一位八无混子的笔记 – Algèbre Linéaire 2

一位无竞赛、无科研、无学生会、无班委、无社团、
无npy、无运动、无社交的八无混子

2025 年 10 月 4 日

图 1: 作者

0 引言

0.1 关于本拙作

这是一篇笔记.
~~（作者省去了蛐蛐MHD的一些话）~~

0.2 注意事项

1. **本人衷心希望您看到这里的时候并非考试前夕，否则我建议您早点睡觉，以便明天以丰沛的精神面对考试；**
2. 本作品不可代替教材；
3. 如有问题请立刻向作者指出，本作品允许一切形式的谩骂、攻击、批评.

0.3 关于Algèbre Linéaire

线性代数是一门非常重要的数学分支，需要我们具备良好的抽象思维能力. 如果您认为您已经学明白了线性代数，~~那多半说明您菌子吃多了~~，那我建议您再好好想一想.

本笔记将试图以比较简单的方式帮助大家理解线性代数的内容. 但依鄙人愚见，线性代数的理解离不开实践. 证明定理、做题固然重要，但随手画画矩阵、向量，做做矩阵乘法，探讨极端情况，画画线性映射的几何意义等等，也是不同形式的实践.

1　欧几里得空间上的自同态(endomorphismes)

自同态实际上就是一种算子，这里我们就不区分这两个名词了.

1.1　线性自同态的伴随算子(adjoint)

如果哪一天，您想不开了去学量子力学，那请务必学好这一节.

命题. 对于任意自同态 $u \in \mathcal{L}(E)$，存在唯一的自同态 $u^* \in \mathcal{L}(E)$ 使得

$$\forall x, y \in E \quad (u^*(x) \mid y) = (x \mid u(y)).$$

映射 $u \mapsto u^*$ 是 $\mathcal{L}(E)$ 上的一个对合自同态（*involutif*，即平方后等于id）；此外，

$$(\mathrm{id}_E)^* = \mathrm{id}_E, \quad (u \circ v)^* = v^* \circ u^*,$$

对所有 $u, v \in \mathcal{L}(E)$ 都成立.

定义. 对于所有 $u \in \mathcal{L}(E)$，E 上的自同态 u^* 被称为 u 的***伴随(adjoint)***.

现在要证明伴随的存在性和唯一性. 先给出一个定理辅助证明.

命题 (Riesz表示定理)**.** 设 E 是一个欧几里得空间. 对于 E 上的每一个线性泛函 $f \in E^*$，都可以找到唯一的向量 $v_f \in E$ 使得

$$\forall x \in E \quad f(x) = (v_f \mid x).$$

称v_f 为 f 的*Riesz*表示.

证明. **唯一性：** 若 $v, w \in E$ 满足

$$(v \mid x) = (w \mid x), \qquad \forall x \in E,$$

则对所有 x 有 $(v - w \mid x) = 0$. 取 $x = v - w$，得

$$\|v - w\|^2 = (v - w \mid v - w) = 0,$$

故 $v = w$，于是表示向量若存在则唯一.

存在性： 取 E 的一组正交标准基 $\{e_1, \ldots, e_n\}$. 定义

$$v_f := \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i \in E.$$

任取 $x \in E$，记$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$，则

$$f(x) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i).$$

另一方面，

$$(v_f \mid x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i \Big| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\Big) = \sum_{i,j} f(e_i)\, x_j\, (e_i \mid e_j) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, x_i.$$

两式相等，因此 $f(x) = (v_f \mid x)$ 对任意 x 成立. 存在性得证.

事实上，这个证明相当于，如果

$$\varphi(x) = \varphi_1 x_1 + \cdots + \varphi_d x_d$$

那就规定向量$v = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$即可.

有没有更好的方法？

抽象方法（其实就是书上的方法）： 定义线性映射

$$J : E \to E^*, \quad x \mapsto (x \mid \cdot)$$

众所周知，E和E^*维数相同，根据秩定理（théorème du rang，中文是我瞎翻译的，中文教材一般叫秩-零化度定理，但那个和咱们学的形式不是很一样），

$$\operatorname{rg} J = \dim E - \dim(\ker J)$$

若 J 是单射，则 $\ker J = \{0\}$，所以

$$\operatorname{rg} J = \dim E = \dim E^*$$

因此 J 是满射. 从而 J 是同构当且仅当 J 是单射. 下面证明 J 是单射.

取 $v \in \ker J$，则对所有 $y \in E$ 有

$$0 = J(v)(y) = (y \mid v).$$

取 $y = v$，得 $\|v\|^2 = (v \mid v) = 0$，所以 $v = 0$. 因此 $\ker J = \{0\}$，J 是单射. 从而J 是同构.

既然 J 是满射，则对任意 $f \in E^*$（这里f对应的是J定义中的$(x \mid \cdot)$），都存在 $v_f \in E$（对应J定义中的x）使得

$$J(v_f) = f,$$

即

$$\forall x \in E \quad f(x) = J(v_f)(x) = (v_f \mid x).$$

唯一性是因为 J 是单射.

$\square$

我们回到伴随算子的定义上来. 下面证明伴随算子是存在且唯一的.

证明. 对任意$x \in E$，定义线性泛函

$$f_x : E \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto (x \mid u(y)).$$

规定u^*的值为f_x的Riesz表示，即

$$\forall x, y \in E \quad (u^*(x) \mid y) = f_x(y) = (x \mid u(y)).$$

伴随算子的线性请读者自行验证（或者抄书）.

□

注. 我们知道E *s'identifie canoniquement à* E^*，用我们普通话说就是他俩其实是一回事，只是一个的向量是竖着一条矩阵，一个是横着一条矩阵. 既然如此，如果大家还记得转置自同态，那其实伴随算子和转置自同态基本上就是一回事，只不过伴随算子是定义在欧几里得空间上的.

好消息，接下来开始具象了.

命题. 设 b 是 E 的一个正交标准基. 在基 b 下，线性算子 u 的伴随算子的矩阵是 u 的矩阵的转置：

$$\mathrm{Mat}_b(u^*) = (\mathrm{Mat}_b(u))^\top.$$

证明. 设 $e_1, \ldots, e_n$ 是基 b 的向量. 矩阵 $\mathrm{Mat}_b(u^*)$ 的第 (i, j) 个元素是 u^*e_j 在基 b 下的第 i 个坐标：

$$(e_i \mid u^*(e_j)) = (e_j \mid u(e_i)).$$

因此它正是 $u(e_i)$ 在基 b 下的第 j 个坐标，也就是说，就是矩阵 $\mathrm{Mat}_b(u)$ 的第 (j, i) 个元素.

□

接下来来直观理解这一结论.

伴随算子本质上从内积的角度刻画了线性映射. 我们在二次元（$\mathbb{R}^2$）考虑这件事.

取标准正交基 $e_1 = (1, 0)$，$e_2 = (0, 1)$. 设x和y是$\mathbb{R}^2$中的两个向量. 它们的矩阵形式为：

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

它们的内积定义为：

$$(x \mid y) = x_1y_1 + x_2y_2 = X^\top Y = Y^\top X.$$

或者

$$(x \mid y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

这很好理解. 现在，设 u 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个线性自同态.

设 u 在基 b 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

那么 u 作用在 x 上的结果是

$$u(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

因此

$$(u(x) \mid y) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

像之前一样，把y立起来，x躺下. 将后面两项视作一个整体取转置. 注意：$(AB)^\top = B^\top A^\top$

$$(u(x) \mid y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

令u^*的矩阵为$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 那么

$$(u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y)).$$

这就是伴随算子的矩阵.

命题. 设 $u \in \mathcal{L}(E)$. 则有如下关系：

1. $\ker u^* = (\mathrm{Im} u)^\perp, \quad \mathrm{Im} u^* = (\ker u)^\perp, \quad \mathrm{rg}\, u^* = \mathrm{rg}\, u$
2. 设 F 是 E 的一个向量子空间；F 是 u-稳定的当且仅当 $F^\perp$ 是 u^*-稳定的.

证明. 对于命题1，按照定义验证即可：

$$u^*(x) = 0 \iff \forall y \in E \quad (u^*(x) \mid y) = 0 \iff \forall y \in E \quad (x \mid u(y)) = 0 \iff x \in (\mathrm{Im} u)^\perp.$$

对于命题1的第二条，只需交换u和u^*（因为$(u^*)^* = u$）. 对于第三条，

$$\mathrm{rg}\, u^* = \mathrm{codim} \ker u^* = \mathrm{codim} (\mathrm{Im} u)^\perp = \mathrm{rg}\, u.$$

第一个等号应用了秩定理，第二个等号是命题1的第一条. 至于命题2，如果F是u-稳定的，那么对任意$x \in F^\perp$，

$$\forall y \in F \quad (u^*(x) \mid y) = (x \mid u(y)) = 0,$$

因为$u(y) \in F$. 反之亦然. □

关于伴随算子，还有一些比较有趣的理解方法，但~~这里太小写不下~~我们还没学过需要的预备知识.

