

Opgaven

LIMO

2007



LIMO 2007 wordt mogelijk gemaakt door:



Universiteit Utrecht



Universiteit Twente
de ondernemende universiteit



Koninklijke
Nederlandse
Akademie van
Wetenschappen

MATHEMATICAL
RESEARCH
INSTITUTE
MRI

Hoofdsponsor:

Hewitt

THOMAS STIELTJES INSTITUTE
FOR MATHEMATICS



Deloitte.

Optiver

DERIVATIVES TRADING



Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek
Exacte Wetenschappen

”Don’t ask yourself if it’s a long road. Ask yourself if it’s a good journey.”

Sidney Poitier

Bèta's op zoek naar meer dan boeiend werk, helpen we goed op weg.

Hewitt Associates is een wereldwijd opererende HRM Consulting en Outsourcings-organisatie met zo'n 23.000 mensen in meer dan veertig landen. In Nederland (350 collega's) helpen we onze klanten met actuariel advies, pensioenuitvoering en complete HRM-consultancy. We doen ons werk met passie, wat bij ons staat voor intellectuele uitdagingen, optimale kwaliteit en interessante klanten. Maar ook voor plezier in je werk, groei en een eigen koers.

We zijn een bedrijf waarvan je mag verwachten dat het weet wat mensen beweegt in hun werk en wat ze in een carrière zoeken. Daarom vind je hier geen verhaal over targets en hoe we telkens weer weten die te bereiken. De weg erheen vinden we veel belangrijker, omdat die het beste in mensen boven brengt. Bij Hewitt is dat een pad dat je in hoge mate zelf uitstippelt. En waar elke bestemming een nieuw begin is.

Ben jij afgestudeerd in een bétarichting? En heb je belangstelling voor pensioen- en actuariel advies? Zouden jouw adviezen ook miljoenen kunnen besparen? Ambieer je werk op een hoog analytisch niveau, waarin je alle ruimte krijgt om jezelf te ontwikkelen? En ben jij pas tevreden als de klant dat is? Dan is Hewitt voor jou de juiste optie.

We zijn voortdurend op zoek naar mensen die -net als wij- voor de beste kwaliteit gaan. Die persoonlijke en professionele groei belangrijk vinden. Die eigenzinnigheid combineren met teamgeest. En die hun eigen weg kiezen. We helpen jou op het carrièrepad dat aansluit op jouw talenten en ambities en we coachen je op de weg die je zelf uitzet. Bij ons vind je ruimte voor initiatief, continue uitdagingen, een informele cultuur én mogelijkheden om werken en studeren te combineren. Bij ons mag je, sterker nog, móet je jezelf zijn. Want pas dan haal je het beste uit jezelf. Pas dan ben je in staat om je eigen koers uit te zetten.

Meer informatie over de diverse functies bij Hewitt Associates vind je op www.hewitt.nl. Een brief met CV kun je sturen naar Hewitt Associates B.V., ter attentie van Linda Willemsen, afdeling Human Resources, postbus 12079, 1100 AB Amsterdam, of per mail naar nlpz@hewitt.com.

Hewitt

Kies je eigen weg bij Hewitt

Hewitt is gevestigd in Amsterdam, Eindhoven en Rotterdam.

Voorwoord

Als je braaf eerst het voorwoord van de opgaven leest, voordat je ze gaat maken, raad ik aan dit voorwoord over te slaan en na het lezen van de belangrijke informatie over de wedstrijd gelijk met de opgaven te beginnen. Achteraf kun je altijd nog het voorwoord lezen.

Voor de derde Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade zijn jullie nu allemaal tezamen in Utrecht. Als commissie hopen we dan ook dat na vandaag Utrecht niet alleen bekend zal staan als stad van de Dom, maar ook als stad waar in 2007 de LIMO werd gehouden. Het jaar aan voorbereiding, met al zijn meevalters en tegenvalters, is natuurlijk iets waar we met plezier op terugkijken, maar uiteindelijk is de wedstrijd zelf het hoogtepunt van ons werk als commissie.

Wij hopen dan ook dat jullie erg van de dag tot nu toe genoten hebben, en dat het wedstrijd zelf en hetgeen wat daarop volgt alleen maar beter zal worden. Toch gaat LIMO niet alleen om plezier. Er is een reden dat er geen springkussen of clowns aanwezig zijn (hetgeen wel overwogen is door de commissie). Uiteindelijk is LIMO toch vooral een krachtmeting tussen de top van de Nederlandse wiskundestudenten en een mooie gelegenheid om elkaar te ontmoeten en hopelijk beter te leren kennen. Wij hopen dat de borrel en het diner voor dat laatste meer dan genoeg mogelijkheden biedt.

Toch is deze hele dag niet in een wonderlijke vorm van *Generatio spontanea* uit zichzelf uitstaan. Zonder de inzet en inspanningen van een grote groep was deze dag er nooit geweest. In het bijzonder willen we de opgavenmakers bedanken, want hun opgaven vormen toch de kern van de LIMO. Ook willen we sponsoren bedanken, die deze dag financieel mogelijk gemaakt hebben. Een bijzondere sponsor is de Universiteit Utrecht, die ons de beschikking gaf over ongeveer een heel gebouw aan zalen voor de wedstrijd.

Sander Kupers
Voorzitter LIMO 2007

Belangrijke informatie over de wedstrijd

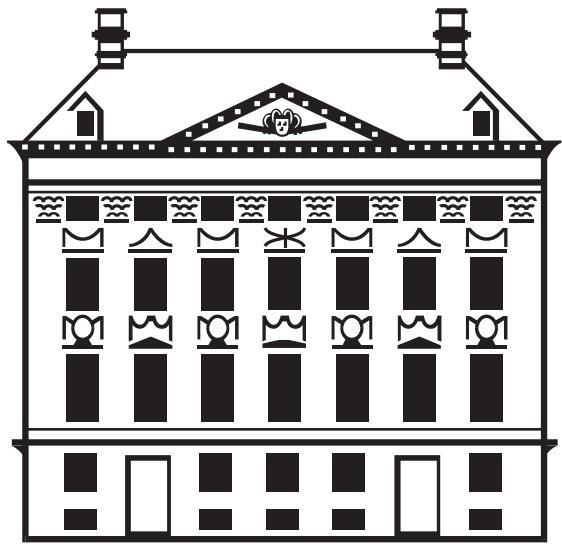
De wedstrijd duurt drie uur en tijdens de wedstrijd zal de commissie jullie natuurlijk van de nodige koffie, thee en koekjes voorzien. Na de drie uur worden de opgaven ingenomen en terwijl jullie als deelnemers van een borrel genieten, worden jullie antwoorden door de opgavenmakers nagekeken. De uitslag en prijsuitreiking volgen direct na de borrel, voordat we aan het diner beginnen.

- Maak elke opgave op een apart vel.
- Schrijf op alles wat nagekeken moet worden je teamnaam.
- Het gebruik van een gewone of een grafische rekenmachine is toegestaan. Geadvanceerde technologische hulpmiddelen (laptops, mobiele telefoons) en boeken zijn niet toegestaan.

Veel succes,

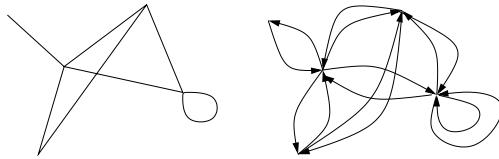
De organisatie van LIMO 2007:

Elke Ballemans
Esther Bod
Johan Konter
Sander Kupers
Johannes Steenstra



Koninklijke
Nederlandse
Akademie van
Wetenschappen

Stel dat X een eindige samenhangende graaf is met hoekpunten H en zijden Z . (Dus H is een eindige verzameling en Z een familie ongeordende paren hoekpunten. “Samenhangend” betekent dat er voor elke twee hoekpunten $x, y \in H$ een reeks zijden $\{\{x_i, y_i\} \in Z\}_{i=0}^n$ bestaat met $x_0 = x, y_{i-1} = x_i$ ($i = 1, \dots, n$) en $y_n = y$.) In deze graaf kunnen meervoudige zijden voorkomen, d.w.z. dat er meer dan één zijde tussen twee hoekpunten kan liggen. In de oorspronkelijke graaf zijn de zijden niet georiënteerd. Beschouw een nieuwe graaf X^+ die dezelfde hoekpuntenverzameling heeft als X , maar waarin elke (niet georiënteerde) zijde uit X vervangen wordt door twee (in elke mogelijke richting) georiënteerde zijden in X^+ (zie Figuur 1.1 voor een voorbeeld). Als $e = (x, y)$ zo’n georiënteerde zijde is, noteer de corresponderende omgekeerde zijde als $\bar{e} = (y, x)$.



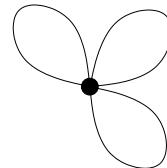
Figuur 1.1: Een graaf X (links) en de bijbehorende georiënteerde graaf X^+ (rechts)

Stel dat de oorspronkelijke graaf m (niet-georiënteerde) zijden heeft. We maken een $2m$ -dimensionale reële vectorruimte V met als basis de georiënteerde zijden van X^+ , en bekijken daarop een lineaire operator $T : V \rightarrow V$ die op deze basis gegeven is door

$$T(e) := \sum e'$$

waarbij de som loopt over alle georiënteerde zijden e' van X^+ zodat het eindpunt van e het beginpunt van e' is, maar $e' \neq \bar{e}$. (Je mag de zijden van X^+ nummeren als e_1, \dots, e_{2m} en deze beschouwen als de standaard basisvectoren in \mathbb{R}^{2m} .) Het gaat ons om het bepalen van $K_X := \ker(I - T)$, waarbij I de identiteitsafbeelding is.

- (a) Bepaal $\dim K_X$ als X een graaf is met precies één hoekpunt dat met zichzelf verbonden is door $g > 0$ enkelvoudige lussen (zie figuur 1.2), als functie van g .



Figuur 1.2: Een graaf met één hoekpunt en g lussen

Stel nu dat c een gesloten lus is in een willekeurige eindige samenhangende graaf X . Dit betekent dat c gegeven is door een reeks georiënteerde zijden $(z_1 = (x_1, y_1), \dots, z_n = (x_n, y_n))$

met $y_i = x_{i+1}$ voor $i = 1, \dots, n-1$ en $y_n = x_1$. Stel

$$\varphi(c) := \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^n \bar{z}_i.$$

(b) Toon aan dat $\varphi(c) \in K_X$.

