CT

Вводная работа

Теория управления

Сорокоумов П.С.

ИНБИКСТ МФТИ

2019 г.

Вводная работа

Практические работы

Запланированы следующие работы по линейным системам управления:

1. передаточная функция, частотные характеристики звеньев;
2. устойчивость управления;
3. PID-регулирование;
4. нечёткое управление.

Для зачёта надо сдать их все. Если что-то не будет закончено, сдавать надо будет лектору.

Задача управления системой

При создании первых теорий о работе технических систем («кибернетика», Н.Винер, 1948) считалось, что контроль поведения всех типов систем — единая область науки. Однако на практике эта область распалась на две мало пересекающиеся части.

Рассмотрим несколько задач по управлению системами:

1. автопилот: надо управлять рулём судна так, чтобы оно двигалось вперёд, не уклоняясь от заданного вначале направления;
2. контроль прохода по лицу: пропускать через дверь только людей, лицо которых занесено в базу данных;
3. следование за человеком: управлять квадрокоптером так, чтобы он следовал за указанным человеком, снимая его на камеру.

Как решают такие задачи? (1)

Автопилот: надо управлять рулём судна так, чтобы оно двигалось вперёд, не уклоняясь от заданного вначале направления.

Вопрос: Как будем решать?

Как решают такие задачи? (1)

Автопилот: надо управлять рулём судна так, чтобы оно двигалось вперёд, не уклоняясь от заданного вначале направления.

Вопрос: Как будем решать?

Ответ: запишем уравнение зависимости направления судна от положения руля и прочих показателей (силы ветра, течения, загрузки и т.п.); оно будет дифференциальным, а для малых отклонений — линейным дифференциальным. Решим его и найдём подходящие под начальные условия параметры.

Как решают такие задачи? (2)

Контроль прохода по лицу: пропускать через дверь только людей, лицо которых занесено в базу данных.

Вопрос: Как будем решать?

Как решают такие задачи? (2)

Контроль прохода по лицу: пропускать через дверь только людей, лицо которых занесено в базу данных.

Вопрос: Как будем решать?

Ответ: допустимо множество разных методов решения (входными данными могут быть и изображение в видимом свете, и в инфракрасных лучах, и карта глубины; распознавать можно разными способами; можно по-разному работать с факторами, повышающими неоднозначность, вроде выражения лица, усталости, загрязнения и т.п.)

Как решают такие задачи? (3)

Следование за человеком: управлять квадрокоптером так, чтобы он следовал за указанным человеком, снимая его на камеру.

Вопрос: Как будем решать?

Как решают такие задачи? (3)

Следование за человеком: управлять квадрокоптером так, чтобы он следовал за указанным человеком, снимая его на камеру.
Вопрос: Как будем решать?
Ответ: сочетаются два описанных подхода: сначала распознаём указанного человека, потом следуем за ним.

Видно, что все приведённые решения состоят из блоков, сочетающих в себе один из подходов:

1. формальное решение: записать уравнение, описывающее эволюцию системы (как правило, дифференциальное), и решить его с учётом условий задачи
2. неформальное решение: когда формально решить невозможно, приходится придумывать свой подход к каждой новой задаче.

Две теории для двух классов задач

Раздел науки, который изучает решение задач управления, формализуемых в виде дифференциальных уравнений — **теория управления**

Раздел науки, который изучает решение прочих задач управления (в том числе некорректно поставленных и нечётко сформулированных) — **теория искусственного интеллекта**

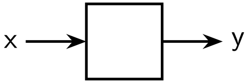
Некоторые задачи можно решать и одними, и другими методами — так, как удобнее в конкретных условиях.

Общий подход

1. Единую задачу разделить на подзадачи;
2. решить каждую по отдельности либо методами теории управления, либо методами искусственного интеллекта;
3. соединить полученные модули в единую систему.

Описание линейных систем

Пусть на некоторую систему поступает некоторая непрерывная величина x, и она выдаёт некоторую непрерывную величину y:



Пусть зависимость между x и y может быть описана в виде дифференциального уравнения:

$$b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \ldots = a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \ldots$$

причём коэффициенты не зависят от x и y. Тогда система является линейной.

Примеры

$$b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \ldots = a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \ldots$$

Вопрос: является ли линейным такое дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2y$$

Примеры

$$b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \ldots = a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \ldots$$

Вопрос: является ли линейным такое дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2y$$

Ответ: да.

