第二次小测试

郝裕玮

18329015

1、判断正误（4×9=36 分）。

(1)每一个群都同构于一个置换群。（F）

(2)交换群的子群交换，非交换群的子群不交换。（F）

(3)有限群的子群为有限群，无限群的子群为无限群。（F）

(4)有限群的元素是有限阶的，无限群的元素是无限阶的。（F）

(5)同一个群的不同子群相交形成的集合在群运算下仍构成群。（T）

(6)同一个群的不同子群相并形成的集合在群运算下仍构成群。（F）

(7)有限循环群中任意元素的阶一定是生成元阶数的一个因子。（T）

(8)同构的群必须大小相同，故任何一个群不可能与其子群同构。（F）

(9)循环群中的元素都可以写成生成元的幂次形式,幂次为自然数。（F）

2、任意群均存在与其同态的群，也存在与其同构的群，给出构造同态群和同构群的方法（5+10=15 分）。

解:（1）构造同构群：由凯莱定理可知，每个群都同构于 1 个变换群。

构造同构群可通过构造群 G 的左乘变换映射$\varphi_a(x)=ax, a\in G,$

$\forall x\in G. G'=\{\varphi_a | a\in G\}$. 所以 G′关于变换的合成构成了群 G 的同构群。

（2）构造同态群：构造零同态群，即一群的所有元素映射到另一群的单位元。

3、循环群只有两类，即无限循环群和n阶有限循环群。如果两类循环群的生成元都记为α，分别给出这两类群的其它所有生成元，分别统计相应生成元的个数（4+9+2+2=17 分）。

解：（1）无限循环群：其他生成元有α^{-1}，生成元个数为 2；

（2）n 阶有限循环群：其他生成元有α^{i}，$i \in [1,n]$，$i \in Z$且与n互质，生成元个数为$\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{S}(1-\frac{1}{p_i})$

4、设$\mathbf{G}$是群，$\mathbf{a} \in \mathbf{G}$，对$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{G}$定义变换映射$\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{a}^{-1}$，构造$\mathbf{G}_{\mathbf{r}} = \{\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{a}} | \mathbf{a} \in \mathbf{G}\}$。证明：$\mathbf{G}_{\mathbf{r}}$关于变换的复合构成群，$\mathbf{G}$与$\mathbf{G}_{\mathbf{r}}$同构（16+16= 32 分）。

解：$\mathrm{G_r}$关于变换的复合构成群：

（1）因为映射的合成满足结合律，所以G_r的运算也满足结合律；

（2）$\forall x \in G, (\varphi_a\varphi_b)(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = \varphi_a(b^{-1}x) = a^{-1}b^{-1}x = \varphi_{ab}x$

所以$a^{-1}b^{-1}x \in G$,具有封闭性；

（3）设 e 是 G 的单位元，则φ_e是 G 的恒等变换，即$\varphi_e = l$，有单位元

又因为$\varphi_a\varphi_b = \varphi_{ab}$，所以$\varphi_a\varphi_{a^{-1}} = \varphi_{a^{-1}}\varphi_a = le = l$，有逆元

所以综上可得，G_r关于变换的复合构成群。

G 与$\mathrm{G_r}$同构：

令ρ：$G \to G_r$，$a \to \varphi_a$，$\forall a \in G$.

则显然ρ是 G 到$\mathrm{G_r}$的映射。

（1）对于$\forall a,b$∈G，若$\rho(a) = \rho(b)$，即$\varphi_a = \varphi_b$，则$\varphi_a(e) = \varphi_b(e)$

即$a^{-1}e=b^{-1}e$，所以可得$a^{-1}=b^{-1}$，即$a=b$。所以可得ρ是 G 到$\mathrm{G_r}$的单映射；

（2）对于$\forall\varphi_a\in G_r$，有 $a\in G$ 使得$\rho(a)=\varphi_a$。所以可得ρ是 G 到$\mathrm{G_r}$的满映射；

（3）对于$\forall a,b\in\mathrm{G}$，有$\rho(ab)=\varphi_{ab}=\varphi_a\cdot\varphi_b=\rho(a)\rho(b)$

所以综上可得，ρ是 G 到$\mathrm{G_r}$的同构映射。