# *Задача 5.2*

*Выполнил: Кутепов Никита, РК6-55Б*

# Задание

Требуется найти численное решение задачи Коши с помощью метода Эйлера, используя шаг $h = 0.5$:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha e^{\beta(t-y)}, y(0) = 1, t \in [0; 1],$$

где $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$.

Дополнительно требуется найти точное решение указанной задачи Коши, продемонстрировать графики численного и точного решений на одной координатной плоскости, а также сравнить полученные абсолютные погрешности вычислений с верхней границей глобальной погрешности метода Эйлера.

# Решение

Рассмотрим следующее ОДУ:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha e^{\beta(t-y)}, \tag{1}$$

где $t \in [0; 1]$, $y(0) = 1$.

Запишем формулировку метода Эйлера [1]:

$$w_0 = \alpha, \tag{2}$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i), i = 0, 1..., m - 1, \tag{3}$$

при этом ожидаем, что $w_i \approx y(t_i)$, а $t_i = a + ih$, $i = 0, 1, ..., m$.

Учитывая, что $h = 0.5$ и $m = \frac{b-a}{h} = 2$, перепишем (2) и (3):

$$y(t_0) \approx w_0 = 1, t_0 = 0, \tag{4}$$

$$y(t_1) \approx w_1 = w_0 + hf(t_0, w_0) = 1 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot e^{(0-1)} \approx 1.093, t_1 = 0.5, \tag{5}$$

$$y(t_2) \approx w_2 = w_1 + hf(t_1, w_1) = 1.093 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot e^{(0.5-1.093)} \approx 1.232, t_2 = 1, \tag{6}$$

В итоге получаем численное решение задачи Коши с помощью метода Эйлера:

$$\{t_i, y_i\}_{i=0}^{m=2} : (t_0, y_0) = (0, 1), (t_1, y_1) = (0.5, 1.093), (t_2, y_2) = (1, 1.232). \tag{7}$$

Теперь найдем точное решение задачи Коши:

$$\frac{dy}{dt} = 0.5e^{(t-y)}, \tag{8}$$

$$2e^{y(t)}dy(t) = e^t dt, \tag{9}$$

$$\int 2e^{y(t)}dy(t)\frac{dt}{dt} = \int e^t dt, \tag{10}$$

$$2e^{y(t)} = e^t + C_1 \tag{11}$$

$$y(t) = ln(0.5(e^t + C_1)) \tag{12}$$

Так как $y(0) = 1$, $C_1 = -1 + 2e$.

$$y(t) = ln(0.5(e^t + C_1)) \tag{13}$$

Тогда точное решение задачи Коши:

$$y(t) = ln(0.5(e^t - 1 + 2e)) \tag{14}$$

Выполним построение точного и численного решений задачи Коши, используя скрипт, написанный на языке программирования Python.

Листинг 1: Построение графиков точного и численного решений задачи Коши.

```
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


def f(t, y):
    return 0.5 * math.e ** (t - y)


def y_solution(t):
    return math.log(0.5 * (math.e ** t - 1 + 2 * math.e))


def time_integrate(y_0, a, b, h):
    m = int((b - a) / h)
    y = np.zeros((m + 1,))
    t = np.linspace(a, b, m + 1)
    y[0] = y_0

    for i in range(m):
        t_i = a + i * h
        y[i + 1] = y[i] + h * f(t_i, y[i])
```

```python
    return t, y


if __name__ == '__main__':
    y_0 = 1
    a = 0
    b = 1
    h = 0.5
    t_approx, y_approx = time_integrate(y_0, a, b, h)
    t = np.linspace(a, b, 200)
    fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(14, 6))
    y = [y_solution(i) for i in t]
    ax.plot(t, y, '-', linewidth=2, label=r"$y(t)$")
    ax.plot(t_approx, y_approx, 'o--', linewidth=2, label=r"$w_i$")
    ax.set_xlabel(r'$t$', fontsize=16)
    ax.set_ylabel(r'$y$', fontsize=16)
    ax.grid()
    ax.legend(loc='lower right', fontsize=16)
    plt.show()
```

Построим графики точного и численного решений задачи Коши.

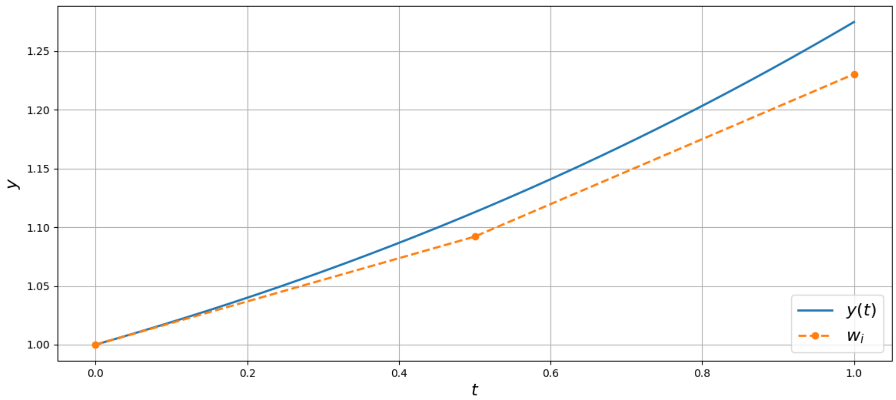


Рис. 1: Графики точного и численного решений задачи Коши.

