计算机图形学 | hw3

github

前言

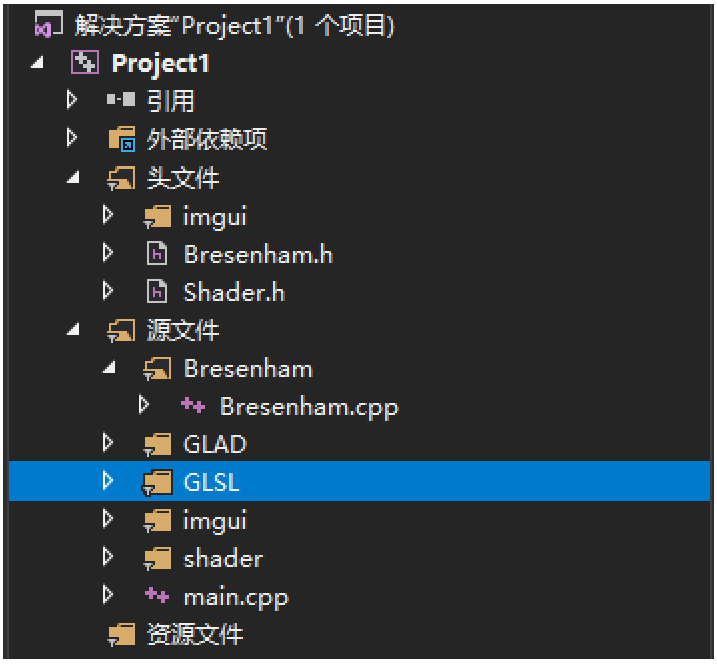
输入说明与文件结构说明。

输入说明

因为下面的题目需要使用到整型的数据，因此在输入的时候，将标准坐标都扩大了100倍数，因此在计算出最终要输出的结点时，需要除以100，从而将点的坐标换算回标准坐标，这样就可以避免过多的浮点数运算。

文件结构说明

这次重构了一下代码，主要就是将操作VAO、VBO和EBO的代码移出了循环，然后封装了Bresenham类，用于这次实验。文件结构截图如下。



Basic

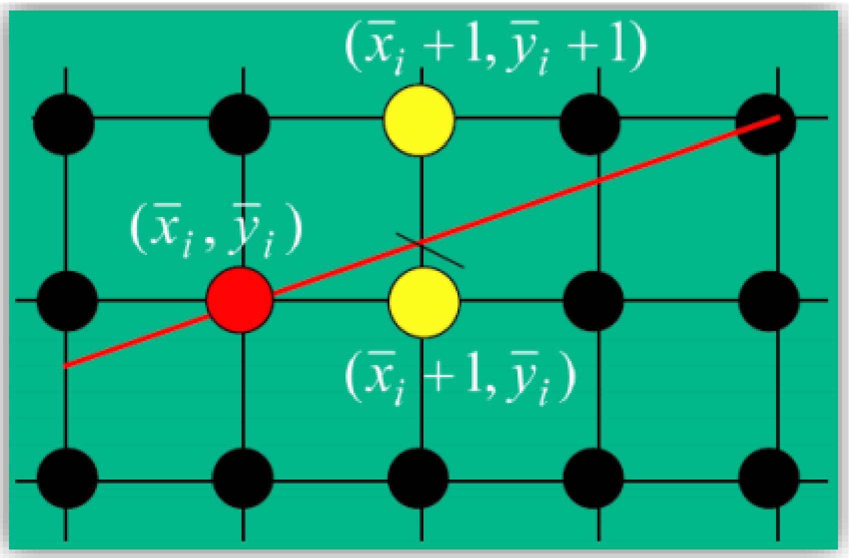
一、 使用Bresenham算法(只使用integer arithmetic)画一个三角形边框：input为三个2D点；output三条直线（要求图元只能用 GL_POINTS ，不能使用其他，比如 GL_LINES 等）。

