

一位成绩不佳的同学的笔记 – Analyse 4

一位成绩不佳的同学

2025 年 9 月 22 日



图 1: 作者

0 引言

0.1 关于本拙作

M.H.Dehon 老师是位非常优秀的数学教育者，学识渊博、水平极高。不过他的课堂内容深度很大，常常让同学们一时难以消化；板书逻辑严谨，但对我们来说稍显晦涩；教材更是原汁原味，理解起来颇具挑战。因此，这份笔记的目的，是在本人力所能及的范围内，帮大家更好地理解和消化他课堂上的内容（虽然本人水平有限，但聊胜于无，希望能有所帮助）。

需要说明的是笔记侧重于实用性（即如何理解知识并做题）而非基本概念和定理的证明，即便我认为后者其实更重要。

0.2 注意事项

1. 本人衷心希望您看到这里的时候并非考试前夕，否则我建议您早点睡觉，以便明天以丰沛的精神面对考试；
2. 本作品不可代替教材；
3. 如有问题请立刻向作者指出，本作品允许一切形式的谩骂、攻击、批评。

0.3 关于 Analyse

分析学是高等数学的基石，它不仅要求精确的逻辑推理，更要求我们在抽象与严谨中捕捉直观的数学本质.

要想学好数学分析，需要一定的计算能力，但更需要抽象思维的训练. 有时，好的理解能力能够使做题事半功倍.

上面是废话. 其实多做题就行了.

1 Espaces vectoriels normés (赋范向量空间)

1.1 范数

1.1.1 \mathbb{K}^d 上的范数

d 是正整数, $(E, \|\cdot\|)$ 是一个 \mathbb{K} -赋范向量空间, 其中 \mathbb{K} 表示实数域 \mathbb{R} 或复数域 \mathbb{C} . 在有限维空间 \mathbb{K}^d 中, 定义以下范数:

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_d|, \quad \|x\|_2 = (|x_1|^2 + \cdots + |x_d|^2)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_d|),$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d$.

$\|x\|_1$ 称为 *norme de la convergence en moyenne*, $\|x\|_2$ 称为 *norme de la convergence en moyenne quadratique*, 这很好理解, 它们分别算的是均值和平方均值; $\|x\|_\infty$ 称为 *norme de la convergence uniforme*, 因为这涉及到一致收敛的定义, 但这是下一章的内容.

(这段是废话——作者注) 北京市的道路总体呈现横平竖直的网格状, 可以视为 \mathbb{R}^2 ; 以北航为 $(0,0)$, 如果您想打车去天安门, 坐标 $r = (x,y)$ (具体数据不详), 那么您应该考虑 $\|r\|_1$, 即车行走的距离; 如果您想飞个无人机到天安门拍两张照片 (请不要这样做), 那么您应该考虑 $\|r\|_2$, 即无人机的飞行距离; 如果您是一个晕地铁的人, 却不得不坐地铁, 则应该考虑 $\|r\|_\infty$. 北京地铁也是横平竖直的, 这个范数决定了您最多要在同一列地铁呆多长时间.

类似地, 也可以定义 p -范数 ($p \geq 1$):

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_d|^p)^{1/p}$$

上面的三个范数分别是 $p = 1$ 、 $p = 2$ 和 $p \rightarrow \infty$ 的情况. 其他情况并不常用.

1.1.2 $C([a,b]; \mathbb{K})$ 上的范数

设 $[a,b]$ 是 \mathbb{R} 上一个非空闭区间. 记

$$C([a,b]; \mathbb{K}) \quad (\text{或简记为 } C([a,b]))$$

为所有在 $[a,b]$ 上取值于 \mathbb{K} 的连续函数所构成的 \mathbb{K} -向量空间.

在 $C([a,b])$ 上定义三种范数:

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)| dt, \quad \|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

三种范数的名字和意义和上一节一样. 类似地, 也可以将定义拓展到 p -范数 ($p \geq 1$):

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

(这段也是废话) 小葛晚上唱歌, 记 $f(t)$ 为时间段 $[a,b]$ 中的音量大小. 则 $\|f\|_1$ 可用来表示放了多少; $\|f\|_2$ 可表示能量消耗了多少; $\|f\|_\infty$ 表示最大音量, 决定邻居是否会报警.

