Lezione 6

Universo delle chiavi U

$\cup$

K chiavi memorizzate, $|K| = n$

Assumiamo la funzione hash

$$h : U \longrightarrow \{0, \dots, m-1\}$$
$$k \longmapsto h(k) \rightsquigarrow T[h(k)]$$

fattore di carico $\alpha = \frac{n}{m}$ (# medio di chiavi memorizzate in uno slot)

$T[0, 1, \dots, m-1]$. Sia $n_j = T[j]$ $\quad j \in \{0, \dots, m-1\}$

Abbiamo che $\underline{n = n_0 + n_1 + \dots + n_{m-1}}$.

Se l'hashing è uniforme e indipendente

$$\mathbb{E}[n_j] = \alpha \quad \left(\begin{array}{l}\text{valore atteso} \\ \text{di } n_j\end{array}\right).$$

Assumeremo anche che

calcolare $h(k)$ e accedere a $T[h(k)]$ necessiti tempo costante $\Theta(1)$.

6.1 RICERCA SENZA SUCCESSO

Thm: Il valore atteso del tempo computazionale di una ricerca senza successo in una tabella hash con concatenazione è $\Theta(1+\alpha)$.

Proof:

Tempo = tempo per calcolare $h(k)$ e accedere a $T[h(k)]$ + tempo per scorrere la lista in $T[h(k)]$

$$\mathbb{E}[\text{Tempo}] = \Theta(1) + \mathbb{E}[n_{h(k)}] = \Theta(1) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m} n_j = \Theta(1) + \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} n_j =$$

$$\Theta(1) + \frac{1}{m} n = \Theta(1) + \alpha = \Theta(1+\alpha). \quad \square$$

RICERCA CON SUCCESSO

THM: Una ricerca con successo su una tabella hash in cui le collisioni sono risolte per concatenazione è $\Theta(1+\alpha)$.

Proof: L'elemento x che stiamo cercando è memorizzato nella tabella.

Supponiamo di memorizzare i nuovi elementi in testa alla lista collegata che gli corrisponde.

Se x si trova in $T[h(x)]$, dobbiamo scorrere tutti gli elementi che sono stati memorizzati dopo x.

Sia x_i l'i-esimo elemento ad essere stato inserito nella tabella, $k_i = x_i.key$

Definiamo $\forall\ q \in \{0, \dots, m-1\}$, $\forall\ k_i, k_j \in K$ con $k_i \neq k_j$

sia
$$X_{ijq} = \begin{cases} 1 & \text{se stiamo cercando } x_i,\ h(k_i) = q,\ h(k_j) = q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X_{ijq}] = 0 \Pr[X_{ijq} = 0] + 1 \Pr[X_{ijq} = 1] = \Pr[X_{ijq} = 1] =$$
$$= \Pr[\text{stiamo cercando } x_i] \Pr[h(k_i) = q] \Pr[h(k_j) = q] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{nm^2}$$

Sia
$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{se } x_j \text{ appare prima dell'elemento cercato.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Y_j = \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{j-1} X_{ijq}$$ (X_{ijq} è 1 per una scelta sola di (q, i), $i < j$, $q = h(k_i)$)

In fine: $Z = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ $\left(\# \text{ di elementi } x_i \text{ in } T[h(x_i)] \text{ che precedono} \right)$.

$$\mathbb{E}[\text{Time}] = \underbrace{\Theta(1)}_{\substack{\text{tempo} \\ \text{per calcolare} \\ h(k_i) \text{ e} \\ \text{accedere} \\ T[h(k_i)]}} + \mathbb{E}[Z+1] = \Theta(1) + \mathbb{E}[Z] =$$

$$= \Theta(1) + \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} Y_j\right] = \Theta(1) + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[Y_j] = \Theta(1) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{E}[X_{ijq}] =$$

$$= \Theta(1) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{n m^2} = \Theta(1) + \frac{1}{n m^2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{q=0}^{m-1} \left(\sum_{i=1}^{j-1} 1 \right) =$$

$$= \Theta(1) + \frac{1}{n m^2} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} (j-1) = \Theta(1) + \frac{1}{n m^2} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} j =$$

$$\Theta(1) + \frac{1}{n m^2} \sum_{q=0}^{m-1} \frac{(n-1)n}{2} = \Theta(1) + \frac{1}{n m^2} \frac{n(n-1)}{2} \sum_{q=0}^{m-1} 1 =$$

