一位成绩不佳的同学的笔记 – Analyse 4

一位成绩不佳的同学

2025 年 10 月 11 日

图 1: 作者

0 引言

0.1 关于本拙作

这是一篇笔记.
~~（作者省去了蛐蛐MHD的一些话）~~

0.2 注意事项

1. **本人衷心希望您看到这里的时候并非考试前夕，否则我建议您早点睡觉，以便明天以丰沛的精神面对考试；**
2. 本作品不可代替教材；
3. 如有问题请立刻向作者指出，本作品允许一切形式的谩骂、攻击、批评.

0.3 关于Analyse

分析学是高等数学的基石，这一科目不仅要求精确的逻辑推理，更要求我们在抽象与严谨中捕捉直观的数学本质.

要想学好数学分析，需要一定的计算能力，但更需要抽象思维的训练. 有时，好的理解能力能够使做题事半功倍.

上面是废话. 其实多做题就行了.

1 Espaces vectoriels normés（赋范向量空间）

1.1 范数

1.1.1 $\mathbb{K}^d$上的范数

d 是正整数，$(E, \|\cdot\|)$ 是一个 $\mathbb{K}$-赋范向量空间，其中 $\mathbb{K}$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$.

在有限维空间$\mathbb{K}^d$中，定义以下范数：

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_d|, \quad \|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + \cdots + |x_d|^2\right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_d|),$$

其中 $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d$.

$\|x\|_1$称为norme de la convergence en moyenne，$\|x\|_2$称为norme de la convergence en moyenne quadratique，这很好理解，它们分别算的是均值和平方均值；$\|x\|_\infty$称为norme de la convergence uniforme，因为这涉及到一致收敛的定义，但这是下一章的内容.

（这段是废话——作者注）北京市的道路总体呈现横平竖直的网格状，可以视为$\mathbb{R}^2$；以北航为$(0,0)$，如果您想打车去天安门，坐标$r = (x, y)$（具体数据不详），那么您应该考虑$\|r\|_1$，即车行走的距离；如果您想飞个无人机到天安门拍两张照片**（请不要这样做）**，那么您应该考虑$\|r\|_2$，即无人机的飞行距离；如果您是一个晕地铁的人，却不得不坐地铁，则应该考虑$\|r\|_\infty$. 北京地铁也是横平竖直的，这个范数决定了您最多要在同一列地铁呆多长时间.

类似地，也可以定义p-范数（$p \geq 1$）：

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_d|^p)^{1/p}$$

上面的三个范数分别是$p = 1$、$p = 2$和$p \to \infty$的情况. 其他情况并不常用.

1.1.2 $C([a, b]; \mathbb{K})$上的范数

设 $[a, b]$ 是 $\mathbb{R}$ 上一个非空闭区间. 记

$$C([a, b]; \mathbb{K}) \quad \text{（或简记为 } C([a, b])\text{）}$$

为所有在 $[a, b]$ 上取值于 $\mathbb{K}$ 的连续函数所构成的 $\mathbb{K}$-向量空间.

在 $C([a, b])$ 上定义三种范数：

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\, dt, \quad \|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

三种范数的名字和意义和上一节一样. 类似地，也可以将定义拓展到p-范数（$p \geq 1$）：

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

(这段也是废话)小葛晚上唱歌，记$f(t)$为时间段$[a, b]$中的音量大小. 则$\|f\|_1$可用来表示放了多少；$\|f\|_2$可表示能量消耗了多少；$\|f\|_\infty$表示最大音量，决定邻居是否会报警.

对于$C([a, b]; \mathbb{K})$，也可以按照同样的定义得到范数，但在范数的比较上会有不同的结果. 具体见下文.

1.2 连续线性映射

1.2.1 线性（或双线性）映射的连续性

我们记 E, F, G 为 $\mathbb{K}$-赋范向量空间.

命题. 设 $f : E \to F$ 是一个线性映射. f连续当且仅当下面任一条件成立：

1. f 在 0 处连续；
2. f 在 E 的闭单位球 $\overline{B}_E(0,1)$ 上的限制是有界的；
3. 存在常数 $C > 0$，使得

$$\|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

通常第3条用来证明连续性，第2条证明不连续性.

命题. 易知上面三条性质分别等价于以下性质：

1. E中存在一点使得 f 在该点连续；
2. 对E 的任意有界集B，$f(B)$在 F 中仍然是有界的；
3. f 是利普希茨的.

证明. 若线性映射 f 连续，则它显然在 0 处连续.在此条件下，按照极限定义，$\forall \epsilon > 0$，存在 $r > 0$，

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_E \leq r \implies \|f(x)\|_F \leq \epsilon$$

取$\epsilon = 1$

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_E \leq r \implies \|f(x)\|_F \leq 1.$$

通过f的线性以及范数 $\|\cdot\|_E$ 和 $\|\cdot\|_F$ 的性质可得

$$\forall x \in \overline{B}_E(0,1), \quad \|f(x)\|_F = \frac{1}{r}\|f(rx)\|_F \leq \frac{1}{r}.$$

这是因为$x \in \overline{B}_E(0,1)$导致$\|x\|_E \leq 1$，$\|rx\|_E = r\|x\|_E \leq r$从而$\|f(rx)\|_F \leq 1$. 因此$1 \Rightarrow 2$.

现在假设 f 在 $\overline{B}_E(0,1)$ 上的限制是有界的；若 $C \geq 0$ 是 $x \mapsto \|f(x)\|_F$ 在 $\overline{B}_E(0,1)$ 上的一个上界，则有

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \|f(x)\|_F = \|f\Big(\frac{x}{\|x\|_E}\Big)\|_F \cdot \|x\|_E \leq C\|x\|_E.$$

于是我们证明了$2 \Rightarrow 3$. 这里的技巧是对任意的x作了归一化处理，即除以它的范数，得到范数为1从而属于$\overline{B}_E(0,1)$的向量.

由于利普希茨映射都是连续的，因此在条件3（或 3）下， f 连续.

□

例题. （*TD1.1*）证明黑字的三个条件和蓝字的三个条件分别等价.

证明. 聪明的您不难发现，只需要证明$1 \Rightarrow 1$和$2 \Rightarrow 2$，因为剩下4个关系比较显然.

1条件下，设f在$a \in E$上连续. 注意：函数在一点连续的另一定义是函数在该点的极限等于函数值. 注意到$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(f(x+a)-f(a))$. f在a连续，所以$\lim_{x\to 0} f(x+a) \overset{y=x+a}{=\!=} \lim_{y\to a} f(y) = f(a)$，因此$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(f(x+a)-f(a)) = 0$，所以$f$在0连续.

2条件下，要证明2，需要把性质从一个球扩展到全集. 根据2，存在$M \geq 0$， $\forall x \in E$，$\|x\|_E \leq 1 \to \|f(x)\|_F \leq M$.

对于全集E中任意有界子集A中的任意x，存在$r > 0$，$\|x\|_E \leq r$. 试图将x放到单位球里面： $\|r^{-1}x\|_E \leq 1$，继而$\|f(x)\|_F = r\|f(r^{-1}x)\|_F \leq rM$. 因此$A$被半径为$rM$的球包住，从而有界. □

注. 线性空间的相关证明一定要用线性.

