



2012

Opgaven



Hoofdsponsor



Overige sponsoren

Radboud Universiteit Nijmegen



UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM



KNAW



Inhoudsopgave

1.	Grappige functie	4
2.	Droom van de Calculusstudent	6
3.	Deelbare determinanten	8
4.	Machtig limiet	10
5.	Gelijkvormig verdelen	12
6.	Symmetrie in de asymmetrische simpele stochastische wandeling	14
7.	Recursieve polynomen	16
8.	Puzzelen	18
9.	Werken modulo eindig	20
10.	Enige som	22
11.	Fibonacci ontmoet Fermat	23
12.	Priempolynoom	24

Colofon

Dit opgavenboekje is een uitgave van de LIMO-commissie 2012.

e-mail: limo1112@a-eskwadraat.nl

internet: www.limo.a-eskwadraat.nl

Regels en tips

Tijdens de wedstrijd gelden de volgende **regels**:

- Maak iedere opgave op een apart vel en voorzie deze van teamnaam en opgavenummer. Verzamel het werk per opgave in het daarvoor bestemde mapje.
- Hulpmiddelen zoals boeken, grafische rekenmachines, mobiele telefoons en laptops zijn niet toegestaan. Uiteraard mag er alleen gecommuniceerd worden met teamgenoten en met de organisatie.
- Voor drinken wordt tijdens de wedstrijd gezorgd. Er komt regelmatig iemand langs om vragen aan te kunnen stellen.

Tips die je kunnen helpen tijdens de wedstrijd:

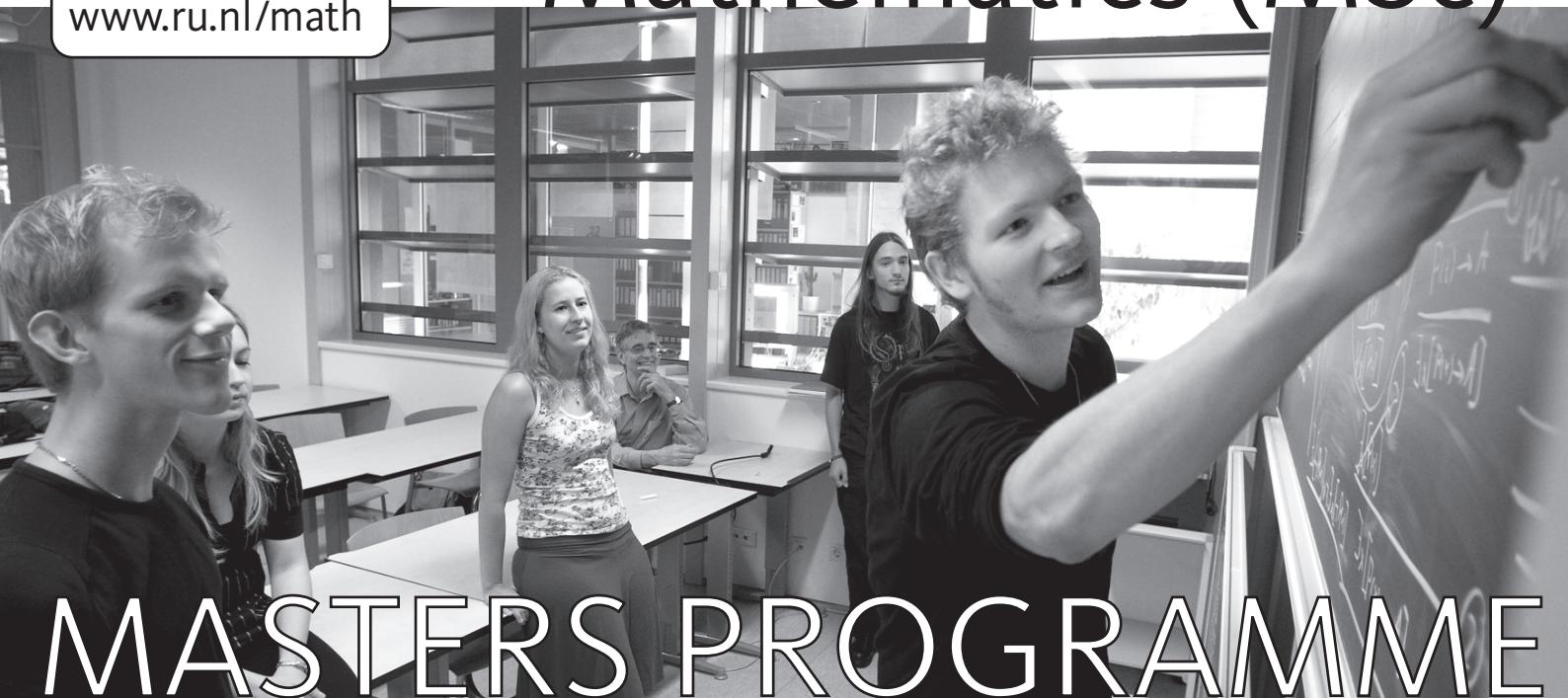
- **Notatie.** Bij diverse opgaven is een definitie gegeven in een voetnoot. Verder wordt met \mathbb{N} de verzameling van strikt positieve gehele getallen bedoeld, dat wil zeggen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- **Volgorde van moeilijkheid.** We hebben getracht de opgaven op volgorde van moeilijkheid te sorteren. Dat wil zeggen, we denken dat er voor de eerste opgaven gemiddeld meer punten zullen worden gehaald dan voor de latere opgaven. Besteed dus gemiddeld meer tijd aan opgaven met lagere nummers.
- **Lees goed wat er in de opgave staat.** Als je te snel begint, kun je belangrijke informatie over het hoofd zien. Soms staat in de vraagstelling een (verstopte) hint die aangeeft wat je zou kunnen doen. Als je vastloopt, kun je ook besluiten de opgave nog eens goed door te lezen. Zorg ook dat je alle gegeven informatie gebruikt die in de opgave staat en vooral slechts de informatie die gegeven is.
- **Wees een team.** Verdeel de opgaven, zodat je geen dubbel werk doet, en vraag elkaar om hulp als je ergens niet uit komt. Bespreek ook vooraf waar ieders kwaliteiten liggen. Bekijk tijdens de wedstrijd elkaars werk. Vaak vallen er nog foutjes uit te halen.
- **Sprokkel puntjes.** Als je er niet uit komt, schrijf dan op wat je wel hebt bewezen dat relevant kan zijn voor het bewijzen van de betreffende opgave. Als je op de goede weg zat, kun je daar vaak nog deelscores voor krijgen. Sowieso blijkt uit resultaten van voorgaande jaren dat niet vaak voor een opgave alle punten worden gescoord. Als je niet uit een deelopgave komt, mag je het resultaat dat daarin bewezen moet worden, wel gebruiken om de volgende deelopgave op te lossen.
- **Blijf niet vastzitten in verkeerde gedachten.** Het is vaak verstandig een probleem vanuit een ander gezichtspunt te bekijken. Vaak helpt het gegeven termen om te schrijven of gegevens te manipuleren. Als je weinig vooruitgang boekt kun je ook aan een andere opgave gaan werken en iemand anders naar jouw opgave laten kijken.
- **Vind een patroon.** Als je bijvoorbeeld iets moet bewijzen voor alle $n \in \mathbb{N}$, probeer dan kleine gevallen: kijk wat er gebeurt voor $n = 1$ of $n = 2$. Ontdek een patroon en bewijs dat dit patroon doorzet bij grotere getallen.
- **Houd het gezellig.** Het is niet zeker of je er goed van gaat presteren, maar op deze manier heb je in elk geval een leuke dag.