对于 $C([a,b]; \mathbb{K})$, 也可以按照同样的定义得到范数, 但在范数的比较上会有不同的结果. 具体见下文.

1.2 连续线性映射

1.2.1 线性（或双线性）映射的连续性

我们记 E, F, G 为 \mathbb{K} -赋范向量空间.

命题. 设 $f: E \rightarrow F$ 是一个线性映射. f 连续当且仅当下面任一条件成立:

1. f 在 0 处连续;
2. f 在 E 的闭单位球 $\overline{B}_E(0, 1)$ 上的限制是有界的;
3. 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

通常第 3 条用来证明连续性, 第 2 条证明不连续性.

命题. 易知上面三条性质分别等价于以下性质:

1. E 中存在一点使得 f 在该点连续;
2. 对 E 的任意有界集 B , $f(B)$ 在 F 中仍然是有界的;
3. f 是利普希茨的.

证明. 若线性映射 f 连续, 则它显然在 0 处连续. 在此条件下, 按照极限定义, $\forall \epsilon > 0$, 存在 $r > 0$,

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_E \leq r \implies \|f(x)\|_F \leq \epsilon$$

取 $\epsilon = 1$

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_E \leq r \implies \|f(x)\|_F \leq 1.$$

通过 f 的线性以及范数 $\|\cdot\|_E$ 和 $\|\cdot\|_F$ 的性质可得

$$\forall x \in \overline{B}_E(0, 1), \quad \|f(x)\|_F = \frac{1}{r} \|f(rx)\|_F \leq \frac{1}{r}.$$

这是因为 $x \in \overline{B}_E(0, 1)$ 导致 $\|x\|_E \leq 1$, $\|rx\|_E = r\|x\|_E \leq r$ 从而 $\|f(rx)\|_F \leq 1$. 因此 $1 \Rightarrow 2$.

现在假设 f 在 $\overline{B}_E(0, 1)$ 上的限制是有界的; 若 $C \geq 0$ 是 $x \mapsto \|f(x)\|_F$ 在 $\overline{B}_E(0, 1)$ 上的一个上界, 则有

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \|f(x)\|_F = \|f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\|_F \cdot \|x\|_E \leq C\|x\|_E.$$

于是我们证明了 $2 \Rightarrow 3$. 这里的技巧是对任意的 x 作了归一化处理, 即除以它的范数, 得到范数为 1 从而属于 $\overline{B}_E(0, 1)$ 的向量.

由于利普希茨映射都是连续的, 因此在条件 3 (或 3) 下, f 连续. □

例题. (TD1.1) 证明黑字的三个条件和蓝字的三个条件分别等价.

证明. 聪明的您不难发现, 只需要证明 $1 \Rightarrow 1$ 和 $2 \Rightarrow 2$, 因为剩下 4 个关系比较显然.

1 条件下, 设 f 在 $a \in E$ 上连续. 注意: 函数在一点连续的另一定义是函数在该点的极限等于函数值. 注意到 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x+a) - f(a))$. f 在 a 连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x+a) \stackrel{y=x+a}{=} \lim_{y \rightarrow a} f(y) = f(a)$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x+a) - f(a)) = 0$, 所以 f 在 0 连续.

2 条件下, 要证明 2, 需要把性质从一个球扩展到全集. 根据 2, 存在 $M \geq 0, \forall x \in E, \|x\|_E \leq 1 \rightarrow \|f(x)\|_F \leq M$.

对于全集 E 中任意有界子集 A 中的任意 x , 存在 $r > 0, \|x\|_E \leq r$. 试图将 x 放到单位球里面: $\|r^{-1}x\|_E \leq 1$, 继而 $\|f(x)\|_F = r\|f(r^{-1}x)\|_F \leq rM$. 因此 A 被半径为 rM 的球包住, 从而有界. □

注. 线性空间的相关证明一定要用线性.

命题. 设 $g: E \times F \rightarrow G$ 是一个双线性映射. g 连续当且仅当下列条件之一满足:

1. g 在 $(0, 0)$ 处连续;
2. g 在 $\overline{B}_E(0, 1) \times \overline{B}_F(0, 1)$ 上的限制是有界的;
3. 存在一个常数 $C > 0$, 使得 $\|g(x, y)\|_G \leq C\|x\|_E\|y\|_F, \quad \forall (x, y) \in E \times F$

证明略.