命题. 设 $g : E \times F \to G$ 是一个双线性映射. g连续当且仅当下列条件之一满足：

1. g 在 $(0,0)$ 处连续；
2. g 在 $\overline{B}_E(0,1) \times \overline{B}_F(0,1)$ 上的限制是有界的；
3. 存在一个常数 $C > 0$，使得$\|g(x,y)\|_G \leq C\|x\|_E\|y\|_F$， $\forall (x,y) \in E \times F$

证明略.

命题. 在 $\mathbb{K}^d$ 上赋予 $\|\cdot\|_\infty$ 范数. 任意线性映射 $f : \mathbb{K}^d \to F$ 都是连续的.

证明. 记 $(e_1,\ldots,e_d)$ 为 $\mathbb{K}^d$ 的标准基（就是只有一项是1其他全是0的基），那么对于任意向量 $x = x_1e_1 + \cdots + x_de_d \in \mathbb{K}^d$，有：

$$\|f(x)\|_F \leq |x_1|\|f(e_1)\|_F + \cdots + |x_d|\|f(e_d)\|_F \leq \big(\|f(e_1)\|_F + \cdots + \|f(e_d)\|_F\big)\|x\|_\infty.$$

因为$\|x\|_\infty$是$|x_1|\cdots|x_d|$里面最大的一项. □

注. 这里赋予 $\|\cdot\|_\infty$ 范数只是方便证明，实际上所有范数都是等价的（下面会提到，当然上学期*TD*也有），f的连续性不取决于范数.

例题. （*TD1.5*节选）我们称一个函数 $x:[0,\infty[\to\mathbb{C}$ 具有有界支集，如果存在 $a\in[0,\infty[$ 使得 $x(t)=0$ 对所有 $t\geq a$ 都成立. 设 E 是 $C([0,\infty[)$ 的子空间，由所有有界支集的函数组成. 我们考虑定义在 E 上的线性泛函φ_4,φ_5：

$$\varphi_4(x)=\int_0^\infty x(t)e^{it}\,dt,\quad \varphi_5(x)=\int_0^\infty x(t)e^t\,dt.$$

请给出并证明这些线性形式在以下两种情形下的连续性：

1. 在 E 上赋予 $\|\cdot\|_\infty$ 范数:
$$\|x\|_\infty=\max_{t\in[0,\infty[}|x(t)|;$$
2. 在 E 上赋予 $\|\cdot\|_1$ 范数:
$$\|x\|_1=\int_0^\infty|x(t)|\,dt.$$

解. $\varphi_4(x)$对于$\|\cdot\|_\infty$不连续但对于$\|\cdot\|_1$连续. 对$\|\cdot\|_1$，

$$|\varphi_4(x)|=\left|\int_0^\infty x(t)e^{it}\,dt\right|\leq\int_0^\infty|x(t)||e^{it}|\,dt=\int_0^\infty|x(t)|\,dt=\|x\|_1$$

对$\|\cdot\|_\infty$，设法构造一个有界的函数列(x_N)使得$(|\varphi_4(x_N)|)$无上界.

$$x_N(t)=\begin{cases}e^{-it}, & \text{如果 } 0\leq t\leq(2N-1)\pi,\\ t/\pi-2N, & \text{如果 } (2N-1)\pi<t<2N\pi,\\ 0, & \text{如果 } 2N\pi\leq t.\end{cases}$$

该函数列在$0\leq t\leq(2N-1)\pi$时以*1*为半径转圈圈，$(2N-1)\pi<t<2N\pi$时由*-1*线性过渡到*0*. N越大转圈圈的圈数越多. 因此这个函数是在单位闭球里面的. 然而，在φ_4作用下，它转圈圈越多，积分就越大：

$$|\varphi_4(x_N)|=\left|\int_0^{(2N-1)\pi}dt+\int_{(2N-1)\pi}^{2N\pi}\big(t/\pi-2N\big)e^{it}\,dt\right|\geq(2N-1)\pi-\int_{(2N-1)\pi}^{2N\pi}\big|t/\pi-2N\big|\,dt\geq(2N-1)\pi,$$

这里用到了$|A+B|\geq|A|-|B|$.

$\varphi_5(x)$对于两种范数都不连续. 考虑函数

$$x_N(t)=\begin{cases}1, & \text{如果 } 0\leq t\leq N-1,\\ N-t, & \text{如果 } N-1<t<N,\\ 0, & \text{如果 } N\leq t.\end{cases}$$

该函数列上的函数，最开始是*1*，后来线性过渡到*0*. N越大，函数值为*1*的部分就越长：

$$\varphi_5(x_N)\geq\int_0^{N-1}e^t dt=e^{N-1}-1$$

这显然是无界的.

1.2.2 范数的比较

定义. 设 E 是一个 K-向量空间，N 与 N' 是定义在 E 上的两个范数. 若存在实数 $C>0$，使得

$$N'(x) \leq CN(x), \quad \forall x \in E,$$

则称范数 N 比范数 N' 更细（*plus fine*）. 若 N 与 N' 互相更细，则称它们是等价的.

注. （废话预警）其实我也不知道*plus fine*的专业翻译，因为国内的教材似乎更关注范数的等价而非*plus fine*. 因此我自作主张，本着怎么好记怎么来的原则乱翻的. 反正考试是写法语，中文只是辅助复习，~~所以其实把*boule ouverte*翻译成“思想开放的脑袋”也未尝不可~~.

注. E 上范数的等价性是一种等价关系. 等价关系是法数学的，如果记不起来可以去看当年的*PPT*.

命题. 范数 N 比范数 N' 更细，当且仅当满足下列任一等价条件:

1. 恒等映射 $\mathrm{id}_E : (E,N) \to (E,N')$ 是连续的;
2. 如果 E 的一个子集在范数 N 下有界，那么它在范数 N' 下也有界;
3. 如果 E 的一个子集在范数 N' 下是开集，那么它在范数 N 下也是开集;
4. 如果一个 E 中的数列在范数 N 下收敛，那么它在范数 N' 下也收敛;
5. 如果一个 E 中的数列在范数 N 下收敛到 0，那么它在范数 N' 下也收敛到 0.

注. 记忆方法：开集N和N'是反过来的.

证明. 首先，“范数 N 比范数 N' 更细”是和1等价的. 因为范数的比较体现了id_E的利普希茨性.

对于下面的5条性质，$1 \Leftrightarrow 2$是我们证明过了的. $1 \Leftrightarrow 3$基于以下性质：映射是连续的当且仅当开集的原像也是开集. 这里id_E对任何集合的原像都是集合自己.

$1 \Rightarrow 5$和$5 \Rightarrow 4$是显然的. 至于$4 \Rightarrow 1$，回忆一下这个性质：X是度量空间，f是$X \setminus \{a\}$到另一个度量空间Y的映射，f在a连续当且仅当对任何$X \setminus \{a\}$中收敛到a的数列(x_n)，$(f(x_n))$是收敛的. 这里，虽然(E,N)和(E,N')是一个空间赋予了两个范数，但也可以视为两个度量空间. 一个E中的数列可以看做这两个空间的数列，其中一个是另一个经过id_E得到的.

