1.2 Математика в $\LaTeX$

$\LaTeX$ в Вышке

11 октября 2017 г.

1 Решение системы уравнений и составление таблицы истинности функции

Составим расширенную матрицу коэффициентов и выполним определенные действия для решения системы.

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1&1&0\\1&0&1&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&1&1&1&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&0&1&0\\1&1&0&0&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&0&1&0&1\\0&1&0&1&1&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}(1)\oplus=(0)\\(3)\oplus=(0)\\(4)\oplus=(0)\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1&1&1&0&1\\0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&1&1&0\\0&1&0&1&1&0&1&0&1\\0&1&0&1&1&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}(4)\oplus=(2)\\(5)\oplus=(2)\\(6)\oplus=(2)\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1&1&1&0&1\\0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}(3)\oplus=(1)\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1&1&1&0&1\\0&0&0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}(2)\oplus=(4)$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0&0&1&1\\0&1&0&0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}(0)\oplus=(3)\\(1)\oplus=(3)\\(4)\oplus=(3)\\(7)\oplus=(3)\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}(2)\oplus=(5)\\(7)\oplus=(5)\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}(1)\oplus=(6)\\(2)\oplus=(6)\\(3)\oplus=(6)\\(4)\oplus=(6)\\(7)\oplus=(6)\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}(2)\oplus=(7)\\(3)\oplus=(7)\end{matrix}$$

В итоге получаем матрицу: $\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}$

В описаниях преобразований строки пронумерованы сверху вниз $(0), (1), \ldots, (6), (7)$, а выражение $(i) \oplus = (j)$ обозначает «заменить все числа в строке (i) на их сумму по модулю 2 с соответствующими числами строки (j)».

Получаем решение:$X_7 = 1, X_6 = 1, X_5 = 0, X_4 = 0, X_3 = 0, X_2 = 0, X_1 = 0, X_0 = 1$. Десятичный номер функции равен $2^7 + 2^6 + 2^0 = 193$.

Таблица истинности для данной функции:

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
F	1	1	0	0	0	0	0	1

2 Карта Карно

Представим таблицу истинности функции F в виде карты Карно:

	0	0	1	1	A
	0	1	1	0	B
0	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	
C					

3 Дизъюнктивные разложения Шеннона

$$\begin{pmatrix} A&0&0&0&0&1&1&1&1\\ B&0&0&1&1&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1&0&1&0&1\\ F&1&1&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix} = \overline{A}\cdot\begin{pmatrix} B&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1\\ F&1&1&0&0\end{pmatrix} + A\cdot\begin{pmatrix} B&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1\\ F&0&0&0&1\end{pmatrix} = \overline{A}\cdot\overline{B}+A\cdot B\cdot C$$

$$\begin{pmatrix} A&0&0&0&0&1&1&1&1\\ B&0&0&1&1&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1&0&1&0&1\\ F&1&1&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix} = \overline{B}\cdot\begin{pmatrix} A&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1\\ F&1&1&0&0\end{pmatrix} + B\cdot\begin{pmatrix} A&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1\\ F&0&0&0&1\end{pmatrix} = \overline{A}\cdot\overline{B}+A\cdot B\cdot C$$

$$\begin{pmatrix} A&0&0&0&0&1&1&1&1\\ B&0&0&1&1&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1&0&1&0&1\\ F&1&1&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix} = \overline{C}\cdot\begin{pmatrix} A&0&0&1&1\\ B&0&1&0&1\\ F&1&0&0&0\end{pmatrix} + C\cdot\begin{pmatrix} A&0&0&1&1\\ B&0&1&0&1\\ F&1&0&0&1\end{pmatrix} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+C\cdot(A\equiv B)$$

4 Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма:

$$F(A,B,C) = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot C$$

5 Минимальные дизъюнктивные нормальные формы

Воспользовавшись картой Карно, получим минимальную дизъюнктивную форму (она единственна, потому что единицы можно сгруппировать лишь одним способом):

$$F(A,B,C) = \overline{A}\cdot\overline{B}+A\cdot B\cdot C$$

6 Новые представления функции

Из дизъюнктивных разложений, используя ортогональность, получим новые представления функции.

