UNIVERSITÉ TOULOUSE III PAUL SABATIER

Université de Toulouse

Faculté des Sciences et d'Ingénierie

Fonctions

Ce chapitre étudie les fonctions, principalement de la variable réelle à valeurs réelles. Le but n'est pas de proposer un cours complet sur les fonctions car il serait difficile d'accès et bien trop long mais d'acquérir un socle de connaissances permettant de progresser en analyse (branche des mathématiques qui traite de la notion de *limite*, primordiale pour étudier les fonctions) et du matériel pour comprendre les applications qui seront vues dans les autres matières. Les propriétés fondamentales de l'analyse, comme la continuité et la dérivabilité, seront étudiées plus en profondeur au deuxième semestre, tant au niveau des fondements qu'au niveau des résultats qui en découlent. La progression se fera donc par strates qui s'élargiront au fur et à mesure en direction des fondements d'une part et de l'élaboration d'autre part.

Nous commençons par un cours sur le langage mathématique élémentaire permettant la rédaction de démonstrations mathématiques et nous donnons quelques techniques de raisonnement qui seront utilisées dans le cours et dans les séances d'exercices. Nous présentons alors la composée de deux applications et les propriétés qui y sont reliées. Cette composée est présente de façon cachée dans de nombreux cours qui suivront où l'on définit la notion de bijection réciproque. Cette notion, qui demandera un effort de compréhension, nécessite l'introduction d'ensembles associés à une fonction (ensemble image et image réciproque) ainsi que des propriétés que l'on formalise dans le langage mathématique (injectivité et surjectivité).

Une fois cet effort d'abstraction effectué dans les premiers cours, nous pouvons déjà présenter des exemples d'application. Nous appliquons ainsi les premiers cours aux fonctions déjà étudiées précédemment dans la scolarité : exp, ln, cos, sin, … Enfin, nous nous orientons dans deux directions concrètes distinctes mais fortement reliées : être capable de tracer qualitativement le graphe d'une fonction (à l'aide de la dérivée) et être capable de calculer des aires délimitées par des courbes (à l'aide de l'intégrale).

Au début de chaque cours, nous proposons des références précises de passages courts (tant que possible) qui permettent de compléter le cours. Les références sont disponibles à la Bibliothèque Universitaire ou en ligne pour [Exo16]. Nous vous encourageons à aller feuilleter les différentes références et à vous laisser embarquer en dehors des passages proposés. La référence [LTT16] permet de faciliter la transition Lycée / Université, n'hésitez pas à vous y référer si vous sentez qu'un cours est trop difficile pour vous.

Cours Magistral n°1

Pré-requis :
- pas de pré-requis particuliers

Objectifs :
- savoir reconnaître une assertion
- être capable de lire et de comprendre une assertion donnée à l'aide de connecteurs logiques et de quantificateurs
- mener une démonstration de façon rigoureuse

Lectures complémentaires : sections 1.2, 1.4 et 1.5 de [Cos16] ; chapitre 1, Logique et raisonnement de [Exo16].

1. Langage mathématique

Le but de ce cours est de se donner un langage rigoureux pour écrire des mathématiques. Nous souhaitons éviter les ambiguïtés que la langue française peut contenir. La conjonction "ou" peut par exemple être exclusive "un match qui aura lieu à Barcelone ou à Toulouse" ne se déroulera pas aux deux endroits à la fois. Mais elle peut aussi ne pas l'être : si vous cherchez un "gateau au caramel ou au chocolat", ce serait dommage de refuser une tarte caramel-chocolat. Dans ce cours, nous présentons un vocabulaire précis qui permet de démontrer rigoureusement.

1.1. Logique

Une démonstration mathématique est composée d'*assertions* (ou *propositions logiques*) que l'on relie au moyen de *connecteurs logiques*. Démontrer une assertion revient à montrer qu'elle est vraie.

Définition 1

Une ***assertion*** est un énoncé (que l'on peut comprendre sans ambiguïté) dont on peut connaître la valeur de vérité : vrai (V), faux (F). Une assertion est ***complète*** si elle ne dépend pas de variables libres.

Exemple 1

- "Elle est douée", "$1+1=2$", "il existe un nombre pair" et "$P(x): x^2 \geqslant 9$" sont des assertions mais "il fait il beau est joyeux" et "Attention !" ne sont pas des assertions,
- "$1+1=2$" et "il existe un nombre pair" sont des assertions complètes,
- "Elle est douée" et "$P(x): x^2 \geqslant 9$" ne sont pas des assertions complètes. L'assertion $P(x)$ dépend de la variable libre x. Il faut donner une valeur à x pour pouvoir donner une valeur de vérité à $P(x)$.

Nous relions ensuite des assertions à l'aide de ***connecteurs logiques***. Soient P et Q deux assertions.

La conjonction "et"

L'assertion "P *et* Q" est vraie si P est vraie et Q est vraie. Elle est fausse sinon. On résume ceci par la table de vérité ci-contre.

P	V	F	V	F
Q	V	V	F	F
P et Q	V	F	F	F

Exemple 2

La valeur de vérité de l'assertion : "$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ et $2 \geqslant 1$" est V (vraie).

La disjonction "ou"

L'assertion "P *ou* Q" est vraie si l'une des assertions P ou Q est vraie. Elle est fausse sinon. On obtient la table de vérité ci-contre.

P	V	F	V	F
Q	V	V	F	F
P *ou* Q	V	V	V	F

Remarque 1

- Comme dit dans l'introduction, le "ou" dans le langage mathématique est inclusif.
- On a utilisé une phrase en français contenant les mots "et" et "ou" pour définir les connecteurs logiques "et" et "ou". On évite ce problème en prenant les tables de vérité comme définition.

La négation “non”

L’assertion “*non* P” est vraie si P est fausse. Elle est fausse sinon.

P	V	F
non P	F	V

L’implication “⇒”

L’assertion “$P \Rightarrow Q$” est vraie si l’assertion “non P ou Q” est vraie.

P	V	F	V	F
Q	V	V	F	F
$P \Rightarrow Q$	V	V	F	V

Exercice 1

Quelle est la valeur de vérité de l’assertion : “Soit x un réel. Alors $x^2 < 0 \Rightarrow 2 = 3$”.

Remarque 2

1. L’assertion “$P \Rightarrow Q$” se lit aussi : si P est vraie, alors Q est vraie.
2. La ***réciproque*** de l’assertion “$P \Rightarrow Q$” est l’assertion “$Q \Rightarrow P$”.

L’équivalence “⇔”

L’assertion “$P \Leftrightarrow Q$” est vraie si l’assertion “($P \Rightarrow Q$) et ($Q \Rightarrow P$)” est vraie. La table de vérité est la table ci-contre.

P	V	F	V	F
Q	V	V	F	F
$P \Leftrightarrow Q$	V	F	F	V

L’assertion “$P \Leftrightarrow Q$” se lit aussi : P *équivaut à* Q, ou l’assertion P est vraie *si et seulement si* l’assertion Q est vraie, ou encore, P *si et seulement si* Q. En général, on s’intéresse aux assertions vraies, lorsque l’on écrit “$P \Leftrightarrow Q$”, on veut en fait dire “$P \Leftrightarrow Q$” est vraie. Par contre, cela ne veut pas dire que P et Q sont vraies !

Proposition 1. ♥

Soient P et Q deux assertions. On a les équivalences suivantes :

1. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$,
2. $P \Leftrightarrow (\text{non } P \Rightarrow F)$.

Démonstration

1.2. Quantificateurs

Les *quantificateurs* interviennent pour construire des assertions.

Le quantification “pour tout” ∀

Définition 2

L’assertion “$\forall x \in E,\ P(x)$” est vraie si l’assertion $P(x)$ est vraie pour tout élément x de l’ensemble E.

Exemple 3

L’assertion “$\forall n \in \mathbb{N},\ n+1 \in \mathbb{N}$” est vraie.

Le quantificateur “il existe” ∃

Définition 3

L’assertion “$\exists x \in E,\ P(x)$” est vraie si l’assertion $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de l’ensemble E.
Lorsqu’il y a unicité de l’élément x tel que $P(x)$ soit vraie, on écrit “$\exists! x \in E,\ P(x)$”.

Exemple 4

- L’assertion “$\exists n \in \mathbb{Z},\ n$ est pair” est vraie.
- L’assertion “$\exists! x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant 0)$ et $(x \leqslant 0)$” est vraie.

Remarque 3

1. Dans une assertion, l'ordre des quantificateurs est important. Par exemple, comparer les valeurs de vérité des deux assertions suivantes :
   - "$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y < x$",
   - "$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y < x$".
2. La négation de "$\forall x \in E,\ P(x)$" est "$\exists x \in E,$ non $P(x)$".
3. La négation de "$\exists x \in E,\ P(x)$" est "$\forall x \in E,$ non $P(x)$".

Exercice 2

Quantifier puis donner la négation de "Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle" (on pourra essayer de donner la négation avant de quantifier). Laquelle des deux assertions est vraie ?
$\rightsquigarrow$ Attention : la quantification des variables muettes est souvent absente dans le langage courant.

1.3. Raisonnements

Il existe plusieurs types de raisonnements qui permettent d'écrire des démonstrations. Nous présentons les plus courants ainsi que quelques schémas de démonstrations associés.

Quelques raisonnements directs Lorsque l'on cherche à démontrer l'assertion "P et Q", on raisonne souvent en démontrant d'abord P puis Q. C'est un raisonnement "direct". On peut rédiger de la façon suivante :

1. Montrons P. + démonstration.
2. Et montrons Q. + démonstration.
3. Donc : P et Q.

Si l'on cherche à démontrer une assertion du type : "$\forall x \in E,\ P(x)$" par un raisonnement direct, on commencera notre démonstration par "Soit $x \in E$." Puis on cherchera à montrer $P(x)$.

Par contre, si l'on cherche à démontrer l'assertion "$\exists x \in E,\ P(x)$" par un raisonnement direct, on peut exhiber un élément $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie.

Pour finir, la façon la plus courante de montrer une implication $P \Rightarrow Q$ est d'utiliser un raisonnement direct. On peut alors rédiger de la façon suivante :

1. On suppose que P.
2. Montrons Q. + démonstration.
3. Donc : $P \Rightarrow Q$.

Exercice 3

Montrer que "$a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}$".

Pour démontrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$ par un raisonnement direct, on procède par la démonstration de la double implication. On peut rédiger de la façon suivante :

1. Montrons : $P \Rightarrow Q$. + démonstration.
2. Réciproquement, montrons : $Q \Rightarrow P$. + démonstration.
3. Donc : $P \Leftrightarrow Q$.

Disjonction de cas Lorsque l'on cherche à démontrer l'assertion "$\forall x \in E,\ P(x)$", on peut montrer l'assertion pour les x dans une partie A de E, puis la montrer pour les x n'appartenant pas à A.

Exemple 5

Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-2| \leqslant x^2 - x + 2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.
Premier cas : $x \geqslant 2$. Alors $|x-2| = x-2$. Ainsi

$$x^2 - x + 2 - |x-2| = x^2 - x + 2 - (x-2) = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 \geqslant 0.$$

On a donc $|x-2| \leqslant x^2 - x + 2$.