Вопрос: а это:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 2y + 1$$

Примеры

$$b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \ldots = a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \ldots$$

Вопрос: является ли линейным такое дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2y$$

Ответ: да.

Вопрос: а это:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 2y + 1$$

Ответ: нет, потому что член «1» не является коэффициентом ни при x и её производных, ни при y и её производных.

Примеры (2)

$$b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \ldots = a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \ldots$$

Вопрос: а это:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2xy$$

Примеры (2)

$$b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \ldots = a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \ldots$$

Вопрос: а это:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2xy$$

Ответ: нет, потому что x и y не должны входить в коэффициенты друг друга. Правда, некоторые уравнения можно привести к линейному виду.

Передаточная функция

Для краткости обозначим $p = \frac{d}{dt}$ и «вынесем» x и y за скобки, тогда вместо:

$$b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + ... = a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + ...$$

будем писать:

$$(b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + ...)x = (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ...)y$$

Можно получить полезное описание системы — её **передаточную функцию**, применив преобразование Лапласа к левой и правой частям её уравнения и взяв частное результатов:

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + ...}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + ...}$$

Переменная s — комплексная.

Реакция на гармоническое воздействие

Если на вход линейной системы подать синусоидальный сигнал

$$x = x_0 sin\omega t,$$

то после переходных процессов на выходе также установится синусоидальный сигнал той же частоты, но с другими амплитудой и фазой:

$$y = A(\omega)x_0 sin(\omega t + \phi(\omega))$$

По передаточной функции можно определить $A(\omega)$ и $\phi(\omega)$, то есть **амплитудно-частотную и фазо-частотную** характеристики системы. Для этого надо подставить в передаточную функцию $s = j\omega$ и вычислить:

$$A(\omega) = |W(j\omega)|, \phi(\omega) = arg(W(j\omega))$$

Реакция на единичное ступенчатое воздействие

Если на вход подать единичное ступенчатое воздействие:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

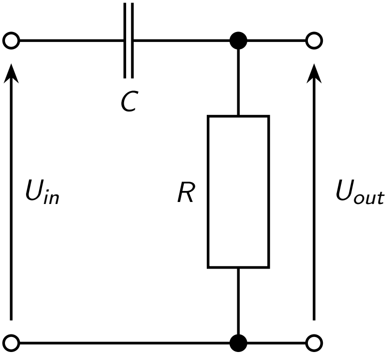
то значение на выходе можно определить как сумму постоянной части, зависящей от исходного состояния, и выражения:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} Res(W(s)\frac{e^{st}}{s})|_{s=\lambda_i},$$

где передаточная функция $W(s)$ имеет n полюсов $\lambda_1..\lambda_n$, Res — вычет. Реакция системы на единичную ступеньку, т.е. $h(t)$, называется переходной функцией (характеристикой).

Простейший пример

Рассчитаем частотные и переходные характеристики простейшей электрической цепи:



Дифференциальное уравнение системы

$$U_{in} = U_C + U_{out},$$

причём

$$U_{out} = IR, U_C = U(t=0) + \frac{1}{C}\int_0^t I dt.$$

Интегралы не должны входить в запись дифференциального уравнения, поэтому продифференцируем всё:

$$\frac{dU_{in}}{dt} = \frac{I}{C} + R\frac{dI}{dt},$$

$$\frac{dU_{in}}{dt} = \frac{U_{out}}{CR} + \frac{dU_{out}}{dt}$$

Переобозначим $U_{in} = x, U_{out} = y$ и получим:

$$px = (1/CR + p)y$$

Передаточная функция

$$px = (1/CR + p)y$$

Вопрос: как будет выглядеть передаточная функция такой системы?

Передаточная функция

$$px = (1/CR + p)y$$

Вопрос: как будет выглядеть передаточная функция такой системы?
Ответ:

$$W(s) = \frac{s}{1/CR + s}$$

Определим реакцию на гармоническое воздействие: $s = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{j\omega}{1/CR + j\omega} = \frac{j\omega(1/CR - j\omega)}{(1/CR + j\omega)(1/CR - j\omega)} = \frac{\omega^2 - j\omega/RC}{1/C^2R^2 + \omega^2}$$

тогда амплитуда и разность фаз будут равны:

$$|W(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1/R^2C^2}}, arg(W(j\omega)) = atan\frac{1}{RC\omega}$$

Переходная функция

$$W(s) = \frac{s}{1/CR + s}$$

Вопрос: каковы полюсы передаточной функции системы?

