

自动控制理论（一）复习指南和要求

第二章 控制系统的数学模型复习指南与要点解析

要求：根据系统结构图应用结构图的等效变换和简化或者应用信号流图与梅森公式求传递函数（方法不同，但同一系统两者结果必须相同）

一、控制系统 3 种模型，即时域模型——微分方程；※复域模型——传递函数；频域模型——频率特性。其中重点为传递函数。

在传递函数中，需要理解传递函数定义（线性定常系统的传递函数是在零初始条件下，系统输出量的拉氏变换式与输入量的拉氏变换式之比）和性质。

零初始条件下：如要求传递函数需拉氏变换，这句话必须的。

二、※※※结构图的等效变换和简化——实际上，也就是消去中间变量求取系统总传递函数的过程。

1. 等效原则：变换前后变量关系保持等效，简化的前后要保持一致（P45）
2. 结构图基本连接方式只有串联、并联和反馈连接三种。如果结构图彼此交叉，看不出 3 种基本连接方式，就应用移出引出点或比较点先解套，再画简。

※引出点前移在移动支路中乘以 $G(s)$ 。（注意：只须记住此，其他根据倒数关系导出即可）

引出点后移在移动支路中乘以 $1/G(s)$ 。

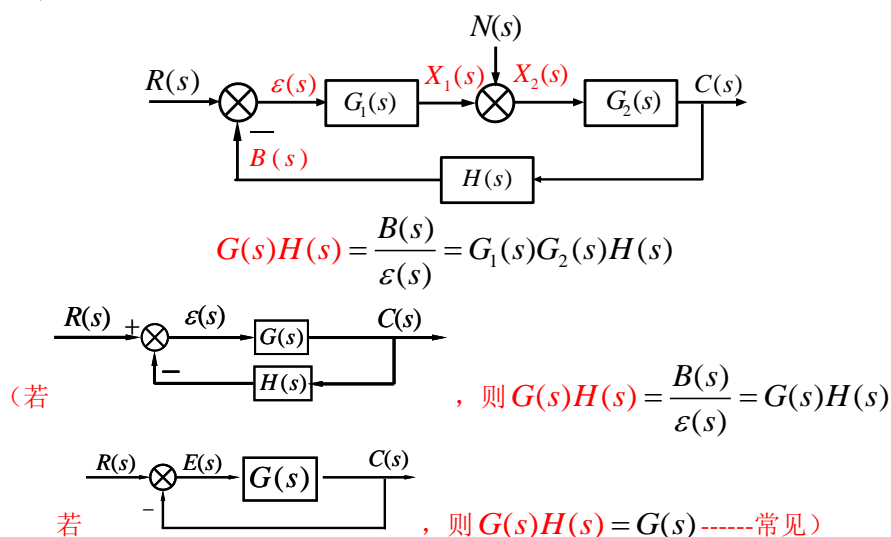
相加点前移在移动支路中乘以 $1/G(s)$ 。

相加点后移在移动支路中乘以 $G(s)$ 。

[注]：乘以或者除以 $G(s)$ ， $G(s)$ 到底在系统中指什么，关键看引出点或者相加点在谁的前后移动。在谁的前后移动， $G(s)$ 就是谁。

四、知道开环传递函数的定义，并会求闭环系统的传递函数

1. 开环传递函数，如图：



2. 四个闭环系统的传递函数——特点分母相同，即特征方程相同

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (\text{通常说的输出对输入的传递函数});$$

$$\Phi_n(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$\Phi_{\varepsilon n}(s) = \frac{\varepsilon(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

[注]: 后面求稳态误差需要

第三章 线性系统的时域分析

- 要求: 1) 会分析系统的时域响应 $c(t)$, 包括动态性能指标;
2) 会用劳斯判据判定系统稳定性并求使得系统稳定的参数条件;
3) 会根据给出的系统结构图, 求出系统稳态误差, 并减小或消除之。

一、时域分析方法和思路: 已知系统输入 $r(t)$ 和系统模型 $\Phi(s)$, 求时域响应 $c(t)$ 。

例 1: 求一阶系统的单位阶跃响应。

1) 输入 $r(t) = 1(t)$, 则其拉氏变换为 $R(s) = \frac{1}{s}$, 则

$$2) C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T}$$

3) 对上式取拉氏反变换, 得其响应单位阶跃信号的响应为:

$$c(t) = c_{ss} + c_{ts} = 1 - e^{-t/T}, t \geq 0$$

[注 1]: c_{ss} 为稳态分量, 它的变化由输入信号的形式 (上例中 $r(t) = 1(t)$) 决定;

c_{ts} (上例中 $c_{ts} = -e^{-t/T}$) 为暂态分量, 由闭环传递函数的极点 (上例中 $s = -\frac{1}{T}$) 决定。

二、线性系统稳定的充要条件是闭环特征根均需具有负实部或者说 $\Phi(s)$ 的极点都在在 s 平面右半部分。---系统稳定性是系统本来的固有特性, 与外输入信号无关。

1. 只有当系统的特征根全部具有负实部时, 系统达到稳定。
2. 如果特征根中有一个或一个以上具有正实部, 则这表明系统不稳定;
3. 如果特征根中具有一个或一个以上的零实部根, 而其余的特征根均具有负实部, 则脉冲响应函数趋于常数, 或者趋于等幅正弦(余弦)振荡, 称为临界稳定。

[注 2]: 根据如果 $\Phi(s)$ 极点都在 s 平面左半部分, 则暂态分量 c_{ts} 随时间增大而衰减为 0;
如果 $\Phi(s)$ 极点有一个都在 s 平面右半部分, 则暂态分量 c_{ts} 随时间增大而发散。

三、***二阶系统单位阶跃响应及其欠阻尼情况下指标计算

1. 熟悉二阶系统单位阶跃响应的 3 个对应关系, 即:

不同阻尼比 ζ 类型—不同单位阶跃的时间响应波形图 $c(t)$ ---不同系统稳定性

2. 二阶系统欠阻尼单位阶跃响应的指标计算: 欠阻尼二阶系统上升时间、峰值时间、调节时间、超调量计算 (公式必须牢记)

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\sigma \% = \sigma_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%,$$

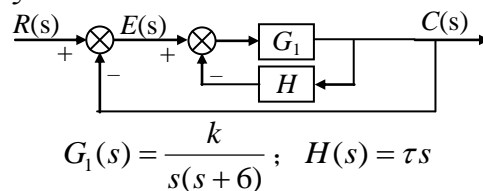
$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}, \Delta = 0.02, \text{ 或 } t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}, \Delta = 0.05$$

其中, 阻尼角 $\beta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$, 阻尼振荡频率 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$

