



Uitwerkingen LIMO 2011

Radboud Universiteit Nijmegen



Universiteit Utrecht

cQM
Consultants in Quantitative Methods



KONINKLIJKE
HOLLANDSCHE MAATSCHAPPIJ
DER WETENSCHAPPEN

TUDelft
Delft
University of
Technology

UNIVERSITEIT TWENTE.

FLOW ■ TRADERS

ORTEC
PROFESSIONALS IN PLANNING

TU/e Technische Universiteit
Eindhoven
University of Technology



UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM



KNAW



Universiteit Leiden



VRIJE
UNIVERSITEIT
AMSTERDAM



TOWERS WATSON



Canon

Canon Authorised Center



Canon
Business
Center
Oss

Inhoudsopgave

1.	Natuurlijke sommen	4
2.	Differentieerbaar en integreerbaar	5
3.	Het grootste nulpunt van een geïtereerd polynoom	7
4.	In elkaars macht	10
5.	Delen in ringen	12
6.	Binaire woorden	14
7.	Een rationale oplossing	16
8.	Een onorigineel volledig origineel	19
9.	Wandelen over de ribben van een blok	21
10.	Duizelige schildpadden	24
11.	Machtige polynomen	29
12.	Complexe veeltermen	31



K N A W

Colofon

Dit antwoordenboekje is een uitgave van de

LIMO-commissie 2011.

e-mail: limo@math.ru.nl

internet: <http://www.desda.math.ru.nl/limo>

MORE INFORMATION

Klaas Landsman
landsman@math.ru.nl
www.ru.nl/master

Mathematics (MSc)

MASTER'S PROGRAMME

The department

The department

The Mathematics department currently has 14 staff members and a fluctuating population of about 10 PhD students and postdocs. This relatively small size has considerable advantages for students. You will not drown in a large student pool, and contact with staff and fellow students is pleasant and very easy to make. We take a highly personal approach!

The combination of local courses and lectures offered by the national Dutch Master Program in Mathematics guarantees a broad and high-level range of topics to choose from.

Career prospects

Career prospects

Practically all of our graduates find employment immediately after graduating, in a very wide range of jobs including business, academia, government and ICT.

Research topics

Our Master's programme is closely related to the research carried out in the Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics (*IMAPP*), and in addition there are close research ties with the institute for Computing and Information Sciences (*iCIS*) and the Donders Centre for Neuroscience (*DCN*) at the Radboud University. Our research is embedded in the national mathematics clusters DIAMANT (websites.math.leidenuniv.nl/diamant/), GQT (www.gqt.nl) and STAR (www.eurandom.tue.nl/STAR/). As is often the case the research topics are linked to individuals. We invite you to look at the website www.ru.nl/science/math, where you can find more information.

You can choose from the following specializations:

- **Algebra and Logic**

Lattice-ordered algebras, topological dualities, algebraic logic, computer algebra in its many forms, affine algebraic geometry, intuitionistic and constructive mathematics. Furthermore, in collaboration with *iCIS* we offer an exciting interdisciplinary programme in the mathematical foundations of computer science.

- **Mathematical Physics**

Representation theory, symplectic geometry, integrable systems, special functions, and particle physics, topos theory, mathematical foundations of quantum theory, quantum probability, quantum computing, quantum field theory, quantum groups.

- **Applied Stochastics**

Interacting stochastic systems, i.e. systems consisting of a large number of interacting and stochastically evolving components, with applications to statistical physics (gases and liquids), biology (population dynamics) and neuroscience (self-organized criticality in brain activity, random graph theory, cortical networks).

Personal tutor for a tailor-made programme

Our Master's programme offers you considerable freedom to follow your own interests, at least within the range of our expertise. At the beginning of the two-year program, you declare your area of specialization and choose a personal tutor within that area, with whom you decide what your precise research area and package of courses at both the local and the national level will be. In the second year, most of your time will be spent on your MSc dissertation in the research area of your choice. In short, you will be able to develop a tailor-made programme.

1. Natuurlijke sommen

Ronald Meester, Vrije Universiteit, Amsterdam

Het juiste antwoord is

$$\binom{r}{k} \binom{n-1}{n-r+k}$$

Dit is als volgt in te zien: de eerste factor komt natuurlijk van de keuze welke van de x_i gelijk is aan 0. De tweede factor is iets lastiger. De volgende interpretatie helpt misschien. Schrijf de nummers 1 tot en met n op en zet tussen twee opeenvolgende getallen een verticale streep. We moeten de totale som van n verdelen in $r - k$ stukjes. Dat betekent dat ik van de $n - 1$ verticale streepjes er $n - (r - k)$ moet weglaten.

2. Differentieerbaar en integreerbaar

Stefaan Vaes, Katholieke Universiteit Leuven

(a) **Een schoolse vraag**

1. Ja. Stel dat $a < b$ en $f(a) = f(b)$. Wegens de middelwaardestelling bestaat er een x tussen a en b met $f'(x) = 0$. Dit is in tegenspraak met de veronderstelling dat $f'(x) \neq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.
2. Nee. Je kan als voorbeeld de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ nemen. De Jacobiaan van f in (x, y) is gelijk aan $e^x \neq 0$, maar $f(x, y+2\pi) = f(x, y)$ zodat f zeker niet injectief is.

(b) **Een vraag die je kort kan oplossen, maar inventiviteit vergt**

Een dergelijke merkwaardige rij van functies bestaat inderdaad. Een concreet voorbeeld gaat als volgt. We noteren met $\chi_{[a,b]}$ de functie die gelijk is aan 1 op het interval $[a, b]$ en die gelijk is aan 0 elders. Definieer dan als volgt f_n .

$$f_n = \chi_{\left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right]} \quad \text{als } k \geq 0, 0 \leq i \leq 2^k - 1 \text{ en } n = 2^k + i.$$

Omdat elk natuurlijk getal n op een unieke manier kan geschreven worden als $n = 2^k + i$ met $k \geq 0$ en $0 \leq i \leq 2^k - 1$, is f_n goed gedefinieerd. Per constructie zal

$$\int_0^1 f_n(x) dx \leq 2^{-k} \quad \text{van zodra } n \geq 2^k.$$

Dus zal $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$.

Fixeer een willekeurige $x \in [0, 1]$. We tonen aan dat de rij $f_n(x)$ niet convergeert als $n \rightarrow \infty$. Kies voor elke $k \geq 2$ een i_k en een j_k in $\{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$ zodanig dat

$$x \in \left[\frac{i_k}{2^k}, \frac{i_k + 1}{2^k}\right] \quad \text{en} \quad x \notin \left[\frac{j_k}{2^k}, \frac{j_k + 1}{2^k}\right].$$

Per constructie zal

$$f_{2^k+i_k}(x) = 1 \quad \text{en} \quad f_{2^k+j_k}(x) = 0 \quad \text{voor alle } k \in \mathbb{N}.$$

De rij $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ heeft dus zowel een deelrij die constant 1 is als een deelrij die constant 0 is. De rij $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ is bijgevolg niet convergent.

