

Quantencomputer Verstehen

Ben Konrad Meyer Mike Springer
Kai Kawamura Julian Heidenreich

Modul: Verteilte Systeme

Dozent: Lutz Köhler

24. März 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Einführung in die Quanteninformatik	5
2.1	Quantenbits	5
2.2	Hadamard-Matrix	7
2.3	Quantenregister	9
2.4	Messen	12
3	Einführung in die Quanteninformatik 2	16
3.1	Drei Prinzipien des Quanten Computing	16
3.2	Verschränkung	16
3.3	Quantengatter & Quantenschaltkreise	18
3.4	Umkehrbare Berechnungen	20
3.5	Gestörte Berechnungen	21
3.6	Grenzen	21
3.6.1	NP-vollständige Probleme	22
3.6.2	Die perfekte Uhr	22
3.7	Zukunft	23
3.7.1	Quantum Machine Learning	23
3.7.2	Simulationen	24
4	No Cloning Theorem	25
4.1	Definition	25
4.2	Beweis	25
4.3	Folgen	26
4.3.1	Quantenkommunikation	26
4.3.2	Schutz der Quanteninformation	27
4.3.3	Design von Algorithmen	27
4.3.4	Speicherung von Quanteninformation	27
4.3.5	Messungen und Messgenauigkeit	28
5	Quantenteleportation	29
5.1	Einführung	29
5.2	Aufbau	29
5.3	Vorgang	29
5.3.1	Alices Bell Zustand Messung	30
5.3.2	Klassische Kommunikation	30
5.3.3	Bobs Quantenoperation	30
5.4	Mathematik	30
5.4.1	Verschränkung und Bell-Zustände	30
5.4.2	Der zu teleportierende Zustand	31
5.4.3	Verschränkung und Messung	31
5.5	Herausforderungen	32
5.5.1	Verschränkung Erzeugen und Erhalten	32
5.5.2	Klassische Kommunikation	32
5.5.3	Skalierbarkeit	33
5.5.4	Fehlerquellen und Messgenauigkeit	33

6	Quantenhardware	34
6.1	Dekohärenz	34
6.2	Universelle Quantencomputer	35
6.2.1	Supraleitende Qubits	36
6.2.2	Quantenpunkte	38
6.2.3	Topologische Quantencomputer	39
6.3	Quantum Error Correction	41
7	Theorien mit verborgenen Variablen und Bellsche Ungleichungen	46
7.1	Geschichte	46
7.1.1	ERP-Paradoxon	46
7.1.2	Reaktion von Niels Bohr	47
7.1.3	Bohmsche Mechanik	48
7.2	Bell's Inequality	50
7.2.1	Bell im Quantumcomputer	52
7.3	CHSH Game	53
7.3.1	Nonlocal Games	53
7.3.2	CHSH Definition	54
7.3.3	Taktiken für das CHSH Spiel	55
7.3.4	CHSH im Quantumcomputer	57
8	Schluss	59

1 Einleitung

Die Quanteninformatik ist ein schnell wachsendes Forschungsfeld.¹ Anders als klassische Computer, die auf Bits basieren und nur die Zustände 0 und 1 kennen, nutzt die Quanteninformatik sogenannte Quantenbits (Qubits), die in einer Superposition beide Zustände gleichzeitig annehmen können. Dies führt zu einer völlig neuen Art der Datenverarbeitung, die in vielen Bereichen eine deutlich höhere Effizienz verspricht und potenziell über die Fähigkeiten heutiger Computersysteme hinausgeht.

In den letzten Jahren wurde vielversprechende Forschung zu verschiedenen Aspekten der Quanteninformatik durchgeführt, wie der Implementierung von Quantenalgorithmen, der Nutzung von Verschränkung und der Fehlertoleranz in Quantencomputern. Diese Entwicklungen eröffnen neue Möglichkeiten unter anderem in Bereichen wie Kryptografie, Simulation chemischer Reaktionen und maschinelles Lernen.²

In dieser Arbeit werden wir die Grundlagen der Quanteninformatik erläutern und einige der wichtigsten Konzepte und Prinzipien vorstellen. Wir beginnen mit einer Einführung und erklären in welchen Bereichen sich ein Quantencomputer von einem klassischen Computer unterscheidet. Dazu gehören Quantenbits und die Superposition, sowie Quantenregister und die Funktion der Verschränkung. Außerdem werden wir die Bedeutung von Quantengattern und Quantenschaltkreisen erläutern und einen kurzen Umriss der uns jetzt schon bekannten Grenzen sowie zukünftiger Anwendungsgebiete geben. Nach den Grundlagen kommen wir zu weiterführenden Themen, wie dem No Cloning Theorem und der Quantenteleportation. Wie funktioniert die Quantenteleportation und was sind Herausforderungen? Zuletzt gehen wir auf die Umsetzung von Quantencomputern ein. Hierbei liegt der Fokus auf den verschiedenen Methoden zur Realisierung. Dies werden wir anhand des darauf folgenden Kapitels über die Implementierung von Quantencomputern vertiefen, indem wir uns mit der Bell-Ungleichung auseinandersetzen und diese mit einem Quantencomputer simulieren.

¹[Homeister, 2022, S. XII.]

²[Fraunhofer Cluster of Excellence Cognitive Internet Technologies, 2025]

2 Einführung in die Quanteninformatik

2.1 Quantenbits

Ein Quantenbit, im Folgenden auch Qubit genannt, ist das Medium und die kleinste Einheit, auf dem in der Quanteninformatik gerechnet wird. Auf die genaue physische Realisierung wird in einem späteren Abschnitt der Quantenhardware eingegangen. Bis dahin reicht es, das Quantenbit als eine Art Computer-Bit zu verstehen, das sich in einer sogenannten “Superposition” befindet. Im Zustand der Superposition kann es gleichzeitig den Wert ,0‘ und ,1‘ annehmen. Ein Quantenbit bleibt in dieser Superposition, bis es gemessen wird, woraufhin die Superposition zerstört wird und das Qubit einen der Zustände 0 oder 1 annimmt. Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Quantenbit in den einen oder anderen Zustand zerfällt, muss nicht gleich verteilt sein und kann beeinflusst werden. Dies macht Berechnungen auf Qubits erst möglich.

Mathematisch betrachtet, werden die Zustände ,0‘ und ,1‘ in der Quanteninformatik als Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 0$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 1$ dargestellt. Für die einfache Lesbarkeit werden diese Vektoren in der Quanteninformatik in der Bra-Ket-Notation dargestellt. Also $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |0\rangle$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |1\rangle$.

Um die Wahrscheinlichkeit zu beschreiben, welchen der beiden Werte ein Quantenbit nach der Messung annimmt, werden beiden Werten eine Amplitude α oder β zugeordnet. Demnach wird ein Quantenbit in einer beliebigen Superposition als $\alpha \cdot |0\rangle + \beta \cdot |1\rangle$ dargestellt. α und β sind komplexe Zahlen für die $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ gilt.

Ein Qubit, das nach der Messung mit gleicher Wahrscheinlichkeit in einen der beiden Zustände 0 und 1 zerfällt, würde folglich als $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |1\rangle$ oder $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ dargestellt werden. Dabei gilt $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und erfüllt die Bedingung $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = 1$.

Ein Vektor $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ wird als “Zustandsvektor” bezeichnet und stellt den Zustand der Superposition eines Qubits dar. Die Bedingung $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ sorgt dafür, dass der Zustandsvektor immer ein Einheitsvektor ist. Dadurch kann jeder Zustand eines Qubits auf dem Einheitskreis eines zweidimensionalen Vektorsystems dargestellt werden. Somit kann ein Quantenbit unendlich viele Zustände haben, die auf einen definierten Bereich abgebildet werden können.

Kommentar

Zu dem Zeitpunkt, als wir uns das Grundwissen erarbeitet haben, war uns nicht klar, weshalb α und β komplexe Zahlen sein müssten und warum sie „Amplituden“ und nicht „Wahrscheinlichkeiten“ oder Ähnliches genannt werden. Wir gingen davon aus, dass wir früher oder später auf einen Use Case stoßen würden, in denen komplexe Zahlen und Amplituden wichtig werden. Dies war allerdings nur für letztes bedingt der Fall. Um kurz vorzugreifen: Amplituden von zwei Qubits können miteinander summiert werden. Dadurch ist es möglich, dass sich manche Amplituden gegenseitig aufheben. Dies wäre mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die nicht negativ sein dürften, schwer darzustellen^a.

Warum α und β komplexe Zahlen sind, war schwer greifbar. Scheinbar hat dies mit der der Quanteninformatik zugrundeliegenden Quantenmechanik zu tun. Nach Recherchearbeit stellte sich heraus, dass eine Antwort auf diese Frage einiges an Vorwissen in der Physik bedurfte. Da wir uns diese Frage am Anfang des Lernprozesses stellten und noch dabei waren in den Konzepten der Quanteninformatik Fuß fassen, entschieden wir uns auf diese Frage zurück zu kommen, sobald komplexe Zahlen relevant werden würden. Da in der Quanteninformatik mit α und β allerdings gerechnet wird, als seien sie reelle Zahlen^b und nur für die Umstellung der Formeln die Rechenregeln für komplexe Zahlen genutzt werden^c, trat dieser Fall nie wirklich ein.

Während der Erstellung dieses Dokuments haben uns unsere erlangten Kenntnisse beim Verstehen der Quantenmechanik nicht sonderlich weiter helfen können, um eine zufriedenstellende Antwort zu formulieren. Da es sehr zeitaufwändig geworden wäre, sämtliche Begrifflichkeiten wie aus dem Kurs Skript von John D. Stack^d zu verstehen, nur um diese Frage zu klären, entscheiden wir uns dieser nicht weiter nachzugehen. Das, was wir uns zusammenreimen konnten, ist, dass der Zustand von Partikeln in der Quantenmechanik als Wellenfunktion dargestellt wird. Um mit diesen rechnen zu können, ist der Imaginärteil der komplexen Zahlen notwendig. Es wäre sicherlich hilfreich gewesen die quantenmechanischen Hintergründe zu verstehen, bevor wir uns mit der Quanteninformatik auseinander gesetzt haben, allerdings hätte dies den Rahmen unseres Themas deutlich gesprengt.

^a[Homeister, 2022]

^b[Urenda and Kreinovich, 2023]

^c[Homeister, 2022]

^d[Stack, 2013]

Um mit Quantenbits rechnen zu können, muss man den Zustand eines Quantenbits verändern können. Wie dies technisch umgesetzt wird, wird später angerissen. Aus mathematischer Sicht geschieht dies über unitäre 2×2 Matrizen.

Eine Matrix A ist dann unitär, wenn ihre inverse Matrix A^{-1} gleich ihrer adjungierten Matrix A^\dagger ist. Adjungiert ist eine Matrix A^\dagger dann, wenn die Matrix A komplex konjugiert – also jedes Element der Matrix $z_{ij} = a + ib$ zu $z_{ij}^* = a - ib$ komplex konjugiert – und die Matrix dann transponiert wird. Also muss für alle

Matrizen A gelten:

$$A^{-1} = (A^*)^T = A^\dagger \quad (1)$$

Für die Quanteninformatik reicht oft die Bedingung $A^{-1} = A^T$, da hier meist mit α und β gerechnet wird, als seien sie reelle Zahlen. Durch diese Bedingung haben unitäre Matrizen die Eigenschaft, dass ein Zustandsvektor unverändert bleibt, wenn eine unitäre Matrix zwei Mal mit ihm verrechnet wird.

Unitäre Transformationen sind also reversibel. Diese Bedingung ist notwendig, um die Länge der Zustandsvektoren beizubehalten.

Beispielhaft kann dies an einer Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2)$$

demonstriert werden. Wendet man diese Matrix auf ein Qubit im Zustand $|0\rangle$ an, transformiert sie es in den Zustand $\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$. Diese Transformation wird über eine Multiplikation beschrieben:

$$B|0\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Daraus ergibt sich: $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Die Bedingung $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ trifft für beide Zustandsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ zu. Zudem ist B unitär, da $B = B^T = B^{-1}$, und daher eine zulässige Transformation.

Wendet man die Transformation B erneut an, ergibt sich Folgendes:

$$B\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Der Ursprungszustand ist mit der zweiten Anwendung der Transformation wiederhergestellt. Dies ist eine der Grundprinzipien der Quanteninformatik.

2.2 Hadamard-Matrix

Eine unitäre Transformation, die im Laufe unseres Lernprozesses immer wieder vorgekommen ist, ist die sogenannte "Hadamard-Matrix":

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Multipliziert mit einem Qubit im Zustand $|0\rangle$ transformiert sie es in den Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ und mit einem im Zustand $|1\rangle$ multipliziert transformiert sie es in den Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$. Beide Folgezustände haben die gleiche Wahrscheinlichkeit bei der Messung einen der Zustände $|0\rangle$ oder $|1\rangle$ anzunehmen.

Kommentar

Beide Zustände, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ unterscheiden sich nur im Vorzeichen der β -Amplitude. Würde man die Amplituden als Wahrscheinlichkeiten darstellen (zum Beispiel als $0.5 \cdot |0\rangle + 0.5 \cdot |1\rangle$), ließe sich bei der erneuten Hadamard-Transformation nicht eindeutig feststellen, in welchem Zustand sich das Bit vor der ersten Transformation befunden hat. Da die Umkehrbarkeit der Transformationen eine der Grundprinzipien der Quanteninformatik ist, wäre eine Darstellung mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen auch ohne die zugrundeliegende quantenmechanische Notwendigkeit für Amplituden eher unpraktisch.

Mit dieser Gleichverteilung der Wahrscheinlichkeiten ließe sich beispielsweise ein Münzwurf simulieren. Der Schaltkreis eines Münzwurf Algorithmus sieht folgendermaßen aus³:

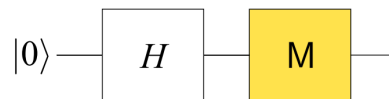


Abbildung 1: Schaltkreis für den Münzwurf Algorithmus

Schaltkreise eignen sich dafür Quantenalgorithmen zu veranschaulichen. Auf diese wird später genauer eingegangen.

Zuerst wird ein Quantenbit in den Zustand $|0\rangle$ gebracht. Man könnte es auch in den Zustand $|1\rangle$ versetzen. Das macht für diesen Algorithmus keinen Unterschied. Danach wendet man die Hadamard-Transformation darauf an, um das Quantenbit in eine Superposition zu bringen, in der die Wahrscheinlichkeit $|0\rangle$ oder $|1\rangle$ zu messen gleich verteilt ist. Anschließend wird gemessen und die Superposition zerfällt zufällig in einen der Zustände $|0\rangle$ oder $|1\rangle$.

Formal beschrieben sieht der Algorithmus so aus:

$$\begin{aligned} |x\rangle &\leftarrow |0\rangle \\ |x\rangle &\leftarrow H |x\rangle \\ \text{Miss } |x\rangle \end{aligned}$$

„ $|x\rangle$ “ ist dabei die Bezeichnung des Quantenbits auf dem gerechnet wird.

Mit diesem Algorithmus ist es möglich echte Zufallszahlen zu generieren, da es physikalisch unmöglich ist vorauszusagen, in welchen Zustand die Superposition zerfallen wird. Dies steht im Gegensatz zu einem echten Münzwurf, bei dem man das Wurfresultat theoretisch berechnen könnte, wenn man sämtliche Variablen, wie z.B. Wurfhöhe, Drehmoment der Münze, Luftwiderstand, ect. kennen würde. Oder im Gegensatz zu einem herkömmlichen Computer, der nur Pseudozufallszahlen generieren kann.

³[Homeister, 2022, S. 27]

2.3 Quantenregister

Ein Quantenregister ist eine Aneinanderreihung mehrerer, voneinander unabhängiger Quantenbits. Diese werden benötigt, um Quantenschaltkreise zu realisieren, damit auf ihnen logische Operationen durchgeführt werden können.

Der Zustand eines Quantenregisters der Länge m wird als m -faches Tensorprodukt aller Zustände der einzelnen Quantenbits des Registers dargestellt. Ein Quantenregister R mit 2 Qubits $|x_0\rangle$ und $|x_1\rangle$ in beispielsweise den Basiszuständen $|x_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $|x_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ befindet sich im Zustand:

$$R = |x_0\rangle \otimes |x_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Alternativ würde man $R = |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle$ schreiben. Manchmal werden die Basiszustände zur Übersichtlichkeit auch in Dezimalform dargestellt. $|10\rangle$ wäre demnach $|2\rangle$.

Wie auch die einzelnen Qubits, kann sich das gesamte Quantenregister in einer Superposition befinden. Sind die Qubits aus dem obigen Beispiel in den Zuständen $|x_0\rangle = \beta_0 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle$ und $|x_1\rangle = \gamma_0 |0\rangle + \gamma_1 |1\rangle$ ist der Zustand des Quantenregisters

$$\begin{aligned} R = |x_0\rangle |x_1\rangle &= (\beta_0 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle) \cdot (\gamma_0 |0\rangle + \gamma_1 |1\rangle) \\ &= \beta_0 \gamma_0 |0\rangle |0\rangle + \beta_0 \gamma_1 |0\rangle |1\rangle + \beta_1 \gamma_0 |1\rangle |0\rangle + \beta_1 \gamma_1 |1\rangle |1\rangle \end{aligned} \quad (7)$$

Substituiert man $\beta_i \gamma_j = \alpha_{ij}$, ergibt sich der Zustand

$$R = \alpha_{00} |0\rangle |0\rangle + \alpha_{01} |0\rangle |1\rangle + \alpha_{10} |1\rangle |0\rangle + \alpha_{11} |1\rangle |1\rangle \quad (8)$$

Und kann als

$$R = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle \quad (9)$$

Oder

$$R = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle + \alpha_2 |2\rangle + \alpha_3 |3\rangle \quad (10)$$

geschrieben werden.

Da aus $|\beta_0|^2 + |\beta_1|^2 = 1$ und $|\gamma_0|^2 + |\gamma_1|^2 = 1$ sich $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1$ ergibt, bildet α die Amplitude für den jeweiligen Zustand $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ und $|11\rangle$.

Allgemeiner gefasst befindet sich ein Quantenregister R der Länge n im Zustand

$$R = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i |i\rangle, \quad (11)$$

für den die Bedingung

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} |\alpha_i|^2 = 1 \quad (12)$$

gilt. Dabei entspricht $i = 0, \dots, 2^n - 1$ der Dezimaldarstellung der Bits im Quantenregister und $|\alpha_i|^2$ der Wahrscheinlichkeit, dass sich das Register nach einer Messung im jeweiligen Zustand $|i\rangle$ befindet.

Es ist möglich Transformationen nicht nur auf einzelnen Quantenbits durchzuführen, sondern auch auf ganze Register. Um eine Transformation auf einem Register durchzuführen, muss zuerst ein n -faches Tensorprodukt der Transformationsmatrix mit sich selbst berechnet werden. n ist dabei die Länge des Registers. Da ein Tensorprodukt nur zwischen Matrizen derselben Größe berechnet werden kann, ist es nur möglich Transformationen auf 2^n langen Registern durchzuführen.

Die Transformationen A_1, \dots, A_{2^n} auf die Qubits $|x_1\rangle, \dots, |x_{2^n}\rangle$ mit jeweils A_i auf $|x_i\rangle$ entsprechen also der Transformation $A_1 \otimes \dots \otimes A_{2^n}$ auf das Register $|x_1, \dots, x_{2^n}\rangle$.

