Задача 6.6

Выполнил: Кутепов Никита, РК6-55Б

Задание

Пусть A – положительно определенная матрица размерности $n \times n$ с коэффициентами a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$. Требуется доказать, что

1. $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}| \geq \max\limits_{1 \leq k, j \leq n} |a_{ki}|$;
2. $a_{ii} a_{jj} > a_{ij}^2, i \neq j$.

Для доказательства первого пункта рассмотрите вектора $x^{(j,k)}$ и $z^{(j,k)}$:

$$x^{(j,k)} = \begin{cases} x_i^{(j,k)} = 1, i = j \\ x_i^{(j,k)} = 1, i = k \\ x_i^{(j,k)} = 0, i \neq j, i \neq k. \end{cases} \tag{1}$$

$$z^{(j,k)} = \begin{cases} z_i^{(j,k)} = 1, i = j \\ z_i^{(j,k)} = -1, i = k \\ z_i^{(j,k)} = 0, i \neq j, i \neq k. \end{cases} \tag{2}$$

и, используя определение положительно определенных матриц, докажите, что $|a_{kj}| < \frac{a_{jj} + a_{kk}}{2}$. Для доказательства второго пункта рассмотрите вектор $x^{(j,k)}$:

$$x^{(j,k)} = \begin{cases} x_i^{(j,k)} = \alpha, i = j \\ x_i^{(j,k)} = 1, i = k \\ x_i^{(j,k)} = 0, i \neq j, i \neq k. \end{cases} \tag{3}$$

Решение

Матрица называется положительно определенной, если она симметричная, и верным является неравентсво $x^T A x > 0$ для любого вектора $x \neq 0$ подходящей размерности.[1]

Для доказательства первого пункта рассмотрим вектор $z^{(j,k)}$ (2):

$$(z^{(j,k)})^T A z^{(j,k)} = (z^{(j,k)})^T \begin{bmatrix} a_{1j} - a_{1k} \\ a_{2j} - a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nj} - a_{nk} \end{bmatrix} = a_{jj} - a_{jk} - (a_{kj} - a_{kk}) > 0. \tag{4}$$

$a_{kj} = a_{jk}$, так как матрица является симметричной по определению, тогда:

$$a_{kj} < \frac{a_{jj} + a_{kk}}{2}, \tag{5}$$

где a_{jj}, a_{kk} - элементы диагонали матрицы, а a_{kj} - элемент, находящийся вне диагонали матрицы.

Далее рассмотрим вектор $x^{(j,k)}$ (1):

$$(x^{(j,k)})^T A x^{(j,k)} = (x^{(j,k)})^T \begin{bmatrix} a_{1j} + a_{1k} \\ a_{2j} + a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nj} + a_{nk} \end{bmatrix} = a_{jj} + a_{jk} + (a_{kj} + a_{kk}) > 0. \quad (6)$$

$$-a_{kj} < \frac{a_{jj} + a_{kk}}{2}, \quad (7)$$

Учитывая (5) и (7), запишем следующее неравенство:

$$|a_{kj}| < \frac{a_{jj} + a_{kk}}{2}, \quad (8)$$

Очевидно, что максимальный, по значению, элемент диагонали матрицы не меньше половины суммы двух других элементов диагонали матрицы, тогда:

$$\max_{1 \le i \le n} |a_{ii}| \neq \frac{a_{jj} + a_{kk}}{2}, \quad (9)$$

Тогда, используя (8) и (9), следует:

$$\max_{1 \le i \le n} |a_{ii}| \ge \max_{1 \le k, j \le n} |a_{ki}|. \quad (10)$$

Для доказательства второго пункта рассмотрим преобразованный вектор $x^{(j,k)}$ (3).

$$(x^{(j,k)})^T A x^{(j,k)} = (x^{(j,k)})^T \begin{bmatrix} \alpha a_{1j} + a_{1k} \\ \alpha a_{2j} + a_{2k} \\ \vdots \\ \alpha a_{nj} + a_{nk} \end{bmatrix} = \alpha(\alpha a_{jj} + a_{jk}) + \alpha a_{kj} + a_{kk} > 0. \quad (11)$$

$a_{kj} = a_{jk}$, так как матрица является симметричной по определению, тогда:

$$\alpha^2 a_{jj} + 2 a_{kj} \alpha + a_{kk} > 0. \quad (12)$$

Найдем дискриминант:

$$D = (2a_{kj})^2 - 4a_{jj}a_{kk} \tag{13}$$

Чтобы неравентсво(12) выполнялось, дискриминант должен быть меньше нуля:

$$D < 0, \tag{14}$$

$$(2a_{kj})^2 - 4a_{jj}a_{kk} < 0, \tag{15}$$

Из (16) следует:

$$a_{ii}a_{jj} > a_{ij}^2, i \neq j. \tag{16}$$

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу "Вычислительная математика". Москва, 2018-2021.