Primeira Lista-Quântica I

1. Considere os operadores lineares $\hat{A}$ e $\hat{B}$, representados numa certa base ortonormal pelas matrizes

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

$$\hat{B} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 6 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 7 \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

   a) Calcule $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$;

   b) Encontre os autovalores e autoestados do operador $\hat{A}$;

   c) Encontre a matriz que representa $\hat{B}$ numa base de autoestados de $\hat{A}$;

   d) Encontre uma base de autoestados simultâneos para $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e mostre que estes podem ser univocamente rotulados pelos autovalores desses operadores. O que se pode dizer sobre o conjunto $(\hat{A}, \hat{B})$ no que concerne a completeza?

   e) Encontre as matrizes que realizam as mudanças entre a base inicial e a base do item c); entre a base inicial e a base do item d); entre a base do item c) e a base do item d);

2. Usando as regras da álgebra de bra-kets, prove:

   a) $\mathrm{tr}\big(\hat{X}\hat{Y}\big) = \mathrm{tr}\big(\hat{Y}\hat{X}\big)$, onde $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ são operadores;

   b) $\big(\hat{X}\hat{Y}\big)^{\dagger} = \hat{Y}^{\dagger}\hat{X}^{\dagger}$;

3. Considere dois kets $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$. Suponha que $\langle a'|\alpha\rangle$, $\langle a''|\alpha\rangle$, $\ldots$, e $\langle a'|\beta\rangle$, $\langle a''|\beta\rangle$, $\ldots$ são todos conhecidos, onde $|a'\rangle$, $|a''\rangle$, $\ldots$ formam um conjunto completo de kets de base. Encontre a representação matricial para o operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ nessa base.