Задача 2.9

Выполнил: Кутепов Никита, РК6-55Б

1 Задание

Требуется доказать, что формула численного дифференцирования второго порядка для второй производной

$$f''(x_1) = \frac{f(x_1 - h) - 2f(x_1) + f(x_1 + h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

демонстрирует вычислительную неустойчивость, и найти оптимальный шаг диффе- ренцирования при условии того, что $|f^{(4)}(x)| < M$ и вычислительная погрешность ограничена ϵ.

2 Решение

Предположим, что при округлении значений $f(x_1 - h), f(x_1), f(x_1 + h)$ вычислительная погрешность равна $e(x_1 - h), e(x_1), e(x_1 + h)$, где h - шаг дифференцирования, тогда:

$$f(x_1 - h) = \tilde{f}(x_1 - h) + e(x_1 - h)$$

$$f(x_1) = \tilde{f}(x_1) + e(x_1)$$

$$f(x_1 + h) = \tilde{f}(x_1 + h) + e(x_1 + h)$$

Тогда полная погрешность, включающая погрешность метода и вычислительную погрешность, вычисляется следующим образом:

$$f''(x_1) - \frac{\tilde{f}(x_1 - h) - 2\tilde{f}(x_1) + \tilde{f}(x_1 + h)}{h^2} = \frac{e(x_1 - h) - 2e(x_1) + e(x_1 + h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

По условию вычислительная погрешность ограничена ϵ, а $f^{(4)}$ ограничена M, тогда запишем следующее неравенство:

$$\left| f''(x_1) - \frac{\tilde{f}(x_1 - h) - 2\tilde{f}(x_1) + \tilde{f}(x_1 + h)}{h^2} \right| \le \frac{4\epsilon}{h^2} + \frac{h^2}{12} M$$

Заметим, что при h $\to$ 0 погрешность стремится к бесконечности, этим и обуславливается вычислительная неустойчивость данной в задании формулы дифференцирования.
Чтобы найти оптимальный шаг дифференцирования, найдем экстремум(минимум) функции:

$$y = \frac{4\epsilon}{h^2} + \frac{h^2}{12} M$$

$$\frac{-8\epsilon}{h^3} + \frac{h}{6}M = 0$$

$$\frac{Mh^4 - 48\epsilon}{6h^3} = 0$$

$$Mh^4 - 48\epsilon = 0$$

$$h^4 = \frac{48\epsilon}{M}$$

$$h_{opt} = \sqrt[4]{\frac{48\epsilon}{M}}$$