Möchte man die Hadamard-Transformation H auf ein Register $R = |00\rangle$ anwenden, müsste man zuerst die Hadamard-Transformation auf Registerebene

$$H \otimes H = H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

bilden. Daraus ergibt sich

$$H_2 R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

beziehungsweise

$$\frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \quad (15)$$

oder

$$\frac{1}{2} (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle). \quad (16)$$

Dabei bleibt die Bedingung

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} |\alpha_i|^2 = 1 \quad (17)$$

Mit $n = 2$ und $\alpha_i = \frac{1}{2} \forall i$ erfüllt. Die Wahrscheinlichkeit, dass jeder Basiszustand nach der Messung auftritt, ist gleichverteilt. Diese Berechnung kann genutzt werden, um echte Zufallszahlen zwischen 0 und 3 zu generieren. Formal beschrieben sieht der Algorithmus aus, wie folgt:

$$\begin{aligned} R &= |x_1 x_0\rangle \leftarrow |00\rangle \\ R &= H_2 R \\ \text{Miss } R \end{aligned}$$

Dieser Algorithmus kann auf eine beliebige Registergröße 2^n erweitert werden. Allerdings ist das Rechnen auf Registerebene bisher nur mathematisch sinnvoll.

Tatsächlich werden sämtliche Rechenschritte in lokalen unitären Transformationen durchgeführt. „Lokal“ heißt in diesem Fall, dass maximal drei Qubits an der Berechnung beteiligt sind, da es physikalisch einfacher ist Transformationen auf drei Qubits auszuführen als auf 2^n mit beliebig hohen n . Zudem sind mindestens drei Qubits notwendig, um klassische Rechenverfahren in Quantenalgorithmen zu überführen. Dies wird später aufgegriffen.

In den beiden Münzwurf-Beispielen wurde die Hadamard-Transformation nur auf Quantenbits oder -register angewendet, bei denen sich alle Bits im Zustand $|0\rangle$ befunden haben. Ein n langes Quantenregister R , dessen Bits sich alle im Zustand $|0\rangle$ befunden haben und auf das die Hadamard-Transformation angewandt wurde, kann wie folgt dargestellt werden:

$$R = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} |i\rangle \quad (18)$$

Diese Darstellung reicht allerdings nicht aus, um Quantenregister abzubilden, dessen Quantenbits sich vor der Hadamard-Transformation teilweise im Zustand $|1\rangle$ befunden haben. Wendet man die Hadamard-Transformation auf ein Register $|xy\rangle$ an, das sich im Zustand $|01\rangle$ befindet, sähe das Quantenregister vor dem Ausmultiplizieren wie folgt aus:

$$|01\rangle \xrightarrow{H_2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (19)$$

Man kann an dieser Stelle die Information, ob sich die jeweiligen Quantenbits vorher im Zustand $|0\rangle$ oder $|1\rangle$ befunden haben, in das Vorzeichen ziehen:

$$|xy\rangle \xrightarrow{H_2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^x |1\rangle) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^y |1\rangle). \quad (20)$$

Ausmultipliziert ergibt dies:

$$\frac{1}{2} \left(|00\rangle + (-1)^x |01\rangle + (-1)^y |10\rangle + (-1)^{x \oplus y} |11\rangle \right). \quad (21)$$

Allgemeiner gefasst:

$$\frac{1}{2} \left((-1)^{(0,0) \oplus z} |00\rangle + (-1)^{(0,1) \oplus z} |01\rangle + (-1)^{(1,0) \oplus z} |10\rangle + (-1)^{(1,1) \oplus z} |11\rangle \right), \quad (22)$$

mit $z = (x, y)^T$.

Anhand der letzten Darstellung kann man ein Quantenregister der Länge n im Zustand $x \in \{0, 1\}^n$, auf das die Hadamard-Transformation angewandt wurde, wie folgt darstellen:

$$H_n |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y \in \{0,1\}^n} (-1)^{x \cdot y} |y\rangle. \quad (23)$$

Dabei ist $x \cdot y$ das Skalarprodukt $\oplus_{i=1}^n x_i y_i$ der Vektoren $x, y \in \{0, 1\}^n$.

Auch die Hadamard-Transformation ist reversibel. Nehmen wir das vorherige Beispiel:

$$|01\rangle \xrightarrow{H_2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (24)$$

Wendet man die Hadamard-Transformation erneut an, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\
 & \xrightarrow{H_2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) - \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right) \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |0\rangle) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |1\rangle) \right) \\
 & = \frac{1}{2}(|0\rangle + |0\rangle) \cdot \frac{1}{2}(|1\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{4}(|01\rangle + |01\rangle + |01\rangle + |01\rangle) = |01\rangle.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Die Reversibilität der Hadamard-Transformation ist für komplexere Algorithmen von Bedeutung. Bevor auf diese und deren Darstellung in Form von Quantenschaltkreisen eingegangen werden kann, muss noch der Vorgang des Messens genauer beschrieben werden.

2.4 Messen

Die Messung „Miss $|x\rangle$ “ ist die einzige Transformation in der Quanteninformatik, die nicht reversibel, beziehungsweise unitär ist. Beim Messen verliert ein Quantenbit seine Superposition und fällt zufällig, je nach Wahrscheinlichkeitsverteilung, in einen der Basiszustände, in deren Kontext gemessen wurde. Aus diesen Zuständen ist nicht zu errechnen, in welchem Zustand sich das Quantenbit vor der Messung befunden hat.

Bisher wurde davon ausgegangen, dass ein Quantenbit nur in die Zustände $|0\rangle$ oder $|1\rangle$ zerfallen kann. Dies geschieht allerdings nur dann, wenn $|0\rangle$ und $|1\rangle$ die Basis der Messung bilden. Genauer gesagt, wenn diese die Basis bilden, in deren Vektorraum der Zustand des Quantenbits abgebildet wird. In der Quanteninformatik müssen diese Basen die Eigenschaften der Orthonormalbasen erfüllen. Die Basis zur Abbildung eines Quantenbits $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ erfüllt diese Voraussetzungen. Diese wird Standardbasis genannt. Die Basis zur Abbildung eines Registers mit zwei Quantenbits $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ erfüllt diese Bedingung ebenfalls. Diese wird schließlich aus dem einfachen Tensorprodukt der Standardbasis mit sich selbst gebildet. Misst man als Beispiel das Register mit zwei Quantenbits, zerfällt der Zustand des Registers in einen der zugehörigen Basiszustände und man erhält ein Messergebnis. Mathematisch ausgedrückt bestimmen beim Messen des 2 Bit-Quantenregisters „die Projektionen auf die eindimensionalen Unterräume

$$Span\{|00\rangle\}, Span\{|01\rangle\}, Span\{|10\rangle\} \text{ und } Span\{|11\rangle\}$$

das Ergebnis.“⁴

Diese oben genannte Folge von Unterräumen, die aus der disjunkten Zerlegung der Orthonormalbasis: $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, entstehen, nennt man „Observable“. Diese Unterräume enthalten jeweils einen Basisvektor, der jeweils einen der Zustände bildet, der nach dem vollständigen Messen des Registers *beobachtet* werden kann.

Zwei zusätzliche Dinge sind beim Messen möglich. Man kann zum einen nur einzelne Bits messen, statt des gesamten Registers. Zum anderen kann man

⁴[Homeister, 2022, S. 47]

zum Messen eine andere Basis verwenden, als zum Projektieren des Zustandes in einen Vektorraum verwendet wird.

Das Messen einzelner Bits in einem Register ist in manchen Algorithmen wichtig, um anhand eines Zwischenergebnisses zu bestimmen, welche Folgetransformationen durchgeführt werden müssen. Quantenteleportation ist ein Beispiel dafür. Auch dazu später mehr.

Misst man in einem Register mit zwei Bits im Zustand $|\phi\rangle$ beispielsweise nur das erste Bit, bestimmen die Projektionen

$$\text{Span}\{|00\rangle |01\rangle\} \text{ und } \text{Span}\{|10\rangle |11\rangle\}$$

das Ergebnis. In dem Fall geht das Register “mit der Wahrscheinlichkeit

$$|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$$

in den Zustand

$$|\phi'\rangle = \frac{\alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}$$

über und mit Wahrscheinlichkeit

$$|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2$$

in den Zustand

$$|\phi'\rangle = \frac{\alpha_{10} |00\rangle + \alpha_{11} |01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2}}.$$

Wir erfahren bei der Messung nur den Wert des gemessenen Bits, nicht die Amplituden des Folgezustandes.”⁵

Das Messen in einer anderen Basis, als der, die zur Projektion in einen Vektorraum genutzt wird, kann genutzt werden, um die Superposition des Quantenbits nach der Messung nicht vollständig zu zerstören. Misst man ein Quantenbit in der Basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ mit $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ und $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ erhält man als Ergebnis entweder den Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ oder $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$. Dies ist immer noch eine Superposition. Daher kann nach der Messung mit dem Quantenbit noch weiter gerechnet werden. Allerdings ist es auch hierbei nicht möglich den Zustand zu ermitteln, in dem sich das Bit vor der Messung befunden hat. Die Messung bleibt irreversibel. Die Basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ wird “Hadamard-Basis” genannt.

⁵[Homeister, 2022, S. 47]

Zur Veranschaulichung kann die folgende Abbildung dienen⁶:

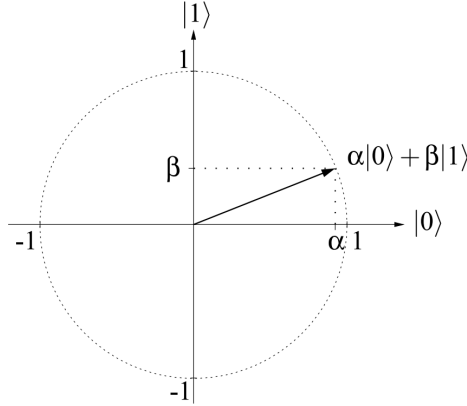


Abbildung 2: Zustandsvektor in der Standardbasis

Es wird ein Zustandsvektor in der Standardbasis dargestellt. Die Länge der Projektionen des Zustandsvektors auf den beiden Achsen bestimmen die Wahrscheinlichkeit, mit der, nach der Messung, einer der Zustände eingenommen wird. Mit der Wahrscheinlichkeit $|\alpha|^2$ wird der Zustand nach der Messung $|0\rangle$ sein und mit der Wahrscheinlichkeit $|\beta|^2$ $|1\rangle$.

In der folgenden Abbildung wird derselbe Zustandsvektor gezeigt, mit dem Unterschied, dass die Koordinatenachsen nach der Hadamard-Basis ausgerichtet sind⁷.

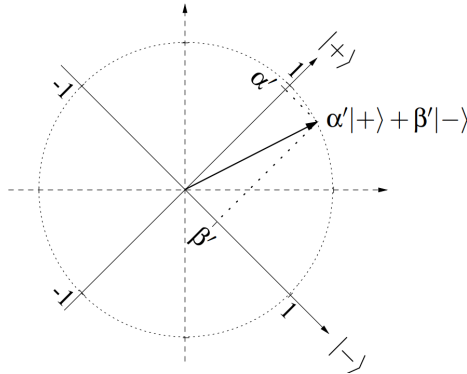


Abbildung 3: Zustandsvektor in der Hadamard-Basis

Die Projektionen der Achsen haben sich im Vergleich zur Projektion auf die Standardbasis verändert. Mit der Wahrscheinlichkeit $|\alpha'|^2$ wird nach dem Messen der Zustand $|+\rangle$ angenommen und mit der Wahrscheinlichkeit $|\beta'|^2$ $|-\rangle$.

Mathematisch sieht diese "Basistransformation" aus wie folgt:

$$\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle = \alpha' \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) + \beta' \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle). \quad (26)$$

⁶[Homeister, 2022, S. 44]

⁷[Homeister, 2022, S. 45]

Allgemeiner lässt sich zusammenfassen: “Register R bestehe aus n Quantenbits und befinde sich im Zustand

$$|\phi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i |i\rangle$$

Wir messen bezüglich der Basis $|0'\rangle, |1'\rangle, \dots, |(2^n - 1)'\rangle$ aus zueinander orthogonalen Vektoren der Länge 1.”⁸ Dies ist eine andere Basis, als die in der sich $|\phi\rangle$ befindet. “Dabei wird die Superposition von $|\phi\rangle$ zerstört. Hat $|\phi\rangle$ bezüglich der Messbasis die Darstellung

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha'_i |i'\rangle,$$

so finden wir das Register nach der Messung mit Wahrscheinlichkeit $|\alpha'_i|^2$ im Zustand $|i'\rangle$ vor. Sämtliche anderen Informationen gehen dabei verloren.”⁹

Das Messen einzelner Bits oder ganzer Register, sowie das Messen von Teilen eines Registers in der Standardbasis oder auch in einer anderen umfasst alles, was beim Messen möglich ist.

⁸[Homeister, 2022, S. 46]

⁹[Homeister, 2022, S. 46]

3 Einführung in die Quanteninformatik 2

3.1 Drei Prinzipien des Quanten Computing

Zusammenfassend lässt sich Quanten Computing auf drei wesentliche Prinzipien herunterbrechen.

Prinzip 1 - Das Quantenregister: Ein Quantenregister, das aus n -Qubits besteht, wird durch einen 2^n -dimensionalen Vektorraum über komplexen Zahlen beschrieben. Der Zustand eines solchen Registers ist eine Überlagerung (Superposition) aller möglichen Basiszustände. Das bedeutet, dass das Register eine Kombination vieler möglicher Werte gleichzeitig annehmen kann. Diese Fähigkeit der Superposition ist eine der Hauptstärken von Quantencomputern, da sie es ermöglichen, mehrere Berechnungen parallel durchzuführen.

Prinzip 2 - Rechenschritte: Rechenschritte in einem Quantencomputer basieren auf unitären Transformationen. Diese Transformationen sind umkehrbar, was bedeutet, dass die Berechnung ohne Informationsverlust rückgängig gemacht werden kann. Jede Operation kann lokal beschrieben werden, wobei nur zwei Qubits gleichzeitig beteiligt sind.

Diese Reversibilität der Rechenschritte stellt einen fundamentalen Unterschied zu klassischen Computern dar, bei denen Informationen während der Berechnung verloren gehen können.

Prinzip 3 - Messungen: Misst man den Zustand eines Quantenregisters, so erhält man als Ergebnis einen der Basiszustände mit einer Wahrscheinlichkeit, die aus der Amplitude dieses Zustands abgeleitet werden kann.

Die Messung verändert den Zustand des Systems auf den gemessenen Wert, so dass die ursprüngliche Superposition zerstört wird.

In diesen Prinzipien unterscheidet sich das Quanten Computing wesentlich von klassischen Computern.

3.2 Verschränkung

Eine der interessantesten Eigenschaften von Quantenregistern ist die Verschränkung. Bei der Verschränkung teilen sich zwei Qubits denselben Zustand. Das heißt, messen wir den Zustand von Qubit 1, wissen wir auch sofort den Zustand von Qubit 2, ohne dieses gemessen zu haben. Und was das Ganze noch faszinierender macht: Selbst über große Entfernungen zwischen den verschränkten Qubits bleibt die Eigenschaft der Verschränkung erhalten. Dies bildet auch die Grundlage für die Quanten-Teleportation, auf die wir später noch zurückkommen.

Kommentar

Die Verschränkung war mir bisher ein unbekanntes Konzept, welches sich nur sehr schwer greifen lässt. Dementsprechend schwierig war es auch, die Verschränkung zu verstehen und in eigenen Worten zu erklären. Besonders, dass diese unabhängig von der räumlichen Entfernung der Qubits erhalten bleibt.

Dazu half mir ein kleines Beispiel: Stellen wir uns zwei Würfel vor, einen roten Würfel und einen blauen Würfel. Der blaue Würfel zeigt immer dieselbe Augenzahl wie der Rote. Wenn wir nun mit dem Roten würfeln und dieser eine 6 zeigt, wissen wir auch, dass der Blaue eine 6 zeigt, ohne diesen gewürfelt zu haben. Und das unabhängig davon, wie weit die beiden Würfel voneinander entfernt sind.

Wie erzeugen wir eine solche Verschränkung? Dazu betrachten wir exemplarisch ein Zwei-Bit-Register $|b_1 b_2\rangle$ im Zustand $|00\rangle$. Wir wenden auf das erste Bit die Hadamard-Transformation an und anschließend auf beide Bits die Operation CNOT.

$$CNOT : |x, y\rangle \rightarrow |x, y \oplus x\rangle \quad (27)$$

Das ergibt:

$$|00\rangle \xrightarrow{H \otimes I_2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) \quad (28)$$

$$\xrightarrow{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (29)$$

Wenn wir nun das erste Bit messen, kommt mit einer Wahrscheinlichkeit 50% das Ergebnis $|0\rangle$ mit dem Folgezustand $|00\rangle$ und mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% das Ergebnis $|1\rangle$ mit dem Folgezustand $|11\rangle$ heraus. Wir wissen also nach der ersten Messung schon, bevor wir das zweite Qubit überhaupt gemessen haben, wie der Endzustand des Quantenregisters ist. Und wie bereits zuvor erwähnt, bleibt diese Eigenschaft bei räumlicher Trennung der Qubits erhalten. Hierbei ist auch zu erwähnen, dass es egal ist, welches der Qubits zuerst gemessen wird oder ob diese überhaupt gleichzeitig gemessen werden.¹⁰

Sei $|\phi\rangle$ der Zustand eines Quantenregisters aus n Bits. Der Zustand $|\phi\rangle$ heißt *unverschränkt*, wenn er das Produkt von Zuständen der einzelnen Bits ist:

$$|\phi\rangle = |\phi_{n-1}\rangle \otimes |\phi_{n-2}\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_0\rangle.$$

Ein Zustand heißt *verschränkt*, wenn es keine solche Zerlegung gibt.

Abbildung 4: Definition Verschränkung

¹⁰[Homeister, 2022, S. 76]

Diesen Zustand nennt man auch Bell-Zustand. Es gibt insgesamt 4 solcher Bell-Zustände. Diese beschreiben verschränkte Bits mit einer starken Kopplung (maximal verschränkt).

Daraus resultierend gibt es auch Verschränkungen mit einer weniger starken Kopplung. Ein solcher Zustand könnte beispielsweise so aussehen:

$$|\phi\rangle = 0.9 |00\rangle + 0.1 |11\rangle \quad (30)$$

Hier sind die Qubits auch wieder miteinander verschränkt, allerdings sind die Wahrscheinlichkeiten für die Messergebnisse ungleich verteilt. Das heißt, wir bekommen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%, also sehr sicher, den Zustand $|00\rangle$ und nur mit 10% den Zustand $|11\rangle$, also unsicher. Diese weniger stark gekoppelten Qubits kommen in der Praxis häufiger vor, etwa durch äußere Einflüsse wie Rauschen oder Dekohärenz auf ehemals maximal verschränkte Qubits. Das geht mit Leistungseinbußen einher, weshalb versucht wird, den Zustand der maximalen Verschränkung möglichst lange zu erhalten.

