Démonstrations Nombres Premiers

Constantin Hentgen

Mars 2022

1 Nombres premiers de Mersenne

$$M_p = 2^p - 1 \tag{1}$$

Pour m'assurer que le nombre premier dont je dispose est effectivement un nombre de Mersenne, je dois donc vérifier que p est bien un entier naturel.

Je connais donc M_p et je cherche p:
On pose : $p \in \mathbb{N}^*$, M_p un nombre Mersenne

$$\begin{aligned} 2^p - 1 &= M_p \\ 2^p &= M_p + 1 \\ e^{p.\ln(2)} &= M_p + 1 \\ (e^p)^{\ln(2)} &= M_p + 1 \\ e^p &= \sqrt[\ln(2)]{M_p + 1} \\ p &= \ln\left(\sqrt[\ln(2)]{M_p + 1}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

À présent que nous avons la solution mathématiques, tranformons les racines en puissance pour simplifier sa traduction en python:

$$\begin{aligned} p &= \ln\left(\sqrt[\ln(2)]{M_p + 1}\right) \\ p &= \ln\left((M_p + 1)^{\frac{1}{\ln(2)}}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

ce qui nous donne :

```
import math
p = math.log((number+1)**(1/math.log(2)))
```

où $number = M_p$, la seul dernier obstacle est que *math.log* retourne un float or nous souhaitons savoir si p est un entier naturel. Le problème est que quand bien même s'en serait un, une virgule sera ajoutée.

2 Nombres premiers de Fermat

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \tag{4}$$

Le procédé est identique à la section précédente :
On pose : $n \in \mathbb{N}$, F_n un nombre Fermat

$$\begin{aligned}
2^{2^n} + 1 &= F_n \\
2^{2^n} &= F_n - 1 \\
e^{2^n \ln(2)} &= F_n - 1 \\
(e^{2^n})^{\ln(2)} &= F_n - 1 \\
e^{2^n} &= \sqrt[\ln(2)]{F_n - 1} \\
2^n &= \ln\left(\sqrt[\ln(2)]{F_n - 1}\right) \\
e^{n.\ln(2)} &= \ln\left(\sqrt[\ln(2)]{F_n - 1}\right) \\
(e^n)^{\ln(2)} &= \ln\left(\sqrt[\ln(2)]{F_n - 1}\right) \\
e^n &= \sqrt[\ln(2)]{\ln\left(\sqrt[\ln(2)]{F_n - 1}\right)} \\
n &= \ln\left(\sqrt[\ln(2)]{\ln\left(\sqrt[\ln(2)]{F_n - 1}\right)}\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

```python
import math
n = math.log((math.log((number-1)**(1/math.log(2))))**(1/math.log(2)))
```