□

推论. 在同样的记号下，两个范数 N 与 N' 等价，当且仅当以下任一同等条件成立:

1. 恒等映射 $\mathrm{id}_E : (E,N) \to (E,N')$ 与 $\mathrm{id}_E : (E,N') \to (E,N)$ 都是连续的;
2. 范数 N 与 N' 在 E 上定义了相同的有界集;

3. 范数 N 与 N' 在 E 上定义了相同的开集;

4. 范数 N 与 N' 在 E 上定义了相同的收敛数列;

5. 范数 N 与 N' 在 E 上定义了相同的趋于零的数列.

注. 然而，证明两个范数等价，仍然是定义比较常用. 即:

$$\exists a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in E, \quad aN(x) \leq N'(x) \leq bN(x)$$

命题. 在 K^d 上，$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ 这三种范数是等价的:，对 $x = (x_1, \ldots, x_d) \in K^d$，有

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_d| \leq \left(1^2 + \cdots + 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(|x_1|^2 + \cdots + |x_d|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{d}\,\|x\|_2,$$

这里用到了*Cauchy-Schwartz*不等式.

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + \cdots + |x_d|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(d \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{d}\,\|x\|_\infty,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i| \leq |x_1| + \cdots + |x_d| = \|x\|_1.$$

由此可见，这些范数在 K^d 上两两等价.

无限维空间上是否还有这样的性质？答案是否定的.

命题. 设 $[a, b]$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个非空闭区间；在 $C([a, b])$ 上，范数 $\|\cdot\|_\infty$ 比范数 $\|\cdot\|_2$ 更细，而范数 $\|\cdot\|_2$ 又比范数 $\|\cdot\|_1$ 更细. 事实上，对于 $x \in C([a, b])$，

$$\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \leq \left((b-a) \max_{t \in [a,b]} |x(t)|^2\right)^{1/2} = \sqrt{b-a}\,\|x\|_\infty,$$

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\,dt \leq \left(\int_a^b 1^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2} = \sqrt{b-a}\,\|x\|_2.$$

这里用到了积分的*Cauchy-Schwartz*不等式.

反过来却不成立. 假设 $[a, b] = [0, 1]$，考虑函数列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$，其中每个 $x_n \in C([0, 1])$ 定义为

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, 1], \quad x_n(t) = \begin{cases} n\cos(n^2 t), & \text{若 } t < \pi/(2n^2), \\ 0, & \text{若 } t \geq \pi/(2n^2). \end{cases}$$

这个函数列呈现的现象是：随着 n 的增大，函数在半个周期 $[0, \pi/(2n^2)]$ 上振动得越来越快，但振幅也越来越大. 由此可得

$$\|x_n\|_\infty = n, \quad \|x_n\|_2 = \sqrt{\pi}/2, \quad \|x_n\|_1 = 1/n, \quad \forall n > 1.$$

于是数列 (x_n) 在范数 $\|\cdot\|_2$ 下有界，但在范数 $\|\cdot\|_\infty$ 下无界；同时它在范数 $\|\cdot\|_1$ 下趋于 0，但在范数 $\|\cdot\|_2$ 下并不趋于 0. 这表明范数 $\|\cdot\|_\infty$ 不等价于范数 $\|\cdot\|_2$，而范数 $\|\cdot\|_2$ 也不等价于范数 $\|\cdot\|_1$.

事实上，如果上题中的$[a,b]$是$\mathbb{R}$，那么三个范数都不等价. 证明见TD2. 这种情况只需要构建一个简单的函数列并处理好系数即可.

注. 要想证明两个范数不等价，通常只需要构造函数列(f_n)使得对于范数N和N'，使得：

$$\frac{N(f_n)}{N'(f_n)} \to \infty \quad \text{或} \quad \frac{N'(f_n)}{N(f_n)} \to \infty$$

如果(f_n)在N或N'下有界，在另一个范数下无界，则更好证明.

1.3 有限维赋范向量空间

上学期的TD提到：

命题. 有限维实或复赋范向量空间上的所有范数都是等价的.

证明. 设 E 是维数为 d 的实赋范向量空间；由于给定 E 的一个基就可以得出 $E \cong \mathbb{R}^d$ 的同构，因此我们不妨设 $E = \mathbb{R}^d$，并记 $(e_1, \ldots, e_d)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 的标准基. 利用范数等价关系的对称性和传递性，只需将 $\mathbb{R}^d$ 上一个给定的范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_\infty$ 比较即可.

首先，$\|\cdot\|_\infty$ 比 $\|\cdot\|$ 更细. 事实上，对于 $x = x_1e_1 + \cdots + x_de_d \in \mathbb{R}^d$，

$$\|x\| \leq |x_1|\|e_1\| + \cdots + |x_d|\|e_d\| \leq (\|e_1\| + \cdots + \|e_d\|) \max_{i\in[1,d]} |x_i| = C\|x\|_\infty,$$

其中 $C = \sum_{i=1}^d \|e_i\|$.

由此可知，映射 $x \mapsto \|x\|$ 是 C-Lipschitz 的，因而连续. 单位球面

$$S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_\infty = 1\}$$

在 $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ 中是有界闭集，因而是紧集. 于是 $\|\cdot\|$ 在 S 上的取值达到下确界，即存在 $x_0 \in S$ 使得

$$\forall x \in S, \quad \|x_0\| \leq \|x\|.$$

接下来就是见证奇迹的时刻. 对所有 $x \in E \setminus \{0\}$，进行归一化：$\|x\|_\infty^{-1}x \in S$，所以

$$0 < \|x_0\| \leq \|\|x\|_\infty^{-1}x\| = \|x\|_\infty^{-1}\|x\|,$$

这就推出

$$\|x\|_\infty \leq \|x_0\|^{-1}\|x\|,$$

这里$\|x_0\|$是常数，从而 $\|\cdot\|$ 比 $\|\cdot\|_\infty$ 更细.

此外，若 E 是维数为 d 的复赋范向量空间，则我们可以通过把 E 看作实向量空间：若 $(e_1, \ldots, e_d)$ 是 E 在 $\mathbb{C}$ 上的一个基，则

$$(e_1, ie_1, \ldots, e_d, ie_d)$$

是 E 在 $\mathbb{R}$ 上的一个基. □

注. 这个命题的结论比证明更重要. 关于证明过程，只需记住看到单位球或球面就试试把向量除以它的范数.

命题 (Bolzano–Weierstrass 定理)**.** 有限维赋范向量空间（实或复）中的任意有界闭集都是紧集.

这个命题上学期就讲过了.

命题 (Riesz 定理)**.** 如果赋范向量空间 E 不是有限维的，则闭单位球$\overline{B}_E(0,1)$不是紧集.

证明. 这是上学期TD13.4.

