

Projeto de Pesquisa

Ordem Topológica Fractônica em Modelos Exatamente Solúveis e Teorias Efetivas

Profa. Dra. Paula Fernanda Bienzobas

Professora Adjunto C

Departamento de Física

Universidade Estadual de Londrina

Chamada CNPq Nº 09/2023 - Bolsas de Produtividade em
Pesquisa - PQ

Londrina - PR

2023

I. ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Em linhas gerais, descrevo aqui as principais atividades científicas desenvolvidas nos últimos anos, correspondendo essencialmente ao tempo em que estou como professora efetiva junto ao Dep. de Física da Universidade Estadual de Londrina, UEL, e membro do Programa de Pós-Graduação em Física. No momento sou orientadora de estudantes de mestrado e doutorado em diferentes projetos de pesquisa. Sou coordenadora do projeto intitulado “*Simetrias e dualidades em matéria condensada e teoria de campos*” e colaboradora do projeto “*Teorias efetivas para fases exóticas da matéria*”, ambos vinculados a UEL. Assim, minha pesquisa se encontra na confluência entre os domínios da matéria condensada e da teoria quântica de campos, abrangendo duas linhas centrais: Transições de fases quânticas e sistemas com ordenamentos topológicos, bem com suas respectivas teorias efetivas.

No que segue, destacamos alguns trabalhos que refletem precisamente esse caráter de interação entre as duas áreas de pesquisa. O primeiro deles trata-se de um estudo detalhado de quebra espontânea de simetria e fases frustradas em um modelo de rede com interações competitivas. Esse artigo envolveu meu estudante de doutorado Heitor C. Cinel e mais dois colaboradores, publicado como sugestão do editor na *Physical Review E* [1]. Outras duas publicações que gostaria de mencionar envolvem o estudo sobre transições de fase e fenômenos críticos no modelo esférico quântico. No caso da versão com simetria local, eu e o professor Dr. Pedro Gomes mostramos que o modelo exibe transições de fases clássica e quântica não triviais [2]. Já o estudo da versão com interações de curto alcance conta com a colaboração de mais dois estudantes de doutorado da época (um orientado e outro co-orientado por mim) e o Dr. Gabriel Landi, hoje professor na Universidade de Rochester [3].

Um outro trabalho que é interessante destacar, refere-se ao estudo do modelo de Maier-Saupe na presença de interações competitivas, desenvolvido em colaboração do professor Anders. W. Sandvik, da Universidade de Boston, e sua estudante de doutorado [4].

Licenças Maternidades

21/10/2021 a 18/04/2022 - 180 dias

09/05/2019 a 04/11/2019 - 180 dias

Informações adicionais -

II. RESUMO

O estudo de fases topológicas da matéria constitui uma das áreas de pesquisa mais efervescentes dos últimos anos. Entre as principais razões para esse grande interesse destacamos as suas propriedades físicas impressionantes, as potencialidades em aplicações tecnológicas e a complexidade de suas descrições teóricas, combinando de maneira profunda aspectos de mecânica quântica, topologia e teoria quântica de campos. Assim, este projeto de pesquisa é direcionado à exploração teórica de estados exóticos da matéria, em particular as fases fractônicas. Além das marcantes propriedades físicas resultantes do seu ordenamento topológico, esses estados exibem atributos ainda mais fascinantes, como a presença de excitações com restrições severas de mobilidade (dando origem a fractons do tipo I e fractons do tipo II) e mistura infravermelho/ultravioleta.

III. INTRODUÇÃO

Uma das características mais importantes dos sistemas de matéria condensada é que, em geral, eles exibem transições de fase. De uma maneira geral, podemos dividir as transições de fase em duas classes: i) transições de fase que separam estados com simetrias diferentes; e ii) transições entre fases que não são caracterizadas por simetria.

