18.50

COLECCIÓN MOSHERA

ITARIOS

ISBN: 978-9972-813-35-1

los al por mayor

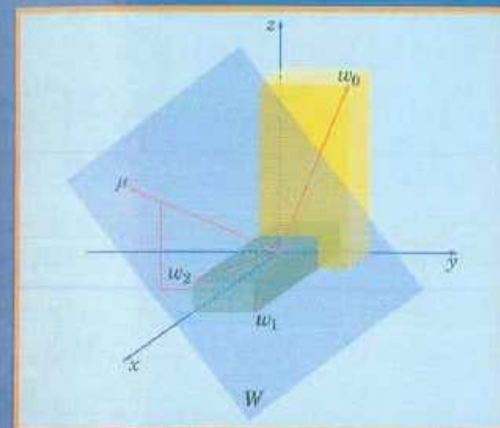
fax: 567-9299

MOISÉS LÁZARO

ÁLGEBRA LINEAL

MOSHERA EDITORIAL

ÁLGEBRA LINEAL



Matrices y Determinantes
Sistema de Ecuaciones Lineales
Espacios Vectoriales
Transformaciones Lineales
Valor Propio y Vector Propio
Las Formas Racional y de Jordan
Espacios con Producto Interno
Algunas Aplicaciones del Álgebra Lineal

MOSHERA EDITORIAL

MOISÉS LÁZARO C.

1850

ÁLGEBRA LINEAL

Matrices y Determinantes
Sistema de Ecuaciones Lineales
Espacios Vectoriales
Transformaciones Lineales
Valor Propio y Vector Propio
Las Formas Racional y de Jordan
Espacios con Producto Interno
Algunas Aplicaciones del Álgebra Lineal

MOISÉS LÁZARO C.

EDITORIAL MOSHERA

Autor: *Moisés Lázaro Carrión*
Estudios: *Lic. en Matemáticas Puras, Lic. en Educación, Maestría (Métodos Cuantitativos de la Economía U.N.M.S.M.), Maestría (Matemáticas Puras P.U.C.P.).*

Experiencia Docente: *Pontificia Universidad Católica del Perú*
Universidad Ricardo Palma
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad Nacional de Ancash Santiago Antúnez de Mayolo
Universidad Nacional del Callao
Universidad Particular San Martín de Porres
Universidad Las Américas.

ÁLGEBRA LINEAL

Autor: **Moisés Lázaro Carrión**

Decreto Legislativo .... : 822
Hecho el depósito legan en la Biblioteca Nacional del Perú Nº : 2005-6683
International Standard Book Number ISBN .... : 978-9972-813-35-1

Segunda edición : Octubre 2005
1ra. Reimpresión : Octubre 2009

Obra editada, impresa y distribuida por:
Distribuidora, Imprenta, Editorial, Librería
MOSHERA S.R.L.
RUC: 20101220584
Jr. Tacna 2975 - San Martín de Porres
Lima - Perú / Telefax : 567-9299
e-mail: editorialmoshera@hotmail.com

Impreso en el Perú • Printed in Perú

Este libro está dedicado:
a la juventud estudiosa
del país.

PRESENTACIÓN

El presente curso de ÁLGEBRA LINEAL está enfocado hacia alumnos procedentes de ciencias, de Ingeniería y Economia que vayan a seguir retos en los que su formación académica jugarán un papel preponderante.

Mi gran preocupación ha sido, presentar los temas aquí tratados, en forma didáctica sin dejar de ser rigurosa.

El libro consta de ocho capítulos, en los que se trata:

CAPÍTULO 1: Matrices y determinantes, dos temas instrumentales de aplicación práctica que son prerrequisitos para los siguientes capítulos.

CAPÍTULO 2: Sistema de ecuaciones lineales, aquí destacamos la gran importancia de las ecuaciones lineales consistentes.

CAPÍTULO 3: Espacios vectoriales, es la puerta de entrada para definir una estructura algebraica, que es el cimiento del álgebra lineal. Sobre el espacio vectorial euclideano bidimensional y tridimensional se harán las aplicaciones geométricas que son posibles de ser algebrizados. Sobre otros espacios vectoriales abstractos se definirán temas importantes del análisis.

CAPÍTULO 4: Transformaciones Lineales, aquí lo destacable es la aplicación geométrica, en lo particular a lo referente a las isometrías. Este capítulo es el preámbulo de los operadores lineales y sus diversas aplicaciones.

CAPÍTULO 5: Valor propio y Vector propio, dos temas ligados entre si, cuyas aplicaciones son de gran importancia no solo en la geometría, sino también en el Análisis porque simplifican la resolución de problemas complicados de la geometría y de los sistemas dinámicos en especial.

CAPÍTULO 6: Las formas racional y de Jordan, son dos temas que nos permiten presentar a las transformaciones lineales de manera muy simple cuando es posible hallar nuevas bases a partir de los polinomios característicos y minimal.

CAPÍTULO 7: Espacios con producto interno, es uno de los temas muy importantes del Álgebra Lineal, porque es la base para definir los espacios normados y los espacios métricos, piezas fundamentales del análisis. Se destaca en este capítulo la adjunta de un operador lineal, cuya formalización nos permite hacer interesantes definiciones del Álgebra Lineal.

CAPÍTULO 8: Algunas aplicaciones lineales, en este capítulo hemos destacado dos aplicaciones del Álgebra Lineal: rotación de ejes cartesianos (formas cuadráticas) y la resolución de sistemas dinámicos lineales.

Obviamente hay otras aplicaciones del Álgebra Lineal, que no he abordado en este libro por lo frondoso de las mismas.

Me ilusiona pensar que los lectores quedaran satisfechos y absortos de lo hermoso que es el Álgebra Lineal.

El autor

CONTENIDO

Capítulo 1. Matrices y Determinantes.

Capítulo 2. Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Capítulo 3. Espacios Vectoriales

Capítulo 4. Transformaciones Lineales

Capítulo 5. Valor Propio y Vector Propio (formas canónicas elementales)

Capítulo 6. Las Formas Racional y de Jordan

Capítulo 7. Espacios con Producto Interno

Capítulo 8. Algunas Aplicaciones del Álgebra Lineal

CAPÍTULO **1**

MATRICES Y DETERMINANTES

1. MATRICES

Una matriz, $A_{m\times n}$, es un arreglo rectangular de $m \times n$ números dispuestos en m filas (renglones) y n columnas.

Así tendremos:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El símbolo $m \times n$ se lee "m por n".

El vector fila $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots\ldots, a_{in})$ se le llama FILA i

Al vector columna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ se le llama COLUMNA j.

a_{ij} es el número que aparece en la i–ésima fila y la j–ésima columna.

2. EJEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1-i & 4+2i \\ 2 & 1-5i \\ 3+2i & 3 \end{bmatrix}$$

A Es una matriz de orden 3×1 , $a_{ij} \in I\!R$
B Es una matriz de orden 2×4 , $b_{ij} \in I\!R$
C Es una matriz de orden 3×2 , $c_{ij} \in C$

3. NOTACIÓN

Se denota las matrices por: $A_{m\times n}=[a_{ij}]$ ó (a_{ij}), $i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$
donde a_{ij} es la $i-j$ ésima entrada, $i=$ fila , $j=$ columna.

4. ORDEN DE UNA MATRIZ

El orden de una matriz está dado por el producto $m\times n$, donde m indica el número de filas y n el número de columnas.

El conjunto de matrices $m\times n$ con elementos $a_{ij}\in I\!K$ se denota por $I\!K^{m\times n}$.

Es decir: $I\!K^{m\times n}=\left\{(a_{ij})\,/\,a_{ij}\in I\!K\right\}$

Si $I\!K=I\!R$, entonces $I\!R^{m\times n}=\{(a_{ij})_{m\times n}\,/\,a_{ij}\in I\!R\}$

Si $I\!K=C$, entonces $C^{m\times n}=\{(a_{ij})_{m\times n}\,/\,a_{ij}\in C\}$

5. MATRICES ESPECIALES

Las matrices especiales son:

5.1) MATRIZ CUADRADA: Si $m=n$ (número de filas es igual al número de columnas), diremos que $A_n=(a_{ij})$ o $[a_{ij}]$ es una matriz cuadrada.

5.2) MATRIZ DIAGONAL: La matriz cuadrada A_n es diagonal si $a_{ij}=0$, $\forall\, i\neq j$ y $\exists\, a_{ii}\neq 0$, $1\le i\le n$,

$$A_n=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Por lo menos algún a_{ii} es diferente de cero.

Ejemplos

a) En $I\!K^{4\times 4}$

$$A_4=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

b) En $I\!K^{5\times 5}$

$$B_5=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

5.3) MATRIZ IDENTIDAD: La matriz cuadrada I_n es la matriz identidad si, y sólo si $a_{ij}=0$; $\forall\, i\neq j\ \wedge\ a_{ii}=1\ \ \forall\, i$

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad,\quad I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad,\quad I_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$I_5=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

5.4) MATRIZ TRIANGULAR

a) La matriz cuadrada A_n es TRIANGULAR superior si $a_{ij} = 0 \;\; \forall\, i > j$

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

b) La matriz cuadrada A_n es TRIANGULAR inferior si $a_{ij} = 0 \;\; \forall\, i < j$

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

6. MATRIZ NULA

$A_{m\times n}$ es nula si, y sólo si $a_{ij} = 0 \;\; \forall i, \forall j$

Denotaremos por $\Theta_{m\times n}$

Ejemplo

$$\Theta_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. IGUALDAD DE MATRICES

Las matrices $A = [a_{ij}]_{m\times n} \wedge B = [b_{ij}]_{m\times n}$ son iguales si, y sólo si, $a_{ij} = b_{ij} \;\; \forall i, \; \forall j$ $1 \le i \le m \; ; \; 1 \le j \le n$.

7.1) PROPIEDADES

Sean A, B, C matrices del mismo orden (elementos de $I\!K^{m\times n}$) se cumplen las siguientes propiedades:

P₁) $A = A \;\; , \;\; \forall A$

P₂) $A = B$ implica $B = A$

P₃) $A = B \wedge B = C$ implica $A = C$

8. MATRIZ TRANSPUESTA

Sean las matrices $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ y $B = [b_{ij}]_{n\times m}$ Diremos que B es la TRANSPUESTA de A, si sólo si $b_{ij} = a_{ji} \;\; \forall\; 1 \le i \le m \,,\; 1 \le j \le n$ y denotamos $B = A^t$ (o por ${}^tA$). Es decir:

$$\boxed{A^t = B \iff b_{ij} = a_{ji} \;\;\Big|\;\; \forall i, \forall j}$$

B es la transpuesta de A

Indica que las filas de B son las columnas de A

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 4}$ una matriz de orden 3×4

La transpuesta de A es otra matriz de orden 4×3, que se obtiene intercambiando las filas por columnas.

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

8.1) PROPIEDADES

P_1 . $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ La transpuesta de la inversa, es igual a la inversa de la transpuesta.

P_2 . $(A+B)^t = A^t + B^t$ Transpuesta de una suma de matrices es igual a la suma de las transpuestas.

P_3 . $(\lambda A)^t = \lambda A^t$ λ es una constante.

P_4 . $(AB)^t = B^t A^t$ La transpuesta de un producto conmuta al producto de transpuestas.

P_5 . $I_n^t = I_n$

P_6 . $(A^t)^t = A$

9. MATRIZ SIMÉTRICA

Sea la matriz cuadrada $A_n = [a_{ij}]$, A es simétrica si, y solo si, $A = A^t$

10. MATRIZ ANTISIMÉTRICA

A es antisimétrica, si $A^t = -A$

Una matriz cuadrada A es no singular si, y sólo si, su determinante es diferente de cero.

11. MATRIZ ORTOGONAL

Sea $A_n = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada no singular,

$$\boxed{A \text{ es ortogonal, si y sólo si } A^{-1} = A^t}$$

11.1) PROPIEDADES

P_1 . A es ORTOGONAL $\Longleftrightarrow AA^t = I_n$

P_2 . Si A y B son ortogonales $\Rightarrow AB$ es ortogonal.

12. DIAGONAL PRINCIPAL

Dada la matriz cuadrada $A_n = [a_{ij}]$, se llama DIAGONAL PRINCIPAL al conjunto.

$D(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots, a_{nn})$

Ejemplo

Sea $A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$D(2,4,3,0)$ es la diagonal principal de A_4.

13. TRAZA DE UNA MATRIZ

Sea la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_n$, se llama TRAZA de A, al número $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$ (es la suma de los elementos de la diagonal principal)

Ejemplo

En la matriz A_4, se tiene: $Tr(A_4) = 2+4+3+0$
$Tr(A_4) = 9$

13.1) PROPIEDADES:

P_1 . $Tr(\theta) = 0$	P_4 . $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$
P_2 . $Tr(I_n) = n$	P_5 . $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$
P_3 . $Tr(A^t) = Tr(A)$	P_6 . $Tr(AB) = Tr(BA)$

14. MATRIZ DIAGONAL

La matriz cuadrada $A_n = [a_{ij}]$ es DIAGONAL si, y sólo si, $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$ y $\exists i, a_{ii} \neq 0$, $1 \le i \le n$.

Ejemplo

$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

14.1 MATRIZ ESCALAR: Es la matriz diagonal cuyos elementos son iguales.

Ejemplo

$B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

15. MATRIZ IDEMPOTENTE

Una matriz cuadrada $A=[a_{ij}]_n$ es idempotente si, y sólo si, $A^2=A$.

16. MATRIZ NILPOTENTE

A es nilpontente, si $A^k=\theta$ para algún $k\geq 2$, θ: matriz cuadrada NULA.

17. MATRIZ INVOLUTIVA

A es involutiva, si sólo si $A_n^2=I_n$

18. MATRIZ HERMITIANA

Sea $A\in C^{n\times n}$

A es hermitiana si, y sólo si, $A=(\overline{A})^t$

Transpuesta de la conjugada de A

NOTACIÓN: Si $A=[a_{ij}]$, entonces $\overline{A}=[\overline{a}_{ij}]$, donde $\overline{a}_{ij}$ es la conjugada de a_{ij} y $\overline{A}$ es la conjugada de A.

NOTACIÓN: $(\overline{A})^t=A^*$.

Ejemplo

Sea $A=\begin{bmatrix}2 & 1-i & 4+2i\\ 1+i & 5 & -1-i\\ 4-2i & -1+i & -3\end{bmatrix}$

Donde $\overline{A}=\begin{bmatrix}2 & 1+i & 4-2i\\ 1-i & 5 & -1+i\\ 4+2i & -1-i & -3\end{bmatrix}$ $(\overline{A})^t=\begin{bmatrix}2 & 1-i & 4+2i\\ 1+i & 5 & -1-i\\ 4-2i & -1+i & -3\end{bmatrix}$

Se cumple $A=(\overline{A})^t$, luego A es hermitiana.

19. MATRIZ POSITIVA

Sea $A\in I\!R^{n\times n}$, A es positiva si, y sólo si, $X\,A\,X^t>0$, $\forall\, X\in I\!R^n$, $X\neq\theta$.

20. EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES

El conjunto de matrices $I\!K^{m\times n}$ es un ESPACIO VECTORIAL sobre $I\!K$. Efectivamente, en $I\!K^{m\times n}$ se definen dos operaciones:

I. SUMA DE MATRICES

$$+\ :\ I\!K^{m\times n}\times I\!K^{m\times n}\longrightarrow I\!K^{m\times n}$$
$$([a_{ij}],[b_{ij}])\longmapsto [a_{ij}]+[b_{ij}]=[c_{ij}]$$

tal que $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $\forall\ 1\leq i\leq m$; $\forall\ 1\leq j\leq n$

Definición: La suma de $[a_{ij}]$ y $[b_{ij}]$ es la matriz $[a_{ij}]+[b_{ij}]=[c_{ij}]$, de $m\times n$, tal que $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $\forall\ 1\leq i\leq m$, $\forall\ 1\leq j\leq n$.

II. PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

$$\cdot\ :\ I\!K\times I\!K^{m\times n}\longrightarrow I\!K^{m\times n}$$
$$(\alpha,[a_{ij}])\longmapsto \alpha[a_{ij}]=[\alpha\, a_{ij}]\ ,\ 1\leq i\leq m\ ;\ 1\leq j\leq n$$

Definición: El producto de un escalar α por una matriz $[a_{ij}]$ de orden $m\times n$ es una matriz $[\alpha\, a_{ij}]$ de orden $m\times n$ cuyos elementos se obtienen multiplicando el escalar α por cada elemento a_{ij} de la matriz $[a_{ij}]$.

Ejemplos

1) Supongamos que en el conjunto $I\!K^{2\times 3}$, $I\!K=I\!R$ se dan las siguientes matrices:

$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & -3 & 2\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$

Dado los escalares $\alpha=2$ y $\beta=-3$, hallar:

i) $A+B$

ii) $\alpha A+\beta B$

iii) Hallar $X\in I\!K^{2\times 3}$, tal que: $\alpha A-\beta X=5\alpha-\alpha B+X$

$$\begin{array}{ccc|ccc l}
1 & a & b & 1 & 0 & 0 & \leftarrow + \\
0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 & \text{por } (-a) \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & b-ac & 1 & -a & 0 & \leftarrow + \\
0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 & \leftarrow \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \text{por } (-c) \quad -(b-ac) \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -a & -b+ac & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

Caso General: Sea A una matriz triangular con componentes iguales a 1, en la diagonal:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} \cdots\cdots a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 \cdots\cdots a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 1 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 \quad 1 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \quad 0 \cdots 1 \end{bmatrix}}_{In} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} \cdots\cdots a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \end{bmatrix}}_{N}$$

Sea $N = A - In$. Demostrar que $N^{n+1} = \theta$. Nótese que $A = I + N$. Demostrar que A es invertible y su inversa es $(I+N)^{-1} = I - N + N^2 - N^3 + \ldots + (-1)^n N^n$.

(45) Sean B y C matrices cuadradas de orden n tales que $C^2 = \theta$ y $BC = CB$; demostrar que, si $A = B + C$ entonces: $A^{k+1} = B^k(B + (k+1)C)$; $\forall k \geq 1$

<u>Prueba</u>: (Por inducción)

1. Para $k = 1$

El 1er miembro es
$$\begin{aligned} A^{1+1} &= A \cdot A \\ &= (B+C)(B+C) = B(B+C) + C(B+C) \\ &= B^2 + BC + CB + C^2 \\ &= B^2 + BC + BC + \theta \qquad \text{dato: } CB = BC \\ &= B^2 + 2BC \qquad\qquad\qquad\quad C^2 = \theta \\ &= B(B+2C) \end{aligned}$$

El 2^{do} miembro coincide cuando $k = 1$

2. Suponer que para $k = h$, $h > 1$ se cumple: $A^{h+1} = B^h(B + (h+1)C)$

3. Para $k = h + 1$ se tiene:

$$\begin{aligned} A^{(h+1)+1} &= A^{h+1} \cdot A \quad \text{, donde } A = B + C \text{ , si } k = 0 \\ &= [B^h(B+(h+1)C)][B+C] \\ &= [B^h(B+(h+1)C)]B + [B^h(B+(h+1)C)]C \\ &= [B^h(B^2+(h+1)CB)] + [B^h(BC+(h+1)\underbrace{C^2}_{\theta})] \quad , \; CB = BC \\ &= [B^h(B^2+(h+1)BC)] + B^h BC \\ &= [B^h \cdot B(B+(h+1)C)] + B^{h+1}C \\ &= [B^{h+1}(B+(h+1)C)] + B^{h+1}C \\ &= B^{h+1}(B+(h+1)C+C) \\ &= B^{h+1}(B+(h+2)C) \end{aligned}$$

(46) Sabiendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, hallar A^n ; $\forall n \geq 2$

<u>Solución:</u>

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A^2}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1+2+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A^3}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1+2+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1+2+3+4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos inducir que:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 1+2+3+4+\ldots+n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{(1+n)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(47) Las matrices A y B de $I\!R^{m\times m}$ son tales que A y $(AB-BA)$ son permutables. Demostrar que: $(AB-BA)\,A^n = A^n\,(AB-BA)\ \ \forall n \in N$

Prueba: (Por Inducción)

1. $n=1$: $(AB-BA)\,A = A\,(AB-BA)$ es verdadero según hipótesis.
2. $n=h$: $(AB-BA)\,A^h = A^h\,(AB-BA)$ es verdadero.
3. $n=h+1$ se tiene:

$$\begin{aligned} (AB-BA)\,A^{h+1} &= (AB-BA)\,A^h A \\ &= A^h(AB-BA)A \quad \text{por } 2 \\ &= A^h A(AB-BA) \quad \text{por } 1 \\ &= A^{h+1}(AB-BA) \end{aligned}$$

(48) Probar que:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & p\,\mathrm{sen}\,\theta \\ -\frac{1}{p}\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & p\,\mathrm{sen}\,(n\theta) \\ -\frac{1}{p}\mathrm{sen}\,(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix} \ \forall n \geq 2\ ,\ n \in Z$$

Prueba: (Por inducción)

1. Si $n=2$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & p\,\mathrm{sen}\theta \\ -\frac{1}{p}\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & p\,\mathrm{sen}\theta \\ -\frac{1}{p}\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta & p(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta\,\mathrm{sen}\theta) \\ -\frac{1}{p}(\mathrm{sen}\theta\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta) & -\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & p\,\mathrm{sen}2\theta \\ -\frac{1}{p}\mathrm{sen}\,2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

2. Para $n=h$, suponer que se cumple:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & p\,\mathrm{sen}\,\theta \\ -\frac{1}{p}\mathrm{sen}2\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^h = \begin{bmatrix} \cos(h\theta) & p\,\mathrm{sen}\,(h\theta) \\ -\frac{1}{p}\mathrm{sen}\,(h\theta) & \cos(h\theta) \end{bmatrix}$$

3. $n=h+1$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & p\,\mathrm{sen}\theta \\ -\frac{1}{p}\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{h+1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & p\,\mathrm{sen}\theta \\ -\frac{1}{p}\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^h \begin{bmatrix} \cos\theta & p\,\mathrm{sen}\theta \\ -\frac{1}{p}\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(h\theta) & p\,\mathrm{sen}(h\theta) \\ -\frac{1}{p}\mathrm{sen}(h\theta) & \cos(h\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & p\,\mathrm{sen}\theta \\ -\frac{1}{p}\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(h\theta)\cos\theta - \mathrm{sen}\,(h\theta)\,\mathrm{sen}\theta & p(\cos(h\theta)\,\mathrm{sen}\theta + \mathrm{sen}\,(h\theta)\cos\theta) \\ -\frac{1}{p}(\mathrm{sen}\,(h\theta)\cos\theta + \cos(h\theta)\,\mathrm{sen}\theta & -\mathrm{sen}\,(h\theta)\,\mathrm{sen}\theta + \cos(h\theta)\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(h+1)\theta & p\,\mathrm{sen}\,(h+1)\theta \\ -\frac{1}{p}\mathrm{sen}\,(h+1)\theta & \cos(h+1)\theta \end{bmatrix}$$

(49) Las matrices A y B de $I\!R^{m\times m}$ son tales que A y $(AB-BA)$ son permutables. Demostrar que $A^nB - BA^n = nA^{n-1}(AB-BA)\ ;\ \forall n \in I\!N$.

Prueba: (Por inducción)

1. Si $n=1$, se tiene: $AB - BA = 1\,.\,A^o\,(AB-BA)$
   $= AB - BA$ que es verdadero, $A^o = I$
2. Si $n=h$, suponer que sea verdadero: $A^hB - BA^h = hA^{h-1}(AB-BA)$
3. Si $n=h+1$:

$$\begin{aligned} A^{h+1}B - BA^{h+1} &= AA^hB - BA^{h+1} \\ &= AA^hB - ABA^h + ABA^h - BA^{h+1} \quad \text{sumar y restar } ABA^h \\ &= A\,(A^hB - BA^h) + (AB-BA)A^h \\ &= AhA^{h-1}(AB-BA) + A^h(AB-BA) \quad \text{por 2 y 47} \\ &= hA^h\,(AB-BA) + A^h(AB-BA) = (h+1)\,A^h(AB-BA) \end{aligned}$$

26. PROBLEMA ECONÓMICO DE LAS RELACIONES INTERINDUSTRIALES (TABLA DE INSUMO – PRODUCTO)

Consideremos la siguiente tabla de transacciones intersectoriales formada por tres sectores de producción:

COMPRAS (j) / VENTAS (i)	DEMANDA INTERMEDIA			DEMANDA FINAL	PRODUCCIÓN BRUTA
	SECTOR 1	SECTOR 2	SECTOR 3		
SECTOR 1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	X_1
SECTOR 2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	X_2
SECTOR 3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	X_3

¿Cómo se interpreta ésta tabla?

Se interpreta del siguiente modo:

1) El **SECTOR** 1 puede ser : Agropecuario o Industria Petroquímica o **TRANSPORTE**
El **SECTOR** 2 puede ser : Industrial o Industria Textil o **FINANZAS**
El **SECTOR** 3 puede ser : Servicios o Industria de construcción o **ENERGÉTICOS**

2) La columna 1 representa las compras que hace el **SECTOR** 1 a los **SECTORES** 1, y 2, 3 respectivamente. Es decir:

x_{11} es la cantidad que el sector 1 compra al **SECTOR** 1
x_{21} es la cantidad que el sector 1 compra al **SECTOR** 2
x_{31} es la cantidad que el sector 1 compra al **SECTOR** 3

La columna 2 representa las compras que hace el **SECTOR** 2 a los **SECTORES** 1, 2 y 3, respectivamente. Es decir:

x_{12} es la cantidad que el sector 2 compra al **SECTOR** 1
x_{22} es la cantidad que el sector 2 compra al **SECTOR** 2
x_{32} es la cantidad que el sector 2 compra al **SECTOR** 3

La columna 3 representa las compras que hace el **SECTOR** 3 a los **SECTORES** 1, 2 y 3, respectivamente. Es decir:

x_{13} es la cantidad que el sector 3 compra al **SECTOR** 1
x_{23} es la cantidad que el sector 3 compra al **SECTOR** 2
x_{33} es la cantidad que el sector 3 compra al **SECTOR** 3

3) Las tres columnas representan la Demanda Intermedia o la Utilización Intermedia ya que las cifras x_{ij} representan la cantidad de los insumos que los sectores adquieren para fabricar otros productos que todavía no llegan al consumidor final.

4) La cuarta columna $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ representa la cantidad de compras que los consumidores finales efectúan a los **SECTORES** 1, 2 y 3 (Sector de Producción).

Donde: y_1 Puede ser la cantidad de compra de alimentos, o (maquinaria)
y_2 Puede ser la cantidad de compra de ropa (o vehículos)
y_3 Puede ser la cantidad de compra de servicios recreativos (o edificios)

En general se puede decir compra de bienes de activo fijo.

La columna $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ recibe el nombre de Demanda Final o de Utilización Final.

5) La última columna $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ representa el Valor Bruto de la Producción de cada sector o simplemente Producción Bruta de cada uno de los sectores. Las cifras X_1, X_2 y X_3 se obtienen sumando horizontalmente la demanda intermedia con la demanda final.

Es decir: (I) $$\begin{cases} X_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ X_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ X_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{cases}$$

6) Esta suma horizontal tiene sentido porque las cantidades x_{11} , x_{12} , x_{13} , y_1 están expresadas en unidades físicas del mismo tipo, ya que representan las ventas que efectúa el sector 1, a los sectores 1, 2, 3 y a la demanda final y_1.
Del mismo modo ocurre con las sumas horizontales que se hacen en la 2ª y 3ª filas, respectivamente. Siendo así, sumar verticalmente no tendría sentido, por ejemplo la suma: x_{11} toneladas de cereales + x_{21} metros de tubos de acero + x_{31} horas de trabajo, no se puede sumar. Por ello, es preferible que los insumos no deben ser físicos sino deben de estar expresadas equivalentemente en valores monetarios (dólares) para que de esta manera se pueden sumar horizontalmente (**VENTAS**) y verticalmente (**COMPRAS**).

7) Para un plan de requerimientos de producción, vale decir para una planificación en la economía nacional, se requiere de la tabla de insumo-producto y de algunas operaciones matriciales (inversa de una matriz, producto de dos matrices y suma de matrices).
Por ejemplo, si una oficina de planificación ha determinado el incremento en la demanda final qué ocurrirá en el próximo año ¿Cuál será el valor de la producción Bruta de cada sector que requeriría para satisfacer esas necesidades?.

8) Para responder a ésta pregunta se construye una segunda tabla que se conoce con el nombre de **MATRIZ DE COEFICIENTES TÉCNICOS o MATRIZ DE INSUMO-PRODUCTO O MATRIZ DE REQUERIMIENTOS DIRECTOS POR UNIDAD DE PRODUCCIÓN BRUTA.**

Para ello relacionamos el sector vendedor (i) y el **SECTOR COMPRADOR** (j) con la producción bruta X_j del sector comprador, por medio de la ecuación:

$\boxed{\frac{x_{ij}}{X_j} = a_{ij}}$ donde a_{ij} es el coeficiente técnico.

Cada coeficiente a_{ij} representa los requerimientos de insumo del sector i necesario para producir una unidad del producto j.

Si $\boxed{\frac{x_{ij}}{X_j} = a_{ij}} \Rightarrow \boxed{x_{ij} = a_{ij} \cdot X_j}$ (II)

Si $i = 1 \Rightarrow j = 1, 2, 3$
Si $i = 2 \Rightarrow j = 1, 2, 3$
Si $i = 3 \Rightarrow j = 1, 2, 3$

Las compras que el sector j efectúa al sector i es igual al producto del coeficiente técnico a_{ij} por la producción bruta X_j.

De modo que: (*)
$$\begin{cases} \frac{x_{11}}{X_1} = a_{11} & \frac{x_{12}}{X_2} = a_{12} & \frac{x_{13}}{X_3} = a_{13} \\ \frac{x_{21}}{X_1} = a_{21} & \frac{x_{22}}{X_2} = a_{22} & \frac{x_{23}}{X_3} = a_{23} \\ \frac{x_{31}}{X_1} = a_{31} & \frac{x_{32}}{X_2} = a_{32} & \frac{x_{33}}{X_3} = a_{33} \end{cases}$$

NOTA: Los valores a_{ij} son constantes durante un cierto período de tiempo.

Sustituir (*) en (I):
$$\begin{cases} X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + y_1 \\ X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + y_2 \\ X_3 = a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + y_3 \end{cases}$$

Matricialmente éste sistema lineal se puede escribir del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \text{o sea} \quad \boxed{X = AX + Y} \qquad \text{(III)}$$

De la ecuación (III) se quiere hallar el vector columna X.

Veamos: De (III), obtenemos:
$$X - AX = Y$$
$$IX - AX = Y \quad , \quad \text{puesto que } IX = X$$
$$(I - A)X = Y \quad , \quad I: \text{ matriz identidad}$$

Multiplicar por $(I-A)^{-1}$: $\underbrace{(I-A)^{-1}(I-A)}_{I} X = (I-A)^{-1} Y$
$$\Rightarrow IX = (I-A)^{-1} Y$$
$$\Rightarrow \boxed{X = (I-A)^{-1} Y}$$

$(I-A)$: se llama MATRIZ DE LEONTIEF
$(I-A)^{-1}$: es la MATRIZ INVERSA DE LEONTIEF

En ésta ecuación se tiene que X depende de los valores de Y siendo $(I-A)^{-1}$ constante o lo que es equivalente afirmar que A es constante.

En términos de función tendríamos: $\boxed{X = f(Y)}$

donde $\Delta X = f(Y + \Delta Y) - f(Y)$
$\Delta X = X^{(1)} - X^{(0)}$

Donde: $\begin{cases} X^{(0)} = (I-A)^{-1} Y^{(0)} \\ X^{(1)} = (I-A)^{-1} Y^{(1)} \end{cases}$

$X^{(0)}$: es el valor de la matriz para el año que estamos considerando.
$X^{(1)}$: el valor de la matriz para el próximo año (o periodo) que se está planificando cuando se incrementa Y.
ΔX : es el incremento que sufre la Producción Bruta.

PROBLEMA 1 Sea la siguiente tabla de transacciones intersectoriales. Determine los incrementos de producción bruta sectorial necesarios para satisfacer un incremento del 20% en la demanda final del sector agrícola, del 30% en el sector industrial y del 10% en el sector servicios.

COMPRAS / VENTAS	DEMANDA INTERMEDIA			DEMANDA FINAL	PRODUCCIÓN BRUTA
	A	I	S		
A	600	400	1400	600	3,000
I	1500	800	700	1000	4,000
S	900	2,800	700	2,600	7,000

Solución:

PASO 1 Determinar los coeficientes técnicos:

$a_{11} = \frac{600}{3000} = 0.2$ $\quad a_{12} = \frac{400}{4000} = 0.1$ $\quad a_{13} = \frac{1,400}{7000} = 0.2$

$a_{21} = \frac{1500}{3000} = 0.3$ $\quad a_{22} = \frac{800}{4000} = 0.2$ $\quad a_{23} = \frac{700}{7000} = 0.1$

$a_{31} = \frac{900}{3000} = 0.3$ $\quad a_{32} = \frac{2800}{4000} = 0.7$ $\quad a_{33} = \frac{700}{7000} = 0.1$

PASO 2 La matriz de los coeficientes técnicos es: $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 & 0.1 \end{bmatrix}$

PASO 3 Hallar el valor de la matriz $X^{(1)}$, usando la relación:

$$X^{(1)} = (I-A)^{-1}\, Y^{(1)}\ ,\ \text{donde}\quad Y^{(1)} = \begin{bmatrix} 600 + 0.20(600) \\ 1000 + 0.30(1000) \\ 2600 + 0.10(2600) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 1300 \\ 2860 \end{bmatrix}$$

INCREMENTO que ha sufrido la matriz Y en un 20%, 30% y 10%, respectivamente, en cada **SECTOR**.

Veamos:

a) $$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.2 \\ -0.5 & 0.8 & -0.1 \\ -0.3 & -0.7 & 0.9 \end{bmatrix}$$

b) Ahora, hallemos la inversa de la matriz $I - A$ o sea $(I-A)^{-1}$. Esta vez conviene usar el método de la Adjunta, para hallar dicha inversa.

$(I-A)^{-1} = \dfrac{Adj\,(I-A)}{det\,(I-A)}$, donde $Adj\,(I-A) = (Cof\,(I-A))^T$

Donde:

c) $$Cof(I-A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0.8 & -0.1 \\ -0.7 & 0.9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -0.5 & -0.1 \\ -0.3 & 0.9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -0.5 & 0.8 \\ -0.3 & -0.7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -0.1 & -0.2 \\ -0.7 & 0.9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.3 & 0.9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0.8 & -0.1 \\ -0.3 & -0.7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -0.1 & -0.2 \\ 0.8 & -0.1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.5 & -0.1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0.8 & -0.1 \\ -0.5 & 0.8 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Cof(I-A) = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.48 & 0.59 \\ 0.23 & 0.66 & 0.59 \\ 0.17 & 0.18 & 0.59 \end{bmatrix}$$

d) Pero: $$Adj(I-A) = (cof(I-A))^T = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.23 & 0.17 \\ 0.48 & 0.66 & 0.18 \\ 0.59 & 0.59 & 0.59 \end{bmatrix}$$

e) Calculo del determinante de $(I-A)$:

$$\begin{vmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.2 \\ -0.5 & 0.8 & -0.1 \\ -0.3 & -0.7 & 0.9 \end{vmatrix} = 0.8\begin{vmatrix} 0.8 & -0.1 \\ -0.7 & 0.9 \end{vmatrix} - (-0.1)\begin{vmatrix} -0.5 & -0.1 \\ -0.3 & 0.9 \end{vmatrix} + (-0.2)\begin{vmatrix} -0.5 & 0.8 \\ -0.3 & -0.7 \end{vmatrix}$$

$$= 0.8\,(0.65) + (0.1)\,(-0.48) - (0.2)(0.59)$$

$$= 0.520 + 0.048 - 0.118$$

$$det\,(I-A) = 0.354$$

f) En consecuencia:

$$(I-A)^{-1} = \frac{Adj(I-A)}{\det(I-A)} = \frac{\begin{bmatrix} 0.65 & 0.23 & 0.17 \\ 0.48 & 0.66 & 0.18 \\ 0.59 & 0.59 & 0.59 \end{bmatrix}}{0.354} = \begin{bmatrix} 1.836 & 0.650 & 0.480 \\ 1.355 & 1.864 & 0.508 \\ 1.666 & 1.666 & 1.666 \end{bmatrix}$$

ésta matriz es constante hasta cierto periodo de tiempo. La variable es la matriz Y, de modo que cada vez que varía Y varía X, puesto que X es función de Y o sea $X = f(Y)$.

PASO 4 De la ecuación $X^{(1)} = (I-A)^{-1}\, Y^{(1)}$, ahora tenemos que:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.836 & 0.650 & 0.480 \\ 1.355 & 1.864 & 0.508 \\ 1.666 & 1.666 & 1.666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 720 \\ 1300 \\ 2860 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1322 + 845 + 1372 \\ 975 + 2423 + 1452 \\ 1199 + 2165 + 4764 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3539 \\ 4850 \\ 8128 \end{bmatrix}$$

Lo que significa que para satisfacer la demanda final de 720 unidades de productos agropecuarios, 1,300 de productos industriales y 2,860 de servicios, se debe generar una producción bruta de 3539 unidades en el sector agricultura, 4850 unidades en el sector industrial y 8128 unidades en el sector servicios.

PASO 5 Los incrementos de la producción bruta sectorial necesarios para satisfacer un incremento del 20% en la demanda final del sector agricultura, del 30% en el sector industrial y del 10% en el sector servicios, se halla por la diferencia :

$$\Delta X = X^{(1)} - X^{(0)}$$

$$= \begin{bmatrix} 3539 \\ 4850 \\ 8128 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3000 \\ 4000 \\ 7000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 539 \\ 850 \\ 1128 \end{bmatrix}$$

Esto significa que para satisfacer los incrementos previstos de demanda final sectorial de :

$$\Delta Y = Y^{(1)} - X^{(0)}$$

$$= \begin{bmatrix} 720 \\ 1300 \\ 2860 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 600 \\ 1000 \\ 2600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 300 \\ 260 \end{bmatrix}$$

Se deben generar en el sistema de producción los siguientes incrementos de producción bruta:

$$\Delta X = \begin{bmatrix} 539 \\ 850 \\ 1128 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 2 *(tabla de insumo producto)*

Dado la matriz de insumo-producto, determine los incrementos de producción bruta sectorial necesarios para satisfacer un incremento del 25% del producto final del sector agrícola, del 10% en el sector industrial y del 20% en el sector servicios.

SECTORES	A	I	S	PRODUCTO FINAL	PRODUCCIÓN BRUTA
A I S	0.2 0.2 0.0	0.2 0.1 0.2	0.0 0.1 0.1	80 300 100	200 400 200
TRABAJO	0.6	0.5	0.8	20	500
PRODUCCIÓN BRUTA	200	400	200	500	1300

Solución:

$$\Delta X = \begin{bmatrix} 36 \\ 45 \\ 32 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 3 Se han obtenido los siguientes datos respecto de la operación global de una economía nacional a nivel de sus tres sectores fundamentales, que se resumen en este cuadro de transacciones intersectoriales:

SECTORES	A	I	S	PRODUCTO FINAL	PRODUCCIÓN BRUTA
A I S	80 40 0	160 40 40	0 20 10	160 300 50	400 400 100

Se pide que construya la matriz de insumo producto, la matriz de Leonief y su inversa. Con estos elementos y suponiendo que se desea incrementar en un 15% el producto del sector industrial y un 12% el del sector de Servicios ¿Cuál será el incremento requerido en la producción bruta del sector agrícola?

PROBLEMA 4 Supongamos que existen sólo tres industrias en la economía y que la matriz de insumo producto es:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Si las demandas finales son $y_1 = 40$, $y_2 = 20$, $y_3 = 50$ (dado en millones de dólares).
¿Cuáles serán los niveles de producción solución para las tres industrias?

PROBLEMA 5 En una economía con dos industrias sabemos que la industria I utiliza 0,20 dólares de su propio producto y 0,50 dólares del bien II para producir un dólar del bien I; la industria II no utiliza nada de su propio producto pero usa 0,60 dólares del bien I en producir un dólar del bien II ; y el sector abierto demanda 3000 billones de dólares del bien I y 5000 billones de dólares del bien II.

a) Escribir la matriz de input, la matriz tecnológica y la matriz de input-output especifica para esta economía.

b) hallar los niveles de producción de la solución por la regla de Cramer.

Respuesta:

a) $\begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}60 \\ 0{,}50 & 0 \end{bmatrix}$, la matriz tecnológica es $T = I - A$.

b) Resolviendo la ecuación matricial se hallan X_1 y X_2 que son los niveles de producción.

$$\begin{bmatrix} 0{,}80 & -0{,}60 \\ -0.50 & 1{,}00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

⑤ Conociendo que los números 945193; 525217; 754585; 292201; 356269 son divisibles por 19, mostrar que el determinante.

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 & 5 & 4 & 9 \\ 7 & 1 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 5 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 2 & 6 & 5 & 3 \\ 8 & 3 & 8 & 3 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$ también es divisible por 19.

⑥ Determinar el valor de:

$$\begin{vmatrix} a_{21}+a_{11} & a_{22}+a_{12} & a_{23}+a_{13} \\ a_{31}+a_{21} & a_{32}+a_{22} & a_{33}+a_{23} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \end{vmatrix}$$

Sabiendo que; $|[a_{ij}]| = 10$ ***Respuesta:*** 20

⑦ **Encontrar la inversa de la siguiente matriz para los casos en que existe. En aquellas en que no exista, hallar su rango.**

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 2 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix}$$

Respuesta: a) Si $x \neq \pm\sqrt{2}$, $\exists A^{-1}$ y $\rho(A) = 4$

b) Si $x = \pm\sqrt{3}$, $\exists A^{-1}$ y $\rho(A) = 2$

CAPÍTULO 2

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

1. DEFINICIÓN

Un sistema de m-ecuaciones lineales con n-incógnitas, es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$ **es la matriz de coeficientes.**

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ **es la matriz de las n-incognitas.**

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$ **es la matriz de los términos independientes.**

$[A/B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ **Es la matriz ampliada (o aumentada) del sistema (*)**

En la forma matricial, el sistema (*) se escribe: $AX = B$

2. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS Y NO HOMOGENEAS

Dado la ecuación matricial $AX = B$, se tiene:

a) Si $B = \theta_{m\times 1}$ entonces diremos que el sistema es homogénea.

b) Si $B \neq \theta_{m\times 1}$ entonces diremos que el sistema es NO homogénea

$\theta_{m\times 1}$ es la matriz nula $m \times 1$.

3. METODOS PARA RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

1 REGLA DE CRAMER

Si $AX = B$ es un sistema de n-ecuaciones con n-incognitas: $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ en el cual $|A| \neq 0$, entonces existe una solución única X, dada por las formulas:

$$x_j = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot cof\ a_{kj} \quad , \quad \text{para } j = 1,2,3, \ldots\ldots, n$$

Prueba:

1) Si $|A| \neq 0$, entonces $AX = B$ implica $X = A^{-1}B$

2) Pero $A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A)$, donde $Adj(A) = [\alpha_{ij}]^T$

$= \frac{1}{|A|}(cofA)^T \qquad [\alpha_{ij}] = cof\ A$ — matriz de cofactores de A

3) Reemplazar (2) en (1): $X = \frac{1}{|A|}(cof\ A)^T B$

4) Cada componente de X, será:

$$X_j = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot cof\ a_{kj} \quad , j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\boxed{X_j = \frac{\det C_j}{\det A}}$$

$$\boxed{\alpha_{kj} = cof\ a_{kj} = (-1)^{k+j}\,|A(k/j)|}$$

el cofactor correspondiente al elemento a_{kj}, es el determinante de la submatriz $A(k/j)$ que resulta de anular la fila k y la columna j, con signo $(-1)^{k+j}$

donde:

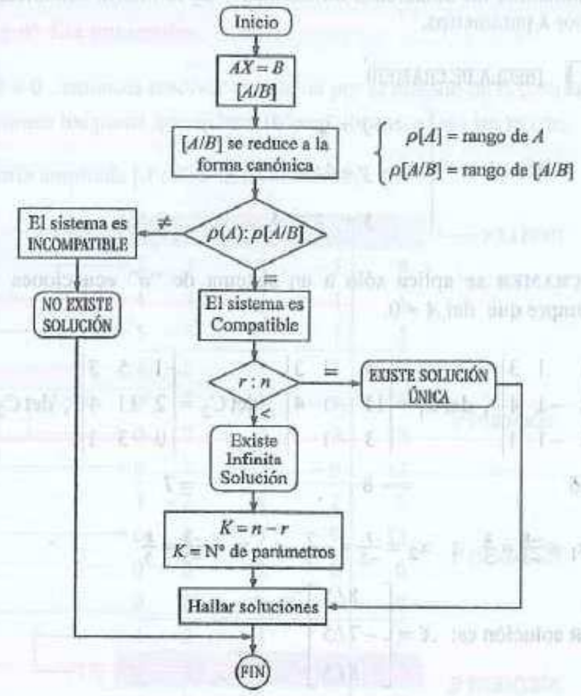
$$\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot cof\ a_{kj} = \det(C_j) \quad , \quad C_j = \text{matriz obtenida de } A \text{ al reemplazar la columna } j \text{ de } A \text{ por la matriz columna } B.$$

2 MÉTODO DE GAUSS-JORDAN (Por operaciones elementales sobre las filas de una matriz)

Este método consiste en lo siguiente:

1°) Reducir la matriz ampliada $[A/B]$ en matriz canónica.

2°) Discutir el sistema, en base a la reducción canónica de $[A/B]$.
Para discutir el sistema, tomar como referencia, el siguiente diagrama de flujo.



Según el diagrama:

1°) Reducir la matriz ampliada $[A/B]$ a la forma canónica.

2°) De la forma canónica hallamos el rango de A y el rango de la matriz ampliada $[A/B]$.

3°) A continuación, comparamos el rango de A con el rango de la matriz ampliada $[A/B]$.

a) Si el rango de A es diferente al rango de $[A/B]$, entonces el sistema es incompatible y por tanto, no existe solución.

b) Si $\rho[A] = \rho[A/B] = r$, entonces el sistema es **COMPATIBLE**.

1.3 OPERACIÓN BINARIA INTERNA

Sea A un conjunto no vacío.

