

СТ

Вводная работа

# Теория управления

Сорокоумов П.С.

ИНБИКСТ МФТИ

2019 г.

# Вводная работа

Содержание курса

Предмет работ

Описание системы

Пример

# Практические работы

Запланированы следующие работы по линейным системам управления:

- 1 передаточная функция, частотные характеристики звеньев;
- 2 устойчивость управления;
- 3 PID-регулирование;
- 4 нечёткое управление.

Для зачёта надо сдать их все. Если что-то не будет закончено, сдавать надо будет лектору.

# Задача управления системой

При создании первых теорий о работе технических систем («кибернетика», Н.Винер, 1948) считалось, что контроль поведения всех типов систем — единая область науки. Однако на практике эта область распалась на две мало пересекающиеся части.

Рассмотрим несколько задач по управлению системами:

- 1 автопилот: надо управлять рулём судна так, чтобы оно двигалось вперёд, не уклоняясь от заданного вначале направления;
- 2 контроль прохода по лицу: пропускать через дверь только людей, лицо которых занесено в базу данных;
- 3 следование за человеком: управлять квадрокоптером так, чтобы он следовал за указанным человеком, снимая его на камеру.

# Как решают такие задачи? (1)

Автопилот: надо управлять рулём судна так, чтобы оно двигалось вперёд, не уклоняясь от заданного вначале направления.

**Вопрос:** Как будем решать?

## Как решают такие задачи? (1)

Автопилот: надо управлять рулём судна так, чтобы оно двигалось вперёд, не уклоняясь от заданного вначале направления.

**Вопрос:** Как будем решать?

**Ответ:** запишем уравнение зависимости направления судна от положения руля и прочих показателей (силы ветра, течения, загрузки и т.п.); оно будет дифференциальным, а для малых отклонений — линейным дифференциальным. Решим его и найдём подходящие под начальные условия параметры.

## Как решают такие задачи? (2)

Контроль прохода по лицу: пропускать через дверь только людей, лицо которых занесено в базу данных.

**Вопрос:** Как будем решать?



## Как решают такие задачи? (2)

Контроль прохода по лицу: пропускать через дверь только людей, лицо которых занесено в базу данных.

**Вопрос:** Как будем решать?

**Ответ:** допустимо множество разных методов решения (входными данными могут быть и изображение в видимом свете, и в инфракрасных лучах, и карта глубины; распознавать можно разными способами; можно по-разному работать с факторами, повышающими неоднозначность, вроде выражения лица, усталости, загрязнения и т.п.)

## Как решают такие задачи? (3)

Следование за человеком: управлять квадрокоптером так, чтобы он следовал за указанным человеком, снимая его на камеру.

**Вопрос:** Как будем решать?

## Как решают такие задачи? (3)

Следование за человеком: управлять квадрокоптером так, чтобы он следовал за указанным человеком, снимая его на камеру.

**Вопрос:** Как будем решать?

**Ответ:** сочетаются два описанных подхода: сначала распознаём указанного человека, потом следуем за ним.

Видно, что все приведённые решения состоят из блоков, сочетающих в себе один из подходов:

- 1 формальное решение: записать уравнение, описывающее эволюцию системы (как правило, дифференциальное), и решить его с учётом условий задачи
- 2 неформальное решение: когда формально решить невозможно, приходится придумывать свой подход к каждой новой задаче.

## Две теории для двух классов задач

Раздел науки, который изучает решение задач управления, формализуемых в виде дифференциальных уравнений — **теория управления**

Раздел науки, который изучает решение прочих задач управления (в том числе некорректно поставленных и нечётко сформулированных) — **теория искусственного интеллекта**

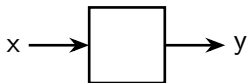
Некоторые задачи можно решать и одними, и другими методами — так, как удобнее в конкретных условиях.

## Общий подход

- 1 Единую задачу разделить на подзадачи;
- 2 решить каждую по отдельности либо методами теории управления, либо методами искусственного интеллекта;
- 3 соединить полученные модули в единую систему.

## Описание линейных систем

Пусть на некоторую систему поступает некоторая непрерывная величина  $x$ , и она выдаёт некоторую непрерывную величину  $y$ :



Пусть зависимость между  $x$  и  $y$  может быть описана в виде дифференциального уравнения:

$$b_0x + b_1\frac{dx}{dt} + b_2\frac{d^2x}{dt^2} + \dots = a_0y + a_1\frac{dy}{dt} + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + \dots$$

причём коэффициенты не зависят от  $x$  и  $y$ . Тогда система является линейной.

## Примеры

$$b_0x + b_1\frac{dx}{dt} + b_2\frac{d^2x}{dt^2} + \dots = a_0y + a_1\frac{dy}{dt} + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + \dots$$

**Вопрос:** является ли линейным такое дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2y$$

## Примеры

$$b_0x + b_1\frac{dx}{dt} + b_2\frac{d^2x}{dt^2} + \dots = a_0y + a_1\frac{dy}{dt} + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + \dots$$

**Вопрос:** является ли линейным такое дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2y$$

**Ответ:** да.

**Вопрос:** а это:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 2y + 1$$



## Примеры

$$b_0x + b_1\frac{dx}{dt} + b_2\frac{d^2x}{dt^2} + \dots = a_0y + a_1\frac{dy}{dt} + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + \dots$$

**Вопрос:** является ли линейным такое дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2y$$

**Ответ:** да.

**Вопрос:** а это:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 2y + 1$$

**Ответ:** нет, потому что член «1» не является коэффициентом ни при  $x$  и её производных, ни при  $y$  и её производных.

## Примеры (2)

$$b_0x + b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \dots = a_0y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \dots$$

**Вопрос:** а это:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2xy$$

## Примеры (2)

$$b_0x + b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \dots = a_0y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \dots$$

**Вопрос:** а это:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2xy$$

**Ответ:** нет, потому что  $x$  и  $y$  не должны входить в коэффициенты друг друга. Правда, некоторые уравнения можно привести к линейному виду.

