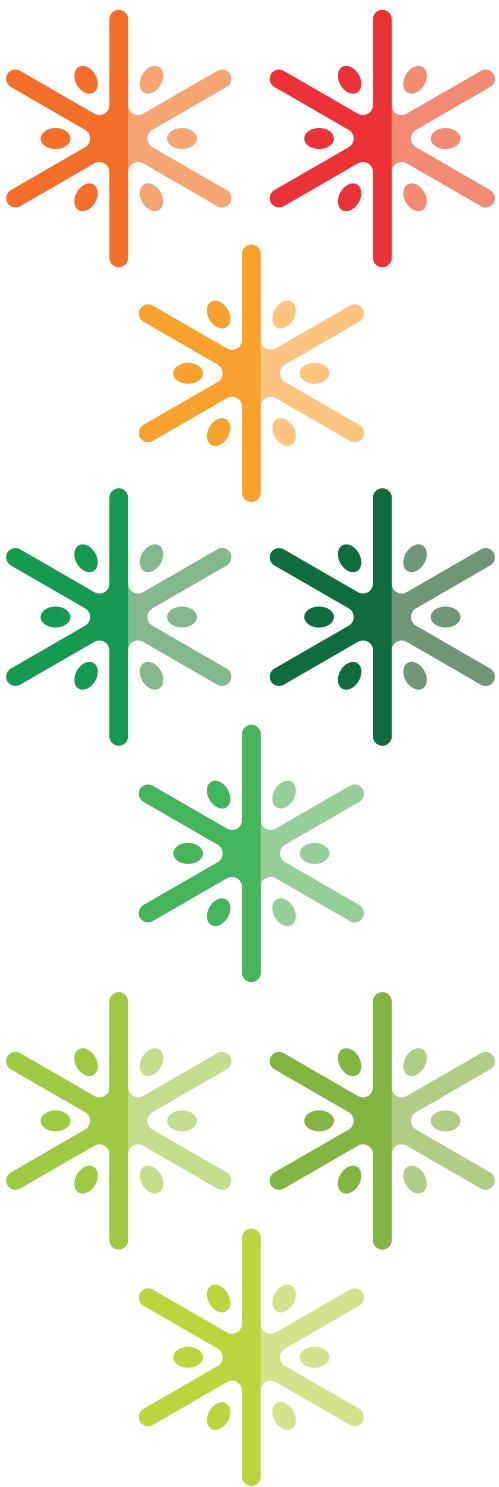




LIMO
2017



Landelijke Interuniversitaire
Mathematische Olympiade

19 mei 2017

Universiteit Nijmegen

Opgavenboekje



Dit opgavenboekje is een uitgave
van de **LIMO-commissie 2017**:

Rian Aarts, Dirk van Bree, Sanne Veenstra, Quinten Rutgers, Jeroen Winkel, Ilse Pool, Koen Timmermans.

E-mail: limo@math.ru.nl

Website: desda.org/limo

Opgaven: Harold de Boer, Raymond van Bommel, Fokko van de Bult, Josse van Dobben de Bruyn, Daniël Kroes, Hendrik Lenstra, Julian Lyczak, Leslie Molag, Quintijn Puite, Arne Smeets, Merlijn Staps.

Inhoudsopgave

1.	2017-demachten	4
2.	Periodieke rij	5
3.	Lastige limiet	6
4.	Kwadraten	8
5.	n vergelijkingen	9
6.	Stochastische wandeling	11
7.	Een vreemde som	12
8.	LIMO-loterij	14
9.	Doorgespiegelde uitdijingen	15
10.	Bijzondere differentiaalvergelijking	17
11.	Afschatting met verwachting	18
12.	Parallellogram	20

Regels en tips

Tijdens de wedstrijd gelden de volgende **regels**:

- Maak iedere opgave op een apart vel en voorzie deze van teamnaam en opgavenummer. Verzamel het werk per opgave in het daarvoor bestemde mapje.
- Hulpmiddelen zoals boeken, grafische rekenmachines, mobiele telefoons en laptops zijn niet toegestaan. Niet-grafische rekenmachines mogen gebruikt worden. Uiteraard mag er alleen gecommuniceerd worden met teamgenoten en met de organisatie.
- Voor drinken wordt tijdens de wedstrijd gezorgd. Er komt regelmatig iemand langs om vragen aan te kunnen stellen.