Программно вычислим абсолютную погрешность в узлах: $t_0 = 0$, $t_1 = 0.5$, $t_2 = 1$:

$$(0, 1) : \delta_0 = 0 \tag{15}$$

$$(0.5, 1.093) : \delta_1 \approx 0.021 \tag{16}$$

$$(1, 1.232) : \delta_2 \approx 0.044 \tag{17}$$

Теперь мы можем приступить к рассмотрению теоремы о верхней границе глобальной погрешности метода Эйлера.

$$|y(t_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L}(e^{L(t_i-a)} - 1), i = 0, 1, .., m, \tag{18}$$

где $h = \frac{b-a}{m}$, L - константа Липшица, $M > max|f^{''}(t)|$

Сравним полученные абсолютные погрешности вычислений с верхней границей глобальной погрешности, для этого найдем максимальное значение второй производной функции $y(t)$ на участке [0;1]:

$$y^{'}(t) = \frac{e^t}{(e^t - 1) + 2e} \tag{19}$$

$$y^{''}(t) = \frac{(1 - \frac{e^t}{e^t-1+2e})e^t}{e^t - 1 + 2e} \tag{20}$$

Построим график данной функции, чтобы найти максимальное значение на заданном интервале:

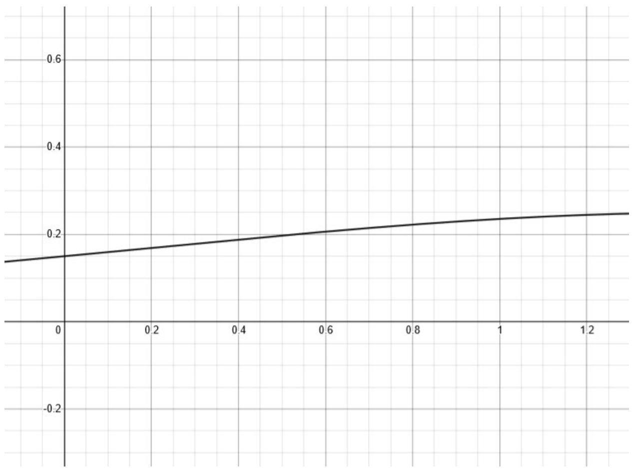


Рис. 2: График второй производной функции y(t).

Из графика видно, что максимальное значение функция принимает в точке t=1:

$$y^{''}(1) \approx 0.2356 \tag{21}$$

Тогда M = 0.236, найдем константу Липшица по формуле:

$$L = max|f^{'}(t)| \tag{22}$$

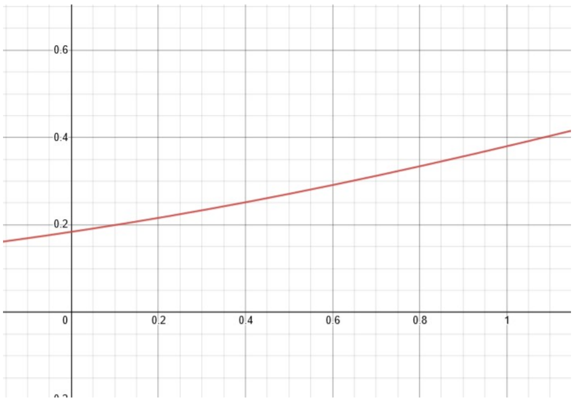


Рис. 3: График первой производной функции y(t).

Воспользуемся (18), чтобы найти максимальное значение производной на участке [0;1], рассмотрим график первой производной:

Заметим, что максимальное значение функция принимает в точке t=1:

$$L = f^{'}(1) \approx 0.3799 \tag{23}$$

Теперь, зная L и M, сравним полученные абсолютные погрешности с верхней границей глобальной погрешности:

$$t_0 : |y_0 - w_0| \leq \frac{hM}{2L}(e^{(t_0-a)L} - 1) = 0, \triangle_0 = 0 - \delta_0 = 0 \tag{24}$$

$$t_1 : |y_1 - w_1| \leq \frac{hM}{2L}(e^{(t_1-a)L} - 1) \approx 0.032, \triangle_1 = 0.032 - \delta_1 = 0.011 \tag{25}$$

$$t_2 : |y_2 - w_2| \leq \frac{hM}{2L}(e^{(t_2-a)L} - 1) \approx 0.072, \triangle_2 = 0.072 - \delta_2 = 0.028 \tag{26}$$

## Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу "Вычислительная математика". Москва, 2018-2021. Тема "Численное решение задачи Коши для систем ОДУ"