1. 理论基础

使用Bresenham算法画三角形，其实只需要画3条直线即可。

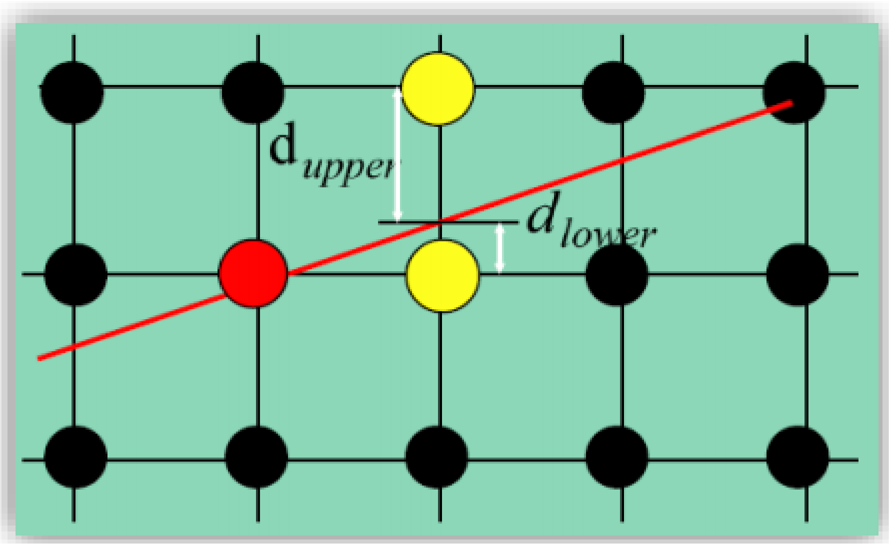
Bresenham算法主要的思想就是如下图，在画直线上某一点的时候，通过比较上下两个点跟真实值之间的距离，选取距离真实值比较小的那个点即可。

假设直线的斜率为m（$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$），且||m|| <= 1。则直线可以表示为$y = mx + B$，有下面的情况。



因此现在只需要判断d_{upper}和d_{lower}的大小即可。

若$d_{upper} - d_{lower} < 0$，则选上面的点，反之则选下面的点。



根据推导可以求得d_{upper}和d_{lower}：

$$\begin{aligned} d_{upper} &= \bar{y}_i + 1 - y_{i+1} \\ &= \bar{y}_i + 1 - mx_{i+1} - B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{lower} &= y_{i+1} - \bar{y}_i \\ &= mx_{i+1} + B - \bar{y}_i \end{aligned}$$

$d_{upper} - d_{lower}$可以表示为：

$$d_{lower} - d_{upper} = m(x_i + 1) + B - \overline{y}_i - (\overline{y}_i + 1 - m(x_i + 1) - B)$$
$$= 2\boxed{m}(x_i + 1) - 2\overline{y}_i + 2B - 1$$

division operation

上面已经讨论过了，我们只需要知道式子的正负即可，但是式子中的斜率m并不确定。下面通过在式子两边同时乘以Δx，化简之后有如下情况：

$$p_i = \Delta x \bullet (d_{lower} - d_{upper}) = 2\Delta y \bullet (x_i + 1) - 2\Delta x \bullet \overline{y}_i + (2B - 1)\Delta x$$
$$= 2\Delta y \bullet x_i - 2\Delta x \bullet \overline{y}_i + \boxed{(2B - 1)\Delta x + 2\Delta y}$$
$$= 2\Delta y \bullet x_i - 2\Delta x \bullet \overline{y}_i + c$$

where

$$\Delta x = x_1 - x_0, \Delta y = y_1 - y_0, \quad m = \Delta y / \Delta x$$
$$c = (2B - 1)\Delta x + 2\Delta y$$

这里需要注意的是，Δx的符号是一定是正的，这样就能确保式子的符号不改变。

因此就如下的判别标准：

- If $p_i \succ 0$, then $(\overline{x}_i + 1, \overline{y}_i + 1)$ is selected

  If $p_i \prec 0$, then $(\overline{x}_i + 1, \overline{y}_i)$ is selected

  If $p_i = 0$, *arbitrary one*

现在可以求出p_0

$$p_0 = 2\Delta y \bullet x_0 - 2\boxed{\Delta x \bullet \overline{y}_0} + (2B - 1)\Delta x + 2\Delta y$$
$$= 2\Delta y \bullet x_0 - 2\boxed{(\Delta y \bullet x_0 + B \bullet \Delta x)} + (2B - 1)\Delta x + 2\Delta y$$
$$= 2\Delta y - \Delta x$$

$$y_{i+1} = mx_{i+1} + B$$

接下来是递推式

$$p_{i+1} - p_i = (2\Delta y \bullet x_{i+1} - 2\Delta x \bullet \overline{y}_{i+1} + c) - (2\Delta y \bullet x_i - 2\Delta x \bullet \overline{y}_i + c)$$
$$= 2\Delta y - 2\Delta x(\overline{y}_{i+1} - \overline{y}_i)$$

