

1 Криптография

1.1

Постановка задачи. Простейшие криптосистемы. Сдвиг и аффинное преобразование. Частотный анализ. Биграммы.

Шифр Цезаря. Есть алфавит из N упорядоченных символов (у каждого символа есть свой номер от 0 до $N - 1$). Мы берём произвольное число a от 1 до $N - 1$ (сдвиг на 0 не имеет смысла) и сдвигаем все буквы на a позиций вправо. Таким образом, новый номер символа, в начальной строке стоящего под номером n , станет равен $(n + a) \bmod N$.

Аффинное преобразование. Есть алфавит из N упорядоченных символов (у каждого символа есть свой номер от 0 до $N - 1$). Здесь для зашифровки нужно 2 параметра. Назовём из k и b . Мы применяем линейную функцию к номеру каждого символа. Новый номер элемента, стоящего в начальной строке на позиции n будет равен $(n \cdot k + b) \bmod N$.

Частотный анализ позволяет взломать некоторые алгоритмы шифрования. Например - аффинное преобразование. Частотный анализ подразумевает, что взломщик знает частоту встречаемости каких-то символов в данном типе текстов или языке. Он может сопоставить самый часто встречающийся символ в языке с самым частым символом в тексте, который он хочет взломать. Зная 2 самых частых символа в языке, скорее всего можно взломать систему аффинного преобразования (k, b - две неизвестные, дано два уравнения).

1.2

Ключ шифрования и ключ дешифрования. Классические криптосистемы и системы с открытым ключом.

Ключ шифрования (K_E , encryption key) - набор параметров, позволяющий зашифровать текст в данной криптосистеме. Ключ дешифрования (K_D , decryption key) - набор параметров, позволяющий дешифровать текст в данной криптосистеме.

В классических криптосистемах по K_E легко получить K_D (примеры: шифр Цезаря, аффинное преобразование). В системах с открытым ключом это сделать теоретически возможно, но очень сложно (высокая вычислительная сложность).

1.3

Необходимые сведения из теории чисел. Обратимость вычета по данному модулю. Алгоритм нахождения обратного элемента. Малая теорема Ферма. функция Эйлера и теорема Эйлера. Китайская теорема об остатках. Возведение в степень методом повторного возведения в квадрат.

Вычет a называется обратимым по модулю N , если существует вычет x такой, что

$$ax \equiv 1 \pmod{N}$$

Вычет является обратимым тогда и только тогда, когда он взаимно прост с модулем ($\text{НОД}(a, N) = 1$).

Теорема Ферма утверждает, что если p - простое число и a - целое число, не делящееся на p , то

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p};$$

Функция Эйлера $\varphi(n)$ — мультипликативная арифметическая функция, равная количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним. При этом полагают по определению, что число 1 взаимно просто со всеми натуральными числами, и $\varphi(1) = 1$. Пример: $\varphi(24) = 8$: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Теорема Эйлера гласит, что если a и m взаимно просты, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. Малая

теорема Ферма является следствием теоремы Эйлера.

Китайская теорема об остатках. Пусть n_1, n_2, \dots, n_k - некоторые попарно взаимно простые числа, а r_1, r_2, \dots, r_k - некоторые целые числа. Тогда существует такое целое число M , что оно будет решением системы уравнений:

$$\begin{cases} M \equiv r_1 \pmod{n_1} \\ M \equiv r_2 \pmod{n_2} \\ \quad \quad \quad + \dots \\ M \equiv r_k \pmod{n_k} \end{cases}$$

Причём это решение единственно по модулю $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$

Метод повторного возведения в квадрат. Дальше идут мои личные объяснения. Пусть нам нужно возвести число a в степень n . Представим n как сумму степеней двойки. Пример: $51 = 32 + 16 + 2 + 1$. Мы будем вычислять a^n циклом из n итераций. На итерации $i = 0, n-1$ будет вычисляться a^{2^i} . Причём это будет сделано с помощью уже полученного на предыдущей итерации результата ($a^{2^i} = (a^{2^{i-1}})^2$). Переменная результата будет инициализирована единицей и будет домножаться на a^{2^i} каждый раз, когда i слева бит числа n не равен нулю. Таким образом, мы возведём число в степень n примерно за $\log_2 n$ операций.

1.4

Группа — множество, на котором определена ассоциативная бинарная операция, причём для этой операции имеется нейтральный элемент (аналог единицы для умножения), и каждый элемент множества имеет обратный.

Конечная группа - группа с ограниченным числом элементов. Пример конечной группы - вычеты по модулю n .

Пусть G - конечная группа, $m = |G|$ (порядок группы, количество элементов). Теорема: $\forall g \in G : g^m = e$.

Порядок элемента g (записывают, как $\text{ord}(g)$) - наименьшее натуральное s такое, что $g^s = e$. Считают, что $\text{ord}(g) = \infty$, если такого s не существует.

Группа G называется циклической, если $\exists g \in G : G = \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$. Пример циклической группы - вычеты по модулю n с операцией сложения.

1.5

Задача дискретного логарифмирования и система Диффи-Хеллмана обмена ключами.

Задача дискретного логарифмирования. Пусть G - конечная группа и $g \in G$. Задача: для $h \in \{g^s, s \in \mathbb{Z}\}$ найти натуральное k такое, что $h = g^k$. k - дискретный логарифм элемента h по основанию g . Замечание: такое k - не единственное, так как $g^m = e \implies g^k = g^{m+k} = g^{2m+k} = \dots = g^{nm+k}, n \in \mathbb{N}$. Основная фишечка: возведение в степень быстрое, а нахождение логарифма - долгое.

Система Диффи-Хеллмана (1976). Все знают конечную группу G и элемент g достаточно большого порядка. $G = (\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \times)$. Важно, что $|G| = p-1$, p - большое простое. Эта группа циклическая. Что происходит? Алиса фиксирует своё некоторое натуральное число a , держит его в секрете, но вычисляет и выкладывает значение g^a . После этого любые 2 участника сформируют у себя общее число $g^{ab} = (g^a)^b = (g^b)^a$. На деле тут нет передачи информации.

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Проверка числа на простоту и проблема факторизации. Решето Эратосфена. Псевдопростые числа и числа Кармайкла. Метод Поклингтона. $(p-1)$ метод Полларда.

Псевдопростые числа и числа Кармайкла. Если p - простое, то $\forall a < p : a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (малая теорема Ферма). Метод Кармайкла позволяет точно сказать, является ли число непростым, но не позволяет утверждать обратного. Если $\exists a < p$ такое, что $a^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p}$, то число p - не простое. Если для данного $p \forall a < p : a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, но при этом само число не является простым, то его называют числом Кармайкла (пример: 561).

Метод Поклингтона проверки числа на простоту. Предположим, что у числа $n-1$ есть простой делитель $p > \sqrt{n}-1$. Если $\exists a$ (целое) такое, что выполнены 2 условия:

1. $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$
2. $(a^{\frac{n-1}{p}} - 1, n) = 1$

То число n - простое.

$(p-1)$ -метод Полларда разложения числа на множители. Выберем число m , которое делится на все натуральные числа $\leq c$ (Пример: $c!$). Возьмём q такое, что $2 \leq q \leq n-2$. Вычислим $q^m \pmod{n}$. Если $q^m \not\equiv 1 \pmod{n}$, продолжаем. Вычисляем $d = \text{НОД}(q^m - 1, n)$. Если $d \neq 1$, то $n = d \cdot \frac{n}{d}$. Далее по индукции раскладываем $\frac{n}{d}$.