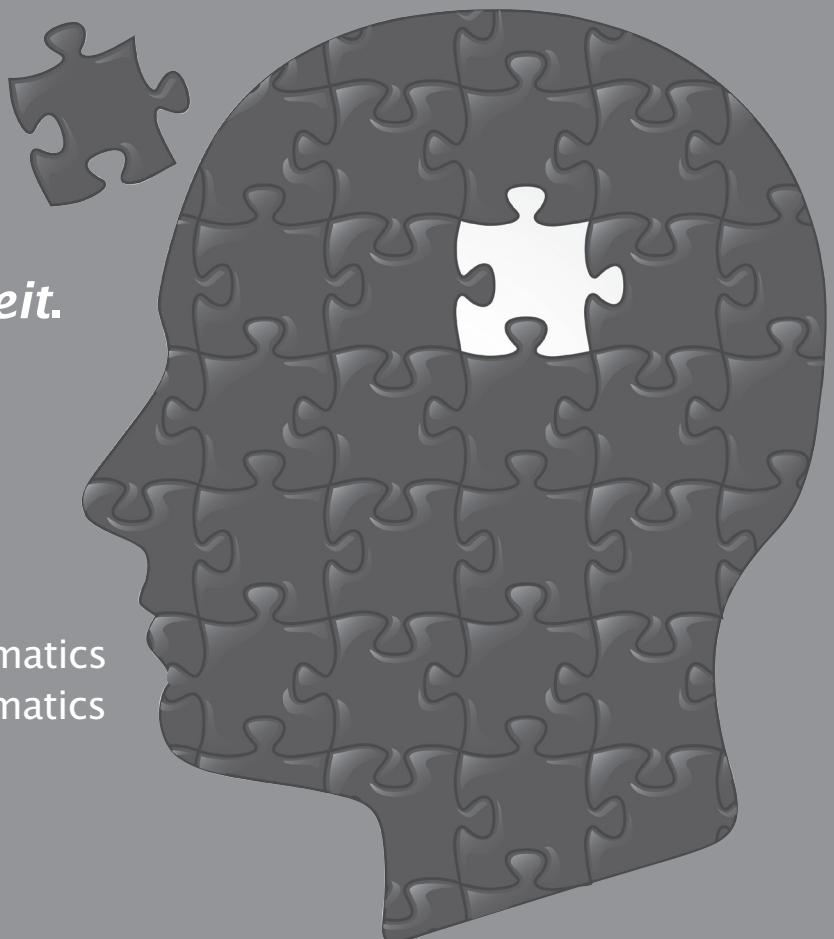
Wat ga jij na je bachelor doen?

Van *het analyseren*
van bedrijfsproblemen
tot *het zoeken naar*
patronen in hersenactiviteit.

Masteropleidingen aan de
Vrije Universiteit Amsterdam:

- Mathematics
- Business Mathematics and Informatics
- Stochastics and Financial Mathematics

www.vu.nl/masteropleidingen



3. Het grootste nulpunt van een geïtereerd polynoom

Walter Van Assche, Katholieke Universiteit Leuven

De rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wordt gegeven door $x_n = \sqrt{x_{n-1} + c}$, waarbij $x_0 = 0$ en telkens de positieve wortel wordt gekozen. We zijn dus op zoek naar een fixpunt (vast punt) dat voldoet aan $x = \sqrt{x+c}$ of nog $x = T(x)$ en we moeten aantonen dat er een attractief fixpunt is. Er zijn twee fixpunten: $x_{\pm} = (1 \pm \sqrt{1+4c})/2$ en aangezien $c > 0$ is enkel $x_+ = (1 + \sqrt{1+4c})/2$ positief. Dit is onze vermoedelijke limiet. Een expliciete (maar onhandige) uitdrukking van x_n is

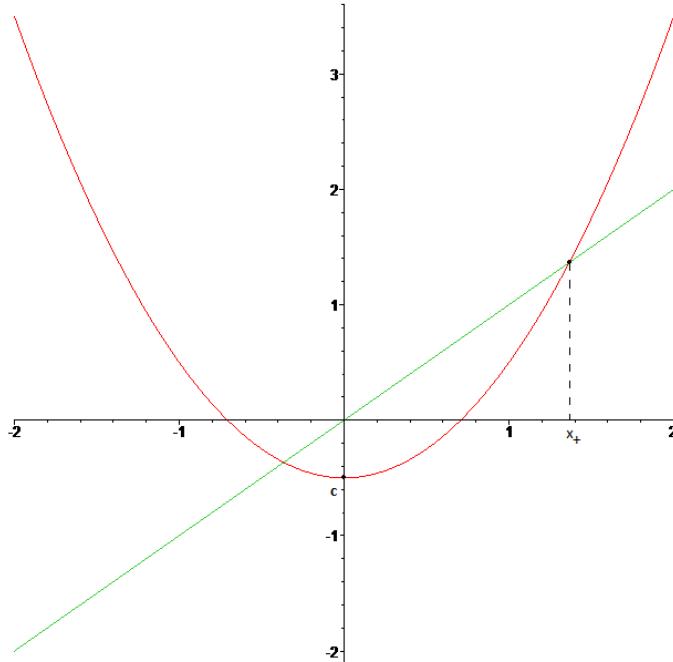
$$x_n = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}}}$$

waarbij in totaal n vierkantswortels staan.

De volgende werkwijze kan worden gevuld:

Stap 1: We tonen aan dat $0 \leq x_n \leq (1 + \sqrt{1+4c})/2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dat kan eenvoudig per inductie. Het is evident voor $n = 0$ (want $x_0 = 0$) en ook voor $x_1 = \sqrt{c}$. Stel dat de ongelijkheden gelden voor $n - 1$, dan volgt uit $x_n = \sqrt{x_{n-1} + c}$ dat $\sqrt{c} \leq x_n \leq \sqrt{x_+ + c} = x_+$ zodat de ongelijkheden ook gelden voor n .

Stap 2: Als $0 \leq x \leq x_+$ dan geldt $T(x) \leq x$. Dit zie je eenvoudig op de figuur



Stap 3: De rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is stijgend. Dit volgt omdat $x_n = \sqrt{x_{n-1} + c}$, zodat $T(x_n) = T(\sqrt{x_{n-1} + c}) = x_{n-1}$. Uit Stap 2 (gecombineerd met Stap 1) volgt dus dat $x_n \geq x_{n-1}$.

Stap 4. Aangezien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een stijgende rij is (Stap 3) die begrensd is (Stap 1), heeft deze rij een eindige limiet. Nemen we in $x_n = \sqrt{x_{n-1} + c}$ de limiet voor $n \rightarrow \infty$, dan zien we dat de limiet een fixpunt is $x = \sqrt{x + c}$ en het positieve fixpunt is x_+ .

De conclusie is dus dat voor $c > 0$ de limiet voor $n \rightarrow \infty$ van het grootste reële nulpunt x_n bestaat en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}.$$

Wellicht interessant om weten is dat voor $c > 2$ alle nulpunten van T_n reëel zijn en dat hun ophopingspunten (verdichtingspunten) een Cantorverzameling vormen met als eindpunten $\pm(1 + \sqrt{1 + 4c})/2$. Voor $c = 2$ zijn alle nulpunten van T_n reëel en zij liggen dicht in het interval $[-2, 2]$; het zijn nulpunten van de Chebyshevpolynoom (van de eerste soort) van graad 2^n , maar vermenigvuldigd met de factor 2. Voor $0 < c < 2$ zijn er complexe nulpunten en zullen de nulpunten dicht liggen op een fractal in het complexe vlak (de Julia verzameling van T).



make yourmark

Ben jij een adviestalent?

's Werelds grootste multinationals kijken Towers Watson aan om belangrijke business issues voor hen te tackelen. Ontwikkel je talent en begin een uitdagende carrière bij de thought leader in Retirement Solutions, Finance en Human Resources.

werkenbijtowerswatson.nl

QR code met je



TOWERS WATSON

4. In elkaars macht

Sjoerd Boersma, Universiteit Utrecht

Netjes tekenen helpt bij het begrijpen van de bewijzen. Buiten de wedstrijd om kan Mathematica of Wolfram Alpha uitkomst bieden, maar het kan ook zeker zonder.

$$a^b = b^a \Leftrightarrow a^{1/a} = b^{1/b}$$

$$2^{1/2} = 4^{1/4} < 3^{1/3}$$

$f(x) = x^{1/x}$ is continu. Volgens de tussenwaardestelling geldt nu: $\forall r \in (2^{1/2}, 3^{1/3}) \exists s \in (2, 3) : f(s) = r$, en tevens $\exists t \in (3, 4) : f(t) = r$, ofwel elke tussenliggende waarde wordt aangenomen. Nu geldt $f(s) = f(t)$ en $t^s = s^t$, en een dergelijk paar bestaat $\forall r \in (2^{1/2}, 3^{1/3})$, wat er overaftelbaar veel zijn.

DO YOU GRASP WHAT
WE ARE SEEKING?

CAN YOU READ
THIS TAET PULS
UCHNUOPE THE
HIDDEN MESSAGE?
IT COULD BE YOU
TAHT WE ARE
SEARCHING FOR!

NEXT IN-HOUSE DAY, 27TH OF MAY 2011!

Who we are?

We are a dynamic team of traders, IT specialists, and professionals. Who are the best at what we do. We are peer - recognized as Europe's leading ETF market maker, trading on- and off-screen all day to provide the prices on which Investors trade. We train our traders in-house and use custom-built technology, which means our successes are a joint effort from which everyone can profit.

Our culture?

Work hard and play harder. We offer a performance based incentive scheme, training opportunities, luxury lifestyle perks, and an open collegial environment. In addition, we offer the opportunity to work overseas.

Interested?

For more information and in-house days at the Amsterdam headquarters contact Recruitment +31 (0)20 799 6799 or check out www.flowtraders.com.

5. Delen in ringen

Hendrik Lenstra, Universiteit Leiden

Voor $b \in B$, $T \subset B$ schrijven we $bT = \{bt : t \in T\}$.

Voor $y \in B$ geldt $y \in S^{-1}$ desda $yS \subset A$.

Laat $x \in B$. Dan geldt $x \in (S^{-1} \cdot S)^{-1}$ dan en slechts dan als voor alle $y \in S^{-1}$ geldt $xyS \subset A$; met andere woorden, dan en slechts dan als voor elke $y \in B$ met $yS \subset A$ eveneens geldt $xyS \subset A$.

Elke $x \in A$ voldoet hier kennelijk aan, want $A \cdot A \subset A$. Stel dat x en x' eraan voldoen. Dan voldoet ook $x - x'$ eraan, want elk element van $(x - x')yS$ is een verschil van een element van $xyS \subset A$ en een element van $x'yS \subset A$, dus weer in A . We bewijzen nu dat ook xx' eraan voldoet. Neem dus $y \in B$ met $yS \subset A$. Dan hebben we ten eerste $x'yS \subset A$. Als we nu $x'y$ de rol van y laten spelen, dan vinden we ten tweede $xx'yS \subset A$. Dus xx' heeft inderdaad ook de gewenste eigenschap.

Al met al hebben we zo bewezen dat $(S^{-1} \cdot S)^{-1}$ de deelring A omvat en gesloten is onder aftrekking en vermenigvuldiging. Dus $(S^{-1} \cdot S)^{-1}$ is een deelring van B die A omvat.



Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde en iedereen die de wiskunde een warm hart toedraagt.
In 1778 opgericht onder het motto 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskunde-vakvereniging.

Het KWG:

- publiceert voor leden het kwartaalblad Nieuw Archief voor Wiskunde
- publiceert een tweewekelijkse elektronische nieuwsbrief met wiskunde-agenda
- geeft het wiskundetijdschrift voor jongeren Pythagoras uit
- organiseert jaarlijks het Nederlands Mathematisch Congres, het Wintersymposium voor leraren en het Najaarssymposium
- zorgt samen met KWG-sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde dat de jaarlijkse Studiegroep Wiskunde met de Industrie georganiseerd wordt
- sponsort Vierkant voor Wiskunde en Epsilon Uitgaven
- ondersteunt via de NOCW verschillende activiteiten voor jongeren, zoals de Wiskunde Olympiade, Wiskunde A-lympiade, Kangoeroe wedstrijden, Universitaire Olympiade en de Vierkant kampen
- reikt eens per drie jaar de Brouwermedaille uit aan een toonaangevend wiskundige
- onderhoudt een database van Nederlandse wiskundigen op de KWG-website
- verzorgt de Wiskunde PersDienst - een initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en het KWG
- helpt via het project 'nationale PR-medewerker wiskunde' de wiskunde in de media te brengen
- heeft als doel de wiskunde te bevorderen en haar beoefening en toepassingen aan te moedigen
- vertegenwoordigt de Nederlandse wiskundige gemeenschap in binnen- en buitenland.

Lid worden?

Pas afgestudeerden en studenten die net hun propedeuse hebben gehaald, kunnen eenmalig een jaar lang gratis lid worden.
Kijk op www.wiskgenoot.nl of stuur een e-mail aan de ledenadministratie, admin@wiskgenoot.nl

6. Binaire woorden

Frans Keune, Radboud Universiteit Nijmegen

Laat a_n dat aantal zijn. Laat b_n het aantal zijn waarbij eis (2) is vervangen door $d(w) = 2$. Voor woorden van lengte $2n$, $2n+1$ en $2n+2$ hebben we dan de aantallen:

	lengte \rightarrow		
	$2n$	$2n+1$	$2n+2$
3		b_n	
2	b_n		$a_n + 2b_n$
\uparrow		$a_n + b_n$	
1			
d	a_n		$2a_n + 2b_n$
-1		$a_n + b_n$	
-2	b_n		$a_n + 2b_n$
-3		b_n	

Dus:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ b_0 &= 0, \\ a_{n+1} &= 2a_n + 2b_n \quad (\text{voor } n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_{n+1} &= a_n + 2b_n \quad (\text{voor } n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Er geldt voor $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2b_{n+1} = 6a_n + 8b_n = 4a_{n+1} - 2a_n.$$

Er zijn twee meetkundige rijen (r^n) met $r^{n+2} = 4r^{n+1} - 2r^n$ voor alle n , namelijk met $r = 2 + \sqrt{2}$ en $r = 2 - \sqrt{2}$. De rij (a_n) is een combinatie van deze twee meetkundige rijen: er zijn x en y met $a_n = x(1 + \sqrt{2})^n + y(1 - \sqrt{2})^n$. Oplossen voor $n = 0$ en $n = 1$ levert de formule

$$a_n = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})^n.$$



CHOOSE YOUR MASTER IN TWENTE!

MASTER APPLIED MATHEMATICS

TRACKS:

- MATHEMATICAL PHYSICS AND COMPUTATIONAL MECHANICS
- FINANCIAL ENGINEERING
- INDUSTRIAL ENGINEERING AND OPERATIONS RESEARCH
- MATHEMATICS AND APPLICATIONS OF SIGNALS AND SYSTEMS

3TU MASTER SYSTEMS & CONTROL

WWW.GRADUATE.UTWENTE.NL/AM

WWW.GRADUATE.UTWENTE.NL/SC

UNIVERSITEIT TWENTE.

7. Een rationale oplossing

Frans Oort, Universiteit Utrecht

b

(a)

$$\{(1, 0)\} \cup \{(x = \alpha^2 + 2, y = \alpha(\alpha^2 + 1)) \mid \alpha \in \mathbb{Q}\}.$$

Bewijs. Voor elk punt $P = (x, y) \neq (1, 0)$ kiezen we de lijn die P verbindt met $S := (1, 0)$; merk op: als $(x, y) \neq S$ voldoet aan (E) dan is $x \neq 1$. Die lijn wordt gegeven door de vergelijking

$$(L) \quad y = \alpha \cdot (x - 1).$$

Merk op dat

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2(x - 2).$$

Substitutie van (L) in (E) geeft:

$$(\alpha \cdot (x - 1))^2 = (x - 1)^2(x - 2).$$

Uit $\alpha^2 = x - 2$ volgt $x = \alpha^2 + 2$. Met (L) geeft dit $y = \alpha(\alpha^2 + 1)$. We zien dat elk van de gevraagde punten ongelijk aan S een eenduidig bepaalde α geeft, en dat elke $\alpha \in \mathbb{Q}$ de lijn $(L) = (L)_\alpha$ geeft, die behalve het S ook het punt $(x = \alpha^2 + 2, y = \alpha(\alpha^2 + 1))$ geeft.

(b) Merk op dat $261352 \equiv 7 \pmod{13}$.

We bewijzen dat er niet een oplossing bestaat in $(\mathbb{F}_{13})^2$.

De derde-machten in \mathbb{F}_{13} zijn de restklassen van $0, \pm 1, \pm 8$ in \mathbb{F}_{13} .

De vierde-machten in \mathbb{F}_{13} zijn de restklassen van $0, 1, 3, 9$ in \mathbb{F}_{13} .

We zien dat de restklasse van 7 niet van de vorm $\bar{x}^3 + \bar{y}^4$ geschreven kan worden met $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{F}_{13}$.

Dus is er geen oplossing in $(\mathbb{F}_{13})^2$. Dus is er geen oplossing in \mathbb{Z}^2 .

Alternatieve oplossing (door: dr. A. van Rooij):

We herleiden het probleem tot een kwestie van deelbaarheid van gehele getallen. Daartoe ontbinden we het rechterlid. 1 is een wortel, dus is het rechterlid deelbaar door $x - 1$; het blijkt $(x - 1)^2(x - 2)$ te zijn.

In de vergelijking $y^2 = (x - 1)^2(x - 2)$ substitueren we $x = \frac{a}{b}$ en $y = \frac{c}{d}$ met $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{N}$, $a \perp b$ en $c \perp d$ waar (\perp = relatief priem).

(Tussendoor: dit kan niet als $x = 0$ of $y = 0$, $x = 0$ kan niet, $y = 0$ geeft $x \in \{1, 2\}$.)

Dan $c^2b^3 = (a - b)^2(a - 2b)d^2$. Omdat $c^2 \perp d^2$ en $b^3 \perp (a - b)^2(a - 2b)$ (en $b, d > 0$) volgt hieruit $c^2 = (a - b)^2(a - 2b)$, $b^3 = d^2$.

Dus zijn $a - 2b$ en b kwadraten van natuurlijke getallen A respectievelijk B . Daarmee $a - b = A^2 + B^2$, $a = A^2 + B^2$, $c = \pm(a - b)A = \pm(A^2 + B^2)A$, $d = B^3$, en

$$x = \frac{A^2 + 2B^2}{B^2}, \quad y = \frac{(A^2 + B^2)A}{B^3}$$

Zo heb je precies alle oplossingen. Je kunt het antwoord nog wat oppoetsen: met $\alpha = \frac{A}{B}$ krijg je $x = \alpha^2 + 2$, $y = (\alpha^2 + 1)\alpha$ (en $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$).

Tweede alternatieve oplossing (door: dr. A. van Rooij):

Begin weer met $y^2 = (x - 1)^2(x - 2)$, $x = 1$ geeft $y = 0$. Als $x \neq 1$ heb je $(\frac{y}{x-1})^2 = x - 2$. Met $\alpha = \frac{y}{x-1}$:

$$\alpha^2 = x - 2, \quad \text{dus } x = \alpha^2 + 2$$

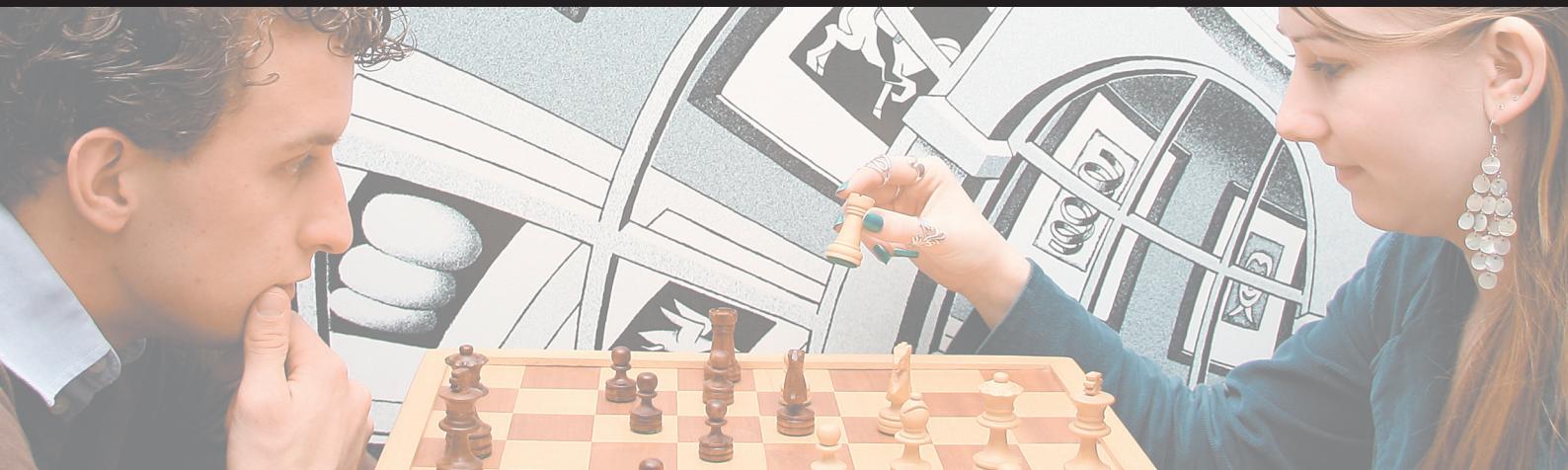
$$y = \alpha(x - 1), \quad \text{dus } y = (\alpha^2 + 1)\alpha$$

Voor alle $\alpha \in \mathbb{Q}$ voldoet dit.



Faculty of Science

Knap staaltje denkwerk



Weet jij al wat je na je bachelor gaat doen? Wil jij...

- ...onderdeel uitmaken van een toonaangevende onderzoeksgroep?
- ...een internationaal netwerk opbouwen, bijvoorbeeld via het 'ALGANT study program'?
- ...kennis maken met verschillende disciplines?
- ...zelf bepalen welke vakken je volgt?

Dan is een wiskunde master aan Universiteit Leiden iets voor jou!

Of je ambitie nu ligt bij een multinational in een internationale omgeving of je verdieping zoekt in een PhD program, in Leiden bieden wij je de mogelijkheid je kennis verder te verdiepen in een persoonlijke en inspirerende omgeving. Kies je programma op maat binnen één van de tracks en na je master in Leiden ligt de wereld aan je voeten!

www.mastersinleiden.nl



Universiteit Leiden

8. Een onorigineel volledig origineel

L.D. Molag, Universiteit Utrecht

Kies een $a \in U$. We nemen aan dat $\sup_{b \in U} |a - b| < 1$ en zullen bewijzen dat dit tot een contradictie leidt. Met d geven we de graad van P aan. Natuurlijk geldt $d \not< 1$ want P moet minstens twee verschillende waarden aannemen. In het geval $d = 1$ zou P van de vorm $P(z) = z + c$ moeten zijn met $c \neq 0$. Omdat $P^{-1}(U) = U$ zou dit impliceer dat $a + c\mathbb{Z} \subset U$ en dus $\sup_{b \in U} |a - b| = \infty$. We zullen dus moeten aannemen dat $d \geq 2$. Zij $u \in U$ willekeurig, aangezien gegeven is dat P monisch is en $P^{-1}(U) = U$ moet het polynoom $P(z) - u$ een product zijn van d factoren van de vorm $z - b$ met $b \in U$. Hieruit volgt dat

$$|P(z) - u| \leq \left(\sup_{b \in U} |z - b| \right)^d$$

Dus volgt dat de compositiemachten van P voldoen aan

$$|P^k(z) - u| \leq \left(\sup_{b \in U} |z - b| \right)^{d^k}$$

voor alle $k \geq 1$, zoals gemakkelijk met inductie is te bewijzen (hiervoor gebruik je dat $|P(z) - b|$ aan dezelfde ongelijkheid voldoet als $|P(z) - u|$ hierboven). Combineren van onze resultaten geeft

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |P^k(a) - u| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{b \in U} |a - b| \right)^{2^k} = 0.$$

We hebben nu dus bewezen dat $u = \lim P^k(a)$ voor alle $u \in U$. Dit betekent uiteraard dat $\#U = 1$, we hebben dus de gewenste contradictie bereikt.