当$p_i <= 0$时，取下面的点，y没有改变：

$p_{i+1} = p_i + 2\Delta y$

当$p_i > 0$时，取上面的点，y需要加1：

$p_{i+1} = p_i + 2\Delta y - 2\Delta x$

注意：

- 这里只讨论了斜率为正的情况，斜率为负的时候，在选取点的时候是y递减。

- 这里只讨论了斜率绝对值小于1的情况，斜率绝对值大于1的时候，将x和y调换计算，以y递增，最后再将x和y调换即可。

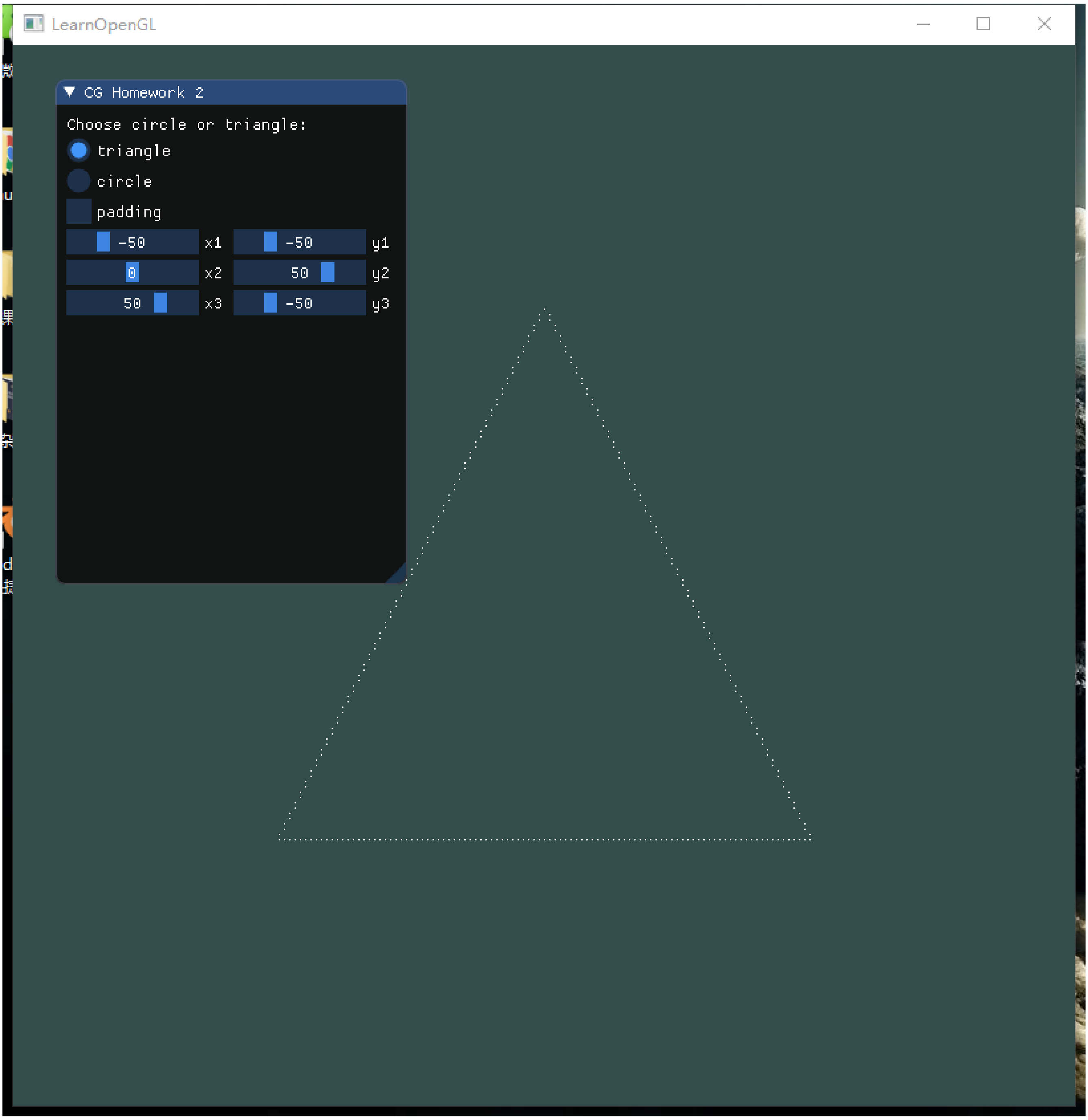
2. 实验

核心代码：

```
void Bresenham::triangle(int x1, int y1, int x2, int y2, int x3, int y3)
{
    generateLine(x1, y1, x2, y2);
    generateLine(x1, y1, x3, y3);
    generateLine(x2, y2, x3, y3);
}

void Bresenham::generateLine(int x1, int y1, int x2, int y2)
{
    unsigned int VAO, VBO;
    int delta_X = abs(x1 - x2);
    int delta_Y = abs(y1 - y2);

    // 斜率大于1调整x, y
    bool flag = delta_Y > delta_X;
    if (flag) {
        int temp = delta_X;
        delta_X = delta_Y;
        delta_Y = temp;
        temp = x1;
        x1 = y1;
        y1 = temp;
        temp = x2;
        x2 = y2;
        y2 = temp;
    }

    int x = x1 <= x2 ? x1 : x2;
    int y = x1 <= x2 ? y1 : y2;
    // 斜率正负
    bool positive = (x1 - x2) * (y1 - y2) >= 0;

    float vertices[1000];
    // 初始点
    int steps = delta_X + 1;
    int p = 2 * delta_Y - delta_X;
    for (int i = 0; i < steps; i++) {

        vertices[3 * i] = (flag ? (float)y : (float)(x + i)) / precision;
        vertices[3 * i + 1] = (flag ? (float)(x + i) : (float)y) / precision;
        vertices[3 * i + 2] = 0.0f;

        if (p > 0) {
            y = positive ? y + 1 : y - 1;
            p = p + 2 * delta_Y - 2 * delta_X;
        }
        else {
```

```
                p = p + 2 * delta_Y;
            }
        }

        // 渲染代码...
    }
```

