

南京理工大学

倒立摆控制系统实验报告

姓名（学号）

指导教师

综合评定成绩 _____

自动化学院

2016 年 5 月 15 日

目录

实验一 建立一级倒立摆的模型.....	3
1. 实验目的.....	3
2. 实验内容.....	3
3. 实验代码.....	3
4. 系统的传递函数和状态方程.....	4
5. 系统开环响应曲线.....	5
图 1-1 摆杆角度（直接由传递函数得到）	
图 1-2 小车位置（直接由传递函数得到）	5
6. 思考题.....	6
实验二 倒立摆控制算法的状态空间法设计.....	7
1. 实验目的.....	7
2. 实验内容.....	7
3. Matlab 源程序及程序执行结果和仿真图形	7
4. 实际系统的响应曲线.....	9
5. 思考题.....	14
实验三 研究倒立摆系统对信号的跟踪.....	18
1. 实验目的.....	18
2. 实验内容.....	18
3. Matlab 源程序及仿真图形	18
4. 实际系统的响应曲线.....	20
5. 思考题.....	22
实验体会和收获.....	25

实验一 建立一级倒立摆的模型

1. 实验目的

学习建立一级倒立摆系统的数学模型，并进行 Matlab 仿真。

2. 实验内容

写出系统传递函数和状态空间方程，用 Matlab 进行仿真。

3. 实验代码

```
%实际系统参数
M=1.32; m=0.132; b=0.1; l=0.27; I=0.0032; g=9.8; T=0.02;
%求传递函数 gs(输出为摆杆角度)和 gspo(输出为小车位置)
q=(M+m)*(I+m*l^2)-(m*l)^2; num=[m*l/q 0];
den=[1 b*(I+m*l^2)/q -(M+m)*m*g*l/q -b*m*g*l/q];
gs=tf(num,den); numpo=[(I+m*l^2)/q 0 -m*g*l/q];
denpo=[1 b*(I+m*l^2)/q -(M+m)*m*g*l/q -b*m*g*l/q 0]; gspo=tf(numpo,denpo);
%求状态空间 sys(A,B,C,D)
p=I*(M+m)+M*m*l^2;
A=[0 1 0 0;0 -(I+m*l^2)*b/p m^2*g*l^2/p 0;0 0 0 1;0 -m*b*l/p m*g*l*(M+m)/p 0];
B=[0;(I+m*l^2)/p;0;m*l/p]; C=[1 0 0 0;0 0 1 0]; D=[0;0];
sys=ss(A,B,C,D);
%通过传递函数求系统(摆杆角度和小车位置)的开环脉冲响应
t=0:T:5; y1=impulse(gs,t); y2=impulse(gspo,t);
figure(1); plot(t,y2,'b',t,y1,'r'),grid; xlabel('t/s');ylabel('Position/m or Angle/rad');
axis([0 2 0 80]); legend('Car Position','Pendulum Angle');
%将状态空间方程 sys 转化为传递函数 gs0
gs0=tf(sys);
%通过状态方程求系统(摆杆角度和小车位置)的开环脉冲响应
t=0:T:5; y=impulse(sys,t); figure(2); plot(t,y(:,1),t,y(:,2),'r'),grid;
```

```

xlabel('t/s');ylabel('Position/m or Angle/rad');
axis([0 2 0 80]); legend('Car Position','Pendulum Angle');
%通过传递函数求系统(摆杆角度和小车位置)的开环阶越响应
t=0:T/5; y1=step(gs,t); y2=step(gspo,t); figure(3); plot(t,y2,'b',t,y1,'r'),grid;
axis([0 2.5 0 80]); xlabel('t/s');
ylabel('Position/m or Angle/rad');legend('Car Position','Pendulum Angle');
%通过状态方程求系统(摆杆角度和小车位置)的开环阶越响应
t=0:T/5; y=step(sys,t); figure(4); plot(t,y(:,1),t,y(:,2),'r'),grid;
xlabel('t/s');ylabel('Position/m or Angle/rad');
axis([0 2.5 0 80]); legend('Car Position','Pendulum Angle');
%求传递函数极点
P=pole(gs); Po=pole(gspo);
%求 A 的特征值
E=eig(A);

```

4. 系统的传递函数和状态方程

4.1 给出系统的传递函数和状态方程

$$g_s = \frac{2.054s}{s^3 + 0.07391s^2 - 29.23s - 2.013}$$

$$g_{spo} = \frac{0.7391s^2 - 20.13}{s^4 + 0.07391s^3 - 29.23s^2 - 2.013s}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.07391 & 0.7175 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.2054 & 29.23 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7391 \\ 0 \\ 2.054 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

4.2 将实际系统的状态空间方程转化为传递函数

$$g_{s01} = \frac{0.7391s^2 + 6.565e^{(-16)}s - 20.13}{s^4 + 0.07391s^3 - 29.23s^2 - 2.013s}$$

$$gs02 = \frac{2.054s}{s^3 + 0.07391s^2 - 29.23s - 2.013}$$

4.3 给出传递函数极点和系统状态矩阵 A 的特征值

P: 5.40, -5.41, -0.07

P0: 0, 5.40, -5.41, -0.07

E: 0, 5.40, -0.07, -5.41

5. 系统开环响应曲线

5.1 由系统传递函数给出系统开环脉冲响应和阶跃响应曲线

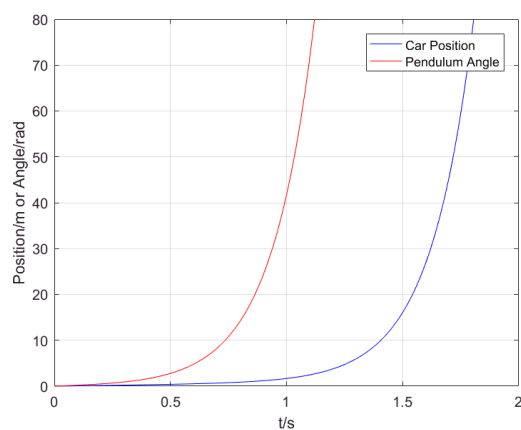


图1-1 摆杆角度（直接由传递函数得到）

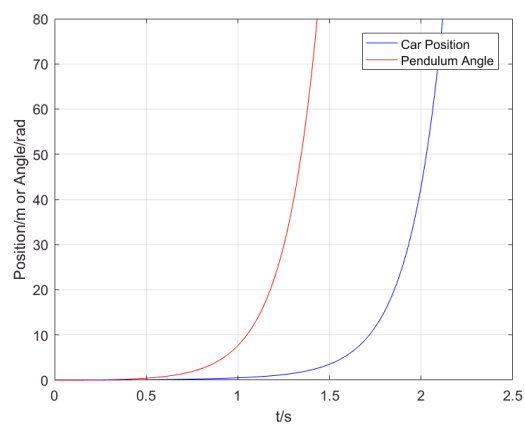


图1-2 小车位置（直接由传递函数得到）

5.2 由系统状态方程给出系统开环脉冲响应和阶跃响应曲线

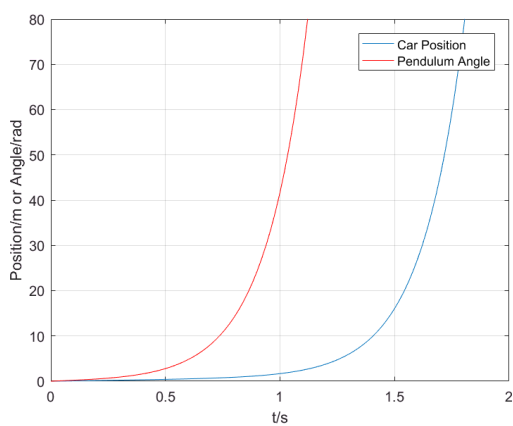


图 1-3 摆杆角度（由状态空间方程转化得到）

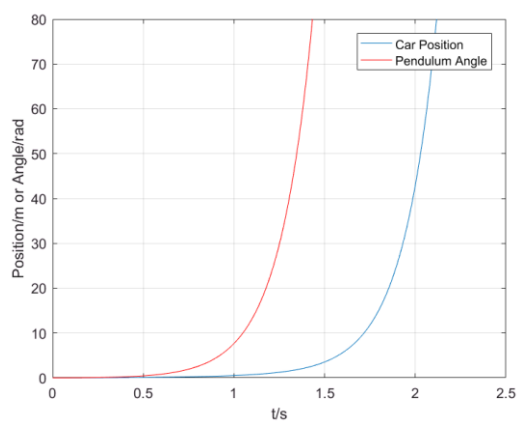


图 1-4 小车位置（由状态空间方程转化得到）

6. 思考题

6.1 由状态空间方程转化为传递函数，是否与直接计算传递函数相等？

答：通过比较，可知传递函数 g_{spo} 由状态空间方程转化为传递函数时，多了 s 的一次项，但是系数可以近似为 0，传递函数 g_s 则完全相等。所以，状态空间方程转化为传递函数与直接计算传递函数可以认为是相等的。

