

# Limo Opgaven

All Options

FLOW ■ TRADERS

TALENT&PRO



Universiteit Utrecht

vrije Universiteit amsterdam



UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM



Universiteit Leiden



Universiteit Twente  
de ondernemende universiteit



TU Delft

Radboud Universiteit Nijmegen



THOMAS STIELTJES INSTITUTE  
FOR MATHEMATICS



MATHEMATICAL  
RESEARCH  
INSTITUTE

MRI



Tweehonderd jaar  
Koninklijke  
Nederlandse  
Akademie van  
Wetenschappen

Magie van wetenschap

KWG  
Koninklijk Wiskundig Genootschap

U Utrechtse Universiteitsfonds  
Alumnibureau



# DON'T LOOK AT THE FLY

**FOCUS. NOTHING IS MORE IMPORTANT IN ELECTRONIC MARKET MAKING, WHERE EVERY SECOND COUNTS.**

Who are we? We're a dynamic team of traders, IT specialists, and professionals who're the best at what we do. We're peer-recognized as Europe's leading ETF market maker, trading on- and off-screen all day to provide the prices on which investors trade. We train our traders in-house and use custom-built technology, which means our successes are a joint effort from which everyone can profit. Our culture? Work hard and play harder. We offer a performance-based incentive scheme, training opportunities, catered lunch, fitness and entertainment facilities, chair massages, and luxury company outings. In addition, we offer the opportunity to work overseas. To find out more, check out our movies on [www.flowtraders.com](http://www.flowtraders.com).

**FLOW TRADERS IS LOOKING FOR JUNIOR TRADERS IN OUR AMSTERDAM HEADQUARTERS**

If you are interested in becoming one of our Junior Traders or you would like to attend our next Inhouse day in Amsterdam headquarters, send your CV (including grades) to [jobs@flowtraders.com](mailto:jobs@flowtraders.com).

For more information contact Manuela van der Mast, recruitment +31 20 799 6779.

**MAKING OUR MARK IN MARKET MAKING**

**FLOW ■ TRADERS**

---

## Inhoudsopgave

---

1.	Kaarten schudden	2
2.	Singuliere Waarde Decompositie en het Maxwell-spectrum	3
3.	Machtreeksen en matrices	6
4.	Tweemacht	9
5.	Driedimensionale som	11
6.	Gezellige grafen	13
7.	Borrel	14
8.	Enige combinatoriek van overaftelbare verzamelingen	16
9.	Een som van wortels	18
10.	Kansrekening	20
11.	Matrix kwadraat	22
12.	Lipschitz continuïteit	24

---

## 1. Kaarten schudden

*J.M.A.M. van Neerven, TU Delft*

---

Gegeven is een stapel van  $N$  speelkaarten, voorzien van de nummers 1 t/m  $N$ . Deze stapel wordt goed geschud en met de nummers naar boven op tafel gelegd. Stel dat  $M$  het nummer is dat op de bovenste kaart van de stapel staat. Dan nemen we de bovenste  $M$  kaarten en draaien de volgorde hiervan om. Vervolgens leggen we ze weer bovenop de oude stapel terug.

**Voorbeeld 1** We nemen  $N = 10$  en veronderstellen dat de stapel (van boven naar beneden gerekend) als volgt geschud is: 4-6-9-5-8-1-2-10-3-7. We moeten de eerste vier kaarten nemen en hun volgorde omdraaien. Dit resulteert in de nieuwe stapel 5-9-6-4-8-1-2-10-3-7.

### Vraag

Als we deze procedure steeds herhalen, komt dan altijd de kaart met nummer 1 op een zeker moment boven te liggen? Leg uit.

---

## 2. Singuliere Waarde Decompositie en het Maxwell-spectrum

*M.A. Botchev, Universiteit Twente*

Alle matrices die in deze opgave voorkomen hebben reële coëfficiënten. Een  $n \times n$  matrix  $U$  heet *orthogonaal* als

$$UU^T = U^T U = I_n$$

Hierin is  $I_n$  de  $n \times n$  identiteitsmatrix. In deze opgave hebben we de volgende lemmas nodig (deze kunnen zonder bewijs gebruikt worden):

**Lemma 1** *Elke  $m \times n$  matrix  $K$  met  $m \leq n$  kan geschreven worden als*

$$K = U\Sigma V^T$$

waarbij de  $m \times m$  matrix  $U$  en de  $n \times n$  matrix  $V$  orthogonaal zijn en de  $m \times n$  matrix  $\Sigma$  diagonaal is:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{met } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0.$$

De uitdrukking  $K = U\Sigma V^T$  noemen we dan de singuliere waarden decompositie van  $K$  en de diagonalelementen  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$  de singuliere waarden van  $K$ .