实验截图：

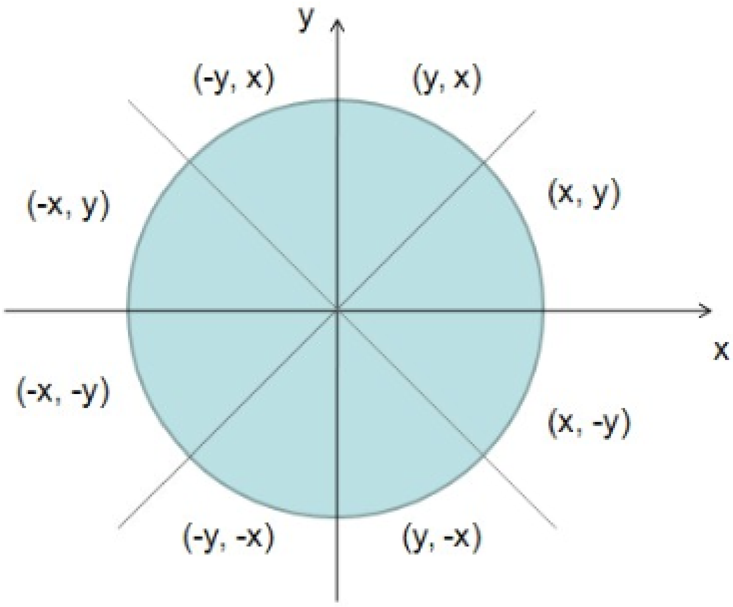


二、 使用Bresenham算法(只使用integer arithmetic)画一个圆：input为一个2D点(圆心)、一个integer半径；output为一个圆。