Llamamos **OPERACIÓN BINARIA INTERNA** definida en A, a toda aplicación "$*$" de $A \times A$ en A, tal que a cada pareja $(a,b) \in A \times A$ corresponde el único elemento $a * b$ perteneciente al conjunto A.

NOTACIÓN: $* : A \times A \longrightarrow A$
$(a,b) \longmapsto a * b$

EJEMPLO 02

1) En el conjunto $I\!R$ definimos dos operaciones binarias:

$+ : I\!R \times I\!R \longrightarrow I\!R$, $(a,b) \longmapsto a+b$; $\bullet : I\!R \times I\!R \longrightarrow I\!R$, $(a,b) \longmapsto a \cdot b$

llamados suma y producto de números reales, respectivamente.

2) En el conjunto $I\!R^2$, definimos la siguiente operación binaria:

$$+ : I\!R^2 \times I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$$
$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longmapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

llamado suma de vectores en $I\!R^2$

1.4 CUERPO

Un conjunto $I\!K \neq \phi$ se llama **CUERPO**, si en $I\!K$ están definidas las operaciones de Suma y Producto, y verifican las siguientes propiedades:

A) SUMA $+ : I\!K \times I\!K \longrightarrow I\!K$
$(a,b) \longmapsto a+b$

A$_1$) $a + (b + c) = (a + b) + c$ **(asociativa)**

A$_2$) $a + b = b + a$ **(conmutativa)**

A$_3$) $\exists!\, O \in I\!K \,/\, O + a = a$, $\forall\, a \in I\!K$, "O" se llama cero **(existencia de cero)**

A$_4$) $\forall\, a \in I\!K$, $\exists - a \in I\!K \,/\, a + (-a) = 0$; $-a$ se llama opuesto de a **(existencia y unicidad del opuesto**

P) PRODUCTO $\bullet : I\!K \times I\!K \longrightarrow I\!K$
$(a,b) \longmapsto a \cdot b$

P$_1$) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ **(asociativa)**

P$_2$) $a \cdot b = b \cdot a$ **(conmutativa)**

P$_3$) $\exists\, !\, 1 \in I\!K / 1 \cdot a = a$, $\forall\, a \in I\!K$, "1" se llama **UNO** **($\exists$ del 1)**

P$_4$) $\forall\, a \neq O , \exists\, !\, a^{-1} / a \cdot a^{-1} = 1$, a^{-1} se llama la inversa de a **($\exists$ del inverso)**

D) Propiedad distributiva del producto respecto a la suma

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

EJEMPLO 03

Son cuerpos los números reales ($I\!R$), los números complejos (C) y los números racionales (Q).

Nota: a los elementos del cuerpo $I\!K$, se les llamará **escalares**.

2. ESPACIO VECTORIAL

Definicion 02. Un conjunto V, no vacío, se llama **ESPACIO VECTORIAL** sobre $I\!K$, si está provisto de dos operaciones: suma (+) y producto (.), definidos de la siguiente manera :

$+ : V \times V \longrightarrow V$, $(u,v) \longmapsto u+v$; $\bullet : I\!K \times V \longrightarrow V$, $(\alpha,v) \longmapsto \alpha v$

"La suma de dos vectores es otro vector" ; "El producto de un escalar por un vector, es otro vector"

y que cumple las siguientes propiedades:

A$_1$) $\mu + v = v + \mu$; $\mu, v \in V$

A$_2$) $(\mu + v) + w = \mu + (v + w)$; $\mu, v, w \in V$

A$_3$) $\exists\, !\, \mathbf{O} \in V / v + \mathbf{O} = v$, $\forall\, v \in V$ (**O** es el elemento cero)

A$_4$) $\forall\, v \in V$, $\exists\, ! - v / v + (-v) = \mathbf{O}$ ($-v$ se llama opuesto de v)

P$_1$) $\alpha(\beta v) = (\alpha \beta) v$, $\forall\, \alpha, \beta \in I\!K$, $v \in V$

P$_2$) $1 \cdot v = v, \forall\, v \in V$, $1 \in I\!K$

DISTRIBUTIVIDAD:

$D_1)$ $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$, $\alpha, \beta \in I\!K$; $v \in V$

$D_2)$ $\alpha(\mu+v) = \alpha\mu + \alpha v$, $\alpha \in I\!K$; $\mu, v \in I\!K$

Los elementos de V se llaman **VECTORES** y los elementos de $I\!K$ se llaman **ESCALARES**.

Como V está definido sobre los elementos de $I\!K$, decimos que V es un $I\!K-$ espacio vectorial.

Por ejemplo:

Si $I\!K = I\!R$, entonces decimos que V es un espacio vectorial sobre $I\!R$ o V es un $I\!R-$ espacio vectorial o simplemente que V es un espacio vectorial real.

Si $I\!K = \mathbb{C}$, entonces decimos que V es un espacio vectorial complejo.

2.1 EJEMPLO 04

Son espacios vectoriales los siguientes conjuntos:

1) $V = I\!R^2 = \{(x_1, x_2) / x_1 \in I\!R \ \wedge \ x_2 \in I\!R\}$ y $I\!K = I\!R$
Decimos que $I\!R^2$ es un $I\!R-$ espacio vectorial

2) $V = I\!R^n = \{(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) / x_i \in I\!R\}$ y $I\!K = I\!R$
Decimos que $I\!R^n$ es espacio vectorial sobre $I\!R$

3) $V = I\!K^{n\times m}$, $I\!K = I\!R$
— es el conjunto de matrices sobre $I\!R$ de orden $n \times m$.

4) En $I\!R^2$ cualquier recta que pasa por el origen, es un espacio vectorial sobre $I\!R$.
Por ejemplo $V = \{(x,y) \in I\!R^2 / 2x - y = 0\}$

5) En $I\!R^3$ cualquier plano que pasa por el origen, es un espacio vectorial sobre $I\!R$.
Por ejemplo $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^2 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$

6) El conjunto de polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes complejos.

NOTACIÓN: $I\!K\,[x] = \{P(x) / P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \ , \ a_i \in I\!K = \mathbb{C}\}$

7) $V = \{r x + s e^x / r, s \in I\!R\}$ es un espacio vectorial sobre $I\!R$.

Existen espacios vectoriales de mayor complejidad que se construyen a partir de otros espacios vectoriales y que se verán mas adelante.

2.2 SUBESPACIO VECTORIAL

Definicion 03. Sea V un $I\!K-$ espacio vectorial.
Un **subespacio vectorial** de V es un subconjunto $W \subset V$, con las siguientes propiedades:

1. $O \in W$
2. Si $(w_1 \in W \ \wedge \ w_2 \in W)$ entonces $(w_1 + w_2) \in W$.
Esta propiedad indica que "Si dos vectores pertenecen al conjunto W, implica que la suma de dichos vectores también pertenece al conjunto W".
3. Si $v \in W$ entonces, para todo $\alpha \in I\!K$, $\alpha v \in W$.
Esta propiedad indica: "si α es un escalar cualquiera y w es un vector perteneciente a W, implica que el producto αw es un vector de W".

PROPOSICIÓN 1

Un subconjunto $W \neq \phi$ de V es un subespacio si, y sólo si:
$(\alpha u + \beta w) \in W$, $\forall \ \alpha, \beta \in I\!K$ y $u, w \in W$.

Generalizando: dados $v_1, \ldots, v_n \in W$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I\!K$ se cumple:
$v = \alpha_1 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \in W$

EJEMPLO 05

$\{O\}$ y V son ejemplos triviales de subespacios de V.
A todos los subespacios que no sean $\{O\}$ ni V, se les llama **Subespacios Propios**.

EJEMPLO 06

$W = \{(x,y) \in I\!R^2 / y = mx \ , \ m \neq 0\}$ es un subespacio de $I\!R^2$. Geométricamente: W es el conjunto de las rectas que pasan por el origen.

Prueba:

Para afirmar que W es un subespacio de $I\!R^2$, debo probar que el conjunto W cumpla las tres propiedades dadas en la definición:

1. La afirmación $0 = (0,0) \in W$ es verdadero, porque:
$0 = m(0)$, $m \neq 0$
$= 0$ implica que $(0,0) \in W$.

2. Elegir dos vectores que $w_1 = (x_1, y_1)$, $w_2 = (x_2, y_2)$ de W. Debo probar que $(w_1 + w_2) \in W$. ¿Cómo afirmar que $(w_1 + w_2) \in W$?

   Bastará hacer cumplir la condición: $(y_1 + y_2) = m\,(x_1 + x_2)$ para afirmar que $w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ pertenezca a W.

   Veamos:

   Si $w_1 = (x_1, y_1) \in W$ entonces $y_1 = mx_1$, esto es, $(x_1, mx_1) \in W$.

   Si $w_2 = (x_2, y_2) \in W$ entonces $y_2 = mx_2$, esto es, $(x_2, mx_2) \in W$.

   Ahora, sumar: $w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
   $= (x_1 + x_2, mx_1 + mx_2)$
   $= (x_1 + x_2, m(x_1 + x_2)) \in W$.

   Pues $y_1 + y_2 = m\,(x_1 + x_2)$.

3. Para cualquier escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ y un vector $v = (x,y) \in W$. Debo probar que $(\alpha v) \in W$. ¿Cómo afirmar que $(\alpha v) \in W$?

   Bastará que cumpla la condición $\alpha y = m\,(\alpha x)$, siendo $v = (x,y)$.

   Veamos: si $v = (x,y) \in W$ entonces $y = mx$.

   Hacer: $\alpha v = (\alpha x, \alpha y)$. Como $y = mx$, entonces
   $\alpha v = (\alpha x, \alpha(m\alpha))$
   $= (\alpha x, m\,(\alpha x)) \in W$. Pues $\alpha y = m(\alpha x)$.

EJEMPLO 07

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \,/\, ax + by + cz = 0 \ , \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
Geométricamente S es un plano que pasa por el origen. Por lo que podemos afirmar que: todo plano que pasa por el origen es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 08

En general $H = \{(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots\ldots + a_n x_n = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. H se llama hiperplano en $\mathbb{R}^n$ que pasa por el origen de coordenadas $(0, 0, 0, \ldots\ldots, 0)$

2.3 SUMA DE SUBESPACIOS Y SUMA DIRECTA DE SUBESPACIOS.

Definicion 4: Sean U y W dos subespacios de un espacio vectorial V, la suma de los subespacios U y W se define del siguiente modo:

$$U + W = \{\, u + w \,/\, u \in U, w \in W \,\}$$

CONSECUENCIAS:

1) En general $U + W \neq U \cup W$, pues $U \cup W$ no siempre es un subespacio.

2) $U \cup W \subset U + W$

3) $\begin{cases} U \subset U + W \\ W \subset U + W \end{cases}$

4) Si T es un subespacio de V tal que $U \cup W \subset T$, entonces $U + W \subset T$

5) $U + W$ es el menor subespacio que contiene a $U \cup W$.

SUMA DIRECTA DE DOS SUBESPACIOS

Cuando los subespacios U y W de V tienen en común sólo el elemento nulo $\mathbf{0}$, se escribe $U \oplus W$ en vez de $U + W$ y se dice que $V = U \oplus W$ es la suma directa de U y W.

NOTACIÓN: $U \oplus W = \{u + w \,/\, u \in U, w \in W, U \cap W = \{\mathbf{O}\}\}$

TEOREMA 1 Sea V un espacio vectorial.
S y T subespacios de V. Entonces:
a) $S \cap T$ es un subespacio de V.
b) $S + T$ es un subespacio de V.

<u>Demostracion de a):</u>

Para afirmar que $S \cap T$ es un subespacio de V, sabiendo que S y T son subespacios de V, debo probar tres cosas:

1. $\mathbf{O} \in S \cap T$
2. Si $(v_1 \in S \cap T \wedge v_2 \in S \cap T) \Rightarrow (v_1 + v_2) \in S \cap T$
3. Si $(\forall \alpha \in \mathbb{K} \wedge v \in S \cap T) \Rightarrow \alpha v \in S \cap T$.

Veamos:

1. $\mathbf{O} \in S, \mathbf{O} \in T \Rightarrow \mathbf{O} \in S \cap T$

2. *i)* si $v_1 \in S \cap T \Rightarrow v_1 \in S \wedge v_1 \in T$ .... def. de $\cap$
   Si $v_2 \in S \cap T \Rightarrow v_2 \in S \wedge v_2 \in T$ .... def. de $\cap$

   $(v_1 + v_2) \in S \wedge (v_1 + v_2) \in T$

   La suma pertenece a S, porque S es subespacio.
   La suma pertenece a T, porque T es subespacio.

   ii) Si $(v_1 + v_2) \in S \wedge (v_1 + v_2) \in T \Rightarrow \boxed{(v_1 + v_2) \in S \cap T}$ (2*)

3. *i)* Si $v \in S \cap T \quad \Rightarrow \quad v \in S \quad \wedge \quad v \in T$

ii) Como S y T son subespacios $\quad \Rightarrow \quad (\alpha v) \in S \wedge (\alpha v) \in T \ , \ \forall \alpha \in I\!K$.

iii) Si $(\alpha v) \in S \wedge (\alpha v) \in T \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\alpha v) \in S \cap T}$ — (3*)

4. Por (1*), (2*) y (3*) afirmamos que: $S \cap T$ es un subespacio de V.

Demostración de b):

Para afirmar que $S + T$ es un subespacio de V, debo probar tres cosas:

1. $\mathbf{O} \in S+T$
2. Si $[u \in (S+T) \ \wedge \ v \in (S+T)] \ \Rightarrow (u+v) \in S+T$
3. $[\forall \alpha \in I\!K \ \ \wedge v \in (S+T)] \ \Rightarrow (\alpha v) \ \in S+T$

Veamos:

1. $\mathbf{O} \in (S+T)$, pues $\mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{O}$, $\mathbf{O} \in S$, $\mathbf{O} \in T$.

2. *i)* si $u \in (S+T) \ \Rightarrow u = u_1 + u_2$; donde $u_1 \in S$, $u_2 \in S$

ii) si $v \in (S+T) \ \Rightarrow v = v_1 + v_2$; donde $v_1 \in S$, $v_2 \in S$

iii) Como S y T son subespacios de V, entonces:

si $[u_1 \in S \wedge v_1 \in S] \quad \Rightarrow \quad (u_1 + v_1) \in S$

si $[u_2 \in T \wedge v_2 \in T] \quad \Rightarrow \quad (u_2 + v_2) \in T$

$$\underbrace{(u_1+u_2)}_{u} + \underbrace{(v_1+v_2)}_{v} \in (S+T) \ \ldots\ldots\ldots \text{(2*)}$$

3. Si $v \in (S+T) \Rightarrow v = v_1 + v_2$, donde $(v_1 \in S, v_2 \in T)$.

Como S y T son subespacios de V, entonces:

Si $(v_1 \in S \ \wedge \ \alpha \in I\!K) \quad \Rightarrow \quad \alpha v_1 \in S$

Si $(v_2 \in T \ \wedge \ \alpha \in I\!K) \quad \Rightarrow \quad \alpha v_2 \in T$

$$\alpha v_1 + \alpha v_2 = \alpha \underbrace{(v_1 + v_2)}_{v}$$

$$= \alpha v \in (S+T) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3*)}$$

Por (2*) y (3*) afirmamos que $S+T$ es un subespacio de V, siempre que S y T sean subespacios de V.

2.4 ESPACIO COCIENTE

El concepto de ESPACIO COCIENTE es un tema abstracto muy importante y para definirlo requerimos de otras definiciones.

Definicion 5: Sea V un $I\!K-$ espacio vectorial y V' un subespacio de V.

Se dice que dos VECTORES u y v pertenecientes a V son equivalentes modulo V' , si $(u-v)$ pertenece a V'.

NOTACIÓN: $\quad u \sim v \ \bmod V' \iff (u-v) \in V' \ , \ u \in V \ , \ v \in V$

"μ es equivalente a v modulo V'" si, y sólo si, $(\mu - v)$ es un elemento de V'.
Según esta definición u y v son elementos de V, pero la diferencia $u - v$ es un elemento de V'.

PROPOSICIÓN 2 La relación "$\sim$" es de equivalencia.

Prueba:

Para afirmar que "$\sim$" es una relación de equivalencia, debemos probar 3 condiciones:

a) "$\sim$" es reflexiva, porque: $u \sim u$, $\forall u \in V$

b) "$\sim$" es simétrica, porque: $u \sim v$ implica $v \sim u$, $u, v \in V$

c) "$\sim$" es transitiva, porque: $u \sim v$ y $v \sim w$ entonces $u \sim w$, $u, v, w \in V$

Prueba de a):

Como V' es subespacio de V, se cumple: $0 \in V'$

Pero: $u - u = 0$, $\forall u \in V$

Luego, $u - u = 0 \in V'$ implica $u \sim u$, $\forall u \in V$

Prueba de b):

Como hipótesis tenemos $u \sim v$, $u, v \in V$

Debo probar que $v \sim u$. Para esto, bastara probar que $(v-u) \in V'$

Veamos:

Si $u \sim v$, entonces $(u - v) \in V'$ ………… por def. 5

Pero $(u - v) = -(v - u) \in V'$

Si $-(v - u) \in V'$ entonces $(v - u) \in V'$ porque V' es subespacio de V.

En general: $-w \in V'$ implica $w \in V'$

Prueba de c):

Como hipótesis tenemos: $u \sim v$ y $v \sim w$.

Debo probar que $u \sim w$. Para ello bastará probar que $(u - w) \in V'$

Veamos:

Si $u \sim v \Rightarrow (u - v) \in V'$, $u, v \in V$

Si $v \sim w \Rightarrow (v - w) \in V'$, $v, w \in V$

Como V' es subespacio de V, se cumple que la suma $(u - v) + (v - w) = u - w$ también es un elemento de V'.

Por tanto: si $(u - w) \in V'$ implica $u \sim w$.

Definicion 6: ***(clase de equivalencia)***

Sea v un vector fijo del espacio vectorial V y V' un subespacio de V.

El conjunto $\bar{v} = \{u \in V / u \sim v\}$ es la clase de equivalencia de v.

$$= \{u \in V / (u-v) \in V'\} = v + V' = \{v + v' / v' \in V\}$$

EJEMPLO 09

Sea $V = IR^2$ un espacio vectorial sobre IR.

Cualquier recta que pasa por el origen de coordenadas es un subespacio vectorial de IR^2

Tomemos el subespacio $V' = \{t(1,2) / t \in IR\}$ que viene a ser una recta que pasa por el origen cuyo vector director es $\vec{a} = (1,2)$.

Cada vez que fijamos un vector $v \in IR^2$, podremos definir una **clase de equivalencia.**

Por ejemplo:

1) Si fijo el vector $v = (3,1) \in V = IR^2$, entonces defino

$$\overline{(3,1)} = \{u \in V / u \sim (3,1)\}$$
$$\overline{(3,1)} = \{u \in V / (u - (3,1)) \in V'\}$$
$$= \{u \in V / u - (3,1) = t(1,2)\}$$
$$= \{u \in V / u = (3,1) + t(1,2)\}$$

que es una recta que pasa por (3,1) y es paralela a la recta V'

2) $\overline{(5,2)} = \{u \in V / u = (5,2) + t(1,2)\}$ es otra recta, pasa por (5,2) y es paralela a la recta V'.

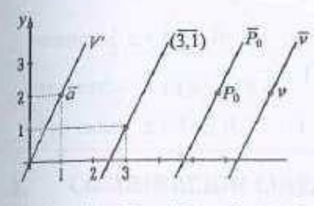
3) En general, si fijo el vector $P_0 \in IR^2 = V$, entonces defino:

$$\overline{P_0} = \{P \in V / P \sim P_0\}$$
$$= \{P \in V / (P - P_0) \in V'\}$$
$$= \{P \in V / P - P_0 = t(1,2)\}$$
$$= \{P \in V / P = P_0 + t(1,2)\}$$

Es una recta que pasa por P_0 y es paralela a la recta V'

> **NOTA:** cualquier vector de V' tiene la forma $t(1,2)$ o $s(1,1)$ o $r(1,2)$ donde t, s, r es cualquier número real, llamado parámetro.

ILUSTRACIÓN GRÁFICA:



En general:

$$\bar{v} = v + V' \;,\; v \text{ es fijo}$$
$$= \{v + v' / v' \in V'\}$$

Propiedad: Si $\mu \neq v$, entonces $\bar{\mu} \cap \bar{v} = \phi$.

$\bar{v}$: clase de equivalencia de v.

Definición 07: (Espacio cociente)

Dado el espacio vectorial V y el subespacio vectorial $V' \subset V$, definimos el ***espacio cociente*** V/V' como el conjunto de las clases de equivalencia.

Esto es, $V/V' = \{\bar{v} / v \in V\}$

Geometricamente:

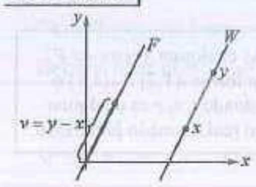
Como $V' = \{t(1,2) \,;\, t \in IR\}$ es una recta en $V = IR^2$ que pasa por (0,0), entonces el espacio V/V' es el conjunto de todas las rectas paralelas a V', que pasan por cualquier punto $v \in V$.

Las rectas y los planos que no pasan por el origen están incluidas dentro de la noción de **variedad afín.**

Se dice que un subconjunto $W \subset V$ es una **variedad afín** cuando la recta que pasa por dos puntos cualesquiera de W, está contenida en W. Esto es, $W \subset V$ es una **variedad afín** si, y sólo si, cumple la siguiente condición: $x, y \in W$, $t \in IR \Rightarrow (1-t)x + ty \in W$

Las rectas $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_4$ que son paralelas a la recta L_0 son variedades afines.

TEOREMA 2



Sea W una variedad afín no vacía en el espacio vectorial V. Existe un único subespacio vectorial $F \subset V$ tal que, para todo $x \in W$, se tiene:

$$W = x + F = \{ x + v \,;\, v \in F \}$$

Demostración:

Dada W, sea $F = \{ v = y - x / x\,,\, y \in W \}$. En W, x es fijo; v varía en F.

Probaremos la veracidad de tres enunciados:

1) F es un subespacio vectorial.
2) $W = x + F$ ... (el conjunto W es igual al conjunto $x + F$)
3) La unicidad de F.

Prueba de 1):

i) $\mathbf{O} \in F$, porque $\mathbf{O} = x - x\,,\; x \in F\;,\; \mathbf{O} \in V$.

ii) Si $\alpha \in I\!R$ y $v \in F$ debo probar que $\alpha v \in F$.
Si $v \in F$ entonces $v = y - x$ con $x, y \in W$
Luego
$$\alpha v = \alpha (y - x)$$
$$= \alpha y - \alpha x$$
$$= \alpha y - \underline{\underline{\alpha x}} + \underline{x} - x \ldots \text{(sumar y restar } x\text{)}$$
$$= [\underbrace{(1-\alpha)\, x + \alpha\, y}_{z}] - x \text{, con } z \in W \text{ porque } W \text{ es una variedad afín.}$$

Entonces $\alpha v = z - x$ es un elemento de F.

iii) Elegir dos elementos de F, digamos $v = y - x$ y $v' = y' - x$, con $y, y', x \in W$.
Por demostrar que: $v + v' \in F$
Veamos:
$$v + v' = y - x + y' - x$$
$$= y + y' - 2x = 2 \cdot \tfrac{1}{2} y + 2 \cdot \tfrac{1}{2} y' - 2x$$
$$= 2\left[\left(\tfrac{1}{2} y + \tfrac{1}{2} y' \right) - x \right]$$

Como $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y' \in W$, entonces el vector $w = \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y'\right) - x$ pertenece a F.

Tendremos que $v + v' = 2w$, por tanto $v + v' \in F$.

Prueba de 2):

Para todo $x \in W$, probemos que:
$$W = x + F$$

i) $(\subset)$ si $y \in W \Rightarrow y = x + (y - x)$
con $y - x \in F$, luego $y \in (x + F)$
Esto prueba que $W \subset x + F$.

ii) $(\supset)$ un elemento de $x + F$ tiene la forma $x + (y - z)$ con $y, z \in W$

Pero: $x + y - z = 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right) + (-1)\, z$

como: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in W$ y $z \in W$

entonces: $x + (y - z) \in W$

Por tanto: $x + F \subset W$

Prueba de 3):

Si F y F' son subespacios vectoriales de V, tales que $x + F = x + F'$, para algun $x \in V$, probaremos que $F = F'$.

En efecto:
$$v \in F \Rightarrow x + v \in x + F$$
$$\Rightarrow x + v \in x + F'$$
$$\Rightarrow x + v = x + v' \quad (v' \in F')$$
$$\Rightarrow v = v'$$
$$\Rightarrow v \in F'$$

Por tanto: $F \subset F'$

De manera similar se demuestra que $F' \subset F$.

3. COMBINACIÓN LINEAL Y ESPACIO GENERADO

3.1 COMBINACION LINEAL

Definicion 8: Sea v_1, v_2, ..., v_n un conjunto de vectores pertenecientes al espacio vectorial V.

Diremos que el vector $v \in V$ es **COMBINACION LINEAL** de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que:

$$\boxed{v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ldots + \alpha_n v_n} \quad \text{los } \alpha_i \text{ son únicos.}$$

EJEMPLOS

1) El vector $(3,-5) \in I\!R^2$ es combinación lineal de $i = (1,0)$ y $j = (0,1)$ porque $(3,-5) = 3i - 5j$
2) El vector $(x,y,z) \in I\!R^3$ es combinación lineal de $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$; porque: $(x,y,z) = xi + yj + zk$.

3.2 CONJUNTO GENERADOR DE UN ESPACIO VECTORIAL

Definicion 9. Se dice que el conjunto de vectores v_1, v_2, ..., v_n pertenecientes a un espacio vectorial V generan V, si todo vector $v \in V$ se puede expresar como combinación lineal de ellos.

A continuación resolvamos el sistema (1), hallando a_1 y a_2 en términos de a_3:

$$\text{Por } -1 \longrightarrow \begin{cases} a_1 - 4a_2 = -5a_3 & (1) \\ a_1 + 3a_2 = 3a_3 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_1 + 4a_2 = 5a_3 \\ a_1 + 3a_2 = 3a_3 \end{cases}$$

Sumar: $7a_2 = 8a_3$

$$\boxed{a_2 = \tfrac{8}{7}a_3} \quad (3)$$

Sustituir (3) en (1): $a_1 - 4\left(\tfrac{8}{7}a_3\right) = -5a_3$

$$7a_1 - 32a_3 = -35a_3$$

$$7a_1 = -3a_3$$

$$\boxed{a_1 = -\tfrac{3}{7}a_3}$$

En consecuencia el vector u es de la forma:

$$u = (a_1, a_2, a_3) = \left(-\tfrac{3}{7}a_3, \tfrac{8}{7}a_3, a_3\right) = \tfrac{1}{7}a_3(-3,8,7)$$

Luego: $S_3 \cap S_4 = \mathscr{L}\{(-3,8,7)\}$ y $dim(S_3 \cap S_4) = 1$

c) Finalmente, nos falta hallar la dimensión de $(S_1 \cap S_2) \cap (S_3 \cap S_4)$:

Sea $v \in ((S_1 \cap S_2) \cap (S_3 \cap S_4)) \Rightarrow v \in S_1 \cap S_2 \wedge v \in S_3 \cap S_4$

Si $v \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow v = \alpha(-1,14,8)$

Si $v \in S_3 \cap S_4 \Rightarrow v = \beta(-3,8,7)$

Como $v = v$

$$\alpha(-1,14,8) = \beta(-3,8,7)$$

$$\begin{cases} -\alpha = -3\beta \\ 14\alpha = 8\beta \\ 8\alpha = 7\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta = 0 & (1) \\ 14\alpha - 8\beta = 0 & (2) \\ 8\alpha - 7\beta = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) Mantenimiento fijo (1),
(2) multiplicar (1) por 14 y suma a (2) y
(3) multiplicar (1) por 8 y sumar a (3)

$$\begin{aligned} -\alpha + 3\beta &= 0 \quad (1) \\ 0 + 34\beta &= 0 \quad (2) \\ 0 + 17\beta &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

De (2) o de (3) obtenemos $\beta = 0$

Luego, el vector $v = \beta(-3,8,7)$ es:

$$\begin{aligned} v &= 0(-3,8,7) \\ v &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Es decir $(S_1 \cap S_2) \cap (S_3 \cap S_4) = \{(0,0,0)\}$

En consecuencia: $dim[(S_1 \cap S_2) + S_3 \cap S_4)] = dim(S_1 \cap S_2) + dim(S_3 \cap S_4)$
$= 1 + 1$
$= 2$

PROBLEMA 10 Sea $V = \{(x,y,z,t) \in I\!K^4 \,/\, x - y + z - t = 0\}$ y
$U = \{(x,y,z,t) \in I\!K^4 \,/\, 2x + y + 2z + t = 0\}$

Hallar la dimensión de los siguientes subespacios:

$$U \cap V,\ U + V,\ \frac{I\!K^4}{V},\ \frac{I\!K^4}{U},\ \frac{U+V}{U},\ \frac{U+V}{U \cap V}.$$

Solución:

a) Hallemos $dim(U \cap V)$

Sea $v = (x,y,z,t) \in (U \cap V) \Rightarrow v \in U \wedge v \in V$

Si $v \in U \Rightarrow 2x + y + 2z + t = 0$
Si $v \in V \Rightarrow x - y + z + t = 0$ $\Big\}$ (I)

Resolver el sistema (I) que tiene 2 ecuaciones y 4 incógnitas, hallando x e y en términos de z y t:

$$\begin{cases} 2x + \cancel{y} = -2z - \cancel{t} & (1) \\ x - \cancel{y} = -z + \cancel{t} & (2) \end{cases}$$

$$3x = -3z$$

$$\boxed{x = -z} \quad (3)$$

Sustituir (3) en (2): $-z - y = -z + t$

$$y = -t$$

Luego, el vector v tiene la forma: $V = (x,y,z,t) = (-z,-t,z,t)$
$= z(-1,0,1,0) + t(0,-1,0,1)$

Por tanto: $U \cap V = \mathscr{L}\{(-1,0,1,0), (0,-1,0,1)\}$

y en consecuencia $dim(U \cap V) = 2$

b) Hallar $dim(U+V) = dim\,U + dim\,V - dim(U \cap V)$
$= dim\,U + dim\,V - 2$

b_1) Hallar $dim\,U$:

Un vector cualquiera $u \in U$ es $u = (x,y,z,t)$ tal que,

$$2x + y + 2z + t = 0$$
$$t = -2x - y - 2z$$

Entonces: $u = (x,y,z,-2x-y-2z)$
$= x(1,0,0,-2) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-2)$

Luego, $U = \mathcal{L}\{(1,0,0,-2),(0,1,0,-1),(0,0,1,-2)\}$ y $dim\,U = 3$

b_2) Hallar $dim\,V$:

Un vector $v \in V$ es $v = (x,y,z,t)$, tal que $x - y + z - t = 0$
$x - y + z = t$

Entonces: $v = (x,y,z,x-y+z)$
$v = x(1,0,0,1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,1)$

Luego: $V = \mathcal{L}\{(1,0,0,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,1)\}$ y $dim\,V = 3$

Por tanto: $dim(U+V) = 3 + 3 - 2$
$= 4$

c) Hallar: $dim\,\frac{\mathbb{K}^4}{V}$

Se tiene: $dim\,\frac{\mathbb{K}^4}{V} = dim\,\mathbb{K}^4 - dim\,V$
$= 4 - 3$
$= 1$

Nota:
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{K}^4 = \mathbb{R}^4$

d) Hallar $dim\,\frac{\mathbb{K}^4}{U}$

Se tiene: $dim\,\frac{\mathbb{K}^4}{U} = dim\,\mathbb{K}^4 - dim\,U$
$= 4 - 3$
$= 1$

e) Hallar $dim\left(\frac{U+V}{U}\right)$

Se tiene: $dim\left(\frac{U+V}{U}\right) = dim\,(U+V) - dim\,U$
$= 4 - 3 = 1$

f) $dim\left(\frac{U+V}{U \cap V}\right) = dim(U+V) - dim(U \cap V)$
$= 4 - 2 = 2$

PROBLEMA 11 Sea $V = \{A \subset \mathbb{R} \,/\, A$ tiene un número finito de elementos$\}$
$\forall\, A, B$ en V y $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos:

$$A + B = A \cup B$$
$$\alpha A = \begin{cases} \phi & \text{si } A = \phi \\ \{\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots\ldots, \alpha a_n\} & \text{si } A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \end{cases}$$

Determinar, justificando su respuesta, cuáles de los axiomas de espacio vectorial real, son satisfechos y cuáles no.

Solución:

La operación suma

$+ :\ V \times V \longrightarrow V$
$(A,B) \longmapsto A + B = A \cup B$

La operación producto

$\cdot :\ \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$
$(\alpha, A) \longmapsto \alpha \cdot A = \begin{cases} \phi & ,\ \text{si } A = \phi \\ \{\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n\}, & \text{si } A = \{a_1, \ldots, a_n\} \end{cases}$

Para averiguar la validez de cada axioma relativo a la adición debemos tener la idea clara de cuatro cosas:

i) ¿Cómo son los elementos de V?
ii) ¿Cómo se ha definido la operación suma?
iii) ¿Cómo es el elemento neutro O de V, si existe?
iv) ¿Cómo es el elemento opuesto $-x$ de V, si existe?

Como los elementos de V son subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$, nos permitimos en elegir los conjuntos:

$A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$, es subconjunto finito de $\mathbb{R}$ y tiene n elementos.
$B = \{b_1, \ldots, b_m\} \subset \mathbb{R}$, tiene "$m$" elementos
$C = \{c_1, \ldots, c_p\} \subset \mathbb{R}$, tiene "$p$" elementos
$\phi = \{\ \} \subset \mathbb{R}$, tiene "cero" elementos.

A continuación estudiemos la validez de cada axioma:

1. El axioma de la cerradura:

Debo probar que: $A \in V \wedge B \in V$ implica $(A + B) \in V$

Sólo debemos definir la suma $A + B$, así: $A + B = A \cup B$
$= \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$

que es un subconjunto finito de $\mathbb{R}$, pues tiene "$n + m$" elementos.

Por tanto, afirmamos que $(A + B) \in V$

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Se cumple $\forall\, A, B, C$ perteneciente a V, porque $A + B + C$ es finito y la unión de conjuntos es asociativa.

3. $\underset{\dots}{A+O}=A$, $\forall A \in V$
$A \cup \mathbf{O} = A$, implica $\mathbf{O}=\phi$. Pues el ϕ es un subconjunto finito de $I\!R$.
Por tanto, afirmamos que $\exists\, \mathbf{O}=\phi \in V$.

4. "$\forall A \in V,\ \exists -A \in V / A+(-A)=\phi$" .... **NO SE CUMPLE.**
Definamos la suma $A+(-A)$:
$A+(-A) = A \cup (-A)$, $-A = (-1)A = \{-a_1, \dots, -a_n\}$
$= \{a_1, a_2, \dots, a_n, -a_1, -a_2, \dots, -a_n\}$ .... **NO ES VACÍO**
Sólo cuando $A=\phi$, se cumple $\phi + (-\phi) = \phi \cup (-\phi) = \phi$
Como el axioma 4 debe cumplirse "para todo $A \in V$" afirmamos que:
$A+(-A)=\phi$, $\forall A \in V$ .... **ES FALSO.**

5. $\underset{\dots}{A+B}=\underset{\dots}{B+A}$, $\forall A, B \in V$ .... **SE CUMPLE**
$A \cup B = B \cup A$
$\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\} = \{b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n\}$

- La operación producto definida en V es:

$$\cdot\ :\ I\!R \times V \longrightarrow V$$
$$(\alpha, A) \longmapsto \alpha \cdot A = \begin{cases} \phi & , \text{ si } A=\phi \\ \{\alpha a_1, \dots, \alpha a_n\} & , \text{ si } A=\{a_1, \dots, a_n\} \end{cases}$$

Los axiomas del producto son:

1. El axioma de la cerradura:
Si $A=\phi$ implica $\alpha \cdot A = \phi$, donde $\phi \in V$
Si $A \neq \phi$ implica $\alpha \cdot A = \{\alpha a_1, \dots, \alpha a_n\}$
Es un subconjunto finito de $I\!R$, pues tiene n elementos
En consecuencia, afirmamos que $\alpha \cdot A \in V$

2. ¿Se cumple el axioma $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$; $\forall \alpha, \beta \in I\!R$; $\forall A \in V$.
Veamos: $\beta A = \{\beta a_1, \dots, \beta a_n\}$, si $A=\{a_1, \dots, a_n\}$
Es subconjunto finito de $I\!R$, por tanto $\beta A \in V$
$\alpha(\beta A) = \{\alpha(\beta a_1), \dots, \alpha(\beta a_n)\}$
$= \{(\alpha\beta)a_1, \dots, (\alpha\beta)a_n\}$
$= (\alpha\beta)A \in V$
Por tanto: afirmamos que se cumple el axioma 2.

3. ¿Se cumple: $1 \cdot A = A$, $\forall A \in V$, $1 = 1 \in I\!R$?
Por definición del producto: $1 \cdot A = (1)A = \{1 \cdot a_1, \dots, 1 \cdot a_n\}$, si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$
$= \{a_1, \dots, a_n\} \in V$
Por lo tanto: afirmamos que el axioma 3 se cumple.

4. ¿Se cumple: $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$? $\forall \alpha, \beta \in I\!R$; $\forall A \in V$
Veamos:
$(\alpha+\beta)A$ es: $(\alpha+\beta)A = \{(\alpha+\beta)a_1, \dots, (\alpha+\beta)a_n\} \in V$
Por otro lado: $\begin{cases} \alpha A = \{\alpha a_1, \dots, \alpha a_n\} \in V \\ \beta A = \{\beta a_1, \dots, \beta a_n\} \in V \end{cases}$
Por definición: $\alpha A + \beta A = \alpha A \cup \beta A$
$= \{\alpha a_1, \dots, \alpha a_n, \beta a_1, \dots, \beta a_n\} \in V$
Notamos que: $(\alpha+\beta)A \neq \alpha A + \beta A \Rightarrow$ No se cumple 3.

5. ¿Se cumple: $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha\beta$? , $\forall \alpha, \beta \in I\!R$; $\forall A, B \in V$
Veamos: $\alpha(A+B) = \alpha(A \cup B) = \{\alpha a_1, \dots, \alpha a_n, \alpha b_1, \dots, \alpha b_m\} \in V$
$\alpha A + \alpha B = (\alpha A) \cup (\alpha B) = \{\alpha a_1, \dots, \alpha a_n, \alpha b_1, \dots, \alpha b_m\} \in V$
Como vemos, se cumple la igualdad. Por tanto, el axioma 5 se cumple.

PROBLEMA 12 Sea $V = \{f : [0,1] \longrightarrow I\!R\}$ un espacio vectorial real y sean:
$A = \{f \in V / f(0) + f(1) = 0\}$
$B = \{f \in V / f(x) \geq 0\}$
Determinar si los conjuntos A y B son subespacios de V, en caso de serlo mostrar tres vectores.

Solución:

Sugerencias:

(1) Lo primero que el estudiante debe hacer es **IDENTIFICAR** y reconocer la forma que tienen los elementos del espacio vectorial V. En este problema, los elementos de V son funciones reales con dominio en el intervalo $[0,1]$.
Si $f \in V$, entonces se cumple que $f : [0,1] \longrightarrow I\!R$
Si $g \in V$, entonces se cumple que $g : [0,1] \longrightarrow I\!R$

(2) Además, como V es un espacio vectorial real, implica que sobre V están definidas las operaciones suma y producto.
Así: $+ : V \times V \longrightarrow V$; $\cdot : I\!R \times V \longrightarrow V$
$(f, g) \longrightarrow (f+g) : [0,1] \longrightarrow I\!R$; $(\alpha, f) \longrightarrow \alpha f : [0,1] \longrightarrow I\!R$
donde $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$; donde $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

En el problema se pide probar si A y B son o no subespacios de V.

PARA A Para afirmar que A es subespacio de V se debe probar la validez de tres proposiciones:

i) La función nula $\theta(x)=0$ es un elemento de A.
ii) Si $f\in A \wedge g\in A \Rightarrow (f+g)\in A$
iii) Si $\alpha\in I\!R \wedge f\in A \Rightarrow (\alpha f)\in A$

Probemos *i)* Sea $\theta:[0,1]\longrightarrow I\!R$ definido por $\theta(x)=0$
En este caso se cumple: $\theta\in A$.

Probemos *ii)* Debo probar que $(f+g)\in A$

Para afirmar que $(f+g)\in A$, debo probar que
$(f+g)(0)+(f+g)(1)=0$

Veamos: Si $f\in A$ implica que $f(0)+f(1)=0$
Si $g\in A$ implica que $g(0)+g(1)=0$

Además: $(f+g)(0)+(f+g)(1)=$
$=f(0)+g(0)+f(1)+g(1)=[f(0)+f(1)]+[g(0)+g(1)]$
$= 0 + 0 = 0$

Probemos *iii)* Debo probar que $(\alpha f)\in A$

Para afirmar que $(\alpha f)\in A$, debo probar que $(\alpha f)(0)+(\alpha f)(1)=0$

Veamos: Si $f\in A$ implica que $f(0)+f(1)=0$

Se debe aplicar la definición: $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$
$\forall f\in A$; $\forall \alpha\in I\!R$ en la suma:

$$(\alpha f)(0)+(\alpha f)(1)=$$
$$\alpha f(0)+\alpha f(1)=\alpha\underbrace{[f(0)+f(1)]}_{0}$$
$$=\alpha\cdot 0$$
$$=0\Rightarrow(\alpha f)\in A.$$

Conclusión: A es subespacio de V.

PARA B Debo probar que:

i) La función nula $\theta(x)=0$ es un elemento de B (se cumple)
ii) Si $f\in B\wedge g\in B\Rightarrow(f+g)\in B$, $\forall f,g\in B$, si $(f+g)(x)\geq 0$
iii) Si $\alpha\in I\!R\wedge f\in B\Rightarrow(\alpha f)\in B$, $\forall\alpha\in I\!R$, $\forall f\in B$, si $(\alpha f)(x)\geq 0$

Probemos *ii)* Si $f\in B$ implica $f(x)\geq 0$, $x\in[0,1]$
Si $g\in B$ implica $g(x)\geq 0$, $x\in[0,1]$
Se cumple: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)\geq 0+0=0$,
entonces $(f+g)(x)\geq 0$, $x\in[0,1]$

Probemos *iii)* Si $f\in B$ implica $f(x)\geq 0$
Si $\alpha\in I\!R$, puede ocurrir que $\alpha\geq 0 \vee \alpha<0$
– Si $\alpha\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \alpha f(x)\geq 0$, en este caso $(\alpha f)\in B$
– Si $\alpha<0\wedge f(x)>0\Rightarrow\quad \alpha f(x)<0$, en este caso $(\alpha f)\notin B$

Conclusión: B no es subespacio de V.

Para A, tres vectores (funciones) de A son: $f(x)=0$, $x\in[0,1]$

$$g(x)=\sqrt{\tfrac{1}{4}-(x-\tfrac{1}{2})^2}\ ,\ x\in[0,1]$$
$$h(x)=1-2x\ ,\ x\in[0,1]$$

PROBLEMA 13 Sea P_3 el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a tres.

Sean: $A=\{p\in P_3 \,/\, p(2)=p(-2)=p(0)=0\}$
$B=\{p\in P_3 \,/\, p(0)=1\}$

Indicar si los conjuntos A y B son subespacios de P_3.

Solución:

PARA A Se debe probar que:

i) El polinomio nulo $p(x)=0$ es un elemento de A
ii) Si $p\in A\wedge q\in A\Rightarrow(p+q)\in A$, $\forall p,q\in A$
iii) Si $\alpha\in I\!R\wedge p\in A\Rightarrow(\alpha p)\in A$, $\forall p\in A$

Probemos *ii)* Debo probar que $(p+q)\in A$.

Para afirmar que $(p+q)\in A$, debo probar que:

$(p+q)(2)=(p+q)(-2)=(p+q)(0)=0$ sabiendo que $\left\{\begin{array}{l}p(2)=p(-2)=p(0)=0\\ q(2)=q(-2)=q(0)=0\\ \text{pues: } p\in A\ ;\ q\in A\end{array}\right.$

Veamos:

$$\left.\begin{array}{l}(p+q)(2)=\underbrace{p(2)}_{0}+\underbrace{q(2)}_{0}=0+0=0\\ (p+q)(-2)=\underbrace{p(-2)}_{0}+\underbrace{q(-2)}_{0}=0+0=0\\ (p+q)(0)=\underbrace{p(0)}_{0}+\underbrace{q(0)}_{0}=0+0=0\end{array}\right\}\Rightarrow (p+q)(2)=(p+q)(-2)=(p+q)(0)=0,$$
lo cual implica que $(p+q)\in A$.

Probemos *iii)* Debo probar que $(\alpha p)\in A$
Para afirmar que $(\alpha p)\in A$, debo probar que
$(\alpha p)(2)=(\alpha p)(-2)=(\alpha p)(0)=0$ sabiendo que
$p(2)=p(-2)=p(0)=0$ pues $p\in A$

Veamos:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha p)(2) = \alpha \underbrace{p(2)}_{0} = \alpha \cdot 0 = 0 \\ (\alpha p)(-2) = \alpha \underbrace{p(-2)}_{0} = \alpha \cdot 0 = 0 \\ (\alpha p)(0) = \alpha \underbrace{p(0)}_{0} = \alpha \cdot 0 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha p)(2) = (\alpha p)(-2) = (\alpha p)(0) = 0$$

lo cual implica que $(\alpha p) \in A$

Conclusión: A es subespacio de P_3

PARA B Se debe probar que:

i) El polinomio nulo de grado tres $p(x) = 0$ es un elemento de B.
ii) Si $p \in B \wedge q \in B \Rightarrow (p+q) \in B$
iii) Si $\alpha \in I\!R \wedge p \in B \Rightarrow (\alpha p) \in B$

Probemos *i)*

Para afirmar que $(p+q) \in B$ debo probar que:

$$(p+q)(0) = 1 \quad \text{sabiendo que} \begin{cases} p(0) = 1 \wedge q(0) = 1 \\ \text{pues } p \in B \text{ y } q \in B \end{cases}$$

Veamos: $(p+q)(0) = \underbrace{p(0)}_{1} + \underbrace{q(0)}_{1}$

$= 1 + 1$

$= 2$, este resultado nos dice que $(p+q) \notin B$

Conclusión: B no es subespacio de P_3.