Tips die je kunnen helpen tijdens de wedstrijd:

- **Notatie.** Bij diverse opgaven is onderaan schuingedrukt de notatie en/of de terminologie toegelicht. Verder wordt met de natuurlijke getallen de verzameling $\{1, 2, 3, \dots\}$ bedoeld, die we noteren met \mathbb{N} .
- **Volgorde van moeilijkheid.** We hebben getracht de opgaven op volgorde van moeilijkheid te sorteren. Dat wil zeggen, we denken dat er voor de eerste opgaven gemiddeld meer punten zullen worden gehaald dan voor de latere opgaven. Besteed dus gemiddeld meer tijd aan opgaven met lagere nummers.
- **Lees goed wat er in de opgave staat.** Als je te snel begint, kun je belangrijke informatie over het hoofd zien. Soms staat in de vraagstelling een (verstoppe) hint die aangeeft wat je zou kunnen doen. Als je vastloopt, kun je ook besluiten de opgave nog eens goed door te lezen. Zorg ook dat je alle gegeven informatie gebruikt die in de opgave staat en vooral slechts de informatie die gegeven is.
- **Wees een team.** Verdeel de opgaven, zodat je geen dubbel werk doet, en vraag elkaar om hulp als je ergens niet uit komt. Bedenk waar ieders kwaliteiten liggen. Bekijk tijdens de wedstrijd elkaars werk; vaak vallen er nog foutjes uit te halen.
- **Sprokkel puntjes.** Als je er niet uit komt, schrijf dan op wat je wel hebt bewezen. Dat kan relevant zijn voor het bewijzen van de betreffende opgave. Als je op de goede weg zat, kun je daar vaak nog deelscores voor krijgen. Sowieso blijkt uit resultaten van voorgaande jaren dat niet vaak voor een opgave alle punten worden gescoord. Als je niet uit een deelopgave komt, mag je het resultaat dat daarin bewezen moet worden wel gebruiken om de volgende deelopgave op te lossen.
- **Blijf niet vastzitten in verkeerde gedachten.** Het is vaak verstandig een probleem vanuit een ander gezichtspunt te bekijken. Vaak helpt het gegeven termen om te schrijven of gegevens te manipuleren. Als je weinig vooruitgang boekt, kun je ook aan een andere opgave gaan werken en iemand anders naar jouw opgave laten kijken.
- **Vind een patroon.** Als je bijvoorbeeld iets moet bewijzen voor alle $n \in \mathbb{N}$, probeer dan kleine gevallen: kijk wat er gebeurt voor $n = 1$ of $n = 2$. Ontdek een patroon en bewijs dat dit patroon doorzet bij grotere getallen.
- **Houd het gezellig.** Het is niet zeker of je er goed van gaat presteren, maar op deze manier heb je in elk geval een leuke dag.

YOUR CHALLENGE STARTS HERE

FIND OUT IF TRADING OR TECH AT OPTIVER IS THE
CAREER CHALLENGE YOU'VE BEEN WAITING FOR

OPTIVER.COM

optiver 
CHALLENGES AWAIT



1. 2017-demachten

Prof. dr. Hendrik Lenstra, Universiteit Leiden

Stel dat G en H eindige groepen zijn en $f: G \rightarrow H$, $g: H \rightarrow G$ groepshomomorfismen. Bewijs dat het aantal elementen $x \in G$ met $g(f(x^{2017})) = x$ gelijk is aan het aantal elementen $y \in H$ met $f(g(y^{2017})) = y$.

2. Periodieke rij

Dr. Arne Smeets, Radboud Universiteit Nijmegen

Zij $\alpha \in [-1, 1]$. Definieer de rij $(x_n)_{n \geq 1}$ door $x_1 = \alpha$ en $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$. Voor welke waarden van α is deze rij uiteindelijk periodiek?

3. Lastige limiet

Josse van Dobben de Bruyn BSc, Universiteit Leiden

Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ definiëren we de functie $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$f_n(p) := n \left(1 - \left(\frac{n}{n+1} \right)^p \right).$$

Bewijs dat de rij functies $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ puntsgewijs convergeert en bepaal de limiet. (Met andere woorden: bewijs voor iedere $p \in \mathbb{R}$ dat de rij $\{f_n(p)\}_{n=1}^{\infty}$ convergeert en bepaal de limiet als functie van p .)