## Передаточная функция

Для краткости обозначим  $p = \frac{d}{dt}$  и «вынесем»  $x$  и  $y$  за скобки, тогда вместо:

$$b_0x + b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \dots = a_0y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \dots$$

будем писать:

$$(b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots)x = (a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots)y$$

Можно получить полезное описание системы — её **передаточную функцию**, применив преобразование Лапласа к левой и правой частям её уравнения и взяв частное результатов:

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots}$$

Переменная  $s$  — комплексная.

## Реакция на гармоническое воздействие

Если на вход линейной системы подать синусоидальный сигнал

$$x = x_0 \sin \omega t,$$

то после переходных процессов на выходе также установится синусоидальный сигнал той же частоты, но с другими амплитудой и фазой:

$$y = A(\omega) x_0 \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

По передаточной функции можно определить  $A(\omega)$  и  $\phi(\omega)$ , то есть **амплитудно-частотную** и **фазо-частотную** характеристики системы. Для этого надо подставить в передаточную функцию  $s = j\omega$  и вычислить:

$$A(\omega) = |W(j\omega)|, \phi(\omega) = \arg(W(j\omega))$$

## Реакция на единичное ступенчатое воздействие

Если на вход подать единичное ступенчатое воздействие:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

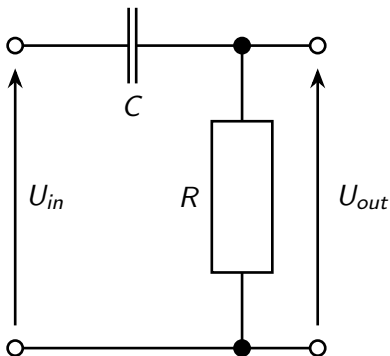
то значение на выходе можно определить как сумму постоянной части, зависящей от исходного состояния, и выражения:

$$h(t) = C + \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}\left(W(s) \frac{e^{st}}{s}\right) \Big|_{s=\lambda_i},$$

где передаточная функция  $W(s)$  имеет  $n$  полюсов  $\lambda_1 \dots \lambda_n$ ,  $\operatorname{Res}$  — вычет. Реакция системы на единичную ступеньку, т.е.  $h(t)$ , называется переходной функцией (характеристикой).  $C$  — константа, зависящая от начальных условий.

## Простейший пример

Рассчитаем частотные и переходные характеристики простейшей электрической цепи:



## Дифференциальное уравнение системы

$$U_{in} = U_C + U_{out},$$

причём

$$U_{out} = IR, U_C = U(t=0) + \frac{1}{C} \int_0^t I dt.$$

Интегралы не должны входить в запись дифференциального уравнения, поэтому продифференцируем всё:

$$\frac{dU_{in}}{dt} = \frac{I}{C} + R \frac{dI}{dt},$$

$$\frac{dU_{in}}{dt} = \frac{U_{out}}{CR} + \frac{dU_{out}}{dt}$$

Переобозначим  $U_{in} = x$ ,  $U_{out} = y$  и получим:

$$px = (1/CR + p)y$$



## Передаточная функция

$$px = (1/CR + p)y$$

**Вопрос:** как будет выглядеть передаточная функция такой системы?

## Передаточная функция

$$px = (1/CR + p)y$$

**Вопрос:** как будет выглядеть передаточная функция такой системы?

**Ответ:**

$$W(s) = \frac{s}{1/CR + s}$$

Определим реакцию на гармоническое воздействие:  $s = j\omega$ :

$$W(j\omega) = \frac{j\omega}{1/CR + j\omega} = \frac{j\omega(1/CR - j\omega)}{(1/CR + j\omega)(1/CR - j\omega)} = \frac{\omega^2 - j\omega/RC}{1/C^2R^2 + \omega^2}$$

тогда амплитуда и разность фаз будут равны:

$$|W(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1/R^2C^2}}, \arg(W(j\omega)) = \operatorname{atan}\frac{1}{RC\omega}$$

## Переходная функция

$$W(s) = \frac{s}{1/CR + s}$$

**Вопрос:** каковы полюсы передаточной функции системы?

## Переходная функция

$$W(s) = \frac{s}{1/CR + s}$$

**Вопрос:** каковы полюсы передаточной функции системы?

**Ответ:**  $\lambda = -1/CR$

Переходная функция:

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}\left(W(s) \frac{e^{st}}{s}\right) \Big|_{s=\lambda_i},$$

тогда у нас будет:

$$h(t) = \operatorname{Res}\left(W(\lambda) \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\right)$$

## Переходная функция (2)

**Вопрос:** что такое вычет?

## Переходная функция (2)

**Вопрос:** что такое вычет?

**Ответ:**

$$\text{Res}(f(z)|_a) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} f(z) dz$$

В полюсе кратности 1 (наш случай):

$$\text{Res}(f(z)|_a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z)$$

В полюсе кратности  $n$ :

$$\text{Res}(f(z)|_a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - a)^n f(z)$$

Получаем:

$$h(t) = \lim_{s \rightarrow -1/CR} (s + 1/CR) \frac{s}{(s + 1/CR)} \frac{e^{st}}{s} = -1/CR \frac{e^{-t/RC}}{-1/CR} = e^{-t/RC}$$

