Segunda Avaliação-Quântica I

Aluno:

Entrega: 30/07/2025

1. Considere a Hamiltoniana de uma partícula movendo-se no plano na presença de um campo magnético uniforme perpendicular ao plano:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} + e\vec{A}(\hat{\vec{r}})\right)^2, \tag{0.1}$$

com $\hat{\vec{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y)$ e $\vec{A}(\hat{\vec{r}})$ é o potencial vetor que fornece o campo magnético $\vec{B}(\hat{\vec{r}}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\hat{\vec{r}})$. Considere uma escolha de calibre tal que $\vec{A}(\hat{\vec{r}}) = -\frac{1}{2}\hat{\vec{r}} \times \vec{B}$, com $\vec{B} = B\hat{k}$.

a) Escreva a Hamiltoniana (0.1) na forma

$$\hat{H} = \hat{H}_{xy} + \omega \hat{L}_z, \tag{0.2}$$

com

$$\hat{H}_{xy} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2), \tag{0.3}$$

$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ e $\omega = \frac{eB}{2m}$.

b) Defina

$$\hat{a}_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_x\right), \qquad \hat{a}_x^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}_x\right) \tag{0.4}$$

$$\hat{a}_y = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{y} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_y\right), \qquad \hat{a}_y^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{y} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}_y\right) \tag{0.5}$$

e mostre que os únicos comutadores não nulos são $[\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger] = [\hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger] = 1$ e reescreva (0.3) e $\hat{L}_z$ em termos desses operadores, mostrando que

$$\hat{H}_{xy} = \hbar\omega\left(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y + 1\right) \tag{0.6}$$

e

$$\hat{L}_z = i\hbar\left(\hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y\right). \tag{0.7}$$

c) Defina

$$\hat{a}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_x - i\hat{a}_y\right), \qquad \hat{a}_R^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_x^\dagger + i\hat{a}_y^\dagger\right) \tag{0.8}$$

$$\hat{a}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_x + i\hat{a}_y\right), \qquad \hat{a}_L^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_x^\dagger - i\hat{a}_y^\dagger\right) \tag{0.9}$$

e mostre que os únicos comutadores não nulos são $[\hat{a}_R, \hat{a}_R^\dagger] = [\hat{a}_L, \hat{a}_L^\dagger] = 1$. Além disso, mostre que $[\hat{n}_R, \hat{a}_R] = -\hat{a}_R$, $[\hat{n}_R, \hat{a}_R^\dagger] = \hat{a}_R^\dagger$, $[\hat{n}_L, \hat{a}_L] = -\hat{a}_L$, $[\hat{n}_L, \hat{a}_L^\dagger] = \hat{a}_L^\dagger$, $[\hat{n}_R, \hat{n}_L] = 0$.

d) Como $[\hat{n}_R, \hat{n}_L] = 0$, é possível construir autoestados simultâneos de $\hat{n}_R$ e $\hat{n}_L$. Determine uma base de autoestados simultâeos $|n_R, n_L\rangle$, ou seja, $\hat{n}_R|n_R, n_L\rangle = n_R|n_R, n_L\rangle$, $\hat{n}_L|n_R, n_L\rangle = n_L|n_R, n_L\rangle$, e mostre que $n_R, n_L = 0, 1, 2, \ldots$.

e) Reescreva (0.6) e (0.7) em termos dos operaores definidos em (0.8) e (0.9) e mostre que

$$\hat{H}_{xy} = \hbar\omega \left(\hat{a}_R^\dagger \hat{a}_R + \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_L + 1 \right) \tag{0.10}$$

e $\hat{L}_z = i\hbar \left(\hat{a}_R^\dagger \hat{a}_R - \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_L \right)$, de modo que

$$\hat{H} = \hbar\omega_B \left(\hat{a}_R^\dagger \hat{a}_R + 1 \right), \tag{0.11}$$

com $\omega_B = \frac{eB}{m}$.

f) Mostre que $|n_R, n_L\rangle$ são autoestados de $\hat{H}$ e obtenha seu espectro. O que você pode dizer sobre a degenerescência dos níveis de energia?

g) Escrevendo $\hat{a}_R$ na representação de coordenada, obtenha a função de onda do estado fundamental, que satisfaz $\hat{a}_R \psi_{GS}(z, \bar{z}) = 0$, com $z = x - iy$, $\bar{z} = x + iy$.

h) Mostre que $\psi_{GS}^{(m)}(z, \bar{z}) = \langle z, \bar{z}|n_R = 0, n_L = m\rangle \sim \left(\frac{z}{l_B}\right)^m e^{-|z|^2/4l_B^2}$, com $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$.