Mocht het je niet lukken om het algemene geval te bewijzen: je kunt maximaal 3 punten verdienen als je dit alleen bewijst voor het geval $p = -\frac{1}{2}$.



Create your tailor-made programme

- Choose from eight different tracks
- Small-scale courses and seminars in a stimulating community
- Prepare for a PhD through the Utrecht Geometry Centre Honours Programme
- Combine Mathematics with Theoretical Physics in an Honours Programme
- Interdisciplinary options with biology, complexity, geology, medicine, physics or education



**MASTER
YOUR
FUTURE**

AT Utrecht University

**More information:
www.uu.nl/masters/mathsci**

4. Kwadraten

Julian Lyczak MSc., Universiteit Leiden

Laat a en b twee cijfers zijn ongelijk aan 0 en bekijk de rij getallen

$$\overline{a}, \overline{ab}, \overline{abb}, \overline{abbb}, \dots$$

- a) Bewijs dat er in deze rij eindig veel kwadraten staan.
- b) Wat is het maximale aantal kwadraten dat kan voorkomen?

Hier staat $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ voor het decimale getal met cijfers a_n, a_{n-1} tot en met a_0 , oftewel

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

5. n vergelijkingen

Dr. Quintijn Puite, Technische Universiteit Eindhoven

Zij gegeven een natuurlijk getal n . Bekijk het volgende stelsel van n vergelijkingen in n reële onbekenden x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= 1 \\x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + \cdots + 2^{n-1}x_n &= 2^{n+1} \\x_1 + 3x_2 + 3^2x_3 + \cdots + 3^{n-1}x_n &= 3^{n+1} \\\vdots \\x_1 + nx_2 + n^2x_3 + \cdots + n^{n-1}x_n &= n^{n+1}\end{aligned}$$

Bewijs dat dit stelsel een unieke oplossing $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ heeft en bewijs dat

$$x_1 = \frac{1}{2}n(-1)^{n+1}(n+1)!.$$

Choose a bright future!



Industrial and Applied Mathematics

- Computational Science and Engineering
- Data Science in Engineering
- Discrete Mathematics and Applications
- Statistics, Probability, and Operations Research