命题. 在 \mathbb{K}^d 上赋予 $\|\cdot\|_\infty$ 范数. 任意线性映射 $f: \mathbb{K}^d \rightarrow F$ 都是连续的.

证明. 记 (e_1, \dots, e_d) 为 \mathbb{K}^d 的标准基 (就是只有一项是 1 其他全是 0 的基), 那么对于任意向量 $x = x_1e_1 + \dots + x_de_d \in \mathbb{K}^d$, 有:

$$\|f(x)\|_F \leq |x_1|\|f(e_1)\|_F + \dots + |x_d|\|f(e_d)\|_F \leq (\|f(e_1)\|_F + \dots + \|f(e_d)\|_F)\|x\|_\infty.$$

因为 $\|x\|_\infty$ 是 $|x_1| \dots |x_d|$ 里面最大的一项. □

注. 这里赋予 $\|\cdot\|_\infty$ 范数只是方便证明, 实际上所有范数都是等价的 (下面会提到, 当然上学期 TD 也有), f 的连续性不取决于范数.

例题. (TD1.5 节选) 我们称一个函数 $x: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ 具有有界支集, 如果存在 $a \in [0, \infty[$ 使得 $x(t) = 0$ 对所有 $t \geq a$ 都成立. 设 E 是 $C([0, \infty[)$ 的子空间, 由所有有界支集的函数组成. 我们考虑定义在 E 上的线性泛函 φ_4, φ_5 :

$$\varphi_4(x) = \int_0^\infty x(t)e^{it} dt, \quad \varphi_5(x) = \int_0^\infty x(t)e^t dt.$$

请给出并证明这些线性形式在以下两种情形下的连续性:

1. 在 E 上赋予 $\|\cdot\|_\infty$ 范数:

$$\|x\|_\infty = \max_{t \in [0, \infty[} |x(t)|;$$

2. 在 E 上赋予 $\|\cdot\|_1$ 范数:

$$\|x\|_1 = \int_0^\infty |x(t)| dt.$$

解. $\varphi_4(x)$ 对于 $\|\cdot\|_\infty$ 不连续但对于 $\|\cdot\|_1$ 连续. 对 $\|\cdot\|_1$,

$$|\varphi_4(x)| = \left| \int_0^\infty x(t)e^{it} dt \right| \leq \int_0^\infty |x(t)| |e^{it}| dt = \int_0^\infty |x(t)| dt = \|x\|_1$$

对 $\|\cdot\|_\infty$, 设法构造一个有界的函数列 (x_N) 使得 $(|\varphi_4(x_N)|)$ 无上界.

$$x_N(t) = \begin{cases} e^{-it}, & \text{如果 } 0 \leq t \leq (2N-1)\pi, \\ t/\pi - 2N, & \text{如果 } (2N-1)\pi < t < 2N\pi, \\ 0, & \text{如果 } 2N\pi \leq t. \end{cases}$$

该函数列在 $0 \leq t \leq (2N-1)\pi$ 时以 1 为半径转圈, $(2N-1)\pi < t < 2N\pi$ 时由 -1 线性过渡到 0. N 越大转圈圈的圈数越多. 因此这个函数是在单位闭球里面的. 然而, 在 φ_4 作用下, 它转圈圈越多, 积分就越大:

$$|\varphi_4(x_N)| = \left| \int_0^{(2N-1)\pi} dt + \int_{(2N-1)\pi}^{2N\pi} (t/\pi - 2N) e^{it} dt \right| \geq (2N-1)\pi - \int_{(2N-1)\pi}^{2N\pi} |t/\pi - 2N| dt \geq (2N-1)\pi,$$

这里用到了 $|A+B| \geq |A| - |B|$.

$\varphi_5(x)$ 对于两种范数都不连续. 考虑函数

$$x_N(t) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } 0 \leq t \leq N-1, \\ N-t, & \text{如果 } N-1 < t < N, \\ 0, & \text{如果 } N \leq t. \end{cases}$$

该函数列上的函数, 最开始是 1, 后来线性过渡到 0. N 越大, 函数值为 1 的部分就越长:

$$\varphi_5(x_N) \geq \int_0^{N-1} e^t dt = e^{N-1} - 1$$

这显然是无界的.