6.2 通过仿真表明开环系统是否稳定？请通过极点（特征值）理论来分析。

答：图形发散，不稳定。

有一个极点位于 s 平面右半平面，所以系统不稳定。

6.3 传递函数的极点和状态方程的特征值的个数、大小是否相等？如果不相等，请解释其原因。

答：传递函数 g_{spo} 的极点和状态方程的特征值的个数、大小相等。但是传递函数 g_s 的极点和状态方程的特征值个数不相等。因为存在零极点互消。

实验二 倒立摆控制算法的状态空间法设计

1. 实验目的

学习如何使用极点配置法和最优控制方法设计状态反馈控制器。

2. 实验内容

使用极点配置方法和最优控制方法设计状态反馈控制器，使得当在小车上施加 0.2m 的阶跃信号时，闭环系统的响应指标为：

杆角度 θ 和小车位移 x 的稳定时间小于 5 秒；

x 的上升时间小于 2 秒；

θ 的超调量小于 20 度（0.35 弧度）；

稳态误差小于 4%。

3. Matlab 源程序及程序执行结果和仿真图形

3.1 Matlab 源程序：

%实际系统参数

M=1.32; m=0.132; b=0.23; l=0.27; I=0.0032; g=9.8; T=0.02; p=I*(M+m)+M*m*l^2;

%求系统状态空间参数

A=[0 1 0 0; 0 -(I+m*l^2)*b/p m^2*g*l^2/p 0; 0 0 0 1; 0 -m*b*l/p m*g*l*(M+m)/p 0];

B=[0;(I+m*l^2)/p; 0;m*l/p]; C=[1 0 0 0; 0 0 1 0]; D=0;

A1=[0 1 0 0; 0 0 m*g/(M-m) 0; 0 0 0 1; 0 0 M*g/(M-m)/l 0];

B1=[0; 1/(M-m); 0; 1/(M-m)/l];

%用 Ackermann 公式求反馈向量 K

zeta=0.7; wn=6;

%期望的特征多项式

pp=conv([1 2*zeta*wn wn^2],[1 2*zeta*wn*3 wn^2*9]);

%期望的特征多项式的根

P=roots(pp);

```

K=acker(A,B,P');
%用最优控制方法求反馈向量 K
R=1;
Q1=200;
Q2=0;
Q3=100;
Q=[Q1 0 0 0;0 Q2 0 0;0 0 Q3 0;0 0 0 0];
K=lqr(A,B,Q,R);
%求状态反馈后的系统 sysstate
Ac=A-B*K;
Bc=B*K(1); %输入变换使输入与反馈的量纲匹配
Ac=A-B*K; Bc=B*K(1); %输入变换使输入与反馈的量纲匹配
sysstate=ss(Ac,Bc,C,D);
%对 lqr 控制系统进行仿真
t=0:T:5;
U=0.2*ones(size(t));
y=lsim(sysstate,U,t);
figure(1);
hold on;
plot(t,y(:,1),t,y(:,2),'r'),grid;
box on;
xlabel('t/s');
ylabel('Position/m or Angle/rad');
legend('Car Position','Pendulum Angle');