Aan de UvA maak je werk van je master

WWW.UVA.NL/SCIENCE-MASTERS

**Kies voor één van de wiskundige masters aan de
Universiteit van Amsterdam!**

- Mathematics
- Mathematical Physics
- Stochastics and Financial Mathematics

9. Wandelen over de ribben van een blok

Gert Vegter, Rijksuniversiteit Groningen

- (a) Noem het blok B en de bol S . We tonen de claim aan met inductie naar de dimensie d .

In het basisgeval $d = 2$ is B een rechthoek in het vlak met diagonaal ab , die binnen een cirkel S ligt. De lijn door a en b begrenst twee gesloten halfvlakken, die elk een hoekpunt van B bevatten. Laat c één van de andere twee hoekpunten van B zijn dat in hetzelfde halfvlak ligt als het middelpunt van S (als het middelpunt van S op de rand van beide halfvlakken ligt, dan kiezen we voor c een willekeurig ander hoekpunt). Volgens de stelling van Thales ligt c binnen S . Het pad gevormd door de ribben ac en cb ligt dus geheel binnen S , waarmee de bewering is aangetoond voor $d = 2$.

Stel de claim is bewezen voor dimensie $d - 1$, $d > 2$. Laat ab een lichaamsdiagonaal van het blok zijn die geheel binnen de bol S ligt. Kies een zijvlak F van het blok dat a bevat, en laat c de loodrechte projectie van b zijn op het affiene hypervlak $\text{Aff}(F)$ dat F bevat zijn. Dan is c een hoekpunt, en bc een ribbe van B . Laat d het tegenover c liggende hoekpunt van het blok B zijn. Ook ad is een ribbe van het blok. Dan is $acbd$ een rechthoek, die in een 2-dimensionaal vlak V ligt. De doorsnijding van V met de bol S is een cirkel, die de diagonaal ab van de rechthoek $acbd$ bevat. Volgens de basisstap van ons inductiebewijs ligt dus tenminste één van de punten c en d binnen de cirkel $B \cap S$, en dus binnen de bol B .

Geval 1: c ligt binnen S . Dan is ac een lichaamsdiagonaal van F die binnen de bol ligt, en dus levert de inductiehypothese voor het $(d - 1)$ -dimensionale blok F en de bol $S \cap \text{Aff}(F)$ een pad van a naar c , dat geheel uit ribben van F (en dus van het blok B) bestaat. Samen met cb is dit het gevraagde ribbenpad.

Geval 2: d ligt binnen S . Dan is db een lichaamsdiagonaal van het tegenover F gelegen zijvlak \widehat{F} die binnen de bol ligt, en dus levert de inductiehypothese voor het $(d - 1)$ -dimensionale blok \widehat{F} en de bol $S \cap \text{Aff}(\widehat{F})$ een pad van d naar c , dat geheel uit ribben van \widehat{F} (en dus van het blok B) bestaat. Samen met de ribbe ad is dit het gevraagde ribbenpad. Daarmee is de bewering bewezen.

- (b) Laat $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de functie zijn gedefinieerd door:

$$f(x_1, \dots, x_d) = \begin{vmatrix} 1 & p_1^0 & \cdots & p_d^0 & (p_1^0)^2 + \cdots + (p_d^0)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & p_1^d & \cdots & p_d^d & (p_1^d)^2 + \cdots + (p_d^d)^2 \\ 1 & x_1 & \cdots & x_d & (x_1)^2 + \cdots + (x_d)^2 \end{vmatrix},$$

Ontwikkelen van de Δ naar de laatste rij geeft

$$f(x_1, \dots, x_d) = \Pi((x_1)^2 + \cdots + (x_d)^2) + \sum_{i=1}^d a_i x_i + b,$$

waarbij a_1, \dots, a_d, b reële constanten zijn die alleen van de punten p^0, \dots, p^d afhangen. De punten liggen in algemene positie, dus $\Pi \neq 0$. Er geldt $f(p^0) = \dots = f(p^d) = 0$, dus de punten p^0, \dots, p^d liggen op de nulverzameling van f . Omdat

$$f(x_1, \dots, x_d) = \Pi \left(\sum_{i=1}^d (x_i + \frac{a_i}{2\Pi})^2 - R^2 \right), \quad \text{met} \quad R^2 = \frac{\sum_{i=1}^d a_i^2 - 4b\Pi}{4\Pi^2},$$

is deze nulverzameling de d -sfeer S door deze punten. Verder geldt: f is negatief binnen S d.e.s.d. als $\Pi > 0$. Het punt q ligt dus binnen S d.e.s.d. als $f(q) \cdot \Pi < 0$, dus d.e.s.d. als $\Delta \cdot \Pi < 0$. (Opmerking: dit is de zgn. in-sphere test, die in de Computational Geometry een rol speelt in de context van Delaunay triangulaties.)

Rethink your own career path!

Enroll in the Master's program Industrial and Applied Mathematics at TU/e, the Netherlands



Why TU/e?

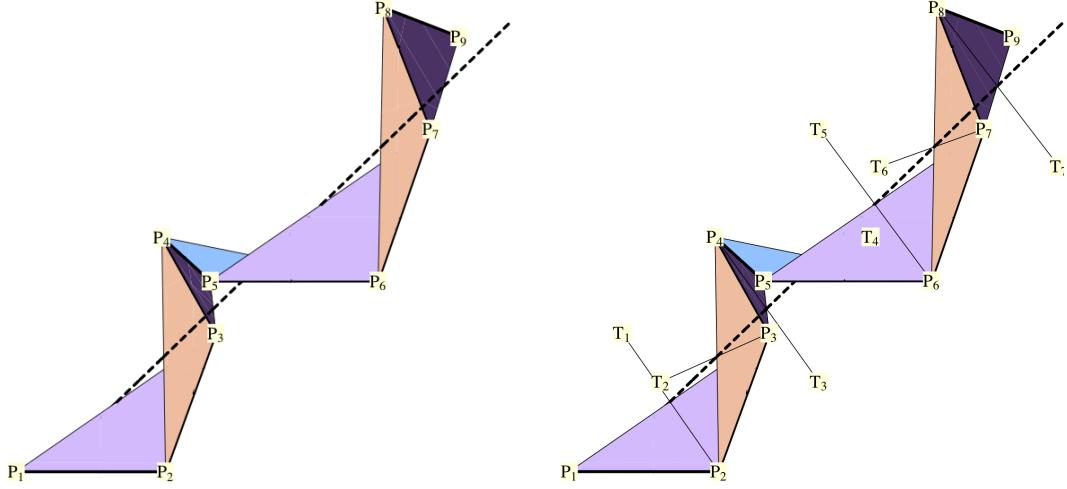
- English programs in:
- Computational Science and Engineering
- Discrete Mathematics and Applications
- Statistics, Probability, and Operations Research
- focus on industrial mathematics
- special Honors Programs
- intensive contacts with industry
- located in a prominent high-tech region
- strong international networks
- high international rankings
- associated with institutes like EURANDOM

More information: www.tue.nl/masterprograms/iam

10. Duizelige schildpadden

Tom Verhoeff, Technische Universiteit Eindhoven

Let P_i be the i -th vertex of helix $H(\psi, \phi)$, and let $\theta = \theta(\psi, \phi)$. Also see Figure 10.1.

