 = 0$.

Видим, что если α_0 и υ_0 не удовлетворяют условию (16), то относительно быстро накапливается ошибка, что подтверждает наши выводы в предыдущем разделе.

Теперь рассмотрим фазовый портрет решения (17).

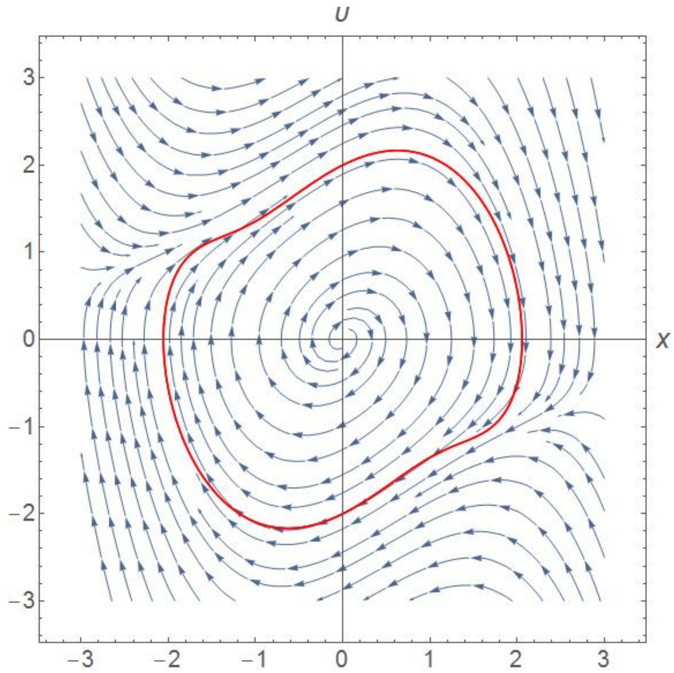

Рис. 7. Фазовый портрет решения (17) при $t \in [0; 4\pi]$ и начальных условиях $\alpha_0 = 0$, $\upsilon_0 = 2$, $\alpha_1 = 0$, $\upsilon_1 = 0$.

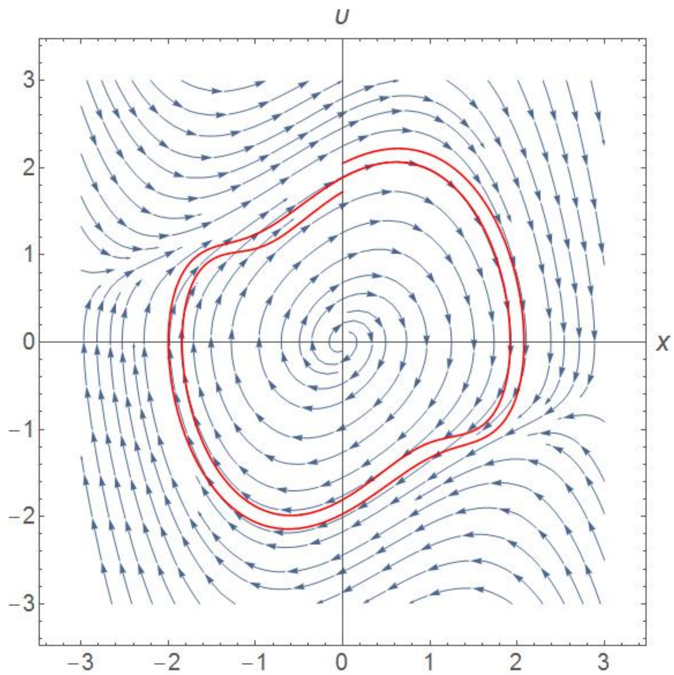

Рис. 8. Фазовый портрет решения (17) при $t \in [0; 4\pi]$ и начальных условиях $\alpha_0 = 0$, $\upsilon_0 = 2{,}05$, $\alpha_1 = 0$, $\upsilon_1 = 0$.

На рис. 7 видим подтверждение нашего вывода о том, что решение (17) при выполнении условия (16) является периодическим с периодом 2π.

Заключение

В ходе выполнения курсовой работы было успешно найдено приближённое решение уравнения Ван дер Поля методом возмущений. Были рассмотрены ограничения на применение такого решения, возможные проблемы, возникающие при его использовании, методы их разрешения.

Ясно, что проведённое исследование нельзя назвать исчерпывающим. Некоторые подробности, касающиеся метода возмущений или метода перенормировки, были опущены; другие не менее достойные внимания методы нахождения приближённого решения уравнения Ван дер Поля вовсе не были упомянуты. Тем не менее, не сомневаюсь, что полученные результаты представляют немалую ценность для дальнейших исследований.

Считаю цель курсовой работы достигнутой, а поставленные задачи — выполненными.

Список использованных источников

1. Найфэ А. Х. Методы возмущений. — М. : Мир, 1976. — 456 с.
2. Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. Изд. 6-е. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 312 с.
3. Парс Л. А. Аналитическая динамика. — М. : Наука, 1971. — 636 с.