```

3.2 程序执行结果

当 $Q = [400 \ 0 \ 200]$ 时 $K = [-20.0000 \ -15.7890 \ 73.5267 \ 13.6342]$

当 $Q = [500 \ 0 \ 150]$ 时 $K = [-22.3607 \ -17.0102 \ 75.9211 \ 14.1667]$

3.3 仿真图形

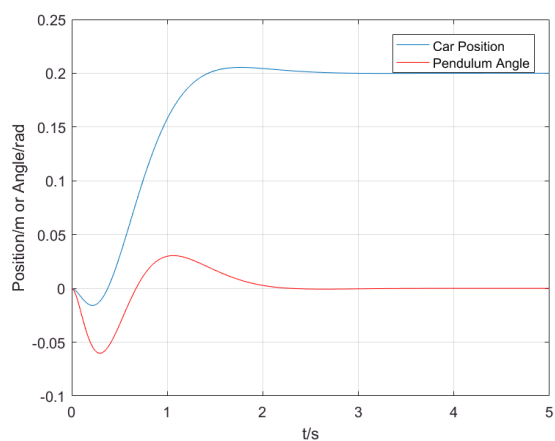


图 2-1 $Q=[400 \ 0 \ 200]$

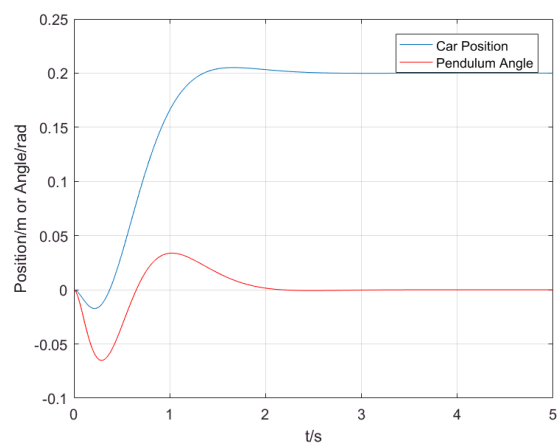


图 2-2 $Q=[500 \ 0 \ 150]$

4. 实际系统的响应曲线

4.1 无扰动时响应结果

4.1.1 当 $Q_1=400; Q_3=200$ 时的响应曲线

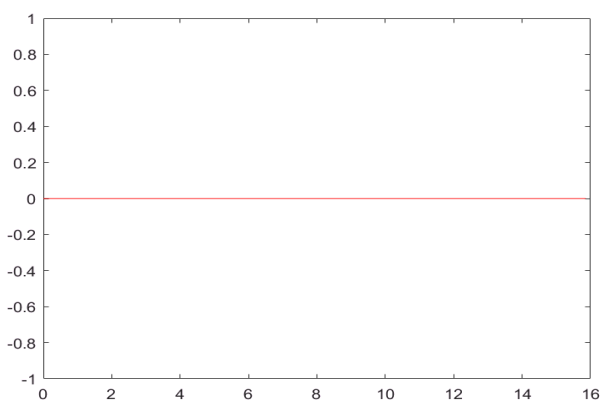


图 2-3 理想位置

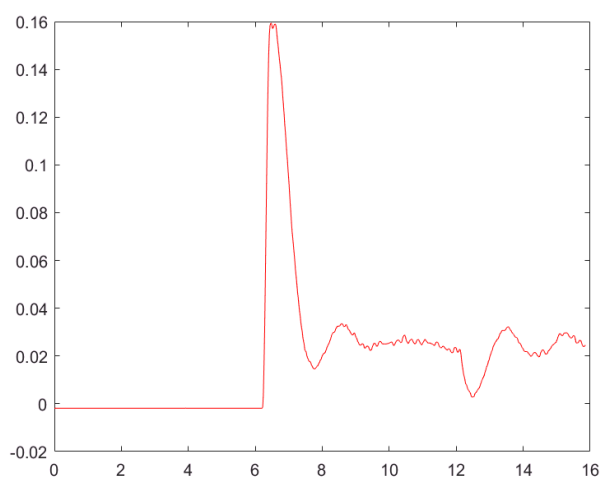


图 2-4 实际位置

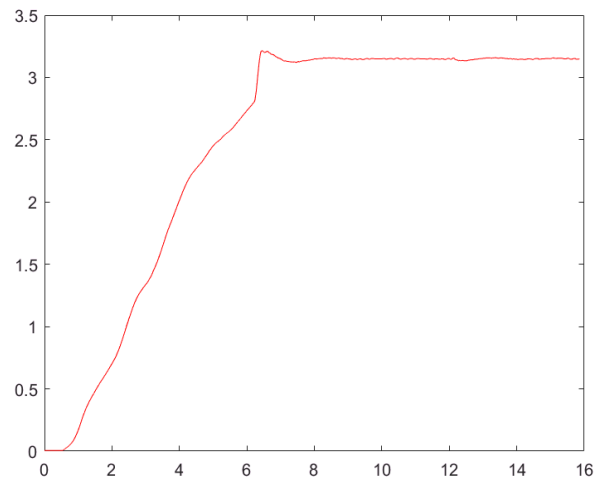


图 2-5 实际角度

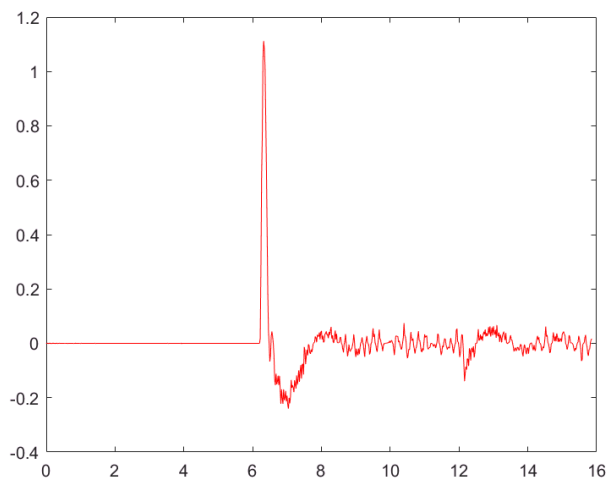


图 2-6 实际加速度

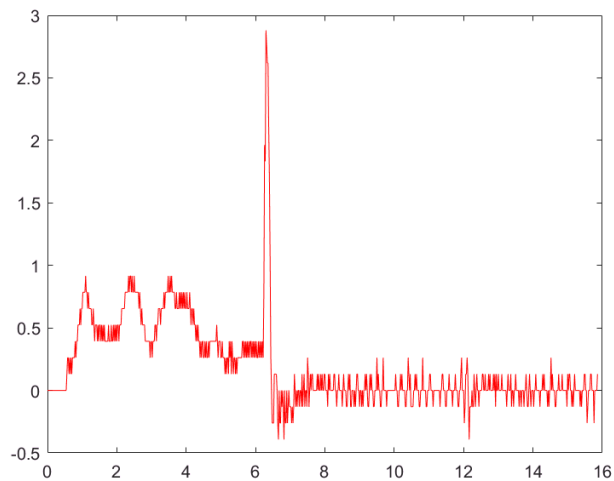


图 2-7 实际角加速度

小车的稳定位置 $P1=0.02M$

摆杆的稳定角度 $Pend1=3.1438rad$

4.1.2 当 $Q11=500; Q33=150$ 时的响应曲线

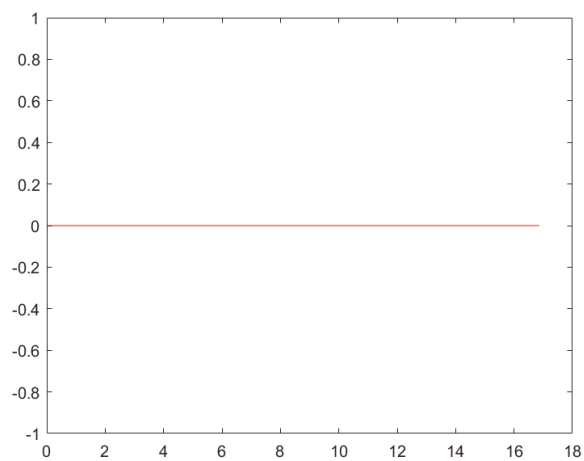


图 2-8 理想位置

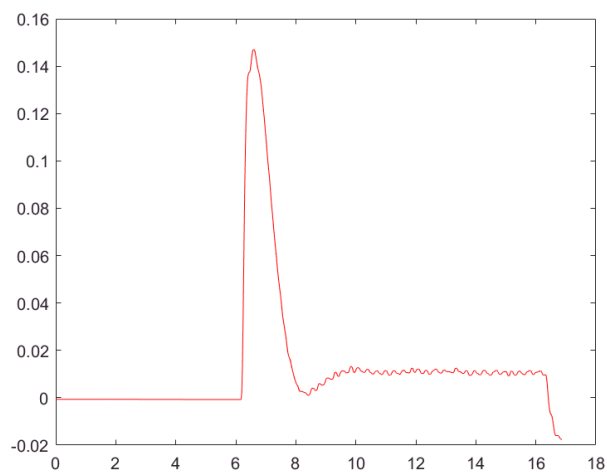


图 2-9 实际位置

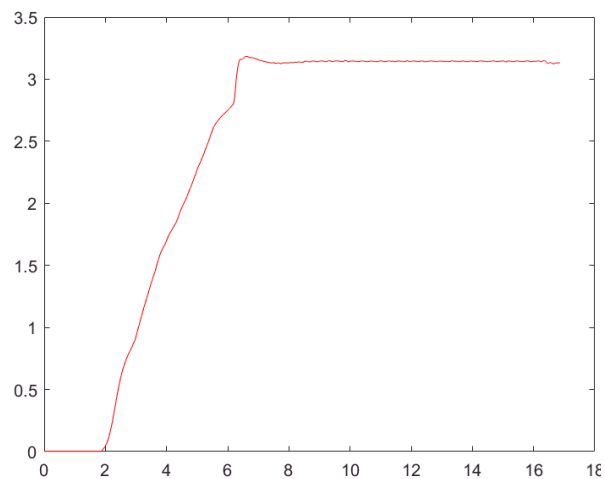


图 2-10 实际角度

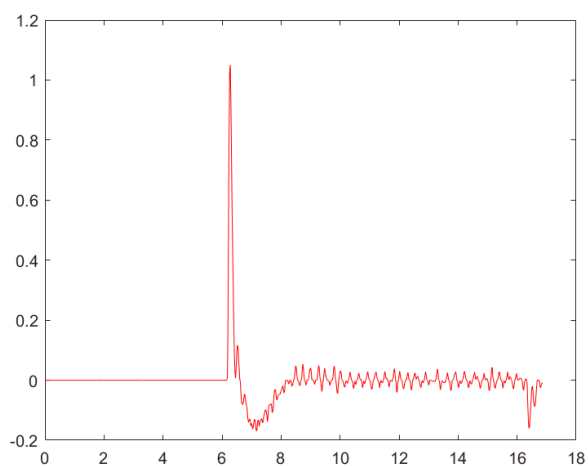


图 2-11 实际加速度

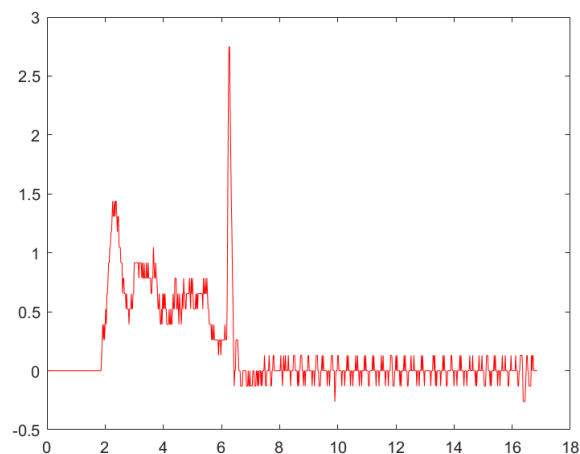


图 2-12 实际角加速度

小车的稳定位置 $P1=0.12M$

摆杆的稳定角度 $Pend1=3.142rad$

4.2 阶跃输入时系统的响应结果

4.2.1 当 $Q1=400; Q3=200$ 时的响应曲线

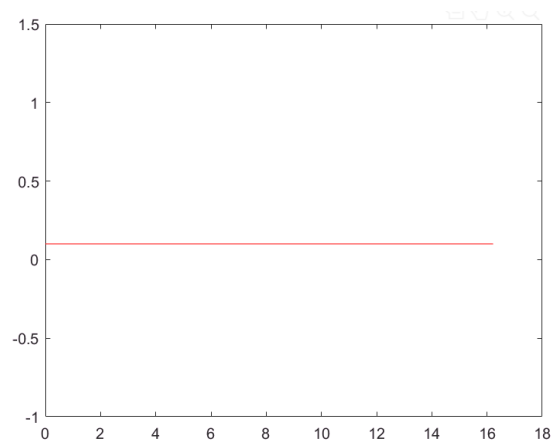


图 2-13 理想位置

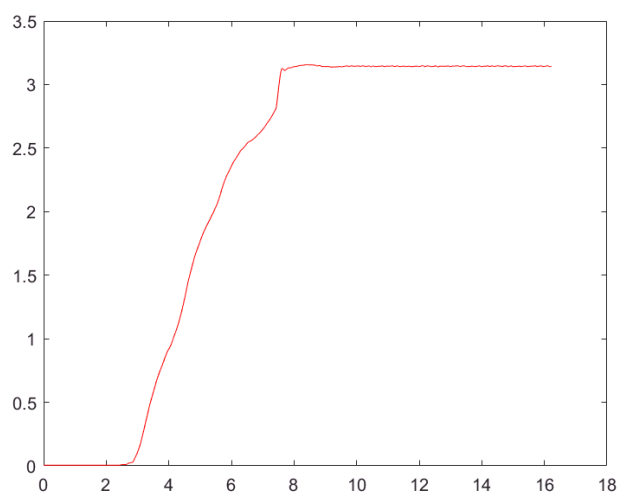
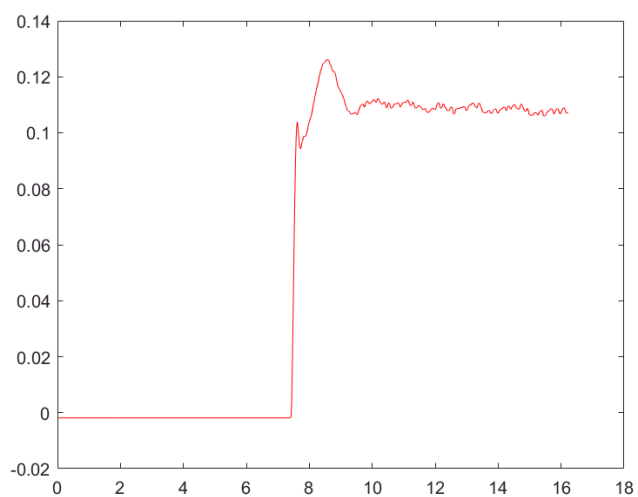