1.2 正交算子(orthogonal)

先规定符号，E是一个欧几里得空间，维数为n，u是E上的一个线性自同态.

定义. 称 E 的一个自同态 u 是 **正交的** ***(orthogonal)***，如果它不改变内积，也就是说

$$\forall x, y \in E \quad (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y).$$

称 u 是 E 的一个 **线性等距映射** ***(isométrie linéaire)***（或向量等距映射，*ChatGPT*说的，我不确定），如果它不改变范数，也就是说

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

注. 当您看到两个定义同时出现在*Dehon*的书里，就说明它们是等价的.

命题. 设 $b = (e_1, \ldots, e_n)$ 是 E 的一个正交标准基. 以下条件是等价的：

1. 自同态 u 是正交的；

2. 自同态 u 是线性等距映射；

3. 族 $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ 是 E 的一个正交标准基.

证明. $1 \implies 3$ 是显然的. 对一个正交标准基，u既不改变它们的长度，也不改变它们两两之间的内积（1或0），因此它们的像仍然是一个正交标准基.

$3 \implies 2$ 来自于在正交标准基中标量积的表达式；事实上，在条件3下，由于 u 的线性，向量 $x \in E$ 在基 $(e_1, \ldots, e_n)$ 下的坐标与 $u(x)$ 在基 $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ 下的坐标相同. 即如果$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$，那么 $u(x) = x_1u(e_1) + \cdots + x_nu(e_n)$. 它们的长度只取决于坐标$x_1, \cdots, x_n$，因此 $\|u(x)\| = \|x\|$.

$2 \implies 1$ 来自极化公式：

$$(u(x) \mid u(y)) = \frac{1}{2}(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = (x \mid y).$$

□

一个典型的例子是之前学过的对称映射. 即如果p是一个正交投影算子，那么$s = 2p - \mathrm{id}$是一个正交算子.

上图是一个典型的二次元正交投影的对称映射. 可以看到，$s(x)$和$s(y)$的夹角和x与y的夹角相同，且长度也对应相同，从而$(s(x) \mid s(y)) = (x \mid y)$，因此对称映射是一个正交算子.

接下来又要开始具象了，因为涉及到矩阵了.

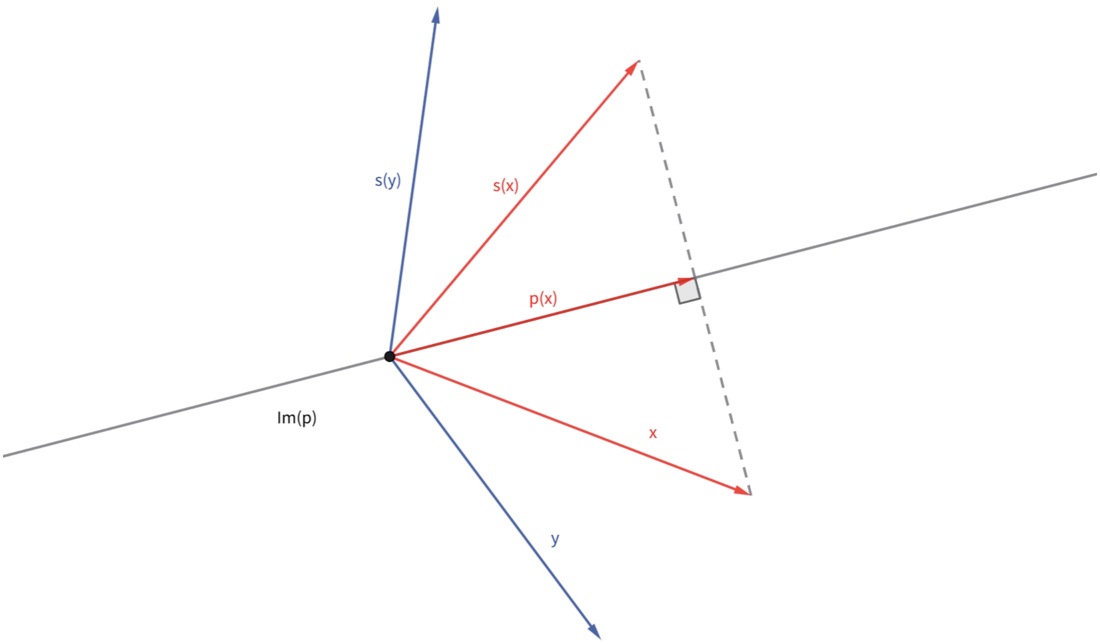

图 2: 对称映射是正交算子

定义. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 是一个实方阵. 称 A 是一个 **正交矩阵 (*matrice orthogonale*)**, 如果

$$A^\top A = I_n.$$

注. 不难看出，如果A是正交矩阵，那么A的各列构成一个正交标准基. 因为$A^\top A$的第(i,j)个元素是$A^\top$的第i行与A的第j列的内积，也就是A的第i列与第j列的内积. 如果$A^\top A = I_n$，那么当$i=j$时，内积为*1*；当$i \neq j$时，内积为*0*. 这正是正交标准基的定义.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

命题. 设 b 是 E 的一个正交标准基. 以下条件是等价的：

1. u 是 E 的一个正交自同态；
2. 自同态 u 是可逆的，并且
$$u^{-1} = u^*;$$
3. u 在基 b 下的矩阵是一个正交矩阵.

证明. 请读者自行验证. □

到现在，我们不难看出：正交自同态的作用，实际上就是就是把坐标轴旋转（可能还会翻转）一下，这一过程不改变向量之间的夹角和长度，因此不改变内积. 因此，任两个自同态的复合仍然是一个正交自同态. 聪明的您看到运算的封闭性，会想到什么呢？

命题. *E中的正交自同态构成一个群，记作$O(E)$. 此外，全体n阶正交矩阵也构成一个群.*

这个群的单位元是恒等映射；逆元是伴随算子. 除此之外，我们之前学过，1和-1可以构成一个群. 现在，考虑正交自同态u的行列式$\det(u)$. 设u的矩阵为A，不难发现：

$$(\det(u))^2 = \det(A)\det(A^\top) = \det(I) = 1.$$

命题. *行列式是$O(E)$到$\{1,-1\}$的一个满同态.*

定义. *由行列式定义的满同态，它的核（注意：单位元是1而非0!）被称为E的**特殊正交群 (groupe spécial orthogonal)**，记作$SO(E)$.*

命题. *如果u是一个正交自同态，且线性子空间F是u-稳定的，那么$F^\perp$也是u-稳定的.*

证明. 套用之前伴随算子的性质，由于$u^* = u^{-1}$可知$F^\perp$是u^{-1}-稳定的，因此 $u^{-1}(F^\perp) \subseteq F^\perp$. 在此基础上，因为$u$是满射，所以$u$不改变一个线性子空间的维数，因此$\dim u^{-1}(F^\perp) = \dim F^\perp$，所以$F^\perp = u^{-1}(F^\perp)$，从而 $u(F^\perp) = F^\perp$ □

命题. *正交自同态的特征值是模为1的复数. 在实数域上，正交自同态的特征值只能是1或-1.*

证明. 设 λ 是 u 的一个特征值，$x \in E \setminus \{0\}$ 是对应的特征向量. 那么

$$\|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|.$$

另一方面，由于 u 是一个线性等距映射，$\|u(x)\| = \|x\|$. 因此 $|\lambda| = 1$.

□

命题. *考虑二次元的情况.*

若u是一个正交自同态，那么：

1. *如果$u \in SO(E)$，那么u是一个**旋转**；具体体现为存在$\theta \in [0,\pi]$，使得在一切正交标准基下，u的矩阵为*
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \pm\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
2. *如果$u \in O(E) \setminus SO(E)$，那么$u$是一个**反射**. 存在一个正交标准基，使得$u$的矩阵为*
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

从直观感受上来说，旋转就是把坐标轴旋转一个角度，因此不论是哪个正交标准基下，矩阵形式都一样. 反射是把坐标翻转，但并不是所有正交标准基下矩阵形式都一样. 例如标准形式的反射

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

在标准基下是这样的形式，相当于x坐标不变，y坐标翻转. 也就是关于x轴的反射. 但如果我们把x轴和y轴交换一下，那么这个反射就相当于x坐标翻转，y坐标不变. x轴和y轴交换的矩阵是：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

同一线性变换在新基下的矩阵为

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

表示关于 y 轴的反射. 这就是反射的一个例子.

此外，我们还注意到P的行列式为-1，因此$P \in O(E) \setminus SO(E)$. 那么在哪个正交标准基下，反射的矩阵形式是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

呢？注意到P的实际作用是把x坐标和y坐标交换了一下，实质上是关于$y = x$这条直线的反射. 因此，选取第一个基向量为平行于这条直线的$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$，第二个基向量为$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$，就可以了. 读者可以用基变换公式自行验证.

