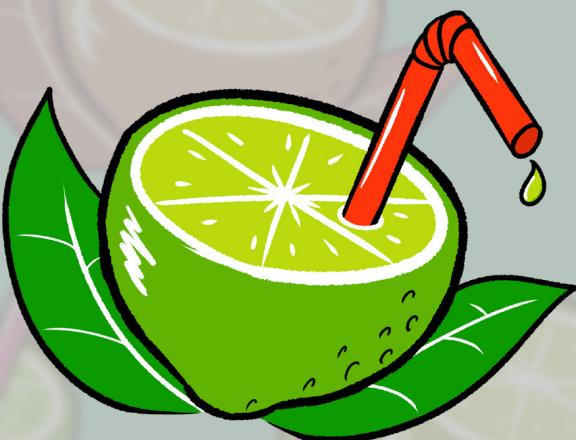


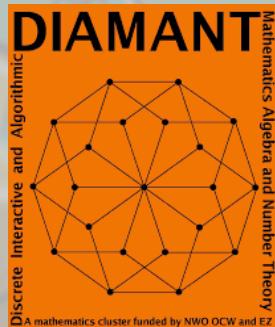
# LIMO 2022

## Opgavenboekje



FLOW ■ TRADERS

optiver



**ASML**

TU Delft

transtrend

UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM  
Korteweg - de Vries Instituut  
voor Wiskunde

UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM  
Faculteit der Natuurwetenschappen,  
Wiskunde en Informatica





natuurwetenschappelijke  
studievereniging amsterdam

Dit opgavenboekje is een uitgave van  
de **LIMO-commissie 2022:**

Jolein Rau, Casper Loman, Jim Wittebol,  
Siebe Verheijen, Constantijn Dekker, Pim  
Meulensteen, Alec van Duin en Matthijs  
Pool

*e-mail:* [limo@nsaweb.nl](mailto:limo@nsaweb.nl)

*website:* [limo2022.nsaweb.nl](http://limo2022.nsaweb.nl)

Opgaven: M. Staps, H. Smit, H. Lenstra,  
J. Zoethout, J. Winkel, L. Molag, S. Cambie,  
M. Daas, J. Konter, R. Bocklandt, W.  
Rienks, D. Gijswijt, A. Schrijver, H. de  
Boer

---

---

## Regels en tips

---

Tijdens de wedstrijd gelden de volgende **regels**:

- Maak iedere opgave op een apart vel en voorzie deze van teamnaam en opgavenummer. Nummer je pagina's (1/2, 2/2). Er zullen regelmatig mensen langskomen om jullie uitwerkingen op te halen. Geef ze z.s.m. mee, dan kunnen we beginnen met nakijken.
- Hulpmiddelen zoals boeken, grafische rekenmachines, mobiele telefoons en laptops zijn niet toegestaan. Niet-grafische rekenmachines mogen gebruikt worden. Uiteraard mag er alleen gecommuniceerd worden met teamgenoten en met de organisatie.
- Als jullie vragen over de wedstrijd/opgaven hebben, vul dan het formulier in en geef dit mee aan iemand van de organisatie. Jullie zullen schriftelijk antwoord ontvangen.