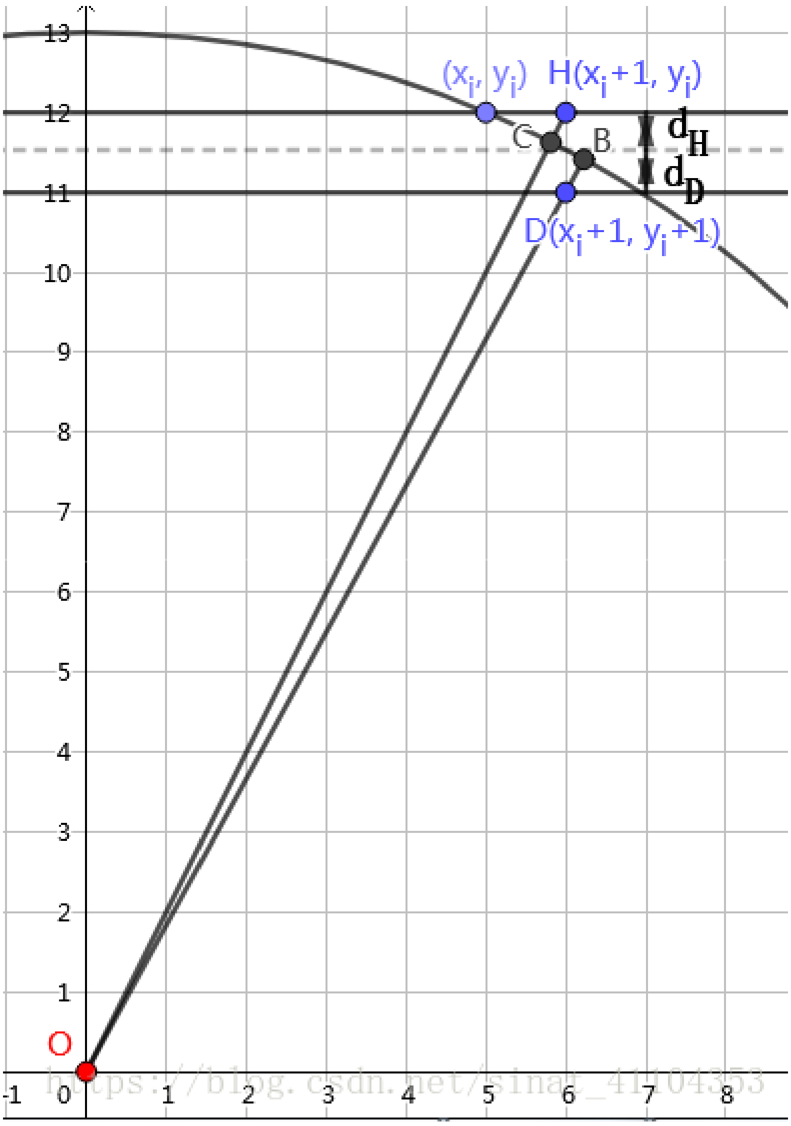
1. 理论基础

上面介绍了如何使用使用Bresenham算法画直线，使用Bresenham算法画圆的思路也类似。

利用圆的对称性，我们只需要计算八分之一圆。



考虑如图情况：



通过判断CH和BD之间的可以近似代替d_H和d_D，因此有以下近似：

$$\begin{aligned} d_H &= (x_i+1)^2 + y_i^2 - R^2 \\ d_D &= R^2 - (x_i+1)^2 - (y_i-1)^2 \end{aligned}$$

构造判别式：

$$\begin{aligned} p_i &= d_H - d_D \\ &= (x_i+1)^2 + y_i^2 - R^2 - (R^2 - (x_i+1)^2 + (y_i-1)^2) \\ &= 2(x_i+1)^2 + 2y_i^2 - 2y_i - 2R^2 + 1 \end{aligned}$$