$$F(A,B,C) = \overline{A}\cdot\overline{B}\oplus A\cdot B\cdot C$$
$$F(A,B,C) = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\oplus C\cdot(A\equiv B)$$
$$F(A,B,C) = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\oplus\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\oplus A\cdot B\cdot C$$

7 Конъюнктивные разложения Шеннона

$$\begin{pmatrix} A&0&0&0&0&1&1&1&1\\ B&0&0&1&1&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1&0&1&0&1\\ F&1&1&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} = \left(A + \begin{pmatrix} B&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1\\ F&1&1&0&0 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\overline{A} + \begin{pmatrix} B&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1\\ F&0&0&0&1 \end{pmatrix}\right) = (A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+B\cdot C)$$

$$\begin{pmatrix} A&0&0&0&0&1&1&1&1\\ B&0&0&1&1&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1&0&1&0&1\\ F&1&1&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} = \left(B + \begin{pmatrix} A&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1\\ F&1&1&0&0 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\overline{B} + \begin{pmatrix} A&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1\\ F&0&0&0&1 \end{pmatrix}\right) = (B+\overline{A})\cdot(\overline{B}+A\cdot C)$$

$$\begin{pmatrix} A&0&0&0&0&1&1&1&1\\ B&0&0&1&1&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1&0&1&0&1\\ F&1&1&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} = \left(C + \begin{pmatrix} A&0&0&1&1\\ B&0&1&0&1\\ F&1&0&0&0 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\overline{C} + \begin{pmatrix} A&0&0&1&1\\ B&0&1&0&1\\ F&1&0&0&1 \end{pmatrix}\right) = (C+\overline{A}\cdot\overline{B})\cdot(\overline{C}+(A\equiv B))$$

8 Совершенная конъюнктивная нормальная форма

Воспользовавшись двойственностью, получим СКНФ из СДНФ.

$$F(A,B,C) = (A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})$$

9 Минимальные конъюнктивные нормальные формы

По карте Карно мы можем увидеть, что нули можно сгруппировать двумя способами. Соответсвенно, получим две минимальные конъюнктивные нормальные формы.

$$F(A,B,C) = (A+\overline{B})\cdot(\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B)$$
$$F(A,B,C) = (A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+C)\cdot(\overline{A}+B)$$

10 Новые представления функции

Из конъюнктивных разложений, используя ортогональность, получим новые представления функции

$$F(A,B,C) = (A+\overline{B}) \equiv (\overline{A}+B\cdot C)$$
$$F(A,B,C) = (B+\overline{A}) \equiv (\overline{B}+A\cdot C)$$
$$F(A,B,C) = (C+\overline{A}\cdot\overline{B}) \equiv (\overline{C}+(A\equiv B))$$
$$F(A,B,C) = (A+B+\overline{C}) \equiv (A+\overline{B}+C) \equiv (A+\overline{B}+\overline{C}) \equiv (\overline{A}+B+C) \equiv (\overline{A}+B+\overline{C})$$

11 Производные функции

$$F'_A = \begin{pmatrix} A&0&0&0&0&1&1&1&1\\ B&0&0&1&1&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1&0&1&0&1\\ F&1&1&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}'_A = \begin{pmatrix} B&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1\\ F&1&1&0&0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} B&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1\\ F&0&0&0&1 \end{pmatrix} = B \implies C$$

$$F'_B = \begin{pmatrix} A&0&0&0&0&1&1&1&1\\ B&0&0&1&1&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1&0&1&0&1\\ F&1&1&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}'_B = \begin{pmatrix} A&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1\\ F&1&1&0&0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1\\ F&0&0&0&1 \end{pmatrix} = A \implies C$$

$$F'_C = \begin{pmatrix} A&0&0&0&0&1&1&1&1\\ B&0&0&1&1&0&0&1&1\\ C&0&1&0&1&0&1&0&1\\ F&1&1&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}'_C = \begin{pmatrix} A&0&0&1&1\\ B&0&1&0&1\\ F&1&0&0&0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A&0&0&1&1\\ B&0&1&0&1\\ F&1&0&0&1 \end{pmatrix} = A\cdot B$$