PROBLEMA 14 Sean: $M_{2\times 2}$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden 2 , $C = \begin{bmatrix} c & c \\ c & c \end{bmatrix}$ una matriz constante.

Definimos: $V = \left\{ A \in M_{2\times 2} \,/\, AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ con las operaciones usuales de adición de matrices y multiplicación por un escalar. Demostrar que V es un espacio vectorial.

Demostración:

En primer lugar, averiguaremos qué forma tienen las matrices $A \in V$.

Según la definición de V, las matrices A son $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

tal que $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & c \\ c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}c + a_{12}c & a_{11}c + a_{12}c \\ a_{21}c + a_{22}c & a_{21}c + a_{22}c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c\,(a_{11} + a_{12}) = 0 \\ c\,(a_{21} + a_{22}) = 0 \end{cases} \;\ldots\ldots\; (*)$$

Analicemos el sistema de ecuaciones que aparecen en $(*)$:

i) **Si $c = 0$, entonces la igualdad $AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ se cumple $\forall A \in M_{2\times 2}$ y en consecuencia $V = M_{2\times 2}$, es un espacio vectorial.**

ii) **Si $c \neq 0$, entonces $\begin{cases} a_{11} = -a_{12} \\ a_{21} = -a_{22} \end{cases}$ y las matrices $A \in V$ tendrán la forma:**

$$A = \begin{bmatrix} -a_{12} & a_{12} \\ -a_{22} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{12} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, $V = \left\{ A = \begin{bmatrix} -a_{12} & a_{12} \\ -a_{22} & a_{22} \end{bmatrix} \Big/ a_{12} \in I\!R \,,\, a_{22} \in I\!R \right\}$

Se cumple que V es un subespacio de $M_{2\times 2}$ con $dim\ V = 2$ y se verifican las operaciones: (1) Suma de matrices, y (2) Multiplicación por un escalar.

Veamos estas operaciones:

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$(A, B) \longmapsto A + B = \begin{bmatrix} -(a_{12} + b_{12}) & (a_{12} + b_{12}) \\ -(a_{22} + b_{22}) & (a_{22} + b_{22}) \end{bmatrix}$$

$$\cdot : I\!R \times V \longrightarrow V$$
$$(\alpha, A) \longmapsto \alpha A = \begin{bmatrix} -\alpha a_{12} & \alpha a_{12} \\ -\alpha a_{22} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}$$

donde: $A = \begin{bmatrix} -a_{12} & a_{12} \\ -a_{22} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -b_{12} & b_{12} \\ -b_{22} & b_{22} \end{bmatrix}$

Estas operaciones definidas en V cumplen todos los axiomas de espacio vectorial. En consecuencia V es un espacio vectorial.

PROBLEMA 15 Pruebe que el conjunto U de las matrices triangulares inferiores y el conjunto W de las matrices triangulares superiores son subespacios vectoriales, de $M(n\times n)$, que $M(n\times n)=U+W$ y que no se cumple $M(n\times n)=U\oplus W$.

Demostración:

Se tiene: $M(n\times n)=\left\{(a_{ij})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n} & a_{n2} & a_{nn}\end{bmatrix} : a_{ij}\in I\!R\right\}$ matrices cuadradas de orden n.

- $U=\{(a_{ij})\in M(n\times n)/\, a_{ij}=0\ ,\ \forall i<j\}$ matrices triangulares inferiores.
- $W=\{(a_{ij})\in M(n\times n)/\, a_{ij}=0\ ,\ \forall i>j\}$ matrices triangulares superiores.

a) U es un subespacio vectorial de $M(n\times n)$, porque cumplen:

i) La matriz nula θ de $M(n\times n)$ es un elemento de U, porque cumple la definición dada en el conjunto U.

ii) Elegir: $\begin{cases} A=(a_{ij}) \text{ con } a_{ij}=0\ ,\ \forall i<j\\ B=(b_{ij}) \text{ con } b_{ij}=0\ ,\ \forall i<j\end{cases}$

La suma: $A+B=C$; donde $C=(C_{ij})$, tal que, $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ es un elemento de U.
$=0+0$
$=0,\ \forall i<j$

iii) Elegir: $\begin{cases}\alpha\in I\!R\\ A=(a_{ij}), \text{con } a_{ij}=0\ ,\ \forall i<j\end{cases}$

El producto: $\alpha A=(\alpha\, a_{ij})$ es un elemento de U, porque cumple $\alpha\, a_{ij}=0\ ,\ \forall i<j$.

b) De manera similar se prueba que W es un subespacio de $M(n\times n)$.

c) Definamos la suma: $U+W$

Un elemento $C\in U+W$ es $C=A+B$, tal que, $A\in U$, $B\in W$.

donde $A=(a_{ij})$ con $a_{ij}=0\ ,\ \forall i<j$

y $B=(b_{ij})$ con $b_{ij}=0\ ,\ \forall i>j$

$C=(c_{ij})$ es la matriz suma, tal que, $c_{ij}=\begin{cases} b_{ij} & ,\ \text{si } i<j\\ a_{ii}+b_{ii} & ,\ \text{si } j=i\\ a_{ij} & ,\ \text{si } i>j\end{cases}$

Esto demuestra que los elementos de $U+W$ son matrices de $M(n\times n)$

d) Si $A\in U\cap W$ entonces A es, a la vez, triangular inferior y superior. Entonces A es una matriz diagonal con algún $a_{ii}\neq 0$. Este resultado nos indica que $U\cap W\neq\{\theta\}$.

En consecuencia: $M(n\times n)\neq U\oplus W$.

PROBLEMA 16 Dados $X, Y\subset I\!R$, sean

F = conjunto de la funciones $f: I\!R\longrightarrow I\!R$ que se anulan en todos los puntos de X.

G = conjunto de funciones $g: I\!R\longrightarrow I\!R$ que se anulan en todos los puntos de Y.

Pruebe:
a) F y G son subespacios de $E=\mathcal{F}(I\!R; I\!R)$
b) Se tiene $E=F+G$ si, y sólo si, $X\cap Y=\varnothing$
c) Se tiene $F\cap G=\{0\}$ si, y sólo si, $X\cup Y=I\!R$
d) Se cumple que $E=F\oplus G$ si, y sólo si, $Y=I\!R-X$

Prueba de a) $E=\mathfrak{I}(I\!R; I\!R)=\{\ f: I\!R\longrightarrow I\!R\ /\ f$ es una función real variable real $\}$

$F=\{f: I\!R\longrightarrow I\!R\,/\,f(x)=0, \forall x\in X, X\subset I\!R\}$

$G=\{g: I\!R\longrightarrow I\!R\,/\,g(x)=0, \forall x\in Y, Y\subset I\!R\}$

i) La función nula $\theta(x)=0$, $\forall x\in I\!R$, es un elemento de F puesto que cumple $\theta(x)=0$, para $x\in X\subset I\!R$.

ii) Sean: f, g elementos de F, entonces $f(x)=0$, $\forall x\in X$ y $g(x)=0\ \forall x\in X$.
La suma: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=0+0=0$, $\forall x\in X$ es un elemento de F.

Como $T(x,y)=(2x-y\,,\,-8x+4y)$, entonces $(2x-y\,,\,-8x+4y)=(0,0)$ $\quad (\alpha)\begin{cases} 2x-y=0 \\ -8x+4y=0 \end{cases}$

Resolver el sistema (α) por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{array}{l|rr|r} (4)\longrightarrow & 2 & -1 & 0 \\ \xrightarrow{\quad} & -8 & 4 & 0 \\ \hline (*)\longrightarrow & 2 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Tenemos: $\rho(A)=\rho[A:B]=1$, entonces el sistema es compatible. Como $n=2$ y $\rho(A)=1$, entonces el número de parámetros es $k=2-1=1$

De (*): obtenemos la ecuación $2x-y=0$

Por tanto, el $\ker(T)=\{(x,y)\in I\!R^2\,/\,2x-y=0\}$

Ahora, respondemos a las preguntas: d) $(5,10)\in\ker(T)$, porque $2(5)-10=0$
e) $(3,2)\notin\ker(T)$ $\quad$ f) $(1,1)\notin\ker(T)$.

PROBLEMA 04 $\quad$ Defina una $\mathcal{L}.\mathcal{L}.$ $T:I\!R^2\longrightarrow I\!R^2$ cuyo núcleo sea la recta $y=x$, y su imagen sea la recta $y=2x$.

Solución:

Sea $T(x,y)=(ax+by\,,\,mx+ny)$. Por hallarse: a, b, m, n.

a) Núcleo de $T: x-y=0$

Por definición de NÚCLEO, se tiene:

$$\begin{cases} ax+by=0 \\ mx+ny=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|cc|c} \text{por } \frac{1}{a}\longrightarrow & a & b & 0 \\ & m & n & 0 \\ \hline (-m) & 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ \longrightarrow & m & n & 0 \\ \hline & 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ & 0 & n-\frac{mb}{a} & 0 \\ \hline \end{array}$$

Debe ser que:

$$\begin{cases} n-\frac{mb}{a}=0 \\ \frac{b}{a}=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} an-mb=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ a+b=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

$Im(T): 2r-s=0$

Por definición de imagen, se tiene:

$$\begin{cases} ax+by=r \\ mx+ny=s \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc|cl} a & b & r & \longleftarrow \text{por } 2 \\ m & n & s & \longleftarrow \text{por } -1 \\ \hline 2a & 2b & 2r & \\ -m & -n & -s & + \\ \hline 2a & 2b & 2r & \\ 2a-m & 2b-n & 2r-s & \\ \hline \end{array}$$

Debe ser que:

$$\begin{cases} 2a-m=0 \quad \ldots\ldots (3) \\ 2b-n=0 \quad \ldots\ldots (4), \text{ si } 2r-s=0 \end{cases}$$

De (2) $\quad$: $\quad a=-b$
De (4) $\quad$: $\quad n=2b$
De (2) y (3) : $\quad m=-2b$

CONCLUSIÓN: $\quad T(x,y)=(-bx+by\,,\,-2bx+2by)$,
$\quad = (x-y\,,\,2x-2y)$, si $b=-1$.

PROBLEMA 05 $\quad$ Sea la base $S=(v_1, v_2, v_3)$ de $I\!R^3$, donde: $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(2,5,3)$ y $v_3=(1,0,10)$

a) Determine la regla de correspondencia de la transformación lineal $T:I\!R^3\longrightarrow I\!R^2$, sabiendo que $T(v_1)=(1,0)$, $T(v_2)=(1,0)$, $T(v_3)=(0,1)$.

b) Calcular $T(1,1,1)$.

Solución de a)

1. Sea $V=(x,y,z)\in I\!R^3$

Como S es una base de $I\!R^3$, entonces v es combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3; es decir existen escalares α_1, α_2, α_3 tal que:

2. $\quad v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3$

$(x,y,z)=\alpha_1(1,2,3)+\alpha_2(2,5,3)+\alpha_3(1,0,10)$

$$\begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=x \\ 2\alpha_1+5\alpha_2=y \\ 3\alpha_1+3\alpha_2+10\alpha_3=z \end{cases}$$

Resolver el sistema, por el método de Gauss-Jordan para hallar α_1, α_2, α_3 en términos de x, y, z.

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 2 & 1 & x & (-2)\ (-3) \\ 2 & 5 & 0 & y & \\ 3 & 3 & 10 & z & \\ \hline 1 & 2 & 1 & x & \\ 0 & 1 & -2 & y-2x & (-2)\ (3) \\ 0 & -3 & 7 & z-3x & \\ \hline 1 & 0 & 5 & -2y+5x & \\ 0 & 1 & -2 & y-2x & \\ 0 & 0 & 1 & 3y+z-9x & (2)\ (-5) \\ \hline 1 & 0 & 0 & -17y-5z+50x & \\ 0 & 1 & 0 & 7y+2z-20x & \\ 0 & 0 & 1 & 3y+z-9x & \end{array}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} \alpha_1=-17y-5z+50x \\ \alpha_2=7y+2z-20x \\ \alpha_3=3y+z-9x \end{cases}$$

3. Aplicar T en 2:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3) \\ &= \alpha_1(1,0) + \alpha_2(1,0) + \alpha_3(0,1) \\ &= (-17y - 5z + 50x)(1,0) + (7y + 2z - 20x)(1,0) + (3y + z - 9x)(0,1) \\ T(x,y,z) &= (30x - 10y - 3z \,,\, -9x + 3y + z) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (30 - 10 - 3 \,,\, -9 + 3 + 1) \\ &= (17 \,,\, -5) \end{aligned}$$

PROBLEMA 06 Suponga que $T : M_{nn} \longrightarrow M_{nn}$ se define por $T(A) = A - A^t$. Muestre que:

a) $\text{Ker}(T) = \{$matrices simétricas de $n \times n\}$
b) $\text{Im}(T) = \{$matrices antisimetricas de $n \times n\}$

Solución:

a) $\text{Ker}(T) = \{A \in M_{nn} \,/\, T(A) = 0,\ 0 \in M_{nn}\}$

Como $T(A) = A - A^t$

$$\begin{aligned} A - A^t &= 0 \\ A &= A^t \end{aligned}$$

Esta igualdad indica que A es simétrica.

Luego $\text{Ker}(T) = \{A \in M_{nn} \,/\, A = A^t\}$
$\quad = $ matrices simétricas de $n \times n$.

b) $\text{Im}(T) = \{B \in M_{nn} : \exists A \in M_{nn},\ B = T(A)\}$

Entonces:

$B = A - A^t$ .... (1)
$B^t = A^t - A$ .... (2)

(1) + (2): $\quad B + B^t = 0$
$\qquad\qquad B = -B^t$

Luego: $\text{Im}(T) = \{B \in M_{nn} : B = -B^t\}$ que es el conjunto de matrices antisimétricas.

5. MONOFORMISMO, EPIMORFISMO E ISOMORFISMO.

Sea la transformación lineal $T : V \longrightarrow W$

DEFINICIÓN 3:

a) T es inyectiva (o un monomorfismo) si, y sólo si,
$\forall\, \mu, v \in V$; $T(\mu) = T(v)$ implica $\mu = v$.
Otra definición equivalente es:
T es inyectiva $\Longleftrightarrow \forall\, \mu, v \in V$; $\mu \neq v$ implica $T(\mu) \neq T(v)$,

b) T es un sobreyectiva (sobre, epiyectiva o epimorfismo) si, y sólo si, para todo $w \in W$, existe algún $v \in V$, tal que $w = T(v)$
Otra definición equivalente es:
T es sobreyectiva si, y sólo si $\text{Im}(T) = W$

c) T es un isomorfismo si, y sólo si T es sobreyectiva e inyectiva. En este caso afirmamos que V es isomorfo a W.

Notación: La notación $V \cong W$ se lee "V es isomorfo a W".

Ejemplo:

$I\!R^2 \cong \mathbb{C}$, porque existe $T : I\!R^2 \longrightarrow \mathbb{C}$
$\qquad (x,y) \longrightarrow x + iy$, $i = \sqrt{-1}$

definido por $T(x,y) = x + iy$

Ejemplo:

Sea $V = I\!R^3$ y $I\!P_2 = \{a + bx + cx^2 \,/\, a, b, \in I\!R\}$
se tiene que $V \cong I\!P_2$, pues existe un isomorfismo
$T : V \longrightarrow I\!P_2$ definido por $T(a,b,c) = a + bx + cx^2$.

Ejemplo:

Si A es matriz cuadrada de orden n, la transformación lineal
$T : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ definido por $T(X) = AX$ es un isomorfismo.

Ejemplo:

Si $I\!R^2 \cong \mathbb{C}$, también $\underbrace{I\!R^2 \times I\!R^2 \times \ldots\ldots \times I\!R^2}_{I\!R^{2n}} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots\ldots \times \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^n$

TEOREMA 4 Una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, es **INYECTIVA** sí, y sólo si $N(T) = \{\mathbf{O}\}$, $\mathbf{O} \in W$.

Núcleo de T.

Demostración:

($\Rightarrow$) Si T es inyectiva $\Rightarrow N(T) = \{0_V\}$, 0_V : vector nulo d V.

Veamos:

Si $v \in N(T) \Rightarrow T(v) = O_W$ .... (1)

Debo probar que $v = O_V$, donde $O_V \in V$

Como $N(T)$ es subespacio de V, se cumple:

$O_W = T(O_V)$ .... (2)

(2) en (1): $\qquad T(v) = T(O_V)$

Pero, T es inyectiva $\Rightarrow v = O_V$.

($\Leftarrow$) Si $N(T)=\{O_V\} \Rightarrow T$ es inyectiva.

Sea $N(T)=\{O_V\}$, entonces $T(\mu)=T(v)$

$\Rightarrow T(\mu)-T(v)=O_W \Rightarrow T(\mu-v)=O_W$

$\Rightarrow \quad \mu-v=O_V \Rightarrow \mu=v.$ ∎

- Se dice que la transformación lineal T es no singular si $Tv=0$ implica $v=0$, es decir, si el espacio nulo de T es $\{0\}$. Evidentemente, T es inyectiva si, y solo si, T es no singular. El alcance de esta observación es que las transformaciones lineales no singulares son las que preservan la independencia lineal.

5.1 PROBLEMAS.

PROBLEMA 01 Sea $E=C^\infty(I\!R)$ el espacio de las funciones continuas $f: I\!R \longrightarrow I\!R$.

Defina el operador lineal $A: E \longrightarrow E$ poniendo, para cada $f \in E$, $Af=Q$, donde $Q(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x \in I\!R$. Determine el núcleo y la imagen del operador A.

Solución:

a) NÚCLEO de A: es el conjunto de las funciones f tal que $\int_0^x f(t)dt=0 \Rightarrow f(x)=0$, $x \in I\!R$. Entonces $N(A)=\{f \in E \,/\, f(x)=0\,,\, x \in I\!R\}$.

b) IMAGEN de A: es el conjunto de las funciones $Q(x)$ tal que

$$Q(x)=\int_0^x f(t)\,dt\text{, del cual se obtiene:}$$

$$Q'(x)=f(x).$$

Entonces $Im(A)=\{Q(x)\,/\,Q'(x)=f(x)\,,\, x \in I\!R\}$

PROBLEMA 02 Sea la transformación lineal $T: V_2 \longrightarrow V_2$ definida por: $T(x,y)=(2x-y\,,\,x+y)$

a) ¿Es T inyectiva?

b) Hallar la inversa de T, si existe.

Solución:

a) Si $N(T)=\{O\}$, $O \in V_2 \Rightarrow T$ es inyectiva.

Veamos:

1. El núcleo de T es $N(T)=\{(x,y) \in V_2 \,/\, T(x,y)=(0,0)\}$

2. Como $T(x,y) = (2x-y\,,\,x+y)$, entonces:

$$(2x-y\,,\,x+y) = (0,0)$$
$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$
$$3x=0$$
$$\boxed{x=0} \quad \boxed{y=0}$$

3. ***Conclusión***: $N(T)=\{(0,0)\}$, esto implica que T **es inyectiva.**

b) Como T es **inyectiva**, tiene inversa

La inversa de T se obtiene haciendo $\begin{cases} 2x-y=s \\ x+y=t \end{cases}$ y resolver el sistema de tal modo que "x" e "y" estén expresadas de una única manera en términos de s y t.

Por determinantes: $x=\dfrac{\begin{vmatrix} s & -1 \\ t & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{s+t}{3}$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & s \\ 1 & t \end{vmatrix}}{3}=\dfrac{2t-s}{3}$

Luego, la inversa de T es $T^{-1}: V_2 \longrightarrow V_2$, definido por:

$T^{-1}(s,t)=\left(\frac{s+t}{3}, \frac{2t-s}{3}\right)$ como s y t son variables se puede sustituir por x e y

$T^{-1}(x,y)=\left(\frac{x+y}{3}, \frac{2y-x}{3}\right)$.

NOTA: Se cumple: T^{-1} o $T=I$, donde $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ son las matrices asociadas a T y T^{-1}, respectivamente.

PROBLEMA 03 Sea la aplicación (función) $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ tal que; T es una transformación lineal.

Probar que, T es inyectiva $\Longleftrightarrow \{T(1,0)\,,\,T(0,1)\}$ es $\ell.i.$

Solución:

($\Rightarrow$) Si T es INYECTIVA $\Rightarrow \{T(1,0)\,,\,T(0,1)\}$ es $\ell.i.$

1. Sea $\underbrace{\alpha_1 T(1,0) + \alpha_2 T(0,1)} = (0,0)$. Debo probar: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

2. $T(\alpha(1,0) + \alpha(0,1)) = (0,0)$ .... porque T es $\ell.\ell.$

3. $T(\alpha_1,\alpha_2) = (0,0)$

   Esta igualdad implica que $(\alpha_1,\alpha_2) \in N(T)$

4. Según hipótesis, T es inyectiva $\Rightarrow$ $N(T) = \{(0,0)\}$

5. Si $(\alpha_1,\alpha_2) \in N(T) = \{(0,0)\} \Rightarrow (\alpha_1,\alpha_2) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

6. **CONCLUSIÓN.**
   Según 1 y 5, afirmamos que el conjunto de vectores $\{T(1,0), T(0,1)\}$ es $\ell.i.$
   $(\Leftarrow)$ si $T(1,0)$, $T(0,1)$ es $\ell.i.$ $\Rightarrow$ T es inyectiva

Prueba:

1. Si $\{T(1,0), T(0,1)\}$ es $\ell.i.$ entonces la igualdad:
   $\alpha_1 T(1,0) + \alpha_2 T(0,1) = (0,0)$ implica $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$
   Bastará probar que $N(T) = \{(0,0)\}$, para afirmar que T es inyectiva.

2. De 1: $\alpha_1 T(1,0) + \alpha_2 T(0,1) = (0,0)$
   Obtenemos: $T(\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1)) = (0,0)$
   $T(\alpha_1,\alpha_2) = (0,0)$

3. Por (1) se tiene $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Entonces $N(T) = \{(0,0)\}$.

4. Entonces T es **inyectiva**.

PROBLEMA 04 Sean los conjuntos: $U = \{ f(x) = a + bx^2 + cx^4 \,/\, a, b, c, \in I\!R \}$
$V = \{(p, r, s, t) \in I\!R^4 \,/\, p + r + s + t = 0 \}$

Donde U y V son $I\!R-$ espacios vectoriales. Sea la $\ell.\ell.$ $T : U \longrightarrow V$ definido por $T(a + bx^2 + cx^4) = (a - b\,,\, b - c\,,\, 2c - a\,,\, -c\,)$. Demostrar que T es un **ISOMORFISMO**.

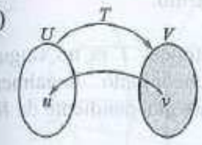
Demostración:

Debo demostrar que a) T es **INYECTIVA**.
b) T es **SURYECTIVA**.

a) Si se prueba que $N(T) = \{O\}$, $O = 0 + 0x^2 + 0x^4 \Rightarrow T$ es inyectiva.

Veamos:

1. Por definición $N(T) = \{ f(x) \in U / T(f) = (0,0,0,0)\}$, $f(x) = a + bx^2 + cx^4$
   Como $T(a + bx^2 + cx^4) = (a - b,\ b - c\,, 2c - a\,, -c)$
   hacemos: $(a - b\,, b - c\,, 2c - a\,, -c) = (0,0,0,0)$ $\Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ 2c - a = 0 \\ -c = 0 \end{cases}$
2. Al resolver, obtenemos $a = b = c = 0$
3. Así hemos obtenido el polinomio **nulo** $0 = 0 + 0x^2 + 0x^4$
4. Por tanto: $N(T) = \{0\}$, lo cual implica que T es inyectiva.

b) 

T es suryectiva si, y sólo si $\forall\ v \in V,\ \exists\ u \in U$ tal que $v = T(u)$.

1. La definición de Suryectividad, se interpreta del siguiente modo:
   Dado $v = (p,r,s,t) \in V$ encontrar $u(x) = a + bx^2 + cx^4 \in U$, tal que:
   $T(u) = \underbrace{(p,r,s,t)}_{v}$

2. Pero $T(u) = (a - b\,, b - c\,, 2c - a\,, -c)$
   entonces $(a - b\,, b - c\,, 2c - a\,, -c) = (p,r,s,t)$

3. Basta hacer:
$$(\alpha)\begin{cases} a - b = p & \text{...........}\ (1) \\ b - c = r & \text{...........}\ (2) \\ 2c - a = s & \text{...........}\ (3) \\ -c = t & \text{...........}\ (4) \end{cases}$$

4. Según la definición dado en 1, nuestro problema es hallar $a = ?$, $b = ?$, $c = ?$ en términos de p, r, s, t tal que se cumpla $p + r + s + t = 0$

5. Al resolver el sistema (α) obtenemos:
   De (4): $c = -t$
   Sustituir en (3): $-2t - a = s$
   $a = -s - 2t$ .... (5)
   (5) en (2): $b + t = r$
   $b = r - t$ .... (6)
   (6) y (5) en (1): $-s - 2t - r + t = p$
   $-s - t - r = p$

6. Así hemos encontrado que $u(x) = \underbrace{(-s-2t)}_{a} + \underbrace{(r-t)}_{b} x^2 + \underbrace{(-t)}_{c} x^4$, tal que:

$$T\underbrace{(\underbrace{(-s-2t)}_{a} + \underbrace{(r-t)}_{b} x^2 + \underbrace{(-t)}_{c} x^4)}_{u} = (\underbrace{(-s-2t)}_{a} - \underbrace{(r-t)}_{b} , \underbrace{(r-t)}_{b} - \underbrace{(-t)}_{c} , \underbrace{2(-t)}_{2a} - \underbrace{(-s-2t)}_{a} , \underbrace{-(-t)}_{-c})$$

$$= (-s-t-r , r , s , t)$$

$$= (p , r , s , t)$$

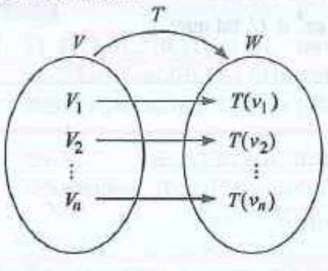
$$T(\mu) = v$$

7. Luego, T es suryectiva

8. Porque T es inyectiva y suryectiva implica que T es un **isomorfismo**.

TEOREMA 5 Sea T una transformación lineal de V en W. Entonces T es no singular (inyectiva) si, y solo si, T aplica cada subconjunto linealmente independiente de V sobre un subconjunto linealmente independiente de W.

Demostración:



Sea $S = \{v_1 , \ldots , v_n\}$ un subconjunto de V, linealmente independiente y $\{T(v_1), \ldots , T(v_n)\}$ el subconjunto de W, que son las imágenes de los vectores $v_1 , \ldots , v_n$.

($\Rightarrow$) T es inyectiva $\Rightarrow (v_1 , \ldots , v_n$ son $\ell.i.$ implica $T(v_1) , \ldots , T(v_n)$ son $\ell.i.)$

Debo probar que $x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) + \ldots + x_n T(v_n) = 0$ implica $x_i = 0 \;\; \forall \, i$

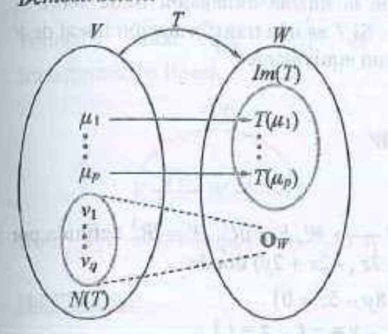
Veamos:

1. Sean los escalares $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ tales que: $x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) + \ldots + x_n T(v_n) = 0_W$
2. $T(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) = 0_W$, porque T es una $t.\ell.$
3. Como T es inyectiva, entonces: $x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = 0_V$, porque T es inyectiva.
4. Por hipótesis $v_1 , \ldots , v_n$ son $\ell.i.$, entonces la igualdad en 3 implica que: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.
5. Por 1 y 4 implica que $T(v_1), T(v_2), \ldots , T(v_n)$ son $\ell.i.$ *lqqd.*

($\Leftarrow$) Recíprocamente, si la transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ lleva vectores $\ell.i.$ en vectores $\ell.i.$, entonces $v \neq \mathbf{O}$ en $V \Rightarrow \{v\}$ $\ell.i.$ $\Rightarrow \{T(v)\}$ $\ell.i.$ $\Rightarrow T(v) \neq \mathbf{O}$, por tanto $N(T) = \{\mathbf{O}\}$ y T es inyectiva.

TEOREMA 6 **(TEOREMA DEL NÚCLEO Y DE LA IMAGEN)**
Sea V un $\mathbb{K}$ –espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces: $\dim V = \underbrace{\dim N(T)}_{\text{rango }(T)} + \underbrace{\dim \operatorname{Im}(T)}_{\text{nulidad }(T)}$

Demostración:



Si $\{T(\mu_1) , \ldots , T(\mu_p)\}$ es una base de $\operatorname{Im}(T)$ y $\{v_1 , \ldots , v_q\}$ es una base de V, se debe probar dos cosas:

a) $\mu_1 , \ldots , \mu_p , v_1 , \ldots , v_q$ son $\ell.i.$

b) Todo vector v, de V es combinación lineal de los vectores $\mu_1 , \ldots , \mu_p , v_1 , \ldots , v_q$

Veamos:

Prueba de a)

1. Supongamos que: $\alpha_1 \mu_1 + \ldots + \alpha_p \mu_p + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q v_q = \mathbf{O}$
2. Aplicar T: $T(\alpha_1 \mu_1 + \ldots + \alpha_p \mu_p + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q v_q) = T(\mathbf{O})$
$\underbrace{\alpha_1 T(\mu_1) + \ldots + \alpha_p T(\mu_p)} + T(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q v_q) = \mathbf{O}_W$
3. Como $T(\mu_1) , \ldots , T(\mu_p)$ es una base de la $Im(T)$, entonces son $\ell.i.$ y por tanto: $\alpha_1 T(\mu_1) + \ldots + \alpha_q T(\mu_p) = \mathbf{O}_W$
Luego, en 2, se tendrá: $\mathbf{O}_W + T(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q V_q) = \mathbf{O}_W$
$\Rightarrow \quad T(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q V_q) = \mathbf{O}_W$ ……………………(3∗)
4. La igualdad (3∗) implica que $(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q v_q) \in N(T)$
5. Pero $\{v_1 , \ldots v_q\}$ es una base del $N(T)$, entonces son $\ell.i.$ y por lo tanto $\beta_1 = \ldots = \beta_q = \mathbf{O}$
6. Por 3 y 5 afirmamos que $\mu_1 , \ldots , \mu_p , v_1 , \ldots , v_p$ son $\ell.i.$

Prueba de b)

7. Sea $v \in V$ un vector arbitrario. Como $T(v) \in \operatorname{Im}(T)$, podemos escribir: $T(v) = \alpha_1 T(\mu_1) + \ldots + \alpha_p T(\mu_p)$, porque $\{T(\mu_1) , \ldots T(\mu_p)\}$ es una base de la imagen de T.

La igualdad anterior implica $T(v - (\alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_p\mu_p)) = O_W$

Esta igualdad implica que $v - (\alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_p\mu_p)$ pertenece al núcleo de T y por tanto, se puede expresar como combinación lineal de los elementos de la base $\{v_1, \ldots v_q\}$, esto es, $v - (\alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_p\mu_p) = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q v_q$.

Luego, $v = \alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_p\mu_p + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q v_q$.

8. Esto prueba que $\mu_1, \ldots, \mu_p, v_1, \ldots, v_q$ genera V y por tanto, constituye una base.

TEOREMA 7 Sean V, W espacios vectoriales de la misma dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$ tal que $\dim V = \dim W$. Si T es una transformación lineal de V en W, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(*i*) T es inversible.
(*ii*) T es no singular.
(*iii*) T es sobreyectiva; esto es, la imagen de T es W.

Demostración: (queda como ejercicio)

Ejemplo 06 Sea la transformación lineal $T: V \longrightarrow W$, $V = I\!R^3$, $W = I\!R^3$ definida por $T(x,y,z) = (x + 3y + 4z\ ,\ 3x + 4y + 7z\ ,\ -2x + 2y)$ donde

a) $\text{Im}(T) = \{(x,y,z) \in W \,/\, 14x - 8y - 5z = 0\}$
b) $N(T) = \{(x,y,z) \in V \,/\, x = -t\ ,\ y = -t\ ,\ z = t\}$

Comprobar que: $\dim V = \dim \text{Im}(T) + \dim N(T)$

Solución:

1. Se tiene que: $\dim V = 3$, porque $V = I\!R^3$
2. Hallemos la dimensión de $\text{Im}(T)$

De $\quad 14x - 8y - 5z = 0 \;\Rightarrow\; z = \frac{14}{5}x - \frac{8}{5}y$

Entonces $\quad (x,y,z) = \left(x\,,\,y\,,\,\frac{14}{5}x - \frac{8}{5}y\right)$

$$= \left(1\,,0\,,\tfrac{14}{5}\right) + y\left(0\,,1\,,-\tfrac{8}{5}\right)$$

Luego $\quad \text{Im}(T) = \mathfrak{L}\left\{\left(1\,,0\,,\tfrac{14}{5}\right) + y\left(0\,,1\,,-\tfrac{8}{5}\right)\right\}$ y $\dim \text{Im}(T) = 2$

3. Hallemos la dimensión de $N(T)$:

Los vectores $(x,y,z) \in N(T)$ son de la forma: $(x,y,z) = (-t\,,-t\,,t)$
$= t(-1,-1,1)$

Así tenemos: $N(T) = \mathfrak{L}\{(-1,-1,1)\}$ y $\dim N(T) = 1$.

4. Se cumple: $\underbrace{3}_{\dim V} = \underbrace{2}_{\dim \text{Im}(T)} + \underbrace{1}_{\dim N(T)}$

5.2. PRODUCTO DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Dadas las transformaciones lineales $T_1: V \to W$ y $T_2: W \to U$ tales que el dominio de T_2 coincide con el contra-dominio de T_1, se define el producto $T_2 T_1: V \longrightarrow U$ poniendo para cada $v \in V$, $(T_2 T_1)(v) = T_2(T_1(v))$.

Podemos notar que T_2T_1 es una transformación lineal.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T_1"] \arrow[rr, bend left, "T_2T_1"] & W \arrow[r, "T_2"] & U \end{tikzcd}$$

Nota: T_2T_1 es la composición $T_2 \circ T_1$.

PROPIEDADES:

P_1. Dado tres transformaciones lineales

$$V \xrightarrow{T_1} W \xrightarrow{T_2} U \xrightarrow{T_3} Z$$

se cumple la asociatividad:

$$(T_3 T_2)\, T_1 = T_3\,(T_2 T_1)$$

P_2. Dado tres transformaciones lineales definidas del siguiente modo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, shift left, "T_2"] \arrow[r, shift right, "T_1"'] \arrow[dr, dashed, "T_3T_1"', "T_3T_2"] & W \arrow[d, "T_3"] \\ & U \end{tikzcd}$$

se cumple la distributividad a derecha:

$$T_3\,(T_1 + T_2) = T_3\,T_1 + T_3\,T_2$$

P_3. **Distributividad a izquierda:**

Dadas las transformaciones lineales T_1, T_2 y T_3 definidas del siguiente modo.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T_1"] \arrow[dr, dashed, "T_2T_1", "T_3T_1"'] & W \arrow[d, shift right, "T_2"'] \arrow[d, shift left, "T_3"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Se cumple:

$$(T_2 + T_3)\,T_1 = T_2T_1 + T_3T_1$$

P_4. **Homogeneidad:**

$$T_2\,(\alpha\, T_1) = \alpha\,(T_2\,T_1)$$

P_5. **Elementos neutros para la multiplicación:**

Dada la transformación lineal

$T: V \longrightarrow W$, se tiene

$TI_v = T = I_wT$, donde las aplicaciones identidad

$$I_v: V \longrightarrow V\ ;\ I_W: W \longrightarrow W$$

son elementos neutros para la multiplicación por derecha e izquierda, respectivamente.

TEOREMA 8 Si A es una matriz $m \times n$ con elementos a_{ij} en el cuerpo $I\!K$, entonces

rango de filas (A) = rango de columnas (A).

Demostración:
queda como ejercicio.

5.2.1 LA INVERSA DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Definición 4.

Sean $T: V \longrightarrow W$, y $F: W \longrightarrow V$ transformaciones lineales. Se dice que F es una inversa a izquierda de T, si $FT = I_V$, es decir, cuando $F(T(v)) = v$, para todo $v \in V$.

Ejemplo.- Sea $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^3$ definida por $T(x,y) = (2x - y, 3x + 2y, 2x + 4y)$.

La transformación lineal $F: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^2$, dada por:

$$F(x, y, z) = \left(\tfrac{2}{7}x + \tfrac{1}{7}y, -\tfrac{3}{7}x + \tfrac{2}{7}y\right)$$

cumple la relación:

$$\begin{aligned} F(T(x,y) &= \left(\tfrac{2}{7}(2x-y) + \tfrac{1}{7}(3x+2y)\right., \\ &\qquad \left. -\tfrac{3}{7}(2x-y) + \tfrac{2}{7}(3x+2y)\right) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

para cualquier $(x,y) \in I\!R^2$. Entonces F es una inversa a izquierda para T.

Ejemplo.- Una transformación lineal puede admitir infinitas inversas a izquierda. Por ejemplo consideremos $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^3$ definida por $T(x,y) = (2x, 3y, 0)$, la transformación lineal $F: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^2$ definida por $F(x,y,z) = \left(\tfrac{1}{2}x + az, \tfrac{1}{3}y + bz\right)$ es una inversa a izquierda de T para todo a, b en $I\!R$.

TEOREMA 9 Sea V un W espacios vectoriales de dimensión finita. La transformación lineal $T: V \longrightarrow W$ tiene inversa a izquierda si, y sólo si, es inyectiva.

Demostración:

($\Rightarrow$) Por demostrar: T tiene inversa a izquierda implica T es inyectiva.

- Sea $F: W \longrightarrow V$ la inversa a izquierda de T, entonces $T(\mu) = T(v)$ implica $\mu = F(T(\mu)) = F(T(v)) = v$, luego T es inyectiva.

($\Leftarrow$) T inyectiva implica $F(T(v) = v$,

- Elegir una base $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$.
- Por un teorema: Si T es inyectiva y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es $\ell.i.$, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\} \subset W$ es $\ell.i.$
- Entonces podemos encontrar vectores $w_1, \ldots w_k \in W$ tales que: $\{T(v_1), \ldots, T(v_n), w_1, \ldots, w_k\} \subset W$ sea una base [Por otro teorema: Todo conjunto $\ell.i.$ en W está contenido en una base].
- Por un teorema, para poder definir la transformación lineal: $F: W \longrightarrow V$ bastará hacer la siguiente correspondencia.

$$\begin{aligned} F(T(v_1)) &= v_1 \\ &\vdots \\ F(T(v_n)) &= v_n \\ F(w_1) &= 0 \\ &\vdots \\ F(w_k) &= 0 \end{aligned}$$

- Dado cualquier $v \in V$, se tiene:
$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$
y $\quad T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n)$
- A su vez:
$$\begin{aligned} F(T(v)) &= F(\alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n)) \\ &= \alpha_1 F(T(v_1)) + \ldots \alpha_n F(T(v_n)) \\ &= \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = v \end{aligned}$$

Esto prueba que F es una inversa a izquierda de T. □

Definición 5.

Una transformación lineal $T: V \longrightarrow W$ se llama inversible cuando existe otra transformación $F: W \longrightarrow V$ tal que $FT = I_V$ y $TF = I_W$. Esto es, si F es inversa a izquierda y a derecha de T, a la vez.

En este caso, se dice que F es la inversa de T y se escribe $F = T^{-1}$.

- Para que una $t.\ell.$ sea inversible, es necesario y suficiente, que sea inyectiva y sobreyectiva. Se dice, entonces, que T es una biyección lineal entre V y W o, más apropiadamente, que $T: V \longrightarrow W$ es un isomorfismo y que los espacios V y W son isomorfos.
- Si $\quad T: V \longrightarrow W$ y
$\quad F: W \longrightarrow U$

son isomorfismos, entonces:

$T^{-1}: W \longrightarrow V$ y $FT: V \longrightarrow U$ también son isomorfismos.

Se tiene $(FT)^{-1} = T^{-1} F^{-1}$
y para $\alpha \neq 0$, $(\alpha T)^{-1} = \frac{1}{\alpha} T^{-1}$

- Un isomorfismo $T: V \longrightarrow W$ entre espacios vectoriales transforma una base de V en una base de W. Recíprocamente, si una $t.\ell.$ $T: V \longrightarrow W$ lleva alguna base de V en una base de W, entonces T es un isomorfismo.
- V y W son isomorfos si, y sólo si $\dim V = \dim W$.

TEOREMA 10

Si una transformación lineal $T: V \longrightarrow W$ tiene inversa a izquierda $F: W \longrightarrow V$ y una inversa a derecha $G: W \longrightarrow V$ entonces $F = G$ y T es un isomorfismo, con $T^{-1} = F = G$.

Demostración:

Se tiene $FT = I_V$ y $TG = I_W$.

Por tanto:

$$F = FI_W = F(TG) = (FT)G = I_V\, G = G.$$

COROLARIO

Sea $\dim V = \dim W$. Si las transformaciones lineales $T: V \longrightarrow W$, $F: W \longrightarrow V$ son tales que $FT = I_V$ entonces $TF = I_W$ y $F = T^{-1}$.

Demostración:

Se tiene:

$FT = I_V \Rightarrow T$ es inyectiva

$\Rightarrow T$ sobreyectiva ... (consecuencia del Teorema 6, cuando $\dim V = \dim W$))

$\Rightarrow TG = I_W$ para alguna $G \Rightarrow G = F$ (Teo. 10)

$\Rightarrow TF = I_W$.

TEOREMA 11 Sea $T: V \longrightarrow W$ un isomorfismo.

Se cumplen:

1. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ genera V, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ genera W.
2. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es $\ell.i.$, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es $\ell.i.$ en W.
3. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es una base en W.
4. Si V es de dimensión finita, entonces W es de dimensión finita y $\dim V = \dim W$.

Demostración:

Si T es un isomorfismo, entonces T es suryectiva e inyectiva.

1. Debo probar que cualquier vector $w \in W$ es combinación lineal de los vectores imágenes $T(v_1), \ldots\ldots, T(v_n)$.

   Como T es sobreyectiva, entonces $\overbrace{\text{para cualquier } w \in W}^{\forall w \in W}$, existe un $v \in V$, tal que $w = T(v)$.

   Por hipótesis, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera V, por tanto, existen escalares, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tal que:
   $$v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$$
   Aplicar T: $T(v) = T(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n)$
   $$w = a_1 T(v_1) + \ldots + a_n T(v_n), \quad \forall w \in W.$$
   Esta igualdad nos dice que todo vector $w \in W$ es combinación lineal de los vectores $\{T(v_1), T(v_2), \ldots\ldots, T(v_n)\}$. Es decir $\{T(v_1), \ldots\ldots, T(v_n)\}$ genera W. ❑

2. Debo probar que $a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \ldots\ldots + a_nT(v_n) = 0$ implica $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

   Veamos:

   Supongamos que $a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \ldots\ldots + a_nT(v_n) = 0$
   $\Rightarrow T(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots\ldots + a_nv_n) = 0$, porque T es $\ell.\ell.$

   esta igualdad implica que $(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots\ldots + a_nv_n) \in N(T)$.

   Como T es inyectiva, entonces $N(T) = \{0\}$, lo cual implica $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots\ldots + a_nv_n = 0$.

   Por hipótesis: $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ es $\ell.i.$, entonces $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

   Por tanto: $\{T(v_1), \ldots\ldots, T(v_n)\}$ es $\ell.i.$

3. El conjunto $\{T(v_1), \ldots\ldots, T(v_n)\}$ es una base de W. Esto queda probado por 1 y 2.
4. De 3 se deduce que la base de V tiene n vectores y la base de W también tiene n vectores.

5.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES.

El siguiente teorema nos da la orientación necesaria y suficiente de cómo construir un isomorfismo entre dos espacios vectoriales de igual dimensión.

TEOREMA 12 Sea V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita, con $\dim V = \dim W$. Entonces V es isomorfo a W.

Para demostrar la validez de la tesis de éste teorema, se debe probar el valor de verdad de dos proposiciones:

P_1) Existe una $\ell.\ell.$ $T: V \longrightarrow W$, tal que T es un isomorfismo (T inyectiva y sobre)

P_2) La $\ell.\ell.$ T es única (unicidad de T).

Para demostrar (P_1), bastará llevar a través de la función T, una base de V a una base de W, haciendo la siguiente operación:

1) Supongamos que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es una base de V y $w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n$ una base de W.

2) Sea T una $\ell.\ell.$ definida por $T(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

3) Faltará probar que la función T definida en (2), es **INYECTIVA** y **SURYECTIVA**.
   a) Por demostrar que $N(T) = \{O\}$, para afirmar que T es inyectiva.

4) Supongamos que $v \in V$, entonces existen escalares $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$, tal que
   $v = c_1v_1 + \ldots + c_nv_n$ .... por (1)

   Aplicar T: $T(v) = T(c_1v_1 + \ldots + c_nv_n)$
   $= c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \ldots\ldots + c_nT(v_n)$
   $= c_1w_1 + c_2w_2 + \ldots + c_nw_n$ .... por (2)

5) Como $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es una base de W .... por (1)

   entonces $c_1w_1 + c_2w_2 + \ldots + c_nw_n = O$ implica $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

   Hemos probado que $T(v) = O$ implica $v = 0$; esto es $N(T) = \{0\}$.

   b) Probemos que T es suryectiva.

   Según el teorema, si T es una $\ell.\ell.$ que cumple:

   i) $\dim V = \dim W$

   y *ii*) T es inyectiva, Entonces T es suryectiva.

Prueba de b):

Bastará probar que $\ker(\overline{T}) = \{\overline{0}\}$

Veamos:

Definimos el $Ker(\overline{T}) = \{\overline{u} \in U/Ker(T)$, tal que $\overline{T}(\overline{u}) = 0,\ 0 \in T(U)\}$

Sea $\overline{u} \in Ker(\overline{T})$, entonces $\overline{T}(\overline{u}) = 0,\ 0 \in T(u)$.

Por definición de $\overline{T}$ se cumple. $\overline{T}(u) = T(u),\ u \in U$.

Ahora, tenemos $\overline{T}(\overline{u}) = T(u) = 0$.

Pero $T(u) = 0$ implica que $u \in Ker(T)$.

