

Mapa del Fondo Cósmico de Microondas

Constanza Osses Guerra*

Profesor: Cristóbal Sifón and

Doctorado en Ciencias Físicas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Este trabajo tiene por objetivo recrear el mapa del CMB a partir de un espectro de potencias dado. En la primera sección se pretende obtener dicho mapa, en la segunda sección obtener el espectro de potencias a partir del mapa generado anteriormente, y finalmente, se obtendrán los valores de los parámetros $\Omega_b h^2$ y $\Omega_c h^2$ utilizados para generar el espectro de potencias original.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio del Fondo Cósmico de Microondas (CMB) [1] ha otorgado la oportunidad de conocer más a fondo el Universo. A través del CMB se pueden estudiar diferentes áreas de la cosmología como ondas gravitacionales primordiales, propiedades de los neutrinos y distribuciones de masas.

Además el CMB nos proporciona la mejor evidencia que respalda la teoría del Big Bang debido a su gran uniformidad y sus pequeñas anisotropías.

Por otro lado, el CMB está polarizado en dos tipos: modos E y modos B. El modo E surge de la dispersión de Thomson en el plasma mientras que el modo B puede surgir tanto de lentes gravitacionales producidos por los modos E como de ondas gravitacionales primordiales.

Diversos experimentos se han realizado con el objetivo de mejorar las mediciones del CMB tales como COBE [2], WMAP [3], Planck [4], ACT [5], SPT y BICEP/Keck Array [6].

Del espectro de potencias del CMB se puede extraer mucha información: De su espectro de potencias, se puede obtener información valiosa: a pequeñas escalas se pueden apreciar fluctuaciones generadas por Inflación, además, sus peak entregan información sobre curvatura (primer peak), cantidad de materia bariónica (segundo peak) y materia oscura (tercer peak). Por otro lado, el mapa del CMB entrega información sobre su temperatura y cómo es el patrón de las fluctuaciones.

En este trabajo se pretende recrear un mapa del CMB y obtener los parámetros de densidad que generaron el espectro de potencias. En §2 se describen los datos utilizados, en §3 se describe el procedimiento utilizado para llevar a cabo los objetivos, en §4 se exponen los resultados obtenidos y finalmente se concluye con una discusión en §5.

2. DATOS

Los datos utilizados provienen del *Code for Anisotropies in the Microwave Background (CAMB)* que está basado en el CMBFast [7]. Este código es usado para cal-

cular los espectros de potencias de temperatura y polarización del CMB, espectros angulares, funciones de transferencia entre otros.

En este código existen diferentes componentes del espectro de potencias: total, unlensed_scalar, unlensed_total, lensed_scalar, tensor, lens_potential. Trabajaremos sólo con la componente unlensed_scalar.

El espectro de potencias se origina con ciertos parámetros iniciales, de los cuales debemos identificar los valores de los parámetros de densidad bariónica ($\Omega_b h^2$) y de materia oscura ($\Omega_c h^2$)

3. ANÁLISIS

La amplitud de las fluctuaciones del espectro de potencias está relacionada con los armónicos esféricos y está dada por

$$C_\ell = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle \quad (3.1)$$

3.1. Mapa CMB

Queremos obtener el mapa del CMB en 2D, para ello, primero debemos obtener el mapa en espacio real a partir de los datos entregados por el espectro original. A partir de los datos entregados del espectro original, se puede obtener una grilla

$$\tilde{\mathbf{M}}(\ell_x, \ell_y) = C \left(\sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2} \right) \quad (3.2)$$

donde $\ell = \sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2}$

Para cada par de datos de ℓ_x, ℓ_y se obtiene un valor asociado dado por el espectro de potencias original.

Se debe ir rellenando la grilla con los correspondientes valores de $C(\sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2})$. Se debe tomar en cuenta que los valores entregados para cada momento multipolar corresponden a una cantidad D_ℓ multiplicada por un factor, entonces

$$C_\ell = \frac{2\pi D_\ell}{\ell(\ell + 1)} \quad (3.3)$$

*Electronic address: conyosses@gmail.com

Esta función nos otorga el mapa del CMB para el espacio real.