**Lemma 2** *Stel dat  $A$  een  $n \times n$  matrix is. Dan bestaat er een orthogonale  $n \times n$  matrix  $P$  zodanig dat  $PA$  dezelfde rijen heeft als  $A$  maar eventueel in een andere volgorde. Door de keuze van  $P$  kan elke gewenste volgorde van de rijen in  $PA$  verkregen worden. De matrix  $P$  is orthogonaal en heet een permutatiematrix. Voor de matrix  $AP$  geldt dat  $AP$  dezelfde kolommen als  $A$  heeft, eventueel in een andere volgorde (die door de keuze van  $P$  is bepaald).*

Twee van de Maxwellvergelijkingen (namelijk, de wetten van Ampère en Faraday) kunnen in een speciale, zogenoamde ruimtelijk-gediscretiseerde vorm geschreven worden als een stelsel van gewone differentiaalvergelijkingen:

$$y' = Ay \quad \text{met} \quad A = \begin{bmatrix} O_m & -K \\ K^T & -\alpha I_n \end{bmatrix} \quad \text{een } (m+n) \times (m+n) \text{ matrix,} \quad (2.1)$$

waarbij  $\alpha$  een positief reëel getal is,  $K$  een  $m \times n$  matrix is,  $O_m$  de  $m \times m$  nulmatrix is en  $I_n$  de  $n \times n$  identiteitsmatrix is.  $A$  kan dus als een  $2 \times 2$  blokmatrix beschouwen worden, bestaande uit de blokken  $O$ ,  $-K$ ,  $K^T$  en  $-\alpha I_n$ .

### Vraag

Laat zien dat stelsel (2.1) naar de volgende equivalente vorm getransformeerd kan worden:

$$\tilde{y}' = \tilde{A}\tilde{y} \quad \text{met} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_1 & & & & \\ \sigma_1 & -\alpha & & & & \\ & 0 & -\sigma_2 & & & \\ & & \sigma_2 & -\alpha & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & -\sigma_m \\ & & & & & \sigma_m & -\alpha \\ & & & & & & -\alpha \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -\alpha \end{bmatrix} \quad \text{een } (m+n) \times (m+n) \text{ matrix,}$$

waar  $Q\tilde{y} = y$ ,  $Q\tilde{A}Q^T = A$  en  $Q$  een orthogonale  $(m+n) \times (m+n)$  matrix is. Geef (met een bewijs) een uitdrukking voor de matrix  $Q$  en druk de eigenwaarden van Maxwellmatrix  $A$  uit in  $\alpha$  en  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ .

# Thomas Stieltjes Institute for Mathematics

---

The Thomas Stieltjes Institute for Mathematics is a Dutch research institute in mathematics and carries out research in four main areas of fundamental and applied mathematics:

- Algebra & Geometry
- Analysis
- Stochastics
- Operation Research

In the Institute participate:

- University of Amsterdam (UvA)
- Free University Amsterdam (VUA)
- Delft University of Technology (TUD)
- Eindhoven University of Technology (TUE)
- University of Leiden (UL)
- Tilburg University (UvT)

The Institute collaborates with

- the Centre for Mathematics and Computer Science (CWI) in Amsterdam.
- the European Institute for the Study of Randomness (EURANDOM) in Eindhoven.

For master- and Ph.D.-students the Stieltjes Institute organises each year a Stieltjesweek about a central theme in mathematics. Faculty members of the different universities present the lectures about such a new theme. Each Stieltjes phd-student receives a contribution of 250 euro in the printing costs of the thesis.

Each year a Stieltjes Prize is presented for the best Stieltjes thesis and the winner receives an amount of 1200 euro.

---

### 3. Machtreeksen en matrices

G.L.M. Cornelissen, Universiteit Utrecht

---

Deze opgaven gaan over groepen. De volgende definities kunnen handig zijn:

Een *groep* is een verzameling  $G$  met een associatieve bewerking  $\cdot$  die voldoet aan:

- $G$  is gesloten onder  $\cdot$ ;
- er is een element  $e \in G$  zó dat  $\forall g \in G$   $g \cdot e = e \cdot g = g$ , het eenheidselement;
- voor ieder element  $g \in G$  is er een element  $g^{-1} \in G$  zó dat  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ , de inverse;

Als  $H \subset G$  en  $H$  met de bewerking van  $G$  aan de eisen van een groep voldoet, heet  $H$  een *ondergroep* van  $G$ . Een ondergroep heet *normaal* als voor alle elementen  $h \in H$  geldt dat  $\forall g \in G$   $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$ .

Een afbeelding  $\psi$  van de groep  $\{G_1, \cdot\}$  naar  $\{G_2, \times\}$  heet een *groepshomomorfisme* als de groepsstructuur behouden is onder de afbeelding, dus als  $\psi(g \cdot h) = \psi(g) \times \psi(h)$ .

