Universidad Fidélitas
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Tarea 3

EM-720 Control Automático

Estabilidad de Sistemas

Por:

Sahren Sánchez Valerín

Heredia, Costa Rica

3 de junio de 2018

1 Estabilidad de sistemas

Para el sistema de la figura 1 agregue un bloque en alguno de los dos lugares marcados de manera que el sistema se vuelva estable

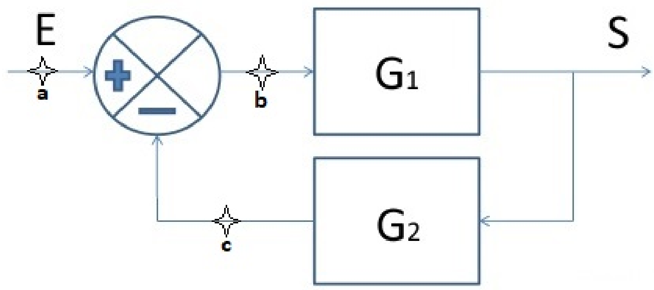

Figura 1: Sistema inestable.

Sabiendo además que

$$G_1 = \frac{1}{s^2 + 2s}$$

$$G_2 = \frac{1}{s}$$

Solución

Para realizar el análisis de estabilidad vamos a usar el Teorema de Routh-Hurwitz que en resumen indica lo siguiente:

Dado: $G(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + ... + a_s + a_0$. Donde $G(s)$ es la ecuación característica de un sistema.

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\
s^{n-3} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & \delta_1 & & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{l|l|l}
\alpha_1 = \dfrac{(a_{n-1} \cdot a_{n-2}) - (a_n \cdot a_{n-3})}{a_{n-1}} & \beta_1 = \dfrac{(\alpha_1 \cdot a_{n-3}) - (a_{n-1} \cdot \alpha_2)}{\alpha_1} & \cdots \\
\alpha_2 = \dfrac{(a_{n-1} \cdot a_{n-4}) - (a_n \cdot a_{n-5})}{a_{n-1}} & \beta_2 = \dfrac{(\alpha_1 \cdot a_{n-5}) - (a_{n-1} \cdot \alpha_3)}{\alpha_1} & \cdots \\
\alpha_3 = \dfrac{(a_{n-1} \cdot a_{n-6}) - (a_n \cdot a_{n-7})}{a_{n-1}} & \beta_3 = \dfrac{(\alpha_1 \cdot a_{n-7}) - (a_{n-1} \cdot \alpha_4)}{\alpha_1} & \cdots \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots
\end{array}$$

Figura 2: Arreglo de Routh-Hurwitz

El número de cambios de signo de: a_n, a_{n-1}, α_1, β_1, ..., $\gamma 1$, σ_1 (primera columna resultante del criterio de Routh-Hurwitz), nos da la cantidad de elementos que están en el semiplano derecho. Si todos los elementos tienen el mismo signo, el sistema será asintóticamente estable, en cambio, si encontramos cambios de signo, el sistema será asintóticamente inestable. Y además tendremos tantos polos en el semiplano positivo como variaciones de signo en la primera columna.

Por lo que primero procedemos a escoger el punto ***b*** para colocar el nuevo bloque que en este caso se llamara G_3. Por lo que el nuevo diagrama se observa en la figura 3.

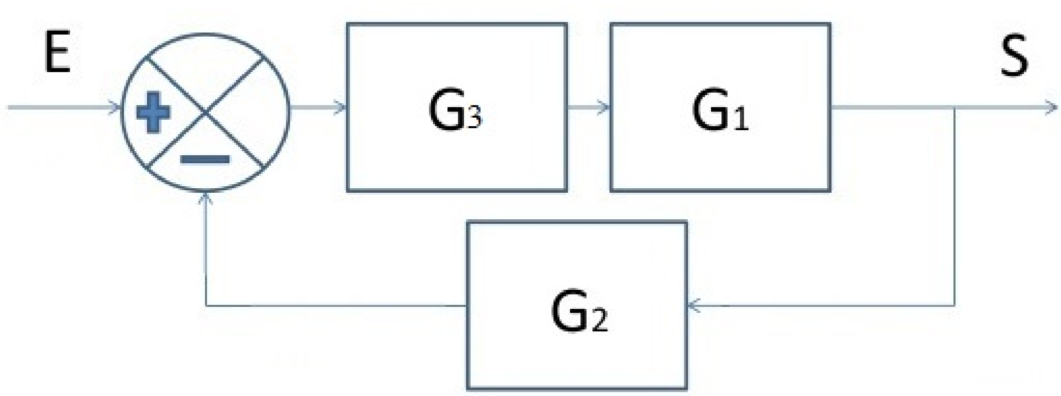

Figura 3: Diagrama de bloques

Al utilizar simplificación de bloques quedaría la ecuación (1)