例 2: 2004 年考题 已知控制系统如图所示,

(1) 确定使闭环系统具有 $\zeta = 0.7$ 及 $\omega_n = 6 \text{ (rad/s)}$ 的 k 值和 τ 值;

(2) 计算系统响应阶跃输入时的超调量 σ_p 和峰值时间 t_p 。

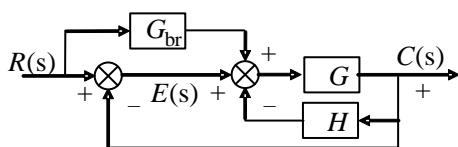


解: (1) $\Phi(s) = \frac{k}{s^2 + (6+k\tau)s + k} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2};$

$$\begin{cases} \omega_n^2 = k = 36 \\ 2\zeta\omega_n = 6 + k\tau \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} k = 36 \\ \tau = 0.067 \end{cases}$$

(2) $\sigma\% = \exp(-\zeta\pi[1-\zeta^2]^{-1/2}) = 4.6\% ; t_p = \pi/\omega_d = 0.733 \text{ s}。$

例 3 2006 年考题: 已知控制系统如图所示,



$$G(s) = \frac{k}{s(s+6)} ; H(s) = \tau s$$

在 $G_{br}(s) = 0$ 时, 闭环系统响应阶跃输入时的超调量 $\sigma_p = 4.6\%$ 、峰值时间 $t_p = 0.733$ 秒, 确定系统的 k 值和 τ 值;

解: (1) $\Phi(s) = \frac{k}{s^2 + (6+k\tau)s + k} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2};$

$$\begin{cases} \sigma\% = 4.6\% \Rightarrow \zeta = 0.7 \\ t_p = 0.733 \Rightarrow \omega_n = 6 \end{cases}; \text{ 则 } \begin{cases} k = \omega_n^2 \\ 6 + k\tau = 2\zeta\omega_n \end{cases} \text{ 则 } \begin{cases} k = 36 \\ \tau = 0.067 \end{cases}$$

四、附加闭环负实零点对系统影响

具有闭环负实零点时的二阶系统分析对系统的作用表现为:

1. 仅在过渡过程开始阶段有较大影响;
2. ※附加合适的闭环负实零点可使系统响应速度加快, 但系统的超调量略有增大;
3. ※负实零点越接近虚轴, 作用越强。

五、高阶系统的时域分析——利用闭环主导极点降阶

如果在系统所有的闭环极点中, 距离虚轴最近的闭环极点周围没有闭环零点, 而其他闭环极点又远离虚轴, 且满足

$$|\operatorname{Re} s_i| \geq 5 |\operatorname{Re} s_1|$$

式中, s_1 ——为主导极点;

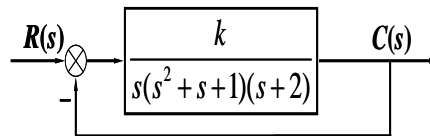
s_i ——为非主导极点。

则距离虚轴最近的闭环极点所对应的响应分量随着时间的推移衰减得最慢，从而在系统的响应过程中起主导作用。一般闭环主导极点为共轭闭环主导极点或者一个实闭环主导极点。

六、***利用劳斯判据判定系统稳定性并求使得系统稳定的参数条件。

1. 根据特征方程： $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$ ，则线性系统稳定的充要条件是劳斯表首列元素均大于零；首列系数符号改变次数与分布在 s 平面右半部的极点个数相同。
2. 劳斯表特殊情况时，系统临界稳定或者不稳定。
3. 如果系统稳定，则特征方程 $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$ 系数同号且不缺项；
4. 利用劳斯判据判定系统稳定性

例 4：已知系统结构图，试用劳斯稳定判据确定使闭环系统稳定的 k 的取值范围。



解： $\Phi(s) = \frac{k}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + k}$ 整理，

$$\Phi(s) = \frac{k}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + k} \text{ 从高到低排列特征方程系数}$$

列劳斯表：

s^4	1	3	k
s^3	3	2	0
s^2	$7/3$	k	
s^1	$(14-9k)/7$	0	
s^0	k		

如果劳斯表中第一列的系数均为正值，因此， $\frac{14-9k}{7} > 0, k < 14/9$ ，且 $k > 0$ 。所以 $0 < k < 14/9$ 。

七、***稳态误差以及减小或者消除稳态误差

1. 稳态误差定义： $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} L^{-1}[E(s)] = \lim_{t \rightarrow \infty} L^{-1}[\Phi_e(s)R(s)]$

其中，误差传递函数 $\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{H(s)[1 + G(s)H(s)]}, H(s) \neq 1$,

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}, H(s) = 1$$

2. 终值定理法求稳态误差

如果有理函数 $sE(s)$ 除了在原点有唯一的极点外，在 s 右半平面及虚轴解析，即 $sE(s)$ 的极点均位于 s 左半平面（包括坐标原点），则根据终值定理可求稳态误差。

$$e_{ss}(\infty) = e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_e(s)R(s)$$

[注]：一般当输入是为阶跃、速度、加速度信号及其组合信号时，且系统稳定时，可应用终值定理求稳态误差。

3. 系统型别 ν 定义为开环传递函数在 s 平面的积分环节个数。

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^\nu \prod_{j=1}^n (T_j s + 1)}, n \geq m$$

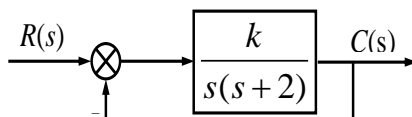
其中, K : 系统的开环增益 (放大倍数), ν 为型别。

4. 基于静态误差系数的稳态误差---当输入为阶跃、速度、加速度信号及其组合信号时,

• 静态位置误差系数	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^\nu}$	$e_{ss} = \frac{R}{1 + K_p}$
• 静态速度误差系数	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-1}}$	$e_{ss} = \frac{R}{K_v}$
• 静态加速度误差系数	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-2}}$	$e_{ss} = \frac{R}{K_a}$

要求: 根据给出系统开环传递函数和输入, 能用静态误差系数能够求出稳态误差。

例 5: 如图



求系统当 $k=10$, 输入为 $r(t)=1.5t$ 时的稳态误差。

解: 开环传递函数

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)} = \frac{5}{s(0.5s+1)}, \quad \nu=1$$

因为 $r(t)=1.5t$, 则 $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-1}} = 5$, 因此 $e_{ss} = \frac{R}{K_v} = \frac{1.5}{5} = 0.3$ 。

5. 减小或者消除稳态误差的方法:

a. 增大开环放大倍数 (开环增益) (在保证系统稳定的前提下)

