SECTIO AUREA

Josef Kühner

Abstract

Expliquer la division harmonique d'un segment et le nombre d'or et leur rapport avec l'illustration d'une carte des voeux de Nouvel An.

1 Introduction

En architecture, beaux-arts et nature certaines proportions nous semblent bien rhythmées et harmonieuses alors que d'autres paraissent démésurées et maladroites. Les anciens avaient déjà étudié le phénomène et trouvé une réponse: la "proportion divina" ou "sectio aurea".

2 Sectio Aurea et Nombre d'Or

Les géomètres de la grèce antique avaient posé le problème suivant: étant donné un segment, trouver un point qui divise le segment en deux parties telles que la relation entre le segment tout entier et la plus grande partie soit égale à la relation entre la plus grande partie et la plus petite. La situation est illustrée dans la figure 1 plus bas.

Si pour deux points quelconques P, Q on dénote $d(P,Q)$ la distance de P et Q, en langage mathématique on veut donc construire le point T tel que

$$d(A,B) \div d(A,T) = d(A,T) \div d(T,B) \tag{1}$$

Il existe un grand nombre de solutions constructives; dans les figures 2 et 3 deux entre elles sont représentées.

Nous expliquons la première: Le segment donné est AB, AC est orthogonal à AB et de longeur $d(A,B)/2$. On trace le cercle de centre C et de rayon CB. Son intersection avec la prolongation de AC au delà de A est D. Le cercle de centre A et de rayon $d(A,D)$ coupe AB en T, le point recherché.

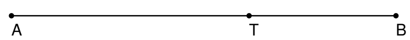

Figure 1: Sectio Aurea

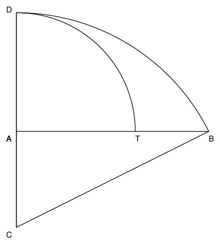

Figure 2: Construction Sectio Aurea

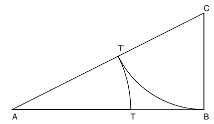

Figure 3: Construction Sectio Aurea

Il existe également des solutions algébriques. Pour faciliter l'écriture on note $a = d(A, T)$ et $b = d(T, B)$; alors la relation (1) s'écrit:

$$(a + b) \div a = a \div b. \tag{2}$$

On note ϕ le rapport a/b et obtient après quelques opérations élémentaires que

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0. \tag{3}$$

ϕ est donc la solution strictement positive de l'équation quadratique

$$X^2 - X - 1 = 0. \tag{4}$$

Un calcule montre que

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \tag{5}$$

c'est le nombre d'or.

On retrouve la "proportio divina" dans les pyramides de l'Egypte des Pharons parait-il, dans les temples de l'Acropolis d'Athènes, les toiles des maîtres de la Renaissance, les mises en pages des sites internet.

L'exemple que je préfère c'est la déesse Aphrodite, née des écumes, dont l'exquis nombril divise sa ravissante silhouette en "proportio divina".

3 Description d'une Graphique

La graphique est construite à partie d'une forme de base simple, un parallélogramme de cotés égales à ϕ resp. 1. Cette forme primitive peut être modifiée en appliquant une homothétie, pour l'agrandir ou réduire tout en respectant les rapports, ou par translation ou rotation. On peut rajouter des effets de couleurs.

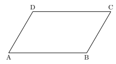

Figure 4: Forme de Base — Parallélogramme

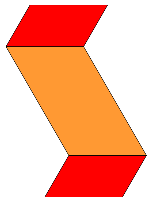

Figure 5: Formes Modifiées

Quelques exemples sont donnés dans les figures. Figure (4) montre la forme de base.

Dans la figure (5) on voit une forme de base originale et ses transformations par homotécie, translation et rotation. On a rajouté des couleurs.

Pour créer l'illustration des voeux de Nouvel An j'ai appliqué ces principes à la forme de base. Elle est repréduite dans la figure (6).

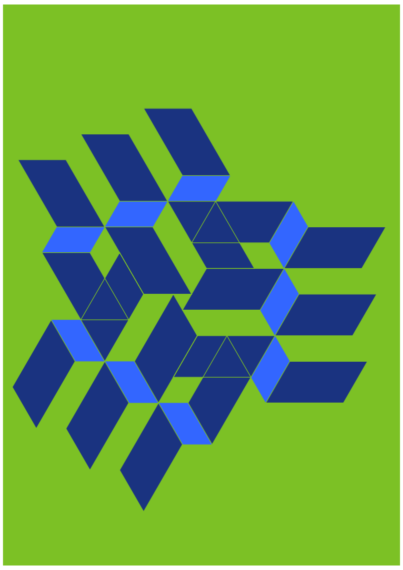

Figure 6: Greetings