Задача 1.3

Выполнил: Кутепов Никита, РК6-55Б

1 Задание

Требуется найти интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через узлы:

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{5}, x_3 = \frac{9}{10}$$

для функции f(x)=$\sqrt{1+x}$

2 Решение

Интерполяционный полином Лагранжа:

$$\tilde{f}(x) = L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \varphi_i(x),$$

где $\varphi_i(x) = \frac{x-x_j}{\prod_{i\neq j}(x_i-x_j)}$ - базисный многочлен n-1 степени.
Тогда формула полинома Лагранжа примет следующий вид:

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \frac{x-x_j}{\prod_{i\neq j}(x_i-x_j)},$$

n - количество узлов.
Степень полинома Лагранжа для функции $f(x) =\sqrt{1+x}$ при n = 3:

$$n - 1 = 2$$

Найдем значения функции в заданных узлах:

$$f(x_1) =\sqrt{1+1} =\sqrt{2}$$

$$f(x_2) =\sqrt{1+\frac{3}{5}} = 2 \cdot\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$f(x_3) =\sqrt{1+\frac{9}{10}} =\sqrt{\frac{19}{10}}$$

Запишем базисные многочлены $\varphi_i(x)$ для функции $f(x) =\sqrt{1+x}$, с заданными узлами $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{5}, x_3 = \frac{9}{10}$:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)} = \frac{(x-\frac{3}{5})\cdot(x-\frac{9}{10})}{(1-\frac{3}{5})\cdot(1-\frac{9}{10})} = 25\cdot(x^2-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{27}{50})$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)} = \frac{(x-1)\cdot(x-\frac{9}{10})}{(\frac{3}{5}-1)\cdot(\frac{3}{5}-\frac{9}{10})} = \frac{25}{3}\cdot(x^2-\frac{19}{10}\cdot x+\frac{9}{10})$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)} = \frac{(x-1)\cdot(x-\frac{3}{5})}{(\frac{9}{10}-1)\cdot(\frac{9}{10}-\frac{3}{5})} = -\frac{100}{3}\cdot(x^2-\frac{8}{5}\cdot x+\frac{3}{5})$$

Подставим базисные многочлены в формулу и получим полином Лагранжа для заданной функции:

$$\tilde{f}(x) = 25\sqrt{2}\cdot(x^2-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{27}{50})+\frac{50}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot(x^2-\frac{19}{10}\cdot x+\frac{9}{10})-\frac{100}{3}\sqrt{\frac{19}{10}}\cdot(x^2-\frac{8}{5}\cdot x+\frac{3}{5}) =$$

$$= x^2\cdot(25\sqrt{2}+\frac{10}{3}\sqrt{10}-\frac{10}{3}\sqrt{190})-x\cdot(\frac{75}{2}\sqrt{2}+\frac{19}{3}\sqrt{10}-\frac{16}{3}\sqrt{190})+(\frac{27}{2}\sqrt{2}+3\sqrt{10}-2\sqrt{190})$$

Для построения графика используем программу, написанную на языке Python: