Terceira Lista de Exercícios-Quântica I

1. Considere a equação de Schrodinger independente do tempo em 1D para uma partícula sujeita a um potencial limitado, porém descontínuo em algum valor x_0 da coordenada x. Mostre que a solução $\phi(x)$ e sua derivada devem ser contínuas em $x = x_0$.

2. Considere a situação do item anterior, porém com $V(x)$ divergindo em $x = x_0$. Mostre que nesse caso somente $\phi(x)$ é contínua em $x = x_0$.

3. A conservação global da probabilidade pode ser expressa em termos da normalização da função de onda. Contudo, também podemos obter uma forma local da conservação da probabilidade em termos de uma equação de continuidade. Considerando $\rho(\vec{r},t) = |\psi^*(\vec{r},t)\psi^*(\vec{r},t)|$ a densidade de probabilidade e $\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(\vec{r},t)\nabla\psi(\vec{r},t) - \psi(\vec{r},t)\nabla\psi^*(\vec{r},t)\right]$ a corrente de probabilidade, mostre a partir da equação de Schrodinger a equação de continuidade:
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0 \tag{0.1}$$

4. Considere uma partícula se propagando em $1D$ e incidindo a partir de $x = -\infty$ numa barreira de potencial dada por
$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases} \tag{0.2}$$

   a) Obtenha soluções estacionárias (autofunções de $\hat{H}$) para as distintas regiões e imponha as condições de contorno na região de descontinuidade do potencial;

   b) Calcule as correntes associadas às funções de onda nas duas regiões;

   c) Os coeficientes de refletividade e transmissividade são definidos respectivamente por:
$$R = \frac{j_r}{j_i} \tag{0.3}$$
$$T = \frac{j_t}{j_i}, \tag{0.4}$$

   onde j_i, j_r e j_t são as correntes associadas as funções de onda incidente, refletida e transmitida, respectivamente. Calcule esses coeficientes para o presente caso.

Obs.: As soluções estacionárias nesse caso não são normalizáveis e não podem representar estados físicos. Contudo, estados físicos podem ser construídos fazendo uma superposição de estados estacionários e cada componente dessa superposição está sujeita as mesmas condições discutidas neste exercício. Dessa forma, os coeficientes do item (c) continuam desempenhando um papel relevante na análise dos coeficientes de reflexão e transmissão.

5. Oscilador harmônico em $1D$.

   A Hamiltoniana do OH é dada por $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ Calcule as funções de onda para o primeiro e segundo estado excitado do oscilador harmônico em $1D$.

   a) Defina $\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}$ e $\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{p}$. Mostre que

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2\right), \tag{0.5}$$

   com $\hat{H} = \hbar\omega\hat{\mathcal{H}}$;

   b) Mostre que $[\hat{X}, \hat{P}] = i$;

   c) Defina $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}\right)$, $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\hat{P}\right)$ e $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$. Mostre que

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{n} + \frac{1}{2}, \tag{0.6}$$

   e

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1 \tag{0.7}$$

$$\left[\hat{n}, \hat{a}\right] = -\hat{a} \tag{0.8}$$

$$\left[\hat{n}, \hat{a}^\dagger\right] = \hat{a}^\dagger \tag{0.9}$$

   d) Mostre que o espectro de $\hat{n}$ é dado por $n = 0, 1, 2, \ldots$;

   e) Mostre que $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ e $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, onde $|n\rangle$ são auto-estados normalizados de $\hat{n}$;

   f) A partir de $\hat{a}|0\rangle = 0$, mostre que $\varphi_0(x) \equiv \langle x|0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$.

6. A partir da relação entre os operadores $\hat{X}$ e $\hat{P}$ e os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, calcule $\Delta X \Delta P$ num estado estacionário arbitrário do oscilador harmônico, com $\Delta O = \sqrt{\langle\hat{O}^2\rangle - \langle\hat{O}\rangle^2}$, com $\hat{O}$ sendo um operador arbitrário.

7. Considere os operadores de momento angular orbital $\hat{L}_i = \epsilon_{ijk}\hat{x}^j\hat{p}^k$.

a) Mostre que estes operadores satisfazem a álgebra $so(3)$ do grupo de rotações;

b) Mostre que na representação de posição, $|\vec{r}\rangle$, $\hat{L}_i \longrightarrow -i\hbar\epsilon_{ijk}x^j\frac{\partial}{\partial x^k}$;

c) Mostre que em coordenadas esféricas

$$L_x = i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \tag{0.10}$$

$$L_y = i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \tag{0.11}$$

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{0.12}$$

$$L^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \tag{0.13}$$

d) Considere as autofunções $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ de L^2 e L_z com autovalores $l(l+1)\hbar^2$ e $m\hbar$, respectivamente. Mostre que para que $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ seja uma função univalorada de φ deve-se ter $m \in \mathcal{Z}$.