图 2-14 实际位置

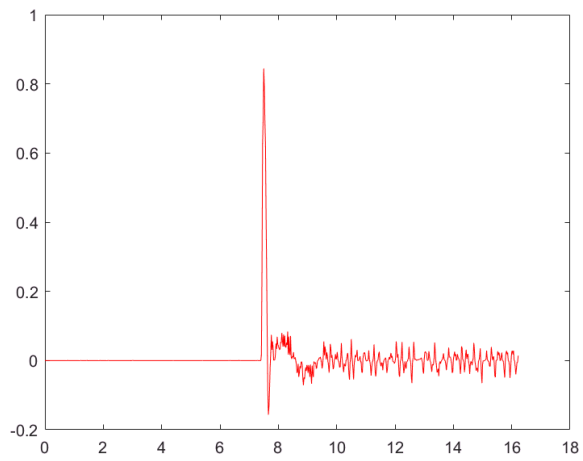


图 2-15 实际角度

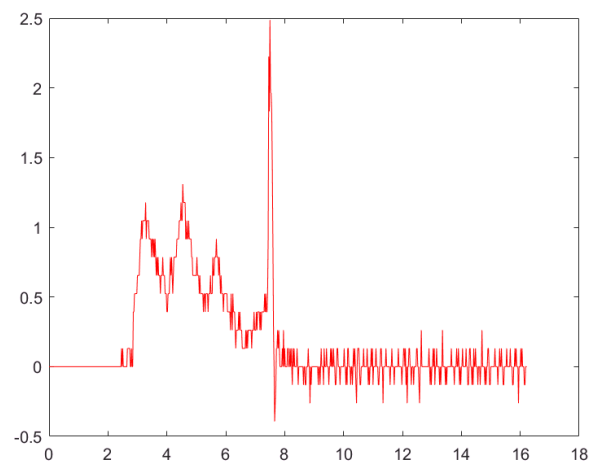


图 2-16 实际加速度

小车的稳定位置 $P2-P1=0.1078M$

图 2-17 实际角加速度

摆杆的稳定角度 $Pend2=3.147rad$

4.2.1 当 $Q11=500$; $Q33=150$ 时响应曲线

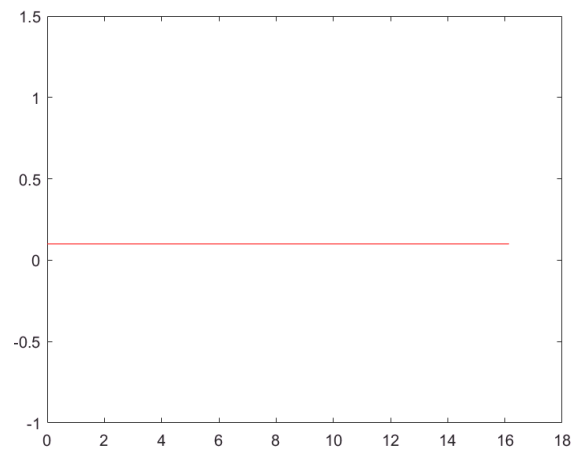


图 2-18 理想位置

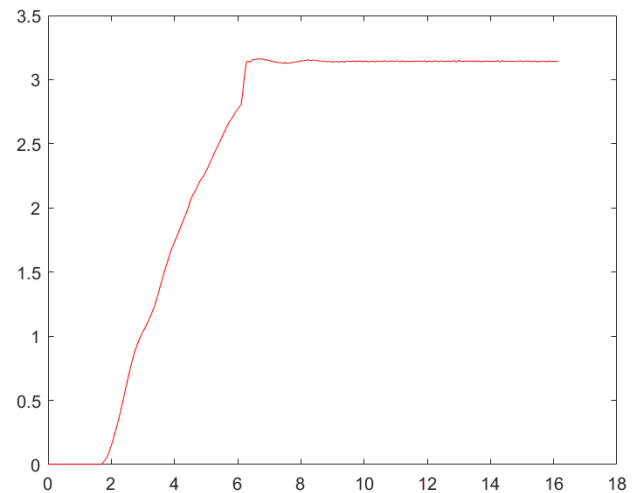
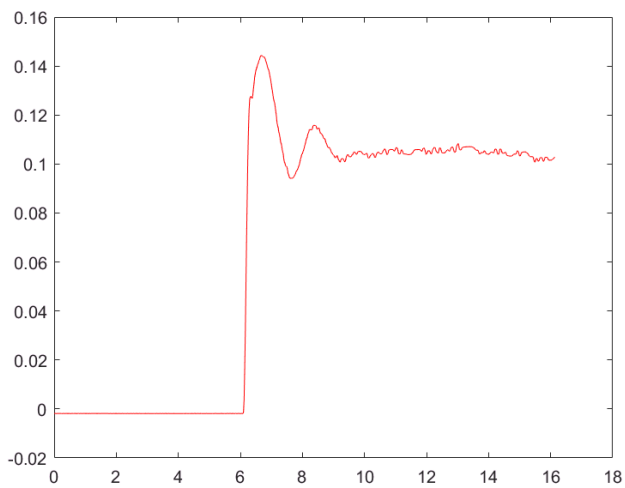