1. Grappige functie

L.D. Molag, Universiteit Utrecht

We noteren met $a_1a_2\cdots a_m \in \mathbb{N}$ een decimaal getal (dus $a_1, a_2, \dots, a_m \in \{0, 1, \dots, 9\}$ met $a_1 \neq 0$). Bijvoorbeeld, voor 215 geldt $(a_1, a_2, a_3) = (2, 1, 5)$. Met $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ noteren we de verschillende cijfers die voorkomen onder a_1, a_2, \dots, a_m . De functie $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ wordt nu gedefinieerd door het voorschrift $T(a_1a_2\cdots a_m) = c_1b_1c_2b_2\cdots c_nb_n$, hier is c_i gelijk aan het aantal keer dat b_i voorkomt onder a_1, a_2, \dots, a_m . Bijvoorbeeld, $T(4212) = 112214$ en $T(22) = 22$. Het getal 22 heeft dus de eigenschap dat het op zichzelf wordt afgebeeld door T .

- (a) Toon aan dat er nog een getal bestaat met deze eigenschap.
- (b) Toon aan dat elk getal ongelijk aan 22 dat deze eigenschap heeft het cijfer 1 bevat.



MASTERS PROGRAMME

The department

The mathematics department currently has 17 staff members and a fluctuating population of about 20 PhD students and postdocs. This relatively small size has considerable advantages for students. You will not drown in a large student pool, and contact with staff and fellow students is pleasant and very easy to make.

We take a highly personal approach!

The combination of local courses and lectures offered by the national Dutch Master Program in Mathematics guarantees a broad and high-level range of topics to choose from.

Career prospects

Practically all of our graduates find employment immediately after graduating, in a very wide range of jobs including business, academia, government and ICT.

Research topics

Our Master's programme is closely related to the research carried out in the Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics (IMAPP), and in addition there are close research ties with the institute for Computing and Information Sciences (iCIS) and the Donders Centre for Neuroscience (DCN) at the Radboud University.

Our research is embedded in the national mathematics clusters DIAMANT (websites.math.leidenuniv.nl/diamant/), GQT (www.gqt.nl) and STAR (www.eurandom.tue.nl/STAR/).

As is often the case the research topics are linked to individuals. We invite you to look at www.ru.nl/math for more information.

You can choose from the following specializations:

Algebra and Logic

Algebraic and differential topology, algebraic logic, computer algebra in its many forms, complexity theory, affine algebraic geometry, mathematical crystallography. Furthermore, in collaboration with iCIS we offer an exciting interdisciplinary programme in the mathematical foundations of computer science.

Mathematical Physics

Representation theory, symplectic geometry, integrable systems, special functions, topos theory, noncommutative geometry, mathematical foundations of quantum theory, quantum probability, quantum computing, quantum field theory, quantum groups.

Applied Stochastics

Interacting stochastic systems, i.e. systems consisting of a large number of interacting and stochastically evolving components, with applications to statistical physics (gases and liquids), biology (population dynamics) and neuroscience (self-organized criticality in brain activity, random graph theory, cortical networks).

