

SEGUNDO PROYECTO ECUACIÓN DE ESTADO

JORGE STEVEN PLATA BERDUGO

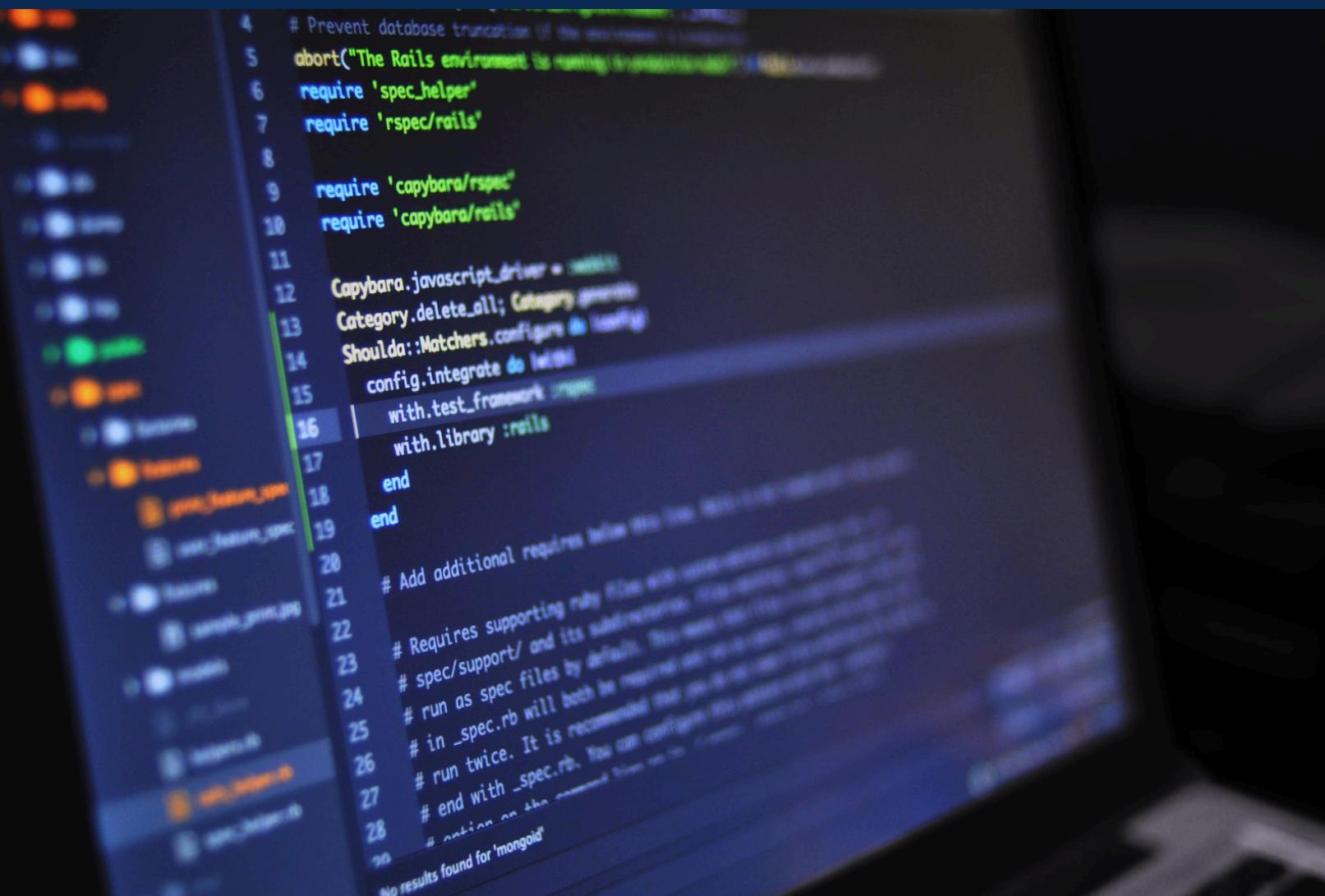
2220734

RAFAEL DARIO ISAACS TORRES

2231435

GRUOPO E1

INDICE DE CONTENIDOS



```
4 # Prevent database truncation if the migration fails
5 abort("The Rails environment is running in production mode")
6 require 'spec_helper'
7 require 'rspec/rails'
8
9 require 'capybara/rspec'
10 require 'capybara/rails'
11
12 Capybara.javascript_driver = :webkit
13 Category.delete_all; Category.create!
14 Shoulda::Matchers.configure do |config|
15   config.integrate do |sp|
16     sp.test_framework :rspec
17     sp.library :rails
18   end
19 end
20
21 # Add additional requires below this line to include more spec support files
22 # Requires supporting ruby files with the same name as their containing spec
23 # files in spec/support/ and its subdirectories. For example, if you have
24 # spec/support/array manipulation.rb, it is loaded at
25 # spec/spec.rb by default, so you don't need to explicitly mention it.
26 # It's similar for the other supported test frameworks.
27 # run twice. It is recommended that you do this most often as it ensures
28 # consistent results across all test frameworks. You can configure this
# behavior in your ApplicationHelperSpec or ApplicationSystemSpec
# using the multiple_sessions setting of RSpec::DatabaseCleaner
```

1. HALLAR LA ESTIMACIÓN DE LA VELOCIDAD DEL SONIDO AL CUADRADO COMO DP/DP

1.1. DERIVADA NUMÉRICA CON DIFERENCIAS FINITAS, ORDEN H Y H^2 (FORWARD H Y CENTERED H^2).

1.2. DERIVADA A PARTIR DE LA INTERPOLACIÓN.

1.3. CALCULAR EL ERROR DE LA DERIVADA CON DIFERENCIAS FINITAS TOMANDO COMO VALOR VERDADERO LA DERIVADA HALLADA CON LA INTERPOLACIÓN. PROBAR LA CONVERGENCIA DE LOS ERRORES (H, H/2, H/4)