СТ

Работа 2

## Работа 2

Соединение систем

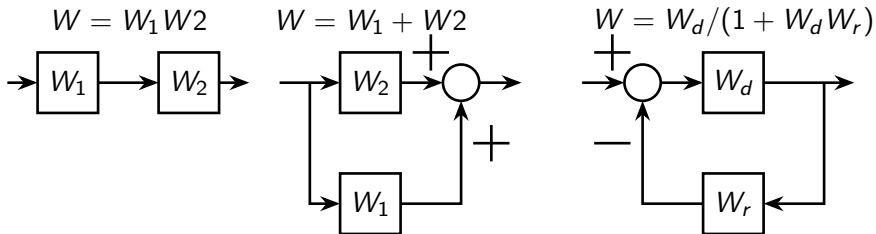
Устойчивость

Проверка на устойчивость

Пример



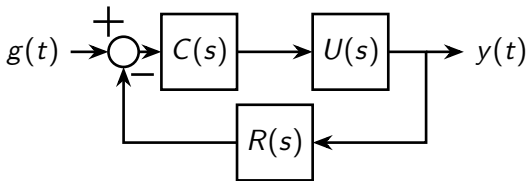
# Передаточные функции соединённых систем



## Замкнутая система

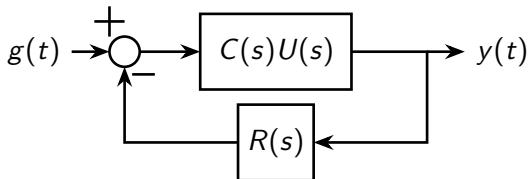
Пусть необходимо управлять некоей линейной системой, описываемой передаточной функцией  $U(s)$ . Очень часто для этого используется конструкция из двух дополнительных блоков:

- блока управления  $C(s)$ , формирующего входной сигнал для управляемой системы, и
- обратной связи  $R(s)$ , регулирующей учёт эффекта проводившегося ранее управления на новые сигналы.



В систему попадает один сигнал — задающее воздействие  $g(t)$ , снимают с неё один сигнал — выход регулируемого блока  $y(t)$ . Такая система называется замкнутой.

# Уравнения замкнутой системы



Передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию:

$$W(s) = \frac{C(s)U(s)}{1 + C(s)U(s)R(s)}$$

## Поведение системы при воздействиях

Пусть на систему поступают некоторые ограниченные по величине и времени воздействия. Она может реагировать на них по-разному:

- реакция на любое воздействие со временем затухает до нулевой;
- реакция на некоторые воздействия со временем остается ненулевой, но ограниченной;
- реакция на некоторые воздействия со временем неограниченно растёт.

Системы, в которых реакция не затухает, использовать нельзя, потому что управляющие сигналы в них могут неограниченно возрастать.

## Описание системы управления через нули и полюсы

Пусть передаточная функция системы записана в виде:

$$W(s) = \frac{b_m + b_{m-1}s + b_{m-2}s^2 + \dots + b_0s^m}{a_n + a_{n-1}s + a_{n-2}s^2 + \dots + a_0s^n}$$

Если найти все комплексные корни полиномов, стоящих в числителе  $(z_i, i = 1..m)$  и знаменателе  $(p_i, i = 1..n)$ , то можно переписать это уравнение в виде:

$$W(s) = g \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

где  $g = b_0/a_0$ . Иначе говоря, системы такого вида можно задавать не только самой по себе передаточной функцией, но и набором её нулей  $z$ , полюсов  $p$  и коэффициента усиления  $g$ .

## Критерий устойчивости

Система управления устойчива, если действительные части всех её полюсов отрицательны. Иначе говоря, если для системы  $W(s) = N(s)/D(s)$  записать уравнение  $D(\lambda) = 0$ , то система устойчива, когда действительные части всех его комплексных корней ограничены. Уравнение  $D(\lambda) = 0$  называется характеристическим.

При нулевой действительной части хотя бы одного полюса формально управляющие сигналы остаются ограниченными. Но на практике такие системы управления всё равно стараются не применять.

При исследовании предельных случаев часто бывает, что какие-то из корней стремятся к бесконечности. Это нормально.

# Неформальное обоснование

Решение дифференциальных уравнений, описывающих систему, имеет вид суммы решения однородной системы и частного решения неоднородной системы, зависящего от начальных условий. При этом решение однородной системы — сумма компонентов, в которых имеется сомножитель вида  $e^{\lambda t}$ , где  $\lambda$  — каждый корень характеристического уравнения.

- В случае, если в сомножителе  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , он неограниченно возрастает со временем;
- если  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ , он остаётся ограниченным со временем;
- иначе его значение уменьшается.

## Варианты критериев устойчивости

Если система задана целиком, можно просто посчитать корни её характеристического уравнения. Иногда (например, при подборе параметров системы управления) бывает полезно использовать другой метод оценки устойчивости.

Рассмотрим подробнее алгебраические критерии:

- критерий Гурвица;
- критерий Рауса.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, a_0 > 0$$



## Критерий Гурвица

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, a_0 > 0$$

Выпишем матрицу размером  $n \times n$  с чередующимися чётными и нечётными коэффициентами уравнения:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}$$

Система устойчива, если все главные миноры этой матрицы положительны:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \dots \quad (1)$$

## Критерий Рауса

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, a_0 > 0$$

Сформируем таблицу  $C$ , имеющую  $n + 1$  строк, из элементов  $c_{ij}$ , где  $i$  — строка,  $j$  — столбец:

- первая строка состоит из чётных коэффициентов, начиная с  $a_0$ ;
- вторая — из нечётных коэффициентов, начиная с  $a_1$ ;
- определим для каждой следующей строки с номером  $i$  величину  $r_i = \frac{c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}}$ . Тогда  $c_{ij} = c_{i-2,j+1} - r_i c_{i-1,j+1}$ .

Система устойчива, если все элементы первого столбца положительны.