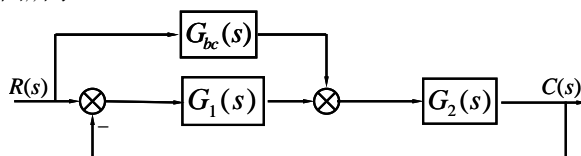
b. 提高系统的型别 (在保证系统稳定的前提下)。

c. ※采用复合控制方法 (要知道其原理): 包括输入补偿和扰动补偿两种, 都可以消除稳态误差而不影响系统稳定性。

[注]: $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_e(s)R(s)$ 若 $\Phi_e(s)$ 零点包含输入信号的全部极点, 则系统无稳态误差。

同理, $e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} sE_n(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_{en}(s)N(s)$, 若 $\Phi_{en}(s)$ 零点包含输入信号 $N(s)$ 的全部极点, 则系统无稳态误差。

例 6 2007 一复合控制系统如图所示。



图中: $G_1(s) = K_1$, $G_2(s) = \frac{K_2}{s(1+T_1s)}$, $G_{bc}(s) = \frac{as^2+bs}{1+T_2s}$

K_1 、 K_2 、 T_1 、 T_2 均为已知正值。当输入量 $r(t)=t^2/2$ 时, 要求系统的稳态误差为零, 试确定参数 a 和 b 。

解 系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_2G_1 + G_2G_{bc}}{1 + G_1G_2}, \quad \text{代入 } G_1(s) = K_1, \quad G_2(s) = \frac{K_2}{s(1+T_1s)}, \quad G_{bc}(s) = \frac{as^2+bs}{1+T_2s}$$

$$\text{则 } \Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \Phi(s) = \frac{1 - G_2G_{bc}}{1 + G_1G_2} = \frac{T_1T_2s^3 + (T_1 + T_2 - K_2a)s^2 + (1 - K_2b)s}{T_1T_2s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + (1 + K_1K_2T_2)s + K_1K_2}$$

(只适应于单位负反馈系统)

欲使系统闭环系统响应速度输入 $R(s) = 1/s^3$ 的稳态误差为 0, 即

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_e(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2 - K_2 a)s^2 + (1 - K_2 b)s}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + (1 + K_1 K_2 T_2)s + K_1 K_2} \cdot \frac{1}{s^3}, \quad \Phi_e(s) \text{ 应}$$

该包含 $R(s) = 1/s^3$ 的全部极点。

$$\begin{cases} T_1 + T_2 - K_2 a \\ 1 - K_2 b \end{cases}, \text{ 则 } a = \frac{T_1 + T_2}{K_2} \quad b = \frac{1}{K_2}$$

[注]：要求会求误差传递函数，包括扰动下的误差传递函数（一般单位反馈）。

第四章 线性系统的根轨迹法

要求：根据给出系统结构图---求开环传递函数---得出根轨迹方程---化成标准形式---判断根轨迹类型---绘制根轨迹---完成对稳定性、动态性能和稳态性能的分析。

一、※※根轨迹定义：开环系统某一参数从 $0 \rightarrow \infty$ 时，闭环系统特征方程的根（闭环极点）在 $[s]$ 平面变化的轨迹。

[注]：根轨迹是闭环系统特征方程的根的轨迹。

二、根轨迹法中开环传递函数的标准形式——零极点形式

$$G(s)H(s) = \frac{k \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}, n \geq m, \quad k \text{ 称为开环系统根轨迹增益}$$

[注]：变化的参数以规范形式 k 出现在分子上。
开环系统零极点形式表示， s 项的系数为 1；

三、根轨迹方程从哪里来？----※根据闭环系统特征方程

四、※※※根轨迹绘制的基本规则（180 度和 0 度）（前 8 条）

[注]：180 度和 0 度的差别主要是相角条件有关的不同。注：相角逆时针为正。

[注]：注意绘制的主要步骤必须有——因有步骤分，而且要标注上前头方向。

例 1：某负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{k(s+2)}{s^2 + 2s + 3}$ ，试绘制系统的概略根轨迹。

解：要判断是 180° 根轨迹还是 0° 根轨迹，根据根轨迹方程

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+2)}{s^2 + 2s + 3} = -1. \text{ 标准型——180° 根轨迹}$$

1：根轨迹的起点和终点。

起点 $p_1 = -1 + j\sqrt{2}$, $p_2 = -1 - j\sqrt{2}$ （有复极点有起始角）， $n = 2$

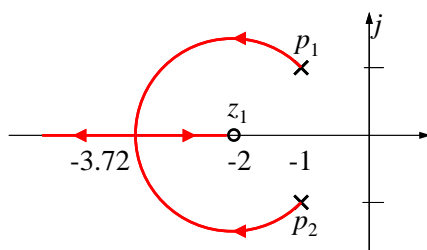
终点： $z_1 = -2$ $m = 1$ 。

2：根轨迹的分支数。根轨迹的分支数=开环极点数。 $n = 2$ ---可以省略此步

3：根轨迹的对称性和连续性：根轨迹连续且对称于实轴。---可以省略此步

4：根轨迹的渐近线（与实轴的交点和夹角）。

$n-m=1$ ，与实轴的夹角 $\varphi_a = 180^\circ$ —— 负实轴。



如图：

5：根轨迹在实轴上的分布：

$(-\infty, -2]$ 是根轨迹。

6：根轨迹的起始角和终止角（只有开环复极点，因此只有出射角）

$$\theta_{p1} = 180^\circ + \angle(p_1 - z_1) - \angle(p_1 - p_2) = 180^\circ + \angle(-1 + j\sqrt{2} + 2) - \angle(-1 + j\sqrt{2} + 1 + j\sqrt{2})$$

$$\theta_{p1} = 180^\circ + 54.7^\circ - 90^\circ = 144.7^\circ,$$

利用对称性，则 $\theta_{p2} = -144.7^\circ$

7：根轨迹与实轴的交点（根轨迹在实轴上的分离点与分离角）

$$k = -\frac{(s^2 + 2s + 3)}{s + 2}, \text{ 则 } \frac{dk}{ds} = \frac{d}{ds} \left[-\frac{(s^2 + 2s + 3)}{s + 2} \right] = 0$$

因此， $s^2 + 4s + 1 = 0$ ，所以

$$\text{求出 } s_{x1} = -3.72, s_{x2} = -0.268 \text{ (舍)}$$

8：根轨迹与虚轴的交点。

$$\text{若将 } s = j\omega \text{ 代入特征方程 } 1 + \frac{k(s+2)}{s^2 + 2s + 3} = 0$$

$$s^2 + 2s + 3 + k(s+2) = 0$$

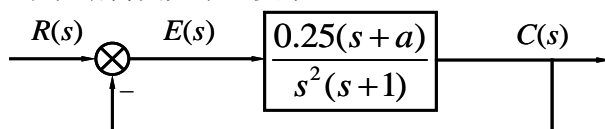
所以令实部，虚部分别等于 0 得：

$$\begin{cases} 2\omega + k\omega = 0 \\ -\omega^2 + 3 + 2k = 0 \end{cases} \text{ 与虚轴没有交点}$$

