Universidade Federal do Ceará
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada
Programação Inteira (CC0399), período 2023.1
Professor: Tibérius O. Bonates (`tb@ufc.br`).

Atividade 4 – Relaxação Lagrangiana – Exemplo numérico.

1 Descrição

Este é um exemplo numérico para a Atividade 4. É o mesmo exemplo que iniciamos em sala de aula no dia 29 de junho de 2023, e que não concluímos. Nosso cálculo manual em sala de aula teve dois problemas.

O primeiro problema foi que permitimos que o vetor u tivesse componentes negativas, o que viola nossa hipótese de que $u \geq \underline{0}$, que é importante para o funcionamento do algoritmo. A fórmula de cálculo do vetor u^{k+1} deve ser $u_j^{k+1} = \max\{0, u_j^k + t^k s_j^k\}$, onde s^k é o subgradiente na iteração k. A fórmula acima evita que algum componente de u^{k+1} se torne negativo.

O segundo problema é que estávamos utilizando o gradiente multiplicado por -1 ao fazermos a atualização do vetor u. Isso deve ser feito quando nosso problema original é de **maximização**, pois o **dual lagrangiano** é de **minimização** (ou seja, desejaríamos nos mover na direção oposta à do gradiente). Lembre-se: o algoritmo de subgradientes é uma tentativa de resolver o problema dual lagrangiano. Diferentemente das notas de aula, nosso problema nesta atividade é de **minimização**. Consequentemente, o dual lagrangiano é de **maximização** e, dessa forma, desejamos seguir o subgradiente propriamente dito, e não a direção oposta à dele.

1.1 Formulação

Formulação do problema de atribuição generalizado (PAG):

$$(P) \quad \min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \leq b_i, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{3}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Relaxando o conjunto de restrições (3), temos:

$$(LR) \quad \min \quad z(u) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + v_i a_{ij})x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} v_i b_i \tag{5}$$

s.a:

$(2), (4).$

2 Exemplo numérico

Vamos aplicar relaxação lagrangiana à instância do PAG mostrada abaixo, relaxando o conjunto de restrições (3). Note que as restrições (10)-(11) a seguir correspondem às restrições (3) da formulação (1)-(4).

$$
\begin{array}{lllr}
\min & 3x_{11} + 6x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 1x_{22} + 3x_{23} & & (6) \\
\text{s.a:} & & & \\
& x_{11} + x_{21} & = 1 & (7) \\
& x_{12} + x_{22} & = 1 & (8) \\
& x_{13} + x_{23} & = 1 & (9) \\
& 2x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} & \leq 8 & (10) \\
& 4x_{21} + 4x_{22} + 1x_{23} & \leq 5 & (11) \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3. & & (12)
\end{array}
$$

No início do algoritmo, tomaremos $\lambda^0 = 2$ e $\overline{Z} = 15$. O número máximo de iterações foi ajustado para 20, apenas para deixar este documento curto. Por fim, estabelecemos o valor de 5 para o número máximo de iterações sem melhoria no valor de $z(u)$: sua equipe pode manter uma variável com o melhor valor de $z(u^k)$ ao longo das iterações; se este valor não tiver melhorado ao longo de 5 iterações, então o valor de λ é reduzido pela metade.

Em geral, é comum ajustar o número máximo de iterações para um valor da ordem de centenas ou milhares, dependendo de quão rápido o problema relaxado é resolvido. O valor do número máximo de iterações sem melhoria é mais comumente ajustado para um valor da ordem de dezenas.

Em resumo:

$\lambda^0 = 2$
$\overline{Z} = 15$
Número máximo de iterações = 20
Número máximo de iterações sem melhoria = 5.

