Лабораторная работа № 4
Моделирование простейших систем массового обслуживания.

Рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания (СМО) при следующих условиях. Время между моментами прихода заявок в систему является случайной величиной, имеющей показательное распределение с параметром λ (1/мин.). Время обслуживания одной заявки – случайная величина, имеющая равномерное распределение на промежутке $[a, b]$. Заявки, заставшие канал обслуживания занятым, ожидают в очереди (чистая система с ожиданием). Дисциплина очереди – FCFS («первым пришел – первым обслуживаешься»).

Требуется промоделировать функционирование системы с целью получения оценок следующих характеристик:

- средней загруженности канала обслуживания;
- средней длины очереди;
- среднего времени ожидания заявки в очереди,
- вероятности наличия очереди.

Логика построения имитационной модели.

Логика построения имитационной модели может быть описана в терминах событий, связанных с приходом и уходом заявок.

События, связанные с приходом заявки.

1. Сгенерировать и сохранить время прихода следующей заявки (текущее время моделирования + промежуток времени между приходами заявок).
2. Если канал обслуживания свободен, то
   а) начать обслуживание поступившей заявки (изменить состояние канала обслуживания на «занят»);
   б) сгенерировать и сохранить время завершения обслуживания (ухода) заявки (текущее время моделирования + время обслуживания).
3. Если канал обслуживания занят, то поставить поступившую заявку в очередь и увеличить длину очереди на 1.

События, связанные с уходом заявки.

1. Если очередь пуста, то объявить систему свободной.
2. Если очередь не является пустой, то
   а) начать обслуживание заявки, имеющей самое раннее время прихода и уменьшить длину очереди на 1;
   б) сгенерировать и сохранить время ухода заявки, поступившей на обслуживание (текущее время моделирования + время обслуживания).

Формирование статистических данных.

Пусть моделирование функционирования системы выполнялось на промежутке времени $[0, T]$. Для каждой заявки, пришедшей в систему и покинувшей ее за время моделирования, по окончании прогона модели определены значения

$t_{пр}(i)$ – время прихода в систему i-й заявки,

$t_{у}(i)$ – время ухода из системы i-й заявки,

$t_{обс}(i)$ – время обслуживания i-й заявки.

- Время ожидания $\boldsymbol{i}$-й заявки в очереди определяется как

$$W_q(i) = t_y(i) - t_{пр}(i) - t_{обс}(i).$$

Если $\boldsymbol{k}$ – общее число заявок, обслуженных в СМО за время моделирования, то среднее время ожидания заявки в очереди находится как

$$W_q = \frac{\sum_{i=1}^{k} W_q(i)}{k}.$$

- Средняя загруженность канала обслуживания определяется как

$$W_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} t_{обс}(i)}{t_y(k)}.$$

- Средняя длина очереди определяется как

$$N_q = \frac{\sum_{i=1}^{k} W_q(i)}{t_y(k)}.$$

- Оценка вероятности наличия очереди

$$p_q^* = 1 - \frac{k_0}{k},$$

где k_0 – число заявок, обслуженных в системе за время моделирования, для которых $W_q(i) = 0$.

<u>Пример</u>.

Пусть в рассмотренной выше одноканальной СМО среднее время между приходами заявок в систему составляет 15 мин., время обслуживания одной заявки имеет равномерное распределение на промежутке [10, 15] мин. Оценим основные характеристики СМО по результатам имитационного моделирования системы. Для упрощения расчетов рассмотрим обслуживание 5 заявок.

Из условия следует, что $\lambda = 1/15$ (1/мин.).

1. За начальный момент $t = 0$ выберем время поступления первой заявки.

   $t_{пр}(1) = 0.$

   Сгенерируем квазиравномерно распределенное псевдослучайное число

   $x_1 = 0{,}0589.$

   Время прихода следующей заявки

   $t_{пр}(2) = 0 + (-15 \cdot \ln(0{,}0589)) \approx 42{,}48.$

   Т. к. при $t = 0$ система свободна, то немедленно начинается обслуживание первой заявки.

