№1 B19 Ген Д

$$\sqrt[5]{15} = \frac{5}{3} \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{104}{625}}$$

$$(1+x)^{1/n} = 1 + \frac{1}{n}x - \frac{n-1}{2n^2}x^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{6n^3}x^3 - \dots$$

$$x = \frac{104}{625}, \quad n = 5$$

$$\sqrt[5]{1+\frac{104}{625}} \approx 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{104}{625} - \frac{2}{25} \cdot \left(\frac{104}{625}\right)^2$$

$$\frac{104}{625} = 0,1664$$

$$\frac{1}{5} \cdot 0,1664 = 0,03328$$

$$(0,1664)^2 = 0,0277$$

$$-\frac{2}{25} \cdot 0,0277 = -0,002216$$

$$\sqrt[5]{1+\frac{104}{625}} \approx 1 + 0,03328 - 0,002216 = 1,031064$$

$$\sqrt[5]{15} \approx \frac{5}{3} \cdot 1,031064 \approx 1,718$$

№2

$$\sin 18 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\sqrt{5} \approx 2,236$$

$$\sin 18 = \frac{2,236-1}{4} = \frac{1,236}{4} \approx 0,309$$

Ответ: $\sin 18 \approx 0,309$

№3

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x-\frac{x^2}{2}}{e^{x^3}-1}$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\ldots$$

$$e^{x^3}=1+x^3+\frac{x^6}{2!}+\ldots$$

Числитель:

$$e^{-x}-1+x-\frac{x^2}{2}=\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)-1+x-\frac{x^2}{2}=$$

$$=-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+x-\frac{x^2}{2}=-\frac{x^3}{6}$$

Знаменатель:

$$e^{x^3-1}=\left(1+x^3+\frac{x^6}{2!}+\ldots\right)-1=x^3$$

$$\frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3}=-\frac{1}{6}$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x-\frac{x^2}{2}}{e^{x^3}-1}=-\frac{1}{6}$

№4

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$\sqrt{1+x^2}\approx\underbrace{1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}}_{\text{для точности } \delta=0{,}001}+\ldots$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx \approx \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right) dx$$

1) $\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,dx = [x]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

2) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{48} =$

$\approx 0,0208$

3) $\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{x^4}{8}\,dx = -\frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}} x^4\,dx = -\frac{1}{8}\cdot\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{160} =$

$= -\frac{1}{1280} \approx -0,00078$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{2} + 0,0208 - 0,00078 = 0,52002$

Ответ: 0,520 (с точностью $\delta = 0,001$)

№5

$y' - xy = e^x$, $y(0) = 0$

допустим $y(x)$ представимо в виде степенного ряда

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

Пусть также

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

приведем оба ряда к x^n

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$

2) $x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

для $k=0$

$a_1 = 1$

для $k \geq 1$

$(k+1) a_{k+1} - a_{k-1} = \frac{1}{k!}$

$a_{k+1} = \frac{a_{k-1} + \frac{1}{k!}}{k+1}$

Вычислим первые пять коэффициентов:

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{a_0 + \frac{1}{1!}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_1 + \frac{1}{2!}}{3} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_2 + \frac{1}{3!}}{4} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}{4} = \frac{\frac{3}{6} + \frac{1}{6}}{4} = \frac{\frac{4}{6}}{4} = \frac{1}{6}$$

$$y(x) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 =$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{\cancel{3}2} + \frac{x^4}{6}$$

Ответ: $y(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \ldots$