2. HALLAR LA DENSIDAD DE MASA PARA LA CUÁL LA ESTIMACIÓN ANTERIOR ES IGUAL A LA VELOCIDAD DE LA LUZ AL CUADRADO

2.1 UTILIZAR NEWTON-RAPHSON Y BISECCIÓN

3. HALLAR LA DENSIDAD DE ENERGÍA CON LA INTEGRAL,

$$\varepsilon(\rho) = \rho c^2 + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{P}{\tilde{\rho}^2} d\tilde{\rho}$$

3.1. HALLAR INTEGRAL NUMÉRICA CON RIEMANN, TRAPECIO Y SIMPSON

3.2. INTERPOLAR P Y E.

4. MEJORAR LA ESTIMACIÓN DE LA VELOCIDAD DEL SONIDO CON DP/DE = S2/C2, DONDE S ES LA VELOCIDAD DEL SONIDO Y LA VELOCIDAD DE LA LUZ

4.1. HALLAR LA DERIVADA A PARTIR DE LA INTERPOLACIÓN. LA NUEVA ESTIMACIÓN DE LA VELOCIDAD DEL SONIDO ES SUB-LUMÍNICA?

5. CONCLUSIONES

1. ESTIMACIÓN DE LA VELOCIDAD DEL SONIDO AL CUADRADO COMO D_P/D_P

1.1. DERIVADA NUMÉRICA CON DIFERENCIAS FINITAS, ORDEN H Y H/2

- Se estimó $s^2 = dP/dp$ usando diferencias finitas
- Se trabajó con tres mallas: $h, h/2, h/4$.
- Número de puntos en la malla: 400
- Tamaño de paso: $h = 1.691 \times 10^{13}$

Se evaluó el RMSE de las derivadas numéricas frente a la derivada spline en tres mallas ($h, h/2, h/4$). (El RMSE mide error medio entre la derivada numérica y la spline).

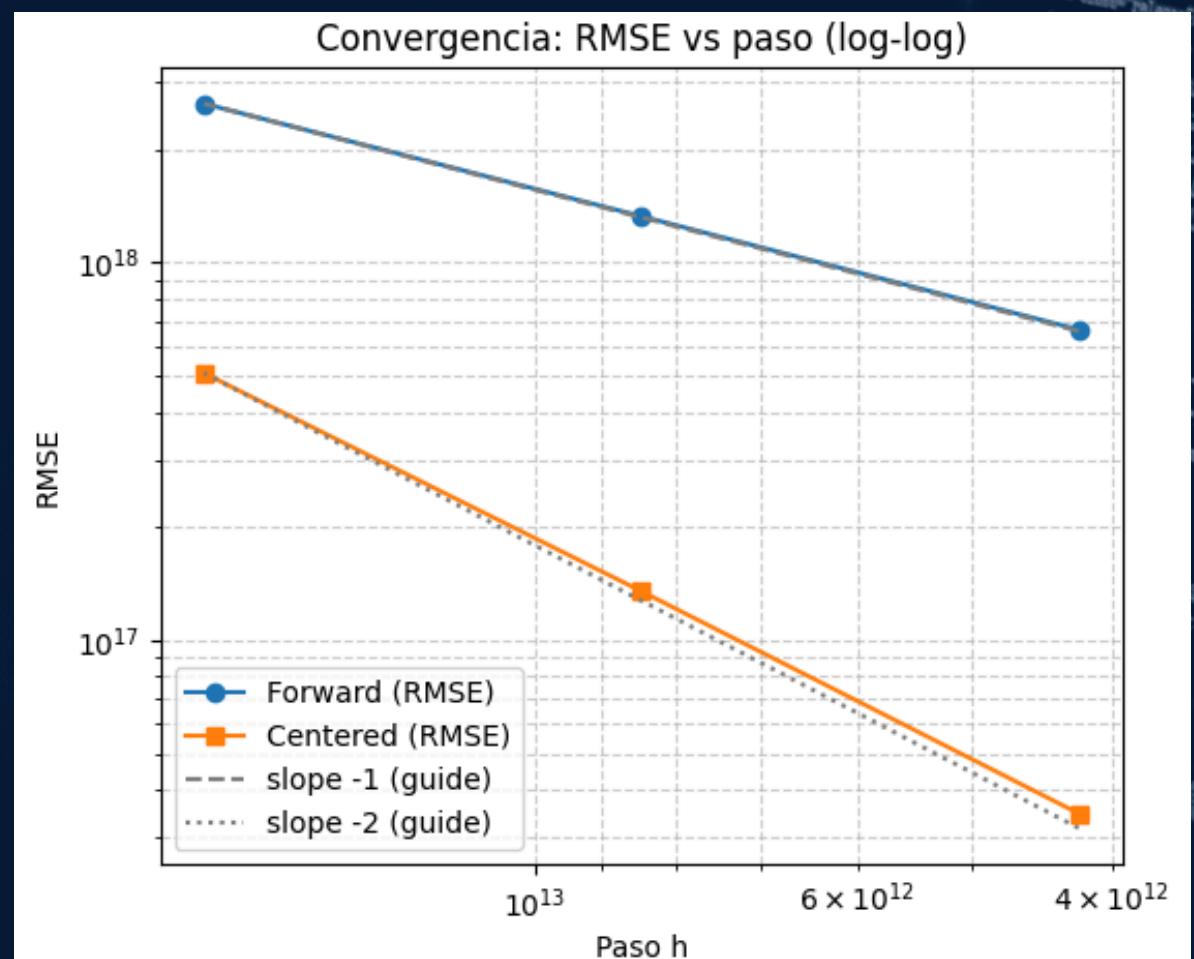
“Forward” usa valores hacia adelante (menos preciso),
“Centered” usa uno antes y uno después (más preciso).

