第1章 一般的な確率論

〈参考文献〉
S. E. シュリーヴ.
ファイナンスのための確率解析 II (連続時間モデル).
丸善出版. 2012.

1.1 無限確率空間

- (中高の復習) 標本空間 Ω が有限集合のときどうだったか.
  - 任意の事象 $A \subset \Omega$ の要素の個数が有限なので, 任意の A に確率測度 $\mathbb{P}(A)$ が $\#A / \#\Omega$ で定義できた.
    なので確率空間は $(\Omega, \mathbb{P})$ で表現できた.
  - Ex. サイコロを1回投げるという試行の確率空間は
    $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
    $\mathbb{P}(A) = \#A / \#\Omega$
    偶数の目が出るという事象は $A = \{2, 4, 6\}$ なので
    $$\mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \frac{\#\{2,4,6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$
- じゃあ標本空間 Ω が無限集合になると何が困るのか.
  - 任意の事象 $A \subset \Omega$ の要素の個数が数えられるとは限らない.
    ので上の $\mathbb{P}(A)$ の定義は使えない. 別の定義を考える必要がある.
  - 無限集合 Ω の任意の部分集合 A を扱うこと自体が難しい.
    - Ex. 実数 $\mathbb{R}$ の部分集合全体はどんな感じ? → 無理.

→ なので, Ω の任意の部分集合 A に $\mathbb{P}(A)$ を定義するのではなく $\mathbb{P}(A)$ が上手いこと定義できる部分集合たちと, その $\mathbb{P}(A)$ をさらに利用すれば $\mathbb{P}(A)$ が定義できるような部分集合たちのみに $\mathbb{P}$ を定義する.

→ $\mathbb{P}$ を定義する Ω の部分集合族を $\mathcal{F}$ とかき, 確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で規定することにする.

- 試行 $\mathbb{T}$: 何らかの行為.
- 標本空間 Ω : 試行の結果起こりうること全体がなす集合.
- 事象 A : Ω の部分集合であって確率を考える対象.
- $\#A$: 集合 A の要素の個数.
- $A \subset B$: A は B の部分集合である.
  このノートではイコールを含む.
  本によって流儀は異なる.
- 有限集合 : 要素の個数が有限.
- 無限集合 : 要素の個数が無限.
  - 可算集合 : 要素の個数が無限だが要素に番号をふることはできる.
    $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$
    Ex. 整数全体, 有理数全体
  - 非可算集合 : 要素に番号をふれない.
    Ex. 実数全体, 無理数全体
- 〜族 : 〜の集まり.

教科書P1の補足：「コインを無限回投げる」が非可算集合。

∵ 裏が出たら0，表が出たら1を書いて並べることにすると，1回の試行の結果に対して「0100101110…」のような数字の列ができる。この列の頭に「0.」を付けて「0.0100101110…」として2進小数に見たてると，起こりうる全てのパターンは $[0,1]$ 閉区間を埋め尽くす。□

※ $(0.111111\cdots)_2 = 1$

※ $[0,1]$ が可算集合とすると，$[1,2]$，$[2,3]$，… も可算集合となり $\mathbb{R}$ が可算集合になってしまう。（または，対角線論法をつかうと $[0,1]$ が非可算集合であることが示せる。）

※ 要するに「コインを無限回投げる」は「$[0,1]$ から実数を1つ選ぶ」と同等。

・Ω の部分集合全体ではなくて、Ω の部分集合族 $\mathcal{F}$ 上で確率測度 $\mathbb{P}$ を定義することにしたわけだが，そのような $\mathcal{F}$ は Ω 上の σ-加法族であってほしい。

・なぜかというと $\mathbb{P}$ が可算加法性を満たすようにしたいから。

・$\mathbb{P}$ に可算加法性を満たしてほしいのは、「確率測度はそうあってほしい」と決めたから。

定義 1.1.1（Ω 上の σ-加法族）

Ω を空でない集合とし，$\mathcal{F}$ を Ω の部分集合族とする．次の(i)～(iii)を満たすとき、$\mathcal{F}$ は Ω 上の σ-加法族であるという．

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$　（Ω 自身は $\mathcal{F}$ の元）

(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$　（補集合も元）

(iii) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$　（可算和も元）

・(i)，(ii) より明らかに $\emptyset \in \mathcal{F}$．

・Ω 上の σ-加法族の例には以下のようなのがある．

・Ex1. 2^{Ω}（$\equiv \Omega$ の部分集合全体）

・Ex2. $\{\emptyset, \Omega\}$

・Ex3. $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$（これは $A \neq \emptyset, \Omega$ なる A を含む最小の σ-集合体．）