假设 E 不是有限维的，设法在 $\overline{B}_E(0,1)$ 中构造一个没有聚点的序列. 取一列E中线性无关的序列 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$，并记

$$F_n = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n), \quad n\in\mathbb{N}^*.$$

容易看出F_n是有限维的. 对每个 n，根据 Bolzano–Weierstrass 定理，集合

$$\overline{B}(0,\|e_{n+1}\|)\cap F_n$$

在 F_n（因此也在 E）中是紧集. 因为$\overline{B}(0,\|e_{n+1}\|)$是有界的. 连续函数 $x\mapsto \|e_{n+1}-x\|$ 在该紧集上达到最小值，记为点 x_n.于是

$$\|e_{n+1}-x\| \ \geq\ \|e_{n+1}-x_n\|, \quad \forall x\in F_n.$$

归一化：定义

$$e'_1 = \|e_1\|^{-1}e_1, \qquad e'_{n+1} = \frac{e_{n+1}-x_n}{\|e_{n+1}-x_n\|}, \quad n\in\mathbb{N}^*.$$

于是 $\|e'_n\|=1$，并且

$$\forall x\in F_n, \quad \|e'_{n+1}-x\| = \|\frac{e_{n+1}-x_n}{\|e_{n+1}-x_n\|}-x\| = \frac{\|e_{n+1}-(\|e_{n+1}-x_n\|x+x_n)\|}{\|e_{n+1}-x_n\|}\ \geq\ 1,$$

因为 $\|e_{n+1}-x_n\|x+x_n\in F_n$从而$\|e_{n+1}-(\|e_{n+1}-x_n\|x+x_n)\|\geq\|e_{n+1}-x_n\|$.

由此得到

$$\forall m>n, \quad \|e'_m-e'_n\| \ \geq\ 1.$$

因此，序列 $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 取值于 $\overline{B}_E(0,1)$，但它的任意子列都不收敛. 这就完成了证明. □

注. 这种方法想不到也没关系. 我也想不到.

命题. 关于连续性的若干结论：

1. 若 E 是一个有限维的 $\mathbb{K}$-向量空间, 那么从 E 到任意赋范 $\mathbb{K}$-向量空间的线性映射都是连续的.

2. 若 E 和 F 都是有限维的 $\mathbb{K}$-向量空间, 那么从 $E \times F$ 到任意赋范 $\mathbb{K}$-向量空间的双线性映射都是连续的.

命题. 设向量空间 E 是赋范的. 设 F 是 E 的一个有限维子向量空间. 那么 F 是 E 的闭子集.

证明. 设 (x_n) 是 F 中的数列, 收敛到 E 中一点 a. 在 F 上定义 E 的范数, 得到一个有限维的赋范向量空间结构（紧集）. 由于数列 (x_n) 在 F 中有界, 由 Bolzano-Weierstrass 定理可以取出一个子列 $(x_{\nu(n)})$, 它收敛到 F 中某一点 b. 但是此时 $(x_{\nu(n)})$ 在 E 中既收敛到 a, 又收敛到 b, 因此 $a = b$. 所以 $a \in F$. □

1.4 赋范向量空间的完备性（complet）

定义. 称序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在赋范向量空间 E 中是一个 ***Cauchy* 列**，如果它满足如下条件:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ (p \geq n \text{ 且 } q \geq n) \implies \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

这个定义表明，Cauchy 列的项在数列的后部彼此靠得很近. 但是，Cauchy 列不一定收敛（待会你就知道了）.

命题. 设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是赋范向量空间 E 中的一个序列:

(a) 如果 (x_n) 收敛，那么它是 *Cauchy* 列;

(b) 如果 (x_n) 是 *Cauchy* 列，那么它是有界的; 若它还有至少一个聚点，那么它收敛.

证明. (a) 假设 (x_n) 收敛于某点 $a \in E$.设 $\varepsilon > 0$.存在整数 n 使得

$$\|x_p - a\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall p \geq n.$$

于是由三角不等式可得

$$\|x_p - x_q\| \leq \|x_p - a\| + \|a - x_q\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

对所有 $p, q \geq n$ 均成立.因此 (x_n) 是 Cauchy 列.

(b) 假设 (x_n) 是 Cauchy 列.则存在 n_0，使得当 $p, q \geq n_0$ 时有

$$\|x_p - x_q\| \leq 1.$$

于是

$$\|x_p\| \leq \|x_p - x_{n_0}\| + \|x_{n_0}\| \leq 1 + \|x_{n_0}\|, \quad \forall p \geq n_0,$$

所以 (x_n) 有界.再假设 (x_n) 有一个聚点 a.取 $\varepsilon > 0$，由于 (x_n) 是 Cauchy 列，存在 n 使得

$$\|x_p - x_q\| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall p, q \geq n.$$

另一方面，因为 a 是聚点，可以选择 $p \geq n$ 使得

$$\|a - x_p\| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

于是对所有 $q \geq n$，

$$\|a - x_q\| \leq \|a - x_p\| + \|x_p - x_q\| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

因此 (x_n) 收敛于 a. □

定义. 称级数 $\sum x_n$ **绝对收敛**，如果实数正项级数 $\sum \|x_n\|$ 收敛.

以下内容很重要.

命题. 设 E 是一个赋范向量空间.以下条件是等价的：

(i) E 中的*Cauchy*列收敛；

(ii) E 中的绝对收敛级数收敛.

定义. 称赋范向量空间 E 是 **完备的**，或者称 E 是一个 ***Banach* 空间**，如果它满足前面命题中所述的条件.

注. *Banach*的中文名是“巴拿赫”，所以*ch*应该读成“赫”.

一般来说，要想证明一个赋范向量空间是完备的，最直接的方法是验证上面命题中的(i)或(ii)条件.

命题. 有限维赋范向量空间是完备的.

证明. 设 E 是一个维数为 d 的赋范向量空间. (x_n)是E中的一个Cauchy列. 则(x_n)在E中有界. 由Bolzano-Weierstrass定理，(x_n)有一个聚点$a \in E$. 由前面的命题，(x_n)收敛于a. □

需要注意的是，**有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的赋范向量空间不完备**. 例如，考虑 $\mathbb{Q}$ 上的赋范向量空间 $E = \mathbb{Q}$，赋予其绝对值范数 $\|\cdot\|$. 考虑数列：

$$1ﬁ1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \ldots$$

这个数列是 E 中的 Cauchy 列，但它在 E 中没有极限. 它的极限是 $\sqrt{2}$，而 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

实际上，如何定义有理数是件很简单的事情，但如何定义实数经历了数学家很多年的努力. 这里就不展开了. 以下给出一些判断完备性的实用技巧.

命题. 紧集是完备的.

证明. 设 K 是赋范向量空间 E 中的一个紧集，(x_n) 是 K 中的一个 Cauchy 列. 由紧性，(x_n) 有一个聚点 $a \in K$. 由前面的命题，(x_n) 收敛于 a. □

命题. 有限维赋范向量空间的闭子集是完备的.

证明. 设 F 是赋范向量空间 E 的一个闭子集，(x_n) 是 F 中的一个 Cauchy 列. 由前面的命题，(x_n) 在 E 中有界. 由 Bolzano-Weierstrass 定理，(x_n) 在 E 中有一个聚点 a. 由于 F 是闭集，$a \in F$. 由前面的命题，(x_n) 收敛于 a. □

1.5 习题

这一章没什么好玩的题. 做TD就行了. （其实是我懒得写了）

2 一致收敛

（以下都是MHD说的）设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数列. 假设这个序列按收敛到某个函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$：对任意 $x\in\mathbb{R}$，有 $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. 我们自然会想，$f$ 是否继承了某些 f_n 的性质. 例如，如果每个 f_n 都有界，能否推出 f 也是有界的？又或者，如果 $\lim_{x\to\infty} f_n(x)=0$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 都成立，是否必然有 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$？再比如，如果所有 f_n 都连续，那么 f 是否连续？答案通常是否定的.

（但这些反例是我找的）我们来举几个反例.