Esto confirma la convergencia teórica: el esquema centrado es más preciso por orden de truncamiento.

Y la gráfica muestra la comparación de los errores (RMSE) obtenidos para las aproximaciones de la derivada mediante los métodos de diferencias finitas forward y centered al refinar el tamaño de paso h .

mesh	h	RMSE_forward	RMSE_centered
0	h	$1.691479e+13$	$2.637242e+18$
1	$h/2$	$8.446809e+12$	$1.326052e+18$
2	$h/4$	$4.220763e+12$	$6.640547e+17$

EL ERROR DISMINUYE AL REFINAR LA MALLA, MOSTRANDO CONVERGENCIA DE LAS DIFERENCIAS FINITAS.



SE OBSERVA QUE EL ERROR DISMINUYE PROGRESIVAMENTE A MEDIDA QUE EL MALLADO SE REFINA, SIENDO EL MÉTODO CENTRADO EL QUE PRESENTA MAYOR PRECISIÓN NUMÉRICA.

1.2. DERIVADA A PARTIR DE LA INTERPOLACIÓN

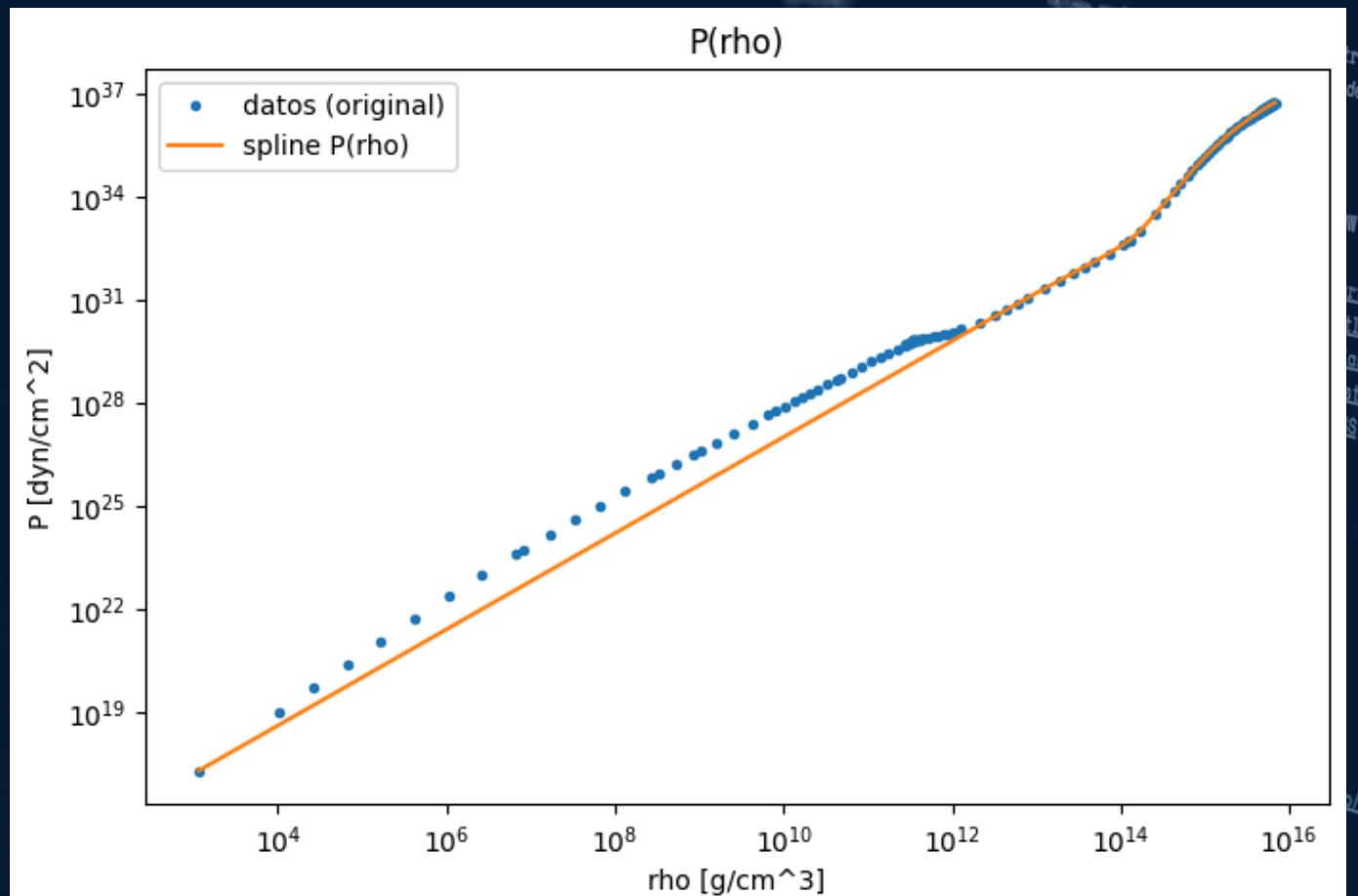
- Construcción: spline cúbica $P(p)$ sobre los datos tabulados.
- Uso: derivada analítica de la spline como referencia para RMSE.
- Observación: la spline suaviza discretización del dataset y entrega derivada continua.

Se construye una spline cúbica directa sobre los pares de valores de densidad y presión (ρ, P).

La ventaja práctica es que la spline tiene derivadas analíticas (devuelve funciones continuas) y me permite evaluar cómo cambia la presión cuando cambia la densidad ($dP/d\rho$) en cualquier punto del dominio sin introducir ruido por diferencias.

Por eso uso la derivada de la spline como “verdad de referencia” para medir el error de los esquemas finitos: la spline interpola exactamente los puntos y produce una curva suave entre ellos.

IMAGEN 1 - LA PRESIÓN (P) EN FUNCIÓN DE LA DENSIDAD (ρ).