3.3 Quantengatter & Quantenschaltkreise

„Klassische Schaltkreise bestehen aus Leitungen und Gattern. Ganz analog bestehen Quantenschaltkreise aus Quantenleitungen und Quantengattern. Jede Quantenleitung entspricht einem Quantenbit und ein Quantengatter führt eine unitäre Transformation aus.“¹¹

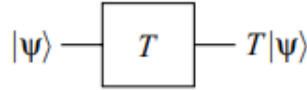


Abbildung 5: Quantenschaltkreis

Wenn wir eine Berechnung mit mehreren Qubits ausführen, ergibt sich der Endzustand $|x, y, z\rangle$ aus dem Tensorprodukt der einzelnen Gatter¹²:

$$(I_2 \otimes W \otimes I_2)(U \otimes V) |x, y, z\rangle \quad (31)$$

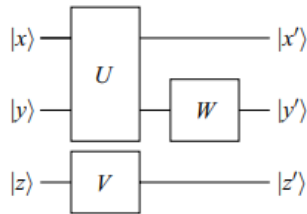


Abbildung 6: Quantenschaltkreis mit Tensorprodukt

¹¹[Homeister, 2022, S. 76]

¹²[Homeister, 2022, S. 76]

Da bei Quantenschaltkreisen die Umkehrbarkeit der Berechnungen garantiert werden muss, ist die Summe der Eingabe-Qubits gleich der Summe der Ausgabe-Qubits und pro Gatter dürfen höchstens 3 Qubits einbezogen werden. Um dies zu gewährleisten, nutzen wir das Toffoli-Gatter, welches im nächsten Kapitel erläutert wird. Außerdem können Qubits nicht kopiert werden, deshalb dürfen sich die Quantenleitungen nicht verzweigen und das Ergebnis eines Gatters nicht mehrfach verwendet werden. Auf den Grund dafür kommen wir später nochmal zurück.

Eine der wichtigsten Operationen in der Quanteninformatik ist die Negation, genauer die kontrollierte Negation CNOT. Dieses Gatter wird für alle Quantenoperationen benötigt, so zum Beispiel bei der Verschränkung. Darstellen lässt es sich wie folgt:

$$CNOT : |x, y\rangle \rightarrow |x, y \oplus x\rangle \quad (32)$$

oder als Matrix:

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Dieses CNOT-Gatter negiert nur dann das zweite Qubit, wenn das erste Qubit im Zustand $|1\rangle$ ist.

Weitere wichtige Operationen sind die Hadamard-Transformation, die wir bereits kennen, sowie die Pauli-Matrizen. Die Pauli-Matrizen negieren ebenfalls, mithilfe einer unitären Transformation auf einem Bit. Die bekannteste ist der „Bitflip“ X :¹³

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Die zwei weiteren Pauli-Matrizen sind der „Phasenflip“ Z :

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

und der „Y-Flip“ Y :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

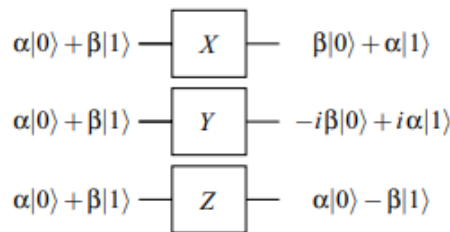


Abbildung 7: Pauli-Matrizen

¹³[Homeister, 2022, S. 79]

Durch die Kombination dieser drei Gatter CNOT, Hadamard-Transformation, sowie Pauli-Matrizen lassen sich alle Quantenberechnungen abbilden. Sie bilden die grundlegendsten Rechenoperationen eines Quantencomputers. Mit einem wesentlichen Unterschied zu logischen Gattern: Bei diesen lässt sich der Endzustand nicht unbedingt wieder in den Anfangszustand überführen. Bei Quantengattern ist dies eine zwingende Voraussetzung, sie müssen umkehrbar sein.

3.4 Umkehrbare Berechnungen

Wie bereits zuvor erwähnt, muss jede Rechenoperation eines Quantencomputers umkehrbar sein. Es dürfen also keine Informationen gelöscht werden, wie es beispielsweise bei der Anwendung einer logischen AND-Operation passiert: aus zwei Eingabewerten wird ein Ausgabewert kombiniert. So folgt aus $1 \text{ AND } 0 = 0$, jedoch ebenfalls aus $0 \text{ AND } 0 = 0$. Sehen wir den Endzustand 0, wissen wir also nicht, welchen Zustand die beiden Bits zu Beginn hatten. Das bedeutet, wir können Quantenrechenprozesse nicht auf dieselbe Art verarbeiten wie klassische Rechenprozesse.

Allerdings kann jede klassische Operation in eine umkehrbare Operation umgewandelt werden. Veranschaulichen wir uns dies anhand des Toffoli-Gatters.

Das Toffoli-Gatter ist ein universelles, umkehrbares Gatter, welches AND, OR und NOT Operationen ersetzen kann. Es besteht aus drei Eingabebits a , b , c und drei Ausgabebits a , b und $c \oplus (a \wedge b)$:¹⁴

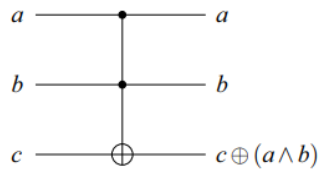


Abbildung 8: Toffoli-Gatter

Exemplarisch für AND: Wollen wir zum Beispiel ein Bit negieren, mit der Eingabe $(a, b, c) = (1, 1, 0)$. Dann ergibt die Rechnung über das Toffoli-Gatter $(1, 1, 1)$, denn $(1 \wedge 1) \oplus 0 = 1$. Hier ist nun auch zu sehen, dass die Berechnung umkehrbar ist, wenn wir die Schritte einmal rückwärts gehen. Dies ist genauso für die anderen Operatoren möglich, bedarf gegebenenfalls nur Umformung und den Einsatz mehrerer Toffoli-Gatter.

Auf diese Weise können wir jede klassische Rechenoperation umkehrbar gestalten, sodass diese auch für unsere Quantenschaltkreise nutzbar sind.

¹⁴[Homeister, 2022, S. 87]

3.5 Gestörte Berechnungen

Wie wir bisher sehen konnten, scheint alles, was wir mit klassischen Computern berechnen, genauso effizient mit Quantencomputern berechenbar. Warum also steht nicht bei jedem ein Quantenrechner zu Hause (wenn wir die Kosten mal außen vor lassen)?

Einer der Gründe dafür ist die Fehleranfälligkeit. Während klassische Bits die Zustände 0 oder 1 abbilden, können Quantenbits bis zur Messung $|0\rangle$ oder $|1\rangle$ oder beide Zustände gleichzeitig annehmen. Verdeutlichen wir, was das in der Praxis bedeutet: Nehmen wir an, der Zustand 0 eines klassischen Bits wird durch 0V und der Zustand 1 durch 5V dargestellt. Nun kann es zu Spannungsschwankungen kommen und wir geben 4V statt 5V. Da wir aber keinen Zustand für 4V haben, aber nur 2 Zustände abbilden können, können wir auch sagen, der Zustand 0 wird durch eine Spannung $<2,5V$ abgebildet und der Zustand 1 durch $>2,5V$. So liefert der Rechner uns auch weiterhin ein zuverlässiges Ergebnis, trotz Störung.

Die ist allerdings nicht für Quantenbits möglich, da wir nicht nur diese zwei Zustände abbilden. Was bedeutet also hier eine Spannungsschwankung von 5V auf 4V? Das wissen wir nicht, da bis zur Messung der Zustand nicht feststeht, so können wir also auch kein zuverlässiges Ergebnis mehr liefern. So können selbst kleinste Störungen Quantenberechnungen verfälschen. Zu beachten ist, dass bei einem gestörten Quantengatter sich der Fehler nur addiert. Das heißt, der Fehler eines Gatters bleibt zwar in weiteren Berechnungen erhalten, jedoch wird er nicht größer.

Würden wir zum Beispiel ein Qubit durch 3 Quantengatter nacheinander umformen, wobei jedes dieser Gatter einen Fehler von 2% hinzufügt, so beträgt der Fehler des Endzustands 6%. Das heißt, bei 50 Quantengattern welche einen Fehler von 2% hinzufügen, beträgt der Fehler des Endzustands 100%. Wenn die Fehler nun aber exponentiell wachsen würden, hätten wir nach 3 Gattern einen Fehler von 8%, nach 50 Gattern (theoretisch) einen Fehler von $2^{50}\%$.

Um die Frage vom Beginn des Kapitels nochmal aufzunehmen: Einer der Gründe, weshalb nicht jeder einen Quantencomputer zu Hause stehen hat, ist die Fehleranfälligkeit der Berechnungen. Es bedarf großen Aufwands solche Fehler zu vermeiden und zu korrigieren.

3.6 Grenzen

Angenommen in 10 Jahren ist das Problem der Dekohärenz gelöst, werden Quanten Computer die Lösung aller mathematischen Probleme sein? Obwohl Quanten Computing noch mitten in der Entwicklung stecken, lässt sich jetzt schon absehen: Die Antwort darauf ist „Nein“.

3.6.1 NP-vollständige Probleme

Eine der zentralen Fragen der Komplexitätstheorie beschäftigt sich mit NP-vollständigen Problemen. Sie beschreibt Probleme, welche sich zwar leicht überprüfen lassen, doch algorithmisch mindestens eine exponentielle ($O(2^n)$), häufig sogar fakultative ($O(n!)$) Laufzeit haben. Und würde man für ein NP-vollständiges Problem eine Lösung finden, also ein Algorithmus mit polynomieller $O(n^x)$ Laufzeit, so könnten alle dieser Probleme darauf umgeformt und gelöst werden.

Doch selbst Quantencomputer scheinen keine Lösung für diese Probleme finden zu können. Das liegt daran, dass selbst Quantenalgorithmien, wie etwa der bekannte Shor-Algorithmus (zur Faktorisierung großer Zahlen), oder der Grover-Algorithmus (zur unstrukturierten Suche in Datenbanken), zwar eine deutliche Geschwindigkeitsverbesserung im Vergleich zu klassischen Algorithmen bieten, jedoch keine exponentielle Reduktion der Komplexität bei NP-vollständigen Problemen ermöglichen.¹⁵

Hier stoßen Quantencomputer also auf dieselben grundlegenden Herausforderungen wie klassische Computer.

Kommentar

Wir hatten zunächst überlegt, den Grover- oder Shor-Algorithmus genauer zu beleuchten, haben uns dann aber dagegen entschieden, da wir uns auf die Grundlagen des Quanten Computing konzentrieren und uns nicht in einem komplexen Algorithmus verlieren wollten.

Als wir mit dem Thema und der Recherche zur Quanteninformatik begonnen haben, war mir nicht bewusst, dass selbst Quantencomputer, welche noch in den Anfängen stecken und ein großes Potenzial bieten, schon jetzt an Grenzen stoßen, wie bei den NP-vollständigen Problemen. Es ist faszinierend zu sehen, dass selbst Quantencomputer, eine Technologie, die man sonst nur aus Sci-Fi Serien kennt, nicht alle mathematischen Probleme lösen kann.

3.6.2 Die perfekte Uhr

Ein weiteres Problem, auf welches Quantencomputer stoßen werden, ist die perfekte Zeitmessung, also die perfekte Uhr. Jede Uhr hat zwei fundamentale Eigenschaften: Präzision und Zeitauflösung. Die Zeitauflösung gibt an, wie klein die messbaren Zeitintervalle sind (also wie oft die Uhr tickt) und die Präzision gibt an, mit welcher Ungenauigkeit bei jedem Tick zu rechnen ist. Ein Forscherteam hat gezeigt, dass es unmöglich ist gleichzeitig die perfekte Präzision und die perfekte Zeitauflösung zu erreichen.

Warum ist das wichtig für das Quanten Computing? Aktuell haben Quantencomputer noch mit anderen Problemen, wie etwa der Dekohärenz oder Ungenauigkeiten bei den verwendeten Bauteilen zu kämpfen. Allerdings zeigen Rechnungen, dass man nicht mehr so weit davon entfernt ist, bis die physikalische

¹⁵[Homeister, 2022, S. 165]

Grenze der Zeitrechnung die nächste Limitation für Geschwindigkeit und Zuverlässigkeit darstellt.¹⁶

Kommentar

An der Stelle nur ein kleiner Ausblick auf die perfekte Uhr. Da ich bei meiner Recherche schnell in der Thermodynamik und Quantenmechanik gelandet bin und es ein umfangreiches physikalisches Wissen voraussetzt, vertiefe ich die perfekte Uhr nicht weiter.

3.7 Zukunft

Wie sieht die Zukunft des Quanten Computing aus? Was sind oder werden Anwendungsgebiete für diese Technologie sein?

3.7.1 Quantum Machine Learning

Künstliche Intelligenz oder auch Machine Learning sind zwei der Bereiche, in denen Quantencomputer eine große Rolle spielen könnten. So schreibt die Fraunhofer-Allianz Big Data und Künstliche Intelligenz: "Verfahren der künstlichen Intelligenz und des Machine Learnings lassen sich für Quantencomputer so anpassen, dass sie mehrere Lösungswege gleichzeitig beschreiten können. Damit können Quantencomputer große Datenbestände in einem einzigen Schritt verarbeiten, Muster in den Daten aufspüren, die klassische Computer nicht entdecken und auch auf unvollständigen oder unsicheren Daten verlässliche Ergebnisse liefern."¹⁷ Quantencomputer könnten also die Lernverfahren von KI deutlich beschleunigen und verbessern.

Dies birgt allerdings auch ein Risiko, dessen ist sich auch das Bundesamt für Sicherheit in der Informationstechnik bewusst und gab in Kooperation mit Capgemini und dem Fraunhofer-Institut für Intelligente Analyse- und Informationssysteme eine Studie in Auftrag, die Quantum Machine Learning (QML) im Kontext von IT-Sicherheit untersuchen soll.¹⁸ So hat QML beispielsweise großes Potenzial für die Malware und Spam Erkennung, sowie Kryptografie. Gleichzeitig weiß man jetzt schon, dass aktuelle Verschlüsselungsmethoden, wie RSA oder ECC, durch Quantencomputer gebrochen werden können. Daher wird bereits an quanten-resistenten Verschlüsselungsmethoden gearbeitet.¹⁹

¹⁶[TU Wien, 2023]

¹⁷[TU Wien, 2023]

¹⁸[BSI; Bauckhage, Christian, et al., 2022]

¹⁹[BSI, 2022]

Kommentar

Die Studie des BSI ist tatsächlich sehr interessant zu lesen. Sie ist zwar von 2022, aber gibt einen guten Überblick über die Möglichkeiten und Risiken von Quantum Machine Learning.

3.7.2 Simulationen

Die Simulation von chemischen Molekülen. Etwas bei dem selbst Supercomputer an ihre Grenzen stoßen. Erstaunlicherweise ist die detaillierte Simulation von etwas so Kleinem wie Molekülen eine der größten Herausforderungen für unsere modernen Computer. Hier könnten Quantencomputer Unterstützung leisten. So schreibt das Fraunhofer Cluster of Excellence Cognitive Internet Technologies: "Mithilfe der Simulation von Molekülen könnten in Zukunft beispielsweise gezielt Katalysatoren entwickelt werden, die chemische Produktionsverfahren effizienter machen. Chancen ähnlicher Größenordnung ergeben sich für die Pharmaindustrie. Auch Forschung zu den im Angesicht des Klimawandels besondere relevanten Batterien zählt zum Anwendungsbereich der Simulation."²⁰ Deshalb erforscht das deutsche Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) zusammen mit dem Fraunhofer-Institut für Werkstoffmechanik IWM unter Verwendung des IBM-Quantencomputers neue Wege des Materialdesigns.²¹

Neben den genannten Anwendungsgebiete wird außerdem ein Nutzer in der Logistik (optimaler Verteilung begrenzter Ressourcen), den Ingenieurwissenschaften und dem Finanzwesen (Risikoanalysen und Optimierung von Portfolios) gesehen.²²

²⁰[Fraunhofer Cluster of Excellence Cognitive Internet Technologies, 2025]

²¹[Fraunhofer IWM, 2025]

²²[Fraunhofer Cluster of Excellence Cognitive Internet Technologies, 2025]

4 No Cloning Theorem

Einer der faszinierendsten Aspekte der Quantenmechanik ist, dass es unmöglich ist einen beliebigen unbekannten Quantenzustand perfekt zu duplizieren. Dieses Konzept ist mit dem No-Cloning-Theorem beschrieben, einem grundlegenden Ergebnis der Quanteninformationstheorie. Das Theorem hat nicht nur tiefgreifende Auswirkungen auf die Quanteninformatik und die Quantenkommunikation, sondern auch für unser Verständnis der Natur der Information in Quantensystemen.

In der klassischen Physik ist die Vervielfältigung von Informationen einfach: Ein Kopiergerät kann ein Dokument vervielfältigen, ohne das Original zu verändern. In der Quantenmechanik wird dieser einfache Vorgang jedoch zu einer nicht trivialen und verbotenen Operation. Das No-Cloning-Theorem besagt, dass es keine universelle Quantenoperation gibt die eine identische Kopie eines beliebigen unbekannten Quantenzustands erzeugen kann.

In diesem Abschnitt werden wir das No-Cloning-Theorem aus verschiedenen Blickwinkeln betrachten, seinen Beweis diskutieren, seine Konsequenzen untersuchen und verstehen, wie es die Landschaft der Quantentechnologien prägt.

4.1 Definition

Das No-Cloning-Theorem besagt, dass es unmöglich ist, eine identische Kopie eines unbekannten Quantenzustands zu erzeugen. Mathematisch gesehen gibt es keinen unitären Operator U , der die folgende Bedingung erfüllt:

$$U(|\psi\rangle \otimes |e\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \quad (37)$$

wobei $|\psi\rangle$ ein beliebiger Quantenzustand und $|e\rangle$ in Hilfszustand ist, der überschrieben werden soll. Diese Gleichung drückt die Idee aus, dass, wenn wir den Operator U auf den Zustand $|\psi\rangle$ anwenden (kombiniert mit einem Hilfszustand), zwei Kopien des ursprünglichen Zustands entstehen sollten. Das Theorem sagt uns, dass es für beliebige $|\psi\rangle$ keinen solchen Operator geben kann, weil sich die Quanteninformation grundlegend von der klassischen Information unterscheidet.

4.2 Beweis

Als grundlegende Schlussfolgerung der Quantenmechanik gibt es mehrere Beweise für dieses Theorem. Ein solcher Beweis, ein Widerspruchsbeweis, der der Einfachheit halber gewählt wurde, kann wie folgt definiert werden.