Переходная функция

$$W(s) = \frac{s}{1/CR + s}$$

Вопрос: каковы полюсы передаточной функции системы?
Ответ: $\lambda = -1/CR$
Переходная функция:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} Res(W(s)\frac{e^{st}}{s})|_{s=\lambda_i},$$

тогда у нас будет:

$$h(t) = Res(W(\lambda)\frac{e^{\lambda t}}{\lambda})$$

Переходная функция (2)

Вопрос: что такое вычет?

Переходная функция (2)

Вопрос: что такое вычет?

Ответ:

$$Res(f(z)|_a) = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} f(z)dz$$

В полюсе кратности 1 (наш случай):

$$Res(f(z)|_a) = \lim_{z\to a} (z-a)f(z)$$

В полюсе кратности n:

$$Res(f(z)|_a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n f(z)$$

Получаем:

$$h(t) = \lim_{s\to -1/CR} (s+1/CR) \frac{s}{(s+1/CR)} \frac{e^{st}}{s} = -1/CR \frac{e^{-t/RC}}{-1/CR} = e^{-t/RC}$$

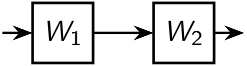
CT

Работа 2

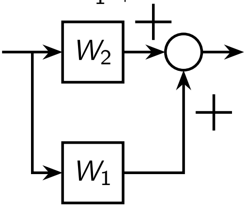
Работа 2

Передаточные функции соединённых систем

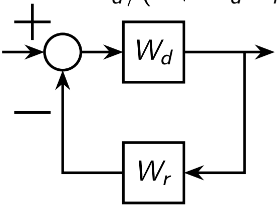
$W = W_1 W2$



$W = W_1 + W2$



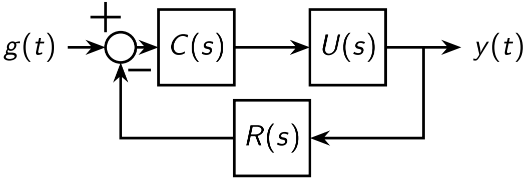
$W = W_d/(1 + W_d W_r)$



Замкнутая система

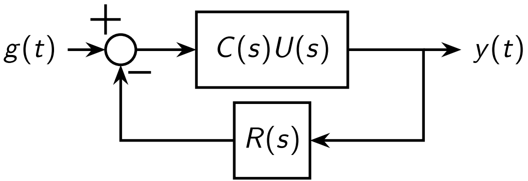
Пусть необходимо управлять некоей линейной системой, описываемой передаточной функцией $U(s)$. Очень часто для этого используется конструкция из двух дополнительных блоков:

- блока управления $C(s)$, формирующего входной сигнал для управляемой системы, и
- обратной связи $R(s)$, регулирующей учёт эффекта проводившегося ранее управления на новые сигналы.



В систему попадает один сигнал — задающее воздействие $g(t)$, снимают с неё один сигнал — выход регулируемого блока $y(t)$. Такая система называется замкнутой.

Уравнения замкнутой системы



Передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию:

$$W(s) = \frac{C(s)U(s)}{1 + C(s)U(s)R(s)}$$

Поведение системы при воздействиях

Пусть на систему поступают некоторые ограниченные по величине и времени воздействия. Она может реагировать на них по-разному:

- реакция на любое воздействие со временем затухает до нулевой;
- реакция на некоторые воздействия со временем остается ненулевой, но ограниченной;
- реакция на некоторые воздействия со временем неограниченно растёт.

Системы, в которых реакция не затухает, использовать нельзя, потому что управляющие сигналы в них могут неограниченно возрастать.

Описание системы управления через нули и полюсы

Пусть передаточная функция системы записана в виде:

$$W(s) = \frac{b_m + b_{m-1}s + b_{m-2}s^2 + ... + b_0 s^m}{a_n + a_{n-1}s + a_{n-2}s^2 + ... + a_0 s^n}$$

Если найти все комплексные корни полиномов, стоящих в числителе $(z_i, i = 1..m)$ и знаменателе $(p_i, i = 1..n)$, то можно переписать это уравнение в виде:

$$W(s) = g\frac{(s - z_1)(s - z_2)...(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)...(s - p_n)}$$

где $g = b_0/a_0$. Иначе говоря, системы такого вида можно задавать не только самой по себе передаточной функцией, но и набором её нулей z, полюсов p и коэффициента усиления g.