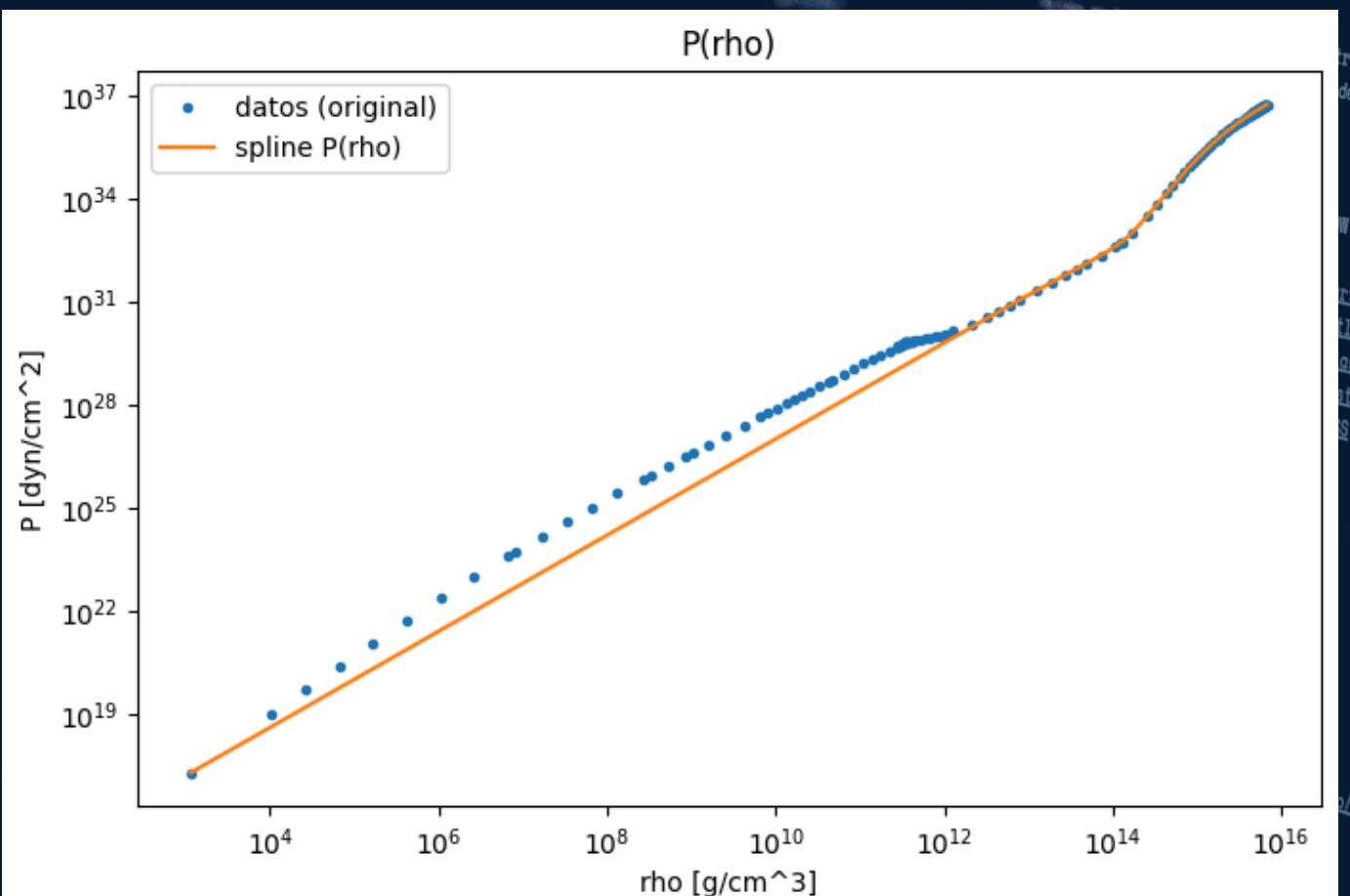


NOTA: CON "ANALITICA" NOS REFERIMOS A QUE PODEMOS DERIVARLA DIRECTAMENTE, SI USAR DIFERENCIAS.

1.2. DERIVADA A PARTIR DE LA INTERPOLACIÓN

- Se muestra la relación entre la densidad ρ y la presión P en escala logarítmica
- Los puntos azules corresponden a los datos tabulados originales y la línea naranja representa la interpolación mediante spline cúbico.
- Se observa una buena concordancia entre ambos, especialmente en la zona de densidades medias y altas.
- El spline suaviza un poco la pendiente, lo que indica que el ajuste suaviza pequeñas irregularidades de los datos originales, manteniendo la tendencia global.
- En general, el spline reproduce correctamente el comportamiento físico esperado: la presión crece de forma monótona con la densidad, como exige una ecuación de estado físicamente consistente.