Personal tutor for a tailor-made programme

Our Master's programme offers you considerable freedom to follow your own interests. At the beginning of the two-year programme, you choose your area of specialization and a personal tutor within that area, with whom you decide what your precise research area and package of courses at both the local and the national level will be. In the second year, you spend most of your time on your MSc dissertation in the research area of your choice. In short, we offer you a tailor-made programme.

FOR MORE SPECIFIC INFORMATION
contact Bernd Souvignier: souvi@math.ru.nl

Mathematics (MSc)

2. Droom van de Calculusstudent

F.J. van de Bult, Technische Universiteit Delft

In deze opgave werken we met functies $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ die beide minstens één keer continu differentieerbaar zijn. Voor de gemiddelde calculusstudent gelden soms heel simpele rekenregels, maar de werkelijkheid is vaak lastiger. Wij gaan verkennen wanneer deze regels toch gelden.

- (a) Vind een niet-triviale oplossing van

$$(f + g)^2 = f^2 + g^2. \quad (2.1)$$

De triviale oplossingen zijn die oplossingen waar f , dan wel g , constant 0 zijn.

- (b) Laat zien dat als (2.1) geldig is, dat dan ook

$$(fg)' = f'g' \quad (2.2)$$

geldt.

- (c) Vind niet-triviale functies f en g die voldoen aan zowel (2.2) als aan

$$\int fg = \int f \int g. \quad (2.3)$$

Hier moet deze laatste vergelijking opgevat worden als “Een primitieve van f keer een primitieve van g is gelijk aan een primitieve van fg ”.

- (d) Bestaan er functies f en g die aan zowel (2.2) als (2.3) voldoen maar niet aan (2.1)?



Probleem:

Een getal is een tweemacht wanneer het kan worden geschreven als 2^k met k een geheel getal ≥ 0 .

Een getal is een reekssom als het de som is van een reeks van minimaal 2 opeenvolgende positieve gehele getallen, bijvoorbeeld $15 = 4 + 5 + 6$.

Bewijs dat alle positieve gehele getallen of een tweemacht zijn, of een reekssom, maar nooit beide.

Stuur je bewijs naar wiskunde@transtrend.com

“Bij Transtrend ontwikkelen vindingrijke bëta's systematische handelsstrategieën waarmee het vermogen van professionele beleggers wordt beheerd.”

3. Deelbare determinanten

G.L.M. Cornelissen, Universiteit Utrecht

Stel B' is de verzameling van 2×2 matrices over de reële getallen gegeven door

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} : X, Y, Z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Schrijf een element $\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ van B' als $[X, Y, Z]$. Stel B is volgende deelverzameling van B' :

$$B = \{[X, Y, Z] \in B' : XZ \in \mathbb{R}^*\}.$$

Hierbij geldt $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- (a) Bewijs dat B een groep¹ is onder vermenigvuldiging van matrices, maar B' niet.
- (b) Beschrijf een ondergroep² van B die isomorf³ is met de additieve groep $(\mathbb{R}, +)$ van reële getallen, en een ondergroep die isomorf is met de multiplicatieve groep (\mathbb{R}^*, \cdot) van niet-nul reële getallen.

Definieer, voor $n \geq 0$, drie functies X_n, Y_n en Z_n op \mathbb{R}^3 , door

$$[X_n(X, Y, Z), Y_n(X, Y, Z), Z_n(X, Y, Z)] = [X, Y, Z]^n.$$

- (c) Bepaal een expliciete uitdrukking voor X_n, Y_n, Z_n als functie van X, Y, Z en n .

- (d) Bereken de Jacobiaan⁴ van de afbeelding

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (X, Y, Z) \rightarrow (X_n(X, Y, Z), Y_n(X, Y, Z), Z_n(X, Y, Z)),$$

die we noteren met $J_n(X, Y, Z)$ en zijn determinant $j_n(X, Y, Z) := \det J_n(X, Y, Z)$.

- (e) Bewijs dat als X, Y, Z gehele getallen zijn en als m een deler is van n , dan $j_m(X, Y, Z)$ een deler is van $j_n(X, Y, Z)$, op twee manieren:

- i. door de formule uit opgave 4 te gebruiken;
- ii. zonder berekening, door de kettingregel te gebruiken.

¹Een paar (G, \circ) , waarbij G een verzameling en \circ een operatie $G \times G \rightarrow G$ is, is een groep als aan de volgende drie eigenschappen is voldaan:

- $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$ voor alle $g_1, g_2, g_3 \in G$;
- er is een element $e \in G$ zodat $g \circ e = e \circ g = g$ voor alle $g \in G$;
- voor elke $g \in G$ bestaat er een element $g^{-1} \in G$ zodat $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

²Een ondergroep van (G, \circ) is een deelverzameling $\emptyset \neq H \subseteq G$ zodat voor alle $h_1, h_2 \in H$ geldt dat $h_1 \circ h_2^{-1} \in H$. Hieruit volgt dat (H, \circ) een groep is.

³Twee groepen (G, \circ) en (H, \bullet) heten isomorf als er een bijectieve functie $\phi: G \rightarrow H$ is zodat $\phi(g_1 \circ g_2) = \phi(g_1) \bullet \phi(g_2)$ voor alle $g_1, g_2 \in G$.