Zuerst nehmen wir zwei beliebige Quantenzustände, $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$. Dann werden diese beiden Zustände mit dem Klon operator U geklont, den wir im vorigen Abschnitt definiert haben und von dem wir für unseren Widerspruchsbeweis nun annehmen, dass er existiert.

$$\begin{aligned} U(|\psi_1\rangle \otimes |e\rangle) &= |\psi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle \\ U(|\psi_2\rangle \otimes |e\rangle) &= |\psi_2\rangle \otimes |\psi_2\rangle \end{aligned} \quad (38)$$

Mit dieser Information haben wir jetzt zwei Möglichkeiten, das Skalarprodukt von $\langle U(\psi_1 \otimes e) | U(\psi_2 \otimes e) \rangle$ zu schreiben. Die eine verwendet das Ergebnis der

vorherigen Gleichung, während die andere die Tatsache nutzt, dass Quantenoperationen das Skalarprodukt ihrer Eingaben bewahren²³.

$$\begin{aligned}\langle U(\psi_1 \otimes e) \rangle U(\psi_2 \otimes e) &= \langle \psi_1 \otimes \psi_1 \rangle \psi_2 \otimes \psi_2 \\ \langle U(\psi_1 \otimes e) \rangle U(\psi_2 \otimes e) &= \langle \psi_1 \otimes e \rangle \psi_2 \otimes e\end{aligned}\tag{39}$$

Einfache Ersetzung führt dann zur folgenden Gleichung

$$\langle \psi_1 \otimes \psi_1 \rangle \psi_2 \otimes \psi_2 = \langle \psi_1 \otimes e \rangle \psi_2 \otimes e\tag{40}$$

Da Tensor und Skalarprodukte kompatibel sind²⁴ simplifiziert das weiter zu:

$$\langle \psi_1 \rangle \psi_2 \langle \psi_1 \rangle \psi_2 = \langle \psi_1 \rangle \psi_2 \langle e \rangle e\tag{41}$$

Und schließlich, weil für jeden Zustand $|e\rangle$ die Gleichung $\langle e \rangle e = 1$ gilt, kommen wir zu dieser Gleichung:

$$\langle \psi_1 \rangle \psi_2^2 = \langle \psi_1 \rangle \psi_2\tag{42}$$

Es sollte nun offensichtlich sein, dass diese Gleichung nur zwei Lösungen hat: $\langle \psi_1 \rangle \psi_2 = 1$ or $\langle \psi_1 \rangle \psi_2 = 0$. Die erste Lösung impliziert, dass $\psi_1 = \psi_2$, was für eine allgemeine Klon-Operation nicht hilfreich ist, erlaubt aber eine Operation, die Kopien eines bestimmten Zustands erzeugt. Das ist vor allem nützlich um Quantensysteme in einen bekannten Zustand zu initialisieren. Die zweite Lösung erlaubt zwar, dass sich ψ_1 und ψ_2 unterscheiden, und ist damit auf den ersten Blick vielversprechend, verlangt aber immer noch, dass die beiden Zustände orthogonal zueinander sind. Das ist zwar weniger restriktiv als die erste Lösung, erlaubt aber immer noch nur eine Operation, die eine bestimmte Klasse von Zuständen kopieren kann, von der alle Mitglieder zueinander orthogonal sind. Somit ist auch mit dieser Lösung keine allgemeine Klon-Operation möglich.

4.3 Folgen

Das No-Cloning-Theorem hat weitreichende Auswirkungen auf eine Reihe von Gebieten der Quantenmechanik und Quanteninformatik.

4.3.1 Quantenkommunikation

In der klassischen Informationstheorie ist das Kopieren von Daten eine zentrale Technik, um Information zu vervielfältigen und zu übertragen. Bei klassischen Bits kann man exakt den gleichen Wert duplizieren, indem man eine Kopie eines Bits erstellt. Im Gegensatz dazu verhindert das No-Cloning-Theorem das Erstellen von exakten Kopien von Quantenbits (Qubits).

Das bedeutet, dass im Bereich der Quantenkommunikation, insbesondere bei der Quantenkryptographie, ein Angreifer, der versucht die Quanteninformation abzufangen oder zu kopieren, in der Regel Fehler einführen wird, die entdeckt werden können. Dieses Prinzip bildet die Grundlage für Sicherheitsprotokolle wie Quantum Key Distribution (QKD), bei denen ein Abhörversuch die Übertragung zerstören würde und somit leicht zu erkennen ist.

²³[Segal, 1947]

²⁴[Segal, 1947]

4.3.2 Schutz der Quanteninformation

Da das No-Cloning-Theorem das exakte Kopieren eines unbekannten Zustands verbietet, wird auch die Quanteninformation von Natur aus gegen bestimmte Arten von Angriffen geschützt. In klassischen Computersystemen kann ein Angreifer beliebig viele Kopien von Information erstellen, um sie zu analysieren und gegebenenfalls zu entschlüsseln. In einem quantenmechanischen System jedoch kann ein Datenextraktionsversuch oder das Kopieren eines Zustands nicht ohne weiteres erfolgen, ohne dass der Versuch des Kopierens den Zustand verändert und die Quanteninformation damit entwertet wird.

Ein gutes Beispiel für diese Art von Sicherheit ist das BB84-Protokoll für Quantenkryptographie. Bei der Quantenverschlüsselung wird eine Nachricht durch verschränkte Quantenbits übertragen. Jeder Versuch, die Nachricht zu kopieren oder abzufangen, verändert den Zustand der Qubits und wird vom Empfänger erkannt.

4.3.3 Design von Algorithmen

Das No-Cloning-Theorem hat auch tiefgehende Auswirkungen auf das Quantencomputing. In klassischen Computern ist das Kopieren von Informationen eine grundlegende Technik, die in vielen Algorithmen und Protokollen verwendet wird. Quantencomputer hingegen können keine exakten Kopien eines Zustands herstellen, was bedeutet, dass traditionelle Techniken wie fehlerkorrigierende Codes, die in klassischen Computern üblich sind, in der Quantenwelt nicht direkt anwendbar sind.

Allerdings existieren spezielle Quantenfehlerkorrekturcodes, die darauf ausgelegt sind, Fehler zu korrigieren, die durch das Fehlen einer exakten Kopierbarkeit von Quanteninformation entstehen. Diese Codes erfordern jedoch eine zusätzliche Anzahl von Qubits und eine komplexe Fehlerkorrekturstrategie, was das Quantencomputing technisch anspruchsvoll macht. Trotzdem sind Quantenfehlerkorrekturmethode von entscheidender Bedeutung für die zukünftige Skalierbarkeit und Zuverlässigkeit von Quantencomputern und werden später in diesem Artikel genauer beschrieben[6.3].

Kommentar

Verschiedene Messmethoden Jeder Quantenalgorithmus ist auch grundsätzlich anders als ein klassischer Algorithmus, da Operationen anders implementiert werden müssen, auch wenn die Theorie des Algorithmus identisch zu einem klassischen Algorithmus ist. Dieser Aspekt wird hier allerdings nicht näher behandelt werden.

4.3.4 Speicherung von Quanteninformation

Das No-Cloning-Theorem hat weitreichende Konsequenzen für die Quanteninformationstheorie, insbesondere für die Konzepte der Informationsspeicherung und -übertragung. Die Unmöglichkeit des Klonens ist eng mit den grundlegenden Prinzipien der Quantenmechanik wie Überlagerung und Verschränkung

verknüpft. Sie hindert die Schaffung von perfekten Kopien von Quanteninformation und erfordert, dass Information auf neue, kreative Weise verarbeitet und gespeichert wird.

Ein interessantes Beispiel sind die Quantenlogikgatter, die in Quantencomputern verwendet werden. Diese Gatter müssen mit den Einschränkungen des No-Cloning-Theorems arbeiten und können keine klassischen, deterministischen Kopien erzeugen, sondern müssen die Quanteninformation in verschränkten oder überlagerten Zuständen manipulieren.

4.3.5 Messungen und Messgenauigkeit

In der Quantenmetrologie, die sich mit der präzisen Messung von quantenmechanischen Systemen beschäftigt, beeinflusst das No-Cloning-Theorem ebenfalls die Art und Weise, wie Messungen durchgeführt werden können. Da das exakte Kopieren von Zuständen nicht möglich ist, kann das Präzisionsmaß für Messungen nicht durch das Vervielfachen von Messinstrumenten oder durch das Erstellen von Kopien von Quantenobjekten verbessert werden. Stattdessen wird die Quantenmessung durch andere Techniken wie Quanteninterferometrie und den Einsatz von verschränkten Zuständen optimiert.

5 Quantenteleportation

5.1 Einführung

Quantenteleportation ist ein bahnbrechendes Phänomen, das die Übertragung von Quanteninformationen zwischen zwei entfernten Orten ermöglicht, ohne dass das Teilchen oder Objekt, das die Information trägt, physisch bewegt wird. Im Gegensatz zur theoretischen klassischen Teleportation, bei der es um den Transport von Materie oder Energie geht, konzentriert sich die Quantenteleportation auf die Übertragung von Quantenzuständen. Dieser Prozess nutzt die Prinzipien der Quantenmechanik, einschließlich Verschränkung, Superposition, und das No-Cloning-Theorem, um den Zustand eines Quantenobjekts (z.B. eines Photons oder eines Elektrons) von einem Ort zum anderen zu übertragen. Dabei spielt die Entfernung der Objekte keine Rolle.

Der Begriff “Quantenteleportation” kann etwas irreführend sein, da bei diesem Prozess keine eigentliche Materie teleportiert wird. Was stattdessen “teleportiert” wird, ist die Information über den Quantenzustand eines Teilchens. Der Schlüssel zur Quantenteleportation ist die Quantenverschränkung, ein Phänomen, bei dem zwei oder mehr Teilchen so miteinander korrelieren, dass der Zustand des einen Teilchens den Zustand des anderen augenblicklich beeinflusst, unabhängig davon, wie weit sie voneinander entfernt sind. Diese “gespenstische Fernwirkung”, wie Albert Einstein sie nannte, ermöglicht die Übertragung von Quanteninformation zwischen weit entfernten Parteien, ohne dass die oft fragilen Quantenzustände selbst transportiert werden müssen.

5.2 Aufbau

Es muss ein Quanten-Verschränkungspaar vorhanden sein. Dieses Paar muss sich im Bell-Zustand²⁵ befinden, um sicherzustellen, dass die Messung des einen den Zustand des anderen beeinflusst. Dieses Paar wird in der Regel durch einen Prozess wie spontane parametrische Abwärtsumwandlung²⁶ erzeugt. Derzeit werden dafür in der Regel einfache Photonen oder Ionen verwendet.

Außerdem müssen sich an den Endpunkten der Teleportation zwei Parteien befinden, im Folgenden Alice und Bob genannt, die beide in der Lage sind, mit Quantensystemen zu interagieren und Messungen vorzunehmen, was normalerweise einen Quantencomputer mit begrenzter Funktionalität bedeutet. Schließlich muss ein klassischer Kommunikationskanal zwischen Alice und Bob bestehen. Der Schlüssel für die Quantenteleportation ist hier, dass dieser Kanal nicht in der Lage sein muss, Quantenzustände zu transportieren - dafür ist die Teleportation gedacht -, sondern nur herkömmliche Bits.

5.3 Vorgang

Nachdem der Aufbau abgeschlossen ist, stellt sich nun die Frage, was tatsächlich getan werden muss, um die Quantenteleportation durchzuführen. Dies kann in mehrere Schritte aufgeteilt werden.

²⁵[Nielsen and Chuang, 2010]

²⁶[Couteau, 2018]

5.3.1 Alices Bell Zustand Messung

Der erste Schritt, den Alice durchführt, ist die Bell-State-Messung, die zwei wichtige Teilschritte umfasst.

Zunächst kombiniert Alice das Teilchen, das sie teleportieren möchte, mit ihrer Hälfte des verschränkten Paares. Dies geschieht in der Regel mithilfe eines Strahlenteilers oder eines Interferometers, um die beiden Teilchen in einen Superpositionszustand zu versetzen.

Zweitens misst Alice die beiden kombinierten Teilchen in der Bell-Basis, die die Teilchen aus ihren vier möglichen Zuständen in einen einzigen zusammenfallen lässt. Diese Messung ist entscheidend, denn sie bestimmt, wie Bob sein Teilchen anpassen muss, um den Zustand wiederherzustellen, den Alice teleportiert.

5.3.2 Klassische Kommunikation

Als Nächstes verwendet Alice ihren klassischen Kommunikationskanal, um ihre Messung an Bob zu senden. Dies erfordert die Übertragung von nur zwei Bits (den beobachteten Zustand des zu teleportierenden Qubits und den beobachteten Zustand des verschränkten Paares), was für keinen Kommunikationskanal ein Problem darstellen sollte. Diese geringe Bandbreitenanforderung in der klassischen Kommunikation macht in der Tat mehrere Kommunikationskanäle verfügbar, die normalerweise wegen ihrer geringen Bandbreite nicht infrage kämen, insbesondere wenn die Teleportation über große Entfernungen stattfinden soll. Diese Information reicht jedoch aus, um Bob zu instruieren, wie er sein eigenes System einstellen muss.

5.3.3 Bobs Quantenoperation

Nun, da Bob die klassische Messung erhalten hat, muss er eine oder beide (je nach Messung) der folgenden Methoden anwenden: Das Pauli-X-Gatter für einen Bit-Flip oder das Pauli-Z-Gatter für einen Phasen-Flip. Durch diese Operation wird sein Quantenzustand in denselben Zustand versetzt, den Alices Quantenteilchen hatten, bevor ihre Messung die Superposition kollabierte. Hier ist auch noch einmal darauf hinzuweisen, dass Bob den Zustand erst erstellt, nachdem Alice ihn mit der Messung bereits zerstört hat - wie das No-Cloning-Theorem besagt⁴ wird der Zustand nie kopiert, sondern nur übertragen.

Sobald Bob dies getan hat, ist die Quantenteleportation abgeschlossen.

5.4 Mathematik

5.4.1 Verschränkung und Bell-Zustände

Zu Beginn des Prozesses haben wir zwei Teilchen (Teilchen 2 und 3), die sich an den Orten A und B befinden. Diese Teilchen werden in einem verschränkten Zustand (Bell-Zustand) erzeugt. Ein Bell-Zustand ist eine der vier möglichen maximal verschränkten Zustände, die ein Paar von Quantenobjekten haben kann. Ein Beispiel für einen solchen Zustand ist:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \quad (43)$$

Dieser Zustand wird zwischen den beiden Teilchen 2 und 3 geteilt, wobei Teilchen 2 bei A und Teilchen 3 bei B ist.

5.4.2 Der zu teleportierende Zustand

Nun nehmen wir an, dass wir den Zustand eines dritten Teilchens (Teilchen 1) teleportieren möchten, das sich am Ort A befindet. Der Zustand des Teilchens 1 kann allgemein als:

$$|\psi\rangle_1 = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

ausgedrückt werden, wobei α und β komplexe Zahlen sind, die den Zustand beschreiben.

5.4.3 Verschränkung und Messung

Der gesamte Zustand des Systems (Teilchen 1, 2 und 3) kann als Produktzustand von Teilchen 1 und dem verschränkten Zustand von Teilchen 2 und 3 beschrieben werden:

$$|\Psi\rangle_{123} = |\psi\rangle_1 \otimes |\Phi^+\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1) \otimes (|00\rangle_{23} + |11\rangle_{23})$$

Durch Anwenden der Distributivität ergibt sich:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{123} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|0\rangle_1 \otimes (|00\rangle_{23} + |11\rangle_{23}) + \beta|1\rangle_1 \otimes (|00\rangle_{23} + |11\rangle_{23})) \\ |\Psi\rangle_{123} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|000\rangle_{123} + \alpha|011\rangle_{123} + \beta|100\rangle_{123} + \beta|111\rangle_{123}) \end{aligned}$$

Nun wird eine Bell-Zustandsmessung auf den Teilchen 1 und 2 durchgeführt, die den Zustand des Systems in einen der vier Bell-Zustände projiziert. Die Messung ist zufällig, und die Ergebnisse können durch die folgenden Zustände beschrieben werden:

$$|\Phi^+\rangle_{12}, |\Phi^-\rangle_{12}, |\Psi^+\rangle_{12}, |\Psi^-\rangle_{12}$$

Klassische Kommunikation und Zustandserstellung

Nachdem die Messung durchgeführt wurde, sendet der Ort A das Messresultat an Ort B über einen klassischen Kanal. Anhand der Nachricht kann Ort B den Zustand des Teilchens 3 (das ursprünglich am Ort B war) in den gewünschten Zustand $|\psi\rangle_1$ transformieren. Dazu wird eine der folgenden Operationen durchgeführt, abhängig von der Messung, die an Ort A durchgeführt wurde:

$$\begin{aligned}
|0\rangle_3 & \text{ (falls Messung das Ergebnis } |\Phi^+\rangle \text{ ergibt)} \\
X|0\rangle_3 & \text{ (falls Messung das Ergebnis } |\Phi^-\rangle \text{ ergibt)} \\
Z|0\rangle_3 & \text{ (falls Messung das Ergebnis } |\Psi^+\rangle \text{ ergibt)} \\
XZ|0\rangle_3 & \text{ (falls Messung das Ergebnis } |\Psi^-\rangle \text{ ergibt)}
\end{aligned}$$

Durch diese Operationen wird der Zustand des Teilchens 3 in den ursprünglichen Zustand von Teilchen 1 ($\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$) überführt.

5.5 Herausforderungen

Obwohl die Quantenteleportation ein vielversprechender Forschungszweig ist, gibt es noch einige Herausforderungen zu bewältigen.

5.5.1 Verschränkung Erzeugen und Erhalten

Eine der größten Herausforderungen ist die Erzeugung und Erhaltung eines verschränkten Systems zwischen dem Start- und Zielpunkt der Teleportation. Die Teleportation ist zwar theoretisch nicht durch Entfernung begrenzt, aber je größer die Entfernung zwischen den Orten, desto schwieriger ist es die verschränkten Teilchen aufzuteilen, ohne die Verschränkung zu beschädigen.

Ein Lösungsansatz sind hier Quantenrepeater: Spezialisierte Geräte, die die Entfernung zwischen direkt verschränkten Teilchen reduzieren, indem sie diese nur zwischen Repeater Stationen aufteilen müssen. In der Station werden dann mithilfe von Entanglement Swapping zwei Verbindungen des Repeaters verschränkt.

5.5.2 Klassische Kommunikation

Auch wenn die benötigte Bandbreite der klassischen Kommunikation minimal ist, muss trotzdem ein Kommunikationskanal existieren. Das hat zwei signifikante Nachteile: Zum einen ist die klassische Kommunikation auf die Lichtgeschwindigkeit begrenzt, was ein Geschwindigkeitslimit für die Teleportation erzeugt, auch wenn die "spukhafte Fernwirkung" der Quantenmechanik schneller passieren könnte²⁷. Zum anderen sind klassische Kommunikationskanäle anfällig für Observation - ein Angreifer kann zwar ohne das verschränkte Teilchen den Quantenzustand nicht reproduzieren, ist aber in der Lage festzustellen, dass die Kommunikation stattgefunden hat. Ebenfalls könnte der Angreifer auch die Kommunikation stören, was zwar bei geeigneten Protokollen den Teilnehmern offensichtlich ist, aber trotzdem eine Schwachstelle darstellt. Die einzige bekannte Lösung ist hier ein robustes klassisches Kommunikationssystem, was für andere Kommunikationszwecke bereits aufgebaut ist oder wird, aber leider die Lichtgeschwindigkeitslimitation nicht umgehen kann.

²⁷[Hensen et al., 2015]

5.5.3 Skalierbarkeit

Ein weiteres bedeutendes Problem der Quantenteleportation ist die Skalierbarkeit. Während die Quantenteleportation in kleinen, kontrollierten Systemen von einigen wenigen Qubits relativ einfach durchgeführt werden kann, stellt die Skalierung auf größere Netzwerke und damit nützliche Datenmengen und die Integration in reale Kommunikationssysteme eine enorme Herausforderung dar. Um Quantenteleportation praktisch nutzen zu können, würde es ein großflächiges System von Kommunikationskomponenten benötigen. Die Erstellung dieser bräuchte Quantentechnologien in einer Menge, die momentan weder technisch möglich noch finanziell tragbar ist, wenn man bestehende Preise hochrechnet.

Hier ist allerdings die Erwartung, dass weitere Forschung dieses Problem beheben wird. Es wird sowohl an günstigeren Methoden zur Erstellung von verschränkten Systemen und der Stabilisierung dieser, als auch an der Erstellung von Quantenkomponenten rege geforscht. Auch an Forschungsbudgets fehlt es hier nicht, da einige große Technologiefirmen wie Google und Microsoft an Quantentechnologie forschen.

5.5.4 Fehlerquellen und Messgenauigkeit

Die Messgenauigkeit ist entscheidend für die erfolgreiche Durchführung der Quantenteleportation. Eine fehlerhafte Messung der Bell-Zustände kann dazu führen, dass der teleportierte Zustand nicht korrekt wiederhergestellt werden kann. Fehlerquellen können in den Messinstrumenten, in der Kommunikation oder auch in der Quantenverschränkung selbst liegen.