分析系统的稳定性：——都稳定。

五、根据根轨迹分析系统性能——根据根轨迹判断稳定性※※※，求 k 值范围※※※，超调量，系统型别（看根轨迹原点处开环极点的个数）等。

例 2：2008 考题 已知系统结构图如下，要求



1、绘制参数 $a: 0 \rightarrow \infty$ 的根轨迹(要有主要步骤) (10 分)；

2、确定使系统稳定的参数 a 的范围 (2 分)；

3、确定使系统阶跃响应无超调的参数 a 的范围 (2 分)；

4、确定使系统出现阶跃响应出现等幅振荡时的频率 (1 分)。

5、确定使系统出现阶跃响应出现衰减振荡时的参数 a 的范围 (1 分)。

解:

1、由题意得, 系统特征方程为:

$$D(s) = s^3 + s^2 + 0.25s + 0.25a = 0$$

则

$$0.25a = -s(s^2 + s + 0.25)$$

则根轨迹方程为:

$$\frac{0.25a}{s(s^2 + s + 0.25)} = -1 \quad (2 \text{ 分}).$$

绘制参数 $a: 0 \rightarrow \infty$ 的绘制 180° 根轨迹如下:

(1) 根轨迹的起点 $p_1 = 0$, $p_2 = p_3 = -0.5$ (1 分), 无开环有限零点;

(2) 根轨迹的分支数 $n = 3$;

(3) 根轨迹的渐近线 (1 分): $m = 0$, $n - m = 3$ 。

$$\text{与实轴的交点 } \sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} = \frac{0 - 0.5 - 0.5}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{与实轴的夹角 } \varphi_a = \frac{(2l+1)\pi}{n-m}, l = 0, \pm 1 = \begin{cases} \frac{\pi}{3}, & l = 0 \\ \pi, & l = 1 \\ -\frac{\pi}{3}, & l = -1 \end{cases}$$

(4) 实轴上的根轨迹: $(-\infty, 0]$ (1 分)

(5) 根轨迹与实轴的分离点 (1 分)

$$\frac{da}{ds} = \frac{d}{ds} [-4s(s^2 + s + 0.25)] = 0$$

$12s^2 + 8s + 1 = 0$, 求出与实轴交点: $s_1 = -0.5$, $s_2 = -1/6$ 。

(6) 根轨迹与虚轴的交点 (1 分)

※应用劳斯稳定判据的特殊形式, 列劳斯表:

s^3	1	0.25
s^2	1	$0.25a$
s^1	$0.25(1-a)$	0
s^0	$0.25a$	

当 $a = 1$, s^1 为全零行, 此时构筑辅助方程 $s^2 + 0.25 = 0$, 则 $s = \pm j0.5$ 。

则根轨迹如下 (3 分):

2、 $0 < a < 1$ 系统稳定 (2 分);

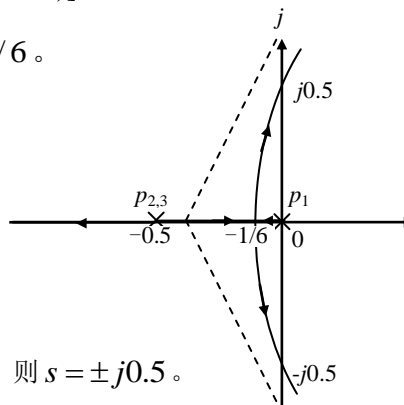
3、当根轨迹在分离点 $s_2 = -1/6$ 处, 对应的

$$a = -4s(s^2 + s + 0.25) \Big|_{s=-\frac{1}{6}} = \frac{2}{27}$$

则当 $0 < a \leq \frac{2}{27}$ 阶跃响应无超调 (2 分)。

4、 $s = j\omega$, 则系统出现等幅振荡时的振荡频率 $\omega = 0.5$ (1 分)

5、 $\frac{2}{27} < a < 0.5$ (1 分)



[注]: 如果是参数根轨迹, 根据闭环系统特征方程得出根轨迹方程, 并将其化成标准形式。

第五章 线性系统的频域分析法——第六章的基础

要求：1) 绘制出频率响应曲线开环幅相曲线或开环对数渐近幅频特性曲线（Bode 图）---补线-应用奈奎斯特稳定判据判断系统稳定性及系统稳定的参数范围。

2) ※※※利用开环对数幅频渐近特性确定最小相位系统的传递函数

一、频域分析法中开环传递函数的标准形式为

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)}, n > m \text{ --- 时间常数形式}$$

二、最小相位系统开环幅相曲线的绘制

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)}, n > m, K > 0, T_i > 0, \tau_j > 0$$

1) 极坐标图的起点: $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^v} = \frac{K}{\omega^v} \angle (-v \frac{\pi}{2})$, $\varphi(0_+) = -v90^\circ$

2) 极坐标图的终点: 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \frac{K \prod_{j=1}^m (j\tau_j \omega + 1)}{(j\omega)^v \prod_{i=1}^{n-v} (jT_i \omega + 1)} = 0 \angle -(n-m)90^\circ$

3) 与实轴交点 $\text{Im}[G(j\omega)H(j\omega)] = 0 \text{ --- } \omega \text{ --- } \text{Re}[G(j\omega)H(j\omega)]$

4) 从起点到终点的相角及与实轴交点位置共同决定曲线所在象限。 K 值变化仅改变幅相曲线的幅值及与实轴交点的位置, 不改变其形状。

[注]: 用箭头表示频率 ω 增大的方向。

例 1 (P198) I 型单位反馈控制系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, K, T_1, T_2 > 0;$$

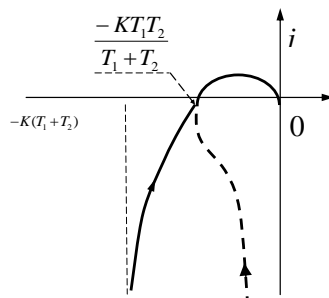
绘制开环幅相曲线。

解: 频率响应 $G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + jT_1\omega)(1 + jT_2\omega)} = \frac{K[-\omega(T_1 + T_2) - j(1 - T_1T_2\omega^2)]}{\omega(1 + T_1^2\omega^2)(1 + T_2^2\omega^2)}$

1) 起点: $\omega = 0^+$ $A(\omega) = \infty$, $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$;

2) 终点: $\omega = \infty$ $A(\omega) = 0$, $\varphi(\omega) = -\frac{3\pi}{2}$ (因为: $(n-m)=3$), 说明整个幅相曲线在 II, III 象限。

3) 与负实轴的交点: 令 $\text{Im} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2}$, 则 $\text{Re} = \frac{-K(T_1 + T_2)\omega}{\omega(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)} = \frac{-KT_1 T_2}{T_1 + T_2}$ 。则



