Universidad Fidélitas
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Tarea 2

EM-720 Control Automático

Sistemas de segundo orden

Por:

Sahren Sánchez Valerín

Heredia, Costa Rica

24 de mayo de 2018

1 Sistemas de segundo orden

Para la función

$$G_0(s) = \frac{3}{s^2 + 2s + 1}$$

encuentre lo siguiente:

1. Función de transferencia para un lazo cerrado con retroalimentación negativa.
2. Obtener los valores de ζ y ω_n.
3. Obtener los ceros y los polos de la función.
4. Verificar los valores obtenidos con algún software de simulación.

Solución:

1. **Para la función de transferencia utilizamos la simplificación de bloques de la figura 1.**

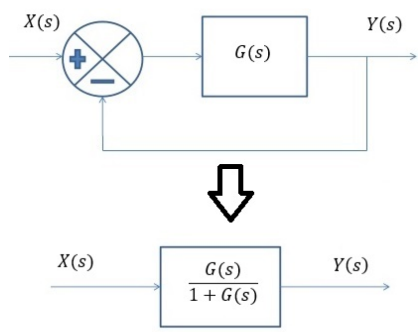

Figura 1: Retroalimentación negativa.

Por lo que quedaría de la siguiente manera:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{\dfrac{3}{s^2+2s+1}}{1 + \dfrac{3}{s^2+2s+1}}$$

$$F(s) = \frac{\dfrac{3}{s^2+2s+1}}{\dfrac{s^2+2s+1+3}{s^2+2s+1}} = \frac{3(s^2+2s+1)}{(s^2+2s+1)(s^2+2s+4)}$$

$$F(s) = \frac{3}{s^2 + 2s + 4} \tag{1}$$

Por lo que en la ecuación (1) se muestra la función de transferencia del sistema.

2. **Para obtener los valores solicitados haremos uso de la ecuación (2).**

$$F(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{2}$$

donde:

- K: ganancia del sistema.
- ω_n: frecuencia natural.
- ζ: coeficiente de amortiguamiento.

Por lo que igualando la ecuación (1) con (2) obtenemos lo siguiente:

$$\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{3}{s^2 + 2s + 4} \tag{3}$$

y procedemos a extraer los factores:

$$\omega_n^2 = 4 \rightarrow \omega_n = 2$$

$$K\omega_n^2 = 3 \rightarrow K = \frac{3}{\omega_n^2} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$2\zeta\omega_n = 2 \rightarrow \zeta\omega_n = 1 \rightarrow \zeta = \frac{1}{\omega_n} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Por lo que se obtienen los valores:

$$\zeta = 0,5$$

$$\omega_n = 2$$

3. **Obtención de los ceros y polos del sistema:**

Para obtener los ceros se deben obtener los valores para los cuales el numerador de $F(s)$ es 0, en este caso como el numerador es una constante, se deduce que el sistema no tiene ceros.

Para obtener los polos se deben obtener los valores para los cuales el denominador de $F(s)$ es 0, y en este caso se tiene una función de segundo grado, por lo que se aplica la fórmula general:

$$s^2 + 2s + 4 = 0$$

Y sabemos que:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo que para encontrar los ceros tenemos:

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$s = \frac{-2 \pm i2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

$$s_1 = -1 + i\sqrt{3} \tag{4}$$

$$s_2 = -1 - i\sqrt{3} \tag{5}$$

Por lo que en las ecuaciones (4) y (5) se encuentran los polos obtenidos.

4. **Comprobación por software:**
Para la comprobación por software se usó el programa $MATLAB$® y se creo un script denominado **tf1.m** que contiene lo siguiente:

```
num=[3] %define el numerador de la función de transferencia
den=[1,2,4] %define el denominador de la función de transferencia
Fs=tf(num,den) %crea la funcion de transferencia
ceros=roots(Fs.num{1}) %calcula las raices del numerador
polos=roots(Fs.den{1}) %calcula las raices del denominador
```

En el **command windows** de $MATLAB$® Se ejecuta lo siguiente:

```
>> tf1

num =

3

den =

1     2     4

Fs =

3
-------------
s^2 + 2 s + 4

Continuous-time transfer function.


ceros =

0x1 empty double column vector

polos =

-1.0000 + 1.7321i
-1.0000 - 1.7321i
```