   Сгенерируем квазиравномерно распределенное псевдослучайное число

   $x_2 = 0{,}6733.$

   Время обслуживания первой заявки

   $t_{обс}(1) = 10 + 5 \cdot 0{,}6733 = 13{,}37.$

   Время ухода первой заявки

$t_у(1) = 0 + t_{обс}(1) = 13{,}37.$

Имеем следующий хронологический список событий:

Время t	Событие
13,37	Уход 1-й заявки
42,48	Приход 2-й заявки

2. Уход первой заявки в момент t = 13,37.
   Очередь пуста, система свободна.

   Имеем следующий хронологический список событий:

Время t	Событие
42,48	Приход 2-й заявки

3. Время прихода 2-й заявки t = 42,48.
   Сгенерируем квазиравномерно распределенное псевдослучайное число
   $x_3 = 0{,}4799.$
   Время прихода следующей заявки
   $t_{пр}(3) = 42{,}48 + (-15 \cdot \ln(0{,}4799)) \approx 53{,}49.$
   Т. к. при t = 42,48 система свободна, то немедленно начинается обслуживание второй заявки.
   Сгенерируем квазиравномерно распределенное псевдослучайное число
   $x_4 = 0{,}9486.$
   Время обслуживания второй заявки
   $t_{обс}(2) = 10 + 5 \cdot 0{,}9486 = 14{,}74.$
   Время ухода второй заявки
   $t_у(2) = 42{,}48 + t_{обс}(2) = 57{,}22.$

   Имеем следующий хронологический список событий:

Время t	Событие
53,49	Приход 3-й заявки
57,22	Уход 2-й заявки

4. Время прихода 3-й заявки t = 53,49.
   Сгенерируем квазиравномерно распределенное псевдослучайное число
   $x_5 = 0{,}6139.$
   Время прихода следующей заявки
   $t_{пр}(4) = 53{,}49 + (-15 \cdot \ln(0{,}6139)) \approx 60{,}81.$
   Т. к. при t = 53,49 система занята (до t = 57,22), то третья заявка помещается в очередь.

   Имеем следующий хронологический список событий:

Время t	Событие
57,22	Уход 2-й заявки
60,81	Приход 4-й заявки

5. Уход второй заявки в момент t = 57,22.

Третья заявка покидает очередь и начинает обслуживаться.
Сгенерируем квазиравномерно распределенное псевдослучайное число

$\boldsymbol{x_6} = 0{,}5933.$

Время обслуживания третьей заявки

$\boldsymbol{t_{обс}}(3) = 10 + 5{\cdot}0{,}5933 = 12{,}97.$

Время ухода третьей заявки

$\boldsymbol{t_у}(3) = 57{,}22 + \boldsymbol{t_{обс}}(3) = 70{,}19.$

Имеем следующий хронологический список событий:

Время ***t***	Событие
60,81	Приход 4-й заявки
70,19	Уход 3-й заявки

6. Время прихода 4-й заявки ***t*** = 60,81.
Сгенерируем квазиравномерно распределенное псевдослучайное число

$\boldsymbol{x_7} = 0{,}9341.$

Время прихода следующей заявки

$\boldsymbol{t_{пр}}(5) = 60{,}81 + (-15{\cdot}\ln(0{,}9341)) \approx 61{,}83.$

Т. к. при ***t*** = 60,81 система занята (до ***t*** = 70,19), то четвертая заявка помещается в очередь.

Имеем следующий хронологический список событий:

Время ***t***	Событие
61,83	Приход 5-й заявки
70,19	Уход 3-й заявки

7. Время прихода 5-й заявки ***t*** = 61,83.
Т. к. имитация ограничивается пятью заявками, то время прихода следующей заявки не генерируется.
Т. к. при ***t*** = 61,83 система занята (до ***t*** = 70,19), то пятая заявка помещается в очередь.