O mecanismo básico subjacente às transições do primeiro tipo é a quebra espontânea de alguma simetria global e são amplamente estudadas em física da matéria condensada e teoria de campos. Um sistema físico apresenta uma quebra espontânea de simetria quando seu estado fundamental não exibe as simetrias das equações fundamentais (por exemplo, a Lagrangiana, a energia livre ou eq. de movimento). A teoria fenomenológica de Landau [5] para transições de fase de segunda ordem, incorpora de maneira bastante natural esse mecanismo de quebra de simetria e pode ser empregado na descrição de uma série de sistemas físicos. O ponto crucial é a identificação de um parâmetro de ordem adequado, $\Phi(x)$, que reflete as simetrias presentes.

Consideremos agora o caso de fases da matéria que se enquadram no segundo tipo, denominadas genericamente como fases topológicas ou fases exóticas da matéria [6, 7]. O

estudo dessas fases se desenvolveu a partir da descoberta do efeito Hall quântico fracionário [8-10], despertando um grande interesse da comunidade científica [7, 11, 12]. O efeito Hall consiste de um conjunto de elétrons se movendo em um plano na presença de um campo magnético perpendicular. Enquanto os elétrons tentam descrever órbitas circulares, eles estão sujeitos a uma forte repulsão coulombiana e suas órbitas devem ser compatíveis com o princípio de exclusão de Pauli. Essa combinação de ingredientes gera padrões altamente organizados cujo resultado é uma série de fenômenos impressionantes, como a estrutura de platôs da resistividade elétrica e as excitações com estatística e carga fracionárias [9].

Atualmente um dos principais interesses na área de física da matéria condensada tem sido descrever as fases topológicas que se referem a estados quânticos altamente emaranhados que não são descritos por argumentos de simetria [11]. Isso porque alguns sistemas físicos apresentam diferentes fases com a mesma simetria próximo ao zero absoluto e é necessário introduzir aspectos topológicos para classificar essas fases. A classificação é baseada em propriedades universais, como a degenerescência do estado fundamental, presença de estados de borda, carga e estatística fracionárias, todas baseadas em noções topológicas, as quais são robustas contra pequenas perturbações do sistema.

Outros exemplos paradigmáticos de fases topológicas são as fases não abelianas [13-15], os líquidos quânticos de spins [16] e o efeito Hall [17]. O alto grau de emaranhamento dessas fases conduz a propriedades físicas não triviais que os tornam extremamente surpreendentes e tem impulsionado diferentes áreas da física. De interesse especial nesse contexto são os isolantes topológicos [18, 19]. Eles representam um novo estado na matéria caracterizados por um bulk com um gap de energia, e contendo estados de borda condutores (sem gap) protegidos pela simetria de reversão temporal. Isso é possível devido a uma combinação de acoplamentos spin-órbita e a invariância por reversão temporal.

Ao descrever a performance de computadores quânticos a partir de anyons, Kitaev apresentou um exemplo ilustrativo de sistemas quânticos emaranhados [20, 21], no qual os anyons podem surgir de um Hamiltoniano com interações locais, tornando-se também um excelente protótipo para a descrição de fases topológicas. Denominado de *Toric Code* o modelo originalmente proposto em duas dimensões admite um espaço de Hilbert bidimensional

em cada ligação de uma rede quadrada [16, 20] e é definido pelo Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_{TC} = -J_e \sum_s A_s - J_m \sum_p B_p, \quad (1)$$

em que J_e e J_m são interações positivas e as somas são realizadas sobre todos os operadores de estrelas e plaquetes da rede, Fig. (1). O operador de estrela,

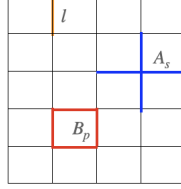


FIG. 1: Representação de um operador estrela, A_s , e plaquete, B_p , em uma rede bidimensional. Em cada link l há duas matrizes de Pauli, σ^x and σ^z .

$$A_s = \prod_{l \in s} \sigma_l^x, \quad (2)$$

é o produto das matrizes de Pauli σ^x que estão nos quatro links conectados ao sítio s e o operador de plaquete,

$$B_p = \prod_{l \in p} \sigma_l^z, \quad (3)$$

é o produto de quatro matrizes de Pauli σ^z localizadas nos links que definem o plaquete. É importante notar que todos os operadores comutam entre si,

$$[A_s, A_{s'}] = [B_p, B_{p'}] = [A_s, B_p] = 0, \quad (4)$$

independente do sítio e plaquete.