Als we de punten van een 1-dimensionaal rooster (de punten op een getallenlijn, d.w.z. \mathbb{Z}), kleuren met $2^1 = 2$ kleuren zodat de randpunten van elk lijnstukje tussen twee opvolgende punten verschillend gekleurd zijn, dan zien we dat we de punten om en om dezelfde kleur moeten geven; de even punten maken we bijvoorbeeld blauw en de oneven rood. Als we de kleuring dan over een afstand 2 verschuiven blijft hij hetzelfde; de kleuring is dus invariant onder een translatie.

- (a) Bekijk nu de kleuringen van de roosterpunten in het vlak (dus \mathbb{Z}^2) met $2^2 = 4$ kleuren zodanig dat de hoekpunten van elk eenheidsvierkantje verschillend gekleurd zijn. Bewijs dat deze kleuringen ook een (niet-triviale) translatiesymmetrie hebben.
- (b) Laat nu $n \geq 3$. Heeft iedere kleuring van \mathbb{Z}^n met 2^n kleuren, zodanig dat de hoekpunten van iedere eenheidskubus verschillend gekleurd zijn, een niet-triviale translatiesymmetrie?

Vraag om thuis nog over na te denken: Bestaat er een translatiesymmetrie als we in het vlak niet een vierkant rooster nemen, maar een zeshoekig rooster (honingraat), we met 6 kleuren zodanig kleuren dat de hoekpunten van elke zeshoek steeds allemaal anders gekleurd zijn?



Onze visie op een glanzende loopbaan

Vanuit dit pand handelen onze Market Makers wereldwijd op vrijwel alle internationale optiebeurzen. Spannend werk, want Market Makers vormen de tegenpartij voor beleggers op de beurs. Onze Market Makers hebben diverse achtergronden en nationaliteiten. Wat zij gemeenschappelijk hebben is hun superieure rekenvaardigheid, stressbestendigheid en besluitvaardigheid. Daarnaast dragen zij veel verantwoordelijkheid. Hoe ga je daarmee om? Dat leer je tijdens de interne opleiding van 4 tot 5 weken. Daarnaast moet je een aantal eigenschappen hebben die niet aan te leren zijn: een competitieve geest, een resultaatgerichte instelling en een heel goed analytisch inzicht.

Wij zoeken Market Makers: initiatiefrijke academicici met een excellent cijfermatig inzicht – relevante werkervaring is niet vereist. We verwachten een grote zelfwerkzaamheid want je blijft leren gedurende je

loopbaan binnen Optiver. Je moet hier zelf veel tijd en energie in steken maar er staat ook veel tegenover: Optiver biedt je de kans om jezelf te ontdekken binnen een professionele, internationale handelsorganisatie. Heb jij een sterke drive om te winnen en ben je niet bang om verantwoordelijkheid te dragen? Ga naar www.optiver.com voor meer informatie over de vacatures en om te solliciteren.

Optiver handelt in derivaten, aandelen en obligaties vanuit het Amsterdamse hoofdkantoor en vanuit de filialen in Chicago en Sydney.

△ Optiver

DERIVATIVES TRADING

Optiver, Shemara van den Heuvel (Recruiter Trading), De Ruyterkade 112, 1011 AB Amsterdam, T 020 - 5319000



Optiver zoekt Market Makers

Acquisitie n.a.v. deze advertentie wordt niet op prijs gesteld.

3. Een eigenschap van Gram matrices

J.H. Brandts, Universiteit van Amsterdam

Voor een gegeven symmetrische reële $k \times k$ matrix N , schrijf

- $\alpha(N)$ voor het aantal negatieve entries strict boven de hoofddiagonaal van N ,
- $\beta(N)$ voor het aantal positieve kolomsommen van N .

Voorbeeld 3.1 Voor onderstaande matrix N ,

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

geldt dat $\alpha(N) = 3$ en $\beta(N) = 1$.

Laat nu n en k gehele getallen zijn met $1 \leq k \leq n$, en Q een $n \times k$ matrix met k linear onafhankelijke kolommen $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{R}^n$. Voor $N = Q^*Q$ gaan we in het vervolg aantonen dat

$$\alpha(N) + \beta(N) \geq k.$$

Voor $k = 1$ is de bewering triviaal: $N = q_1^*q_1 = \|q_1\|^2$ is een 1×1 matrix met positieve entry, want $q_1 \neq 0$, en dus met positieve kolomsom $\beta(N) = 1$.

Ter verdere illustratie bekijken we nu het geval $2 = k \leq n$.

- (a) Bewijs dat de som van de vier entries van N positief is en toon hiermee aan dat $\beta(N) \geq 1$.
- (b) Bewijs met behulp van het resultaat van (a) dat $\alpha(N) + \beta(N) \geq 2$.

Laat nu $2 \leq k \leq n$.

- (c) Bewijs dat de som van alle entries van N positief is en toon hiermee aan dat $\beta(N) \geq 1$.
- (d) Bewijs met behulp van (a), (b) en (c) dat $\alpha(N) + \beta(N) \geq k$.