⁴De Jacobiaan van een differentieerbare afbeelding $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is de matrix

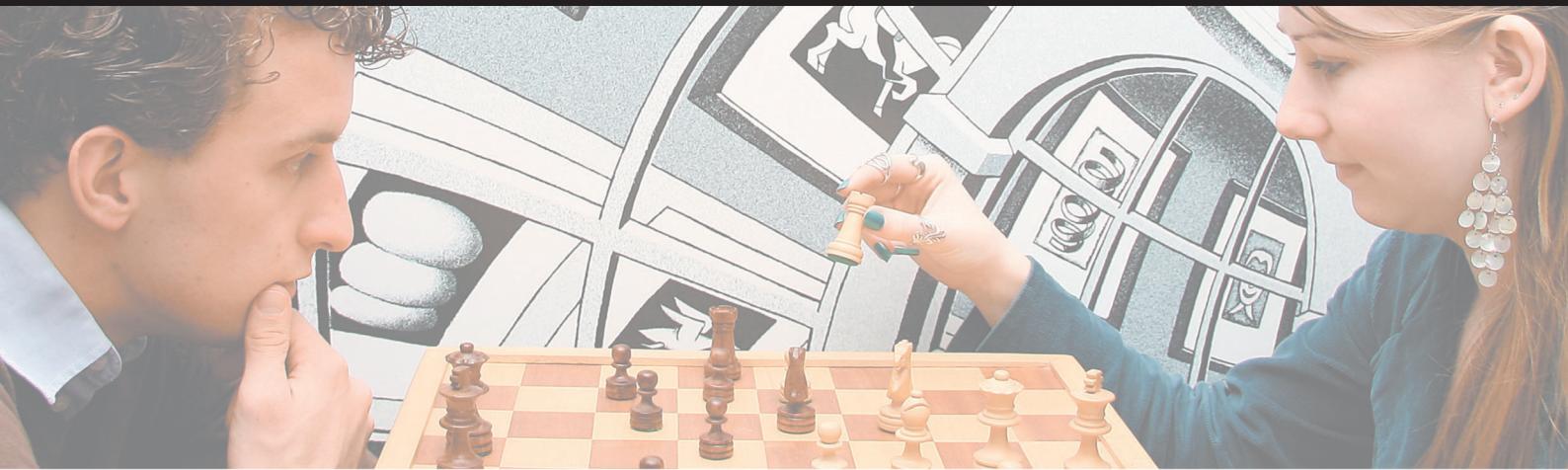
$$J_F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\vec{x}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\vec{x}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\vec{x}) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\vec{x}) & \frac{\partial F_3}{\partial x_3}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

voor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.



Faculty of Science

Knap staaltje denkwerk



Weet jij al wat je na je bachelor gaat doen? Wil jij...

- ...onderdeel uitmaken van een toonaangevende onderzoeksgroep?
- ...een internationaal netwerk opbouwen, bijvoorbeeld via het 'ALGANT study program'?
- ...kennis maken met verschillende disciplines?
- ...zelf bepalen welke vakken je volgt?

Dan is een wiskunde master aan Universiteit Leiden iets voor jou!

Of je ambitie nu ligt bij een multinational in een internationale omgeving of je verdieping zoekt in een PhD program, in Leiden bieden wij je de mogelijkheid je kennis verder te verdiepen in een persoonlijke en inspirerende omgeving. Kies je programma op maat binnen één van de tracks en na je master in Leiden ligt de wereld aan je voeten!

www.mastersinleiden.nl



Universiteit Leiden

4. Machtig limiet

W. Pranger, Universiteit Utrecht

Definieer voor $n \in \mathbb{N}$ de functie $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $a \mapsto (n!)^{n^a}$. Vind alle reële getallen a waarvoor de reeks $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ convergeert naar een waarde in \mathbb{R} en bepaal de limiet indien deze bestaat.



Aan de UvA maak je werk van je master

WWW.UVA.NL/SCIENCE-MASTERS

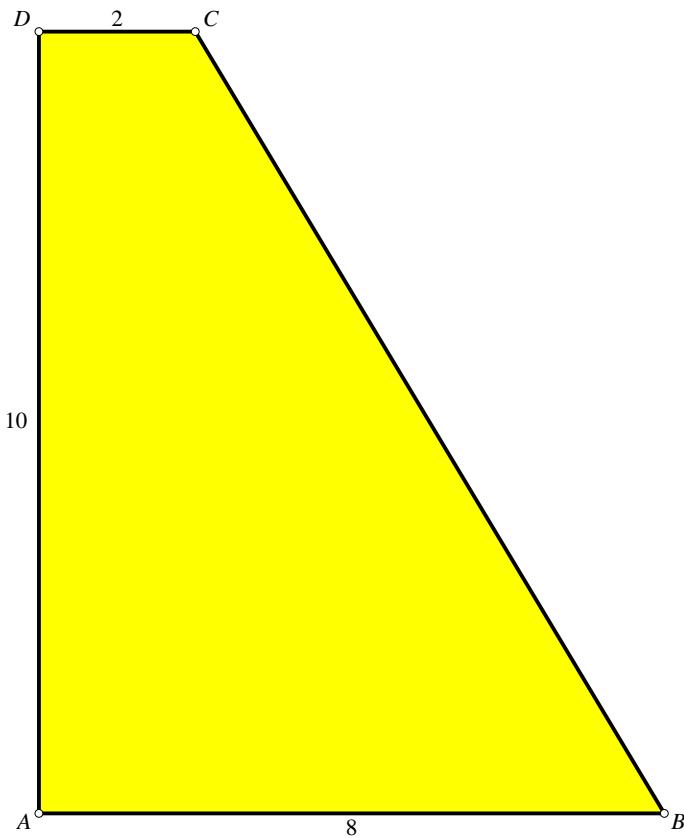
**Kies voor één van de wiskundige masters aan de
Universiteit van Amsterdam!**