Auch hier wird rege geforscht, da alle drei Aspekte nicht eigen zur Quantenteleportation sind, sondern nahezu alle Quantenoperationen betreffen.

6 Quantenhardware

Die Realisierung eines Quantencomputers ist durch hohe technische Herausforderungen geprägt. Um die besonderen Eigenschaften der Qubits eines Quantencomputers, wie Superposition und Verschränkung, nutzen zu können, müssen sie durch externe Einflüsse geschützt werden und die Dekohärenz minimiert werden. Äußere Einflüsse wie Temperaturschwankungen, elektromagnetische Felder oder Strahlung aller Art können die Qubits beeinflussen. Aus diesem Grund werden Quantencomputer bei extrem niedrigen Temperaturen und in einem Vakuum betrieben.

Außerdem ist nicht nur die Herstellung der Qubits eine Herausforderung, sondern auch die Steuerung, Auslesung und Korrektheit von physikalischen Qubits.

6.1 Dekohärenz

Dekohärenz ist ein zentrales Konzept, welches wichtig in der Entwicklung von Quantencomputern ist. Der Prozess der Dekohärenz beschreibt den Verlust der kohärenten Quanteneigenschaften eines Qubits durch Wechselwirkung mit der Umgebung. Diese Veränderung führt zu einem Übergang von quantenmechanischem Verhalten zu einem klassischem Verhalten von Bits.²⁸

In der Quantenmechanik können Systeme in Überlagerungszuständen existieren, wobei mehrere Zustände gleichzeitig eingenommen werden können. Diese Eigenschaft erklärt auch das Phänomen der Quanteninterferenz. Äußere Einflüsse durch die Umgebung kann eine Verschränkung von Qubits zerstören. Dies führt dazu, dass die Phasenbeziehungen zwischen den Qubits beeinflusst oder gar aufgehoben werden. Folgernd verliert das System die Interferenzeffekte und verhält sich zunehmend klassischer. Diese Zeit nennt man Dekohärenzzeit.

Die **Dekohärenzzeit** (T_2) eines Qubits misst die Länge der Zeit, in der es in der Lage bleibt kohärent zu bleiben, welcher danach von äußeren Einflüssen zerstört wird²⁹. Neben T_2 wird auch häufig die **Relaxationszeit** (T_1) gemessen, welche angibt, wie lange ein Qubit im angeregten Zustand bleibt, bevor es auf sein Grundzustand zurückfällt. In der Realität ist die Dekohärenzzeit jedoch in den meisten Fällen kürzer als die Relaxationszeit.

Berechnung der Dekohärenzzeit

Durch eine Messung der zeitlichen Abnahme der Kohärenz eines beispielhaften Qubits kann die Dekohärenzzeit eines Systems festgelegt werden. Bei einem Quantencomputer, der auf dem Spin eines Teilchen beruht, kann dies durch die **Spin-Echo-Methode** gemessen werden. Quantencomputer, die auf anderen Qubits basieren, haben äquivalente Methoden um die Kohärenz zu messen.

Das einfachste Modell zur Beschreibung der Dekohärenzzeit ist die **Exponentielle Abnahme der Kohärenz**

$$C(t) = C(0) * e^{-t/T_2} \quad (44)$$

²⁸[Breuer and Petruccione, 2007]

²⁹[Bacciagaluppi, 2020]

Dabei ist:

$C(t)$ Die Kohärenz des Qubits zum Zeitpunkt t

$C(0)$ Die initiale Kohärenz

T_2 Die Dekohärenzzeit

Indem man den Kohärenzverlust experimentell misst und die Werte in eine exponentielle Abklingfunktion einpasst, erhält man T_2 .

Kommentar

Die **Dekohärenzzeit** kann auch durch genauere, jedoch auch deutlich kompliziertere Weise errechnet werden. Bekannte Methoden hierfür wären zum Beispiel die Spektrale Analyse, Dynamische Entkopplung, Hahn-Echo und Ramsey-Interferometrie. Außerdem wird durch das häufige messen der Dekohärenzzeit diese indirekt verlängert. Diesen Effekt nennt man Quanten-Zeno-Effekt.

Zuletzt muss auch die Lindblad-Gleichung^a genannt werden, welche den Zeitverlauf der Dichtematrix in einem Offenen Quantensystem beschreibt.

$$\frac{dp}{dt} = -i[H, p] + \sum_i (L_i p L_i^\dagger - \frac{1}{2} \{L_i^\dagger L_i, p\}) \quad (45)$$

Diese Themen sprengen jedoch den Rahmen dieser Arbeit in Richtung Physik und werden deswegen nicht weiter behandelt.

^a[Bacciagaluppi, 2020]

6.2 Universelle Quantencomputer

Universelle Quantencomputer beruhen grundlegend auf einem Gatter Modell, wie bereits in diesem Artikel beschrieben. Im Folgenden werden drei der meist erforschten Methoden, welche dieses Modell physikalisch umsetzen, beschrieben.

Ein prominentes Beispiel für die Umsetzung eines universellen Quantencomputers ist der **Sycamore Chip**³⁰, welcher auf supraleitenden Qubits basiert. Dieser Chip ist in einem Gatter angeordnet für die Kommunikation zwischen Qubits und die Durchführung von Quantenoperationen.

³⁰[Arute et al., 2019]

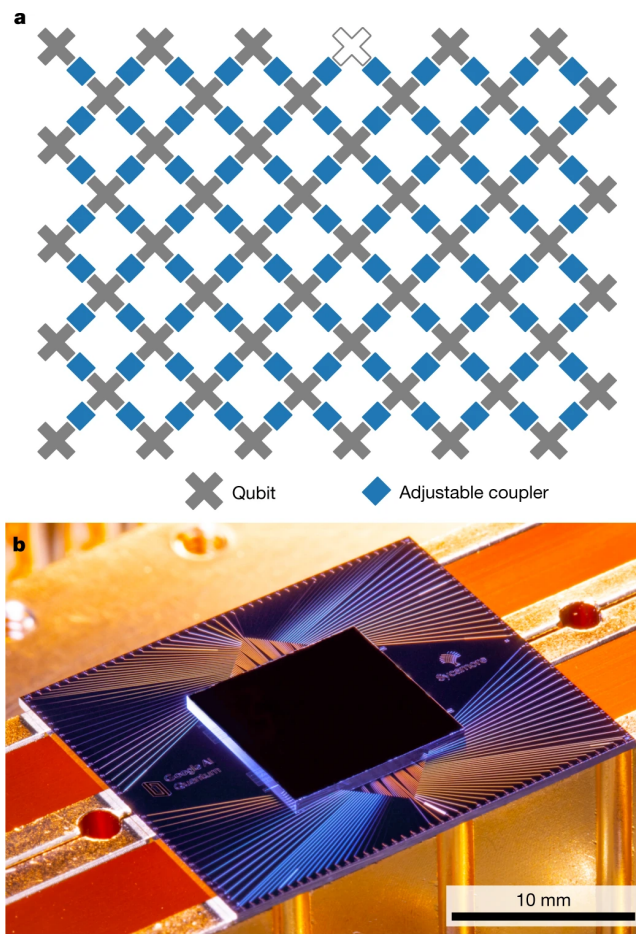


Abbildung 9: Sycamore Chip von Google [Arute et al., 2019]

6.2.1 Supraleitende Qubits

Quantencomputer mit Supraleitern funktionieren mit elektrischen Schaltkreisen, die bei Temperaturen nahe dem absoluten Nullpunkt betrieben werden. Solche Temperaturen sind nötig, um die supraleitende Eigenschaft aufrecht zu erhalten.

Zwei häufig benutzte Qubit-Typen dieser elektrischen Schaltkreise sind:

Transmon-Qubits, basieren auf der Ladung des Energieniveaus, welche durch eine Josephson-Junktion kontrolliert werden.

Flux-Qubits werden auch durch Josephson-Junktionen kontrolliert, beruhen jedoch auf dem magnetischen Fluss in der Schleife.

Beide Ansätze basieren auf dem **Josephson-Effekt**³¹, welcher auftritt, wenn ein supraleitender Strom durch eine dünne Isolierschicht zwischen zwei Supraleitern fließt.

Dieser Effekt hat zur Folge, dass eine nichtlineare Energie für die Phasenunter-

³¹[Kjaergaard et al., 2020]

scheidung der Qubits genutzt wird.

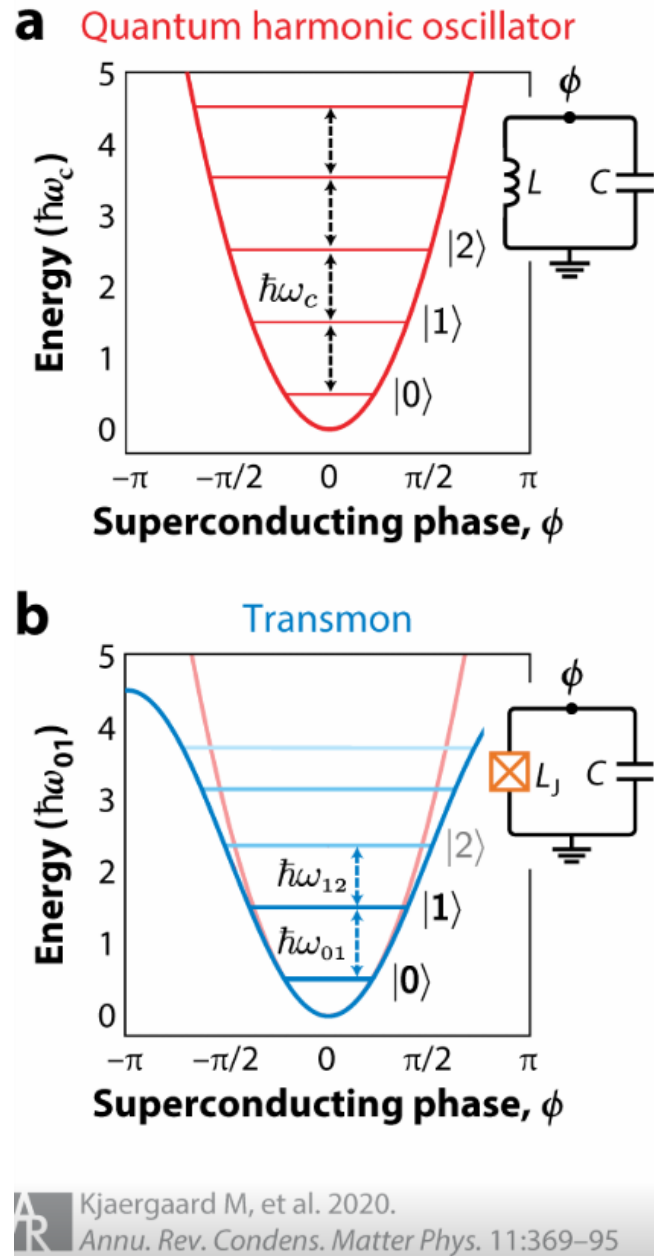


Abbildung 10: Josephson-Effekt mit einer Josephson Junktion [Kjaergaard et al., 2020]

In der vorliegenden Abbildung wird der Unterschied zwischen einer harmonischen Quantenschwankung (a) und der nichtlinearen Schwankung des Energieniveau der Josephson Junktion (b) abgebildet.

Der Phasenunterschied bei der harmonischen Oscillation, gekennzeichnet als $\hbar\omega_c$, ist identisch. Auf der Abbildung ist zu sehen, dass das Energieniveau der Phasen zwischen $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ und $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ identisch ist und dadurch nicht unterschieden werden kann zwischen welcher Phase gewechselt wurde.

Mit einer Josephson Junction kann jedoch eine nichtlineare Schwankung des Energieniveaus erreicht werden, die auf der Abbildung als orangefarbenes \boxtimes gekennzeichnet ist (b). Durch diese nichtlineare Schwankung ist das Energieniveau zwischen den Phasen $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ und $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ unterschiedlich groß und kann somit unterschieden werden. Der als $\hbar\omega_{01}$ gekennzeichnete Energieunterschied ist unser Qubit.

Steuerung und Auslesung

Die Steuerung der Josephson-Junction erfolgt durch Mikrowellenpulse, welche die Energie des Qubits verändern. Die Auslesung erfolgt durch eine Mikrowellenresonanz um die Energie des Qubits zu messen.

6.2.2 Quantenpunkte

Quantencomputer basierend auf Quantenpunkten, auch Quantum-Dot³² genannt, nutzen winzige Halbleiterstrukturen um Qubits zu realisieren. Quantum-Dots sind künstlich erzeugte Nano-Partikel, in denen Elektronen in drei Dimensionen eingeschlossen sind, was zu quantisierten Energiezuständen führt.

Die Größe eines Quantum-Dots ist typischerweise 2-10 Nanometer und es schließt eine kleine Anzahl oder ein einzelnes Elektron ein. Für die Fertigung werden oftmals Galliumarsenid (GaAs) oder Silizium (Si) verwendet. Der physikalische Einschluss der Elektronen schränkt ihre Bewegung stark ein, wodurch ein quantisiertes Energieniveau entsteht. Dies ähnelt dem Energieniveau eines Atoms, weswegen Quantum-Dots auch als künstliche Atome bezeichnet werden.

Die Zustände der Qubits werden durch die Eigenschaften einzelner Elektronen in den Quantum Dots definiert. Es gibt zwei Hauptansätze zur Realisierung von Qubits mit Quantum Dots.

Ladungs-Qubits

Der Ladungszustand eines Quantum Dots kann als Qubit verwendet werden. Die Ladung eines Elektrons kann entweder 0 oder 1 sein, was als $|0\rangle$ und $|1\rangle$ interpretiert wird. Für eine Messung wird der Ladungszustand mit einer Kapazitätsmessung der Tunnelströme ermittelt. Für die Manipulation des Qubits werden elektrische Felder verwendet, um die Elektronen in den Quantum Dots zu bewegen.

Diese Methode ist durch die Ladungsquantisierung sehr genau, jedoch auch sehr empfindlich gegenüber Störungen durch die Umgebung.

³²[Loss and Divincenzo, 1998]

Spin-Qubits

Die Spin-Eigenschaften von Elektronen in Quantum Dots können auch als Qubit verwendet werden. Hierbei sind die beiden Spinrichtungen (\uparrow für Spin-Up und \downarrow für Spin-Down). Diese beiden Spinrichtungen entsprechen den Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ und die Kombination aus beiden Zuständen ergibt eine Superposition.

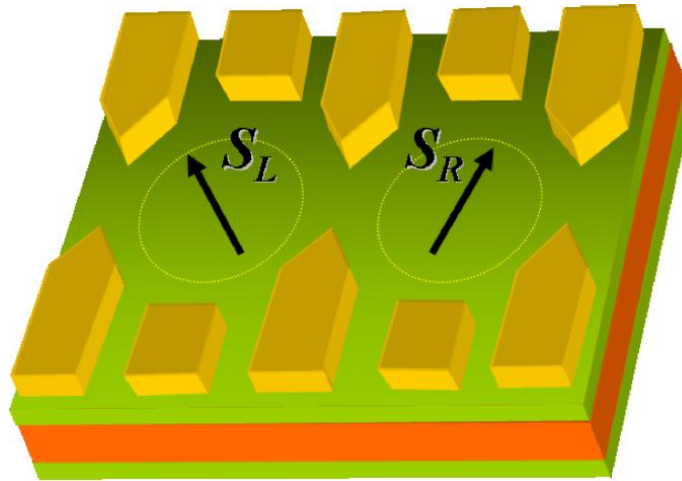


Abbildung 11: Ein doppel Quantum-Dot Qubit [Golovach, 2006]

In der Abbildung ist ein Doppel Quantum-Dot Qubit dargestellt. Sowohl in S_L als auch S_R befinden sich Elektronen. Beide können separat voneinander, sowohl im Spin als auch in der Ladung, manipuliert werden. Durch die physikalische Nähe der beiden Quantum-Dots können durch Tunnelkopplung und Austauschwechselwirkung die beiden Qubits miteinander verschränkt werden.

Die Umsetzung dieser Methode beschränkt sich hauptsächlich auf die Spin-Variante. Der Grund dafür ist, dass durch die hohe Ladungsanforderung der Ladungsvariante die Qubits sehr empfindlich gegenüber Störungen sind. Außerdem sind die Nachteile der Spin-Variante gegenüber der Ladungsvariante nicht so gravierend.

Jedoch sind die größten Herausforderungen die Herstellung der Halbleiterstrukturen und die Kontrolle der Elektronen in den Quantum-Dots. Damit ist der größte Vorteil, die hohe Skalierbarkeit, auch der größte Nachteil, da die Herstellung und Kontrolle von vielen Quantum-Dots sehr aufwendig und schwierig ist.

6.2.3 Topologische Quantencomputer

Der Ansatz von topologischen Quantencomputern³³ ist völlig anders als die bisher genannten. Im Gegensatz zu vorher erläuterten Quantencomputern, welche auf Eigenschaften einzelner Elektronen oder Energieniveaus basieren, basieren topologische Quantencomputer auf topologischen Eigenschaften von Materie.

³³[Nayak et al., 2008]

Diese Methode soll das Problem der Dekoherenz minimieren, indem sie Qubits aus Majorana-Partikeln aufbauen.

Topologie in der Physik

In einem physikalischen System beschreibt die Topologie die Eigenschaften, welche sich nicht durch Deformation verändern lassen. Ein Beispiel hierfür ist ein Kaffeebecher, der sich durch Verformung in eine Donutform umwandeln lässt. Beide haben die topologische Eigenschaft eines Loches. Daraus folgend ist es nicht möglich, einen Kaffeebecher oder ein Donut in eine Kugel zu verformen ohne die topologische Eigenschaft zu verändern.

Funktionsweise

Die physikalische Grundlage für topologische Quantencomputer liegt in speziellen Materialien und Systemen, die topologische Materiephasen unterstützen. Ein prominentes Beispiel ist die Verwendung von Majorana-Quasiteilchen, die in bestimmten Supraleitern auftreten können.

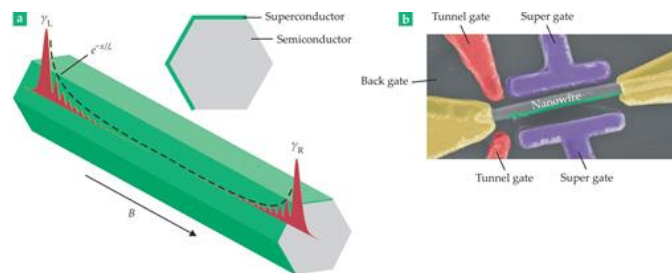


Abbildung 12: Nanowire mit Majorana-Quasiteilchen [Aguado and Kouwenhoven, 2020]

In der Abbildung ist ein Nanowire dargestellt, der durch einen Supraleiter und ein Magnetfeld in eine topologische Phase gebracht wird. Diese Art von Partikeln treten immer als Paar auf und bilden eine Art Brücke zwischen den Enden des Nanowire und besteht aus einer Vielzahl von Elektronen. Diese Brücke wird durch die topologischen Eigenschaften der Majorana-Partikel stabilisiert und ist somit weniger anfällig gegenüber Störungen.

Kommentar

Die Vertiefung, die durch den Quanten-Hall Effekt entsteht, wird nur oberflächlich behandelt. Sie ist jedoch essentiell für die Funktionsweise von Topologischen Quantencomputern.