令

$$f_n(x)=\frac{x}{1+\dfrac{x^2}{n}}=\frac{nx}{n+x^2},\qquad x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}.$$

对固定的 n，f_n 是连续函数并且有界，因为

$$\lim_{|x|\to\infty} f_n(x)=0,$$

且可以求出最大值出现在 $x=\pm\sqrt{n}$，此时

$$\max_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|=\frac{\sqrt{n}}{2}.$$

因此对每个固定的 n，f_n 的确是有界的（尽管界与 n 有关）.

但固定 x并使$n\to\infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+x^2/n}=x.$$

于是极限函数为 $f(x)=x$, 是无界的.

令

$$g_n(x)=\frac{n}{n+x}=\frac{1}{1+x/n},\qquad x\geq 0,$$

显然每个 g_n 在 $x\to\infty$ 时的极限确实是 0. 但对固定的 $x\geq 0$，当 $n\to\infty$ 时

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x}=1.$$

故极限函数为常数函数 $g(x)\equiv 1$，不收敛到0.

定义

$$h_n(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^n, & 0\leq x\leq 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

每个 h_n 在 $\mathbb{R}$ 上都是连续的，因为在连接处 $x=0$ 和 $x=1$ 上左右极限与定义值都一致.

然而极限函数 h 为阶跃函数：

$$h(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 1, & x\geq 1.\end{cases}$$

显然 h 在 $x=1$ 处不连续.

为了解决这些问题，本章定义了一种更强的收敛概念，在这种收敛下，有界性、收敛性、连续性这些性质是可以传递到极限的.

记号规定：$\mathbb{K}$ 表示实数域或复数域. 用 V 表示一个在 $\mathbb{K}$ 上完备的赋范向量空间；其范数记为 $\|\cdot\|$. V 往往是标量域 $\mathbb{K}$ 本身，或是一个有限维的 $\mathbb{K}$ 上的赋范向量空间. X是一个非空集合.

2.1 一致收敛的判据

我们考虑由 X 到向量空间 V 的映射序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 称序列 (f_n) **逐点收敛**（或称简单收敛），如果对于任意 $x\in X$，值在 V 中的数列 $(f_n(x))$ 是收敛的；在这种情况下，定义映射 $f:X\to V$ 为对每个 $x\in X$ 取极限

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x),$$

并称 f 为序列 (f_n) 的**逐点极限（或简单极限）**，记为 $\lim_{n\to\infty}f_n$.

逐点收敛可以写成下列定义：

$$\forall x\in X\quad \forall\varepsilon>0\quad \exists n\in\mathbb{N}\quad \forall p\in\mathbb{N}\quad p\geq n\Longrightarrow |f_p(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

定义. *称函数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 上***一致收敛***（uniformément convergente），如果存在一个映射 $f:X\to V$ 满足下列条件：*

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists n\in\mathbb{N}\quad \forall p\in\mathbb{N}\quad \forall x\in X\quad p\geq n\Longrightarrow |f_p(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

在该条件下，序列 (f_n) 必然逐点收敛到 f；而且，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，我们可以固定一个指数 n（该 n 只依赖于 ε，而与点 x 无关），使得对所有 $p\geq n$ 都有不等式 $|f_p(x)-f(x)|<\varepsilon$ 在整个集合 X 上成立. 换言之，上述估计在 X 上是一致成立的；我们也称 f 为 (f_n) 在 X 上的一致极限. 换言之，逐点收敛是对于点定义的，即每个点上，函数都收敛到一个值；而一致收敛要求整个函数列相对收敛到的函数有一个统一的误差，也就是上文的ε.

例如，考察函数列$f_n=x/n$. 显然这个函数列逐点收敛到$f=0$. 但对于每一个函数，$|f_n-0|=x/n$都是发散的，不可能对所有x都限制在某个ε里面. 因此它不是一致收敛的.

注. *函数列的向量空间 $(V^X)^{\mathbb{N}}$（即从 X 到 V 的映射序列所成的空间）与向量空间 $(V^{\mathbb{N}})^X$（以 X 为参数的、取值在 V 的序列族）同构. 因此，函数列 (f_n) 也可以看成"参量为 x 的、取值在 V 的数列 $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$".*

例如，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$是若干定义域为$X=3\mathbb{N}+1$（我随便编的）的函数构成的函数列. 考虑以下矩阵：

$$\begin{pmatrix} f_0(1) & f_0(4) & f_0(7) & \cdots \\ f_1(1) & f_1(4) & f_1(7) & \cdots \\ f_2(1) & f_2(4) & f_2(7) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

这个注的本质就是这个矩阵横着看和竖着看是一样的. 横着看的话，每一行其实就是一个函数的完整定义，所以整个矩阵就是若干函数构成的函数列；竖着看的话，每一列是一个数列，整个集合就是由$3\mathbb{N}+1$编号的若干数列.

从而一致收敛可以理解为：对给定误差ε，当行数足够大的时候，整个一行的误差都小于ε.

命题. 设 $f:X\to V$ 为一映射. 函数列 (f_n) 一致收敛到 f 当且仅当存在一个自然数 n_0 以及一个从 n_0 起定义的收敛到0的正实数序列 $(c_n)_{n\geq n_0}$，满足

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall x\in X\quad n\geq n_0 \Longrightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq c_n.$$

证明. 假设函数列 (f_n) 一致收敛于 f. 于是可以取 $n_0\in\mathbb{N}$，使得

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall x\in X,\qquad n\geq n_0 \Longrightarrow |f_n(x)-f(x)|<1;$$

对所有 $n\geq n_0$ 定义

$$c_n=\sup_{x\in X}\{|f_n(x)-f(x)|\}.$$

即可满足，因为对任意 $\varepsilon>0$，存在 $n\in\mathbb{N}$，使得

$$\forall p\in\mathbb{N}\quad \forall x\in X,\qquad p\geq n \Longrightarrow |f_p(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

这就意味着对于所有 $p\geq\max(n,n_0)$ 有 $c_p\leq\varepsilon$；因此序列 $(c_n)_{n\geq n_0}$ 趋于 0.

命题的另一个方向是显然的.

□

记 $B(X;V)$ 为从 X 到 V 的有界映射构成的向量空间，并赋予该空间**一致收敛范数** $\|\cdot\|_{B(X;V)}$，其中对任意 $f\in B(X;V)$ 定义

$$\|f\|_{B(X;V)}=\sup_{x\in X}\|f(x)\|.$$

若序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$是 $B(X;V)$中元素构成的序列，则该序列在范数 $\|\cdot\|_{B(X;V)}$ 的意义下收敛，当且仅当它在 X 上一致收敛.

若 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是任意从 X 到 V 的映射序列，那么它一致收敛到某映射 $f:X\to V$ 等价于存在 n_0，使得序列 $(f_n-f_{n_0})_{n\geq n_0}$ 是赋范向量空间 $B(X;V)$ 中收敛的一列“点”.

推论. *a)* 从 X 到 V 的一致收敛的映射列构成从 X 到 V 的映射列的向量空间的一个子空间；

b) 若函数列 (f_n) 一致收敛，且 $\lambda : X \to \mathbb{K}$ 是一个有界的标量函数，则函数列 (λf_n) 也一致收敛.

请读者自证.