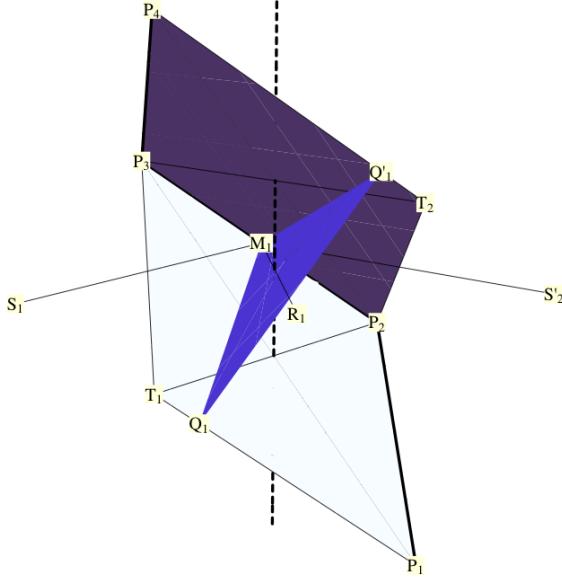


Figuur 10.1: $H(60^\circ, \arccos(1/3))$ with labels and filled angles (left) and angle bisectors (right)

Observe that

- the exterior angle $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ (the supplement of the angle at P_{i+1} in $\triangle P_iP_{i+1}P_{i+2}$) equals ϕ ;
- the angle between the planes $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ and $P_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}$ equals ψ ;
- the interior angle bisectors $P_{i+1}T_i$ at the vertices of the helix are perpendicular to the axis of the helix;
- the angle between adjacent angle bisectors equals θ , the exterior angle of the polygon obtained by projection.

Now consider Figure 10.2, which is constructed as follows. It consists of three segments $P_1P_2P_3P_4$ of helix $H(\psi, \phi)$. The angles $\angle P_1P_2P_3$ and $\angle P_2P_3P_4$ have been filled with rhombi. Thus, $P_{i+1}T_i$ is an interior angle bisector at P_i , and it is perpendicular to the other rhombus diagonal $P_{i-1}P_{i+1}$. M_1 is the midpoint of P_2P_3 .



Figuur 10.2: Three segments $P_1P_2P_3P_4$ of a helix with various auxiliary points, lines, and polygons (point N_1 not shown, see text)

M_1S_1 is the translation of P_2T_1 along P_2P_3 . Similarly, $M_1S'_2$ is the translation of P_3T_2 along P_2P_3 . Consider a plane through M_1 perpendicular to P_2P_3 . This plane intersects rhombus $P_1P_2P_3T_1$ at M_1Q_1 , and rhombus $P_2P_3P_4T_2$ at $M_1Q'_1$. Hence, both M_1Q_1 and $M_1Q'_1$ are perpendicular to P_2P_3 . M_1R_1 is the interior angle bisector of $\angle Q_1M_1Q'_1$.

From this construction we know that

- $\angle P_2P_1T_1 = \phi$ and, hence, $\angle P_1P_3M_1 = \phi/2$;
- $\angle Q_1M_1Q'_1 = \psi$ and, hence $\angle Q_1M_1R_1 = \psi/2$;
- $\angle S_1M_1S'_2 = \theta$ and, hence $\angle R_1M_1S_1 = \theta/2$;
- M_1S_1 is perpendicular to P_1P_3 , and $\angle P_3M_1Q_1$ is a right angle; hence, $\angle S_1M_1Q_1 = \angle P_1P_3M_1 = \phi/2$

We conclude that direction M_1S_1 can be obtained from direction M_1R_1 by first rotating direction M_1R_1 by angle $\psi/2$ about P_2P_3 , and then by angle $\phi/2$ about the line through M_1 perpendicular to $Q_1M_1S_1$ (not shown in the figure). Alternatively, direction M_1S_1 can be obtained by first rotating direction M_1R_1 by $\phi/2$ about the line through M_1 perpendicular to $P_3M_1R_1$ (not shown in the figure), and then by $\psi/2$ about P_2P_3 .

Finally, observe that by exchanging ϕ and ψ in the latter operation on direction M_1R_1 , you obtain a different direction (in general, unless $\phi = \psi$), because 3D rotations do not commute. However, for the resulting angle $R_1M_1S_1 = \theta/2$ it does not matter, as we argue next.

In Figure 10.2, imagine x, y, z -axes with

- the origin at M_1 ,
- the x^+ -axis along M_1P_3 ,
- the y^+ -axis along M_1N_1 , where N_1 is such that M_1N_1 is perpendicular to $P_3M_1R_1$, on the same side as Q_1 (N_1 is not shown in the figure), and
- the z^+ -axis along M_1R_1 .

N₁ Consider the unit vector $(0, 0, 1)$, which points in the direction M_1R_1 . Rotation by $\phi/2$ about the y^+ -axis yields the vector $(\sin(\phi/2), 0, \cos(\phi/2))$. Rotating this vector by $-\psi/2$ about the x^+ -axis results in the vector

$$(\sin(\phi/2), \sin(\psi/2) \cos(\phi/2), \cos(\psi/2) \cos(\phi/2))$$

This is a unit vector pointing in the direction of M_1S_1 ; hence, its z -coordinate equals the cosine of its angle with the z^+ -axis, that is, $\cos(\theta/2)$. Therefore, we have

$$\cos(\theta/2) = \cos(\psi/2) \cos(\phi/2)$$

Note that the right-hand side is symmetric in ϕ and ψ .

(End of Proof)

From this proof we learned even more:

Exterior Projected Angle Theorem

$$\cos(\theta/2) = \cos(\psi/2) \cos(\phi/2) \tag{10.1}$$

where $\theta = \theta(\psi, \phi)$.

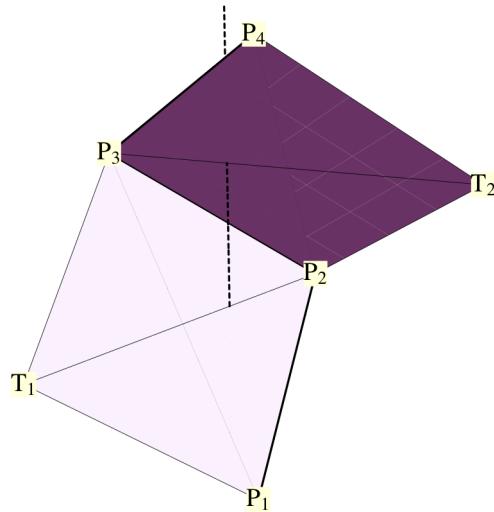
Does the invariance theorem for discrete helices have a counterpart for continuous helices? Is something invariant under exchanging curvature and torsion? Yes: arc length of one period.

How Was This Discovered?

My father, Koos Verhoeff, had told me about some helix weavings, and had communicated the roll and turn angles by phone (60° and $\arccos(1/3) \approx 70.5^\circ$). While constructing the helix in Mathematica, I had accidentally swapped the two values. But I still got a helix winding around a cylinder with the expected cross section, viz. a square, and therefore I thought everything was okay.