图 2-19 实际位置

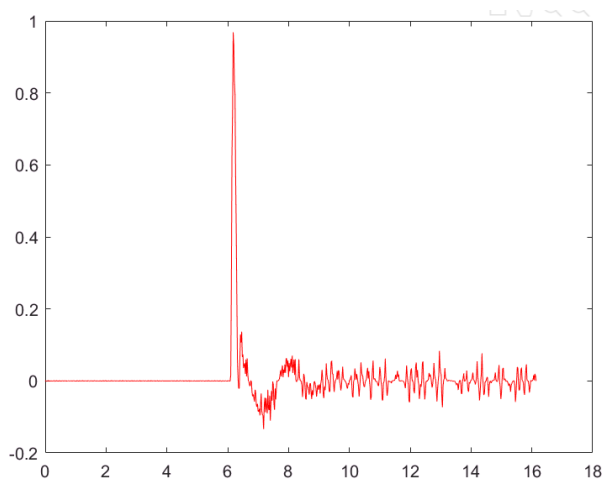


图 2-21 实际加速度

小车的稳定位置 $P2-P1=0.1028$

摆杆的稳定角度 $P_{end2}=3.142$

图 2-20 实际角度

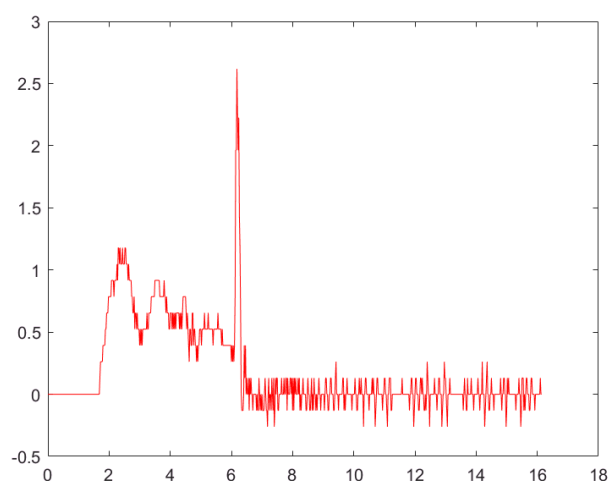


图 2-22 实际角加速度

4.3 不同 K 值下的实际系统的响应曲线以及四项响应指标

4.3.1 当 $Q_{11}=400, Q_{33}=200$ 时响应曲线

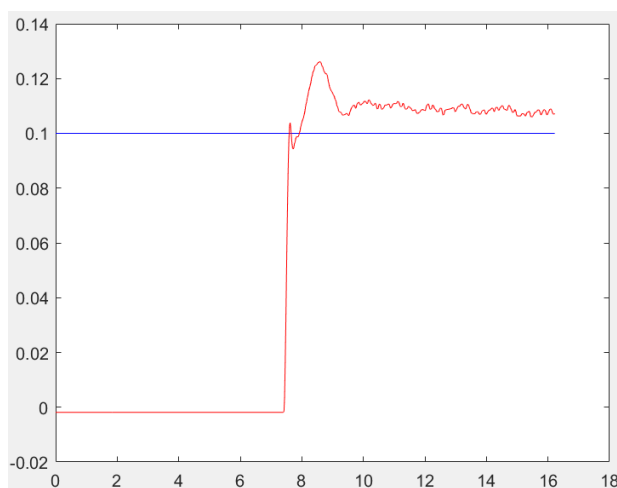


图 2-23 $Q_{11}=400, Q_{33}=200$ 时响应曲线

计算四项响应指标：峰值时间 $t_p=1.1s$ ，调整时间 $t_s=1.58s$ ，

上升时间 $t_r=0.38s$ ，超调 $\sigma\%=16.50\%$

4.3.2 当 Q11=500,Q33=150 时响应曲线

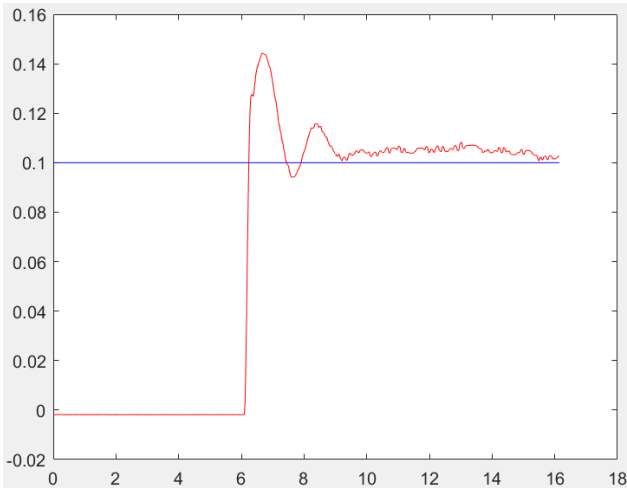


图 2-24 Q11=500 ,Q33= 150 时响应曲线

计算四项响应指标：峰值时间 $t_p=0.6s$ ，调整时间 $t_s=1.46s$ ，
上升时间 $t_r=0.12s$ ，超调 $\sigma\%=37.33\%$

5. 思考题

5.1 计算 Ac 的特征值

$K1 = \begin{bmatrix} -22.3607 & -17.0102 & 75.9211 & 14.1667 \end{bmatrix}$

$A_c =$

$1.0e+03 \times \begin{bmatrix} 0 & 0.0010 & 0 & 0 \\ 0.4282 & 0.1332 & -0.3696 & -0.0600 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0010 \\ 1.1902 & 0.3703 & -0.9999 & -0.1668 \end{bmatrix}$

$K1 = \begin{bmatrix} -20.0000 & -15.7890 & 73.5267 & 13.6342 \end{bmatrix}$

$A_c =$

$1.0e+03 \times \begin{bmatrix} 0 & 0.0010 & 0 & 0 \\ 0.4282 & 0.1332 & -0.3696 & -0.0600 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0010 \\ 1.1902 & 0.3703 & -0.9999 & -0.1668 \end{bmatrix}$

