Задача 4.3

Выполнил: Кутепов Никита, РК6-55Б

Задание

Требуется найти приближение функции f(x), определённой на заданном отрезке, линейным полиномом, используя МНК. Вид функции известен:

$$f(x) = \frac{1}{x+3}, x \in [-1; 1];$$

Построить графики исходной функции и ее аппроксимации.

Решение

Рассмотрим данную задачу для двух случаев:

1. Зададим число узлов, пусть x равномерно распределены (т.е. рассматриваем случай с дискретным набором данных). Тогда воспользуемся стандартной формулой МНК.

2. Рассмотрим МНК для приближения к непрерывной функции, заданной на отрезке [a, b]

Случай с дискретным набором данных

Метод минимизации квадратов состоит в минимизации суммы квадратов абсолютных значений:

$$min_{a_0,a_1} E_2(a_0, a_1) = min_{a_0,a_1} \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2$$

Задача минимизации функции $E_2(a_0, a_1)$ сводится к взятию производных по $a_o a_1$ и приравнивание их к нулю. Подставив $f(x) = a_0 + a_1 x$ в $E_2(a_0, a_1)$, формула примет вид:

$$E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - a_0 - a_1 x_i]^2$$

Функция $E_2(a_0, a_1)$ принимает экстремальное значение при таких a_0, a_1, что:

$$\frac{\delta E_2}{\delta a_0} = 0 \Longrightarrow -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0,$$

$$\frac{\delta E_2}{\delta a_1} = 0 \Longrightarrow -2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0,$$

что дает систему уравнений относительно a_0 и a_1:

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0, \\ -2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0, \end{cases}$$

Решением данной системы являются следующие выражения для a_0 и a_1:

$$a_o^{(opt)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$a_1^{(opt)} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

Тогда прямая $a_0^{(opt)} + a_1^{(opt)} x$ наилучшим образом приближается к дискретным данным в среднеквадратичном смысле.

Реализуем МНК на языке программирования Python, при этом рассмотрим $n = 3, 30, 300$:

Листинг 1: Функции для нахождения $a_0^{(opt)}$ и $a_1^{(opt)}$

```
def a_0_opt(x):
    a = np.sum(x ** 2) * np.sum(f_x(x)) - (np.sum(x) * np.sum(x * f_x(
    b = x.size * np.sum(x ** 2) - np.sum(x) ** 2
    return a / b


def a_1_opt(x):
    a = x.size * np.sum(x * f_x(x)) - (np.sum(x) * np.sum(f_x(x)))
    b = x.size * np.sum(x ** 2) - np.sum(x) ** 2
    return a / b
```

В функции построения графиков осуществим генерацию заданного количества узлов x и найдем значения прямой $y(x) = a_0 + a_1 x$ в этих точках для построения графика:

Листинг 2: Построение прямой $y(x) = a_0 + a_1 x$

```
    for n in n_counts:
        x_nodes = np.linspace(a, b, n)
        a_0 = a_0_opt(x_nodes)
        a_1 = a_1_opt(x_nodes)
        f_approx = [f_x_approx(a_0, a_1, x) for x in x_nodes]
```

```
    def f_x_approx(a_0, a_1, x):
return a_0 + a_1 * x
```

Построим графики исходной функции и ее аппроксимации для разного числа узлов.