La relación $\overline{T}(\overline{u}) = T(u) = 0$, con $u \in Ker(T)$ implica que $\overline{u} = 0 + Ker(T)$

Esta última igualdad, implica que $\overline{u} = \overline{0}$, pues $\overline{0} = 0 + Ker(T)$.

Notación: $U/Ker(T) \approx T(U)$ se lee "$U/Ker(T)$ es isomorfo a $T(U)$"

COROLARIO 1 Sean R y S subespacios del espacio vectorial V. Entonces $\frac{R}{R\cap S} \approx \frac{R+S}{S}$

Demostración:

Para aplicar el teorema 13, se debe probar tres afirmaciones.

1. $T : R \longrightarrow \frac{R+S}{S}$ es una transformación lineal.

   $r \longmapsto r+S$, pues $(r+s)+S = r+(s+S) = r+S$

2. $\frac{R+S}{S} = \text{Im}(T)$, esta igualdad nos die que T es suryectiva.

3. $R \cap S = Ker(T)$

4. Después de probada: 1, 2 y 3; afirmamos que T es factorizable y se puede hacer el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "\pi"'] & \frac{R+S}{S} \\ & \frac{R}{R\cap S} \arrow[u, "\overline{T}"'] \end{tikzcd} \qquad r \longmapsto r+S$$

Veamos:

1. Probar que $\overline{T}$ es una transformación lineal, es sencillo.
2. Probar que T es suryectiva:

   Se debe probar que "para todo elemento $r+S$ de $\frac{R+S}{S}$ existe algún elemento r de R tal que $r+S = T(r)$".

Empecemos:

Los elementos de $\frac{R+S}{S}$ son de la forma $(r+s)+S$ para todo $s \in S$.

Pero $(r+s)+S = r+(s+S)$, donde $s+S = S$, entonces $(r+s)+S = r+S$.

Luego $T(r) = r+S = (r+s)+S = T(r+s)$, lo que prueba que T es suryectiva.

3. Probar que $Ker(T) = R \cap S$.

Veamos:

$$Ker(T) = \{r \in R \,/\, T(r) = \overline{0}\ ,\ \overline{0} = r+S = S\}$$

$$= \underbrace{\{r \in R / r \in S\}}_{r \in R\cap S} = R \cap S$$

En consecuencia, por el teorema 13, se cumple que $\overline{T} : \frac{R}{R\cap S} \longrightarrow \frac{R+S}{S}$ es un isomorfismo.

COROLARIO 2 Sean R y S subespacios de V tales que $R \subset S$, entonces $\frac{V/R}{S/R} \approx \frac{V}{S}$.

Demostración:

Observándo la tesis del corolario 2, para poder aplicar el Teorema 13 y poder hacer el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \frac{V}{R} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, dashed, "\pi"'] & \frac{V}{S} \\ & \frac{V/R}{S/R} \arrow[u, "\overline{T}"'] \end{tikzcd}$$

Se deben probar tres afirmaciones:

1. $T(v+R) = v+S$ es una aplicación lineal bien definida.
2. T es suryectiva.
3. $Ker(T) = \frac{S}{R}$.

Si se cumplen 1, 2 y 3 afirmaremos que $\overline{T}$ es un isomorfismo.

Demostración: (queda como ejercicio).

6.4 **EJEMPLO 1**

Sea $T: U \longrightarrow V$, $U = I\!R^3$, $V = I\!R^3$ una transformación lineal, definida por:
$T(x,y,z) = (x + 3y + 4z\ ,\ 3x + 4y + 7z\ ,\ -2x + 2y)$, donde:

a) La imagen de T es el subconjunto $\text{Im}(T) \subset V$, que al definirla es:
$\text{Im}(T) = \{(x,y,z) \in V : 14x - 8y - 5z = 0\}$

b) El núcleo de T es $\text{Ker}(T) = \{(x,y,z) \in U:\ x = -t\ , y = -t\ , z = -t\ \}$
$= \{t(-1,-1,-1)\ , t \in I\!R\}$

c) Al elegir un elemento $P_0(x_0,y_0,z_0)$ de U, un elemento del conjunto cociente $U/\text{Ker}(T)$ es:

$$P = P_0 + t(-1,-1,-1)\ ,\ t \in I\!R$$

que es una recta que pasando por el punto P_0 es paralelo a la recta $\{t(-1,-1,-1)\ , t \in I\!R\}$
En general: $\overline{\mu} = \mu + t(-1,-1,-1)$, $\forall\, \mu \in U$ es un elemento del conjunto cociente $U/\text{Ker}(T)$.

EJEMPLO 2 Hallar números a, b, c, d de modo que el operador $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ dado por $T(x,y) = (ax + by, cx + dy)$, tenga como núcleo la recta $y = 3x$.

Solución:

El núcleo de T es $N(T) = \{(x,y) \in I\!R^2 : (ax + by, cx + dy) = (0,0)\}$

De donde obtenemos el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$ ……… **(1)**

Si el núcleo es $y = 3x \Longleftrightarrow 3x - y = 0$, entonces en (1) debe ser $a = 3$, $b = -1$ y en (2) debe ser $c = 3k$ y $d = -k$, $k \neq 0$, $k \in I\!R$.

EJEMPLO 3 Sea $E = C^0(I\!R)$ es espacio de funciones continuas $f: I\!R \longrightarrow I\!R$. Defina el operador lineal $T: E \longrightarrow E$ poniendo para cada $f \in E$, $T(f) = \varphi$, donde

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt\ ,\ x \in I\!R$$ Determine el núcleo y la imagen del operador T.

Solución:

Se tiene: $T: E \longrightarrow E$

$$f \longmapsto T(f) = \varphi(x) = \int_0^x f(x)\,dt$$

a) El núcleo es $N(T) = \{f \in E : T(f) = 0\}$ …………… (1)

Pero $T(f) = \varphi(x) = \int_0^x f(t)dt = 0$. ¿qué forma tiene f?

De $0 = \varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, al derivar obtenemos: $0 = \varphi'(x) = f(x)$

Entonces, el núcleo de T tiene un solo elemento que es la función NULA $f(x) = 0$, $x \in I\!R$.

b) La imagen del operador T es el subconjunto $\text{Im}(T) \subset I\!R^2$ formado por todos los vectores

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt,\ \text{donde } f \in E.$$

EJEMPLO 4 Determine una base para la imagen de la siguiente aplicación lineal.

$T: M(2 \times 2) \longrightarrow M(2,2)$, definido por $T(X) = AX$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución: $\text{Im}(T) = \{AX / X \in M(2 \times 2)\}$

Sea, $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \mu \end{bmatrix}$, entonces $AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+\mu \\ z & \mu \end{bmatrix}$

Descomponer $AX = x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Una base de $\text{Im}(T)$ es el conjunto: $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

EJEMPLO 5 Sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre $I\!R$ y $T: V \longrightarrow V$ el operador tercera derivada, esto es $T[f(t)] = \frac{d^3 f}{dt}$.
[A veces se emplea la notación $T = D^3$ donde D es la aplicación derivada].
Hallar el núcleo de T y la imagen de T.

Solución:

a) El núcleo de T es $N(T) = \{f \in V : T[f(t)] = \mathbf{0}\}$, $\mathbf{0} \in V$.

Si $T[f(t)] = \frac{d^3 f}{dt}$, entonces $\frac{d^3 f}{dt} = 0$

Al integrar tres veces $\begin{cases} \frac{d^2 f}{dt} = a \\ \frac{df}{dt} = at + b \\ f(t) = \frac{a}{2}t^2 + bt + c \end{cases}$

Entonces el núcleo de T es $N(T) = \{\text{polinomios de grado} \leq 2\}$ porque $T(At^2 + Bt + C) = 0$, pero $T(t^n) \neq 0$ para $n > 3$.

b) La imagen de T es, $\text{Im}(T) = V$, porque todo polinomio de V es la tercera derivada de algún polinomio.

EJEMPLO 6 Sea $\beta = \{(2,1), (3,1)\}$ una base ordenada de $I\!R^2$, hallar la base dual $\{\phi_1, \phi_2\}$.

Solución:

- Sean $v_1 = (2,1)$, $v_2 = (3,1)$ los elementos de β.
- Sean $\phi_1 = ax + by$ y $\phi_1(x,y) = cx + dy$ los elementos de la base dual que buscamos. Debemos hallar: a, b, c, d.
- Las funcionales lineales ϕ_1, ϕ_2 del espacio dual V^*, donde $V = I\!R^2$, están definidas mediante. $\phi_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Así, obtendremos: $\begin{cases} \phi_1(v_1) = 1 & \phi_2(v_1) = 0 \\ \phi_1(v_2) = 0 & \phi_2(v_2) = 1 \end{cases}$

Al hacer las sustituciones:

$$\begin{cases} \phi_1(v_1) = \phi_1(2,1) = \boxed{2a + b = 1} \\ \phi_1(v_2) = \phi_1(3,1) = \boxed{3a + b = 0} \end{cases} \Rightarrow a = -1 \ , \ b = 3$$

$$\begin{cases} \phi_2(v_1) = \phi_2(2,1) = \boxed{2c + d = 0} \\ \phi_2(v_2) = \phi_2(3,1) = \boxed{3c + d = 1} \end{cases} \Rightarrow c = 1 \ , \ d = -2$$

Por tanto, los elementos de la base dual, son las funciones:

$$\phi_1(x,y) = -x + 3y \ , \quad \phi_2(x,y) = x - 2y.$$

EJEMPLO 7 Sea $V = \{a + bt : a, b \in I\!R\}$ el e.v. de los polinomios sobre $I\!R$ de grado ≤ 1.

Definimos: $\phi_1 : V \longrightarrow I\!R$ y $\phi_2 : V \longrightarrow I\!R$ según $\phi_1(f(t)) = \int_0^1 f(t)\,dt$ y

$\phi_2(f(t)) = \int_0^2 f(t)\,dt$. Encontrar la base $\{v_1, v_2\}$ de V que es dual a $\{\phi_1, \phi_2\}$.

Solución:

Elegir $v_1 = a + bt$ y $v_2 = c + dt$. Por definición de base dual, tenemos: $\phi_1(v_1) = 1$, $\phi_1(v_2) = 0$, $\phi_2(v_1) = 0$, $\phi_2(v_2) = 1$. Hacer las sustituciones:

$$\left.\begin{aligned} \phi_1(v_1) &= \int_0^1 (a + bt)\,dt = at + \tfrac{b}{2}t^2 \Big|_0^1 = 1 \ \Rightarrow \ a + \tfrac{b}{2} = 1 \\ \phi_2(v_1) &= \int_0^2 (a + bt)\,dt = at + \tfrac{b}{2}t^2 \Big|_0^2 = 0 \ \Rightarrow \ 2a + 2b = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a &= 2 \\ b &= -2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \phi_1(v_2) &= \int_0^1 (c + dt)\,dt = ct + \tfrac{dt^2}{2} \Big|_0^1 = 0 \ \Rightarrow \ c + \tfrac{d}{2} = 0 \\ \phi_2(v_2) &= \int_0^2 (c + dt)\,dt = ct + \tfrac{dt^2}{2} \Big|_0^2 = 1 \ \Rightarrow \ 2c + 2d = 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} c &= -\tfrac{1}{2} \\ d &= 1 \end{aligned}$$

Conclusión:

$\left\{2 - 2t, -\frac{1}{2} + t\right\}$ es una base de V.

7. REPRESENTACIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES POR MATRICES

Sea V un e.v. sobre $I\!K$ de dimensión n y base ordenada $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$

Sea W un e.v. sobre $I\!K$ de dimensión m y base ordenada $\beta' = \{w_1, \ldots, w_m\}$

Cualquier $\mathcal{L}.\mathcal{L}.$ $T : V \longrightarrow W$ está asociada una matriz A de orden $m \times n$.

A la matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ la llamaremos matriz de T respecto al par de bases ordenadas β y β'.

Detallaremos este concepto en el siguiente teorema:

7.1 $\boxed{\textbf{TEOREMA 15}}$ Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo $I\!K$ y W un espacio vectorial de dimensión m sobre $I\!K$.

Sean $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base ordenada de V y $\beta' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ una base ordenada de W. Para cada transformación lineal $T: V \longrightarrow W$ existe una matriz A de $m \times n$, tal que $T(X) = AX$, $\forall X \in V$ y además $[T(v)]_{\beta'} = A[v]_\beta$, $\forall v \in V$.

$[T(v)]_{\beta'}$: son las coordenadas del vector $T(v)$ en la base ordenada β'.

$[v]_\beta$: son las coordenadas del vector v en la base ordenada β.

Además a cada transformación lineal T corresponde una matriz A. Existe una biyección entre los conjuntos:

$$I\!K^{m\times n} = \{(a_{ij}) / a_{ij} \in I\!K\} \text{ y } L(V, W) = \{T : V \longrightarrow V / T \text{ es una } t.\ell.\}$$

Demostración:

1. Al elegir un vector v_j de β, el vector $T(v_j)$ es combinación lineal de los vectores $w_1, w_2, \dots, w_m$; esto es:

$$T(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \dots\dots + a_{mj} w_m$$

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad j = 1, 2, \dots\dots, n$$

o explícitamente:
$$\begin{cases} T(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots\dots + a_{m1} w_m \\ T(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots\dots + a_{m2} w_m \\ \vdots \\ T(v_n) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots\dots + a_{mn} w_m \end{cases}$$

Los escalares a_{ij}, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ pertenecientes a $I\!K$ son los elementos de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

La matriz A, que está asociada a T, se llama la matriz de T respecto a las bases ordenadas β y β'.

2. Ahora debo probar que $[T(v)]_{\beta'} = A[v]_{\beta'}$ para todo $v \in V$.

$$\boxed{\begin{array}{c} V \xrightarrow[A]{T} W \\ \beta \longrightarrow \beta' \\ V \longrightarrow T(v) \\ [T(v)]_{\beta'} = A[v]_\beta \end{array}}$$

Veamos:

3. $$\forall v \in V\ ,\ \exists \alpha_j \in I\!K / v = \sum_{j}^{n} \alpha_j v_j$$

$$\text{y } \forall w = T(v) \in W\ ,\ \exists \alpha'_i \in I\!K / w = \sum_{i=1}^{m} \alpha'_i w_i \quad \dots\dots\dots\dots\dots \text{(2*)}$$

4. Por tanto: $w = T(v)$

$$= T\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(v_j)\ ,\ \text{pero } T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\ ,\ j = 1, 2, \dots, n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_j a_{ij} w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j\right)}_{\alpha'_i} w_i \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{por (2*)}$$

5. Porque la combinación lineal es única, entonces:

$$\alpha'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j \qquad 1 \le i \le m$$

es la i-ésima componente del vector en la base β'

Es decir:

$$\begin{cases} \alpha'_1 = a_{11} \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 + \dots\dots + a_{1n} \alpha_n \\ \alpha'_2 = a_{21} \alpha_1 + a_{22} \alpha_2 + \dots\dots + a_{2n} \alpha_n \\ \vdots \\ \alpha'_m = a_{m1} \alpha_1 + a_{m2} \alpha_2 + \dots\dots + a_{mn} \alpha_n \end{cases}$$

y como $w_j = U(v_j)$ entonces $U(v_j) = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} v_i$

Así $P = [U]_\beta$ por definición.

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \;\; P_1 \quad\; P_2 \qquad\quad\;\; P_n \\ \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \cdots\cdots & P_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} \cdots\cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{o} \quad P = [\underbrace{P_1, P_2, \ldots, P_n}_{\text{son las columnas de } P}]$$

P es la matriz de cambio de base desde una base β hasta otra β' en un espacio vectorial V. $(\beta' \xrightarrow{P} \beta)$.

d) Las columnas P_j de P son las coordenadas del vector w_j en la base β, que se denota por $P_j = [w_j]_\beta$

se lee "las coordenadas de w_j en la base β"

e) Conocido la matriz P, las coordenadas de cualquier vector $v \in V$ en la base β, se halla haciendo el siguiente producto:

$$[v]_\beta = P\underbrace{[v]_{\beta'}}_{\text{coordenadas de } v \text{ en la base } \beta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \beta' \xrightarrow{P} \beta \\ v \longmapsto v \\ [v]_\beta = P[v]_{\beta'} \end{array}}$$

P es invertible.

f) Las coordenadas del vector $T(v)$ en la base β, por definición, es:

$$[T(v)]_\beta = \underbrace{[T]_\beta}_{A}[v]_\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

g) Aplicando (1) al vector $T(v)$, tenemos:

$$[T(v)]_\beta = P[T(v)]_{\beta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3)$$

h) (2) en (3):

$$\underbrace{[T]_\beta}_{A}[v]_\beta = P[T(v)]_{\beta'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (4)$$

i) En (4), multiplicar por izquierda la matriz P^{-1}

$$P^{-1}\underbrace{[T]_\beta}_{A}[v]_\beta = [T(v)]_{\beta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (5)$$

j) (1) en (5): $\quad P^{-1}\underbrace{[T]_\beta}_{A} P[v]_{\beta'} = \underbrace{[T(v)]_{\beta'}}_{B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (6)$

La igualdad obtenida en (6) nos indica que $B = P^{-1}AP$ es la matriz de T en la base β', y por lo tanto, la igualdad: $[T(v)]_{\beta'} = B[v]_{\beta'}$ nos permite hallar las coordenadas del vector $T(v)$ en la base β', multiplicando la matriz B por la matriz columna $[v]_{\beta'}$.

$[v]_{\beta'}$ son las coordenadas de v en la base β'

En el diagrama, se observa que $B = P^{-1}AP$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "T"] & V \\ \beta \arrow[r, "A"] & \beta \\ v_j & T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \arrow[d, "P^{-1}"] \\ \beta' \arrow[u, "P"] \arrow[r, "B"] & \beta' \end{tikzcd}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i = w_j \qquad\qquad T(w_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} w_i$$

$$\beta \underset{P}{\overset{U}{\rightleftarrows}} \beta'$$

$$v_j \longmapsto w_j = U(v_j)$$

donde: $w_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} v_i$

$A = [T]_\beta$

$B = [T]_{\beta'}$

P : matriz del operador U en la base β.

7.8 TEOREMA 18

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$, y sean

$$\beta = \{v_1, \ldots, v_n\} \quad \text{y} \quad \beta' = \{w_1, \ldots, w_n\}$$

dos bases ordenadas de V. Supóngase que $T : V \longrightarrow V$ es un operador lineal sobre V. Si $P = [P_1, P_2, \ldots, P_n]$ es la matriz $n \times n$ de columnas $P_j = [w_j]_\beta$, entonces:

$$\underbrace{[T]_{\beta'}}_{B} = P^{-1}\underbrace{[T]_\beta}_{A} P$$

De otra manera, si U es el operador lineal sobre V, definido por $U(v_j) = w_j$, $j = 1, \dots, n$, entonces $[T]_{\beta'} = [U]_{\beta}^{-1} [T]_{\beta} [U]_{\beta}$.

Demostración (está hecho, líneas arriba).

Ejemplo 3 Sea T el operador lineal en $I\!R^2$ definido por:

$T(x_1, x_2) = (x_1 + 7x_2, 3x_1 - 4x_2)$ y sean

$$\beta = \{ \underbrace{(2,2)}_{v_1}, \underbrace{(4,-1)}_{v_2} \} \quad \text{y} \quad \beta' = \{ \underbrace{(1,3)}_{w_1}, \underbrace{(-1,-1)}_{w_2} \}$$

a) Hallar la **matriz de T respecto de las bases ordenadas β y β'.**

b) Hallar la matriz de T en la base β.

c) Hallar la matriz del operador U que aplica β sobre β'.

d) Hallar la matriz de T en la base β'.

Solución:

a) **Se pide hallar** la matriz **A_T respecto de las bases β y β'.**

Para ello, resolver: $T(v_j) = \sum_{i=1}^{2} a_{ij} w_i \quad , \quad j = 1, 2$

$$\begin{cases} T(2,2) = (16,-2) = a_{11}(1,3) + a_{21}(-1,-1) \\ T(4,-1) = (-3,16) = a_{12}(1,3) + a_{22}(-1,-1) \end{cases}$$

$$\Big\downarrow$$

Resolver:

$$\begin{cases} (16,-2) = -9(1,3) - 25(-1,-1) \\ (-3,16) = \frac{19}{2}(1,3) + \frac{25}{2}(-1,-1) \end{cases}$$

La matriz de T respecto de las bases ordenadas β y β' es: $A_T = \begin{bmatrix} -9 & 19/2 \\ -25 & 25/2 \end{bmatrix}$

b) Se pide hallar: $A = [T]_{\beta}$

Resolver: $T(v_j) = \sum_{i=1}^{2} a_{ij} v_i \quad , \quad j = 1, 2$

$$\begin{cases} T(2,2) = (16,-2) = a_{11}(2,2) + a_{21}(4,-1) \\ T(4,-1) = (-3,16) = a_{12}(2,2) + a_{22}(4,-1) \end{cases}$$

$$\Big\downarrow$$

Resolver:

$$\begin{cases} (16,-2) = \frac{4}{5}(2,2) + \frac{18}{5}(4,-1) \\ (-3,16) = \frac{61}{10}(2,2) - \frac{19}{5}(4,-1) \end{cases} \Rightarrow A = [T]_{\beta} = \begin{bmatrix} 4/5 & 61/10 \\ 18/5 & -19/5 \end{bmatrix}$$

c) **Se pide hallar la matriz P. Para ello, resolver:**

$$w_j = \sum_{i=1}^{2} P_{ij} v_i \quad , \quad j = 1, 2.$$

$$\begin{cases} (1,3) = p_{11}(2,2) + p_{21}(4,-1) \\ (-1,-1) = p_{12}(2,2) + p_{22}(4,-1) \end{cases}$$

$$\Big\downarrow$$

Resolver:

$$\begin{cases} (1,3) = \frac{13}{10}(2,2) - \frac{2}{5}(4,-1) \\ (-1,-1) = -\frac{1}{2}(2,2) + 0(4,-1) \end{cases} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 13/10 & -1/2 \\ -2/5 & 0 \end{bmatrix}$$

d) **Se pide hallar** $B = [T]_{\beta'}$ **. Para ello, resolver:**

$$T(w_j) = \sum_{i=1}^{2} b_{ij} w_i \quad , \quad j = 1, 2.$$

$$\begin{cases} T(1,3) = (22,-9) = b_{11}(1,3) + b_{21}(-1,-1) \\ T(-1,-1) = (-8,1) = b_{12}(1,3) + b_{22}(-1,-1) \end{cases}$$

$$\Big\downarrow$$

Resolver:

$$\begin{cases} (22,-9) = -\frac{31}{2}(1,3) - \frac{75}{2}(-1,-1) \\ (-8,1) = \frac{9}{2}(1,3) + \frac{25}{2}(-1,-1) \end{cases} \Rightarrow B = [T]_{\beta'} = \begin{bmatrix} -31/2 & 9/2 \\ -75/2 & 25/2 \end{bmatrix}$$

También, se puede hallar mediante el siguiente producto

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & -5/2\\ -2 & -13/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4/5 & 61/10\\ 18/5 & -19/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13/10 & -1/2\\ -2/5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-31/2 & 9/2\\ -75/2 & 25/2\end{bmatrix}$$

7.9 TEOREMA 19: (MATRIZ DE CAMBIO DE BASE – GENERALIZACIÓN)

Sea $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal de V en W.
$\dim V = n$, $\dim W = m$.

Sean $\beta = \{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ y $\beta' = \{v'_1, v'_2, \ldots\ldots, v'_n\}$ dos bases de V

Sean $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, \ldots\ldots, w_m\}$ y $\mathcal{C}' = \{w'_1, w'_2, \ldots\ldots, w'_m\}$ dos bases de W

Sea $P=(p_{ij}) \in K^{n\times n}$ la matriz de pasaje de β' a β, $\quad v'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i$

Sea $Q = q_{kj} \in K^{m\times m}$ la matriz de pasaje de $\mathcal{C}'$ a $\mathcal{C}$, $\quad w'_j = \sum_{k=1}^{m} q_{kj} w_k$

Sea $A_T = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ es la matriz de pasaje de β a $\mathcal{C}$, $\quad T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$

$\Rightarrow B_T = Q^{-1}A_T P$ es la matriz de pasaje de β' a $\mathcal{C}'$, $\quad T(v'_j) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} w'_k$

$$\begin{tikzcd}
V_n \arrow[r, bend left, "T"] & W_n \\
\beta & \mathcal{C} \\
v_j \arrow[r, Rightarrow, "A_T"] \arrow[dd, shift left, "P^{-1}"] & T(v_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i \arrow[dd, shift left, "Q^{-1}"] \\
\beta' & \mathcal{C}' \\
\sum_{i=1}^{n} p_{ij}v_i = v'_j \arrow[uu, Rightarrow, shift left, "P"] \arrow[r, Rightarrow, "B_T", "B_T = Q^{-1}A_T P"'] \arrow[uur, dashed, "A_T P", "QB_T"'] & T(v'_j)=\sum_{i=1}^{m} b_{ij}w'_i \arrow[uu, Rightarrow, shift left, "Q"]
\end{tikzcd}$$

$$Q\,B_T = A_T P$$

$$\begin{tikzcd}
U : \beta \arrow[r] & \beta' \arrow[l, bend right, "P"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
H : \mathcal{C} \arrow[r] & \mathcal{C}' \arrow[l, bend right, "Q"']
\end{tikzcd}$$

$$v_j \longmapsto U(v_j) = v'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i \qquad\qquad w_j \longmapsto H(w_j) = w'_j = \sum_{k=1}^{m} q_{kj} w_k$$

Los operadores U y H son isomorfismos y por tanto tienen inversa.

P : Se llama matriz de cambio de base β' en β, porque las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base β' es:

$$[v]_{\beta'} = P[v]_{\beta}$$

Q : Se llama matriz de cambio de base de $\mathcal{C}'$ en $\mathcal{C}$, porque las coordenadas de un vector $w \in W$ en la base $\mathcal{C}'$ es:

$$[w]_{\mathcal{C}'} = Q[w]_{\mathcal{C}}.$$

Demostración:

Bastará demostrar: $QB_T = A_T P$

1. La imagen, por T, de cada v'_j es $T(v'_j)$ y cada $T(v'_j)$ es combinación lineal de los w'_k esto es,

$$T(v'_j) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} w'_k \ , \quad j = 1, \ldots\ldots, n$$

Ahora, trabajemos con el primer miembro y con el segundo miembro separadamente.

2. Cuando se trabaja con el primer miembro: $T(v'_j)$ hacemos lo siguiente:

Cada v'_j es combinación lineal de $\{v_1, \ldots v_n\}$, esto es:

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i$$

<u>Resolver 1</u> <u>Resolver 2</u> <u>Resolver 3</u>

$$\begin{cases} P_{11}+P_{21}+0=0 \\ P_{11} \quad +P_{31}=1 \\ \quad P_{21}+P_{31}=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{12}+P_{22}+0 \;=1 \\ P_{12} \quad +P_{32}=2 \\ \quad P_{22}+P_{32}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{13}+P_{23}+0 \;=1 \\ P_{13} \quad +P_{33}=1 \\ \quad P_{23}+P_{33}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{11}=-1/2 \\ P_{21}=1/2 \\ P_{31}=3/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{12}=1 \\ P_{22}=0 \\ P_{32}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{13}=1/2 \\ P_{23}=1/2 \\ P_{33}=1/2 \end{cases}$$

Por tanto, la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2 es: $P=\begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$

ii) Si $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ son las coordenadas del vector $X \in I\!R^3$ en la base B_1, entonces el vector X es:

$$X=1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Deseamos hallar las coordenadas de X en la base B_2. Para ello debemos expresar X como combinación lineal de los vectores de la base B_2.

$$X=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \quad = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)} \\ \alpha_1 + \quad +\alpha_3 = 2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)} \\ \quad \alpha_2+\alpha_3 = 2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)} \end{cases}$$

II – III: $\alpha_1-\alpha_2=0$ .... (IV)

IV con I: $\begin{cases} \alpha_1-\alpha_2 \;=0 \\ \alpha_1+\alpha_2 \;=0 \end{cases}$

$\alpha_1=0$

$\alpha_2=0$

De II $\alpha_3=2$

Luego las coordenadas de X en la base B_2 son $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ que se denota por $[X]_{B_2}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

. También podemos hallar con la fórmula siguiente:

$[X]_{B_2}=P[X]_{B_1}$ donde: P es una matriz de tránsito de B_1 a B_2. Es decir $B_1 \xrightarrow{P} B_2$

$$=\begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ donde } [X]_{B_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ son las coordenadas de } X=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en la base } B_1$$

Ejemplo 11 Sean las bases $B=\{u_1, u_2, u_3\}$ y $B'=\{v_1, v_2, v_3\}$ de $I\!R^3$ donde

$$u_1=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad u_2=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_1=\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2=\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_3=\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre la matriz de transacción de B a B'.

b) Calcule las coordenadas de $W=\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ en la base B.

c) Calculando $[W]_{B'}$ se lee: "*las coordenadas de W en la base B'*"

Solución:

a) La matriz de transacción de B a B' se halla expresando cada vector u_i de B como combinación lineal de los vectores de B'.

Así:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix} = P_{11}\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix} + P_{21}\begin{pmatrix}-2\\-6\\4\end{pmatrix} + P_{31}\begin{pmatrix}-2\\-3\\7\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix} = P_{12}\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix} + P_{22}\begin{pmatrix}-2\\-6\\4\end{pmatrix} + P_{32}\begin{pmatrix}-2\\-3\\7\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix} = P_{13}\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix} + P_{23}\begin{pmatrix}-2\\-6\\4\end{pmatrix} + P_{33}\begin{pmatrix}-2\\-3\\7\end{pmatrix} \end{cases}$$

Al resolver cada sistema de ecuaciones obtendremos:

$$P = \begin{bmatrix} 3/4 & 3/4 & 1/12 \\ -3/4 & -17/12 & -17/12 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

b) Las coordenadas de $W = \begin{pmatrix}-5\\8\\-5\end{pmatrix}$ en la base B, se halla expresando el vector W como combinación lineal de los vectores de B.

Así:
$$\begin{pmatrix}-5\\8\\-5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5 = -3\alpha - 3\beta + \gamma \\ 8 = 2\beta + 6\gamma \\ -5 = -3\alpha - \beta - \gamma \end{cases}$$

Al resolver, obtendremos: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$.

En consecuencia la matriz de coordenadas de W en la base B que se denota por $[W]_B$ es:

$$[W]_B = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

c) $[W]_{B'} = P[W]_B \Rightarrow \begin{bmatrix} 3/4 & 3/4 & 1/12 \\ -3/4 & -17/12 & -17/12 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19/12\\-43/12\\4/3\end{bmatrix}$

Ejemplo 12. Considere las bases $B = \{u_1, u_2\}$ y $B' = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, donde:

$$u_1 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

a) Encuentre la matriz de transición de B a B'.

b) Calcule la matriz de coordenadas $[W]_B$ donde $W = \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$

c) Hallar las coordenadas de W en la base B'

d) Encuentre la matriz de transición de B' a B.

e) Calcular $[W]_{B'}$ aplicando el Teorema.

Solución:

Haciendo un diagrama de flechas tenemos:

$$B \underset{P^{-1}}{\overset{P}{\rightleftarrows}} B'$$

a) Se pide hallar P:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = P_{11}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + P_{21}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} = P_{12}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + P_{22}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 = P_{11} - P_{21} \\ 2 = 3p_{11} - p_{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{11} = 0 \\ p_{21} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = P_{12} - P_{22} \\ -1 = 3p_{12} - p_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{12} = -5/2 \\ p_{22} = -13/2 \end{cases}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -5/2 \\ -2 & -13/2 \end{bmatrix}$$

b) Se pide hallar las coordenadas de W en la base B: $\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = 2\alpha + 4\beta \\ -5 = 2\alpha - \beta \end{cases} \text{ donde } \begin{cases} \alpha = -17/10 \\ \beta = 8/5 \end{cases}$$

Por tanto: $[W]_B = \begin{pmatrix} -17/10 \\ 8/5 \end{pmatrix}$ son las coordenadas de W en la base B.

c) Las coordenadas de W en la base B', denotado por $[W]_{B'}$ se halla resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = a - b \\ -5 = 3a - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = -7 \end{cases}$$

Por tanto: $[W]_{B'} = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix}$

d) Se pide hallar la matriz P^{-1} donde $B' \xrightarrow{P^{-1}} B$

Veamos:

Expresar cada vector de B' como combinación lineal de los vectores de B.

Así:
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = q_{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + q_{21}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = q_{12}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + q_{22}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

De (1) $\begin{cases} 1 = 2q_{11} + 4q_{21} \\ 3 = 2q_{11} - q_{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_{11} = 13/10 \\ q_{21} = -2/5 \end{cases}$

De (2) $\begin{cases} -1 = q_{12} + 4q_{22} \\ -1 = 2q_{12} - q_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_{12} = -5/9 \\ q_{22} = -1/9 \end{cases}$

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 13/10 & -5/9 \\ -2/5 & -1/9 \end{bmatrix}$$

e) $[W]_{B'} = P[W]_B$

$$[W]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 & -5/2 \\ -2 & -13/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -17/10 \\ 8/5 \end{bmatrix}$$

$$[W]_{B'} = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

PROBLEMAS. Grupo 01

1. Sea V el espacio vectorial de las funciones continuas con base $S = \{e^t, e^{-t}\}$. Hallar la representación del operador lineal $L : V \longrightarrow V$ definido por $L(f) = f'$ respecto a S.

2. Sea V el espacio vectorial de las funciones continuas con base ordenada
$$S = \{sen\, t\,,\, cos\, t\}$$
Hallar la representación del operador lineal $L : V \longrightarrow V$ definido por $(f) = f'$ respecto a S.

3. Sea V el espacio vectorial de las funciones continuas con base ordenada $S = \{sen\, t\,,\, cos\, t\}$ y considerar $R = \{sen\, t - cos\, t\,,\, sen\, t + cos\, t\}$, otra base ordenada para V. Hallar la representación del operador lineal $T : V \longrightarrow V$ definido por $T(f) = f'$ respecto a:

   (a) S (b) R (c) S y R (d) R y S

4. Sea V el espacio vectorial con base $S = \{1\,,\, t\,,\, e^t\,,\, te^t\}$ y sea $L : V \longrightarrow V$ un operador lineal definido por $L(f) = f' = \frac{df}{dt}$. Hallar la representación de L respecto a S

5. Sea $L : P_1 \longrightarrow P_2$ definida por $L(p(t)) = tp(t) + p(0)$. Considerar las bases coordenadas $S = \{t, 1\}$ y $S' = \{t+1\,,\, t-1\}$ para P_1 y $T = \{t^2\,,\, t\,,\, 1\}$ y

   $T' = \{t^2 + 1\,,\, t-1\,,\, t+1\}$ para P_2. Hallar la representación de L respecto a:

   a) S y T

   b) S' y T'

   c) hallar $L(-3t + 3)$ a partir de la definición de L y de las matrices obtenidas en (a) y (b).

Veamos:

$$
\begin{aligned}
Lv(\alpha f+g) &= (\alpha f+g)(v) && \text{............ definición de } L_v \\
&= (\alpha f)(v)+g(v) && \text{............ suma de funciones lineales} \\
&= \alpha f(v)+g(v) \\
&= \alpha Lv(f)+Lv(g)
\end{aligned}
$$

TEOREMA 22 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$. Para cada vector $v \in V$ se define

$$L_v(f)=f(v) \quad , \text{ para todo } f \in V^*$$

La aplicación $v \longmapsto L_v$ es un isomorfismo de V sobre V^{**}

Demostración:

Debemos probar:
a) La aplicación $v \longmapsto L_v$ es lineal
b) $v \longmapsto L_v$ es no singular
c) $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$

Veamos:

a) Elegir $v=\alpha\mu+w$, con $\alpha \in I\!K$, $\mu \in V$, $w \in V$

Entonces

$$
\begin{aligned}
L_v(f) &= f(v) \\
&= f(\alpha\mu+w) \\
&= \alpha f(\mu)+f(w) \\
&= \alpha L\mu(f)+Lw(f) \\
L_v &= \alpha L\mu + Lw
\end{aligned}
$$

b) $L_v=0$ si, y solo si $v=0$. Este resultado implica que $v \longmapsto L_v$ es una transformación lineal no singular de V en V^{**}

c) Por el Teorema 20, se cumple: $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$

Por el Teorema 12, si $\dim V^{**} = \dim V$ y $v \longmapsto L_v$ es una transformación lineal se cumple que esta transformación es inversible.

Por tanto $v \longmapsto L_v$ es un isomorfismo de V sobre V^* ■

OBSERVACIONES:

1. La aplicación $v \longrightarrow L_v$ se conoce como la aplicación natural de V en V^{**}. (v y L_v se identifican) (V y V^* están en mutua dualidad).
2. Si V no es de dimensión finita, entonces la aplicación $v \longrightarrow L_v$ nunca es suprayectiva.
3. Si $\{f_i\}$ es la base de V^* dual a $\{v_i\}$ de V, $\{v_i\}$ es la base de $V=V^{**}$ que es dual a $\{f_i\}$.
4. Sea $\beta=\{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de V.
sea $\beta^*=\{f_1,\ldots,f_n\}$ la base dual (base de V^*).
Se cumple: $L_{v_i}(f_j)=f_j(v_i)=\delta_{ij}=\begin{cases} 1 \ , \ i=j \\ 0 \ , \ i\neq j \end{cases}$

COROLARIO 1 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$. Si L es un funcional lineal en el espacio dual V^* de V, entonces existe un único vector v de V tal que: $L(f)=f(v)$, para todo $f \in V^*$

COROLARIO 2 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$. Toda base de V^* es dual de alguna base de V.

Demostración:

1. Sea $\beta^*=\{f_1,\ldots,f_n\}$ una base de V^*. Por el teorema ... existe una base $\{L_1,\ldots,L_n\}$ de V^{**} tal que $L_i(f_j)=\delta_{ij}$.
2. Por el corolario anterior, para todo i existe un vector v_i de V tal que $L_i(f)=f(v_i)$ para todo $f\in V^*$; es decir, tal que $L_i=Lv_i$ .... (2*)
3. La relación (2*) nos conlleva que $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es una base de V y que β^* es la dual de esta base. ■

CONSECUENCIAS:

1. Es corriente identificar v con L_v ($v \longmapsto L_v$) y decir que V "es" el dual de V^*, o que V^* es el dual de V.
2. Si $E\subset V^*$, entonces $E^\circ \subset V^{**}$

3. Si se decide identificar V y V^{**}, entonces E° es un subespacio de V, es decir $E^{\circ} = \{v \in V : f(v) = 0 \ , \ \forall f \in E\}$.
4. Por el Teorema 3, cada subespacio W está determinado por su anulador W°, porque W es el subespacio anulado por todos los $f \in W^{\circ}$, esto es la intersección de los espacios nulos de todos los f en W°.
5. $W = W^{\circ\circ}$
6. Cada subespacio W está determinado por su anulador W°, porque cada vector $v \in W$ anula a cada funcional $f \in W^{\circ}$.

Ejemplo: Sea $W = gen\{(1,2,-3,4),(1,3,-2,6),(1,4,-1,8)\}$ un subespacio de $I\!R^4$. Una base de W° es $\{f_1, f_2\}$, donde $f_1(x,y,z,t) = 5x - y + z$, $f_2(x,y,z,t) = 2y - t$.

Aquí, podemos observar que cada vector de W anula a cada funcional de W°.

TEOREMA 23 Si S es cualquier subconjunto de un espacio vectorial de dimensión finita V, entonces $(S^{\circ})^{\circ}$ es el subespacio generado por S.

Demostración:

1. Sea $\underbrace{W}_{W \text{ es el subespacio generado por } S} = gen(S)$
2. Por 1 se cumple: $W^{\circ} = S^{\circ}$

   Se debe demostrar que $W = W^{\circ\circ}$ $\begin{cases} \text{Probar que } \dim W = \dim W^{\circ\circ} \\ W \text{ subespacio de } W^{\circ\circ} \end{cases}$
3. Por el Teorema 21 se tiene que: $\dim W + \dim W^{\circ} = \dim V$ cuando W es un subespacio de V y $\dim V < \infty$.
4. Si W° es subespacio de V^*, entonces $\dim W^{\circ} + \dim W^{\circ\circ} = \dim V^*$

   y como $\dim V = \dim V^*$, se tiene en 4. $\dim W^{\circ} + \dim W^{\circ\circ} = \dim V$
5. Igualar 4. con 3. $\qquad \dim W + \dim W^{\circ} = \dim W^{\circ} + \dim W^{\circ\circ}$

   entonces $\qquad \dim W = \dim W^{\circ\circ}$
6. Como W es un subespacio de $W^{\circ\circ}$ y $\dim W = \dim W^{\circ\circ}$, entonces $W = W^{\circ}$

10. TRANSPUESTA DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Sean V y U dos espacio vectoriales sobre el cuerpo $I\!K$ y una transformación lineal

$$T : V \longrightarrow U$$

T induce una nueva transformación lineal $T^t : U^* \longrightarrow V^*$

$$\phi \longmapsto T^t(\phi)$$

llamado "la transpuesta de T", definido del siguiente modo:

$$T^t(\phi) = \phi \circ T$$

tal que $\qquad (T^t(\phi))(v) = \phi(T(v)) \ , \ \forall \phi \in U^* \text{ y } \forall v \in V$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "\phi \circ T"'] & U \arrow[r, "\phi"] & I\!K \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \phi \in U^* \\ \phi \circ T \in V^* \end{array}$$

EJEMPLO 1 Dado la transformación lineal $T(x,y) = (2x - y, x - 3y)$ y la funcional lineal $\phi(x,y) = 5x - 4y$, hallar $T^t(\phi)$.

Solución:

Se tiene como dato: $\begin{tikzcd} I\!R^2 \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "\phi \circ T"'] & I\!R^2 \arrow[r, "\phi"] & I\!R \end{tikzcd}$

Para $v = (x, y)$ se define $\quad (T^t \phi)(x,y) = \phi(T(x,y))$

$$= 5(2x - y) - 4(x - 3y)$$
$$= 6x + 7y$$

EJEMPLO 2 Dado la transformación lineal $T : V_3 \longrightarrow U_2$ definido por

$$T(x,y,z) = (x - 2y + z \ , \ 2x + y - 3z).$$

a) **Hallar la matriz asociada a T en la base canónica.**
b) **Hallar la transpuesta de T y su matriz asociada.**

Solución de a):

$$V_3 \xrightarrow{\quad T \quad} U_2$$

$$\begin{array}{ll} \{e_1, e_2, e_3\} & \{\mu_1, \mu_2\} \\ e_1 = (1,0,0) & \mu_1 = (1,0) \\ e_2 = (0,1,0) & \mu_2 = (0,1) \\ e_3 = (0,0,1) & \end{array}$$

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (1,2) = a_{11}\mu_1 + a_{21}\mu_2 \\ T(e_2) &= (-2,1) = a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2 \\ T(e_3) &= (1,-3) = a_{13}\mu_1 + a_{23}\mu_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (1,2) = 1\mu_1 + 2\mu_2 \\ (-2,1) = -2\mu_1 + 1\mu_2 \\ (1,-3) = 1\mu_1 - 3\mu_2 \end{cases}$$

La matriz asociada a T en la base canónica ordenada es $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

Solución de b):

$$U_2^* \xrightarrow{T^t} V_3^*$$

$$\mathcal{U}^* = \{\phi_1, \phi_2\} \qquad \{f_1, f_2, f_3\} = \mathcal{K}^*$$

$$\phi_1(x,y) = x \qquad f_1(x,y,z) = x$$

$$\phi_2(x,y) = y \qquad f_2(x,y,z) = y$$

$$f_3(x,y,z) = z$$

$\mathcal{U}^*$ base canónica (proyecciones) de U_2^*

$\mathcal{V}^*$ base canónica (proyecciones) de V_3^*

La matriz asociada a T^t se obtiene haciendo: $\begin{cases} T^t(\phi_1) = b_{11}f_1 + b_{21}f_2 + b_{31}f_3 \\ T^t(\phi_2) = b_{12}f_1 + b_{22}f_2 + b_{32}f_3 \end{cases}$

Pero:
$$(T^t(\phi_1))(x,y,z) = \phi_1(T(x,y,z)) = x - 2y + z$$
$$(T^t(\phi_2))(x,y,z) = \phi_2(T(x,y,z)) = 2x + y - 3z$$

La matriz asociada a T^t es $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

La aplicación lineal $T^t : U_2^* \longrightarrow V_3^*$ está definido por: $T^t(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$= (x+2y, -2x+y, x-3y)$$

PROPOSICIÓN: Probar que $T^t : U^* \longrightarrow V^*$ es una transformación lineal
$$\phi \longrightarrow T^t(\phi) = \phi \circ T$$
de U^* en V^*.

Prueba:

Si ϕ_1 y ϕ_2 están en U^* y α es un escalar, tenemos:

$$\begin{aligned} [T^t(\alpha\phi_1 + \phi_2)](v) &= [(\alpha\phi_1 + \phi_2) \circ T](v) \ , \quad v \in V \\ &= (\alpha\phi_1 + \phi_2)(T(v)) \\ &= \alpha\phi_1(T(v)) + \phi_2(T(v)) \\ &= \alpha(T^t(\phi_1))(v) + T^t(\phi_2(v)) \end{aligned}$$

de modo que $\quad T^t(\alpha\phi_1 + \phi) = \alpha T^t(\phi_1) + T^t(\phi_2)$

TEOREMA 24 Sean V y U espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Para toda transformación lineal T de V en U, existe una única transformación lineal T^t de U^* en V^* tal que $(T^t(\phi))(v) = \phi(T(v))$, $\forall\, \phi \in U^*$ y $\forall\, v \in V$.

A T^t se le llama **transpuesta** de T. Esta transformación T^t también se llama a menudo adjunta de T.

TEOREMA 25 Sean V y U espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea T una transformación lineal de V en U. El espacio nulo de T^t es el anulador de la imagen de T. Si V y U son de dimensión finita, entonces:

(*i*) rango (T^t) = rango (T)

(*ii*) $\underbrace{\text{la imagen de } T^t \text{ es el anulador del espacio nulo de } T}_{\mathrm{Im}(T^t) = (N(T))^o}$.

Demostración:

Las hipótesis son: (h_1) $T : V \longrightarrow U$

(h_2) $N(T^t) = (\mathrm{Im}(T))^o$

(h_3) $\dim V = n$ y $\dim U = m$; porque V y U son de dimensión finita.