命题. 假设函数列 (f_n) 逐点收敛于 $f : X \to V$；设 $(A_i)_{i\in I}$ 是 X 的一个有限的非空子集族，且它们的并等于X. 函数列 (f_n) 在 X 上一致收敛，当且仅当它在每一个子集 A_i 上一致收敛.

证明. 假设对每个 $i \in I$，限制列 $(f_n|_{A_i})$ 都一致收敛到 $f|_{A_i}$. 取任意 $\varepsilon > 0$；对每个 $i \in I$，存在 n_i，使得

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in A_i, \qquad n \geq n_i \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

令

$$m = \max_{i\in I} n_i,$$

则对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和任意 $x \in X$，只要 $n \geq m$ 即有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

从而序列 (f_n) 在 X 上一致收敛到 f.

逆向命题是显然的. □

注意：上述命题中A必须是有限的，否则m的定义会出问题.

把前面关于函数列的定义与命题推广到函数级数的情形.

设 (u_n) 是从 $X \to V$ 的函数列. 称函数级数 $\sum_n u_n$ **逐点收敛**（简单收敛），如果对任意 $x \in X$，在 V 中的数列 $\sum_n u_n(x)$ 收敛；换言之，若部分和

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

逐点收敛，则称级数 $\sum_n u_n$ 逐点收敛；逐点极限（即部分和列 (f_n) 的极限）定义了一个映射

$$f : X \to V, \qquad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x),$$

这个映射称为级数的和，记作 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

称级数 $\sum_n u_n$ 在 X 上**一致收敛**，如果其部分和函数列 (f_n) 在范数意义下是一致收敛的序列. 很显然，级数 $\sum_n u_n$ 一致收敛的充分必要条件是：该级数先逐点收敛，且其余项列（即部分和减去极限函数）一致收敛于零.

命题. 函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 在集合 X 上一致收敛，必要条件是函数列 $(u_n)_{n\geq 0}$ 一致收敛到零函数.

证明. 注意到对每个 n 有

$$u_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

若级数 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ 一致收敛，则余项和 $\sum_{k=n}^{\infty} u_k$ 随 $n \to \infty$ 一致收敛于零，因而上述两项之差 u_n 也一致收敛于零函数. □

定义. 称函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 在 X 上**正常收敛**，如果存在一列可加的正实数列$(c_n)_{n\geq 0}$（可加即 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛），使得对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 和任意的 $x \in X$，都有

$$|u_n(x)| \leq c_n.$$

命题 (Weierstrass判别法). 若函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 在 X 上正常收敛，则该级数在 X 上一致收敛.

证明. 设 $(c_n)_{n\geq 0}$ 为满足上述条件的正实数列，并且 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛. 对于任意固定的 $x \in X$，由不等式

$$|u_n(x)| \leq c_n$$

可得正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|$ 被可加的数列 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 支配，因此对每个 x，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 都收敛（在赋范向量空间完备的情形下尤为成立）. 此外，对任意 $n \in \mathbb{N}$ 和任意 $x \in X$ 有

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} c_k.$$

不等式右端当 $n \to \infty$ 时趋于 0（因为 $\sum c_k$ 收敛），因此级数的余项对所有 $x \in X$ 一致趋于 0，这就表明 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 在 X 上一致收敛. □

注. *Normalement convergente*的中文翻译我并没有找到，因此是随便翻译的，不过很好记.

注. 函数级数 $\sum u_n$ 当且仅当存在某个 n_0，使得对所有 $n \geq n_0$ 有 $u_n \in \mathcal{B}(X;V)$（就是从集合 X 到赋范向量空间 V 的有界函数的空间），并且级数 $\sum_{n\geq n_0} u_n$ 在赋范向量空间 $\mathcal{B}(X;V)$ 中作为项级数收敛时，才是一致收敛的. 级数 $\sum u_n$ 正常收敛当且仅当它作为 $\mathcal{B}(X;V)$ 中的项级数是绝对收敛的，即

$$\sum \|u_n\|_{\mathcal{B}(X;V)} < \infty.$$

考虑到完备集的定义之一，即完备集的列绝对收敛则一定收敛，从而我们可以将Weierstrass判别法表述为：赋范向量空间 $\mathcal{B}(X;V)$ 是完备的.

要理清一致收敛、正常收敛和逐点收敛之间的逻辑关系：逐点收敛很好理解；在逐点收敛的基础上，只有余项函数极限为0，才有一致收敛；正常收敛能推出一致收敛.

$$\text{正常收敛} \Rightarrow \text{一致收敛} \Rightarrow \text{逐点收敛}$$

此外，一致收敛可以对任意有界子集都成立却对全域不成立：对任意 $n \in \mathbb{N}$，令函数

$$u_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \frac{z^n}{n!}.$$

级数 $\sum u_n$ 在 $\mathbb{C}$ 上不一致收敛，因为没有一个 u_n 是有界的，导致数列 (u_n) 并不一致地收敛到 0. 但级数 $\sum u_n$ 是正常收敛的，因为对任意 z：

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

对任意有界子集 B ，由于复数域中的有限集为紧集，令 R 是 B 上 $|z|$ 的最大值，从而 $|\frac{z^n}{n!}| \le \frac{R^n}{n!}$ ，令 $c_n = \frac{R^n}{n!}$ 即可证明 $\sum u_n$ 在 $\mathbb{C}$ 的任一有界子集上都正常收敛，从而一致收敛.

另一个例子是对任意 $n \in \mathbb{N}^*$，令函数

$$u_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{2x}{1+n^2x^2}.$$

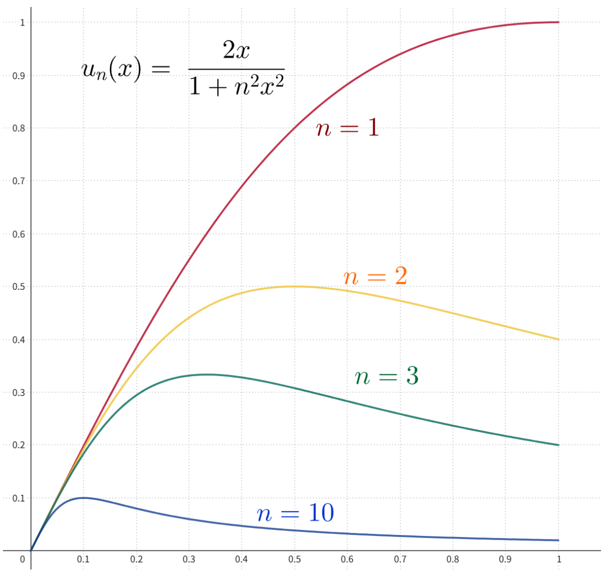

图 2: 函数u_n（感觉画出来也没啥用）

级数 $\sum u_n$ 对每个固定的 x 逐点收敛，因为当 $n \to \infty$ 时 $u_n(x) = O(n^{-2})$. 求导或者运用均值不等式可知，给定 n ，u_n 的最大值为 $u_n(n^{-1}) = n^{-1}$，所以对任意 $n \geq 1$ 且任

意 $x\in[0,1]$，有 $0\le u_n(x)\le u_n(n^{-1})=n^{-1}$, 这说明函数列 (u_n) 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 0. 但级数 $\sum u_n$ 并非正常收敛. 事实上，级数 $\sum u_n$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛，因为对任意 n 都有

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\big(n^{-1}\big) \;\ge\; \sum_{k=n+1}^{2n} u_k\big(n^{-1}\big) \;\ge\; n\,u_{2n}\big(n^{-1}\big) \;=\; \frac{2}{5},$$

这表明级数的余项列不一致趋于 0.