Como as interações J_e e J_m são positivas o estado fundamental do *Toric Code* é caracterizado pelos autovalores positivos dos operadores A_s e B_p , de acordo com a Eq. (1). Admitindo condições periódicas de contorno, o modelo é definido em um torus de *genus* 1 e nesse caso o estado fundamental é quatro vezes degenerado. Essa degenerescência pode ser observada a partir dos dois caminhos não contráteis ao longo do torus. Esse modelo é exatamente solúvel e pode ser pensando como a fase topológica do modelo com simetria \mathbb{Z}_2

na presença de interações tipo estrela.

Outro modelo exatamente solúvel em duas dimensões que exhibe ordenamento topológico foi proposto por Wen (WP) [22], no qual os graus de liberdade localizam-se nos sítios e não mais nos links como no *Toric Code*. O hamiltoniano também é escrito em termos de operadores de plaquetas que comutam e levam a um sistema topologicamente ordenado com um *gap* de energia. Em particular, nesse modelo a física de baixa energia depende explicitamente do número de sítios ao longo de cada direção. No caso de um número par nas duas direções há uma equivalência entre o WP e o *Toric Code*, o que deixa de ser válido no caso de uma rede $\text{par} \times \text{ímpar}$ ou $\text{ímpar} \times \text{ímpar}$.

Além do *Toric Code* e do modelo WP vários outros modelos de spins bidimensionais exibem ordenamento topológico que são descritos por uma classe de anyons [23–27]. Porém, uma nova classe de fases topológicas da matéria em 3+1D, denominada fractons, tem sido alvo de intenso estudo devido às suas propriedades ainda mais intrigantes [28–30]. Essas fases exibem excitações de quasipartículas que, contrariamente ao *Toric Code*, apresentam mobilidade reduzida (tipo I) ou mesmo são completamente imóveis (tipo II). Além disso, em geral tais sistemas exibem degenerescência do estado fundamental que depende não apenas da topologia mas também da geometria, no sentido que ela envolve detalhes da rede.

IV. OBJETIVOS E METAS

Fases fractônicas da matéria são aquelas em que uma excitação isolada não é capaz de se mover. Tais fases apresentam propriedades peculiares, como a degenerescência do estado fundamental que está associada a topologia e geometria do sistema.

O modelo proposto por Chamon [31, 32] é considerado o primeiro modelo fractônico introduzido na literatura e foi proposto como uma generalização do modelo do Wen [22] na tentativa de estudar vidros de spins quânticos, que são sistemas fortemente correlacionados. De fato, muitos estados quânticos apresentam um alto grau de emaranhamento entre todos os spins do sistema e isso significa que não se pode realizar uma medição local no sistema sem afetar todos os outros spins. O emaranhamento severo dos estados quânticos é o ingrediente essencial para o surgimento de propriedades exóticas, como quasipartículas aniônicas e estados robustos com *gap* de energia.

Dentro do contexto descrito acima, descrevo as principais linhas de investigação deste projeto com os respectivos objetivos e metas:

- **Modelos de rede com simetrias fractônicas:** Nosso objetivo é investigar as fases fractônicas a partir de modelos exatamente solúveis em $3+1D$, com ênfase na degenerescência dos estados fundamentais, assim como as teorias efetivas em baixas energias que descrevem tais sistemas. Para tal, destacamos um modelo híbrido de vidros de spins quânticos [35], o modelo do Haah [33] e o modelo X-Cube [34]. Em particular, já obtivemos resultados promissores da degenerescência do estado fundamental do modelo [35]. Tal degenerescência é altamente intrigante e muda drasticamente com o tamanho da rede. Estamos no momento trabalhando em uma teoria efetiva que capture pelo menos alguns comportamentos físicos desse sistema. Em seguida nossa meta é expandir toda a análise da degenerescência para o X-Cube e o modelo do Haah. Todo trabalho já desenvolvido conta com a colaboração do meu estudante de doutorado, Heitor Casasola Cinel, e um aluno de doutorado, Guilherme Delfino, do professor Claudio Chamon da Universidade de Boston.