1.2.2 范数的比较

定义. 设 E 是一个 K -向量空间, N 与 N' 是定义在 E 上的两个范数. 若存在实数 $C > 0$, 使得

$$N'(x) \leq CN(x), \quad \forall x \in E,$$

则称范数 N 比范数 N' 更细 (*plus fine*). 若 N 与 N' 互相更细, 则称它们是等价的.

注. (废话预警) 其实我也不知道 *plus fine* 的专业翻译, 因为国内的教材似乎更关注范数的等价而非 *plus fine*. 因此我自作主张, 本着怎么好记怎么来的原则乱翻的. 反正考试是写法语, 中文只是辅助复习, 所以其实把 *boule ouverte* 翻译成“思想开放的脑袋”也未尝不可.

注. E 上范数的等价性是一种等价关系. 等价关系是法数学的, 如果记不起来可以去看当年的 PPT.

命题. 范数 N 比范数 N' 更细, 当且仅当满足下列任一等价条件:

1. 恒等映射 $\text{id}_E : (E, N) \rightarrow (E, N')$ 是连续的;
2. 如果 E 的一个子集在范数 N 下有界, 那么它在范数 N' 下也有界;
3. 如果 E 的一个子集在范数 N' 下是开集, 那么它在范数 N 下也是开集;
4. 如果一个 E 中的数列在范数 N 下收敛, 那么它在范数 N' 下也收敛;
5. 如果一个 E 中的数列在范数 N 下收敛到 0, 那么它在范数 N' 下也收敛到 0.

注. 记忆方法: 开集 N 和 N' 是反过来的.

证明. 首先, “范数 N 比范数 N' 更细”是和 1 等价的. 因为范数的比较体现了 id_E 的利普希茨性.

对于下面的 5 条性质, $1 \Leftrightarrow 2$ 是我们证明过了的. $1 \Leftrightarrow 3$ 基于以下性质: 映射是连续的当且仅当开集的原像也是开集. 这里 id_E 对任何集合的原像都是集合自己.

$1 \Rightarrow 5$ 和 $5 \Rightarrow 4$ 是显然的. 至于 $4 \Rightarrow 1$, 回忆一下这个性质: X 是度量空间, f 是 $X \setminus \{a\}$ 到另一个度量空间 Y 的映射, f 在 a 连续当且仅当对任何 $X \setminus \{a\}$ 中收敛到 a 的数列 (x_n) , $(f(x_n))$ 是收敛的. 这里, 虽然 (E, N) 和 (E, N') 是一个空间赋予了两个范数, 但也可以视为两个度量空间. 一个 E 中的数列可以看做这两个空间的数列, 其中一个是另一个经过 id_E 得到的.

□

推论. 在同样的记号下, 两个范数 N 与 N' 等价, 当且仅当以下任一同等条件成立:

1. 恒等映射 $\text{id}_E : (E, N) \rightarrow (E, N')$ 与 $\text{id}_E : (E, N') \rightarrow (E, N)$ 都是连续的;
2. 范数 N 与 N' 在 E 上定义了相同的有界集;

3. 范数 N 与 N' 在 E 上定义了相同的开集;

4. 范数 N 与 N' 在 E 上定义了相同的收敛数列;

5. 范数 N 与 N' 在 E 上定义了相同的趋于零的数列.

注. 然而, 证明两个范数等价, 仍然是定义比较常用. 即:

$$\exists a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in E, \quad aN(x) \leq N'(x) \leq bN(x)$$

命题. 在 K^d 上, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ 这三种范数是等价的:, 对 $x = (x_1, \dots, x_d) \in K^d$, 有

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_d| \leq (1^2 + \dots + 1^2)^{\frac{1}{2}} (|x_1|^2 + \dots + |x_d|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{d} \|x\|_2,$$

这里用到了 *Cauchy-Schwartz* 不等式.

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + \dots + |x_d|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(d \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{d} \|x\|_\infty,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i| \leq |x_1| + \dots + |x_d| = \|x\|_1.$$

由此可见, 这些范数在 K^d 上两两等价.

无限维空间上是否还有这样的性质? 答案是否定的.