De *kern* van een groepshomomorfisme  $\psi$  is de deelverzameling  $K_\psi \subset G_1$  met:

$$K_\psi = \{k \in G_1 | \psi(k) = e_2\}$$

Hier is  $e_2$  heet eenheidselement van  $G_2$ .

We bekijken zogenaamde *formele machtreeksen* over de reële getallen  $\mathbb{R}$ . Dit zijn uitdrukkingen van de vorm  $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$  met  $a_n \in \mathbb{R}$  die we vermenigvuldigen als machtreeksen, maar we interesseren ons niet in de eventuele convergentie van de machtreeks.

We kunnen formele machtreeksen op de gebruikelijke manier optellen en vermenigvuldigen, maar in deze opgave interesseren we ons voor nog een derde mogelijke bewerking met machtreeksen, namelijk *samenstellen*. Als  $f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$  en  $g(t) = \sum_{m \geq 0} b_m t^m$ , dan is de samengestelde  $f \circ g$  van  $f$  en  $g$  gegeven door

$$(f \circ g)(t) := f(g(t)) = \sum_{n \geq 0} a_n (\sum_{m \geq 0} b_m t^m)^n.$$

Let op: de uitdrukking aan de rechterkant is niet altijd zelf een formele machtreeks. De samenstelling van twee machtreeksen is enkel gedefinieerd als de rechterkant van deze uitdrukking zinvol is als formele machtreeks.

Een machtreeks  $f$  is *inverteerbaar* als er een andere machtreeks  $g$  bestaat, zodat  $f \circ g = t$ .

- (a) Toon aan dat  $f = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$  inverteerbaar is als  $a_0 = 0$  en  $a_1 \neq 0$ .
- (b) Toon aan dat de formele machtreeksen  $f = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$  met  $a_0 = 0$  en  $a_1 \neq 0$  een groep vormen.

We noteren deze groep met  $\Gamma$ , en definiëren deelverzamelingen van  $\Gamma$  door

$$\Gamma^i := \{f \in \Gamma : f(t) = t + \sum_{n>i} a_n t^n\}$$

voor alle  $i \geq -1$ .

- (c) Toon aan dat alle  $\Gamma^i$  normale ondergroepen zijn van  $\Gamma$ .

We bekijken nu de verzameling  $B$  van inverteerbare  $2 \times 2$ -matrices van de vorm  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ . We definiëren een afbeelding

$$\varphi : B \rightarrow \Gamma$$

door

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{at}{ct+d} = \frac{a}{d}t - \frac{ac}{d^2}t^2 + \dots$$

(de “formele” Taylorontwikkeling van  $at/(ct+d)$  in  $t=0$ .)

- (d) Toon aan dat  $B$  een groep is onder vermenigvuldiging van matrices, dat  $\varphi$  een groeps-homomorfisme is, en bereken de kern van  $\varphi$ .
- (e) Bewijs dat ieder element  $f \in \Gamma$  een unieke decompositie heeft van de vorm

$$f = f_2 \circ g \text{ met } f_2 \in \Gamma^2 \text{ en } g \in \varphi(B).$$

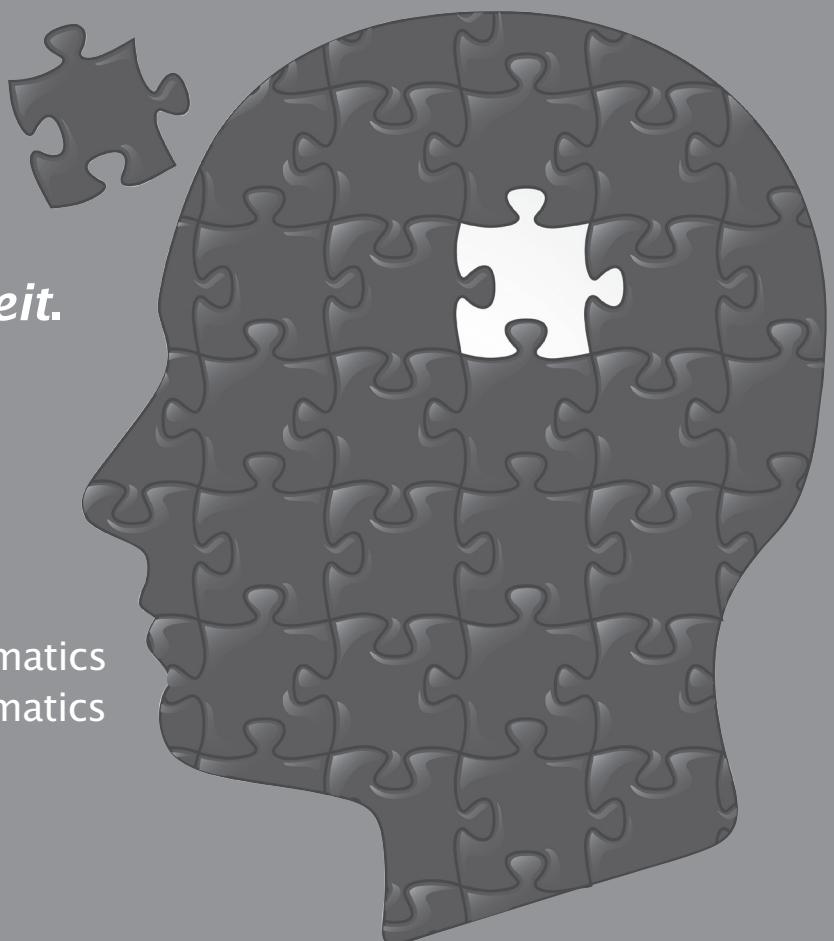
# Wat ga jij na je bachelor doen?