Como el espectro de potencias se genera de fluctuaciones primordiales de tipo gaussiana, es necesario introducir una función de distribución gaussiana al espectro final en el espacio de Fourier, de tal manera que

$$\mathbf{M}(\theta_x, \theta_y) = \int d\ell_x \int d\ell_y \exp[-2i(\vec{\ell} \cdot \vec{\theta})] \tilde{\mathbf{M}}(\ell_x, \ell_y) \tilde{\mathbf{G}}(\ell_x, \ell_y) \quad (3.4)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{G}}(\ell_x, \ell_y) = \int d\ell_x \int d\ell_y \exp[-2i(\vec{\ell} \cdot \vec{\theta})] \mathcal{N}(\mu, \sigma) \quad (3.5)$$

Se debe tener en cuenta que los momentos multipolares se relacionan con el ángulo en el cielo de la siguiente manera: $\ell = \frac{2\pi}{\theta}$

3.2. Espectro de Potencias

Como existen problemas de discontinuidad en los bordes del mapa generado en la sección anterior, es necesario apodizarlo, es decir, multiplicarlo con una función ventana. Para contrarrestar el efecto de los bordes, esta función debe decaer a cero suavemente.

$$\mathbf{M}_{\text{apod}}(\theta_x, \theta_y) = \mathbf{M}(\theta_x, \theta_y) \circ \mathbf{W}(\theta_x, \theta_y) \quad (3.6)$$

donde \circ es el producto de Hadamard.

Una vez obtenido el mapa apodizado, se procede a calcular el mapa en espacio real, de tal forma que

$$\tilde{\mathbf{M}}(\ell_x, \ell_y) = \text{FFT}(\mathbf{M}_{\text{apod}}(\theta_x, \theta_y)) \quad (3.7)$$

Con este mapa se pueden ir calculando los coeficientes C_ℓ del espectro, de modo que se promedie para cada anillo con momento multipolar constante y se eleve al cuadrado

$$C_\ell \left(\sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2} \right) = \langle \tilde{\mathbf{M}}(\ell_x, \ell_y) \rangle \quad (3.8)$$

Se debe tener en cuenta la relación entre D_ℓ y C_ℓ dada por la ec. (3.2).

Si bien esta ecuación nos entregará un espectro de potencias, se debe corregir debido a algunos errores que son causados por la apodización. Estos errores se corrigen mediante la siguiente ecuación

$$\hat{D}_\ell = T_\ell * D_\ell + N_\ell \quad (3.9)$$

donde \hat{D}_ℓ es el espectro a partir del mapa, D_ℓ es el espectro real, T_ℓ es la función de transferencia, y N_ℓ es el sesgo de ruido. Por lo tanto, se puede construir el espectro de potencias real obteniendo los valores de la siguiente manera

$$D_\ell = \frac{(\hat{D}_\ell - N_\ell)}{T_\ell} \quad (3.10)$$

3.3. Parámetros de densidad

Para obtener un espectro igual o similar al espectro original, se debe iterar sobre los parámetros de densidad del paquete otorgado por CAMB. Teniendo los datos para cada espectro generado, se puede calcular una prueba de independencia entre las distribuciones a través de χ^2

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(x_{i,obs} - x_{i,teo})^2}{x_{i,teo}} \quad (3.11)$$

donde x_{obs} es el valor de un punto en el espectro observado y x_{teo} es el valor de un punto en el espectro original.

Este test indica que mientras menor sea el valor χ^2 , existe una mayor probabilidad de que ambas distribuciones sean iguales. Es decir, para obtener los valores de los parámetros de densidad es necesario que el valor de χ^2 normalizado por los grados de libertad ($\text{dof} = \text{número de datos} - \text{parámetros libres} - 1$) al comparar el espectro resultante con el original, sea lo más cercano a cero posible.