Deuxième cas : $x < 2$. Alors $|x-2| = -(x-2)$. On obtient donc

$$x^2 - x + 2 - |x-2| = x^2 - x + 2 + (x-2) = x^2 \geqslant 0.$$

Et ainsi $|x-2| \leqslant x^2 - x + 2$.
Conclusion : Dans tous les cas, on a $|x-2| \leqslant x^2 - x + 2$.

À l'aide d'un contre-exemple Pour montrer que la proposition "$\forall x \in E, P(x)$" est fausse, on peut montrer que sa négation "$\exists x \in E$, non $P(x)$" est vraie. Il s'agit donc d'exhiber un contre-exemple $x \in E$ à la proposition $P(x)$.

Exercice 4

Montrer que l'assertion "Tout nombre pair est un multiple de 4" est fausse.

Raisonnement par contraposée Il se base sur la première équivalence de la proposition 1 :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P).$$

On peut alors rédiger de cette façon :

1. Montrons : non $Q \Rightarrow$ non P. + démonstration.
2. Par contraposée, on a démontré : $P \Rightarrow Q$.

Attention : il ne faut pas confondre la contraposée (non $Q \Rightarrow$ non P) avec la réciproque ($Q \Rightarrow P$). La première est équivalente à ($P \Rightarrow Q$) alors que la seconde ne l'est pas.

Exercice 5

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $nm = 1 \Rightarrow n = 1$ et $m = 1$.

Raisonnement par l'absurde Il se base sur la deuxième équivalence de la proposition 1 :

$$P \Leftrightarrow (\text{non } P \Rightarrow F)$$

On peut alors rédiger de cette façon :

1. Supposons par l'absurde : non P. + démonstration.
2. Nous aboutissons à une contradiction. Donc P est vraie.

Raisonnement par récurrence On l'utilise pour démontrer une assertion du type "$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$". On peut rédiger de la façon suivante :

1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $P(n)$.
2. **Initialisation :** montrons $P(0)$. + démo.
3. **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$. + démo.
4. **Conclusion :** donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$.

Exercice 6

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $7^{n+1} + 2$ est un multiple de 3.

Raisonnement par analyse-synthèse Pour déterminer les éléments d'un ensemble E qui vérifient une assertion P, on peut suivre le schéma de rédaction suivant.

1. Analyse On cherche à réduire les possibilités : Soit $x \in E$ tel que $P(x)$. + raisonnement.
2. Synthèse On teste chacune des possibilités restantes et on élimine celles qui ne conviennent pas. Puis, on vérifie que les dernières possibilités conviennent : Pour $x = \ldots$, vérifions que $x \in E$ et que $P(x)$. + démo.

Exercice 7

Résoudre l'équation $x = \sqrt{x} + 6$ dans $[0, +\infty[$.

Cours Magistral n°2

Pré-requis :
- définition du nombre dérivé d'une fonction
- savoir calculer une dérivée

Objectifs :
- savoir déterminer le domaine de définition d'une fonction
- savoir reconnaître une composée de fonctions
- savoir dériver une composée de fonctions

Lectures complémentaires : pages 597 à 599 du chapitre 19 de [ML13] ; chapitre 2, section 2, sous-section 2.1 de [Exo16].

2. Composée de fonctions

Une fonction $f : E \to F$ est une règle de calcul qui permet de définir pour tout x dans E, la valeur $f(x)$, qui est un élément de F. Un exemple est donné par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = 2x+1$. Lorsque $x = 2$, la valeur $f(2)$ de la fonction en 2 est 5, qui est bien un élément de $\mathbb{R}$. Nous présentons dans ce cours la composée de fonctions qui est un moyen de construire des fonctions élaborées à l'aide de fonctions simples.

2.1. Domaine de définition et composée

Lorsque l'on considère une fonction donnée par une formule qui dépend d'une variable (réelle) x, il est important de savoir pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, la formule, et donc la fonction, est définie. Il convient donc de préciser à chaque fois cet ensemble de valeurs que l'on appelle *domaine de définition*.

Définition 4

Soit f une fonction. On appelle ***domaine de définition*** de f l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ est bien définie. Cet ensemble, souvent noté D_f, sera appelé domaine de définition de f.

Exemple 6

1. La fonction ln a pour domaine de définition $]0, +\infty[$.
2. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ a pour domaine de définition $[0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Définition 5

Soient E, F, G des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$, $g : F \to G$. Alors la ***composée*** de f par g que l'on note $g \circ f$ est la fonction définie par $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$. On peut la comprendre à l'aide du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Le ***domaine de définition*** de $g \circ f$ est l'ensemble des x de E tels que $f(x)$ et $g\big(f(x)\big)$ sont bien définies :

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\}.$$

Remarque 4

Attention, il faudra veiller à bien tenir compte de la seconde partie de la définition. Si f et g sont les fonctions :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{array} \qquad\qquad g : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

Alors la composition $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ n'a de sens qu'avec E inclus dans $]-\infty, 0[$.

Exemple 7

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{1-x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Les domaines de définition de ces fonctions sont respectivement $D_f =]-\infty, 1]$ et $D_g = \mathbb{R}^*$.
Notons $h = g \circ f$. On a $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ et le domaine de définition de h est

$$D_h = \left\{x \in \mathbb{R},\ 1-x \geqslant 0 \text{ et } \sqrt{1-x} \neq 0\right\} = \left\{x \in]-\infty, 1],\ \sqrt{1-x} \neq 0\right\} =]-\infty, 1[.$$

Exercice 8

Quel est l'ensemble de définition de $x \mapsto \ln\left(\ln(x)\right)$? Même question pour $x \mapsto \ln\left(\ln\left(\ln(x)\right)\right)$?

2.2. Reconnaître une composition de fonctions

Nous allons voir dans la section suivante qu'il est utile de savoir écrire une fonction compliquée comme une composée de fonctions élémentaires. Il faut cependant faire attention au fait que l'ordre des fonctions est important lorsque l'on effectue une composition de fonctions.

Non commutativité

Contrairement au produit de deux fonctions à valeurs réelles, la composée de deux fonctions f et g n'est pas commutative. Il convient donc de faire bien attention à l'ordre des fonctions f et g dans la composition.

Exemple 8

Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x+3$ et $g(x) = x^2$. À l'aide de ces deux fonctions, on peut obtenir deux fonctions composées bien distinctes : d'une part

$$\begin{array}{rcccl} f \circ g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(g(x)) = f(x^2) = x^2+3 \end{array}$$

et d'autre part

$$\begin{array}{rcccl} g \circ f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & g(f(x)) = g(x+3) = (x+3)^2. \end{array}$$

On remarque qu'en général $f \circ g \neq g \circ f$.

Exercice 9

1. Si f est la fonction carré et g la fonction exponentielle, donnez l'expression de $f \circ g$ et de $g \circ f$.
   A-t-on $f \circ g = g \circ f$?
2. Si f est la fonction logarithme népérien et g la fonction cube, donnez l'expression de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

Reconnaissance de forme

Nous pouvons maintenant nous intéresser à l'écriture d'une fonction comme une composée de fonctions plus simples.

Exemple 9

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $h_1(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ et $h_2(x) = 3\cos(x) + \dfrac{\pi}{3}$ s'écrivent très simplement comme les composées des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + \dfrac{\pi}{3}$ et $g(x) = \cos(x)$.
En effet, $h_1 = g \circ f$ et $h_2 = f \circ g$.

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, identifiez des fonctions f et g telles que $h = g \circ f$:

1. $h(x) = \sqrt{2x+1}$ pour tout $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$;
2. $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$;
3. $h(x) = e^{5x-8}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

On choisira f et g parmi les polynômes et les fonctions de référence suivantes $\sqrt{x}$, $1/x$, e^x, $\ln x$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, ...

2.3. Propriétés de la composition de fonctions

L'intérêt d'écrire une fonction compliquée comme une composée de fonctions simples est de pouvoir en déduire certaines de ses propriétés comme la monotonie, la continuité ou la dérivabilité.

Fonctions monotones et composée

Nous définissons dans cette sous-partie la notion de fonction monotone et nous étudions ses propriétés de compatibilité avec la composition de fonctions.

Définition 6

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. On dit que la fonction f est

1. ***croissante*** (resp. ***strictement croissante***) si pour tout couple (x, y) d'éléments de I tels que $x \leqslant y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$ (resp. tels que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$).
2. ***décroissante*** (resp. ***strictement décroissante***) si pour tout couple (x, y) d'éléments de I tels que $x \leqslant y$, on a $f(x) \geqslant f(y)$ (resp. tels que $x < y$, on a $f(x) > f(y)$).
3. ***monotone*** (resp. ***strictement monotone***) si elle est croissante ou décroissante sur I (resp. strictement croissante ou strictement décroissante sur I).

Propriété 1

Soient E, F, G des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $f : E \to F$, $g : F \to G$.

1. Si f et g sont monotones sur leur domaines de définition, il en est de même pour la composée $g \circ f$.

Plus précisément,

1. si les fonctions f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, alors $g \circ f$ est croissante,
2. si l'une des fonctions f et g est croissante et que l'autre est décroissante, alors $g \circ f$ est décroissante.

Les fonctions strictement monotones vérifient des propriétés similaires.

Continuité et composée

Les fonctions continues usuelles sont les fonctions constantes, les fonctions affines et plus généralement les fonctions polynomiales, les fonctions trigonométriques (cos, sin et tan), la fonction exponentielle et la fonction logarithme. Toutes ces fonctions sont continues sur leur domaine de définition.

Pour créer des fonctions continues plus compliquées, nous avons les règles de calculs suivantes.

Propriété 2

Soient I une intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors

1. la somme $f + g : I \to \mathbb{R}$ est continue,
2. le produit $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ est continu,
3. si g ne s'annule pas sur I, le quotient $\dfrac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$ est continu.

De plus, la notion de continuité est compatible avec la composition.

Proposition 2

Soient E, F, G des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des fonctions continues. Alors la composée $g \circ f$ est continue sur E.

Dérivée d'une composée

Une fois que l'on a écrit une fonction comme une composée de deux fonctions, il est possible de calculer sa dérivée si l'on connait les dérivées des deux fonctions qui la composent. La formule, à connaître sur le bout des doigts, est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1

Soient E, F, G des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$, $g : F \to G$. On suppose g dérivable sur un intervalle F et f dérivable sur E. Alors dans ces conditions, la fonction $h = g \circ f$ définie par $h(x) = g\big(f(x)\big)$ est dérivable sur E et

$$h' = \big(g' \circ f\big) \times f' \quad \text{autrement dit :} \quad \forall x \in E,\ h'(x) = g'\big(f(x)\big) \times f'(x).$$

Exercice 11

1. La fonction h_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $h_1(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ est une fonction composée de la forme $g \circ f$.
   (a) Identifiez de possibles fonctions g et f.
   (b) En utilisant la formule $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$, calculez h_1'.
2. En utilisant le même raisonnement que précédemment, calculez les dérivées de $h_2(x) = \exp(x^3 + 1)$ et de $h_3(x) = \cos(x^2 + x)$.