换句话说，二维平面内旋转，转轴是垂直于这一平面的，因此不论二维平面的正交标准基怎么选，u 的矩阵形式都一样，因为转轴的表达式不会变. 然而，反射需要一个平面内直线作为“镜面”，因此在不同的正交标准基下，镜面的表达式是不一样的，从而u 的矩阵形式可能会有所不同.

现在我们回到三次元的情况.

命题 (欧拉定理)**.** *假设 E 是三维的. 设 $u \in SO(E) \setminus \{\mathrm{id}_E\}$. 那么，1 是 u 的一个特征值，并且与之相关的特征子空间是一个向量张成的直线，称为 u 的旋转轴. 且存在唯一的实数 $\theta \in]0, \pi]$，称为 u 的 非定向角 (angle non orienté)，使得在任意一个正交标准基中，如果第一个向量取在 u 的旋转轴上，那么 u 的矩阵为*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \mp\sin\theta \\ 0 & \pm\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

这个定理我们在一门叫理论力学的课程中见到过，不知道大家还记不记得.

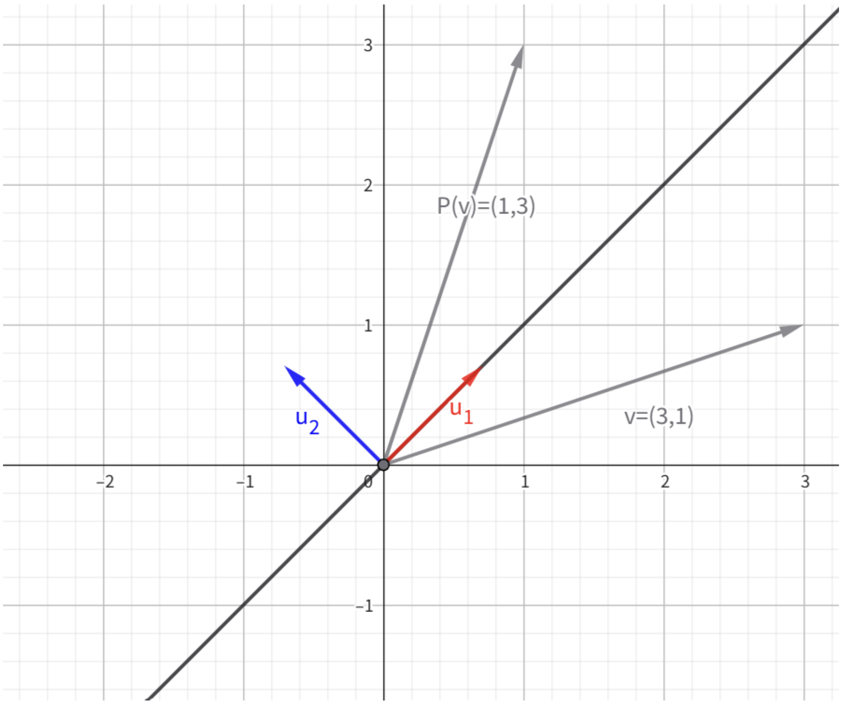

图 3: 以u_1和u_2为正交标准基，P的矩阵就是标准形式

证明. 一定存在一条 u-稳定的向量直线；否则将不会存在任何 u-稳定的向量平面.（先别管，当成公理）设 D 是一条 u-稳定的直线；则u 在 D 上诱导的是一个系数为 ± 1 的相似映射：

$$u_D = \pm \mathrm{id}_D \quad \text{(换句话说，}D\text{ 是 }u\text{ 的一个特征向量所张成的，特征值是}\pm 1\text{).}$$

之前我们证明了平面 $P = D^{\perp}$ 也是 u-稳定的；u 在 P 上的限制 u_P 是 P 上的一个线性等距映射，也就是说，根据前一个命题，它是 P 的一个旋转或者反射. 换句话说，u使转轴上的向量保持不变或翻转（其实可以一定是不变，待会就知道了），使垂直于转轴的平面上向量旋转——作者注.

因此，在适应分解 $E = D \oplus P$ 的某个正交标准基 b 下（b的第一个向量在D上），u 的矩阵具有如下形式：

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & C \end{pmatrix},$$

其中 $C \in O(2)$ 是 u_P 在 b 的其余两个向量所构成的基下的矩阵. 由此可得：

$$1 = \det u = \pm 1 \cdot \det C = (\det u_D)(\det u_P).$$

如果$u_D = -\mathrm{id}_D$，那么u_P 是 P 的一个反射，因此存在 $e \in P$，使得 $u(e) = u_P(e) = e$. 这里的e就是刚才我们说的镜面上的向量. 于是我们可以用直线 $\mathrm{Vect}(e)$ 替换 D，这样我们就可以回到$u_D = \mathrm{id}_D$ 的情形. 因此不管怎么说，都可以让1 是 u 的一个特征值，并且我们可以假设直线 D 由与特征值 1 对应的一个特征向量生成.

此时 u_P 是 P 的一个旋转，且不同于 id_P，因此 $1 \notin \mathrm{Sp}(u_P)$，从而 D 就是与特征值 1 相关的特征子空间.

因此平面

$$P = \ker(u - \mathrm{id}_E)^\perp$$

被唯一确定，并且u 在适应分解 $E = D \oplus P$ 的某个正交标准基下的矩阵就是Euler给出的形式，其中 θ 是 u_P 的非定向角.

□

总结这个证明的思路：先声明稳定的直线和与之垂直的平面；在此基础上，如果直线对应特征值是1，就选为转轴；否则算子在平面上的限制的特征值就是-1，是翻转，如果这样那就选镜面为转轴. 至于刚才提到的公理...

命题. *任一自同态必有稳定的直线或二维平面.*

证明. 考察自同态u的矩阵A. 若自同态有特征值λ则存在$v \in E$，$u(v) = \lambda v$.矩阵表示就是$(A - \lambda I)V = 0$. 所以$\det(A - \lambda I) = 0$ 注意到$det(A - \lambda I)$是关于λ的n维多项式，称为**特征多项式**. 去年我们学过，实数域高维多项式一定有一次或二次的不可约因式. 如果特征多项式有一次因式，就有实根，这个根就是特征值，u就在对应的特征向量张成的直线上稳定.

反之如果它只有不可约的二次因式，那么它有一对共轭复根$\alpha = a_1 + ia_2$和$\overline{\alpha} = a_1 - ia_2$，在复数域有一个复特征向量$z = x + iy$，满足$u(z) = \alpha z$ 展开，对比实部和虚部：由此可得

$$u(x + iy) = (a_1 + ia_2)(x + iy) = (a_1 x - a_2 y) + i(a_2 x + a_1 y)$$

比较实部与虚部，得到

$$u(x) = a_1 x - a_2 y, \qquad u(y) = a_2 x + a_1 y.$$

因此，二维平面$P = \mathrm{Vect}(x, y)$关于u是稳定的.

□

高维生物如何研究转圈圈和照镜子？

命题. *以下条件是等价的：*

1. *自同态 u 是正交的；*
2. *存在一族 u-稳定2维平面 $(P_i)_{i\in[1,r]}$，其中整数 r 介于 0 和 $\lfloor n/2 \rfloor$ 之间，使得 E 可以分解为如下正交直和：*

$$E = \ker(u - \mathrm{id}_E) \ \oplus\ \ker(u + \mathrm{id}_E) \ \oplus\ P_1 \ \oplus \cdots \oplus\ P_r,$$

这里任两个子空间互相正交. 并且对于任意 $i \in [1, r]$，自同态 u 在平面 P_i 上的限制 u_{P_i} 是一个旋转，而不是 $\pm\mathrm{id}_{P_i}$.

证明. 如果2成立，则 u 是一个线性等距映射，并且在各个相互正交的子空间上稳定，那么套用勾股定理即可得证.

反过来，先假设 u 是一个**没有特征值**的正交自同态，并对 n 进行归纳. 即假设定理对$n-1$及以前全部成立.

$n=2$根据公理很容易得到.

假设 $n>2$. 自同态 u 必然有一个 u-稳定平面，记作 P_1. u_{P_1} 是 P_1 上的一个正交自同态，并且没有特征值（因为 u_{P_1} 的任一特征值同时也是 u 的特征值，我们刚设了u没有特征值），所以它是 P_1 上的一个旋转，且不同于 $\pm\mathrm{id}_{P_1}$. 另一方面，$P_1^\perp$ 是 E 的一个 $n-2$ 维的 u-稳定子空间；将归纳假设应用于 u 在 $P_1^\perp$ 上的限制，就得到如下分解：

$$P_1^\perp = P_2 \oplus \cdots \oplus P_r,$$

其中每个 P_i 都是一个 u-稳定平面，并且 u 在 P_i 上的限制是一个旋转，且不同于 $\pm\mathrm{id}_{P_i}$. 因此2得证，并且 n 得是偶数.