Имеем следующий хронологический список событий:

Время ***t***	Событие
70,19	Уход 3-й заявки

8. Уход третьей заявки в момент ***t*** = 70,19.
Четвертая заявка покидает очередь и начинает обслуживаться.
Сгенерируем квазиравномерно распределенное псевдослучайное число

$\boldsymbol{x_8} = 0{,}1782.$

Время обслуживания четвертой заявки

$\boldsymbol{t_{обс}}(4) = 10 + 5{\cdot}0{,}1782 = 10{,}89.$

Время ухода четвертой заявки

$\boldsymbol{t_у}(4) = 70{,}19 + \boldsymbol{t_{обс}}(4) = 81{,}08.$

Имеем следующий хронологический список событий:

Время ***t***	Событие

81,08	Уход 4-й заявки

9. Уход четвертой заявки в момент $\boldsymbol{t}$ = 81,08.
   Пятая заявка покидает очередь и начинает обслуживаться.
   Сгенерируем квазиравномерно распределенное псевдослучайное число
   $\boldsymbol{x_9} = 0{,}3473$.
   Время обслуживания пятой заявки
   $\boldsymbol{t_{обс}}(5) = 10 + 5\cdot 0{,}3473 = 11{,}74$.
   Время ухода пятой заявки
   $\boldsymbol{t_у}(5) = 81{,}08 + \boldsymbol{t_{обс}}(5) = 92{,}82$.

   Имеем следующий хронологический список событий:

Время $\boldsymbol{t}$	Событие
92,82	Уход 5-й заявки

10. Уход пятой заявки в момент $\boldsymbol{t}$ = 92,82.
    Пятая заявка покидает очередь и начинает обслуживаться.
    Очередь пуста, система свободна.
    Имитация заканчивается.

Времена ожидания заявок, обслуженных системой, равны

$\boldsymbol{W_q}(1) = \boldsymbol{t_у}(1) - \boldsymbol{t_{пр}}(1) - \boldsymbol{t_{обс}}(1) = 13{,}37 - 0 - 13{,}37 = 0,$

$\boldsymbol{W_q}(2) = \boldsymbol{t_у}(2) - \boldsymbol{t_{пр}}(2) - \boldsymbol{t_{обс}}(2) = 57{,}22 - 42{,}48 - 14{,}74 = 0,$

$\boldsymbol{W_q}(3) = \boldsymbol{t_у}(3) - \boldsymbol{t_{пр}}(3) - \boldsymbol{t_{обс}}(3) = 70{,}19 - 53{,}49 - 12{,}97 = 3{,}73;$

$\boldsymbol{W_q}(4) = \boldsymbol{t_у}(4) - \boldsymbol{t_{пр}}(4) - \boldsymbol{t_{обс}}(4) = 81{,}08 - 60{,}81 - 10{,}89 = 9{,}38;$

$\boldsymbol{W_q}(5) = \boldsymbol{t_у}(5) - \boldsymbol{t_{пр}}(5) - \boldsymbol{t_{обс}}(5) = 92{,}82 - 61{,}83 - 11{,}74 = 19{,}25.$

Среднее время ожидания заявки в очереди составляет

$$\boldsymbol{W_q = \frac{0+0+3{,}73+9{,}38+19{,}25}{5} = 6{,}47 \ (\textit{мин.}).}$$

Средняя загруженность канала обслуживания составляет

$$\boldsymbol{W_s = \frac{13{,}37+14{,}74+12{,}97+10{,}89+11{,}74}{92{,}82} = 0{,}686.}$$

Средняя длина очереди равна

$$\boldsymbol{N_q = \frac{0+0+3{,}73+9{,}38+19{,}25}{92{,}82} = 0{,}349 \ (\textit{заявок}).}$$

Вероятность наличия очереди оценивается как

$$\boldsymbol{p_q^* = 1 - \frac{2}{5} = 0{,}6 .}$$

Замечания.

1. Моделирование функционирования многоканальной СМО может быть организовано аналогично. Заявка, находящаяся в очереди, поступает на обслуживание в момент освобождения канала, который может ее обслужить

(в момент, когда заявка, находившаяся в этом канале, покидает систему).