Van *het analyseren*  
*van bedrijfsproblemen*  
tot *het zoeken naar*  
*patronen in hersenactiviteit.*

Masteropleidingen aan de  
Vrije Universiteit Amsterdam:

- Mathematics
- Business Mathematics and Informatics
- Stochastics and Financial Mathematics

[www.vu.nl/masteropleidingen](http://www.vu.nl/masteropleidingen)



---

#### 4. Tweemacht

*H.C.A. van Tilborg, Technische Universiteit Eindhoven*

---

Bepaal alle oplossingen van

$$1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 2^k \quad (n \text{ en } k \text{ zijn positieve gehele getallen})$$

# MASTER'S PROGRAMME MATHEMATICS (MSc.)

## MORE INFORMATION

Mirte Dekkers  
[mdekkers@math.ru.nl](mailto:mdekkers@math.ru.nl)  
[www.ru.nl/master](http://www.ru.nl/master)



## THE DEPARTMENT THE DEPARTMENT

The Mathematics department currently has 14 staff members and a fluctuating population of about 10 PhD students and postdocs. This relatively small size of the department has considerable advantages for students. You will not drown in a large student pool, and contact with staff and fellow students is pleasant and very easy to make. We take a highly personal approach! The combination of local courses and lectures offered by the national Dutch Master Program in Mathematics guarantees a broad and high-level range of topics to choose from.

## CAREER PROSPECTS CAREER PROSPECTS

Our graduates are analysts and problem solvers who make contributions in many fields. Most find employment immediately after graduating, in a very wide range of jobs including business, academia, government and ICT.

## RESEARCH TOPICS RESEARCH TOPICS

Our Master's programme is closely related to the research carried out in the Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics (IMAPP). Nijmegen mathematicians have established many types of different relationships with other disciplines and research institutes. As is often the case with many research departments, the research topics are linked to individuals. Therefore, we invite you to look at the website [www.ru.nl/science/math](http://www.ru.nl/science/math), where you can find more information.

## YOU CAN CHOOSE FROM THE FOLLOWING SPECIALIZATIONS:

### • ALGEBRA AND LOGIC

Lattice-ordered algebras, topological dualities, algebraic logic, computer algebra in its many forms, affine algebraic geometry, intuitionistic and constructive mathematics, and, in collaboration with the Institute for Computing and Information Science (ICIS) an exciting interdisciplinary programme in the mathematical foundations of computer science.

### • MATHEMATICAL PHYSICS

Representation theory, symplectic geometry, integrable systems, special functions, non-commutative geometry, Topos theory, mathematical foundations of quantum theory, quantum probability, quantum computing, quantum field theory, groupoids.

### • STOCHASTICS

In particular stochastics applied to applied to neuroscience; a co-operation between the IMAPP and the Donders Institute for Brain, Cognition and Behaviour.

## PERSONAL TUTOR FOR A TAILOR-MADE PROGRAMME

Under the guidance of a personal tutor, our Master's programme offers you considerable freedom to follow your own interests. At the beginning of the 2 year programme you choose your specialization, within which you can select a research group. You will be allocated to a personal tutor, with whom you will decide the research area on which you wish to focus and the most appropriate specializations and subjects. In short, you will develop a tailor-made programme based on your own interests.

---

## 5. Driedimensionale som

*G.W.Q. Puite, Technische Universiteit Eindhoven*

---

Zij  $n \leq 0$  een geheel getal. Bewijs dat

$$\sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(-1)^m \cdot 2^{2\ell+2m-n} \cdot n!}{\ell! \cdot m! \cdot (k-m)! \cdot (n-k-\ell)!} = 1.$$

# Choose your master in Twente!



## Master Applied Mathematics

### Tracks:

- Mathematical Physics and Computational Mechanics
- Financial Engineering
- Industrial Engineering and Operations Research
- Systems and Control

## 3TU Master Systems & Control

[www.graduate.utwente.nl/am](http://www.graduate.utwente.nl/am)  
[www.graduate.utwente.nl/sc](http://www.graduate.utwente.nl/sc)

---

## 6. Gezellige grafen

V. van der Noort, Universiteit Utrecht

Een *graaf* is een paar  $(V, E)$  waar  $V$  en  $E$  eindige verzamelingen zijn en  $E \subset V \times V$ . We denken over de elementen van  $V$  na als punten en over die van  $E$  na als lijnen – een element  $\{v_1, v_2\} \in E$  beschouwen we als een lijn tussen de punten  $v_1$  en  $v_2$ .