- Mathematics
- Mathematical Physics
- Stochastics and Financial Mathematics

5. Gelijkvormig verdelen

T. Verhoeff, Technische Universiteit Eindhoven

Beschouw de vierhoek $ABCD$ met $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$, $|AB| = 8$, $|CD| = 2$ en $|AD| = 10$. Bepaal alle manieren om deze vierhoek met één rechte snede in twee onderling gelijkvormige veelhoeken te verdelen. Deze delen hoeven niet gelijkvormig te zijn met $ABCD$, alleen met elkaar. Geef voor elke opdeling duidelijk aan hoe de twee delen bij elkaar passen en wat de schaalfactor is. Bewijs uw antwoord.



Figuur 5.1: De gegeven situatie

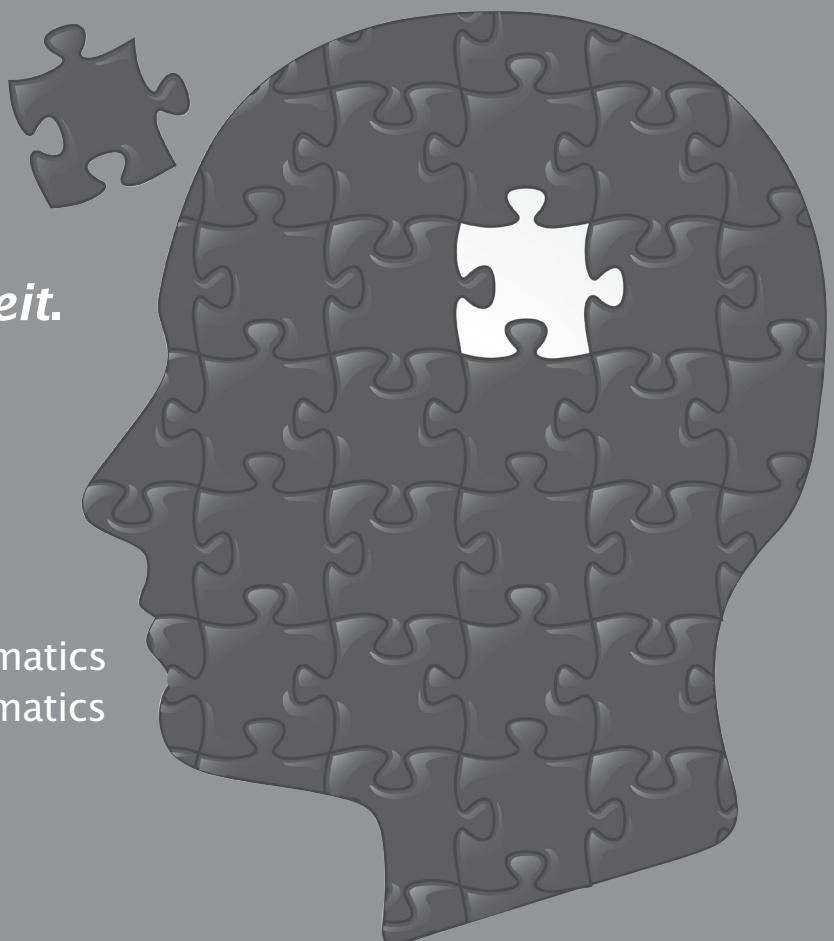
Wat ga jij na je bachelor doen?

Van *het analyseren*
van bedrijfsproblemen
tot *het zoeken naar*
patronen in hersenactiviteit.

Masteropleidingen aan de
Vrije Universiteit Amsterdam:

- Mathematics
- Business Mathematics and Informatics
- Stochastics and Financial Mathematics

www.vu.nl/masteropleidingen



6. Symmetrie in de asymmetrische simpele stochastische wandeling

M. Dekking, Technische Universiteit Delft

De asymmetrische simpele stochastische wandeling $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ maakt stappen van lengte 1 op het tweedimensionale rooster met gehele coördinaten. De start is in de oorsprong: $S_0 = (0, 0)$. De kansen op stappen in de vier windrichtingen $O = (1, 0), \dots, Z = (0, -1)$ noemen we p_O , p_N , p_W en p_Z . Neem aan dat alle vier deze kansen strikt positief zijn. Er geldt $p_O + p_N + p_W + p_Z = 1$. We schrijven $S_n = (S_n^{(1)}, S_n^{(2)})$.

Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ en alle natuurlijke getallen $a = 0, 1, \dots, n$ en alle gehele getallen b met $-n \leq b \leq n$ geldt¹

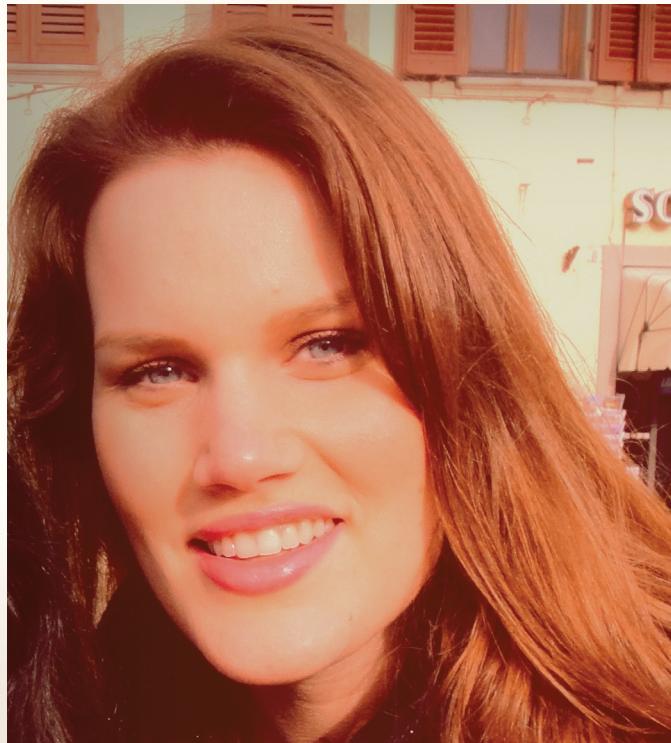
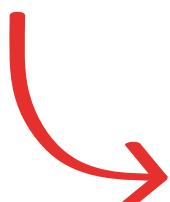
$$P[S_n^{(2)} = b | S_n^{(1)} = a] = P[S_n^{(2)} = b | S_n^{(1)} = -a].$$

Zoals wel vaker met voorwaardelijke kansen is dit enigszins tegen-intuïtief: als bijvoorbeeld $p_O = \frac{3}{10}, p_N = \frac{4}{10}, p_W = \frac{1}{10}$ en $p_Z = \frac{2}{10}$, dan drijft de wandelaar bijna zeker in noord-oostelijke richting weg, maar gegeven dat hij op de lijn $x = a$ zit is zijn y -positie net zo verdeeld als wanneer hij op de lijn $x = -a$ zou zitten.

¹Voor gebeurtenissen A en B met $P[B] \neq 0$ is de voorwaardelijke kans $P[A | B]$ de kans dat gebeurtenis A plaatsvindt gegeven dat gebeurtenis B plaatsvindt. Per definitie is $P[A | B]$ gelijk aan $\frac{P[A \text{ en } B]}{P[B]}$.

TALENT&PRO&MARLOES

Het is een mooi citaat waar we bij Talent&Pro oerrecht in geloven.
Jouw persoonlijke ontwikkeling staat centraal bij Talent&Pro. In de eerste jaren van je carrière wordt je door ons begeleid en we helpen je passies en talenten te ontdekken, zodat je gericht kunt werken aan jouw ambities.



"Ik zie T&P niet als mijn werkgever, maar als mijn partner. We werken voor elkaar."

Marloes Lodder
Actuarieel Professional
bij Talent&Pro sinds 2009

Talent&Pro?

Talent&Pro is al bijna vijftien jaar een toonaangevende financiële detacheerde in Nederland. Binnen onze sectoren Verzekeringen, Banken, Pensioenfondsen en Actuarieel werken meer dan 400 toptalenten en professionals voor gezichtsbepalende financiële opdrachtgevers. Toegewijde hbo'ers en wo'ers in vaste dienst, die onder de streep zichtbaar een verschil maken. Omdat ze verder denken. Meer doen.

Bancair
Verzekeringen
Actuarieel
Pensioen+Leven

Vind je het heerlijk om met je neus in de cijfers, formules en wiskundige berekeningen te zitten en ben jij een (bijna) afgestudeerd bêta-talent? Dan is het actuariële traject bij Talent&Pro echt iets voor jou! In het Actuarieel vakgebied pas je jouw wiskundig inzicht toe op vraagstukken in het bedrijfsleven. Talent&Pro biedt jou de mogelijkheid om de opleiding tot Actuarieel Rekenaar, Analist en Actuaris te volgen.

Gemiddeld werk je per jaar aan 2 verschillende opdrachten bij onze relaties in het verzekeringswezen, bij pensioenfondsen en actuarieel adviesbureaus. Daarnaast volg je vaardigheidstrainingen en krijg je persoonlijke coaching om je te ontwikkelen tot een zeer ervaren professional. Net zoals Marloes.

Interesse?
Ga naar www.talent-pro.com en solliciteer.



Bright people, smart results

7. Recursieve polynomen

B.E. van Dalen, Nederlandse Wiskunde Olympiade en Aloysius College Den Haag

(a) Bepaal alle $a \in \mathbb{Z}$ waarvoor er een polynoom $P(x)$ met gehele coëfficiënten bestaat dat voldoet aan:

- $P(0) = 1$;
- $P(n) = P(n - 1) + 2n - 1$ voor $n = 1, 2, 3, \dots, 99$;
- $P(100) = a$.