2. В примере для простоты ручных вычислений рассматривалось обслуживание 5 заявок. Для получения более точных оценок функциональных характеристик СМО должно быть организовано несколько прогонов имитационной модели (серия компьютерных экспериментов) достаточно большой длины и выполнена статистическая обработка полученных результатов.

Методы сбора и обработки статистических данных, полученных в процессе имитации.

Для возможности корректного использования методов статистической обработки данных, собранных в процессе имитации (получение точечных и интервальных оценок, проверка статистических гипотез и т. п.), результаты наблюдений должны удовлетворять требованиям:

1) результаты наблюдений должны иметь стационарные распределения (распределения не должны изменяться в процессе эксперимента);
2) результаты наблюдений должны подчиняться нормальному закону распределения;
3) наблюдения должны быть независимы.

На практике результаты имитационного моделирования могут не удовлетворять ни одному из перечисленных требований. Поэтому необходимо специально позаботиться о том, чтобы соответствующие условия были обеспечены.

Первое условие (стационарность распределений). Продолжительность переходного периода в значительной степени определяется характеристиками модели, и в общем случае невозможно предсказать, когда наступит установившийся режим. Общее соображение: чем длиннее продолжительность прогона модели, тем больше шансов достичь установившегося режима (при условии, что он существует в данной СМО).

Второе условие (нормальный закон распределения). Из центральной предельной теоремы следует: распределение выборочной средней является асимптотически нормальным независимо от распределения генеральной совокупности, из которой извлечена выборка. Это дает средство обеспечения второго условия (представление результатов наблюдений средними значениями соответствующих величин).

Третье условие (независимость наблюдений). Природа имитационного эксперимента не гарантирует независимости между последовательными наблюдениями над моделью. В то же время, использование выборочных средних для представления отдельных наблюдений позволяет смягчить данную проблему. Для этого, в частности, следует увеличивать интервал времени имитации для получения выборочной средней.

Существует несколько методов сбора данных в процессе имитации, позволяющих учесть приведенные соображения: метод подынтервалов, метод повторения, метод циклов.

Метод повторения.

В данном методе каждое наблюдение представляется независимым прогоном (имитацией) модели. Каждый прогон модели определяется своей последовательностью квазиравномерно распределенных случайных чисел. Вычисление оценок искомых характеристик СМО может выполняться с учетом или без учета переходного периода. Для моделирования систем, которые функционируют бесконечно долго, применяется *незаканчивающаяся имитация*. В этом случае требуется «обрезать» информацию, относящуюся к переходному периоду, и учитывать данные наблюдений только в установившемся режиме работы системы. Если же моделируется, например, работа банка (8-часовой рабочий день), то используется *заканчивающаяся имитация*. В этом случае переходный период не может игнорироваться. Смягчение влияния переходного периода достигается путем увеличения длины прогона модели.

По результатам каждого прогона модели находятся оценки интересующих функциональных характеристик СМО (результат каждого прогона – отдельное наблюдение). На основе этих наблюдений оцениваются числовые характеристики искомых величин (среднее значение, дисперсия и др.).

Например, если по результатам n наблюдений (n прогонов модели) получено n значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ оцениваемой величины, то среднее значение искомой характеристики находится как

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

а дисперсия оценивается по формуле

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 .$$

Пример.

Пусть по результатам пяти прогонов модели получены наблюдения о средней длине очереди на протяжении промежутка моделирования.

Наблюдение i	1	2	3	4	5
Средняя длина очереди $N_q^{(i)}$	2,33	1,67	1,83	1,00	2,50

По данным полученной выборки можно оценить среднее значение искомой характеристики (средней длины очереди) $\bar{x} = 1{,}87$ и дисперсии $s^2 = 0{,}35$.

Задания.

