

Lineare Dipol Panelmethode

Lorenz Lechner

14.03.2014

1 Differentialgleichung

Das reibungslose drehungsfreie Strömungsfeld kann durch die Laplace-Gleichung beschrieben werden.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

Für ein Profil das sich in einem solchen Strömungsfeld befindet gelten folgende Randbedingungen:

$$\nabla \phi_{surf} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \phi_{\infty} = v_{\infty} \quad (3)$$

2 Greentheorem

Differentialgleichung mit Testfunktion multiplizieren und integrieren.

$$\int_V \nabla^2 \phi_0 dv = 0 \quad (4)$$

$$\int_V \phi_1 \nabla^2 \phi_0 dv = 0 \quad (5)$$

$$\int_V \phi_1 \nabla^2 \phi_0 dv = \int_S \phi_1 (\nabla \phi_0 \cdot \vec{n}) ds - \int_V \nabla \phi_1 \nabla \phi_0 dv \quad (6)$$

Das selbe macht man mit ϕ_1 und ϕ_2 vertauscht.

$$\int_V \nabla^2 \phi_1 dv = 0 \quad (7)$$

$$\int_V \phi_0 \nabla^2 \phi_1 dv = 0 \quad (8)$$

$$\int_V \phi_0 \nabla^2 \phi_1 dv = \int_S \phi_0 (\nabla \phi_1 \cdot \vec{n}) ds - \int_V \nabla \phi_0 \nabla \phi_1 dv \quad (9)$$

$$(4) - (7)$$

$$\int_S \phi_1 (\nabla \phi_0 \cdot \vec{n}) ds - \int_S \phi_0 (\nabla \phi_1 \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (10)$$

Fundamentallösung für ϕ_1 im 2D:

$$\phi_1 = \ln(r) \quad (11)$$

$$\int_S \ln(r) \cdot (\nabla \phi_0 \cdot \vec{n}) ds - \int_S \phi_0 (\nabla \ln(r) \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (12)$$

$$\int_S (\ln(r) \cdot (\frac{\partial \phi_0}{\partial n}) - \phi_0 (\frac{\partial}{\partial n} \ln(r))) ds = 0 \quad (13)$$

3 Aufteilen des Integrals auf die Ränder:

$$\begin{aligned} & \int_S (\ln(r) \cdot (\frac{\partial \phi_0}{\partial n}) - \phi_0 (\frac{\partial}{\partial n} \ln(r))) ds = \\ & \int_{S_A} (\ln(r) \cdot (\frac{\partial \phi_0}{\partial n}) - \phi_0 (\frac{\partial}{\partial n} \ln(r))) ds + \end{aligned} \quad (14)$$

$$+ \int_W (\ln(r) \cdot (\frac{\partial \phi_0}{\partial n}) - \phi_0 (\frac{\partial}{\partial n} \ln(r))) ds + \quad (15)$$

$$+ \int_{S_\infty} (\ln(r) \cdot (\frac{\partial \phi_0}{\partial n}) - \phi_0 (\frac{\partial}{\partial n} \ln(r))) ds \quad (16)$$

- Einfluss des Potentials im Unendlichen:

$$\phi_\infty = \int_{S_\infty} (\ln(r) \cdot (\frac{\partial \phi_0}{\partial n}) - \phi_0 (\frac{\partial}{\partial n} \ln(r))) ds = \vec{v}_\infty \cdot \vec{x} + C_\infty \quad (17)$$

Das entspricht genau dem Potential das durch die Anströmung erzeugt wird. Dieses ist bis auf einen über das Gebiet konstanten Anteil bekannt. Da jedoch nur die Geschwindigkeiten von Interesse sind kann $C_\infty = 0$ gewählt werden.

- Einfluss des Potentials auf dem Profil mit der Randbedingung: $v_n = \frac{\partial \phi_A}{\partial n} = 0$

$$\int_{S_A} (\ln(r) \cdot (\frac{\partial \phi_0}{\partial n}) - \phi_0 (\frac{\partial}{\partial n} \ln(r))) ds = \int_{S_A} -\phi_0 (\frac{\partial}{\partial n} \ln(r)) ds \quad (18)$$

Liegt der betrachtete Punkt auf dem Profil so wird aus dem Integral:

$$\int_{S_A} -\phi_A \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) ds = \int_{S_A - P_A} -\phi_A \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) ds - \phi_P \int_{P_A} \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) ds \quad (19)$$

Nun wird ein Kreisbogen mit $r = \epsilon$ und mit dem Winkel γ um den Punkt gelegt:

$$\phi_P \int_{P_A} \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) ds = \phi_P \int_0^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial r} \ln(\epsilon) \right) \cdot \epsilon \cdot d\psi = \phi_P \int_0^\gamma \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \cdot \epsilon \cdot d\psi = \phi_P \cdot \gamma \quad (20)$$