Achtergrond

Deze opgave bewijst dat een n -simplex in \mathbb{R}^n minimaal n scherpe hoeken tussen diverse zijvlakken heeft. Voor $n = 2$ betekent dit dat een driehoek minstens twee scherpe hoeken heeft, voor $n = 3$ dat een tetraëder minstens drie scherpe hoeken heeft tussen verschillende paren van zijvlakken.

Immers, laat S een n -simplex zijn, en q_0, \dots, q_n uitwendige normaalvectoren op de $n+1$ zijvlakken (-hypervlakken) van S . De hoek α_{ij} tussen twee verschillende zijvlakken is dan gelijk aan

$$\alpha_{ij} = \pi - \gamma_{ij} \quad \text{waarbij} \quad \cos \gamma_{ij} = \frac{q_i^* q_j}{\|q_i\| \|q_j\|}$$

en γ_{ij} de in $]0, \pi[$ gekozen hoek tussen de normalen op beide vlakken is. De Gram matrix $N = Q^*Q$ waarbij Q de matrix is met n van deze $n+1$ normaalvectoren heeft dus als

bovendriehoeks-entries de inproducten $q_i^* q_j$. Iedere negatieve entry correspondeert met een stompe $\gamma_{ij} \in]\pi/2, \pi[$ en dus met een scherpe $\alpha_{ij} \in]0, \pi/2[$. Daarnaast is

$$q_0 = -c(q_1 + \cdots + q_n) \quad \text{voor zekere } c > 0,$$

iets wat overigens ook puur linear algebraisch kan worden bewezen. Het inproduct $q_0^* q_j$ is derhalve gelijk aan

$$q_0^* q_j = -c(q_1 + \cdots + q_n)^* q_j,$$

en is dus negatief als de j -de kolom van $Q^* Q$ positief is.

4. Inverteren door interpoleren?*H.W. Lenstra, Universiteit Leiden*

Bestaat er voor elke eindige verzameling V van positieve gehele getallen een polynoom f met gehele coëfficiënten zodanig dat $f(1/n) = n$ voor elke $n \in V$? Bewijs de correctheid van het gegeven antwoord.

ENSCHÉDE

THE MASTER DEGREES

N 52°14'19" E 06°51'01"

Master Applied Mathematics

- Mathematical Physics and Computational Mechanics
- Financial Engineering
- Industrial Engineering and Operations Research
- Systems and Control

Kijk voor meer informatie en aanmelding op
graduate.utwente.nl



IMPROVE YOUR POSITION


University of Twente
Enschede - The Netherlands

5. Wandelen langs gekleurde grafen*R. Tijdeman, Universiteit Leiden*

We beschouwen m punten waarbij elk paar punten verbonden is door een rode of een blauwe boog (een volledige graaf op m punten waarbij elke kant de kleur rood of blauw heeft). Een *cykel* van lengte k is een stel van k verschillende punten A_1, \dots, A_k met bijbehorende bogen $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{k-1}A_k, A_kA_1$. Notatie (A_1, \dots, A_k) . Laat $m(k)$ het kleinste getal m noteren waarvoor geldt dat we voor m punten zeker zijn van het bestaan van een cykel van lengte $\geq k$ waarvan alle bogen dezelfde kleur hebben, welke kleuring ook gekozen wordt.

- (a) Bewijs dat $m(4) > 5$. (2pt.)
- (b) Bewijs dat $m(4) \leq 6$. (3 pt.)
- (c) Bewijs dat $m(k+2) \leq m(k) + 2k + 2$ voor $k \geq 4$. (4 pt.)
- (d) Bewijs dat $m(2k) < 2k^2$ voor $k \geq 2$. (1 pt.)

Realize your master plan

Universiteit Utrecht



[Faculty of Science
Mathematics]

Master's programmes

Mathematical Sciences

Scientific Computing

Stochastics &

Financial Mathematics

www.math.uu.nl

6. Flip It

J. Top, Rijksuniversiteit Groningen

Op diverse mobiele telefoons en internet sites kan je een spelletje vinden met de naam *FlipIt*. Een wiskundige beschrijving ervan gaat als volgt. Een netwerk is een paar (S, T) waarbij S een niet-lege, eindige verzameling is, en T een verzameling ongeordende paren $\{s_1, s_2\}$ met $s_1, s_2 \in S$ en $s_1 \neq s_2$. Voor een $s \in S$ heten de $t \in S$ met $\{s, t\} \in T$ de buren van s .

Bij *FlipIt* hebben we zo'n netwerk (S, T) , waarbij bovendien alle elementen van S een kleur (wit of zwart) hebben. Bij het begin van het spel hebben alle elementen de kleur zwart, en het is de bedoeling dat aan het eind van het spel alle elementen de kleur wit hebben. Daartoe doet de speler 'zetten': een zet bestaat uit het aanwijzen van een element $s \in S$. Door dit aanwijzen verandert s , en ook alle buren van s , van kleur.

Bewijs, dat voor ieder netwerk (S, T) dit spel een oplossing heeft.