Conceptos que merecen recordarse:

A) $\mathrm{rango}(T^t) = \dim \mathrm{Im}(T^t) = r$

B) $\mathrm{rango}(T) = \dim \mathrm{Im}(T)$

C) $N(T^t)$: espacio nulo de T^t o núcleo de T^t. Si $\phi \in N(T^t) \Rightarrow (T^t(\phi))(v) = 0$

D) $\mathcal{N}(T^t)$: nulidad de $T^t = \dim\ (N(T^t))$ = dimensión del núcleo de T^t

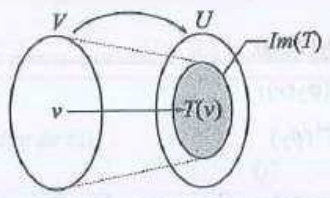
E) $(\mathrm{Im}(T))^o$: anulador de $\mathrm{Im}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$: imagen de T.

$$(\mathrm{Im}(T))^o = \{\phi : \mathrm{Im}(T) \to \mathbb{K} \ / \ \phi(T(v)) = 0 \ , \ \forall\, T(v) \in \mathrm{Im}(T) \ , \ \forall\, v \in V\}$$

F) $\mathrm{Im}(T^t)$: imagen de T^t , $N(T)$: núcleo de T o espacio nulo de T.

$(N(T))^\circ$: anulador de x^2

(i) Por demostrar que: rango (T^t) = rango (T)



$\mathrm{Im}(T)$ es un subespacio de U, entonces

$\dim(\mathrm{Im}(T) + \dim(\mathrm{Im}(T))^\circ = \dim U$

Pasos a seguir:

1. Si $\phi \in U^*$ entonces $(T^t(\phi))(v) = \phi(T(v))$, $\forall\, v \in V$ .... (def. de T^t)
2. Afirmar que $\phi \in N(T^t)$ implica que $(T^t(\phi))(v) = \underline{\phi(T(v)) = 0}$, $\forall\, v \in V$
3. Visto en (E), por 2. y la hipótesis (h_2) , tenemos que

$$N(T^t) = (\mathrm{Im}(T))^\circ$$

anulador de la imagen de T

espacio nulo de T^t

- Ahora probemos (i):

4. Supongamos que r = rango (T) = dim (Im (T))
5. Por el Teorema. 2.1. se tiene: $\dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))^\circ = \dim U$

$$r + \dim(\mathrm{Im}(T))^\circ = m$$

Entonces $\dim\underbrace{(\mathrm{Im}(T))^\circ}_{N(T^t)} = m - r$ .... (5*)

6. Por 3 y por (5*) obtenemos: $\underbrace{\dim N(T^t)}_{N(T^t)} = m - r$

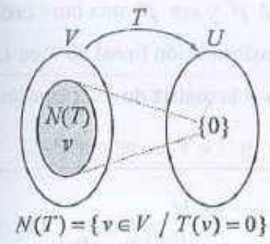
7. Pero $\underbrace{\mathcal{N}(T^t)}_{m-r}$ + rango (T^t) $= \dim U^*$, $\dim U^* = \dim U = m$

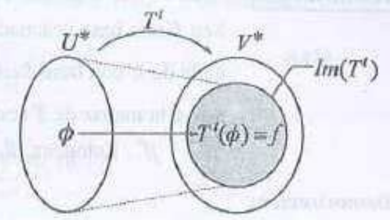
$m - r$ + rango (T^t) $= m$

rango (T^t) $= r$

8. Por 7. y 4. obtenemos: r = rango(T) = rango (T^t) . ■

Prueba de (ii):





$N(T) = \{v \in V \ / \ T(v) = 0\}$

$(N(T))^\circ = \{\phi : N(T) \longrightarrow I\!K \ / \ \phi(v) = 0\}$

a) $\underbrace{\dim \mathrm{Im}(T^t)}_{\mathcal{N}(T^t)} + \underbrace{\dim N(T^t)}_{\text{rango}\,(T^t)} = \underbrace{\dim U^*}_{= \dim U}$

(ii) Por demostrar que $\mathrm{Im}(T^t) = (N(T))^\circ$

1. Sea $N(T)$ el espacio nulo (o núcleo) de T.
2. Por todo funcional $f \in \mathrm{Im}(T^t)$ implica que $f \in (N(T))^\circ$, en efecto, suponer que:

$f = T^t(\phi) \in \mathrm{Im}(T^t)$ para algún $\phi \in U^*$, entonces

Si $v \in N(T)$ se tendrá $f(v) = (T^t\phi)(v) = \phi(T(v))$

$$= \phi(0)$$
$$= 0$$

3. Por otro lado, se tiene que la $\mathrm{Im}(T^t)$ es un subespacio del espacio $(N(T))^o$,
4. Por demostrar que: $\dim(N(T))^\circ = \underbrace{\dim \mathrm{Im}(T^t)}_{\text{rango}\,(T^t)}$

Como rango (T^t) = rango Im(T), bastará demostrar que: $\boxed{\dim(N(T))^\circ = \underbrace{\dim \mathrm{Im}(T)}_{\text{rango}\,(T)}}$

Veamos:

a) Se cumple: $\underbrace{\dim \mathrm{Im}(T)}_{\text{rango}\,(T)} + \dim N(T) = \underbrace{\dim V}_{n} \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = n - \dim N(T)$

b) Se cumple: $\dim \mathrm{Im}(T)^\circ + \dim N(T) = \underbrace{\dim V}_{n}$, porque $N(T)$ es subespacio de V.

entonces $\dim N((T))^\circ = n - \dim N(T)$

5. Al igualar los resultados de a) y b), obtenemos: $\dim N((T))^\circ = \dim \mathrm{Im}(T)$
6. Pero $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathrm{Im}(T^t)$, por lo tanto: $\dim N((T))^\circ = \dim \mathrm{Im}(T^t)$
7. Por 2. y 6. concluimos: $\mathrm{Im}(T^t) = (N(T))^\circ$ ■

TEOREMA 26 Sean V y U espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$. Sea β una base ordenada de V con base dual β^* y sea β' una base ordenada de U con base dual β'^*. Sea T una transformación lineal de V en U, sea A la matriz de T respecto à β, β' y sea B la matriz de T^t respecto a β'^*, β^*. Entonces $B_{ij} = A_{ji}$.

Demostración:

1. Sea:

$\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\beta' = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$

$\beta^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$, $\beta'^* = \{g_1, \ldots, g_m\}$

Las bases de V, de U, de V^* y de U^*, respectivamente.

$$T : V \longrightarrow U$$
$\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ $\quad$ $\beta' = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$
$$T^t : U^* \longrightarrow V^*$$
$\beta'^* = \{g_1, \ldots, g_m\}$ $\quad$ $\beta^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$

A es la matriz de T en las bases β y β'

A^t es la matriz de T^t en las bases β'^* y β^*

2. Por definición de base y de combinación lineal, se tiene:

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\,\mu_i \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

$$T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ij}\,f_i \quad , \quad j = 1, \ldots, m$$

Por demostrar que: $T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ji}\,f_i$

Veamos:

3. Para T^t se tiene: $(T^t g_j)(v_i) = g_j(Tv_i)$ .... Definición de T^t

$$= g_j\left(\sum_{k=1}^{m} A_{ki}\,\mu_k\right) \quad \text{.............. Por 2.}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} A_{ki}\,g_j(\mu_k) \quad \text{.............. Definición de } g_j$$

$$= \sum_{k=1}^{m} A_{ki}\,\delta_{jk} \quad \text{.............. Definición de } \delta_{jk}$$

$$= A_{ji}$$

4. Para cualquier funcional $f : V \longrightarrow K$, $f \in V^*$, se cumple:

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\,f_i \quad \text{.......................(4*)}$$

5. En particular, si $f = T^t g_j$ tendremos: $T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} Tg_j(v_i)\,f_i$

6. Por 3. tenemos: $T^t g_j(v_i) = A_{ji}$

7. Reemplazar 6 en 5. $T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ji}\,f_i$

8. En 2. teníamos: $T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ij}\,f_i$

$\longrightarrow A_{ji} = B_{ij}$

Así queda probado que $B = A^t$

B es la transpuesta de A.

Definición: Si A es una matriz $m \times n$ sobre el cuerpo $I\!K$, la **transpuesta** de A es la matriz $n \times m$, A^t, definida por $A^t_{ij} = A_{ji}$.

TEOREMA 27 Sea A cualquier matriz $m \times n$ sobre el cuerpo $I\!K$. Entonces el rango de filas de A es igual al rango de columnas.

Demostración:

1. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$

2. Sea β la base ordenada canónica de $I\!K^n$, y

β' la base ordenada canónica de $I\!K^m$,

tal que A es la matriz de T respecto al par β y β'.

3. Sea $\underset{\beta}{T : I\!K^n} \longrightarrow \underset{\beta'}{I\!K^m}$ la t.l. de $I\!K^n$ en $I\!K^m$ tal que la matriz de T respecto al

par β y β' sea A ; es decir $T(x_1,\ldots,x_n)=(y_1,\ldots,y_m)$ donde

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \;,\; i=1,\ldots,m\,.$$

Por demostrar: rango $\underbrace{\text{FILAS de } A}$ = rango COLUMNAS de A

rango columnas de A^t = rango de T

rango de T = $\underbrace{\text{rango de } T^t}_{\dim \operatorname{Im}(T^t)}$ = $\dim \operatorname{Im}(T)$

4. Recordando que $\operatorname{Im}(T)$ es el subespacio generado por las columnas de A, afirmamos que: el rango de COLUMNAS de A es el rango de la transformación T, porque la imagen de T consta de todos los m-tuples que son combinaciones lineales de los vectores columna de A.

5. Respecto a las bases β'^* y β^*, la aplicación transpuesta T^t.

$$\underset{\beta'^*}{T^t:U^*} \longrightarrow \underset{\beta^*}{V^*}$$

está representado por la matriz A^t.

Como las columnas de A^t son las filas de A, se deduce:

Rango de FILAS de A = rango de **columnas** de A^t = rango de A^t

6. Pero: rango de T^t = rango de T (por el teorema 25), entonces el rango FILAS de A = rango COLUMNAS de A ■

> ***Importante Conclusión:*** Si A es la matriz $m\times n$ sobre $I\!K$ y $T:I\!K^n \longrightarrow I\!K^m$ es la transformación lineal de $I\!K^n$ en $I\!K^m$, entonces:
>
> rango(T) = rango de FILAS (A) = rango de COLUMNAS (A) y
>
> se dirá simplemente que este número es el ***rango*** de A.

PROBLEMAS PROPUESTOS

GRUPO 1 (TRANSFORMACIONES LINEALES)

01. Sea V el espacio vectorial de las matrices n-cuadradas sobre $I\!K$ y M una matriz arbitraria en V. Defínase $T:V\longrightarrow V$ mediante $T(A)=AM+MA$, con $A\in V$. Mostrar que T es lineal.

02. Supóngase que la aplicación lineal $T:V\longrightarrow W$ es inyectiva y suprayectiva. Probar que la aplicación inversa $T^{-1}:W\longrightarrow V$ es también lineal.

03. Supóngase que $T:V\longrightarrow U$ es lineal con núcleo W y que $T(v)=u$. Demostrar que la "variedad afín" $v+W=\{v+w : w\in W\}$ es la preimagen de u, es decir $T^{-1}(u)=v+W$.

04. Sea k un escalar no nulo. Probar que una aplicación lineal T es singular si, y sólo si kT es singular. Por tanto, T es singular si, y sólo si lo es $-T$.

05. Sean $T:V\longrightarrow U$ lineal y W un subespacio de V. La restricción de T a W es la aplicación $T_W:W\longrightarrow U$ definida por $T_W(w)=T(w)$ para todo $w\in W$. Demostrar las siguientes funciones: a) T_W es lineal, b) $Ker\,T_W = Ker\,T\cap W$, c) $\operatorname{Im} T_W = T(W)$.

06. Supóngase que $T:U\longrightarrow V$ es lineal, y que $S:V\longrightarrow W$ es también lineal. Demostrar que $S\circ T:U\longrightarrow W$, definido por $S\circ T(x)=S(T(x))$, es lineal.

07. La proyección de un vector u sobre v está definida por $\operatorname{Proy}_v u=\frac{u\cdot v}{v\cdot v}v$

Sea v un vector fijo de $I\!R^3$ y sea $I\!K$ el subespacio extendido por v. Defínase $P:I\!R^3\longrightarrow I\!K$ por $P(x)=\operatorname{Proy}_v x$. Probar que P es lineal.

08. Sea V el espacio vectorial de todas las matrices $n\times n$ sobre el cuerpo $I\!K$ y sea B una matriz $n\times n$ dada. Si $T(A)=AB-BA$ comprobar que T es una tranformación lineal de V en V.

09. Describa explícitamente la transformación lineal T de $I\!K^2$ en $I\!K^2$ tal que $T\varepsilon_1=(a,b)$, $T\varepsilon_2=(c,d)$, donde $\varepsilon_1=(1,0)$, $\varepsilon_2=(0,1)$

10. Describir explícitamente una transformación lineal de $I\!R^3$ en $I\!R^3$ que tiene como imagen el subespacio generado por $(1,0,-1)$ y $(1,2,3)$.

GRUPO 2 (LA GEOMETRÍA DE LAS TRANSFORMACIONES LIENALES DE $I\!R^2$ EN $I\!R^2$)

Sea $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ una transformación lineal definida por $T(X) = AX$, siendo A una matriz cuadrada 2×2 inversible y $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Definiciones:

01. Una ***expansión a lo largo del eje X***, es una transformación lineal definida por:
$T(x,y) = (cx, y)$, $c > 1$.

02. En 1. si $0 < c < 1$, la transformación lineal T es ***una compresión a lo largo del eje X.***

03. Una ***expansión a lo largo del eje Y*** es una transformación lineal definida por:
$T(x,y) = (x, cy)$, $c > 1$.

04. En 3., si $0 < c < 1$, la transformación lineal T ***es una compresión a lo largo del eje Y.***

05. La transformación lineal $T(x,y) = (y,x)$ ***es una reflexión respecto a la recta $y = x$.***

06. La transformación lineal $T(x,y) = (x,-y)$ ***es una reflexión respecto al eje X.***

07. La transformación lineal $T(x,y) = (-x,y)$ ***es una reflexión con respecto al eje Y.***

08. La transformación lineal $T(x,y) = (x+cy, y)$ ***es un corte a lo largo del eje X.***

09. La transformación lineal $T(x,y) = (x, cx+y)$ ***es un corte a lo largo del eje Y.***

TAREA 1.

01. Graficar en el plano cartesiano $I\!R^2$, cada una de las transformaciones lineales definida anteriormente.

02. Hallar la matriz de cada transformción lineal dada anteriormente y halle una base para cada uno.

03. Hallar la imagen de T y el nucleo de T, para cada una de las transformaciones lineales dadas.

TAREA 2.

Los puntos $J(2,8)$, $K(4,4)$ y $L(10,7)$ son vértices de un triángulo rectángulo, y los puntos K y L, juntos con $M(8,1)$ y $N(2,-4)$, son vértices de un paralelogramo. En los problemas 1 – 8, se le da a usted una matriz A el cual lo usará para definir una transformación lineal $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ en la manera usual, $T(X) = AX$. Para cada problema, responder las siguientes preguntas.

a) ¿Es la imagen del triángulo JKL otro triángulo rectángulo?

b) ¿Es la imagen del paralelogramo $KLMN$ otro paralelogramo?

c) ¿Las imagenes de los segmentos $\overline{KM}$ y $\overline{LN}$ bisecan a los otros segmentos?

01. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **02.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ **03.** $\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$ **04.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

05. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **06.** $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **07.** $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ **08.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

GRUPO 3

I) Representación matricial de una transformación lineal.

01. La transformación lineal $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ definida por $T(x_1,x_2) = (x_1,x_2)$ tal que $x_2 = -x_1$ es llamada una reflexión respecto a la recta $x_2 = x_1$.

a) Haga una repesentación gráfica de T.

b) Halle la matriz de T en la base canónica.

02. La transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(X) = rX$, $X \in \mathbb{R}^2$, $r \in \mathbb{R}$ es llamado dilatación si $r > 0$ y contracción si $0 < r < 1$.

a) Haga un gráfico que represente a la transformación lineal T.

b) Halle la matriz de T en la base canónica.

03. Sea $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por:

$T(x,y,z) = (3x+2y-4z, x-5y+3z)$

a) Hallar la matriz de T en las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$:

$B = \{w_1, w_2, w_3\}$ y $B' = \{u_1, u_2\}$

donde: $w_1 = (1,1,1)$, $w_2 = (1,1,0)$, $w_3 = (1,0,0)$

$u_1 = (1,3)$, $u_2 = (2,5)$

Respuesta: $[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{bmatrix}$

04. Encontrar la representación matricial de cada una de las aplicaciones lineales escritas a continuación respecto a las bases canónicas de los $\mathbb{R}^n$:

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (3x-y, 2x+4y, 5x-6y)$

$T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,s,t) = (3x-4y+2s-5t, 5x+7y-s-2t)$

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida como $T(x,y,z) = (2x+3y-8z, x+y+z, 4x-5z, 6y)$

Respuesta: $[T] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$, $[T] = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & -5 \\ 5 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

05. Sea la aplicación $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $T(x,y) = (2x-3y, x+4y)$. Hallar la matriz T relativa, respectivamente, a las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$.

$B = \{e_1, e_2\}$ y $B' = \{u_1, u_2\}$

donde: $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $u_1 = (1,3)$, $u_2 = (2,5)$

Respuesta: $[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} -8 & 23 \\ 5 & -13 \end{bmatrix}$

06. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ la matriz en la base canónica de la aplicación lineal $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Encontrar la representación matricial de T relativa a las bases $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $\{(1,3),(2,5)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

Respuesta: $[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} -12 & -41 & -8 \\ 8 & 24 & 5 \end{bmatrix}$

07. Considérese las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$: $B = \{e_1, e_2\}$ y $B' = \{u_1, u_2\}$ donde $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $u_1 = (1,2)$, $u_2 = (2,3)$.

a) Encontrar las matrices de cambio de base P y Q desde B hasta B', respectivamente. Comprobar que $Q = P^{-1}$.

b) Mostrar que $[v]_B = P[v]_{B'}$ para todo vector $v \in \mathbb{R}^2$.

c) Comprobar que $[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$ para el operador lineal $T(x,y) = (2x-3y, x+y)$.

Respuesta: $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

08. Suponer que $B = \{u_1, u_2\}$ es una base de V y $T: V \longrightarrow V$ un operador lineal para el que $T(u_1) = 3u_1 - 2u_2$ y $T(u_2) = u_1 + 4u_2$. Supóngase, asimismo, que $B' = \{w_1, w_2\}$ es una base de V en la que $w_1 = u_1 + u_2$ y $w_2 = 2u_1 + 3u_2$. Hallar la matriz de T en la base B'.

Respuesta: $\begin{bmatrix} 8 & 11 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

09. Un operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mapea

$u_1 \longrightarrow 3u_1 - 4u_2$

$u_2 \longrightarrow -u_1 + 2u_2$

09. $T: M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 2}$; definido por $T(A)=AB$, donde $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

10. $T: M_{nn} \longrightarrow M_{nn}$; definido por $T(A)=A^t + A$

Respuestas:

07. Núcleo $=\{(0,y): y\in I\!R\}$, recorrido $=\{(x,0): x\in I\!R\}$

$\rho(T)=1$, nulidad$(T)=1$.

08. Núcleo $=\{(x,-x): x\in I\!R\}$, recorrido $= I\!R$, $\rho(T)=1$, nulidad $=1$.

09. Núcleo $=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$, recorrido $= M_{22}$, $\rho(T)=4$, nulidad $=0$

10. Núcleo $=\{A: A^t=-A\}$, recorrido $=\{A: A$ es simétrica$\}$, $\rho(T)=\frac{(n^2+n)}{2}$,

nulidad $=\frac{(n^2-n)}{2}$

11. Suponga que $T: M_{nn} \longrightarrow M_{nn}$ se define por $TA=A-A^t$. Muestre que el $nuT=\{$matrices simétricas $n\times n\}$, recorrido $T=\{$matrices antisimétricas de $n\times n\}$.

12. Sea V el espacio vectorial de las funciones que tienen derivadas de todos los órdenes y sea $D: V\longrightarrow V$ la derivada. ¿Cuál es el núcleo de D?

Respuesta: Funciones constantes.

13. Sea D^2 la segunda derivada (esto es, la iteración de D tomada dos veces). ¿Cuál es el núcleo de D^2 ? En general, ¿cuál es el núcleo de D^n (la n-ésima derivada)?.

Respuesta: $\ker D^2 =$ polinomios de grad ≤ 1,

$\ker D^n =$ polinomios de grad $\leq n-1$

14. a) Sean V y D como aparecen en el ejercicio 12. Sea $L=D-I$, donde I es la aplicación identidad de V. ¿Cuál es el núcleo de L?

b) ¿Cuál es el núcleo de L si ahora $L=D-aI$, donde a es un número?

Respuesta: a) múltiplos constantes de e^x

b) múltiplos constantes de e^{ax}

15. Sea $T: I\!R^3 \longrightarrow V$ una transformación lineal de $I\!R^3$ a cualquier espacio vectorial. Demuestre que el núcleo de T es una recta que pasa por el origen; un plano que pasa por el origen; únicamente el origen o todo $I\!R^3$.

16. Sea $T: V\longrightarrow I\!R^3$ una transformación lineal de cualquier espacio vectorial a $I\!R^3$. Demuestre que la imagen de T es una recta que pasa por el origen; un plano que pasa por el origen; únicamente el origen o todo $I\!R^3$.

17. Sea $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ un operador lineal, donde

$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 7\\ -2 & 2 & 0\end{bmatrix}$ es la matriz asociada a la base usual.

a) Demuestre que la imagen de T es un plano que pasa por el origen y encuentra su ecuación.

b) Demuestre que el núcleo de T es una recta que pasa por el origen y encuentre sus ecuaciones paramétricas.

Respuesta: a) $14x-8y-5z=0$

a) $x=-t$, $y=t$, $z=t$, $t\in I\!R$

18. Sea $J: P_1 \longrightarrow I\!R$ la transformación de integración $J(P)=\int_{-1}^{1} p(x)dx$. Describa el núcleo de J.

Respuesta: $\ker(J)$ consta de todos los polinomios de la forma kx.

19. Sea $L: P_2 \longrightarrow I\!R$ definido por $L(at^2+bt+c)=\int_0^1 (at^2+bt+c)\,dt$. Hallar $\ker(L)$.

Respuesta: $\ker(L)$ consta de todos los polinomios en P_2 de la forma:

$$at^2+bt+\left(-\tfrac{a}{3}-\tfrac{b}{2}\right) \; ; \; a\in I\!R \; , \; b\in I\!R$$

Una base para $\ker(L)$ es $\left\{t^2-\frac{1}{3},\, t-\frac{1}{2}\right\}$ y $\dim(\ker(L))=2$.

20. Dada la transformación lineal $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$, definido por $T(X) = AX$, donde

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ a) ¿Es T suryectiva? b) ¿Es T inyectiva? c) Hallar una base de la $\text{Im}(T)$ d) Hallar el núcleo de T.

Respuesta: a) T no es suryectiva. b) T no es inyectiva.

c) Una base de la $\text{Im}(T)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$.

d) Una base es el núcleo de T es $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

21. Sea $T: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal, cuyo núcleo es $\{0\}$. Supóngase que V y W tienen la misma dimensión igual a n. Demostrar que la imagen de T es todo W.

22. Sea $T: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal y supóngase que la imagen de T es todo W. Supóngase que V y W tienen la misma dimensión, igual a n. Demostrar que el núcleo de T es $\{0\}$.

23. Sea $T: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Sea $w \in W$. Sea v_0 un elemento de V tal que $T(v_0) = w$. Demostrar que cualquier solución de la ecuación $T(X) = w$ es del tipo $v_0 + u$, donde u es un elemento del núcleo de T.

24. Sea la transformación lineal $T: I\!R^3 \longrightarrow P_2$, definida por $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$

a) Probar que T es lineal. b) Probar que T es un isomorfismo.

25. Suponga que $V = P_4$ y $W = \{p \in P_5 : p(0) = 0\}$. Muestre que $V \cong W$ (se lee V es isomorfo a W).

26. Suponga que $T: C[0,1] \longrightarrow C[3,4]$ está definida por $T f(x) = f(x-3)$. Muestre que T es un isomorfismo.

27. Sea B una matriz inversible de $n \times n$. Muestra que $T: M_{nm} \longrightarrow M_{nm}$, definida por $T(A) = AB$, es un isomorfismo.

28. Muestre que si $T: I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ se define por $T(X) = AX$ y si T es un isomorfismo, entonces A es inversible y la tansformación inversa T^{-1} está dada por $T^{-1}(X) = A^{-1}X$.

29. Pruebe que $C \cong I\!R^2$.

30. Pruebe que $C^n_{I\!R} \cong I\!R^{2n}$, donde:

$C^n_{I\!R} = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) : c_i \in C$ y los escalares son los reales$\}$

31. Sea $T \in \mathfrak{L}(V, W)$. Probar que si B es una base de V y si $T(B) = \{T(b) / b \in B\}$ es una base para W, entonces T es un isomorfismo de V en W.

32. Sea $T \in \mathfrak{L}(V, W)$. Probar que T es inyectiva si, y sólo si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independiete en V, luego $Tv_1, Tv_2, \ldots, Tv_n$ son linealmente independiente en W.

33. Sea $T \in \mathfrak{L}(V)$, donde $\dim(V) < \infty$. Si $rk(T^2) = rk(T)$ demostrar que $\text{Im}(T) \cap \ker(T) = \{0\}$.

Nota: rk = rango.

34. Sea $T \in \mathfrak{L}(U, V)$ y $U \in \mathfrak{L}(V, W)$. Demostrar que $rk(TU) \leq \min\{rk(T), rk(U)\}$.

35. Sea $T \in \mathfrak{L}(U, V)$ y $U \in \mathfrak{L}(V, W)$. Demostrar que $null(TU) \leq null(T) + null(U)$.

Nota: null = nulidad.

GRUPO 5

01. Sabiendo que la matriz del operador $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ relativa a la base $\{v_1, v_2, v_3\} \subset I\!R^3$, donde $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,1)$, $v_3 = (1,1,3)$ es $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ determine la matriz de A relativa a la base canónica $I\!R^3$.

02. Obtenga las bases $B_1 \subset I\!R^2$ y $B_2 \subset I\!R^3$ respecto a las cuales la matriz de la transformación lineal $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^3$, definida mediante $T(x,y) = (2x+y, 3x-2y, x+3y)$, tienen las filas $(1,0)$, $(0,1)$ y $(0,0)$.

03. En cada inciso, $B=(f_1,f_2,f_3)$ es una base del subespacio V del espacio vectorial de las funciones reales defiidas en toda la recta real. Encuentre la matriz con respecto a B del operador de diferenciación $D:V\longrightarrow V$.

a) $f_1=1$, $f_2=sen\,x$, $f_3=cos\,x$ b) $f_1=1$, $f_2=e^x$, $f_3=e^{2x}$

c) $f_1=e^{2x}$, $f_2=xe^{2x}$, $f_3=x^2e^{2x}$

04. Sea $T^2:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que $T\neq 0$ pero $T^2=T\circ T=0$. Demostrar que existe una base $\{u,v\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $T(u)=v$ y $T(v)=0$.

05. Sea $T:V\longrightarrow V$ un operador lineal tal que $T^2=0$. Demostrar que $I-T$ es inversible. (I es la aplicación identidad definida sobre V).

06. a) Sea $T:V\longrightarrow V$ un operador lineal tal que $T^2+2T+1=0$. Demostrar que T es inverible.

b) Sea $T:V\longrightarrow V$ un operador lineal tal que $T^3=0$. Demostrar que $I-T$ es inversible.

07. Sea $\phi_1:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ y $\phi_2:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ los funcionales lineales definidos por $\phi_1(x,y,z)=2x-3y+z$ y $\phi_2(x,y,z)=4x-2y+3z$. Hallar.

a) $\phi_1+\phi_2$, b) $3\phi_1$, c) $2\phi_1-5\phi_2$.

Respuestas: a) $6x-5y+4z$, b) $6x-9y+3z$, $-16x+4y-13z$

08. Sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre $\mathbb{K}$. Para $a\in\mathbb{K}$, defínase $\phi_a:V\longrightarrow\mathbb{K}$ según $\phi_a(f(t))=f(a)$. Probar que:

a) ϕ_a es lineal ; b) Si $a\neq b$, necesariamente $\phi_a\neq\phi_b$.

Respuesta: a) Sea $f(t)=t$. Entonces $\phi_a(f(t))=a\neq b=\phi_b(f(t))$ y por tanto $\phi_a\neq\phi_b$.

09. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 2. Sean $a,b,c\in\mathbb{K}$ escalares distintos y ϕ_a, ϕ_b, ϕ_c los funcionales lineales definidos por $\phi_a(f(t))=f(a)$, $\phi_b(f(t))=f(b)$, $\phi_c=(f(t))=f(c)$. Probar que $\{\phi_a,\phi_b,\phi_c\}$ es linealmente independiente y encontrar la base $\{f_1(t),f_2(t),f_3(t)\}$ de V que es su dual.

Respuesta: a) $\left\{f_1(t)=\dfrac{t^2-(b+c)t+bc}{(a-b)(a-c)}, f_2(t)=\dfrac{t^2-(a+c)t+ac}{(b-a)(b-c)}, f_3(t)=\dfrac{t^2-(a+b)t+ab}{(c-a)(c-b)}\right\}$

CAPÍTULO 5

VALOR PROPIO Y VECTOR PROPIO

(FORMAS CANÓNICAS ELEMENTALES)

1. VALOR PROPIO Y VECTOR PROPIO

Definición I. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea T un operador lineal sobre V. Un valor propio de T es un escalar λ de $\mathbb{K}$ tal que existe un vector no nulo v tal que $T(v)=\lambda v$. Si λ es un valor propio de T, entonces:

a) cualquier v tal que $T(v)=\lambda v$ se llama un vector propio de T asociado al valor propio λ,

b) la colección de todos los v tales que $T(v)=\lambda v$ se llama espacio propio asociado a λ.

TEOREMA 1. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita y sea λ un escalar. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) λ es un valor propio de T.

ii) El operador $(T-\lambda I)$ es singular (no inversible)

iii) $\det(T-\lambda I)=0$

Demostración:

$(i)\Rightarrow(ii)$

Si λ es un v.p. de $T\Rightarrow\exists\, v\neq 0$ tal que $T(v)=\lambda v$, lo cual implica $T(v)-\lambda I(v)=0$, entonces $(T-\lambda I)(v)=0$, luego el núcleo de $T-\lambda I$ es NO NULO y $T-\lambda I$ no puede ser inversible (un operador es inversible si es inyectiva).

$(ii)\Rightarrow(iii)$

Si $(T-\lambda I)$ es singular entonces existe $v\neq 0$ tal que $(T-\lambda I)(v)=0$ y $\det(T-\lambda I)=0$

$(iii)\Rightarrow(i)$

Si $\det(T-\lambda I)=0$, entonces existe $v\neq 0$ tal que $(T-\lambda I)(v)=0$, lo cual implica que $T(v)-\lambda v=0$, entonces $T(v)=\lambda v$, lo cual prueba que λ es valor propio de T.

Ejemplo 04. Supongamos que T es el operador lineal sobre $I\!R^3$ representado por la matriz $A=\begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$ en la base canónica.

- El polinomio característico de A es $p(\lambda)=\lambda^3-(trA)\lambda^2+(A_{11}+A_{22}+A_{33})\lambda-\det A$.
$$=\lambda^3-6\lambda+11\lambda-6=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$
- Los valores propios de A son: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ es el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1=1$
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2=2$
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es el vector propio asociado al valor propio $\lambda_3=3$
- Una base de $V=I\!R^3$ es $B=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, por lo tanto T es diagonalizable.

NOTA Según la definición, la matriz A de orden n deberán tener n vectores propios para afirmar que T es diagonalizable. Pero, si $k<n$, siendo k el número de vectores propios de A, entonces T no es diagonalizable.

Ejemplo 05. Dado la matriz $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

- Los valores propios de A son: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=i\sqrt{3}$, $\lambda_3=-i\sqrt{3}$
- Afirmamos: A no es diagonaliza sobre $I\!R$, porque sólo existe una raíz real.
  A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$, porque existen 3 raíces complejas.

El vector propio asociado a $\lambda_1=0$, es:
$$v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El vector propio asociado a $\lambda_2=i\sqrt{3}$, es:
$$v_2=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 \end{bmatrix}$$

El vector propio asociado a $\lambda_3=-i\sqrt{3}$, es:
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 \end{bmatrix}$$

A continuación discutiremos, en forma paralela, dos ejemplos, que nos servirán como preámbulo para luego enunciar los teoremas que confirman la validez de las proposiciones que se plantean en cada problema.

Ejemplo 06.

Sea T un operador lineal sobre $I\!R^3$ representado en la base ordenada canónica por la matriz:
$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar el polinomio característico de A.

b) Hallar los valores propios de T (de A) y los vectores propios.

c) Hallar el espacio de los vectores propios asociados con cada valor característico (llamado también subespacio propio asociado al valor propio).

d) Hallar una base de V, si existe, cuyos elementos sean los vectores propios de T.

e) ¿Es diagonizable la matriz A?

f) Sea W_i el espacio de los vectores propios asociados con el valor característico λ_i.

Si $W=W_1+\ldots+W_k$ entonces $\dim W=\dim W_1+\ldots+\dim W_k$

Ejemplo 07.

Sea T un operador lineal sobre $I\!R^3$ representado en la base ordenada canónica por la matriz
$$B=\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar el polinomio característico de B.

b) Hallar los valores propios de T (de B) y los vectores propios.

c) Hallar el espacio de los vectores propios asociados con cada valor característico.

d) Hallar una base de V, si existe, cuyos elementos sean los vectores propios de T.

e) ¿Es diagonalizable la matriz B?

f) Sea W_i el espacio de los vectores propios asociados con el valor característico λ_i.

Si $W=W_1+\ldots+W_k$, entonces $\dim W=\dim W_1+\ldots+\dim W_k$

g) Si T es diagonalizable implica que el polinomio característico de T es:

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{d_1}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{d_k}$$

donde $\dim W_1=d_1\,,\ldots,\dim W_k=d_k$ implica que:

$$\dim V=\dim V_1+,\ldots,\dim V_k$$

Solución:

a) El polinomio característico de T es:

$$P(\lambda)=\det(A-\lambda I)$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix}4&1&-1\\2&5&-2\\1&1&2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}4-\lambda&1&-1\\2&5-\lambda&-2\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-11\lambda^2+39\lambda-45$$

$$=(\lambda-3)^2(\lambda-5)$$

b) Los valores propios se hallan al resolver:

$$(\lambda-3)^2(\lambda-5)=0$$

$$\Rightarrow\quad\lambda=3\quad,\quad\lambda=5$$

En consecuencia, $\lambda_1=3$ y $\lambda_2=5$ son los valores propios de A.

- Hallemos los vectores propios asociados a cada valor propio.
  - ♦ El (o los) vector(es) propio(s) asociado al valor propio $\lambda_1=3$ se obtiene al resolver el sistema homogéneo:

Solución:

a) El polinomio característico de T es:

$$P(\lambda)=\det(B-\lambda I)$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix}-3&1&-1\\-7&5&-1\\-6&6&-2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}-3-\lambda&1&-1\\-7&5-\lambda&-1\\-6&6&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-12\lambda-16$$

$$=(\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

b) Los valores propios se hallan al resolver:

$$(\lambda+2)^2(\lambda-4)=0$$

$$\Rightarrow\quad\lambda=-2\quad,\quad\lambda=4$$

En consecuencia, $\lambda_1=-2$ y $\lambda_2=4$ son los valores propios de B.

- Hallemos los vectores propios asociados a cada valor propio.
  - ♦ Los vectores propios se hallan al resolver la ecuación homogénea:

$$(A-3I)X=0\begin{cases}I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\\X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}4-3&1&-1\\2&5-3&-2\\1&1&2-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}(-1)\ (-2)\end{matrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&2&-2\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Reducir esta matriz a la forma canónica.

$$\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

De la primera fila se obtiene:

$$x_1+x_2-x_3=0$$
$$x_3=x_1+x_2$$

El vector solución del sistema es:

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_1+x_2\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

Vectores propios asociados a $\lambda_1=3$

$$(B-\lambda I)X=0\begin{cases}\lambda:\text{valor propio}\\I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\\X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\end{cases}$$

para cada valor propio λ.

Veamos:

- Para: $\lambda_1=-2$

$$(B-(-2)I)X=0$$

$$\left(\begin{bmatrix}-3&1&-1\\-7&5&-1\\-6&6&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\text{por }-1\longrightarrow\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-7&7&-1\\-6&6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Reducir esta matriz a la forma canónica.

$$\begin{matrix}(6)\ (7)\end{matrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-7&7&-1\\-6&6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$(*)\quad\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&6\\0&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

El subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 3$, es:

$$W_1 = gen\left\{ \underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$$

Se lee: "W_1 es el subespacio propio generado por los vectores propios v_1 y v_2".

- También, es cierto que el núcleo del operador $T - 3I$ está formado por los vectores propios v_1, v_2. Esto es:

$$\text{Ker}\,(T - 3I) = \{v_1, v_2\}$$

- W_1 es el espacio nulo de $T - 3I$.
- Se cumple: $T(W_1) \subset W_1$

Definición.- W_1 es invariante por T, si $T(W_1) \subset W_1$.

- El vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 5$, se obtiene al resolver el sistema homogéneo:

$$(A - 5I)\,X = \mathbf{O}$$

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 1 & -1 \\ 2 & 5-5 & -2 \\ 1 & 1 & 2-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (1) \quad (2) \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reducir esta matriz a la forma canónica.

$$\text{por } \tfrac{1}{6} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (-6) \quad (-1) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la primera y segunda filas, obtenemos:

$$x_1 - x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = x_1$$
$$x_3 = 0$$

Entonces el vector solución es:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

v_1 es vector propio asociado a $\lambda_1 = -2$

NOTA

El vector propio, ya se puede obtener de (*), resolviéndose:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$6x_3 = 0$$

$$\begin{array}{c} (-1) \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \text{por } (-1) \longrightarrow \\ \text{por } \tfrac{1}{2} \longrightarrow \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la primera y segunda filas se obtienen:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

El vector solución es:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \underset{v_3}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Vector propio asociado a $\lambda_2 = 5$

- El subespacio propio asociado a $\lambda_2 = 5$, es:

$$W_2 = gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) El subespacio propio asociado a $\lambda_1 = -2$, es:

$$W_1 = gen\left\{ \underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Se lee "el subespacio W_1 está generado por el vector propio v_1".

- El núcleo del operador $T - 2I$ está formado por el único vector propio v_1, esto es: $\text{Ker}\,(T + 2I) = \{v_1\}$
- W_1 es el espacio nulo de $T - 2I$.
- Además: $T(W_1) \subset W_1$
- Para: $\lambda_2 = 4$; $(B - 4I)\,X = 0$

$$\begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reducir

Multiplicar por (–1) a la 1ra fila y sumar a la 2da fila. Luego multiplicar por $\left(-\frac{1}{6}\right)$ la 3ra fila.

$$\begin{array}{c} + \\ (7) \end{array} \begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicar por 7 a la 3ra fila y sumar a 1ra fila.

$$\begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{donde} \begin{cases} Tv_1 = 4v_1 \\ Tv_2 = 0\,v_1 - 2v_2 \\ Tv_3 = 0v_1 - v_2 - 2v_3 \end{cases}$$

3. $W_1 = gen\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ y $W_2 = gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ son los subespacios propios de V.

4. El polinomio minimal es:

$$m(x) = \underbrace{(x-4)}_{\substack{\textit{es un operador}\\ \downarrow \\ T-4I}}\ \underbrace{(x+2)^2}_{\substack{\textit{es un operador}\\ \downarrow \\ T+2I}}$$

LEMA 6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$.

Sea T un operador lineal sobre $V (T: V \longrightarrow V)$ tal que el polinomio minimal de T sea un producto de factores lineales.

$$m(x) = (x-c_1)^{r_1} \ldots (x-c_j)^{r_j} \ldots (x-c_k)^{r_k}\ ,\ c_i \in I\!K$$

Sea W un subespacio propio de V $(W \neq V)$ invariante por T. Existe un vector v tal que:

a) v no pertenece a W

b) $(T - c\,I)v$ está en W, para algún valor propio c del operador T.

Demostración.-

- Lo que dice (a) y (b) es que el T-conductor de v en W es un polinomio lineal.
- Eligiendo $(x-c_j)$ se debe probar que:

Si $v \in V$, tal que $v \notin W$ entonces $(T - c_j\, I)v \in W$

$$v = h(T)\beta \qquad \underbrace{\underbrace{[(T-c_j\, I)\, h(T)]}_{g(T)}\beta}_{g(T)\beta}$$

Veamos:

1. Hacer dos supuestos:

   h_1 . Sea β un vector cualquiera de V, tal que $\beta \notin W$

   h_2 . Sea g el T-conductor de β en W (esto es, $g(T)\beta \in W$)

2. Por el supuesto h_2, g es un polinomio que divide a $m(x)$, que es el polinomio minimal de T. Como $\beta \notin W$, entonces el polinomio g no es constante y podemos suponer que g tiene la forma: $g(x) = (x-c_1)^{e_1} \ldots (x-c_j)^{e_j} \ldots (x-c_k)^{e_k}$

   donde al menos uno de los enteros e_j es positivo (porque si todos los e_j son cero, entonces g sería una constante, lo cual no se desea).

3. Como hemos elegido el polinomio lineal $(x-c_j)$, se tiene que $(x-c_j)$ divide a g, entonces existe un polinomio $h(x) \in I\!K[x]$, tal que,

   $$g(x) = (x-c_j)\, h(x)$$

   donde $\qquad g(T) = (T - c_j I)\, h(T)$ es un operador

4. Por el supuesto h_2 y por la definición de g, el vector $v = h(T)\beta \notin W$. Pero

   $$\underbrace{[(T-c_j I)\, h(T)]}_{g(T)}\beta \in W$$ ■

TEOREMA 6. Sea V un espacio de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$ y sea T un operador lineal sobre V $(T: V \longrightarrow V)$. Entonces T es triangulable si, y solo si, el polinomio minimal de T es producto de polinomios lineales sobre $I\!K$.

Demostración.

$(\Leftarrow)$ Si el polinomio minimal es $m(x) = (x-c_1)^{r_1} \ldots (x-c_k)^{r_k}$, se debe probar que T es triangulable.

Esto es, se debe probar que existe una base ordenada $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ que triangula a T.

Para ello, apliquemos en forma sucesiva el Lema 6.

Comencemos aplicando el Lema 6 al subespacio $W_0 = \{0\}$: existe un vector, no nulo, $v_1 \in V$ tal que $v_1 \notin W_0$ y además $(T - c_1\, I)v_1 = 0 \iff T v_1 = c_1 v_1$ ……… (1)

Por la ecuación (1) obtenemos el subespacio $W_1 = gen\{v_1\}$. Aplicar el Lema 6 al subespacio W_1: existe un vector $v_2 \in V$, tal que $v_2 \notin W_1$ y además.

$$(T - c_2 I)v_2 = a_{12} v_1 \iff Tv_2 = a_{12} v_1 + c_2 v_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Por la ecuación (2) obtenemos el subespacio $W_2 = gen\{v_1, v_2\}$. Aplicar el Lema 6 al subespacio W_2: existe un vector $v_3 \in V$ tal que $v_3 \notin W_2$ y además.

$$(T - c_3 I)v_3 = a_{13} v_1 + a_{23} v_2 \Rightarrow Tv_3 = a_{13} v_1 + a_{23} v_2 + c_3 v_3$$

De manera similar se continua para obtener una base $\{v_1, v_2, \ldots, v_j\}$ del subespacio W_j, $1 \le j \le n$. Escribiendo el sistema de ecuaciones formado por (1), (2), (3), ... , (j), ... (n); obtenemos:

$$\begin{aligned}
Tv_1 &= c_1 v_1 \\
Tv_2 &= a_{12} v_1 + c_2 v_2 \\
Tv_3 &= a_{13} v_1 + a_{23} v_2 + c_3 v_3 \\
&\vdots \\
Tv_j &= a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + a_{3j} v_3 + \ldots\ldots + c_j v_j \\
&\vdots \\
Tv_n &= a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + a_{3n} v_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_n v_n
\end{aligned}$$

Así hemos obtenido una base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V en el cual la matriz que representa T es:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & c_2 & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & c_3 & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_j & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

Como observamos, $[T]_B$ es una matriz triangular superior en la base B, donde los número reales c_j son los valores propios, alguno de los cuales se repite d_j veces.

($\Rightarrow$) Si T es triangulable, entonces el polinomio minimal de T es producto de polinomios lineales sobre $\mathbb{K}$.

Demostración:

Si T es triangulable, es evidente que el polinomio característico de la matriz triangular $[T]_B$ es:

$$P(x) = (x - c_1)^{d_1} \ldots (x - c_j)^{d_k}, \quad c_j \in \mathbb{K}$$

Los elementos de la diagonal $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son los valores propios, con c_j repetidos d_j veces. Pero si P puede ser así factorizado, entonces el polinomio minimal m también puede ser de la forma $m(x) = (x - c_1)^{r_1} \ldots (x - c_k)^{r_k}$ que divide al polinomio característico P.

TEOREMA 7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea T un operador lineal sobre V. Entonces T es ***diagonalizable*** si, y solo si, el polinomio minimal de T tiene la forma.

$$m(x) = (x - c_1) \ldots (x - c_k)$$

donde $c_1, \ldots, c_k$ son elementos distintos de $\mathbb{K}$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Si T es ***diagonalizable***, entonces el polinomio minimal de T tiene la forma $m(x) = (x - c_1) \ldots (x - c_k)$, donde $c_1, \ldots, c_k$ son elementos ***distintos*** de $\mathbb{K}$. Se ha demostrado en el Lema 6.

($\Leftarrow$) Si el polinomio minimal es de la forma $m(x) = (x - c_1) \ldots (x - c_k)$, donde $c_1, \ldots, c_k$ son elementos ***distintos*** de $\mathbb{K}$, entonces T es ***diagonalizable***. La demostración es por reducción al absurdo.