Verflechtung

Braiding ist der Prozess, bei dem die Majorana-Partikel miteinander verflochten werden, um die Quantenbits zu manipulieren. Dies passiert auf einer zweidimensionalen Oberfläche, auf der die Majorana-Partikel miteinander verflochten werden.

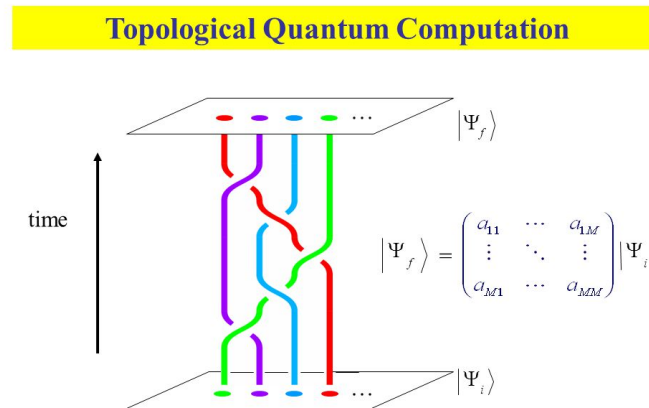


Abbildung 13: Braiding von Majorana-Quasiteilchen

Hierbei ist die Reihenfolge sehr wichtig, da durch diese Reihenfolge Quantenoperationen realisiert werden. Jede Verflechtung entspricht einer Quantenoperation und durch die Kombination von mehreren Verflechtungen können beliebige Quantenoperationen realisiert werden.

Da die Informationen und Quantenoperationen in der Topologie steckt, sind sie gegenüber kleinen Fehlern in der Bewegung/Störungen unempfindlich.

Kommentar

Die Technische Umsetzung von topologischen Quantencomputern ist deutlich komplizierter als es in diesem Abschnitt oberflächlich beschrieben ist.

Bisher hat nur Google einen topologischen Quantencomputer vorgestellt, der jedoch noch nicht in der Lage ist, Quantenoperationen durchzuführen.

6.3 Quantum Error Correction

Quantum Error Correction, oder auch QEC³⁴ genannt, ist grundlegend wichtig für die funktionellen Betrieb eines Quantencomputers. Wie bereits in den vorherigen Abschnitten beschrieben, sind Qubits sehr anfällig gegenüber Dekohärenz und Quantenrauschen.

Warum ist Fehlerkorrektur notwendig

Es ist unabdingbar, dass eine Fehlerkorrektur in Quantencomputern implemen-

³⁴[QuTech Academy, 2018]

tiert wird, da die Fehleranfälligkeit von physischen Qubits durch bessere Herstellung nur einen gewissen Grad an Fehlertoleranz aufbringen kann, welche nicht genug ist.

Fehler treten in Quantencomputer durch drei Hauptquellen auf.

1. **Dekoheränz:** Äußere Einflüsse wie Temperaturschwankungen oder elektromagnetische Felder zerstören die kohärenten Eigenschaften der Qubits.
2. **Phasen-Flip-Fehler:** Die Phasenwinkel zwischen den Quantenzuständen werden verändert ($|0\rangle \rightarrow |0\rangle, |1\rangle \rightarrow -|1\rangle$).
3. **Bit-Flip-Fehler:** Die Zustände der Qubits werden verändert ($|0\rangle \rightarrow |1\rangle, |1\rangle \rightarrow |0\rangle$).

Bei der Fehlerkorrektur von Quantencomputern ist jedoch zu beachten, dass diese nicht wie bei herkömmlichen Computern implementierbar ist, da durch das No-Cloning-Theorem keine Quanteninformationen kopiert werden können.

Grundprinzip

Quanten-Fehlerkorrektur verwendet **Redundanz** um Fehler zu detektieren und zu korrigieren, ohne dass die eigentliche Quanteninformationen direkt ausgelesen werden müssen.

Eine Art der Redundanz ist der Steane-Code, welcher auf 7 Qubits basiert. Dieser Zusammenschluss aus 7 Physischen Qubits bildet ein logisches Qubit, welches maximal einen Fehler auf einem der 7 Qubits korrigieren kann. Treten jedoch mehrere Fehler auf, kann der Steane-Code diese nicht mehr korrigieren.

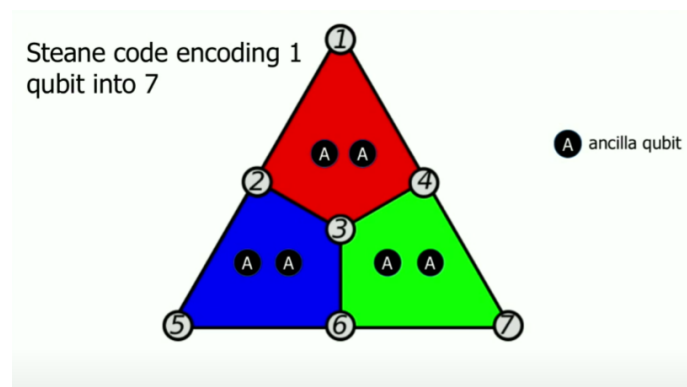


Abbildung 14: Steane-Code [QuTech Academy, 2018, 2m30s]

Um die Qubits zu überwachen werden zusätzliche Qubits benötigt. Der Grund hierfür ist die Daten-Qubits, in der Abbildung mit 1-7 gekennzeichnet, nicht direkt zu messen und den Quantenzustand zu bewahren. Diese zusätzlichen Qubits werden als **Ancilla Qubit** bezeichnet und mit den eigentlichen Qubits verschränkt.

Fehlertoleranz

Diese Herangehensweise ist jedoch auch nicht perfekt. Die Ancilla Qubits sind

gleichermaßen anfällig gegenüber Fehlern wie die eigentlichen Qubits.

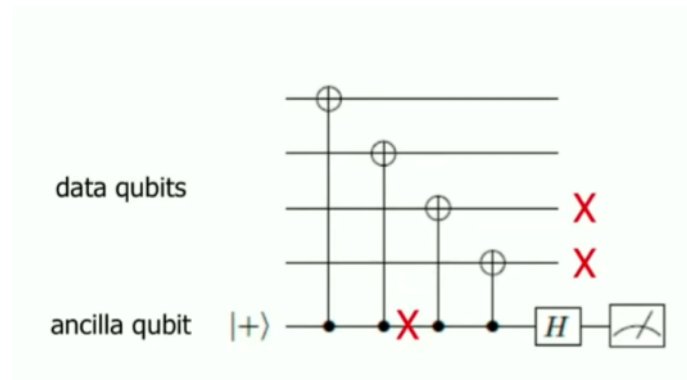


Abbildung 15: Fehlertoleranz von Ancilla Qubits [QuTech Academy, 2018, 50s]

Diese Abbildung zeigt, wie ein einzelner Fehler in einem CNOT Gatter auf dem Ancilla Qubit Messung ein Daten-Qubits als fehlerhaft kennzeichnet und eigentlich richtige Daten-Qubits korrigiert.

Die Folge hieraus ist, dass die Fehlerkorrektur mit wenigen Qubits nicht ausreicht, um diesen logischen Qubit vollkommen fehlerfrei zu halten.

Hierbei werden zwischen zwei Paritätchecks unterschieden. Eine Z und X Parität, welche festlegen, ob der Fehler im CNOT Gatter des Ancilla Qubits oder in den Daten Qubits aufgetreten ist.

Surface Code

Eine weitere Methode zur Fehlerkorrektur ist der Surface Code, welcher auf einem 2D Gitter von Qubits basiert. Dieser Code ist in der Lage Fehler zu detektieren und zu korrigieren, solange die Fehlerdichte unter einem bestimmten Wert bleibt.

Die Größe des Surface Codes ist variabel und kann skaliert werden, um die Fehlerkorrektur zu verbessern. Es gibt jedoch ein Threshold, an der die Vergrößerung des Codes keine Verbesserung mehr bringt. Durch die vorher besprochene Fehlertoleranz der Ancilla Qubits wird die Effektivität des Surface Codes gedeckelt. Die Fehler in der Korrektur werden hierbei mehr, als wenn keine Korrektur vorgenommen wird und es würde keinen Sinn ergeben, den Surface Code weiter zu vergrößern.

Die nachfolgende Abbildung eines Surface Codes des Grades $d = 3$ zeigt wie die Qubits in einem 2D Gitter angeordnet sind und wie die Fehlerkorrektur durchgeführt wird. Jede Überschneidung des Gatters stellt ein physisches Qubit dar. Die Kreise in den Quadraten sind die Ancilla Qubits, welche die Fehlerkorrektur durchführen.

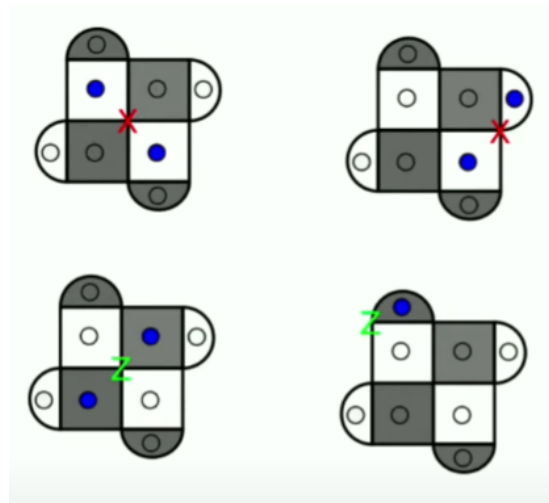


Abbildung 16: Fehlerkorrektur durch Surface Code des Grades $d = 3$ [QuTech Academy, 2018, 5m]

Ancilla Qubits in einem weißen Feld prüfen die Qubits auf ein logisches X und Ancilla Qubits in einem Schwarzen Feld prüfen die Qubits auf ein logisches Z .

Ancilla Qubits, die einen Fehler erkennen, werden als Blau markiert. Durch die Position dieser und für welche Daten Qubits diese zuständig sind, wissen wir welche Qubits fehlerhaft sind.

Praktische Umsetzung

Am 09.12.2024 hat Google den ersten selbst korrigierenden Quantencomputer vorgestellt, der auf dem Surface Code basiert. Der Chip namens **Willow**³⁵ basiert auf 105 physischen Qubits, wobei diese auf der 7x7 Surface Code Architektur aufbaut. Dies resultiert in 49 Qubits, die deutlich weniger anfällig gegen Fehler sind als physische Qubits. Die restlichen Qubits werden für Parität und Error Korrektur gebraucht.

³⁵[Acharya et al., 2024]

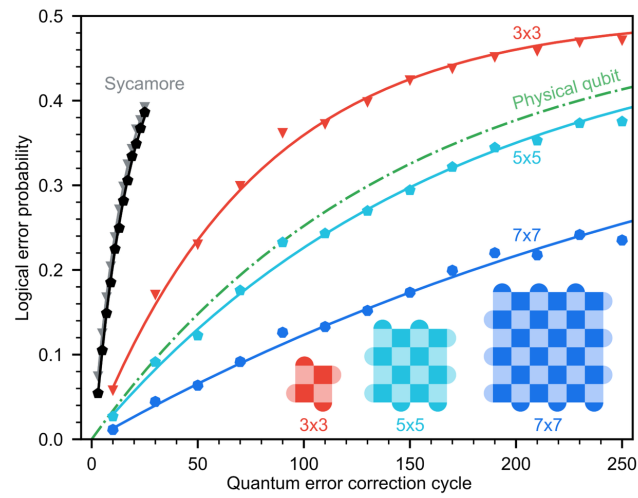


Abbildung 17: Error Korrektur des 7x7 Surface Code [Acharya et al., 2024]

Außerdem wurde durch die Anwendung des Surface Codes die T_1 Zeit von $20\mu s$ auf $68\mu s \pm 13\mu s$ erhöht und ermöglicht hierdurch mehr Operationen pro Qubit.

7 Theorien mit verborgenen Variablen und Bellsche Ungleichungen

7.1 Geschichte

Die Idee in der Wissenschaft, dass Objekte, die weit voneinander entfernt sind, Auswirkungen auf einander haben können, geht schon auf Newton zurück - wenn nicht sogar weiter. Newton besagte mit seinem Newtonischen Gravitationsgesetz, dass alle Objekte sich gegenseitig anziehen, auch wenn sie in keinem direkten Kontakt stünden³⁶. Michael Faraday und James Clerk Maxwell, die Begründer der Feld-Theorie stellten die Vermutung auf, dass Elektromagnetismus von einer Art "Äther" getragen werden könne, einer Art verborgenem Kraftfeld, was Anziehungs- und Abstoßkräfte übertrage³⁷. Die Ideen, dass es Fremdwirkungen aus der Ferne geben könne und diese von verborgenen Kräften, Medien oder Variablen übertragen werden, scheinen also nicht abwegig. Wie diese Ideen Einfluss auf die Diskussion um die Quantenverschränkung genommen haben, wird im Folgenden erläutert.

7.1.1 ERP-Paradoxon

Bevor das Phänomen der Quantenverschränkung bekannt war, gab es eine Diskussion darum, ob die Quantenmechanik eine Theorie ist, die die Realität vollständig abbildet oder nicht. Diese Diskussion an sich ist Bestandteil einer weitreichenderen Diskussion zwischen Niels Bohr und Albert Einstein, die als Bohr-Einstein Debatte bekannt ist. Auf diese wird hier nicht im Detail eingegangen. Der Beginn des Diskussionsteils, auf den wir uns fokussieren, ist die Veröffentlichung des nach den Autoren benannten EPR-Paradoxons von Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen. Darin argumentieren sie, dass die Quantenmechanik keine vollständige Theorie sein könne, da sie es erlaube, dass das Messen eines Partikels eine Fernwirkung auf ein anderes Partikel haben könne, unabhängig davon, wie weit die beiden Partikel voneinander entfernt seien³⁸. Es folgt ein Abriss der Argumentation von Einstein, Podolsky und Rosen.

In dem Paper "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" argumentieren Einstein, Podolsky und Rosen, dass eine Theorie nur dann vollständig sein kann, wenn es zu jedem Element der physischen Realität ein Element in der Theorie gebe, was das Element der physischen Realität abbilde/beschreibe.

Als 'Realität' definieren die Autoren das, was durch Experiment- und Messergebnisse bestimmt werden könne. Dabei müssten diese Ergebnisse die Voraussetzung erfüllen, dass wenn man eine physikalische Menge genau bestimmen könnte, ohne ein System dabei zu stören, dass es dann ein Element in der physikalischen Realität geben müsse, das dieser physikalischen Menge entspreche.

Das Argument der Autoren ist, dass die Quantenmechanik keine vollständige

³⁶[Ducheyne, 2009]

³⁷[Assis et al., 2009]

³⁸[Einstein et al., 1935]

Abbildung der Realität liefere, da sie mit nicht kommutativen physikalischen Mengen arbeite. $AB \neq BA$ bedeute also, dass man keine nicht-probabilistische Aussage über die Eigenschaft B aussagen könne, wenn man den Wert für die Eigenschaft A kenne. Bringe man die Geschwindigkeit eines Partikels durch Messen in Erfahrung, könne man keine genaue Aussage mehr über die Position zum selben Zeitpunkt treffen, da das Messen an sich den Zustand des Partikels ändere. Demnach könnten in der Welt der Quantenmechanik beide Eigenschaften, laut der im Artikel festgelegten Definition der Realität, nicht gleichzeitig existieren oder die Quantenmechanik liefere kein vollständiges Abbild der Realität.

Gleiches zeigen sie nochmal anhand einer Wellenfunktion, die zwei miteinander interagierende Systeme beschreibt. Beschreibt die Wellenfunktion den Zustand von zwei Partikeln X und Y und trennt die Partikel danach, könnte man laut der Quantenmechanik die Wellenfunktion dafür nutzen nach der Messung von einem der Partikel Aussagen über das andere Partikel zu treffen. Dabei müsse man sich allerdings entscheiden, für welche Eigenschaften man eine Messung durchführen möchte. Führt man die Messung für die Eigenschaft A_X auf dem Partikel X aus, verändere man den Zustand von diesem Partikel und man könne keine Aussage mehr über die Eigenschaft B_X treffen. Vor der Messung bestünde die Möglichkeit Formeln für beide Eigenschaften A_Y und B_Y für Partikel Y aufzustellen, um sie in Abhängigkeit von den Eigenschaften von Partikel X zu beschreiben, da sie vor der Trennung von der gleichen Wellenfunktion beschrieben werden konnten. Führt man die Messung von der Eigenschaft A_X vom Partikel X aus, führe es deshalb dazu, dass die Eigenschaft B_Y auch vom Partikel Y nicht mehr messbar werde. Man schreibe also Partikel Y die Realität der Eigenschaft B_Y ab, obwohl man nur Partikel X gemessen hätte. Dieser Widerspruch führe zur Schlussfolgerung, dass die Quantenmechanik keine vollständige Theorie sei. Einstein und die anderen waren überzeugt, dass es eine Formulierung der Quantenmechanik geben müsse, die es erlauben würde, beide Eigenschaften gleichzeitig in Erfahrung zu bringen.³⁹ Dies führte dazu, dass etliche Theorien mit verborgenen Variablen formuliert wurden.⁴⁰

7.1.2 Reaktion von Niels Bohr

Bevor wir eine dieser Theorien mit verborgenen Variablen genauer betrachten, gehen wir noch kurz auf die Reaktion von Niels Bohr ein, der maßgeblich an der Entwicklung der Quantenmechanik beteiligt war.

In seinem Paper, mit dem gleichen Titel von Einstein, Podolsky und Rosen, widerspricht er der Definition von Realität, die die Autoren für ihre Argumentation genutzt haben. Eine Messung zu vollziehen ohne das System zu verändern, sei laut ihm in der Quantenmechanik nicht möglich, da das Messinstrument in der Atomphysik im Gegensatz zur klassischen Physik mit dem beobachteten System interagieren müsse. Zudem stellt er infrage, ob es notwendig sei, sämtliche Kenngrößen in einer Messung festzustellen, da ein Experiment, das dafür aufgebaut wurde, um die Geschwindigkeit eines Partikels zu messen, eben nur für diesen Zweck existiere und keinem anderem. Demnach wäre es unsinnig eine Beschreibung zu fordern, die sämtliche Eigenschaften eines Systems gleichzeitig

³⁹[Einstein et al., 1935]

⁴⁰[Faye, 2024]

beschreiben könne.⁴¹

Dies ist nur eine sehr vereinfachte Wiedergabe der beiden Ansichten von Einstein und Bohr. Da die Diskussion über die Mathematik der Quantenmechanik hinaus in Richtung philosophischer Fragen geht, was denn Realität sei und wie die Wissenschaft sie abbildet, ist dies eine Diskussion, die noch heute andauert. Wie bereits erwähnt, gab und gibt es Wissenschaftler, die die Ansicht von Einstein, Podolsky und Rosen teilten und versuchten verborgene Variablen zu finden, die erklären, warum das Messen von einem System ein anderes, getrenntes System beeinflussen kann.

7.1.3 Bohmsche Mechanik

Eine bekannte Theorie mit verborgenen Variablen ist die von David Bohm 1951. In seinen Artikeln "A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables." behauptet Bohm eine Möglichkeit gefunden zu haben, unendlich präzise messen zu können, was der Heisenbergschen Unschärferelation widerspreche. Außerdem behauptet er in Form der Wellenfunktion, die er ψ -Feld nennt, eine Antwort auf das Paradoxon zu haben, was Einstein, Podolsky und Rosen aufgestellt haben.⁴²

Bohms These beruht darauf, dass es ein sogenanntes ψ -Feld gäbe, das Einfluss auf Partikel nehme, aber selbst nicht von diesen beeinflusst werde und zudem nicht messbar sei.