## Пример анализа устойчивости

Возьмём замкнутую систему с передаточной функцией прямой цепи  $W_1(s) = \frac{s}{s^2+1}$ , обратной цепи  $W_2(s) = \frac{1}{s+1}$  и отрицательной обратной связью. Передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию:

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)},$$

характеристическое уравнение:

$$1 + W_1(\lambda)W_2(\lambda) = 0$$

$$1 + \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \frac{1}{\lambda + 1} = 0$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Его корни приближённо равны:  $\lambda_1 = -0.5698$ ,  $\lambda_{2,3} = -0.2151 \pm 1.307i$ , то есть система устойчива.

## Пример анализа устойчивости(2)

Анализ устойчивости по критерию Гурвица:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Коэффициенты: 1, 1, 2, 1. Чётные: 1, 2; нечётные: 1, 1.

Матрица 3x3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Её главные определители:

$$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1 * 2 - 1 * 1 = 1, \Delta_3 = \Delta_2 * 1 = 1$$

Система устойчива.

## Пример анализа устойчивости(3)

Анализ устойчивости по критерию Рауса:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Таблица 4x2: первые две строки - чётные и нечётные коэффициенты уравнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее считаем по формулам.

$$r_3 = c_{11}/c_{21} = 1; c_{31} = c_{12} - r_3 c_{22}; c_{32} = c_{12} - r_3 c_{23};$$

и т.д.

$$\begin{pmatrix} 2 - 1 * 1 = 1 & 0 \\ 1 - 1 * 0 = 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Все элементы первого столбца положительны, система устойчива.

СТ

PID-регулятор

## PID-регулятор

Представление звеньев через состояние  
Задание работы 3

## Уже известные представления линейного звена

Мы уже обсуждали:

- 1 дифференциальное уравнение звена;
- 2 передаточную функцию (transfer function);
- 3 нули, полюса и усиление (zeros, poles, gain, zpk).

Передаточная функция однозначно характеризует звено и удобна для расчёта комбинаций звеньев, но не всегда удобна в применении, например, для вычисления реакции на заданное воздействие.

**Вопрос:** как по ней рассчитать реакцию на произвольное воздействие?



## Уже известные представления линейного звена

Мы уже обсуждали:

- 1 дифференциальное уравнение звена;
- 2 передаточную функцию (transfer function);
- 3 нули, полюса и усиление (zeros, poles, gain, zpk).

Передаточная функция однозначно характеризует звено и удобна для расчёта комбинаций звеньев, но не всегда удобна в применении, например, для вычисления реакции на заданное воздействие.

**Вопрос:** как по ней рассчитать реакцию на произвольное воздействие?

**Ответ:** вычислять реакцию на элементарное воздействие (синусоиду/импульс/ступень), представить воздействие как комбинацию элементарных и складывать реакции на них с нужными амплитудами и задержками, т.е. считать интегралы.

# Представление через пространство состояний (state-space)

Это представление:

- 1 часто нагляднее (отдельным компонентам проще придать физический смысл);
- 2 реализуется более прямолинейно;
- 3 неоднозначно.

Базовая идея: ввести, помимо входной и выходной переменных, ещё несколько других — внутренних, или параметров состояния системы. После этого звено можно представить в виде системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка и линейных уравнений.

## Внешний вид

Если как обычно  $x$  — входная переменная,  $y$  — выходная, то:

$$\dot{Z} = AZ + Bx$$

$$y = CZ + Dx$$

$Z$  — вектор параметров состояния,  $A, B, C, D$  — постоянные матрицы подходящих размеров. Иначе говоря, производные от параметров состояния и от выхода выражены линейными комбинациями параметров состояния и входа.

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = A_{n \times n} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} + B_{n \times 1} x$$

$$y = C_{1 \times n} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} + D_{1 \times 1} x$$

## Как получить такую форму из передаточной функции?

Так как преобразование неоднозначно, то можно действовать разными способами. Один из вариантов (в общем случае не рекомендуемый к применению из-за возникающих численных проблем с сингулярными матрицами) — управляемая каноническая форма (controllable canonical form). Пусть в передаточной функции одинаковые степени многочленов  $n$  в числителе и знаменателе (если это не так, добавим нужное число нулей в числитель):

$$W(s) = \frac{b_n + b_{n-1}s + b_{n-2}s^2 + \dots + b_0s^n}{a_n + a_{n-1}s + a_{n-2}s^2 + \dots + s^n}$$

Тогда понадобится  $n$  переменных состояния в векторе  $Z = (z_i), i = 1..n$ .

# Выкладки

$$W(s) = \frac{b_n + b_{n-1}s + b_{n-2}s^2 + \dots + b_0s^n}{a_n + a_{n-1}s + a_{n-2}s^2 + \dots + s^n}$$

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

...

$$\dot{z}_{n-1} = z_n$$

$$\dot{z}_n = x - z_1 a_n - z_2 a_{n-1} - \dots - z_n a_1$$

$$y = b_0 x + (b_n - a_n b_0) z_1 + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0) z_2 + \dots + (b_1 - a_1 b_0) z_n$$

## Обратное преобразование в передаточную функцию

Осуществляется единым и очень простым способом:

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + Bx(t)$$

$$y(t) = CZ(t) + Dx(t)$$

возьмём преобразование Лапласа от системы:

$$sZ = AZ(s) + BX(s)$$

$$Y(s) = CZ(s) + DX(s)$$

выразим нужное для построения передаточной функции выражение  $Y/X$ :

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

где  $I$  — единичная матрица.

# Автоматические средства расчёта в Scipy.signal

Считать всё это руками не нужно, есть готовые средства:

- для создания звеньев: `TransferFunction(numerator, denominator)`, `StateSpace(A,B,C,D)`, `ZerosPolesGain(zeros, poles, gain)`;
- для перехода от одного вида к другому: функции вида `X2Y`, где `X` и `Y` — `tf`, `zpk`, `ss`, например `tf2ss`, `ss2zpk`.