2.1 Iteração 0

$$u^0 = (0,0)^\top$$

$$\begin{aligned} LR(u^0): \quad \min \quad & (3+0\cdot 2)x_{11} + (6+0\cdot 5)x_{12} + (2+0\cdot 7)x_{13} + \\ & (4+0\cdot 4)x_{21} + (1+0\cdot 4)x_{22} + (3+0\cdot 1)x_{23} - (0,0)\cdot(8,5)^\top \\ \text{s.a:} \quad & (2),(4). \end{aligned}$$

$$\text{Solução:} \quad x^0 = (1,0,1,0,1,0)^\top, \text{ com } z(u^0) = 6.$$

A solução x^0 é inviável para o problema original.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^0 = \begin{pmatrix} 2x_{11}^0 + 5x_{12}^0 + 7x_{13}^0 - 8 \\ 4x_{21}^0 + 4x_{22}^0 + 1x_{23}^0 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^0 = \frac{\lambda^0(\overline{Z} - z(u^0))}{\|s^0\|^2} = \frac{2(15-6)}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Note que u deve ser sempre não-negativo. Então, **quando uma coordenada de u é negativa, usamos o valor 0 (zero) naquela coordenada** (veja último passo no cálculo abaixo:

$$u^1 = u^0 + t^0 \cdot s^0 = (0,0)^\top + 9\cdot(1,-1)^\top = (9,-9)^\top \to (9,0)^\top.$$

2.2 Iteração 1

$$
\begin{array}{lll}
LR(u^1): & \min & (3+9\cdot 2)x_{11} + (6+9\cdot 5)x_{12} + (2+9\cdot 7)x_{13} + \\
 & & (4+0\cdot 4)x_{21} + (1+0\cdot 4)x_{22} + (3+0\cdot 1)x_{23} - (9,0)\cdot(8,5)^\top \\
 & \text{s.a:} & (2),(4).
\end{array}
$$

$$\text{Solução:} \quad x^1 = (0,0,0,1,1,1)^\top, \text{ com } z(u^1) = 8 - 72 = -64.$$

A solução x^1 é inviável para o problema original.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^1 = \frac{2(15-(-64))}{\left\| \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|^2} = \frac{2\cdot 79}{80} = 1.975.$$

$$u^2 = u^1 + t^1 \cdot s^1 = (9,0)^\top + 1.975\cdot(-8,4)^\top = (-6.8, 7.9)^\top \to (0, 7.9).$$

2.3 Iteração 2

$$
\begin{aligned}
LR(u^2): \quad \min \quad & (3+0\cdot 2)x_{11} + (6+0\cdot 5)x_{12} + (2+0\cdot 7)x_{13} + \\
& (4+7.9\cdot 4)x_{21} + (1+7.9\cdot 4)x_{22} + (3+7.9\cdot 1)x_{23} - (0,7.9)\cdot(8,5)^\top \\
\text{s.a:} \quad & (2),(4).
\end{aligned}
$$

$$\text{Solução:} \quad x^2 = (1,1,1,0,0,0)^\top, \text{ com } z(u^2) = 11 - 39.5 = -28.5.$$

A solução x^2 é inviável para o problema original.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^2 = \frac{2(15-(-28.5))}{\left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \right\|^2} = \frac{2\cdot 43.5}{61} = 1.4262.$$

$$u^3 = u^2 + t^2\cdot s^2 = (0,7.9)^\top + 1.4262\cdot(6,-5)^\top = (8.5572, 0.768852)^\top.$$

2.4 Iteração 3

$$\text{Solução:} \quad x^3 = (1,1,0,0,0,1)^\top, \ \text{com } z(u^3) = -58.303279.$$

A solução x^3 é inviável para o problema original.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^3 = 1.832582.$$

$$u^4 = u^3 + t^3 \cdot s^3 \quad = \quad (8.5572, 0.768852)^\top + 1.832582 \cdot (-1,-4)^\top = (0, 8.09918033).$$

2.5 Iteração 4

$$\text{Solução:} \quad x^4 = (1,1,1,0,0,0)^\top, \ \text{com } z(u^4) = -29.495902.$$

A solução x^4 é inviável para o problema original.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^4 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^4 = 1.458882.$$

$$u^5 = u^4 + t^4 \cdot s^4 \quad = \quad (0, 8.09918033)^\top + t^4 \cdot (6,-5)^\top = (8.75329213, 0.80477022).$$