Exercice 12

Calculez les dérivées des composées $e^{u(x)}$, $\cos(u(x))$, $\sin(u(x))$, $\sqrt{u(x)}$, $\ln(u(x))$, $(u(x))^n$.

Pré-requis :
- connaître la notion de fonction, son ensemble de départ (ou de définition) et son ensemble d'arrivée
- connaître les quantificateurs $\forall$, $\exists$, $\in$
- savoir interpréter une phrase simple formée à l'aide de quantificateurs

Objectifs :
- savoir donner l'ensemble des antécédents d'un ensemble par une fonction
- connaître les définitions d'ensemble image et d'image réciproque et savoir les calculer dans des exemples simples
- connaître les définitions de fonction injective, surjective et bijective et savoir les reconnaître

Lectures complémentaires : sections 1.3 et 1.8 de [Cos16] ; section I.1.2.2 de [RW13].

Une fonction $f : E \to F$ associe une valeur $f(x)$ dans F à un élément x de E. Est-il possible de construire une fonction g qui va dans le sens inverse de f, donc $g : F \to E$, de sorte que l'on revienne à l'élément x de départ si l'on applique g à $f(x)$? Le but des deux prochains cours est de se donner les outils pour répondre à cette question.

3. Ensembles associés à une fonction

On s'intéresse dans ce cours à différents ensembles que l'on peut associer à une fonction. Ce sont l'ensemble des antécédents d'un élément, l'ensemble image et l'image réciproque d'un ensemble (qui correspond à un ensemble d'antécédents). Ces ensembles permettront de définir convenablement la fonction "inverse" d'une fonction dans le CM suivant. On les utilise ici pour définir les notions de fonction injective, surjective et bijective. La notion de bijection sera au cœur du cours suivant.

3.1. Antécédent

Pour une fonction $f : E \to F$ donnée, il existe parfois deux éléments distincts x et y de E tels que $f(x) = f(y)$. Dans ce cas, la fonction "inverse" de f devrait envoyer $f(x)$ sur x et $f(y)$ sur y. Mais une fonction ne peut envoyer un élément $f(x) = f(y)$ que sur une seule valeur. Nous définissons dans cette partie la notion d'antécédent qui permet de rendre compte de ce problème.

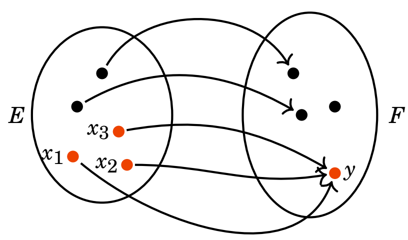
Définition 7

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction. Soit $y \in F$ un élément de l'ensemble d'arrivée. Un ***antécédent*** de y par f est un élément $x \in E$ de l'ensemble de départ tel que $f(x) = y$.

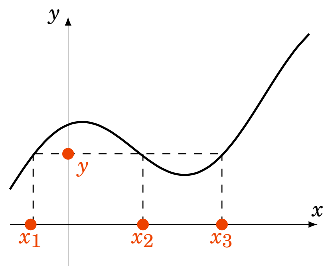
Un élément y peut ainsi avoir 0, 1 ou plusieurs antécédents. L'ensemble des antécédents de y, éventuellement vide, est noté $f^{-1}(\{y\})$.

Exemple 10

Pour les fonctions représentées par chacun des deux dessins suivants :



et



,

l'élément y admet trois antécédents par la fonction. Ce sont les éléments x_1, x_2, x_3.

Définition 8

Soit $f : E \to F$ une fonction.

- Soit $A \subset E$ un sous-ensemble de l'espace de départ de f. L' ***ensemble image*** de A par f est le sous-ensemble de F défini par
$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}.$$
C'est l'ensemble des éléments de F ayant au moins un antécédent dans A.
- Soit $B \subset F$ un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée de f. L' ***image réciproque de l'ensemble*** B par f est le sous-ensemble de E défini par
$$f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$
C'est l'ensemble des antécédents des éléments de B par f.

Exercice 13

1. On suppose que f est la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminez $f^{-1}([2,3])$ et $f([-1,3])$.
   (b) Déterminez $f(f^{-1}([0,1]))$ et $f^{-1}(f([0,1]))$.
2. On suppose que g est la fonction sinus définie sur $\mathbb{R}$. Déterminez $g^{-1}(1/2)$ et $g([5\pi/4, 2\pi])$. (On a fait un abus de notation fréquent. On aurait dû écrire $g^{-1}(\{1/2\})$. Pourquoi ?)

Remarque 5

On peut utiliser l'ensemble image pour définir la notion de limite. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une limite finie $L \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $f(]N, +\infty[) \subset]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.

3.2. Injection, surjection

Comme on l'a vu dans la section précédente, un élément de l'ensemble d'arrivée d'une fonction peut ne pas avoir d'antécédent, en avoir un ou en avoir plusieurs. Les injections et les surjections forment deux classes de fonctions définies à l'aide du nombre d'antécédents de chaque élément de leur ensemble d'arrivée.

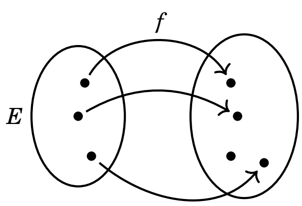
Définition 9

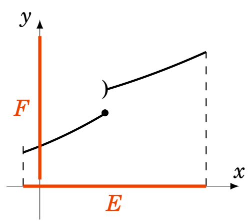
Une fonction $f : E \to F$ est ***injective*** si tout élément y de F a *au plus* un antécédent (et éventuellement aucun).

Définition 10

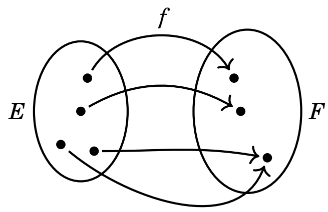
Une fonction $f : E \to F$ est ***surjective*** si tout élément y de F a *au moins* un antécédent. Autrement dit : f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

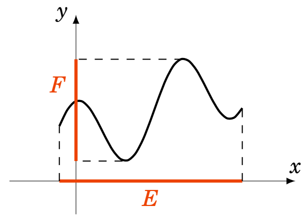
Les fonctions f représentées ci-dessous sont injectives :





Les fonctions f représentées ci-dessous sont surjectives :





Remarque

Une autre façon de formuler l'injectivité et la surjectivité est d'utiliser les quantificateurs :

- f est injective si et seulement si pour tous $x, x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$, on a $x = x'$, c'est-à-dire :
$$\boxed{\forall x, x' \in E \quad \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big),}$$
- f est surjective si et seulement si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, c'est-à-dire :
$$\boxed{\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad \big(y = f(x)\big).}$$

Une troisième formulation s'écrit

- f est injective si et seulement si pour tout élément y de F, l'équation $f(x) = y$ a *au plus* une solution (et éventuellement aucune).
- f est surjective si et seulement si pour tout élément y de F, l'équation $f(x) = y$ a *au moins* une solution.

Exercice 14

À l'aide de dessins similaires aux dessins précédents, représenter deux fonctions non injectives, ainsi que deux fonctions non surjectives.

Exemple 11

1. Soit $f_1 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$. Montrons que f_1 est injective : soient $x, x' \in]0, +\infty[$ tels que $f_1(x) = f_1(x')$. Alors $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x'}$, donc $1 + x = 1 + x'$ et donc $x = x'$. Ainsi f_1 est injective.
   Par contre, f_1 n'est pas surjective. Pour le montrer, il s'agit de trouver un élément y qui n'a pas d'antécédent par f_1. Ici il est facile de voir que l'on a toujours $f_1(x) \leqslant 1$ et donc par exemple $y = 2$ n'a pas d'antécédent. Ainsi f_1 n'est pas surjective.
2. Soit $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_2(x) = x^2$. Alors f_2 n'est pas injective. En effet on peut trouver deux éléments $x, x' \in \mathbb{R}$ différents tels que $f_2(x) = f_2(x')$. Il suffit, par exemple, de prendre $x = 2$, $x' = -2$.
   La fonction f_2 n'est pas surjective non plus car -1 n'a aucun antécédent.
3. Soit $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par $f_3(x) = x^2$. La fonction f_3 est alors surjective mais non injective.
4. Soit $f_4 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $f_4(x) = x^2$. La fonction f_4 est maintenant surjective et injective. On dira qu'elle est ***bijective***.

Propriété 3. ♥

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante (ou strictement décroissante). Alors la fonction f est injective.

Démonstration

3.3. Bijection

Lorsque deux ensembles E et F sont finis, on peut les comparer à l'aide de leur nombre d'éléments. Lorsque E et F sont infinis, on ne peut plus faire cette comparaison. La notion d'injection vue dans la section précédente donne un moyen d'étendre la comparaison aux ensembles infinis : on dit que F possède autant ou plus d'éléments que E

s'il existe une injection de E dans F. On introduit alors la notion de bijection qui permet, entre autre, de dire que deux ensembles, éventuellement infinis, ont autant d'éléments.

Définition 11

Une fonction f est ***bijective*** si elle injective et surjective. Cela équivaut à : pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

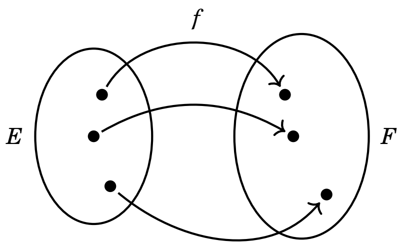
$$\boxed{\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad \big(y = f(x)\big)}$$

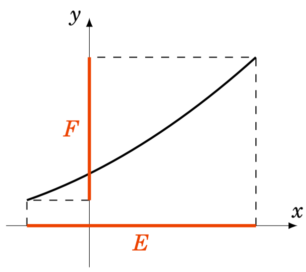
L'existence du x vient de la surjectivité et l'unicité de l'injectivité. On peut encore reformuler de la façon suivante : tout élément de F a un unique antécédent par f.

Remarque

Ainsi, pour démontrer qu'une fonction est bijective, on peut démontrer que pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ a une solution unique dans E : y est donné et x est l'inconnue.

Exemple 12





Exercice 15

Existe-t-il une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$?

Cours Magistral n°4

Pré-requis :
- connaître la notion de bijection
- connaître les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme
- connaître la notion de dérivabilité en un point

Objectifs :
- savoir définir la bijection réciproque
- comprendre la définition de la fonction logarithme, connaître son ensemble de définition et savoir calculer sa dérivée
- savoir calculer la dérivée d'une bijection réciproque

Lectures complémentaires : section 4.7.3 et section 5.4 de [Cos16] ; chapitre IV.2, section 2.6 de [RW13] ; section 9.7 de [AAA07].

4. Théorème de la bijection

Ce cours commence par l'introduction de la bijection réciproque associée à une fonction bijective, c'est l'inverse d'une fonction que l'on cherchait dans le cours précédent. Dans le cas de la fonction exponentielle, la bijection réciproque est donnée par la fonction logarithme. Le résultat principal de ce cours sera le théorème de la bijection. Il donne un moyen de calculer la dérivée de la réciproque d'une fonction lorsque l'on connaît la dérivée de la fonction. La compréhension et l'utilisation de ce théorème sera l'objet du cours suivant.