12 Разложения Рида

Воспользовавшись формулами $F(x) = F(0)\oplus x\cdot F'_x$ и $F(x) = F(1)\oplus\overline{x}\cdot F'_x$, получим следующие разложения:

$$F(A,B,C) = F(0,B,C)\oplus A\cdot F'_A(A,B,C) = \overline{B}\oplus A\cdot(B \implies C)$$
$$F(A,B,C) = F(1,B,C)\oplus \overline{A}\cdot F'_A(A,B,C) = B\cdot C\oplus \overline{A}\cdot(B \implies C)$$
$$F(A,B,C) = F(A,0,C)\oplus B\cdot F'_B(A,B,C) = \overline{A}\oplus B\cdot(A \implies C)$$
$$F(A,B,C) = F(A,1,C)\oplus \overline{B}\cdot F'_B(A,B,C) = A\cdot C\oplus \overline{B}\cdot(A \implies C)$$
$$F(A,B,C) = F(A,B,0)\oplus C\cdot F'_C(A,B,C) = \overline{A}\cdot\overline{B}\oplus C\cdot(A\cdot B)$$
$$F(A,B,C) = F(A,B,1)\oplus \overline{C}\cdot F'_C(A,B,C) = (A\equiv B)\oplus\overline{C}\cdot(A\cdot B)$$

13 Двойственные разложения Рида

Воспользуемся формулами $F(x) = F(0) \equiv (\overline{x} + \overline{F'_x})$ и $F(x) = F(1) \equiv (x + \overline{F'_x})$ получим двойственные разложения Рида.

$$F(A,B,C) = F(0,B,C) \equiv (\overline{A} + \overline{F'_A}) = \overline{B} \equiv (\overline{A} + (B \not\Rightarrow C))$$
$$F(A,B,C) = F(1,B,C) \equiv (A + \overline{F'_A}) = B \cdot C \equiv (A + (B \not\Rightarrow C))$$
$$F(A,B,C) = F(A,0,C) \equiv (\overline{B} + \overline{F'_B}) = \overline{A} \equiv (\overline{B} + (A \not\Rightarrow C))$$
$$F(A,B,C) = F(A,1,C) \equiv (B + \overline{F'_B}) = A \cdot C \equiv (B + (A \not\Rightarrow C))$$
$$F(A,B,C) = F(A,B,0) \equiv (\overline{C} + \overline{F'_C}) = \overline{A} \cdot \overline{B} \equiv (\overline{C} + \overline{A} + \overline{B})$$
$$F(A,B,C) = F(A,B,1) \equiv (C + \overline{F'_C}) = (A \equiv B) \equiv (C + \overline{A} + \overline{B})$$

14 Все производные с помощью таблицы истинности

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
F	1	1	0	0	0	0	0	1
F'_A	1	1	0	1	1	1	0	1
F'_B	1	1	1	1	0	1	0	1
F'_C	0	0	0	0	0	0	1	1
F''_{AB}	1	0	1	0	1	0	1	0
F''_{AC}	0	0	1	1	0	0	1	1
F''_{BC}	0	0	0	0	1	1	1	1
F'''_{ABC}	1	1	1	1	1	1	1	1

15 Аналитический вид производных

Из задания 11:

$$F'_A = B \implies C$$
$$F'_B = A \implies C$$
$$F'_C = A \cdot B$$

Воспользовавшись таблицей истинности из предыдущего задания, найдём аналитический вид смешанных производных.

$$F''_{AB} = \overline{C}$$
$$F''_{AC} = B$$
$$F''_{BC} = A$$
$$F'''_{ABC} = 1$$

16 Разложение в ряд Маклорена в базисе $\{1, \oplus, \cdot\}$

Разложим функцию F в ряд Маклорена в базисе $\{1, \oplus, \cdot\}$. Получим полином Жегалкина.