**Tips** die je kunnen helpen tijdens de wedstrijd:

- **Notatie.** Bij diverse opgaven is onderaan schuingedrukt de notatie en/of de terminologie toegelicht. Verder wordt met de natuurlijke getallen de verzameling  $\{1, 2, 3, \dots\}$  bedoeld, die we noteren met  $\mathbb{N}$ .
- **Volgorde van moeilijkheid.** We hebben getracht de opgaven op niveau te sorteren, d.w.z., we denken dat er voor de eerste opgaven gemiddeld meer punten zullen worden gehaald dan voor de latere opgaven.
- **Lees goed wat er in de opgave staat.** Als je te snel begint, kun je belangrijke informatie over het hoofd zien. Soms staat in de vraagstelling een (verstoppe) hint die aangeeft wat je zou kunnen doen. Als je vastloopt, kun je ook besluiten de opgave nog eens goed door te lezen. Zorg ook dat je alle gegeven informatie gebruikt die in de opgave staat en vooral slechts de informatie die gegeven is.
- **Blijf niet vastzitten in verkeerde gedachten.** Het is vaak verstandig een probleem vanuit een ander gezichtspunt te bekijken. Vaak helpt het gegeven termen om te schrijven of gegevens te manipuleren. Als je weinig vooruitgang boekt, kun je ook aan een andere opgave gaan werken en iemand anders naar jouw opgave laten kijken.
- **Vind een patroon.** Als je bijvoorbeeld iets moet bewijzen voor alle  $n \in \mathbb{N}$ , probeer dan kleine gevallen: kijk wat er gebeurt voor  $n = 1$  of  $n = 2$ . Ontdek een patroon en bewijs dat dit patroon doorzet bij grotere getallen.
- **Sprokkel puntjes.** Als je er niet uit komt, schrijf dan op wat je wel hebt bewezen. Dat kan relevant zijn voor het bewijzen van de betreffende opgave. Als je op de goede weg zat, kun je daar vaak nog deelscores voor krijgen. Sowieso blijkt uit resultaten van voorgaande jaren dat niet vaak voor een opgave alle punten worden gescoord. Als je niet uit een deelopgave komt, mag je het resultaat dat daarin bewezen moet worden wel gebruiken om de volgende deelopgave op te lossen.
- **Wees een team.** Verdeel de opgaven, zodat je geen dubbel werk doet, en vraag elkaar om hulp als je ergens niet uit komt. Bedenk waar ieders kwaliteiten liggen. Bekijk tijdens de wedstrijd elkaars werk; vaak vallen er nog foutjes uit te halen.
- **Houd het gezellig.** Het is niet zeker of je er goed van gaat presteren, maar op deze manier heb je in elk geval een leuke dag.

---

## Inhoudsopgave

---

1.	Verdubbelen is bijtellen	3
2.	De koe en de haas	4
3.	Geen hogere machten	6
4.	Creatief knippen	7
5.	Een wirwar van lijnen	9
6.	Niet-constante oplossingen van een constante differentiaalvergelijking	10
7.	Hadwiger in de andere richting	12
8.	Lekker grabbelen	13
9.	Een eigenaardig polynoom	15
10.	De flamingodans	16
11.	Een verassende ondergrens	17
12.	Meerderheid bepaalt	19
13.	Positieve inverses	20

---

**1. Verdubbelen is bijtellen**

*Ir. H. (Harold) de Boer  
Transtrend BV*

---

Bepaal het aantal natuurlijke getallen  $1 \leq n \leq 1000$  waarvoor geldt:

$$c(2n) = c(n) + 1,$$

waarbij  $c(n)$  is gedefinieerd als de som van de cijfers van het getal  $n$ .

---

## 2. Een prooi-roofdiermodel

*M. (Merlijn) Staps Msc. & Dr. H. (Harry) Smit  
Princeton University & MPIM Bonn*

---

Een koe en een haas bevinden zich elk in een hoekpunt van een regelmatige  $2n$ -hoek voor zekere  $n \geq 2$ . Elke minuut bewegen beide dieren naar een aangrenzend hoekpunt. De haas verandert hierbij nooit van richting. De koe verandert elke keer van richting met kans  $p > 0$  (onafhankelijk van eventuele vorige veranderingen van richting).

De beginposities en beginrichtingen van beide dieren worden willekeurig gekozen (elk hoekpunt met even grote kans en elke beginrichting met even grote kans), op zo'n manier dat er (aan beide kanten) een even aantal zijdes tussen de koe en de haas zit (dit aantal kan nul zijn). Het proces eindigt als de koe de haas vangt, dat wil zeggen, als ze zich op hetzelfde hoekpunt bevinden (dit kan meteen zijn). Je hoeft niet te bewijzen *dat* de koe de haas inderdaad altijd vangt, en je hoeft ook niet te bepalen *hoe* de koe de haas vangt. Dat weet je immers nooit.