In (16) eingesetzt:

$$\int_{S_A} -\phi_A \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) ds = \int_{S_A - P_A} -\phi_0 \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) ds - \phi_P \cdot \gamma \quad (21)$$

- Einfluss des Potentials auf dem Wake:
Die Strömung muss dem Wake folgen. $\frac{\partial \phi_A}{\partial n} = 0$
Das Wake kann die Strömung nicht beschleunigen. $\phi_0 = \phi_w = \text{const}$

$$\int_W \left(\ln(r) \cdot \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right) - \phi_0 \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) \right) ds = \int_W -\phi_0 \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) ds = \quad (22)$$

$$\phi_w \int_W - \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) ds \quad (23)$$

Hieraus wird ersichtlich, dass eine Vorgabe des Wakes nicht das Folgen der Strömung auf diesem bewirkt. Um eine bessere Aussage über die Stärke des Auftriebs zu erhalten, muss das Wake nach dem Berechnen des Potentials auf dem Profil neu erstellt werden.

Gleichung für die Panelmethode:

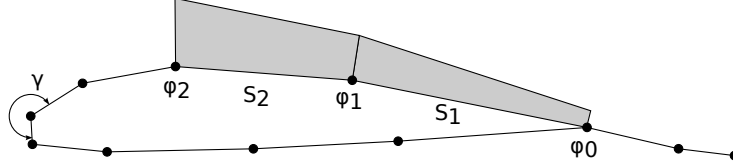
Das Ersatzproblem für (1,2,3) kann als Randintegralgleichung formuliert werden. (Es sind noch andere Formulierungen möglich die sich aus einer anderen Implementierung der Randbedingung ergeben. Dies wird möglich durch addieren des Potentials ϕ_{innen} im inneren des Profils. Bei der verwendeten Methode wurde $\phi_{innen} = 0$ gewählt und es ergibt sich folgende Randintegralgleichung)

$$\int_{S_A - P_A} -\phi_A \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) ds - \phi_P \cdot \gamma + \phi_w \int_W - \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) ds + \phi_\infty = 0 \quad (24)$$

4 Diskretisierung

Das Profil wird in $I + 1$ Stützstellen unterteilt und ein Wake mit J Stützstellen wird gebildet. Die Stützstellen werden durch einen Polygonzug verbunden und approximieren so das Profil. Es besitzt somit $I - 1$ Panels. Jede Stützstelle wird ein Potential ϕ_i zugeteilt. Das Potential am Panel wird dann durch eine lineare Variation der Werte der angrenzenden Stützstellen beschrieben:

$$\phi(s_i) = \phi_{i-1} + (\phi_i - \phi_{i-1}) \cdot \frac{s_i}{l_i}$$



aus (22) mit $A = S_A - P_A$, $W = S_w$:

$$\begin{aligned} & -\phi_P \cdot \gamma_P - \int_A \left(\phi \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) \right) ds - \int_W \left(\phi \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) \right) ds + \phi_\infty = \\ & = \sum_{i=1}^I \left(\phi_{i-1} \int_{A_i} -\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) ds + (\phi_i - \phi_{i-1}) \int_{A_i} -\left(\frac{s_i}{l_i} \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) \right) ds + \\ & \quad + \phi_w \cdot \sum_{j=1}^J \int_{W_j} -\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) ds - \gamma_P \cdot \phi_A(P) + \phi_\infty = \\ & = \sum_{i=1}^I (\phi_{i-1} C_{k,A}^i + (\phi_i - \phi_{i-1}) C_{l,A}^i + \phi_w \cdot \sum_{j=1}^J C_{k,W}^j - \gamma_P \cdot \phi_A(P) + \phi_\infty = \\ & = \sum_{i=1}^I (\phi_{i-1} (C_{k,A}^i - C_{l,A}^i) + \phi_i C_{l,A}^i + \phi_w \cdot \sum_{j=1}^J C_{k,W}^j - \gamma_P \cdot \phi_A(P) + \phi_\infty \end{aligned}$$

5 Lineares Gleichungssystem

Die Gleichung (22) wird auf jedem Stützpunkt gefordert. Dadurch ergeben sich I Gleichungen mit I Unbekannten. Der erste Index steht für den Punkt auf dem die Gleichung gefordert wird (Zeilenindex), der zweite für den Einfluss eines Stützpunktes auf den vorher genannten (Spaltenindex)

