

### 第三次小测试

1、判断正误 (4×6=24 分)。

(1)群子集乘积在群运算下构成群。(F)

(2)若群  $H$  为群  $G$  的子群, 则  $H$  的所有陪集当中仅有一个陪集关于群运算构成群。(T)

(3)对任意正整数  $a$  和奇素数  $p$  都有  $a^{p-1} = 1 \pmod p$ 。(F)

(4)对任意正整数  $a$  和奇素数  $p$  都有  $a^p = a \pmod p$ 。(T)

(5)若群  $H$  为群  $G$  的正规子群, 则对任意  $a \in G$ 、 $h \in H$  都有  $aH=Ha$  及  $ah=ha$ 。(F)

(6) 若群  $H$  为群  $G$  的正规子群, 则商群  $G/H$  的阶为  $G$  的阶的一个因子。(F)

2、设  $G$  为所有非零实数构成的乘法群, 下列映射  $\varphi$  中哪些是  $G$  到  $G$  的同态映射? 对于同态映射  $\varphi$ , 找出  $\varphi(G)$  和  $\text{Ker}(\varphi)$ 。(11 分)

(1)  $x \mapsto |x|$ ;

解: 是,  $\varphi(G) = \mathbb{R}^+$ ,  $\text{Ker}(\varphi) = \{1, -1\}$

(2)  $x \mapsto ax$ ;

解: ①  $a \neq 1$  时, 不是;

②  $a = 1$  时, 是,  $\varphi(G) = G$ ,  $\text{Ker}(\varphi) = \{1\}$

(3)  $x \mapsto x^2$ ;

解: 是,  $\varphi(G) = \mathbb{R}^+$ ,  $\text{Ker}(\varphi) = \{1, -1\}$

(4)  $x \mapsto -1/x$ 。

解: 不是。

3、求 12 阶群  $G=\langle a \rangle$  的子群  $H=\langle a^8 \rangle$  在  $G$  中的所有陪集 (10+15=25 分)。

解：  $\text{ord } a = 12 = |G|$

$\therefore H$  所含元素为  $\{a^4, a^8, e\}$

又  $\because H$  的所有陪集为  $H, aH, a^2H, a^3H$

$\therefore$  一共 4 个陪集

4、证明：一个子群的左陪集的所有元素的逆元素组成这个子群的一个右陪集 (20 分)。

解：设  $H$  为群  $G$  的一个子群，且  $a \in G$

$\because \forall x = ah \in aH$

$\therefore x^{-1} = h^{-1}a^{-1} \in Ha^{-1}$

$\therefore aH$  中任一元素的逆元素都在  $Ha^{-1}$  中

同时对于  $\forall y = ha^{-1} \in Ha^{-1}$ ，若取  $x = ah^{-1}$

则有  $x \in aH$ ，且  $x^{-1} = ha^{-1} = y$

$\therefore Ha^{-1}$  中任一元素都是  $aH$  中某个元素的逆元素，得证。

5、设  $G$  是群， $H$  为  $G$  的正规子群，且  $[G:H]=m$ 。证明：对  $G$  中每个元素  $x$  都有  $x^m \in H$  (20 分)。

解： $H$  是  $G$  的正规子群  $\Rightarrow$  有商群  $\frac{G}{H}$

$[G:H] = m \Rightarrow [\frac{G}{H}] = m$

$\therefore$  对于  $\forall x \in G$ ， $x^m H = (xH)^m = \bar{e} = eH = H$

$\therefore x^m \in H$