- **Construção de camadas:** Os modelos bidimensionais, como o *Toric Code* e o modelo do Wen, são interessantes pois eles podem ser pensados como blocos fundamentais dos fractons, no sentido que eles podem ser usados para construir sistemas fractônicos em três dimensões espaciais a partir da construção de camadas, ou seja, a partir de um “empilhamento” de teorias bidimensionais. Essa abordagem é interessante pois ela torna manifesta certas propriedades dos fractons, como as conservações em subespaços (planos) e a degenerescência do estado fundamental. Essa estratégia foi usada com sucesso para obter o modelo X-cube a partir de um conjunto “empilhado” de modelos *Toric Code* [36]. Essa construção de camadas tem sido usada também diretamente a partir do empilhamento de teorias efetivas do tipo Chern-Simons (multi-componentes) [37]. Acreditamos que essa construção pode ser generalizada para outros modelos de rede. Eu e meu estudante de mestrado João Lucas Arguello já estamos trabalhando nisso.

- **Relação entre teorias do tipo Chern-Simons e teorias do tipo higher-rank e generalizações:** A proposta aqui é efetuar uma investigação extensiva de teorias de campos efetivas com características fractônicas. Há dois tipos de teorias efetivas, as teorias do tipo Chern-Simons, que estão diretamente conectadas com certos modelos de rede, e as teorias de calibre higher-rank [38, 39], que seguem a partir de considerações gerais de simetrias (conservação de momentos de ordens mais altas). No entanto, ainda não é claro as eventuais

conexões entre esses dois tipos de teorias. Nesse sentido, buscamos uma identificação dos elementos em comum, o que certamente aprofundaria o entendimento de teorias fractônicas. Além disso, outro aspecto que não é claro é até que ponto teorias efetivas para fractons podem ser generalizadas. Este é um aspecto no qual tenho estado engajada em uma parceria com o Dr. Carlos Hernaski, um membro do corpo docente do nosso Programa de Pós-Graduação. Nosso intuito é envolver a minha aluna de mestrado, Rieli Gomes, nesse projeto.

V. RESULTADOS ESPERADOS

A sequência dos problemas delineados não está rigidamente ligada à ordem de abordagem. A estratégia é prosseguir com os problemas atualmente em execução, os quais devem ser finalizados em um período relativamente breve. A previsão é que, em menos de dois meses, obteremos resultados significativos referentes à teoria efetiva do modelo [35]. Com os resultados já obtidos em relação à degeneração do estado fundamental, completaremos o artigo atualmente na fase final de preparação para submissão.

Paralelamente, iniciaremos o estudo da degenerescência do estado fundamental do modelo do Haah. Esperamos que, com os resultados que nós já obtivemos para o modelo do Chamon, será possível fazer uma generalização e obter de forma explícita essa degenerescência. No modelo do Haah, assim como no modelo X-Cube, a degenerescência do estado fundamental ainda é um problema aberto e desperta muito interesse da comunidade científica, visto que ela também não escala com o tamanho do sistema ($2^{L^{(D-2)}}$, sendo L o tamanho da rede e D a dimensão).

Estudar a degenerescência dos estados fundamentais e teorias efetivas de modelos de rede que exibem fases fractônicas é uma empreitada extensa. No entanto, temos a expectativa de que, ao final, possamos concluir de maneira satisfatória. Durante esse processo, é esperado o surgimento de novas idéias científicas, sobretudo em relação a novos modelos de rede que possam abranger propriedades fractais, contribuindo assim para a descrição de novos materiais e aprimorando a eficácia de computadores quânticos.