2.6 Iteração 5

$$\text{Solução:} \quad x^5 = (0,0,0,1,1,1)^\top, \ \text{com } z(u^5) = -60.050188.$$

A solução x^5 é inviável para o problema original.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^5 = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^5 = 0.938127.$$

$$u^6 = u^5 + t^5 \cdot s^5 = (1.24827331, 4.55727963).$$

2.7 Iteração 6

$$\text{Solução:} \quad x^6 = (1,1,0,0,0,1)^\top, \ \text{com } z(u^6) = -8.772585.$$

A solução x^6 é **viável** para o problema original, mas não podemos afirmar que ela é ótima, pois o valor da função objetivo do problema original nesta solução é 12 (isto é, diferente de $z(u^6)$). Apesar disso, podemos alterar o valor de $\overline{Z}$ para 12 a partir de agora, pois conhecemos uma solução viável que nos fornece um limite superior melhor (inferior) que o valor original 15.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^6 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^6 = 1.221917.$$

$$u^7 = u^6 + t^6 \cdot s^6 = (0.02635657, 0).$$

2.8 Iteração 7

$$\text{Solução:} \quad x^7 = (1,0,1,0,1,0)^\top, \ \text{com } z(u^7) = 5.789147446132446.$$

A solução x^7 é inviável para o problema original.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^7 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^7 = 3.105426.$$

$$u^8 = u^7 + t^7 \cdot s^7 = (3.13178285, 0).$$

2.9 Iteração 8

$$\text{Solução:} \quad x^8 = (0,0,0,1,1,1)^\top, \ \text{com } z(u^8) = -17.054263.$$

A solução x^8 é inviável para o problema original.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^8 = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^8 = 0.363178.$$

$$u^9 = u^8 + t^8 \cdot s^8 = (0.226357, 1.452713).$$

2.10 Iteração 9

$$\text{Solução:} \quad x^9 = (1,0,1,0,1,0)^\top, \text{ com } z(u^9) = 2.925582.$$

A solução x^9 é inviável para o problema original.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^9 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^9 = 4.537209.$$

$$u^{10} = u^9 + t^9 \cdot s^9 = (4.76356569, 0)^\top.$$

2.11 Iteração 10

$$\text{Solução:} \quad x^{10} = (0,0,0,1,1,1)^\top, \text{ com } z(u^{10}) = -30.108526.$$

A solução x^{10} é inviável para o problema original.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^{10} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^{10} = 0.263178.$$

$$u^{11} = u^{10} + t^{10} \cdot s^{10} \quad = \quad (2.658139, 1.052713)^\top.$$

2.12 Iteração 11

$$\text{Solução:} \quad x^{11} = (1,0,0,0,1,1)^\top, \text{ com } z(u^{11}) = -9.528681.$$

A solução x^{11} é viável para o problema original, mas com valor da função objetivo original igual a 7, que é diferente de $z(u^{11})$. Alteramos o valor de $\overline{Z}$ para 7, pois este valor é melhor (inferior) do que o valor atual, 12.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^{11} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^{11} = 0.229565.$$

$$u^{12} = u^{11} + t^{11} \cdot s^{11} = (1.280749, 1.052713)^\top.$$

2.13 Iteração 12

$$\text{Solução:} \quad x^{12} = (1, 0, 0, 0, 1, 1)^\top, \text{ com } z(u^{12}) = -1.50956.$$

A solução x^{12} é viável para o problema original, já foi encontrada, mas não temos a garantia de otimalidade, que é custo no problema relaxado igual ao custo no problema original.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^{12} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^{12} = 0.118188.$$

$$u^{13} = u^{12} + t^{12} \cdot s^{12} = (0.5716191.052713)^\top.$$

2.14 Iteração 13

$$\text{Solução:} \quad x^{13} = (1, 0, 0, 0, 1, 1)^\top, \text{ com } z(u^{13}) = 3.16348.$$