In deze opgave noemen we een graaf *gezellig* als er een bijectie  $f : E \rightarrow \{1, \dots, |E|\}$  bestaat zodat voor iedere  $v \in V$  geldt dat:

$$\sum_{v \in e} f(e) \equiv 0 \pmod{|E|}$$

In normale mensentaal: een graaf heet gezellig als je de getallen 1 tot en met  $|E|$  op de lijnen kunt schrijven, op zo'n manier dat voor ieder punt de som van de waarden op de lijnen die in dat punt samenkommen deelbaar is door  $|E|$ .

We bekijken de graaf van de  $n$ -dimensionale kubus is  $C_n = (V_n, E_n)$ . Deze is gedefinieerd door:

$$V_n = \{0, 1\}^n$$

$$E_n = \{\{v_1, v_2\} \in V_n \times V_n : v_1 \text{ en } v_2 \text{ verschillen slechts in één coördinaat}\}$$

Bepaal alle  $n \in \mathbf{N}_{>0}$  waarvoor  $C_n$  gezellig is.

---

## 7. Borrel

*B. van Dalen, Universiteit Leiden*

---

De studievereniging wiskunde organiseert een borrel voor  $2n$  leden, waarbij  $n \geq 3$  een geheel getal is. Onder de  $2n$  aanwezigen zijn ook de praeses (voorzitter) en quaestor (penningmeester) van de vereniging. De borrel vindt plaats in twee verschillende ruimtes. In elk van de ruimtes kunnen precies  $n$  mensen borrelen. De borrel wordt georganiseerd in een positief geheel aantal van  $k$  rondes; in elke ronde zijn er  $n$  mensen in de ene ruimte en  $n$  mensen in de andere ruimte. Er wordt een schema opgesteld om bij elke ronde aan te geven hoe de  $2n$  leden over de twee ruimtes verdeeld zijn. Om de contacten tussen de leden te bevorderen, is het de bedoeling dat elk tweetal leden elkaar tijdens minstens één ronde tegenkomt. (Met tegenkomen bedoelen we dat de twee mensen in dezelfde ruimte borrelen.) Hierop is één uitzondering: de praeses en de quaestor kunnen elkaar niet luchten of zien en mogen daarom juist tijdens geen enkele ronde in dezelfde ruimte borrelen.

- (a) Bewijs dat er voor  $k = 3$  geen schema bestaat dat aan deze voorwaarden voldoet.
- (b) Bewijs dat er voor  $k = 4$  wel een schema bestaat dat aan deze voorwaarden voldoet.

# You can't change the world in an hour. But you can start here.

[www.master.tudelft.nl](http://www.master.tudelft.nl)



## Faculty of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science MSc Programmes

### Applied Mathematics

### Computer Engineering

### Computer Science

- Information Architecture

### Electrical Engineering

- Electrical Power Engineering
- Microelectronics
- Telecommunications

### Embedded Systems

### Media and Knowledge Engineering

- Bioinformatics

---

## 8. Enige combinatoriek van overaftelbare verzamelingen

*K.P. Hart, Technische Universiteit Delft*

---

Een *lineaire ordening* op een verzameling  $X$  is een relatie  $<$  met de volgende eigenschappen:

- i. Als  $x < y$  en  $y < z$  gelden, dan geldt ook  $x < z$ .
- ii. Voor ieder paar  $x, y \in X$  geldt precies één van de uitspraken  $x < y$ ,  $x = y$  of  $y < x$ .

Een *welordening* op  $X$  is een lineaire ordening waarvoor we de extra aanname maken dat iedere niet-lege deelverzameling  $A$  van  $X$  een kleinste element heeft. Dit element noteren we met  $\min(A)$ . Een welbekend voorbeeld is de verzameling der natuurlijke getallen. In deze opgave nemen we aan dat  $(X, <)$  een overaftelbare welordening is zodanig dat voor iedere  $x \in X$  geldt dat zijn voorgangeversverzameling

$$\hat{x} := \{y \in X : y < x\}$$

aftelbaar is.

- (a) Laat  $A \subset X$  aftelbaar zijn, toon aan dat er een  $x \in X$  bestaat met  $A \subseteq \hat{x}$ .
- (b) Zij  $f : X \rightarrow X$  een functie met de eigenschap dat  $f(x) < x$  voor alle  $x \neq \min(X)$ . Laat zien dat er een  $y \in X$  bestaat zó dat

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X : f(x) = y\}$$

overtaftelbaar is.