- (a) Bepaal hoe lang het gemiddeld duurt voordat de koe de haas vangt.
- (b) Als de koe de haas zo snel mogelijk wil vangen, met welke kans  $p$  moet zij dan van richting veranderen?
- (c) Wat is groter: de kans dat de koe en de haas tijdens het proces dezelfde richting in bewegen (allebei tegen de klok in of allebei met de klok mee), of de kans dat de koe en de haas tijdens het proces een verschillende richting in bewegen?



UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM  
Master programma's Mathematics,  
Stochastics and Financial Mathematics

Houd het LIMO boekje vlak voor je ogen zodat je schielijk kijkt en beweeg het langzaam naar achteren. Zie jij nieuwe dieptes?



UvA Mathematics: Voor  
als je meer diepte zoekt

[uva.nl/msc-mathematics](http://uva.nl/msc-mathematics) of [uva.nl/msc-stochastics](http://uva.nl/msc-stochastics)

---

### 3. Geen hogere machten

*Prof. dr. H. W. (Hendrik) Lenstra  
Universiteit Leiden*

---

Stel  $a, n, m$  zijn positieve gehele getallen met  $a^n = 1 + nm$  en  $\text{ggd}(n, m) = 1$ . Bewijs  $n = 1$ .

---

#### 4. Creatief knippen

J. (Jetze) Zoethout Msc.  
Universiteit Utrecht

---

*Je bent op een knutselmiddag en je hebt een stuk papier voor je liggen (de vorm is niet noodzakelijk rechthoekig, maar wel convex). Het papier heeft de goede vorm, maar je hebt eigenlijk twee zulke stukken nodig. Daarom wil je uit je stuk papier twee kleinere stukken knippen met precies dezelfde vorm. In deze opgave onderzoeken we hoe groot je deze kleinere stukken kunt maken.*

Een deelverzameling  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  noemen we *geschikt* als  $X$  niet-leeg, open, begrensd en convex is. Voor een reëel getal  $r > 0$  noemen we een geschikte deelverzameling  $X \subseteq \mathbb{R}^2$   $r$ -kopieerbaar als er  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  bestaan, zodanig dat:

- $X_1 \subseteq X$  en  $X_2 \subseteq X$ ;
  - $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ ;
  - $X_1$  en  $X_2$  zijn beide gelijkvormig aan  $X$  met vergrotingsfactor  $r$ .
- (a) Bepaal de grootste  $r > 0$  waarvoor er een geschikte  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  bestaat die  $r$ -kopieerbaar is.
- (b) Bepaal de grootste  $r > 0$  zodat *elke* geschikte  $X \subseteq \mathbb{R}^2$   $r$ -kopieerbaar is.

We zeggen dat  $Y \subseteq \mathbb{R}^2$  *gelijkvormig is aan*  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  met vergrotingsfactor  $r > 0$  als er een bijectie  $f: X \rightarrow Y$  bestaat, zodanig dat  $d(f(x), f(x')) = r \cdot d(x, x')$  voor alle  $x, x' \in X$ . Hierbij staat  $d(-, -)$  voor de afstand tussen twee punten in  $\mathbb{R}^2$ .



# DO YOU THRIVE ON OUTSMARTING YOUR COMPETITION?

## GRADUATE TRADER & TRADING INTERN

We are looking for talented individuals with excellent mathematical and analytical skills combined with an interest in global financial markets. Our Traders manage and optimize our daily positions, formulate innovative trading strategies whilst also developing tools.

As a Summer Intern you will learn about our trading strategies, trading system and experience life as a Trader at Flow.