但是，对于任意 $a\in(0,1]$，级数 $\sum u_n$ 在 $[a,1]$ 上是正常收敛的：当 $n\ge a^{-1}$ 时，函数 u_n 在 $[a,1]$ 上是单调递减的；若令

$$c_n=\begin{cases}1, & n<a^{-1},\\ u_n(a), & n\ge a^{-1},\end{cases}$$

则对任意 $n\in\mathbb{N}^*$ 与任意 $x\in[a,1]$ 有 $0\le u_n(x)\le c_n$，且由于级数 $\sum u_n(a)$ 收敛，故 $\sum c_n$ 也收敛，从而 $\sum u_n$ 在 $[a,1]$ 上正常收敛.

这个例子非常好，它展示了几个重要性质：首先是逐点收敛并不能推出一致收敛；其次局部一致收敛并不等价于全局一致收敛：这个例子中无论 a 取多小也无法一致收敛，本质上是因为函数和在0处并不连续（下一节会讲到连续性相关问题）. 做一个近似：当 n 足够大，x 足够小的时候，

$$u_n(x)=\frac{2x}{1+n^2x^2}=\frac{2}{n^2x}+O(n^{-4}x^{-3})$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\sim\frac{2}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{3x}\quad(x\to0^+)$$

也就是说，$x\to0^+$ 时和函数为无穷大，但 $x=0$ 时和函数显然为0.

函数级数可以在每一点上绝对收敛且一致收敛，但不正常收敛. 令 $X=[0,1]$；对任意 $n\in\mathbb{N}^*$，考虑由下式定义的函数

$$u_n(x)=\begin{cases}n^{-1}, & \text{si } (n+1)^{-1}<x\le n^{-1},\\ 0, & \text{sinon};\end{cases}$$

对于任意 x，级数 $\sum_n u_n(x)$ 至多包含一个非零项，因此它在每一点上是绝对收敛的；此外，

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall\, x\in X,\qquad \sum_{k=n}^{\infty}u_k(x)\le n^{-1},$$

所以 $\sum_n u_n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛；但该级数不正常收敛（即不满足 $\sum_n\|u_n\|_\infty<\infty$），因为调和级数 $\sum_n n^{-1}$ 发散.

命题. （交错级数一致收敛判据）设 u_n 为实值函数列；假设对任意 $x\in X$，级数 $\sum_n u_n(x)$ 为交错级数（就是一正一负那个，想起来了吗），且函数列 $(|u_n|)$ 单调递减并且一致收敛到零函数. 则级数 $\sum_n u_n$ 在 X 上一致收敛.

证明. 对于任意固定的 $x \in X$，级数 $\sum_n u_n(x)$ 满足交错级数收敛判别的假设，因此对该 x 它是收敛的；并且对任意 n 有（别把上学期学过的忘了）：

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} u_k(x)\right| \leq |u_n(x)|.$$

两边对 x 取上确界得到

$$\sup_{x\in X}\left|\sum_{k=n}^{\infty} u_k(x)\right| \leq \sup_{x\in X}|u_n(x)| = \|u_n\|_\infty.$$

由于 $(|u_n|)$ 一致收敛到 0，故 $\|u_n\|_\infty \to 0$，从而余项和关于 n 以一致方式趋于 0，这等价于级数 $\sum_n u_n$ 一致收敛.

□

例如取 $X = [-1, 1[$ 并令

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n} \qquad (n \geq 1).$$

对于任意 $a \in [0, 1[$，该级数在闭区间 $[-a, a]$ 上是正常收敛的（正常收敛实际上也等价于 $\sum_n \|u_n\|_\infty < \infty$）. 且依据上述命题，级数在 $[-1, 0]$ 上一致收敛，但在 $[-1, 0]$ 上并不正常收敛，因为当 $x = -1$ 时级数是不绝对收敛的. 另一方面，该级数并不在 $[0, 1[$ 上一致收敛：对任意给定的 n，总存在 $p > n$ 使得 $\sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k} > 1$, 因此对于 $x \in [0, 1[$ 只要使 x 足够接近 1 就有

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{p} \frac{x^k}{k} \geq 1,$$

由此可见级数 $\sum_n u_n$ 的余项和不一致收敛到 0 .

2.2 极限的“互换”

在本节中，集合 X 是度量空间，距离记为 d.

命题. 设 X 为一个度量空间，且 a 为 X 中的一个点. 设 (f_n) 为从 X 到 V 的一列映射. 我们做出以下假设：

- 对任意 n，函数 f_n 在点 a 处连续；
- 函数列 (f_n) 在 X 上**一致收敛**；记 $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.

则序列 (f_n) 的极限 f 在点 a 处是连续的.

证明. 令 $\varepsilon > 0$. 由三角不等式得

$$\forall n, \quad \forall x \in X, \qquad |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|.$$

由于 (f_n) 在 X 上一致收敛于 f，因此存在一个下标 n_0 使得

$$\forall x \in X, \qquad |f(x) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon,$$

特别地有 $|f(a) - f_{n_0}(a)| < \varepsilon$. 由此对任意 $x \in X$ 可得

$$|f(x) - f(a)| < |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + 2\varepsilon.$$

且根据假设 f_{n_0} 在 a 处连续，故存在 $\delta > 0$ 使得

$$\forall x \in X, \qquad d(a,x) < \delta \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \varepsilon.$$

于是最终得到

$$\forall x \in X, \qquad d(a,x) < \delta \implies |f(x) - f(a)| < 3\varepsilon,$$

大一的时候我们学过，在 $\varepsilon - \delta$ 语言中，3ε 等价于 ε，所以 f 在 a 处的连续性得证. □

如果对整个 X 讨论，那么很显然，如果一列从 X 到 V 的连续映射一致收敛，则其极限为连续映射.

注. 设 $C(X;V)$ 为从 X 到 V 的连续映射所构成的向量空间. 根据上述推论，$\mathcal{B}(X;V) \cap C(X;V)$ 是 $\mathcal{B}(X;V)$ 的一个闭向量子空间；因此它是完备的，因为 $\mathcal{B}(X;V)$ 是完备的. 特别地，如果 X 是一个紧的度量空间，则赋以一致收敛范数的空间 $C(X;V)$ 是完备的.

命题. 设 X 为度量空间 E 的一个子集，且 a 为 $E \setminus X$ 中的一个点，且 a 是 X 的一个聚点 *(point d'adhérence)*. 设 (f_n) 为从 X 到 V 的一列映射. 做如下假设：

- 对任意 n，函数 f_n 在点 a 处存在极限；记 $l_n = \lim_{x \to a} f_n(x)$；
- 函数列 (f_n) 在 X 上一致收敛；记 $f = \lim_{n \to \infty} f_n$.