4. RESULTADOS

Los datos entregados generan el siguiente espectro de potencias

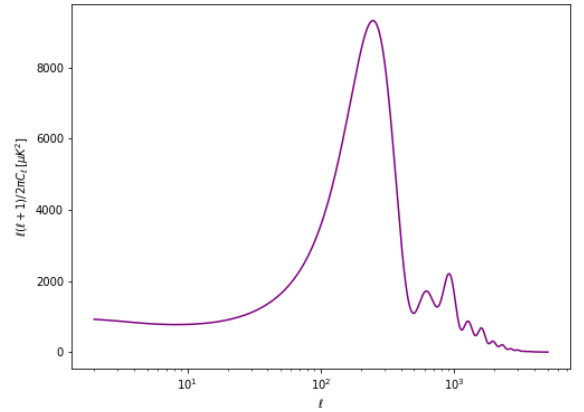


Figura 1. *Espectro de potencias original.*

donde los momentos multipolares varían entre $2 \leq \ell \leq 5049$. Tanto el momento monopolar ($\ell = 0$) como el dipolar ($\ell = 1$) no contribuyen al espectro. El monopolo no contribuye porque representa el promedio de las fluctuaciones de temperatura en el cielo y asumiendo homogeneidad e isotropía debe ser cero, mientras que el dipolo es afectado por el propio movimiento de la Tierra, viéndose el background corrido hacia el rojo en un sector y hacia el azul en el lado opuesto. Entonces, para mayor precisión en los cálculos se opta por remover estos dos términos de los momentos dipolares.

4.1. Mapa CMB

De los datos del espectro original, tomamos la columna D_ℓ , la transformamos en C_ℓ de acuerdo a la ec. (3.2) e iteramos dos veces sobre un rango determinado para formar la matriz en 2 dimensiones. El rango máximo de los elementos de la iteración está dictaminado por la resolución de nuestro mapa. En este caso, la resolución es de $7'$ lo cual nos entrega $\ell_{max} = 3086$. Se debe tener en cuenta que el valor máximo de ℓ es 5049, por lo que si el módulo de las dos variables es mayor, el elemento correspondiente de la matriz es cero. El mapa en espacio real se puede apreciar en la Fig. ????. En él, podemos ver anillos con un cierto valor constante de C_ℓ el cual va disminuyendo a medida que aumentan los momentos multipolares. Se debe destacar además, que el primer anillo comienza en $\ell \sim 100-125$, lo cual coincide bastante bien con el primer peak del espectro original.

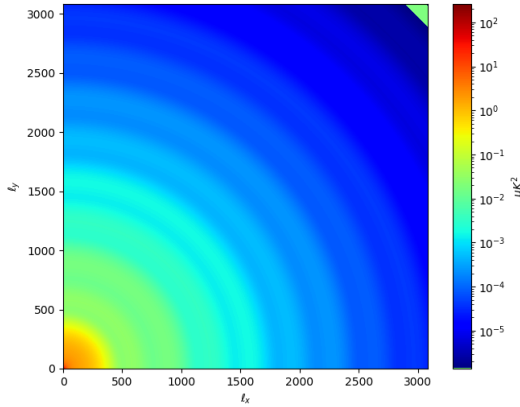


Figura 2. Mapa en espacio real ($\tilde{\mathbf{M}}(\ell_x, \ell_y)$). Los valores de C_ℓ disminuyen mientras los valores de ℓ_x y ℓ_y aumentan. El primer anillo naranja corresponde al primer peak del espectro de potencias.

Asumiendo Gaussianidad y de acuerdo a la ec. (3.4) tomamos la Transformada Rápida de Fourier (inversa) en 2-dimensiones de una distribución Gaussiana (en este caso, una distribución normal con $\mu = 0$, $\sigma = 1$) de la misma longitud que la matriz $\tilde{\mathbf{M}}(\ell_x, \ell_y)$ creada anteriormente. Tomando la parte real de $\tilde{\mathbf{G}}(\ell_x, \ell_y)$ obtenemos el siguiente mapa