Las hipótesis son:

h_1 : V es un e.v. sobre $\mathbb{K}$.

h_2 : $T : V \longrightarrow V$

h_3 : el polinomio minimal tiene raíces distintas (esto es, no puede ocurrir que

$$\begin{aligned} m(x) &= (x - c_1) \ldots (x - c_j)^2 \ldots (x - c_k).) \\ &= \underbrace{(x - c_j)^2}_{c_j \text{ es raíz repetidos dos veces}} h(x) \end{aligned}$$

Tesis t : T es diagonalizable (esto es, la $\dim V = n =$ número de vectores propios asociados a cada valor propio $c_1, \ldots, c_k$)

El método de reducción al absurdo, para este teorema, consiste en demostrar el valor de verdad de la siguiente proposición. $h_1 \wedge h_2 \wedge \sim t \longrightarrow \sim h_3$

Veamos:

1. Sea W el subespacio vectorial generado por todos los vectores propios de T, esto es, $W = gen\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$, los β_i $(i = 1, \ldots, k)$ son los vectores propios.
2. Suponer que $W \neq V$ (por lo tanto: $\dim W < n$, esto es $\sim t$)
3. Por el Lema 6: existen un vector $\alpha \notin W$ y un valor propio c_j de T tal que $\beta = (T - c_j I)\alpha \in W$
4. Como $\beta \in W$ entonces $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_k$ donde $T\beta_i = c_i \beta_i$, $1 \le i \le k$

Necesitamos probar que el vector: $h(T)\beta$ es un elemento de W.

Para ello, necesitamos recordar lo siguiente:

a) $h(x) = x + x^2 + \ldots + x^k$ es un polinomio en $\mathbb{K}[x]$

b) $h(T) = T + T^2 + \ldots + T^k$ es un operador.

c) $h(c_j) = c_j + c_j^2 + \ldots + c_j^k$

d)
$$\begin{array}{ccc} T\beta_1 = c_1\beta_1 & \qquad & T\beta_k = c_k\beta_k \\ T^2\beta_1 = c_1^2\beta_1 & & T^2\beta_k = c_k^2\beta_k \\ \vdots & & \vdots \\ T^k\beta_1 = c_1^k\beta_1 & & T^k\beta_k = c_k^k\beta_k \\ \hline T\beta_1 + \ldots + T^k\beta_1 = c_1\beta_1 + \ldots + c_1^k\beta_1 & & T\beta_k + \ldots + T^k\beta_k = c_k\beta_k + c_k^k\beta_k \\ \underbrace{(T + \ldots + T^k)}_{h(T)}\beta_1 = \underbrace{(c_1 + \ldots + c_1^k)}_{h(c_1)}\beta_1 & & (T + \ldots + T^k)\beta_k = (c_k + \ldots + c_k^k)\beta_k \end{array}$$

(4*) $\qquad h(T)\beta_1 = h(c_1)\beta_1$, ..., $h(T)\beta_k = h(c_k)\beta_k$

5. En la igualdad: $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_k$ aplicar el operador $h(T)$
$$h(T)\beta = h(T)\beta_1 + \ldots + h(T)\beta_k$$
6. Por (4*): $\boxed{h(T)\beta = h(c_1)\beta_1 + \ldots + h(c_k)\beta_k}$
7. Pero: $h(c_1)\beta_1 + \ldots + h(c_k)\beta_k$ es un elemento de W, porque es una combinación lineal de los generadores de W, entonces $h(T)\beta \in W$, para cada polinomio h.
8. Por el algoritmo de la división de polinomios, si c_j es raíz del polinomio m, entonces existe un polinomio $q(x)$, tal que, $m(x) = (x - c_j)q(x)$.
9. Si el polinomio $q(x)$ se divide ente el monomio $(x - c_j)$, entonces por el algoritmo de la división de polinomios, existe un polinomio $h(x)$, tal que:
$$q(x) = (x - c_j)h(x) + \underbrace{R}_{\text{Residuo}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9*)$$
donde $\quad q(c_j) = 0 + R$.
Luego, la igualdad (9*) se puede expresar del siguiente modo:
$$q(x) - q(c_j) = (x - c_j)h(x).$$
10. Si $x = T$, entonces $q(T) - q(c_j) = (T - c_j I)h(T)$ es un operador.
11. Aplicar en α : $(q(T) - q(c_j))\alpha = h(T)\underbrace{(T - c_j I)\alpha}_{\beta}$, por (3).
$$q(T)\alpha - q(c_j)\alpha = h(T)\beta$$
12. Por (7) afirmamos que: $h(T)\beta \in W$. Por lo tanto $q(T)\alpha - q(c_j)\alpha$ es un elemento de W.
13. En la diferencia anterior se tiene que: $\alpha \notin W$.
Pero el vector $q(T)\alpha \in W$ y $q(c_j)\alpha$ es un elemento de W sólo si $q(c_j) = 0$, para que se cumpla que $0 \cdot \alpha = \overline{0} \in W$.
14. Así obtenemos en (9*): $q(x) = (x - c_j)h(x)$ y en (8) tendremos: $m(x) = (x - c_j)^2 h(x)$.

Este resultado contradice el hecho de que el polinomio minimal m tiene raíces distintas.

lqqd.

- Ha sucedido que el espacio base V se ha descompuesto en una suma de subespacios invariantes para T.

Geométricamente, la suma directa que acabamos de hacer, indica que los vectores propios $\left\{\begin{bmatrix}3\\-1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ conforman una base de $I\!R^3$ y en consecuencia estos vectores generan todo $I\!R^3$.

Ejemplo 12. En el ejemplo 9 a) tenemos:
El operador lineal $T:V\longrightarrow V$, $V=I\!R^3$, definido por
$T(x,y,z)=(3x+y-z,2x+2y-z,2x+2y)$

- La matriz de T en la base canónica es $A=\begin{bmatrix}3&1&-1\\2&2&-1\\2&2&0\end{bmatrix}$
- El polinomio característico de T es $f(x)=(x-1)(x-2)^2$
- El subespacio invariante por T correspondiente al valor propio $x=1$, es:

$$W_1=\left\{t\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}:t\in I\!R\right\}\ ,\ \dim W_1=1$$

- El subespacio invariante por T correspondiente al valor propio $x=2$, es:

$$W_2=\left\{s\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}:s\in I\!R\right\},\ \dim W_2=1$$

- En este caso, el espacio vectorial $V=I\!R^3$ no se puede expresar como la suma directa de los subespacios W_1 y W_2, porque el conjunto de vectores propios $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ no constituye una base de $V=I\!R^3$.

  Pero: $W=W_1\oplus W_2$ es un nuevo subespacio de $I\!R^3$ (es un plano generado por los vectores $(1,0,2)$, $(1,1,2)$.

Ejemplo 13. Sea $T:V\longrightarrow V$, $V=I\!R^3$, el operador lineal definido por
$T(x,y,z)=(x+2y+5z,3x+5y+13z,-2x-y-4z)$

a) Hallar el núcleo de T.
b) Hallar la imagen de T.
c) ¿Será cierto que $V=\ker T\oplus \mathrm{Im}(T)$?

Solución a):

El operador lineal T se puede escribir de la siguiente forma.

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&5\\3&5&13\\-2&-1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\text{ , donde } A=\begin{bmatrix}1&2&5\\3&5&13\\-2&-1&-4\end{bmatrix}$$ es la matriz T en la base canónica.

Ahora, hallemos el núcleo de T: $\ker T=\{v\in V:T(v)=0\}$, $v=(x,y,z)$

$$\begin{array}{c}(2)\ (-3)\end{array}\begin{bmatrix}1&2&5\\3&5&13\\-2&-1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Reducir esta matriz a la forma escalonada.

$$\text{por }(-1)\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&5\\0&-1&-2\\0&3&6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&3&6\end{bmatrix}(-3)\sim\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

La ecuación lineal homogénea se ha reducido a:

$$\begin{cases}x+2y+5z=0\rightarrow x=-2y-5z\ \ldots\ldots(1)\\ \qquad y+2z=0\rightarrow \boxed{y=-2z}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}$$

(2) en (1): $x=-2(-2z)-5z$

$$\boxed{x=-z}$$

El vector solución es: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-z\\-2z\\z\end{bmatrix}=z\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}$, $z=I\!R^2$

Así, hemos obtenido: $\ker T = \left\{ t\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix} : t \in I\!R \right\}$ $\Leftarrow$ es una recta en $I\!R^3$ que pasa por $(0,0,0)$.

Además: $\dim(\ker T) = 1$

Solución de b):

La imagen de T $(\operatorname{Im}(T) = \{T(v) \in V : w = T(v) \text{ para algún } w \in V\})$

- **La forma práctica de hallar la imagen de T es reduciendo a la forma escalonada la transpuesta de la matriz A.**

La transpuesta de A es: $A^T = \begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 5 & -1\\ 5 & 13 & -4\end{bmatrix} \begin{matrix}(-2)\ (-5)\\ +\\ +\end{matrix}$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 6\end{bmatrix} \longleftarrow \text{Por } (-1)$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & -2 & -6\end{bmatrix} \begin{matrix}(2)\\ +\end{matrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Conclusión: Una base de la Im T es el conjunto de los vectores fila de esta última matriz escalonada $\left\{ \begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix} \right\}$

Esto es $\operatorname{Im} T = \left\{ t\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix} t, s \in I\!R \right\}$ $\Leftarrow$ es un plano en $I\!R^3$ que pasa por (0,0,0)

Además: $\dim(\operatorname{Im} T) = 2$

c) Como: $\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = 3 = \dim V$, afirmamos que,

$V = \ker T \oplus \operatorname{Im}(T)$

el espacio vectorial $V = I\!R^3$ es la suma directa del núcleo de T más la imagen de T.

A continuación daremos la definición de subespacios independientes y luego la demostración de un lema que nos conlleva a la definición de suma directa de subespacios invariantes.

Definición.- Sean $W_1,\ldots,W_k$ subespacios de un espacio vectorial V. Se dice que $W_1,\ldots,W_k$ son ***independientes*** si $\alpha_1 + \ldots + \alpha_2 = 0$, $\alpha_i \in W_i$ ***implica*** que cada α_i es 0. Esta definición indica lo siguiente:

a) Para $k = 2$, esto es, si tenemos dos subespacios W_1 y W_2: W_1 y W_2 son independientes si, y sólo si, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

b) Para $k > 2$, los subespacios $W_1,\ldots,W_k$ son ***independientes*** si, y solo si, $W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_k = \{0\}$, además cada W_j encuentra la suma de otros subespacios W_i sólo en el vector nulo.

Ejemplo 14. Sean $W_1 = \left\{ t\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix} : t \in I\!R \right\}$ y $W_2 = \left\{ r\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix} : r, s \in I\!R \right\}$ dos subespacios de $V = I\!R^3$, ¿son W_1 y W_2 independientes?

Solución:

Si pruebo que $W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$ afirmaré que W_1 y W_2 son independientes.

Veamos:

Sea $\alpha \in W_1 \cap W_2$

entonces $\alpha \in W_1 \ \wedge\ \alpha \in W_2$

si $\alpha \in W_1$, entonces $\alpha = t(-1,-2,1)$ .... (1)

si $\alpha \in W_2$, entonces $\alpha = r(1,3,-2) + s(0,1,-3)$ .... (2)

Al igualar (1) y (2) obtenemos: $t(-1,-2,1) = r(1,3,-2) + s(0,1,-3)$

$$\begin{cases} -t - r = 0\\ -2t - 3r - s = 0\\ t - 2r - 3s = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{La única solución de este sistema es: } t = 0,\ r = 0,\ s = 0$$

Si $t=0$, entonces el vector $t(-1,-2,1)=(0,0,0)$ similarmente si $r=0$, $s=0$, el vector $r(1,3,-2)+s(0,1,-3)=(0,0,0)$.

Este resultado nos indica que $W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$ y por lo tanto, existe la suma directa $W_1 \oplus W_2$.

Por lo tanto: $u \in W_1 \oplus W_2$ implica $u = w_1 + w_2 \quad , \quad w_1 \in W_2 \quad , \quad w_2 \in W_2$

$$u = \underbrace{t(-2,-2,1)}_{w_1} + \underbrace{r(1,3,-2)+s(0,1,-3)}_{w_2}$$

Lema 7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Sean $W_1,\ldots,W_k$ subespacios de V y sea $W = W_1 + \ldots + W_k$. Son equivalentes, las siguientes afirmaciones.

a) $W_1,\ldots,W_2$ son independientes.

b) Para todo j, $2 \le j \le k$, se tiene: $W_j \cap (W_1 + \ldots + W_{j-1}) = \{0\}$

c) Si B_i es una base ordenada de W_i, $1 \le i \le k$, entonces la sucesión $B = (B_1,\ldots,B_k)$ es una base ordenada para W.

Demostración:

Debo probar que
$$\begin{array}{ccc} (a) & \longrightarrow & (b) \\ & \nwarrow & \downarrow \\ & & (c) \end{array}$$
Se lee "(a) implica (b), (b) implica (c) y (c) implica (a)

Probemos que (a) $\longrightarrow$ (b)

- Supongamos que se cumple (a).
- Sea α un vector, tal que, $\alpha \in W_j \cap (W_1 + \ldots + W_{j-1})$
  $\Rightarrow \quad \alpha \in W_j \ \wedge \ \alpha \in (W_1 + \ldots + W_{j-1})$
- Si $\alpha \in (W_1 + \ldots + W_{j-1})$, existen vectores $\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1}$ tales que
  $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{j-1}$ .... (1)

- De (1) obtenemos $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{j-1} + (-\alpha) = 0$
- Que se puede escribir $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{j-1} + (-\alpha) + 0 + \ldots + 0 = 0$ y como $W_1,\ldots,W_k$ son independientes, debe ser que: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{j-1} = \alpha = 0$.
- Este último resultado nos indica que $W_j \cap (W_1 + \ldots + W_{j-1}) = \{0\}$
  Probemos que (b) $\Rightarrow$ (c).
- Formemos la sucesión $B = (B_1,\ldots,B_k)$ donde, por hipótesis cada conjunto B_i es una base de W_i, $1 \le i \le k$.

  Queremos probar que $B = (B_1,\ldots,B_k)$ es una base de W.

  Si $b_i \in B_i \Rightarrow b_i$ es combinación lineal de los vectores en B_i, $1 \le i \le k$.
- Cualquier relación lineal entre los vectores de B tendrá la forma:
  $$b_1 + \ldots\ldots + b_k = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$
  donde b_i es cierta combinación lineal del los vectores en B_i, porque B_i es una base de W_i.
- Por hipótesis se tiene: $W_j \cap (W_1 + \ldots + W_{j-1}) = \{0\}$, lo cual implica que $W_1,\ldots,W_k$ son independientes y por tanto, cada b_i es 0. Como cada B_i es independiente, la relación (*) entre los vectores en B es la relación trivial. Esto prueba que $B = (B_1,\ldots,B_k)$ es una base ordenada de B.

(c) $\Rightarrow$ (a) ...... *queda como ejercicio.*

Definición 9.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Sean $W_1,\ldots,W_k$ subespacios propios de V y sea $W = W_1 + \ldots + W_k$.

Si $W_j \cap (W_1 + \ldots\ldots + W_{j-1}) = \{0\}$ para todo j, $2 \le j \le k$, entonces se dice que la suma $W = W_1 + \ldots + W_k$ es la suma directa de $W_1,\ldots,W_k$, y se escribe.

$$W = W_1 \oplus \ldots\ldots \oplus W_k$$

Ejemplo 15. Sea $V=\{A\in \mathbb{K}^{n\times n}: A=(a_{ij}),\ a_{ij}\in \mathbb{K}\}$

el espacio de las matrices cuadradas de orden n, $n\in Z^{+}$

Sean los subespacios: $W_1=\{A\in \mathbb{K}^{n\times n}: A^T=A\}$

subespacio de las matrices simétricas.

$W_2=\{A\in \mathbb{K}^{n\times n}: A^T=-A\}$

subespacio de las matrices antisimétricas.

Se cumple: $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \cdots\cdots 0\\ 0 & 0 \cdots\cdots 0\\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots\\ 0 & 0\cdots\cdots 0\end{bmatrix}$

Pues: $A\in W_1\cap W_2 \Rightarrow A\in W_1 \ \wedge\ A\in W_2$

$\Rightarrow A^T=A \ \wedge\ A^T=-A$

al sumar: $2A^T=0 \ \Rightarrow\ A^T=0 \Rightarrow A=0$

Entonces V es la suma directa de W_1 y W_2, esto es: $V=W_1\oplus W_2$

$$A=\underbrace{\tfrac{1}{2}(A+A^T)}_{A_1}+\underbrace{\tfrac{1}{2}(A-A^T)}_{A_2}$$

donde $A_1=\frac{1}{2}(A+A^T)$ es un elemento de W_1.

y $A_2=\frac{1}{2}(A-A^T)$ es un elemento de W_2

Ejemplo 16. Sea el operador lineal $T:V\longrightarrow V$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita. Sean $W_1,\ldots,W_k$ los subespacios propios independientes. Si T es diagonalizable, entonces $V=W_1\oplus\ldots\ldots\oplus W_k$.

6.1 PROYECCIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

Definición 10 Si V es un espacio vectorial, una proyección de V es un operador lineal E sobre V, tal que $E^2=E$.

Esto es, el operador lineal $E:V\longrightarrow V$ es una proyección de V, si $E^2=E$.

Ejemplo 17. Sea el operador $E:V\longrightarrow V$, $V=\mathbb{R}^3$, definido por:

$$E(x,y,z)=\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y\,,\ \tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y\,,\ 0\right)$$

¿Es E una proyección de V?

Solución:

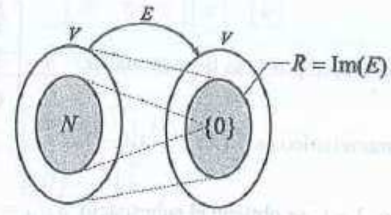
La matriz asociada al operador E en la base canónica $\mathcal{C}$ es: $A=[E]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Se cumple: $E^2=E$ $\quad (A^2=A)$

6.1.1 IMAGEN Y NÚCLEO DE UNA PROYECCIÓN

Supóngase que E es una proyección $(E^2=E)$

$E:V\longrightarrow V$



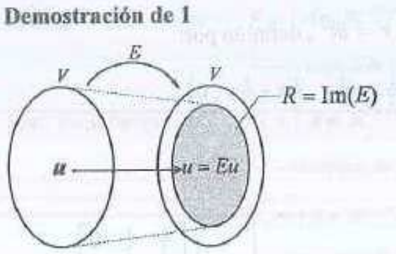
Sea R la imagen de E, esto es $R=\operatorname{Im}(E)$

y Sea N el núcleo de E, esto es $N=\ker E$.

Se tiene:

1. El vector u está en la imagen R si, y solo si, $Eu=u$.
2. $V=R\oplus N$
3. La expresión única de u, como suma de vectores en R y en N, es $u=Eu+(u-Eu)$

Demostración de I



$(\Rightarrow)$ Por definición de operador lineal, al elegir un vector $w \in V$, mediante E, hacemos corresponder a un vector $u \in R$, tal que,

$$u = Ew \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Aplicar E: $Eu = E(Ew)$

$= E^2 w$, como $E^2 = E$

entonces $Eu = Ew$ .... (2)

Por (1): $Eu = u$

Proposición.- Cualquier proyección E es trivialmente diagonalizable. Si $\{u_1, \ldots, u_r\}$ es una base de R y $\{u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ es una base de N, entonces la base $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ diagonaliza a E.

$[E]_B = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ donde I es la matriz unidad $r \times r$.

Ejemplo 18. En el ejemplo 1, se tiene la matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1. El polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)$.

2. Del valor propio $\lambda = 1$, se obtiene el subespacio $S_{\lambda=1} = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

Del valor propio $\lambda = 0$, se obtiene el subespacio $S_{\lambda=0} = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

3. E es diagonalizable por la matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

obteniéndose $D = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. Ahora, analicemos por el lado de la imagen de E y el núcleo de E.

a) Una base de la imagen de E, se obtiene transformando la transpuesta de la matriz A en matriz escalonada.

Así: $A^T = \begin{bmatrix} ½ & ½ & 0 \\ ½ & ½ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} ½ & ½ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{por 2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_1$

Entonces una base de la imagen de E, es $R = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

es la transpuesta del primer vector fila de A_1

b) Una base del núcleo de E se halla resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} ½ & ½ & 0 \\ ½ & ½ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se obtiene: $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$

Luego: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Entonces $\ker E = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Según la proposición, la base $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

diagonaliza E: $[E]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow$ es una matriz diagonal trivial donde $I = [1]$

TEOREMA 08. Si $V = W_1 \oplus \ldots\ldots \oplus W_k$, entonces existen k operadores lineales $E_1, \ldots\ldots, E_k$ sobre V tales que:

i) Todo E_i es una proyección $(E_i^2 = E_i)$

ii) $E_i E_j = 0$, si $i \neq j$

iii) $I = E_1 + \ldots\ldots + E_k$

iv) La imagen de E_i es W_i.

Recíprocamente, si $E_1, \ldots\ldots, E_k$ son operadores lineales que satisfacen las condiciones (*i*), (*ii*) y (*iii*) y se hace que W_i sea la imagen de E_i, entonces $W = W_1 \oplus \ldots\ldots \oplus W_k$.

Demostración.-

1. Por hipótesis se tiene que: $V = W_1 \oplus \ldots\ldots \oplus W_k$.
2. Sea $\alpha \in V$, entonces $\alpha = \alpha_1 + \ldots\ldots + \alpha_k$, con $\alpha_i \in W_i$ .... (por 1.)
3. Se define el operador $E_j : V \longrightarrow V$

$$\alpha \longmapsto \alpha_j = E_j(\alpha)$$

entonces E_j es una ley bien definida y se prueba que E_j es lineal.

Veamos: Sean $\alpha = \alpha_1 + \ldots\ldots + \alpha_k$, $\alpha_i \in W_i$

$a\beta = a\beta_1 + \ldots\ldots + a\beta_k$, $\beta_i \in W_i$, $a \in I\!K$

Además: $$E_j(\alpha + a\beta) = \underbrace{E_j\alpha_1}_{=\,0} + \ldots + \underbrace{E_j\alpha_j}_{\alpha_j} + \ldots + \underbrace{E_j\alpha_k}_{0} + \underbrace{aE_j\beta_1}_{0} + \ldots + \underbrace{aE_j\beta_j}_{\beta_j} + \underbrace{aE_j\beta_k}_{0}$$

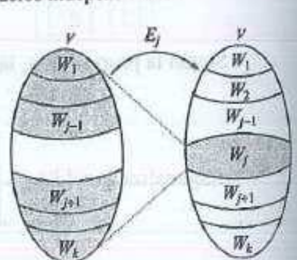
$$= \alpha_j + a\beta_j$$

$$= E_j\alpha + aE_j(\beta)$$, cada E_j es una proyección y $W_1, \ldots, W_k$ son subespacios independientes.

4. Se tiene: a) $\underbrace{\mathrm{Im}(E_j) = W_j}_{E_j(V) = W_j}$ y que $E_j^2 = E_j$

b) $\ker E_j = W_1 + \ldots + W_{j-1} + W_{j+1} + \ldots + W_k$

es el espacio nulo de E_j



en efecto, la afirmación que $E_j\alpha = 0$ solo dice que $\alpha_j = 0$, (por 3. $E_j\alpha = \alpha_j$) es decir, que α es efectivamente una suma directa de vectores de los espacios W_i con $i \neq j$, esto es, $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{j-1} + \alpha_{j+1} + \ldots + \alpha_k$, pues $\alpha_j = 0$.

5. En términos de las proyecciones E_j, se tiene:

$\alpha = \alpha_1 + \ldots\ldots + \alpha_k$, donde $\alpha_j = E_j(\alpha)$

entonces $\alpha = E_1\alpha + \ldots\ldots + E_k\alpha$, pero $\alpha = I\alpha$

$I\alpha = E_1\alpha + \ldots\ldots + E_k\alpha$

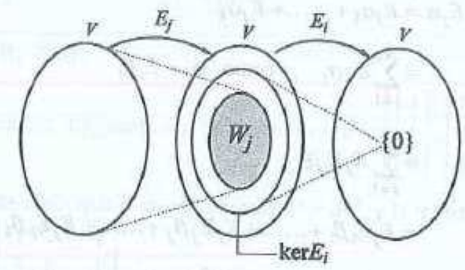
$I\alpha = (E_1 + \ldots\ldots + E_k)\alpha$, E_j es una aplicación lineal.

luego $I = E_1 + \ldots\ldots + E_k$

6. Ahora, probemos que: si $i \neq j$ entonces $E_i E_j = 0$

Veamos:

a) Se tiene que: $\mathrm{Im}(E_j) = W_j$, donde $W_j \subset \ker E_i$



Haciendo $E_iE_j(V) = E_i(E_j(V))$, $E_j(V) = W_j$ .... (por 4)

$= E_i(W_j)$, pero $W_j \subset \ker E_i$, entonces $E_i(W_j) = 0$

$= 0$

Así queda probado que $E_iE_j = 0$

Demostración de la recíproca:

1. Supongamos que $E_1, \ldots\ldots, E_k$ son operadores lineales sobre V que satisfacen las tres primeras condiciones y sea W_i la imagen de E_i,

Esto es: $E_j \; ; V \longrightarrow V$, con $i)$ $E_i^2 = E_i$

$ii)$ $E_i E_j = 0$, $\forall\, i \neq j$

$iii)$ $I = E_1 + \ldots\ldots + E_k$

además $\underbrace{E_i(V) = W_i}_{\text{imagen de } E_i}$

Debo probar que: $E_j \alpha = \alpha_j$

2. De *iii)* se deduce: $I\alpha = (E_1 + \ldots\ldots + E_k)\alpha$

(2*) $\boxed{\alpha = E_1\alpha + \ldots\ldots + E_k\alpha}$, para todo $\alpha \in V$ y $E_i\alpha \in W_i$

Entonces se cumple: $V = W_1 + \ldots\ldots + W_k$

3. La expresión dada en (2*) es única, pues si

$\alpha = \alpha_1 + \ldots\ldots + \alpha_k$, con $\alpha_i \in W_i$, donde $\alpha_i = E_i\beta_i$

Aplicar E_j :

$$
\begin{aligned}
E_j\alpha &= E_j\alpha_1 + \ldots\ldots + E_j\alpha_k \\
&= \sum_{i=1}^{k} E_j\,\alpha_i \quad , \text{ como } \alpha_i = E_i\beta_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} E_j E_i \beta_i \\
&= E_j E_1 \beta_1 + \ldots\ldots + E_j E_j \beta_j + \ldots\ldots + E_j E_k \beta_k \\
&= \quad 0 \quad + \ldots\ldots + \; E_j^2 \beta_j \; + \ldots\ldots + \quad 0 \\
&= E_j^2 \beta_j \qquad \text{pero } E_j^2 = E_j \\
&= E_j \beta_j \\
&= \alpha_j
\end{aligned}
$$

Esto muestra que V es la suma directa de los W_i .

Ejemplo 19. Sea el operador lineal $T : V \longrightarrow V$, $V = I\!R^3$ donde

$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ es la matriz de T en la base canónica.

a) Su polinomio característico es $P(x) = (x-6)^2(x-12)$.

b) El subespacio propio asociado al valor propio $x = 6$ es:

$W_1 = gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, donde $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de W_1. Además $\dim W_1 = 2$

c) El subespacio propio asociado al valor propio $x = 12$ es:

$W_2 = gen\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, donde $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de W_2 . Además $\dim W_2 = 1$.

d) Se cumple: $V = W_1 \oplus W_2$

e) Una base ordenada que diagonaliza al operador T es $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

También, podemos decir que B es una base de $V = I\!R^3$ y la matriz que diagonaliza a la matriz A es: $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Esto es: $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$, donde $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 5/6 & -2/6 \\ 2/6 & -2/6 & 2/6 \\ -1/6 & 1/6 & 2/6 \end{bmatrix}$

f) Se cumplen: $D = 6\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q_1} + 6\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q_2} + 12\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q_3}$

$$D = 6Q_1 + 6Q_2 + 12Q_3$$

$$\underbrace{P\,D\,P^{-1}}_{A} = 6\underbrace{PQ_1P^{-1}}_{E_1} + 6\underbrace{PQ_2P^{-1}}_{E_2} + 12\underbrace{PQ_3P^{-1}}_{E_3}$$

$$A = 6\,E_1 \;+\; 6\,E_2 \;+\; 12\,E_3$$

donde: $E_1 = \begin{bmatrix} 1/6 & 5/6 & -2/6 \\ 1/6 & 5/6 & -2/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 4/6 & -4/6 & 4/6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/6 & -2/6 & 2/6 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 & -2/6 \\ -1/6 & 1/6 & 2/6 \\ -2/6 & 2/6 & 4/6 \end{bmatrix}$

g) $E_1^2 = E_1$, $E_2^2 = E_2$, $E_3^2 = E_3$

h) $E_1 E_2 = 0$, $E_1 E_3 = 0$, $E_2 E_3 = 0$

i) $E_1 + E_2 + E_3 = I$

j) Ahora hallemos las imágenes de los operadores $E_j : V \longrightarrow V$, $j = 1,2,3$ cuyas matrices asociadas, en la base canónica; respectivamente, son:

$$[E_1] = \begin{bmatrix} 1/6 & 5/6 & -2/6 \\ 1/6 & 5/6 & -2/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \; [E_2] = \begin{bmatrix} 4/6 & -4/6 & 4/6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/6 & -2/6 & 2/6 \end{bmatrix} , \; [E_3] = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 & -2/6 \\ -1/6 & 1/6 & 2/6 \\ -2/6 & 2/6 & 4/6 \end{bmatrix}$$

k) La imagen de E_1 se halla, transformando la transpuesta de la matriz $[E_1]$ en matriz escalonada. Así:

$$\begin{matrix} \\ (-5) \\ (2) \end{matrix}\begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 0 \\ 5/6 & 5/6 & 0 \\ -2/6 & -2/6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Entonces } \operatorname{Im}(E_1) = gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Se obtiene de la fila 1, multiplicando por 6.

Como vemos, la $\operatorname{Im}(E_1)$ está generada por el vector propio $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, que es un elemento de la base de W_1.

De manera similar se obtienen:

$\operatorname{Im}(E_2) = gen\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, donde $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector de la base de W_1.

$\operatorname{Im}(E_3) = gen\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, donde $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es vector generador de W_2.

l) Cuando se escribe: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$; con $\alpha_i \in W_i$, $i = 1,2$

indica que $\alpha_1 = a(1,1,0) + b(2,0,1)$ y $\alpha_2 = c(-1,1,2)$

Así tendremos $\quad \alpha = a(1,1,0) + b(2,0,1) + c(-1,1,2)$

Además $\quad T\alpha = T_1\,\alpha_1 + T_2\,\alpha_2$

donde: $\quad T : V \longrightarrow V$, está definido por $T(x,y,z) = (x + 2y - z, x + z, y + 2z)$ es la base B.

$T_1 : W_1 \longrightarrow W_1$, está definido por $T_1(x,y,z) = (y + 2z, y, z)$ en la base B_1

$T_2 : W_2 \longrightarrow W_2$, está definido por $T(x,y,z) = (-x, x, 2x)$ en la base B_2

m) Existe una relación directa entre el polinomio característico $P(x) = (x-6)^2(x-12)$ y las dimensiones de los subespacios W_1 y W_2.

$2 = \dim W_1 =$ multiplicidad de $(x-6)$

$1 = \dim W_2 =$ multiplicidad de $(x-12)$

La forma matricial más sencilla de representarse el operador T es $D = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$,

donde $D_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, $D_2 = [12]$

D es la matriz mas elemental del operador T en la base $\varepsilon = \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \right\}$.

Lo cual implica que cada $(c_i - c)E_i\alpha = 0$, pero $E_i\alpha \neq 0$,

entonces $c_i - c = 0$

$$c_i = c$$

Esta igualdad nos indica que, al elegir otro escalar c, este necesariamente coincide con algún c_i.

Afirmamos que T es diagonalizable, porque
$$\begin{cases} \bullet \ \forall \beta_i \in \operatorname{Im}(E_i),\ \beta_i \text{ es un vector propio de } T. \\ \bullet \ I = E_1 + \ldots\ldots + E_k, \text{ muestra que los vectores } \beta_i \text{ generan } V. \end{cases}$$

Ahora; demostrar que el $\ker(T - c_i I) = \operatorname{Im}(E_i)$

Para ello, probar que: $\alpha = E_i\alpha$ (esto prueba que $\alpha \in \operatorname{Im}(E_i)$)

Veamos:

Si $\quad T\alpha = c_i\alpha$

entonces $\quad (T - c_i I)\alpha = 0$

Pero: $(T - c_i I)\alpha = \sum_{j-1}^{k} (c_j - c_i)E_j\alpha = 0$ para cada j

entonces $\quad E_j\alpha = 0 \ , \ j \neq i$

$$\begin{cases} \text{viene de:} \\ \bullet \quad T = c_1E_1 + \ldots\ldots + c_kE_k \\ \bullet \quad I = E_1 + \ldots\ldots + E_k \\ -c_iI = -c_iE_1 - \ldots\ldots - c_iE_k \\ T - c_iI = (c_1 - c_i)E_1 + \ldots + (c_k - c_i)E_k \end{cases}$$

Como $\quad \alpha = E_1\alpha + \ldots\ldots + E_k\alpha \quad$ y $\quad E_j\alpha = 0$, para $\ j \neq i$, se tiene que

$$\alpha = E_i\alpha$$

esta igualdad demuestra que $\alpha \in \operatorname{Im}(E_i)$ ■

7. TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN PRIMA

FORMAS CANÓNICAS

Dado un operador lineal $T: V \longrightarrow V$ de dimensión finita, tratemos de descomponer el operador T en una suma directa de operadores elementales. Esto es posible solo cuando el polinomio minimal se puede factorizar, sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), en polinomios mónicos distintos de grado 1.

La descomposición del operador T en una suma directa de operadores elementales, es equivalente a la descomposición de la matriz A asociado al operador T en la base canónica, en **OTRA MATRIZ DIAGONAL POR BLOQUES**, donde el **BLOQUE DE ENTRADA** es una matriz cuadrada que tiene una de las siguientes tres formas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

esta matriz **BLOQUE**, de entrada, está asociada a la matriz **NILPOTENTE** de índice $k = 4$ (es decir $A^4 = 0$).

Los elementos encima de la diagonal principal son 1, el resto son ceros.

la matriz **DIAGONAL** por bloques es:

$$N = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

esta matriz **BLOQUE**, de entrada, está asociada al polinomio $(x-2)^4$ donde $x = 2$ es un valor propio. Todos los elementos de la diagonal principal son el valor propio $x = 2$ y los elementos, encima de la diagonal principal son 1. El resto son ceros.

La matriz diagonal por bloques es:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

FORMA CANÓNICA DE JORDAN

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{bmatrix}$$

esta matriz **BLOQUE**, de entrada, está asociada al polinomio mónico:

$P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Los elementos de la última columna son los coeficientes de $P(x)$ con signo cambiado y los elementos de la subdiagonal son **1**. El resto son ceros. La matriz J se llama matriz acompañante del polinomio $P(x)$

La matriz diagonal por bloques es:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & -a_0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b_1 \end{array}\right]$$

FORMA RACIONAL

Aclaremos con algunos ejemplos acerca de la forma canónica de Jordan y de la forma racional.

Ejemplo 01.

Hallar todas las formas canónicas de Jordan posibles para aquellas matrices cuyos polinomios característicos $P(x)$ y mínimo $m(x)$ son:

a) $p(x)=(x-2)^4(x-3)^2$; $m(x)=(x-2)^2(x-3)^2$

b) $p(x)=(x-5)^7$; $m(x)=(x-5)^3$

Solución:

a)
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & \\ & 5 & 1 & & & & \\ & & 5 & & & & \\ & & & 5 & 1 & & \\ & & & & 5 & 1 & \\ & & & & & 5 & \\ & & & & & & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & \\ & 5 & 1 & & & & \\ & & 5 & & & & \\ & & & 5 & 1 & & \\ & & & & 5 & & \\ & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & \\ & 5 & 1 & & & & \\ & & 5 & & & & \\ & & & 5 & 1 & & \\ & & & & 5 & & \\ & & & & & 5 & \\ & & & & & & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & \\ & 5 & 1 & & & & \\ & & 5 & & & & \\ & & & 5 & & & \\ & & & & 5 & & \\ & & & & & 5 & \\ & & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

LEMA 8 :

Sea el operador lineal $T:V \longrightarrow V$ de dimensión finita. Sean $\{T\mu_1,\ldots,T\mu_p\}$ una base de la imagen del operador T y $\{v_1,\ldots,v_q\}$ una base del núcleo de T. Entonces el conjunto $\{\mu_1,\ldots,\mu_p,v_1,\ldots,v_q\}$ es la base de V.

Además: $\dim V=\dim(\operatorname{Im}(T))+\dim(\ker(T))=p+q$

Aplicando el lema, resolver el siguiente ejemplo:

Ejemplo 02.

Problema.- Sea el operador nilpotente $T:V \longrightarrow V$, de índice 2 en un espacio vectorial V de dimensión finita.

Si p es el rango de T, se pide:

a) hallar una base de V.

b) hallar la matriz de T en la base V.

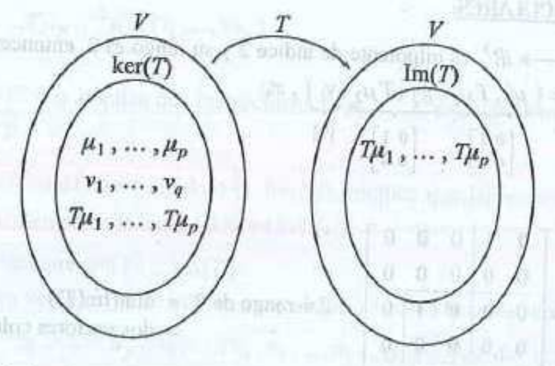
Solución:

- Si T es un operador nilpotente de índice 2, entonces $T\neq 0$; $T^2=0$.
- Como el rango de T es p, entonces $p=$ rango $T=\dim(\operatorname{Im}(T))$ y tomemos una base $\{T\mu_1,\ldots,T\mu_p\}$ de la $\operatorname{Im}(T)$.
- La condición $T^2=0$ implica $\operatorname{Im}(T)\subset\ker(T)$

Pues: $T(\mu)\in\operatorname{Im}(T) \Rightarrow T(T(\mu))\in\operatorname{Im}(T)$
$\Rightarrow T^2(\mu)\in\operatorname{Im}(T)$

Pero $T^2(\mu)=0$ entonces $T(T(\mu))=0$ implica $T(\mu)\in\ker(T)$

- Si $\operatorname{Im}(T)\subset\ker(T)$, entonces existen vectores $v_1,\ldots,v_q$ tales que $A=\{T\mu_1,\ldots,T\mu_p,v_1,\ldots,v_q\}$ es una base del $\ker(T)$.
- Si $\{T\mu_1,\ldots,T\mu_p\}$ es una base de la $\operatorname{Im}(T)$, entonces $\{\mu_1,\ldots,\mu_p\}$ es una base de algún subespacio de V.



- Por el lema, deducimos que el conjunto:
$B=\{\mu_1,T\mu_1,\ldots,\mu_p,T\mu_p,v_1,\ldots,v_q\}$ es una base de V y por tanto, $\dim V=2p+q$.

b) Respecto de la base B, la matriz del operador nilpotente $T: V \longrightarrow V$, de índice 2, está formado por "p" bloques de matrices 2×2 del tipo $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ a lo largo de la diagonal, seguida de "q" columnas nulas.

$$\left[\begin{array}{cccccccc} \boxed{\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}} & & & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}} & & & & \\ & & & & \boxed{0} & & & \\ & & & & & \boxed{0} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \boxed{0} \end{array}\right]$$

p bloques de matrices del tipo $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ — q columnas nulas

$\therefore$

<u>CASOS PARTICULARES</u>:

a) Si $T: I\!R^5 \longrightarrow I\!R^5$ es nilpotente de índice 2 y su rango es 2, entonces la matriz de T en la base $B = \{ \underbrace{\mu_1, T\mu_1}_{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}}, \underbrace{\mu_2, T\mu_2}_{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}}, \underbrace{v_1}_{[0]} \}$, es:

$$[T]_B = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} 2 = \text{rango de } T &= \dim(\mathrm{Im}(T)) \\ &= \text{dos vectores columnas canónicas} \end{aligned}$$

2 bloques del tipo $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ — una columna nula

b) Si $T: I\!R^5 \longrightarrow I\!R^5$ es nilpotente de índice 2 y su rango es 1, entonces la matriz de T en la base $B = \{ \underbrace{\mu_1, T\mu_2}_{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}}, \underbrace{v_1}_{[0]}, \underbrace{v_2}_{[0]}, \underbrace{v_3}_{[0]} \}$, es:

$$[T]_B = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} 1 = \text{rango de } T &= \dim(\mathrm{Im}(T)) \\ &= \text{un vector columna canónico} \end{aligned}$$

Ejemplo 03. Consideremos un operador nilpotente $T: V \longrightarrow V$ de índice 3. En este caso ocurre lo siguiente.

a) Porque $T^3 = 0$, entonces los vectores $T\mu_1, T^2\mu_2, \ldots, T\mu_p, T^2\mu_p$ son elementos de la base de la $\mathrm{Im}(T)$.

b) Como la restricción de T al subespacio invariante $\mathrm{Im}(T)$ es un operador nilpotente de índice 2, esto es $T^2 = 0$, entonces los vectores $Tv_1, \ldots, Tv_q$, son, también, elementos de la $\mathrm{Im}(T)$.

En consecuencia, una base de la imagen de $(\mathrm{Im}(T))$, es:

$\{T\mu_1, T^2\mu_1, \ldots, T\mu_p, T^2\mu_p, Tv_1, \ldots, Tv_q\}$

c) La condición $T^3 = 0$ implica que los vectores $T^2\mu_1, \ldots, T^2\mu_p$ son elementos de la base del núcleo de T.

La condición $T^2 = 0$ (T restringido a la $\mathrm{Im}(T)$), implica que los vectores $Tv_1, \ldots, Tv_q$ son también elementos de la base del NÚCLEO de T.

Todo esto implica que $\mathrm{Im}(T) \subset \ker(T)$.

Además, existen vectores $w_1, \ldots, w_r$ que son elementos de la base del $\ker(T)$.

Luego, $A = \{T^2\mu_1, \ldots, T^2\mu_p, Tv_1, \ldots, Tv_q, w_1, \ldots, w_r\}$ es una base del $\ker(T)$.

d) Porque $\{T\mu_1, \ldots, T\mu_p\}$ son elementos de V, entonces $\{\mu_1, \ldots, \mu_p\}$ son elementos de V.

Ejemplo 08. Sea el operador lineal $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ definido por $T(x,y)=(0,x)$

Se pide:

a) Hallar la matriz de T en la base canónica.

b) Dado el polinomio $g(x)=a+bx$, hallar:

i) El operador $g(T)$, y

ii) La matriz $g(A)$, siendo A la matriz hallada en a).

c) Dado el vector $\varepsilon_1=(1,0)$, hallar el subespacio: $W=\{g(T)\varepsilon_1 / g\in I\!K[x]\}$

d) ¿Se cumple $W=I\!R^2$?

e) Dado el vector $\varepsilon_1=(1,0)$, hallar los vectores $T\varepsilon_1, T^2\varepsilon_1, T^3\varepsilon_1, \ldots\ldots$ y formar un subespacio que tenga como base el conjunto $\{\varepsilon_1, T\varepsilon_1, T^2\varepsilon_2, \ldots, T^{k-1}\varepsilon_1\}$, tal que $T^k=0$, $k\in \mathbb{Z}^+$.

f) Dado el vector $\varepsilon_2=(0,1)$, formar la sucesión $\varepsilon_2, T\varepsilon_2, T^2\varepsilon_2, \ldots$; hasta que $T^k\varepsilon_2=(0,0)$.

Solución:

a) La matriz de $T(x,y)=(0,x)$, en la base canónica, es $A=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

b) Si $g(x)=a+bx$, entonces:

i) $g(T)=aI+bT$

ii) $g(A)=aI+bA=a\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\b&a\end{bmatrix}$

c) El subespacio W, tal como está definido, se halla haciendo la multiplicación $g(A)\varepsilon_1$:

$$g(A)\varepsilon_1=\begin{bmatrix}a&0\\b&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}, \text{ donde } a,b\in I\!R$$

Entonces $W=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}: a\in I\!R, b\in I\!R\right\}$

d) Por los resultados obtenidos en c), se cumple $W=I\!R^2$.

Definición.- Sea $\varepsilon_1=(1,0)$ un vector de $I\!R^2$, el subespacio

$$Z(\varepsilon_1,T)=\{g(T)\varepsilon_1 / g\in I\!K[x]\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}: a\in I\!R \ , \ b\in I\!R\right\}$$

Se llama subespacio T-cíclico generado por ε_i.

e) Si $\varepsilon_1=(1,0)\equiv\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, entonces:

$$T\varepsilon_1=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$T^2\varepsilon_1=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \qquad \text{donde } T^2\equiv A^2=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Así hemos obtenido el conjunto $\{\varepsilon_1, T\varepsilon_1\}=\{(1,0),(0,1)\}$. Este conjunto constituye una base de un subespacio, que la denotamos por $Z(\varepsilon_1,T)$. Siendo así, se tiene que $\dim Z(\varepsilon_1,T)=2$.

$$Z(\varepsilon_1,T)=gen\{\varepsilon_1, T\varepsilon_1\}$$
$$=gen\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\} \quad , \quad T\varepsilon_1=\varepsilon_2$$

Aquí, ε_1 es un vector cíclico.

f) $\varepsilon_2=(0,1)$

$$T\varepsilon_2=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

En este caso, con el mismo operador T, hemos obtenido el subespacio cíclico $Z(\varepsilon_2,T)=gen\{\varepsilon_2\}$, generado por ε_2, donde $\dim Z(\varepsilon_2,T)=1$

Si la $\dim Z(\varepsilon_2,T)=1$, entonces ε_2 es un vector propio del operador T.