$$G = \frac{G_1 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3} \tag{1}$$

Y definimos la función G_3:

$$G_3 = s + a$$

Donde a es una constante a definir.

Ahora encontramos G.

$$G = \frac{\frac{s+a}{s^2+2s}}{1 + \frac{s+a}{s(s^2+2s)}} = \frac{\frac{s+a}{s^2+2s}}{\frac{s(s^2+2s)+s+a}{s(s^2+2s)}} = \frac{s(s+a)}{s^3+2s^2+s+a}$$

Por lo que tenemos finalmente la ecuación 1

$$G = \frac{s(s+a)}{s^3+2s^2+s+a}$$

Y tenemos que la ecuación caracteristica es $H(s) = s^3 + 2s^2 + s + a$. Por lo que procedemos a armar el arreglo de Routh-Hurwitz.

$$\begin{array}{c|ccc}
s^3 & 1 & 1 & 0 \\
s^2 & 2 & a & 0 \\
s^1 & \frac{2-a}{2} & 0 & 0 \\
s^0 & a & 0 & 0
\end{array}$$

Por lo que siguiendo lo que indica el teorema todos los elementos de la columna uno deben ser positivos, por lo que tenemos las siguientes condiciones:

$$a \geq 0$$

$$\frac{2-a}{2} \geq 0 \rightarrow a \leq 2$$

Así tenemos que para que el sistema sea estable se debe cumplir la condición:

$$0 \leq a \leq 2$$

Y se debe tener en cuenta que cuando $a = 0$ ó $a = 2$ el sistema se encuentra en el límite de la estabilidad.

Ahora se va a probar mediante $MATLAB$® para diferentes valores de "a" donde se encuentran los polos.

1. $a = -1$

$$G = \frac{s(s-1)}{s^3 + 2s^2 + s - 1}$$

```
num=[1,0,-1]
den=[1,2,1,-1]
Fs=tf(num,den)
ceros=roots(Fs.num{1})
polos=roots(Fs.den{1})
rlocus(Fs)

Fs =

s^2 - 1
-----------------
s^3 + 2 s^2 + s - 1

Continuous-time transfer function.
polos =

-1.2328 + 0.7926i
-1.2328 - 0.7926i
0.4656 + 0.0000i
```

Además observamos el lugar geométrico de las raíces en la figura 4.

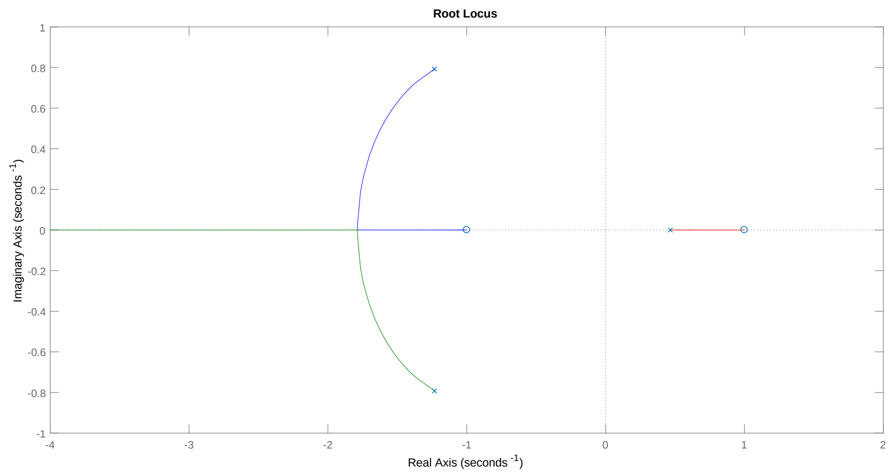

Figura 4: LGR con $a = -1$

Y como se observa hay polos en la izquierda del eje real por lo que el sistema es inestable.