・ちなみに $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$（可算個の共通部分も元）．

$$\because\ A_n \in \mathcal{F} \underset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} A_n^c \in \mathcal{F} \underset{\text{(iii)}}{\Rightarrow} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{F} \underset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

ド・モルガン

- 確率測度 $\mathbb{P}$ は、可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ に対し以下を満たすよう決める。

定義 1.1.2 ($(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度)

Ω を空でない集合とし、$\mathcal{F}$ を Ω 上の σ-加法族とする。$\mathcal{F}$ 上に定義された関数 $\mathbb{P}$ で以下を満たすものを $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度という。

(i) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(iii) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$, $A_n \cap A_l = \phi \ (n \neq l)$ ならば

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \qquad \text{(可算加法性)}$$

- 3つ目の「可算加法性」は「有限加法性かつ単調連続性」と同等。
  - 有限加法性：$A_n \cap A_{l \neq n} = \phi \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n)$
  - 単調連続性：$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \cdots \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$
  - 有限加法性は $N=2$ のときは $A \cap B = \phi \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
    「AとBが同時に起こらない事象だったら、AかBが起こる確率は Aが起こる確率とBが起こる確率であってほしい」という確率測度への要請。
  - 単調連続性は「先に事象について極限をとってから確率を求めても、先に確率を求めてからその極限をとっても、収束する先が同じであってほしい」という確率測度への要請。
- 明らかに $\mathbb{P}(\phi) = 0$.
  - 示す方法はいくらでもあるが、2個加法性 $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ をつかえば、$\mathbb{P}(\phi \cup \phi) = \mathbb{P}(\phi) + \mathbb{P}(\phi) \Rightarrow \mathbb{P}(\phi) = 2\mathbb{P}(\phi) \Rightarrow \mathbb{P}(\phi) = 0$.
- 明らかに $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$. 証明略。

- ここまでで一般的な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}$ への要請をみてきた。じゃあ具体的にどんな $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}$ を取り扱っていくのか。

→ この本では $\mathcal{F}$ はボレル σ-加法族のようなので先に定義しておく。

定理 ($S \subset 2^{\Omega}$ から生成される Ω 上の σ-加法族)

S を Ω の任意の部分集合族とすると、S を含む最小の Ω 上の σ-加法族が一意的に存在する。これを $\sigma[S]$ と書き、S から生成される Ω 上の σ-加法族という。

定義 (距離空間 E 上のボレル σ-加法族)

$E = (E, d)$ を距離空間、$\mathcal{O}$ を E の開部分集合全体からなる集合族とする。このとき $\mathcal{O}$ から生成される E 上の σ-加法族 $\mathcal{B}(E) = \sigma[\mathcal{O}]$ を E 上のボレル σ-加法族という。

- 定理の証明は省略します。
  - 例えば Ω の部分集合族 S がたった1つの部分集合 A ($A \neq \phi, \Omega$) のみを含むとき $S = \{A\}$ から生成される Ω 上の σ-加法族は
    $\sigma[S] = \{\phi, A, A^c, \Omega\}$ になります。
    $S = \{A\}$ は σ-加法族の条件を満たしていませんが、ϕ, A^c, Ω をもってきてあげると σ-加法族になります。そして、$\{A\}$ を部分集合にもつ σ-加法族であって要素数が4つ以下のものはこれ以外に存在しません(一意性)。
- 距離空間とは、集合であってかつ要素間に距離が定義されているものです。距離空間とか言い出したのは、開部分集合とか閉部分集合が定義されているのは距離空間だからです(距離空間よりもっと一般に位相空間に定義されていますがいま位相空間をもち出すことに意味はないのでもち出しません)。もっというとこの本でボレル σ-加法族が議論されている距離空間は $\mathbb{R}^d = (\mathbb{R}^d, d$次元ユークリッド距離$)$ なのでふつうのユークリッド空間を考えればよいです。 (以下、1次元ユークリッド空間、つまり実数 $\mathbb{R}$ の話)
- 教科書 P4では閉区間全体からはじめて、σ-加法族となるために必要な他の全ての集合を加えたのがボレル σ-加法族といっていますが開区間全体からはじめても同じです。もっというと、
  - 左閉右開区間 $[a, b)$ 全体からはじめてもボレル σ-加法族になります。
  - 左開右閉区間 $(a, b]$ 全体からはじめてもボレル σ-加法族になります。