(b) Bepaal alle $b \in \mathbb{Z}$ waarvoor er een polynoom $Q(x)$ met gehele coëfficiënten bestaat dat voldoet aan:

- $Q(0) = 1$;
- $Q(m) = Q(m - 2) + 2m - 2$ voor $m = 2, 4, 6, \dots, 98$;
- $Q(100) = b$.



www.wiskunde.ugent.be

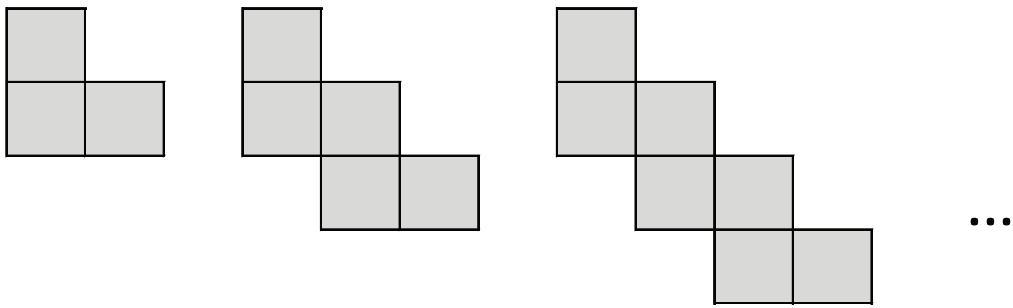
A vibrant, multi-colored word cloud centered around the words "patterns" and "connections". The words are arranged in a roughly circular pattern, with "patterns" at the top and "connections" at the bottom-left. Other prominent words include "logic", "order", "sense", "puzzles", "power", "fun", and "fundamental". The words are in various colors (blue, red, green, yellow, orange) and sizes, creating a dynamic and visually appealing composition.



8. Puzzelen

S. Boersma, Universiteit Utrecht

Voor welke $n \in \mathbb{N}$ kan een $n \times n$ -schaakbord precies worden bedekt met de volgende puzzelstukken:



Het betreft hier oneindig veel verschillende puzzelstukken die elk onbeperkt vaak mogen worden gebruikt. Ook mogen ze worden gedraaid en gespiegeld. Het i^{de} puzzelstuk is het stuk dat op een $(i + 1) \times (i + 1)$ -schaakbord precies een diagonaal en de vakjes direct onder die diagonaal kan bedekken. Puzzelstukken mogen elkaar niet overlappen.



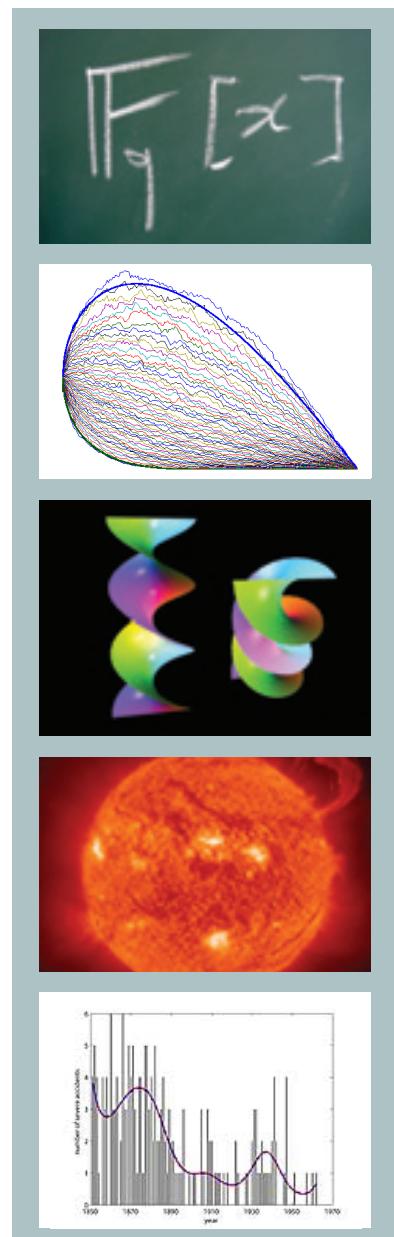
De KU Leuven, gesticht in 1425, is de oudste universiteit van de lage landen. Bijna 6.500 onderzoekers zijn er actief in wetenschappelijk onderzoek en onderwijs. Op 1 februari 2012 telde de KU Leuven in totaal 40.131 ingeschreven studenten. Van de ingeschreven studenten heeft ongeveer 84,5% de Belgische nationaliteit, terwijl 8% een andere EU-nationaliteit heeft en nog eens 7,5% van buiten de EU komt. Dit maakt van de gezellige provinciehoofdstad Leuven een bruisende studentenstad met een rijk sociocultureel aanbod.

Onderzoek aan het Departement Wiskunde

Het onderzoek aan het departement Wiskunde is georganiseerd op het niveau van de onderzoeksafdelingen:

- Afdeling Algebra: het onderzoek situeert zich in de algebraïsche meetkunde, getaltheorie, algebraïsche topologie en groepentheorie.
- Afdeling Analyse: in deze afdeling doet men onderzoek in de klassieke analyse (reële en complexe analyse) en in de functionaalanalyse.
- Afdeling Meetkunde: het onderzoek is gecentreerd rond differentiaalmeetkunde, in het bijzonder Riemannse en pseudo-Riemannse meetkunde en deelvariëteiten.
- Afdeling Plasma-astrofysica: het onderzoeksgebied van deze afdeling is de wiskunde van vloeistoffen en plasma's, het voornaamste studieobject is de zon. Dit onderzoek is gesitueerd in de toegepaste en computationele wiskunde.
- Afdeling Statistiek: deze afdeling is actief in de wiskundige statistiek, in het bijzonder de theorie van extreme waarden, robuuste statistiek en niet-parametrische methoden. Ook stochastische processen en financiële wiskunde komen aan bod. De afdeling is bovendien ook actief in toegepaste consultatie voor bedrijven.