4.1. Bijection réciproque

On démontre dans cette section que lorsqu'une fonction f est bijective, on a alors l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation $y = f(x)$, où la variable est y. Par exemple, en considérant l'équation $y = x^2$ sur un intervalle suffisamment petit, on trouve alors l'existence et l'unicité de la fonction racine carrée.

Proposition 3

Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

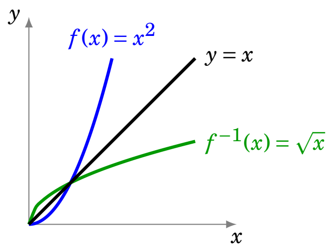
1. La fonction f est bijective si et seulement s'il existe une fonction $g : F \to E$ telle que pour tout $x \in E$, $(g \circ f)(x) = x$ et pour tout $y \in F$, $(f \circ g)(y) = y$.
2. Si la fonction f est bijective, alors la fonction g est unique et elle est aussi bijective. La fonction g s'appelle la ***bijection réciproque*** de f et est notée f^{-1}. De plus $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Exemple 13

La fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$ est bijective, sa bijection réciproque est $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $g(y) = \sqrt{y}$. Nous avons bien $\forall x \geqslant 0$, $(\sqrt{x})^2 = x$ et $\forall x \geqslant 0$, $\sqrt{x^2} = x$.

Remarque 6

On peut aussi démontrer que dans un repère orthonormé les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).



Démonstration

4.2. L'exponentielle et le logarithme népérien

Le lien entre l'exponentielle et le logarithme népérien a déjà été vu en terminale. Nous reprenons dans cette section ce lien et quelques-unes des propriétés de ces deux fonctions. Nous expliquons comment la dérivée d'une composée de fonctions permet de calculer la dérivée de la fonction logarithme lorsque l'on connaît la dérivée de la fonction exponentielle.

Nous rappelons la définition de la fonction exponentielle.

Théorème 2. Existence admise

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel :

$$f'(x) = f(x) \text{ et } f(0) = 1.$$

Cette fonction est appelée fonction ***exponentielle*** et est notée $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

L'unicité de la fonction exponentielle se démontre à l'aide du lemme suivant.

Lemme 1

La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

La dérivée de la fonction $x \mapsto \exp(x)\exp(-x)$ est nulle. La fonction est donc constante, égale à sa valeur en 0 qui est 1. On obtient alors l'égalité $\exp(x)\exp(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc que la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16

Démontrer l'unicité de la fonction exponentielle.

En étudiant la fonction $x \mapsto \dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$, on démontre que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x+a)(\exp(a))^{-1} = \exp(x)$. A partir de cette dernière égalité, on obtient alors les propriétés suivantes :

- $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,
- $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (déjà vue dans la démonstration du lemme 1).

Nous avons vu plus haut que la fonction exp ne s'annule pas, ainsi en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires (vu en classe de terminale), nous trouvons que la fonction exponentielle vérifie $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme la fonction exponentielle est égale à sa dérivée, nous obtenons $\exp'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et ainsi la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Lemme 2

La fonction exponentielle est injective sur $\mathbb{R}$ et son ensemble image est $\mathbb{R}_+^*$. Par abus de notation, on notera aussi $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction bijective définie par l'exponentielle.

Démonstration

Pour obtenir l'injectivité, il suffit d'appliquer la propriété 3 du Cours Magistral 2 puisque la fonction exponentielle est strictement croissante.

Comme la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est surjective et injective, pour tout élément $y \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = \exp(x)$. On peut donc définir la fonction ***logarithme népérien*** $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $\ln(y) := x$, où x est l'unique réel tel que $\exp(x) = y$. La fonction logarithme est injective par construction et elle est surjective puisque la fonction exponentielle est injective, elle est donc bijective.

Proposition 4

On a $\ln(\exp(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\exp(\ln(y)) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est donc la bijection réciproque de la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ (et réciproquement).

Démonstration

On a $\ln(\exp(x)) = x$ par définition de ln. Pour démontrer la deuxième égalité, il suffit de remarquer que $\ln(\exp(\ln(y))) = (\ln \circ \exp)(\ln(y)) = \ln(y)$ et d'utiliser le fait que la fonction ln est bijective, donc injective.

En appliquant la dérivée d'une composée de fonctions à l'égalité $\ln \circ \exp = \mathrm{id}$ et puisque l'on connaît la dérivée de la fonction exponentielle, on peut calculer la dérivée de la fonction logarithme. En effet,

$$(\ln \circ \exp)' = (\ln' \circ \exp) \times \exp' = (\ln' \circ \exp) \times \exp$$

d'une part et $\mathrm{id}'(x) = 1$ pour tout x réel d'autre part. Donc, en $y = \exp(x)$, on a $\ln'(y) = \dfrac{1}{\exp(x)} = \dfrac{1}{y}$.

Dans la partie suivante, nous généralisons ce calcul au cas d'une fonction quelconque.

4.3. Théorème de la bijection (dans le cas dérivable)

On a vu avec la proposition 3 l'existence et l'unicité de la bijection réciproque d'une fonction bijective. Dans cette partie, on s'intéresse aux propriétés de régularité de la bijection réciproque lorsque la fonction de départ possède une certaine régularité.

Théorème 3. Admis

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction strictement monotone (ou bijective), continue. Soit $x_0 \in I$ tel que f soit dérivable en x_0. Alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$.Dans ce cas, on a $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0)}$) ou encore $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Démonstration

Nous admettons la démonstration qui peut être trouvée dans le cas où f est bijective après le corollaire 21.31 de [ML13]. Si l'on suppose démontré le fait que la fonction réciproque est dérivable, il est cependant aisé de calculer sa dérivée. En effet, en dérivant l'égalité $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ en $y_0 \in J$, on obtient :

$$f'(f^{-1}(y_0)) \cdot (f^{-1})'(y_0) = 1 \text{ et ainsi puisque } f'(f^{-1}(y_0)) = f'(x_0) \neq 0 \text{ on obtient } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

On peut aussi démontrer une version avec des conditions de régularité plus faible de ce résultat (voir le théorème 3, section 5.2 p.55 de [Exo16]).

Théorème 4. Admis (ou voir section 5.3 p.57 de [Exo16])

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si la fonction f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$, alors

1. elle établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,
2. la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.

Exercice 17

Calculer la dérivée de la fonction racine carrée à l'aide de la fonction carrée.

Cours Magistral n°5

Pré-requis :
- connaitre les valeurs remarquables des fonctions cosinus et sinus
- savoir dériver les fonctions cos et sin
- savoir étudier le signe des fonctions cos et sin

Objectifs :
- comprendre le procédé de construction des fonctions arccos, arcsin et arctan
- connaître les ensembles de définition et dérivées de arccos, arcsin et arctan
- mener des calculs simples avec les fonctions arccos, arcsin et arctan

Lectures complémantaires : sections 6.2 et 6.4 de [Cos16] ; section IV.3.3 de [RW13].

5. Réciproques des fonctions trigonométriques circulaires

Nous avons vu dans le cours précédent les propriétés requises pour pouvoir définir la fonction réciproque d'une fonction. Nous allons maintenant étudier les fonctions trigonométriques circulaires cosinus, sinus et tangente et voir comment on peur leur associer des fonctions réciproques.

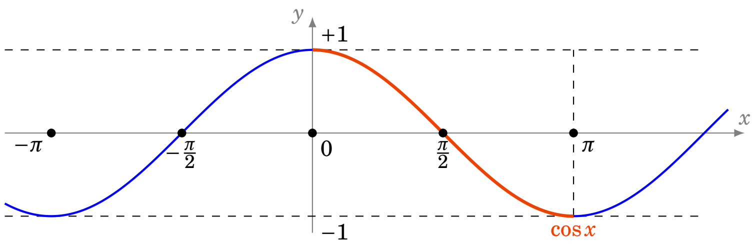
5.1. Arccosinus

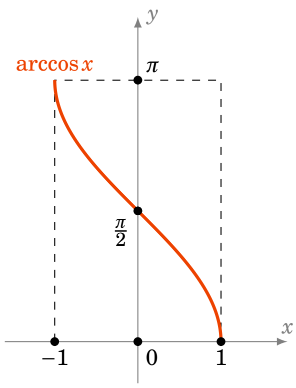
Nous commençons par l'étude de la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto \cos x$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc par le théorème 4, la restriction

$$\cos_{|[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est appelée la fonction ***arccosinus*** :

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$





On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos\big(\arccos(x)\big) = x & \forall x \in [-1, 1] \\ \arccos\big(\cos(x)\big) = x & \forall x \in [0, \pi] \end{array}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in [0, \pi] \qquad \cos(x) = y \iff x = \arccos y}$$

Terminons avec la dérivée de arccos :

♥ $$\boxed{\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1, 1[}$$

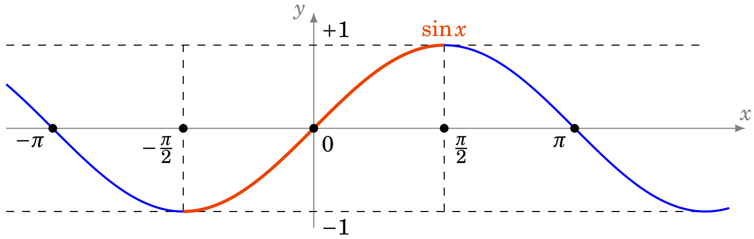
5.2. Arcsinus

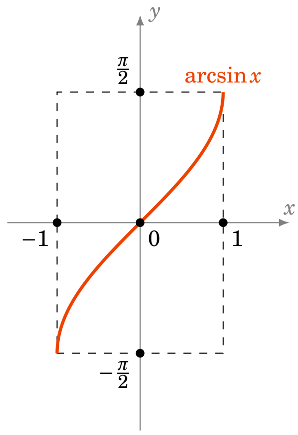
Nous nous intéressons maintenant à la fonction sinus $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. La restriction

$$\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

est continue et strictement croissante donc d'après le théorème 4, c'est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arcsinus*** :

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$





$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\big(\arcsin(x)\big) = x & \forall x \in [-1, 1] \\ \arcsin\big(\sin(x)\big) = x & \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array}}$$

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \qquad \sin(x) = y \iff x = \arcsin y}$$

$$\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1, 1[}$$

Exercice 18

1. Représentez la fonction $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$.
2. Représentez la fonction $x \mapsto \sin(\arcsin(x))$.

