Segunda Lista de Exercícios-Quântica I

1. Mostre

   a) $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\hat{D}] = [\hat{A},\hat{C}]\hat{D}\hat{B} + \hat{C}[\hat{A},\hat{D}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{B},\hat{C}]\hat{D} + \hat{A}\hat{C}[\hat{B},\hat{D}]$.

   b) $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = \{\hat{A},\hat{C}\}\hat{B} - \hat{B}\{\hat{A},\hat{C}\}$,

   com $\{\hat{A},\hat{C}\} = \hat{A}\hat{C} + \hat{C}\hat{A}$.

2. Grupo de Rotações

   Considere o conjunto de transformações em $3D$ que deixam os produtos escalares $\vec{u}\cdot\vec{v}$ invariantes, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{3} u_i' v_i' = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i, \tag{0.1}$$

   onde $u_i' = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} u_j$ e R são matrizes 3×3.

   a) Mostre que as matrizes R são ortogonais, ou seja, satisfazem $R^T = R^{-1}$.

   b) Considere o conjunto de todas as matrizes ortogonais 3×3. Mostre que esse conjunto forma um grupo. Esse grupo é chamado de $O(3)$.

   c) Mostre que as matrizes de $O(3)$ satisfazem $\det(R) = \pm 1$ e que o subconjunto associado a $\det(R) = 1$ forma um subgrupo de $O(3)$. Esse subgrupo é chamado de $SO(3)$ e corresponde às rotações contínuas (aquelas que podem ser continuamente deformadas na matriz identidade). Quantos parâmetros independentes possui $SO(3)$?

   d) Mostre que rotações em torno dos eixos x_1, x_2 e x_3 por ângulos ω_1, ω_2 e ω_3, são dadas respectivamente por

$$R(\omega_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega_1) & \sin(\omega_1) \\ 0 & -\sin(\omega_1) & \cos(\omega_1) \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

$$R(\omega_2) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_2) & 0 & -\sin(\omega_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\omega_2) & 0 & \cos(\omega_2) \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

$$R(\omega_3) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_3) & \sin(\omega_3) & 0 \\ -\sin(\omega_3) & \cos(\omega_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.4}$$

e) Considere ω_1, ω_2 e ω_3, ângulos infinitesimais e obtenha a forma das matrizes do item anterior numa expansão em primeira ordem nesses ângulos e que, nesse caso, $R(\omega_1)R(\omega_2)R(\omega_3) = R(\vec{\omega})$ com

$$R(\vec{\omega}) = \mathbb{1} - i\sum_{i=1}^{3}\omega_i L_i = \mathbb{1} - i\omega\hat{n}\cdot\vec{L}, \tag{0.5}$$

com $\vec{\omega} = \omega_1\hat{\mathbf{i}} + \omega_2\hat{\mathbf{j}} + \omega_3\hat{\mathbf{k}} = \omega\hat{n}$, $\omega = |\vec{\omega}|$ e $\hat{n}$ é o eixo em torno do qual se faz uma rotação de ângulo ω. Além disso, mostre que

$$L_1 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.6}$$

$$L_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.7}$$

$$L_3 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{0.8}$$

f) Mostre que os elementos de matriz dos L_i's podem ser escritos compactamente por $(L_i)_{jk} = i\epsilon_{ijk}$ e que

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k. \tag{0.9}$$

g) Mostre que $R(\vec{\omega}) = e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{L}}$ e obtenha as matrizes de rotação do item d) a partir dessa expressão.

h) Considere o conjunto de matrizes complexas 2×2 que deixa o produto interno em $2D$ invariante, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{2} u_i^{*\prime} v_i' = \sum_{i=1}^{2} u_i^* v_i, \tag{0.10}$$

onde $u_i' = \sum_{j=1}^{2} U_{ij}u_j$ e U são matrizes 2×2. Mostre que as matrizes U satisfazem $U^\dagger = U$ e que formam um grupo. Esse grupo é chamado $U(2)$. Mostre que $\det(U) = \pm 1$ e que o subconjunto que satisfaz $\det(U) = 1$ forma um subgrupo de $U(2)$. Esse subgrupo é chamado $SU(2)$.

i) Mostre que as matrizes de $SU(2)$ possuem 3 parâmetros independentes. Represente uma matriz de $SU(2)$ por $U = e^{-iG}$. Mostre que $G^\dagger = G$.

j) Mostre que o conjunto

$$\frac{\sigma_1}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.11}$$

$$\frac{\sigma_2}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{0.12}$$

$$\frac{\sigma_3}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{0.13}$$

forma uma base para o espaço vetorial de matrizes hermitianas 2×2 e que, portanto, $U(\vec{\omega}) = e^{-i\vec{\omega}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}$.

l) Mostre que

$$[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}] = i\epsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}. \tag{0.14}$$

Comparando essas relações com (0.9) vemos que localmente $SO(3) \sim SU(2)$.

3. O operador momento linear $\hat{p}$ é um observável e, portanto, $\hat{p}\dagger = \hat{p}$. Na representação no espaço de coordenadas $\hat{p} \to -i\hbar\frac{d}{dx}$. Mostre explicitamente que $-i\hbar\frac{d}{dx}$ é hermitiano.