## Чего мы всем этим добились?

- 1 переменные состояния часто имеют простой физический смысл (например, для изучения перемещений точки это очень часто положение, скорость, ускорение и т.п.), т.е. результат легче интерпретировать;
- 2 проще моделировать (матричные операции такого рода считать лучше, чем интегралы);
- 3 можно отказаться от скалярности входа и выхода и обобщить результат на вектор входов и вектор выходов системы без потери интерпретируемости и скорости моделирования.

Конкретно в этой работе важно, что начальные условия удобно задавать в виде начальных значений всех переменных состояния (по умолчанию они считаются нулевыми).



## Равновесие перевёрнутого маятника

Задача: имеется перевёрнутый маятник, к которому присоединены приспособления для управления. Добиться того, чтобы этот маятник приходил в вертикальное положение устойчиво и в нужный срок, формируя управляющие сигналы с помощью PID-регулятора.

**Вопрос:** какова передаточная функция PID-регулятора?

## Равновесие перевёрнутого маятника

Задача: имеется перевёрнутый маятник, к которому присоединены приспособления для управления. Добиться того, чтобы этот маятник приходил в вертикальное положение устойчиво и в нужный срок, формируя управляющие сигналы с помощью PID-регулятора.

**Вопрос:** какова передаточная функция PID-регулятора?

**Ответ:**  $W(s) = P + I/s + Ds$

**Вопрос:** можно ли реализовать в точности такой регулятор для непрерывного случая?

## Равновесие перевёрнутого маятника

Задача: имеется перевёрнутый маятник, к которому присоединены приспособления для управления. Добиться того, чтобы этот маятник приходил в вертикальное положение устойчиво и в нужный срок, формируя управляющие сигналы с помощью PID-регулятора.

**Вопрос:** какова передаточная функция PID-регулятора?

**Ответ:**  $W(s) = P + I/s + Ds$

**Вопрос:** можно ли реализовать в точности такой регулятор для непрерывного случая?

**Ответ:** нет.

СТ

Нечёткое управление

# Нечёткое управление

Понятие нечёткой величины

Фаззификация

Нечёткая логика

Дефаззификация

Пример

Выводы

## Достоинства и недостатки использованного подхода

Описание управляемых и управляющих подсистем линейными дифференциальными уравнениями имеет как достоинства, так и недостатки:

- ➕ описание полностью формально, поддаётся точному анализу;
- ➕ методы решения линейных дифференциальных уравнений (в т.ч. численные) хорошо развиты;
- ➖ все реальные более-менее интересные системы не являются линейными, т.е. все получаемые решения принципиально приближённые;
- ➖ описание часто недостаточно наглядно (например, передаточная функция) и плохо интерпретируется (например, переменные состояния), то есть системы управления сложно отлаживать.

## Можно ли описывать системы иначе?

Часто словесные пояснения оказываются понятнее и полезнее, чем дифференциальные уравнения.

Пример: чтобы объяснить работу круиз-контроля (системы для поддержания постоянной скорости движения), можно сказать: «Если скорость слишком мала, система её увеличивает; если скорость слишком велика, уменьшает; иначе система ничего не делает», а можно записать дифференциальное уравнение / передаточную функцию системы управления / уравнения состояния.

При этом словесное описание в таком виде недостаточно детально, чтобы сделать по нему какую-либо систему управления (что такое «слишком малая скорость»? Насколько быстро её следует изменять?).

**Нечёткая логика (fuzzy logic)<sup>1</sup>** — подход, позволяющий превращать такие словесные описания в системы управления путём придания формального значения использованным оценочным суждениям.

---

<sup>1</sup>Lotfi A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics, 1973; 3: 28–44.

## Формализация неформальных понятий

«Если скорость слишком мала, система её увеличивает; если скорость слишком велика, уменьшает; иначе система ничего не делает»

По мнению говорящего, разница реальной и желаемой скорости  $\Delta v$  может быть «слишком малой», «слишком большой» и «приемлемой». Если попытаться уточнить, что именно он имеет в виду, то можно получить, например, такое описание: «разница больше 10 км/ч велика, разница меньше 3 км/ч приемлема, в промежутке между 3 и 10 точно сказать нельзя». Попытаемся изобразить эти отрезки графически:





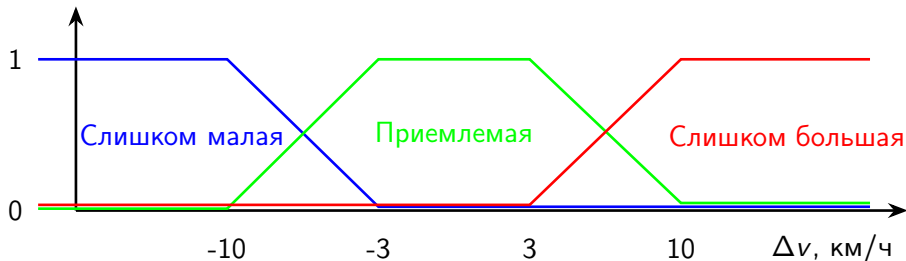
## Формализация неформальных понятий (2)

Можно предположить, что если некая скорость слишком большая, то она не может быть ни приемлемой, ни слишком малой, то есть эти варианты описания переменной друг друга исключают. Кроме того, разница между +3 и +10, очевидно, не является слишком малой, а между -10 и -3 — слишком большой. Попробуем показать это, добавив к изображению отрезки тех же цветов, но близкие к нулю:



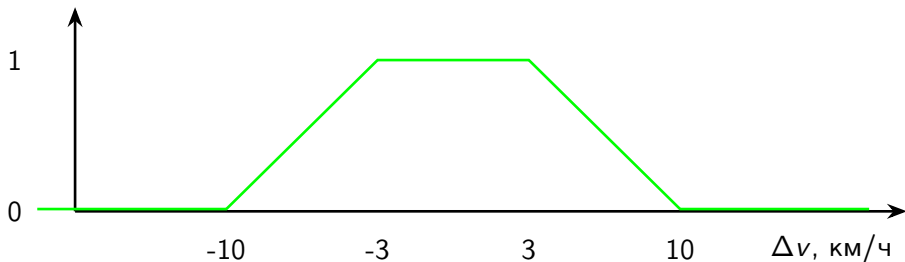
## Формализация неформальных понятий (3)

Если теперь дополнить проведённые линии до непрерывных, как-нибудь соединив их в областях неопределённости (например, прямыми), то получим графики трёх функций от  $\Delta v$ , каждая из которых описывает одно из понятий. Такие функции называются **функциями принадлежности**.