VI. RELEVÂNCIA CIENTÍFICA E IMPACTO DO PROJETO PARA O DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO

Este projeto de pesquisa em física teórica é predominantemente fundamentado em abordagens analíticas, abrangendo uma variedade de elementos de matéria condensada e teoria quântica de campos. As propostas apresentadas se concentram na investigação de teorias efetivas e estados exóticos da matéria, os quais despertam um profundo interesse. Além de suas aplicações na esfera da computação quântica, conforme demonstrado por Kitaev, tais estudos englobam aspectos fundamentais que descrevem novos materiais. Dessa forma, essas propostas contribuem para múltiplos setores tecnológicos.

Mesmo diante dos impressionantes avanços recentes, a degenerescência do estado fundamental de fases exóticas e suas teorias efetivas mantêm-se como um domínio de exploração. Nosso grupo, em estreita parceria com o professor Claudio Chamon (um dos pioneiros nesse campo) e seu doutorando Guilherme Delfino, tem se envolvido de maneira proeminente nessas investigações. Dado que esta é uma área pouco explorada Brasil, temos a convicção de que nossa proposta é altamente oportuna e está perfeitamente alinhada com as diretrizes de financiamento do CNPq. Ela respalda iniciativas de notável interesse científico, com ampla projeção internacional e fundamentadas em questões fundamentais.

VII. FORMAÇÃO DE RECURSOS HUMANOS

Participo ativamente na formação de recursos humanos, orientando estudantes de graduação e pós-graduação. Minhas publicações mais recentes refletem a contribuição de alunos vinculados ao nosso programa de pós-graduação, promovendo, dessa forma, o progresso de jovens pesquisadores. Adicionalmente, nosso grupo estabeleceu uma colaboração internacional, facilitando assim o intercâmbio e a interação com outros grupos de pesquisa da área.

A. Orientações em Andamento

1. Mestrado

- João Lucas Arguello de Oliveira, *Ordenamento topológico fractônico em modelos exatamente solúveis* (2023). Bolsista CAPES. (Orientadora).
- Rieli Tainá Gomes dos Santos, *Teorias efetivas e supersimetria em fases topológicas da matéria* (2023). Bolsista CAPES. (Co-orientadora).

2. Doutorado

- Heitor Casasola Cinel, *Simetrias e Dualidades em Matéria Condensada e Teoria de Campos* (2020). Bolsista CNPQ. (Orientadora).

Publicação: [\[1\]](#) Artigo publicado como Sugestão do Editor.

Mediante uma bolsa de doutorado sanduíche concedida pela CAPES, o estudante Heitor C. Cinel teve a oportunidade de integrar o grupo orientado pelo professor Claudio Chamon na Universidade de Boston. Durante essa estada, para além de empenhar-se intensamente no estudo de quebra espontânea de simetrias fractais em subsistemas no modelo de rede proposto por Chamon [\[35\]](#), ele trabalhou na formulação de uma descrição que estabelece uma relação entre ordenamento topológico em D dimensões e a proteção de simetria topológica, SPT, em $(D - 1)$ dimensões. Recentemente, o Heitor regressou ao Brasil e a colaboração na pesquisa persiste de modo remoto, ampliando ainda mais os vínculos da nossa parceria.

B. Orientações Concluídas

1. Iniciação Científica

- Amanda Maria Fonseca, *Uma introdução à mecânica estatística de equilíbrio* (2019).
- Lucas Hataishi, *Modelo de Ising em uma e duas dimensões* (2017).

2. Trabalho de Conclusão de Curso

- Heitor Casasola Cinel, *Dualidades e Simetrias do Modelo de Ising* (2017).

3. Iniciação Científica e Trabalho de Conclusão de Curso

- Amanda Maria Fonseca, *Transições de fase com quebra espontânea de simetria e transições topológicas* (2021).
- Camila Aparecida Antunes, *Transições de fase e fenômenos críticos* (2019).