5.2 通过仿真分析 Q_{11} 和 Q_{33} 的大小对控值效果的影响

5.2.1 固定 Q_{33} ，改变 Q_{11} 与原值进行对比：

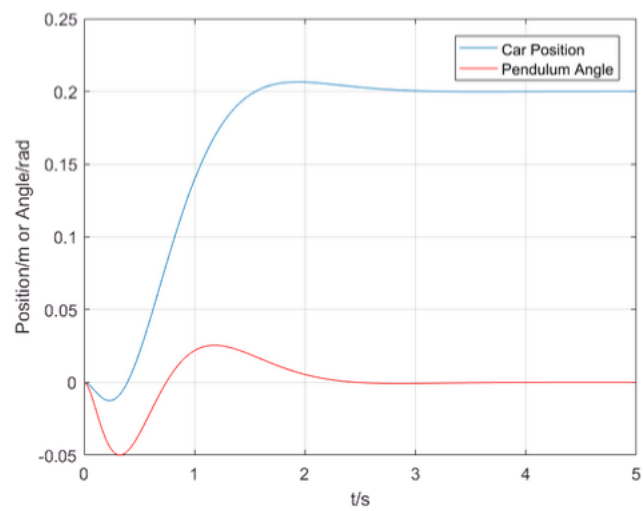


图 2-25 $Q_1=200$ $Q_3=100$

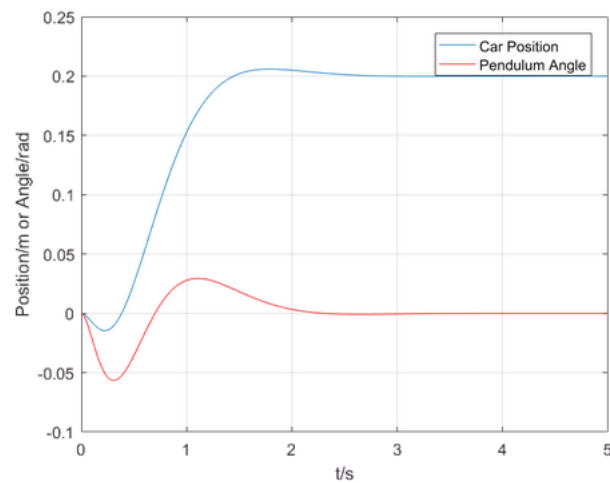


图 2-26 $Q_1=300$ $Q_3=100$

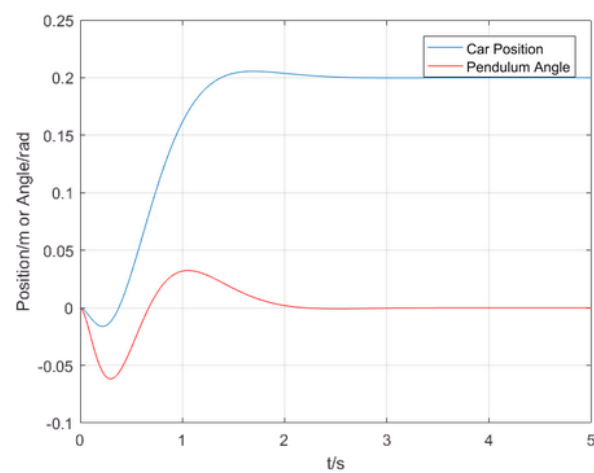


图 2-27 $Q_1=400$ $Q_3=100$

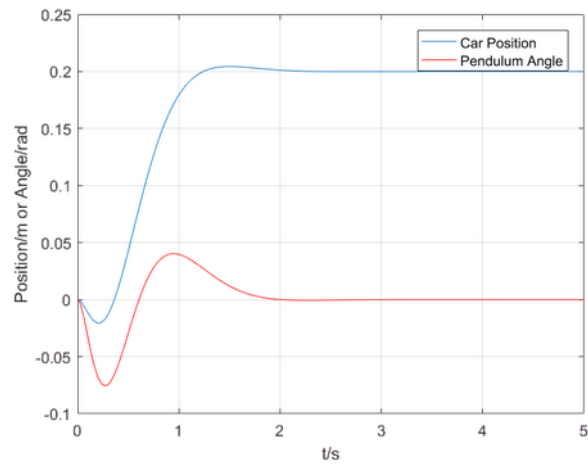


图 2-28 $Q1=800$ $Q3=100$

固定 $Q3$ ，逐渐增大 $Q1$ ，位置曲线的超调基本不变，但是响应时间缩短了，角度的超调逐渐增大。

5.2.2 固定 $Q1$ ，改变 $Q3$ 与原值进行对比：

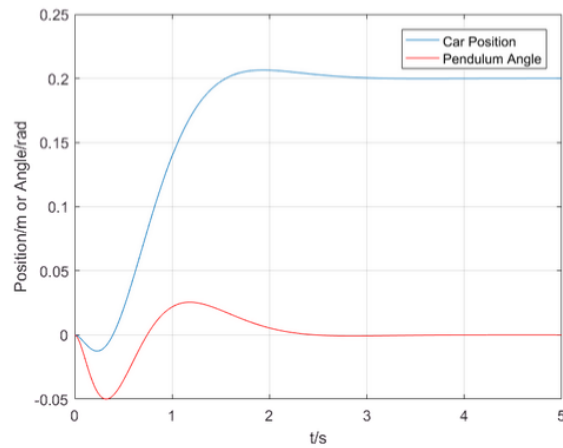


图 2-29 $Q1=200$ $Q3=100$

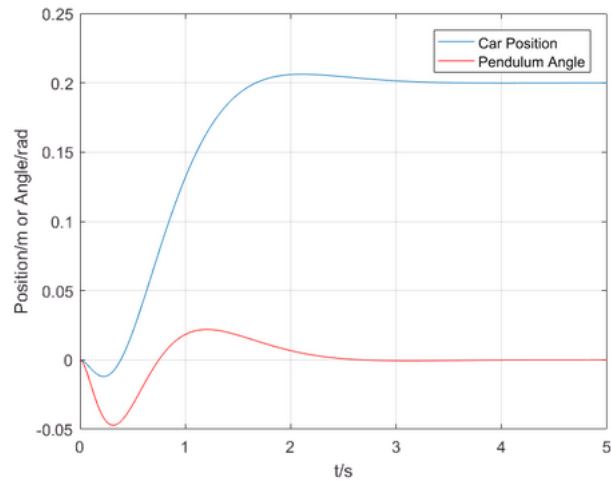


图 2-30 $Q1=200$ $Q3=300$

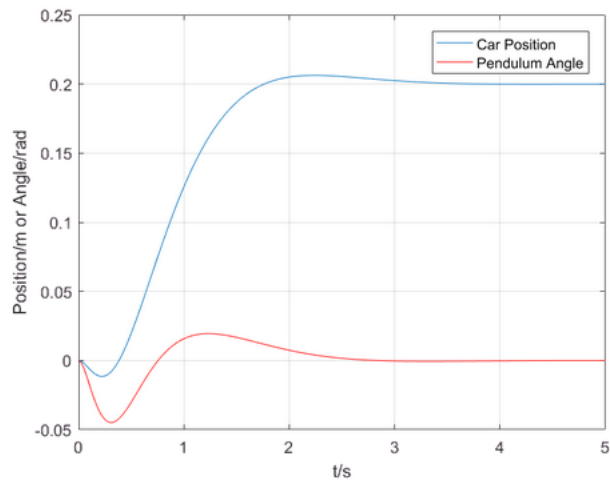


图 2-31 $Q_1=200$ $Q_3=500$

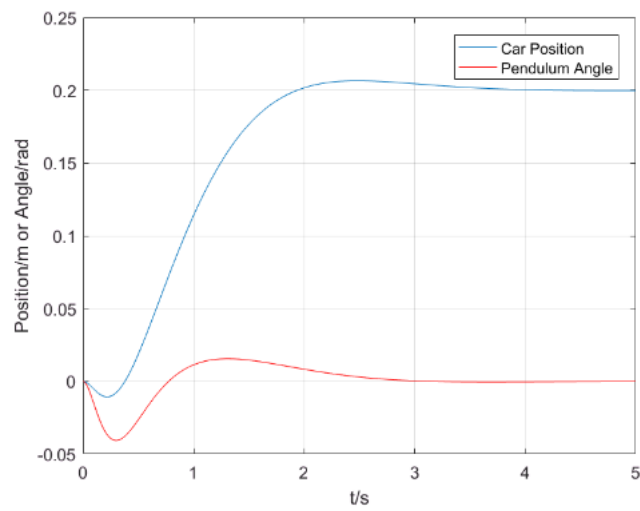


图 2-32 $Q_1=200$ $Q_3=1000$

固定 Q_1 ，逐渐增大 Q_3 ，位置曲线的超调基本不变，但是响应时间延长了，角度的超调逐渐减小。

实验三 研究倒立摆系统对信号的跟踪

1. 实验目的

观察倒立摆对于不同输入信号的跟踪情况，加深对状态空间和状态反馈的理解。

2. 实验内容

在平衡位置，分别设定下列二种信号，记录倒立摆的运动情况：

- (1) 方波信号：频率 0.2Hz，幅值 0.05m
- (2) 正弦波信号：频率 0.2Hz，幅值 0.05m
- (3) 锯齿波信号：频率 0.2Hz，幅值 0.05m

3. Matlab 源程序及仿真图形

3.1 Matlab 程序

```
%实际系统参数
M=1.32; m=0.132; b=0.21; l=0.27; I=0.0032; g=9.8; T=0.02;
%求系统状态空间参数
p=I*(M+m)+M*m*l^2;
A=[0 1 0 0;0 -(I+m*l^2)*b/p m^2*g*l^2/p 0;0 0 0 1;0 -m*b*l/p m*g*l*(M+m)/p 0];
B=[0;(I+m*l^2)/p;0;m*l/p]; C=[1 0 0 0;0 0 1 0]; D=0;
%求反馈向量 K
R=1; Q1=400; Q3=200; Q=[Q1 0 0 0;0 0 0 0;0 0 Q3 0;0 0 0 0]; K=lqr(A,B,Q,R);
%求状态反馈后的系统 sysstate
Ac=A-B*K;Bc=B*K(1);
%输入变换使输入与反馈的量纲匹配
sysstate=ss(Ac,Bc,C,D);
% 信号模拟发生器
%T=0.001; Tmax=25;
%t=[0:T: Tmax];
```

```

%生成阶跃信号 ``
%U=0.1*ones(size(t));
%生成方波 ``
%[U, t]=gensig('square',5, Tmax,T); U=0.1.*U;
%生成正弦波
%U=0.1*sin(2*pi*t); %或[U, t]=gensig('sine',5, Tmax,T);U=0.1.*U;
%生成锯齿波
U=0.1*sawtooth(0.4*pi*t,0);
%对 lqr 控制系统进行仿真
y=lsim(sysstate,U,t);
figure(1);
hold on;
plot(t,y(:,1),t,y(:,2),'r');
box on;
xlabel('t/s');
ylabel('Position/m or Angle/rad');
legend('Car Position','PendulumAngle');