**MATHEMATICAL
RESEARCH
INSTITUTE**

**M
R
I**

Laat X een stochastische grootheid zijn met een binomiale verdeling met parameters k en p , d.w.z.

$$P(X = i) = \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i},$$

voor $i = 0, 1, \dots, k$. De stochastische grootheid Y is ook binomiaal verdeeld, met parameters k en q , d.w.z.

$$P(Y = j) = \binom{k}{j} q^j (1-q)^{k-j},$$

voor $j = 0, 1, \dots, k$. Laat zien dat wanneer $p \leq q$, voor alle $m \leq n \leq k$ geldt dat

$$P(X \geq n | X \geq m) \leq P(Y \geq n | Y \geq m).$$

Thomas Stieltjes Institute for Mathematics

The Thomas Stieltjes Institute for Mathematics is a Dutch research institute in mathematics and carries out research in four main areas of fundamental and applied mathematics:

- Algebra & Geometry
- Analysis
- Stochastics
- Operation Research

In the Institute participate:

- University of Amsterdam (UvA)
- Free University Amsterdam (VUA)
- Delft University of Technology (TUD)
- Eindhoven University of Technology (TUE)
- University of Leiden (UL)
- Tilburg University (UvT)

The Institute collaborates with

- the Centre for Mathematics and Computer Science (CWI) in Amsterdam.
- the European Institute for the Study of Randomness (EURANDOM) in Eindhoven.

For master- and Ph.D.-students the Stieltjes Institute organises each year a Stieltjesweek about a central theme in mathematics. Faculty members of the different universities present the lectures about such a new theme. Each Stieltjes phd-student receives a contribution of 250 euro in the printing costs of the thesis.

Each year a Stieltjes Prize is presented for the best Stieltjes thesis and the winner receives an amount of 1200 euro.

We nemen aan dat $n \in \mathbb{N}$.

Definitie 8.1 De verzameling \mathbb{L} wordt gegeven door:

$$\mathbb{L} = \{L \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid L_{i,i} = 1 \text{ voor } 1 \leq i \leq n \text{ en } L_{i,j} = 0 \text{ voor } 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Definitie 8.2 De verzameling \mathbb{U} wordt gegeven door:

$$\mathbb{U} = \{U \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid U_{i,j} = 0 \text{ voor } 1 \leq j < i \leq n\}.$$

Opgave

Gegeven is de niet-singuliere matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Een matrix heet singulier dan en slechts dan als deze niet inverteerbaar is. Verder bestaat er een $L \in \mathbb{L}$ en een $U \in \mathbb{U}$ zodat

$$A = LU. \tag{8.1}$$

Toon aan dat L en U uniek zijn.

YOU'D BE SURPRISED ABOUT YOUR FIRST JOB

Interesse in een stevig carrièrepad in de techniek? Op zoek naar carrièrekansen op het gebied van communicatie- en security-technologie? Dan zal Thales Nederland je verbaasd doen staan.

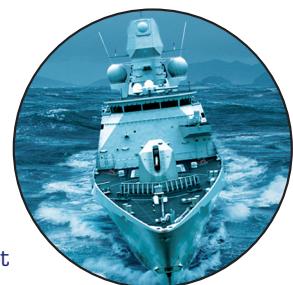
ABOUT US

Actief in de sectoren Aerospace, Defense en Security is Thales Nederland met 2.000 medewerkers dé aanbieder van hightechbanen. Productinnovatie en snel inspelen op de nieuwste technologische mogelijkheden zijn onze drijfveren. Spraakmakende voorbeelden daarvan zijn radar-, communicatie- en command & controlsystemen voor marineschepen en communicatie-, beveiligings- en betaalsystemen voor het bedrijfsleven. Thales Nederland is onderdeel van de Thales Group met 70.000 medewerkers in ruim 50 landen en is daarmee een van Europa's grootste elektronica bedrijven.

YOUR FIRST JOB ENGINEER

About you

Je rondt je studie Wiskunde af. Je bent een creatief denker die ook graag interdisciplinair samenwerkt met collega's in binnen en buitenland. Je wil je op opgedane kennis benutten en tegelijkertijd de vrijheid hebben diep in leading edge techniek te duiken. Je bent graag betrokken bij de hele productketen van concept tot ontwerp en van assemblage tot de laatste testen.



About your career

Wil je je als startende wiskundige verder ontwikkelen in hightech, dan kun je bij Thales je hart ophalen. Bijvoorbeeld om als Radar Engineer te werken aan een nieuwe rondzoekradar. Het radarsignaal verwerken tot bruikbare informatie in de algoritmeketen binnen het processing cabinet.

Surprised?

Thales komt graag in contact met jou om samen jouw mogelijkheden te bekijken en je carrièrepad uit te stippelen. Ook vind je bij ons uitdagende stage- en afstudeerplaatsen. Mail ons op jobs@nl.thalesgroup.com of bel 074 - 248 37 33.

smartest jobs
www.thales-nederland.nl

THALES
Work is smarter at Thales

9. Eulers benadering van π

N.P. Landsman, Radboud Universiteit Nijmegen

Leonhard Euler (1707-1783) werd dit jaar driehonderd jaar geleden geboren. Daarom is 2007 tot “Euler-jaar” uitgeroepen. In deze opgave, waarin we navolgen hoe Euler π benaderde, zien we hem op een typerende manier aan het werk. Alle deelopgaven kunnen gemaakt worden zonder de vorige opgelost te hebben. Het totaal aantal punten voor de hele opgave is 10; voor iedere deelopgave worden 2 punten toegekend.