命题. 设 $[a, b]$ 是 \mathbb{R} 的一个非空闭区间; 在 $C([a, b])$ 上, 范数 $\|\cdot\|_\infty$ 比范数 $\|\cdot\|_2$ 更细, 而范数 $\|\cdot\|_2$ 又比范数 $\|\cdot\|_1$ 更细. 事实上, 对于 $x \in C([a, b])$,

$$\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq ((b-a) \max_{t \in [a, b]} |x(t)|^2)^{1/2} = \sqrt{b-a} \|x\|_\infty,$$

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)| dt \leq \left(\int_a^b 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{b-a} \|x\|_2.$$

这里用到了积分的 *Cauchy-Schwartz* 不等式.

反过来却不成立. 假设 $[a, b] = [0, 1]$, 考虑函数列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, 其中每个 $x_n \in C([0, 1])$ 定义为

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, 1], \quad x_n(t) = \begin{cases} n \cos(n^2 t), & \text{若 } t < \pi/(2n^2), \\ 0, & \text{若 } t \geq \pi/(2n^2). \end{cases}$$

这个函数列呈现的现象是: 随着 n 的增大, 函数在半个周期 $[0, \pi/(2n^2)]$ 上振动得越来越快, 但振幅也越来越大. 由此可得

$$\|x_n\|_\infty = n, \quad \|x_n\|_2 = \sqrt{\pi}/2, \quad \|x_n\|_1 = 1/n, \quad \forall n > 1.$$

于是数列 (x_n) 在范数 $\|\cdot\|_2$ 下有界, 但在范数 $\|\cdot\|_\infty$ 下无界; 同时它在范数 $\|\cdot\|_1$ 下趋于 0, 但在范数 $\|\cdot\|_2$ 下并不趋于 0. 这表明范数 $\|\cdot\|_\infty$ 不等价于范数 $\|\cdot\|_2$, 而范数 $\|\cdot\|_2$ 也不等价于范数 $\|\cdot\|_1$.

事实上, 如果上题中的 $[a, b]$ 是 \mathbb{R} , 那么三个范数都不等价. 证明见 TD2. 这种情况只需要构建一个简单的函数列并处理好系数即可.

注. 要想证明两个范数不等价, 通常只需要构造函数列 (f_n) 使得对于范数 N 和 N' , 使得:

$$\frac{N(f_n)}{N'(f_n)} \rightarrow \infty \quad \text{或} \quad \frac{N'(f_n)}{N(f_n)} \rightarrow \infty$$

如果 (f_n) 在 N 或 N' 下有界, 在另一个范数下无界, 则更好证明.

1.3 有限维赋范向量空间

上学期的 TD 提到:

命题. 有限维实或复赋范向量空间上的所有范数都是等价的.

证明. 设 E 是维数为 d 的实赋范向量空间; 由于给定 E 的一个基就可以得出 $E \cong \mathbb{R}^d$ 的同构, 因此我们不妨设 $E = \mathbb{R}^d$, 并记 (e_1, \dots, e_d) 为 \mathbb{R}^d 的标准基. 利用范数等价关系的对称性和传递性, 只需将 \mathbb{R}^d 上一个给定的范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_\infty$ 比较即可.

首先, $\|\cdot\|_\infty$ 比 $\|\cdot\|$ 更细. 事实上, 对于 $x = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d \in \mathbb{R}^d$,

$$\|x\| \leq |x_1| \|e_1\| + \dots + |x_d| \|e_d\| \leq (\|e_1\| + \dots + \|e_d\|) \max_{i \in [1, d]} |x_i| = C \|x\|_\infty,$$

其中 $C = \sum_{i=1}^d \|e_i\|$.

由此可知, 映射 $x \mapsto \|x\|$ 是 C -Lipschitz 的, 因而连续. 单位球面

$$S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_\infty = 1\}$$

在 $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ 中是有界闭集, 因而是紧集. 于是 $\|\cdot\|$ 在 S 上的取值达到下确界, 即存在 $x_0 \in S$ 使得

$$\forall x \in S, \quad \|x_0\| \leq \|x\|.$$

接下来就是见证奇迹的时刻. 对所有 $x \in E \setminus \{0\}$, 进行归一化: $\|x\|_\infty^{-1} x \in S$, 所以

$$0 < \|x_0\| \leq \|\|x\|_\infty^{-1} x\| = \|x\|_\infty^{-1} \|x\|,$$

这就推出

$$\|x\|_\infty \leq \|x_0\|^{-1} \|x\|,$$

这里 $\|x_0\|$ 是常数, 从而 $\|\cdot\|$ 比 $\|\cdot\|_\infty$ 更细.