***Задание* 1** (10 баллов).

Выполнить имитационное моделирование процесса обслуживания клиентов банка на промежутке [0, 8] часов при следующих условиях:

- банк имеет n операторов для обслуживания клиентов;
- моменты прихода клиентов в банк образуют простейший поток с плотностью λ;
- длительность деловых операций с одним клиентом имеет показательное распределение с математическим ожиданием, равным τ_0;
- вновь поступивший клиент обслуживается любым свободным оператором;
- клиент, заставший всех операторов занятыми, становится в очередь и

ожидает, пока не освободится какой-либо оператор;
- время ожидания клиента не ограничено (чистая система с ожиданием).

По результатам моделирования найти основные функциональные характеристики системы обслуживания, а также проанализировать возможность повышения эффективности обслуживания.

В ходе работы выполнить следующие действия.

1. Изобразить схему СМО.
2. Разработать логическую схему моделирующего алгоритма.
3. Разработать программу (язык программирования C#), реализующую имитацию функционирования СМО с заданными значениями параметров $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\tau_0}$ (вводятся пользователем). Для формирования последовательности псевдослучайных чисел использовать встроенный генератор C#. Предусмотреть возможность
   3.1) организации $\boldsymbol{N}$ прогонов имитационной модели ($\boldsymbol{N}$ вводится пользователем); по результатам каждого прогона – формирование следующих статистических данных о характеристиках СМО:
      а) средней длины очереди;
      б) среднего времени ожидания клиента в очереди;
      в) вероятности наличия очереди;
      г) средней загруженности каждого оператора;
      д) среднего числа занятых операторов;
   3.2) обработки собранных статистических данных: получения средних значений и дисперсий характеристик, указанных в п. а) – д).
4. Выбрав значения параметров $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\tau_0}$ в соответствии с номером своего варианта (таблица 4.1), выполнить $\boldsymbol{N}$ = 5 прогонов программы и получить оценки средних значений и дисперсий для указанных в п. 3 характеристик СМО.
5. Сравнить оценки характеристик СМО, полученные в п. 4, со значениями, вычисленными аналитически (результат выполнения задания 1 лабораторной работы № 1).
6. Предположим: руководитель отделения банка хочет, чтобы среднее время ожидания клиента в очереди не превышало $\boldsymbol{\tau_{max}}$. Используя программу, разработанную в п. 3, выбрав значения $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\tau_0}$ и $\boldsymbol{\tau_{max}}$ в соответствии с номером своего варианта (таблица 4.1) и варьируя $\boldsymbol{n}$, получить ответы на вопросы:
   6.1) какое минимальное количество операторов необходимо иметь банку в зале обслуживания для обеспечения желаемого условия;
   6.2) какова при этом условии будет средняя загруженность каждого оператора.

   На основании полученных результатов сформулировать рекомендации о целесообразности реорганизации СМО.
7. Оформить отчет.

Таблица 4.1

№ варианта	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{\lambda}$, клиентов/час	$\boldsymbol{\tau_0}$, мин	$\boldsymbol{\tau_{max}}$, мин
1	4	45	5	7
2	3	40	4	6
3	4	39	6	7
4	3	33	5	8

***Задание* 2** (7 баллов).

Выполнить имитационное моделирование процесса функционирования автомобильной стоянки вблизи некоторого учреждения на промежутке [0, 10] часов при следующих условиях:

- автостоянка имеет $\boldsymbol{n}$ мест для автомобилей;
- возможно размещение дополнительно $\boldsymbol{K}$ автомобилей на пешеходных дорожках возле автостоянки;
- автомобили, размещенные на пешеходных дорожках, не могут там оставаться постоянно и должны ожидать, пока на стоянке освободится место;
- моменты приезда автомобилей на стоянку образуют простейший поток с плотностью $\boldsymbol{\lambda}$;
- время пребывания автомобилей на стоянке имеет показательное распределение с математическим ожиданием, равным $\boldsymbol{\tau_0}$.

По результатам моделирования найти основные функциональные характеристики системы обслуживания, а также проанализировать различные варианты реорганизации системы.

В ходе работы выполнить следующие действия.