上式没有$\ker(u_{P_1^\perp}-\mathrm{id}_E)$和$\ker(u_{P_1^\perp}+\mathrm{id}_E)$，因为设了没有特征值. 这两项如果非空则$u_{P_1^\perp}$有特征值1或-1.

在一般情况下（假设 u 是任意一个正交自同态，**可能有特征值**），设

$$F = \ker(u-\mathrm{id}_E) \oplus \ker(u+\mathrm{id}_E).$$

那么 u_F 是 F 上的一个正交对称映射. 首先这两个子空间 $\ker(u-\mathrm{id}_E)$ 和 $\ker(u+\mathrm{id}_E)$（可能为空）是正交的（请自行验证）. 另一方面，$F^\perp$ 是一个 u-稳定子空间，且 $u_{F^\perp}$ 是 $F^\perp$ 上的一个没有特征值的正交自同态（因为 u 特征值只能是±1，都在 F 里用完了）. 对$F^\perp$的讨论，照搬无特征值的证明过程即可. □

注. *对于$n\geq 4$的情况，我无法给出可视化的易于理解的例子. 如果您认识高维生物，可以请他给大家讲讲.*

根据以上内容，我们不难得出：

命题. *以下条件等价：*

1. *线性自同态 u 是**正交**的；*
2. *存在 E 的一组**正交标准基**，使得 u 在该基下的矩阵是如下形式的分块对角矩阵：*

$$\mathrm{diag}\big(I_p,\, -I_q,\, R(\theta_1), \ldots, R(\theta_r)\big),$$

其中 $p,q,r\in\mathbb{N}$，满足 $p+q+2r=n$，且 $\theta_1,\ldots,\theta_r\in(0,\pi)$. 这里

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in SO(2)$$

表示平面上的旋转矩阵.

很显然，大矩阵中的I_p表示恒等的部分，$-I_q$表示翻转的部分，其余各部分则表示各平面上的旋转. ~~可见高维生物要想理解旋转也是离不开二次元的.~~ 这一切都是因为不可约的实多项式最高为二次，大家可以想想为什么.

关于欧拉定理和后面的旋转相关内容，固然证明方法很值得学习，但它们在力学、工程学上的应用也是很有价值的. 数学来源于社会实践，服务于社会实践，决不能脱离生产而存在~~（但可以脱离三次元而存在）~~.

1.3 自伴算子（auto-adjoint）(或对称算子)

这一节要开始抽象了.

定义. 我们称向量空间 E 上的线性算子 u 是**自伴算子**或**对称算子**，如果 $u^* = u$，也就是说

$$\forall x, y \in E \quad (u(x) \mid y) = (x \mid u(y)).$$

命题. b是E上的正交标准基，不难得出以下两条是等价的：

1. u是自伴算子.

2. u在b上的矩阵是对称的.

证明. 这很显然，因为u是自伴算子等价于u在b上的矩阵的转置等于自己. □

很显然，对称算子构成$\mathcal{L}(E)$上的一个线性子空间，记作$S(E)$. 特别的，如果E是$\mathbb{R}^n$，那么$S(E)$的维数是$\frac{n(n+1)}{2}$，因为n阶对称矩阵的值完全取决于对角线和对角线上（下）的元素.

命题. 向量空间 E 上的自伴的投影算子就是正交投影算子.

证明. 假设 p 是一个正交投影算子，那么对于任意 $x, y \in E$，有

$$x - p(x) \perp p(y),$$

因此

$$(x \mid p(y)) = (p(x) \mid p(y)).$$

由对称性（这是个常用技巧，因为我们没规定x和y有什么不同，所以交换他们俩）可得

$$(x \mid p(y)) = (p(x) \mid y) = (p(x) \mid p(y)),$$

于是 $p^* = p$.

反过来，若 p 是满足 $p^* = p$ 的 E 上的投影算子，则对于任意 $x \in \ker p$，$y \in \operatorname{Im} p$，有

$$(x \mid y) = (x \mid p(y)) = (p(x) \mid y) = 0.$$

因此 $\ker p \perp \operatorname{Im} p$，即 p 是正交投影. □

我很确定这道题我们上学期TD讲过，而且是我讲的.

命题. 假设线性算子 u 是自伴算子. 设 F 是 E 的一个 u-稳定子空间；那么其正交补 $F^\perp$ 也是 u-稳定的.

不用证了，每节都有个类似的.

命题. 假设 u 是自伴算子. 那么在 E 中存在一条 u-稳定的直线（向量子空间）.换句话说，算子 u 的特征值集合非空.

这个命题很重要.

证明. 反证法，假设在 E 中不存在 u-稳定直线，也就没有实特征值. 根据那个公理，可以推出存在一个二维 u-稳定子空间 $F \subset E$. 算子 u 在 F 上的限制 u_F 仍然是自伴算子（因为 u 是自伴的）. 因此，在 F 的一个正交标准基下，u_F 的矩阵表示为

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}.$$

由于 u_F 没有特征向量（因为假设了 u 没有），矩阵 $M - \lambda I_2$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 都是可逆的. 因此，

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \det \begin{pmatrix} a-\lambda & c \\ c & b-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2 \neq 0.$$

这对吗？考察特征多项式

$$X^2 - (a+b)X + ab - c^2$$

它的判别式等于 $(a-b)^2 + 4c^2 > 0$，因此必有实根. □

线性代数的本质是数，是抽象的，但要想理解线性代数，必须使用具象的方法. 下面来看另一个证明.

证明. （Boss进入了祂的二阶段）设函数

$$q : E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x \mid u(x)).$$

由于该函数连续，而单位球面

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$$

是紧集（E是有限维的，S是闭集且有界），所以q在S上面存在最大值和最小值，也就是存在 $x_0 \in S$，使得

$$\forall x \in S \quad q(x_0) \leq q(x).$$

我们来证明：x_0 是算子 u 的一个特征向量，其对应特征值为 $\lambda = q(x_0)$. 只需验证 $u(x_0)$ 属于$\mathrm{Vect}(x_0)$，也就是正交于超平面 $(\mathrm{Vect}(x_0))^\perp$ （因为在内积空间，验证正交性是

很容易的，乘一下等于0就行了），即对于**任意**单位向量 $y \in E$，如果 $(x_0 \mid y) = 0$，那么有 $(u(x_0) \mid y) = 0$.

取 $y \in S$，满足 $(x_0 \mid y) = 0$. 我们可以定义一个通过 x_0 和 y 的“大圆”：

$$x_t = (\cos t)x_0 + (\sin t)y.$$

考虑函数

$$\varphi_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto q(x_t).$$

展开得：

$$\varphi_y(t) = (\cos t)^2 q(x_0) + (\sin 2t)(u(x_0) \mid y) + (\sin t)^2 q(y).$$

由于 x_0 的定义，φ_y 在 $t = 0$ 处取得极小值，因此

$$0 = \varphi_y'(0) = 2(u(x_0) \mid y).$$

于是 $(u(x_0) \mid y) = 0$，证毕. □

既然有了特征值...

命题. 以下条件是等价的：

1. 线性算子 u 是自伴的；

2. 存在 E 的一个正交标准基，使得 u 在此基下可对角化；

3. u 可对角化，且它的特征子空间两两正交；

4. 算子 u 有如下的谱分解：

$$u = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_s p_s,$$

其中 $p_1, \ldots, p_s$ 是正交投影，$\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ 是两两不同的实数.

证明. 2、3、4相互是等价的，这很显然，只需证明1和2等价就行了.

如果存在 E 的一个正交标准基 b，在此基下 u 的矩阵是对角的，那么由于对角矩阵是对称的，可知 u 是自伴的.

反过来怎么证？对维数n归纳证明. 若 $n = 1$，结论显然成立，没什么可说的. 设 $n > 1$，并假设任意维数为 $n-1$ 的欧几里得空间上的自伴算子都能在某个正交标准基下对角化.

取 u 的一个单位特征向量 e_n（它肯定存在，我们证了u有稳定直线）. 根据上面那个“不用证了”的命题（**不要藐视任何一个命题的结论，即便忽视它的证明**），超平面 $H = (\mathrm{Vect}(e_n))^\perp$ 是 u-稳定的. 因此，限制在H上的算子 u_H 在 H 上是自伴的，那么由归纳假设，存在一个正交标准基 $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ 对角化 u_H. 于是 $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ 就是 E 的一个由特征向量构成的正交标准基. □

事已至此，我们最后来看一下对称矩阵的谱定理.

命题. *设 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. 以下条件是等价的：*

1. *矩阵 A 是对称的；*
2. *矩阵 A 可正交对角化，即存在一个 n 阶正交矩阵 P，使得*

$$P^{-1}AP$$

是对角矩阵.

证明. 设 b_0 是 E 的一个正交标准基，且 u 是 E 的一个线性算子，在基 b_0 下的矩阵表示为 A.