- (c) Als  $\mathcal{F}$  een overaftelbare familie *eindige* deelverzamelingen van  $X$  is, bewijs dat er een eindige verzameling  $R \subset X$  en een overaftelbare deelfamilie  $\mathcal{G}$  van  $\mathcal{F}$  bestaan met de eigenschap dat  $G_1 \cap G_2 = R$  voor elk tweetal verschillende elementen  $G_1$  en  $G_2$  van  $\mathcal{G}$ .
- (d) Kies voor iedere  $x \in X$  een eindige deelverzameling  $F_x$  van  $X$  met  $x \notin F_x$ . Laat zien dat er een overaftelbare deelverzameling  $A$  van  $X$  bestaat zó dat  $F_x \cap A = \emptyset$  als  $x \in A$ .

# Master Mathematics

Het Mathematisch Instituut streeft naar excellentie in onderzoek én onderwijs.

Als student maak je deel uit van een van de toonaangevende onderzoeksgroepen van het instituut, met persoonlijke en informele begeleiding van de staf.

Zo maken studenten en docenten samen onze opleiding, gedreven door hun interesse, expertise en goede contacten in de wetenschappelijke wereld en het bedrijfsleven.

Voor een Master Mathematics is Leiden een uitstekende keuze!

De Universiteit Leiden biedt vijf mastertracks aan binnen de Master Mathematics:

**Algebra, Geometry and Number Theory**

**Applied Mathematics**

**Mathematics and Science Based Business**

**Mathematics and Education**

**Mathematics and Communication**

Een internationale of interdisciplinaire invulling, bijvoorbeeld met natuurkunde, astronomie of levenswetenschappen, kun je in overleg realiseren.

Meer weten?

[voorlichting@math.leidenuniv.nl](mailto:voorlichting@math.leidenuniv.nl)



Universiteit Leiden

[www.mastersinleiden.nl](http://www.mastersinleiden.nl)

---

## 9. Een som van wortels

*H. Lenstra, Universiteit Leiden*

---

Stel dat  $x$ ,  $y$  en  $z$  positieve gehele getallen zijn met  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{z}$ . Bewijs dat er een positief geheel getal  $w$  is met  $z = \text{ggd}(x, y) \cdot w^2$ .



# WWW.STUDEREN.UVA.NL

## BIJ DE UVA MAAK JE WERK VAN JE MASTER

Kiezen voor een bètamaster aan de Universiteit van Amsterdam betekent kiezen voor een inspirerende master. Want de onderzoeksresultaten van vandaag verwerken UvA-wetenschappers in de colleges van morgen.



### Masters in Mathematics

- Mathematics
- Mathematical Physics
- Stochastics and Financial Mathematics

De masters binnen wiskunde aan de UvA duren twee jaar en zijn Engelstalig. De masters Mathematics en Stochastics and Financial Mathematics worden verzorgd in samenwerking met de Vrije Universiteit Amsterdam. Er wordt ook een dubbele master Mathematics met Econometrics aangeboden.

### Onderwijs door toponderzoekers

Als je instroomt in een master binnen wiskunde aan de UvA dan kun je college krijgen van toponderzoekers als Spinozaprijswinnaars prof. dr. Robbert Dijkgraaf (Mathematische fysica) en prof. dr. Lex Schrijver (Discrete

wiskunde en optimalisering). Bovendien verzorgt internationaal toponderzoeker prof. dr. Nicolai Reshetikhin van de University of California in Berkeley sinds 2008 een college binnen de master Mathematical Physics.

### Wiskundig onderzoek aan de UvA

Het wiskundig onderzoek aan de UvA vindt plaats binnen het Korteweg-de Vries Instituut voor wiskunde (KdVI). Het onderzoek strekt zich uit van zuivere wiskunde, inclusief logica, tot toegepaste wiskunde, statistiek en financiële wiskunde. Binnen het Instituut voor Bedrijfs- en Industriële Statistiek (IBIS) dat opereert binnen het bedrijfsleven, wordt onderzoek gedaan in de industriële statistiek. Tevens is de UvA de enige algemene universiteit in Nederland met een leerstoel Numerieke wiskunde.