4. Mestrado

- Lucas Queiroz Silveira, *Generalized Symmetries and Their Anomalies*, (2023). Bolsista CAPES. (Orientadora).
- Heitor Casaçola Cinel. *Transições de fase e invariância de calibre em modelos estatísticos*, (2020). Bolsista CAPES. (Orientadora).
- Eduardo Jose Barroso, *Aspectos de simetria em teorias de calibre na rede* (2018). Bolsista CAPES. (Orientadora).

5. Doutorado

- Lucas Gabriel dos Santos, *Formulações de Mecânica Estatística e Teoria de Campos* (2021). Bolsista Fundação Araucária de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico. (Orientadora).

Publicações: [\[3\]](#), [\[40\]](#)

- Ladislau Vieira Teixeira Tavares, *Modelo Esférico Supersimétrico com Interações de Curto Alcance* (2021). Bolsista Fundação Araucária de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico. (Co-Orientadora).

Publicação: [3, 40]

Os trabalhos [3, 40] foram apresentados em um evento internacional da área. International Conference on Statistical Mechanics - StatPhys27 (2019).

Agradeço aqui ao CNPQ por promover a equidade entre gêneros.

-
- [1] Casasola, Heitor; Hernaski, Carlos A.; Gomes, Pedro R. S. ; Bienzobaz, Paula F., *Spontaneous symmetry breaking and frustrated phases*, Phys. Rev. E, v. 104 (2021).
 - [2] Gomes, Pedro R. S.; Bienzobaz, P. F., *Quantum spherical spins with local symmetry*, Phys. Rev. E, v. 91, p. 022122 (2015).
 - [3] Tavares, L. V. T ; Dos Santos, L. G. ; Landi, G. T. ; Gomes, Pedro R. S. ; Bienzobaz, P. F., *Supersymmetric quantum spherical spins with short-range interactions*, Journal of Statistical Mechanics-Theory and Experiment, v. 2020, p. 023104 (2020).
 - [4] Bienzobaz, P. F; Na Xu; Anders W. Sandvik, *Modulated phases in a three-dimensional Maier-Saupe model with competing interactions*, Phys. Rev. E, v. 96, p. 012137 (2017).
 - [5] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Mechanics*, Pergamon Press, London (1958).
 - [6] X. G. Wen, *Topological orders and edge excitations in fractional quantum Hall states*, Advances in Physics, 44, 405 (1995).
 - [7] E. Witten, *Three Lectures On Topological Phases Of Matter*, La Rivista del Nuovo Cimento, 39, 313-370 (2016).
 - [8] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard, *Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit*, Phys. Rev. Lett., 48, 1559 (1982).
 - [9] R. B. Laughlin, *Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations*, Phys. Rev. Lett., 50, 1395 (1983).
 - [10] D. Tong, *The Quantum Hall Effect*, arXiv:1606.06687v2 (2016).
 - [11] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, *Quantized Hall Conductance*

