11-12. Типизация в стиле Карри (Черча)

*Эти билеты очень похожи, поэтому имеет смысл изучить их вместе, чтобы не писать одно и то же дважды

2 Простые типы

Помимо описанного выше бестипового лямбда-исчисления имеется большое количество его типизированных версий [8, 3, 4, 10, 11]. Идея использования типов для классификации лямбда-термов имеет давнюю историю и связана с именами Хаскелла Карри и Алонсо Черча. Типы рассматриваются *синтаксические* конструкции, приписываемые термам по определенным правилам:

$$M : \sigma$$

Здесь M — терм, σ — тип, а двоеточие — оператор, задающий отношение типизации[11]. Для того, чтобы построить систему типов нужно задать, во-первых, правила конструирования типов и, во-вторых, правила приписывания типов термам.

В λ-исчислении с типами выделяют два семейства систем типов:

- Системы в стиле Карри. Термы те же, что и в бестиповой теории. Каждый терм может обладать множеством различных типов (пустое, одно- или многоэлементное, бесконечное).

- Системы в стиле Чёрча. Термы — аннотированные версии бестиповых термов. Каждый терм имеет тип (обычно уникальный), выводимый из способа, которым терм аннотирован.

Можно рассматривать системы типов с двух различных профессиональных точек зрения. Подход программиста таков: термы интерпретируются как программы, а типы — как их частичные спецификации. При этом системы в стиле Карри характерны для языков с неявной типизацией (например, Haskell, Ocaml). Системы в стиле Чёрча больше похожи на языки с явной типизацией, к ним относится большинство других типизированных языков.

Подход логиков к системам типов иной: типы интерпретируются как высказывания, а термы — как их доказательства. Связь между системами типов и логическими системами называют *соответствием Карри-Говарда* или *изоморфизмом Карри-Говарда*, если это соответствие описано на формальном математическом языке.

В большинстве систем типов имеется базовый способ конструирования типа. Это стрелка, задающая функциональный тип. Например, функции succ, возвращающей натуральное число, следующее за переданным ей натуральным аргументом, может быть приписан тип $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\text{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

Стрелка — общепринятый в математике способ связывать область определения и множество значений функций. В системах типов для лямбда исчисления такая практика формализуется.

оформлено как правило типизации. Гипотезу о том, что терм-переменная имеет некоторый тип, удобно оформлять в виде *контекста*[12]:

$$y : \alpha \ \vdash \ \mathbf{I}\, y : \alpha$$

Читается это так: в предположении, что переменная y имеет тип α, терм $\mathbf{I}\, y$ имеет тип α.

2.1 Просто типизированное λ-исчисление

Самая простая система типов это *просто типизированное* λ*-исчисление*. Так же ее называют системой $\lambda_{\to}$ или Simple Type Theory (STT). В этой системе единственным способом конструирования типов является использование функциональной стрелки.

Множество типов $\mathbb{T}$ системы $\lambda_{\to}$ определяется индуктивно:

$$\alpha, \beta, \ldots \in \mathbb{T} \qquad \text{(переменные типа)}$$

$$\sigma, \tau \in \mathbb{T} \Rightarrow (\sigma \to \tau) \in \mathbb{T} \qquad \text{(типы пространства функций)}$$

или, в абстрактном синтаксисе:

$$\mathbb{T} \ ::= \ \mathbb{V} \mid (\mathbb{T} \to \mathbb{T})$$

Здесь $\mathbb{V} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ — множество типовых переменных. Мы будем следовать соглашению: буквы из начала греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ используются для типовых переменных, а $\sigma, \tau, \rho, \ldots$ — как метапеременные, для произвольных типов. Часто типовые переменные называют константами, иногда их число ограничивают заданным конечным набором.

При записи типов внешние скобки, как обычно, опускают, а функциональную стрелку считают *правоассоциативным* оператором: если $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{T}$, то

$$\sigma_1 \to \sigma_2 \to \ldots \to \sigma_n \ \equiv \ (\sigma_1 \to (\sigma_2 \to \ldots \to (\sigma_{n-1} \to \sigma_n) \ldots))$$

Примеры типов:

$$(\alpha \to \beta) \equiv \alpha \to \beta$$

$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \equiv \alpha \to \beta \to \gamma$$

$$((\alpha \to \beta) \to \gamma) \equiv (\alpha \to \beta) \to \gamma$$

$$((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))) \equiv (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma$$

$$((\alpha \to \beta) \to (((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta)) \equiv (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta$$

[12] Приоритет оператора $\vdash$ (*турникет* или *штопор*) полагают еще более низким, чем оператора типизации «двоеточие».

Первый и третий примеры являются типом функции одного аргумента, второй и пятый — двух.

Всякий тип в $\lambda_{\rightarrow}$ может быть записан в виде

$$\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \ldots \rightarrow \sigma_n \rightarrow \alpha$$

где, α — некоторая переменная. Действительно, если «в конце» типа стоит не переменная, то в простой системе это может быть только стрелка, и, исходя из правоассоциативности, мы можем добавить в список аргументов типа то, что окажется слева от этой стрелки.

Каковы правила приписывания типов термам? Если терм *переменная*, это допустимо делать произвольным образом. Переменной может быть приписан любой допустимый тип:

$$\begin{array}{l} x : \alpha \\ y : \alpha \rightarrow \beta \\ z : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) \rightarrow \beta \end{array}$$

Если же терм представляет собой *аппликацию* $M\,N$, то

- M должно быть функцией, то есть иметь стрелочный тип, $M : \sigma \rightarrow \tau$;
- N должно быть «подходящим» аргументом, то есть иметь тип σ, совпадающий с типом аргумента стрелки;
- вся аппликация при этом будет иметь тип результата функции: $M\,N : \tau$.

Примеры приписывания типов для аппликации

$$\begin{array}{lcl} x{:}\alpha, y{:}\alpha \rightarrow \beta & \vdash & y\,x : \beta \\ x{:}\alpha, y{:}\alpha \rightarrow \beta, z{:}\beta \rightarrow \gamma & \vdash & z\,(y\,x) : \gamma \end{array}$$

Отметим использование контекстов для приписывания типов свободным переменным целевого терма.

Упражнение. Какие должны иметь типы x и y, чтобы $x\,(y\,x){:}\gamma$?

Если терм является *абстракцией* $\lambda x.\,M$, то

- его тип должен быть стрелочным $\lambda x.\,M : \sigma \rightarrow \tau$;
- тип переменной x, по которой происходит абстракция, должен быть σ, то есть совпадать с типом аргумента стрелки;
- тип тела M должен быть τ, то есть совпадать с типом результата стрелки.

Например, в предположении, что $x{:}\alpha$, имеем

$$\lambda x.\,x : \alpha \rightarrow \alpha$$

А надо ли здесь в контексте указывать, что $x : \alpha$? Имеет ли смысл запись $x : \alpha \;\vdash\; \lambda x.\,x : \alpha \rightarrow \alpha$? Ответ — нет, это не очень удачное решение. Переменная x — связанная, иначе говоря, локальная, она доступна только внутри связывающей ее лямбды. В более широкой области видимости может присутствовать другая переменная с тем же именем. Контекст же глобален, поэтому упоминание в нем имен локальных переменных может приводить к неоднозначности.

Однако если совсем не иметь возможности указать, что $x{:}\alpha$, то допустимы и типизация $\lambda x.\, x : \beta \to \beta$ и даже $\lambda x.\, x : (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$. Это так называемая типизация в *стиле Карри*. В системах Карри если терму удалось приписать какой-то тип, то это оказывается можно сделать бесконечным количеством способов.

Альтернатива — указать тип переменой при абстракции, внутри абстрактора: $\lambda x^{\alpha}.\, x : \alpha \to \alpha$. В этом случае тип терма определяется однозначно. Это типизация в *стиле Чёрча*.

