Задача 3.3

Выполнил: Кутепов Никита, РК6-55Б

Задание

Требуется найти аппроксимацию значения интеграла:

$$I = \int_0^b f(x)dx, f(x) \in F = \{x^2e^{-x}; x^3e^{-x}; x^2e^{-2x}\}, b \in B = \{1, 2, 3\}$$

с помощью формул трапеций и средних, сравнить ее с точным значением и для каждой из формул найти верхнюю границу погрешности такой аппроксимации. В расчетах использовать элементы с индексами: $id_F[f(x)], id_B[b]$.

Решение

Для варианта 10 используем: $f = x^3e^{-x}, b = 2$. Найдем значения функции в 3 узлах:

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = e^{-1}$$
$$f(2) = 8e^{-2}$$

Формула средних является частным случаем формулы Ньютона-Котеса, в данном случае мы имеем один узел на отрезке $[a; b]$, расположенный в его центре, т.е. $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Запишем формулу средних в общем виде:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_1)(b-a) + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3,$$

где $x_1 = \frac{a+b}{2}, \xi \in (a; b)$. Тогда для функции $f(x) = x^3e^{-x}$, при $a = 0, b = 2$ она будет выглядеть следующим образом:

$$\int_0^2 x^3e^{-x}dx = \frac{2}{e} + \frac{f''(\xi)}{3} \approx 0.736$$

Формула трапеций в свою очередь также является частным случаем формулы Ньютона-Котеса с 2 узлами на отрезке $[a; b]$, в общем виде формула трапеций выглядит следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^3}{12}f''(\xi),$$

где $x_1 = a, x_2 = b, h = b - a, \xi \in (a; b)$. Тогда для $f(x) = x^3e^{-x}$, при $a = 0, b = 2, h = 1$:

$$\int_0^2 x^3e^{-x}dx = \frac{8}{e^2} - \frac{f''(\xi)}{12} \approx 1.083$$

Сравним полученные формулами значения с точным, для этого посчитаем интеграл заданной функции:

$$\int_0^2 x^3e^{-x}dx = -e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)\Big|_0^2 = -\frac{38}{e^2}+6 \approx 0.856$$

Найдем верхнюю границу погрешности аппроксимации для формулы средних:

$$|\delta| \leq \frac{max\left|f^{''}(x)\right|}{3}$$

$$f^{'}(x) = 3xe^{-x} - x^3e^{-x}$$

$$f^{''}(x) = xe^{-x}\left(x^2-6x+6\right)$$

$$f^{'''}(x) = e^{-x}\left(x\left(9x-x^2-18\right)+6\right)$$

Найдем максимальное значение второй производной на отрезке $[0;2]$, $f(x)^{'''} = 0$ при $x = 0.416$, тогда:

$$\left|f^{''}(0.416)\right| = 1.009$$

$$\left|f^{''}(0)\right| = 0$$

$$\left|f^{''}(2)\right| = 0.541$$

Следовательно верхняя граница погрешности аппроксимации для формулы средних:

$$|\delta| \leq \frac{1.009}{3} = 0.336$$

Верхняя граница погрешности аппроксимации для формулы трапеций в 2 раза больше, чем верхняя граница погрешности аппроксимации для формулы средних:

$$|\delta| \leq \frac{2.018}{3} = 0.673$$

Заметим, что в случае с формулой средних погрешность меньше, чем в формуле трапеций, что подтверждает рациональность использования нечетного числа узлов. На рисунке 1 изображена аппроксимация константой, заметим, что площадь под графиком функции больше, чем площадь под графиком константы. На рисунке 2 изображена аппроксимация линейным интерполянтом, видно совершенно обратное: площадь под графиком функции меньше, чем площадь под графиком линейного интерполянта. Это подтверждает правильность вычислений.