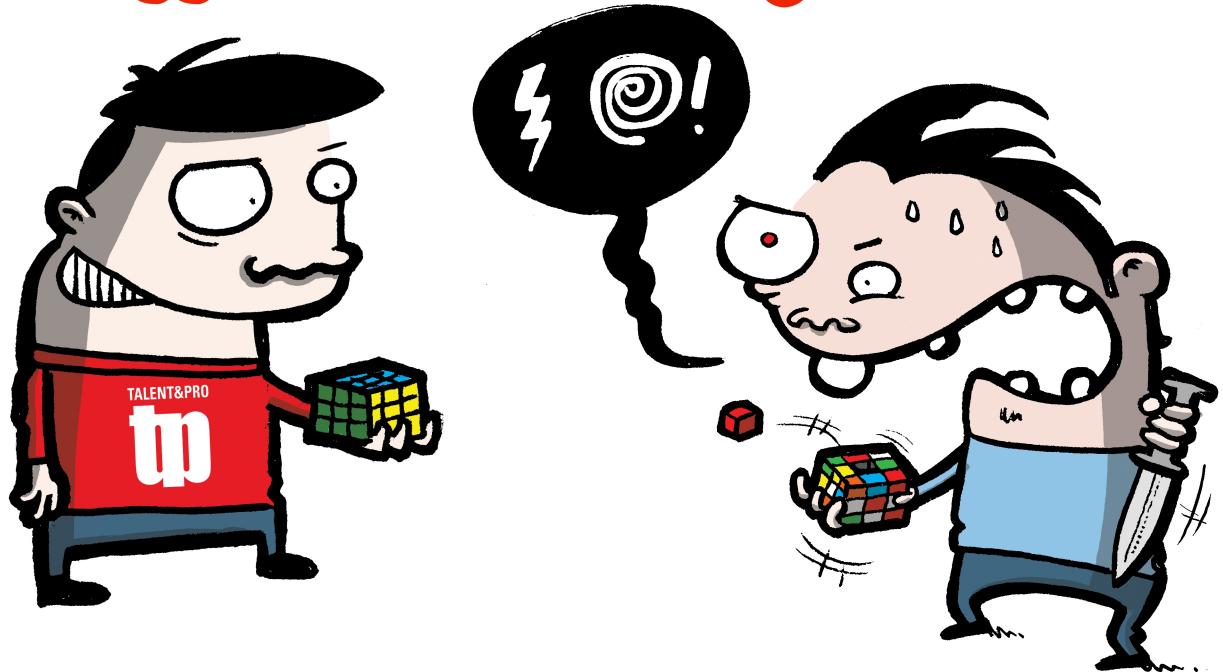
When I found out about the mistake, I was surprised that the projection was also a square, and asked myself why that was the case. Was this something accidental for this particular helix, or a general property of these turtle helices?

Note that $H(60^\circ, \arccos(1/3))$ has the (accidental) property that its axis passes through the center of the angle spanning rhombi, as you can see in Figure 10.2. This is not a general helix property, as you can see in Figure 10.3.



Figuur 10.3: Three segments $P_1P_2P_3P_4$ of $H(90^\circ, 90^\circ)$ with angle bisectors, angle-filling rhombi and (dashed) axis

Heb jij wél wiskundig inzicht?!



www.talentomtekiezen.nl

11. Machtige polynomen

Gerhard Woeginger, Technische Universiteit Eindhoven

These polynomials do not exist. Suppose (for the sake of contradiction) that there are six real polynomials P_1, \dots, P_6 for which

$$Q(x, y, z) = \sum_{k=1}^6 P_k^4(x, y, z)$$

Among all terms $x^a y^b z^c$ occurring in the polynomials P_k , pick one that lexicographically maximizes the values $a + b + c$, then a , and finally b . Then the term $(x^a y^b z^c)^4$ occurs in the sum with positive coefficients and cannot cancel out. We conclude that $a + b + c = 2$. Therefore every $P_k(x, y, z)$ has degree at most 2 and is of the form

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + b_1 yz + b_2 xz + b_3 xy + c_1 x + c_2 y + c_3 z + d.$$

Since $Q(-1, -1, -1) = 0$, we see that $P_k(-1, -1, -1) = 0$ for all k . In an analogous way, we see that the values $P_k(-1, 1, 1), P_k(1, -1, 1), P_k(1, 1, -1), P_k(-1, -1, 1), P_k(-1, 1, -1)$, and $P_k(1, -1, -1)$ all must be zero. Since $P_k(-1, -1, 1) = P_k(-1, -1, -1)$, we get $b_1 + b_2 = c_3$. Analogous observations yield $b_1 + b_3 = c_2$ and $b_2 + b_3 = c_1$. Since $P_k(1, 1, -1) = P_k(-1, -1, -1)$, we get $b_1 + b_2 = c_1 + c_2$. Analogous observations yield $b_1 + b_3 = c_1 + c_3$ and $b_2 + b_3 = c_2 + c_3$. These equations imply that $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, that $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, and that $d = -(a_1 + a_2 + a_3)$. Therefore each $P_k(x, y, z)$ is of the form

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 - (a_1 + a_2 + a_3).$$

We conclude $P_k(1, 1, 1) = 0$ and $Q(1, 1, 1) = 0$. Thats a contradiction.

Another solution: As above, we first observe that all six polynomials must be of degree at most 2. Then we claim that any real polynomial $P(x, y, z)$ of degree at most 2 satisfies

$$\begin{aligned} &P(1, 1, 1) + P(1, -1, -1) + P(-1, 1, -1) + P(-1, -1, 1) \\ &= P(-1, -1, -1) + P(-1, 1, 1) + P(1, -1, 1) + P(1, 1, -1). \end{aligned}$$

This claim is easily verified for the four polynomials 1, x , xy , and x^2 . Then symmetry proves the claim for y, z, xz, yz, y^2 , and z^2 , and taking linear combinations yields the claim in its full generality. Since $Q(-1, -1, -1) = 0$, we see that $P_k(-1, -1, -1) = 0$ for all k . In an analogous way, we see that all the values $P_k(-1, 1, 1), P_k(1, -1, 1), P_k(1, 1, -1), P_k(-1, -1, 1), P_k(-1, 1, -1)$, and $P_k(1, -1, -1)$ must be zero. Then the above claim yields that also $P_k(1, 1, 1) = 0$ for all k . Finally, since $Q(1, 1, 1)$ is the sum of the fourth powers of these values $P_k(1, 1, 1)$, we conclude that $Q(1, 1, 1) = 0$. Thats the desired contradiction.



Bij ORTEC zit je goed!

Bij ORTEC wordt wereldwijd gewerkt aan complexe optimalisatievraagstukken in diverse logistieke sectoren. Onze medewerkers helpen klanten gefundeerde beslissingen te nemen met gebruik van wiskundige modellen en het toepassen van simulatie- en optimalisatie-technieken.

ORTEC is een professionele, jonge organisatie met volop doorgroeimogelijkheden. Tijdens of na je studie kun je bij ons aan de slag. Je wordt direct op projecten ingezet en krijgt veel eigen verantwoordelijkheid. Wij bieden een werkomgeving met voldoende ruimte om je talenten te ontwikkelen binnen jouw interessegebied, zowel nationaal als internationaal.

Spreekt dit je aan en volg je een studie Econometrie, Operationele Research, Informatica of Wiskunde of heb je deze voltooid en heb je affiniteit met statistische modellen en de logistieke of financiële wereld, dan zit je bij ORTEC goed!

Vertel ons hoe jij je talent wilt inzetten voor de verbetering van onze producten en diensten en de verdere internationale groei van ORTEC.

Op onze website www.werkenbijortec.com vind je meer informatie over werken bij ORTEC en een actueel overzicht van vacatures en stage- of afstudeermogelijkheden. Zit jouw ideale functie of onderwerp er niet bij, stuur dan een open sollicitatie.