1. Описать структуру системы в терминологии ТМО.
2. Разработать логическую схему моделирующего алгоритма.
3. Разработать программу (язык программирования C#), реализующую имитацию функционирования СМО с заданными значениями параметров $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\tau_0}$ (вводятся пользователем). Для формирования последовательности псевдослучайных чисел использовать встроенный генератор C#. Предусмотреть возможность
   3.1) организации $\boldsymbol{N}$ прогонов имитационной модели ($\boldsymbol{N}$ вводится пользователем); по результатам каждого прогона – формирование следующих статистических данных о характеристиках СМО:
      а) процента автомобилей (от общего числа прибывших на стоянку), которые вынуждены искать другое место для парковки;
      б) процента автомобилей (от общего числа прибывших на стоянку), которые вынуждены ожидать на пешеходной дорожке;
      в) среднего числа занятых мест на стоянке;
      г) среднего числа занятых мест на пешеходных дорожках.
   3.2) обработки собранных статистических данных: получения средних значений и дисперсий характеристик, указанных в п. а) – г).
4. Выбрав значения параметров $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\tau_0}$ в соответствии с номером своего варианта (таблица 4.2), выполнить $\boldsymbol{N}$ = 5 прогонов программы и получить оценки средних значений и дисперсий для указанных в п. 3 характеристик СМО.
5. Сравнить оценки характеристик СМО, полученные в п. 4, со значениями, вычисленными аналитически (результат выполнения задания 2 лабораторной работы № 1).
6. Используя программу, разработанную в п. 3, выбрав значения $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\tau_0}$ в соответствии с номером своего варианта (таблица 4.2) и варьируя $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{K}$,

получить ответы на вопросы:

6.1) как изменятся характеристики системы, если увеличить число мест на стоянке на $\Delta \boldsymbol{n}$ (см. таблицу 4.3);

6.2) как изменятся характеристики системы, если сократить число мест на пешеходных дорожках на $\Delta \boldsymbol{K}$ (см. таблицу 4.3);

6.3) каковы будут характеристики системы, если увеличить число мест на стоянке на $\Delta \boldsymbol{n}$ с одновременным сокращением числа мест на пешеходных дорожках на $\Delta \boldsymbol{K}$.

На основании всех полученных результатов моделирования сформулировать рекомендации о целесообразности реорганизации автомобильной стоянки.

7. Оформить отчет.

Таблица 4.2

№ варианта	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{K}$	$\boldsymbol{\lambda}$, авт./час	$\boldsymbol{\tau_0}$, мин
1	15	6	20	60
2	20	5	25	55
3	12	3	16	45
4	24	4	18	55

Таблица 4.3

№ варианта	$\Delta \boldsymbol{n}$	$\Delta \boldsymbol{K}$
1	3	2
2	2	3
3	3	2
4	4	2

Содержание отчета.

1. Название работы.
2. По заданию 1.
   2.1. Схема СМО.
   2.2. Логическая схема моделирующего алгоритма.
   2.3. Статистические данные о характеристиках СМО, указанных в п. 3.1) задания, сформированные в каждом из $\boldsymbol{N}$ прогонов модели, а также результаты их статистической обработки, указанные в п. 3.2).
   2.4. Результаты сравнения характеристик СМО, найденных аналитическим методом, и методом имитационного моделирования. Оценка результатов сравнения.
   2.5. Ответы на вопросы п. 6 задания. Рекомендации о целесообразности реорганизации СМО.
3. По заданию 2.
   3.1. Описание структуры системы в терминологии ТМО.
   3.2. Логическая схема моделирующего алгоритма.
   3.3. Статистические данные о характеристиках СМО, указанных в п. 3.1) задания, сформированные в каждом из $\boldsymbol{N}$ прогонов модели, а также результаты их статистической обработки, указанные в п. 3.2).

3.4. Результаты сравнения характеристик СМО, найденных аналитическим методом, и методом имитационного моделирования. Оценка результатов сравнения.
3.5. Ответы на вопросы п. 6 задания. Рекомендации о целесообразности реорганизации автомобильной стоянки.