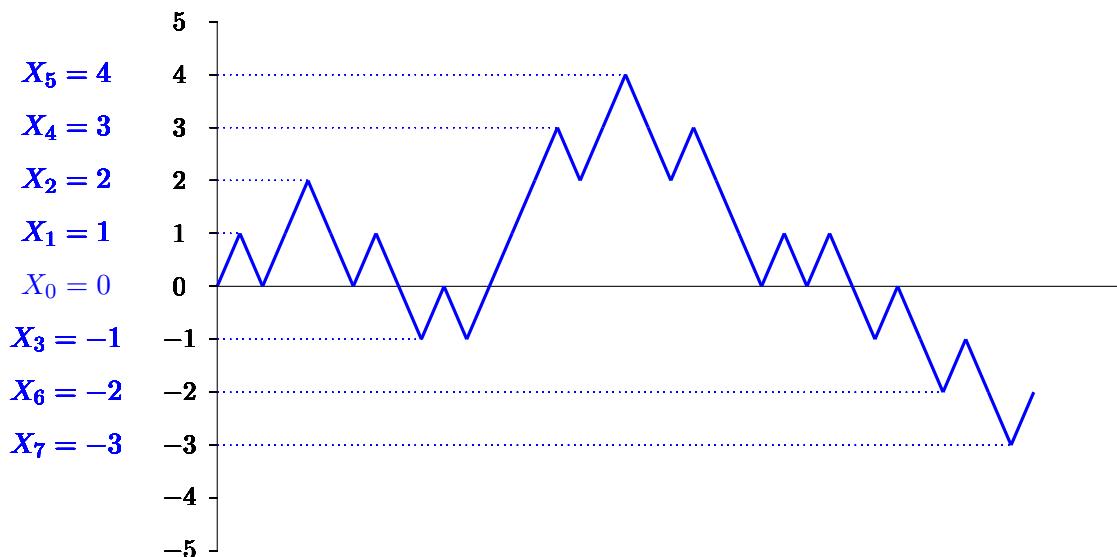


Check www.tue.nl/graduateprograms/iam

6. Stochastische wandeling

Merlijn Staps BSc., Universiteit Utrecht

We bekijken een simpele stochastische wandeling op de gehele getallen. Deze begint in 0 en zet telkens met kans $\frac{1}{2}$ een stap naar rechts en met kans $\frac{1}{2}$ een stap naar links (onafhankelijk van eerder gezette stappen). We definiëren $X_0 = 0$ en voor $k \geq 1$ definiëren we X_k als het eerste getal dat de wandeling bereikt dat verschillend is van elk van de getallen X_0, X_1, \dots, X_{k-1} (zie figuur).



Bepaal voor ieder natuurlijk getal n de kansverdeling die X_n volgt.

We gaan er hierbij bij de definitie van X_k vanuit dat de wandeling (uiteindelijk) minstens $k+1$ verschillende getallen bereikt; dit gebeurt met kans gelijk aan 1.

7. Een vreemde som

Drs. Raymond van Bommel, Universiteit Leiden

Zij n een natuurlijk getal en zij p een priemgetal. Bekijk de verzameling $\text{Mat}(\mathbb{F}_p, n)$ van alle $n \times n$ -matrices met coëfficiënten in \mathbb{F}_p .

- a) Bepaal

$$\sum_{A \in \text{Mat}(\mathbb{F}_p, n)} \text{tr}(A) \cdot \det(A) \in \mathbb{F}_p.$$

Beschouw nu een ondergroep H van de groep $\text{GL}(\mathbb{F}_p, n)$ van inverteerbare $n \times n$ -matrices met coëfficiënten in \mathbb{F}_p . Neem aan dat H de ondergroep van diagonaalmatrices bevat en dat $p > 3$.

- b) Bepaal alle mogelijke waarden van

$$\sum_{A \in H} (\text{tr}(A) \cdot \det(A))^2 \in \mathbb{F}_p.$$



Masteropleiding aan de Radboud Universiteit

Alle bacheloropleidingen van de Radboud Universiteit hebben een bijbehorende master, waar je zonder extra eisen kunt instromen. Door binnen je bachelor bepaalde keuzevakken te kiezen, kun je soms een andere master van de Radboud Universiteit volgen. Met het behalen van je masterdiploma mag je je Master of Science (MSc) noemen.

De masteropleiding Mathematics duurt twee jaar en wordt in het Engels aangeboden. In de master specialiseer je jezelf in een bepaald vakgebied en in een aantal vaardigheden. Je maakt een keuze voor een mastertrack die je goed voorbereidt op de arbeidsmarkt.

Mastertracks

Aan de start van je master maak je een keuze voor een mastertrack. Binnen de masteropleiding Mathematics kun je kiezen uit zeven mastertracks. Onderstaande tracks sluiten aan bij het wetenschappelijk onderzoek dat plaatsvindt binnen de Radboud Universiteit en die tot de internationale top behoort. Je kiest voor één van deze tracks als je het leuk vindt om fundamenteel of toegepast onderzoek te doen in de wiskunde. Als onderdeel van je master doe je twee onderzoeksstages onder begeleiding van een wetenschappelijk onderzoeker die ook docent is. Tenminste een onderzoeksstage doe je bij een onderzoeksgroep van de Radboud Universiteit, de tweede stage kun je doen bij een universiteit of bedrijf in binnen- of buitenland. Na je master kun je een vierjarig promotieonderzoek doen aan een universiteit, waarin je verder specialiseert in het doen van wetenschappelijk onderzoek, of je gaat werken bij voorbeeld een onderzoeksinstuut, een overheidsorganisatie of in het bedrijfsleven.



Mastertrack Algebra and Topology

Er zijn enkele specialismen binnen deze richting die elkaar wederzijds beïnvloeden en inspireren: algebraïsche Meetkunde, algebraïsche topologie, computeralgebra en logica.

Mastertrack Mathematical Physics

De mastertrack Mathematical Physics sluit aan op een bachelor wiskunde met minor natuurkunde (of omgekeerd), en natuurlijk helemaal op een dubbele bachelor natuurkunde en wiskunde.