Упражнение. Типизируйте по Чёрчу: $\lambda x^{?}.\, \lambda y^{?}.\, x\,(y\,x) : ?$

Правила ассоциативности для типов (вправо) и аппликации (влево) хорошо согласованы друг с другом: они позволяют работать с функциями многих переменных без использования скобок. В предположении о типах термов

$$\begin{array}{lcl} F & : & \alpha \to (\beta \to (\gamma \to \delta)) \\ M & : & \alpha \\ N & : & \beta \\ P & : & \gamma \end{array}$$

имеем

$$\begin{array}{lcl} F\,M & : & \beta \to (\gamma \to \delta) \\ (F\,M)\,N & : & \gamma \to \delta \\ ((F\,M)\,N)\,P & : & \delta \end{array}$$

Во всех приведенных примерах зелёные скобки необязательны и обычно опускаются в соответствии с соглашениями об ассоциативности.

Правила ассоциативности для типов (вправо) и абстракций (тоже вправо) тоже хорошо согласованы. В предположении $Q : \gamma$

$$\begin{array}{lcl} \lambda y^{\beta}.\, Q & : & \alpha \to \gamma \\ \lambda x^{\alpha}.\, (\lambda y^{\beta}.\, Q) & : & \alpha \to (\beta \to \gamma) \end{array}$$

2.2 Формализм $\lambda_{\to}$

2.2.1 Предтермы

Начнем с системы $\lambda_{\to}$ в стиле Карри. Множество Λ ее *предтермов* (или *псевдотермов*) строится из переменных из множества $V = \{x, y, z, \ldots\}$ с помощью аппликации и абстракции:

$$\begin{array}{lcl} x \in V & \Rightarrow & x \in \Lambda \\ M, N \in \Lambda & \Rightarrow & (M\,N) \in \Lambda \\ M \in \Lambda, x \in V & \Rightarrow & (\lambda x.\, M) \in \Lambda \end{array}$$

В абстрактном синтаксисе

$$\Lambda \;::=\; V \mid (\Lambda\,\Lambda) \mid (\lambda V.\, \Lambda)$$

То есть предтермы системы в стиле Карри — это в точности термы бестипового λ-исчисления. Все соглашения о правилах опускания скобок такие же как и для термов бестипового исчисления.

Само понятие предтерма возникает из того соображения, что не всем термам в изучаемой системе можно будет приписать тип. Те предтермы, которые смогут быть типизированными, получат название *допустимых* термов (или просто термов). Остальные так и останутся в статусе предтермов.

Примеры предтермов в стиле Карри:

$$\begin{array}{l} \lambda x\, y.\, x \\ \lambda f\, g\, x.\, f\,(g\, x) \\ \lambda x.\, x\, x \end{array}$$

Первым двум из них мы позже сможем приписать тип в $\lambda_{\to}$, а третьему нет.

Для систем в стиле Черча предтермы определяются похожим образом. Единственным, но ключевым отличием является указание типа переменной при абстракции. Множество $\Lambda_{\mathbb{T}}$ предтермов системы в стиле Черча строится из переменных из $V = \{x, y, z, \ldots\}$ с помощью аппликации и аннотированной типами абстракции:

$$\begin{array}{rcl} x \in V & \Rightarrow & x \in \Lambda_{\mathbb{T}} \\ M, N \in \Lambda_{\mathbb{T}} & \Rightarrow & (M\, N) \in \Lambda_{\mathbb{T}} \\ M \in \Lambda_{\mathbb{T}}, x \in V, \sigma \in \mathbb{T} & \Rightarrow & (\lambda x^{\sigma}.\, M) \in \Lambda_{\mathbb{T}} \end{array}$$

В абстрактном синтаксисе

$$\Lambda_{\mathbb{T}} \quad ::= \quad V \mid (\Lambda_{\mathbb{T}}\, \Lambda_{\mathbb{T}}) \mid (\lambda V^{\mathbb{T}}.\, \Lambda_{\mathbb{T}})$$

Все соглашения о скобках и ассоциативности те же, что и в системе Λ.