A solução x^{13} é viável para o problema original. Mesma situação da iteração anterior.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^{13} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^{13} = 0.053285.$$

$$u^{14} = u^{13} + t^{13} \cdot s^{13} = (0.251909, 1.052713)^\top.$$

2.15 Iteração 14

$$\text{Solução:} \quad x^{14} = (1, 0, 1, 0, 1, 0)^\top, \text{ com } z(u^{14}) = 3.72116.$$

A solução x^{14} é inviável para o problema original.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^{14} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^{14} = 0.81971.$$

$$u^{15} = u^{14} + t^{14} \cdot s^{14} \quad = \quad (1.071619, 0.233003)^\top.$$

2.16 Iteração 15

$$\text{Solução:} \quad x^{15} = (0,0,0,1,1,1)^\top, \text{ com } z(u^{15}) = -1.73797.$$

A solução x^{15} é inviável para o problema original.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^{15} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^{15} = 0.027306.$$

$$u^{16} = u^{15} + t^{15} \cdot s^{15} \quad = \quad (0.85317, 0.342228)^\top.$$

2.17 Iteração 16

$$\text{Solução:} \quad x^{16} = (1,0,0,0,1,1)^\top, \text{ com } z(u^{16}) = 0.4635.$$

A solução x^{16} é viável para o problema original e já foi encontrada anteriormente. Não temos certificado de otimalidade.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^{16} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^{16} = 0.045392.$$

$$u^{17} = u^{16} + t^{16} \cdot s^{16} \quad = \quad (0.580816, 0.342228)^\top.$$

2.18 Iteração 17

$$\text{Solução:} \quad x^{17} = (1,0,0,0,1,1)^\top, \text{ com } z(u^{17}) = 2.642334.$$

A solução x^{17} é viável para o problema original, sem garantia de otimalidade.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^{17} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^{17} = 0.030262.$$

$$u^{18} = u^{17} + t^{17} \cdot s^{17} \quad = \quad (0.399247, 0.342228)^\top.$$

2.19 Iteração 18

$$\text{Solução:} \quad x^{18} = (1,0,0,0,1,1)^\top, \text{ com } z(u^{18}) = 3.094889.$$

A solução x^{18} é viável para o problema original, sem garantia de otimalidade.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^{18} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^{18} = 0.027119.$$

$$u^{19} = u^{18} + t^{18} \cdot s^{18} \quad = \quad (0.236534, 0.342228)^\top.$$

2.20 Iteração 19

$$\text{Solução:} \quad x^{19} = (1,0,1,0,1,0)^\top, \text{ com } z(u^{19}) = 4.396593.$$

A solução x^{19} é inviável para o problema original.

$$\text{Subgradiente:} \quad s^{19} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Passo:} \quad t^{19} = 0.325426.$$

$$u^{20} = u^{19} + t^{19} \cdot s^{19} \quad = \quad (0.561959, 0.016802)^\top.$$

2.21 Gráficos

Os gráficos a seguir mostram o comportamento do algoritmo para diferentes números máximos de iterações.

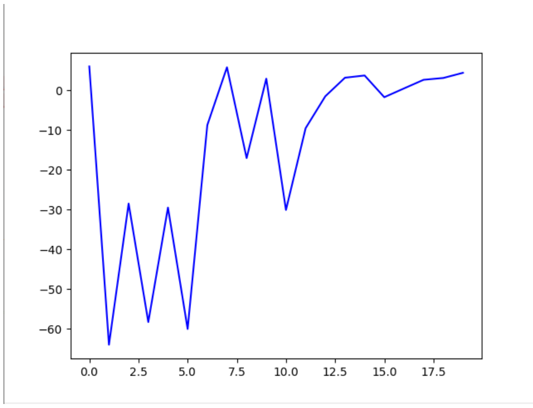

Figura 1: Variação do valor de $z(u^k)$ ao longo das iterações. Número de iterações igual a 20; número máximo de iterações sem melhoria igual a 5.