$$A = \begin{pmatrix} (-\gamma_P^0) & (C_{k,A}^{0,2} - C_{l,A}^{0,2} + C_{l,A}^{0,1}) & \cdots & (C_{k,A}^{0,N-1} - C_{l,A}^{0,N-1} + C_{l,A}^{0,N-2}) & (C_{k,A}^{0,N} - C_{l,A}^{0,N} + C_{l,A}^{0,N-1}) \\ (C_{k,A}^{1,2} - C_{l,A}^{1,2} + C_{l,A}^{1,1} - C_{k,W}^1) & (-\gamma_P^1) & \cdots & (C_{k,A}^{1,N-1} - C_{l,A}^{1,N-1} + C_{l,A}^{1,N-2}) & (C_{k,A}^{1,N} - C_{l,A}^{1,N} + C_{l,A}^{1,N-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (C_{k,A}^{N-1,2} - C_{l,A}^{N-1,2} + C_{l,A}^{N-1,1} - C_{k,W}^{N-1}) & (C_{k,A}^{N-1,2} - C_{l,A}^{N-1,2} + C_{l,A}^{N-1,1}) & \cdots & -\gamma_P^{N-1} & (C_{k,A}^{N-1,N} - C_{l,A}^{N-1,N} + C_{l,A}^{N-1,N-1}) \\ (C_{k,A}^{N,2} - C_{l,A}^{N,2} + C_{l,A}^{N,1} - C_{k,W}^N) & (C_{k,A}^{N,2} - C_{l,A}^{N,2} + C_{l,A}^{N,1}) & \cdots & (C_{k,A}^{N,N-1} - C_{l,A}^{N,N-1} + C_{l,A}^{N,N-2}) & (-\gamma_P^N) \end{pmatrix} \quad (25)$$

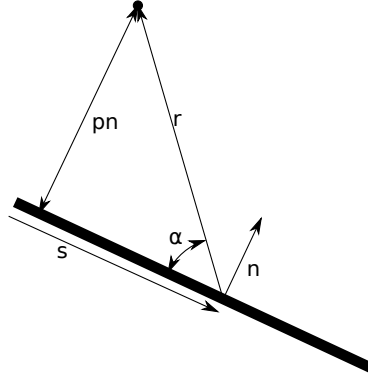
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{v}_\infty \cdot \vec{x}^0 \\ \vec{v}_\infty \cdot \vec{x}^1 \\ \vdots \\ \vec{v}_\infty \cdot \vec{x}^{N-1} \\ \vec{v}_\infty \cdot \vec{x}^N \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \vdots \\ \phi^{N-1} \\ \phi^{N-1} \end{pmatrix} \quad (27)$$

Das lineare Gleichungssystem lautet somit:

$$A \cdot \vec{\phi} = \vec{b} \quad (28)$$

6 Integrale



$$\begin{aligned}
 r_s(n) &= \sqrt{(r_0^2 \cdot \cos(\alpha)^2 + (pn - n)^2)} \\
 \frac{\partial}{\partial n} \ln(r) &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{pn - n}{r_s(n) \sqrt{(r_0^2 \cdot \cos(\alpha)^2 + (pn - n)^2)}} \\
 \lim(n \rightarrow 0) \frac{\partial}{\partial n} \ln(r) &= -\frac{pn}{r_s \sqrt{(r_s^2 \cdot \cos(\alpha)^2 + r_s^2 \cdot \sin(\alpha)^2)}} = -\frac{pn}{r_s^2} \\
 \frac{\partial}{\partial n} \ln(r) &= -\frac{pn}{r_s^2}
 \end{aligned} \tag{29}$$

- konstantes ϕ über Panel:

$$\begin{aligned}
 C_{k,i} &= \int_{S_i} -s_i \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) ds = \int_{S_i} \frac{pn}{r_s^2} ds = \int_{S_i} \left(\frac{pn}{r_s^2} \right) ds = \\
 &= \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{pn}{pn^2 + (s_0 - s)^2} \right) ds = \operatorname{atan}\left(\frac{pn}{s_0 - s_2} \right) - \operatorname{atan}\left(\frac{pn}{s_0 - s_1} \right)
 \end{aligned} \tag{30}$$

- lineare Verteilung von ϕ über Panel:

$$\begin{aligned}
 C_{l,i} &= -\frac{1}{l_i} \int_{S_i} \left(s_i \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln(r) \right) \right) ds = \frac{1}{l_i} \int_{S_i} \left(s_i \frac{pn}{r_s^2} \right) ds = \frac{1}{l_i} pn \int_{S_i} \left(\frac{s_i}{r_s^2} \right) ds = \\
 &= \frac{1}{l_i} \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{s_i \cdot pn}{pn^2 + (s_0 - s)^2} \right) ds = \\
 &= \frac{1}{l_i} \left(s_0 \left(\operatorname{atan}\left(\frac{pn}{s_0 - s_2} \right) + \operatorname{atan}\left(\frac{pn}{s_0 - s_1} \right) \right) - \frac{pn}{2} \frac{(s_0 - s_1)^2 + pn^2}{(s_0 - s_1)^2 + pn^2} \right) = \\
 &= \frac{s_0}{l_i} C_{k,i} - \frac{pn}{2 \cdot l_i} \cdot \frac{(s_0 - s_1)^2 + pn^2}{(s_0 - s_1)^2 + pn^2}
 \end{aligned} \tag{31}$$