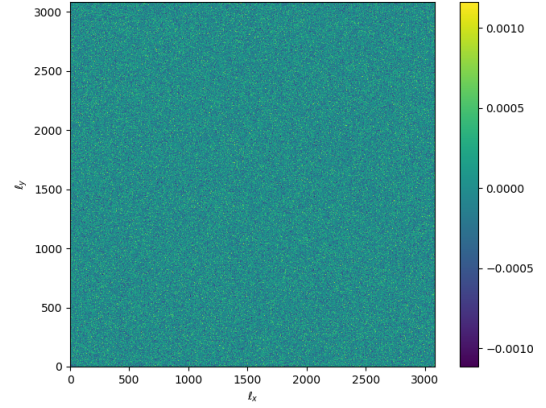


Figura 3. Transformada de Fourier en 2 dimensiones (FFT) de una distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

Una vez obtenidos $\tilde{\mathbf{M}}(\ell_x, \ell_y)$ y $\tilde{\mathbf{G}}(\ell_x, \ell_y)$ podemos usar la ec. (3.3) para obtener el mapa del CMB en espacio de Fourier

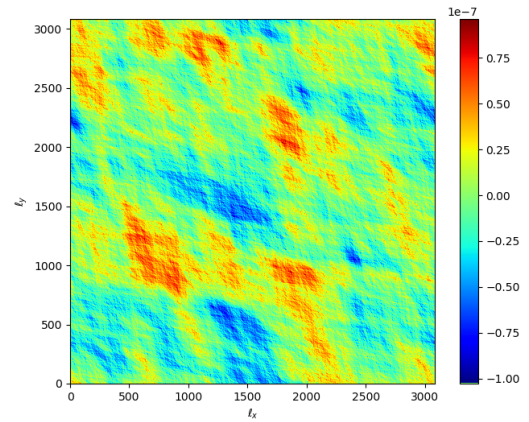


Figura 4. Mapa del CMB en espacio de Fourier.

Al reescalar el mapa para convertir los ejes en grados y la temperatura del orden de 10^2 , se obtiene un mapa del mismo color en todos los sectores

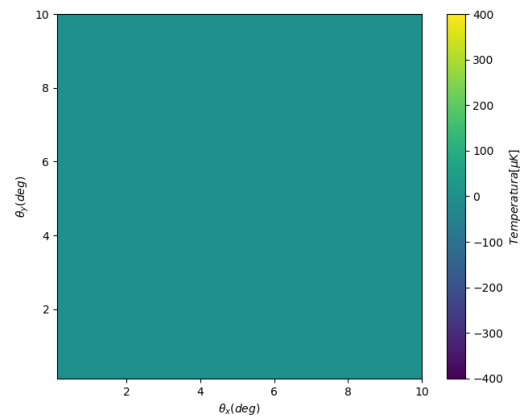


Figura 5. *Mapa del CMB en espacio de Fourier reescalado a grados.*

4.2. Espectro de Potencias

Ahora queremos obtener el espectro de potencias a partir del mapa anterior. Para ello, primero se debe escoger una función ventana que no decaiga muy rápido a cero. En este trabajo, se escogió la función ventana de Hann.