将(0,R)代入求得p_0：

$p_0 = 3 - 2R$

推导递推式：

$$p_{i+1} - p_i = 4x_i + 6 + 2(y_{i+1}^2 - y_i^2 - y_{i+1} + y_i)$$

当$p_i < 0$时，需要选H点，y不变。

$p_{i+1} = p_i + 4x_i + 6$

当$p_i >= 0$时，需要选D点，y减一。

$p_{i+1} = p_i + 4(x_i - y_i) + 10$

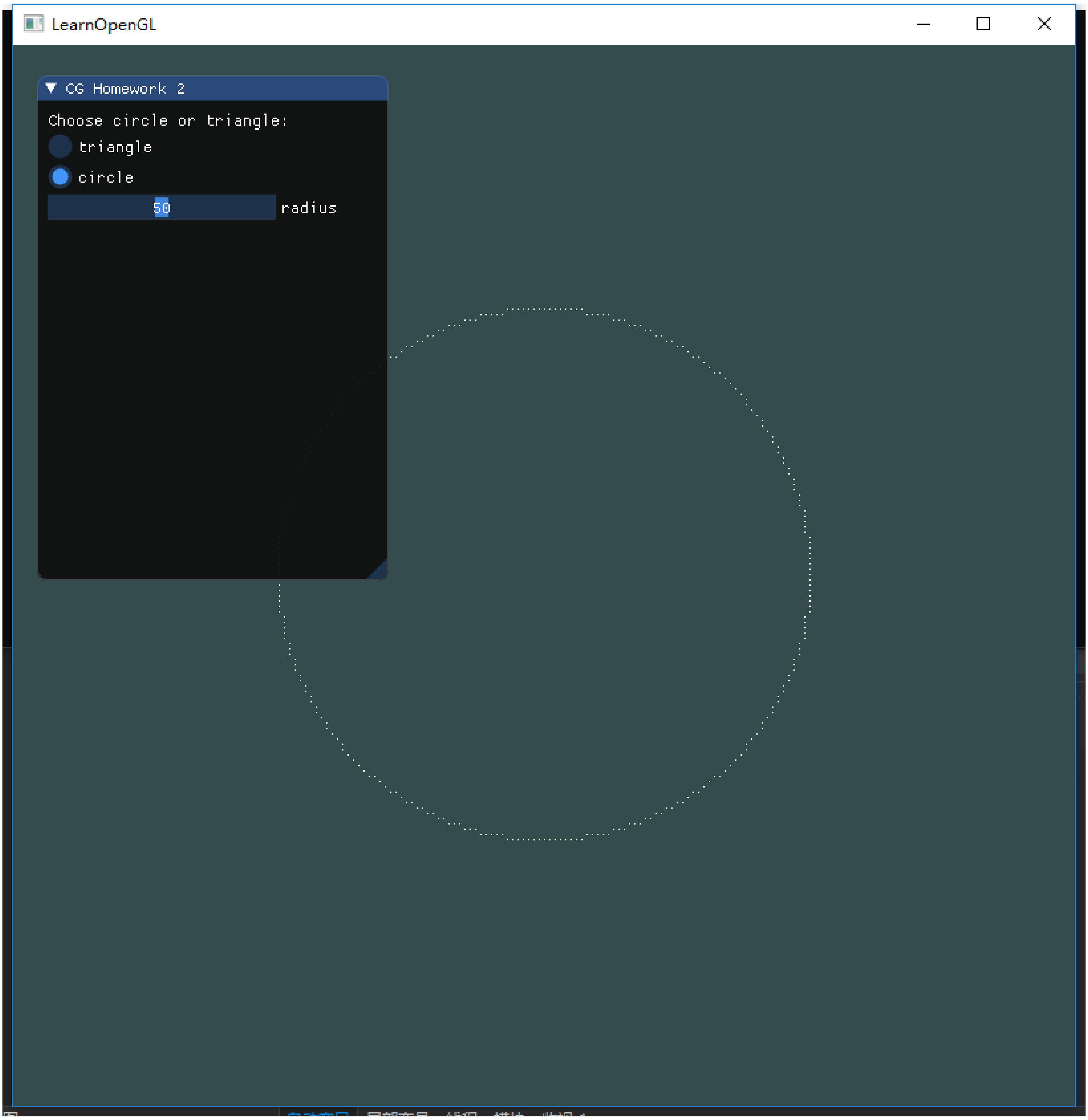
2. 实验

核心代码：

```
void Bresenham::circle(int center_X, int center_Y, int radius)
{
    // 起点
    int x = 0;
    int y = radius;

    int p = 3 - 2 * radius;
    float vertices[3000];
    steps = 0;
    for (; x <= y; x++) {

        // 八分之一圆
        addPoint(x, y, vertices);
        // 对称性求其余圆
        addPoint(-x, y, vertices);
        addPoint(x, -y, vertices);
        addPoint(-x, -y, vertices);
        addPoint(y, x, vertices);
        addPoint(-y, x, vertices);
        addPoint(y, -x, vertices);
        addPoint(-y, -x, vertices);

        if (p < 0) {
            p += 4 * x  + 6;
```

```
            } else {
                p += 4 * (x- y) + 10;
                y--;
            }
        }
        // 渲染代码...
    }
```

实验截图：



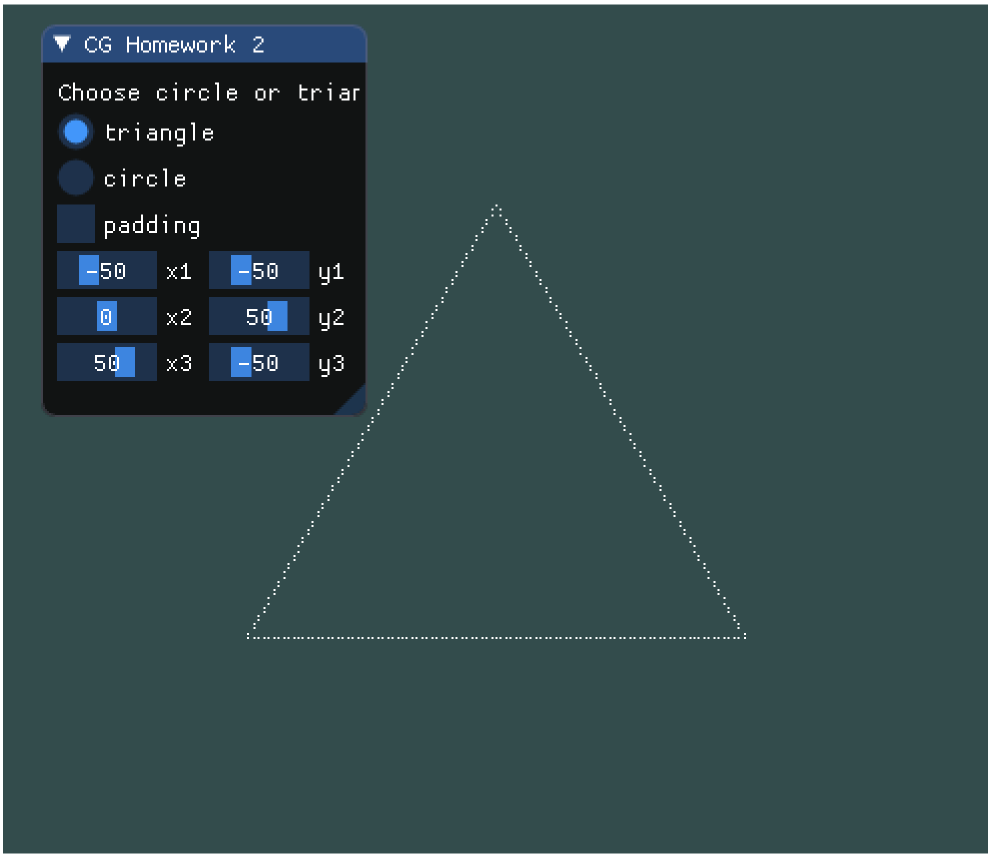
三、 在GUI在添加菜单栏，可以选择是三角形边框还是圆，以及能调整圆的大小(圆心固定即可)。