Verifiquemos

De la matriz $A=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$ obtenemos:

i) El polinomio característico $f(t)=t^2$

ii) Un valor propio es $t=0$

iii) El vector propio asociado a $t=0$, se obtiene resolviendo:

$$(A-0I)X=0$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=0$$

$$x_1=0 \quad , \quad \text{entonces} \quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\x_2\end{bmatrix}=x_2\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{\text{VECTOR PROPIO}}$$

- Si $\{\varepsilon_1, T\varepsilon_1\}$ es una base de $Z(\varepsilon_1,T)$, entonces:

$$a\varepsilon_1+bT\varepsilon_1=0 \qquad \text{implica } a=0 \text{ y } b=0$$

$$(aI+bT)\varepsilon_1=0 \quad , \quad \text{pero } \varepsilon_1\neq(0,0)$$

$$\Rightarrow \quad aI+bT=0$$

$$\Rightarrow \quad a+bt=0$$

En este caso, el polinomio $f(t)=a+bt$ se llama el *T*-aniquilador de ε_1 y $Z(\varepsilon_1,T)$.

Ejemplo 09. Sea T el operador lineal sobre $I\!R^3$ representado en la base ordenada canónica por la matriz.

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

Demostrar que *T* no tiene vector cíclico. ¿Cuál es el subespacio *T*-cíclico generado por el vector $(1,-1,3)$?

Solución:

- Haciendo sucesivas multiplicaciones: $A, A^2, A^3, \ldots, A^n$; vamos a obtener recursivamente que:

$$A^n=\begin{bmatrix}2^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&(-1)^n\end{bmatrix} \quad , \quad n=1,2,3,\ldots$$

- ¿Habrá un vector $X\neq 0$, tal que, $A^nX=0$?

Veamos:

$$\begin{bmatrix}2^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&(-1)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \text{ implica } \begin{cases}2^nx=0\\2^ny=0\\(-1)^nz=0\end{cases} \Leftarrow$$

en estas ecuaciones se tiene $2^n\neq 0$, $\forall n$, $(-1)^n\neq 0$, $\forall n$.

Lo único que podría ocurrir es que $x=0$, $y=0$, $z=0$. Pero sería un absurdo, ya que $X\neq(0,0,0)$

En consecuencia T no tiene vector cíclico.

- El subespacio *T*-cíclico generado por $v=(1,-1,3)$ se obtiene formando la sucesión: $v, Tv, T^2v, T^3v, \ldots, T^{k-1}v, T^kv$

Se llega a la conclusión que: $T^kv=\begin{bmatrix}2^k\\-2^k\\3(-1)^k\end{bmatrix}$, $k=0,1,2,\ldots$

donde T^kv es equivalente a: $A^kv=\begin{bmatrix}2^k&0&0\\0&2^k&0\\0&0&(-1)^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^k\\-2^k\\3(-1)^k\end{bmatrix}$

En consecuencia $\{z(v,T)=(2^k,-2^k,3(-1)^k\,/\,k=0,1,2,\ldots\}$

Ejemplo 10. Sea T el operador lineal $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ definido por:

$$T(x,y)=(2x+y,2y)$$

a) Hallar la matriz en la base ordenada canónica.

b) Sea W_1 el subespacio de $I\!R^2$ generado por el vector $\varepsilon_1 = (1,0)$.

c) Demostrar que W_1 es invariante por T.

d) Demostrar que no existe un subespacio W_2 que es invariante por T y que es complementario de W_1: $I\!R^2 = W_1 \oplus W_2$.

Solución:

a) $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

La matriz de T en la base ordenada canónica es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) El polinomio característico y el polinomio minimal coinciden y es:

$$P(t) = m(t) = (t-2)^2$$

El único vector propio asociado a $t = 2$ es $\varepsilon_1 = (1,0)$. Luego, el único subespacio propio, invariante por T, generado por el vector $\varepsilon_1 = (1,0)$ es $W_1 = gen\{\varepsilon_1\}$

c) Si al elegir un vector $v \in W_1$, se prueba que $T(v) \subset W_1$, entonces W_1 es invariante por T.

Veamos:

Si $v \in W_1$ entonces $v = \alpha(1,0)$, $\alpha \in I\!R$

Aplicar T: $T(v) = \alpha\, T(1,0)$

$= \alpha(2,0) = 2\alpha(1,0) \in W_1$

Luego, W_1 es invariante por T.

d) Por la parte b) afirmamos que no existe un subespacio W_2 que es invariante por T y que es complemento de W_1, tal que, $I\!R^2 = W_1 \oplus W_2$.

Ejemplo 11. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

a) ¿Es A una matriz nilpotente?

b) Hallar el subespacio invariante por T, generado por los vectores $T^k\alpha$, $k \geq 0$.

c) Hallar la forma canónica de Jordan de la matriz nilpotente.

Solución:

a) $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & -6 \end{bmatrix}$, $A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Afirmamos que A es una matriz nilpotente de índice $k = 3$

b) Fijar un vector $\alpha \in V = I\!R^3$, tal que $T^2\alpha \neq 0$.

No podíamos elegir el vector $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$, con $a \neq 0$.

Pero, si podríamos elegir el vector $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Así tendremos: $\varepsilon_1 , T\varepsilon_1 , T^2\varepsilon_1$

donde: $T\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$T^2\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

Así, hemos obtenido el subespacio $Z(\varepsilon_1, T)$ generado por los vectores $\{\varepsilon_1, T\varepsilon_1, T^2\varepsilon_1\}$.

Esto es: $Z(\varepsilon_1, T) = gen\{(1,0,0), (-2,1,-1), (6,0,6)\}$.

- Afirmamos que: $Z(\varepsilon_1, T) = V$, $V = I\!R^3$; porque la $\dim Z(\varepsilon_1, V) = 3$.

  En este caso decimos que $\varepsilon_1 = (1,0,0)$ es ***un vector cíclico*** de T.

c) La forma canónica de Jordan de la matriz nilpotente A de índice 3, es:

$$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ Diagonal de valores propios.

La matriz B se obtiene del polinomio minimal de la matriz A. Veamos, ¿cómo es esto?

El polinomio característico y el polinomio minimal de A coinciden y son: $P(t)=t^3$, $m(t)=t^3$.

El único valor propio es $t=0$, que es una raíz de $P(t)$ que se repite tres veces, entonces la forma canónica de Jordan de la matriz nilpotente A de índice 3 es B.

Ejemplo 12. Sea $T:V\longrightarrow V$ es operador lineal sobre el espacio V. Probar que los siguientes subespacios es invariante bajo T:

a) $\{0\}$, b) V , c) núcleo de T , d) imagen de T.

Solución:

a) Sea $W=\{0\}$ el subespacio nulo de T. Debo probar que $T(0)\in W$.

Veamos:

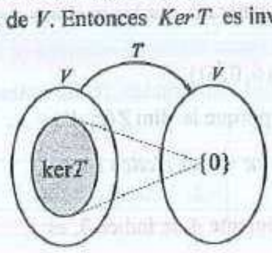
Por hipótesis $0\in W$. Pero $T(0)=0\in W$, entonces W es invariante bajo T.

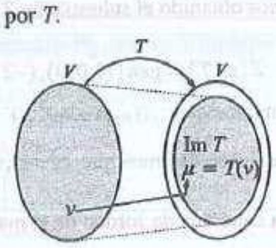
b) Sea $v\in V$, debo probar que $Tv\in V$. La proposición $Tv\in V$ es verdadero, por definición del operador lineal T, entonces V es invariante por T.

c) Eligiendo un vector $\mu\in Ker\,T$, debo probar que $T(\mu)\in Ker\,T$.

Veamos:

Si $\mu\in Ker\,T$, entonces $T(\mu)=0$. Pero $T(\mu)=0\in Ker\,T$, porque el $Ker\,T$ es un subespacio de V. Entonces $Ker\,T$ es invariante por T.





d) Se debe probar que $T(v)\in \operatorname{Im} T$, siempre que, $v\in \operatorname{Im} T$.

Por definición de imagen directa, es verdadero la proposición:
$T(v)\in \operatorname{Im} T$ para todo $v\in V$. En particular, también es verdadero cuando $v\in \operatorname{Im} T$.

Por tanto, la imagen de T es invariante bajo T.

Ejemplo 13. Supóngase que $\{W_i\}$ es una colección de subespacios T-invariantes de un espacio vectorial V. Probar que la intersección $W=\bigcap_{i=1} W_i$ es también T-invariante.

Demostración:

- Eligiendo el vector $v\in W$ se debe probar que $T(v)\in W$.
- **Veamos:**

  Sea $v\in W=\bigcap_{i=1} W_i$, entonces $v\in W_i$ para todo i.
- Como W_i es T-invariante, entonces $T(v)\in W_i$ para todo i.
- Lo cual implica que $T(v)\in \bigcap_{i=1} W_i = W$ ■

PROBLEMAS PROPUESTOS

GRUPO 01

01 Determinar los subespacios invariantes de $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ vista como operador lineal en:

a) $I\!R^2$ b) C^2

Respuesta: a) $I\!R^2$ y $\{0\}$

b) C^2 , $\{0\}$, $W_1=L((2,1-2i))$, $W_2=((2,1+2i))$

02 Hallar todas las formas canónicas de Jordan posibles para aquellas matrices cuyos polinomios característicos $p(t)$ y mínimo $m(t)$ son:

a) $p(t)=(t-2)^4(t-3)^3$, $m(t)=(t-2)^2(t-3)^2$

b) $p(t)=(t-7)^5$, $m(t)=(t-7)^2$

c) $p(t)=(t-3)^4(t-5)^4$, $m(t)=(t-3)^2(t-5)^2$

Respuestas:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & & & \\ & & 7 & 1 & \\ & & & 7 & \\ & & & & 7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & & & \\ & & 7 & & \\ & & & 7 & \\ & & & & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & 5 \end{bmatrix}$

03 Encontrar todas las formas canónicas racionales posibles para:

a) matrices 6×6 con polinomio mínimo $m(t)=(t^3+3)(t+1)^2$

b) matrices 6×6 con polinomio mínimo $m(t)=(t+1)^3$

c) matrices 8×8 con polinomio mínimo $m(t)=(t^2+2)^2(t+3)^2$

Respuesta:

a) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -3 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -3 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & -2 & & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -3 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & 1 & -2 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & -3 & & & \\ 0 & 1 & -3 & & & \\ & & & 0 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 & -3 \\ & & & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & -3 & & & \\ 0 & 1 & -3 & & & \\ & & & 0 & -1 & \\ & & & 1 & -2 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & -3 & & & \\ 0 & 1 & -3 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & -4 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & -2 & & \\ & & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & -9 \\ & & & & & & 1 & -6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & -4 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & -9 & & \\ & & & & 1 & -6 & & \\ & & & & & & 0 & -9 \\ & & & & & & 1 & -6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & -4 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & -9 & & \\ & & & & 1 & -6 & & \\ & & & & & & -3 & \\ & & & & & & & -3 \end{bmatrix}$

04 Si F es el campo de los números racionales, encuéntrese todas las formas canónicas racionales posibles y todos los divisores elementales para:

a) Las matrices 6×6 en F_6 que tienen $(x-1)(x^2+1)^2$ como polinomio mínimo.

b) Las matrices 15×15 en F_{15} que tienen $(x^2+x+1)^2(x^3+2)^2$ como polinomio mínimo.

c) Las matrices 10×10 en F_{10} que tienen $(x^2+1)^2(x^3+1)$ como polinomio mínimo.

05 Sea $\mathfrak{L}(V)=\{T:V\longrightarrow V\,,\,T$ es un operador lineal$\}$.
Demostrar que: Si λ es un valor propio de T, entonces $P(\lambda)$ es un valor propio de $P(T)$, para algún polinomio $p(x)$. También, si $\lambda\neq 0$, entonces λ^{-1} es un autovalor de T^{-1}.

06 Un operador $T\in\mathfrak{L}(V)$ es ***nilpotente*** si $T^n=0$ para algún $n\in I\!N$.

a) Demostrar que, si T es nilpotente, entonces 0 es un autovalor de T y es el único valor propio de T.

b) Encontrar un operador T que tiene 0, y sólamente 0 es un autovalor, pero no es nilpotente.

07 Demostrar que si $T,U\in\mathfrak{L}(V)$, entonces TU y UT tienen los mismos autovalores.

08 Suponer que $T,U\in\mathfrak{L}(V)$. Demostrar que si $TU=UT$, entonces T y U tienen un autovalor común.

09 Sea P una proyección. Demostrar que $Ker(I-P)=\mathrm{Im}(P)$ y $\mathrm{Im}(I-P)=\ker(P)$.

10 Una ***involución*** es un operador lineal θ que cumple $\theta^2=I$, I: identidad. Si T es idempotente, ¿qué puede decir acerca de $2T-I$?

GRUPO 02

Hallar la forma canónica B de la base ortogonal A y una matriz diagonal Q tal que $B=Q^{-1}AQ$:

01 $A=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

02 $A=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

03 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

04 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Respuestas:

01 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{6} & 0\\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{bmatrix}$

02 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3}\\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0\\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

03 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

04 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$, $Q=\frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

05 Para la matriz unitaria dada $A=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}4+3i & 4i & -6-2i\\ -4i & 4-3i & -2-6i\\ 6+2i & -2-6i & 1\end{bmatrix}$ hallar una matriz diagonal B y una matriz unitaria Q tales que $B=Q^{-1}AQ$.

Respuesta:

$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & i & 0\\ 0 & 0 & -i\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}i\\ -\frac{2}{3}i & \frac{1}{3}i & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}i & -\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$

- Hallar una base ortonormal formada por los vectores propios y la matriz B en esta base para la transformación lineal, dada en una base ortonormal por la matriz A (la base buscada no se determina unívocamente).

06 $A=\begin{bmatrix}11 & 2 & -8\\ 2 & 2 & 10\\ -8 & 10 & 5\end{bmatrix}$ **07** $A=\begin{bmatrix}17 & -8 & 4\\ -8 & 17 & -4\\ 4 & -4 & 11\end{bmatrix}$ **08** $A=\begin{bmatrix}2 & -i & 0\\ i & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

Respuestas:

06 $v_1=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $v_2=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$, $v_3=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $B=\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 18 & 0\\ 0 & 0 & -9\end{bmatrix}$

07 $v_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $v_2=\left(\frac{1}{\sqrt{18}},-\frac{1}{\sqrt{18}},-\frac{4}{\sqrt{18}}\right)$, $B=\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 27\end{bmatrix}$

08 $v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,0)$, $v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0)$, $v_3=(0,0,1)$, $Bi=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

- Para la matriz dada A, hallar una matriz diagonal B y una matriz unitaria C, tales que $B=C^{-1}AC$.

09 $A=\begin{bmatrix}3 & 2+2i\\ 2-2i & 1\end{bmatrix}$ **10** $A=\begin{bmatrix}3 & 2-i\\ 2+i & 7\end{bmatrix}$

Respuesta:

09 $B=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}\frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

10 $B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}$; $C=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2-i & 1\\ -1 & 2+i\end{bmatrix}$

♦ Expresar las siguientes matrices en forma de un producto de una matriz simétrica con números característicos positivos por una matriz ortogonal.

11 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **12** $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ **13** $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Respuesta:

11 $\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$

12 $\begin{bmatrix} \frac{5}{2}\sqrt{2} & -\frac{3}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{5}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} \frac{14}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{17}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{14}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

CAPÍTULO 7

ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

7.1 PRODUCTOS INTERNOS

Definición.- Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$

Un ***producto interno*** sobre V es una función $\langle\,,\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ que a cada par de vectores $\mu, v \in V$ le asigna un escalar $\langle \mu, v\rangle$ de $\mathbb{C}$, llamado producto interno de μ por v, de modo que sean válidas las siguientes propiedades:

a) $\left.\begin{array}{l} \langle \mu + v, w\rangle = \langle \mu, w\rangle + \langle v, w\rangle \\ \langle \mu, v + w\rangle = \langle \mu, v\rangle + \langle \mu, w\rangle \end{array}\right\}$ bilinealidad $\mu, v, w \in V$

b) $\langle \alpha\,\mu, v\rangle = \alpha\langle \mu, v\rangle$, $\mu, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$

c) $\langle \mu, v\rangle = \overline{\langle v, \mu\rangle}$, la barra indica la conjugación compleja , $\mu \in V$, $v \in V$

d) $\langle \mu, \mu\rangle > 0$, Si $\mu \neq 0$, $\mu \in V$

e) Por (a), (b), (c) y (d) se cumple: $\langle \mu, \alpha\, v + w\rangle = \overline{\alpha}\langle \mu, v\rangle + \langle \mu, w\rangle$

OBSERVACIÓN. Si elegimos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y teniendo en cuenta la función

$$\begin{aligned} \langle\,,\rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mu, v) &\longmapsto \langle \mu, v\rangle \end{aligned}$$

se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\langle \mu + v, w\rangle = \langle \mu, w\rangle + \langle v, w\rangle$ .... bilinealidad

$\langle \mu, v + w\rangle = \langle \mu, v\rangle + \langle \mu, w\rangle$

b) $\langle \alpha\, u, v\rangle = \alpha\,\langle \mu, v\rangle$

$\langle \mu, \alpha\, v\rangle = \alpha\,\langle \mu, v\rangle$

c) $\langle v, \mu\rangle = \langle \mu, v\rangle$ .... conmutatividad (simetría)

d) $\langle \mu, \mu\rangle > 0$, si $\mu \neq 0$ .... positividad

$\boxed{\text{Ejemplo 01}}$ Si la función $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos por $(\mu, v) \longmapsto \langle \mu, v \rangle$

$$\langle \mu, v\rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2 \text{ , donde } \begin{cases} \mu = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Se pregunta ¿es $\langle\ ,\ \rangle$ un producto interno sobre $\mathbb{R}^2$?

Solución:

Propiedad (a): Elegimos los vectores $\mu = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$, $w = (z_1, z_2)$ en $\mathbb{R}^2$ donde $\mu + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$.

Luego
$$\begin{aligned}\langle \mu + v, w\rangle &= \langle (x_1 + y_1, x_2 + y_2), (z_1, z_2)\rangle \\ &= (x_1 + y_1)z_1 - (x_2 + y_2)z_1 - (x_1 + y_1)z_2 + 4(x_2 + y_2)z_2 \\ &= \underbrace{x_1z_1 - x_2z_1 - x_1z_2 + 4x_2z_2}_{\langle \mu, w\rangle} + \underbrace{y_1z_1 - y_2z_1 - y_1z_2 + 4y_2z_2}_{\langle v, w\rangle}\end{aligned}$$

De manera similar se cumplen (b) y (c)

Propiedad (d): Elegir $\mu = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, con $\mu \neq (0,0)$.

$$\begin{aligned}\langle \mu, \mu\rangle &= x_1x_1 - x_2x_1 - x_1x_2 + 4x_2x_2 \\ &= \underbrace{x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2}_{\text{Completar cuadrados.}} \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 > 0\end{aligned}$$

Conclusión: $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno sobre $\mathbb{R}^2$

$\boxed{\text{Ejemplo 02}}$ En $\mathbb{C}^n$ existe un producto interno que se llama ***producto interno canónico***. Está definido sobre $\mu = (x_1, \ldots, x_n)$ y $v = (y_1, \ldots, y_n)$ por:

$$\langle \mu, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i \quad ; \quad x_i \in \mathbb{C} \quad , \quad y_i \in \mathbb{C}$$

- En $\mathbb{R}^n$ el producto interno canónico está definido por:

$$\langle \mu, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \text{ , donde } \mu = (x_1, \ldots, x_n),\ v = (y_1, \ldots, y_n) \text{ son vectores de } \mathbb{R}^n .$$

$\boxed{\text{Ejemplo 03}}$ Sea $V = C^o[a,b]$ el espacio vectorial cuyos elementos son las funciones continuas $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Un producto interno en V está definido por:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

OBSERVACIONES:

a) Un método de construir nuevos productos internos a partir de uno dado, es el siguiente:

Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y supóngase que:

$\langle\ ,\ \rangle : W \times W \longrightarrow \mathbb{K}$ es un producto interno sobre W.
$(\mu, v) \longmapsto \langle \mu, v\rangle$

Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal no singular entonces la igualdad $p_T(\mu, v) = \langle T\mu, Tv\rangle$ define un producto interno p_T sobre V, esto es:

$$\begin{aligned} p_T : V \times V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\mu, v) &\longmapsto p_T(\mu, v) = \langle T\mu, Tv\rangle \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ejemplo 04}}$ Sea $\mathbb{R}^{n\times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} : a_{i1} \in \mathbb{R} \right\}$ el espacio de las matrices (columnas) $n\times 1$ sobre $\mathbb{R}$, y sea $Q = (b_{ij})_{n\times n}$ una matriz inversible $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$. La función:

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^{n\times 1} \times \mathbb{R}^{n\times 1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto \langle X, Y\rangle = Y^t Q^t Q X \end{aligned}$$

define un producto interno.

b) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ una base ordenada de V.

Por otra parte: la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ de $(I\!R^3)^*$, que es dual a la base $\{\underset{\mu_1}{(1,0,1)}, \underset{\mu_2}{(1,0,-1)}, \underset{\mu_3}{(0,3,0)}\}$ esta definida explícitamente por:

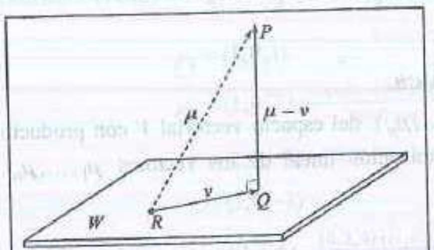
$$f_1(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1+x_3}{2}$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{3}x_2$$

En general, cada funcional f_j es: $f_j(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{\langle (x_1,x_2,x_3),\mu_j\rangle}{\|\mu_j\|^2}$

En geometría del espacio hay un problema geométrico que se refiere a la distancia de un punto P de $V = I\!R^3$ a un plano $W=\{(x,y,z)\in I\!R^3 \,/\, ax+by+cz=0\}$.



$\mu=\overrightarrow{RP}=P-R$

$v=\overrightarrow{RQ}=Q-R$

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{RP}-\overrightarrow{RQ}$

$=\mu-v$

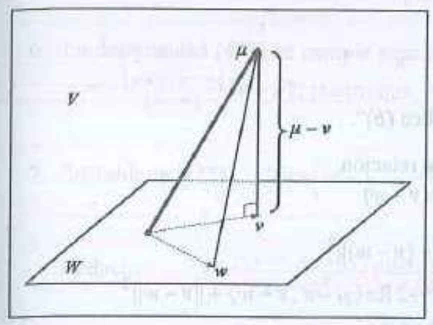
La distancia de P a W es la longitud del segmento PQ que es perpendicular al plano W.

$\|P-Q\|$ es la longitud del segmento PQ. Tener en cuenta que toda recta contenida en el plano W es perpendicular a PQ.

Este problema se puede plantear así: dado un punto $P\in I\!R^3$ ¿existe algún punto $Q\in W$, tal que, $\|P-Q\|$ es la mínima longitud de las longitudes $\|P-R\|$ para todo $R\in W$?

En términos de vectores que pertenecen a un espacio vectorial V de producto interno, el planteamiento del problema es más elegante.

Sea W un subespacio de un espacio vectorial V con producto interno y sea μ un vector arbitrario de V, existe un único vector $v\in W$, tal que $\|\mu-v\|\le\|\mu-w\|\ \ \forall\, w\in W$.



La longitud del vector $\mu-v$ es menor que la longitud de $\mu-w$ para todo vector w perteneciente al subespacio W.

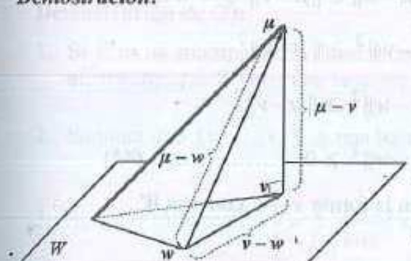
Una ***mejor aproximación*** a μ por vectores de W es un vector v de W, tal que $\|\mu-v\|\le\|\mu-w\|$, $\forall\, w\in W$ y $\mu-v$ será ortogonal al vector $w\in W$.

Este problema queda resuelto por el:

TEOREMA 4. Sea W un subespacio de un espacio con producto interno V y sea μ un vector de V.

1) El vector v en W es una mejor aproximación a μ, por vectores de W si, y solo si, $\mu-v$ es ortogonal a todo vector de W.
2) Si existe una mejor aproximación a μ por vectores de W, es única.
3) Si W es de dimensión finita y $\{v_1,\dots,v_n\}$ es cualquier base ortogonal de W, entonces el vector $v=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\langle\mu,v_k\rangle}{\|v_k\|^2}$ es la (única) mejor aproximación a μ por vectores de W.

Demostración:



- En (1) el enunciado: "v es la mejor aproximación a μ", significa que $\|\mu-v\|$ es ínfimo si, y solo si el vector $\mu-v$ es ortogonal a todo vector $w\in W$.
- En (2): v es única.
- en (3): v es combinación lineal de los vectores $v_1,\dots,v_n$.

Demostración de (1):

Se debe demostrar la validez de dos condicionales: $(a) \longrightarrow (b)$ y $(b) \longrightarrow (a)$, donde:

(a) $\mu - v$ es ortogonal a todo vector de W.

(b) $\|\mu - v\| \leq \|\mu - w\|$, $\forall\, w \in W$.

Veamos:

$(\Rightarrow)$ $\quad (a) \Rightarrow (b)$ $\quad$ "debo probar que (a) implica (b)".

1. En primer lugar, tener en cuenta la siguiente relación:
$$\mu - w = (\mu - v) + (v - w)$$

2. Aplicar **NORMA**:
$$\|\mu - w\|^2 = \|(\mu - v) + (v - w)\|^2$$
$$= \|\mu - v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \mu - v, v - w\rangle + \|v - w\|^2$$

3. Supongamos que $\mu - v$ es ortogonal a todo vector de W. Un vector de W es $v - w$, si $w \in W$, con $w \neq v$; $v \in W$ (por hipótesis).

   Si $\mu - v$ es ortogonal al vector $v - w$, entonces $\langle \mu - v, v - w\rangle = 0$.

   Luego en 2. tendremos : $\|\mu - w\|^2 = \|\mu - v\|^2 + \|v - w\|^2$

   De aquí se deduce : $\|\mu - w\|^2 > \|\mu - v\|^2$, $\forall\, w \in W$

   Lo cual prueba que : $\|\mu - v\| < \|\mu - w\|$, $\forall\, w \in W$ ∎

   Así hemos probado que (a) implica (b).

$(\Leftarrow)$ $\quad$ (b) $\Rightarrow$ (a)

4. Recíprocamente, supóngase $\quad \|\mu - w\| \geq \|\mu - v\|$, $\forall\, w \in W$
$$\|\mu - w\|^2 \geq \|\mu - v\|^2$$

   Por 2. $\quad \|\mu - v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \mu - v, v - w\rangle + \|v - w\|^2 \geq \|\mu - v\|^2$

   Cancelar $\|\mu - v\|^2$: $\quad 2\operatorname{Re}\langle \mu - v, v - w\rangle + \|v - w\|^2 \geq 0$ .... (4*)

   Como todo vector de W puede ser expresado en la forma $v - w$ con $w \in W$.

   Haciendo $v - w = x$, tendremos en (4*):

   (4**) .... $2\operatorname{Re}\langle \mu - v, x\rangle + \|x\|^2 \geq 0$, $\forall\, x \in W$

5. La proyección ortogonal del vector $\mu - v$ sobre el vector $v - w$ está dado por:
$$\frac{\langle \mu - v, v - w\rangle}{\|v - w\|^2}(v - w)$$

6. La desigualdad (4**) se cumple para todo $x \in W$. En particular se cumple si elegimos $x = -\frac{\langle \mu - v, v - w\rangle}{\|v - w\|}(v - w)$, puesto que $v \in W$, $w \in W$, $v \neq w$.

7. Sustituir en (4**): $\quad 2\operatorname{Re}\left\langle \mu - v, -\frac{\langle \mu - v, v - w\rangle}{\|v - w\|^2}(v - w)\right\rangle + \left\| -\frac{\langle \mu - v, v - w\rangle}{\|v - w\|^2}(v - w)\right\|^2 \geq 0$

   Reducir: $\quad -2\frac{|\langle \mu - v, v - w\rangle|^2}{\|v - w\|^2} + \frac{|\langle \mu - v, v - w\rangle|^2}{\|v - w\|^2} \geq 0$
$$-\frac{|\langle \mu - v, v - w\rangle|^2}{\|v - w\|^2} \geq 0$$

   Esta desigualdad no puede ser negativa, sólo podrá ser cero. Esto es: $\langle \mu - v, v - w\rangle = 0$

   Esta igualdad prueba que $\mu - v$ es ortogonal a $v - w$.

   Así hemos probado que (b) implica (a). ∎

Demostración de (2): "v es única".

La condición de ortogonalidad es satisfecha por, a lo más, un vector de W. Esto es, no habrá otro vector v', tal que $\langle \mu - v', v' - w\rangle = 0$. Si lo hubiera, ocurrirá que $v' = v$.

Demostración de (3):

1. Si W es un subespacio de dimensión finita de V, entonces por el corolario del teorema 3, afirmamos que W tiene una base ortogonal.

2. Suponer que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortogonal cualquiera de W.

3. Si $v \in W$ entonces $\quad v = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle v, v_k\rangle}{\|v_k\|^2} v_k$

   v es combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$

4. Por los cálculos hechos en el teorema 3, el vector $\mu - v$ es ortogonal a cada uno de los vectores v_k ($\mu - v$ es el vector obtenido en la última etapa cuando se aplica el proceso de ortogonalización a $v_1, \ldots, v_n, \mu$).

Así $\mu - v$ es ortogonal a toda combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$, es decir a todo vector en W. si $w \in W$ y $w \neq v$, se sigue que $\|\mu - w\| \geq \|\mu - v\|$.

Conclusión: v es la mejor aproximación a μ que está en W.

COMPLEMENTO ORTOGONAL DE UN SUBCONJUNTO H

Definición.- Sea V un espacio con producto interno y H cualquier conjunto de vectores en V. El ***complemento ortogonal*** de H es el conjunto $H^{\perp}$ de los vectores de V ortogonales a todo vector de H.

Esto es $\quad v \in H^{\perp} \iff \langle v, \mu \rangle = 0 \quad , \quad \forall\, \mu \in H$

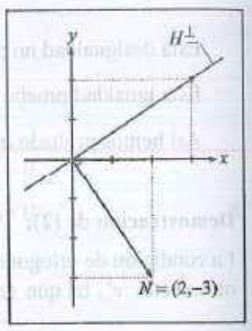
o sea $\quad H^{\perp} = \{ v \in V : \langle v, \mu \rangle = 0 \quad , \quad \forall\, \mu \in H \}$

Ejemplo 01

a) $\{(2,-3)\}^{\perp} = \{(x,y) \in I\!R^2 : \langle (x,y),(2,-3) \rangle = 0\} = H^{\perp}$

$= \{(x,y) \in I\!R^3 : 2x - 3y = 0\} \quad , \quad H = \{(2,-3)\}$

$= \ldots$ es una recta que pasa por (0,0) y (2,−3) es el vector normal a la recta.



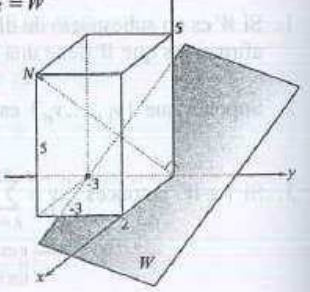
Todos los vectores de $\{(2,-3)\}^{\perp} = H^{\perp}$ son ortogonales al vector $(2,-3)$.

b) $\{(2,-3,5)\}^{\perp} = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : \langle (x,y,z),(2,-3,5) \rangle = 0\} = W$

$= \{(x,y,z) \in I\!R^3 : 2x - 3y + 5z = 0\}$

= es un plano que pasa por $(0,0,0)$, donde

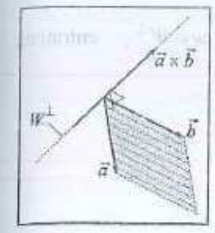
$N = (2,-3,5)$ es el vector normal al plano W



Todos los vectores de $\{(2,-3,5)\}^{\perp} = W$ son ortogonales al vector $(2,-3,5)$.

$W = \{N\}^{\perp}$

c) $\{(1,2,-1),(2,3,1)\}^{\perp} = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : \langle (x,y,z),(1,2,-1) \rangle = 0 \wedge \langle (x,y,z),(2,3,1) \rangle = 0\} = W^{\perp}$



$W = \{(1,2,-1),(2,3,1)\}$

$= \{(x,y,z) \in I\!R^3 : x + 2y - z = 0 \ \wedge \ 2x + 3y + z = 0\}$

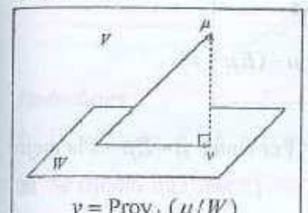
$= \{ z(-5,3,1) : z \in I\!R \}$

= { es una recta en $I\!R^3$, cuyo vector dirección es $(-5,3,1)$}

$\vec{a} = (2,3,1) \quad , \quad \vec{b} = (1,2,-1) \quad , \quad \vec{a} \times \vec{b} = (-5,3,1)$

Definición 5.

Siempre que exista el vector v en el Teorema 4 se le llama **proyección ortogonal de μ sobre W**. Si todo vector de V tiene proyección ortogonal sobre W, la aplicación que asigna a cada vector de V su proyección ortogonal sobre W, se llama **proyección ortogonal de V sobre W**.



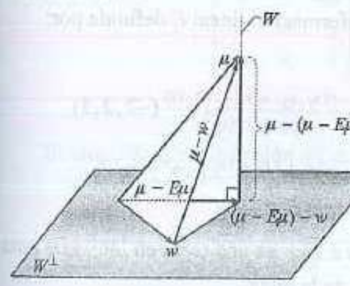
$v = \text{Proy}_{\perp}(\mu / W)$

$$\text{Proy}_{\perp} : V \longrightarrow W$$
$$\mu \longmapsto \text{Proy}_{\perp}(\mu / W) = v$$

La aplicación $\text{Proy}_{\perp}$ se llama **PROYECCIÓN ORTOGONAL** de V sobre W.

COROLARIO 4.1 Sean: V un espacio con producto interno, W un subespacio de dimensión finita y E la proyección ortogonal de V sobre W. Entonces la aplicación $\mu \longrightarrow (\mu - E\mu)$ es la proyección ortogonal de V sobre $W^{\perp}$.

<u>Demostración</u>.-



W es normal el plano $W^{\perp}$

Sea μ un vector arbitrario de V.

a) $(\mu - E\mu) \in W^{\perp}$

b) $\qquad w \in W^{\perp}$

c) $E\mu$ = proyección de μ sobre W.

d) Para cualquier $w \in W^{\perp}$ se tiene

$\mu - w = E\mu + (\mu - E\mu) - w$

Dado el vector $\mu \in V$, debemos demostrar que el vector $(\mu - E\mu) \in W^{\perp}$ es la mejor aproximación a μ por vectores de $W^{\perp}$. Esto es, si $w \in W^{\perp}$, entonces $\|\mu - (\mu - E\mu)\| \leq \|\mu - w\|$.

Veamos:

Por demostrar que $\mu - (\mu - E\mu)$ es ortogonal a $W^{\perp}$.

Se tiene que : $\mu - w = E\mu + (\mu - E\mu) - w$

Por el teorema de Pitágoras se tiene:

$$\|\mu - w\|^2 = \|E\mu\|^2 + \|\mu - E\mu - w\|^2$$

Se deduce : $\|\mu - w\|^2 \geq \|E\mu\|^2$, donde $E\mu = \mu - (E\mu - \mu)$

Que es : $\|\mu - w\|^2 \geq \|\mu - (E\mu - \mu)\|^2$

Cuando $w \neq \mu - E\mu$, la desigualdad es estrictamente mayor. Por tanto, $\mu - E\mu$ es la mejor aproximación a μ para vectores en $W^{\perp}$. ∎

Ejemplo 02 Si se da a $\mathbb{R}^3$ el producto interno canónico, podemos hacer:

a) La proyección ortogonal del vector $(-1,1,6)$ sobre el subespacio $W = \{t(-2,2,3) / t \in \mathbb{R}\}$

$$v = \text{Proy}_{(-2,2,3)}(-1,1,6) = \frac{\langle(-1,1,6)\cdot(-2,2,3)\rangle}{\|(-2,2,3)\|^2}(-2,2,3)$$

$$v = \tfrac{22}{17}(-2,2,3)$$

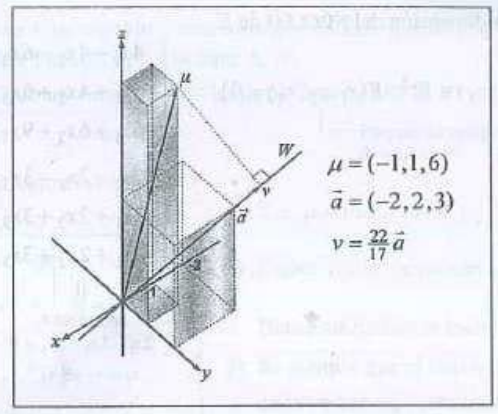
b) La proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre W es la transformación lineal E definida por:

$$E: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto E(x_1,x_2,x_3) = \text{Proy}_{\perp}(\mathbb{R}^3 / W) = \frac{\langle(x_1,x_2,x_3),(-2,2,3)\rangle}{\|(-2,2,3)\|^2}(-2,2,3)$$

$$= \frac{-2x_1 + 2x_2 + 3x_3}{17}(-2,2,3)$$

Geométricamente, el subespacio $W = \{t(-2,2,3) / t \in \mathbb{R}\}$ es una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y $\vec{a} = (-2,2,3)$ es el vector dirección de la recta.



Deducimos:

1. El rango de $E = 1$ y la nulidad de $E = 2$.
2. Se cumple que $Nu(E) = W^{\perp}$, $Nu(E)$: núcleo de E y por tanto $\dim(W^{\perp}) = 2$.
3. Haciendo el cálculo: $\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{I} - \underbrace{E(x_1,x_2,x_3)}_{E}$, se obtiene $I - E = \text{Proy}_{\perp}(\mathbb{R}^3 / W^{\perp})$, que es una transformación lineal que aplica el vector $(x_1,x_2,x_3) - E(x_1,x_2,x_3)$.

La justificación es:

1. La proyección ortogonal E expresado en forma matricial es:

$$E(x_1,x_2,x_3) = \tfrac{1}{17}(4x_1 - 4x_2 - 6x_3, -4x_1 + 4x_2 + 6x_3, -6x_1 + 6x_2 + 9x_3)$$

$$= \tfrac{1}{17}\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -4 & -6 \\ -4 & 4 & 6 \\ -6 & 6 & 9 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

El rango de E = dimensión de la imagen de E = rango de la transpuesta de la matriz:

$$[E] = A^t = \tfrac{1}{17}\begin{bmatrix} 4 & -4 & -6 \\ -4 & 4 & 6 \\ -6 & 6 & 9 \end{bmatrix} \sim \tfrac{1}{17}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \tfrac{1}{17}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como notamos: el rango de $A^t = 1$, A^t: TRANSPUESTA de A.

MISCELÁNEA

01. Dados los vectores $v=(2,-1,-2)$, $w=(3,-6,-6)$, determine el operador autoadjunto $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $Tv=(1,1,13)$ y $Tw=(3,21,33)$ sabiendo que la traza de la matriz asociada a T es 5.

02. Dados los vectores $u=(4,4,-2)$, $v=(4,-2,4)$ y $w=(1,-2,-2)$, sea $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el operador lineal, tal que $Tu=(10,-2,-2)$, $Tv=(-2,10,-2)$ y $Tw=(1,1,-5)$. Demuestre que T es autoadjunto.

03. Si $T^*T=-T$, pruebe que los autovalores de T pertenecen al conjunto $\{0,-1\}$. De un ejemplo de una matriz $A\in M(2,2)$, tal que $a_{11}=\frac{1}{3}$ y $A^T\cdot A=-A$. ¿Cuántas de estas matrices existen?

04. Sean $T_1:V\longrightarrow W$ y $T_2:V\longrightarrow U$ transformaciones lineales inversibles (W y U son espacios de dimensión finita, provistos de producto interno). Pruebe que existe una transformación ortogonal (inversible) $T_3:W\longrightarrow U$ con $T_2=T_3T_1$ si, y solo si, $|T_1(v)|=|T_2(v)|$, para todo $v\in V$.

05. Para dos bases ortonormales arbitrarias $\beta=\{u_1,\ldots,u_n\}\subset V$ y $\beta'=\{v_1,\ldots,v_n\}\subset V$, pruebe que existe un operador ortogonal $T:V\longrightarrow V$ tal que $Tu_1=v_1,\ldots,Tu_n=v_n$. Si las bases dadas son formadas por los vectores $u_1=\frac{1}{3}(1,2,2)$, $u_2=\frac{1}{3}(2,1,-2)$, $u_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)$ y $v_1=\frac{1}{3}(2,3,6)$, $v_2=\frac{1}{7}(6,2,-3)$, $v_3=\frac{1}{7}(3,-6,2)$ en $\mathbb{R}^3$, determine la matriz T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

06. Pruebe que la matriz $\begin{bmatrix}-34 & 12\\ 12 & -41\end{bmatrix}$ es negativa.

07. Halle la descomposición polar de las matrices:

a) $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 1 & 1\\ -\sqrt{2} & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$

08. Sea $T:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ el operador lineal definido por:

$$T(x,y,z,t)=(y-z+t,-x-z+2t,x+y-t,-x-2y+z)$$

Demuestre que T es antisimétrico. Encuentre bases ortonormales $\{u,v\}\subset N(T)$ y $\{u',v'\}\subset N(T)^{\perp}$. Determine la matriz de T en la base $\{u,v,u',v'\}\subset\mathbb{R}^4$.

CAPÍTULO **8**

ALGUNAS APLICACIONES DEL ÁLGEBRA LINEAL

1. FORMAS BILINEALES Y CUADRÁTICAS

Definición.

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno.

La aplicación $f:V^2\longrightarrow\mathbb{K}$ es una forma bilineal sobre V sí, y sólo si es lineal respecto a los dos argumentos:

i) $f(ax+bx',y)=af(x,y)+bf(x',y)$; $\forall\, x,x',y\in V$; $a,b\in\mathbb{K}$

ii) $f(x,cy+dy')=cf(x,y)+df(x,y')$; $\forall\, x,y,y'\in V$; $c,d\in\mathbb{K}$.

Ejemplo.-

Asociada a la matriz $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$, la aplicación $f:\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n\longrightarrow\mathbb{K}$ definida por $f(X,Y)={}^tX\cdot A\cdot Y$ es una forma bilineal en $\mathbb{K}^n$.

1.1 MATRIZ DE UNA FORMA BILINEAL

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión $n\geq 1$ con P.I. Consideremos una base $[v]=\{v_1,\ldots,v_n\}$ de V y la forma bilineal $f:V^2\longrightarrow\mathbb{K}$.

Entonces f está caracterizada por la matriz $A=[a_{ij}]$ cuyos elementos a_{ij} están definidas por $a_{ij}=f(v_i,v_j)$.

A es la matriz de f respecto a la base $[v]$.

En efecto, si X, Y son dos vectores de V, entonces: $X=\sum_{i=1}^{n}x_i v_i$, $Y=\sum_{j=1}^{n}y_j v_j$

Luego: $f(X,Y)=\left\langle \sum x_i v_i , \sum y_j v_j \right\rangle$

$$=\sum_i \sum_j x_i y_j f(v_i,v_j)$$

♦ *P.I.* = producto interno.

$$f(X,Y)=\sum_i \sum_j x_i\, y_i\, a_{ij}$$
$$=\sum_i \sum_j a_{ij}\, x_i\, y_j = X^t A Y$$

donde $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ cuyos elementos son las coordenadas de X e Y respecto de la base $[v]$.

1.2 FORMA BILINEAL SIMÉTRICA

Definición.- Sea $f: V^2 \longrightarrow I\!K$ una forma bilineal, f es simétrica sí, y solo si
$$f(x,y)=f(y,x),\ \forall\, x,y \in V .$$

Ejemplo.-
Si $I\!K = I\!R$, la aplicación $f: V^2 \longrightarrow I\!R$ definida por $f(x,y)=\langle x,y\rangle$ es una forma bilineal simétrica.

Además:

i) Si $[V]=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ es una base ortogonal de V, o sea $\langle v_i,v_j\rangle=0$, $\forall\, i\neq j$, entonces la matriz de $f(x,y)=\langle x,y\rangle$ es diagonal.

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & a_2 & 0\cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots a_n \end{bmatrix}$$

y la forma se dice diagonalizada.

ii) Si $[V]=\{v_1,v_2,\dots v_n\}$ es una base ortonormal, entonces $f(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Demostración: *i)* $f(X,Y)=\langle x,y\rangle$
$$=\left\langle \sum x_i\, v_i , \sum y_j v_j \right\rangle$$
$$f(X,Y)=\sum_i \sum_j x_i\, y_j \langle v_i,v_j\rangle$$

donde $\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases} 0 & , \ j\neq i \\ a_i & , \ j=i \end{cases}$

Entonces $f(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i\, y_i$

ii) Si $[V]$ es una base ortonormal, se cumple: $\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases} 0 & , \ j\neq i \\ 1 & , \ j=i \end{cases}$

Entonces $f(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$

PROPIEDAD. La matriz $A\in I\!K^{n\times n}$ representa una forma bilineal simétrica si, y sólo si, A es simétrica.

<u>Demostración:</u>

($\Rightarrow$) Si A es una matriz asociada a una forma bilineal simétrica implica que A es simétrica.
Debo probar que $A=A^t$.

Veamos:

1) Sea f la forma bilineal simétrica asociada a la matriz A.

f es simétrica $\Longleftrightarrow$ $f(X,Y)=f(Y,X)$
$$\Longleftrightarrow\ {}^tX\cdot A\cdot Y={}^tY\cdot A\cdot X$$

2) Como ${}^tX\cdot A\cdot Y$ es simétrica, entonces es igual a su transpuesta. Esto es:
$${}^tY\cdot A\cdot X={}^t({}^tY\cdot A\cdot X)={}^tX\cdot {}^tA\cdot Y$$

3) Sustituir (2) en (1) :
$${}^tX\cdot A\cdot Y={}^tX\cdot {}^tA\cdot Y$$
$$\Longleftrightarrow\ {}^tX\cdot A\cdot Y-{}^tX\cdot {}^tA\cdot Y=0$$
$$\Longleftrightarrow\ {}^tX\cdot(A-A^t)\cdot Y=0 \quad , \quad \forall\, X,Y\in I\!K^n$$
$$\Rightarrow\ A-A^t=0$$
$$\Rightarrow\ A=A^t$$

($\Leftarrow$) Si $A = A^t$ debo probar que $f(X,Y) = f(Y,X)$

Veamos:

1) Se tiene $f(X,Y) = {}^tX \cdot A \cdot Y$

2) Pero $A = A^t$

3) Sustituir (2) en (1): $f(X,Y) = {}^tX \cdot {}^tA \cdot Y$

$$= {}^t({}^tY \cdot A \cdot X)$$
$$= {}^tY \cdot A \cdot X$$
$$= f(Y,X)$$

Luego f es simétrica.