Mastertrack Applied stochastics

Maatschappelijk richt deze specialisatie zich op zowel de medische wereld als het bedrijfsleven, bv via het onderdeel Statistics in Health en de Statistische Helpdesk van de Radboud universiteit.

8. LIMO-loterij

Dr. Arne Smeets, Radboud Universiteit Nijmegen

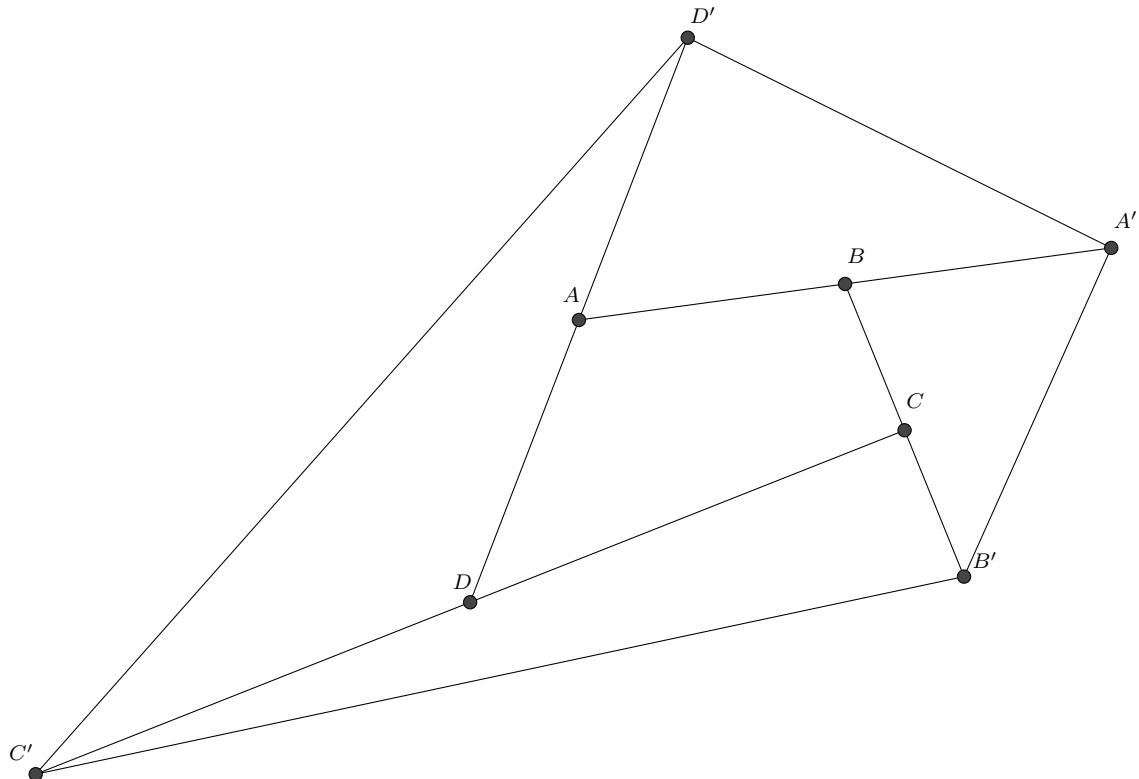
Op een LIMO-krasbiljet staan de getallen uit $S = \{1, 2, \dots, 100\}$. Bij aankoop van zo'n biljet dien je 10 verschillende getallen uit S te omcirkelen. Bij de trekking worden 10 verschillende getallen uit S getrokken. Een winnend biljet is er een met de eigenschap dat geen enkel van de getrokken getallen omcirkeld is. Hoeveel LIMO-biljetten moet je minstens kopen om er zeker van te zijn dat je minstens één winnend biljet hebt?

9. Doorgespiegelde uitdijingen

Ir. Harold de Boer, Transtrend BV

Zij $ABCD$ een convexe vierhoek. Dan definiëren we de doorgespiegelde uitdijing $ABCD$ door: A' is A gepuntspiegeld in B ; B' is B gepuntspiegeld in C , etc. Zie schets.

- a) Stel dat $ABCD$ een rechthoek of een ruit is. Bewijs dat de doorgespiegelde uitdijing een parallellogram is.
- b) Construeer een parallellogram $A'B'C'D'$ dat de doorgespiegelde uitdijing is van zowel een rechthoek als van een ruit, waarbij die rechthoek en die ruit niet vierkant zijn; of bewijs dat zo'n parallellogram niet bestaat.