说一个基 b 是正交标准基，等价于说从基 b_0 到基 b 的过渡矩阵

$$P = \mathrm{Mat}_{b_0}(b)$$

是正交的. 根据基变换公式

$$\mathrm{Mat}_b(u) = P^{-1}AP,$$

通过之前那四条等价条件就可以证明这个命题. □

补充一条有用的东西：

命题. *设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称矩阵.若*

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

且 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是由 A 的单位特征向量组成的正交标准基（即 $e_i^T e_j = \delta_{ij}$），则

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, e_i e_i^T.$$

证明. 令

$$Q = [\, e_1 \; e_2 \; \cdots \; e_n \,] \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

则 Q 正交化A：

$$Q^T AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =: D.$$

于是有

$$A = QDQ^T.$$

对任意向量 $x \in \mathbb{R}^n$，由于 $\{e_i\}$ 是标准正交基，可以将 x 展开为

$$x = \sum_{i=1}^{n} (e_i^T x) \, e_i.$$

于是

$$Ax = A\Big(\sum_{i=1}^{n}(e_i^T x)\, e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}(e_i^T x)\, Ae_i = \sum_{i=1}^{n}(e_i^T x)\, \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, e_i(e_i^T x).$$

把 $(e_i^T x)$ 提出到右侧，可写成矩阵作用的形式：

$$Ax = \Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, e_i e_i^T\Big)x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

由线性算子的格等价性（两个矩阵若对任意向量作用相同则矩阵相等），得到

$$A = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, e_i e_i^T$$

□

事已至此，我们已经把自伴算子的主要理论内容逐一展开，已经形成了一个严谨的知识体系. 这是不是就意味着自伴算子的内容到此为止了呢？恐怕还远远不够. 毕竟，一个游戏如果只通关一次就退坑，那未免太可惜了；只有进入二周目，才能在新的角度下发现隐藏的细节和真正的乐趣. 同样地，对于自伴算子，如果我们仅仅停留在定理证明和数学形式上，却没有理解它究竟“做什么”“有什么用”“到底在干嘛”，那就等于只玩了一次速通.

(以上是ChatGPT作为嘴替在瞎BB)

1.3′ 自伴算子（二周目）

注. 本节仅供辅助理解，不可当做严谨数学证明.

自伴算子起到什么效果？我们回顾一下之前的一个命题：

命题. 以下条件是等价的：

1. 线性算子 u 是自伴的；

2. 存在 E 的一个正交标准基，使得 u 在此基下可对角化；

3. u 可对角化，且它的特征子空间两两正交；

4. 算子 u 有如下的谱分解：

$$u = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_s p_s,$$

其中 $p_1, \ldots, p_s$ 是正交投影，$\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ 是两两不同的实数.

对于E上的任意向量x，假设$b = (e_1, \ldots, e_n)$是对角化u的正交标准基，令p_i为到特征子空间 E_{λ_i} 的正交投影，那么对任意 $x \in E$，有

$$u(x) = \lambda_1\, p_1(x) + \cdots + \lambda_s\, p_s(x) = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i\, p_i(x).$$

这个式子清楚地揭示了自伴算子的几何作用：

首先，$p_i(x)$ 表示将向量 x 投影到特征子空间 E_{λ_i} 上的部分. 也就是说，$p_i(x)$ 把 x 分解成在 E_{λ_i} 方向上的分量. 算子 u 对这一分量施加作用时，只是把它乘上一个实数因子 λ_i. 换句话说，u 在 E_{λ_i} 内表现为"按比例伸缩"，比例因子就是对应的特征值 λ_i.

因此，整个向量 x 在 u 的作用下，就是被分解到不同的相互正交的特征子空间里，各部分分别被不同的实数因子拉伸（或压缩，取决于特征值），最后再把这些变换后的分量加起来.

我们来看一个例子，仍然是二次元. 考虑一个自伴算子u，它在正交标准基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

很显然，这个矩阵每一行各元素的和都是3，因此它的一个特征向量是$(1,1)$：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

对应特征值是3. 此外，考察垂直于这个特征向量的向量$(-1,1)$：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

这也是特征向量，对应特征值1. 因此，u把向量在$y = x$上的投影伸长为三倍，对$y = -x$上的投影保持不变. 取$u_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$， $u_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$，则$(u_1, u_2)$是对角化$u$的正交标准基.

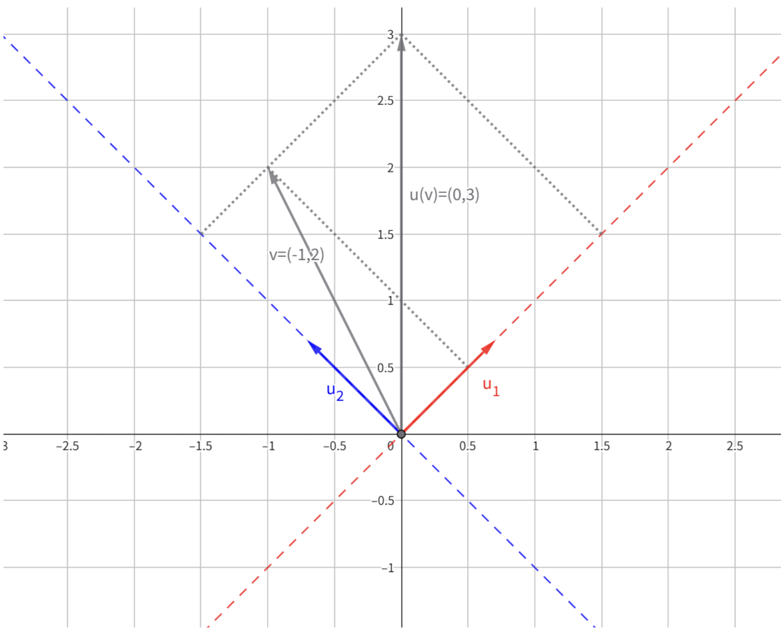

图 4: u把向量在u_1上的投影伸长为三倍，对u_2上的投影保持不变.

注. 有没有感觉这个图很眼熟？没错，我为了偷懒再次选了以$y=x$和$y=-x$为子空间的算子，这样以前的图改一改就行了.

接下来，我们来回顾这个令人费解的证明：

命题. 假设 u 是自伴算子. 那么在 E 中存在一条 u-稳定的直线（向量子空间）.换句话说，算子 u 的特征值集合非空.

证明. 设函数
$$q: E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x \mid u(x)).$$
由于该函数连续，而单位球面
$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$$
是紧集（E是有限维的，S是闭集且有界），所以q在S上面存在最大值和最小值，也就是存在 $x_0 \in S$，使得
$$\forall x \in S \quad q(x_0) \leq q(x).$$

我们来证明：x_0 是算子 u 的一个特征向量，其对应特征值为 $\lambda = q(x_0)$. 只需验证 $u(x_0)$ 属于$\mathrm{Vect}(x_0)$，也就是正交于超平面 $(\mathrm{Vect}(x_0))^{\perp}$（因为在内积空间，验证正交性是很容易的，乘一下等于0就行了），即对于**任意**单位向量 $y \in E$，如果 $(x_0 \mid y) = 0$，那么有 $(u(x_0) \mid y) = 0$.

取 $y \in S$，满足 $(x_0 \mid y) = 0$. 我们可以定义一个通过 x_0 和 y 的“大圆”：
$$x_t = (\cos t)x_0 + (\sin t)y.$$

考虑函数
$$\varphi_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto q(x_t).$$
展开得：
$$\varphi_y(t) = (\cos t)^2 q(x_0) + (\sin 2t)(u(x_0) \mid y) + (\sin t)^2 q(y).$$

由于 x_0 的定义，φ_y 在 $t = 0$ 处取得极小值，因此
$$0 = \varphi_y'(0) = 2(u(x_0) \mid y).$$
于是 $(u(x_0) \mid y) = 0$，证毕. □