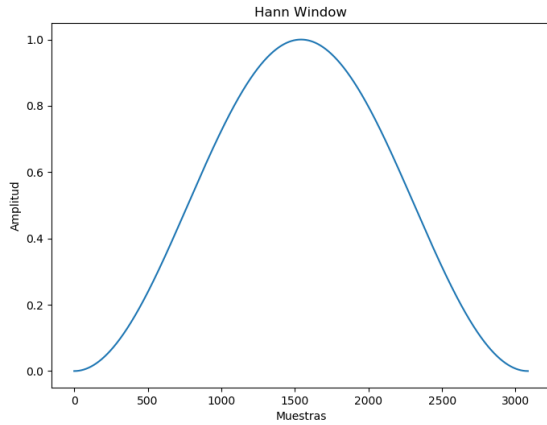


Figura 6. *Función ventana de Hann.*

Entonces, el mapa apodizado queda de la siguiente manera

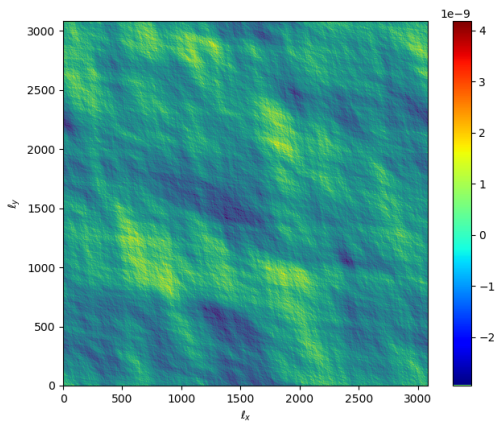


Figura 7. *Mapa del CMB apodizado.*

El mapa apodizado a partir del mapa reescalado queda de la siguiente manera

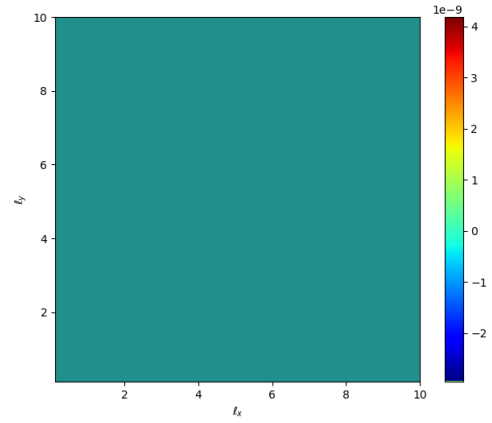


Figura 8. *Mapa del CMB apodizado y reescalado.*

Calculando para cada anillo el promedio de la transformada de Fourier del mapa apodizado se obtiene el valor del coeficiente C_ℓ y usando la ec. (3.2) se encuentran los valores D_ℓ del espectro de potencias.

Para corregir los errores de la apodización y resolución del mapa se debe introducir el sesgo de ruido (se utilizó una distribución normal) y una función de transferencia. El gráfico del espectro sin corregir queda de la siguiente manera

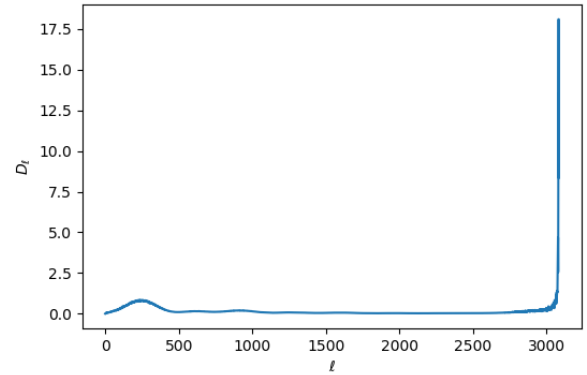


Figura 9. *Mapa del CMB apodizado y reescalado.*

4.3. Parámetros de densidad

Para obtener los espectros, sólo se modificaron los parámetros de densidad bariónica y de materia oscura. Los demás parámetros se dejaron tal cual estaban en el paquete entregado por CAMB y son los siguientes

Parámetro	Valor
A_s	2×10^{-9}
n_s	0.965
r	0.00
$H_0 (km s^{-1} Mpc^{-1})$	67.5
$\sum m_\nu (eV)$	0.06
Ω_k	0.00
τ	0.06

Tabla I: Parámetros iniciales entregados por CAMB

Usando estos valores y el código de CAMB en Python, se iteró en primera instancia 10 veces sobre cada parámetro $\Omega_b h^2$ y $\Omega_c h^2$, entre 0.005 y 0.150. Se comparó cada espectro resultante con el original, obteniendo un valor de χ^2 que posteriormente es normalizado por los grados de libertad (dof = 5046). La Tabla 1 muestra los mejores valores de $\Omega_b h^2$, $\Omega_c h^2$ con $\chi^2 < 100000$.