Das ψ -Feld unterlege drei Kriterien:

1. dass es die Schrödingergleichung erfülle
2. dass wenn $\psi = \text{Re}xp(is/\hbar)$ gelte, die Geschwindigkeit eines Partikels auf $p = \nabla S(x)$ beschränkt sei und
3. dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Position eines Partikels $P = |\psi(x)|^2$ sei.

Das ψ -Feld bestimme also zu jeder Zeit die Geschwindigkeit und Position eines Partikels. Da man das ψ -Feld noch nicht messen könne, könne man die genaue Positionen und Geschwindigkeiten von Partikeln nicht ermitteln. In der klassischen Quantenmechanik messe man bisher nur Observablen von Partikeln, nicht aber das Partikel selbst. Er behauptet, dass die Messung einer Observablen unweigerlich zu kurzen, heftigen Schwingungen im umliegenden ψ -Feld führen würde.

Diese Schwingung im ψ -Feld sorgen dafür, dass ein Messergebnis kaum vorherzusagen sei, weil das ψ -Feld direkten Einfluss auf die Geschwindigkeit und Position eines Partikels habe.

Ein Messergebnis hänge laut Bohm von der initialen Position des zu messenden Objekts, sowie der initialen Form der Wellenfunktion, als auch vom Messapparat ab. Wenn man also die initiale Position und Geschwindigkeit eines Partikels, sowie die initiale Form der Wellenfunktion vor der Messung kennen würde und die Messung mit denselben initialen Zuständen wiederholen könnte, würde man beim Messen immer auf dasselbe Messergebnis stoßen. Die Messung müsste also deterministisch sein, wenn man alle Variablen kenne. Dafür wäre es allerdings notwendig, die tatsächliche Geschwindigkeit und Position eines Partikels zu ken-

⁴¹[Bohr, 1935]

⁴²[Bohm, 1952]

nen und nicht die Ergebnisse, die eine Observable liefern. Observablen liefern laut Bohm keine Informationen über das Partikel vor oder nach der Messung und würden vom Messapparat beeinflusst. Dies sorgt auch dafür, dass die Messung einer Observablen der Eigenschaft Q , die nicht kommutativ mit der Eigenschaft P ist, die Observable derartig verändern würde, dass keine Aussage mehr über die Eigenschaft P getroffen werden könne. Beispielsweise könne keine Aussage mehr über die Geschwindigkeit eines Partikels getroffen werden, wenn dessen Position gemessen wurde.

Bohms Vorschlag einer Messung beider Werte gleichzeitig stellt er in folgendem Gedankenexperiment dar:

Wenn man ein erregtes Partikel zwischen zwei undurchlässigen, perfekt spiegelnden Wänden halten würde, sorgt das ψ -Feld dafür, dass es zwischen den Wänden ruhe. Die gesamte kinetische Energie des Partikels würde in potenzielle/latente Energie umgewandelt werden. Messe man das Partikel in der Observablen, die die Geschwindigkeit bestimmt, würde diese Energie wieder in kinetische Energie umgewandelt werden. Nehme man die Spiegel dann plötzlich und schnell genug weg, würde die kinetische Energie dafür sorgen, dass das Partikel irgendwo hinfliege. Messe man nach einer Weile die Distanz, die das Partikel geflogen ist und teile sie durch die Reisezeit, die mit dem Entfernen der Spiegelwände begonnen habe, könnte man die tatsächliche Geschwindigkeit des Partikels berechnen.

Allerdings würde die Geschwindigkeit durch das Entfernen der Spiegel beeinflusst werden, da das Entfernen der Spiegel Wellenpakete im ψ -Feld generieren würde. Durch die Kollision mit diesen Wellenpaketen könnte man allerdings auch bestimmen, in welchen der zwei Richtungen sich das Partikel bewegt habe. Diese Form der Messung der Bewegungsrichtung sei notwendig, da die Fluktuation des ψ -Feld derartig kompliziert sei, dass man nur zu einer Wahrscheinlichkeit aussagen könne, wohin das ψ -Feld ein Partikel bewege.

Daraufhin geht er auf das EPR Paradoxon von Einstein, Podolsky und Rosen ein. Einstein und die anderen gingen davon aus, dass die Quantenmechanik keine vollständige Theorie sei, da sie nicht erkläre, weshalb man mit einem Messergebnis eines Partikels, das in der Vergangenheit mit einem anderen Partikel interagiert habe, Aussagen über das andere Partikel treffen könne, egal wie weit sie zum Zeitpunkt der Messung von einander entfernt seien und gleichzeitig nicht mehr ermöglicht Aussagen über das zweite Partikel zu treffen, die nicht gemessen wurden. Bohm behauptet, dass das Messen eines Partikels Fluktuationen im ψ -Feld um das Partikel verursache und schließt daraus, dass das ψ -Feld um das andere Partikel herum ähnlichen Fluktuationen unterliegen müsse. Damit wäre das ψ -Feld ein Medium zur Übertragung der Fluktuation oder genauer gesagt der Information, dass das erste Partikel gemessen wurde. Das ψ -Feld wäre dementsprechend das neue Limit für die Geschwindigkeit mit der Informationen übertragen werden können. Damit stünde seine Theorie nicht mehr im Widerspruch zur Relativitätstheorie.

Die herkömmliche Interpretation der Quanteninformatik sage aus, dass man aufgeben müsse ein System mit einem präzisen Modell abzubilden, also die Unbestimmtheitsrelation als festen Bestandteil sehen zu müssen. Die Theorie von Bohm widerspreche dieser Aussage, indem sie behaupte, dass man Partikel und das umliegende ψ -Feld präzise beschreiben könne. So wie Forscher sich mit dem

Atom beschäftigt haben, obwohl noch nie eins beobachtet wurde, solle man sich mit dem ψ -Feld auseinandersetzen und forschen, um es eines Tages berechnen oder gar messen zu können. Obwohl Bohms Theorie auf viel Kritik stieß, da sie auf dem ψ -Feld als eine nicht messbare, nicht lokale, universelle Kraft beruhte, war sie ein gutes Beispiel dafür, dass Theorien mit verborgenen Variablen das Prinzip der Lokalität verletzen müssen. 1964 bewies John Stewart Bell dies mit der Bellschen Ungleichung.

7.2 Bell's Inequality

Bell's Inequality bezieht sich auf die statistische Korrelation zwischen Messungen von verschränkten Teilchen. Die Ungleichung wurde von John Bell 1964⁴³ formuliert und besagt, dass die Wahrscheinlichkeit der Messergebnisse von verschränkten Teilchen durch eine lokale versteckte Variable erklärt werden können und hierdurch begrenzt ist. Wenn die Korrelation jedoch über die Grenze der Ungleichung hinaus geht, kann dies nur durch Quantenmechanik erklärt werden.

Bell setzte für seine Idee voraus, mehrere Kopien von verschränkten Teilchen zu haben. Diese Partikel können heutzutage durch einen Zerfallsprozess erreicht werden, in dem ein Partikel in zwei verschränkte Teilchen zerfällt.

Durch den Zerfall eines Teilchen und dem Stern-Gerlach-Experiment wissen wir, dass ein Teilchen mit einem Spin von 0 in zwei Teilchen mit einem Spin von $1/2$ zerfällt.

$$S = 0 \rightarrow S_1 = S_2 = \pm \frac{1}{2} \quad (46)$$

Beide Teilchen haben den Spin von $\pm \frac{1}{2}$, müssen jedoch sich gegenseitig aufheben, so dass die Summe der Spins 0 ergibt. Dies nennt man auch Spin up und Spin down. Wenn das eine Teilchen Spin up ist, muss das andere Spin down sein und anders herum.

Dadurch sind die beide Teilchen miteinander verschränkt und kann wie folgt beschrieben werden:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle) \quad (47)$$

Gehen wir davon aus, dass wir zwei Messungen durchführen. Die Messung von Alice und die Messung von Bob. Beide dürfen den Spin des Partikels in jede beliebige Richtung messen. Wie sind die beiden Messungen korreliert?

Laut Einstein ist jedes einzelne Teilchen deterministisch. Das bedeutet, dass die Messung vom Spin des Teilchens nicht zufällig ist, sondern durch eine versteckte Variable bestimmt wird und dadurch der Spin beider Teilchen nicht korreliert ist.

Daraus folgernd müssen die Messergebnisse deterministisch sein. Wenn Bob $(+a, +b, -c)$ misst, dann muss Alice $(-a, -b, +c)$ sein, welches durch die versteckte Variable vorherbestimmt ist und zusammen ein 0 Spin ergibt. Durch die Voraussetzung des Aufhebens des Spins kann eine Tabelle von allen deterministischen Messergebnissen erstellt werden.

⁴³[Bell, 1964]

Population	Particle 1	Particle 2
N_1	$(+\hat{a}, +\hat{b}, +\hat{c})$	$(-\hat{a}, -\hat{b}, -\hat{c})$
N_2	$(+\hat{a}, +\hat{b}, -\hat{c})$	$(-\hat{a}, -\hat{b}, +\hat{c})$
N_3	$(+\hat{a}, -\hat{b}, +\hat{c})$	$(-\hat{a}, +\hat{b}, -\hat{c})$
N_4	$(+\hat{a}, -\hat{b}, -\hat{c})$	$(-\hat{a}, +\hat{b}, +\hat{c})$
N_5	$(-\hat{a}, +\hat{b}, +\hat{c})$	$(+\hat{a}, -\hat{b}, -\hat{c})$
N_6	$(-\hat{a}, +\hat{b}, -\hat{c})$	$(+\hat{a}, -\hat{b}, +\hat{c})$
N_7	$(-\hat{a}, -\hat{b}, +\hat{c})$	$(+\hat{a}, +\hat{b}, -\hat{c})$
N_8	$(-\hat{a}, -\hat{b}, -\hat{c})$	$(+\hat{a}, +\hat{b}, +\hat{c})$

Abbildung 18: Bell Zuständen nach der versteckten Variable

Jetzt errechnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass Alice und Bob bei unabhängigen Messungen dasselbe Vorzeichen messen. Die Wahrscheinlichkeit in Zeile 1 und 8 sind 0% und in Zeile 2 bis 7 sind es $P = \frac{4}{9}$. Das bedeutet nach Einstein die Wahrscheinlichkeit, dass Alice und Bob dasselbe messen $P \leq \frac{4}{9}$ ist. Dies ist Bell's Inequalität.

Vorliegendes Beispiel ist generalisiert und kann auf beliebige Winkel angewendet werden, wobei die Wahrscheinlichkeit wie folgt für alle möglichen Winkel berechnet wird.

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \quad (48)$$

Nun zu der Wahrscheinlichkeit nach der Quantenmechanik. Wir gehen davon aus, dass Bob den Spin in a Richtung misst, Beispielsweise spin up. Daraus folgernd muss, wenn Alice in a Richtung misst, das Ergebniss Spin down sein. Dadurch, dass wir das Ergebniss einer der Achsen kennen, können wir die Wahrscheinlichkeit für die anderen Achsen mit folgender Gleichung berechnen.

$$P(b) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (49)$$

Hierbei ist θ der Winkel zwischen den Achsen. Wenden wir dies auf das Beispiel auf die Achse b an so setzen wir $\theta = 60^\circ$

$$P(b) = \cos^2\left(\frac{60^\circ}{2}\right) = \frac{3}{4} \quad (50)$$

Machen wir dies auch für die andere Achse c wo $\theta = 120^\circ$ ist erhalten wir

$$P(c) = \cos^2\left(\frac{120^\circ}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad (51)$$

Von diesen beiden Wahrscheinlichkeit errechnen wir den Durchschnitt von $P = \frac{1}{2}$, was bedeutet das Bell's Inequalität mit $P = \frac{1}{2} \geq \frac{4}{9}$ verletzt ist.

7.2.1 Bell im Quantumcomputer

Wir haben das Beispiel von Bell's Inequality in der Quantenmechanik gezeigt, jedoch ist es auch möglich dies in einem Quantumcomputer zu zeigen. Hierbei haben wir das Bells Theorem folgendermaßen umgesetzt⁴⁴.

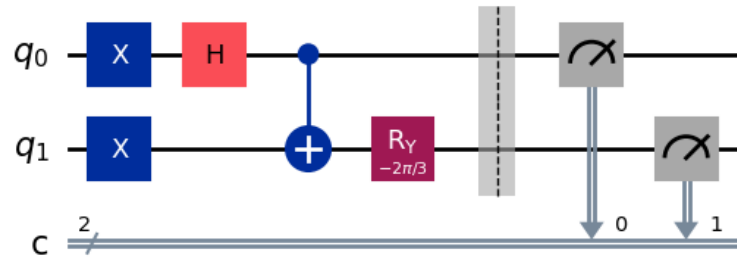


Abbildung 19: Bell's Theorem im Quantumcomputer

Die beiden Linien q_0 und q_1 sind die beiden verschränkten Teilchen, die durch den Zerfall eines Teilchens entstanden sind. Den verschränkten Zustand erreichen wir durch die beiden X gates, das H gate und das CNOT gate. Nachdem wir den verschränkten Zustand erreicht haben, messen wir q_0 in der a Achse und q_1 an der b Achse. Dies ist mit dem R_y gate realisiert der die Messung um 120° dreht.

Um ein genaueres Ergebnis zu erhalten, führen wir diese Messungen 30000 mal durch

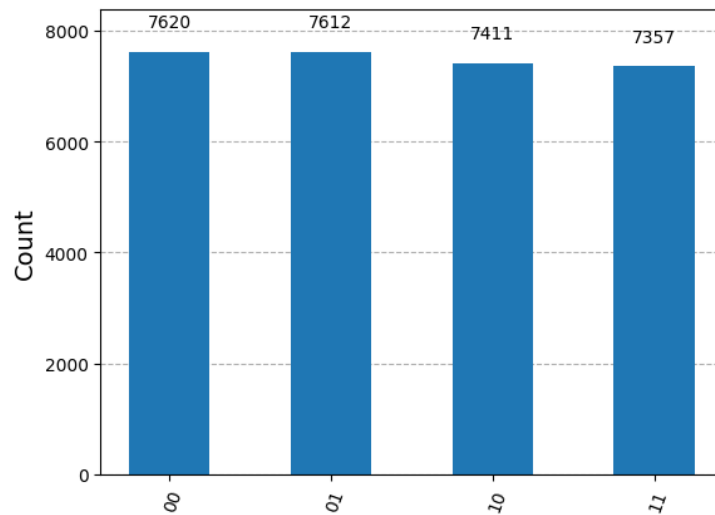


Abbildung 20: Ergebnis von Bell's Theorem im Quantumcomputer

⁴⁴[Qiskit, 2024]

Die Ergebnisse zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit, dasselbe Vorzeichen zu messen bei $P = (7620 + 7357)/30000 = 0.49923$ oder auch 49,923% liegt, was Bell's Inequalität verletzt.

7.3 CHSH Game

Das CHSH Spiel basiert auf einem Gedankenexperiment und ist eine alternative Erklärung für die Verletzung der Bell's Inequalität.

Das Gedankenexperiment wurde von John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony und Richard Holt 1969⁴⁵ kurz nach der Veröffentlichung von Bell's Inequalität vorgeschlagen.

In diesem Abschnitt werden wir das CHSH Spiel erklären und wie es in einem Quantumcomputer umgesetzt werden kann.

7.3.1 Nonlocal Games

Um die Grundlagen des Spieles zu verstehen, müssen wir zuerst erklären, was ein **Nonlocal Game** ist, unter welches das CHSH Spiel fällt.

1. Das Spiel wird von zwei Spielern gespielt, Alice und Bob, die in Kooperation zusammenarbeiten. Das bedeutet, dass beide Spieler zusammen gewinnen oder verlieren.
2. Ein Schiedsrichter leitet das Spiel, indem er den Spielern Fragen stellt und anschließend ihre Antworten überprüft und mitteilt, ob die Spieler gewonnen oder verloren haben.
3. Nachdem die Spieler die Frage vom Schiedsrichter erhalten haben, dürfen beide Spieler nicht mehr miteinander kommunizieren. Vorherige Absprachen und Taktiken sind erlaubt.

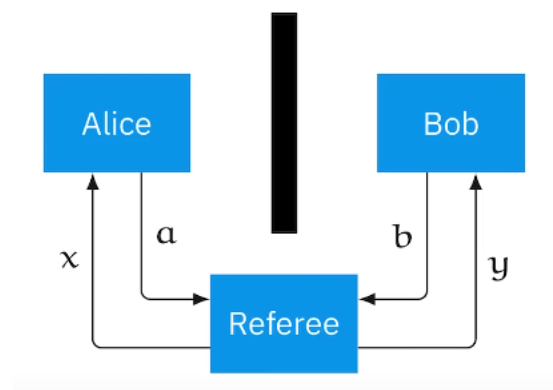


Abbildung 21: CHSH Spielaufbau [IBM, 2025, 47m20s]

⁴⁵[Clauser et al., 1969]

Sowohl die beiden Fragen x und y als auch die Antworten a und b können beliebige Werte annehmen. In unserem Fall werden alle Fragen und Antworten als binäre Bits dargestellt.

Um den Spielverlauf zu verstehen, betrachten wir den Schiedsrichter nun etwas genauer und welche Aufgaben er hat.

1. Der Schiedsrichter stellt die Fragen x und y zufällig, in unserem Fall $x, y \in \{0, 1\}$.
2. Alice und Bob antworten mit den Antworten (a, b) . Durch die fehlende Kommunikation wissen sie nicht, welche Frage der andere Spieler gestellt bekommen hat oder wie er geantwortet hat.
3. Der Schiedsrichter überprüft die Antworten (a, b) bezogen auf die gestellten Fragen (x, y) und entscheidet nach einer festgelegten Regel, ob die Spieler gewonnen oder verloren haben.
4. Beide Spieler kennen die Regel nach der der Schiedsrichter entscheidet, ob sie gewonnen oder verloren haben.

Durch die Beschreibung des Schiedsrichters erhalten wir verschiedene Arten von **Nonlocal Games** wie das CHSH Spiel.

7.3.2 CHSH Definition

Nun definieren wir den Schiedsrichter für das CHSH Spiel.

1. Alle Fragen und Antworten sind binäre Bits.

$$x, y, a, b \in \{0, 1\} \quad (52)$$

2. Alle Fragen werden zufällig gestellt.
3. Ein Paar der Antworten (a, b) gewinnt für (x, y) , wenn

$$a \oplus b = x \wedge y \quad (53)$$

und verliert wenn es nicht so ist.

(x, y)	Gewinnbedingung
$(0, 0)$	$a = b$
$(0, 1)$	$a = b$
$(1, 0)$	$a = b$
$(1, 1)$	$a \neq b$

Tabelle 1: Gewinnbedingung für alle möglichen Fragen

7.3.3 Taktiken für das CHSH Spiel

Mit diesen Gewinnbedingungen können wir nun verschiedene Taktiken für das CHSH Spiel definieren. Wie zuvor bei der Bell Inequalität fangen wir mit der klassischen Taktik an und gehen dann zur Quantentaktik über.