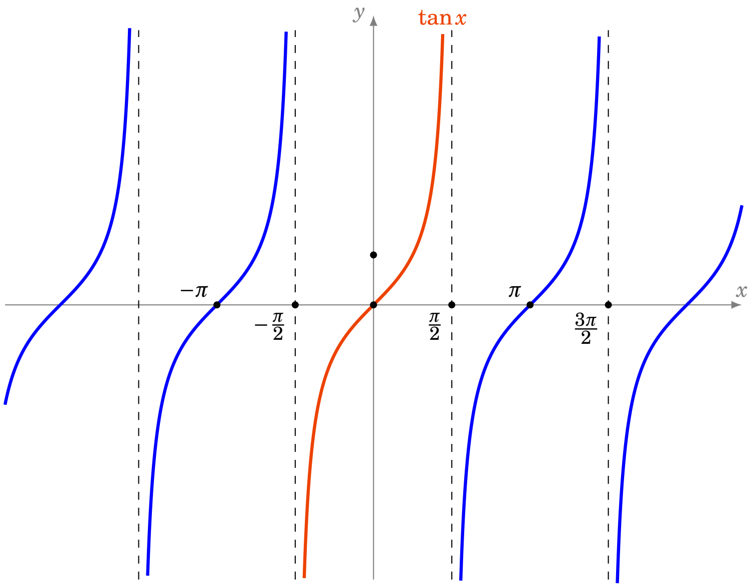
5.3. Arctangente

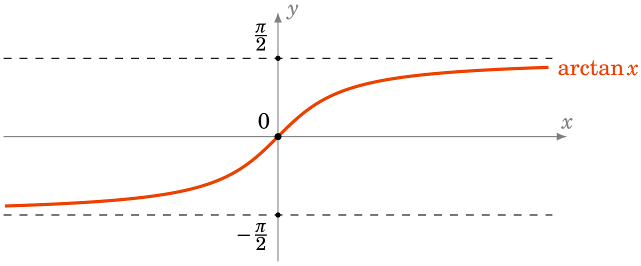
Nous finissons ce cours par l'étude de la fonction tangente. La restriction

$$\tan_{|]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$

est continue et strictement croissante donc d'après le théorème 4, c'est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arctangente*** :

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$





$$\boxed{\begin{array}{ll} \tan\big(\arctan(x)\big) = x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan\big(\tan(x)\big) = x & \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{array}}$$

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \tan(x) = y \iff x = \arctan y}$$

♥

$$\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Lecture complémentaire : aller lire la section 3 sur les fonctions hyperboliques du chapitre 4 de [Exo16].

Cours Magistral n°6

Pré-requis :
- savoir déterminer le signe d'une expression
- savoir calculer une dérivée
- savoir construire un tableau de variations
- fonctions exponentielle et logarithme népérien

Objectifs :
- exploiter un tableau de variations et la présence de tangentes horizontales pour construire une courbe
- exploiter la parité et/ou la périodicité d'une fonction pour construire une courbe
- exploiter la convexité d'une fonction pour construire une courbe

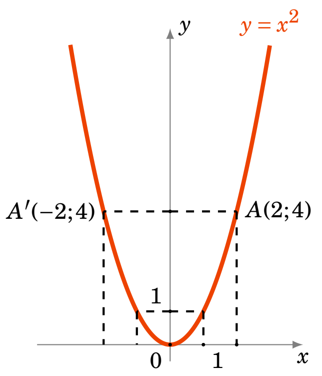
Lectures complémentaires : section 5.9 de [Cos16] ; section 3.1 du chapitre IV.2 de [RW13].

6. Étude qualitative d'une fonction

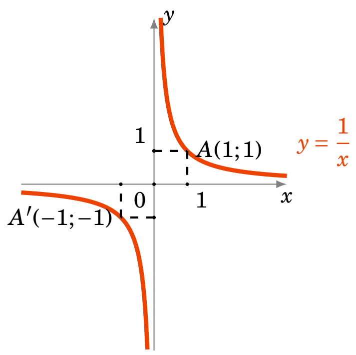
Nous avons étudier quelques fonctions usuelles dans les cours précédents et nous avons vu comment construire des fonctions plus compliquées à l'aide de la composée des fonctions. Dans ce cours, nous intéressons à l'allure du graphe d'une fonction, souvent donnée par des compositions de fonctions usuelles ou des inverses de fonctions usuelles (bijective).

6.1. Allure de fonctions à connaître.

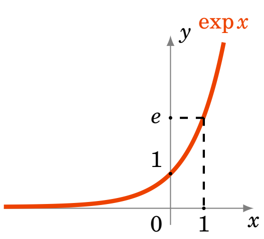
Il est d'abord utile d'avoir en tête le graphe des fonctions usuelles telles que les puissances ou les applications exponentielle et logarithme.



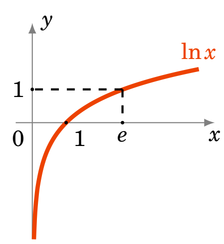
La fonction carré est une ***fonction paire***, sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.



La fonction inverse est une ***fonction impaire***, sa courbe représentative admet l'origine comme centre de symétrie.



Fonction exponentielle

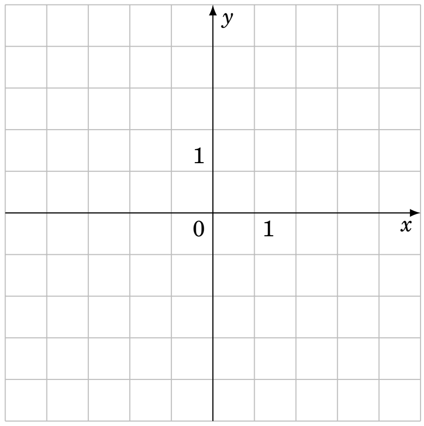


Fonction logarithme népérien

Exercice 19

Donnez ci-contre l'allure des courbes représentant les fonctions :

- $f_1(x) = -x^2 + 3$
- $f_2(x) = -\dfrac{1}{x+3}$
- $f_3(x) = \exp(x-2) - 1$
- $f_4(x) = \ln(|x|)$



6.2. Étude de fonction

L'étude des variations d'une fonction et de ses limites aux bornes de ses intervalles de définition donne une première information qualitative sur le graphe de la fonction.

Exercice 20

On souhaite tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$.

1. Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
2. Déterminez la limite de f en $+\infty$.
3. Déduisez-en une allure possible de $\mathscr{C}_f$ sur $\mathbb{R}^+$.
4. Justifiez l'allure de $\mathscr{C}_f$ sur $\mathbb{R}$.

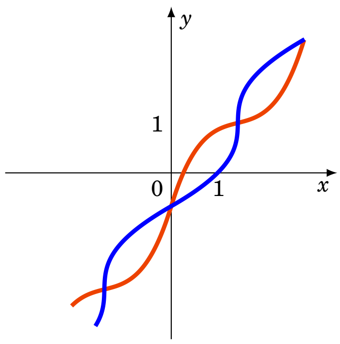
Remarque 7

On a utilisé ici les limites de f pour connaître ses asymptotes. On reviendra plus précisément sur ce point lors du cours magistral 7.

6.3. Notion de concavité-convexité

Un aspect qualitatif du graphe d'une fonction est donné par les notions de concavité et de convexité.

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(x^3 - 6x^2 + 13x - 4\right)$. La dérivée de cette fonction est $f'(x) = \dfrac{1}{4}\left(3x^2 - 12x + 13\right)$ et est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Les deux courbes ci-contre ont des allures distinctes mais sont compatibles avec les variations de f précédemment déterminées. Nous observons également que ces courbes s'intersectent plusieurs fois, ainsi calculer des valeurs de f ne permet pas forcément de déterminer le graphe de f.



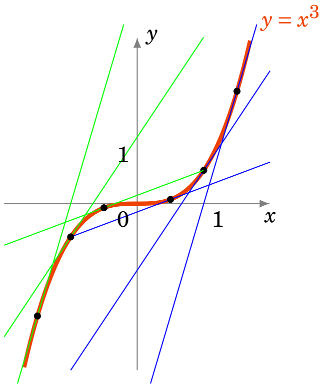
Un argument permet néanmoins de rejeter une de ces deux courbes, lequel ?

Définition 12

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- On dit que f est ***convexe*** sur l'intervalle I si sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses tangentes.

– On dit que f est ***concave*** sur l'intervalle I si sa courbe représentative est située en-dessous de chacune de ses tangentes.



Sur $\mathbb{R}^-$, la courbe représentative de la fonction cube est en-dessous de ses tangentes : la fonction cube est ***concave*** sur $\mathbb{R}^-$.

Sur $\mathbb{R}^+$, la courbe représentative de la fonction cube est au-dessus de ses tangentes : la fonction cube est ***convexe*** sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction cube change de convexité au point d'abscisse 0. On dit que c'est un ***point d'inflexion***.

Théorème 5

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
- Alors f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ sur I.
- Alors f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ sur I.

Démonstration

Remarque 8

- Une fonction convexe est une fonction dont la dérivée est croissante.
- Une fonction concave est une fonction dont la dérivée est décroissante.
- Un point a est un ***point d'inflexion*** de f si et seulement si f'' s'annule en a en changeant de signe.

Exercice 21

Revenons à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(x^3 - 6x^2 + 13x - 4\right)$.

1. Déterminez les éventuels points d'inflexion de f ainsi que sa convexité.
2. Donnez l'allure de $\mathscr{C}_f$

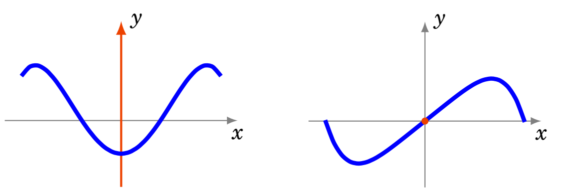
6.4. Parité et périodicité

Certains graphes de fonctions possèdent des symétries ou sont stables par translation. Dans ce cas, il est suffisant de tracer les graphes sur un sous-intervalle du domaine de définition pour connaître le graphe de la fonction sur l'intervalle en entier. Nous rappelons dans cette section les notions de *parité* et de *périodicité*.

Définition 13

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $]-a,a[$ ou $[-a,a]$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :
- La fonction f est ***paire*** si $\forall x \in I \quad f(-x) = f(x)$,
- La fonction f est ***impaire*** si $\forall x \in I \quad f(-x) = -f(x)$.

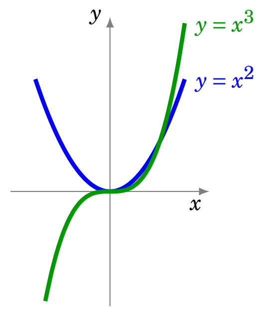
Interprétation graphique :
- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).



Une fonction paire à gauche, une fonction impaire à droite

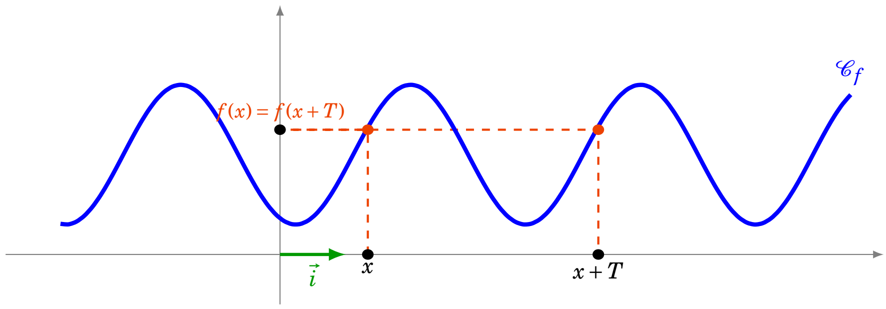
Exemple 14

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) est paire.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) est impaire.
- La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire.