Примеры предтермов в стиле Черча мы записываем ниже в двух стилях. Первый, с типизацией связываемых переменных в виде степени, мы ввели выше. Второй, в котором тип связываемой переменной указывается с помощью стандартного оператора типизации «двоеточие», тоже допустим, но менее удобен.

$$\begin{array}{lcl} \lambda x^{\alpha}\, y^{\beta}.\, x & \equiv & \lambda x{:}\alpha.\, \lambda y{:}\beta.\, x \\ \lambda x^{\alpha}\, y^{\alpha}.\, x & \equiv & \lambda x{:}\alpha.\, \lambda y{:}\alpha.\, x \\ \lambda f^{\alpha}\, g^{\beta}\, x^{\gamma}.\, f\,(g\, x) & \equiv & \lambda f{:}\alpha.\, \lambda g{:}\beta.\, \lambda x{:}\gamma.\, f\,(g\, x) \\ \lambda f^{\beta\to\gamma}\, g^{\alpha\to\beta}\, x^{\alpha}.\, f\,(g\, x) & \equiv & \lambda f{:}(\beta \to \gamma).\, \lambda g{:}(\alpha \to \beta).\, \lambda x{:}\alpha.\, f\,(g\, x) \\ \lambda x^{\alpha}.\, x\, x & \equiv & \lambda x{:}\alpha.\, x\, x \end{array}$$

Первым двум и четвертому из них мы позже сможем приписать тип в $\lambda_{\to}$, а остальным нет. Это связано с тем, что мы приписали тип всем связываемым термовым переменным в виде переменных типа. Это неверно, поскольку в теле терма некоторые из этих термовых переменных используются в аппликациях справа, то есть должны иметь стрелочный тип. Четвертый пример исправляет эту проблему, он является допустимым термом. В последнем же примере даже замена α на какой бы то ни было стрелочный тип не поможет: получившейся предтерм все равно не удастся типизировать.

2.2.2 Контексты

Утверждением типизации называется приписывание терму типа

$$M : \tau$$

где $M \in \Lambda$ и $\tau \in \mathbb{T}$. Тип τ иногда называют *предикатом*, а терм M — *субъектом* утверждения. Это определение верно для систем Карри, для $\lambda_{\to}$ «а ля Чёрч» надо лишь заменить Λ на $\Lambda_{\mathbb{T}}$.

Примеры (верных) утверждений типизации:

Система в стиле Карри	Система в стиле Чёрча
$\lambda x.\, x : \alpha \to \alpha$	$\lambda x^{\alpha}.\, x : \alpha \to \alpha$
$\lambda x.\, x : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$	$\lambda x^{\alpha \to \beta}.\, x : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$
$\lambda x\, y.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha$	$\lambda x^{\alpha}\, y^{\beta}.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha$

То, что эти утверждения типизации верны, пока только декларация. Вскоре, введя правила типизации, мы сможем доказывать подобные факты.

Объявление — это утверждение типизации с термовой переменной в качестве субъекта. Примеры объявлений

$$\begin{aligned} &x : \alpha \\ &y : \beta \\ &f : \alpha \to \beta \\ &g : (\alpha \to \beta) \to \gamma \end{aligned}$$

Контекст — это множество объявлений с *различными* термовыми переменными в качестве субъекта:

$$\{x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \ldots, x_n : \sigma_n\}$$

Контекст иногда называют *базисом* или *окружением*. Пустой контекст также допустим, его обозначают как пустое множество $\emptyset$.

Для именования контекстов принято использовать греческие буквы в верхнем регистре. Фигурные скобки множества часто опускают:

$$\Gamma \;=\; x{:}\alpha, y{:}\beta, f{:}\alpha \to \beta, g{:}(\alpha \to \beta) \to \gamma$$

В выкладках часто удобнее записывать объявления в контекстах не с помощью оператора типизации, а в виде степени:

$$x{:}\alpha, y{:}\beta, f{:}\alpha \to \beta, g{:}(\alpha \to \beta) \to \gamma \;\equiv\; x^{\alpha}, y^{\beta}, f^{\alpha \to \beta}, g^{(\alpha \to \beta) \to \gamma}$$

Контексты можно *расширять*, добавляя объявление типизации свежей для данного контекста переменной:

$$\Delta \;=\; \Gamma, z^{\alpha \to \gamma} \;=\; x^{\alpha}, y^{\beta}, f^{\alpha \to \beta}, g^{(\alpha \to \beta) \to \gamma}, z^{\alpha \to \gamma}$$

Контекст можно рассматривать как (частичную) функцию из множества переменных V в множество типов $\mathbb{T}$.