可见, K 值变化仅改变幅相曲线的幅值及与负实轴交点的位置, 不改变幅相曲线的形状。

三、最小相位系统开环对数渐近幅频特性曲线 (Bode 图) 的绘制

(1) 将开环传递函数分解成典型环节乘积的形式(尾“1”型):

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K \prod_{j=1}^m (j\tau_j \omega + 1)}{(j\omega)^v \prod_{i=1}^{n-v} (jT_i \omega + 1)}, n > m, K > 0, T_i > 0, \tau_j > 0$$

(2) 将各典型环节的转折频率由低到高从左向右依次标注在横轴上 (不妨设为: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots$), 将 $\omega < \omega_1$ (最小转折频率) 的频率范围设为低频段。

(3) 在低频段, 开环对数渐近幅频特性

$$L_a(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\omega^v} = 20 \lg K - 20v \lg \omega$$

可见, 其直线斜率为 $-20v$ 。但是要画出这低频段渐近特性直线, 还必须确定该直线或其延长线上一点 (P202):

法 1: 在小于第一个转折频率内任选一点 $\omega_0 < \omega_1$, 计算 $L_a(\omega_0) = 20 \lg K - 20v \lg \omega_0$ 。--常用

法 2: 取特定频率 $\omega_0 = 1$, 计算 $L_a(\omega_0) = 20 \lg K$ 。

法 3: 取 $L_a(\omega_0)$ 为特殊值 0, 则 $\frac{K}{\omega_0^v} = 1$, 则计算出 $\omega_0 = K^{\frac{1}{v}}$ 。

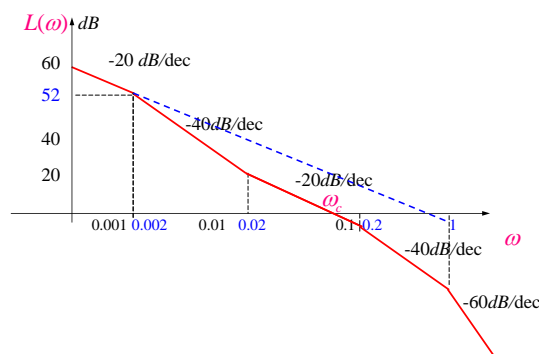
(4) 从低频以后, 沿频率增大的方向, 每遇到一个转折频率就改变直线斜率, 变化规律取决于该转折频率对应的典型环节种类。

如果典型环节为惯性环节或振荡环节, 在交接频率之后, 斜率要减小 20dB/dec 或 40 dB/dec; 如果典型环节为一阶微分环节或二阶微分环节, 在交接频率之后, 斜率要增加 20dB/dec 或 40 dB/dec。即一阶 20dB/dec 的整数倍, 二阶 40dB/dec 的整数倍。

(5) 绘出用渐近线表示的对数幅频特性以后, 如果需要, 可以进行修正。通常只需修正转折频率处幅值就可以了。对于一阶项, 在转折频率处的修正值为 $\pm 3\text{dB}$; 对于二阶项, 在转折频率处的修正值可由公式求出。--一般不用修正。

例 2 已知 $G(s) = \frac{K(50s+1)}{s(500s+1)(5s+1)(s+1)}$, 绘制 Bode 图。

解:



四、***利用开环对数幅频渐近特性确定最小相位系统的传递函数

1) 确定系统积分或微分环节的个数(利用低频段低频渐近线斜率为 $-20\nu \text{ dB/dec}$)。

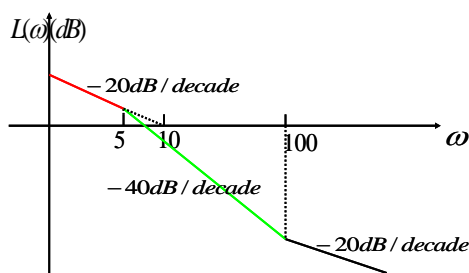
$$L_a(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\omega^\nu} = 20 \lg K - 20\nu \lg \omega$$

2) 确定系统其他环节(根据转折频率前后斜率变化判断对应的环节类型, 利用转折频率倒数确定时间常数)

图中每次遇到一个交接频率改变一次分段直线的斜率。且斜率的变化对应这环节的类型。在交接频率之后, 斜率要减小 20 dB/dec 或 40 dB/dec 为惯性环节或振荡环节; 斜率要增加 20 dB/dec 或 40 dB/dec 对应一阶微分环节或二阶微分环节。

3) ***参数 K 的确定: 已知低频段或其延长线上一点确定 $L_a(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\omega^\nu} = 20 \lg K - 20\nu \lg \omega$ 。

例 3



解: 1) $G(s) = \frac{K(\frac{1}{100}s+1)}{s(\frac{1}{5}s+1)}$

2) $20 \lg \frac{K}{\omega} = 20 \lg K - 20 \lg \omega \quad K = 10$

3) $G(s) = \frac{10(\frac{1}{100}s+1)}{s(\frac{1}{5}s+1)}$

特别指出, 半对数坐标系中求斜率:

$$k = \frac{L(\omega_2) - L(\omega_1)}{\lg \omega_2 - \lg \omega_1}$$

例 4 (见幻灯片) 已知最小相角系统开环对数渐近幅频曲线, 求开环传递函数)。

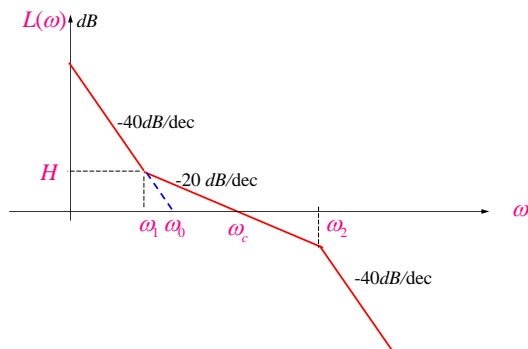
解: 1) 确定结构: 最左端直线的斜率为 -40 dB/dec , $-20\nu = -40$, 故而有 2 个积分环节。因为从 ω_1 起, 近似对数幅频曲线斜率变化 20 dB/dec 和 40 dB/dec , 故为 1 阶微分环节和 2 阶微分环节。于是系统的传递函数为:

$$G(s) = \frac{K(s/\omega_2+1)}{s^2(s/\omega_3+1)}$$

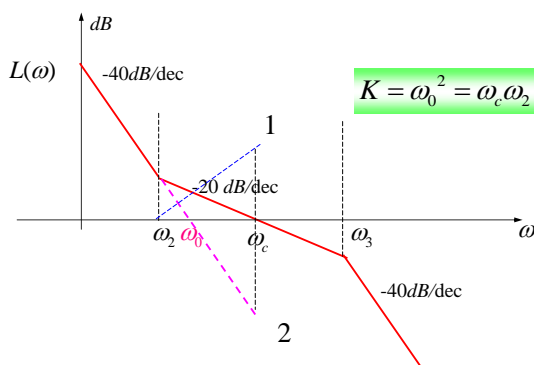
2)确定 K:

法一) 最左端直线的延长线和零分贝线的交点频率为 ω_0 , $20\lg K - 20\nu\lg \omega_0 = 20\lg K - 40\lg \omega_0 = 0$, 则 $K = \omega_0^2$ 。

斜率: $-40 = \frac{0-H}{\lg \omega_0 - \lg \omega_2}$, $-20 = \frac{0-H}{\lg \omega_c - \lg \omega_2}$, 则 $\frac{\omega_c}{\omega_2} = (\frac{\omega_0}{\omega_2})^2$, 则 $K = \omega_0^2 = \omega_c \omega_2$ 。



法二):



(已知 ω_c), 在 ω_c 处, 直线 1 和 2 的纵坐标之和为 0, 即 $L(\omega_c) = L_1(\omega_c) + L_2(\omega_c) = 0$ 。

$$20 = \frac{L_1(\omega_c) - 0}{\lg \omega_c - \lg \omega_2} \quad -40 = \frac{L_2(\omega_c) - 0}{(\lg \omega_c - \lg \omega_0)}$$

因此 $-40(\lg \omega_c - \lg \omega_0) + 20(\lg \omega_c - \lg \omega_2) = 0$ 。则 $\omega_c = \frac{\omega_0^2}{\omega_2}$, 则 $\omega_0 = \sqrt{\omega_c \omega_2}$

五. ※ ※※频率域稳定判据

1. 奈奎斯特稳定判据: 闭环系统稳定的充分必要条件是闭合曲线 Γ_{GH} 不穿越 $(-1, j0)$ 点, 且逆时针围绕 $(-1, j0)$ 点 P 次。记为:

$$R(=2N) = P$$

其中: N 为半闭合曲线 Γ_{GH} 穿越 $(-1, j0)$ 点左侧的次数和。相角增大为正穿越

Γ_{GH} : 当 $\nu = 0$: 通常, 只需绘制 $0 \leq \omega < \infty$ 的半条 Γ_{GH} 曲线, 即开环幅相曲线。

当 $\nu \neq 0$: 当 $G(s)H(s)$ 有虚轴上的极点时, 绘制 $0 < \omega < \infty$ 的半条 Γ_{GH} 曲线外, 半闭合曲线还要从 $\omega = 0^+$ 出发, 以无穷大为半径, 逆时针转过 $\nu\pi/2$ 后的虚线圆弧, 箭头指向 $\omega = 0^+$ 。箭头指向 ω 增大的方向。

例 5 设某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{(4s+1)}{s^2(s+1)(2s+1)}$

应用 Nyquist 判据判别闭环系统的稳定性

解: $G(j\omega) = \frac{j4\omega+1}{(j\omega)^2(j\omega+1)(j2\omega+1)} = \frac{1+10\omega^2+j\omega(1-8\omega^2)}{-\omega^2[(1-2\omega^2)^2+9\omega^2]}$

1) 绘制 Nyquist 曲线

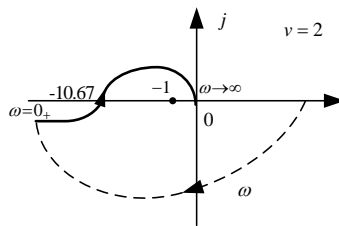
起点: $\omega=0_+, A(\omega)=\infty \quad \varphi(\omega)=-180^\circ (v=2)$

终点: $\omega=\infty, A(\omega)=0 \quad \varphi(\omega)=-270^\circ (n-m=3)$

幅相曲线与负实轴有交点, 可令 $\text{Im}G(j\omega)H(j\omega)=0$, 得 $\omega^2=1/8, \omega=0.354$ 。此时,

$\text{Re}G(j\omega)H(j\omega)=-10.67$, 即幅相曲线与负实轴的交点为 $(-10.67, j0)$ 。

2) 补线: 位由于有一个交点, 因此 $\omega=0^+$ 在实轴下面。开环系统有两个极点在 s 平面的坐标原点, 因此幅相曲线应从 $\omega=0^+$ 开始, 以无穷大半径逆时针补画 180 度, 箭头指向 $\omega=0^+$ 。如图。



3) 由图可见, $N=-1$, 即 $R=-2$ 。系统无开环极点位于 s 平面的右半部, 故 $P=0$, 所以 $Z=2$, 即系统不稳定, 并有两个闭环极点在 s 平面的右侧。

例5-2: 设系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$, 试求使系统稳定的 K 值范围。

解: 1) 首先作 Nyquist 曲线图, 只求图过 $(-1, j0)$ 点的 K 值范围。

2) 代入 $s=j\omega$, $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)} = \frac{K[-\omega(T_1+T_2)-j(1+T_1T_2\omega^2)]}{\omega(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$

利用相频条件与幅频条件, 则 $|G(j\omega)H(j\omega)|=1, \angle G(j\omega)H(j\omega)=-180^\circ$ 。

因此, 一定与负实轴有交点, 其交点坐标为:

令: $\text{Im}=0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{T_1T_2}$, 因为 $A(\omega)=1$, 所以, $\text{Re}G(j\omega) = \frac{-KT_1T_2}{T_1+T_2} = -1$, 因此, $K = \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$

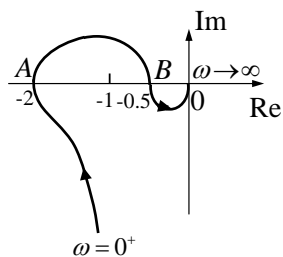
即此时满足正好穿过 $(-1, j0)$ 点。

3) 分析: 因为 $P=0$, 要使系统稳定, 则 $N=0$, 因此, Γ_{GH} 不包围 $(-1, j0)$ 点, 则幅相曲线与实轴的交点在 $(-1, j0)$ 的右边。

当 $K = \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$, 正好穿过 $(-1, j0)$, 当 $K < \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$, 正好在 $(-1, j0)$ 的右边, 此时 $R=N=0$,

系统稳定。因此系统稳定的 K 值范围为: $0 < K < \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$ 。

2007 例: 已知某系统当开环增益 $K=20$ 时的开环频率特性 Nyquist 图如下图所示。该系统在右半平面的极点数 $P=0$, 试分析当开环增益 K 变化时其取值对闭环稳定性的影响。(5 分)