2. $a = 0$

$$G = \frac{s(s)}{s^3 + 2s^2 + s}$$

```
num=[1,0,0]
den=[1,2,1,0]
Fs=tf(num,den)
ceros=roots(Fs.num{1})
polos=roots(Fs.den{1})
rlocus(Fs)

Fs =

s^2
---------------------
s^3 + 2 s^2 + s

Continuous-time transfer function.
polos =

0
-1
-1
```

Además observamos el lugar geométrico de las raíces en la figura 5.

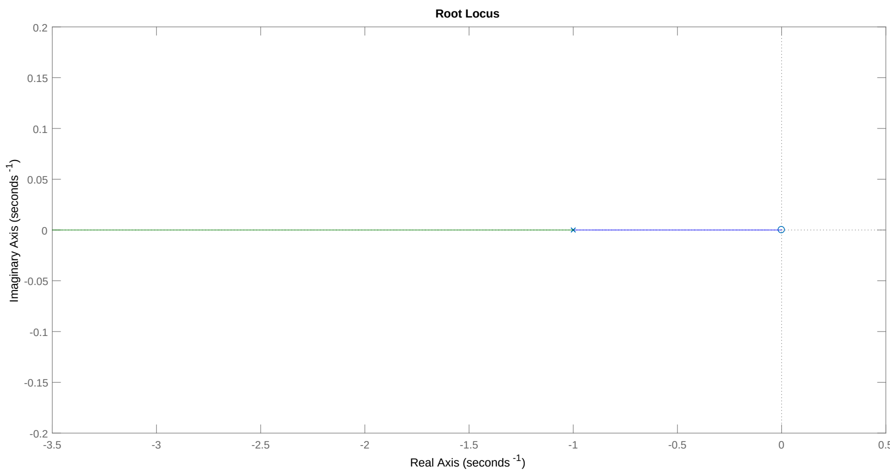

Figura 5: LGR con $a = 0$

Se puede observar que uno de los polos es 0, por lo que el sistema se encuentra en el límite de la estabilidad.

3. $a = 1$

$$G = \frac{s(s+1)}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

```
num=[1,0,1]
den=[1,2,1,1]
Fs=tf(num,den)
ceros=roots(Fs.num{1})
polos=roots(Fs.den{1})
rlocus(Fs)

Fs =

s^2 + 1
-----------------------
s^3 + 2 s^2 + s + 1

Continuous-time transfer function.
polos =

-1.7549 + 0.0000i
-0.1226 + 0.7449i
-0.1226 - 0.7449i
```

Además observamos el lugar geométrico de las raíces en la figura 6.

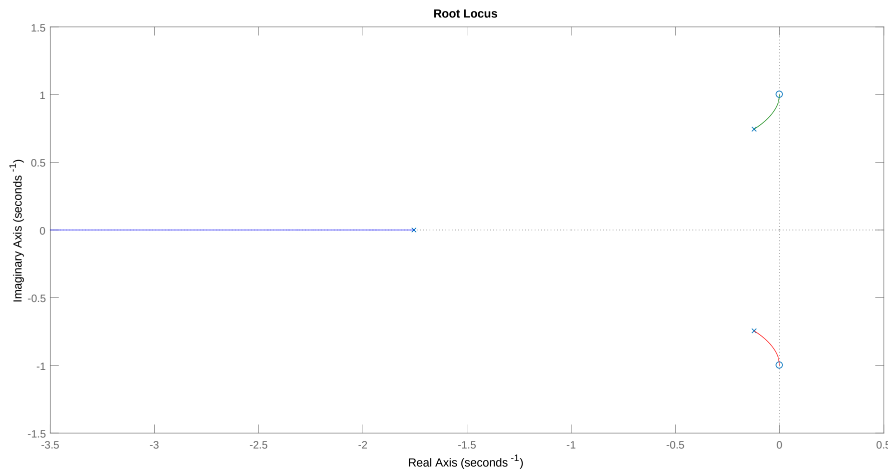

Figura 6: LGR con $a = 1$

Y como se observa no hay polos en la izquierda del eje real por lo que el sistema es estable.