$\Omega_b h^2$	$\Omega_c h^2$	χ^2	$\chi^2/\text{grados de libertad}$
0.0533	0.0694	90448.6914	17.9248
0.0533	0.0856	19162.9253	3.7976
0.0533	0.1017	27735.4469	5.4965
0.0533	0.1178	75457.1964	14.9539
0.0694	0.1017	55901.4234	11.0784
0.0694	0.1178	30447.5212	6.0339
0.0694	0.1339	35793.6990	7.0935
0.0694	0.1500	58884.4855	11.6695

Tabla II: Mejores resultados de χ^2 para las primeras 10 iteraciones: $0.05 < \Omega_b h^2$, $\Omega_b h^2 < 0.150$. En la primera columna se muestran los valores del parámetro de densidad bariónica $\Omega_b h^2$, en la segunda columna, el parámetro de densidad de materia oscura $\Omega_c h^2$, la tercera columna corresponde a los valores de χ^2 y en la cuarta columna se muestran los valores de χ^2 normalizados por los grados de libertad. El mejor resultado del test ($\chi^2/\text{dof} = 3.7976$) corresponde a $\Omega_b h^2 = 0.0533$ y $\Omega_c h^2 = 0.0856$.

Posteriormente, se realizó el mismo procedimiento, escogiendo ahora un rango de los parámetros cercanos a los valores que entregaban resultados más bajos de χ^2 , entonces, se iteraron 50 veces los parámetros: $0.05 < \Omega_b h^2 < 0.075$ y $0.05 < \Omega_c h^2 < 0.150$. La Tabla 2 muestra los valores de los parámetros para valores de $\chi^2 < 2500$.

$\Omega_b h^2$	$\Omega_c h^2$	χ^2	$\chi^2/\text{grados de libertad}$
0.0592	0.0998	2497.2344	0.4949
0.0597	0.1002	2452.5220	0.4860
0.0597	0.1006	2427.5886	0.4811
0.0597	0.1010	2436.7352	0.4829
0.0597	0.1014	2471.5026	0.4898

Tabla III: Mejores resultados para las nuevas 10 iteraciones: $0.058 < \Omega_b h^2 < 0.064$ y $0.090 < \Omega_b h^2 < 0.107$. El mejor valor del test es $\chi^2/\text{dof} = 0.4811$, lo cual corresponde a $\Omega_b h^2 = 0.0597$ y $\Omega_c h^2 = 0.1006$.

Los dos mejores resultados expuestos en la Tabla 2 se grafican junto al espectro original en la Fig. ???. En concordancia con los resultados obtenidos a través del test χ^2 , el espectro que más se ajusta a la curva del espectro original corresponde a los valores $\Omega_b h^2 = 0.0597$ y $\Omega_c h^2 = 0.1006$. Si bien no ajustan perfectamente porque el primer peak del espectro resultante está levemente por debajo del original, mientras que en el segundo peak se ajusta bastante bien.

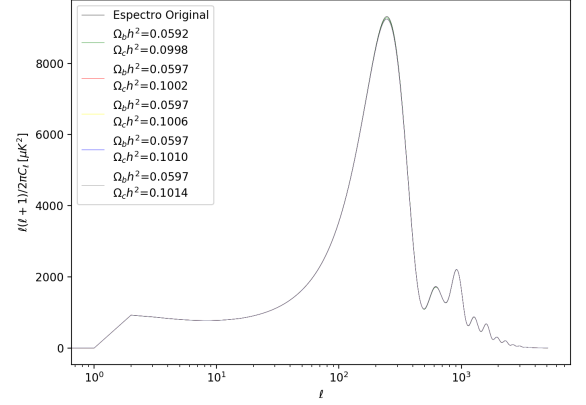


Figura 10. Comparación entre los espectros obtenidos con el original. La línea negra representa el espectro original mientras que las demás líneas representan los valores de $\chi^2 < 2500$.

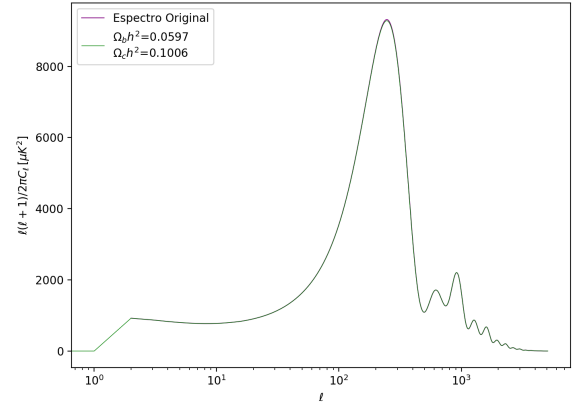


Figura 11. Comparación entre los espectros obtenidos con el original. La línea negra representa el espectro original mientras que la línea verde representa el espectro con los mejores valores para los parámetros: $\Omega_b h^2=0.0597$ y $\Omega_c h^2=0.1006$.