解：

分析：求与负实轴的交点：令： $\text{Im} = 0 \Rightarrow \omega$ ，代入 $\text{Re} =$ 。

因为 K 值变化仅改变幅相曲线的幅值及与负实轴交点的位置，不改变幅相曲线的形状。

所以：设 A 点对应的频率为 ω_1 ， B 点对应的频率为 ω_2 ，则

A 点： $K = 20$ ， $\omega = \omega_1$ ， $|OA| = 2$

求 $K = ?$ ， $\omega = \omega_1$ ， $|OA| = 1$ ， 由此， $K = 10$ （1分）幅相曲线与负实轴交于 A 点

B 点： $K = 20$ ， $\omega = \omega_2$ ， $|OB| = 0.5$

求 $K = ?$ ， $\omega = \omega_2$ ， $|OB| = 1$ ， 由此， $K = 40$ （1分）幅相曲线与负实轴交于 B 点

注意： $K \uparrow$ ，表明与负实轴的交点越负，即越往左边。

分析：因为 $P = 0$ ，所以

当 $0 < K < 10$ ，Nyquist 曲线不包围 $(-1, j0)$ 点，系统稳定（1分）；

当 $10 < K < 40$ ，Nyquist 曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点，系统不稳定（1分）；

当 $K > 40$ ，Nyquist 曲线不包围 $(-1, j0)$ 点，上下穿越抵销，系统稳定（1分）；

注意：求稳定的范围总是与临界稳定时的参数有关，所有域中的分析方法皆是如此。

注意：※自己看P211例5-8，判断使得系统稳定的参数范围。

2. 对数频率稳定判据：

极坐标图

伯德图

$(-1, j0)$ 点

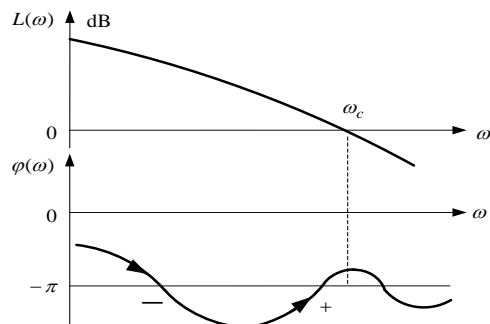
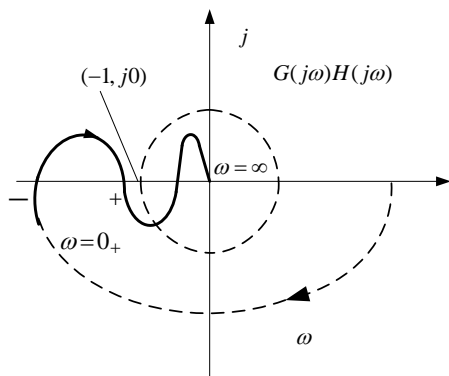
0dB 线和-180° 相角线

$(-1, -\infty)$ 段

0dB 线以上区域

结论：Nyquist 曲线自上而下（自下而上）穿越 $(-1, j0)$ 点左侧负实轴相当于

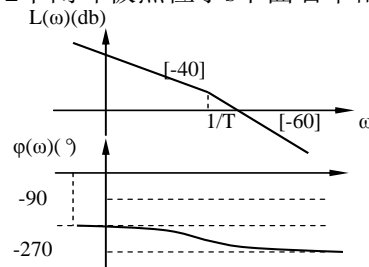
Bode 图中当 $L(\omega) > 0\text{dB}$ 时相频特性曲线自下而上（自上而下）穿越-180° 线。



例6：一反馈控制系统，其开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)}$ ，试用对数频率稳定判据判断系

统的稳定性（见幻灯片）。

解：系统的开环对数频率特性曲线如图所示。由于 $G(s)H(s)$ 有两个积分环节，故在对数相频曲线 ω 很小处，由下而上补画了-180°到0°的虚线，作为对数相频曲线的一部分。显见 $N=-1$ ， $R=-2$ ， $P=0$ ，所以，说明闭环系统是不稳定的，有2个闭环极点位于s平面右半部。



五、稳定裕度——后面校正设计用

1. ※※※相角裕度： $A(\omega_c) = |G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1$

$$\text{相角裕度 } \gamma = \varphi(\omega_c) - (-180^\circ) = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$$

2. 幅值裕度： $\varphi(\omega_x) = \angle G(j\omega_x)H(j\omega_x) = -180^\circ$

$$h(dB) = 20 \lg \frac{1}{|G(j\omega_x)H(j\omega_x)|} = -20 \lg |G(j\omega_x)H(j\omega_x)|$$

工程上一般相角裕度 $\gamma = 30^\circ \sim 70^\circ$ ，幅值裕度 $h(dB) = 20 \lg h \geq 6 \text{ dB}$

例7 一单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)(0.05s+1)}, K > 0$$

解：试求 $K=1$ 时系统的相位裕度和增益裕度。

$$\bullet \text{ 频率特性 } G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j0.2\omega+1)(j0.05\omega+1)}$$

$$1) |G(j\omega_c)| = \left| \frac{1}{j\omega_c(j0.2\omega_c+1)(j0.05\omega_c+1)} \right| = \frac{1}{\omega_c \sqrt{(0.04\omega_c^2+1)(0.0025\omega_c^2+1)}} = 1$$

$$\omega_c \approx 1$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \tan^{-1} 0.2\omega_c - \tan^{-1} 0.05\omega_c) = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$$

$$2) \varphi(\omega_x) = -90^\circ - \tan^{-1} 0.2\omega_x - \tan^{-1} 0.05\omega_x = -180^\circ$$

$$\tan^{-1} 0.2\omega_x + \tan^{-1} 0.05\omega_x = 90^\circ$$

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{0.2\omega_x + 0.05\omega_x}{1 - 0.2\omega_x \times 0.05\omega_x} = \infty \quad 1 - 0.2\omega_x \times 0.05\omega_x = 0 \quad \omega_x = 10$$

$$h(dB) = -20 \lg \left| \frac{1}{j10(1+j2)(1+j0.5)} \right|$$

$$= 20 \lg 10 + 20 \lg \sqrt{1+4} + 20 \lg \sqrt{1+0.25} = 20 + 7 + 1 = 28 \text{ dB}$$

六、※※开环对数幅频特性的※三频段理论---后面校正设计用

1. 低频段决定了系统稳态精度。

低频段通常是指 $20 \lg |G(j\omega)H(j\omega)|$ 的开环对数渐近曲线在第一个转折频率以前的区段，这一

段的特性完全由积分环节 ν 和开环增益 K 决定。

$$L_a(\omega) = 20\lg \frac{K}{\omega^\nu} = 20\lg K - \nu 20\lg \omega$$

$$20\lg K - 20\nu \lg \omega_0 = 0$$

2. 中频段是指 $L(\omega)$ 穿过 0dB 线(即 ω_c 附近)的频段, 其斜率及宽度(中频段长度)集中反映了动态响应的平稳性和快速性(见幻灯片)。一般的, 中频段在 ω_c 附近以斜率为 $-20\text{dB}/\text{dec}$ 下降的直线。
3. 高频段指 $L(\omega)$ 曲线在中频段以后的区段, 反映出系统的低通滤波特性, 形成了系统对高频干扰信号的抑制能力(见幻灯片)。