2.2.3 Правила типизации

Сформулируем теперь правила типизации $\lambda_{\to}$ «а ля Карри».

Утверждение $M : \tau$ называется *выводимым* в контексте Γ, обозначение

$$\Gamma \vdash M : \tau$$

если его вывод может быть произведен по правилам:

$$\begin{array}{rcl} x^{\sigma} \in \Gamma & \Rightarrow & \Gamma \vdash x : \sigma \\ \Gamma \vdash M : \sigma \to \tau, \quad \Gamma \vdash N : \sigma & \Rightarrow & \Gamma \vdash M\,N : \tau \\ \Gamma, x^{\sigma} \vdash M : \tau & \Rightarrow & \Gamma \vdash \lambda x.\, M : \sigma \to \tau \end{array}$$

Если существуют Γ и τ, такие что $\Gamma \vdash M : \tau$, то предтерм M называют *(допустимым) термом.*

Удобно записывать эти правила в несколько другом виде.

$$\begin{array}{ll} \text{(аксиома)} & \Gamma \vdash x : \sigma, \text{ если } x^{\sigma} \in \Gamma \\ (\to \text{Elim}) & \dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\,N : \tau} \\ (\to \text{Intro}) & \dfrac{\Gamma, x^{\sigma} \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.\, M : \sigma \to \tau} \end{array}$$

Сверху от черты расположены необходимые посылки, а снизу — заключения правила вывода. Это позволяет оформлять вывод утверждения типизации в виде дерева. Аксиома задает листья этого дерева, правило введения стрелки ($\to$ Intro) формирует ствол и ветви, а правило удаления стрелки ($\to$ Elim) отвечает за ветвления.

Например для для комбинатора $\mathbf{K}$ вывод утверждения типизации $\lambda x\,y.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha$ в виде дерева таков

$$\dfrac{\dfrac{x^{\alpha}, y^{\beta} \vdash x : \alpha}{x^{\alpha} \vdash \lambda y.\, x : \beta \to \alpha}\,(\to \mathrm{I})}{\emptyset \vdash \lambda x\,y.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha}\,(\to \mathrm{I})$$

Пустой контекст часто обозначают не в виде значка пустого множества, а просто оставляя место слева от турникета пустым: $\vdash \lambda x\,y.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha$.

Отметим, что приведенный выше вывод годится не только для конкретных переменных типа α и β. Заменяя их на произвольные $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$, получим правильное дерево вывода для $\vdash \lambda x\, y.\, x : \sigma \to \tau \to \sigma$. Таким образом мы видим, что написав для некоторого терма одно дерево вывода типов в системе Карри, мы можем породить бесконечное количество таких деревьев, и, следовательно, бесконечное количество типов для исходного терма.

Приведем еще один пример вывода типов, для комбинатора **B**:

$$\dfrac{f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^{\alpha} \vdash f : \beta \to \gamma \qquad \dfrac{f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^{\alpha} \vdash g : \alpha \to \beta \qquad f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^{\alpha} \vdash x : \alpha}{f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^{\alpha} \vdash g\, x : \beta}\,(\to E)}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^{\alpha} \vdash f\,(g\, x) : \gamma}{f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta} \vdash \lambda x.\, f\,(g\, x) : \alpha \to \gamma}\,(\to I)}{f^{\beta\to\gamma} \vdash \lambda g\, x.\, f\,(g\, x) : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\,(\to I)}{\vdash \lambda f\, g\, x.\, f\,(g\, x) : (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\,(\to I)}\,(\to E)$$

Отметим, что если для комбинатора может быть выведен тип, то он всегда может быть выведен в пустом контексте.