Définition 14

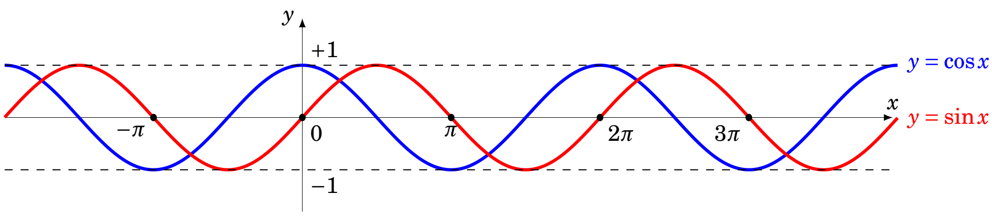
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite ***périodique*** de période T si $\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(x+T) = f(x)$.



Interprétation graphique : f est périodique de période T si et seulement si son graphe est invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$, où $\vec{i}$ est le premier vecteur de coordonnées.

Exemple 15

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.



Cours Magistral n°7

Pré-requis :
- savoir reconnaître un quotient, un produit...
- savoir factoriser
- maîtriser la notion de limite
- connaître les limites des fonctions racines, polynômes, exponentielle et logarithme
- connaître les théorèmes de comparaison

Objectifs :
- savoir calculer une limite en utilisant les règles de calcul
- savoir calculer une limite en utilisant les théorèmes de croissances comparées
- savoir déterminer les asymptotes à une courbe
- savoir construire l'allure d'une courbe en utilisant pertinemment les asymptotes éventuelles

Lectures complémentaires : section 9.3 et 10.5 de [AAA07] ; section 3.2 du chapitre IV.2 de [RW13] ; chapitre 9, section 2 de [Exo16].

7. Calcul de Limites

Le calcul de limites est essentiel pour pouvoir déterminer les asymptotes à une courbe et donc pour tracer l'allure du graphe d'une fonction. Dans ce cours, nous rappelons du cours de Terminale S quelques règles de calculs sur les limites qu'il faut connaître par cœur. Nous complétons ce cours avec un théorème de croissances comparées entre la fonction ln et les fonctions polynomiales.

7.1. Somme de deux fonctions

Pour calculer la limite d'une somme, il faut retenir qu'une limite infinie l'emporte sur une limite finie. Par contre, il faut bien faire attention au fait qu'il n'est pas possible de donner la limite de la somme de deux fonctions qui tendent vers des infinis opposés.

Le tableau suivant donne la limite $\lim\limits_{t\to\alpha}(u+v)(t)$ en fonction des limites $\lim\limits_{t\to\alpha} u(t)$ et $\lim\limits_{t\to\alpha} v(t)$ lorsque cela est possible. Les lettres L et L' représentent des réels et l'écriture FI veut dire "forme indéterminée", c'est-à-dire que l'on ne peut pas calculer la limite sans faire des calculs supplémentaires.

$\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) \backslash \lim\limits_{t\to\alpha} v(t)$	L'	$+\infty$	$-\infty$
L	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Exemple 16

- Soient u et v les fonctions définies respectivement par $u(t) = 2t+1$ et $v(t) = -3\cos t$. On fixe $\alpha = 0$. On a les limites suivantes : $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = 1$ et $\lim\limits_{t\to 0} v(t) = -3$. Comme les deux limites sont finies, on a $\lim\limits_{t\to 0}(u+v)(t) = \lim\limits_{t\to 0} u(t) + \lim\limits_{t\to 0} v(t) = 1-3 = -2$.
- Soient u et v les fonctions définies respectivement par $u(t) = \frac{1}{t^2}$ et $v(t) = -\frac{3}{t^4}$. On fixe $\alpha = 0$. On a les limites suivantes : $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0} v(t) = -\infty$. Les limites ne sont pas finies et sont opposées, on ne peut donc rien conclure sur la limite de la somme $u+v$ en 0.

7.2. Produit de deux fonctions

Tout comme pour la limite d'une somme, la limite d'un produit n'est pas toujours donnée par le produit des limites. Il faut bien faire attention au cas où une limite est nulle et l'autre est infinie. On a alors une forme indéterminée.

Le tableau suivant donne la limite $\lim\limits_{t\to\alpha}(u\cdot v)(t)$ en fonction des limites $\lim\limits_{t\to\alpha} u(t)$ et $\lim\limits_{t\to\alpha} v(t)$ lorsque cela est possible.

<table>
<tr><th>$\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) \backslash \lim\limits_{t\to\alpha} v(t)$</th><th>$L' < 0$</th><th>$0$</th><th>$L' > 0$</th><th>$+\infty$</th><th>$-\infty$</th></tr>
<tr><td>$L < 0$</td><td rowspan="3" colspan="3">LL'</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>FI</td><td>FI</td></tr>
<tr><td>$L > 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>FI</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>FI</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

Exercice 22

Calculer la limite lorsque $t \to 0$ de la fonction $f(t) = 2 + (3+t)(1+t^2)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Remarque 9

On peut revenir sur le deuxième exemple de l'exemple 16 : on cherchait la limite de $(u+v)(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{3}{t^4}$ lorsque $t \to 0$. On réécrit $(u+v)(t) = \frac{1}{t^2}\left(1 - \frac{3}{t^2}\right)$. On se ramène ainsi au calcul de la limite d'un produit. On a $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0}\left(1 - \frac{3}{t^2}\right) = -\infty$. On peut donc conclure que $\lim\limits_{t\to 0}(u+v)(t) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\left(1 - \frac{3}{t^2}\right) = -\infty$.

7.3. Quotient de deux fonctions

Cette fois-ci, dans le cas de la limite d'un quotient, on obtient des formes indéterminées lorsque les deux limites sont nulles ou lorsque les deux limites sont infinies (pas nécessairement du même signe). Comme dans le cas d'un produit, il faut faire attention au signe des limites L et L'.

Le tableau ci-dessous [1] donne la limite $\lim\limits_{t\to\alpha} \frac{u}{v}(t)$ en fonction des limites $\lim\limits_{t\to\alpha} u(t)$ et $\lim\limits_{t\to\alpha} v(t)$ lorsque cela est possible.

<table>
<tr><th>$\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) \backslash \lim\limits_{t\to\alpha} v(t)$</th><th>$L' < 0$</th><th>$L' > 0$</th><th>$0^-$</th><th>$0^+$</th><th>$+\infty$</th><th>$-\infty$</th></tr>
<tr><td>$L < 0$</td><td rowspan="3" colspan="2">$\frac{L}{L'}$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td rowspan="3" colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>$L > 0$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>FI</td><td>FI</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td colspan="2">FI</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td colspan="2">FI</td></tr>
</table>

Exemple 17

Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{-2\} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{t^2-4}{2t+4}$. Vérifions si la limite $\lim\limits_{t\to 2} f(t)$ existe et calculons-la le cas échéant. On écrit $f(t) = \dfrac{u(t)}{v(t)}$ avec $u(t) = t^2 - 4$ et $v(t) = 2t + 4$. On a $\lim\limits_{t\to 2} u(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 2} v(t) = 8$. D'après le tableau ci-dessus, la limite du quotient existe et vaut $\frac{0}{8} = 0$.

1. Par 0^+, on entend $\lim\limits_{t\to\alpha} v(t) = 0$ et $v(t) > 0$ au voisinage de α.

7.4. Composée de deux fonctions

Une autre règle de calcul concerne la limite de la composée de deux fonctions. Ce calcul se fait en calculant deux limites successives suivant le schéma présenté dans le théorème suivant.

Théorème 6. Admis

Soient u, g deux fonctions, α , β et γ trois réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si} \quad \left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{t\to\alpha} u(t) & = & \beta \\ \lim\limits_{x\to\beta} g(x) & = & \gamma \end{array}\right\} \quad \text{alors } \lim_{t\to\alpha} g(u(t)) = \gamma.$$

Exercice 23

Calculer, si elle existe, la limite de la fonction $f(t) = \sqrt{4+t+\ln(1+t)}$ lorsque $t \to 0$.

7.5. Croissances comparées

Nous avons vu qu'il y a de nombreuses situations où il est impossible de conclure. Voici un rappel de deux résultats obtenus en terminale qui complètent les règles précédentes :

Théorème 7. Comparaison exponentielle et polynômes à l'infini

Nous avons les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$

et plus généralement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0,$$

et plus généralement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x \times x^n = 0.$$

Démonstration

Faite en TD, voir exercice 36.

Exercice 24

Calculer

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{-x}+x)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - x}{e^x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3+4x^2+x+1}$.

Voici un corollaire du théorème précédent.

Théorème 8. Croissances comparées ♥

Nous avons les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to0^+} x\ \ln(x) = 0.$$

Démonstration

Exercice 25

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} 3x - 2\ln(x), \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{x^n} \text{ avec } n \geqslant 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^n \times \ln(x) \text{ avec } n \geqslant 1.$$

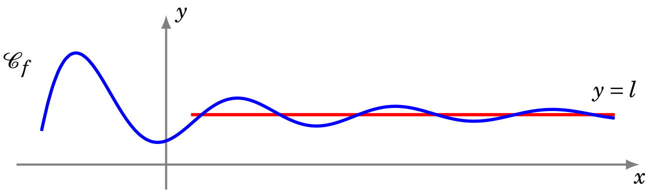
8. Asymptotes à une courbe

Nous présentons maintenant comment l'utilisation des limites permet le calcul d'asymptote à une courbe définie par une fonction. Nous obtenons alors une information qualitative sur le graphe de la fonction étudiée.

Définition 15

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$), on dit que la droite d'équation $y = l$ est une ***asymptote horizontale*** à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

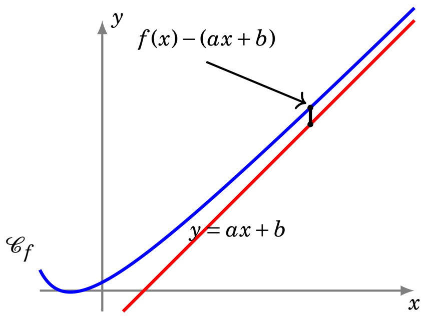
Illustration



Définition 16

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et a, b deux réels.
Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b) = 0$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b) = 0$), on dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est une ***asymptote oblique*** à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Illustration



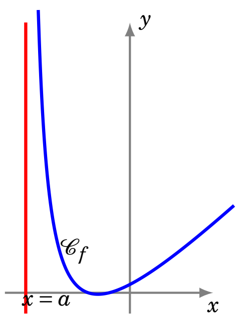
Exemple 18

Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x-2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Nous pouvons déterminer l'asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ qui vaut $y = x+5$.

Définition 17

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ ou si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une ***asymptote verticale*** d'équation $x = a$.

Illustration



Cours Magistral n°8

Pré-requis :
- savoir ce qu'est une primitive, une intégrale
- savoir calculer les primitives les plus simples (polynômes, celles données dans le formulaire)
- connaître les propriétés de linéarité de l'intégrale

Objectifs :
- améliorer sa technique de calcul de primitive
- valeur moyenne d'une fonction
- savoir encadrer une intégrale
- maîtriser le lien intégrale/calcul d'aire

Lectures complémentaires : sections 7.1, 7.4, 7.5 et 7.13 de [Cos16] ; chapitre 22, section I et II de [ML13] ; chapitre 13, sections 1 à 3.2 de [Exo16].

