

1) Исследовать ряд на сходимость, используя признак д'Аламбера.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

~~$\lim_{n \rightarrow \infty}$~~ Используя в калькулятор
получили произведение 0.
Ряд сходится.

Испровергнуть ряд на сходимость,
используя признак Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

Ряд сходится.

3) Исследовать ряд на сходимость,
используя признак Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \ln n} \quad - \text{ ряд знакопеременный}$$

$$u_1 > u_2 > u_3 \dots > u_n$$

$$- \underline{1} + \frac{1}{2 + \ln 2} + \frac{1}{3 + \ln 3}$$

Члены ряда, монотонно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n + \ln n} = 0$$

Ряд сходится условно, на
основании того что $\frac{1}{n}$ ~~гармонический~~
гармонический ряд.

4) Исследовать ряд на
сходимость, используя
признак Раабе:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

$$U_n = \frac{3^n}{2^n}, \quad U_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} - 1 \right) n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{3} \cdot 2 \right) - 1 \right) \cdot n = \left(\frac{2}{3} - 1 \right) n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = -\frac{1}{3} n = -\infty$$

$\rho < 1$, ряд расходится

5) Разложить функцию по
Тейлору в единице.

$$f(x) = \ln(16x^2)$$

$$f(x) = \ln(16x^2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{16x^2} \cdot 32x = \frac{2}{x}$$

$$\frac{\ln 16 \cdot \cancel{x^2}}{0!} (x-1)^0 + \left(\frac{2}{\cancel{x}} \cdot 1! \right) (x-1)^1 =$$

$$= \ln 16 + 2(x-1) =$$

$$= \ln 16 + 2x - 2$$