4. $a = 2$

$$G = \frac{s(s+2)}{s^3 + 2s^2 + s + 2}$$

```
num=[1,0,2]
den=[1,2,1,2]
Fs=tf(num,den)
ceros=roots(Fs.num{1})
polos=roots(Fs.den{1})
rlocus(Fs)

Fs =

s^2 + 2
-----------------
s^3 + 2 s^2 + s + 2

Continuous-time transfer function.
polos =

polos =

-2.0000 + 0.0000i
0.0000 + 1.0000i
0.0000 - 1.0000i
```

Además observamos el lugar geométrico de las raíces en la figura 7.

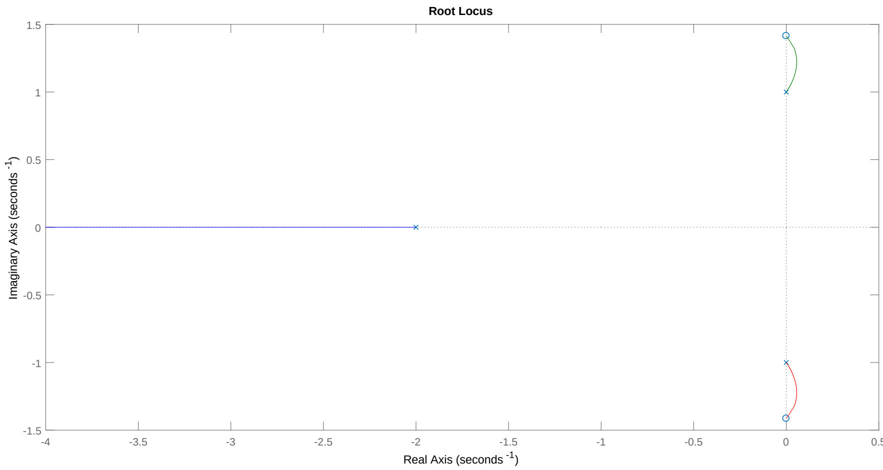

Figura 7: LGR con $a = 2$

Se puede observar que dos polos están en 0, por lo que el sistema se encuentra en el límite de la estabilidad.

5. $a = 4$

$$G = \frac{s(s+4)}{s^3 + 2s^2 + s + 4}$$

```
num=[1,0,4]
den=[1,2,1,4]
Fs=tf(num,den)
ceros=roots(Fs.num{1})
polos=roots(Fs.den{1})
rlocus(Fs)

Fs =

s^2 + 4
------------------
s^3 + 2 s^2 + s + 4

Continuous-time transfer function.
polos =

polos =

-2.3146 + 0.0000i
0.1573 + 1.3052i
0.1573 - 1.3052i
```

Además observamos el lugar geométrico de las raíces en la figura 8.