We push
technology further

to make
robots
understand
humans



to let robots help
in healthcare

to print microchip
features that are
finer

to accelerate
artificial
intelligence

Do you dream of changing the world of innovation? Do complex technological challenges appeal to your imagination? We are looking for you. ASML always wants to get in touch with eager and curious students.

Join us at workingatasml.com/students

ASML

Be part of progress

10. Bijzondere differentiaalvergelijking

Leslie Molag MSc., Katholieke Universiteit Leuven

Stel dat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een niet-constante oplossing is van de differentiaalvergelijking $f''(x) = f(x)^{2017}$.

- a) Bewijs het bestaan van een continue functie $F : f(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$ en een $\lambda > 0$ zodanig dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$f'(x) = F(f(x)) \text{ of } f'(x) = -F(f(x)).$$

en bovendien

$$\int_{[\lambda, \infty) \cap f(\mathbb{R})} \frac{dy}{F(y)} < \infty.$$

- b) Bewijs dat er $a, b, c \in \mathbb{R}$ bestaan zodanig dat $g(x) = af(bx + c)$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking $g''(x) = g(x)^{2017}$ met $g(x) \geq \lambda$ en $g'(x) > 0$ voor alle $x \geq 0$.

Hint: bewijs dat f' hoogstens één nulpunt kan aannemen.

Onderscheid vervolgens de gevallen dat f' geen of één nulpunt heeft.

- c) Bewijs dat f niet bestaat.

Opmerking: Je mag het resultaat van (a) gebruiken bij (b) en de resultaten van (a) en (b) bij (c), ook als je die resultaten niet bewezen hebt.

11. Afschatting met verwachting

Dr. Fokko van de Bult, Technische Universiteit Delft

Als je met een zuivere munt gooit duurt het gemiddeld $2n$ worpen voor je voor de n 'de keer een kopgooit. Intuïtief komt dit omdat je gemiddeld een halve kop per worpgooit en $2n = n/\frac{1}{2}$. We gaan in deze opgave hetzelfde probleem bekijken voor algemene processen, en zien of deze intuïtie standhoudt.

Gegeven een rij X_i van identiek verdeelde, onafhankelijke stochasten met een verdeling die alleen positieve waarden aanneemt (dus $X_i \geq 0$) en met verwachting $\mu = EX_i > 0$. We definiëren gerelateerde stochasten Y_z (voor $z \in \mathbb{R}_{>0}$) als

$$Y_z = \min\{k : \sum_{i=1}^k X_i \geq z\}$$

Dus Y_z geeft het aantal keer aan dat je uit de verdeling van de X_i moet trekken totdat de som van de uitkomsten voor het eerst minstens z is. In het voorbeeld van de muntjes heeft X_i een Bernoulli verdeling met parameter $p = \frac{1}{2}$, en de stochast $Y_n - n$ (voor vaste gehele $z = n$) een negatief binomiale verdeling met parameters n en $\frac{1}{2}$.

Je mag voor deze opgave aannemen dat Y_z met kans 1 een eindige waarde aanneemt. Laat zien dat $EY_z \geq \frac{z}{\mu}$. Ofwel het verwacht aantal keer dat je moet trekken voor je z bereikt is minstens z gedeeld door de gemiddelde waarde van de trekking.