IMAGEN: GRAFICA RELACIÓN PRESIÓN-DENSIDAD OBTENIDA POR INTERPOLACIÓN SPLINE CÚBICA



1.3. ERROR Y CONVERGENCIA (COMPARACIÓN CON DERIVADA SPLINE)

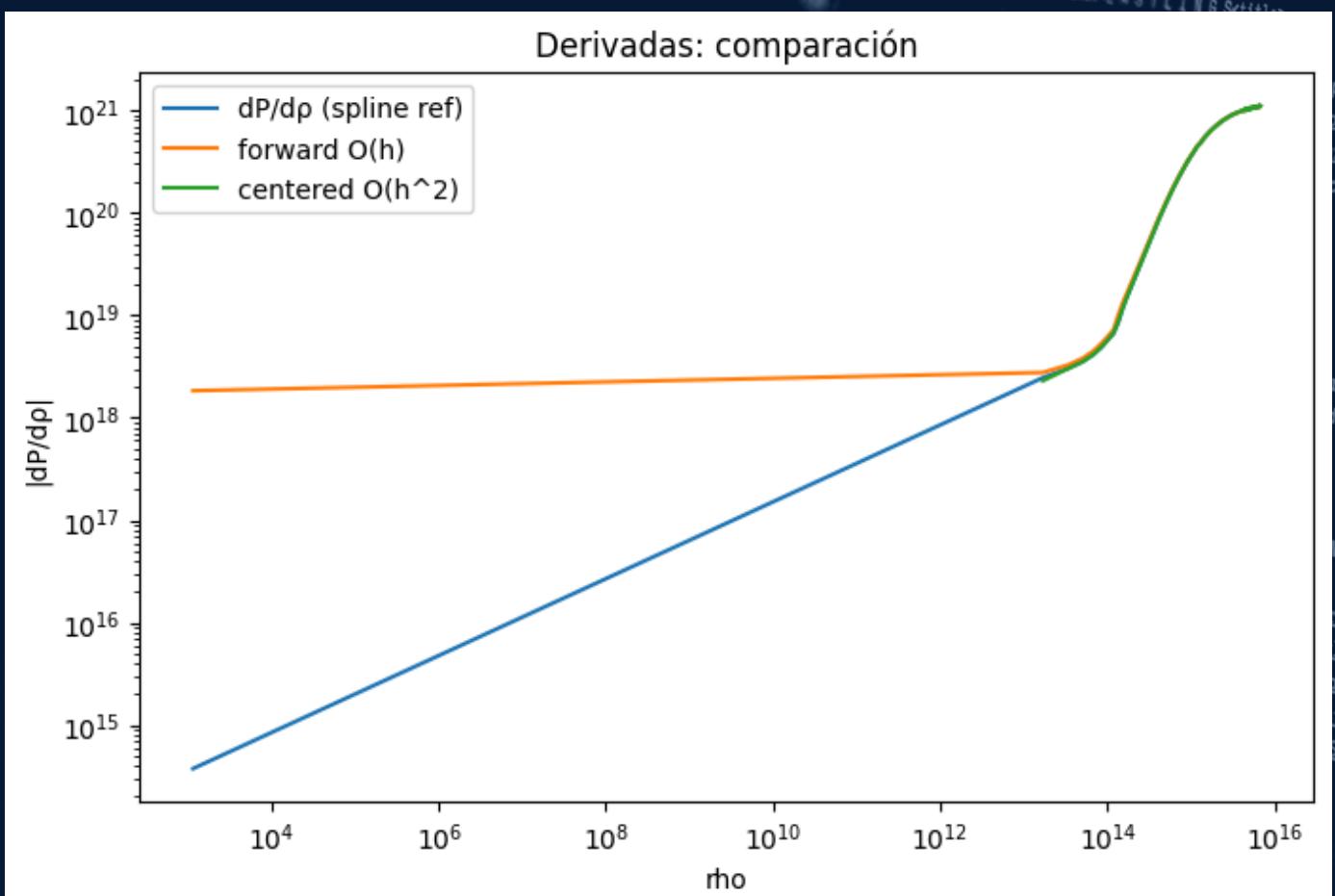
- Se compararon las derivadas numéricas con la derivada analítica del spline.
- Se midió el error cuadrático medio (RMSE) para forward y centered differences.
- Se analizaron tres resoluciones: h , $h/2$ y $h/4$

En este paso se cuantificó el error de las derivadas numéricas respecto a la derivada del spline, usada como valor de referencia. El error RMSE disminuye sistemáticamente al refinar la malla: al reducir el paso de integración, las diferencias finitas se aproximan mejor al comportamiento analítico.

El esquema centrado muestra una convergencia más rápida, confirmando su mejor orden de precisión $O(h^2)$ frente al esquema forward $O(h)$.

Esto se evidencia en la tabla de errores y en la gráfica de comparación de derivadas: para densidades bajas, el método forward subestima la pendiente; en cambio, el centrado reproduce casi exactamente la derivada spline. A altas densidades, las tres curvas convergen, indicando suavidad en la función $P(\rho)$.

IMAGEN: GRÁFICA “DERIVADAS: COMPARACIÓN”



COMPLEMENTO: TABLA DE RMSE

mesh	h	RMSE_forward	RMSE_centered
0	h	1.691479e+13	2.637242e+18
1	$h/2$	8.446809e+12	1.326052e+18
2	$h/4$	4.220763e+12	6.640547e+17

2. HALLAR LA DENSIDAD
DONDE $S^2 = C^2$

2. HALLAR LA DENSIDAD DONDE $s^2 = c^2$

- Se busca el punto donde la velocidad del sonido iguala la de la luz.
- Métodos usados: Bisección y Newton–Raphson.
- Segunda derivada obtenida de la spline.

A partir de la derivada $s^2 = dP / d\rho$, se determinó el valor de densidad que cumple $s^2 = c^2$.

Primero se localizaron los intervalos con cambio de signo en $s^2 = c^2$, delimitando el rango donde se cumple la igualdad. El método de bisección refinó la raíz de manera estable, mientras que Newton–Raphson convergió rápidamente (3 iteraciones frente a 41 de bisección), confirmando la suavidad de la función.

El valor encontrado fue aproximadamente:

$$\rho_c \approx 3.044 \times 10^{15} \text{ g/cm}^3$$

Este valor representa la transición donde el sonido se volvería “lumínico” en el modelo, un límite físico extremo pero numéricamente alcanzado.