## GRADUATE SOFTWARE DEVELOPER PROGRAM

We prepared the Graduate Software Development program for ambitious graduates who like to be challenged every day. During the program, you will work in sprints and participate in stand-up meetings; at the same time, you will work together with your fellow graduate software engineers, and experience working with different Flow Traders development teams.

## EVENTS

We are also hosting several online events for you to get more familiar with Flow Traders! You can check them out at our events page on our website.

## Reach out to us at:

[careers.europe@flowtraders.com](mailto:careers.europe@flowtraders.com)  
[flowtraders.com/careers](http://flowtraders.com/careers)

Flow Traders is an international leading principal trading firm.



---

## 5. Een wirwar van lijnen

J. (Jeroen) Winkel Msc.  
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

---

Een *graaf*  $G$  bestaat uit een verzameling  $V$  van *knopen*, en een verzameling  $E \subseteq V^2$  van *zijden*. Hierbij nemen we aan dat  $(x, x) \notin E$  voor all  $x \in V$ , en als  $(x, y) \in E$ , ook  $(y, x) \in E$ . Als  $x$  en  $y$  knopen zijn, is een *pad* tussen  $x$  en  $y$  een rijte  $x_0, x_1, \dots, x_n \in V$ , met  $x_0 = x, x_n = y$  en  $(x_i, x_{i+1}) \in E$  voor  $0 \leq i \leq n - 1$ . Een graaf heet *samenhangend* als er een pad bestaat tussen elke twee knopen.

- (a) Bekijk de graaf met  $V = \mathbb{R}^2$  en  $E = \{((a, b), (c, d)) \in V^2 \mid (a - c)^2 + (b - d)^2 = 1\}$ . Is deze graaf samenhangend?
- (b) Bekijk de graaf  $V = \mathbb{Q}^2$  en  $E = \{((a, b), (c, d)) \in V^2 \mid (a - c)^2 + (b - d)^2 = 1\}$ . Is deze graaf samenhangend?

---

## 6. Niet-constante oplossingen van een constante differentiaalvergelijking

Dr. L. (Leslie) Molag  
Universität Bielefeld

---

Vind alle niet-constante tweemaal differentieerbare functies  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zodanig dat

$$f''(x) + 3f'(x)f(x) + f(x)^3$$

constant is.

*Hint: Probeer eerst het geval  $f''(x) + 3f'(x)f(x) + f(x)^3 = 0$ .*



## EVERY DAY IS YOUR CHANCE TO SOLVE THE SEEMINGLY IMPOSSIBLE.

If you thrive in an environment where you can constantly push your thinking further and faster, Optiver is the place to kickstart your career. We're a global market maker, which means we provide buy and sell prices for financial products in exchanges all over the world. The way in which we do that is where things get really interesting. It lies at the cutting-edge of technological and analytical possibility. Visit one of our company days and discover how your skills can take you on an incredible journey that realises your full potential.

[optiver.com/working-at-optiver](http://optiver.com/working-at-optiver)



---

## 7. Hadwiger in de andere richting

Dr. S. (Stijn) Cambie  
IBS Zuid-Korea

---

In deze vraag beschouwen we alleen samenhangende grafen. Een graaf  $H$  is een minor van  $G = (V, E)$  als we deze uit  $G$  kunnen verkrijgen door zijdes van  $G$  te verwijderen of samen te trekken. Een samentrekking van een zijde  $(u, v)$  wordt verkregen door  $u$  en  $v$  te vervangen door een enkele knoop die verbonden is met alle oorspronkelijke buren van  $u$  en  $v$ . De afstand tussen twee knopen  $u, v$  in een graaf is de lengte van het kortste pad tussen  $u$  en  $v$ . Dit duiden we aan met  $d(u, v)$ . De diameter van een graaf is dan gedefinieerd als  $\max_{u, v \in V} d(u, v)$  (ook wel het langste kortste pad). Verder is de graad van een knoop  $u$  gedefinieerd als het aantal zijdes dat is verbonden aan  $u$ .