Euler kende de door James Gregory (1638-1675) ontdekte reeksontwikkeling

$$\arctan x \equiv \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (9.1)$$

(a) Leid deze reeks af als een Taylor-reeks rond 0.

In eerste instantie vulde Euler de waarde $x = 1$ in (9.1) in. Hij herontdekte zo de benadering van Leibniz (1646-1716) voor π :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (9.2)$$

Deze reeks convergeert echter slecht: de eerste decimaal is pas goed na 300 termen. Euler loste dit probleem als volgt op.

(b) Laat zien dat (voor alle a en b waarvoor de uitdrukkingen eindig zijn)

$$a - b = \arctan\left(\frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}\right). \quad (9.3)$$

Leid hieruit af dat (voor alle w, x, y, z waarvoor de uitdrukkingen eindig zijn)

$$\arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \arctan\left(\frac{z}{w}\right) + \arctan\left(\frac{yw - yz}{yw + xz}\right). \quad (9.4)$$

(c) Leid hier vervolgens door slimme keuzes van w, x, y, z uit af dat:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right); \quad (9.5)$$

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right); \quad (9.6)$$

$$\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \arctan\left(\frac{2}{11}\right); \quad (9.7)$$

$$\arctan\left(\frac{2}{11}\right) = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \arctan\left(\frac{3}{79}\right). \quad (9.8)$$

(d) Leid hieruit Eulers opmerkelijke formule voor π af:

$$\pi = 20 \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 8 \arctan\left(\frac{3}{79}\right). \quad (9.9)$$

- (e) Vul nu zes termen van de reeksontwikkeling (9.1) in (er komen dan dus in totaal twaalf termen) en benader op die manier π numeriek. Hoeveel decimalen komen zo goed uit? Let op: het gebruik van een rekenmachine is toegestaan.

N.B. Euler vond naar eigen zeggen de eerste 20 decimalen van π in een uurtje rekenen, zonder rekenmachine!

Gegeven is een lineair stelsel vergelijkingen

$$Ax = b, \quad A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, b \in \mathbb{R}^n, \quad (10.1)$$

waar A een gegeven reële symmetrische matrix is, b een gegeven rechterlid vector is en x een te bepalen vector is. De matrix A is singulier en het is bekend dat

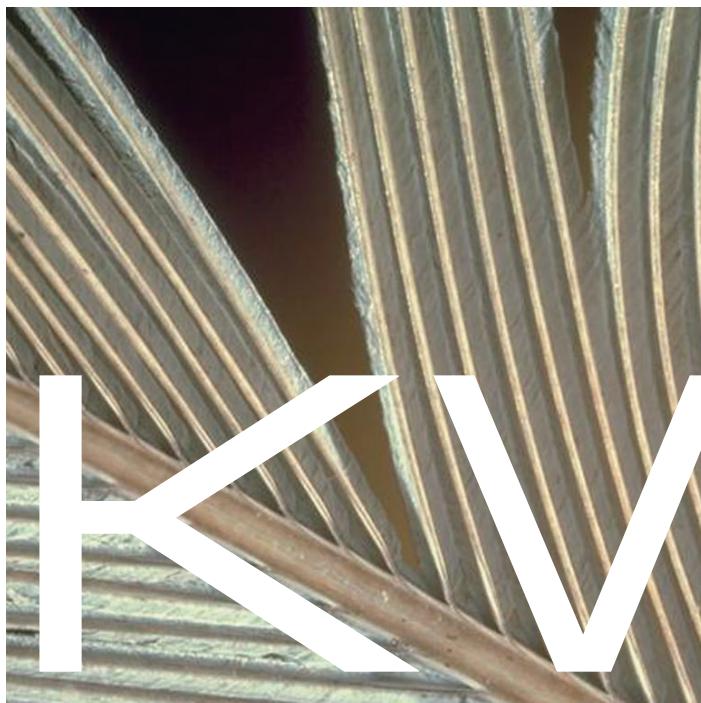
$$Av = 0 \Leftrightarrow v = \alpha c, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad 0 \neq c \in \mathbb{R}^n, \quad (10.2)$$

waar c een bekende vector is.

- Geef een vergelijking voor A , b en c , zonder variabelen zoals x , waaraan A , b en c voldoen dan en slechts dan als stelsel (10.1) oplossingen heeft.
- Stel dat (10.1) oplossingen heeft. Geef een stelsel

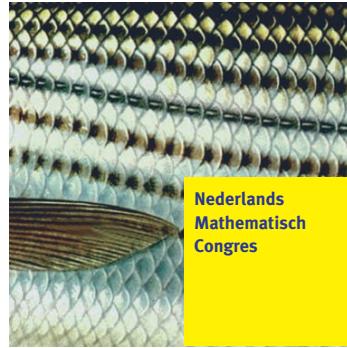
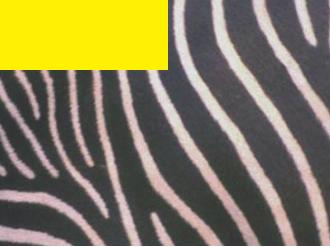
$$\tilde{A}x = \tilde{b}, \quad \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n, \quad (10.3)$$

zodat de matrix \tilde{A} niet-singulier is en de vector $x = \tilde{A}^{-1}\tilde{b}$ een oplossing van (10.1) is.