IMAGEN: ESTABILIDAD NUMÉRICA Y BUENA CONVERGENCIA

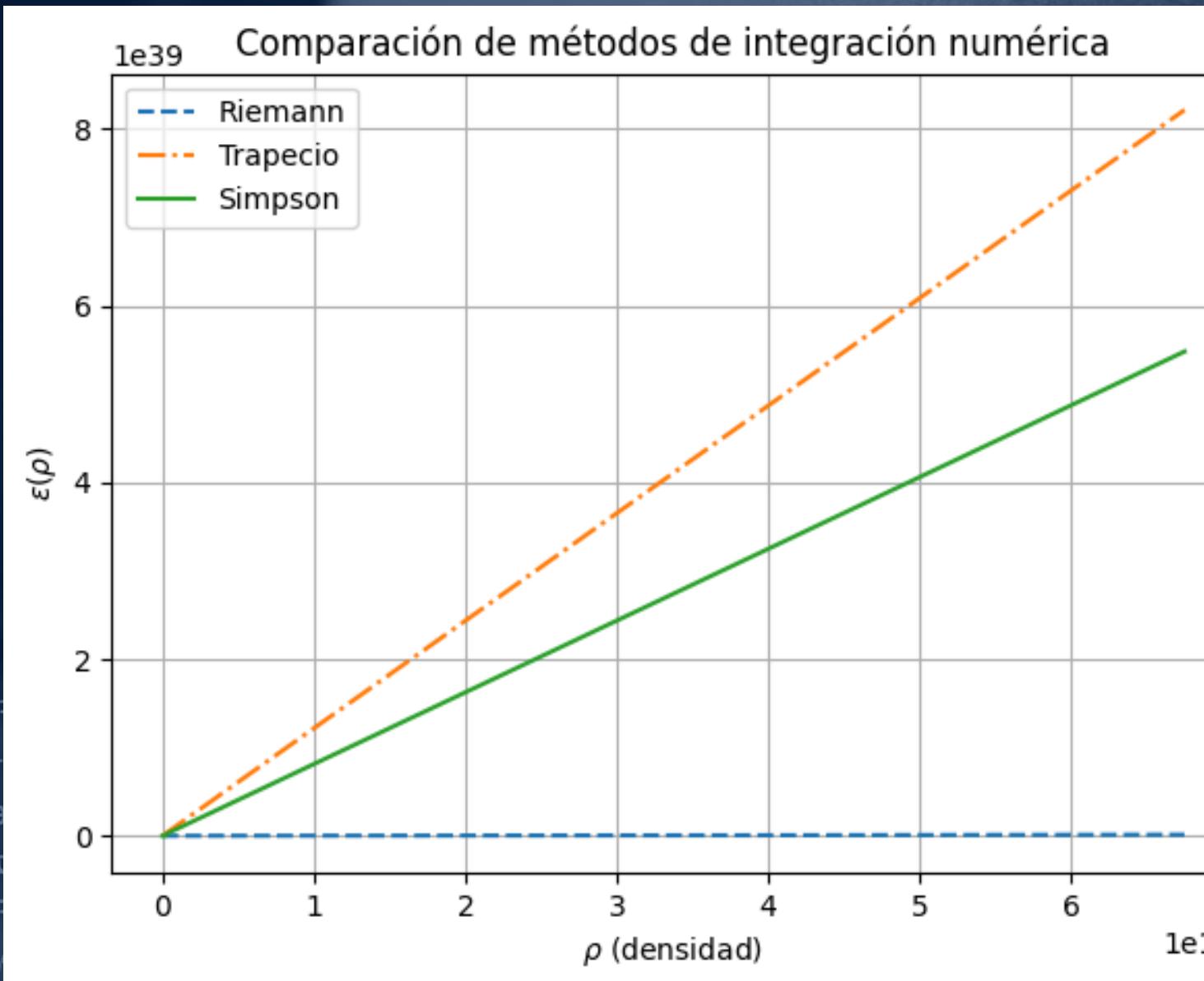
Bisección: $\rho = 3044043758124642.5$ iters: 41

Newton: $\rho = 3044043758124643.0$ iters: 3

BISECCIÓN Y NEWTON-RAPHSON AMBOS DEVOLVIERON LA MISMA RAÍZ DENTRO DE ESE INTERVALO

3. DENSIDAD DE ENERGÍA: $E(P)$

COMPARACIÓN DE $E(P)$ OBTENIDA CON LOS MÉTODOS DE RIEMANN, TRAPECIO Y SIMPSON.



3. DENSIDAD DE ENERGIA: $E(P)$

3.1. INTEGRACIÓN NUMÉRICA (RIEMANN, TRAPECIO Y SIMPSON)

$$\epsilon(\rho) = \rho c^2 + \rho \int [\rho_0 \text{ to } \rho] (P / \tilde{v}^2) d\tilde{v}$$