5. DISCUSIÓN

Si bien el objetivo de este trabajo era recrear un mapa del CMB y posteriormente obtener su espectro de potencias, esto no ha sido del todo posible. La resolución

utilizada (7') no fue la más óptima (0.5'), esto debido a problemas computacionales que no permitieron generar mayor cantidad de datos, sin embargo, en la literatura se encuentran artículos que utilizan alrededor de esta resolución ([8], [9], [10]). Con esta resolución, el mapa no quedaría tan preciso y las fluctuaciones de temperatura no serían tan notorias. En la Fig. 2 se muestra los anillos equivalentes a ℓ_x y ℓ_y constantes y el valor de C_ℓ se va haciendo cada vez menor al ir aumentando los momentos multipolares. Por otro lado, el mapa debiese estar en

escala angular desde 0 a 10° y el rango de temperatura del orden de 10^2 (μK) pero al hacer la transformación se obtiene un mapa de un solo color (Fig. 5). Al tener este mapa errado, el cálculo del espectro de potencias también lo está.

En cuanto a los valores de los parámetros, se pudieron obtener valores de los parámetros de densidad de $\Omega_b h^2 = 0.0597$ y $\Omega_c h^2 = 1.1006$ con valor de χ^2 normalizado de $\chi^2/dof = 0.4811$

-
- [1] A. A. Penzias and R. W. Wilson, *Astrophys. J.* **142**, 419 (1965).
 - [2] D. J. Fixsen, E. S. Cheng, J. M. Gales, J. C. Mather, R. A. Shafer, and E. L. Wright, *Astrophys. J.* **473**, 576 (1996), astro-ph/9605054.
 - [3] C. L. Bennett, D. Larson, J. L. Weiland, N. Jarosik, G. Hinshaw, N. Odegard, K. M. Smith, R. S. Hill, B. Gold, M. Halpern, et al., *Astrophys. J.* **208**, 20 (2013), 1212.5225.
 - [4] P. Collaboration, N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, et al., *Planck 2018 results. vi. cosmological parameters* (2018), 1807.06209.
 - [5] S. Aiola, E. Calabrese, L. Maurin, S. Naess, B. L. Schmitt, M. H. Abitbol, G. E. Addison, P. A. R. Ade, D. Alonso, M. Amiri, et al., *The atacama cosmology telescope: Dr4 maps and cosmological parameters* (2020), 2007.07288.
 - [6] BICEP2/Keck Collaboration, Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, Z. Ahmed, R. W. Aikin, K. D. Alexander, M. Arnaud, J. Aumont, C. Baccigalupi, et al., *Phys. Rev. Lett.* **114**, 101301 (2015), 1502.00612.
 - [7] U. Seljak and M. Zaldarriaga, *CMBFAST: A microwave anisotropy code* (1999), 9909.004.
 - [8] D. N. Spergel, R. Bean, O. Dore, M. R. Nolta, C. L. Bennett, J. Dunkley, G. Hinshaw, N. Jarosik, E. Komatsu, L. Page, et al., *The Astrophysical Journal Supplement Series* **170**, 377 (2007), URL <https://doi.org/10.1086/2F513700>.
 - [9] R. Genova-Santos, J. A. Rubino-Martin, R. Rebolo, K. Cleary, R. D. Davies, R. J. Davis, C. Dickinson, N. Falcon, K. Grainge, C. M. Gutierrez, et al., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **363**, 79–92 (2005), ISSN 1365-2966, URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09405.x>.
 - [10] S. Masi et al., *AIP Conf. Proc.* **476**, 237 (1999), astro-ph/9911520.