1.2 Математика в $\LaTeX$

$\LaTeX$ в Вышке

30 сентября 2017 г.

1 Tasks

1.1 Task 1

Составим расширенную матрицу коэффициентов и выполним определенные действия для решения системы.

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1&1&0\\1&0&1&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&1&1&1&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&0&1&0\\1&1&0&0&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&0&1&0&1\\0&1&0&1&1&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{gathered}(1)\oplus=(0)\\(3)\oplus=(0)\\(4)\oplus=(0)\end{gathered}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1&1&1&0&1\\0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&1&1&0\\0&1&0&1&1&0&1&0&1\\0&1&0&1&1&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{gathered}(4)\oplus=(2)\\(5)\oplus=(2)\\(6)\oplus=(2)\end{gathered}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1&1&1&0&1\\0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}(3)\oplus=(1)\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1&1&1&0&1\\0&0&0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}(2)\oplus=(4)$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0&0&1&1\\0&1&0&0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{gathered}(0)\oplus=(3)\\(1)\oplus=(3)\\(4)\oplus=(3)\\(7)\oplus=(3)\end{gathered}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{gathered}(2)\oplus=(5)\\(7)\oplus=(5)\end{gathered}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}\begin{gathered}(1)\oplus=(6)\\(2)\oplus=(6)\\(3)\oplus=(6)\\(4)\oplus=(6)\\(7)\oplus=(6)\end{gathered}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{gathered}(2)\oplus=(7)\\(3)\oplus=(7)\end{gathered}$$

В итоге получаем матрицу: $\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}$

В описаниях преобразований строки пронумерованы сверху вниз $(0), (1), \ldots, (6), (7)$, а выражение $(i) \oplus = (j)$ обозначает «заменить все числа в строке (i) на их сумму по модулю 2 с соответствующими числами строки (j)».

Получаем решение: $\mathrm{X}_7 = 1, X_6 = 1, X_5 = 0, X_4 = 0, X_3 = 0, X_2 = 0, X_1 = 0, X_0 = 1.$

Десятичный номер функции равен $2^7 + 2^6 + 2^0 = 193.$

Таблица истинности для данной функции:

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
F	1	1	0	0	0	0	0	1

1.2 Task 2

Представим таблицы истинности функции F в виде карты Карно:

	0	0	1	1	A
	0	1	1	0	B
0	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	
C					

1.3 Task 3

Выполним дизъюнктивное разложение Шеннона:

$$\begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} = \overline{A} \cdot \begin{smallmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} + A \cdot \begin{smallmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B \cdot C$$

$$\begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} = \overline{B} \cdot \begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} + B \cdot \begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B \cdot C$$

$$\begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} = \overline{C} \cdot \begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} + C \cdot \begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + C \cdot (A \equiv B)$$

1.4 Task 4

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма:

$$F(A, B, C) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C$$

1.5 Минимальная дизъюнктивная нормальная форма

Воспользовавшись картой Карно, получим минимальную дизъюнктивную форму:

$$F(A, B, C) = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B \cdot C$$

1.6 Новые представления функции

Из дизъюнктивных разложений, используя ортогональность, получим новые представления функции.

$$F(A, B, C) = \overline{A} \cdot \overline{B} \oplus A \cdot B \cdot C$$

$$F(A, B, C) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \oplus C \cdot (A \equiv B)$$

$$F(A, B, C) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \oplus \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \oplus A \cdot B \cdot C$$

1.7 Конъюнктивные разложения Шеннона

$$\begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} = \left(A + \begin{smallmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\overline{A} + \begin{smallmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + B \cdot C)$$

$$\begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} = \left(B + \begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\overline{B} + \begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (B + \overline{A}) \cdot (\overline{B} + A \cdot C)$$

$$\begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} = \left(C + \begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\overline{C} + \begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (C + \overline{A} \cdot \overline{B}) \cdot (\overline{C} + (A \equiv B))$$

1.8 Совершенная конъюнктивная нормальная форма

Воспользовавшись двойственностью, получим СКНФ из СДНФ.

$$F(A, B, C) = (A + B + \overline{C}) \cdot (A + \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + B + C) \cdot (\overline{A} + B + \overline{C})$$

1.9 Минимальная конъюнктивная нормальная форма

Чего-то там

1.10 KeK

1.11 Производные функции

$$F'_A = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}'_A = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} = B \implies C$$

$$F'_B = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}'_B = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} = A \implies C$$

$$F'_C = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}'_C = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} = A \cdot B$$

1.12 Разложения Рида

Воспользовавшись формулами $F(x) = F(0) \oplus x \cdot F'$ и $F(x) = F(1) \oplus \overline{x} \cdot F'$, получим следующие разложения:

$$F(A, B, C) = F(0, B, C) \oplus A \cdot F'_A(A, B, C) = \overline{B} \oplus A \cdot (B \implies C)$$
$$F(A, B, C) = F(1, B, C) \oplus \overline{A} \cdot F'_A(A, B, C) = B \cdot C \oplus \overline{A} \cdot (B \implies C)$$
$$F(A, B, C) = F(A, 0, C) \oplus B \cdot F'_B(A, B, C) = \overline{A} \oplus B \cdot (A \implies C)$$
$$F(A, B, C) = F(A, 1, C) \oplus \overline{B} \cdot F'_B(A, B, C) = A \cdot C \oplus \overline{B} \cdot (A \implies C)$$
$$F(A, B, C) = F(A, B, 0) \oplus C \cdot F'_C(A, B, C) = \overline{A} \cdot \overline{B} \oplus C \cdot (A \cdot B)$$
$$F(A, B, C) = F(A, B, 1) \oplus \overline{C} \cdot F'_C(A, B, C) = (A \equiv B) \oplus \overline{C} \cdot (A \cdot B)$$

1.13 kek

1.14 Все производные с помощью таблицы истинности

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
F	1	1	0	0	0	0	0	1
F'_A	1	1	0	1	1	1	0	1
F'_B	1	1	1	1	0	1	0	1
F'_C	0	0	0	0	0	0	1	1
F''_{AB}	1	0	1	0	1	0	1	0
F''_{AC}	0	0	1	1	0	0	1	1
F''_{BC}	0	0	0	0	1	1	1	1
F'''_{ABC}	1	1	1	1	1	1	1	1

1.15 Аналитический вид производных

Из задания 11:

$$F'_A = B \implies C$$

$$F'_B = A \implies C$$

$$F'_C = A \cdot B$$

Воспользовавшись таблицей истинности из предыдущего задания, найдём аналитический вид смешанных производных.

$$F''_{AB} = \overline{C}$$

$$F''_{AC} = B$$

$$F''_{BC} = A$$

$$F'''_{ABC} = 1$$