### Prof. dr. Robbert Dijkgraaf

Hoogleraar Mathematische fysica aan de UvA

*'Onze bètafaculteit is the place to be. Je krijgt geen saaie logaritmesommetjes, maar leert al snel om na te denken over de lekkere hapjes in de wis- en natuurkunde en komt in aanraking met het nieuwste onderzoek. Het zijn immers de twintigers die in de bètawetenschappen voor de grote doorbraken zorgen.'*

### Voor meer informatie:

[www.studeren.uva.nl/science-masters](http://www.studeren.uva.nl/science-masters)  
[www.science.uva.nl/math](http://www.science.uva.nl/math)

---

## 10. Kansrekening

*R.W.J. Meester, Vrije Universiteit Amsterdam*

---

Gegeven is een rijtje  $a_1, a_2, \dots$  van positieve reële getallen. Laat verder  $X_1, X_2, \dots$  onafhankelijke, gelijkverdeelde stochastische grootheden zijn met  $P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = p$  waarbij  $0 < p \leq 1$ . Laat zien dat als  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ , er geldt dat

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n = \infty\right) = 1,$$

met andere woorden, als we elke term met gelijke kans ( $< 1$ ) weglaten blijft een divergente reeks met kans 1 divergent.



## Koninklijk Wiskundig Genootschap

**Het Koninklijk Wiskundig Genootschap is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde en iedereen die de wiskunde een warm hart toedraagt.**

**In 1778 opgericht onder het motto 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskunde-vakvereniging.**

### **Het KWG:**

- publiceert voor leden het kwartaalblad Nieuw Archief voor Wiskunde
- publiceert een tweewekelijkse elektronische nieuwsbrief met wiskunde-agenda
- geeft het wiskundetijdschrift voor jongeren Pythagoras uit
- organiseert jaarlijks het Nederlands Mathematisch Congres, het Wintersymposium voor leraren en het Najaarssymposium
- zorgt samen met KWG-sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde dat de jaarlijkse Studiegroep Wiskunde met de Industrie georganiseerd wordt
- sponsort Vierkant voor Wiskunde en Epsilon Uitgaven
- ondersteunt via de NOCW verschillende activiteiten voor jongeren, zoals de Wiskunde Olympiade, Wiskunde A-lympiade, Kangoeroe wedstrijden, Universitaire Olympiade en de Vierkant kampen
- reikt eens per drie jaar de Brouwermedaille uit aan een toonaangevend wiskundige
- onderhoudt een database van Nederlandse wiskundigen op de KWG-website
- verzorgt de Wiskunde PersDienst - een initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en het KWG
- helpt via het project 'nationale PR-medewerker wiskunde' de wiskunde in de media te brengen
- heeft als doel de wiskunde te bevorderen en haar beoefening en toepassingen aan te moedigen
- vertegenwoordigt de Nederlandse wiskundige gemeenschap in binnen- en buitenland.

### **Lid worden?**

**Pas afgestudeerden en studenten die net hun propedeuse hebben gehaald, kunnen eenmalig een jaar lang gratis lid worden.**

**Kijk op [www.wiskgenoot.nl](http://www.wiskgenoot.nl) of stuur een e-mail aan de ledenadministratie, [admin@wiskgenoot.nl](mailto:admin@wiskgenoot.nl)**

---

## 11. Matrix kwadraat

*F. Beukers, Universiteit Utrecht*

---

Stel  $M$  is een  $n \times n$  matrix van rang 1. Laat zien dat

$$M^2 = (\det(I + M) - 1)M.$$

# Realize your master plan

Universiteit Utrecht



[Faculty of Science  
Mathematics]

**Master's programmes**

**Mathematical Sciences**

**Scientific Computing**

**Stochastics &**

**Financial Mathematics**

**[www.math.uu.nl](http://www.math.uu.nl)**

---

## 12. Lipschitz continuïteit

*S.J. Janssens, Universiteit Utrecht*

---

Laat  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  een continu differentieerbare functie zijn met de eigenschap dat er een  $c > 0$  is zodat

$$|xf(x) - yf(y)| \leq c \cdot |x - y| \quad (12.1)$$

voor iedere  $x, y \in \mathbb{R}$ . Bewijs dat  $f$  Lipschitz continu is. Dat wil zeggen: Laat zien dat er een  $\tilde{c} > 0$  bestaat zodat