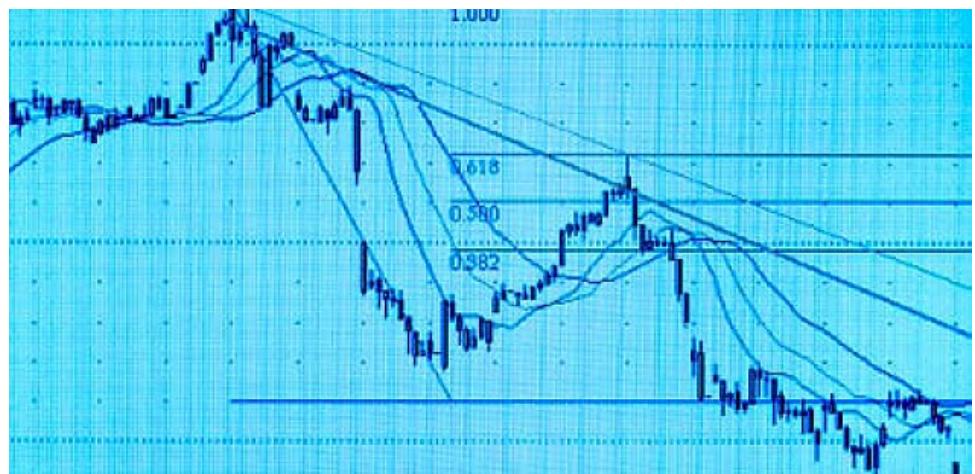
MSc Mathematics

KEY FACTS

- › Start programme:
1 Sep/Nov/Feb/Apr
- › Duration: 24 months
- › Language: English
- › Croho code: 66980

COURSES

- › Dynamical Systems and Chaos
- › Statistical Genomics
- › Geometry & Topology



GENERAL INFORMATION

How does a bank check whether your digital signature is a valid one? Do the planets move in stable orbits or will they eventually collide? How can you write an algorithm that automatically detects whether an email message is spam? The mathematics behind these questions is dealt within the Master's degree programme in Mathematics.

The Master's degree in Mathematics will provide you with the mathematical knowledge, skills and attitude needed to pursue a professional (research) career. The emphasis is on how to solve a problem by using abstraction and modelling, and to determine whether the problem can be solved by using existing mathematical theory or whether new theory should be developed. During the Master's programme, you will learn to think in a logical, systematic and problem-oriented way. These qualities are highly appreciated by employers.

The programme offers four specialisations:

- › Algebra and Geometry
- › Dynamical Systems and Analysis
- › Statistics and Probability

Within each specialisation you can choose for the variant Science, Business and Policy, which integrates insights into business, policy and management with your specific scientific discipline, thus preparing you for a variety of jobs in the business world and in policy organisations.

WHY CHOOSE US

- › For a career in science or a company
- › Acquired skills highly appreciated by employers
- › Informal community, small classes

Admission

- › Bachelor's degree in Mathematics or Applied Mathematics
- › Special programme available for holders of a relevant academic Bachelor's degree
- › Sufficient English proficiency on VWO level required

Please visit our [website](#) for detailed information

Career prospects

- › Analyst at bank or insurance company
- › In consultancy branch
- › At R&D department of companies, e.g. Philips or LogicaCMG
- › PhD, starting scientific career

More information

- Programme website
www.rug.nl/masters/mathematics
- Study advisor
Academicadvisor.math@rug.nl
- Facebook
[/sciencestudentsuniversityofgroningen](https://www.facebook.com/sciencestudentsuniversityofgroningen)

Application

Contact the study advisor to find out if you meet the admission requirements

You can apply online, please go to
www.rug.studielink.nl

Application deadline Dutch students:
2 months before you start the programme

12. Parallellogram

Daniël Kroes MSc., University of California, San Diego

Laat $\|\cdot\|$ een norm¹ op \mathbb{R}^2 zijn. Voor $x \neq y \in \mathbb{R}^2$ definiëren we

$$\ell(x, y) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - z\| + \|z - y\| = \|x - y\|\}$$

