Laforge
Samuel

20/03/20

OSM01 : DM

Exercice 2 :

$$\forall x \in]-1;1[\quad \ln(1+x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(-x)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\frac{(-1)^n + 1}{n+1}\right) \times x^{n+1} \quad \text{car } (-1)^n(-x)^{n+1} = (-1)^n(-1)^n x^{n+1}$$

Ainsi $\ln(2) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n+1}{n+1}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ Avec $x = \frac{1}{3}$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^0+1}{0+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{0+1}}_{2/3} + \underbrace{\frac{(-1)^1+1}{1+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{1+1}}_{0} + \underbrace{\frac{(-1)^2+1}{2+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2+1}}_{2/81} + \dots$$

$\ln(2) \approx 0{,}693$

Exercice 7 :

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

λ est Valeur Propre de A $\Leftrightarrow$ A n'est pas inversible

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) - 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 - \lambda + \lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -1 \text{ et } \lambda_2 = 1$$

$\lambda_1 = 1$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} -y = 0 \\ -2y = 0 \end{matrix} \iff y = 0$$

noyau

$$E_1 = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} [x \in \mathbb{R}] \right. = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} [x \in \mathbb{R}] \right. = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

car on a vu précédement que $y = 0$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -1$

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = y \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$E_2 = \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} \frac{y}{2} \\ y \end{pmatrix} [y \in \mathbb{R}] = \left\{ y \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} [y \in \mathbb{R}] \right. = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

matrice des vecteurs propres — matrice diagonale des valeurs propres

2) $U^{-1} . A . U = D$ $\qquad \lambda_1 = 1 \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\qquad \lambda_2 = -1 \quad E_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$U = \begin{array}{cc} E_1 & E_{-1} \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D^k = \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & -1^k \end{bmatrix} \qquad U^{-1} = \frac{1}{\det(U)} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \times \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

λ_1 $\quad \lambda_2$

$$A^k = U . D^k . U^{-1} = \begin{bmatrix} 1^k & -\frac{1^k}{2} \\ 0 & -1^k \end{bmatrix} \times U^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1^k & -1^k \\ 0 & -1^k \end{bmatrix} \qquad X_k = A^k X_0$$

Laforge Samuel

Exercice 6 :

$$\frac{1}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{1}{2} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^3}$$

Initialisation pour $z \neq 1$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{1^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1^2} = \frac{1}{1^2}$$

$3 - 2 = 1 \iff 1 = 1$ Donc la proportion est vrai pour $z \neq 1$

Hérédité pour $z \in \mathbb{N}/\{1\}$,

$$\frac{1}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{1}{2} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^3}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z^2+z}{(z-1)^3} - \frac{z}{(z-1)^2} \right) = \frac{z}{(z-1)^3}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z^2 + z - z(z-1)}{(z-1)^3} \right) = \frac{z}{(z-1)^3}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z^2 + z - z^2 + z}{(z-1)^3} \right) = \frac{z}{(z-1)^3}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2z}{(z-1)^3} \right) = \frac{z}{(z-1)^3}$$

$$\frac{z}{(z-1)^3} = \frac{z}{(z-1)^3}$$

Conclusion : Donc pour tout $z \neq 1$, on a $\frac{1}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{1}{2} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^3}$

2) On a $f_e[n+2] - 2f_e[n+1] + f_e[n] = U(n)$ avec $f_e(0) = f_e(1) = 0$

Avec la transformée en z on obtient :

$$z^2 F(z) - 2z F(z) + F(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\Leftrightarrow F(z)\left(z^2 - 2z + 1\right) = \frac{z}{z-1}$$

$$\Leftrightarrow F(z)\left((z-1)(z-1)\right) = \frac{z}{z-1}$$

$$\Leftrightarrow F(z) = \frac{\frac{z}{z-1}}{(z-1)^2} = \frac{z}{z-1} \times \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^3}$$

En fait on a la somme de 2 signaux classiques :

$$n^2 U(n) - n U(n)$$