Критерий устойчивости

Система управления устойчива, если действительные части всех её полюсов отрицательны. Иначе говоря, если для системы $W(s) = N(s)/D(s)$ записать уравнение $D(\lambda) = 0$, то система устойчива, когда действительные части всех его комплексных корней ограничены. Уравнение $D(\lambda) = 0$ называется характеристическим.

При нулевой действительной части хотя бы одного полюса формально управляющие сигналы остаются ограниченными. Но на практике такие системы управления всё равно стараются не применять.

При исследовании предельных случаев часто бывает, что какие-то из корней стремятся к бесконечности. Это нормально.

Неформальное обоснование

Решение дифференциальных уравнений, описывающих систему, имеет вид суммы решения однородной системы и частного решения неоднородной системы, зависящего от начальных условий. При этом решение однородной системы — сумма компонентов, в которых имеется сомножитель вида $e^{\lambda t}$, где λ — каждый корень характеристического уравнения.

- В случае, если в сомножителе $Re(\lambda) > 0$, он неограниченно возрастает со временем;
- если $Re(\lambda) = 0$, он остаётся ограниченным со временем;
- иначе его значение уменьшается.

Варианты критериев устойчивости

Если система задана целиком, можно просто посчитать корни её характеристического уравнения. Иногда (например, при подборе параметров системы управления) бывает полезно использовать другой метод оценки устойчивости.

Рассмотрим подробнее алгебраические критерии:

- критерий Гурвица;
- критерий Рауса.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, a_0 > 0$$

Критерий Гурвица

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, a_0 > 0$$

Выпишем матрицу размером n x n с чередующимися чётными и нечётными коэффициентами уравнения:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & ... & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & ... & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & ... & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}$$

Система устойчива, если все главные миноры этой матрицы положительны:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, ... \tag{1}$$

Критерий Рауса

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, a_0 > 0$$

Сформируем таблицу C, имеющую $n+1$ строк, из элементов c_{ij}, где i — строка, j — столбец:

- первая строка состоит из чётных коэффициентов, начиная с a_0;
- вторая — из нечётных коэффициентов, начиная с a_1;
- определим для каждой следующей строки с номером i величину $r_i = \frac{c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}}$. Тогда $c_{ij} = c_{i-2,j+1} - r_i c_{i-1,j+1}$.

Система устойчива, если все элементы первого столбца положительны.

Пример анализа устойчивости

Возьмём замкнутую систему с передаточной функцией прямой цепи $W_1(s) = \frac{s}{s^2+1}$, обратной цепи $W_2(s) = \frac{1}{s+1}$ и отрицательной обратной связью. Передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию:

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)},$$

характеристическое уравнение:

$$1 + W_1(\lambda)W_2(\lambda) = 0$$

$$1 + \frac{\lambda}{\lambda^2+1}\frac{1}{\lambda+1} = 0$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Его корни приближённо равны: $\lambda_1 = -0.5698, \lambda_{2,3} = -0.2151 \pm 1.307i$, то есть система устойчива.

Пример анализа устойчивости(2)

Анализ устойчивости по критерию Гурвица:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Коэффициенты: 1, 1, 2, 1. Чётные: 1, 2; нечётные: 1,1.
Матрица 3x3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Её главные определители:

$$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1 * 2 - 1 * 1 = 1, \Delta_3 = \Delta_2 * 1 = 1$$

Система устойчива.

Пример анализа устойчивости(3)

Анализ устойчивости по критерию Рауса:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Таблица 4x2: первые две строки - чётные и нечётные коэффициенты уравнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее считаем по формулам.

$$r_3 = c_{11}/c_{21} = 1; c_{31} = c_{12} - r_3 c_{22}; c_{32} = c_{12} - r_3 c_{23};$$

и т.д.

$$\begin{pmatrix} 2 - 1 * 1 = 1 & 0 \\ 1 - 1 * 0 = 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Все элементы первого столбца положительны, система устойчива.