此外, 若 E 是维数为 d 的复赋范向量空间, 则我们可以通过把 E 看作实向量空间: 若 (e_1, \dots, e_d) 是 E 在 \mathbb{C} 上的一个基, 则

$$(e_1, i e_1, \dots, e_d, i e_d)$$

是 E 在 \mathbb{R} 上的一个基. □

注. 这个命题的结论比证明更重要. 关于证明过程, 只需记住看到单位球或球面就试试把向量除以它的范数.

命题 (Bolzano–Weierstrass 定理). 有限维赋范向量空间 (实或复) 中的任意有界闭集都是紧集.

这个命题上学期就讲过了.

命题 (Riesz 定理). 如果赋范向量空间 E 不是有限维的, 则闭单位球 $\overline{B}_E(0, 1)$ 不是紧集.

证明. 这是上学期 TD13.4.

假设 E 不是有限维的, 设法在 $\overline{B}_E(0, 1)$ 中构造一个没有聚点的序列. 取一列 E 中线性无关的序列 $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, 并记

$$F_n = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

容易看出 F_n 是有限维的. 对每个 n , 根据 Bolzano–Weierstrass 定理, 集合

$$\overline{B}(0, \|e_{n+1}\|) \cap F_n$$

在 F_n (因此也在 E) 中是紧集. 因为 $\overline{B}(0, \|e_{n+1}\|)$ 是有界的. 连续函数 $x \mapsto \|e_{n+1} - x\|$ 在该紧集上达到最小值, 记为点 x_n . 于是

$$\|e_{n+1} - x\| \geq \|e_{n+1} - x_n\|, \quad \forall x \in F_n.$$

归一化: 定义

$$e'_1 = \|e_1\|^{-1} e_1, \quad e'_{n+1} = \frac{e_{n+1} - x_n}{\|e_{n+1} - x_n\|}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

于是 $\|e'_n\| = 1$, 并且

$$\forall x \in F_n, \quad \|e'_{n+1} - x\| = \left\| \frac{e_{n+1} - x_n}{\|e_{n+1} - x_n\|} - x \right\| = \frac{\|e_{n+1} - (\|e_{n+1} - x_n\| x + x_n)\|}{\|e_{n+1} - x_n\|} \geq 1,$$

因为 $\|e_{n+1} - x_n\| x + x_n \in F_n$ 从而 $\|e_{n+1} - (\|e_{n+1} - x_n\| x + x_n)\| \geq \|e_{n+1} - x_n\|$.

由此得到

$$\forall m > n, \quad \|e'_m - e'_n\| \geq 1.$$

因此, 序列 $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 取值于 $\overline{B}_E(0, 1)$, 但它的任意子列都不收敛. 这就完成了证明. \square

注. 这种方法想不到也没关系. 我也想不到.

命题. 关于连续性的若干结论:

1. 若 E 是一个有限维的 \mathbb{K} -向量空间, 那么从 E 到任意赋范 \mathbb{K} -向量空间的线性映射都是连续的.

2. 若 E 和 F 都是有限维的 \mathbb{K} -向量空间, 那么从 $E \times F$ 到任意赋范 \mathbb{K} -向量空间的双线性映射都是连续的.

命题. 设向量空间 E 是赋范的. 设 F 是 E 的一个有限维子向量空间. 那么 F 是 E 的闭子集.

证明. 设 (x_n) 是 F 中的数列, 收敛到 E 中一点 a . 在 F 上定义 E 的范数, 得到一个有限维的赋范向量空间结构 (紧集). 由于数列 (x_n) 在 F 中有界, 由 Bolzano-Weierstrass 定理可以取出一个子列 $(x_{\nu(n)})$, 它收敛到 F 中某一点 b . 但是此时 $(x_{\nu(n)})$ 在 E 中既收敛到 a , 又收敛到 b , 因此 $a = b$. 所以 $a \in F$. \square

1.4 赋范向量空间的完备性 (complet)

定义. 称序列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 在赋范向量空间 E 中是一个 **Cauchy 列**, 如果它满足如下条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, (p \geq n \text{ 且 } q \geq n) \implies \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

这个定义表明, Cauchy 列的项在数列的后部彼此靠得很近. 但是, Cauchy 列不一定收敛 (待会你就知道了).

