**第二次小测试**

**郝裕玮**

**18329015**

**1、判断正误（49=36分）。**

**(1)每一个群都同构于一个置换群。**（F）

**(2)交换群的子群交换，非交换群的子群不交换。**（F）

**(3)有限群的子群为有限群，无限群的子群为无限群。**（F）

**(4)有限群的元素是有限阶的，无限群的元素是无限阶的。**（F）

**(5)同一个群的不同子群相交形成的集合在群运算下仍构成群。**（T）

**(6)同一个群的不同子群相并形成的集合在群运算下仍构成群。**（F）

**(7)有限循环群中任意元素的阶一定是生成元阶数的一个因子。**（T）

**(8)同构的群必须大小相同，故任何一个群不可能与其子群同构。**（F）

**(9)循环群中的元素都可以写成生成元的幂次形式，幂次为自然数。**（F）

**2、任意群均存在与其同态的群，也存在与其同构的群，给出构造同态群和同构群的方法（5+10=15分）。**

解：（1）构造同构群：由凯莱定理可知，每个群都同构于1个变换群。构造同构群可通过构造群G的左乘变换映射

关于变换的合成构成了群G的同构群。

（2）构造同态群：构造零同态群，即一群的所有元素映射到另一群的单位元。

**3、循环群只有两类，即无限循环群和阶有限循环群。如果两类循环群的生成元都记为，分别给出这两类群的其它所有生成元，分别统计相应生成元的个数（4+9+2+2=17分）。**

解：（1）无限循环群：其他生成元有，生成元个数为2；

（2）n阶有限循环群：其他生成元有，，生成元个数为

**4、设是群，，对定义变换映射，构造。证明：关于变换的复合构成群，与同构（16+16= 32分）。**

解：关于变换的复合构成群：

（1）因为映射的合成满足结合律，所以的运算也满足结合律；

（2）

所以,具有封闭性；

（3）设e是G的单位元，则是G的恒等变换，即，有单位元

又因为，所以，有逆元

所以综上可得，关于变换的复合构成群。

G与同构：

令

则显然是G到的映射。

（1）对于*a,b*∈G，若

即，所以可得。所以可得是G到的单映射；

（2）对于，有*a*∈*G*使得。所以可得是G到的满映射；

（3）对于*a,b*∈G，有

所以综上可得，是G到的同构映射。