Het vermoeden van Hadwiger claimt dat  $G$  kan worden gepartitioneerd in niet meer dan  $n - 1$  stabiele delen (ofwel dat  $\chi(G) < n$ ) wanneer  $K_n$  geen minor is van  $G$ .

- (a) Bestaat er een bipartiete graaf  $G$  met diameter 2 die  $K_{2022}$  als minor heeft?
- (b) Bestaat er een bipartiete graaf  $G$  met maximale graad  $\Delta = 3$  die  $K_{2022}$  als minor heeft?

---

## 8. Lekker grappelen

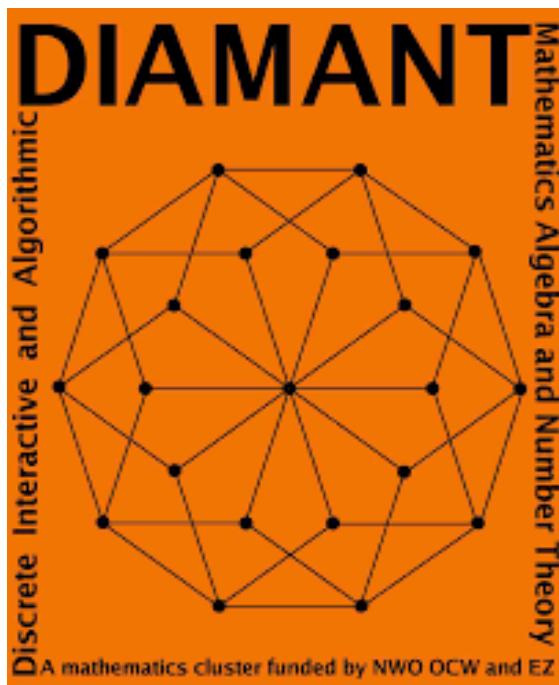
*M.A. (Mike) Daas Msc.  
Universiteit Leiden*

---

Lotte grabbelt met terugleggen in een bak met daarin  $n$  genummerde doch verder identieke ballen. Laat zien dat de verwachtingswaarde van het aantal keren grappelen tot ze elke bal minstens één keer gepakt heeft gelijk is aan  $nH_n^1$ .

---

<sup>1</sup> $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ , is de harmonische reeks.



Het Koninklijk Wiskundig Genootschap is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde en iedereen die de wiskunde een warm hart toedraagt. De vereniging is in 1778 opgericht en is 's werelds oudste nationale wiskunde genootschap. Het KWG publiceert onder andere de tijdschriften *Nieuw Archief voor Wiskunde* en *Pythagoras*.

Voor meer informatie zie ook onze site:  
[www.wiskgenoot.nl](http://www.wiskgenoot.nl)

---

## 9. Een eigenaardig polyloon

*Dr. J.W.T. (Johan) Konter  
Universiteit Leiden*

---

Bestaat er een polyloon  $P$  met gehele coëfficiënten dat de volgende twee eigenschappen heeft?

- (i)  $P$  heeft geen rationale nulpunten.
- (ii) Voor ieder natuurlijk getal  $n$  is er een gehele  $x$  zodat  $P(x)$  deelbaar is door  $n$ .

---

## 10. De flamingodans

Dr. R.R.J. (Raf) Bocklandt  
Universiteit van Amsterdam

---

In een cirkelvormige vijver staan  $\ell > 0$  flamingo's op hun linkerpoot en  $r > 0$  flamingo's op hun rechterpoot. Op de rand van de vijver staan drie meisjes die touwen vasthouden die een gelijkzijdige driehoek vormen. De meisjes lopen in gelijke tred rond de vijver zodat de koordendriehoek langzaam ronddraait. Telkens een flamingo over 1 van de touwen moet springen wisselt hij de poot waarop hij in de vijver staat. We weten dat tijdens het rondlopen alle flamingo's van poten wisselen, maar dat het totaal aantal flamingo's die op hun linkerpoot staan niet wijzigt.