9. Intégrale et calcul d'aire

Le calcul de l'aire d'un triangle ou d'un rectangle est donné par des formules simples, connues depuis l'antiquité, et il est possible de décomposer le calcul de l'aire d'un polygone régulier en le découpant en triangles. Il est par contre plus compliqué de calculer l'aire d'une surface délimitée par une courbe. Une première méthode consiste à d'approcher l'aire à calculer par des triangles. Une méthode plus avancée utilise la notion d'intégrale.

Définition 18

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. On appelle ***primitive*** de f toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.
2. Soit F une primitive de f sur I. Pour tous a et b de I, on définit l'***intégrale*** de a à b de f par

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque 10

1. Cette définition semble sous-entendre que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ dépend de la primitive de f choisie. Vérifions que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est en fait indépendant de F.
2. L'intégrale vérifie les propriétés de linéarité suivantes :

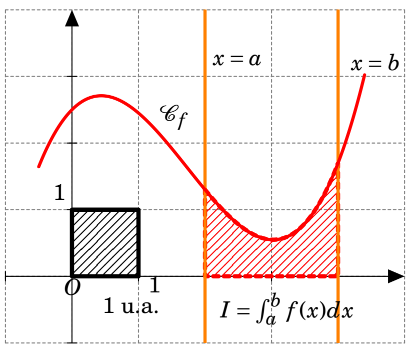
$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \text{ et } \int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration

Théorème 9. Admis

Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ alors l'aire délimitée par :
- les droites d'équations $x = a$, $x = b$,
- l'axe des abscisses,
- et $\mathscr{C}_f$

est égale à $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ unités d'aire.



Exercice 26

1. Calculez $I = \int_0^4 x^2 + 2x + 1\mathrm{d}x$.
2. Interprétez graphiquement I en terme d'aires. Illustrez vos propos par un schéma.

10. Propriétés de l'intégrale

Comme l'intégrale d'une fonction positive est égale à une aire, elle possède un certain nombre de propriétés qui se vérifient facilement géométriquement.

10.1. Propriétés essentielles de l'intégrale

Nous présentons dans cette section les principales propriétés de l'intégrale.

Proposition 5. Conservation de l'ordre ♥

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, avec $(a<b)$.

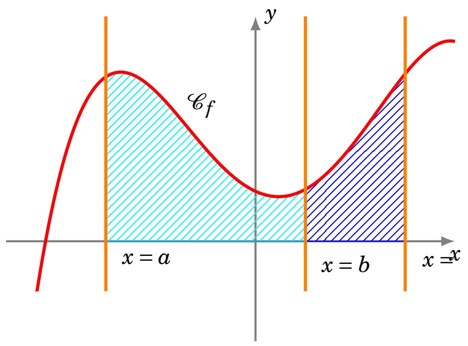
- Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.
- Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

Démonstration

Proposition 6. Relation de Chasles

Si f est une fonction continue sur $[a;c]$ et b désigne un réel de $[a;c]$, alors on a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$



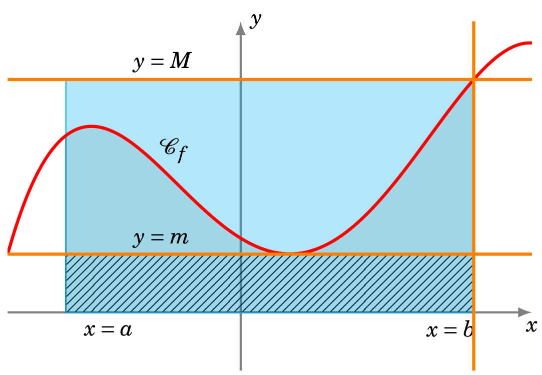
Exercice 27

1. Calculez $\int_{-4}^{4} |x|\,\mathrm{d}x$ puis illustrez le résultat.
2. Calculez $\int_{-4}^{4} |x-2|\,\mathrm{d}x$ puis illustrez le résultat.
3. Calculez $\int_{-4}^{4} |3-x|\,\mathrm{d}x$ puis illustrez le résultat.

Proposition 7. Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit m et M deux nombres réels. Si pour tout x de $[a;b]$, on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors on a :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$



Démonstration

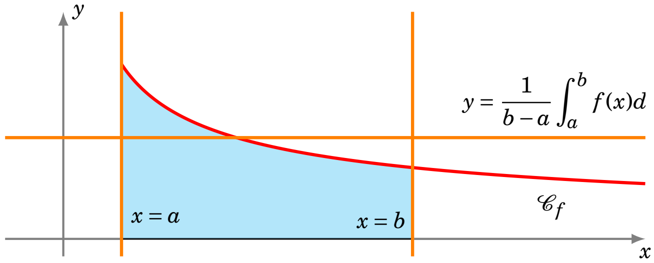
10.2. Valeur moyenne d'une fonction continue

L'inégalité de la moyenne, que l'on vient de présenter, nous amène à définir la valeur moyenne d'une fonction continue. Elle s'apparente à la valeur moyenne d'une famille finie de nombres.

Définition 19

On appelle ***valeur moyenne*** de f sur $[a;b]$ le nombre réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$



10.3. Calculer une aire à l'aide d'une Intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On cherche à calculer l'aire située entre les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ et entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$.

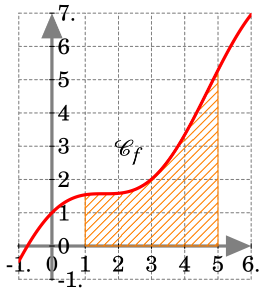
Lorsque f est positive

Exercice 28

Calculez l'aire de la partie du plan comprise entre les droites d'équation $x=1$, $x=5$, l'axe des abscisses et la courbe représentant la fonction f définie par

$$f(x)=x+\cos(x).$$

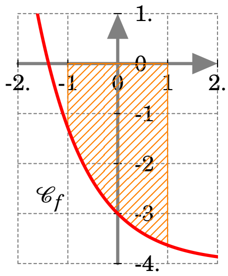
On donnera le résultat en unités d'aire.



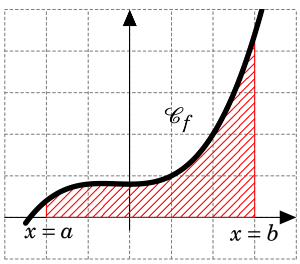
Lorsque f est négative

Exercice 29

Calculez l'aire de la partie du plan comprise entre les droites d'équation $x=-1$, $x=1$, l'axe des abscisses et la courbe représentant la fonction f définie par $f(x)=e^{-x}-4$. On donnera le résultat en unités d'aire.

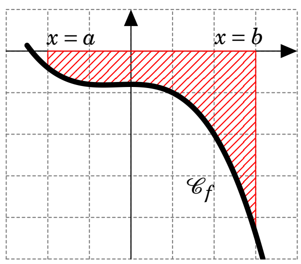


Bilan : lorsque f ne change pas de signe



Si f est positive sur $[a,b]$, on retiendra

$\mathscr{A}=$



Si f est négative sur $[a,b]$, on retiendra

$\mathscr{A}=$

11. Formulaire de primitives

Le calcul d'intégrale se fait principalement à l'aide d'une primitive. Il est donc important de connaître les primitives classiques pour savoir calculer une intégrale. Le tableau 1 présente les primitives à connaître par cœur.

TABLEAU 1 – Primitives classiques à connaître par coeur

Fonction f	Une primitive F	Remarques
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$a \neq -1$ - L'ensemble de définition de F dépend de a.
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x \in \mathbb{R}^{+*}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$x\ln(x) - x$	$x \in]0;+\infty[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \in]-1;1[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Argch} x$	$x \in]1;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{Argsh} x$	$x \in \mathbb{R}$
$u'(x)(u(x))^\alpha$	$\frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	uniquement si $\alpha \neq -1$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	Ainsi, pour $u(x) > 0$, une primitive est $\ln(u(x))$; si $u(x) < 0$ une primitive est $\ln(-u(x))$.

Remarque 11

On obtient toutes les primitives d'une fonction en ajoutant une constante à une primitive fixée : si F est une primitive de f sur I, alors les primitives de f sont les fonctions $F + C$, où C est une constante.

Cours Magistral n°9

Pré-requis :
- savoir dériver le produit de deux fonctions
- savoir calculer une primitive à l'aide du formulaire
- notion de bijection

Objectifs :
- calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties
- calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variable

Lectures complémentaires : sections 7.8 et 7.9 de [Cos16] ; chapitre 22, section IV de [ML13] ; section 5.3 du chapitre IV.5 de [RW13].

12. Méthodes de calcul d'intégrales et de primitives

Le dernier cours de ce chapitre apporte deux méthodes pour calculer des intégrales dont on ne connait pas la primitive a priori : l'intégration par parties et le changement de variable.

12.1. Intégration par parties

L'intégration par parties provient de la formule bien connue de la dérivée d'un produit : $(fg)' = f'g + fg'$.

Théorème 10. ♥

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ dont les dérivées sont continues sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration

Exercice 30

En utilisant la formule d'intégration par parties ci-dessus, calculez :

$$I_1 = \int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_0^{2\pi} x\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 31

Calculez l'intégrale de $t \mapsto t\,\mathrm{e}^t$ entre 0 et x.

Remarque 12

On note parfois $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ toute primitive de f (où f est une fonction continue). Attention, il faut cependant bien avoir conscience que cette notation est abusive car f possède une infinité de primitives.

12.2. Changement de variable

La formule de changement de variable repose sur la formule $(F\circ u)' = (F'\circ u)\times u' = (f\circ u)\times u'$, où F est une primitive de f.

Théorème 11

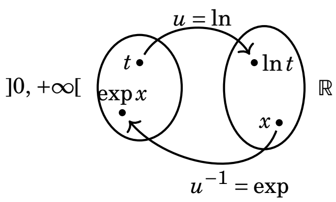
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $u : J \to I$ une fonction dérivable, dont la dérivée u' est continue. Soient a et b dans J, alors on a :

$$\int_a^b f(u(t)) \times u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Le plus dur est alors de reconnaître u et f. Voici deux exemples d'utilisation de ce théorème :

Exemple 19. Utilisation directe

On souhaite calculer l'intégrale de $\int_{e^1}^b \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t$. On propose le changement de variable $u(t) = \ln(t)$.



On a alors $u'(t) = \frac{1}{t}$ (on écrit parfois $\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\mathrm{d}t$), ainsi

$$\int_{e^1}^b \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln(e^1)}^{\ln b} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln x\right]_1^{\ln b} = \ln(\ln b).$$

On peut en déduire que les primitives de $\frac{1}{t\ln t}$ sont données par les fonctions $\ln(\ln t) + C$, où C est une constante.