这个证明的思路是怎么来的？为什么要定义一个通过 x_0 和 y 的“大圆”？

思考这样一个问题：线性算子u是自伴的，它把一个向量在各个相互垂直的子空间上分别拉伸或压缩. 那么一个球在这个线性算子作用下的像应该长什么样？

降维思考，如果一个线性算子，就像上文中的u，在二维空间把一个向量沿一个轴的分量乘上一个数，沿垂直于这个轴的轴的分量也乘上另一个数，那它会把一个圆变成什么样子？

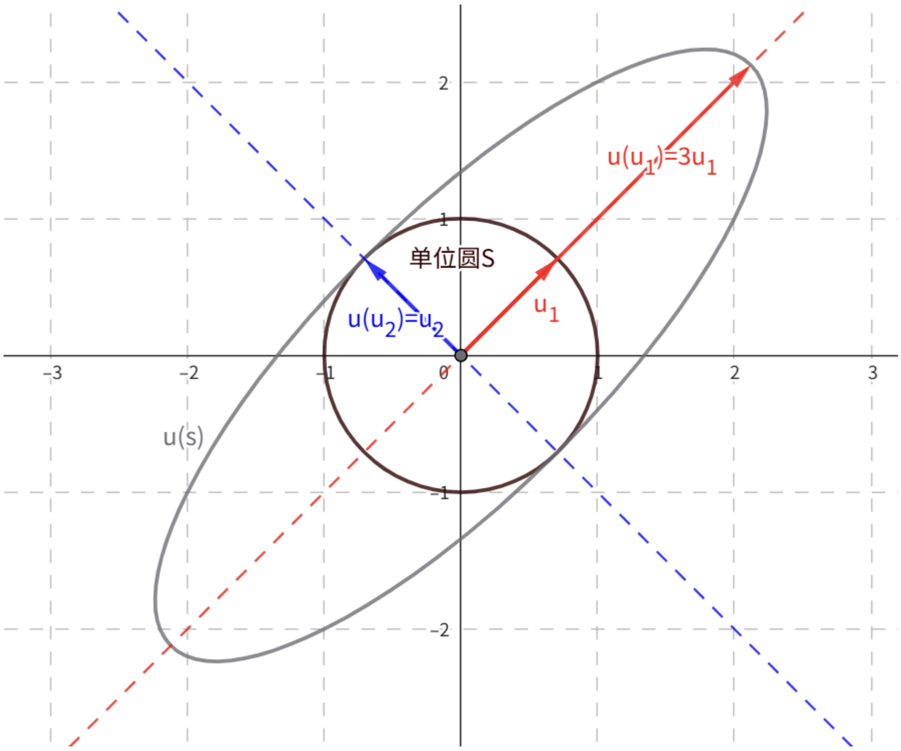

图 5: 猜对了，就是椭圆!

既然如此，如图5，文中的x_0表示S上一个点，使得$(x_0 \mid u(x_0))$取最小值. 这个点很显然就等于短轴的顶点，也就是u_2或$-u_2$的点. u_2就是特征向量. 上课的时候，祂的现场发挥和书上相反，把x_0取成使得$(x_0 \mid u(x_0))$取最大值. 对应的就是长轴的顶点，也就是u_1或$-u_1$.

注. *“这个点很显然就等于短轴的顶点”其实不太显然. 大概原理是定义的函数$q : x \mapsto (x \mid u(x))$描述了模长为1的向量$x$在$u$的作用下，在它自己的方向上被压缩或拉伸的程度. 因此特征向量会取到极值.*

至于为什么要构造通过 x_0 和 y 的“大圆”，就不能拘泥于二次元了（见图6）. 我们已经知道了x_0使得q在单位球S上取极值. 在此基础上，x_0任何沿着球面上的小变动方向的导数都应为0. 我们需要描述“沿球面微小变动”的方向，也就是切向.

任取一个单位向量y满足$(x \mid y) = 0$，这个y就表示从x_0出发的切向方向.

沿着y的切向构造一个大圆. 这样能够给$x0$一个微小扰动，且不改变$\|x_0\|$. 因为 x_0 是极值点，沿任意切向的方向导数应为 0，如果南极点是全世界最冷的点，那么不论考虑哪个经线圈，它都应该是这个圈上温度最低的. 所以对于任意与 x_0 垂直的单位向量 y，有

$$\varphi_y'(0) = 0.$$

求导并代入 $t = 0$，由于 $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$，得到

$$\varphi_y'(0) = 2\,(u(x_0) \mid y).$$

由极值条件 $\varphi_y'(0)=0$，于是

$$(u(x_0)\mid y)=0.$$

因为上述等式对任意与 x_0 垂直的 y 都成立，说明 $u(x_0)$ 与切空间 $T_{x_0}S=\{v\in E:(x_0\mid v)=0\}$ 的所有向量都正交. 换言之，$u(x_0)$ 只能和 x_0 平行，即存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使

$$u(x_0)=\lambda x_0,$$

这就是证明 x_0 为 u 的特征向量的核心结论.

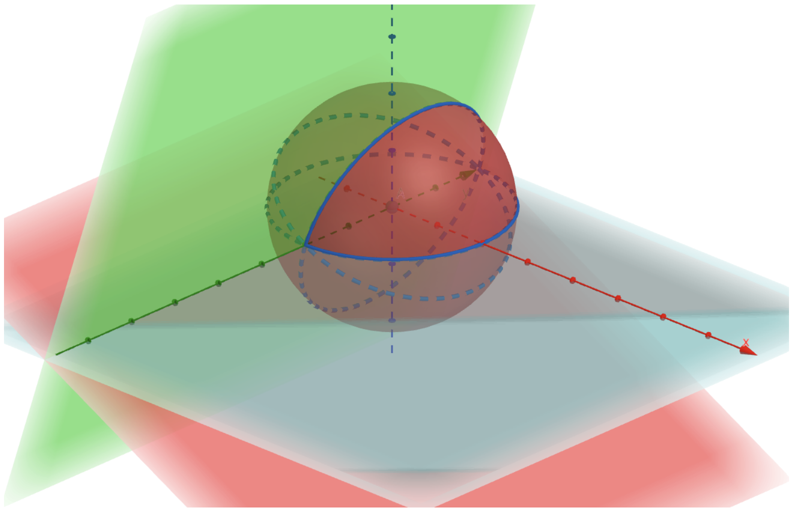

图 6: 二次元的圆只有一个切向，而我们三次元要考虑的切向就很多了.

再来看这个命题：

命题. 向量空间 E 上的自伴的投影算子就是正交投影算子.

想像这样一个场景：晴朗的6月10日（或者7月4日）左右，小王在深圳平坦的大街上散步. 早晨，小王能够在地面上看到自己的影子. 这时，太阳就是一个投影算子，但显然正交投影算子，因为阳光是斜着照的. 太阳也不是一个自伴算子. 因为小王站立时在地面上的（正交）投影为0，影子长度却不为0，拉伸了无穷倍；趴下后，在地面上的投影为身高，影子长度也是身高，拉伸了1倍. 拉伸的倍数不是恒定的.

到了正午，太阳直射深圳市的时候，就是一个正交投影算子. 此时它也是个自伴算子，因为小王发现，当他摔倒在地的过程中，它的影长和自己在地面上的投影是成正比的，比值为1.

回到梦开始的地方：

定义. 我们称向量空间 E 上的线性算子 u 是**自伴算子**或**对称算子**，如果 $u^*=u$，也就是说

$$\forall x,y\in E\quad (u(x)\mid y)=(x\mid u(y)).$$

还是考虑用了不知道多少次的老二次元线性自伴算子：$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 如图，

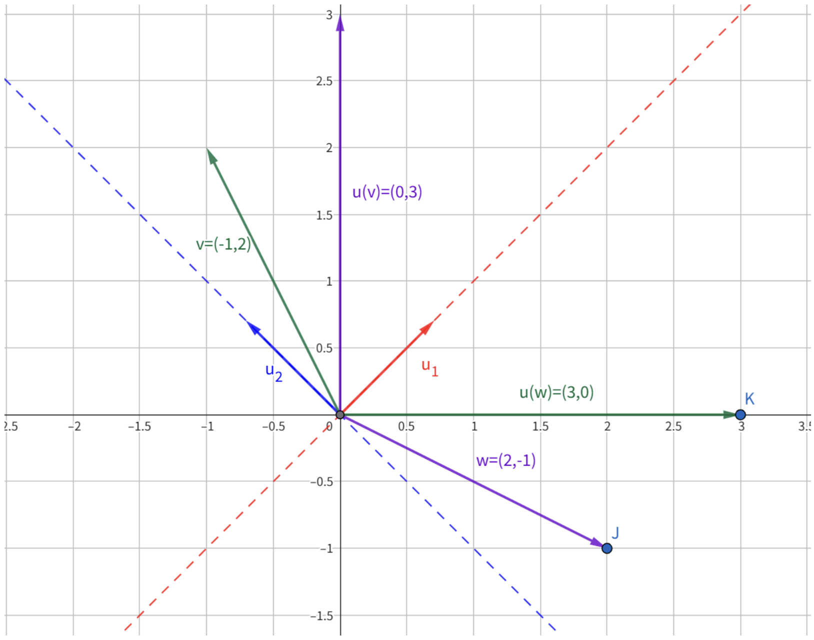

图 7: $(u(v) \mid w) = (v \mid u(w))$

啥，您说没看懂？那我们换个角度再看一下. 众所周知，在不同的正交标准基下，内积是不变的（还记得正交自同态吗？）. 我们换u_1和u_2的正交标准基，也就是把这张图顺时针转45.