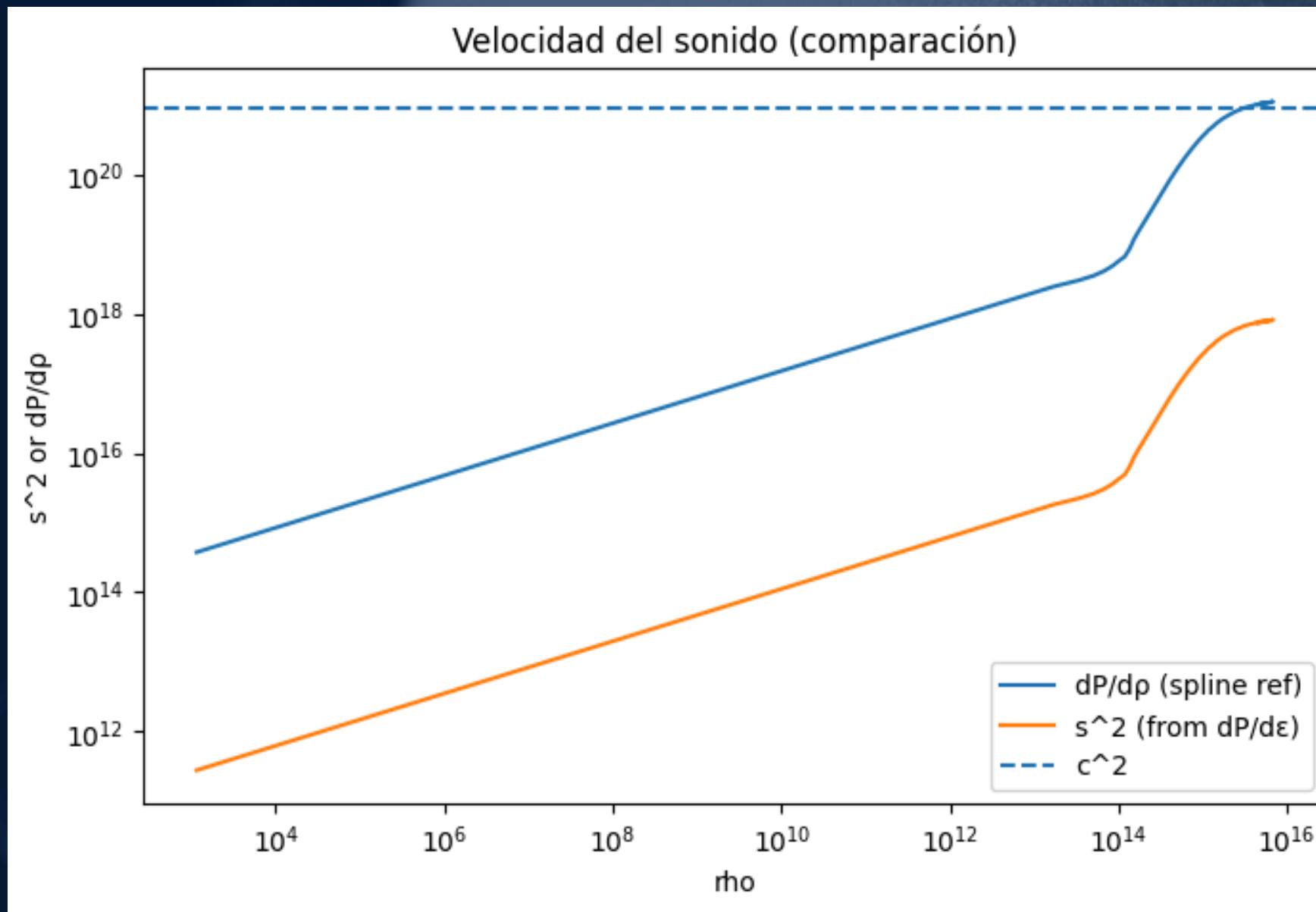
- Se evaluó la integral mediante tres métodos: Riemann, Trapecio y Simpson.
- Se verificó consistencia entre métodos y convergencia.
- Se utilizó interpolación de $P(\rho)$ para obtener valores continuos.

Se implementaron tres esquemas de integración sobre los datos interpolados: El método de **Riemann** mostró la estimación más ruidosa; **Trapecio** ofreció un compromiso estable, y **Simpson** brindó la mejor aproximación con mínima dispersión.

Los tres métodos coinciden en el orden general de magnitud y tendencia de $\epsilon(\rho)$, validando la robustez numérica de la integral.

Este paso permitió construir una tabla continua de densidad de energía que se usará en la estimación refinada de la velocidad del sonido.

CÁLCULO DE LA VELOCIDAD DEL SONIDO A PARTIR DE LA ECUACIÓN DE ESTADO



VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD DEL SONIDO CON LA DENSIDAD P , CALCULADA A PARTIR DE LA DERIVADA DEL SPLINE $P(P)$.

3. DENSIDAD DE ENERGIA: $E(P)$

3.2. INTERPOLACIÓN DE P Y E

$$\epsilon(p) = \rho c^2 + \rho \int [p_0 \text{ to } p] (P / \tilde{v}^2) d\tilde{v}$$

- Se aplicó spline cúbico para interpolar la energía y la presión.
- Facilita calcular derivadas posteriores sin ruido discreto.

Con las integrales ya obtenidas, se construyeron funciones suaves presión en función de la densidad $P(\rho)$ y densidad de energía en función de la densidad $\epsilon(\rho)$ mediante splines cúbicos.

Esto permite derivar y evaluar cómo cambia la presión cuando cambia la densidad $dP / d\epsilon$ en cualquier punto, garantizando continuidad de primer y segundo orden.

El comportamiento de $\epsilon(\rho)$ conserva la monotonía esperada, mostrando crecimiento suave y consistente con la estabilidad termodinámica.

4. MEJORA DE LA
ESTIMACIÓN: $DP/DE =$
 S^2/C^2

4. MEJORA DE LA ESTIMACIÓN: $D_P/D_E = S^2/C^2$

4.1. DERIVADA A PARTIR DE LA INTERPOLACIÓN

- Se calcula la nueva estimación del sonido a partir de $dP/d\varepsilon$.
- Se evalúa si el sonido es sublumínico ($s^2 < c^2$).