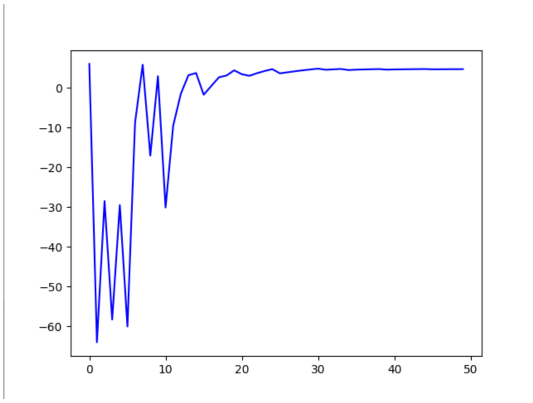

Figura 2: Variação do valor de $z(u^k)$ ao longo das iterações. Número de iterações igual a 50; número máximo de iterações sem melhoria igual a 5.

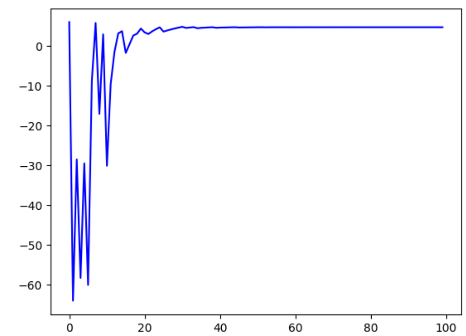

Figura 3: Variação do valor de $z(u^k)$ ao longo das iterações. Número de iterações igual a 100; número máximo de iterações sem melhoria igual a 5.

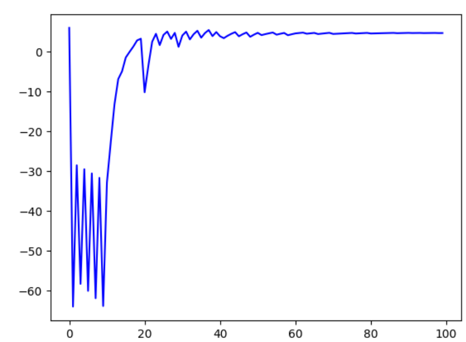

Figura 4: Variação do valor de $z(u^k)$ ao longo das iterações. Número de iterações igual a 100; número máximo de iterações sem melhoria igual a 10. Compare com o gráfico 3 para perceber o efeito da mudança do número máximo de iterações sem melhoria. Um valor muito alto para este parâmetro permite que o algoritmo oscile amplamente entre valores de $z(u^k)$ muito distintos. À medida que este valor é reduzido, a tendência é que os passos sejam menores, e o algoritmo consiga realizar ajustes mais localizados, que as iterações anteriores eram incapazes devido a um valor alto do passo.

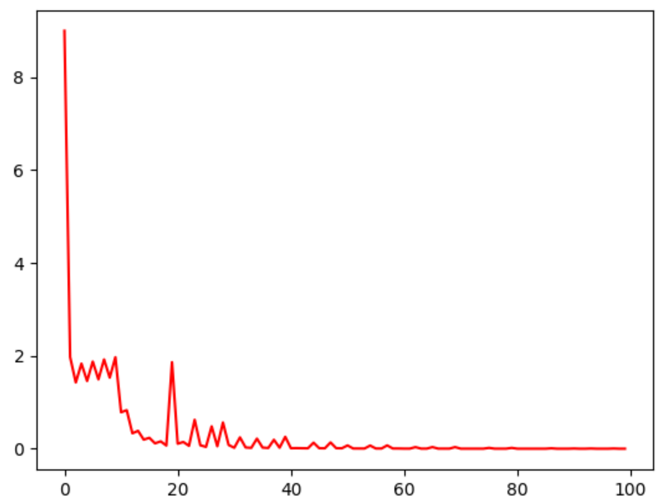

Figura 5: Variação do tamanho do passo t^k ao longo das iterações. Número de iterações igual a 100; número máximo de iterações sem melhoria igual a 10.