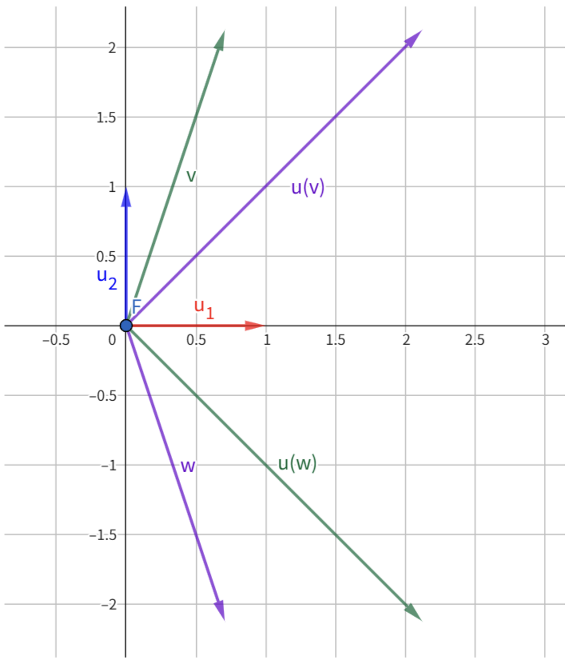

图 8: 孩子们我失算了，选的矢量过于对称以至于失去了一般性

我想这张图几乎不用解释$(u(v) \mid w) = (v \mid u(w))$是怎么看出来的了. 总而言之，正交

标准基下，内积只取决于两个向量的坐标. 图8中两组叉乘的纵坐标对应是一致的，横坐标一个变为3倍，一个缩小为1/3，所以内积是一样的. 换句话说，自伴算子的性质使得在正交标准基下它以固定倍数放缩向量的坐标，从而它作用到内积的任一项结果是一样的.

至此，您应该对自伴算子有了一些直观形象的理解. **但注意，人的直觉并不是什么时候都靠谱. 因此在考场上还是要从基本的概念、定义和计算出发.**

1.4 极分解

在代数（还记得$\mathbb{K}$–代数的定义吗？）$\mathcal{L}(E)$ 中，向量子空间 $\mathcal{S}(E)$（自伴算子集合）和正交群 $\mathrm{O}(E)$ 扮演与实数轴 $\mathbb{R}$ 和乘法群 $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 中相似的角色.

确切地说：对于任意非零复数 $z \in \mathbb{C}$，存在且唯一存在一个正的非零实数 r 使得 $z/r \in U$. 我们习惯把r称为（非零）复数的模长，它是一个正数. 同样地，对于任意可逆变换 $f \in \mathrm{GL}(E)$，存在且唯一存在一个对称的、"正定（如何定义自同态的正负？）"的自同态 s 使得 $fs^{-1} \in \mathrm{O}(E)$.

在这种类比中，复共轭映射 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ 对应于算子伴随作用 $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $u \mapsto u^*$.

定义. 一个自伴算子u 在 E 上是**正的（*resp.* 正定的）**，如果映射

$$q_u : E \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (x \mid u(x))$$

在 $E \setminus \{0\}$ 上是非负的（*resp.* 正的）.

上述定义可推广到对称矩阵：一个矩阵 $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ 是正的（resp. 正定的）当且仅当

$$X^\mathsf{T} AX \geq 0 \quad (\text{resp.} \ > 0)$$

对任意列向量 $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ 成立.

若 b 是 E 的某一正交标准基，则 u 为正（resp. 正定）自伴算子当且仅当 u 在基 b 下的矩阵是对称且正（resp. 正定）的.

命题. 设 u 是 E 上的自伴算子. u 为正的（*resp.* 正定的）当且仅当：u 的特征值全都非负（*resp.* 全都严格正）.

证明. 设 $u = \sum_{i=1}^s \lambda_i p_i$ 为 u 的谱分解（p_i 为相应的谱投影，λ_i 为特征值）. 对任意 $x \in E$，有

$$(x \mid u(x)) = \sum_{i=1}^s \lambda_i (x \mid p_i(x)) = \sum_{i=1}^s \lambda_i \|p_i(x)\|^2,$$

因为谱投影 p_i 是自伴的，所以 $(x \mid p_i(x)) = (x - p_i(x) \mid p_i(x)) + (p_i(x) \mid p_i(x)) = 0 + \|p_i(x)\|^2$. 由上式可见：若所有 $\lambda_i \geq 0$（resp. $\lambda_i > 0$），则对所有 $x \neq 0$，$(x \mid u(x)) \geq 0$（resp. > 0 对所有 $x \neq 0$），反之亦然. 由此命题显然成立. □

注. 记 $S^+(E)$ 为 E 上所有正的自伴算子的集合. E 上严格正（即正定）的自伴算子的集合为 $S^+(E) \cap \mathrm{GL}(E)$.

类似地，$S_n(\mathbb{R})$ 中由正矩阵组成的子集记为 $S_n^+(\mathbb{R})$.

命题. 设 $v \in \mathcal{L}(E)$，并令 $u = v^*v$，则 $u \in S^+(E)$，且 $\mathrm{rank}(u) = \mathrm{rank}(v)$.

证明. 首先不难看出$(v^*v)^* = v^*(v^*)^* = v^*v$，所以$v^*v \in S(E)$.

此外，对任意$x \in E$，

$$(x \mid u(x)) = (x \mid v^*v(x)) = (v(x) \mid v(x)) = \|v(x)\|^2 > 0$$

所以v^*v为正. 并且注意到，若$u(x) = 0$则由上式$v(x) = 0$. 若$v(x) = 0$则由u的定义，$u(x) = 0$，说明u和v的核是相同的. 根据秩定理，两者的秩相等. □

反过来，对于任意的u，我们也可以找到它的的v.

命题. 设 $u \in S^+(E)$. 存在唯一的自伴正定算子 $v \in S^+(E)$ 满足 $v^2 = u$.

证明. 我们知道自伴算子是可以进行谱分解的. 设 $u = \sum_{i=1}^s \lambda_i p_i$ 为 u 的谱分解，且假设

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_s.$$

设 v 为自伴正定算子，其谱分解写为

$$v = \sum_{i=1}^s \mu_i q_i,$$

其中

$$0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_s.$$

于是

$$v^2 = \sum_{i=1}^s \mu_i^2 q_i.$$

这是因为，对任意$i \neq j$，p_i和p_j的特征子空间相互正交（别忘了自伴算子的性质!），所以$p_ip_j = 0$，所以不必考虑耦合项. 由于实数 $\mu_1^2, \ldots, \mu_s^2$ 两两互异，$\sum_{i=1}^s \mu_i^2 q_i$ 就是 v^2 的谱分解. 由谱分解的唯一性（参见相应结果），有 $v^2 = u$ 当且仅当对每个 i 都有 $q_i = p_i$ 且 $\mu_i^2 = \lambda_i$. 因此

$$v = \sum_{i=1}^s \sqrt{\lambda_i}\, p_i,$$

从而 v 的存在性与唯一性得证. 通常将这个 v 记作 $\sqrt{u}$. □

事实上，这个证明是上一届的课本原文，类似的结论也出现在他们的期末考试中，还出现在了我们年级的TD中.

~~所以我也不清楚上一届为什么挂了那么多人.~~

命题. 设 $f \in \mathrm{GL}(E)$. 存在唯一的一对算子 $(s,u) \in S^+(E) \times O(E)$ 使得 $f = us$.

证明. 若存在这样的 (s,u)，则

$$f^*f = (us)^*(us) = s^*u^*us = s^*s = s^2,$$

因为 s 为自伴算子且 u 为正交算子（从而 $u^*u = \mathrm{Id}$）可得

$$s = \sqrt{f^*f}.$$

又因 $f \in \mathrm{GL}(E)$，所以 s 可逆（因为我们甚至可以把s^{-1}写出来），从而

$$u = fs^{-1}. \tag{1}$$

由此可见若u存在则分解是唯一的.

反过来，按照上式定义 s 与 u，则显然 $f = us$ 且 $s \in S^+(E)$. 只需验证 $u \in O(E)$：

$$u^* = (fs^{-1})^* = (s^{-1})^*f^* = s^{-1}f^* = s^{-1}s^2f^{-1} = sf^{-1} = (fs^{-1})^{-1} = u^{-1},$$

因此 $u^* = u^{-1}$，即 u 是正交算子, $u \in O(E)$. □

注. 要想证明唯一性主要有两种方法：一是反证，假设存在两个满足要求，最后证明它们其实相等；另一种是像上面两个证明一样，用已知的条件唯一确定想要的这个东西. 后一种方法同时也证明了存在性.