KWG

Studiegroep
Wiskunde met
de Industrie



Nederlands
Mathematisch
Congres

Nieuw Archief
voor Wiskunde



KWG



Boekerie en archief
Lezingenseries



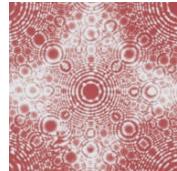
Pythagoras,
wiskundetijdschrift
voor jongeren

KONINKLIJK WISKUNDIG GENOOTSCHAP

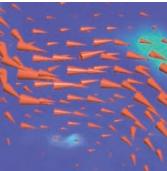
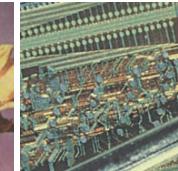
Het Koninklijk Wiskundig Genootschap is de vakvereniging van Nederlandse wiskundigen. In 1778 opgericht onder het motto 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundevereniging.

Nederlandse
Onderwijs
Commissie voor
de Wiskunde

Wintersymposium
Najaarssymposium
Wiskunde
Olympiade



Brouwermedaille
Sponsoring
van wiskunde-
organisaties



www.wiskgenoot.nl
Aanmelden als lid? Kijk op onze site of stuur een e-mail naar admin@wiskgenoot.nl. Studenten kunnen een jaar lang gratis lid worden.



Blijf op de hoogte
van de
ontwikkelingen
in de wiskunde.

Ontvang het NAW,
één van de mooiste
Nederlandse
wetenschaps-
magazines.

Raak betrokken
bij een netwerk
van wiskundigen
in onderwijs,
onderzoek en
bedrijfsleven.



11. Het ene verschil is de andere niet*A. Smeets, Universiteit Leuven*

Zij n een natuurlijk getal, zij p een priemgetal en zij d een deler van het getal $(n + 1)^p - n^p$. Bewijs dat $d - 1$ deelbaar is door p .



talent

Deloitte zoekt

Deloitte zoekt technisch/bèta toptalent. Altijd. Want toptalent levert topprestaties. En dat is precies wat Deloitte wil: de beste zijn. In dienstverlening. En in knowhow. Toptalent zoeken we dus ook voor Consultancy, Enterprise Risk Services en Financial Advisory. Ambitieuze professionals. Gedreven om de top te bereiken. Erop gebrand het beste uit zichzelf te halen. Zelfstandige werkers, maar tegelijkertijd teamplayers. Toppers dus.

Consultancy

Deloitte Consultancy adviseert de top van het (inter-)nationale bedrijfsleven en veel (semi-)overheidsorganisaties over complexe strategische en organisatorische vraagstukken. We bieden waar mogelijk een totaaloplossing: van strategie tot en met implementatie. Door de grote diversiteit aan adviesgebieden kunnen we onze expertise inzetten voor iedere stap in het proces. Ook in Technology. Voorbeelden? Denk aan strategisch advies of due diligence over het outsourcen van IT-diensten. Of de procesinrichting en implementatie van een ERP- of CRM-applicatie, zoals Oracle, SAP of Siebel. Maar ook business intelligence oplossingen voor het verkrijgen van managementinformatie uit datawarehouses. En complete maatwerkoplossingen of integratie met bestaande applicatiearchitecturen met J2EE, .NET en de nieuwste webtechnologieën.

Enterprise Risk Services

Deloitte Enterprise Risk Services ondersteunt en adviseert multinationals, Nederlandse bedrijven, de overheid en non-profitinstellingen bij het signaleren, analyseren, beoordelen en managen van risico's. Deze risico's variëren van boardroom risico's op strategisch niveau tot technische risico's op netwerkniveau. ERS-talenteren kunnen bij ons zowel controlerend als adviserend aan de slag in een van de volgende competentiegroepen: Control Assurance (IT-auditing), Data Quality & Integrity (data-analyse,

econometrische modelbouw en research), Risk Consulting/ Internal Audit, Security Services (met een focus op applicaties of op technische infrastructuren) of Websolutions (software specialisten).

Financial Advisory

De specialisten van Deloitte Financial Advisory Services bieden bedrijven en overheden oplossingen voor complexe financiële transacties, kapitaalmarkt-vraagstukken, vastgoed en risicobeheersing. De werkzaamheden lopen uiteen van financieel advies bij grote bedrijfsovernames tot het realiseren van financiering voor grote nieuwbouwprojecten. Maar ook IFRS, financial modelling en waardebepaling van contracten en pensioenen komen aan bod. Omdat al deze vraagstukken specifieke kennis vereisen, richten onze consultants zich op deelgebieden van financieel advies. In drie business units bundelen zij hun kennis: Transaction Advisory, Risk Advisory en Real Estate Advisory.