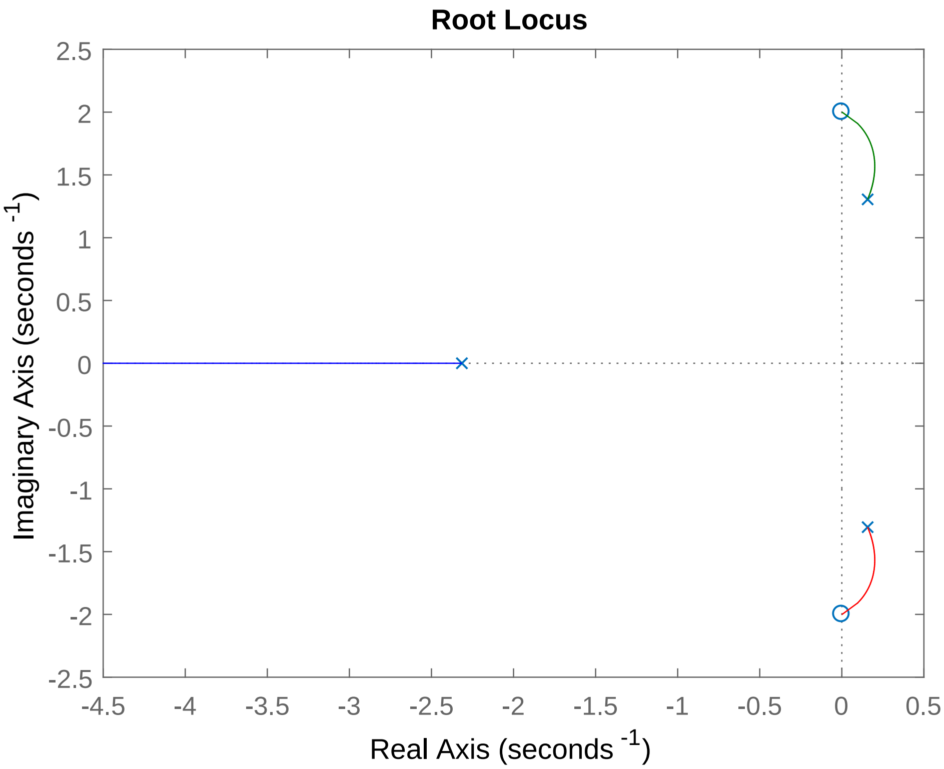

Figura 8: LGR con $a = 4$

Y como se observa hay polos en la izquierda del eje real por lo que el sistema es inestable.

Por lo que queda probado que para valores que son menores a 0 y mayores 2 el sistema sigue siendo inestable, para los valores 0 y 2 el sistema está en el limite de la estabilidad y para valores que se encuentran entre 0 y 2 el sistema es estable.

Por lo que para tener un resultado final se elige el valor $a = 1$, de esta manera tenemos que $G_3 = s + 1$
Adicionalmente en la figura 9 se observa la respuesta del sistema descrito en la ecuación (2) ante una entrada escalón.

$$G = \frac{s(s+1)}{s^3 + 2s^2 + s + 1} \tag{2}$$

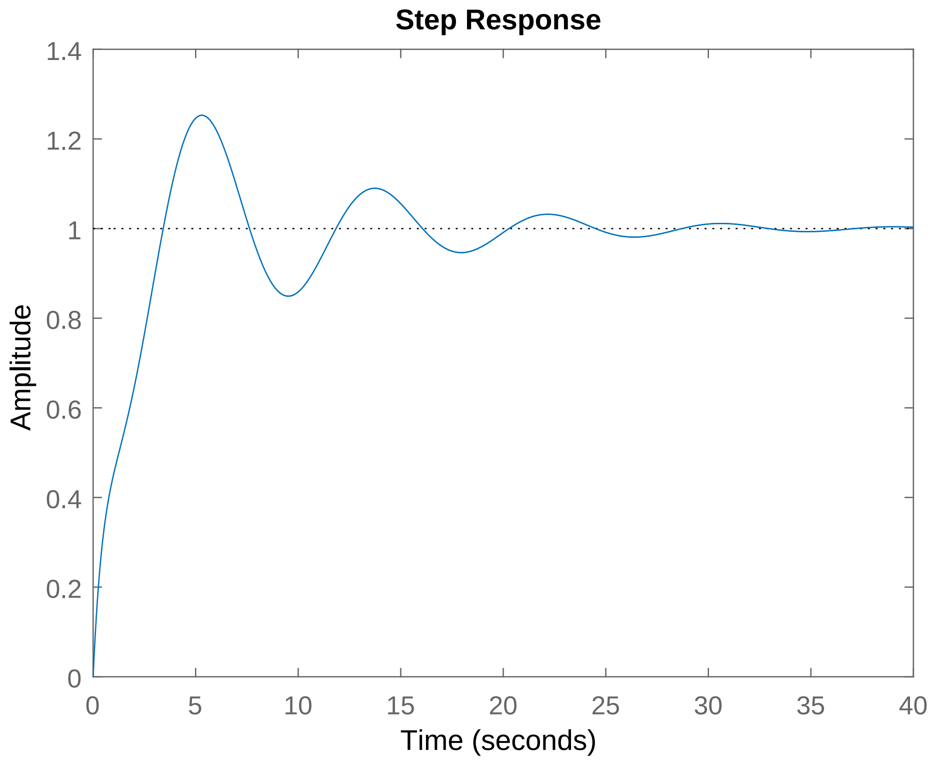

Figura 9: Respuesta del sistema ante una entrada escalón.