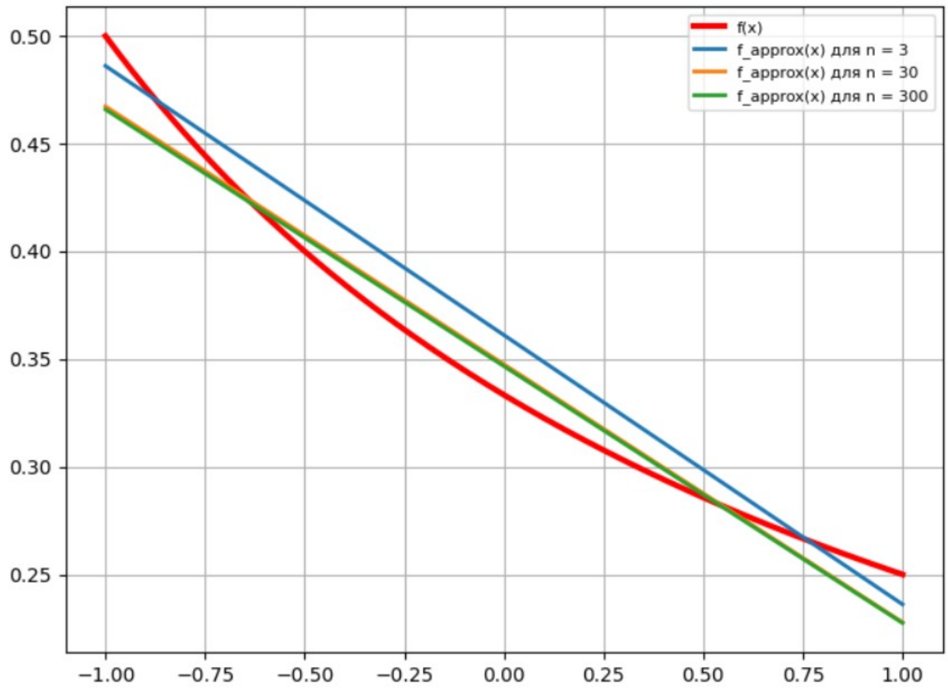

Рис. 1: График исходной функции(красным цветом) и ее аппроксимации для n = 3, 30, 300.

Приближение к непрерывной функции

Для приближения полиномом $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ степени n = 1 к функции f(x) на интервале [-1;1] используем МНК:

$$min_a E_2(a) = min_a \int_{i=1}^{n} [f(x) - P_n(x)]^2 dx = min_a \int_{i=1}^{n} [f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i]^2 dx$$

$$= min_a \int_{i=1}^{n} [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b f(x) x^i dx + \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right] dx$$

Для нахождения наименьшего значения функции $E_2(a)$ необходимо найти нули производной:

$$\frac{\delta E_2}{\delta a_k} = -2\int_b^a x^k dx + \frac{\delta}{\delta a_k}\left[\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i a_j \int_a^b x^{i+j} dx\right] = -2\int_a^b f(x)x^k dx + 2\sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b x^{i+k} dx$$

Тогда для n = 1 найдем производные по a_0 и a_1:

$$\frac{\delta E_2}{\delta a_0} = -2\int_a^b f(x)1dx + 2\sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b x^i dx$$

$$\frac{\delta E_2}{\delta a_1} = -2\int_a^b f(x)xdx + 2\sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b x^{i+1} dx$$

Найдем оптимальные значений a_k с помощью выражения:

$$a_0 = \frac{\langle f(x), x^0\rangle}{\langle x^0, x^0\rangle} = \frac{\int_a^b \frac{1}{x+3}}{2} \approx 0.3465$$

$$a_1 = \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{3\int_a^b \frac{x}{x+3}}{2} \approx -0.1095$$

Запишем уравнение прямой, которая наилучшим образом приближается к заданной функции на отрезке [-1;1]

$$y(x) = 0.3465 - 0.1095x$$

Осуществим построения графика функции и ее аппроксимации.

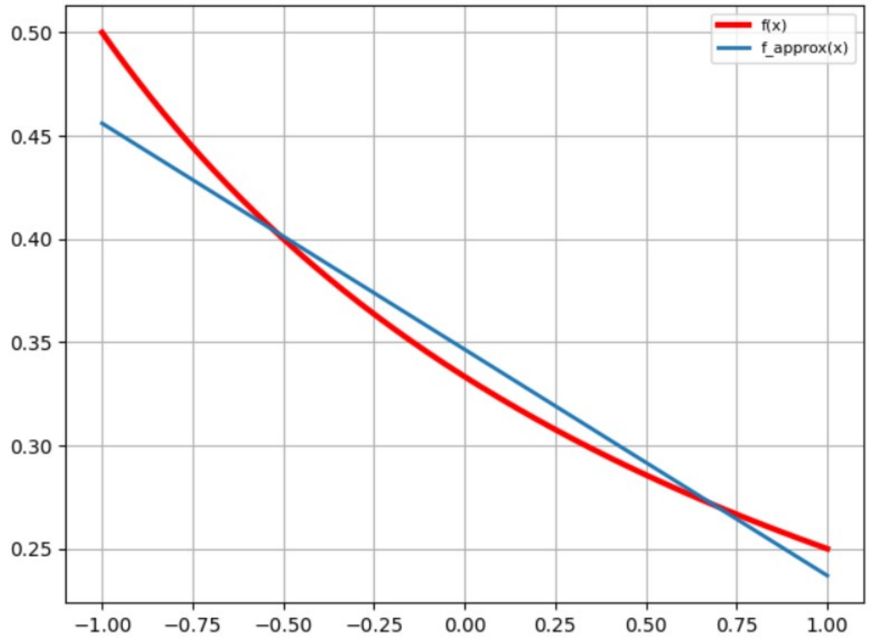

Рис. 2: График исходной функции(красным цветом) и ее аппроксимации