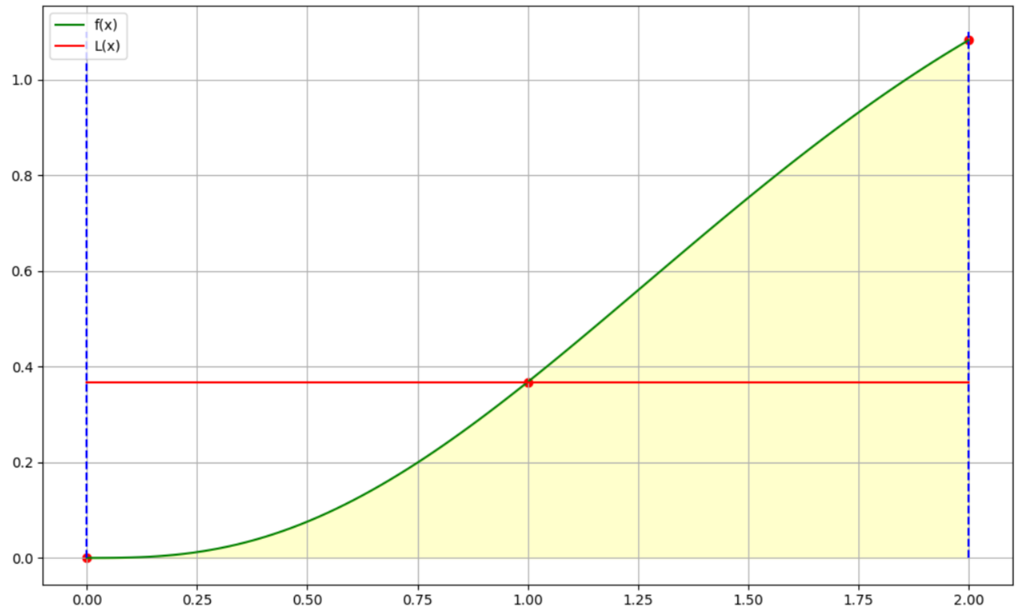

Рис. 1: Аппроксимация константой

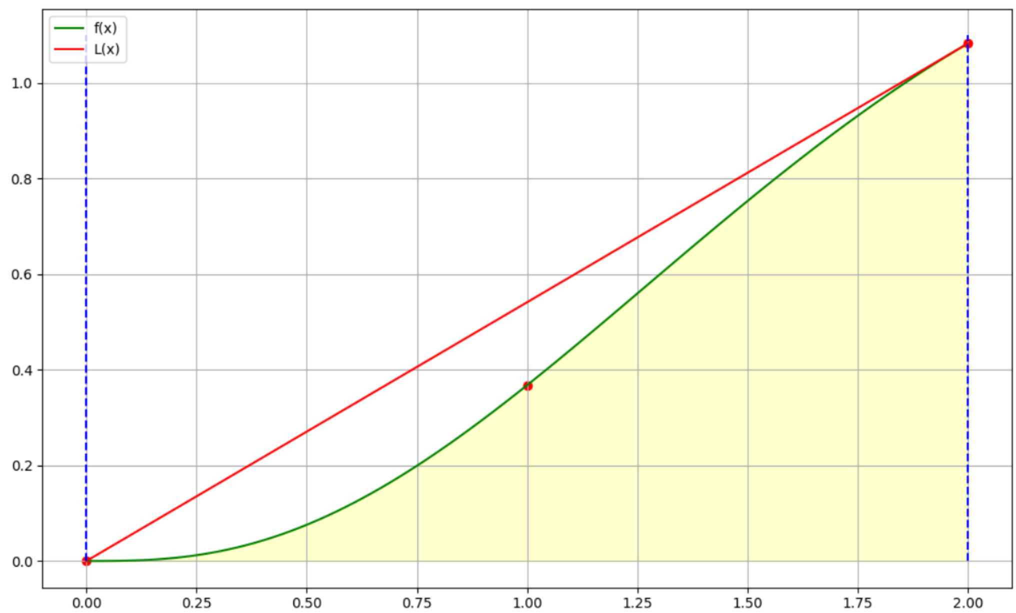

Рис. 2: Аппроксимация линейным интерполянтом