## Функция принадлежности

Функция принадлежности (membership function) величины  $x$  ко множеству  $Y$  — функция, которая для каждого  $x$  равна степени уверенности в том, что этот  $x$  принадлежит ко множеству  $Y$  (или, что то же самое, достоверности того, что  $x \in Y$ ). Эта степень может изменяться от 0 ( $x$  точно не принадлежит  $Y$ ) до 1 ( $x$  точно принадлежит  $Y$ ). Например, ниже изображена функция принадлежности величины  $\Delta v$  к множеству «приемлемых» разниц скорости:



# Нечёткость

Нечёткое множество (fuzzy set) — такое множество, функция принадлежности к которому способна принимать любые величины в диапазоне  $[0, 1]$ .

В нашем примере все три множества разниц скоростей являются нечёткими.

Обычные множества можно считать нечёткими, в которых принадлежность может принимать только значения 0 или 1. У таких — строгих, или чётких (crisp) множеств — функцию принадлежности называют обычно характеристической или индикаторной функцией.

## Физический смысл нечёткости

**Вопрос:** имеет ли нечёткость отношение к вероятности? Можно ли сказать, что, например, при  $\Delta v = 6.5$  вероятность того, что скорость приемлема, 0.5?

## Физический смысл нечёткости

**Вопрос:** имеет ли нечёткость отношение к вероятности? Можно ли сказать, что, например, при  $\Delta v = 6.5$  вероятность того, что скорость приемлема, 0.5?

**Ответ:** нет. Мы не имеем дело со случайностью ни в каких проявлениях (мы не ошиблись с измерением  $\Delta v$  и не ошиблись в оценке принадлежности).

**Вопрос:** тогда в чём причина нечёткости?

## Физический смысл нечёткости

**Вопрос:** имеет ли нечёткость отношение к вероятности? Можно ли сказать, что, например, при  $\Delta v = 6.5$  вероятность того, что скорость приемлема, 0.5?

**Ответ:** нет. Мы не имеем дело со случайностью ни в каких проявлениях (мы не ошиблись с измерением  $\Delta v$  и не ошиблись в оценке принадлежности).

**Вопрос:** тогда в чём причина нечёткости?

**Ответ:** в неоднозначности естественного языка. Мы принципиально не можем сопоставить всем его выражениям чёткие множества, поэтому приходится обходиться нечёткими.

Понятия нечёткости и случайности ортогональны, т.е. нечёткие величины могут как быть случайными, так и не быть. В нашем случае они будут детерминированы.

## Лингвистические переменные

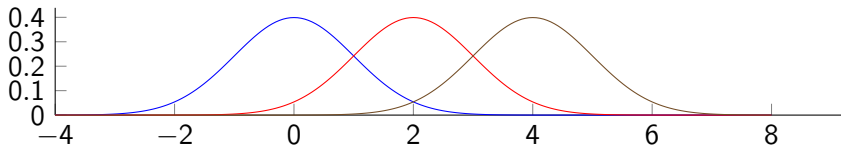
В нашем примере мы превратили непрерывную величину в три **лингвистические переменные**, каждая из которых имеет конкретное, понятное человеку значение. Так как они являются нечёткими множествами, то для любого значения  $\Delta v$  можно вычислить принадлежность к каждому из них.

Количество создаваемых лингвистических переменных выбирается разработчиком системы так, чтобы каждая из них была интерпретируема, т.е. имела понятный в условиях задачи физический смысл. При необходимости можно было бы создать для  $\Delta v$ , например, две переменные («скорость выше нужной» и «скорость ниже нужной») или пять («приемлемая», «несколько выше нужной», «намного выше нужной», «несколько ниже нужной», «намного ниже нужной»).



## Вид функций принадлежности

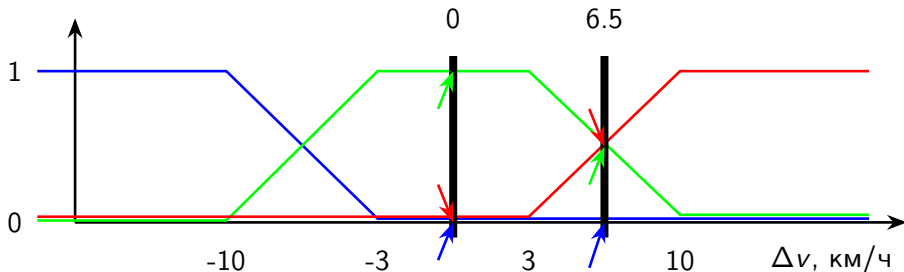
Функции принадлежности каждой лингвистической переменной выбираются на основе экспертных мнений или по статистическим признакам. Конкретный вид этих функций может быть весьма различным; часто используются линейные приближения (как в примере), гауссианы, логистические кривые.



Принадлежности к разным лингвистическим переменным не исключают друг друга (т.е. это нормально, когда функции принадлежности сразу к нескольким переменным равны 1); допустимо также отсутствие принадлежности некоего значения к любой из них.

# Фаззификация

Фаззификация — превращение непрерывного значения входного параметра в набор степеней принадлежности к лингвистическим переменным. Например, для  $\Delta v = 6.5$  и 0:



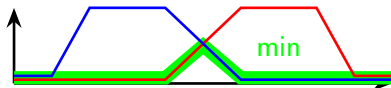
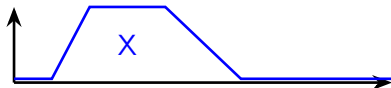
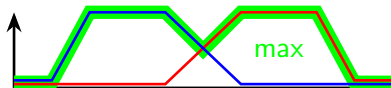
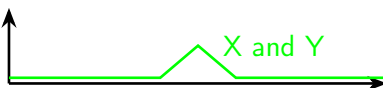
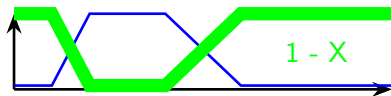
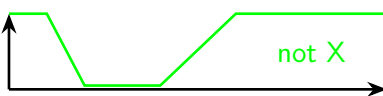
При  $\Delta v = 0$  степени принадлежности: «приемлемая»=1, остальные 0.  
При  $\Delta v = 6.5$  «слишком малая»=0, остальные=0.5.

## Нечёткие утверждения

Каждую лингвистическую переменную можно рассматривать как утверждение («текущая  $\Delta v$  слишком велика»), следовательно, можно строить логические выражения с лингвистическими переменными («текущая  $\Delta v$  слишком велика ИЛИ приемлема», «НЕВЕРНО, что текущая  $\Delta v$  приемлема» и т.п.).

На основе функций принадлежности компонентов логического выражения можно построить функцию принадлежности выражения. Для этого над функциями принадлежности компонентов выполняют специально подобранные арифметические операции, результаты которых воспроизводят характерные свойства логических операций. Часто применяются, например, такие соответствия: « $X$  или  $Y$ » соответствует  $\max(X, Y)$ , « $X$  и  $Y$ » соответствует  $\min(X, Y)$ , «не  $X$ » соответствует  $1 - X$ .

# Арифметика нечёткой логики

 $\Rightarrow$  $\Rightarrow$  $\Rightarrow$ 

## Арифметика для нескольких параметров

Рассмотренные выражения состояли из лингвистических переменных  $X$  и  $Y$ , построенных на одном и том же непрерывном параметре (например,  $\Delta v$ ). На практике возможно сочетание нескольких непрерывных параметров. Например, в выражении «скорость слишком велика И педаль газа нажата сильно» первая лингвистическая переменная построена на  $\Delta v$ , вторая — на другом входном параметре, силе нажатия на педаль газа  $P$ . Тогда результатом арифметической операции будет функция не одного, а нескольких параметров (в рассмотренном выражении — двух,  $\Delta v$  и  $P$ ), рассчитываемая по тем же правилам.

Например, если  $X$  = «скорость слишком велика», а  $Y$  = «педаль газа нажата сильно», причём функции принадлежности к  $X$  и  $Y$  — соответственно  $f_X(\Delta v)$  и  $f_Y(P)$ , то функция принадлежности к  $X$  and  $Y$  («скорость слишком велика И педаль газа нажата сильно») будет равна  $f(\Delta v, P) = \min(f_X(\Delta v), f_Y(P))$ .

## Логический вывод в нечёткой системе управления

Соотношения между входными и выходными лингвистическими переменными выражаются в виде правил в форме «ЕСЛИ верно условие ТО верно заключение», где условие — логическое выражение от входных лингвистических переменных регулятора, заключение — выходная лингвистическая переменная.

Например, в выражении «ЕСЛИ скорость слишком мала, ТО следует её увеличить» степень достоверности выходной лингвистической переменной «увеличение скорости» будет равна степени достоверности лингвистической переменной «скорость слишком мала» при текущих входных параметрах. Иначе говоря, достоверность заключения равна достоверности условия.

## Вычисление выходных параметров

Как только достоверности всех выходных лингвистических переменных по всем имеющимся правилам найдены, необходимо получить по ним конкретные (crisp) значения выходных параметров, то есть выполнить дефаззификацию. Единственно верного подхода к этой задаче нет, но очень часто она решается в три стадии (т.н. алгоритм Мамдани<sup>2</sup>).

1. Разрешение противоречий. Несколько разных правил могут определять достоверность одной и той же выходной лингвистической переменной. Полученные по ним достоверности могут отличаться, поэтому необходим механизм разрешения противоречий, т.е. метод вычисления достоверности по набору её оценок, полученных от разных правил. Могут применяться различные подходы (в том числе в рамках одной системы); часто, например, берут максимальную, минимальную из достоверностей или же их среднее значение. Можно избежать этого шага, если определять каждую выходную лингвистическую переменную строго по одному правилу.

---

<sup>2</sup>Mamdani, Ebrahim H. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers. 1974. 121 (12): 1585–1588

## Вычисление выходных параметров (2)

2. Получение взвешенной комбинации всех лингвистических переменных одного выходного параметра. Каждая из функций принадлежности выходной лингвистической переменной отсекается по её вычисленной степени достоверности (см. примеры отсечения ниже), после чего результаты отсечения обобщаются логической операцией ИЛИ (т.е. вычисляется их максимум). Цель данного этапа — получить из достоверностей отдельных лингвистических переменных общее распределение достоверности выходного параметра (функцию  $F$  от выходного параметра  $y$ ).