基本ImGui代码布局：

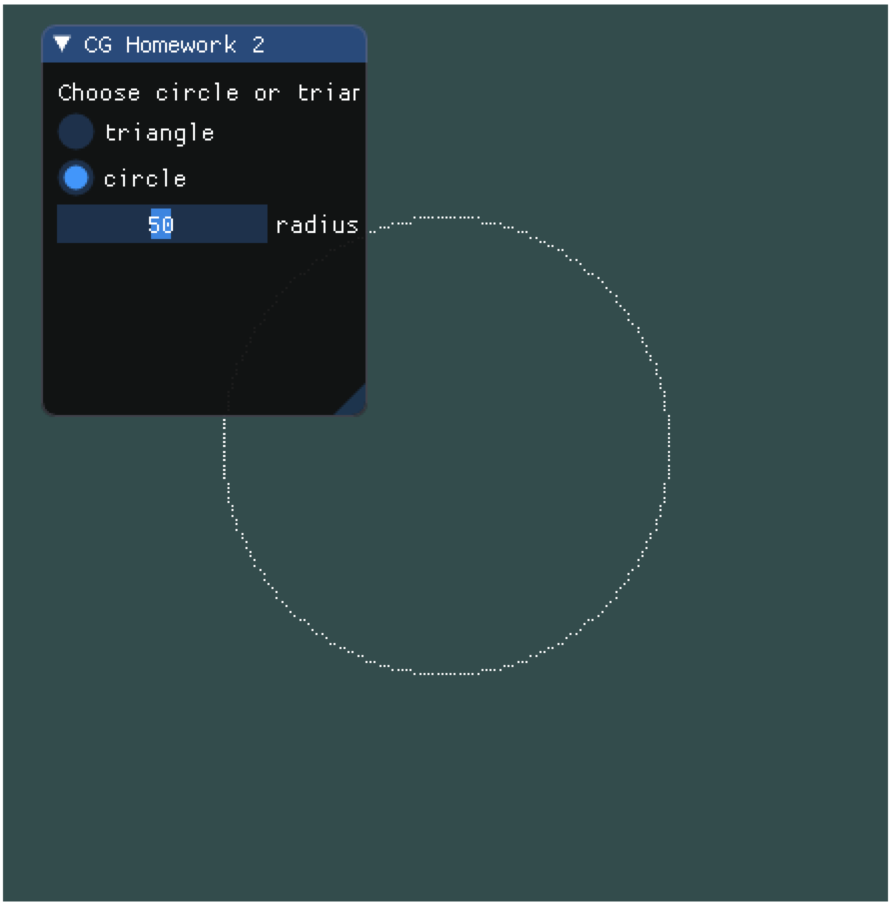
```
// Imgui框架
ImGui_ImplOpenGL3_NewFrame();
ImGui_ImplGlfw_NewFrame();
ImGui::NewFrame();

// 自定义布局
ImGui::Begin("CG Homework 2");
ImGui::Text("Choose circle or triangle: ");

ImGui::RadioButton("triangle", &show_type, 0);
ImGui::RadioButton("circle", &show_type, 1);

// 三角形布局imgui布局
if (show_type == 0) {

    ImGui::Checkbox("padding", &show_padding);

    ImGui::PushItemWidth(100);

    ImGui::SliderInt("x1", &x1, -precision, precision);
    ImGui::SameLine();
    ImGui::SliderInt("y1", &y1, -precision, precision);

    ImGui::SliderInt("x2", &x2, -precision, precision);
    ImGui::SameLine();
    ImGui::SliderInt("y2", &y2, -precision, precision);

    ImGui::SliderInt("x3", &x3, -precision, precision);
    ImGui::SameLine();
    ImGui::SliderInt("y3", &y3, -precision, precision);
}

// 圆布局imgui布局
if (show_type == 1) {
    ImGui::SliderInt("radius", &radius, 0, 100);
}
ImGui::NextColumn();
ImGui::End();
```

实验截图:

调整三角形顶点



调整圆半径



Bonus: 使用三角形光栅转换算法，用和背景不同的颜色，填充你的三角形。

理论基础

填充三角形的关键就是如何确定需要填充的点。

基本的思路就是，找到一个包含三角形的矩形，遍历矩形，确定每个点是否在三角形内即可，确定一个点是否在三角形内使用**同向法**。

首先使用直线的两点式计算出三角形三条边的直线方程。

假设直线上两点为(x1, y1), (x2, y2)，则有$\frac{x-x1}{x2-x1} = \frac{y-y1}{y2-y1}$，化简得到直线方程

$a*x+b*y-b*y1-a*x1=0$，其中$a=y_2-y_1, b=-(x_2-x_1)$

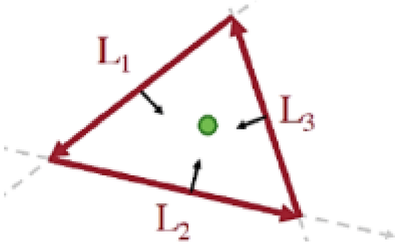
这样就可以获得三角形三条边的直线方程。

同向法

假设三角形另外一个点为(x3, y3)，以及当前遍历到的点(p1, p2)。

1. 将这两个点分别代入由(x1,y1)和(x2,y2)计算出的直线方程得到两个结果out1和out2。
2. out1和out2的正负表示了他们位于直线位置，如果同号，则说明在同一侧，否则说明不在同一侧。