- (a) Toon aan dat alle flamingo's dichter bij de rand van de vijver staan dan bij het middelpunt van de vijver.
- (b) Geef een voorbeeld van zo een configuratie met  $(\ell, r) = (1, 1)$ .
- (c) Geef een voorbeeld van zo een configuratie met  $(\ell, r) = (1, 2)$ .
- (d) Toon aan dat er voor elke  $(\ell, r)$  met  $\ell, r > 0$  een configuratie bestaat. Kan je er ook voor zorgen dat alle flamingo's zich in de bovenste helft van de vijver bevinden? (m.a.w positief imaginair deel hebben)
- (e) Indien de koordendriehoek niet gelijkzijdig is gelden de bovenstaande eigenschappen niet meer. Toon aan dat als de driehoek stomphoekig is dat er dan geen  $(1, 1)$ -configuratie bestaat.

*Opmerking: stel de vijver gelijk aan de eenheidscirkel in het complexe vlak en stel elke flamingo voor door een complexe getal. Twee flamingo's kunnen niet op dezelfde locatie staan.*



---

## 11. Een verrassende ondergrens

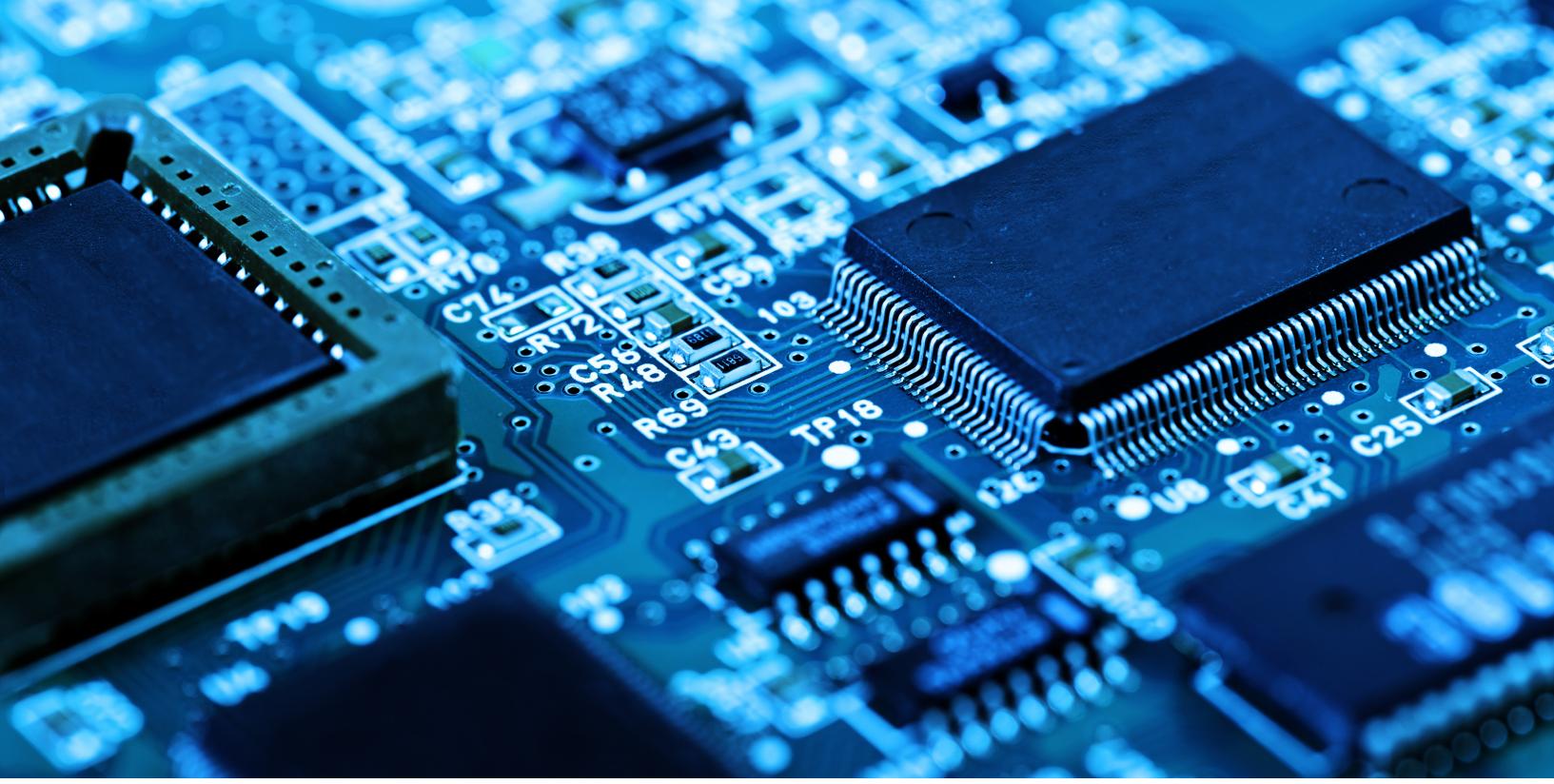
*W. (Wouter) Rienks Msc.  
Universiteit van Amsterdam*