- in a Two-Dimensional Periodic Potential*, Phys. Rev. Lett., 49, 405 (1982).
- [12] X. G. Wen, Topological orders and edge excitations in fractional quantum Hall states, *Advances in Physics*, 44, 405 (1995).
 - [13] Gregory Moore and Nicholas Read, *Nonabelions in the fractional quantum hall effect*, Nuclear Physics B, 360 (2-3): 362-396 (1991).
 - [14] Chetan Nayak, Steven H. Simon, Ady Stern, Michael Freedman, and Sankar Das Sarna, *Non-abelian anyons and topological quantum computation*, Rev. Mod. Phys., 80 (3):1083 (2008).
 - [15] Ady Stern, *Non-abelian states os matter*, Nature, 464 (7286):187-193 (2010).
 - [16] Lucile Savary and Leon Balents, *Quantum spin liquids: a review*, Rep. Prog. Phys., 80, 016502 (2017).
 - [17] Robert Karplus and J. M. Luttinger, *Hall Effect in Ferromagnetics*, Phys. Rev., 95, 1154 (1954).
 - [18] M. Z. Hasan, C. L. Kane, *Topological Insulators*, Rev. Mod. Phys., 82 3045, (2010).
 - [19] Y. Ando, *Topological Insulator Materials*, J. Phys. Soc. Jpn., 82, 102001 (2013).
 - [20] A. Y. Kitaev, *Fault-tolerant quantum computation by anyons*, Ann. Phys., 303:2 (2003).
 - [21] Alexei Kitaev and Chris Laumann, *Topological phases and quantum computation*, arXiv: 0904.2771 (2009).
 - [22] X. G. Wen, *Quantum orders in an exact soluble model*, Phys. Rev. Lett., 90, 016803 (2003).
 - [23] A. Ioselevich, D. A. Ivanov, and M. V. Feigelman, *Ground-state properties of the Rokhsar-Kivelson dimer model on the triangular lattice*, Phys. Rev. B, 66(17):174405 (2002).
 - [24] M. A. Levin and X.-G. Wen, *String-net condensation: A physical mechanism for topological phases*, Phys. Rev. B, 71(4):045110 (2005).
 - [25] P. Fendley and E. Fradkin, *Realizing non-Abelian statistics in time-reversal-invariant systems*, Phys. Rev. B, 72(2):024412 (2005).
 - [26] A. Kitaev, *Anyons in an exactly solved model and beyond*, Ann. Phys., 321:2 (2006).
 - [27] H. Bombin and M. A. Martin-Delgado, *Topological quantum distillation*, Phys. Rev. Lett., 97(18):180501 (2006).
 - [28] R. M. Nandkishore and M. Hermele, *Fractons*, Annual Review of Condensed Matter Physics, 10, 295 (2019).
 - [29] M. Pretko, X. Chen, and Y. You, *Fracton Phases of Matter*, Int. J. Mod. Phys. A 35, 6, 2030003 (2020).

- [30] W. Shirley, K. Slagle, X. Chen, *Twisted foliated fracton phases*, Phys. Rev. B 102, 115103 (2020).
- [31] Claudio Chamon, *Quantum Glassiness in Strongly Correlated Clean Systems: An Example of Topological Overprotection*, Phys. Rev. Lett., 94, 040402 (2005).
- [32] Sergey Bravyi, Bernhard Leemhuis, and Barbara M. Terhal, *Topological order in an exactly solvable 3D spin model*, Ann. Phys., Vol. 326:4, page 839 (2011).
- [33] Jeongwan Haah, *Local stabilizer codes in three dimensions without string logical operators*, Phys. Rev. A , 83.042330 (2011).
- [34] Sagar Vijay, Jeongwan Haah, and Liang Fu, *A new kind of topological quantum order: A dimensional hierarchy of quasiparticles built from stationary excitations*, Phys. Rev. B 92.23 (2015).
- [35] Claudio Castelnovo and Claudio Chamon, *Topological quantum glassiness*, Philosophical Magazine 92.1-3, pp. 304–323, (2012).
- [36] H. Ma, E. Lake, X. Chen, and M. Hermele, *Fracton topological order via coupled layers*, Phys. Rev. B 95, 245126 (2017).
- [37] W. Shirley, K. Slagle, X. Chen, *Twisted foliated fracton phases*, Phys. Rev. B 102, 115103 (2020).
- [38] M. Pretko, *The Fracton Gauge Principle*, Phys. Rev. B 98, 115134 (2018).
- [39] D. Bulmash and M. Barkeshli, *Generalized $U(1)$ Gauge Field Theories and Fractal Dynamics*, arXiv:1806.01855 (2018).
- [40] Dos Santos, L. G., Tavares, L. V. T., Bienzobaz, P. F., Gomes, Pedro R. S., *Supersymmetric quantum spherical spins*, Journal of Statistical Mechanics-Theory and Experiment, v. 2018, p. 123104 (2018).