则值域在 V 的数列 (l_n) 收敛，函数 f 在点 a 处存在极限且

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to \infty} l_n,$$

即

$$\lim_{x \to a} \Big(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \Big) = \lim_{n \to \infty} \Big(\lim_{x \to a} f_n(x) \Big).$$

换句话说，在函数列上取一固定点极限构成数列，再取该数列的极限，与先取函数列的极限函数，再在上面取到这个点的极限，两者的结果是一样的. 这一命题称为**极限交换定理（théorème d'interversion des limites）**，好像也叫 Laplace 交换定理（待考证）.

这个结论看上去很显然，但数学不是个显然的学科.

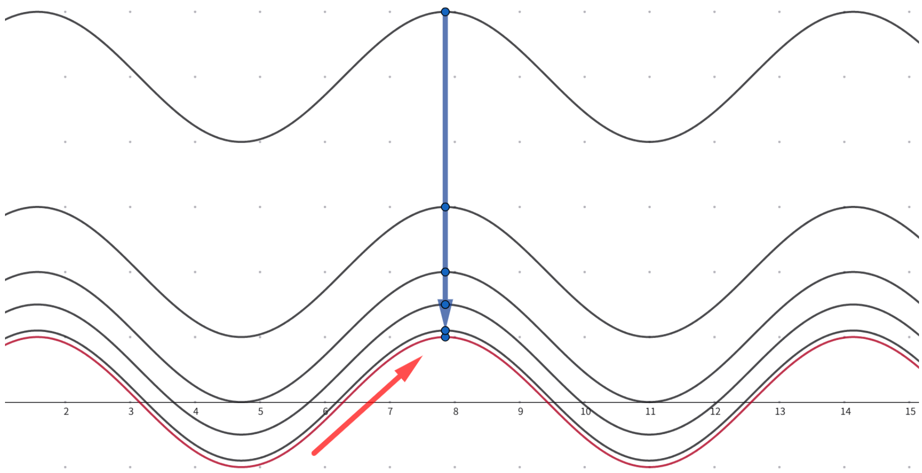

图 3: 先确定点（蓝点）再求数列极限，与先求函数极限（红线）再找点，结果是一样的

证明. 先暂且假设数列 (l_n) 收敛于某点 $l \in V$. 看到集合外聚点上的连续性，我们很自然能想到定义扩充函数

$$\tilde{f}_n : X \cup \{a\} \to V, \qquad \tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & x \neq a, \\ l_n, & x = a, \end{cases}$$

以及

$$\tilde{f} : X \cup \{a\} \to V, \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ l, & x = a. \end{cases}$$

由假设，(f_n) 在 X 上一致收敛，故 $(\tilde{f}_n)$ 在 X 上一致收敛；且很显然 $(\tilde{f}_n)$ 在点 a 上也一致收敛，所以一致收敛性可推广到 $X \cup \{a\}$；另一方面，对任意 n，函数 $\tilde{f}_n$ 在 a 处是连续的（函数值等于极限值则连续），于是由本节第一个命题可知 $\tilde{f}$ 在 a 处连续；于是得出 $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

到此为止，我们已经证明：若 (l_n) 收敛，则其极限等于 $\lim_{x\to a} f(x)$，从而得出式. 现在只需证明 (l_n) 本身确实收敛. 注意到还有一个条件没用：赋范向量空间 V 是完备的，因此证明 (l_n) 收敛只需证明它是柯西列.

取任意 $\varepsilon > 0$. 由于 f_n 在 X 上一致收敛于 f，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对一切 $p \geq N$ 与任意 $x \in X$ 有

$$\|f_p(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此对任意 $p, q \geq N$ 与任意 $x \in X$ 有

$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_q(x)\| < \varepsilon.$$

现在保持 $p, q \geq N$ 不动，并令 $x \to a$（这里取 $x \in X$ 且 $x \to a$），由各 f_p, f_q 在 a 处存在极限，可得

$$\|l_p - l_q\| = \lim_{x\to a} \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon.$$

于是 (l_n) 为柯西列，因 V 完备，故 (l_n) 收敛. 结合之前的讨论可得结论 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} l_n$，命题得证.

□

注. 本笔记的任何命题、公式我都没编号，因为如果读者（包括我）需要通过编号索引之前的公式或命题，那多半就是没看懂的.

一般来说，一个关于极限的定理，在无穷处取极限的时候，证明通常是比在有限点取极限的情况更简单的.

命题. 假设 X 是 $\mathbb{R}$ 的一个无上界子集. 设 (f_n) 为从 X 到 V 的一列映射. 作如下假设：

- 对任意 n，函数 f_n 在 $+\infty$ 处存在极限；记 $l_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$；
- 函数列 (f_n) 在 X 上一致收敛；记 $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

则值域在 V 的数列 (l_n) 收敛，函数 f 在 $+\infty$ 处存在极限，并且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} l_n,$$

也就是说

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\big).$$

证明. 请大家自行解决. □

极限交换定理对于级数也适用：

命题. 设 X 为一个度量空间. 设 (u_n) 为从 X 到 V 的一列映射. 做如下假设：

- 对任意 n，映射 u_n 在 X 上连续；
- 函数列（级数）$\sum_n u_n$ 在 X 上一致收敛.

则该级数的和函数 $x \mapsto \sum_n u_n(x)$ 在 X 上是连续的.

证明. 往前翻一翻，找到一个证明过程有 3ε 这种字眼的命题，然后把里面的概念全换成级数的就好了. □

算符 $\lim_{n\to\infty}$ 是函数列趋于无穷，因此在级数的情况下就是 $\sum$.

命题. 设 X 是度量空间 E 的非空子集（例如：$\mathbb{R}$ 中无界的一个子集），并设 a 为 $E\setminus X$，且 a 为 X 的一个聚点. 设 (u_n) 为从 X 到 V 的函数列. 假设：

- 对任意 n，函数 u_n 在点 a 处存在极限，记 $l_n = \lim\limits_{x\to a} u_n(x)$；
- 级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上一致收敛.

则数列 (l_n) 的部分和收敛，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} l_n$ 收敛；并且级数和函数在点 a 处存在极限，且

$$\lim_{x\to a}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\lim_{x\to a} u_n(x)\Big).$$

证明. 往前翻翻. □

该定理也称 $\lim$ **与** $\sum$ **互换定理**（**théorème d'interversion de** $\lim$ **et** $\sum$ ），是极限互换定理在级数下的表述.

定义 $u_n : (1,+\infty) \to \mathbb{R},\quad s \mapsto n^{-s}$. 取任意 $a > 1$. 由于对一切 $s \in [a,+\infty)$ 有 $n^{-s} \le n^{-a}$，且黎曼级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}$ 收敛，故函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(s)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上正常收敛（因此一致收敛）. 而且对每个固定的 n 函数， u_n 都是连续的，因而由之前的定理可知

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s)$$

在 $[a,+\infty)$ 上连续. 由于 $a > 1$ 可任意取得且可任意接近 1，由此可得 ζ 在开区间 $(1,+\infty)$ 上连续.

另外，由级数的极限互换定理可得

$$\lim_{s\to+\infty}\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{s\to+\infty} n^{-s} = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

但要注意，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(s)$ 在开区间 $(1,+\infty)$ 上并非一致收敛. 否则考察 s 在端点 $s \to 1$ 处的极限，根据互换定理，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{s\to 1} n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1},$$

该级数收敛——这显然是胡说. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(s)$ 在 $(1,+\infty)$ 上不一致收敛.