Meer info op <http://wis.kuleuven.be>



9. Werken modulo eindig

K.P. Hart, Technische Universiteit Delft

We definiëren de relatie $<^*$ op de verzameling $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ van alle functies van \mathbb{N} naar \mathbb{N} door: $f <^* g$ als $f(n) < g(n)$ voor alle n , op eindig veel na, dat wil zeggen als $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \geq g(n)\}$ eindig is.

- (a) Toon aan: als \mathcal{F} een aftelbare¹ deelverzameling van $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ is dan is er een $g \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ zó dat $f <^* g$ voor alle $f \in \mathcal{F}$.
- (b) Laat $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ twee rijen functies in $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ zijn zó dat $f_n <^* f_{n+1} <^* g_{n+1} <^* g_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Toon aan dat er een functie $h \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ bestaat zó dat $f_n <^* h <^* g_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
- (c) In deze deelopgave mag je het keuzeaxioma² aannemen.

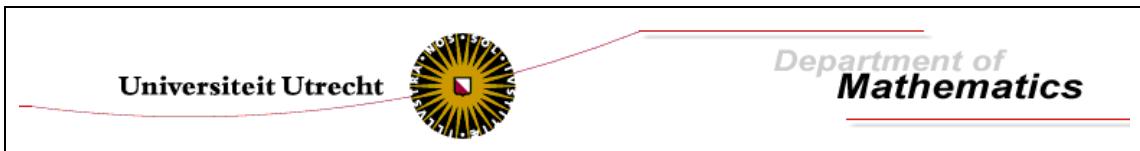
We definiëren twee oneindige kardinaalgetallen \mathfrak{d} en \mathfrak{d}^+ door

- \mathfrak{d} is de minimale kardinaliteit van een verzameling, \mathcal{D} , van functies met de eigenschap dat voor elke $f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ een $g \in \mathcal{D}$ bestaat met $f <^* g$.
- \mathfrak{d}^+ is de minimale kardinaliteit van een verzameling, \mathcal{D} , van functies met de eigenschap dat voor elke $f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ een $g \in \mathcal{D}$ bestaat met $f(n) < g(n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Toon aan dat $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^+$.

¹Een verzameling A heet aftelbaar als er een surjectieve functie $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ bestaat.

²Het keuzeaxioma zegt dat er voor elke surjectieve functie $f: A \rightarrow B$ een functie $\sigma: B \rightarrow A$ bestaat zodat $f \circ \sigma$ de identiteit is op B . Uit het keuzeaxioma volgt in het bijzonder dat voor elke twee verzamelingen A en B er een injectieve functie $A \rightarrow B$ is (notatie $|A| \leq |B|$) of een injectieve functie $B \rightarrow A$ is. Dit geeft gelegenheid om een maximum van twee kardinaalgetallen te definiëren. Bovendien volgt uit het keuzeaxioma dat voor elke twee oneindige verzamelingen A en B geldt $|\mathbb{N}| \leq |A|$ en $|A + B| = \max\{|A|, |B|\} = |A \times B|$.



Zeven goede redenen

Zeven goede redenen om Wiskunde te studeren in Utrecht:

1. Breedste pakket aan keuzevakken
2. Dubbele majors met Natuurkunde en Informatica
3. Major Wiskunde en toepassingen
4. Aansluiting op masters uit andere vakgebieden
5. Hoog aangeschreven wetenschappelijke staf
6. Kans op een promotieplaats na je masters
7. Geschiedenis van de Wiskunde

Meer informatie:

- www.uu.nl/bachelor
- www.uu.nl/master
- Studieadviseur Marian Brands m.m.brands@uu.nl
- Onderwijsmanager Thijs Ruijgrok m.ruijgrok@uu.nl

En succes met de LIMO 2012

10. Enige som

G.W.Q. Puite, Technische Universiteit Eindhoven en Hogeschool Utrecht

Vind alle reële getallen $\alpha > 0$ waarvoor geldt dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2012}{(n + \alpha)(16n + 2012)} = 1.$$

11. Fibonacci ontmoet Fermat

H.W. Lenstra, Universiteit Leiden

De rij f_0, f_1, \dots Fibonaccigetallen is gedefinieerd door $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{i+2} = f_i + f_{i+1}$ ($i \geq 0$). De rij F_0, F_1, \dots Fermatgetallen is gedefinieerd door $F_m = 2^{2^m} + 1$. Bepaal alle paren niet-negatieve gehele getallen n, m met $f_n = F_m$.

12. Priempolyloon

A. Smeets, KU Leuven

Aan elk priemgetal kunnen we een polynoom associëren door de cijfers van het priemgetal als coëfficiënten te nemen. Bijvoorbeeld: aan de priemgetallen 2, 37, 3041 en 65537 associëren we 2, $3X + 7$, $3X^3 + 4X + 1$ en $6X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 3X + 7$. Bewijs dat een dergelijk “priempolyloon” irreducibel¹ is in $\mathbb{Z}[X]$.

¹Een polynoom met gehele coëfficiënten heet irreducibel als het niet kan worden geschreven als een product van twee elementen van $\mathbb{Z}[X]$ die beide verschillen van 1 en -1 .