3. Вычисление итогового результата  $Y$  как «центра масс» значения полученной на этапе 2 функции общего распределения достоверности  $F$ , т.е.

$$Y = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} yF(y)dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} F(y)dy}$$



## Пример

Пусть в нечёткой системе управления 3 правила:

«Если скорость слишком мала, то увеличить скорость»

«Если скорость слишком велика, то уменьшить скорость»

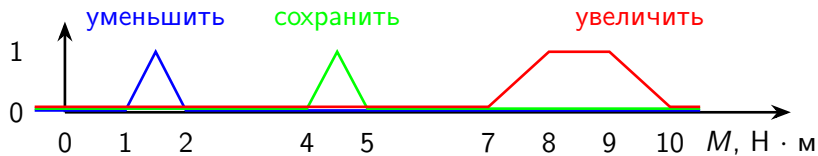
«Если скорость приемлема, то сохранить скорость»

Рассмотрим, как и ранее, ситуации с  $\Delta v = 0$  и 6.5. Как показано выше, по функциям принадлежности входных переменных можно получить достоверности каждой из лингвистических переменных: для  $\Delta v = 0$  достоверность «приемлемой» скорости 1, остальные 0; для  $\Delta v = 6.5$  достоверность «слишком малой» скорости 0, остальные 0.5.

Из правил получим, что для  $\Delta v = 0$  достоверность переменной «сохранить скорость» 1, остальных 0; для 6.5 достоверности переменных «сохранить скорость» и «увеличить скорость» равны 0.5, а «уменьшить скорость» 0.

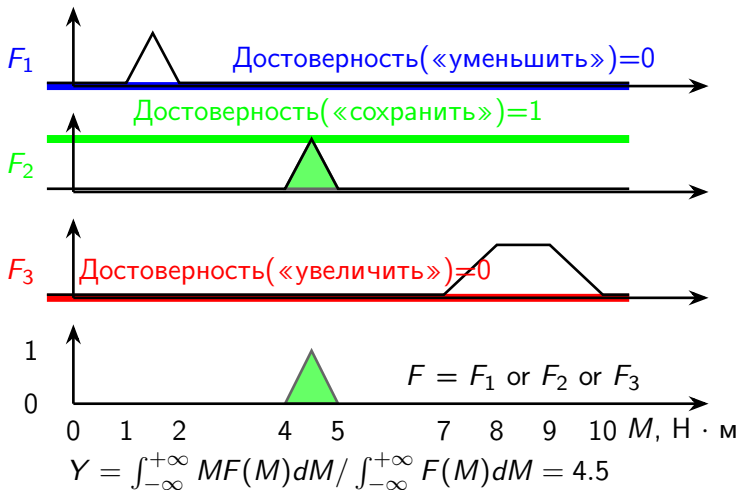
## Пример (2)

Из правил видно, что в системе управления три выходные лингвистические переменные: «увеличить скорость», «уменьшить скорость» и «сохранить скорость». Пусть их функции достоверности в зависимости от желаемого дополнительного момента силы воздействия на педаль газа  $M$  имеют вид:



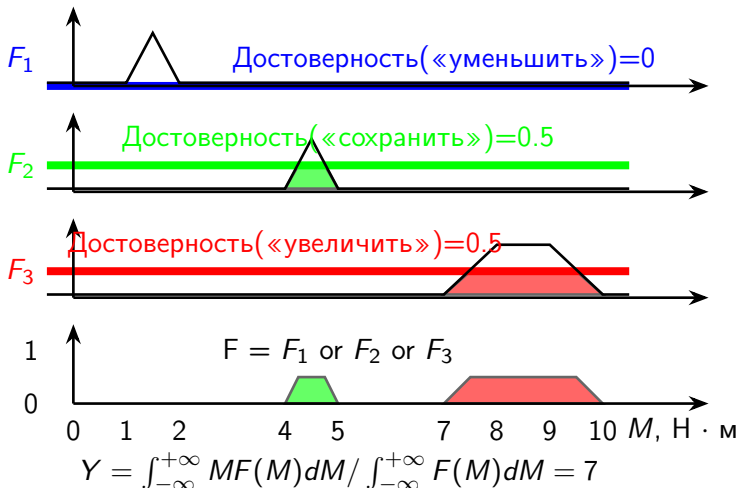
## Пример (3)

Для случая  $\Delta v = 0$  отсечём функции принадлежности по уровням, соответствующим достоверностям, скомбинируем их функцией ИЛИ и вычислим результат — центр масс полученной комбинации  $4.5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ :



# Пример (4)

Для случая  $\Delta v = 6.5$  сделаем то же самое, получим  $7 \text{ Н} \cdot \text{м}$ :



## Выводы: как задать регулятор

Последовательность действий при создании нечёткого регулятора:

- 1 для каждого входного и выходного параметра определить лингвистические переменные;
- 2 составить исчерпывающие правила, определяющие зависимость выходных лингвистических переменных от входных;
- 3 для каждой лингвистической переменной задать функцию принадлежности.

При этом не существует способа точно определить наилучшее число лингвистических переменных, а также оптимальные функции принадлежности; главным образом они подбираются по опыту работы с аналогичными решениями и результатам экспериментов.

## Выводы: как работает регулятор

- 1 каждый входной параметр преобразуется в достоверности его лингвистических переменных, т.е. фаззифицируется;
- 2 из достоверностей входных лингвистических переменных по правилам вычисляются достоверности выходных лингвистических переменных;
- 3 если какие-то выходные лингвистические переменные заданы более чем одним правилом, устраняются противоречия между ними;
- 4 для каждого выходного параметра вычисляется общее распределение достоверности его значений;
- 5 значения выходных параметров вычисляются как средние взвешенных полученных распределений.

## Дополнительные замечания

Видно, что выход регулятора полностью определяется входом, т.е. нечёткий регулятор в таком виде не имеет памяти. Можно искусственно ввести память, если подавать некоторые выходные параметры на вход.

Видно, что можно сделать регулятор с произвольным числом входных и выходных параметров, работающий точно по тем же алгоритмам.

Видно, что регуляторы этого типа являются нелинейными, поэтому записать их передаточные функции в общем случае невозможно.

Известны и другие подходы к дефаззификации, кроме алгоритма Мамдани — алгоритмы Сугено, Цукамото, Ларсена.