第六章 线性系统的校正方法

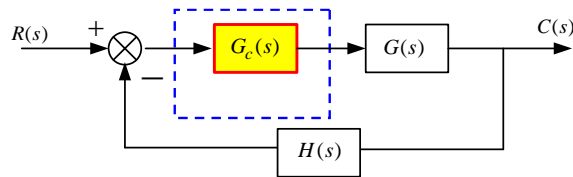
要求: 1) ※※※※在三频段理论上, 能够熟练应用基于频率法的串联超前、滞后和滞后—超前校正设计需要的系统。

2) 至于根轨迹校正, 要求掌握其基本原理(与基于频率法的串联超前、滞后和滞后—超前校正可以相对应), 但是由于计算起来太繁杂, 一般不采用。

一、基本控制规律 P、PI (滞后, 改善稳态性能)、PD (超前, 改善动态性能)、PID 的特点

二、掌握基于频率法的串联超前、滞后和滞后—超前校正原理和特点

1. 原理: $G(j\omega) = G_c(j\omega)G_0(j\omega)$



➤ 串联滞后校正:

保证动态性能不变情况下, 提高系统稳态性能;

利用滞后校正装置高频幅值衰减特性--低频区;

➤ 串联超前校正:

提高相角裕度, 改善系统动态性能;

利用超前校正装置相角超前特性--中频区;

➤ 两者可以放在同一个系统中使用, 组成滞后—超前校正

2. 典型的频率域指标是 ω_c , γ , K 等指标, 一般选择 ω_c , K , 主要验证 γ 。

3. ※※校正方法的选取: 判断方法要会。如果题目已经明确要求采用何种校正装置, 就不需要选择方法, 即跳过这部分。

如果 $\omega_c > \omega_{c0}$ -超前校正。

如果 $\omega_c < \omega_{c0}$, 且 $\gamma_0(j\omega_c) > \gamma$ ---滞后校正。

如果 $\omega_c < \omega_{c0}$, 且 $\gamma_0(j\omega_c) < \gamma$ --滞后—超前校正。

[注]: 要求串联超前、滞后和滞后—超前校正的原理

4. ※※※※**校正步骤**：只需要记住一种就是滞后—超前校正步骤，所有的都包括了。但是注意，一定要验证※※※※。**[注]**：一般无需指标间的转换，一定要有步骤（因有步骤分）。

例：2007 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G_0(s) = \frac{k}{s(s+1)(0.007s+1)}$ ，试采用滞后—超前校正装置进行串联校正，要求：

置进行串联校正，要求：

- 1、当输入信号为 $r(t)=t$ 时，稳态误差 $e_{ss} \leq 0.001$
- 2、截止频率 $\omega_c \geq 10 \text{ rad/s}$
- 3、相角裕度 $\gamma \geq 35^\circ$

解：因为 $e_{ss} \leq 0.001$ ，所以 $K_v = 1000$ ，取 $k = K_v$ ，作 $G_0(j\omega)$ 图。

[注意： 本题已经给出具体装置类型，不用判断校正装置，如果没有明确，则：

由图可知， $\omega_{c0} \approx 27 \text{ rad/s}$ ，（或者用 $A(\omega_{c0})=1$ 求）

$$\angle G_0(j\omega_{c0}) = -90^\circ - \arctg 27 - \arctg 0.007 \times 27 = -188.6^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G_0(j\omega_{c0}) = -8.6^\circ < 45^\circ$$

又因为 $\omega_c < \omega_{c0}$

所以采用滞后—超前校正装置进行校正。（2分）

1、超前参数确定（5分）

$$\angle G_0(j\omega_c) = -90^\circ - \arctg 10 - \arctg 0.007 \times 10 = -178.3^\circ$$

$$\Phi_m = \gamma - [180^\circ + \angle G_0(j\omega_c)] = 35^\circ - 1.7^\circ + (5 \square 10)^\circ = 40^\circ$$

$$\text{则 } \alpha_1 = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = \frac{1.643}{0.357} = 4.602,$$

$$\text{取 } \omega_m = \omega_c = 10, \text{ 则 } T_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1} \omega_m} = \frac{1}{\sqrt{4.602} \times 10} = 0.047$$

$$\text{则超前校正为 } G_{c1}(s) = \frac{\alpha_1 T_1 s + 1}{T_1 s + 1} = \frac{0.2145s + 1}{0.047s + 1}$$

2、确定滞后校正参数：（5分）

$$\text{此时，滞后校正的原系统为： } G'(s) = G_0(s)G_{c1}(s) = \frac{1000(0.2145s + 1)}{s(s+1)(0.007s+1)(0.047s+1)}$$

$$\omega_c = 10 \text{ 时， } |G'(j\omega_c)| = \frac{1000\sqrt{2.145^2 + 1}}{10\sqrt{101}\sqrt{0.07^2 + 1}\sqrt{0.47^2 + 1}} = 21.366$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{|G'(j\omega_c)|} = \frac{1}{21.366} \approx 0.047 \quad (\alpha_2 < 1)$$

$$\text{取 } \frac{1}{\alpha_2 T_2} \approx \frac{1}{10} \omega_c = 1, \text{ 则 } \alpha_2 T_2 = 1, \text{ 所以 } T_2 \approx 21.366$$

$$\text{所以滞后校正为 } G_{c2}(s) = \frac{\alpha_2 T_2 s + 1}{T_2 s + 1} = \frac{s + 1}{21.366s + 1}$$

$$G(s) = G_0(s)G_{cc}(s)G_{cc}(s) = \frac{1000(0.2145s + 1)}{s(0.007s + 1)(0.047s + 1)(21.366s + 1)}$$

3、验证：（3分）

1) $K_v = 1000s^{-1}$ ，当输入信号为 $r(t) = t$ 时，稳态误差 $e_{ss} = 0.001$

2) 当 $\omega_c = 10$ 时， $|G(j\omega_c)| \approx 1$

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega_c) &= -90^\circ + \arctg 0.245 \times 10 - \arctg 0.007 \times 10 - \arctg 0.047 \times 10 - \arctg 21.366 \times 10 \\ &= -141.11^\circ \end{aligned}$$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 38.89^\circ > 35^\circ$$

所以，以 $G_c(s) = \frac{(0.2145s+1)}{(0.047s+1)} \frac{(s+1)}{(21.366s+1)}$ 为串联校正装置，符合系统设计指标要求。