ORTEC Logistics
Groningenweg 6k
2803 PV Gouda
Tel.: 0182-540 500
recruitment@ortec.com

www.werkenbijortec.com

12. Complexe veeltermen

Arno van der Essen, Radboud Universiteit Nijmegen

i) Neem aan dat $P = 0$ met graad $d = 0$. We mogen aannemen dat $P = t^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i t^i$. We laten nu eerst zien dat we mogen aannemen dat alle c_i tot $\bar{\mathbb{Q}}$, de algebra ische afsluiting van \mathbb{Q} , behoren. Bekijk daartoe de universele veelterm

$$P_U(t) = t^d + \sum_{i=0}^{d-1} C_i t^i$$

waarbij de C_i nieuwe variabelen zijn. De veeltermring in deze variabelen met co effici enten in $\bar{\mathbb{Q}}$ noteren we als $\bar{\mathbb{Q}}[C]$. De?nieer

$$S_m(C) := \int_0^1 P_U(t)^m dt$$

en zij J het ideaal in $\bar{\mathbb{Q}}[C]$ voortgebracht door alle $S_m(C)$. Omdat het punt $c = (c_0, c_1, \dots, c_{d-1})$ een nulpunt is van alle $S_m(C)$ (want $S_m(c) = \int_0^1 P(t)^m dt = 0$) zit 1 niet in J . Uit de Nullstelensatz volgt dan dat J een nulpunt $a = (a_0, a_1, \dots, a_{d-1})$ in $\bar{\mathbb{Q}}^d$ heeft. Door P te vervangen door $P_a(t) = t^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i t^i$ zien we dat we mogen aannemen dat alle co efici enten van P tot $\bar{\mathbb{Q}}$ behoren. ii) Uit i) volgt dat alle co efici enten van P in een eindige lichaamsuitbreiding K van \mathbb{Q} zitten. Voor bijna alle niet-archimedische waarderingen v op K geldt dan dat $v(c_i) \geq 0$ voor alle i . Volgens Dirichlet bestaan er oneindig veel priemgetallen van de vorm $dm + 1$. Uit voorgaande twee opmerkingen volgt dan dat er bestaan een priemgetal p van de vorm $dm + 1$ en een niet- archimedische waardering v op K zodat $v(c_i) \geq 0$ en $v(p) = 1$.

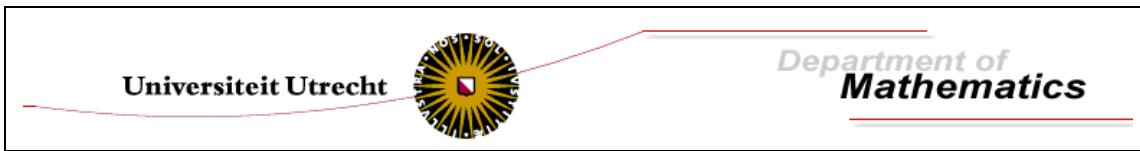
iii) Kies nu m , p en v als in ii). Uit het gegeven $\int_0^1 P(t)^m dt = 0$ leiden we nu een tegenspraak af. Om te beginnen

$$P(t)^m = t^{md} + \sum_{i=0}^{md-1} g_i(c) t^i$$

waarbij $g_i(c)$ een veelterm is in de c_i met gehele co efici enten. Door deze gelijkheid te integreren van 0 tot 1 vinden we

$$0 = \frac{1}{p} + \sum_{i=0}^{md-1} \frac{1}{i+1} g_i(c).$$

Merk nu op dat $v(\frac{1}{p}) = -1$ en dat alle termen onder het somteken een valuatie ≥ 0 hebben (want $v(c_i) \geq 0$ voor alle i en $md < md + 1 = p$), vinden we een tegenspraak.



Zeven goede redenen

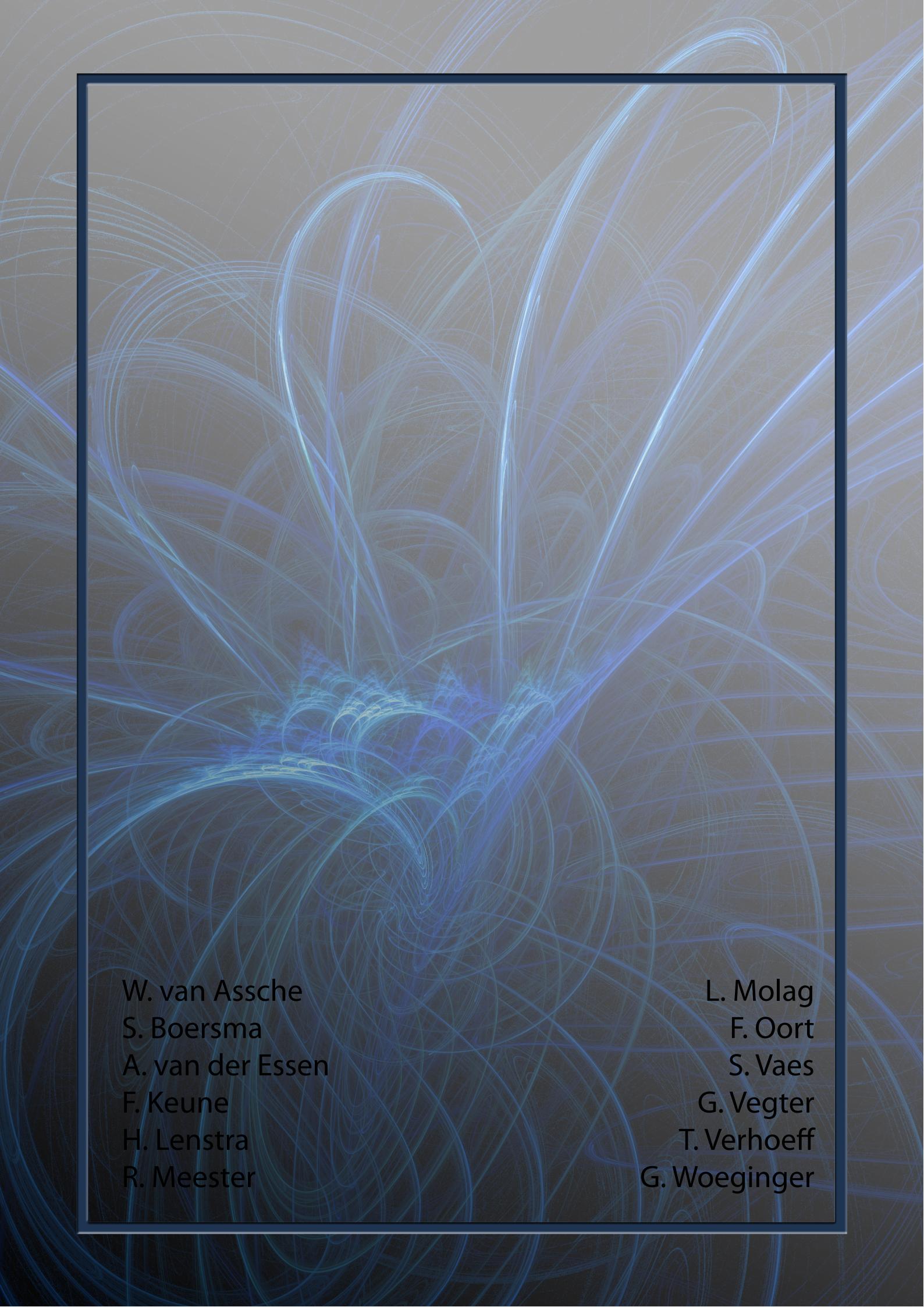
Zeven goede redenen om Wiskunde te studeren in Utrecht:

1. Breedste pakket aan keuzevakken
2. Dubbele majors met Natuurkunde en Informatica
3. Major Wiskunde en toepassingen
4. Aansluiting op masters uit andere vakgebieden
5. Hoog aangeschreven wetenschappelijke staf
6. Goede kans op een promotieplaats na je masters
7. Geschiedenis van de Wiskunde

Meer informatie:

- www.uu.nl/bachelor
- www.uu.nl/master
- Studieadviseur Marian Brands m.m.brands@uu.nl
- Onderwijsmanager Thijs Ruijgrok m.ruijgrok@uu.nl

En succes met de LIMO 2011



A complex, abstract fractal pattern serves as the background for the entire page. It consists of numerous thin, light blue and white lines that curve and twist in a self-similar, recursive manner, creating a sense of depth and motion. The lines are set against a dark, solid background.

W. van Assche
S. Boersma
A. van der Essen
F. Keune
H. Lenstra
R. Meester

L. Molag
F. Oort
S. Vaes
G. Vegter
T. Verhoeff
G. Woeginger