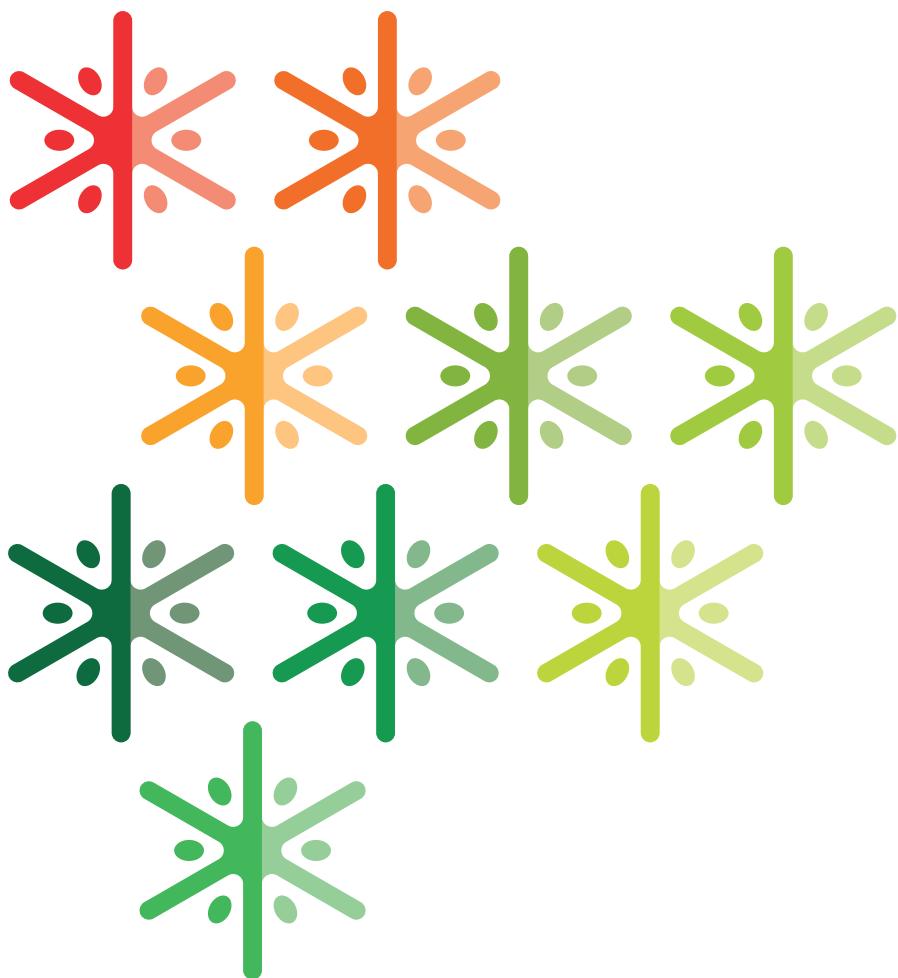
voor de verzameling punten z waarvoor gelijkheid geldt in de driehoeksongelijkheid.

- a) Zij z een punt op de lijn door x en y . Bewijs dat $z \in \ell(x, y)$ dan en slechts dan als z op het lijnstuk tussen x en y ligt.
- b) Stel dat $\ell(x, y)$ een punt z bevat dat niet op de lijn door x en y ligt. Bewijs dat de hele driehoek met hoekpunten x, y en z bevat is in $\ell(x, y)$.
- c) Stel dat w en z twee punten in $\ell(x, y)$ zijn, die niet op de lijn door x en y liggen, en aan dezelfde kant van deze lijn liggen. Bewijs dat xz en yw snijden in een punt s , en dat $s \in \ell(x, y)$.
- d) Bewijs dat $\ell(x, y)$ gelijk is aan een lijnstuk of een parallellogram.

Hint: je mag gebruiken dat elke norm op \mathbb{R}^2 equivalent is met de Euclidische norm. Specifiek betekent dit dat er reële getallen $c, C > 0$ zijn zodat voor elke vector $v = (a, b)$ geldt $c\sqrt{a^2 + b^2} \leq \|v\| \leq C\sqrt{a^2 + b^2}$. Met een parallellogram bedoelen we hier het tweedimensionale object bestaande uit de rand samen met het inwendige.

¹Herinner dat een *norm* $\|\cdot\|$ op \mathbb{R}^2 aan elke vector v in \mathbb{R}^2 een reëel getal $\|v\|$ toekent, zodanig dat

- $\|v\| \geq 0$ voor alle $v \in \mathbb{R}^2$;
- $\|v\| = 0$ dan en slechts dan als $v = 0$;
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ als $\alpha \in \mathbb{R}$ en $v \in \mathbb{R}^2$;
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ voor $u, v \in \mathbb{R}^2$ (de driehoeksongelijkheid).



Transtrend

Radboud University



Universiteit
Leiden



Universiteit Utrecht

TUDelft



VU VRIJE
UNIVERSITEIT
AMSTERDAM

TU/e Technische Universiteit
Eindhoven
University of Technology

GQT

KONINKLIJKE
HOLLANDSCHE MAATSCHAPPIJ
DER WETENSCHAPPEN

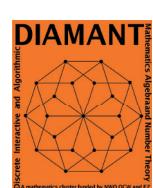
KNAW

rijksuniversiteit
groningen

UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

optiver

ASML



W.S.V. DESDA