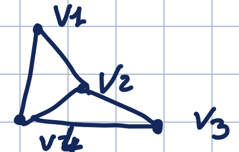
$$\Theta(1) + \frac{1}{\cancel{n} m^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{n}(n-1)}{2} \cancel{m} = \Theta(1) + \frac{n}{2m} - \frac{1}{2m} =$$

$$\Theta(1) + \frac{\alpha}{2} - \frac{n}{2mn} = \Theta(1) + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2n} = \Theta(1+\alpha) \quad \square$$

GRAFI

Un grafo è una coppia $G = (V, E)$ dove V è un insieme di vertici (o nodi) $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $E \subseteq V^2$ è l'insieme degli archi (o link).

Es:



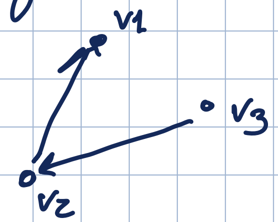
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$\mathcal{E}=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_1),(v_4,v_2)\}$

$(v_1,v_3)\in V^2$ ma $(v_1,v_3)\in\mathcal{E}$.

Se $(v_1,v_2)\equiv(v_2,v_1) \Rightarrow$ grafo non orientato $\rightsquigarrow \{v_1,v_2\}$

Se $(v_1,v_2)\neq(v_2,v_1) \Rightarrow$ grafo orientato



Se $\mathcal{E}=V^2$ grafo <u>completo</u>. Un grafo completo con n vertici si dicono <u>n-clique</u>

Come si rappresenta un grafo

- matrice di adiacenze

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} v_1 & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{array} & \begin{pmatrix} e_{11} & & \\ & & \\ & & e_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \qquad e_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{se } (v_i,v_j)\in\mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{spazio } O(n^2)$$

$n=|V|$, $m=|\mathcal{E}|$

Lista di adiacenze $\rightsquigarrow O(n+m)$

Cammino in un grafo da u a v $\quad u,v\in V$

è una sequenza $\{v_0, v_1, \dots, v_{m-1}\}\subseteq V$

$v_0=u$

$v_{m-1}=v$

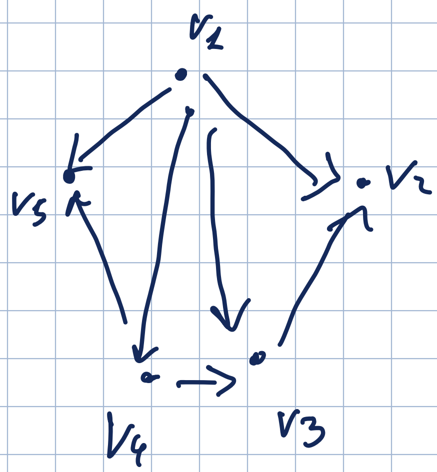
$\forall\, i=0,\dots,m-2 \quad (v_i,v_{i+1})\in\mathcal{E}$

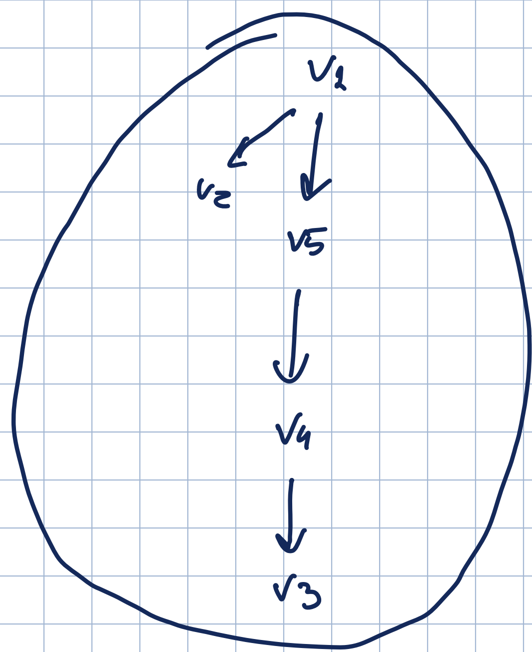
Ciclo è un cammino da v a se stesso

DAG: Direct Acyclic Graph = grafo orientato e aciclico

Grafo connesso: se $\forall\, u,v \in V$ $\exists$ cammino da u a v

$G = (V, E, w)$ $\quad w: E \to \mathbb{Q}$ grafo pesato





Sparso se $m = o(n^2)$
$= O(n)$

denso $m = \Theta(n^2)$