Klassische Taktik Die klassische Herangehensweise ist die deterministische Taktik, mit welcher es nicht möglich ist, in allen Fällen zu gewinnen.

$$a(0) \oplus b(0) = 0 \quad (54)$$

$$a(1) \oplus b(0) = 0 \quad (55)$$

$$a(0) \oplus b(1) = 0 \quad (56)$$

$$a(1) \oplus b(1) = 1 \quad (57)$$

Aus dieser Erkenntnis können wir die beste Gewinnwahrscheinlichkeit ablesen. Diese beträgt $P = \frac{3}{4}$ und ist recht einfach zu erreichen, wenn Alice und Bob auf egal welche Frage immer mit 0 antworten

Eine ähnliche Taktik ist die probabilistische Taktik, jedoch ist die Gewinnwahrscheinlichkeit hierbei dieselbe wie bei der deterministischen Taktik. Das hat den Grund, dass eine probabilistische Taktik als eine Zufallswahl einer deterministischen Taktik gewertet werden kann und dadurch den selben Effekt erzielt.

Quantentaktik Um zu beweisen, dass der quantenmechanische Ansatz besser ist als der klassische Ansatz, müssen wir die Gewinnwahrscheinlichkeit berechnen.

Zuerst definieren wir ein Einheitsvektor für alle Winkel θ (In Rad).

$$|\psi_\theta\rangle = \cos(\theta) |0\rangle + \sin(\theta) |1\rangle \quad (58)$$

Außerdem definieren wir für den Einheitsvektor eine unitäre Matrix $U(\theta)$ um ψ_θ an $|0\rangle$ und $\psi_{\theta+\pi/2}$ an $|1\rangle$ zu koppeln.

$$U(\theta) = |0\rangle\langle\psi_\theta| + |1\rangle\langle\psi_{\theta+\pi/2}| \quad (59)$$

Nun kommen die beiden verschränkten Teilchen ins Spiel.

Alice wendet nun die unitäre Matrix wie folgt auf a an.

$$\begin{cases} U_\theta & \text{if } x = 0 \\ U_{\pi/4} & \text{if } x = 1 \end{cases} \quad (60)$$

Zuletzt misst Alice a und sendet das Ergebniss an den Schiedsrichter. Und Bob macht fast dasselbe.

$$\begin{cases} U_{\pi/8} & \text{if } y = 0 \\ U_{-\pi/8} & \text{if } y = 1 \end{cases} \quad (61)$$

Wie diese Angaben von θ zustande kommen, wird im nächsten Abschnitt erklärt.

Um nun die Gewinnwahrscheinlichkeit zu berechnen nehmen wir eine der möglichen Fragen und berechnen die Wahrscheinlichkeit wie $(x, y) = (0, 0)$.

Das bedeutet, Alice wendet U_θ an und Bob wendet $U_{\pi/8}$ an.

$$(U_\theta \otimes U_{\pi/8}) |\phi^+\rangle = \frac{\cos(-\frac{\pi}{8}) |00\rangle + \cos(-\frac{5\pi}{8}) |01\rangle + \cos(\frac{3\pi}{8}) |10\rangle + \cos(-\frac{\pi}{8}) |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (62)$$

Die daraus entstehenden Wahrscheinlichkeiten sind

(a, b)	Wahrscheinlichkeit	Vereinfacht
$(0, 0)$	$\frac{1}{2} \cos^2(-\frac{\pi}{8})$	$\frac{2+\sqrt{2}}{8}$
$(0, 1)$	$\frac{1}{2} \cos^2(-\frac{5\pi}{8})$	$\frac{2-\sqrt{2}}{8}$
$(1, 0)$	$\frac{1}{2} \cos^2(\frac{3\pi}{8})$	$\frac{2-\sqrt{2}}{8}$
$(1, 1)$	$\frac{1}{2} \cos^2(-\frac{\pi}{8})$	$\frac{2+\sqrt{2}}{8}$

von diesen Wahrscheinlichkeiten interessiert uns, welche davon gewinnen und welche verlieren.

$$P_w(a = b) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \approx 0.85 \quad (63)$$

$$P_l(a \neq b) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \approx 0.15 \quad (64)$$

Für die anderen drei Fragen $(x, y) = (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ sind die Wahrscheinlichkeiten dieselben. Nur dass bei $(1, 1)$ die Gewinnwahrscheinlichkeit $P_w(a \neq b)$ ist.

Der Durchschnitt aller Fragestellungen ergibt eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $P = 0.85$, was bedeutet, dass die Quantentaktik besser ist als die klassische Taktik.

Geometrische Interpretation

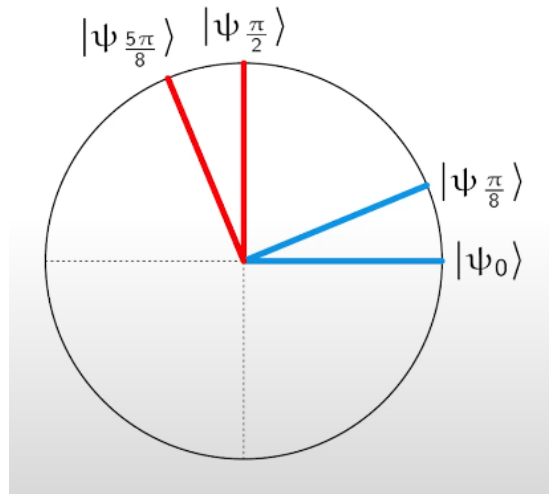
Um besser zu veranschaulichen, warum die Winkel von θ gewählt wurden, können wir diese geometrisch darstellen.

Dafür benutzen wir die vorherige Gleichung

$$\langle \psi_\alpha \oplus \psi_\beta | \phi^+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle \quad (65)$$

Dies stellt die Wahrscheinlichkeit der Antworten für die Frage $(x, y) = (0, 0)$ folgend dar:

(a, b)	Wahrscheinlichkeit
$(0, 0)$	$\frac{1}{2} \langle \psi_0 \psi_{\frac{\pi}{8}} \rangle ^2$
$(0, 1)$	$\frac{1}{2} \langle \psi_0 \psi_{\frac{5\pi}{8}} \rangle ^2$
$(1, 0)$	$\frac{1}{2} \langle \psi_{\frac{\pi}{2}} \psi_{\frac{\pi}{8}} \rangle ^2$
$(1, 1)$	$\frac{1}{2} \langle \psi_{\frac{\pi}{2}} \psi_{\frac{5\pi}{8}} \rangle ^2$

Abbildung 22: Geometrische Interpretation von θ [IBM, 2025, 1h3m]

Die blauen Vektoren beschreiben die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis 0 ist und die roten Vektoren das Ergebnis 1 ist. Umso näher die Vektoren aneinander sind, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwort gleich ist.

Bei den anderen Fragestellungen ist die Darstellung ähnlich, nur bei der Frage (1, 1) sind die Vektoren deutlich weiter auseinander. Da wir bei dieser Frage eine unterschiedliche Antwort brauchen, ist das aber genau das was wir wollen.

7.3.4 CHSH im Quantumcomputer

Wir haben das CHSH Spiel in einem Quantumcomputer umgesetzt und die Gewinnwahrscheinlichkeit berechnet.

Hierbei haben wir mit einem Estimator die Gewinnwahrscheinlichkeit aller Phasen berechnet und diese mit der klassischen Taktik verglichen⁴⁶.

⁴⁶[IBM, 2025]

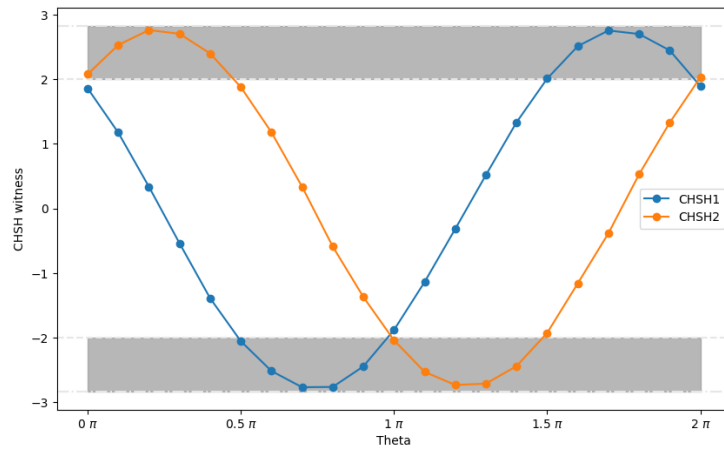


Abbildung 23: CHSH Spiel im Quantumcomputer

Der weiße innere Bereich ist der Bereich, der mit klassischen Methoden erreicht werden kann. Die beiden Linien zeigen die Wahrscheinlichkeit der Antworten (a, b) für alle Fragen.

Mit grau ist der Bereich markiert, der nur von quantenmechanischen Methoden erreicht werden kann. Alles, was darüber hinaus geht, ist mit keiner bekannten Methode zu erreichen.

8 Schluss

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Quanteninformatik ein vielversprechendes Feld darstellt, das das Potenzial hat, klassische Computer in zahlreichen Bereichen zu übertreffen. So haben wir in den Grundlagen die fundamentalen Prinzipien und Funktionsweisen für Quantencomputer herausgestellt. Mit Quantenbits ist es möglich, mehrere Zustände gleichzeitig zu repräsentieren, was zusammen mit der Zerstörung der Superposition durch Messungen einen entscheidenden Vorteil in der Kryptografie bietet. Die Verschränkung ermöglicht es, dass zwei Quantenbits in einem Zustand sind, sodass die Messung eines Bits den Zustand des anderen beeinflusst, was die Grundlage für Quantenteleportation bildet.

Mit dem No Cloning Theorem haben wir eine der grundlegendsten Einschränkungen und gleichzeitig auch Möglichkeit in der Quanteninformatik kennengelernt. Es besagt, dass ein unbekannter Quantenzustand nicht kopiert werden kann. Zum einen erfordert dies eine neue Denkweise bei der Entwicklung von Algorithmen, zum anderen bietet es die Möglichkeit, Quantenkommunikation abhörsicher zu gestalten.

Die Quantenteleportation ist eines der faszinierendsten Konzepte der Quanteninformatik, welches die Übertragung von Informationen ohne physische Bewegung ermöglicht. Hier liegt die Herausforderung in der Erzeugung und Aufrechterhaltung der Quantenverschränkung, sowie der Notwendigkeit der klassischen Kommunikation.

Eine der größten technischen Hürden bildet die Dekohärenz, die durch die Wechselwirkung der Quantenbits mit ihrer Umgebung entsteht. Es wurde beleuchtet, wie sie entsteht und berechnet wird, sowie wie sie durch Fehlerkorrekturverfahren minimiert werden kann. Außerdem wurden unterschiedliche Modelle für universelle Quantencomputer vorgestellt, die auf verschiedenen Technologien basieren.

Jedoch haben wir auch gesehen, dass Quantencomputer nicht nur eine Theorie ist und bereits in der Praxis eingesetzt wird. So haben wir die Bell-Ungleichung betrachtet und gezeigt, wie sie mit einem Quantencomputer simuliert werden kann.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Quanteninformatik sowohl ein enormes Potenzial als auch einige fundamentale Herausforderungen birgt. Die Entwicklung von Quantencomputern und -algorithmen ist ein aktives Forschungsfeld, das in den nächsten Jahren weiter an Bedeutung gewinnen wird. Wir sind sehr gespannt, wie sich die Technologie entwickeln wird und in welchen Bereichen wir selbst damit auch in Berührung kommen werden.

Literatur

- [Acharya et al., 2024] Acharya, R., Abanin, D. A., Aghababaie-Beni, L., Aleiner, I., Andersen, T. I., Ansmann, and Google Quantum AI and Collaborators (2024). Quantum error correction below the surface code threshold. *Nature*, pages 1–7. Publisher: Nature Publishing Group.
- [Aguado and Kouwenhoven, 2020] Aguado, R. and Kouwenhoven, L. P. (2020). Majorana qubits for topological quantum computing. *Physics Today*, 73(6):44–50.
- [Arute et al., 2019] Arute, F., Arya, K., Babbush, R., Bacon, D., Bardin, J. C., Barends, R., Biswas, R., Boixo, S., Brandao, F. G. S. L., Buell, D. A., Burkett, B., Chen, Y., Chen, Z., Chiaro, B., Collins, R., Courtney, W., Dunsworth, A., Farhi, E., Foxen, B., Fowler, A., Gidney, C., Giustina, M., Graff, R., Guerin, K., Habegger, S., Harrigan, M. P., Hartmann, M. J., Ho, A., Hoffmann, M., Huang, T., Humble, T. S., Isakov, S. V., Jeffrey, E., Jiang, Z., Kafri, D., Kchedzhi, K., Kelly, J., Klimov, P. V., Knysh, S., Korotkov, A., Kostritsa, F., Landhuis, D., Lindmark, M., Lucero, E., Lyakh, D., Mandrà, S., McClean, J. R., McEwen, M., Megrant, A., Mi, X., Michielsen, K., Mohseni, M., Mutus, J., Naaman, O., Neeley, M., Neill, C., Niu, M. Y., Ostby, E., Petukhov, A., Platt, J. C., Quintana, C., Rieffel, E. G., Roushan, P., Rubin, N. C., Sank, D., Satzinger, K. J., Smelyanskiy, V., Sung, K. J., Trevithick, M. D., Vainsencher, A., Villalonga, B., White, T., Yao, Z. J., Yeh, P., Zalcman, A., Neven, H., and Martinis, J. M. (2019). Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, 574(7779):505–510. Publisher: Nature Publishing Group.
- [Assis et al., 2009] Assis, A., Ribeiro, A., and Vannucci, A. (2009). *The field concepts of Faraday and Maxwell*, pages 31–38. UNICAMP.
- [Bacciagaluppi, 2020] Bacciagaluppi, G. (2020). The Role of Decoherence in Quantum Mechanics. In Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, fall 2020 edition.
- [Bell, 1964] Bell, J. S. (1964). On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physique Fizika*, 1(3):195–200.
- [Bohm, 1952] Bohm, D. (1952). A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden"variables. i. *Phys. Rev.*, 85:166–179.
- [Bohr, 1935] Bohr, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 48:696–702.
- [Breuer and Petruccione, 2007] Breuer, H.-P. and Petruccione, F. (2007). Decoherence. In Breuer, H.-P. and Petruccione, F., editors, *The Theory of Open Quantum Systems*, page 0. Oxford University Press.
- [BSI, 2022] BSI (2022). Quantum Machine Learning im Kontext der IT-Sicherheit (Grundlagen). <https://www.bsi.bund.de/DE/Service-Nav/Publikationen/Studien/QML/QML.html?nn=1020142>. 2025-03-02.

- [BSI; Bauckhage, Christian, et al., 2022] BSI; Bauckhage, Christian, et al. (2022). Quantum machine learning in the context of IT Security. https://www.bsi.bund.de/SharedDocs/Downloads/DE/BSI/Publikationen/Studien/QML/QML_in_the_Context_of_IT_Security.pdf?__blob=publicationFile&v=2. 2025-03-02.
- [Clauser et al., 1969] Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A., and Holt, R. A. (1969). Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories. *Physical Review Letters*, 23(15):880–884. Publisher: American Physical Society.
- [Couteau, 2018] Couteau, C. (2018). Spontaneous parametric down-conversion. *Contemporary Physics*, 59(3):291–304. Publisher: Taylor & Francis_eprint: <https://doi.org/10.1080/00107514.2018.1488463>.
- [Ducheyne, 2009] Ducheyne, S. (2009). Understanding (in) Newton’s argument for universal Gravitation. *Journal for General Philosophy of Science*, 40:227–258.
- [Einstein et al., 1935] Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780.
- [Faye, 2024] Faye, J. (2024). Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics. In Zalta, E. N. and Nodelman, U., editors, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Summer 2024 edition.
- [Fraunhofer Cluster of Excellence Cognitive Internet Technologies, 2025] Fraunhofer Cluster of Excellence Cognitive Internet Technologies (2025). Maschinelles lernen auf quantencomputern. <https://www.cit.fraunhofer.de/de/Forschungsthemen/quantencomputing.html>. 2025-03-02.
- [Fraunhofer IWM, 2025] Fraunhofer IWM (2025). Quantencomputer für innovative Materialsimulation nutzen. https://www.iwm.fraunhofer.de/de/geschaeftsfelder/werkstoffbewertung-lebensdauerkonzepte/materialmodellierung/quantencomputer_innovative_materialsimulation_nutzen.html.
- [Golovach, 2006] Golovach, V. (2006). Condensed Matter Theory. <https://quantumtheory.physik.unibas.ch/people/golovach/>. 2025-03-21.
- [Hensen et al., 2015] Hensen, B., Bernien, H., Dréau, A. E., Reiserer, A., Kalb, N., Blok, M. S., Ruitenberg, J., Vermeulen, R. F. L., Schouten, R. N., Abellán, C., Amaya, W., Pruneri, V., Mitchell, M. W., Markham, M., Twitchen, D. J., Elkouss, D., Wehner, S., Taminiau, T. H., and Hanson, R. (2015). Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature*, 526(7575):682–686.
- [Homeister, 2022] Homeister, M. (2022). *Quantum Computing verstehen: Grundlagen – Anwendungen – Perspektiven*. Computational Intelligence. Springer Fachmedien, Wiesbaden.

- [IBM, 2025] IBM (2025). CHSH Inequality. <https://learning.quantum.ibm.com/tutorial/learning.quantum.ibm.com/tutorial/chsh-inequality/>. 2025-03-17.
- [Kjaergaard et al., 2020] Kjaergaard, M., Schwartz, M. E., Braumüller, J., Krantz, P., Wang, J. I.-J., Gustavsson, S., and Oliver, W. D. (2020). Superconducting Qubits: Current State of Play. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 11(Volume 11, 2020):369–395. Publisher: Annual Reviews.
- [Loss and Divincenzo, 1998] Loss, D. and Divincenzo, D. P. (1998). Quantum computation with quantum dots. *Physical Review A*, 57:120–126. Publisher: APS ADS Bibcode: 1998PhRvA..57..120L.
- [Nayak et al., 2008] Nayak, C., Simon, S. H., Stern, A., Freedman, M., and Das Sarma, S. (2008). Non-Abelian anyons and topological quantum computation. *Reviews of Modern Physics*, 80(3):1083–1159. Publisher: American Physical Society.
- [Nielsen and Chuang, 2010] Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. (2010). Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition. ISBN: 9780511976667 Publisher: Cambridge University Press.
- [Qiskit, 2024] Qiskit (2024). Entanglement and Bell’s Inequality | Qiskit in the Classroom. <https://www.youtube.com/watch?v=pS691qCMdy8>. 2025-03-17.
- [QuTech Academy, 2018] QuTech Academy (2018). Quantum error correction codes, part 1 and 2. <https://www.youtube.com/watch?v=4hWUIGZh6WEandhttps://www.youtube.com/watch?v=wTaFd7nqbtQ>. 2025-01-30.
- [Segal, 1947] Segal, I. E. (1947). Postulates for General Quantum Mechanics. *Annals of Mathematics*, 48(4):930–948. Publisher: [Annals of Mathematics, Trustees of Princeton University on Behalf of the Annals of Mathematics, Mathematics Department, Princeton University].
- [Stack, 2013] Stack, J. D. (2013). Complex numbers in quantum mechanics. https://courses.physics.illinois.edu/phys580/fa2013/susy_v2.pdf. 2025-02-11.
- [TU Wien, 2023] TU Wien (2023). Grenzen für Quantencomputer: Perfekte Uhren sind unmöglich. <https://www.tuwien.at/tu-wien/aktuelles/news/grenzen-fuer-quantencomputer-perfekte-uhren-sind-unmoeglich>. 2025-03-02.
- [Urenda and Kreinovich, 2023] Urenda, J. C. and Kreinovich, V. (2023). Topological explanation of why complex numbers are needed in quantum physics. https://scholarworks.utep.edu/cs_techrep/1829/. 2025-02-11.