```

3.2 Matlab 的仿真图形

3.2.1 方波干扰的响应曲线

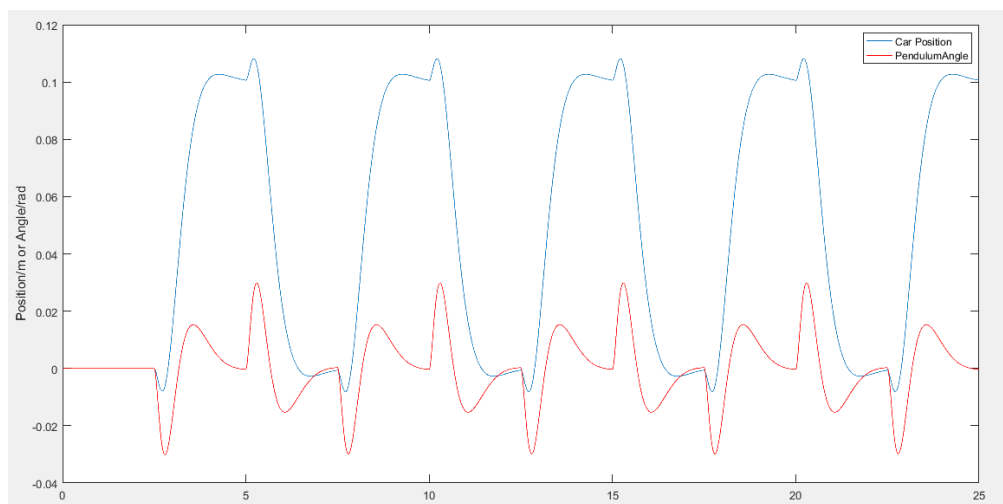


图 3-1 方波干扰的仿真曲线

3.2.2 正弦波干扰的响应曲线

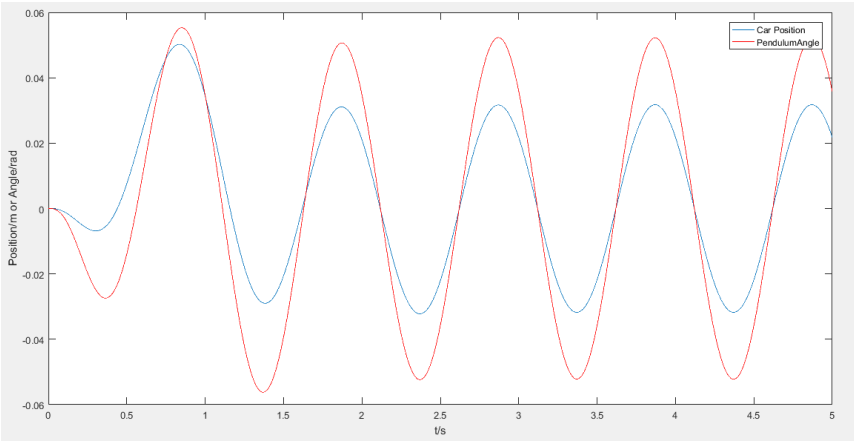


图 3-2 正弦波干扰的仿真曲线

3.2.3 锯齿波干扰的响应曲线

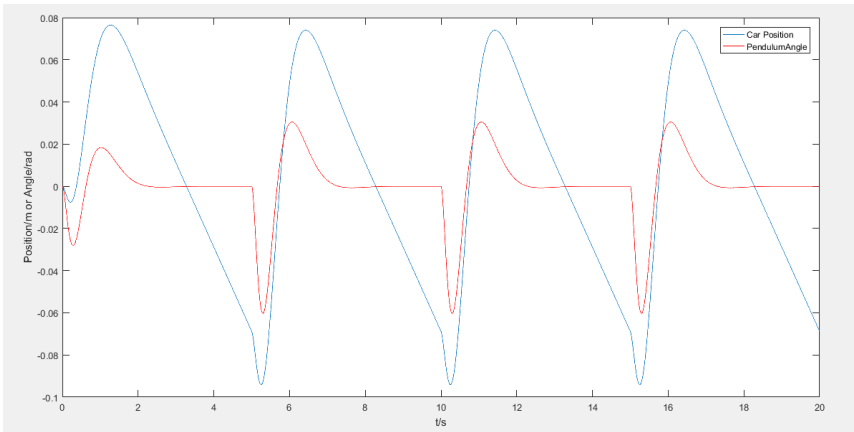


图 3-3 锯齿波干扰的仿真曲线

4. 实际系统的响应曲线

4.1 方波信号下的实际系统响应曲线

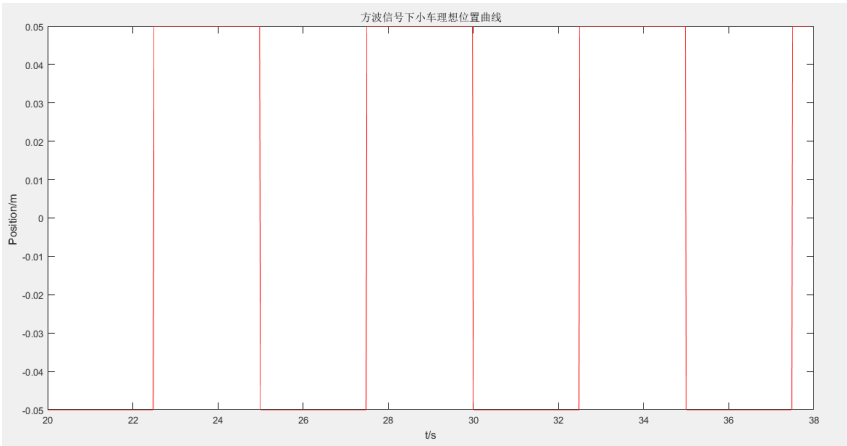


图 3-4 方波信号下小车理想位置曲线

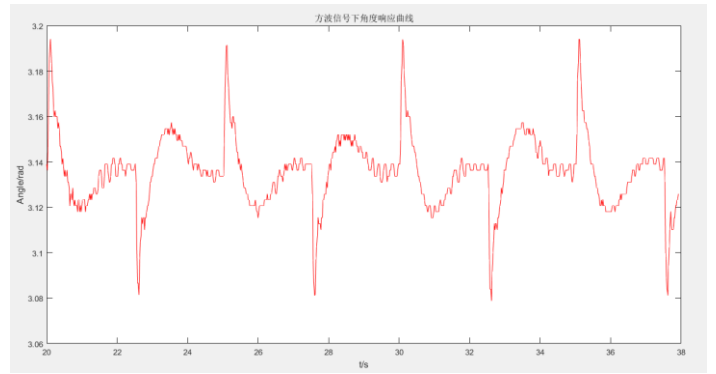
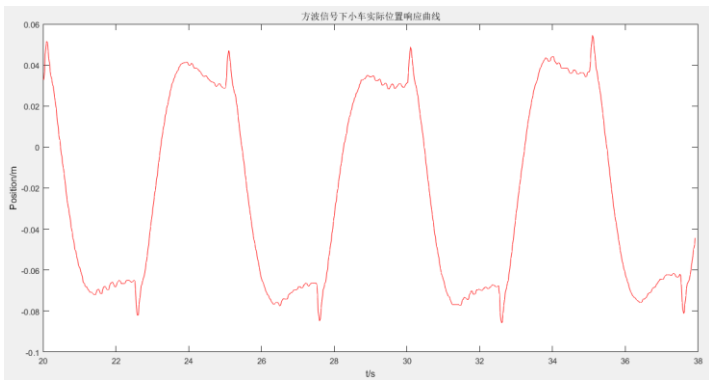


图 3-5 方波信号下小车实际位置响应曲线

图 3-6 方波信号下倒立摆角度响应曲线

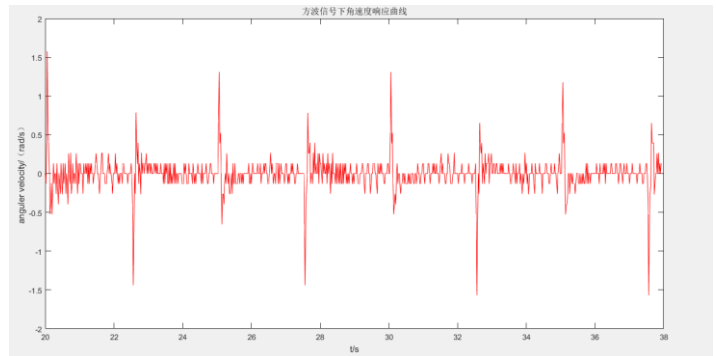
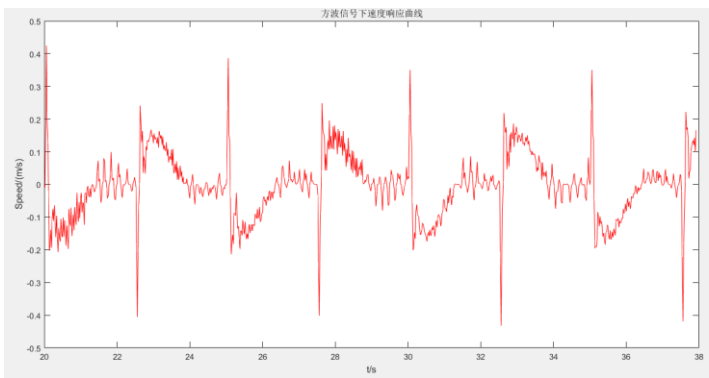