---

Vind de grootste  $M \in \mathbb{R}$  zodanig dat

$$\limsup \frac{a_1 + \cdots + a_n}{a_{n-1}} \geq M,$$

voor ieder rijtje positieve gehele getallen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .



ASML is a high-tech company, headquartered in the Netherlands. We manufacture the complex lithography machines that chipmakers use to produce integrated circuits, or computer chips. Over 30 years, we have grown from a small startup into a multinational company with over 60 locations in 16 countries and annual net sales of €11.8 billion in 2019.

Behind ASML's innovations are engineers who think ahead. The people who work at our company include some of the most creative minds in physics, electrical engineering, mathematics, chemistry, mechatronics, optics, mechanical engineering, computer science and software engineering.

Because ASML spends more than €2 billion per year on R&D, our teams have the freedom, support and resources to experiment, test and push the boundaries of technology. They work in close-knit, multidisciplinary teams, listening to and learning from each other.

If you are passionate about technology and want to be a part of progress, visit [www.asml.com/careers](http://www.asml.com/careers).



---

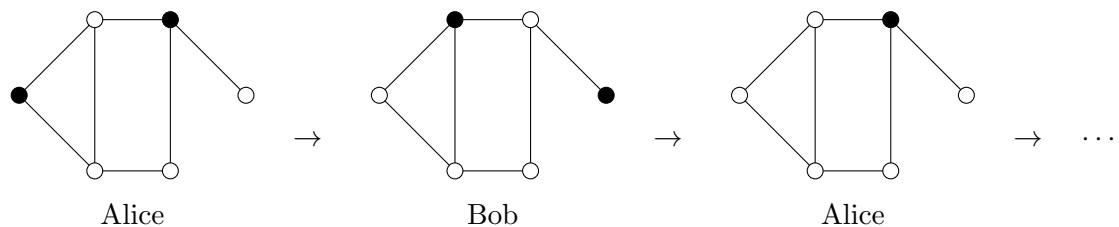
## 12. Meerderheid bepaalt

Prof. dr. D. (Dion) Gijswijt  
Technische Universiteit Delft

---

Alice neemt een eindige ongerichte graaf  $G = (V, E)$  en kleurt daarvan elke knoop zwart of wit. Bob verandert de kleuring: elke knoop krijgt de kleur die in de kleuring van Alice het vaakst voorkomt onder zijn buren (bij gelijke aantallen verandert de kleur van de knoop niet). Vervolgens verandert Alice de kleuring volgens hetzelfde recept: elke knoop krijgt de kleur die in de kleuring van Bob het vaakst voorkomt onder zijn buren (bij gelijke aantallen verandert de kleur van de knoop niet). Zo blijven Alice en Bob afwisselend de kleuring van  $G$  aanpassen. Zie de figuur voor een voorbeeld.