Сформулируем правила типизации $\lambda_{\to}$ для черчевской версии $\lambda_{\to}$.

(аксиома)	$\Gamma \vdash x : \sigma$, если $x^{\sigma} \in \Gamma$
$(\to E)$	$\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\, N : \tau}$
$(\to I)$	$\dfrac{\Gamma, x^{\sigma} \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x^{\sigma}.\, M : \sigma \to \tau}$

Как видим визуально отличия минимальны. Однако вывод типа окажется проще, поскольку не нужно делать предположений о типах связанных переменных.

Пример дерева вывода типа для $\lambda x^{\alpha}\, y^{\beta}.\, x$:

$$\dfrac{\dfrac{x^{\alpha}, y^{\beta} \vdash x : \alpha}{x^{\alpha} \vdash \lambda y^{\beta}.\, x : \beta \to \alpha}\,(\to I)}{\vdash \lambda x^{\alpha}\, y^{\beta}.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha}\,(\to I)$$

Заменяя переменные типа α и β в этом дереве на произвольные $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$, снова получим правильное дерево вывода. То есть для каждой пары $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$ верно $\vdash \lambda x^{\sigma}\, y^{\tau}.\, x : \sigma \to \tau \to \sigma$. Однако термы в черчевской системе содержат типовую аннотацию, поэтому для каждой такой пары мы типизируем *разные* термы. Можно формально доказать, что у каждого замкнутого терма в системе «а ля Чёрч» имеется единственный тип[13].

Приведем в заключение пример вывода типа для комбинатора **B** в черчевской системе:

---

[13] А у каждого замкнутого предтерма — не более одного.

$$\dfrac{f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^\alpha \vdash f : \beta\to\gamma \qquad \dfrac{f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^\alpha \vdash g : \alpha\to\beta \qquad f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^\alpha \vdash x : \alpha}{f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^\alpha \vdash g\,x : \beta}(\to E)}{\dfrac{f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^\alpha \vdash f\,(g\,x) : \gamma}{\dfrac{f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta} \vdash \lambda x^\alpha.\, f\,(g\,x) : \alpha\to\gamma}{\dfrac{f^{\beta\to\gamma} \vdash \lambda g^{\alpha\to\beta}\, x^\alpha.\, f\,(g\,x) : (\alpha\to\beta)\to\alpha\to\gamma}{\vdash \lambda f^{\beta\to\gamma}\, g^{\alpha\to\beta}\, x^\alpha.\, f\,(g\,x) : (\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\gamma}(\to I)}(\to I)}(\to I)}(\to E)$$

Основные тезисы конкретно к системе:

Системы в стиле Карри

Термы те же, что и в бестиповой теории. Каждый терм обладает множеством различных типов (пустое, одно- или многоэлементное, бесконечное).

Системы в стиле Чёрча

Термы — аннотированные версии бестиповых термов. Каждый терм имеет тип (обычно уникальный), выводимый из способа, которым терм аннотирован.

- Системы в стиле Карри: неявная типизация (например, Haskell, Ocaml).
- Системы в стиле Чёрча: явная типизация (большинство типизированных языков).

Предтермы системы $\lambda_\to$ а ля Карри

Определение

Множество ***предтермов*** (или ***псевдотермов***) Λ строится из переменных из $V = \{x, y, z, \ldots\}$ с помощью аппликации и абстракции:

$$\begin{array}{rcl} x \in V & \Rightarrow & x \in \Lambda \\ M, N \in \Lambda & \Rightarrow & (M\,N) \in \Lambda \\ M \in \Lambda, x \in V & \Rightarrow & (\lambda x.\, M) \in \Lambda \end{array}$$

- В абстрактном синтаксисе

$$\Lambda \ ::= \ V \mid (\Lambda\,\Lambda) \mid (\lambda V.\, \Lambda)$$

- Предтермы системы в стиле Карри — это в точности термы бестипового λ-исчисления.