命题. 设 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是赋范向量空间 E 中的一个序列:

- (a) 如果 (x_n) 收敛, 那么它是 Cauchy 列;
- (b) 如果 (x_n) 是 Cauchy 列, 那么它是有界的; 若它还有至少一个聚点, 那么它收敛.

证明. (a) 假设 (x_n) 收敛于某点 $a \in E$. 设 $\varepsilon > 0$. 存在整数 n 使得

$$\|x_p - a\| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall p \geq n.$$

于是由三角不等式可得

$$\|x_p - x_q\| \leq \|x_p - a\| + \|a - x_q\| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

对所有 $p, q \geq n$ 均成立. 因此 (x_n) 是 Cauchy 列.

(b) 假设 (x_n) 是 Cauchy 列. 则存在 n_0 , 使得当 $p, q \geq n_0$ 时有

$$\|x_p - x_q\| \leq 1.$$

于是

$$\|x_p\| \leq \|x_p - x_{n_0}\| + \|x_{n_0}\| \leq 1 + \|x_{n_0}\|, \quad \forall p \geq n_0,$$

所以 (x_n) 有界. 再假设 (x_n) 有一个聚点 a . 取 $\varepsilon > 0$, 由于 (x_n) 是 Cauchy 列, 存在 n 使得

$$\|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall p, q \geq n.$$

另一方面, 因为 a 是聚点, 可以选择 $p \geq n$ 使得

$$\|a - x_p\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

于是对所有 $q \geq n$,

$$\|a - x_q\| \leq \|a - x_p\| + \|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

因此 (x_n) 收敛于 a . □

定义. 称级数 $\sum x_n$ **绝对收敛**, 如果实数正项级数 $\sum \|x_n\|$ 收敛.

以下内容很重要.

命题. 设 E 是一个赋范向量空间. 以下条件是等价的:

(i) E 中的 *Cauchy* 列收敛;

(ii) E 中的绝对收敛级数收敛.

定义. 称赋范向量空间 E 是 **完备的**, 或者称 E 是一个 **Banach 空间**, 如果它满足前面命题中所述的条件.

注. *Banach* 的中文名是“巴拿赫”, 所以 *ch* 应该读成“赫”.

一般来说, 要想证明一个赋范向量空间是完备的, 最直接的方法是验证上面命题中的 (i) 或 (ii) 条件.

命题. 有限维赋范向量空间是完备的.

证明. 设 E 是一个维数为 d 的赋范向量空间. (x_n) 是 E 中的一个 *Cauchy* 列. 则 (x_n) 在 E 中有界. 由 Bolzano-Weierstrass 定理, (x_n) 有一个聚点 $a \in E$. 由前面的命题, (x_n) 收敛于 a . □

需要注意的是, **有理数域 \mathbb{Q} 上的赋范向量空间不完备**. 例如, 考虑 \mathbb{Q} 上的赋范向量空间 $E = \mathbb{Q}$, 赋予其绝对值范数 $\|\cdot\|$. 考虑数列:

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \dots$$

这个数列是 E 中的 *Cauchy* 列, 但它在 E 中没有极限. 它的极限是 $\sqrt{2}$, 而 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

实际上, 如何定义有理数是件很简单的事情, 但如何定义实数经历了数学家很多年的努力. 这里就不展开了. 以下给出一些判断完备性的实用技巧.

命题. 紧集是完备的.

证明. 设 K 是赋范向量空间 E 中的一个紧集, (x_n) 是 K 中的一个 Cauchy 列. 由紧性, (x_n) 有一个聚点 $a \in K$. 由前面的命题, (x_n) 收敛于 a . \square

命题. 有限维赋范向量空间的闭子集是完备的.

证明. 设 F 是赋范向量空间 E 的一个闭子集, (x_n) 是 F 中的一个 Cauchy 列. 由前面的命题, (x_n) 在 E 中有界. 由 Bolzano-Weierstrass 定理, (x_n) 在 E 中有一个聚点 a . 由于 F 是闭集, $a \in F$. 由前面的命题, (x_n) 收敛于 a . \square

1.5 习题

这一章没什么好玩的题. 做 TD 就行了. (其实是我懒得写了)