Bewijs (voor elke  $G$  en elke beginkleuring) dat na een aantal stappen de kleuring van Alice niet meer verandert t.o.v. haar vorige kleuring.



---

### 13. Positieve inverses

*Prof. dr. A. (Alexander) Schrijver  
Centrum voor Wiskunde en Informatica*

---

Laat  $M$  een vierkante matrix met reële coëfficiënten zodanig dat in elke rij de coëfficiënten sommeren tot 1. Bewijs dat  $M$  een principiële submatrix heeft die een niet-negatieve inverse heeft<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Een principiële submatrix is een submatrix waar de indices van de overgebleven rijen hetzelfde zijn als de indices van de overgebleven kolommen, niet negatief betekent dat alle coefficienten van de matrix niet negatief zijn



## Crack the code

13532057

332807 178208206 1511191 84356460617 299 20301227 1810358  
313962 aaaccc 49344361 35563 2311820137 299 332807 6856967  
996473518293 614712075356825080426 608399 989 14839 2806  
45433063754 20301227 93497093 acc 49344361 35563 52131695

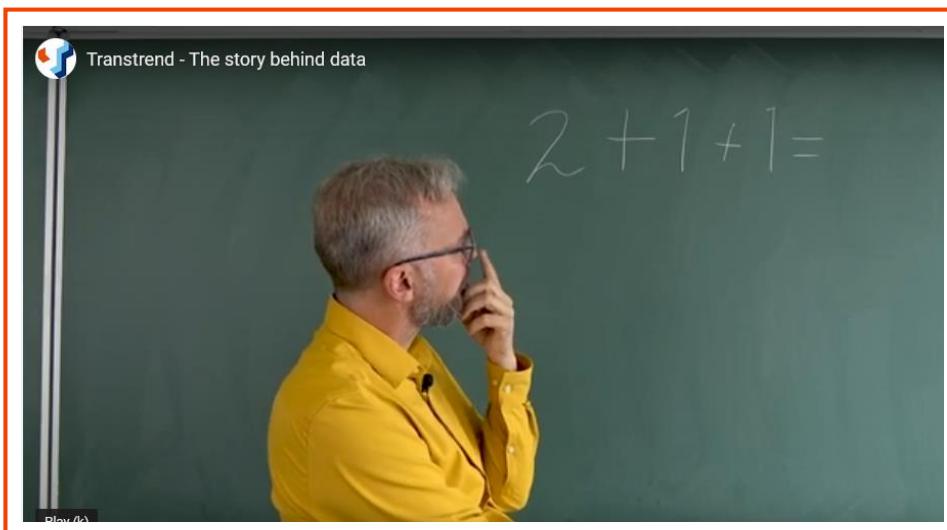
332807 178208206 1511191 9310186 299 20301227 2678207712468409  
21529682515 bbc 1439568097 3337 231287 1633 299 332807 4045337  
aa 116692587470 3337 86735 aaaac 7064094873146 56560603 1358  
3337 86735 1633 67252 1238666 332807 33022 4573545608786 1633

332807 178208206 1511191 0123456789 299 332807 9394 608399  
989 1282836161204411 299 332807 2945436432455 20819117 1032971504246 3337  
1696781075 14839 2191657476063 3337 14839 11973866 3337 27522212277367367  
14839 1154958430385193 1528111 14839 19505 332807 4443145 33  
2 26298542

Harold de Boer

*Hint: aaaccc = 1000*

*Heb je de code gekraakt, stuur dan je antwoord naar: [hr@transtrend.com](mailto:hr@transtrend.com)*



*“Bij Transtrend ontwikkelen vindingrijke bèta's systematische handelsstrategieën waarmee het vermogen van professionele beleggers wordt beheerd.”*