图 3-7 方波信号下小车速度响应曲线

图 3-8 方波信号下倒立摆角速度响应曲线

4.2 正弦波信号下的实际系统响应曲线

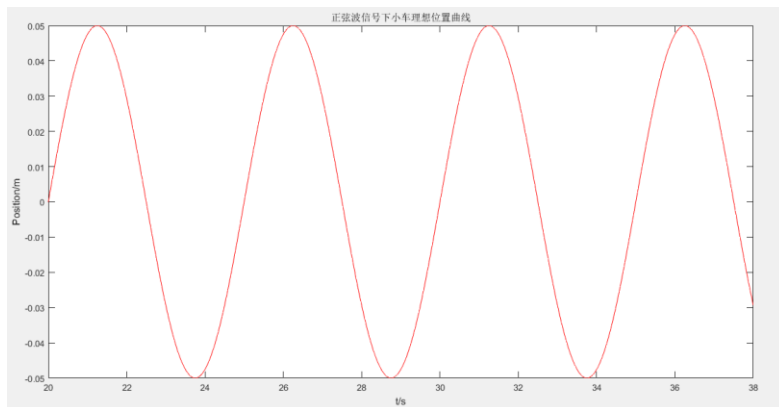


图 3-9 正弦波信号下小车理想位置曲线

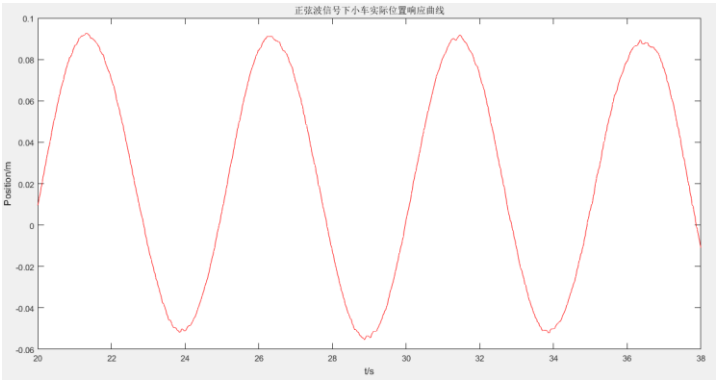


图 3-10 正弦波信号下小车实际位置响应曲线

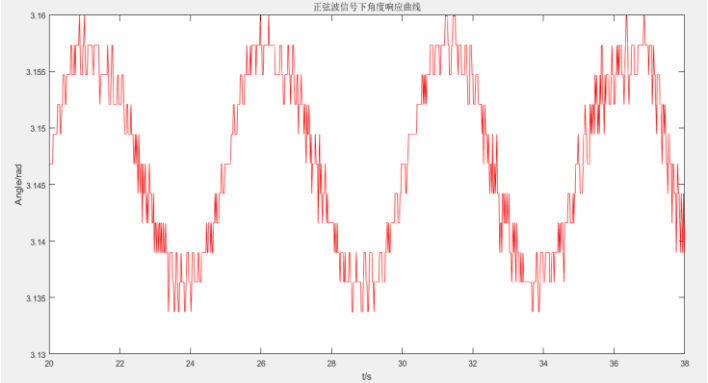


图 3-11 正弦波信号下倒立摆角度响应曲线

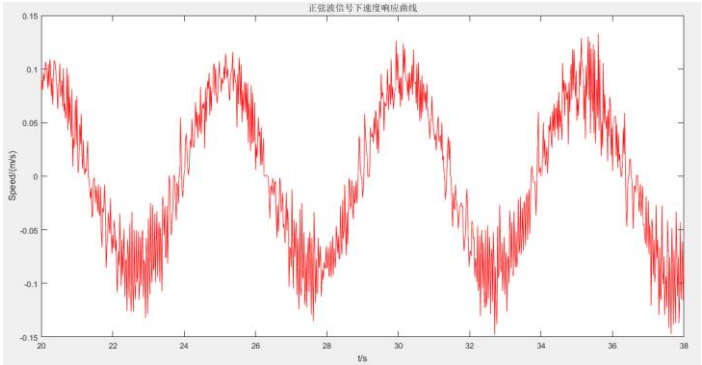


图 3-12 正弦波信号下小车速度响应曲线

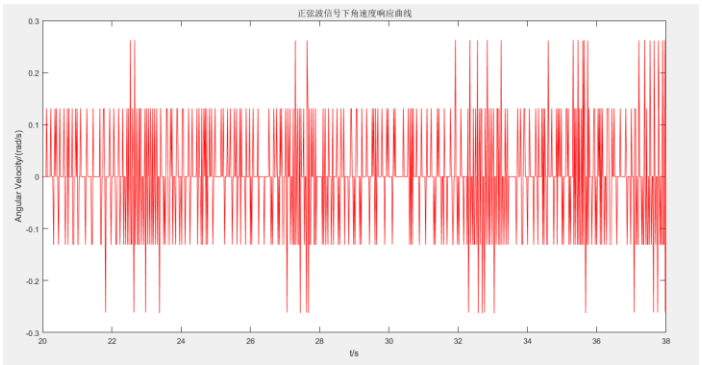


图 3-13 正弦波信号下倒立摆角速度响应曲线

4.3 锯齿波信号下的实际系统响应曲线

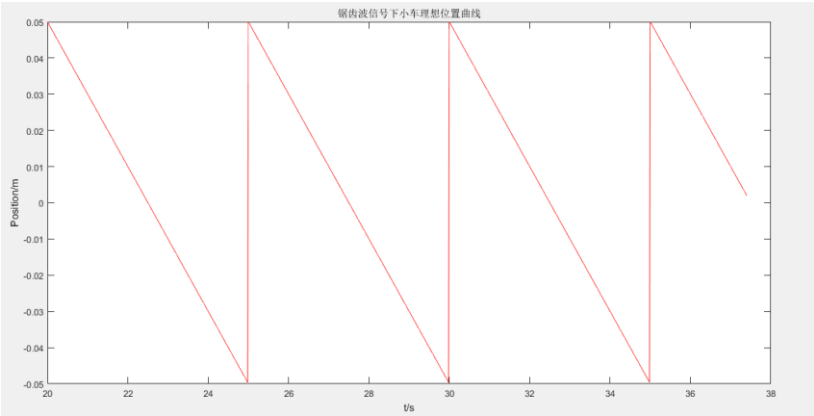


图 3-14 锯齿波信号下小车理想位置曲线

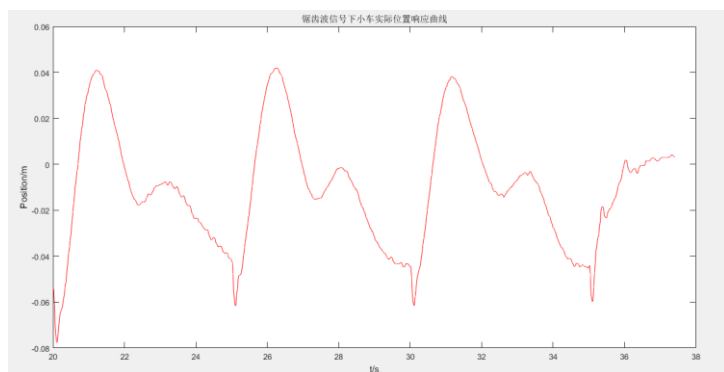


图 3-15 锯齿波信号下小车实际位置响应曲线

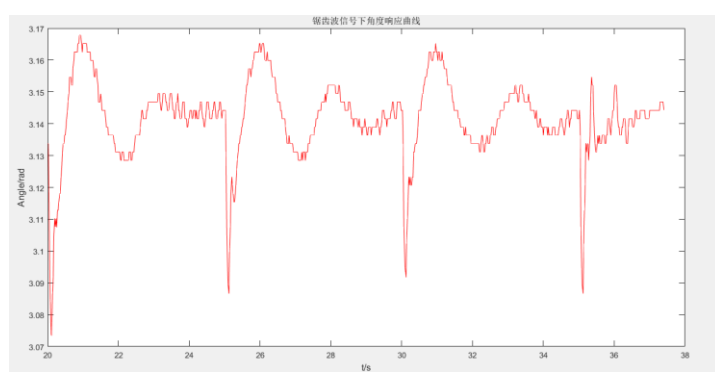


图 3-16 锯齿波信号下倒立摆角度响应曲线

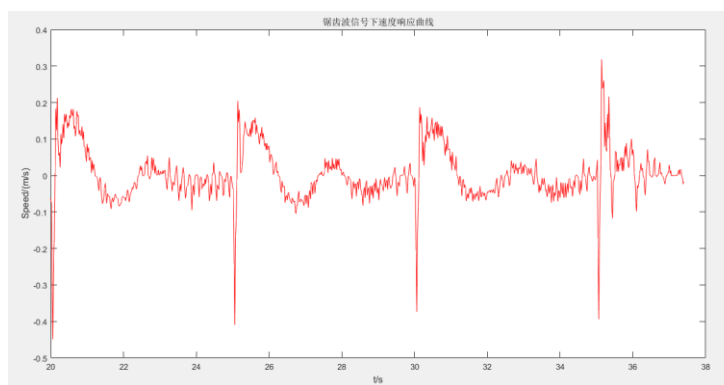


图 3-17 锯齿波信号下小车速度响应曲线

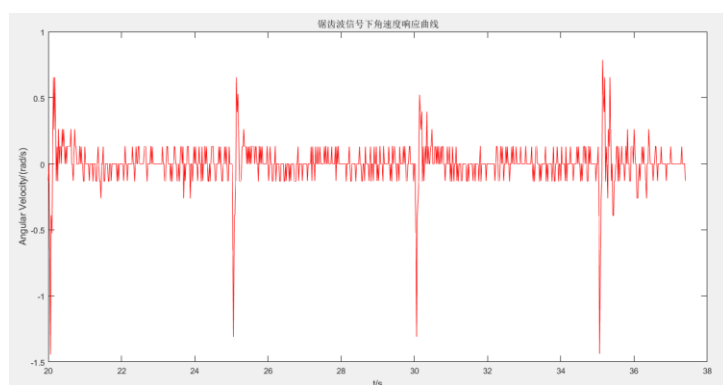


图 3-18 锯齿波信号下倒立摆角速度响应曲线

5. 思考题

5.1 仿真曲线和实际响应曲线是否大致相同？

答：大致相同。

5.2 请说明原系统是否完全可控？

答：原系统完全可控。

Pc				
4x4 double				
	1	2	3	4
1	0	0.7391	-0.0546	1.4781
2	0.7391	-0.0546	1.4781	-0.2182
3	0	2.0544	-0.1518	60.0656
4	2.0544	-0.1518	60.0656	-4.7425

$\det(P_c)=4$ ，即 P_c 满秩，所以原系统完全可控。

实验体会和收获