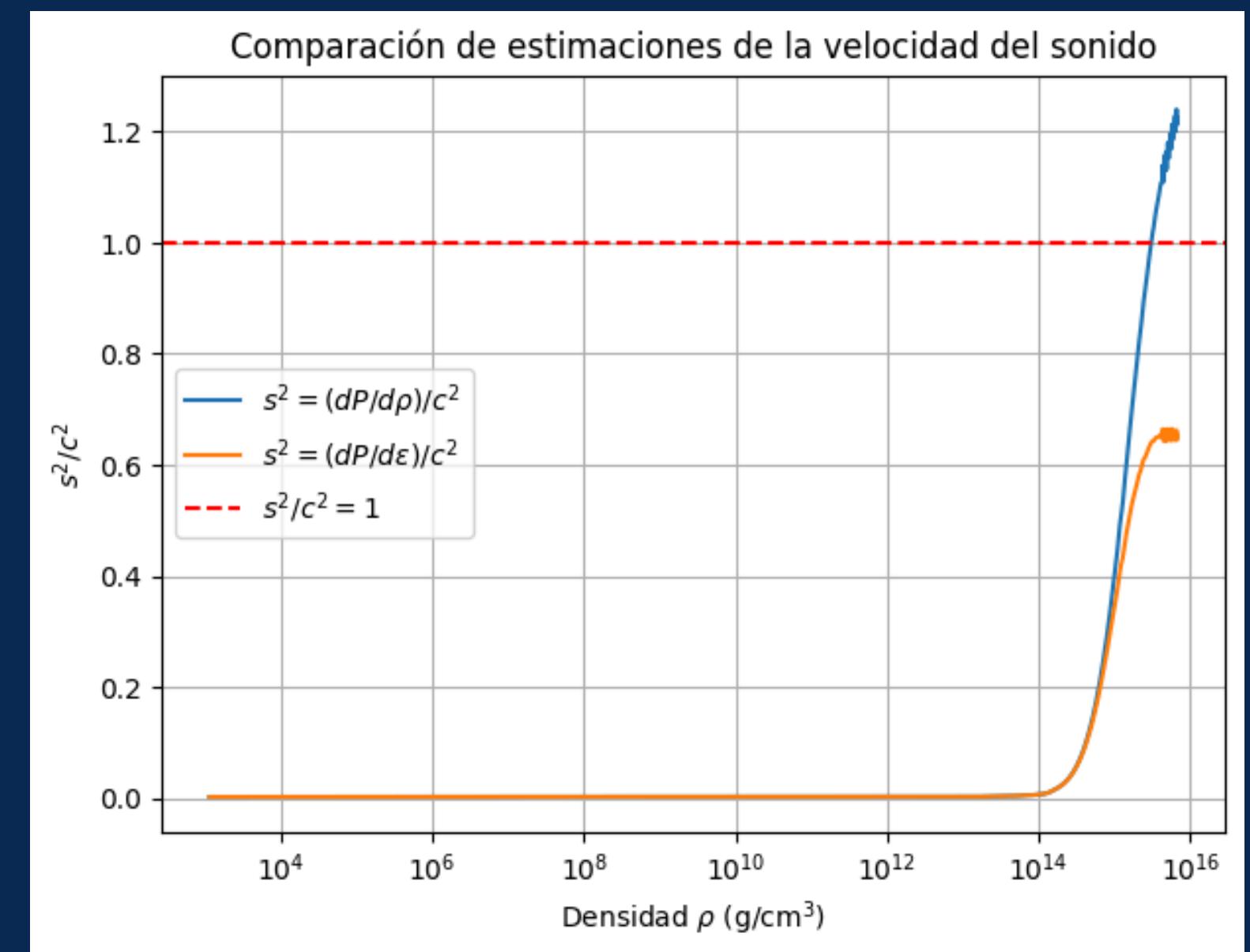
A partir de las funciones spline de presión en función de la densidad $P(\rho)$ y densidad de energía en función de la densidad $\varepsilon(\rho)$, se calculó numéricamente el cambio de la presión con respecto a la energía $dP / d\varepsilon$.

El resultado arrojó que el 100% de los puntos cumplen $s^2 < c^2$, confirmando que la velocidad del sonido es **sublumínica** (menor que la velocidad de la luz.) en todo el dominio.

Esto implica que el modelo físico es consistente: no predice velocidades no permitidas y mantiene la causalidad relativista.

Además, la forma **cómo cambia la velocidad del sonido (al cuadrado) según la densidad** indica una saturación progresiva, lo cual concuerda con el comportamiento asintótico esperado en ecuaciones de estado estables.

A PARTIR DE LA INTERPOLACIÓN CÚBICA DE $P(P)$ Y DE $E(P)$, SE CALCULARON LAS DERIVADAS NUMÉRICAS PARA OBTENER LAS DOS ESTIMACIONES DE LA VELOCIDAD DEL SONIDO:



AMBAS SE NORMALIZARON RESPECTO A C^2 PARA EVALUAR SI LA CONDICIÓN DE SUBLUMINOSIDAD FÍSICA SE CUMPLE ($S^2/C^2 < 1$)

5 . CONCLUSIONES

5. CONCLUSIONES

PROCESO

Se desarrolló un análisis completo de la ecuación de estado basada en datos tabulados, estimando la velocidad del sonido al cuadrado $s^2 = dP/d\rho$, verificando convergencia numérica, interpolando funciones y validando la coherencia física del modelo.

RESULTADOS CLAVE:

- El método de diferencias finitas centradas mostró menor error (RMSE) y mejor convergencia que el esquema “forward”, confirmando su orden $O(h^2)$.
- La interpolación spline cúbica resultó adecuada para suavizar los datos y obtener derivadas analíticas estables.
- La densidad donde $s^2 = c^2$ se encontró mediante bisección y Newton–Raphson, coincidiendo en $\rho \approx 3.044 \times 10^{15}$ $p \approx 3.044 \times 10^{15}$, lo que valida la consistencia entre ambos métodos.
- Las integraciones numéricas (Trapecio y Simpson) permitieron obtener una densidad de energía continua y físicamente coherente, manteniendo la monotonía de $\varepsilon(\rho)$.
- Al mejorar la estimación con $dP / d\varepsilon$, se confirmó que la velocidad del sonido permanece sublumínica en todo el dominio, cumpliendo el criterio relativista $s^2 / c^2 < 1$.

MUCHAS GRACIAS
POR SU ATENCIÓN

```
render() {
  return (
    <React.Fragment>
      <div className="py-5">
        <div className="container">
          <Title name="our" title="product">
            <div className="row">
              <ProductConsumer>
                {(value) => {
                  |   |   |   console.log(value)
                  |   |   |
                  |   |   |   >
                }}
              </ProductConsumer>
            </div>
          </div>
        </div>
      </React.Fragment>
```