回到本节引言中作为类比给出的例子. 设 E 为维数为 2 的欧氏空间，设 ρ 为 E 上的一个旋转，非有向角为 $\pi/2$. 则

$$\rho^2 + \mathrm{id}_E = 0,$$

因此 $\rho + \rho^{-1} = 0$（两边乘以ρ^{-1}），进而

$$\rho^* = \rho^{-1} = -\rho.$$

集合

$$\mathbb{R}[\rho] := \{\, x\ \mathrm{id}_E + y\,\rho \ :\ x, y \in \mathbb{R} \,\}$$

是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个交换子环，也是一个与复数域 $\mathbb{C}$ 同构的域；映射

$$\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{L}(E), \qquad z \mapsto (\mathrm{Re}\, z)\ \mathrm{id}_E + (\mathrm{Im}\, z)\,\rho$$

是一个环同态：

$$\Phi(z) + \Phi(z') = x\ \mathrm{id}_E + y\,\rho + x'\ \mathrm{id}_E + y'\,\rho = (x + x')\ \mathrm{id}_E + (y + y')\,\rho = \Phi(z + z'),$$

$$\Phi(z)\Phi(z') = (x\ \mathrm{id}_E + y\,\rho)(x'\ \mathrm{id}_E + y'\,\rho) = (xx' - yy')\ \mathrm{id}_E + (xy' + yx')\,\rho = \Phi(zz'),$$

$$\Phi(1) = 1 \cdot \mathrm{id}_E + 0 \cdot \rho = \mathrm{id}_E,$$

其中记 $x = \mathrm{Re}\, z,\ y = \mathrm{Im}\, z,\ x' = \mathrm{Re}\, z',\ y' = \mathrm{Im}\, z'$，并且 $\mathrm{Im}\,\Phi = \mathbb{R}[\rho]$. 此外，

$$\Phi(\overline{z}) = x\ \mathrm{id}_E - y\,\rho = x(\mathrm{id}_E)^* + y\,\rho^* = \Phi(z)^*. \tag{8.4.5}$$

因此，当通过映射 Φ 构造复数域$\mathbb{C}$与子环 $\mathbb{R}[\rho]$ 的同构时，复数的共轭正好等于对应算子的伴随算子. 这里ρ扮演了i的作用.

极分解的意义，就是将任意一个可逆算子分解两部分：一是沿某一方向的拉伸，二是旋转或反射. 这和复数是一样的：对任意$z \in \mathbb{C}$，可以将其写成极坐标的形式：$z = re^{i\theta}$，其中r象征的是拉伸，而θ 象征旋转或反射. 将z乘以一个复数，z就将其拉伸了r倍并旋转了θ.

注意到在极分解中，$s = \sqrt{f^*f}$，事实上不难发现负数的模长也是这么求的.

要想深入研究极分解和复数的关系，请恭候厄米算子这一章的内容. 现在是10月4号晚，我要去摆烂了.

1.5 例题

例题. 考虑实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. 观察到 A 存在一个明显的特征值. 确定 A 的特征子空间;
2. 计算 A 的谱分解(特征值分解).

解. 注意到$A-I=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. 观察这个矩阵,好像挺好看的. 把第一列(也是第一行)拿出来:令 $u=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. 直接计算得

$$uu^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix},$$

对于向量 u 本身:

$$Au = (I+uu^T)u = u + u(u^Tu) = \big(1+\|u\|^2\big)u.$$

计算 $\|u\|^2 = 1^2+2^2+(-2)^2 = 1+4+4 = 9$,因此

$$Au = 10\,u.$$

所以 u(或任何与之成比例的向量)是特征向量,对应特征值 $\lambda_1 = 10$.

对于任意 $v \in \mathbb{R}^3$ 且 $v \perp u$(即 $u^Tv = 0$),有

$$Av = (I+uu^T)v = v + u(u^Tv) = v.$$

因此所有与 u 正交的向量都是特征向量,对应特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$(这里有两个1,可通过以下两条得出:与 u 正交的向量构成二维平面;矩阵A的迹是12=10+1+1).

至于谱分解,参见"有用的东西"命题.

例题. （$TD1.2$，注意做这题之前要先搞明白$TD1.1$）设 E 与 F 分别是维数为 n 与 p 的欧几里得空间，且 $f : F \to E$ 为一线性映射（实内积空间上的线性算子）.记 f^* 为 f 的伴随算子.

1. 证明下列等式：

$$\operatorname{Ker}(f^*f) = \operatorname{Ker} f, \qquad \operatorname{Im}(f^*f) = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}, \qquad \operatorname{rg}(f^*f) = \operatorname{rg} f.$$

2. 现在假设 $\operatorname{rg} f = p$.

   (a) 证明 $n \geq p$ 且 $f^*f \in GL(F)$（即 f^*f 可逆）.

   (b) 设 $v \in E$ 且 $x \in F$.证明：在 F 中，方程

$$(f^*f)(x) = f^*(v)$$

   的解 x 唯一，当且仅当 $f(x)$ 是 v 在 $\operatorname{Im} f$ 上的正交投影.

3. 考虑 n 个线性方程、p 个未知数的实系数线性方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n, \end{cases}$$

   将其写成矩阵形式 $AX = B$.假设 n 严格大于 p（方程数多于未知数），且该线性系统的秩达到可能的最大值，即等于 p.这样的系统（称为“超定”）（机翻的错了别找我）一般并不一定有解.证明：该系统存在唯一的二次意义下的最佳近似解（即使残差平方和最小的唯一解），也就是说存在唯一的 X 使得

$$\sum_{k=1}^{n} \left| a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,p}x_p - b_k \right|^2$$

   最小；并且该唯一最优解等于 $p \times p$ 的正规方程

$$(A^T A)X = A^T B$$

   的唯一精确解.

4. 在 $\mathbb{R}^2$ 上赋予通常的欧几里得结构；在标准（基）坐标下把点的坐标记为 (x, y).考虑三条仿射直线

$$y - x = 0, \qquad 2y - x - 1 = 0, \qquad y + 4x - 6 = 0.$$

   (a) 它们是否共点（是否有公共交点）？

   (b) 证明存在唯一一点使得该点到三条直线的距离平方和达到最小，并求出该点.

解. 第一问略.

2.1 一方面，$E \supset \operatorname{Im} f$，因此

$$n = \dim E \geq \dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg} f = p;$$

另一方面，$f^* f$ 是 F 上的一个自同态，且其像空间的维数为 $p = \dim F$，因此 $f^* f$ 是双射.

2.2 既然$f^* f$ 是双射，对于任意给定的 $v \in E$，方程 $(f^* f)(x) = f^*(v)$ 在 F 中都有唯一解 x. 在此基础上，对于 $v \in E$ 与任意 $x \in F$，有下列等价关系：

$$\begin{aligned} (f^* f)(x) = f^*(v) &\iff \forall y \in F\ ,\ \big(f^*(v) - (f^* f)(x) \mid y\big)_F = 0 \\ &\iff \forall y \in F\ ,\ \big(v - f(x) \mid f(y)\big)_E = 0 \\ &\iff v - f(x) \in (\operatorname{Im} f)^{\perp}. \end{aligned}$$

也就是说，点 $f(x) \in \operatorname{Im} f$ 是v在子空间 $\operatorname{Im} f$ 上的正交投影；换句话说，$f(x)$ 是 v 在 $\operatorname{Im} f$ 中的唯一的“最佳近似”.

3 将上述讨论应用到到欧几里得空间：设 $E = \mathbb{R}^n$ 且 $F = \mathbb{R}^p$，两者都带有标准内积；f 表示在标准基下矩阵为 A 的线性映射，向量 v 的坐标列记为 B. 我们假设线性系统的秩等于 p（换言之，矩阵 A 的行向量线性无关），并且方程的个数多于未知数：$n > p$. 一般情形下方程组没有精确解.

我们打算寻找一个“按二次意义的最佳近似解”，即确定 x 使得下列量最小：

$$\sum_{k=1}^{n} \big|a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,p}x_p - b_k\big|^2 \ =\ \|f(x) - v\|_E^2.$$

这等价于 $f(x)$ 是 v 在 $\operatorname{Im} f$ 上的正交投影. 根据 *2.2*，这样的“解”存在并且唯一：

$$x = (f^* f)^{-1}\big(f^*(v)\big).$$

换句话说，若 $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ 是表示向量 x 的列向量（标准基下），则

$$X = (A^{\mathsf{T}} A)^{-1} A^{\mathsf{T}} B.$$

4 直线

$$x - y = 0, \qquad x - 2y + 1 = 0, \qquad 4x + y - 6 = 0$$

并不共点.

我们考虑平面上三条仿射直线，其一般形式为

$$\ell_k :\ a_k x + b_k y + c_k = 0, \qquad k = 1, 2, 3,$$

其中 $(a_k, b_k) \neq (0, 0)$. 给定点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$，该点到直线的欧几里得距离为

$$d_k(x, y) = \frac{|r_k(x, y)|}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}.$$

因此若我们想要以“点到每条直线的距离的平方和”作为评价函数（即在几何意义上寻找一个对三条直线的“最佳拟合点”），应当最小化的是

$$\sum_{k=1}^{3} d_k(x,y)^2 = \sum_{k=1}^{3} \frac{r_k(x,y)^2}{a_k^2+b_k^2}.$$

将每一项除以 $\sqrt{a_k^2+b_k^2}$，定义归一化系数

$$\alpha_k := \frac{1}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}.$$

则目标函数变为

$$\sum_{k=1}^{3} \big(\alpha_k r_k(x,y)\big)^2 = \sum_{k=1}^{3} \big(\alpha_k a_k x + \alpha_k b_k y + \alpha_k c_k\big)^2.$$

中间忘了，反正结果是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.20 \\ 1.14 \end{pmatrix}.$$