  これは教科書P4にもかいてありますが、
  - 閉じた端っこは開いた端っこの可算共通部分 ($\bigcap_{n=1}^{\infty}$) でかける。
  - 開いた端っこは閉じた端っこの可算和 ($\bigcup_{n=1}^{\infty}$) でかける。

  これらのことから、$[a, b]$ の形、(a, b) の形、$[a, b)$ の形、$(a, b]$ の形でかける区間すべてを結局はボレル σ-加法族に迎えいれないといけないです。
  (「可算和も元」「可算共通部分も元」が σ-加法族の要請なので。)
- 教科書 P4 にあるように $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ も $\mathcal{B}([0,1])$ の元です($\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の元でもあります)。1点集合 $\{0\}$ も元だし、1点集合を可算個集めたのも元です。
  - 有理数全体 $\mathbb{Q}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の元です(1点集合の可算和だから)。
  - 無理数全体も $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の元です($\mathbb{Q}^c$ だから)。

- じゃあ、そのボレル σ-加法族である $\mathcal{B}$ 上にどんな確率測度を定義するのか。

例 1.1.3 ($[0,1]$ 上のルベーグ測度)

可測空間 $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ 上で、以下を満たす確率測度 $\mathbb{P}$ が一意的に存在する。 $\mathbb{P}([a, b]) = b - a$, $0 \leq a \leq b \leq 1$

- 「一意的に存在する」の意味：上の$\mathbb{P}$は $A \in \mathcal{B}([0,1])$ のうち、
「$A=[a,b]$という形でかけるもの」についてしか直接定義していないが、
実はこの式だけで任意の $A \in \mathcal{B}([0,1])$ について $\mathbb{P}(A)$ が定まっている。
    - Ex1. $\mathbb{P}([0,\frac{1}{2}]) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.
    - Ex2. $\mathbb{P}(\{\frac{1}{2}\}) = \mathbb{P}([\frac{1}{2},\frac{1}{2}]) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.
    - Ex3. $\mathbb{P}([0,\frac{1}{2})) = \mathbb{P}([0,\frac{1}{2}]) - \mathbb{P}([\frac{1}{2},\frac{1}{2}]) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.
- このルベーグ測度$\mathbb{P}(A)$を、この本では$\mathcal{L}(A)$と書く。
- 「$[0,1]$から実数を1つ選ぶ」という試行について、$([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathcal{L})$
はちゃんと感覚に合う確率空間になる。
    - 選んだ数が区間$[0,\frac{1}{2}]$に入る確率は$\frac{1}{2}$である。
    - 選んだ数が$\frac{1}{2}$ぴったりになる確率は0である。
→ これはそうせざるを得ない。しかし、$\frac{1}{2}$ぴったりを引くことはあり得る。
「確率が0であること」はイコール「起こらないこと」ではない。

※ 教科書では、「$[0,1]$上のルベーグ測度は$[0,1]$上のボレルσ-加法族
$\mathcal{B}([0,1])$に定義されている」としている。これは正しい。
但し、ルベーグ測度自体はボレルσ-加法族よりも大きい部分集合族に
定義できる。「$[0,1]$の部分集合のうちルベーグ測度が定義できるもの全体」は
「$[0,1]$の部分集合全体」と濃度が等しい（ボレルσ-加法族の濃度はそれら
より小さい）。じゃあ、「$[0,1]$の部分集合のうちルベーグ測度が定義できない
ものが存在するか」については、
    - 選択公理を仮定した下では、存在する（ヴィタリ集合）。
    - 選択公理を仮定しない下では、存在の証明も反証もできない。

- 教科書P4~7で「コインを無限回投げる」の確率空間を構成していますが
そんなに得るものがないので割愛します。

定義1.1.5（"ほとんど確実に"）
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$を確率空間とする。$A \in \mathcal{F}$が$\mathbb{P}(A)=1$を満たすとき、
ほとんど確実に事象Aが起こるという。

- 上で「確率が0であること」はイコール「起こらないこと」ではないと書いたが、
同様に「確率が1であること」はイコール「起こりうる全てのことを含んでいる」
ではない。ので「ほとんど確実に」という言い方をする。
- 英語では almost surely とかく。