$$|f(x) - f(y)| \leq \tilde{c} \cdot |x - y| \quad (12.2)$$

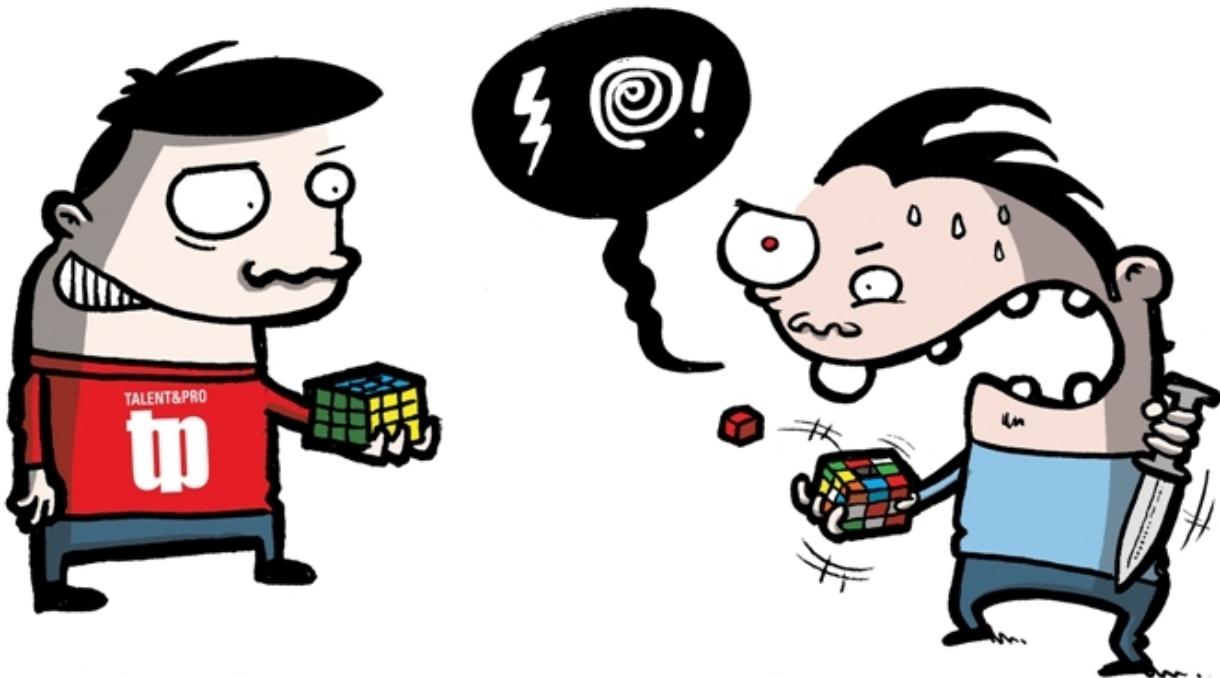
voor iedere  $x, y \in \mathbb{R}$ .

# Life is All about Options...

$$((4 + 3)^2 + 4) / 1/4 = \dots \quad \sqrt{576 + 11 \times 3^2} = \dots$$

$$11 + 6^3 = \dots \quad \sqrt{196} = \dots$$





## Talent om te kiezen

**Werken met cijfers: dát is wat je leuk vindt!**

Puzzelen en zoeken naar de juiste oplossing, het uitpluizen van ingewikkelde formules en complexe berekeningen maken. Natuurlijk kun je met jouw bèta-achtergrond als onderzoeker of docent aan de slag. Misschien doe je dat zelfs al. Toch zoek je nét iets anders. Een baan in het bedrijfsleven biedt nieuwe perspectieven: hier komt jouw wiskundig inzicht namelijk goed van pas!

### Talent&Pro Actuarieel

Talent&Pro richt zich op jouw ontwikkeling tot Actuarieel Rekenaar, Actuarieel Analist en Actuaris. In dit vakgebied pas je jouw wiskundig inzicht toe op vraagstukken in het bedrijfsleven. De opleiding die je daarvoor volgt, biedt Talent&Pro je aan in samenwerking met het Actuarieel Instituut. Daarnaast volg je ook verschillende vaardigheidstrainingen, zoals Management Development en Communicatie (beide post-hbo), zodat je in de praktijk nóg beter presteert.

### Persoonlijke ontwikkeling

Jouw persoonlijke ontwikkeling staat centraal bij Talent&Pro. De hele organisatie, van persoonlijke coach tot je ruim 300 collega's, heeft al sinds de oprichting in 1999 de missie: mensen ontwikkelen voor de markt. Dat houdt in dat Talent&Pro je in de eerste jaren van je carrière begeleidt en je helpt je passies en talenten te ontdekken, zodat je gericht kunt werken aan jouw ambities.

### Talent&Pro in de praktijk

Gemiddeld werk je per jaar aan 3 verschillende opdrachten bij onze relaties in het bank- en verzekeringswezen, bij pensioenfondsen en actuariële adviesbureaus. Er is genoeg mogelijkheid om de ervaring die je daar opdoet uit te wisselen met collega's. Daarvoor worden verschillende uitjes georganiseerd, zoals een filmpremière op het Nederlands Film Festival, een skivakantie of gewoon gezellig een avondje borrelen.

### Solliciteren

Voor ambitieuze Talenten en Pro-ers is altijd plek bij Talent&Pro. Spreekt het bovenstaande jou aan, ben je in het bezit van rijbewijs B en woon je in centraal Nederland of ben je bereid te verhuizen? Stuur dan een motivatie met je CV naar recruitment@talent-pro.com of kom een keer kennismaken tijdens een Castingdag op ons kantoor! Kijk ook op onze website [www.talentomtekiezen.nl](http://www.talentomtekiezen.nl) voor alle vacatures!