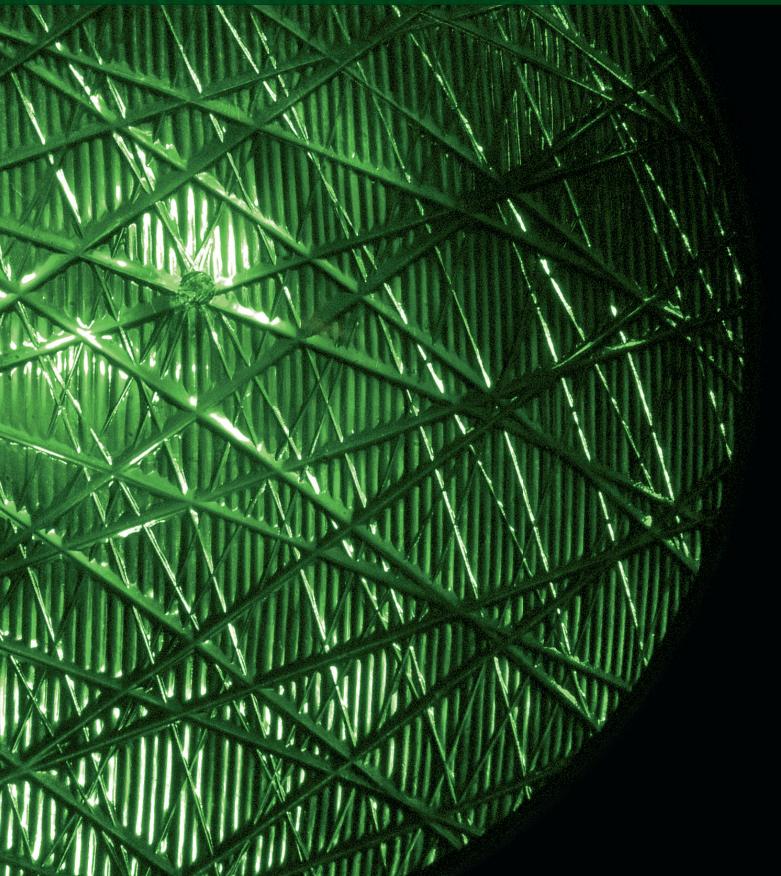
Hoe verschillend de functies van Deloitte ook zijn, ze hebben één ding gemeen: het talent van de mensen die er werken. Onze cliënten dagen je namelijk voortdurend uit. Eigenschappen als resultaatgerichtheid en ambitie zijn daarom onmisbaar. Net als analytisch inzicht en flexibiliteit. Herkenbaar? Dan is Deloitte jouw beste carrièremove. Ga naar www.TreasuringTalent.com om te kijken waar jouw talenten het best tot hun recht komen binnen Deloitte.

Deloitte.

Accountants • Belastingadviseurs • Consultants • Financieel Adviseurs.

TreasuringTalent.com





Heeft u Wiskunde of Informatica gekozen als afstudeerrichting?

Dat komt goed uit, want wij zijn op zoek naar ambitieuze en oplossingsgerichte

Junior Consultants voor Treasury Automatisering



Zanders is altijd op zoek naar talenten die hun kennis en kunde willen inzetten in ons bedrijf. Voor de versterking van ons team zijn wij op zoek naar Junior Consultants Treasury Automatisering.

Wie is Zanders?

Zanders is een onafhankelijke, innovatieve en succesvolle organisatie op het complete gebied van Treasury & Finance Solutions. Binnen ons vakgebied bieden wij advisering, interim management en projectmanagement aan. De toegevoegde waarde van Zanders is specialistische kennis die wij op onafhankelijke wijze inzetten. Onze opdrachtgevers zijn ondernemingen in het binnen- en buitenland in diverse sectoren.

Wiskunde, Informatica én Treasury Automatisering

Dat is wat ons betreft een uitstekende combinatie, want de analytische kennis die u heeft opgedaan tijdens uw studie kan heel goed in de praktijk worden gebracht in de financiële consultancy. Aan veel financiële modellen liggen immers wiskundige modellen ten grondslag, bijvoorbeeld modellen om financiële instrumenten te waarderen of de modellen om risico management berekeningen uit te voeren. Daarnaast komt men binnen de consultancy regelmatig in aanraking met verschillende systemen die de processen op financiële afdelingen ondersteunen. Om de processen en de daaraan

gekoppelde systemen snel en goed te doorgronden, is een achtergrond als wiskundige of informaticus zelfs een pré.

Wat is het profiel van een Junior Consultant voor Treasury Automatisering?

Om in aanmerking te komen voor deze functie;

- heeft u een afgeronde academische opleiding. Bij voorkeur (bedrijfs)wiskunde, informatica, economie, econometrie, bedrijfskunde of natuurkunde;
- heeft u maximaal 2 jaar werkervaring;
- beschikt u over een sterk analytisch inzicht en heeft u affiniteit met financiële markten;
- bent u praktisch en oplossingsgericht ingesteld;
- heeft u een goede beheersing van de Nederlandse en Engelse taal.

Wilt u meer informatie over deze functie en heeft u belangstelling voor een carrière bij Zanders? Neem dan contact op onze Human Resources Manager Sjoeko Kamphuis.

Zanders

T.a.v. Mevrouw S. Kamphuis
Postbus 221, 1400 AE Bussum
Telefoonnummer: 035 692 89 89
E-mailadres: soliciteren@zanders.nl
Website: www.careeratzanders.com