Предермы системы $\lambda_\to$ а ля Чёрч

Определение

Множество ***предтермов*** $\Lambda_{\mathbb{T}}$ строится из переменных из $V = \{x, y, z, \ldots\}$ с помощью аппликации и аннотированной типами абстракции:

$$\begin{array}{rcl} x \in V & \Rightarrow & x \in \Lambda_{\mathbb{T}} \\ M, N \in \Lambda_{\mathbb{T}} & \Rightarrow & (M\,N) \in \Lambda_{\mathbb{T}} \\ M \in \Lambda_{\mathbb{T}}, x \in V, \sigma \in \mathbb{T} & \Rightarrow & (\lambda x^\sigma.\, M) \in \Lambda_{\mathbb{T}} \end{array}$$

- В абстрактном синтаксисе

$$\Lambda_{\mathbb{T}} \ ::= \ V \mid (\Lambda_{\mathbb{T}}\,\Lambda_{\mathbb{T}}) \mid (\lambda V^{\mathbb{T}}.\, \Lambda_{\mathbb{T}})$$

- Все соглашения о скобках и ассоциативности те же, что и в системе Λ.

Примеры предтермов

Система $\lambda_\to$ а ля Карри:

$$\begin{array}{l} \lambda x\, y.\, x \\ \lambda f\, g\, x.\, f\,(g\,x) \\ \lambda x.\, x\,x \end{array}$$

Система $\lambda_\to$ а ля Чёрч:

$$\begin{array}{lcl} \lambda x^\alpha y^\beta.\, x & \equiv & \lambda x{:}\alpha.\, \lambda y{:}\beta.\, x \\ \lambda x^\alpha y^\alpha.\, x & \equiv & \lambda x{:}\alpha.\, \lambda y{:}\alpha.\, x \\ \lambda f^\alpha g^\beta x^\gamma.\, f\,(g\,x) & \equiv & \lambda f{:}\alpha.\, \lambda g{:}\beta.\, \lambda x{:}\gamma.\, f\,(g\,x) \\ \lambda f^{\beta\to\gamma}\, g^{\alpha\to\beta}\, x^\alpha.\, f\,(g\,x) & \equiv & \lambda f{:}(\beta\to\gamma).\, \lambda g{:}(\alpha\to\beta).\, \lambda x{:}\alpha.\, f\,(g\,x) \\ \lambda x^\alpha.\, x\,x & \equiv & \lambda x{:}\alpha.\, x\,x \end{array}$$

Примеры утверждений типизации

Система в стиле Карри	Система в стиле Чёрча
$\lambda x.\, x : \alpha\to\alpha$	$\lambda x^\alpha.\, x : \alpha\to\alpha$
$\lambda x.\, x : (\alpha\to\beta)\to\alpha\to\beta$	$\lambda x^{\alpha\to\beta}.\, x : (\alpha\to\beta)\to\alpha\to\beta$
$\lambda x\, y.\, x : \alpha\to\beta\to\alpha$	$\lambda x^\alpha y^\beta.\, x : \alpha\to\beta\to\alpha$

Правила типизации $\lambda_{\to}$ «а ля Карри»

Утверждение $M:\tau$ называется ***выводимым*** в контексте Γ, обозначение

$$\Gamma \vdash M:\tau$$

если его вывод может быть произведен по правилам:

$$\begin{array}{ll}
\text{(аксиома)} & \Gamma \vdash x:\sigma, \text{ если } x^{\sigma} \in \Gamma \\[2ex]
(\to E) & \dfrac{\Gamma \vdash M:\sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N:\sigma}{\Gamma \vdash M\,N:\tau} \\[3ex]
(\to I) & \dfrac{\Gamma, x^{\sigma} \vdash M:\tau}{\Gamma \vdash \lambda x.\,M:\sigma \to \tau}
\end{array}$$

Если существуют Γ и τ, такие что $\Gamma \vdash M:\tau$, то предтерм M называют ***(допустимым) термом***.

Типизация $\lambda_{\to}$ «а ля Чёрч» в виде деревьев вывода

$$\begin{array}{ll}
\text{(аксиома)} & \Gamma \vdash x:\sigma, \text{ если } x^{\sigma} \in \Gamma \\[2ex]
(\to E) & \dfrac{\Gamma \vdash M:\sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N:\sigma}{\Gamma \vdash M\,N:\tau} \\[3ex]
(\to I) & \dfrac{\Gamma, x^{\sigma} \vdash M:\tau}{\Gamma \vdash \lambda x^{\sigma}.\,M:\sigma \to \tau}
\end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{x^{\alpha}, y^{\beta} \vdash x:\alpha}{x^{\alpha} \vdash \lambda y^{\beta}.\,x:\beta \to \alpha}\,(\to I)}{\vdash \lambda x^{\alpha}\, y^{\beta}.\,x:\alpha \to \beta \to \alpha}\,(\to I)$$

Для каждой пары $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$ верно $\vdash \lambda x^{\sigma}\, y^{\tau}.\,x:\sigma \to \tau \to \sigma$.

Типизация $\lambda_{\to}$ «а ля Карри»: пример

$$\begin{array}{ll}
\text{(аксиома)} & \Gamma \vdash x:\sigma, \text{ если } x^{\sigma} \in \Gamma \\[2ex]
(\to E) & \dfrac{\Gamma \vdash M:\sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N:\sigma}{\Gamma \vdash M\,N:\tau} \\[3ex]
(\to I) & \dfrac{\Gamma, x^{\sigma} \vdash M:\tau}{\Gamma \vdash \lambda x.\,M:\sigma \to \tau}
\end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{x^{\alpha}, y^{\beta} \vdash x:\alpha}{x^{\alpha} \vdash \lambda y.\,x:\beta \to \alpha}\,(\to I)}{\vdash \lambda x\, y.\,x:\alpha \to \beta \to \alpha}\,(\to I)$$

Для любых $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$ верно $\vdash \lambda x\, y.\,x:\sigma \to \tau \to \sigma$.

Пример дерева вывода для $\mathbf{B}$ в $\lambda_{\to}$ «а ля Чёрч»

Введем сокращение $\Gamma \equiv f^{\beta \to \gamma}, g^{\alpha \to \beta}, x^{\alpha}$ для повторяющегося контекста.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash f:\beta \to \gamma \qquad \dfrac{\Gamma \vdash g:\alpha \to \beta \qquad \Gamma \vdash x:\alpha}{\Gamma \vdash g\,x:\beta}\,(\to E)}{f^{\beta \to \gamma}, g^{\alpha \to \beta}, x^{\alpha} \vdash f\,(g\,x):\gamma}\,(\to E)}{f^{\beta \to \gamma}, g^{\alpha \to \beta} \vdash \lambda x^{\alpha}.\,f\,(g\,x):\alpha \to \gamma}\,(\to I)}{f^{\beta \to \gamma} \vdash \lambda g^{\alpha \to \beta}\, x^{\alpha}.\,f\,(g\,x):(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\,(\to I)}{\vdash \lambda f^{\beta \to \gamma}\, g^{\alpha \to \beta}\, x^{\alpha}.\,f\,(g\,x):(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\,(\to I)$$

Пример дерева вывода для $\mathbf{B}$ в $\lambda_{\to}$ «а ля Карри»

Введем сокращение $\Gamma \equiv f^{\beta \to \gamma}, g^{\alpha \to \beta}, x^{\alpha}$ для повторяющегося контекста.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash f:\beta \to \gamma \qquad \dfrac{\Gamma \vdash g:\alpha \to \beta \qquad \Gamma \vdash x:\alpha}{\Gamma \vdash g\,x:\beta}\,(\to E)}{f^{\beta \to \gamma}, g^{\alpha \to \beta}, x^{\alpha} \vdash f\,(g\,x):\gamma}\,(\to E)}{f^{\beta \to \gamma}, g^{\alpha \to \beta} \vdash \lambda x.\,f\,(g\,x):\alpha \to \gamma}\,(\to I)}{f^{\beta \to \gamma} \vdash \lambda g\, x.\,f\,(g\,x):(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\,(\to I)}{\vdash \lambda f\, g\, x.\,f\,(g\,x):(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\,(\to I)$$