1.3 FORMAS CUADRÁTICAS

Definición 1.-

Sea V un E.P.I. de dimensión finita y $g : V^2 \longrightarrow I\!K$ una forma bilineal simétrica sobre V. Forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica g es la aplicación $f : V \longrightarrow I\!K$ definida por $f(X) = g(X,X) = \langle X, X \rangle$.

Si $V = I\!K^n$ y si $A \in I\!K^{n\times n}$ es una matriz simétrica de la forma bilineal g, entonces la forma cuadrática asociada está definida por:

$$f(X) = {}^tX \cdot A \cdot X$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

Si $V = I\!R^2$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

entonces: $f(X) = {}^tX \cdot A \cdot X$

$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Definición 2.-

Una forma cuadrática ${}^tX \cdot A \cdot X$ es no degenerada sí, y sólo si A es no singular.

* E.P.I. = espacio con producto interno

1.4 FORMAS CUADRÁTICAS Y CAMBIO DE BASE

Sea $f : V \longrightarrow I\!K$ una forma cuadrática caracterizada por la matriz $A \in I\!K^{n\times n}$ respecto de la base $[V] = \{v_1, \ldots, v_n\}$

Se tiene entonces $f(X) = {}^tX \cdot A \cdot X$ donde $X \in I\!K^{n\times 1}$ es la matriz columna cuyos elementos son las coordenadas de X respecto de la base $[V]$.

Si en V se considera otra base $[V']$, entonces $X = P \cdot X'$, donde P es la matriz de pasaje de la base $[V']$ a la base $[V]$.

Sustituyendo $X = P \cdot X'$ en $f(X) = {}^tX \cdot A \cdot X$

obtenemos $f(X) = {}^t(P \cdot X') \cdot A \cdot (P \cdot X')$

$$= {}^tX' \cdot ({}^tP \cdot A \cdot P)\, X'$$
$$= {}^tX' \cdot B \cdot X'$$

La matriz de f respecto de la nueva base es: $B = {}^tP \cdot A \cdot P$. Las matrices A y B se llaman CONGRUENTES.

Definición.-

$A \in I\!K^{n\times n}$ es congruente a $B \in I\!K^{n\times n}$ sí, y sólo si existe P no singular tal que $B = {}^tP \cdot A \cdot P$.

1.5 APLICACIONES GEOMÉTRICAS DEL TEOREMA ESPECTRAL REDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Sea en $I\!R^n$ un lugar geométrico de puntos X tales que satisfacen la ecuación:

${}^tX \cdot A \cdot X + 2b \cdot X + c = 0$ .... (1)

donde: $X = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$A = [a_{ij}] \in I\!R^{n\times n}$ es una matriz simétrica.

$b = [b_1, \ldots, b_n] \in I\!R^{1\times n}$ es un vector fila, $c \in I\!R$

La ecuación (1) es equivalente a:

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j + 2\sum b_i\, x_i + c = 0$ .... (2)

El término ${}^tX \cdot A \cdot X$ se llama cuadrático y $b \cdot X$, término lineal.

Por el corolario ... (que es una consecuencia del teorema espectral) existe una matriz ortogonal P y una matriz diagonal real $D(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de valores propios de A tal que:

$$P^{-1}AP = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \ , \ \lambda_i \in I\!R \ ,$$

La matriz P se obtiene del siguiente modo:

1° Se hallan los valores propios de A resolviendo la ecuación $f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

2° Para cada valor propio λ_i se halla una base del espacio propio.

$V(\lambda_i) = \{X \in V \,/\, AX = \lambda_i x\}$ y cumple $V(\lambda_i) \perp V(\lambda_j)$, $i \neq j$.

3° Por el método de Gram-Schmidt, la base de cada subespacio $V(\lambda_i)$ se ortonormaliza.

4° La reunión de estas bases ortonormales es la base ortonormal de $I\!R^{n\times 1}$.

5° Supongamos que $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ es la base ortonormal de $I\!R^{n\times 1}$, entonces $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son los vectores columna de la matriz $P = [b_1\, b_2 \ldots b_n]$

La reducción de la ecuación (1) a la forma canónica, se efectúa del siguiente modo:

1. Si la ecuación ${}^tV \cdot A + b = 0$ admite solución para $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ entonces afirmamos que el ***lugar geométrico tiene centro*** y la ecuación (1) se reduce a la forma canónica $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 = c$ mediante dos pasos.
   a) Efectuando una traslación al centro, mediante la transformación $X = V + Y$ se eliminan los términos lineales.
   b) Aplicando el cambio **ORTOGONAL** $Y = P \cdot Z$ de coordenadas se eliminan los términos cruzados obteniéndose la ecuación reducida: $\lambda_1 x_1^2 + \ldots\ldots + \lambda_r x_r^2 + c = 0$

2. Si la ecuación ${}^tV \cdot A + b = 0$ ***no admite solución*** para V, entonces haciendo el cambio ortogonal $X = P \cdot Y$ se reduce la ecuación (1) a la forma:

$${}^tY \cdot D \cdot Y + 2 \cdot e \cdot y + c = 0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i + c = 0 \ , \ \lambda_i \neq 0 \ , \ \beta_i \neq 0 \ , \ 1 < r < n \,.$$

donde: $e = b \cdot P$

$D = {}^tP \cdot A \cdot P = diag(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n)$

1.6 EN $I\!R^2$ REDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL DE UNA CURVA DE SEGUNDO GRADO A LA FORMA CANÓNICA.

Sea en $I\!R^2$ un lugar geométrico de puntos (x, y) tales que satisfacen la ecuación:

$${}^tX \cdot A \cdot X + 2bX + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

donde: $X = {}^t(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ es simétrica.

$b = [b_1 \ b_2]$; $c \in I\!R$

La ecuación (1) es equivalente a:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}x\,y + a_{22}y^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

1. Hallemos los valores propios de A.

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$f(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$
$$= \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A \quad , \quad \operatorname{tr} A = \text{TRAZA DE } A$$

Si λ_1, λ_2 son las raíces de $f(\lambda)$, se cumplen: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} \\ \lambda_1 \lambda_2 = \det A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 \end{cases}$

El discriminante es: $\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$

2. Supongamos que λ_1, λ_2 son los valores propios de A y P la matriz ortogonal, tal que $P^{-1}AP = D(\lambda_1, \lambda_2)$.

Haciendo el cambio ortogonal $X = P \cdot Y$, la ecuación (1) se reduce a la forma:

$$^{t}(P\cdot Y)A(PY)+2b\cdot(P\cdot Y)+c=0$$

$$^{t}Y(^{t}P\cdot A\cdot P)Y+2(b\cdot P)Y+c=0$$

$$^{t}Y\cdot D\cdot Y+2\cdot e\cdot Y+c=0$$

$$\sum_{i=1}^{2}\lambda_i y_i^2+2\sum_{i=1}^{2}\beta_i y_i+c=0$$

$$\boxed{\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+2\beta_1 y_1+2\beta_2 y_2+c=0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\text{donde:}\begin{cases} ^{t}P\cdot A\cdot P=D=diag(\lambda_1,\lambda_2) \\ b\cdot P=e \\ ^{t}Y\cdot D\cdot Y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2 \end{cases}$$

3. Tratemos, ahora de eliminar el término lineal $\sum \beta_i y_i$.

Si en la ecuación (3) completamos cuadrados con respecto a las variables y_i obtenemos:

$$\lambda_1 y_1^2+2\beta_1 y_1+\ldots\ldots+\lambda_2 y_2^2+2\beta_2 y_2+\ldots\ldots+c=0$$

$$\lambda_1\left(y_1^2+\frac{2\beta_1}{\lambda_1}y+\frac{\beta_1^2}{\lambda_1^2}\right)+\lambda_2\left(y_2^2+\frac{2\beta_2}{\lambda_2}y+\frac{\beta_2^2}{\lambda_2^2}\right)+c-\frac{\beta_1^2}{\lambda_1^2}-\frac{\beta_2^2}{\lambda_2^2}=0$$

$$\lambda_1\left(y_1+\frac{\beta_1}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y_2+\frac{\beta_2}{\lambda_2}\right)^2+c-\frac{\beta_1^2}{\lambda_1^2}-\frac{\beta_2^2}{\lambda_2^2}=0$$

$$\text{haciendo}\begin{cases} y_1+\frac{\beta_1}{\lambda_1}=x' \\ y_2+\frac{\beta_2}{\lambda_2}=y' \quad ,\ \text{centro}=\left(-\frac{\beta_1}{\lambda_1},-\frac{\beta_2}{\lambda_2}\right) \\ c-\frac{\beta_1^2}{\lambda_1^2}-\frac{\beta_2^2}{\lambda_2^2}=c' \end{cases}$$

obtenemos: $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+c'=0$ .... (4)

4. Las formas cónicas en $I\!R^2$ son:

Caso 1. Si $\det A=\lambda_1\lambda_2\neq 0$, la cónica tiene centro y se reduce a la forma:

$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+c'=0$ .... (4)

Si $\lambda_1\lambda_2>0$ y :

a_1) $\lambda_1\cdot c'<0$, entonces la ecuación (4) es una ***elipse***.

a_2) $c'=0$, la ecuación (4) se reduce a un punto o dos rectas secantes imaginarias.

a_3) $\lambda_1\cdot c'>0$, la ecuación (4) es un conjunto vacío.

Si $\lambda_1\lambda_2<0$ y :

a_4) $c'\neq 0$, entonces, la ecuación (4) es una ***hipérbola***.

a_5) $c'=0$, la ecuación (4) son dos rectas secantes.

Caso 2. Si $\det A=\lambda_1\lambda_2=0$, la cónica no tiene centro y

a_6) Si $\lambda_1\lambda_2=0 \iff \lambda_1=0 \vee \lambda_2=0$, entonces la ecuación (3) es una de las siguientes parábolas: $\boxed{\lambda_1 x^2+2\beta_1 x+2\beta_2 y+c=0}$ (3.1) $\vee$ $\lambda_2 y^2+2\beta_1 x+2\beta_2 y+c=0$

a_7) En (3.1) si $[\beta_1,\beta_2]=0 \ \wedge\ \lambda_1 c<0$, entonces: $\lambda_1 x^2+c=0$ son dos rectas paralelas.

a_8) En (3.1) si $[\beta_1,\beta_2]=0 \ \wedge\ \lambda_1 c>0$, entonces: $\lambda_1 x^2+c=0$ es un conjunto vacío o dos rectas imaginarias paralelas.

a_9) En (3.1) si $[\beta_1,\beta_2]=0 \ \wedge\ c=0$, entonces: $\lambda_1 x^2=0$, $\lambda_1\neq 0$ es la recta $x=0$.

EJEMPLOS EN $I\!R^2$

Ejemplo 01.-

La ecuación: $4x^2-24xy+11y^2+56x-58y-5=0$ .... (1)

define una cónica. Reducir a la forma canónica y determinar la forma de la cónica.

Solución:

Se tiene: $X=\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 11\end{bmatrix}$, $b=[28,-29]$, $c=-5$ siempre que la ecuación (1) está expresada en la forma: $^{t}X\cdot A\cdot X+2b\cdot X+c=0$. Hallemos su forma canónica.

Hallemos su forma canónica:

<u>Paso 1.</u> Veamos si tiene centro.

Planteamos la ecuación: ${}^tV\cdot A+{}^tb=0$, $V=\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$

Obtenemos el sistema $\begin{cases} 4h-12k=-28 \\ -12h+11k=29 \end{cases}$

La solución es $\begin{cases} h=-\frac{2}{5} \\ k=\frac{11}{5} \end{cases}$

<u>Paso 2.</u> Hacer la traslación: $X=V+Y$

$$\begin{cases} x=-\frac{2}{5}+x' \\ y=\frac{11}{5}+y' \end{cases}$$

Sustituir en (1):

$$4\left(-\tfrac{2}{5}+x'\right)^2-24\left(-\tfrac{2}{5}+x'\right)\left(\tfrac{11}{5}+y'\right)+11\left(\tfrac{11}{5}+y'\right)^2+56\left(-\tfrac{2}{5}+x'\right)-58\left(\tfrac{11}{5}+y'\right)-5=0$$

$$\Longleftrightarrow 4x'^2+11y'^2-24x'y'-80 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

<u>Paso 3.</u> Diagonalizar la matriz A, hallando la matriz ortogonal P.

1° Hallar los valores propios de A.

$$A=\begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 11 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow \operatorname{tr} A=4+11=15 \\ \rightarrow \det A=44-144=-100 \end{matrix}$$

Resolver la ecuación: $\lambda^2-15\lambda-100=0$

$(\lambda-20)(\lambda+5)=0$

$\lambda=20 \ \vee \ \lambda=-5$

2° Para cada valor propio hallamos el subespacio propio $V(\lambda_i)=\{X\in I\!R^2 \,/\, AX=\lambda_i X\}$ resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$(A-\lambda I)X=0$$

$$\begin{cases} (4-\lambda)x_1-12x_2=0 \\ -12x_1+(11-\lambda)x_2=0 \end{cases} \ , \ X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

i) Si $\lambda=20$: $\begin{cases} -16x_1-12x_2=0 \\ -12x_1-9x_2=0 \end{cases}$

Se reduce a una sola ecuación: $4x_1+3x_2=0$

$x_1=-\frac{3}{4}x_2$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{4}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}=-\frac{1}{4}x_2\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Por tanto $V(20)=L\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}\right\}$ es el subespacio propio generado por $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

Una base ortonormal de $V(20)$ es $\left\{\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}\right\}$

ii) Si $\lambda_2=-5$: $\begin{cases} 9x_1-12x_2=0 \\ -12x_1+16x_2=0 \end{cases}$

Se redice a: $3x_1-4x_2=0$

$x_1=\frac{4}{3}x_2$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{3}x_2\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Por tanto $V(-5)=L\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$ es el subespacio propio generado por $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3° Una base ortonormal de $I\!R^2$ es $\left\{\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}\right\}$

Por tanto $P=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

Se cumple: $P^{-1}AP=D(20,-5)$, donde $P^{-1}={}^tP$

<u>Paso 4.</u> Mediante la transformación P y haciendo $z=P\cdot Y$ se logra la diagonalización:

$$20x^2-5y^2-80=0$$

$$4x^2-y^2-16=0$$

Se trata de una ***hipérbola***.

Ejemplo 02.- Determinar la naturaleza de la cónica que representa la ecuación:

$$4x^2-12xy+9y^2-8\sqrt{13}x-14\sqrt{13}y+117=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Solución:

Se tiene: $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}4 & -6\\-6 & 9\end{bmatrix}$, $b=[-4\sqrt{13},-7\sqrt{13}]$, $c=117$. Hallemos su forma canónica.

Paso 1. Veamos si tiene centro:

Planteamos la ecuación ${}^tV\cdot A+b=0$, $V=\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}$

$$4h-6k=4\sqrt{13}$$
$$-6h+9k=7\sqrt{13}$$

Como $\det A=0$, no existe centro.

Paso 2. Diagonalicemos ortogonalmente la forma cuadrática ${}^tX\cdot A\cdot X$ mediante la transformación ortogonal $X=P\cdot Y$.
Hallemos P.

1° Hallar los valores propios de A.

De $A=\begin{vmatrix}4 & -6\\-6 & 9\end{vmatrix}$ $\quad \longrightarrow \operatorname{tr} A=4+9=13$, $\quad \longrightarrow \det A=36-36=0$

Al resolver la ecuación: $\lambda^2-13\lambda=0$

obtenemos $\qquad \lambda(\lambda-13)=0 \iff \lambda=0 \vee \lambda=13$

2° Para cada λ_i se halla una base ortonormal del espacio propio $V(\lambda_i)=\{X\in I\!R^2 \,/\, AX=\lambda_i X\}$.

i) Si $\lambda=0 \Rightarrow \begin{cases}4x_1-6x_2=0\\-6x_1+9x_2=0\end{cases}$

Se reduce a: $\quad x_1=\frac{3}{2}x_2$

$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}x_2\\x_2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}x_2\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$. Una base ortonormal de $V(0)=\left\{\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}}\\\frac{2}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}\right\}$

ii) Si $\lambda=13 \Rightarrow \begin{cases}-9x_1-6x_2=0\\-6x_1-4x_2=0\end{cases}$

Se reduce a: $\quad x_1=-\frac{2}{3}x_2$

$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}x_2\\x_2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}x_2\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$

Una base ortonormal de $V(13)=\left\{\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{13}}\\\frac{3}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}\right\}$

3° Por tanto: $P=\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}}\\\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}$

4° Hallar $2e\cdot Y$
Donde $\quad e=b\cdot P$

$$e=[-4\sqrt{13},-7\sqrt{13}]\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}}\\\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}=[-26,-13]$$

Luego: $\quad 2e\cdot Y=2[-26,-13][y_1,y_2]$
$\qquad\qquad 2e\cdot Y=-52y_1-26y_2$

5° La ecuación (1) se convierte en la forma:

$${}^tY\cdot D\cdot Y+2e\cdot Y+117=0$$
$$13y_2^2-52y_1-26y_2+117=0$$
$$13(y_2^2-2y_2+1)-52\left(y_1-\tfrac{117}{52}\right)=0$$
$$13(y_2-1)^2-52\left(y_1-\tfrac{117}{52}\right)=0$$

Hacer $\begin{cases}y_2-1=z_2\\y_1-\frac{117}{52}=z_1\end{cases}$

$$\Rightarrow \quad 13z_2^2 - 52z_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad z_2^2 - 4z_1 = 0$$

o $\quad y^2 - 4x = 0 \quad$ que es una ***parábola***.

Ejemplo 03.- Reducir a la forma canónica la ecuación: $6x^2 + 5xy - 6y^2 + 7 = 0$.

Solución:

1. Como la ecuación: $6x^2 + 5xy - 6y^2 + 7 = 0$ no tiene términos lineales, bastará hacer sólo la rotación, hallando los valores propios de la matriz: $A = \begin{bmatrix} 6 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -6 \end{bmatrix}$

2. De $\quad A = \begin{vmatrix} 6 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -6 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \operatorname{tr} A = 6 - 6 = 0 \\ \det A = -36 - \frac{25}{4} = -\frac{169}{4} \end{cases}$

Resolver: $\quad \lambda^2 - \frac{169}{4} = 0$

$$\left(\lambda - \tfrac{13}{2}\right)\left(\lambda + \tfrac{13}{2}\right) = 0 \iff \lambda = \tfrac{13}{2} \ \vee \ \lambda = -\tfrac{13}{2}$$

3. Con los valores propios : $\quad \lambda_1 = \frac{13}{2},\ \lambda_2 = -\frac{13}{2}$

convierten la ecuación : $\quad 6x^2 + 5xy - 6y^2 + 7 = 0$

a la forma canónica : $\quad \frac{13}{2}x'^2 - \frac{13}{2}y'^2 + 7 = 0$

$$13y'^2 - 13x'^2 = 14$$

$$\frac{y'^2}{\frac{14}{13}} - \frac{x'^2}{\frac{14}{13}} = 1$$ es una ***hipérbola***.

4. La base ortonormal es: $\quad O = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{26}} \\ \frac{1}{\sqrt{26}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{26}} \\ \frac{5}{\sqrt{26}} \end{bmatrix} \right\}$

y la matriz ortogonal es: $\quad P = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{26}} & -\frac{1}{\sqrt{26}} \\ \frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{5}{\sqrt{26}} \end{bmatrix}$ que es lo que diagonaliza a la matriz A.

PROBLEMAS

En los siguientes ejercicios, rote y traslade los ejes para llevar la cónica indicada a la posición normal. Identifique la cónica y determine su ecuación con respecto al nuevo sistema de coordenadas.

01.- $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y - 5 = 0$

02.- $3x^2 - 8xy - 12y^2 - 30x - 64y = 0$

03.- $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y = -14$

04.- $21x^2 + 6xy + 13y^2 - 114x + 34y + 73 = 0$

05.- $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$

06.- $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$

07.- $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 52 = 0$

08.- $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$

09.- $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0$

10.- $5x^2 + 4xy + 5y^2 - 9 = 0$

Solución:

01.- $2x''^2 + y''^2 = 6$ (elipse)

02.- $12y''^2 - 4x''^2 = 81$ (hipérbola)

03.- $2x''^2 - 3y''^2 = 24$ (hipérbola)

04.- $6x''^2 + 11y''^2 = 66$ (elipse)

05.- $\sqrt{29}y'^2 - 3x' = 0$ (parábola)

06.- $4y''^2 - x''^2 = 0$ (dos rectas)

07.- $y' = 2 \quad , \quad y' = -2$

08.- $2y'^2 - 3x'^2 = 8$ (hipérbola)

09.- $2\sqrt{2}x'^2 - 7x' + 9y' = 0$ (parábola)

10.- $7x'^2 + 3y'^2 = 9$ (elipse)

- Se tiene $A=\begin{bmatrix}-1 & \frac{3}{4}\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ $\begin{cases} tr\,A=-1+2=1 \\ |A|=-2+\frac{9}{4}=\frac{1}{4}\end{cases}$
- El polinomio característico es:
  $P(\lambda)=\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2$
- El único valor propio es $\lambda=\frac{1}{2}$.
- El vector propio asociado a λ es:
  $V=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$
- El subespacio vectorial asociado a $\lambda=\frac{1}{2}$ es $SP_\lambda=\left\{ s\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, s\in I\!R \right\}$ y la $\dim(SP_\lambda)=1$.
- Necesitamos otro vector U para obtener la matriz $C=[U\,|\,V]$.
- El vector U se halla resolviendo al sistema:

$$\left(A-\tfrac{1}{2}I\right)U=V$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{3}{4}\\ -3 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}-\frac{3}{2}\mu_1+\frac{3}{4}\mu_2=1\\ -3\mu_1+\frac{3}{4}\mu_2=2\end{cases}$$

Se reduce a una sola ecuación:

$$-6\mu_1+3\mu_2=4$$

$$\mu_2=\frac{4}{3}+2\mu_1$$

Luego, $U=\begin{bmatrix}\mu_1\\ \frac{4}{3}+2\mu_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{4}{3}\end{bmatrix}+\mu_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

Para $\mu_1=0$, obtenemos $U=\begin{bmatrix}0\\ \frac{4}{3}\end{bmatrix}$

Entonces la matriz de cambio de coordenadas es: $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{4}{3} & 2\end{bmatrix}$

Su inversa $C^{-1}=-\frac{3}{4}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -\frac{3}{4} & 0\end{bmatrix}$

- La matriz canónica es:
  $\overline{A}=C^{-1}AC=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$
- La matriz exponencial es:
  $\overline{A}^t=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^t & 0\\ t\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^t\end{bmatrix}$

A) La solución en nuevas coordenadas es:
$\overline{X}_t=\overline{A}^t\,\overline{h}$.

B) La solución en antiguas coordenadas es:

$$X_t=C\,\overline{A}^t\,C^{-1}h$$

$$X_t=\overline{h}_1\,\lambda^tU+\lambda^{t-1}(\overline{h}_1t+\overline{h}_2\lambda)V$$

- $\overline{h}=\begin{bmatrix}\overline{h}_1\\ \overline{h}_2\end{bmatrix}=C^{-1}X_0$, $X_0=\begin{bmatrix}y_0\\x_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix}$

$$=-\frac{3}{4}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -\frac{4}{3} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\ 5\end{bmatrix}$$

- Conclusión:

$$X_t=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^t\begin{bmatrix}0\\ \frac{4}{3}\end{bmatrix}+\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}\left(-\frac{3}{2}t+\frac{5}{4}\right)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$t=1,2,3,\ldots$

Ejemplo 03 (Caso 3).

Resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix}y_{t+1}\\ x_{t+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_t\\ y_t\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}y_0\\ x_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

Resolución:

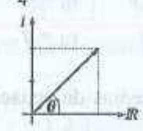
- $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ $\begin{cases} tr\,A=2+2=4\\ |A|=4+4=8\end{cases}$
- El polinomio característico es:
  $P(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+8$
- Los valores propios son:
  $\lambda_1=2+2i$, $\lambda_2=2-2i$

considerar: $\lambda=2+2i\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=2\end{cases}$

donde: $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$

$tg\,\theta=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

$\begin{cases}\alpha=\rho\cos\theta\\ \beta=\rho\,sen\,\theta\end{cases}$



- Los vectores propios se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix}2-(2+2i) & -2\\ 2 & 2-(2+2i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

se reduce a una sola ecuación:

$$2m-2in=0$$

$$m=in$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}in\\n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+in\\ n+i0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0\\n\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}$$

$$=n\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{V}+in\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{U}$$

- La matriz de cambio de coordenadas es:
  $C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ y $C^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
- La matriz canónica es:
  $\overline{A}=C^{-1}AC=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\rho\begin{bmatrix}\cos\theta & -sen\,\theta\\ sen\,\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$
- La matriz exponencial es:
  $\overline{A}^t=\rho^t\begin{bmatrix}\cos(\theta t) & -sen(\theta t)\\ sen(\theta t) & \cos(\theta t)\end{bmatrix}$
  $=2^{\frac{3}{2}t}\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) & -sen\left(\frac{\pi}{4}t\right)\\ sen\left(\frac{\pi}{4}t\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\end{bmatrix}$

A) La solución en coordenadas nuevas es:
$\overline{X}_t=\overline{A}^t\,\overline{h}$.

B) La solución en antiguas coordenadas es:

$$X_t=C\,\overline{A}^t\,C^{-1}h\ ,\ h=X_0=\begin{bmatrix}y_0\\x_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$=\rho^t\,[\overline{h}_1\cos(\theta t)-\overline{h}_2\,sen(\theta t)]U$$

$$+\rho^t\,[\overline{h}_1\,sen(\theta t)+\overline{h}_2\cos(\theta t)]V$$

donde $\begin{bmatrix}\overline{h}_1\\ \overline{h}_2\end{bmatrix}=C^{-1}h$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

Luego: $X_t=2^{\frac{3}{2}t}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)-2sen\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$$+2^{\frac{3}{2}t}\left[sen\left(\frac{\pi}{4}t\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. Dado el sistema de ecuaciones en diferencia $\begin{bmatrix} p_{t+1} \\ q_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ q_t \end{bmatrix}$

a) Hallar los valores de α y β para tener una matriz canónica, $\overline{A}$.
b) Resolver el sistema para los valores de α y β hallados en a).
c) Analizar la estabilidad del equilibrio (0,0).

02. Resolver el sistema lineal y analizas la estabilidad $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

03. ¿Para cual valor de "a", la solución del siguiente sistema diferencial converge sobre (0,0)?

$$\dot{x} = -2x - 2y \qquad x_0 = 4$$
$$\dot{y} = 2x - 2y \qquad y_0 = a$$

04. Convertir las siguientes ecuaciones en sistemas de ecuaciones en diferencia de primer orden:
a) $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 8y_t = 0$ b) $y_{t+3} + 2y_{t+2} - y_{t+1} - 2y_t = 0$

05. Analizar la estabilidad de la solución del sistema: $x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t - \frac{1}{2}y_t$, $t_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{2}y_t$

06. Resolver el sistema lineal y analizar la estabilidad: $x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t$; $t_{t+1} = x_t + \frac{1}{2}y_t$

07. Resolver el sistema lineal y analizar la estabilidad: $\dot{x} = -x + y$; $\dot{y} = -x - y$

08. Resolver el sistema lineal y analizar la estabilidad:

$$\dot{x} = x + y \qquad x(0) = 1$$
$$\dot{y} = -x + y \qquad y(0) = 1$$

09. Resolver el sistema lineal y analizar la estabilidad:

$$x_{t+1} = x_t + y_t \qquad x_0 = 1$$
$$y_{t+1} = -x_t + y_t \qquad y_0 = 1$$

10. Dado el sistema de ecuación diferencial: $\dot{x} = 1x + ky$; $\dot{y} = -2x + my$

a) Hallar los valores de k y m para tener una matriz canónica $\overline{A}$.
b) Resolver el sistema y analizar la estabilidad para los valores de parámetros hallados en a).

11. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2.5 \\ -0.25 & -0.75 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) Encontrar la solución general de la ecuación en diferencia $Y_{t+1} = AY_t$. ¿Qué ocurre con Y_t si $t \longrightarrow +\infty$?
b) Encontrar la solución general de la ecuación en diferencia $X_{t+1} = AX_t + b$. ¿Qué ocurre con X_t si $t \longrightarrow +\infty$?

12. a) Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Encontrar la solución de la ecuación en diferencia $X_{t+1} = AX_t + b$ el cual satisface la condición inicial $X(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. ¿Qué ocurre con X_t si $t \longrightarrow +\infty$?

b) Resolver a) cuando $X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

13. a) Considere la ecuación en diferencia de tercer orden $y_{t+3} + f\,y_{t+2} + g\,y_{t+1} + h\,y_t = 0$ donde f, g, h son constantes. Por definición apropiada hallar y_t, mostrando que esta ecuación puede ser expresada en forma de sistema de ecuaciones en diferencia, donde A es una matriz 3×3.

b) Ahora considerar la ecuación en diferencia de cuarto orden:

$$x_{t+4} + b_1x_{t+3} + b_2x_{t+2} + b_3x_{t+1} + b_4x_t = b_5$$

donde $b_1, \ldots, b_5$ son constantes. Por definición apropiada hallar x_t, expresando esta ecuación en la forma de un sistema, donde A es una matriz 4×4 y b es un vector columna 4×1.

14. Resolver los siguientes sistemas de ecuación en diferencia:

a) $y_{t+1} = y_t + 5x_t - 10$, $y_0 = 6$
$x_{t+1} = \frac{1}{4}y_t - x_t + 10$, $x_0 = -1$

b) $y_{t+1} = 2y_t + \frac{1}{2}x_t + 3$, $y_0 = 4$
$x_{t+1} = \frac{7}{2}y_t - x_t + 3$; $x_0 = -2$

c) $y_{t+1}=-y_t+\frac{3}{4}x_t$; $y_0=5$ d) $y_{t+1}=2y_t-2x_t$; y_0 dado

$x_{t+1}=-3y_t+2x_t$; $x_0=8$ $x_{t+1}=2y_t+2x_t$; x_0 dado

15. Hallar los puntos de equilibrios y analizar la estabilidad de los sistemas del problema 14).

16. Resolver el sistema de ecuación en diferencia $\begin{bmatrix} p_{t+1} \\ q_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ q_t \end{bmatrix}$.

Hallar el punto de equilibrio y hallar la condición que debe cumplirse para que la solución converja al punto de equilibrio.

17. Encontrar la solución general de la ecuación general $\dot{Y}=AY$, en el caso donde $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. También encontrar la solución, si $Y=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ cuando $t=0$.

18. Encontrar la solución general de la ecuación general $\dot{X}=AX+b$, en el caso donde $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. También encontrar la solución, si $X=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ cuando $t=0$.

19. Para cada uno de los pares siguientes de ecuaciones diferenciales. Encontrar el punto de equilibrio, y clasificarlo.

a) $\dot{x}=x+2y-1$, $\dot{y}=5x+7y-2$ b) $\dot{x}=3x+7y+2$, $\dot{y}=-2x-3y+1$

c) $\dot{x}=-3x-2y+10$, $\dot{y}=x-3y-7$ d) $\dot{x}=9x+4y$, $\dot{y}=5x+3y$

20. Bosquejar el diagrama de fase de los problemas de la pregunta 19).

21. Resolver el siguiente sistema lineal y bosquejar el diagrama de fase $\dot{X}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}X$

22. Encontrar e^{At} y resolver los sistemas lineales $\dot{X}=AX$ para:

a) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

23. Encontrar la solución del sistema lineal $\dot{X}=AX$ donde:

a) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

24. Resolver el sistema lineal $\dot{X}=AX$ y graficar el diagrama de fase para:

a) $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ d) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

25. Si $\det(A)=0$, entonces el origen es un punto singular de $\dot{X}=AX$. Determinar la solución y el correspondiente diagrama de fase de el sistema lineal.

a) $A=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

26. Resolver el problema $\dot{X}=AX$, $X(0)=X_0$ donde $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

27. Transformar las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden en sistemas de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden en sistemas de dos ecuaciones diferenciales de primer orden y resolver:

a) $2\ddot{y}-5\dot{y}+y-100=0$ b) $\ddot{y}-2y=1$ c) $\ddot{y}+10\dot{y}+y=1$

28. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales resolver con las condiciones iniciales dadas.

a) $\dot{y}_1=y_1+5y_2+18$; $\dot{y}_2=\frac{1}{4}y_1-y_2+9$; $y_1(0)=6$; $y_2(0)=0$.

b) $\dot{y}_1=2y_1+\frac{1}{2}y_2$; $y_2=\frac{7}{2}y_1-y_2+15$; $y_1(0)=2$; $y_2(0)=4$.

c) $\dot{y}_1=3y_1+y_2+4$; $y_2=2y_1+2y_2-12$; $y_1(0)=-2$; $y_2(0)=5$.

29. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales, determinar si el sistema es un nodo estable o inestable, punto silla, foco estable e inestables o centro.

a) $\dot{y}_1=10y_1+3y_2+2$
$\dot{y}_2=-3y_1+y_2+1$

b) $\dot{y}_1=y_1+3y_2+10$
$\dot{y}_2=-2y_1+y_2-5$

c) $\dot{y}_1=2y_1-6y_2-1$
$\dot{y}_2=-3y_1+5y_2+2$

d) $\dot{y}_1=-2y_1-4y_2+5$
$\dot{y}_2=-2y_1-9y_2+1$

30. Resolver el siguiente sistema de ecuación diferencial, bosquejar el diagrama de fase y encontrar la ecuación para la senda silla: $\dot{y}_1 = 2y_1 - 9y_2$; $\dot{y}_2 = -3y_1 - 4y_2$.

31. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferencial lineal. Bosquejar el diagrama de fase y encontrar la ecuación de la senda silla. Si $y_1(0) = 8$. ¿Qué valor debe tener $y_2(0)$ para que el sistema converja a su punto de equilibrio?
$\dot{y}_1 = 2y_1 - 9y_2 + 35$; $\dot{y}_2 = -3y_1 - 4y_2 + 70$.

32. Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas y realizar el diagrama de fase correspondiente:

a) $\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X$ b) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} X$ c) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} X$ d) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} X$

e) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$ f) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 100 \end{pmatrix} X$ g) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X$ h) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$

i) $\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} X$ j) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$

33. Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas:

a) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} X$ b) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} X$

c) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$ d) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

34. En los siguientes problemas, x e y representan poblaciones de especies distintas que compiten entre sí. El sistema dinámico que describe su evolución es la versión vectorial del modelo logístico de crecimiento. Describir los diagramas de fase correspondientes y analizar el tipo de equilibrio y la evolución de las poblaciones.

a) $\dot{x} = x(2 - x - y)$, $\dot{y} = y(6 - 2x - y)$
b) $\dot{x} = x(6 - 2x - y)$, $\dot{y} = y(2 - x - y)$
c) $\dot{x} = x(2 - 2x + y)$, $\dot{y} = y(6 + x - 2y)$.

Este último caso no describe un sistema en competencia sino uno en simbiosis. Explicarlo.

35. Considerar el sistema: $\dot{P} = P(1-P) - \gamma PN$; $\dot{N} = N + \gamma PN$ donde γ es un parámetro positivo. Hallar los puntos de equilibrios y clasificarlos.

36. El ingreso "y" y el índice de pecios "p" se relacionan de acuerdo con el siguiente sistema lineal: $\dot{y} = ay - p$; $\dot{p} = y - bp + ab - 1$ donde $a, b > 0$.

a) ¿Para qué valores de a y b se tiene un comportamiento "cíclico" de las variables?
b) ¿Para qué valores de a y b es estable el sistema?

37. Sea "p" el nivel de precios y "w" el salario nominal. El cambio en el salario está dado por: $\dot{W} = A(W - ap)$, y la inflación $\dot{p}$ está determinada por el cambio en el salario y por la presión en la demanda, de manera que satisface la ecuación $\dot{p} = B\dot{W} + C(W - ap)$ Adicionalmente se tiene que se cumplen $A, B, C, a > 0$ y $a(AB + C) > A$. Resolver el sistema y analizar el tipo de equilibrio que se obtiene.

38. Considerar el siguiente sistema lineal: $\dot{X} = \begin{pmatrix} 2\alpha & -1 \\ \alpha^2 - \beta^2 & 0 \end{pmatrix} X$ donde se supone que $\beta > \alpha > 0$. Explicar porque $p* = (0,0)$ es un punto silla.

39. Considerar el sistema $\dot{x} = -y - x(x^2 + y^2)$, $\dot{y} = x - y(x^2 + y^2)$. Demostrar que (0,0) es un punto de equilibrio degenerado y sin embargo es asintóticamente estable.

40. Considere el siguiente modelo de crecimiento económico (Modelo de Ramsey-Casskoopmans). $\dot{k} = f(k) - nk - c$; $\dot{c} = \frac{(f'(k) - \rho)c}{\theta}$

a) Asumiendo que $f(k) = k^{0.5}$, $\rho = 0.5$, $n = 0.2$ y $\theta = 0.5$. Encontrar un punto de equilibrio (k^*, c^*), tal que $k^* > 0$ y $c* > 0$. Explicar por qué (k^*, c^*) es un punto silla.

b) Suponer que el capital percápita inicial es $k_0 = 0.1 + k^*$. Aproximadamente, ¿Qué valor debe tener el consumo pércapita inicial c_0 para que el sistema converja al punto de equilibrio (k^*, c^*)?

41. Linealizar cada uno de los siguientes sistemas alrededor de su(s) punto(s) de equilibrio y realizar los diagramas de fase correspondientes:

a) $\dot{x} = 4x - 3xy$; $\dot{y} = 3y - xy$ b) $\dot{x} = 3y^2 - x$; $\dot{y} = -(3x^2 + y)$

42. Considérese el siguiente sistema no lineal: $\dot{x}=x-1$; $\dot{y}=xe^{x}-y$. Encontrar los puntos de equilibrios y clasificarlos.

43. Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales es autónomo $\dot{x}=f(x,y)$; $\dot{y}=g(x,y)$.

a) Supongamos que: *i)* $f_x=0$, $f_y>0$, $g_x>0$ y $g_y=0$.

ii) $f_x=0$, $f_y<0$, $g_x<0$ y $g_y=0$

Para cada caso, construir un diagrama de fases apropiado, dibujar las trayectorias y determinar la naturaleza del equilibrio.

b) *i)* Demostrar que es posible producir o bien un nodo estable o bien un foco estable a partir del sistema de ecuaciones diferenciables dado, si:

$$f_x<0 \ , \ f_y>0 \ , \ g_x<0 \ \text{y} \ g_y<0$$

ii) En la construcción del anterior diagrama de fases. ¿Qué características especiales son las responsables de que se obtengan resultados diferentes (nodo o foco)?

44. Analizar la estabilidad local de cada uno de los siguientes sistemas lineales.

a) $\dot{x}=e^{x}-1$; $\dot{y}=ye^{x}$ b) $\dot{x}=x+2y$; $\dot{y}=x^{2}-y$

c) $\dot{x}=1-e^{y}$; $\dot{y}=5x-y$ d) $\dot{x}=x^{3}+3x^{2}y+y$; $\dot{y}=x(1+y^{2})$

45. Para los sistema de diferencias encontrar sus puntos de equilibrio y determinar su tipo.

a) $x_{t+1}=5x_t+10$, $y_{t+1}=2y_t$ b) $x_{t+1}=-\frac{1}{2}x_t-2$, $y_{t+1}=\frac{1}{2}y_t-2$ c) $x_{t+1}=-0.8x_t$, $y_{t+1}=-1.2y_t$

46. Considere los siguientes sistemas de ecuaciones en diferencia en las variables (x_t, y_t, z_t). Determinar sus puntos de equilibrio y describa la estabilidad local de cada punto de equilibrio.

a) $x_{t+1}=x_t^2-x_t y_t$, $y_{t+1}=y_t^{1/2}+6$, $z_{t+1}=z_t^2+x_t y_t$

b) $x_{t+1}=0.5x_t^2$, $y_{t+1}=-y_t+3$, $z_{t+1}=z_t-2$

c) $x_{t+1}=x_t y_t+30$, $y_{t+1}=2y_t^{1/2}+8$, $4z_{t+1}=x_t y_t+4z_t^2+8$

47. Linealizar el sistema: $y_{t+1}=y_t+y_t x_t$; $x_{t+1}=-y_t x_t+2y_t-3x_t$ en el punto de equilibrio y describa la estabilidad local de cada punto de equilibrio.

5. APLICACIÓN EN MÉTODOS ECONOMÉTRICOS

El modelo lineal general de k variables.

Hipótesis:

Supongamos que existe una relación lineal entre una variable Y y $k-1$ variables explicativas $X_1, X_2, \ldots, X_k$ y un término de perturbaciones $\boldsymbol{u}$.
Si tenemos una muestra de n observaciones de Y y X podemos escribir el siguiente sistema de ecuaciones con k incógnitas.

$$\begin{aligned}
y_1 &= \beta_1+\beta_2 x_{12}+\beta_3 x_{13}+\ldots+\beta_k x_{1k}+u_1\\
y_2 &= \beta_1+\beta_2 x_{22}+\beta_2 x_{23}+\ldots+\beta_k x_{2k}+u_2\\
y_3 &= \beta_1+\beta_2 x_{32}+\beta_3 x_{33}+\ldots+\beta_k x_{3x}+u_3\\
&\vdots\\
y_n &= \beta_1+\beta_2 x_{n2}+\beta_3 x_{n3}+\ldots+\beta_k x_{nk}+u_n
\end{aligned}$$

que expresado en forma matricial es:

$$(1)\quad \boxed{Y=X\beta+U}\ ,\ \text{donde } Y=\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} 1 & x_{12}\cdots\cdots & x_{1k}\\ 1 & x_{22}\cdots\cdots & x_{2k}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_{n2}\cdots\cdots & x_{nk}\end{bmatrix},\ \beta=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_k\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{bmatrix}$$

donde U se llaman las perturbaciones.
Las incógnitas son β_i y los u_i. En estadística, los valores verdaderos de estas incógnitas no se pueden hallar, lo que se puede hallar son sus ***estimaciones***. Dichas estimaciones se hallan aplicando el método de los mínimos cuadrados.

Denotemos por $\hat{\beta}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1\\ \vdots\\ \hat{\beta}_k\end{bmatrix}$ las estimaciones de los β_i y denotamos por $\mathbf{e}=\begin{bmatrix}e_i\\ e_2\\ \vdots\\ e_n\end{bmatrix}$ los residuos.

Entonces la ecuación matricial (1) se puede expresar por:

(2) $\boxed{y=X\hat{\beta}+\mathbf{e}}$. Al despejar $\mathbf{e}$, obtenemos: $\mathbf{e}=y-X\hat{\beta}$.

La suma de los cuadrados de los residuos se define por:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e^t e \quad , \quad e^t : \text{transpuesta de e}$$

$$= (Y - X\hat{\beta})^t (Y - X\hat{\beta})$$

$$= (Y^t - \hat{\beta}^t X^t)(Y - X\hat{\beta})$$

$$= Y^t Y - Y^t X\hat{\beta} - \hat{\beta}^t X^t Y + \underbrace{\hat{\beta}^t X^t X\hat{\beta}}_{\text{es una matriz simétrica}}$$

Son iguales porque; $Y^t X\hat{\beta}$ es un escalar. La transpuesta de un escalar es el mismo escalar.

> $\hat{\beta}^t X^t X\hat{\beta}$ es una matriz simétrica. Al derivar respecto a $\hat{\beta}$ se obtiene: $2X^t X\hat{\beta}$.

$$e^t e = Y^t Y - 2\hat{\beta}^t X^t Y + \hat{\beta}^t X^t X\hat{\beta}$$

Ahora derivar respecto a $\hat{\beta}$.

$$\frac{\partial(e^t e)}{\partial \hat{\beta}} = 0 - 2X^t Y + 2X^t X\hat{\beta}$$

Para que $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ sea mínima debe cumplirse que su derivada sea igual a cero, esto es:

$$-2X^t Y + 2X^t X\hat{\beta} = 0$$

$\Longleftrightarrow \; (X^t X)\hat{\beta} = X^t Y$, como $(X^t X)$ es una matriz cuadrada y tiene inversa se puede resolver la ecuación matricial y poder hallar la matriz $\hat{\beta}$.

$$\boxed{\hat{\beta} = (X^t X)^{-1}(X^t Y)} \text{ , donde } X^t X = \begin{bmatrix} n & \Sigma X \\ \Sigma X & \Sigma X^2 \end{bmatrix} , \; X^t Y = \begin{bmatrix} \Sigma Y \\ \Sigma XY \end{bmatrix}$$

Resolviendo, esta ecuación se hallan los valores de $\{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_k\}$.

Mayor información se encuentra en algún libro de Econometría.

El álgebra lineal, también se aplica en:

- Teoría de grafos
- Teoría de juegos
- Cadenas de Markov
- Gestión forestal
- Distribuciones en el equilibrio de temperatura
- Algunas aplicaciones genéticas
- Programación lineal.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Kenneth Hoffmann – Ray Kunze; *Álgebra Lineal*. Printice – Hall.

[2] Elon Lages Lima; *Álgebra Lineal*. Textos del IMCA.

[3] Klaus Jänich; *Linear Algebra*. Editorial Board.

[4] I.V. Proskunakov; *Problemas de Álgebra Lineal*. Editorial Reverté S.A.

[5] A. Wayne Roberts; *Elementary Linear Algebra*. Benjamin Cummings.

[6] Seymour Lipschutz; *Álgebra Lineal*. Mc Graw Hill.

[7] Ramón García Cobián; *Notas de Clase*.

[8] Steven Romann; *Advanced Linear Algebra*.

[9] Francis G-Florey; *Fundamentos de Álgebra Lineal y Aplicaciones*.

[10] Serge Lang; *Álgebra Lineal*.

[11] Stanley I. Grossman; *Álgebra Lineal*.

[12] Howard Anton; *Introducción al Álgebra Lineal*.

[13] I. N. Herstein; *Álgebra Moderna*.

[14] Bernard Kolman; *Álgebra Lineal*.

[15] J. Johnston; *Métodos de Econometría*. Edit. Vicens-Vives.