利用同向法，我们可以通过根据(p1,p2)是否与三条直线对应的顶点同侧来判断该点是否在三角形中。可以看下图。



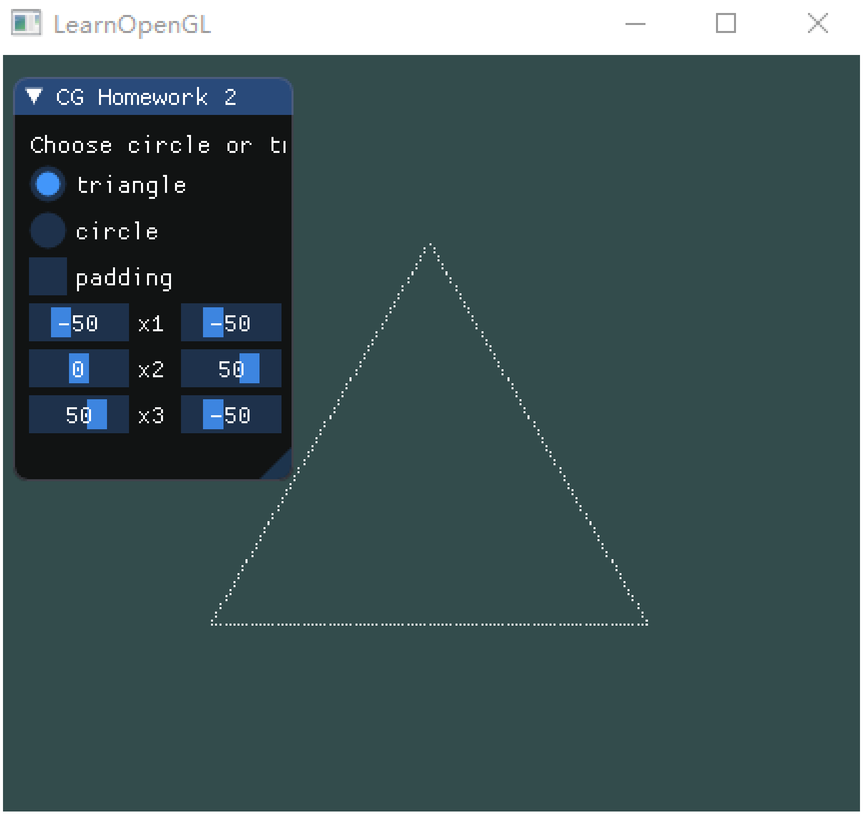
实验

核心代码：

```
void Bresenham::padding(int x1, int y1, int x2, int y2, int x3, int y3)
{
    int max_x = getMax(x1, x2, x3);
    int max_y = getMax(y1, y2, y3);
    int min_x = getMin(x1, x2, x3);
    int min_y = getMin(y1, y2, y3);


    float vertices[100000];
    int pointNum = 0;
    // 直线方程
    int a1 = y2 - y1, b1 = -(x2 - x1), c1 = -b1 * y1 - a1 * x1;
    int a2 = y3 - y2, b2 = -(x3 - x2), c2 = -b2 * y2 - a2 * x2;
    int a3 = y3 - y1, b3 = -(x3 - x1), c3 = -b3 * y1 - a3 * x1;

    for (int i = min_x; i <= max_x; i++) {
        for (int j = min_y; j <= max_y; j++) {
            if (checkSameSide(a1, b1, c1, i, j, x3, y3) &&
                checkSameSide(a2, b2, c2, i, j, x1, y1) &&
                checkSameSide(a3, b3, c3, i, j, x2, y2)) {
```

```
                vertices[3 * pointNum] = (float)i / precision;
                vertices[3 * pointNum + 1] = (float)j / precision;
                vertices[3 * pointNum + 2] = 0.0f;
                pointNum++;
            }
        }
    }

    // 渲染代码...

}

int Bresenham::getMax(int n1, int n2, int n3)
{
    int max = n1 > n2 ? n1 : n2;
    max = max > n3 ? max : n3;
    return max;
}

int Bresenham::getMin(int n1, int n2, int n3)
{
    int min = n1 < n2 ? n1 : n2;
    min = min < n3 ? min : n3;
    return min;
}

bool Bresenham::checkSameSide(int a, int b, int c, int x, int y, int p1, int p2)
{
    return a*x + b*y + c >= 0 && a * p1 + b * p2 + c >= 0 ||
        a * x + b * y + c <= 0 && a * p1 + b * p2 + c <= 0;
}
```

实验截图:



PS：本文使用了LateX语法，如果没有mathjax插件应该看不到数学公式，建议去看 pdf。