Remarque 13

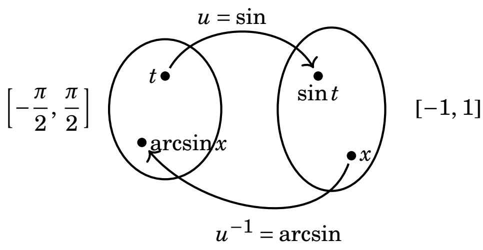
- On a fait apparaître $u^{-1} = \exp$ sur le dessin mais on n'a pas utilisé u^{-1} dans la formule du changement de variable. Il n'est pas nécessaire que u soit bijective, et donc que u^{-1} soit bien définie pour pouvoir appliquer le théorème de changement de variable.
- Ici, on aurait aussi pu reconnaître directement que $\frac{1}{t\ln t}$ est de la forme $\frac{u'(t)}{u(t)} = (\ln u(t))'$, avec $u(t) = \ln t$. L'utilisation du théorème de changement de variable n'est donc pas nécessaire. Il est plus utile lorsque la fonction f de l'intégrande $f(u(t)) \times u'(t)$ n'admet pas une primitive F évidente, car sinon une primitive est directement donnée par $F(u(t))$. Comme on va le voir dans l'exemple suivant, le théorème de changement de variable s'utilise comme une méthode de calcul intermédiaire d'intégrale ou de primitive.

Exemple 20. Utilisation lorsque u est une bijection

On souhaite calculer l'intégrale $\int_0^b \arcsin x\,\mathrm{d}x$. Dans ce cas, $\arcsin x$ ne s'écrit pas facilement sous la forme $f(u(x)) \times u'(x)$. Cependant, lorsque u est une bijection, la formule du théorème 11 se réécrit de la façon suivante :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t)) \times u'(t)\,\mathrm{d}t$$

(le changement provient uniquement du fait que les réels a et b sont pris dans I et non dans J). La fonction arcsin est difficile à intégrer, on cherche donc à la faire disparaître à l'aide d'un changement de variable $x = u(t) = \sin(t)$ (ou $u^{-1}(x) = \arcsin(x)$, il faut bien avoir conscience du fait que l'on se place sur un intervalle où sin est bijective). Les choses s'écrivent ainsi :



On a alors $u'(t) = \cos t$ (ou encore $\mathrm{d}u = \cos t \mathrm{d}t$) et on trouve ainsi :

$$\int_0^b \arcsin x \,\mathrm{d}x = \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(b)} \arcsin(\sin(t)) \cos t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\arcsin(b)} t \cos t \,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

On est alors ramené à un calcul d'intégrale que l'on sait faire au moyen d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^b \arcsin x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\arcsin(b)} t \cos t \,\mathrm{d}t &= \left[t \sin t + \cos t\right]_0^{\arcsin(b)} \text{ (en intégrant par parties)} \\ &= \arcsin(b) \sin(\arcsin(b)) + \cos(\arcsin(b)) - 1 = b \arcsin(b) + \sqrt{1 - b^2} - 1. \end{aligned} \tag{2}$$

On en déduit que les primitives de $\arcsin x$ sont les fonctions $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$, où C est une constante.
Question : sur quel intervalle a-t-on déterminé une primitive de $\arcsin x$?

Remarque 14

Cette fois-ci, on a utilisé le fait que la fonction u est *bijective* . Il faut donc faire attention à l'intervalle sur lequel les calculs sont menés.

Exercice 32

En utilisant la formule de changement de variable ci-dessus, calculez :

1. l'intégrale $\int_0^2 \sqrt{x} \cos\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x$;
2. l'intégrale $\int_0^\pi \cos^2(x) \sin(x) \mathrm{d}x$;
3. l'intégrale $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \,\mathrm{d}x$.

Cours Magistral n°10

Pré-requis :
- savoir décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle de deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$
- savoir calculer les primitives de certaines fractions rationnelles de type éléments simples

Objectifs :
- décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle de deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$
- savoir calculer les primitives de fractions rationnelles réelles

13. Primitivation d'éléments de première espèce

Les fractions rationnelles appelées *éléments de première espèce* sont les puissances de fractions du type $\frac{1}{X-a}$. Nous avons vu le calcul des primitives des fonctions rationnelles associées dans le chapitre 1. Nous les rappelons ici, ce qui nous permet de calculer quelques primitives de fractions rationnelles.

Proposition 8

1. Nous avons

$$\int \frac{dt}{t-a} = \ln(|t-a|)+C \quad \text{dans }]a,+\infty[\text{ ou dans }]-\infty,a[, \text{ avec } C \text{ une constante.}$$

2. Pour $p \geqslant 2$, nous avons

$$\int \frac{dt}{(t-a)^p} = \frac{1}{(-p+1)}\frac{1}{(t-a)^{p-1}}+C \quad \text{dans }]a,+\infty[\text{ ou dans }]-\infty,a[, \text{ avec } C \text{ une constante.}$$

3. Pour $p \geqslant 2$, nous avons

$$\int \frac{dt}{(at+b)^p} = \frac{1}{a(-p+1)}\frac{1}{(at+b)^{p-1}}+C \quad \text{dans } \left]-\frac{b}{a},+\infty\right[\text{ ou dans } \left]-\infty,-\frac{b}{a}\right[, \text{ avec } C \text{ une constante.}$$

Exemple 21. ♥

Nous avons aussi obtenue dans l'exemple **??** du cours précédent la décomposition en élément simple suivante

$$\frac{2X+1}{(X+1)^2(X+2)} = -\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{3}{X+1}-\frac{3}{X+2}. \tag{3}$$

En appliquant la proposition 8, nous trouvons la primitive

$$\begin{aligned}\int \frac{2t+1}{(t+1)^2(t+2)}dt &= \int\left(-\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{3}{t+1}-\frac{3}{t+2}\right)dt = -\int\frac{dt}{(t+1)^2}+3\int\frac{dt}{t+1}-3\int\frac{dt}{t+2}\\ &= -\frac{1}{t+1}+3\ln(|t+1|)-3\ln(|t+2|)+C,\end{aligned}$$

où C est une constante.

14. Primitivation d'éléments de deuxième espèce

Les *éléments de seconde espèce* sont les fractions rationnelles du type $\dfrac{\alpha X+\beta}{(X^2+bX+c)^p}$. Nous supposons que $t^2+bt+c>0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. En effet dans le cas contraire, nous pouvons nous ramener au calcul de primitives d'éléments de première espèce.

Calcul des primitives des éléments de la forme $\dfrac{2t+b}{(t^2+bt+c)^p}$

Nous avons

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{2t+b}{(t^2+bt+c)^p}\,dt = \frac{1}{(-p+1)}\frac{1}{(t^2+bt+c)^{p-1}} + C, & \text{si } p>1, \text{ et} \\ \displaystyle\int \frac{2t+b}{t^2+bt+c}\,dt = \ln(t^2+bt+c)+C, & \text{où } C \text{ est une constante.} \end{cases}$$

Calcul des primitives des éléments de la forme $\dfrac{1}{(t^2+bt+c)^p}$

Comme $t^2+bt+c>0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, on peut trouver un changement de variable permettant de ramener le calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+bt+c)^p}\,dt$ au calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{(y^2+1)^p}\,dy$. La **mise sous forme canonique** d'un trinôme du second degré consiste à ramener ax^2+bx+c ($a\neq 0$) à l'une des formes suivantes via un changement de variable :

$$\begin{cases} K(y^2-1) & \text{si} \quad \Delta = b^2-4ac>0, \\ Ky^2 & \text{si} \quad \Delta = b^2-4ac=0, \\ K(y^2+1) & \text{si} \quad \Delta = b^2-4ac<0. \end{cases}$$

Ces formes canoniques sont obtenues via le calcul suivant :

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right).$$

- Si $\Delta=0$, on pose $y=x+\frac{b}{2a}$ et l'on obtient la deuxième forme.
- Si $\Delta>0$, on a :
$$ax^2+bx+c = \frac{\Delta}{4a}\left(\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2-1\right)$$
et on pose $y=\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}$ pour obtenir la première forme.
- Si $\Delta<0$, alors
$$ax^2+bx+c = \frac{-\Delta}{4a}\left(\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right)$$
et on pose $y=\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$ pour obtenir la troisième forme.

Après avoir fait ce changement de variable, lorsque $x^2+bx+c>0$ sur $\mathbb{R}$, on ramène le calcul de

$$\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^m}\,dx \text{ au calcul de } \int \frac{1}{(y^2+1)^m}\,dy.$$

Pour $m=1$, nous avons

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan(y)+C, \text{ où } C \text{ est une constante.}$$

Pour $m>1$, on ramène le calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{(y^2+1)^m}\,dy$ au calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{(y^2+1)^{m-1}}\,dy$, en effectuant l'intégration par parties suivante

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dy}{(y^2+1)^{m-1}} &= \left[\frac{y}{(y^2+1)^{m-1}}\right]_a^b + 2(m-1)\int_a^b \frac{y^2}{(y^2+1)^m}\,dy \\ &= \left[\frac{y}{(y^2+1)^{m-1}}\right]_a^b + 2(m-1)\left(\int_a^b \frac{dy}{(y^2+1)^{m-1}} - \int_a^b \frac{dy}{(y^2+1)^m}\right). \end{aligned}$$

Ainsi en isolant $\displaystyle\int_a^b \frac{dy}{(y^2+1)^m}$, nous obtenons $\displaystyle\int_a^b \frac{dy}{(y^2+1)^m}\,dy = \frac{1}{2(m-1)}\left[\frac{y}{(y^2+1)^{m-1}}\right]_a^b + \frac{2m-3}{2(m-1)}\int_a^b \frac{dy}{(y^2+1)^{m-1}}\,dy.$

Exemple 22

Calculons $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{s^2+s+1}$. Posons $t = \frac{2s+1}{\sqrt{3}}$. Le trinôme devient $s^2+s+1 = \frac{3(t^2+1)}{4}$ et l'intégrale est égale à

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{1/\sqrt{3}}^{3/\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Big(\arctan(3/\sqrt{3}) - \arctan(1/\sqrt{3}) \Big).$$

Dans la pratique, nous retrouvons le changement de variable comme suit :

$$I = \int_0^1 \frac{ds}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int_0^1 \frac{ds}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2s+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)}.$$

C'est la raison pour laquelle on introduit le changement de variable $t = \frac{2s+1}{\sqrt{3}}$.

Bibliographie

[AAA07] Elie Azoulet, Jean Avignant, and Guy Auliac. *Les mathématiques en licence*. EdiScience, 2007. Tome 1.

[Cos16] Gilles Costantini. *Analyse*. De boeck, 2016.

[Exo16] Exo7. *Algèbre - Cours de mathématiques, première année*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016. http://exo7.emath.fr/cours/livre-algebre-1.pdf.

[LTT16] Véronique Lods, Emmanuelle Tosel, and Nicolas Tosel. *Mathématiques Du lycée au Supérieur*. Epistemon Rue des Ecoles, 2016.

[ML13] Jean-Pierre Marco and Laurent Lazarini. *Mathématiques L1*. Pearson, 2013.

[RW13] Jean-Pierre Ramis and André Warusfel. *Mathématiques, Tout-en-un pour la licence*. Dunod, 2013. Niveau 1.