$$F(A,B,C) = 1 \oplus A \oplus B \oplus A \cdot B \oplus A \cdot B \cdot C$$

17 Разложение в ряд Тейлора в базисе $\{1, \oplus, \cdot\}$

Разложим функцию F в ряд Тейлора в каждой точке пространства в базисе $\{1, \oplus, \cdot\}$. При разложении будем использовать сокращенную запись $\overline{A} = A \oplus 1$, $\overline{B} = B \oplus 1$, $\overline{C} = C \oplus 1$.

$$(0,0,0) : F(A,B,C) = 1 \oplus A \oplus B \oplus A \cdot B \oplus A \cdot B \cdot C$$

$$(0,0,1) : F(A,B,C) = 1 \oplus A \oplus B \oplus A \cdot B \cdot \overline{C}$$

$$(0,1,0) : F(A,B,C) = \overline{B} \oplus A \cdot \overline{B} \oplus A \cdot C \oplus A \cdot \overline{B} \cdot C$$

$$(0,1,1) : F(A,B,C) = A \oplus \overline{B} \oplus A \cdot \overline{C} \oplus A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

$$(1,0,0) : F(A,B,C) = \overline{A} \oplus \overline{A} \cdot B \oplus B \cdot C \oplus \overline{A} \cdot B \cdot C$$

$$(1,0,1) : F(A,B,C) = \overline{A} \oplus B \oplus B \cdot \overline{C} \oplus \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$$

$$(1,1,0) : F(A,B,C) = \mathrm{C} \oplus \overline{A} \cdot \overline{B} \oplus \overline{A} \cdot C \oplus \overline{B} \cdot C \oplus \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$$

$$(1,1,1) : F(A,B,C) = \overline{A} \oplus \overline{B} \oplus \overline{C} \oplus \overline{A} \cdot \overline{C} \oplus \overline{B} \cdot \overline{C} \oplus \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

18 Разложение в ряд Маклорена в базисе $\{0, \equiv, +\}$

Разложим функцию F в ряд Маклорена в базисе $\{0, \equiv, +\}$.

$$F(A,B,C) = A \equiv B \equiv C \equiv (A+C) \equiv (B+C) \equiv (A+B+C)$$

19 Разложение в ряд Тейлора $\{0, \equiv, +\}$

Разложим функцию F в ряд Тейлора в каждой точке пространства в базисе $\{0, \equiv, +\}$. При разложении будем использовать сокращённую запись: $\overline{A} = A \equiv 0$, $\overline{B} = B \equiv 0$, $\overline{C} = C \equiv 0$,

$$(1,1,1) : F(A,B,C) = A \equiv B \equiv C \equiv (A+C) \equiv (B+C) \equiv (A+B+C)$$

$$(1,1,0) : F(A,B,C) = 0 \equiv \overline{C} \equiv (A+B) \equiv (A+\overline{C}) \equiv (B+\overline{C}) \equiv (A+B+\overline{C})$$

$$(1,0,1) : F(A,B,C) = 0 \equiv A \equiv \overline{B} \equiv (\overline{B}+C) \equiv (A+\overline{B}+C)$$

$$(1,0,0) : F(A,B,C) = 0 \equiv A \equiv (A+\overline{B}) \equiv (\overline{B}+\overline{C}) \equiv (A+\overline{B}+\overline{C})$$

$$(0,1,1) : F(A,B,C) = 0 \equiv \overline{A} \equiv B \equiv (\overline{A}+C) \equiv (\overline{A}+B+C)$$

$$(0,1,0) : F(A,B,C) = 0 \equiv B \equiv (\overline{A}+B) \equiv (\overline{A}+\overline{C}) \equiv (\overline{A}+B+\overline{C})$$

$$(0,0,1) : F(A,B,C) = \overline{A} \equiv \overline{B} \equiv (\overline{A}+\overline{B}+C)$$

$$(0,0,0) : F(A,B,C) = \overline{A} \equiv \overline{B} \equiv (\overline{A}+\overline{B}) \equiv (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$